IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.003/02

Ok

GRAVITAÇÃO E A SIMETRIA LOCAL DO ESPAÇO–TEMPO

Marcos Calçada

Orientador

José Geraldo Pereira

Fevereiro de 2002

À memória de minha mãe.

Agradecimentos

É com grande satisfação que aproveito este espaço para agradecer às pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização desta tese. Entre elas, gostaria de destacar:

O prof. José Geraldo Pereira pelo seu paciente e dedicado trabalho de orientação.

Minha família que apesar de toda a dor pela nossa grande perda ainda foi capaz de se manter unida.

A Lia pelo seu amor e a sua família por me dar uma segunda casa.

A Marina pela forma carinhosa com que sempre me tratou e por ter tido a "coragem" de ser nossa fiadora.

Todos os amigos que fiz aqui no IFT e com os quais passei tantas horas agradáveis.

Os professores e funcionários do IFT pelo ambiente acadêmico e todas as facilidades oferecidas.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro e pelo incentivo dado ao desenvolvimento da Física Teórica em nosso país.

Resumo

Apesar de toda a glória e beleza atribuídas à teoria da gravitação de Einstein, ainda pairam diversas dúvidas sobre a exata natureza de seus fundamentos. Durante os seus quase 90 anos de existência, nunca se chegou a um consenso sobre os princípios que a fundamentam. Neste trabalho, não temos a pretensão de resolver ou esclarecer essas controvérsias históricas, mas sim, por meio da teoria matemática de fibrados, apresentar uma nova base para a teoria da gravitação. Em outras palavras, introduziremos um princípio de gauge que resulte numa formulação clara e precisa da gravitação, eliminando dessa forma os problemas conceituais existentes. Um dos resultados centrais deste trabalho afirma que o grupo de simetria local que governa a interação gravitacional é o grupo de Lorentz. Segundo o princípio de gauge correspondente, o campo fundamental da gravitação não é a métrica ou a tetrada, mas a conexão de spin, o que está em completo acordo com as outras teorias de gauge cujos campos fundamentais são conexões em fibrados. Mostramos então que a prescrição de acoplamento minimal obtida da derivada covariante de Lorentz coincide com a prescrição de acoplamento minimal da formulação tradicional da relatividade geral. Em seguida, exploramos alguns aspectos das leis de conservação da teoria sob o ponto de vista do formalismo de gauge.

Palavras Chaves: Simetrias, Teorias de Gauge, Gravitação

Áreas do conhecimento: 1.05.01.03-7, 1.05.03.01-3

Abstract

In spite of all glory and beauty attributed to the Einstein's theory of gravitation, many doubts persist about the exact nature of its foundations. After almost 90 years, we have not reached a consensus about the principles that underly Einstein's theory. In this work, we do not have the pretension of solving or clarifying that historical controversies, but, through the mathematical theory of fiber bundles, to present a new basis for the theory of gravitation. In other words, we are going to introduce a gauge principle that allows a precise and clear formulation of the gravitation, avoiding in this way the existing conceptual problems. One of the main results of this work is that the local symmetry group that rules the gravitational interaction is the Lorentz group. According to the corresponding gauge principle, the fundamental field of the gravitation is not the metric or the tetrad, but the spin connection, which is in agreement with the other gauge theories whose fundamental fields are connections in fiber bundles. We have also shown that the minimal coupling prescription obtained from the Lorentz covariant derivative coincides exactly with the usual minimal coupling prescription of general relativity. Finally, some aspects of the conservation laws under the viewpoint of the gauge formalism are analyzed.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Apesar de toda a glória atribuída à teoria da relatividade geral de Einstein, não temos, mesmo depois de seus quase 90 anos de existência, um consenso sobre a exata natureza de seus fundamentos. Embora alguns dos princípios da relatividade geral apresentados por Einstein, ou que passaram a ser atribuídos a ele, tenham tido uma aceitação quase universal, jamais permaneceram totalmente livres de críticas. Algumas vozes dissidentes chegaram a afirmar que, por exemplo, Einstein enganara-se sobre as idéias fundamentais de sua própria teoria e que os princípios básicos propostos por ele eram simplesmente incompatíveis com a sua teoria.

O que era exceção passou a ser quase unanimidade. Muitos livros-textos mais recentes sobre o assunto não fazem qualquer menção aos princípios listados por Einstein. Outros, apresentam esses princípios como idéias de importância puramente histórica na formulação da teoria. O próprio nome "relatividade geral" é hoje em dia freqüentemente evitado em favor de, por exemplo, "teoria da gravitação de Einstein".

O ponto de maior controvérsia tem sido a interpretação do princípio de relatividade dada por Einstein. A sua teoria de gravitação efetivamente estende o princípio de relatividade de movimentos inerciais para movimentos acelerados como Einstein queria? E esta extensão é obtida como conseqüência da covariância geral de suas leis? Usualmente admite-se que a teoria da relatividade especial satisfaz o princípio de relatividade de movimentos inerciais simplesmente porque ela é covariante de Lorentz: suas leis permanecem as mesmas em forma sob qualquer transformação de Lorentz das coordenadas do espaço-tempo. Já a teoria geral é covariante geral: suas leis não mudam sob uma transformação arbitrária (geral) das coordenadas do espaço-tempo. Mas esta propriedade formal permite à teoria de fato estender a relatividade de movimento para movimentos acelerados? Poucos autores duvidaram disso nas primeiras décadas da relatividade geral, mas hoje em dia, estamos bem longe da unanimidade.

Por exemplo, em 1917, Kretschmann [1] argumentou que a covariância geral não possuía conteúdo físico real e que não existia a suposta extensão do princípio de relatividade. Disse ainda que encontrar uma formulação covariante geral de uma teoria é apenas um desafio à engenhosidade do teórico. Tal premissa ganhou cada vez mais apoio à medida que foram desenvolvidos métodos matemáticos mais sofisticados. De fato, atualmente é possível dar sem maiores dificuldades formulações covariantes gerais para a relatividade especial e para a teoria de espaço-tempo newtoniana.

Para muitos, entretanto, a simples rejeição das idéias de Einstein não parecia ser a melhor saída. Empregou-se então muita energia na tentativa de encontrar maneiras de colocar em patamares distintos a covariância geral da teoria de Einstein e a covariância geral de outras teorias, como por exemplo as mencionadas acima. A mais bem-sucedida dessas tentativas é devida a Anderson [2] e é baseada na distinção entre objetos absolutos e dinâmicos. A relatividade geral satisfaz o "princípio de invariância geral" de Anderson: a teoria não emprega qualquer objeto absoluto não-trivial. Segundo Anderson, este princípio nos dá a interpretação mais precisa e correta das idéias sobre covariância geral de Einstein.

1.1 Covariância de Lorentz e a Relatividade de Movimento Inercial

A noção de covariância de uma teoria tornou-se proeminente em física depois que Einstein publicou seu célebre artigo de 1905 sobre a relatividade especial. O objetivo do artigo era restaurar o princípio de relatividade de movimento inercial na eletrodinâmica. Antes da introdução das idéias da relatividade especial, a teoria apresentava um referencial de repouso preferido, embora todos os experimentos falhassem nas tentativas de detectá-los. Tal referencial de repouso também não podia ser obtido como conseqüência observacional da eletrodinâmica. Como é bem conhecido, a solução de Einstein não foi modificar a eletrodinâmica, mas as próprias noções de espaço e tempo. Ele construiu uma teoria em que sistemas de referência inerciais eram relacionados por transformações de Lorentz. Se um referencial inercial tem coordenadas cartesianas espaciais (x, y, z) e tempo t e um segundo referencial movendo-se com velocidade v na direção x tem coordenadas espaciais (ξ, η, ζ) e coordenada temporal τ, então, sob a transformação de Lorentz,

$$\xi = \gamma(x - vt) \qquad \tau = \gamma(t - vx/c^2) \qquad \eta = y \qquad \zeta = z, \tag{1.1}$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, e c é a velocidade da luz. Até então, a teoria clássica usava a transformação de Galileu

$$\xi = x - vt \qquad \tau = t \qquad \eta = y \qquad \zeta = z. \tag{1.2}$$

Selecionando leis de transformação convenientes para o campo e outras quantidades, Einstein foi capaz de mostrar que as leis da eletrodinâmica permaneciam as mesmas sob transformações de Lorentz. Ou seja, elas eram covariantes de Lorentz. Portanto, no espaço-tempo da relatividade especial, eletrodinâmica não poderia tomar qualquer sistema de referência inercial como preferido. Qualquer referencial inercial era completamente equivalente dentro das leis da teoria. Eletrodinâmica era agora compatível com a relatividade de movimento inercial.

A lição do artigo de 1905 de Einstein era simples e clara. Para se construir uma teoria física relativística, isto é, uma teoria que satisfaz o princípio de relatividade de movimentos inerciais, é suficiente assegurar que ela possui uma propriedade formal particular: suas leis são covariantes de Lorentz. Desde então covariância de Lorentz e obediência ao princípio de relatividade de movimentos inerciais tornaram-se sinônimos.

1.2 Fundamentos da Relatividade Geral "segundo" Einstein

Durante o processo de construção da relatividade geral, e mesmo depois, Einstein fez diversos relatos sobre os fundamentos de sua teoria. No entanto, eles não eram compatíveis e por isso é impossível reunir todas as idéias de Einstein numa descrição coerente dos fundamentos da relatividade geral. Somente é viável, portanto, uma descrição histórica da evolução do pensamento de Einstein sobre o tema. Como estamos mais interessados no ponto de vista que passou a ser rotineiramente atribuído a Einstein, discutiremos apenas o que julgamos relevante para entendê-lo. A descrição histórica precisa pode ser encontrada no artigo de Norton [3].

Ao desenvolver a relatividade geral, Einstein esforçou-se para satisfazer vários requisitos. Entretanto, um único tema foi preponderante em sua pesquisa: covariância. Para Einstein a tarefa a ser cumprida era expandir a covariância da relatividade (restrita) para além da covariância de Lorentz, pois imaginava que com isso estenderia automaticamente o princípio de relatividade para movimentos acelerados. Tendo em mente o princípio de equivalência, na forma em que assegura a equivalência entre aceleração uniforme e um campo gravitacional homogêneo, parecia evidente para Einstein que uma teoria que implementasse esse princípio de relatividade generalizado seria necessariamente uma teoria de gravitação.

Durante o processo de construção de sua teoria, Einstein nem sempre considerou o requerimento de covariância geral como sendo necessário para a generalização do princípio de relatividade. Com efeito, o próprio Einstein apresentou um argumento (o argumento do buraco) que condenaria quaisquer equações de campo gravitacional covariantes gerais como fisicamente desinteressantes. Por fim, Einstein retornou à covariância geral não pela necessidade de introduzir uma generalização do princípio de relatividade, mas para resolver uma "complicação" que surgia ao se utilizar sistemas de referência acelerados em relatividade especial. Nesses referenciais, em particular referenciais em rotação, a geometria deixa de ser euclidiana e relógios atrasam de modo dependente de sua posição. Em conseqüência, não se pode definir facilmente sistemas de coordenadas no espaço-tempo através das operações familiares usando barras e relógios padrões. Além disso, Einstein nunca pretendeu que a generalização do princípio de relatividade para movimentos acelerados conduzisse necessariamente à covariância geral. Com efeito, seguindo a analogia com a covariância de Lorentz, o princípio de relatividade generalizado exigiria uma extensão da covariância da teoria que incluísse referenciais em estados de movimento arbitrários. Mas covariância geral faz muito mais do que isso pois inclui transformações que não têm nada a ver com mudanças de estados de movimento, tais como transformações entre sistemas de coordenadas espaciais cartesianas e polares. Além disso, como o próprio Einstein indicou, ele se sentiu obrigado a aceitar um grupo maior de transformações simplesmente porque não conseguiu encontrar uma maneira natural de restringir os possíveis sistemas de coordenadas do espaço-tempo.

1.3 Covariância Geral tem Significado Físico?

Como dissemos anteriormente, as primeiras críticas ao princípio de covariância geral de Einstein foram as de Kretschmann. Basicamente, o que ele dizia era que devia haver algo a mais para um princípio de relatividade que mera covariância geral, pois ele argumentava que podemos tomar qualquer teoria e reformulá-la de modo covariante sob qualquer grupo de transformações escolhido: o problema não é físico, mas meramente um desafio a nossa engenhosidade matemática. Em poucas palavras, covariância geral não tem significado físico.

Einstein teve pouca escolha e acabou por aceitar o ponto de Kretschmann. No entanto, ele tentou salvar alguma coisa da conexão especial entre covariância geral e relatividade geral na heurística da teoria. Para Einstein, de dois sistemas teóricos compatíveis com a experiência, aquele que deve ser preferido é o que for mais simples e transparente sob o ponto de vista do cálculo diferencial absoluto [4]. Estava convencido de que, por exemplo, se tentássemos dar uma formulação covariante geral para a mecânica gravitacional newtoniana certamente chegaríamos à conclusão de que o princípio a exclui, se não teoricamente, mas praticamente.

Como indicou Norton [3], a ênfase contínua ao princípio de covariância geral dada por Einstein, mesmo depois da concessão ao ponto de Kretschmann, pode ser melhor compreendida se levarmos em conta a proclamação de Einstein na sua famosa Herbert Spencer lecture de 1933, que revelou uma metafísica que não estava presente, pelo menos não de forma explícita, nos escritos de Einstein de 1918:

> *Our experience hitherto justifies us in believing that nature is the realization of the simplest conceivable mathematical ideas. I am convinced that we can discover by means of purely mathematical constructions the concepts and laws connecting them with each other, which furnish the key to the understanding of natural phenomena... the creative principle resides in mathematics.*

Então, para Einstein, podemos reconhecer a verdade de uma teoria em sua simplicidade matemática. E ao invés de não ter conteúdo físico, pelo contrário, covariância geral seria a linguagem correta para expressar a simplicidade que procuramos.

O desafio proposto por Einstein em 1918 com o objetivo de resguardar um lugar especial para a covariância geral em sua teoria de gravitação, o de encontrar uma formulação covariante geral para a mecânica gravitacional newtoniana, não demorou muito a ser vencido. Cartan [5] em 1923, e Friedrichs [6] em 1927 apresentaram suas formulações. Assim, embora Einstein estivesse errado ao acreditar que tais formulações covariantes gerais se revelariam uma impossibilidade na prática, ele estava certo num ponto — tais formulações covariantes gerais eram muito mais complexas que a relatividade geral.

Com a evolução dos métodos geométricos foi possível fornecer de maneira muito menos laboriosa formulações covariantes gerais para diversas teorias físicas. Com isso, tornou-se cada vez mais evidente que, de fato, covariância geral sozinha não têm conteúdo físico, e para adquiri-lo, ela deve, segundo Einstein, ser suplementada com o requerimento de que as leis da natureza tomam formas simples. Tal requerimento é, para dizer o mínimo, um pouco vago. Afinal, quais são os critérios que devemos usar para julgar qual de duas teorias é a mais simples? Claramente, a idéia é polêmica e, como já podíamos esperar, gerou um grande debate e uma variedade de opiniões na literatura (veja [3]), mas sem chegar a algo realmente conclusivo.

1.4 Princípio de Equivalência como um Princípio de Covariância

Podemos encontrar no livro *The Meaning of Relativity* [7] de Einstein uma descrição do princípio de equivalência. Nesta descrição, bem típica dos escritos de Einstein, considere que K denota um sistema inercial e que K' denota um sistema de coordenadas uniformemente acelerado com respeito a K. Então, depois de verificar que massas livres em K' são aceleraladas "como se um campo gravitacional estivesse presente e K' não estivesse acelerado, Einstein escreve (pág. 57-8):

> *... there is nothing to prevent our conceiving this gravitational field as real, that is, the conception that K' is "at rest" and a gravitational field is present we can consider as equivalent to the conception that only K is "allowable" system of co-ordinates and no gravitational field is present. The assumption of the complete physical equivalence of systems of coordinates, K and K', we call the "principle of equivalence"; ...(it) signifies an extension of the principle of relativity to co-ordinate systems which are in non-uniform motion relatively to each other. In fact, through this conception we arrive at the unity of nature of inertia and gravitation.*

O nome de Einstein, entretanto, é quase sempre associado a um princípio bastante diferente, um tipo de "princípio de equivalência infinitesimal". Uma formulação canônica é dada por Pauli [8]:

> *For every infinitely small world region (i.e. a world region which is so small that the space- and time-variation of gravity can be neglected in it) there always exists a coordinate system $K_0(X_1, X_2, X_3, X_4)$ in which gravitation has no influence either in the motion of particles or any other physical process.*

A idéia chave aqui é que, ao tomar-se uma região suficientemente pequena do espaço-tempo, um campo gravitacional *arbitrário* torna-se homogêneo e pode ser eliminado por uma escolha conveniente de sistemas de coordenadas.

Ao contrário de muitos autores, Pauli reconhece que a sua versão infinitesimal do princípio de equivalência difere da versão de Einstein, e ainda sugere que, enquanto o princípio de equivalência de Einstein aplica-se somente a campos gravitacionais homogêneos, a sua versão vale no caso "geral". Entretanto, como Norton [3] explica, as diferenças são maiores do que Pauli imaginava, basicamente por três razões:

- *O princípio de equivalência de Einstein era um princípio de covariância.*

A relatividade especial exigia a completa equivalência física de todos os sistemas de coordenadas inerciais; para Einstein, a relatividade geral exigia a equivalência física completa de todos os sistemas de coordenadas. O princípio de equivalência de Einstein exigia a equivalência física de um conjunto de sistemas de coordenadas de tamanho intermediário: sistemas de coordenadas inerciais mais sistemas de coordenadas acelerados. Ou seja, o princípio de equivalência de Einstein estende a covariância da relatividade especial, a covariância de Lorentz, mas não chega à covariância geral. Logo, para Einstein, o princípio de equivalência era um princípio de relatividade intermediário entre o princípio de relatividade da relatividade especial e o da relatividade geral.

O princípio de equivalência infinitesimal determina que um espaço-tempo da relatividade geral com um campo gravitacional arbitrário é, em algum sentido, localmente (ou seja, em regiões infinitesimais) como o espaço-tempo da relatividade especial. A versão de Einstein do princípio de equivalência não pode ser utilizada com tal função, uma vez que trata-se de um princípio de covariância. Sendo assim, ela foi restringida de duas formas relacionadas:

- *O princípio de equivalência aplica-se apenas à relatividade especial.*

Ou seja, o sistema de coordenadas inercial K da formulação de Einstein do princípio não é algum tipo de sistema de coordenadas em queda livre da relatividade geral. Ele é apenas um sistema de coordenadas inercial da relatividade especial. Portanto, os sistemas de coordenadas K e K' são ambos sistemas de coordenadas de um espaço-tempo de Minkowski. Por causa disso, parece natural considerar que a versão de Einstein do princípio de equivalência funciona apenas dentro do domínio da relatividade especial, embora essa não seja a opinião de Einstein. Ele aparentemente considerou que a relatividade especial suplementada com o princípio de equivalência tinha mais conteúdo físico que a relatividade especial sozinha [3]. A teoria suplementada tinha uma covariância expandida e lidava como um novo tipo de fenômeno, os campos gravitacionais homogêneos.

- *O princípio de equivalência de Einstein não era uma prescrição para eliminar campos gravitacionais* arbitrários; *ele era apenas uma maneira de criar um* tipo especial *de campo gravitacional.*

De fato, o princípio de equivalência de Einstein era uma receita para criar um campo gravitacional *homogêneo*: basta passar para um sistema de coordenadas uniformemente acelerado. O princípio de equivalência infinitesimal dá uma receita para eliminar um campo gravitacional arbitrário: primeiro o tornamos homogêneo ao passar para uma região infinitesimal do espaço-tempo e depois o eliminamos pela transformação inversa do princípio de Einstein. Einstein repetidamente insistiu que *seu* princípio de equivalência não permitia eliminar campos gravitacionais arbitrários, mas apenas aqueles produzidos por campos gravitacionais de um tipo especial, aqueles produzidos pela aceleração do sistema de coordenadas.

1.5 Seria a Covariância Geral um Princípio de Relatividade?

Além das afirmações de que o princípio de covariância geral não possuía significado físico, também surgiram críticas em torno da idéia de Einstein de que covariância geral correspondia a uma generalização do princípio de relatividade para movimentos acelerados. Por exemplo, o eminente relativista Fock [9] escreveu:

> *The fact that the theory of gravitation, a theory of such amazing depth, beauty and cogency, was not correctly understood by its author, should not surprise us. We should also not be surprised at the gaps in logic, and even errors, which the author permitted himself when he derived the basic equations of the theory. In the history of physics we have many examples in which the underlying significance of a fundamentally new physical theory was realized not by its author but by somebody else and in which the derivation of the basic equations proposed by the author proved to be logically inconsistent. It is sufficient to point to Maxwell's theory of eletromagnetic field...*

Synge [10], outro eminente relativista, foi ainda mais duro:

> *... the general theory of relativity. The name is repellent. Relativity? I have never been able to understand what that word means in this connection. I used to think that this was my fault, some flaw in my intelligence, but it is now apparent that nobody ever understood it, probably not even Einstein himself. So let it go. What is before us is Einstein's theory of gravitation.*

Para Fock e outros, um princípio de relatividade é uma declaração de uniformidade do espaço-tempo. Logo, a relatividade especial admite um princípio de relatividade por causa da uniformidade do espaço-tempo de Minkowski. Já os espaços-tempos da relatividade geral manifestam uniformidade apenas em regiões infinitesimais, por isso chamar a teoria de Einstein de "relatividade geral" ou "teoria da relatividade generalizada" é, na opinião de Fock, simplesmente incorreto. Segundo estes autores, dois grupos estão associados à formulação de uma teoria: seu grupo de covariância, o qual caracteriza aspectos puramente formais de sua formulação, e seu grupo de simetria, o qual caracteriza um fato físico, o grau de uniformidade do espaço-tempo, uniformidade esta que permite à teoria satisfazer um princípio de relatividade. Na transição de uma formulação covariante de Lorentz da relatividade especial para uma formulação covariante geral da relatividade geral, o grupo de covariância é expandido. Mas isto é apenas um acidente de formulação. O grupo de simetria é na verdade reduzido do grupo de Lorentz para o grupo trivial, aquele que contém apenas a transformação identidade, no caso geral. Como este grupo não está associado a qualquer princípio de relatividade, a transição da relatividade especial para a relatividade geral não generaliza o princípio de relatividade, mas pelo contrário, elimina-o.

Cartan [11] encontrou um paralelo entre covariância geral, covariância de Lorentz e os princípios diretores das geometrias de Riemann e Klein, respectivamente. De fato, o programa Erlangen de Klein caracteriza uma classe ampla de geometrias pelos seus grupos associados e define as entidades geométricas estudadas como invariantes desses grupos. O ponto fundamental é que todas as geometrias de Klein — euclidiana, projetiva, conforme e outras — são constituídas por um espaço homogêneo. Na tradição de Riemann, considera-se também um espaço e um grupo de transformações. Só que agora, as entidades geométricas não são mais invariantes das transformações, mas invariantes da forma quadrática fundamental (métrica). Como conseqüência disso, os grupos associados às geometrias de Klein e Riemann têm naturezas bastante diversas. A geometria do espaço-tempo da relatividade especial, do modo como foi introduzida por Minkowski, entra na tradição de Klein. Logo seu grupo característico, o grupo de Lorentz, está associado à homogeneidade do espaço-tempo. A relatividade geral entra na tradição de Riemann e, como conseqüência, seu grupo geral de transformações não está associado a qualquer homogeneidade do espaço-tempo.

1.6 Sistemas de Coordenadas Versus Sistemas de Referência

Em exposições tradicionais de relatividade especial e geral, é costume não distinguir duas idéias bem distintas. A primeira é a noção de sistema de coordenadas, ou seja, associações suaves e inversíveis de quatro números a eventos numa vizinhança do espaço-tempo. A segunda, a noção de sistemas de referência ou referenciais, refere-se a um sistema físico idealizado usado para associar tais números.

Dentro do contexto da relatividade especial, e restringindo-se a apenas sistemas de referência em movimento inercial, pouca importância tem a diferença entre um referencial inercial e um sistema de coordenadas inercial. Tal circunstância deixa de ocorrer, mesmo dentro da relatividade especial, a partir do momento que começamos a considerar referenciais em movimento não-uniforme. De fato, isto tornou-se um grande problema para Einstein por volta de 1907, quando ele passou a considerar sistemas de referência uniformemente acelerados em sua nova teoria de gravitação.

Mais tarde Einstein explicou através de seu famoso experimento fictício (*gedanken*) do disco em rotação qual era a dificuldade: Coordenadas no espaço-tempo perdem seu significado métrico imediato tão logo abandonemos os sistemas de coordenadas inerciais familiares da relatividade especial.

Com o advento da relatividade geral, Einstein desejava considerar referenciais em estado de movimento arbitrário. Como ele concluiu ser impraticável manter qualquer vestígio do sistema físico idealizado do sistema de referência, em seu lugar, ele simplesmente usou sistemas de coordenadas arbitrários. Então, de acordo com Einstein, qualquer equivalência estabelecida pela covariância geral para sistemas de coordenadas arbitrários também é conferida a sistemas de referência arbitrários e, se lembrarmos da conexão entre um sistema de referência e um estado de movimento, isto é tudo que se precisa para estender o princípio de relatividade para movimentos arbitrários. Esta conexão é ligeiramente complicada pelo fato que algumas transformações de coordenadas claramente não relacionam diferentes estados de movimento, tais como as transformações entre coordenadas espaciais polares e cartesianas. Entretanto, algum subgrupo do grupo de transformações gerais de coordenadas é o grupo apropriado, como o próprio Einstein indicou [12].

O tratamento original de Einstein do princípio de relatividade em relatividade especial correspondia ao requerimento de que as leis da física têm a mesma forma quando expressas em qualquer sistema de coordenadas inercial. Este tipo de formulação do princípio foi vital no contexto de uma teoria da relatividade especial covariante de Lorentz. Mas, como vimos, é bastante difícil sustentar a idéia de que invariância na forma de leis pode conter qualquer princípio físico quando estamos preparados para empregar técnicas matemáticas poderosas o suficiente para tornar qualquer teoria covariante geral. Sendo assim, faz-se necessário um estudo mais profundo das noções de referenciais e equivalência de referenciais.

Na tentativa de resolver as ambigüidades inerentes ao tratamento de Einstein, a noção de sistema de referência reapareceu como uma estrutura distinta de um sistema de coordenadas. Por exemplo, se concebermos um sistema de referência como um conjunto de instrumentos hipotéticos preenchendo o espaço e movendo-se com velocidades arbitrárias, então a informação mínima necessária a ser obtida do referencial é a especificação das linhas de mundo de seus elementos. Como conseqüência, a definição mais simples de um sistema de referência arbitrário é que ele é uma congruência de curvas, ou seja, um conjunto de curvas tal que todo evento na variedade do espaço-tempo está exatamente numa dessas curvas. Se a noção de tipo-tempo está definida, exige-se também que as curvas sejam tipo-tempo para assegurar que elas sejam linhas de mundo de elementos físicos. Existem outras definições equivalentes de sistema de referência, como por exemplo, um campo vetorial tipo-tempo que não se anula em nenhum ponto, ou um campo de tetradas ortonormais sobre o espaço-tempo.

Utilizando-se de formulações precisas de referenciais e equivalência de referenciais, como as descritas acima, Earman [13], Friedman [14] e Jones [15] foram capazes de estudá-las dentro do contexto de várias teorias, incluindo variantes da teoria de espaço-tempo newtoniana. Para eles a essência do princípio de relatividade na teoria especial é a indistingüibilidade de todos os estados de movimento inerciais. A teoria da relatividade especial de Einstein de 1905 foi motivada pela constatação de que nenhum experimento em mecânica, ótica ou eletrodinâmica poderia revelar o movimento da Terra através do éter. Ou seja, espaço e tempo "parecem os mesmos" experimentalmente para observadores em estado de movimento inercial. A tarefa de Einstein era construir uma teoria em que eles pareciam os mesmos também teoricamente. No caso mais geral, ainda segundo estes autores, um princípio de relatividade corresponde ao requerimento de que a transformação de Lorentz mapeia estruturas de espaço-tempo permitidas pela teoria em estruturas de espaço-tempo permitidas pela teoria.

A essência dos trabalhos de Earman, Friedman e Jones é que relatividade especial admite um grupo de simetria não-trivial, o grupo de Lorentz, que mapeia sistemas de referência inerciais em sistemas de referência inerciais. Por outro lado, os espaços-tempos da relatividade geral normalmente não admitem simetrias. Em relatividade geral, o análogo mais próximo de referencial inercial é um referencial em queda livre, que é representado por uma congruência de geodésicas tipo-tempo. Em geral, uma transformação que mapeia um referencial em queda livre em outro não é uma simetria da estrutura métrica. Portanto, observadores no primeiro e no segundo referencial verão propriedades métricas distintas no espaço-tempo. Logo, na concepção desses autores, a indistingüibilidade exigida para a equivalência de referenciais não existe e a relatividade não é estendida ao observadores em movimento acelerado. Considerar referenciais arbitrários ao invés de referenciais em queda livre claramente não muda o resultado.

1.7 O Princípio de Invariância Geral

Embora Einstein tenha mudado várias vezes seu ponto de vista sobre os fundamentos da sua teoria de gravitação, uma idéia nunca o abandonou: a relatividade geral distingue-se de todas as outras teorias anteriores pelo fato dela eliminar um absoluto causal, o sistema inercial. Mas não é fácil conseguir uma compreensão exata do que Einstein queria dizer com tal noção formulada tão imprecisamente, sem antes entender as idéias de Einstein sobre covariância geral. O contexto mais preciso já apresentado que permite dar uma interpretação das preocupações causais de Einstein é o de Anderson [2].

Anderson chama o conjunto de todos os valores possíveis dos objetos geométricos de uma teoria de *trajetórias possíveis cinematicamente*. Já aquelas sancionadas pelas *leis dinâmicas* ou *equações de movimento*, ele chama de *trajetórias possíveis dinamicamente*. A principal novidade do desenvolvimento de Anderson é a distinção entre objetos *absolutos* e *dinâmicos*. Esta distinção é usada para colocar o princípio de covariância geral em uma forma mais restritiva, chamado de *princípio de invariância geral*.

A grosso modo, um objeto absoluto é uma quantidade física que influencia o comportamento de outras quantidades físicas sem ser, em contrapartida, influenciada por estas quantidades. O valor de tais objetos absolutos é completamente independente de quaisquer mudanças na condição da matéria do universo. Por outro lado, *objetos dinâmicos* são quantidades físicas que dependem do estado da matéria. Então, dada uma teoria física, devemos ser capazes de classificar as quantidades que nela aparecem em objetos absolutos e objetos dinâmicos.

A métrica de Minkowski da relatividade especial é um objeto absoluto. Em eletrodinâmica relativística, a métrica de Minkowski afeta o campo de Maxwell e o fluxo de carga ao determinar, por exemplo, quais são as trajetórias inerciais das cargas. Entretanto, nem o campo de Maxwell e nem o fluxo de carga, os objetos dinâmicos da teoria, afetam a métrica de Minkowski. Seja qual for a forma destes objetos, a métrica de Minkowski permanece a mesma. Este é o sentido de influenciar sem ser influenciado. Já que a métrica de Minkowski induz os referenciais inerciais no espaço-tempo, a indentificação por Anderson da métrica de Minkowski como um objeto absoluto concorda exatamente com a identificação de Einstein dos referenciais inerciais como objetos absolutos.

Com essa nova terminologia, Anderson é capaz de definir o grupo de simetria, ou *grupo de invariância de uma teoria física*. Ele é o subgrupo do grupo de covariância da teoria que deixa invariantes os objetos absolutos da teoria. Em particular, se não há objetos absolutos, o grupo de invariância e o grupo de covariância coincidem.

Segundo Anderson, o que Einstein tinha em mente quando associou o grupo de Lorentz à relatividade restrita e o grupo de covariância geral à relatividade geral era o conceito de grupo de simetria, pois um requerimento no grupo de simetria, não no grupo de covariância, é a maneira correta de expressar um princípio de relatividade. Mesmo se formularmos nossas teorias de modo covariante geral, elas continuam a ser caracterizadas pelos seus grupos de simetria. O grupo de simetria da relatividade especial, mesmo se escrita numa forma covariante geral, é o grupo de Lorentz. A teoria de espaço-tempo newtoniana formulada covariantemente ainda tem como grupo de simetria o grupo de Galileu. Já a relatividade geral não contém objetos absolutos não-triviais: seu grupo de simetria é o grupo das transformações gerais de coordenadas. Então, de acordo com Anderson, o que Einstein realmente queria dizer com seu princípio de covariância geral era na verdade o princípio de invariância geral. Neste sentido, o princípio de invariância geral corresponde a um requerimento de não existência de objetos absolutos, o que dá uma interpretação à afirmação de Einstein de que covariância geral havia eliminado um absoluto do espaço-tempo.

Embora as idéias de Anderson tenham encontrado uma resposta relativamente favorável na literatura, elas não ficaram totalmente imune à críticas. Há basicamente duas dificuldades. A primeira é a questão de como definir objetos absolutos de forma precisa em termos da linguagem geométrica livre de coordenadas. O problema não é simples e ainda permanece em discussão (veja [3]). A segunda área de dificuldade é a falta de justificativa para a necessidade de eliminar objetos absolutos. Supõe-se que a natureza detesta coisas que influenciam sem ser influenciadas. Anderson vê na natureza uma espécie de "lei de ação e reação generalizada". Mas o princípio é tão vago que não é claro o que ele realmente diz e onde pode ser aplicado. A constante de Planck h ou a constante gravitacional G "atuam" na matéria sem sofrer "reação"? Com esta imprecisão fica difícil afirmar quando uma lei é verdadeira ou mesmo se devemos esperar que ela seja. Portanto, temos dificuldade até mesmo de considerar o princípio de invariância geral (ou ainda, o requerimento de não-existência de objetos absolutos) como uma premissa que leva a resultados empiricamente confirmados.

1.8 Fibrados e Gravitação

Ao menos em princípio, toda teoria de campos física pode ser formulada em termos da teoria matemática de fibrados. Sendo assim, podemos pensar na teoria de fibrados como a *lingua universalis* da física moderna. Mesmo assim, no caso específico de teorias de gauge para a gravitação, a estrutura de fibrados parece supérflua devido ao que se chama *soldagem* do espaço base e fibras. Mostraremos que mesmo no caso da gravitação, o formalismo de fibrados é mais conveniente, já que, como veremos, permite-nos dar uma formulação precisa e uniforme do princípio de gauge e com isso resolver problemas conceituais relacionados aos vários princípios de relatividade e covariância. Para exemplificarmos esse tipo de construção, consideremos a bem conhecida teoria de Maxwell-Dirac.

Exemplo: Teoria de Maxwell-Dirac

Consideremos o campo de Dirac livre $\psi(x)$ com a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^a\partial_a - m)\psi(x), \tag{1.3}$$

com $a, b, c \ldots = 0, 1, 2, 3$ denotando índices do espaço de Minkowski. A lagrangiana de Dirac livre é invariante sob transformações de gauge globais

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\alpha}\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\alpha}\bar{\psi}(x), \tag{1.4}$$

com algum parâmetro de fase constante arbitrário α e carga q. A corrente de Noether correspondente às transformações (1.4) é dada por

$$j^a = -q\bar{\psi}(x)\gamma^a\psi(x). \tag{1.5}$$

Ela satisfaz a equação de continuidade,

$$\partial_a j^a = 0, \tag{1.6}$$

que expressa conservação de carga. Seguindo o princípio de gauge, trocamos a transformação de gauge global de (1.4) pela correspondente transformação de gauge local

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \tag{1.7}$$

com uma função de fase local $\alpha(x)$, isto é, dependente do espaço-tempo. Isto leva ao acoplamento com um potencial de interação

$$A'_a(x) = -\partial_a\alpha(x), \tag{1.8}$$

que por sua vez satisfaz a seguinte lei de transformação

$$A_a(x) \to A'_a(x) = A_a(x) - \partial_a\alpha(x). \tag{1.9}$$

Aplicando (1.7), (1.8) e (1.9) em (1.3), obtemos a lagrangiana de Dirac invariante

$$\mathcal{L'}_D = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int}, \tag{1.10}$$

com o termo de acoplamento

$$\mathcal{L}_{int} = -j_a(x)A^a(x). \tag{1.11}$$

De acordo com o princípio de gauge, isto pode ser diretamente obtido a partir da introdução de uma *derivada covariante*

$$\partial_a \to D_a = \partial_a - iqA_a(x). \tag{1.12}$$

De fato, aplicando (1.12) em (1.3), obtemos novamente (1.10).

Agora, do ponto de vista de teoria de fibrados o campo vetorial A_μ representa as componentes da 1-forma de conexão de um fibrado principal $U(1)$. De (1.9) podemos construir o correspondente tensor de curvatura

$$F_{ab}(x) = \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x). \tag{1.13}$$

Interpretando A_a e F_{ab} como potencial e intensidade de campo da interação eletromagnética, somos encorajados a completar a lagrangiana (1.10) para a lagrangiana completa da QED

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}'_D + \mathcal{L}_M, \tag{1.14}$$

com o termo do campo de Maxwell livre

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{ab}(x) F^{ab}(x). \tag{1.15}$$

O acoplamento dinâmico típico de teorias de gauge possui uma estrutura tal que dois tipos de equações são produzidos: equações de movimento para os campos de matéria (tais como a equação de Dirac que provém de $\mathcal{L}_D$, ou ainda, de $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int}$), bem como equações de movimento para os campos de interação (tais como as equações de Maxwell homogêneas que provêm de $\mathcal{L}_M$ e as não-homogêneas que provêm de $\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int}$). Na estrutura combinada, A_a é o *potencial de gauge* e F_{ab} a *intensidade de campo.*

1.9 Gravitação como Teoria de Gauge

Como sabemos, as interações fundamentais forte e eletrofraca são descritas por teorias de gauge. Por outro lado, a estrutura de gauge da relatividade geral não é tão clara e algumas vezes não muito apreciada [16]. Neste trabalho, ao contrário, argumentaremos que a estrutura de fibrado da relatividade geral é fisicamente relevante no sentido de que nos permite fornecer uma interpretação precisa de algumas questões envolvendo os fundamentos da relatividade geral.

Adotamos aqui uma idéia de Guttmann e Lyre [17]. Segundo eles, as quantidades e objetos fisicamente significantes podem ser representados através de funções definidas nas fibras (o que não significa que, inversamente, todas as estruturas nas fibras são fisicamente relevantes).

Segundo Trautman [18], uma teoria de gauge é qualquer teoria física de uma variável dinâmica que, no nível clássico, pode ser identificada com uma conexão em um fibrado principal. O grupo de estrutura G do fibrado P é o grupo de transformações de gauge de primeira espécie; o grupo $\mathcal{G}$ de transformações de gauge de segunda espécie pode ser identificado com um subgrupo do grupo Aut P de todos automorfismos de P. Neste sentido, a gravitação é uma teoria de gauge: o campo de gauge básico é uma conexão linear ω (ou uma conexão intimamente relacionada a uma conexão linear). Além de ω, existe um tensor métrico g que funciona como um campo de Higgs. A diferença mais importante entre a gravitação e outras teorias de gauge é a soldagem entre o fibrado de referenciais e a variedade base M. A forma de soldagem θ leva à torsão que não possui análogo em teorias não-gravitacionais. Além disso, ela afeta o grupo $\mathcal{G}$, que agora consiste de automorfismos do fibrado de referenciais preservando θ. Este grupo não contém automorfismos além da identidade: ele é isomorfo ao grupo Dif M de todos os difeomorfismos de M. Em uma teoria do tipo Yang-Mills sobre o espaço-tempo de Minkowski, o grupo $\mathcal{G}$ é isomorfo ao produto semi-direto do grupo de Poincaré pelo grupo $\mathcal{G}_0$ de automorfismos verticais de P. Em outras palavras, na teoria de gravitação, o grupo $\mathcal{G}_0$ de transformações de "gauge puras" se reduzem à identidade; todos os elementos de $\mathcal{G}$ correspondem a difeomorfismos de M.

1.10 Objetivos do Trabalho

Como discutido nas seções anteriores, existe até hoje muita controvérsia com relação aos princípios que fundamentam a teoria da gravitação de Einstein. No entanto, embora longe de chegar a um ponto de vista aceito por todos, a literatura mais recente aponta para alguma forma de princípio de covariância geral e princípio de equivalência infinitesimal [3]. Uma versão muito popular destes princípios, na verdade os identifica: Weinberg [19] define seu princípio de covariância geral como segue:

> *It states that a physical equation holds in a general gravitational field, if two conditions are met:*
>
> 1. *The equation holds in the absence of gravitation; that is, it agrees with the laws of special relativity when the metric field $g_{\alpha\beta}$ equals to Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ and when the affine connection $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ vanishes.*
> 2. *The equation is generally covariant; that is, it preserves its form under a general coordinate transformation $x \to x'$.*

Como vimos, muitos autores consideram apenas a segunda condição como sendo o princípio de covariância geral, enquanto que a primeira se parece com um princípio de equivalência infinitesimal. De fato, Weinberg apresenta o seu princípio de covariância geral como uma forma alternativa do princípio de equivalência infinitesimal e mostra como ele segue do princípio de equivalência. Ele insiste, entretanto, que seu princípio de covariância geral não é um princípio de relatividade como a invariância de Lorentz da relatividade especial.

Neste trabalho, não temos a pretensão de resolver ou esclarecer as controvérsias históricas envolvendo os princípios da teoria da gravitação de Einstein. Ao contrário, ignoraremos tais princípios. Por outro lado, baseado na teoria matemática dos fibrados, tentaremos encontrar um princípio de gauge que resulte numa formulação precisa e clara da gravitação, e dessa forma eliminar os problemas conceituais discutidos. Como veremos nos próximos capítulos, nossa conclusão será que o grupo de simetria local que governa a interação gravitacional não é o grupo de translações, nem Poincaré, nem de Sitter, mas simplesmente o grupo de Lorentz. Em outras palavras, mostraremos que a simetria local por trás da interação gravitacional é aquela dada pelo grupo de Lorentz. Nesse sentido, uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz poderia ser, sem dúvidas, chamada de teoria da relatividade geral já que ela generaliza, no sentido de tornar "local", a covariância "global" de Lorentz da relatividade especial.

Capítulo 2

Teoremas de Noether: Uma Revisão

Em 1918, a eminente algebrista Emmy Noether demonstrou dois teoremas [20] que influenciaram profundamente a física do século 20. Os teoremas revelaram a conexão geral entre simetrias e leis de conservação em física. Eles levaram a um entendimento muito mais geral e profundo de leis tais como os princípios de conservação de energia, momento angular, etc, e também foram imprescindíveis nas grandes descobertas de simetrias de campos de gauge do século 20.

Os teoremas foram descobertos por Noether [21] logo depois que Hilbert encontrou o princípio variacional que fornece as equações de campo da relatividade geral. A motivação para a pesquisa de Noether foi o problema da falha de conservação de energia local da relatividade geral, que na época preocupava físicos e matemáticos tais como Einstein, Hilbert e Klein.

Em termos gerais, os teoremas relacionam cada simetria da integral de ação de um sistema físico com um quantidade física conservada. Como se sabe, simetrias são descritas matematicamente por grupos. O primeiro teorema de Noether trata da invariância da integral de ação com relação a grupos de Lie de dimensão finita (ditos globais ou finitos). Já o segundo teorema de Noether discute invariância em relação a um grupo de Lie de dimensão infinita (ditos locais). Este teorema aplica-se às teorias de gauge que como sabemos, trabalham com transformações cujos parâmetros são locais, ou seja, são funções do espaço-tempo. Ao grupo das transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos) do espaço-tempo também se aplica o segundo teorema de Noether.

2.1 Identidade de Noether

Considere a integral de ação

$$S[u] = \int L(x, u(x), \partial_\mu u(x)) d^4x, \tag{2.1}$$

onde $u = (u^i)$ é o campo, $x = (x^\mu), \mu = 0, 1, 2, 3$ denota as coordenadas e L é a densidade lagrangeana. Então, dadas as transformações de coordenadas e da forma do campo:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + \delta x, && (2.2) \\ u(x) &\rightarrow u'(x') = u(x) + \delta u(x), && (2.3) \end{aligned}$$

queremos saber como a ação S muda, ou seja, queremos calcular δS.

2.1.1 Variação do volume de integração

Seja A uma matriz infinitesimal qualquer e I a matriz identidade. Então

$$\det(I + A) = \det e^A = e^{\mathrm{tr}A} = 1 + \mathrm{tr}A. \tag{2.4}$$

Logo, o jacobiano da transformação de coordenadas $x \rightarrow x' = x + \delta x$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} &= \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \det\left(I + \left(\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\right)\right) && (2.5) \\ &= 1 + \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\right) = 1 + \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\right) = 1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}, && (2.6) \end{aligned}$$

e daí

$$d^4x' = \left(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) d^4x. \tag{2.7}$$

2.1.2 Variação da forma do campo e das derivadas do campo

A variação devido à *mudança na forma de u* é definida como

$$\bar{\delta} u(x) = u'(x) - u(x). \tag{2.8}$$

Sendo assim, a variação total de u e a variação na forma de u se relacionam pela seguinte fórmula:

$$\delta u = \bar{\delta} u + \frac{\partial u}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{2.9}$$

Note que, por definição, $\bar{\delta}$ e ∂_μ comutam. Logo,

$$\delta(\partial_\mu u) = \bar{\delta}(\partial_\mu u) + \frac{\partial(\partial_\mu u)}{\partial x^\nu}\delta x^\nu. \tag{2.10}$$

2.1.3 Variação da densidade lagrangeana

Note que, usando (2.9) e (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{\partial L}{\partial x_\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial u}\delta u + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\delta(\partial_\mu u) \\
&= \frac{\partial L}{\partial x_\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial u}\bar{\delta} u + \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\mu(\bar{\delta} u) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu u)}\frac{\partial(\partial_\nu u)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\
&= \frac{\partial L}{\partial u}\bar{\delta} u + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\mu(\bar{\delta} u) + \frac{dL}{dx^\mu}\delta x^\mu,
\end{aligned}$$

onde $\frac{dL}{dx^\mu}$ é a *derivada total de L em relação à coordenada* x^μ. Sendo assim, temos

$$\delta L = \bar{\delta} L + \frac{dL}{dx^\mu}\delta x^\mu, \tag{2.11}$$

onde

$$\bar{\delta} L = \frac{\partial L}{\partial u}\bar{\delta} u + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\mu(\bar{\delta} u). \tag{2.12}$$

é a *variação de L devido às variações na forma de u e* $\partial_\mu u$.

Podemos reescrever $\bar{\delta} L$ de modo a obter uma identidade que será útil mais adiante. De fato,

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} L &= \frac{\partial L}{\partial u}\bar{\delta} u + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\mu(\bar{\delta} u) \\
&= \frac{\partial L}{\partial u}\bar{\delta} u - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\right)\bar{\delta} u + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\bar{\delta} u\right).
\end{aligned}$$

E daí,

$$\bar{\delta} L = \frac{\delta L}{\delta u}\bar{\delta} u + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\bar{\delta} u\right), \tag{2.13}$$

onde

$$\frac{\delta L}{\delta u} = \frac{\partial L}{\partial u} - \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} \tag{2.14}$$

é a *derivada de Lagrange de L em relação a u*.

2.1.4 Variação da Ação

Usando os resultados das subseções anteriores, vamos calcular a variação total de S, isto é, δS. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta\int L(x)d^4x = \int L'(x')d^4x' - \int L(x)d^4x \\
&= \int [L(x) + \delta L(x)]d^4x' - \int L(x)d^4x \\
&= \int \delta L(x)d^4x' + \int L(x)d^4x' - \int L(x)d^4x \\
&= \int \delta L(x)d^4x + \int L(x)\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}d^4x
\end{aligned}$$

onde foi usado na última igualdade a equação (2.7). Agora, usando (2.11) e (2.12), vemos que

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \left[\bar{\delta} L(x) + \frac{dL}{dx^\mu}(x)\delta x^\mu + L(x)\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right] d^4x \\
&= \int \left[\frac{\delta L}{\delta u}\bar{\delta} u + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\bar{\delta} u \right) + \partial_\mu (L(x)\delta x^\mu) \right] d^4x.
\end{aligned}$$

Ou seja, a variação total de S é dada por

$$\delta S = \int \left[\frac{\delta L}{\delta u}\bar{\delta} u + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\bar{\delta} u + L\delta x^\mu \right) \right] d^4x. \tag{2.15}$$

Note que a expressão acima vale seja qual for a região de integração. Portanto, se S é invariante, isto é, se $\delta S = 0$, obtemos a *identidade de Noether*

$$\frac{\delta L}{\delta u}\bar{\delta} u = -\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}\bar{\delta} u + L\delta x^\mu \right). \tag{2.16}$$

É importante frisar que a identidade de Noether vale para qualquer u, independente de ser ou não solução da equação de Euler-Lagrange. Basta que S seja invariante.

2.2 Primeiro Teorema de Noether

Com o objetivo de obter o primeiro teorema de Noether, supomos nesta seção que a ação S é invariante com respeito a algum grupo de Lie G_r de dimensão finita r. Consequentemente, podemos escrever as variações de x^μ e u do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= \omega^a X_a x^\mu && (2.17) \\
\delta u &= \omega^a I_a u, && (2.18)
\end{aligned}$$

onde ω^a, $a = 1, \cdots, r$, são parâmetros constantes. Além disso, de (2.9):

$$\bar{\delta} u = \omega^a (I_a u - X_a x^\mu \partial_\mu u). \tag{2.19}$$

No caso específico das translações em que

$$X_a = \xi^\mu{}_a \partial_\mu \tag{2.20}$$

são os geradores de G_r na forma diferencial, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= \omega^a \xi^\mu{}_a && (2.21) \\
\bar{\delta} u &= (I_a u - \xi^\mu{}_a \partial_\mu u)\omega^a. && (2.22)
\end{aligned}$$

Agora, substituindo-se as expressões (2.21) e (2.22) na identidade de Noether (2.16) chegamos a

$$\frac{\delta L}{\delta u}(I_a u - \xi^\mu{}_a \partial_\mu u)\omega^a = -\partial_\mu \left(L\omega^a \xi^\mu{}_a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}(I_a u - \xi^\mu{}_a \partial_\mu u)\omega^a \right), \tag{2.23}$$

e daí, como os parâmetros w^a são constantes e podem, portanto, serem colocados para fora da divergência, obtemos

$$\frac{\delta L}{\delta u}(I_a u - \xi^\mu{}_a \partial_\mu u) = \partial_\mu j^\mu{}_a, \tag{2.24}$$

onde

$$j^\mu{}_a = -\left(L\xi^\mu{}_a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}(I_a u - \xi^\mu{}_a \partial_\mu u) \right) \tag{2.25}$$

são as *correntes conservadas.*

De (2.24) segue imediatamente o

Primeiro Teorema de Noether

Se a integral de ação S é invariante em relação a um grupo de Lie G_r de dimensão finita r, então r combinações linearmente independentes de derivadas lagrangeanas se reduzem a divergências.

Observe que o teorema não assume que u é uma solução das equações de Euler-Lagrange, ou seja, que $\delta L/\delta u = 0$. Entretanto, neste caso, (2.24) produz as *leis de conservação diferenciais*

$$\partial_\mu j^\mu{}_a = 0 \qquad a = 1.\cdots, r. \tag{2.26}$$

Ou seja, as leis de conservação são consequência das equações de campo e não seguem diretamente do primeiro teorema de Noether, que meramente relaciona divergências e combinações lineares de derivadas lagrangeanas.

As leis de conservação (2.26) são ditas *próprias* ou *fracas*, pois como dissemos, são satisfeitas apenas nos extremos.

Uma observação importante para o que veremos mais adiante é que as correntes conservadas $j^\mu{}_a$ podem ser reescritas como

$$j^\mu{}_a = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} I_a u + T^\mu{}_\nu \xi^\nu{}_a, \tag{2.27}$$

onde

$$T^\mu{}_\nu = \partial_\nu u \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} - L\delta^\mu{}_\nu \tag{2.28}$$

é o *tensor energia-momento canônico.*

2.3 Segundo Teorema de Noether

O segundo teorema de Noether tem como hipótese que a integral de ação S é invariante com relação a um grupo de Lie de dimensão infinita $G_{\infty r}$. Então, se além disso assumirmos, como no caso de invariância em relação a G_r, que δx e δu são lineares nos parâmetros $\omega^a(x)$ (agora dependentes do ponto), com $a = 1, \cdots, r$, e em suas derivadas, podemos escrever a variação na forma de u do seguinte modo

$$\bar{\delta} u = A_a(x, u, \partial_\mu u)\omega^a(x) + B^\mu{}_a(x, u, \partial_\mu u)\frac{\partial \omega^a(x)}{\partial x^\mu}. \tag{2.29}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta u}\bar{\delta} u &= \frac{\delta L}{\delta u}A_a\omega^a + B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\partial_\mu\omega^a \\ &= \frac{\delta L}{\delta u}A_a\omega^a + \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\omega^a\right) - \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\right)\omega^a.\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\frac{\delta L}{\delta u}\bar{\delta} u = \left[A_a\frac{\delta L}{\delta u} - \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\right)\right]\omega^a + \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\omega^a\right). \tag{2.30}$$

Portanto, ao substituirmos (2.30) e (2.29) na identidade de Noether (2.16) obtemos

$$\left[A_a\frac{\delta L}{\delta u} - \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\right)\right]\omega^a = -\partial_\mu\left(C^\mu + B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\omega^a\right), \tag{2.31}$$

onde

$$C^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}A_a\omega^a + L\delta x^\mu + B^\nu{}_a\partial_\nu\omega^a\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)}. \tag{2.32}$$

Se supusermos agora que ω^a e suas derivadas são nulas na fronteira de uma região Ω do espaço-tempo, concluímos que a integral do termo do lado direito de (2.31) sobre esta região é nula. Logo

$$\int_\Omega \left[A_a\frac{\delta L}{\delta u} - \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\right)\right]\omega^a(x)d^4x = 0. \tag{2.33}$$

Uma vez que as funções $\omega^a(x)$ são arbitrárias, a expressão entre colchetes deve ser nula, ou seja,

$$A_a\frac{\delta L}{\delta u} = \partial_\mu\left(B^\mu{}_a\frac{\delta L}{\delta u}\right). \tag{2.34}$$

Com isso obtemos o

Segundo Teorema de Noether

Se a integral de ação S é invariante em relação a um grupo de Lie de dimensão infinita $G_{\infty r}$ e a transformação induzida pelo grupo envolve apenas os parâmetros *do grupo e suas derivadas, então existem r relações de identidade entre derivadas lagrangeanas e suas derivadas.*

Note que no caso em que u é um extremo, ou seja, $\delta L/\delta u = 0$, obtemos de (2.34) que

$$\partial_\mu \left(B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \right) = 0. \tag{2.35}$$

Mas, ao contrário do primeiro teorema de Noether, as "correntes conservadas"

$$J^\mu{}_a = B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \tag{2.36}$$

são *nulas*, devido às equações de movimento.

A corrente (2.36) não coincide, entretanto, com as correntes conservadas fornecidas por todos os textos de teoria de gauge. Em geral, os textos de teorias de gauge calculam as correntes conservadas considerando apenas invariância em relação ao grupo G_r.

Podemos reescrever (2.34) na forma de uma lei de conservação *covariante*. Com efeito, basta introduzirmos a *conexão*

$$\Gamma^b{}_{\mu a} = A_a h^b{}_\mu \tag{2.37}$$

onde $h^b{}_\mu$ é definido pela condição

$$h^b{}_\mu B^\mu{}_a = \delta^b{}_a. \tag{2.38}$$

Com isso temos

$$\nabla_\mu \left(B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \right) = 0, \tag{2.39}$$

onde

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \tag{2.40}$$

é a *derivada covariante* na conexão Γ.

As leis de conservação (2.39) são ditas *fortes* porque são satisfeitas não apenas nos extremos, mas para u arbitrário. São essas as leis de conservação que ocorrem tanto nas teorias de gauge quanto na relatividade geral.

2.4 Relação entre os Teoremas de Noether

Nosso objetivo nesta seção é entender a relação que existe entre os teoremas de Noether provados anteriormente. Suponhamos então que as hipóteses do segundo teorema de Noether sejam válidas. Logo, como vimos, vale a equação (2.34):

$$A_a \frac{\delta L}{\delta u} = \partial_\mu \left(B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \right). \tag{2.41}$$

Sendo assim, o lado esquerdo da equação (2.31) é nulo, ou seja, temos

$$0 = -\partial_\mu \left(C^\mu + B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \omega^a \right). \tag{2.42}$$

Agora, se inserirmos C^μ dada por (2.32), e usarmos a relação $\delta x^\mu = \xi^\mu{}_a \omega^a$, a equação (2.42) fica

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} A_a \omega^a + L \xi^\mu{}_a \omega^a + B^\nu{}_a \partial_\nu \omega^a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} + B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \omega^a \right) = 0. \tag{2.43}$$

Podemos ainda usar as expressões (2.25) e (2.36) e reescrever a última equação como

$$\partial_\mu \left(j^\mu{}_a \omega^a + B^\nu{}_a \partial_\nu \omega^a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} + J^\mu{}_a \omega^a \right) = 0. \tag{2.44}$$

Ao desenvolver a última expressão, separando os termos envolvendo ω^a, derivadas primeira de ω^a e derivadas segunda de ω^a, obtemos a equação

$$I_1 \omega^a + I_2 \partial_\mu \omega^a + I_3 \partial_\mu \partial_\nu \omega^a = 0, \tag{2.45}$$

onde

$$I_1 = \partial_\mu (j^\mu{}_a + J^\mu{}_a), \tag{2.46}$$

$$I_2 = j^\mu{}_a + J^\mu{}_a + \partial_\nu \left(B^\mu{}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu u)} \right), \tag{2.47}$$

$$I_3 = B^\mu{}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu u)}. \tag{2.48}$$

Mas, note que se integrarmos a equação (2.45) sobre uma região suficientemente grande do espaço-tempo e utilizarmos a arbitrariedade de ω^a nessa região, chegamos à conclusão que I_1, I_2 devem ser nulos, bem com a parte simétrica de I_3:

$$B^\mu{}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu u)} + B^\nu{}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} = 0. \tag{2.49}$$

Segue de $I_1 = 0$ que

$$\partial_\mu (j^\mu{}_a + J^\mu{}_a) = 0, \tag{2.50}$$

onde

$$j^\mu{}_a = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u)} A_a + L \xi^\mu{}_a \tag{2.51}$$

é a corrente obtida com o primeiro teorema de Noether, e

$$J^\mu{}_a = B^\mu{}_a \frac{\delta L}{\delta u} \tag{2.52}$$

é a corrente obtida com o segundo teorema de Noether. Logo, se u é um extremo. isto é, se $\delta L/\delta u = 0$, e consequentemente $J^{\mu}{}_{a} = 0$. obtemos as leis de conservação do primeiro teorema de Noether:

$$\partial_{\mu} j^{\mu}{}_{a} = 0. \tag{2.53}$$

Já de $I_2 = 0$, concluímos que

$$j^{\mu}{}_{a} + J^{\mu}{}_{a} = -\partial_{\nu}\left(B^{\mu}{}_{a}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}u)}\right). \tag{2.54}$$

Ou ainda, usando o fato que a parte simétrica de I_3 é nula (isto é, equação (2.49)),

$$j^{\mu}{}_{a} + J^{\mu}{}_{a} = -\frac{1}{2}\partial_{\nu}\left(B^{\mu}{}_{a}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}u)} - B^{\nu}{}_{a}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}u)}\right). \tag{2.55}$$

Isso significa que a corrente conservada pode ser escrita como a divergência de um tensor anti-simétrico.

Capítulo 3

Gravitação e o Grupo de Simetria Local do Espaço-Tempo

De acordo com a relatividade geral, a descrição da interação de um campo de matéria com gravitação exige a introdução simultânea de um campo de tetradas, que é um campo relacionado às translações, e uma conexão de spin, que é um campo tomando valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Estes dois campos, entretanto, não são independentes. Depois de analisarmos mais profundamente o vínculo entre eles, concluímos que o grupo de simetria por detrás da relatividade geral é o grupo de Lorentz local. Além disso, mostramos que a prescrição de acoplamento minimal obtida da derivada covariante de Lorentz coincide com a prescrição de acoplamento minimal da relatividade geral. Logo, ao invés da tetrada, a conexão de spin é que deve ser considerada o campo fundamental representando a gravitação [22].

3.1 Transformações de Lorentz como Translações

O grupo de movimentos do espaço-tempo de Minkowski* é o grupo de Poincaré, que nada mais é do que o grupo de dimensão 10 dado pelo produto semi-direto entre os grupos de translações e Lorentz [24]. Se denotarmos por $\{x^a\}$ $(a, b, c, \ldots = 1, 2, 3, 4)$ as coordenadas cartesianas do espaço-tempo de Minkowski, e por

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{3.1}$$

seu tensor métrico, uma translação infinitesimal das coordenadas do espaço de Minkowski é definida como

$$\delta_t x^a = i\epsilon^c P_c x^a, \tag{3.2}$$

*Existem vários grupos de movimento, ou cinemáticos, que podem ser definidos no espaço-tempo. No Apêndice A, estudamos o caso particular de um grupo cinemático caracterizado por um valor infinito da constante cosmológica [23].

onde $\epsilon^c \equiv \epsilon^c(x)$ são os parâmetros de translação, e

$$P_c = -i\frac{\partial}{\partial x^c} \equiv -i\partial_c \tag{3.3}$$

são os geradores de translação. Usando estes geradores, a transformação (3.2) pode ser escrita na forma

$$\delta_t x^a = \epsilon^a. \tag{3.4}$$

Por outro lado, uma transformação infinitesimal de Lorentz é definida como

$$\delta_L x^a = \frac{i}{2}\,\epsilon^{cd}\,L_{cd}\,x^a, \tag{3.5}$$

onde $\epsilon^{cd} = -\epsilon^{dc}$ são os parâmetros de Lorentz, e

$$L_{cd} = i(x_c\partial_d - x_d\partial_c) \tag{3.6}$$

são os geradores de Lorentz. Usando estes geradores, a transformação (3.5) pode ser reescrita na forma

$$\delta_L x^a = \epsilon^a{}_d\,x^d. \tag{3.7}$$

Uma propriedade interessante da transformação de Lorentz (3.5) é que ela pode ser reescrita formalmente como uma translação [25]. De fato, usando a forma explícita de L_{cd}, ela se torna

$$\delta_L x^a = i\,\xi^c\,P_c\,x^a, \tag{3.8}$$

que é uma translação com

$$\xi^c = \epsilon^c{}_d\,x^d \tag{3.9}$$

como parâmetros. Em outras palavras, uma transformação de Lorentz infinitesimal das coordenadas do espaço–tempo é equivalente a uma translação com $\xi^c \equiv \delta_L x^c$ como parâmetros da transformação. De fato, esta é uma propriedade dos geradores de Lorentz L_{ab}, cuja ação pode sempre ser reinterpretada como uma translação. A razão para tal equivalência é simples: o espaço–tempo de Minkowski é transitivo sob translações, e portanto, quaisquer dois pontos relacionados por uma transformação de Lorentz podem também ser relacionados por uma translação. O inverso, entretanto, é falso.

3.2 Quantidades Conservadas

Como é bem conhecido, as leis de conservação de energia-momento e momento angular em relatividade especial estão relacionadas ao grupo de Poincaré, que é o grupo de isometria do espaço-tempo de Minkowski [26]. De fato, segundo o teorema de

Noether, a invariância de um sistema físico sob translações no espaço-tempo leva à conservação do tensor energia-momento *canônico*, enquanto que a invariância sob transformações de Lorentz leva à conservação do tensor momento angular *canônico*. Quando se passa para a relatividade geral, estes tensores são modificados pela presença de gravitação. Além disso, a fonte do campo gravitacional, o chamado tensor energia-momento *dinâmico* [27], é dado por uma versão simetrizada do tensor energia-momento modificado.

Consideremos a seguinte estrutura. Em cada ponto do espaço–tempo, cujas coordenadas nós denotamos por x^μ $(\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3)$, associamos um espaço tangente de Minkowski em que ambos os grupos de Lorentz e de translação atuam localmente. Deve-se observar que as ações destes dois grupos não estão definidas em um espaço–tempo riemanniano curvo [28]. Agora, de acordo com a abordagem de teorias de gauge para a gravitação [29], o campo de gauge relacionado às translações corresponde à parte não-trivial do campo de tetradas [25]. Denotando por

$$B = B^a{}_\mu \, P_a \, dx^\mu \tag{3.10}$$

o potencial de gauge translacional, o qual é uma conexão assumindo valores na álgebra de Lie do grupo das translações, o campo de tetradas é escrito como [30]

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + c^{-2} B^a{}_\mu \, , \tag{3.11}$$

onde a velocidade da luz c foi introduzida por razões dimensionais. Sua inversa, denotada por $e^\rho{}_c$, é definida pelas relações

$$e^a{}_\mu \, e^\mu{}_c = \delta^a{}_b \quad \text{e} \quad e^\mu{}_c \, e^c{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho \, , \tag{3.12}$$

e é dada por uma série infinita:

$$e^\rho{}_c = \partial_c x^\rho - c^{-2} B^\rho{}_c + \cdots . \tag{3.13}$$

Às vezes, a tetrada é considerada o campo de gauge translacional. Entretanto, isto não é correto porque, além de não ser uma conexão, ela não possui as dimensões corretas para representar um potencial de gauge translacional.

Por outro lado, o campo de gauge relacionado às transformações de Lorentz é a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$, uma conexão assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Sua forma explícita é [31]

$$\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} = e^a{}_\rho \left(\partial_\mu e^\rho{}_b + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu} \, e^\nu{}_b \right) \equiv e^a{}_\rho \overset{\circ}{\nabla}_\mu e^\rho{}_b, \tag{3.14}$$

onde $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu}$ é a conexão de Levi–Civita da métrica $g_{\mu\nu}$, sendo $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$ a correspondente derivada covariante. As métricas riemanniana e de Minkowski estão relacionadas por

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu \, e^b{}_\nu \, \eta_{ab}. \tag{3.15}$$

Vamos agora considerar um campo de matéria Ψ com a ação funcional

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \, d^4x \equiv \frac{1}{c} \int L \sqrt{-g} \, d^4x, \tag{3.16}$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$. De acordo com o teorema de Noether, o tensor energia-momento *dinâmico* do campo de matéria — isto é, o tensor que aparece como fonte no lado direito das equações do campo gravitacional é dado por

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a = -\frac{c^2}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta B^a{}_\mu}, \tag{3.17}$$

onde $e = \det(e^a{}_\mu) = \sqrt{-g}$. Como a tetrada é linear no campo de gauge translacional $B^a{}_\mu$, a derivada funcional em relação a $B^a{}_\mu$ pode ser escrita também como uma derivada funcional em relação a $e^a{}_\mu$,

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a = -\frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a{}_\mu}, \tag{3.18}$$

que é a forma que usualmente aparece na literatura [19]. Por outro lado, o tensor momento angular do campo de matéria é

$$\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab} = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu}. \tag{3.19}$$

É importante observar que, como o tensor energia–momento *dinâmico* (3.18) é automaticamente simétrico,

$$e^{a\lambda} \, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a = e^{a\mu} \, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\lambda{}_a, \tag{3.20}$$

o tensor momento angular *total* — ou seja, orbital mais espinorial — é dado por [19, 27]

$$\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab} = x_a \, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_b - x_b \, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a. \tag{3.21}$$

Vemos desse modo que $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a$ e $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab}$ não são tensores independentes. Com efeito, dado o tensor energia–momento, a expressão para o tensor momento angular segue imediatamente.

Que $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a$ e $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab}$ não são tensores independentes não é nada surpreendente, uma vez que o potencial de gauge translacional $B^a{}_\mu$ e a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu$ também não são independentes, como pode ser visto da Eq.(3.14), que dá a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu$ em termos do potencial de gauge translacional $B^a{}_\mu$. A razão física para esta dependência é que ambos $B^a{}_\mu$ e $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu$ são produzidos pelo mesmo campo gravitacional.

Queremos encontrar agora a relação inversa, ou seja, uma expressão para $B^a{}_\mu$ em termos de $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu$. Comparando as expressões (3.17) e (3.19) com (3.21), obtemos imediatamente que

$$B^a{}_\mu = c^2\, \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}\, x^b. \tag{3.22}$$

De fato, de (3.19) e (3.17) segue que

$$\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab} = -c^{-2}\, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\rho{}_c\, \frac{\delta B^c{}_\rho}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu}. \tag{3.23}$$

Acontece que $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu = -\overset{\circ}{A}{}^{ba}{}_\mu$, logo de (3.22)

$$\frac{\delta B^c{}_\rho}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu} = c^2\, \delta^\mu{}_\rho (\delta^c{}_a\, x_b - \delta^c{}_b\, x_a). \tag{3.24}$$

Substituindo em (3.23), obtemos exatamente a expressão (3.21) para o momento angular $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab}$.

3.3 Prescrição de Acoplamento Minimal

Quando considera-se transformações de coordenadas, somente os geradores P_a e L_{ab} devem ser levados em conta. Entretanto, no estudo do acoplamento de um campo de matéria geral com gravitação, outras representações dos geradores de Lorentz aparecem. Por exemplo, sob uma transformação de Lorentz de espaço tangente *local*, um campo de matéria geral Ψ transformar-se segundo [32]

$$\delta\Psi \equiv \Psi'(x) - \Psi(x) = \frac{i}{2}\,\epsilon^{ab} J_{ab}\Psi, \tag{3.25}$$

onde J_{ab} é um gerador apropriado de transformações de Lorentz infinitesimais. A forma mais geral de J_{ab} é

$$J_{ab} = L_{ab} + S_{ab}, \tag{3.26}$$

onde L_{ab} é a parte *orbital* do gerador, cuja forma explícita, dada por (3.6), é a mesma para todos os campos, e S_{ab} é a parte *espinorial* do gerador, cuja forma explícita depende do spin do campo Ψ. Note que os geradores orbitais L_{ab} são capazes de atuar no argumento espaço-temporal de $\Psi(x^\mu)$ devido à relação

$$\partial_a = (\partial_a x^\mu)\, \partial_\mu. \tag{3.27}$$

Usando a forma explícita de L_{ab}, a transformação de Lorentz (3.25) pode ser escrita como

$$\delta\Psi = \epsilon^{ab}\, x_b\, \partial_a \Psi + \frac{i}{2}\,\epsilon^{ab} S_{ab}\Psi, \tag{3.28}$$

ou equivalentemente,

$$\delta\Psi = \xi^c \partial_c \Psi + \frac{i}{2}\,\epsilon^{ab} S_{ab} \Psi, \tag{3.29}$$

depois de usar a Eq.(3.9). Em outras palavras, a parte *orbital* da transformação pode ser reduzida a uma translação. e conseqüentemente, a transformação de Lorentz de um campo geral Ψ pode ser reescrita como uma translação mais uma transformação de Lorentz estritamente espinorial. Mas observe que, embora similar a uma transformação de Poincaré, ela não corresponde a uma transformação do grupo de Poincaré porque neste grupo os parâmetros de translação e de Lorentz são completamente independentes, o que não é obviamente o caso aqui por causa do vínculo entre os parâmetros de translação e de Lorentz.

Como é bem sabido, a prescrição de acoplamento minimal nos manda trocar todas as derivadas ordinárias ∂_a do espaço-tempo plano por derivadas covariantes $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_a$. A definição geral de derivada covariante é [24]

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_c \Psi = \partial_c \Psi - \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_c\,\frac{\delta\Psi}{\delta\epsilon^{ab}}. \tag{3.30}$$

onde $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_c = \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu e^\mu{}_c$. Substituindo (3.28), obtemos

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_c \Psi = \partial_c \Psi - \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_c\, x_b\, \partial_a \Psi - \frac{i}{2}\,\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_c\, S_{ab}\, \Psi\,, \tag{3.31}$$

ou ainda,

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_c \Psi = (\delta^a{}_c - \overset{\circ}{A}{}^a{}_{bc}\, x^b)\,\partial_a \Psi - \frac{i}{2}\,\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_c\, S_{ab}\, \Psi\,. \tag{3.32}$$

Então, fazendo uso das equações (3.11) e (3.22), escrevemos

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_c \Psi = e^\mu{}_c\, \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi, \tag{3.33}$$

sendo

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}\,\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu\, S_{ab} \tag{3.34}$$

o operador derivada covariante de Fock–Ivanenko [33]. Portanto, a prescrição de acoplamento minimal associada à transformação (3.28) pode ser escrita como

$$\partial_c \to \overset{\circ}{\mathcal{D}}_c = e^\mu{}_c\, \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu, \tag{3.35}$$

que é exatamente a prescrição de acoplamento usual da relatividade geral. De fato, como é bem conhecido, na prescrição de acoplamento da relatividade geral a tetrada $e^a{}_\mu$ e a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu$ não são campos independentes. Tal prescrição de acoplamento, como mostramos, pode ser obtida de uma derivada covariante de Lorentz com a representação completa (3.26). Nesta derivada covariante, a parte *orbital* dos geradores de Lorentz é reduzida a uma translação. que produz uma tetrada que depende da conexão de spin. Esta redução é, portanto, a responsável pelo vínculo entre o campo de tetradas e a conexão de spin. O mesmo vínculo dá origem à relação entre os tensores energia-momento e momento angular de um campo de matéria.

3.4 Observações Finais

Os resultados básicos deste capítulo podem ser resumidos na seguinte forma. Como é bem conhecido, a conservação de energia–momento está relacionada à invariância da ação sob uma translação das coordenadas do espaço–tempo, e a conservação de momento angular está relacionada à invariância da ação sob uma transformação de Lorentz. Entretanto, como o tensor energia–momento simétrico $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a}$ e o tensor momento angular total $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}$ não são quantidades independentes, os parâmetros relacionados à translação e à transformação de Lorentz também não podem ser independentes. De fato, eles estão relacionados por

$$\xi^a = \epsilon^a{}_b\, x^b, \tag{3.36}$$

que produz naturalmente a relação (3.21) entre $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a}$ e $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}$.

Por outro lado, mostramos que a prescrição de acoplamento minimal associada à transformação de Lorentz (3.28), ou seja, a prescrição de acoplamento dada por uma derivada covariante sob a transformação de Lorentz (3.28), produz exatamente a prescrição de acoplamento da relatividade geral, desde que seja usada a identificação

$$\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b = c^{-2} B^a{}_\mu. \tag{3.37}$$

Esta identificação implica que o campo de tetradas e a conexão de spin não são campos independentes. Por conseguinte, o grupo de simetria *local* da relatividade geral não pode ser o grupo de Poincaré porque neste grupo há *dez* parâmetros independentes ϵ^a e ϵ^{ab}, e dez campos independentes $B^a{}_\mu$ e $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$. O verdadeiro grupo de simetria *local* por trás da relatividade geral, portanto, é o grupo de Lorentz de seis parâmetros. Na forma (3.29), a transformação de Lorentz de um campo de matéria assemelha-se a uma transformação de Poincaré, mas devido aos *quatro* vínculos (3.36), ela é na verdade uma transformação do grupo de Lorentz. De fato, se o grupo de simetria fosse dado pelo grupo de Poincaré, a tetrada e a conexão de spin seriam campos independentes.

Também vimos que o campo de tetradas aparece naturalmente na teoria como uma conseqüência da redução do gerador *orbital* de Lorentz L_{ab} a uma translação na prescrição de acoplamento. O campo de tetradas resultante,

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}\, x^b, \tag{3.38}$$

é um funcional da conexão de spin, que se reduz à forma usual (3.12) quando a identificação (3.37) é usada. De modo consistente com o fato que o grupo de simetria local da relatividade geral é o grupo de Lorentz, portanto, podemos dizer que o campo fundamental da gravitação não é a tetrada, mas a conexão de spin.

Capítulo 4

Momento Angular e Energia–Momento como Correntes de Gauge

Se trocarmos o grupo geral de difeomeomorfismos do *espaço–tempo* por transformações atuando no *espaço tangente*, a relatividade geral pode ser interpretada como uma teoria de gauge, e em particular como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz. Neste contexto, mostramos que os tensores momento angular e energia–momento de um campo de matéria geral podem ser obtidos a partir da invariância da integral de ação sob transformações atuando, não no *espaço–tempo*, mas no *espaço tangente*. Como essas transformações realizam-se no espaço interno (tangente), as densidades resultantes de momento angular e energia–momento podem ser vistas como correntes de gauge [34].

4.1 Introdução

Segundo os teoremas de Noether, a conservação de energia–momento está relacionada à invariância da integral de ação sob translações das coordenadas do espaço-tempo, e a conservação de momento angular está relacionada à invariância da integral de ação sob transformações de Lorentz. Uma vez que as ações dos grupos de translação e de Lorentz no espaço–tempo de Minkowski estão perfeitamente bem definidas, neste espaço–tempo os teoremas de Noether podem ser aplicados sem nenhum problema. Agora, em um espaço–tempo curvo, os grupos de translações e de Lorentz não agem de modo natural, no sentido de que suas transformações não estão bem definidas [28]. Chega-se então ao problema de definir energia–momento e momento angular na presença de gravitação, pois neste caso o espaço–tempo é representado por uma variedade (pseudo) riemanniana curva.

Em relatividade geral, a conservação do tensor energia–momento de qualquer campo de matéria é usualmente obtida como uma conseqüência da invariância da integral de ação em relação ao grupo de difeomorfismos do espaço–tempo (transformações gerais de coordenadas). Embora isso seja usualmente considerado aceitável para o tensor energia–momento [26], surgem alguns problemas em relação à conservação de momento angular. Por exemplo, como é bem sabido, não existe uma ação natural do grupo de difeomorfismos em campos espinoriais [35]. Essencialmente, isto significa que para se levar em conta o conteúdo de spin de campos espinoriais, tem-se que, necessariamente, considerar a ação do grupo de Lorentz no espaço–tempo tangente de Minkowski, onde sua ação é bem definida.

Consideremos então a seguinte estrutura: A cada ponto do espaço–tempo — que na presença de gravitação é uma variedade (pseudo) riemanniana curva — há sempre um espaço–tempo tangente de Minkowski associado. Agora, ao invés de considerar o grupo de difeomorfismos do espaço–tempo como o grupo fundamental da gravitação, consideraremos o grupo de simetria *local* da relatividade geral como sendo o grupo de Lorentz, cuja ação dá-se no espaço tangente. Segundo esta construção, a relatividade geral pode ser reinterpretada como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz [29], com os índices relativos ao espaço–tempo de Minkowski como índices *locais* de Lorentz em relação ao espaço–tempo. Conseqüentemente, a conexão de spin deve ser considerada o campo fundamental representando a gravitação [22]. Isto significa usar, ao invés da derivada covariante de Levi–Civita, o operador de Fock–Ivanenko, uma derivada covariante que leva em conta o conteúdo de spin do campo definido no espaço tangente de Minkowski. Esta abordagem, obrigatória no caso de espinores [31], pode ser usada para qualquer campo, sendo neste sentido mais geral que a abordagem espaço–temporal usual da relatividade geral.

Sob o ponto de vista descrito acima — a relatividade geral como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz — mostraremos neste capítulo que os tensores energia–momento e momento angular de um campo de matéria geral podem ser definidos como as correntes de Noether associadas à invariância da integral de ação sob transformações locais no espaço tangente.

4.2 Transformações de Lorentz

Inicialmente, faremos uma breve revisão de algumas idéias apresentadas no capítulo anterior que julgamos relevantes para o que segue. Denotemos por $\{x^a\}$ as coordenadas cartesianas de cada espaço-tempo tangente de Minkowski. Sendo assim, uma transformação de Lorentz infinitesimal dependente da posição escreve-se como

$$\delta x^a = \frac{i}{2}\,\epsilon^{cd}\,L_{cd}\,x^a\,, \tag{4.1}$$

onde $\epsilon^{cd} = \epsilon^{cd}(x^\mu)$ são os parâmetros de Lorentz, e

$$L_{cd} = i(x_c\partial_d - x_d\partial_c) \tag{4.2}$$

são os chamados geradores de Lorentz *orbitais*. Usando estes geradores, a transformação (4.1) pode ser ainda escrita na forma

$$\delta x^a = \epsilon^a{}_d\, x^d \,. \tag{4.3}$$

Uma propriedade interessante da transformação de Lorentz das coordenadas é que ela pode ser reescrita formalmente como uma translação [25]. De fato, usando a forma explícita de L_{cd}, a transformação (4.1) torna-se

$$\delta x^a = i\, \xi^c\, P_c\, x^a \,, \tag{4.4}$$

que é uma translação com

$$\xi^c = \epsilon^c{}_d\, x^d \tag{4.5}$$

como os parâmetros da transformação, e

$$P_c = -i\partial_c \tag{4.6}$$

como geradores. Em outras palavras, uma transformação de Lorentz infinitesimal das coordenadas de Minkowski é equivalente a uma translação com $\xi^c \equiv \epsilon^c{}_d\, x^d$ como parâmetros. Na verdade, esta é uma propriedade dos geradores de Lorentz L_{ab}, cuja ação pode sempre ser reinterpretada como uma translação. A razão para tal equivalência é que, sendo o espaço-tempo de Minkowski transitivo sob translações, quaisquer dois pontos relacionados por uma transformação de Lorentz podem também ser relacionados por uma translação. Note que o inverso não é verdadeiro.

Consideremos agora um campo de matéria geral $\Psi(x)$, que é função das coordenadas do espaço-tempo $\{x^\mu\}$. Sob uma transformação de Lorentz infinitesimal *local* das coordenadas do espaço tangente, o campo Ψ muda de acordo com [32]

$$\delta\Psi \equiv \Psi'(x) - \Psi(x) = \frac{i}{2}\, \epsilon^{ab} J_{ab} \Psi(x) \,, \tag{4.7}$$

onde J_{ab} é um gerador apropriado da transformação de Lorentz infinitesimal. A forma mais geral de J_{ab} é

$$J_{ab} = L_{ab} + S_{ab} \,, \tag{4.8}$$

onde L_{ab} é a parte *orbital* do gerador, cuja forma explícita, dada por (4.2), é a mesma para todos campos, e S_{ab} é a parte *espinorial* do gerador, cuja forma explícita depende do conteúdo de spin do campo Ψ. Note que os geradores orbitais L_{ab} são capazes de atuar no argumento de espaço-tempo de $\Psi(x)$ devido à relação

$$\partial_a = (\partial_a x^\mu)\, \partial_\mu \,.$$

Usando a forma explícita de L_{ab}, a transformação de Lorentz (4.7) pode ser reescrita na forma

$$\delta\Psi = \epsilon^{ab}\, x_b\, \partial_a \Psi + \frac{i}{2}\, \epsilon^{ab} S_{ab} \Psi \ , \tag{4.9}$$

ou equivalentemente,

$$\delta\Psi = i\xi^c P_c \Psi + \frac{i}{2}\, \epsilon^{ab} S_{ab} \Psi \ , \tag{4.10}$$

usando-se a equação (4.5). Em outras palavras. a parte *orbital* da transformação pode ser reduzida a uma translação, e conseqüentemente, a transformação de Lorentz de um campo geral Ψ pode ser reescrita como uma *translação* mais uma transformação de Lorentz estritamente *espinorial*. Note entretanto que, como

$$[P_c, S_{ab}] = 0 \ , \tag{4.11}$$

a transformação (4.10) não é uma transformação de Poincaré. Além disso, os geradores J_{ab} satisfazem a relação de comutação

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i\left(\eta_{bc}\, J_{ad} - \eta_{ac}\, J_{bd} - \eta_{bd}\, J_{ac} + \eta_{ad}\, J_{bc}\right) \ , \tag{4.12}$$

ou seja, a álgebra de Lie do grupo de Lorentz. É fácil verificar que ambos L_{ab} e S_{ab} satisfazem a mesma relação de comutação que J_{ab}, e que comutam entre si:

$$[L_{ab}, S_{cd}] = 0 \ . \tag{4.13}$$

Como uma observação final, é importante notar que, ao invés de quatro funções escalares, as coordenadas x^a do espaço–tempo de Minkowski também podem ser interpretadas como um campo vetorial $x^a(x^\mu)$. Neste caso, contudo. os geradores de Lorentz devem ser escritos na representação vetorial

$$(S_{cd})^a{}_b = i\left(\delta_c{}^a\, \eta_{db} - \delta_d{}^a\, \eta_{cb}\right) \ , \tag{4.14}$$

Conseqüentemente, temos

$$\delta x^a = \frac{i}{2}\, \epsilon^{cd}\, (S_{cd})^a{}_b\, x^b \ , \tag{4.15}$$

e daí

$$\delta x^a = -\epsilon^a{}_d\, x^d \ . \tag{4.16}$$

Portanto, uma transformação de Lorentz das coordenadas de Minkowski escrita com o gerador completo J_{cd} anula-se identicamente:

$$\delta x^a \equiv \frac{i}{2}\, \epsilon^{cd}\, J_{cd}\, x^a = 0 \ . \tag{4.17}$$

A interpretação deste resultado é que, sob a transformação de Lorentz *ativa* (4.1), todos os campos vetoriais sofrem uma transformação de Lorentz *passiva* (4.15). No caso específico das coordenadas, que é também um campo vetorial de Lorentz, as transformações ativas e passivas se cancelam, produzindo um resultado final nulo. Para todos outros campos vetoriais V^a, o resultado será uma transformação de Lorentz ordinária no mesmo x:

$$\delta V^a \equiv V^{a\prime}(x) - V^a(x) = \frac{i}{2}\epsilon^{cd} J_{cd} V^a. \tag{4.18}$$

4.3 Derivada Covariante de Lorentz

Em uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz, o campo fundamental representando a gravitação é a conexão de spin $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_\mu$, um campo tomando valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz,

$$\overset{\circ}{\mathcal{A}}_\mu = \frac{1}{2} \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu \, J_{ab} \, . \tag{4.19}$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\overset{\circ}{A}_\mu = c^{-2} B^a{}_\mu \, P_a + \frac{1}{2} \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu \, S_{ab} \, , \tag{4.20}$$

onde um novo potencial de gauge $B^a{}_\mu$ tomando valores na álgebra de Lie do grupo das translações, foi definido

$$B^a{}_\mu = c^2 \, \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} \, x^b \, , \tag{4.21}$$

sendo a velocidade da luz c introduzida por razões dimensionais. É importante observar que, apesar da existência de um campo de gauge relacionado às translações, e um outro relacionado ao grupo de Lorentz, o grupo de estrutura envolvido nesta construção não é Poincaré, mas o grupo de Lorentz.

Consideremos agora a derivada covariante de Lorentz do campo de matéria Ψ, cuja forma geral é [24]

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_c \Psi = \partial_c \Psi - \frac{1}{2} \, \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_c \, \frac{\delta \Psi}{\delta \epsilon^{ab}} \, . \tag{4.22}$$

Substituindo a transformação (4.9), ela torna-se

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_c \Psi = e^\mu{}_c \, \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi \, , \tag{4.23}$$

onde $e^\mu{}_c$ é a inversa do campo de tetradas

$$e^c{}_\mu = \partial_\mu x^c + \overset{\circ}{A}{}^c{}_{d\mu} x^d \equiv \partial_\mu x^c + c^{-2} B^c{}_\mu, \tag{4.24}$$

e

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \, \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu \, S_{ab} \tag{4.25}$$

é o operador derivada covariante de Fock–Ivanenko [33]. Note que, enquanto que os índices do espaço tangente são levantados e abaixados com a métrica η_{ab}, os índices de espaço–tempo são levantados e abaixados com a métrica riemmaniana

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu \, e^b{}_\nu \, \eta_{ab} \, . \tag{4.26}$$

De acordo com esta construção, a parte *orbital* dos geradores de Lorentz são reduzidas a uma translação, que então dá origem a uma tetrada que depende da conexão de spin. Já que sua ação se reduz em último caso a uma translação, o gerador *orbital* L_{ab} é o responsável pela universalidade da gravitação. De fato, como L_{ab} atua nos campos através de seus argumentos, todos os campos responderão igualmente à sua ação.

Finalmente, observemos que a tetrada pode ser escrita como uma derivada covariante de Lorentz da coordenada x^c, interpretada obviamente como um campo vetorial. Com efeito, tomando-se a definição geral

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu x^c = \partial_\mu x^c + \frac{1}{2} \, \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu \, \frac{\delta x^c}{\delta \epsilon^{ab}}, \tag{4.27}$$

e usando a equação (4.16), ela torna-se

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu x^c = \partial_\mu x^c + \overset{\circ}{A}{}^c{}_{b\mu} x^b \equiv e^c{}_\mu \, . \tag{4.28}$$

o que mostra que a tetrada coincide com a derivada de Fock–Ivanenko do campo vetorial $x^c(x^\mu)$.

4.4 Transformações de Gauge

O efeito do gerador espinorial S_{ab} é produzir uma mudança *total* em Ψ:

$$\delta_t \Psi \equiv \Psi'(x') - \Psi(x) = \frac{i}{2} \, \epsilon^{ab} S_{ab} \Psi \, . \tag{4.29}$$

Portanto, sob uma transformação de Lorentz local gerada por

$$U = \exp\left[\frac{i}{2} \, \epsilon^{ab} \, S_{ab}\right] \, , \tag{4.30}$$

a derivada covariante $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_a \Psi$ mudará de acordo com

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}{}'_a \Psi'(x') = U \overset{\circ}{\mathcal{D}}_a \Psi(x) \, . \tag{4.31}$$

Como

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_a \Psi(x) = e^\mu{}_a \, \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi(x) \, , \tag{4.32}$$

podemos escrever (4.31) na forma

$$e'^{\mu}{}_a(x')\, \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_\mu \Psi'(x') = U_a{}^b\, e^\mu{}_b(x)\, U \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi(x)\ , \tag{4.33}$$

onde $U_a{}^b$ é o elemento usual do grupo de Lorentz na representação vetorial. Já que $e'^{\mu}{}_a(x') = U_a{}^b\, e^\mu{}_b(x)$, temos que

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}'_\mu \Psi'(x') = U \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi(x)\ , \tag{4.34}$$

ou equivalentemente,

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}'_\mu = U \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu U^{-1}\ . \tag{4.35}$$

Usando a derivada de Fock-Ivanenko (4.25), obtemos a transformação de gauge usual

$$\overset{\circ}{A}'_\mu = U \overset{\circ}{A}_\mu U^{-1} + iU\partial_\mu U^{-1}\ . \tag{4.36}$$

A forma infinitesimal de U é

$$U \simeq 1 + \frac{i}{2}\,\epsilon^{cd}\, S_{cd}\ . \tag{4.37}$$

Usando a relação de comutação (4.12) de S_{ab}, obtemos de (4.36) que

$$\delta \overset{\circ}{A}{}^{cd}{}_\mu = \left(\partial_\mu \epsilon^{cd} + \overset{\circ}{A}{}^c{}_{a\mu}\, \epsilon^{ad} + \overset{\circ}{A}{}^d{}_{a\mu}\, \epsilon^{ca}\right) \equiv \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^{cd}\ . \tag{4.38}$$

Queremos agora obter a transformação de Lorentz infinitesimal do campo de tetradas. Inicialmente, temos a transformação gerada por S_{ab}, que produz a mudança *total* na tetrada, isto é, $\delta_t\, e^a{}_\mu \equiv e'^a{}_\mu(x') - e^a{}_\mu(x)$. De (4.24) segue-se que

$$\delta_t\, e^a{}_\mu = \partial_\mu(\delta x^a) + \delta(\overset{\circ}{A}{}^a{}_{d\mu})\, x^d + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{d\mu}\, \delta x^d\ . \tag{4.39}$$

Usando (4.15) e (4.38), obtemos

$$\delta_t\, e^a{}_\mu = -\epsilon^a{}_c\, e^c{}_\mu \equiv \frac{i}{2}\,\epsilon^{cd}(S_{cd})^a{}_b\, e^b{}_\mu\ , \tag{4.40}$$

assim como deveria ser, uma vez que $e^a{}_\mu$ é um campo vetorial de Lorentz nos índices de espaço tangente. Por outro lado, a transformação da tetrada gerada por J_{ab} corresponde a uma transformação no mesmo x^a, ou seja, $\delta e^a{}_\mu \equiv e^{a\prime}{}_\mu(x) - e^a{}_\mu(x)$. Tal transformação pode ser obtida de (4.24) mantendo x^a fixo, e substituindo $\delta \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ dado pela equação (4.38). O resultado é

$$\delta e^a{}_\mu = x_b \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^{ab}. \tag{4.41}$$

Finalmente, há também a transformação gerada pelo gerador orbital L_{ab}. Como a transformação da conexão de spin é gerada pelos geradores de spin S_{ab} — veja as equações (4.36) e (4.37) — isto corresponde a uma transformação devido à variação da coordenada x^a apenas: $\delta_x e^a{}_\mu \equiv e^a{}_\mu(x') - e^a{}_\mu(x)$. De (4.24), vemos que tal transformação é dada por

$$\delta_x e^a{}_\mu = \partial_\mu(\delta x^a) + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{d\mu}(\delta x^d). \tag{4.42}$$

Substituindo (4.3), e fazendo uso da definição (4.5), obtemos

$$\delta_x e^a{}_\mu = \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \xi^a. \tag{4.43}$$

Esta transformação mostra que a tetrada comporta-se como um potencial de gauge translacional sob uma transformação de Lorentz das coordenadas do espaço tangente, em que apenas a mudança devido à variação das coordenadas é considerada. Em outras palavras, a tetrada comporta-se como um potencial de gauge translacional sob uma transformação de Lorentz gerada pelo gerador orbital L_{ab}, cuja ação, como vimos, pode sempre ser reinterpretada como uma translação.

4.5 Conservação de Momento Angular

Consideremos agora um campo de matéria geral Ψ com a integral de ação

$$S = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d^4x \equiv \frac{1}{c}\int L\, e\, d^4x, \tag{4.44}$$

onde $e = \det(e^a{}_\mu) = \sqrt{-g}$, com $g = \det(g_{\mu\nu})$. Assumimos aqui um formalismo de primeira ordem, no qual a lagrangiana depende apenas dos campos e de suas primeiras derivadas. Sob uma transformação de Lorentz local das coordenadas do espaço tangente, ambos $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ e $e^a{}_\mu$ vão mudar. Além disso, ao aplicar o teorema de Noether assumiremos que estas mudanças são independentes, dando origem a duas leis de conservação. Naturalmente, como $\delta\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ e $\delta e^a{}_\mu$ não são independentes, estas leis de conservação também não serão independentes [22].

Consideremos inicialmente a transformação da integral de ação devido à mudança do potencial de gauge de Lorentz $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$. Sob uma transformação de Lorentz das coordenadas do espaço tangente, a integral de ação muda de acordo com

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu}\right] \delta \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu\, d^4x\,, \tag{4.45}$$

onde não foi escrita a variação em relação ao campo Ψ porque ela dá a equação de campo associada [36]. Introduzindo-se a notação

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu}\right] \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu} = e\, \overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^\mu{}_{ab}\,, \tag{4.46}$$

onde $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}$ é o tensor momento angular, segue-se que

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int \overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}\, \delta \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_{\mu}\, e\, d^4x \, . \tag{4.47}$$

Substituindo a transformação (4.38), integrando por partes e desprezando o termo de superfície, obtemos

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\mu}(e\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab})\, \epsilon^{ab}\, d^4x \, . \tag{4.48}$$

Como as quantidades anti-simétricas ϵ^{ab} são arbitrárias, temos

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\mu}(e\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}) - \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\mu}(e\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ba}) = 0 \, , \tag{4.49}$$

ou ainda,

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\mu}(\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}) = 0 \, , \tag{4.50}$$

uma vez que $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab}$ também é anti-simétrico nos índices de espaço tangente.

Usando a identidade

$$\partial_{\mu} e = e\, \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\mu\lambda} \, , \tag{4.51}$$

onde $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ é a conexão de Levi-Civita da métrica (4.26), obtemos

$$\partial_{\mu}\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ab} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\lambda\mu}\, \overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\lambda}{}_{ab} - \overset{\circ}{A}{}^{c}{}_{a\mu}\, \overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{cb} - \overset{\circ}{A}{}^{c}{}_{b\mu}\, \overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^{\mu}{}_{ac} = 0 \, , \tag{4.52}$$

que é a lei de conservação de momento angular usual da relatividade geral. É importante notar que, segundo esta definição, a conservação de momento angular surge como uma conseqüência da invariância da integral de ação sob uma transformação de Lorentz gerada pelo gerador de spin (matricial) S_{ab}.

4.6 Conservação de Energia-Momento

Consideremos agora a transformação da integral de ação devido à mudança da tetrada $e^{a}{}_{\mu}$. Sob uma transformação de Lorentz das coordenadas do espaço tangente,

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^{a}{}_{\mu}} - \partial_{\rho}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho} e^{a}{}_{\mu}}\right] \delta e^{a}{}_{\mu}\, d^4x \, , \tag{4.53}$$

onde novamente não foi escrita a variação em relação ao campo Ψ porque ela dá a equação de campo associada [36]. Introduzindo-se a notação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^{a}{}_{\mu}} - \partial_{\rho}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho} e^{a}{}_{\mu}} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^{a}{}_{\mu}} = -e\, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a} \, , \tag{4.54}$$

sendo $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a}$ o tensor energia–momento, segue-se que

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a}\, \delta e^{a}{}_{\mu}\, e\, d^4x \,. \tag{4.55}$$

Como vimos anteriormente, a conservação de momento angular está relacionada a uma transformação de Lorentz gerada pela parte espinorial dos geradores de Lorentz. Agora, como veremos, a conservação de energia–momento está relacionada a uma transformação de Lorentz gerada pela parte orbital dos geradores de Lorentz, a qual é uma transformação que muda apenas a coordenada x^a, mantendo a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{b\mu}$ fixa. Sob tal transformação a tetrada muda de acordo com a equação (4.43). Substituimos agora esta transformação na variação (4.55), integramos por partes e desprezamos o termo de superfície, de modo a obter

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left[\partial_\mu(e\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a}) - \overset{\circ}{A}{}^{c}{}_{a\mu}(e\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{c})\right]\, \xi^a\, d^4x \,. \tag{4.56}$$

Usando novamente a identidade (4.51), obtemos

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left[\partial_\mu\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\lambda\mu}\,\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\lambda}{}_{a} - \overset{\circ}{A}{}^{c}{}_{a\mu}\,\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{c}\right]\, \xi^a\, e\, d^4x \,. \tag{4.57}$$

Devido à arbitrariedade de ξ^a, segue-se da invariância da integral de ação sob este tipo específico de transformações de Lorentz que

$$\partial_\mu\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\lambda\mu}\,\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\lambda}{}_{a} - \overset{\circ}{A}{}^{c}{}_{a\mu}\,\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{c} = 0 \,, \tag{4.58}$$

que é a lei de conservação usual da relatividade geral. Além disso, a invariância da integral de ação sob uma transformação de Lorentz total implica que $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}_{ca} = e_{c\mu}\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a}$ é simétrico. De fato, substituindo a transformação (4.40) em (4.55), obtemos

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int (\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}_{ca} - \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}_{ac})\, \epsilon^{ca}\, e\, d^4x. \tag{4.59}$$

Levando-se em conta a arbitrariedade do parâmetro ϵ^{ca}, a invariância da integral de ação implica que

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}_{ca} = \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}_{ac} \,. \tag{4.60}$$

É importante notar que, conforme a definição acima, a conservação de energia–momento surge como uma conseqüência da invariância da integral de ação sob aquela parte da transformação de Lorentz que pode ser reinterpretada como uma translação — a parte gerada pelos geradores orbitais. Notemos também que, como a tetrada é linear em $B^a{}_\mu$, o tensor energia–momento também pode ser definido como a derivada funcional da lagrangiana em relação ao potencial de gauge $B^a{}_\mu$:

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\mu}{}_{a} \equiv -\frac{1}{e}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e^a{}_\mu} = -\frac{c^2}{e}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta B^a{}_\mu}. \tag{4.61}$$

Observemos ainda que esta definição, ou seja, a derivada funcional da lagrangiana em relação ao potencial de gauge, coincide com a expressão usual para a corrente da fonte das teorias de gauge de Yang–Mills usuais.

4.7 Observações Finais

Segundo os teoremas de Noether, conservação de energia–momento está relacionada à invariância da integral de ação sob translações, e conservação de momento angular está relacionada à invariância da integral de ação sob transformações de Lorentz. Entretanto, como é bem conhecido, na presença de gravitação o espaço–tempo torna-se uma variedade (pseudo) riemanniana. Como as transformações não podem ser definidas em um espaço-tempo curvo, é necessário introduzir um processo local em que estas leis de conservação podem ser obtidas a partir da invariância da integral de ação sob transformações atuando no espaço tangente (Minkowski), onde elas estão bem definidas.

Considerando-se a relatividade geral como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz, onde a conexão de spin — isto é, o potencial de gauge de Lorentz — é o campo fundamental representando a gravitação, mostramos que é possível obter as leis de conservação de momento angular e energia–momento a partir da invariância da integral de ação sob transformações atuando no espaço tangente. Neste contexto, a conservação de momento angular surge como conseqüência da invariância da integral de ação sob as transformações geradas pela parte *espinorial* dos geradores de Lorentz, as quais são transformações de Lorentz verdadeiras no sentido de que não podem ser reduzidas a translações. Por outro lado, a conservação de energia–momento surge como uma conseqüência da invariância da integral de ação sob transformações geradas pela parte *orbital* dos geradores de Lorentz, as quais são transformações que podem em última análise ser reduzidas a translações. Visto que estas densidades conservadas podem ser obtidas a partir da invariância da integral de ação sob transformações "internas" (isto é, no espaço tangente), elas podem ser consideradas como "correntes de gauge".

Uma propriedade peculiar dessa teoria é que a parte orbital dos geradores de Lorentz se reduz a uma translação, que dá origem a um potencial de gauge *translacional* $c^{-2}B^a{}_\mu = \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b$ que surge como a parte não-trivial do campo de tetradas:

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b. \tag{4.62}$$

O vínculo entre $e^a{}_\mu$ e $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ dá origem ao vínculo entre os tensores de energia–momento e momento angular.

Finalmente, notemos que mesmo no formalismo de tetradas da relatividade geral, nenhum potencial de gauge translacional está presente, e conseqüentemente as leis de conservação não podem nunca ser obtidas a partir da invariância da ação sob as transformações das coordenadas do espaço tangente. De fato, como a tetrada é *invariante* sob uma translação das coordenadas do espaço tangente, nenhuma lei de conservação pode ser obtida. Além disso, da invariância da ação sob uma transformação de Lorentz local das coordenadas do espaço tangente não se obtém a conservação do tensor momento angular, como seria de se esperar do teorema de Noether, mas simplesmente que o tensor energia–momento é simétrico [19]. Quando a relatividade geral é interpretada como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz, e um potencial de gauge "translacional" é introduzido para dar conta da ação dos geradores orbitais, estes problemas são resolvidos.

Capítulo 5

Considerações sobre o Acoplamento Minimal Gravitacional

5.1 Introdução

A forma correta da prescrição de acoplamento gravitacional de campos de partículas elementares na presença de curvatura e torção ainda é um problema em aberto. A dificuldade básica é a ausência completa de resultados experimentais que poderiam servir de guia no estabelecimento de uma prescrição para a interação gravitacional microscópica. Portanto, a única coisa que pode ser feita é analisar a consistência das diversas possibilidades. Há fundamentalmente duas abordagens. A primeira é assumir que o acoplamento é *minimal* em uma conexão de spin de Riemann–Cartan geral. A segunda é considerar que o acoplamento é *minimal* apenas no coeficiente de rotação de Ricci, que é uma conexão de spin sem torção. A proposta básica, neste capítulo, será fazer um estudo comparativo destas duas prescrições. Estaremos interessados principalmente em examinar as conseqüências das prescrições de acoplamento para o tensor energia–momento de matéria, e em particular para as leis de conservação de energia–momento. Além disso, no caso específico de um campo espinorial acoplado à gravitação, analisaremos a forma explícita do tensor energia–momento nas duas prescrições. A idéia é checar se estes resultados podem fornecer alguma pista sobre a definição correta de uma prescrição de acoplamento gravitacional na presença de curvatura e torção [44].

5.2 Prescrições de Acoplamento Gravitacional

A interação de um campo de matéria geral com a gravitação é usualmente obtida através da aplicação da chamada prescrição de acoplamento minimal. Segundo esta prescrição, todas as derivadas ordinárias de espaço–tempo plano ∂_a devem ser trocadas por derivadas covariantes $\mathcal{D}_a$,

$$\partial_a \to \mathcal{D}_a \equiv e^\mu{}_a \, \mathcal{D}_\mu \,, \tag{5.1}$$

onde $e^\mu{}_a$ é a inversa do campo de tetradas [22]

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \omega^a{}_{b\mu} \, x^b \,, \tag{5.2}$$

e

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \, \omega^{ab}{}_\mu \, S_{ab} \tag{5.3}$$

é o operador derivada covariante de Fock–Ivanenko [33], sendo $\omega^{ab}{}_\mu$ um campo de gauge assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz — usualmente chamada conexão de spin — e S_{ab} uma representação apropriada dos geradores de Lorentz. A conexão de spin, que será chamada conexão de Riemann–Cartan, apresentará curvatura e torção, e será compatível com a métrica. É importante lembrar que, enquanto os índices de espaço tangente são levantados e abaixados com a métrica de Lorentz η_{ab}, os índices de espaço–tempo são levantados e abaixados com a métrica riemanniana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, e^a{}_\mu e^b{}_\nu \,. \tag{5.4}$$

A forma correta da prescrição de acoplamento gravitacional na presença de curvatura e torção, isto é, a forma correta da conexão de spin, pode ser considerada um problema ainda não resolvido. Há basicamente duas possibilidades que, a partir de agora, passamos a analisar.

5.2.1 Prescrição de Acoplamento de Riemann–Cartan

A primeira possibilidade é assumir que o acoplamento de um campo de matéria geral à gravitação é *minimal* na conexão de spin de Riemann–Cartan geral, que será denotada por

$$\omega^{ab}{}_\mu = A^{ab}{}_\mu \,. \tag{5.5}$$

Esta conexão está relacionada a uma conexão afim geral $\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}$ compatível com a métrica através de

$$A^{ab}{}_\mu = e^a{}_\lambda \nabla_\mu e^{b\lambda} \equiv e^a{}_\lambda \, \partial_\mu e^{b\lambda} + e^a{}_\lambda \, \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \, e^{b\rho} \,. \tag{5.6}$$

Sob uma transformação de Lorentz infinitesimal das coordenadas do espaço tangente, a conexão de spin transforma-se de acordo com

$$\delta A^{cd}{}_\mu = \left(\partial_\mu \epsilon^{cd} + A^c{}_{a\mu} \, \epsilon^{ad} + A^d{}_{a\mu} \, \epsilon^{ca} \right) \equiv \mathcal{D}_\mu \epsilon^{cd} \,. \tag{5.7}$$

Consideremos agora a transformação da tetrada em que apenas a transformação da coordenada x^a é levada em conta, ou seja, $\delta_x e^a{}_\mu \equiv e^a{}_\mu(x') - e^a{}_\mu(x)$. Como a transformação da conexão de spin é gerada pelo gerador de spin S_{ab}, isto significa que tal transformação é gerada pelo gerador orbital L_{ab}. Da equação (5.2), vê-se que ela é dada por

$$\delta_x e^a{}_\mu = \partial_\mu \delta x^a + A^a{}_{d\mu}\, \delta x^d \, . \tag{5.8}$$

Substituindo (3.8), obtemos

$$\delta_x e^a{}_\mu = \mathcal{D}_\mu \xi^a \equiv \left(\partial_\mu \xi^a + A^a{}_{d\mu}\, \xi^d\right) . \tag{5.9}$$

Esta transformação mostra que a tetrada comporta-se como um potencial de gauge translacional sob uma transformação de Lorentz das coordenadas do espaço tangente em que somente a mudança devido à variação das coordenadas é considerada. Em outras palavras, a tetrada comporta-se como um potencial de gauge translacional sob uma transformação de Lorentz gerada pelo gerador orbital L_{ab}, cuja ação, como já foi visto, pode sempre ser reduzida a uma translação.

5.2.2 Prescrição de Acoplamento de Ricci

Uma segunda possibilidade é considerar que o acoplamento de um campo geral de matéria à gravitação é *minimal* apenas no coeficiente de rotação de Ricci $\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu$, sendo não-minimal em outros casos. A idéia básica por trás desta prescrição é que, como o tensor de contorção funciona como uma força [30] quando o campo gravitacional apresenta uma torção não-nula, a conexão de spin deve também incluir o tensor de contorção para dar conta desta força. Segundo este ponto de vista, portanto, a conexão de spin é escolhida como sendo

$$\omega^{ab}{}_\mu = \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu \equiv A^a{}_{b\mu} - K^a{}_{b\mu} \, , \tag{5.10}$$

onde

$$K^a{}_{b\mu} = \frac{1}{2} e^c{}_\mu \left(T_c{}^a{}_b + T_b{}^a{}_c - T^a{}_{bc}\right) \tag{5.11}$$

é o tensor de contorção, e

$$T^a{}_{bc} = \left(e^\mu{}_b\, e^\nu{}_c - e^\mu{}_c\, e^\nu{}_b\right) \mathcal{D}_\mu e^a{}_\nu \tag{5.12}$$

a torção da conexão $A^a{}_{b\mu}$.

Sob uma transformação de Lorentz infinitesimal das coordenadas do espaço tangente, a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ transforma-se como

$$\delta \overset{\circ}{A}{}^{cd}{}_\mu = \left(\partial_\mu \epsilon^{cd} + \overset{\circ}{A}{}^c{}_{a\mu}\, \epsilon^{ad} + \overset{\circ}{A}{}^d{}_{a\mu}\, \epsilon^{ca}\right) \equiv \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^{cd} \, . \tag{5.13}$$

Por outro lado, a transformação da tetrada devido à variação da coordenada x^a apenas, é agora dada por

$$\delta_x e^a{}_\mu = \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \xi^a \equiv \left(\partial_\mu \xi^a + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{d\mu} \, \xi^d \right) . \tag{5.14}$$

Vemos também que, neste caso, a tetrada comporta-se como um potencial de gauge translacional sob uma transformação de Lorentz gerada pelo gerador orbital L_{ab}.

Observe que esta prescrição de acoplamento, cuja conexão de spin é dada por uma conexão de Riemann–Cartan geral menos o tensor de contorção, resulta ser equivalente à prescrição de acoplamento da relatividade geral, na qual o tensor de contorção é nulo e a conexão de spin é simplesmente os coeficientes de rotação de Ricci [33]

$$\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} = \frac{1}{2} e^c{}_\mu \left(C_c{}^a{}_b + C_b{}^a{}_c - C^a{}_{bc} \right) , \tag{5.15}$$

onde

$$C^a{}_{bc} = \left(e^\mu{}_b \, e^\nu{}_c - e^\mu{}_c \, e^\nu{}_b \right) \partial_\nu e^a{}_\mu \tag{5.16}$$

é o coeficiente de não-holonomia. Como é bem sabido, o coeficiente de Ricci está relacionado à conexão de Levi–Civita $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\mu}$ através de [31]

$$\overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_\mu = e^a{}_\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\mu e^{b\lambda} \equiv e^a{}_\lambda \, \partial_\mu e^{b\lambda} + e^a{}_\lambda \, \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\mu} \, e^{b\rho} . \tag{5.17}$$

5.3 Conservação de Energia–Momento

Agora, nós vamos analisar as conseqüências destas duas prescrições de acoplamento para a conservação de energia–momento. Inicialmente, consideremos a integral de ação de um campo de matéria geral

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \, d^4x . \tag{5.18}$$

Sob uma transformação de Lorentz das coordenadas do espaço tangente,

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a{}_\mu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho e^a{}_\mu} \right) \delta e^a{}_\mu \, d^4x , \tag{5.19}$$

onde não escrevemos a variação em relação ao campo de matéria porque ela dá a equação de campo associada. Usando a notação $\det(e^a{}_\mu) = e$, definimos

$$\frac{1}{e} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a{}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu e^a{}_\mu} \right) = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a{}_\mu} \equiv -\mathcal{T}^\mu{}_a , \tag{5.20}$$

onde $\mathcal{T}^a{}_\mu$ é o tensor energia–momento *dinâmico* do campo de matéria, obtemos

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \mathcal{T}^\mu{}_a \, \delta e^a{}_\mu \, e \, d^4x = \frac{1}{c} \int \mathcal{T}^a{}_\mu \, \delta e^\mu{}_a \, e \, d^4x . \tag{5.21}$$

Por tensor energia–momento dinâmico entendemos o tensor que aparece como fonte no lado direito das equações do campo gravitacional.

Agora, sabemos que a conservação de energia–momento está relacionada a uma transformação de Lorentz gerada pela parte orbital dos geradores de Lorentz [34], que é uma transformação que muda somente a coordenada x^a, mantendo a conexão de spin fixa. Uma vez que temos duas possibilidades para a conexão de spin, teremos também duas possibilidades para $\delta_x e^a{}_\mu$, que dará origem a duas leis de conservação distintas. Vamos estudar cada uma dessas possibilidades.

5.3.1 Conservação de Energia–Momento no Acoplamento de Riemann–Cartan

Substituindo a transformação da tetrada (5.9) na variação (5.21), integrando por partes e desprezando o termo de superfície, obtemos

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left[\partial_\mu (e\mathcal{T}^\mu{}_a) - A^c{}_{a\mu}(e\mathcal{T}^\mu{}_c)\right] \, \xi^a \, d^4x \, . \tag{5.22}$$

Como

$$\partial_\mu e = e \, \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\lambda\mu} = e \, \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} = e\left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} - K^\lambda{}_{\mu\lambda}\right) \, , \tag{5.23}$$

temos

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\partial_\mu \mathcal{T}^\mu{}_a + \Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_a - A^c{}_{a\mu} \mathcal{T}^\mu{}_c - K^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_a\right) \xi^a \, e \, d^4x \, . \tag{5.24}$$

Devido à arbitrariedade de ξ^a, segue-se da invariância da integral de ação sob este tipo específico de transformações de Lorentz que

$$\partial_\mu \mathcal{T}^\mu{}_a + \Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_a - A^c{}_{a\mu} \mathcal{T}^\mu{}_c = K^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_a \, . \tag{5.25}$$

Esta é a lei de conservação em termos de uma derivada covariante mista. Ela pode ser reescrita em termos da conexão afim somente:

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\rho \equiv \partial_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\rho + \Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_\rho - \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \mathcal{T}^\mu{}_\lambda = K^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_\rho \, . \tag{5.26}$$

Alternativamente, já que

$$\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\mu} + K^\lambda{}_{\rho\mu} \, , \tag{5.27}$$

a lei de conservação acima pode ser escrita como

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\rho \equiv \partial_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\rho + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{\lambda\mu} \mathcal{T}^\lambda{}_\rho - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\mu} \mathcal{T}^\mu{}_\lambda = K^\lambda{}_{\rho\mu} \mathcal{T}^\mu{}_\lambda \, . \tag{5.28}$$

Por conseguinte, vemos que na presença de curvatura e torção, a prescrição de acoplamento de Riemann–Cartan implica que o tensor de energia–momento não é conservado no sentido covariante.

5.3.2 Conservação de Energia–Momento no Acoplamento de Ricci

Consideremos agora a segunda possibilidade. Substituindo a transformação da tetrada (5.14) na variação (5.21), integrando por partes e desprezando o termo de superfície, obtemos

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left[\partial_\mu(e\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a) - \overset{\circ}{A}{}^c{}_{a\mu}(e\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_c)\right] \xi^a \, d^4x \,. \tag{5.29}$$

Usando as identidades (5.23) e (5.10), obtemos

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left[\partial_\mu \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a + (\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} - K^\mu{}_{\lambda\mu})\, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\lambda{}_a - (A^c{}_{a\mu} - K^c{}_{a\mu})\, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_c\right] \xi^a \, e \, d^4x \,. \tag{5.30}$$

Devido à arbitrariedade de ξ^a, segue-se da invariância da integral de ação sob este tipo específico de transformação de Lorentz que

$$\partial_\mu \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_a + (\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} - K^\mu{}_{\lambda\mu})\, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\lambda{}_a - (A^c{}_{a\mu} - K^c{}_{a\mu})\, \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_c = 0 \,, \tag{5.31}$$

o que coincide com a lei de conservação da relatividade geral. Com efeito, ela pode ser reescrita na forma

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_\rho \equiv \partial_\mu \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_\rho + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{\lambda\mu} \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^\lambda{}_\rho - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\mu} \overset{c}{\mathcal{T}}{}^\mu{}_\lambda = 0 \,. \tag{5.32}$$

Portanto, vemos que neste caso, o tensor energia–momento é conservado no sentido covariante.

5.4 Exemplo: Campo Espinorial

Uma característica fundamental da lagrangiana do campo espinorial é que ela é linear nas derivadas do campo. De modo distinto, as lagrangianas para campos tensoriais são quadráticas nas derivadas do campo, e conseqüêntemente haverá sempre um tensor métrico contraindo ambas as derivadas. Para um campo espinorial, entretanto, por causa da linearidade referida acima, não há qualquer tensor métrico presente na lagrangiana. De fato, ao invés de um tensor métrico, há um campo de tetradas na lagrangiana espinorial, e por conseguinte, neste caso o tensor energia–momento dinâmico deve necessariamente ser escrito como a derivada funcional da lagrangiana em relação ao campo de tetradas, conforme a equação (5.20).

Uma outra característica importante do campo espinorial é que não existe representação espinorial do grupo de transformações gerais de coordenadas do espaço–tempo [35]. Isto significa que não é possível definir uma derivada covariante espaço–temporal ∇_μ para um campo espinorial. A prescrição de acoplamento mínimal para esses campos deve, portanto, necessariamente levar em conta o conteúdo de spin do espinor definido no *espaço tangente*, o que implica usar a derivada de Fock–Ivanenko ao invés de uma derivada covariante espaço–temporal. Assim sendo, haverá sempre a presença simultânea de dois tipos de índices: de Lorentz local (ou tangente), e índices tensoriais de espaço–tempo. Isto, por sua vez, leva à presença explícita de uma tetrada conectando estes dois tipos de índices. Com efeito, na presença de gravitação, usando-se a prescrição de acoplamento mínimal, a lagrangiana de Dirac que se obtém é

$$\mathcal{L}_\psi = e\,c\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\bar{\psi}\,\gamma^a\,e^\mu{}_a\,\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}^*_\mu\bar{\psi}\,\gamma^a\,e^\mu{}_a\,\psi\right) - m\,c\,\bar{\psi}\psi\right], \tag{5.33}$$

onde a derivada covariante de Fock–Ivanenko é escrita agora com a representação espinorial dos geradores de Lorentz, dada por [24]

$$S_{ab} = \frac{1}{2}\sigma_{ab} \equiv \frac{i}{4}\left[\gamma_a, \gamma_b\right]. \tag{5.34}$$

Assim, podemos ver que, de modo a contrair a matriz de Dirac γ^a com a derivada de Fock–Ivanenko $\mathcal{D}_\mu$, ao invés de um tensor métrico, um campo de tetradas deve estar presente na lagrangiana.

Agora, como vimos, há duas prescrições de acoplamento possíveis para descrever a interação de um campo de matéria com a gravitação, que darão origem a dois tensores de energia–momento distintos

$$\mathcal{T}^a{}_\mu = \frac{1}{e}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial e^\mu{}_a} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial\partial_\nu e^\mu{}_a}\right), \tag{5.35}$$

Com o intuito de averigüar as diferenças entre eles, vamos calcular explicitamente o tensor energia–momento do campo espinorial para os dois casos.

5.4.1 Tensor Energia–Momento no Acoplamento de Riemann–Cartan

De início vamos calcular a forma explícita do tensor energia–momento na prescrição de acoplamento de Riemann–Cartan. Neste caso, o primeiro termo de $\mathcal{T}^a{}_\mu$ que se obtém é

$$\frac{1}{e}\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial e^\mu{}_a} = \tau^a{}_\mu - \frac{1}{2}\left(A^a{}_{b\nu}\,\varphi_\mu{}^{b\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\,\varphi_\sigma{}^{\nu a}\right), \tag{5.36}$$

onde

$$\tau^a{}_\mu = \frac{ic\hbar}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}^*_\mu\bar{\psi}\gamma^a\psi\right) \tag{5.37}$$

é o tensor energia–momento canônico modificado pela presença da gravitação, e

$$\varphi^{abc} = -\varphi^{acb} = \mathcal{S}^{abc} + \mathcal{S}^{cab} - \mathcal{S}^{bca}, \tag{5.38}$$

sendo

$$\mathcal{S}^{a}{}_{bc} = \frac{c\hbar}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^{a} \, S_{bc} + S_{bc} \, \gamma^{a} \right) \psi \tag{5.39}$$

o tensor de *spin*. Note que, no caso específico de um campo espinorial, $\mathcal{S}^{cab} = \mathcal{S}^{bca}$, e daí

$$\varphi^{abc} = \mathcal{S}^{abc} \; .$$

Note também que estamos considerando a dependência da conexão de spin no campo de tetradas, conforme a equação (5.6). Se a conexão de spin e a tetrada fossem consideradas como campos independentes, o primeiro termo de $\mathcal{T}^{a}{}_{\mu}$ daria apenas o tensor energia-momento canônico $\tau^{a}{}_{\mu}$ [39]. Por outro lado, o segundo termo de $\mathcal{T}^{a}{}_{\mu}$ é

$$\frac{1}{e}\, \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \partial_{\nu} e^{\mu}{}_{a}} = \frac{1}{2e} \partial_{\nu} \left(e \varphi_{\mu}{}^{a\nu} \right) = \frac{1}{2} \left[\partial_{\nu} \varphi_{\mu}{}^{a\nu} + \left(\Gamma^{\nu}{}_{\rho\nu} - K^{\nu}{}_{\rho\nu} \right) \varphi_{\mu}{}^{a\rho} \right] \; , \tag{5.40}$$

onde usamos a identidade (5.23). Substituindo (5.36) e (5.40) em (5.20), vemos que o tensor energia-momento dinâmico do campo espinorial é dado por

$$\mathcal{T}^{a}{}_{\mu} = \tau^{a}{}_{\mu} - \frac{1}{2} D_{\nu} \varphi_{\mu}{}^{a\nu} + \frac{1}{2} K^{\nu}{}_{\rho\nu} \varphi_{\mu}{}^{a\rho} \; , \tag{5.41}$$

onde D_{ν} denota a derivada covariante *total* de $\varphi_{\mu}{}^{a\nu}$, ou seja,

$$D_{\nu} \varphi_{\mu}{}^{a\nu} = \partial_{\nu} \varphi_{\mu}{}^{a\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} \, \varphi_{\sigma}{}^{a\nu} + A^{a}{}_{b\nu} \, \varphi_{\mu}{}^{b\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\nu} \, \varphi_{\mu}{}^{a\sigma} \; . \tag{5.42}$$

Escrevendo $\mathcal{T}^{\rho}{}_{\mu} = e^{\rho}{}_{a} \, \mathcal{T}^{a}{}_{\mu}$, nós temos equivalentemente

$$\mathcal{T}^{\rho}{}_{\mu} = \tau^{\rho}{}_{\mu} - \frac{1}{2} \nabla_{\nu} \varphi_{\mu}{}^{\rho\nu} + \frac{1}{2} K^{\nu}{}_{\sigma\nu} \varphi_{\mu}{}^{\rho\sigma} \; . \tag{5.43}$$

A propriedade de simetria do tensor energia-momento dinâmico (5.35) não é de modo algum óbvia [38]. De fato, como veremos a seguir, este tensor não é simétrico.

5.4.2 Tensor Energia–Momento no Acoplamento de Ricci

Agora vamos calcular a forma explícita do tensor energia-momento na prescrição de acoplamento de Ricci. O primeiro termo de $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{a}{}_{\mu}$ é dado por

$$\frac{1}{e} \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial e^{\mu}{}_{a}} = \overset{\circ}{\tau}{}^{a}{}_{\mu} - \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{b\nu} \, \varphi_{\mu}{}^{b\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \, \varphi_{\sigma}{}^{\nu a} \right) \; , \tag{5.44}$$

onde

$$\overset{\circ}{\tau}{}^{a}{}_{\mu} = \frac{ic\hbar}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^{a} \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\mu} \psi - \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^{*}_{\mu} \bar{\psi} \gamma^{a} \psi \right) \tag{5.45}$$

é o tensor energia-momento modificado pela presença de gravitação. Note que estamos considerando a dependência da conexão de spin no campo de tetradas dada pela equação (5.17). Por outro lado, o segundo termo de $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{a}{}_{\mu}$ é

$$\frac{1}{e}\, \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \partial_{\nu} e_{a}{}^{\mu}} = \frac{1}{2e} \partial_{\nu} \left(e \varphi_{\mu}{}^{a\nu} \right) \; . \tag{5.46}$$

Substituindo (5.44) e (5.46) em (5.20), vemos que o tensor energia–momento espinorial que se obtém é

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{a}{}_{\mu} = \overset{\circ}{\tau}{}^{a}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{D}_{\nu}\varphi_{\mu}{}^{a\nu} \, , \tag{5.47}$$

onde $\overset{\circ}{D}_{\nu}$ denota a derivada covariante *total* de $\varphi_{\mu}{}^{a\nu}$, ou seja,

$$\overset{\circ}{D}_{\nu}\varphi_{\mu}{}^{a\nu} = \partial_{\nu}\varphi_{\mu}{}^{a\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\,\varphi_{\sigma}{}^{a\nu} + \overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{b\nu}\,\varphi_{\mu}{}^{b\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\sigma\nu}\,\varphi_{\mu}{}^{a\sigma} \, . \tag{5.48}$$

Escrevendo $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu} = e^{\rho}{}_{a}\,\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{a}{}_{\mu}$, temos equivalentemente

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu} = \overset{\circ}{\tau}{}^{\rho}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\varphi_{\mu}{}^{\rho\nu} \, . \tag{5.49}$$

Vemos deste modo que $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu}$ é o tensor de Belinfante–Rosenfeld [40] obtido do tensor energia–momento canônico [41]. Com efeito, pode-se verificar que

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\varphi^{\mu\rho\nu} = g^{\nu\mu}\overset{\circ}{\tau}{}^{\rho}{}_{\nu} - g^{\nu\rho}\overset{\circ}{\tau}{}^{\mu}{}_{\nu} \, , \tag{5.50}$$

o que mostra que o tensor energia–momento *dinâmico* $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu}$ do campo de Dirac no acoplamento de Ricci é simétrico. Além disso, é fácil ver que os tensores energia–momento $\mathcal{T}^{\rho}{}_{\mu}$ e $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu}$ satisfazem a relação

$$\mathcal{T}^{\rho}{}_{\mu} = \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu} + \frac{1}{2}\left(K^{\sigma\nu}{}_{\mu}\,\varphi^{\rho}{}_{\sigma\nu} + K^{\sigma}{}_{\mu\nu}\,\varphi_{\sigma}{}^{\rho\nu} - K^{\rho}{}_{\sigma\nu}\,\varphi_{\mu}{}^{\sigma\nu}\right) \, . \tag{5.51}$$

Note finalmente que, enquanto o tensor energia–momento *dinâmico* é conservado no sentido covariante,

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\rho}\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{\rho}{}_{\mu} = 0 \, , \tag{5.52}$$

o tensor energia–momento *canônico* $\tau^{\rho}{}_{\mu}$ não é. De fato, pode-se verificar que [42]

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\rho}\overset{\circ}{\tau}{}^{\rho}{}_{\mu} = -\frac{1}{4}\,\overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu}\,S_{\lambda}{}^{\rho\nu} \, . \tag{5.53}$$

5.5 Observações Finais

Como vimos, há duas prescrições distintas que podem ser usadas para descrever o acoplamento de um campo de matéria de uma partícula à gravitação. A primeira é obtida admitindo-se que o acoplamento é *minimal* na conexão de spin de Riemann–Cartan geral. Há, contudo, dois problemas em relação a esta prescrição: O tensor energia–momento de um campo de matéria geral não é conservado covariantemente e não é simétrico. A segunda possibilidade é considerar que o acoplamento de um campo geral de matéria à gravitação é minimal no coeficiente de rotação de Ricci. Neste caso, como vimos, o tensor energia–momento dinâmico é conservado covariantemente e é simétrico.

As propriedades mencionadas acima das prescrições de acoplamento podem ser usadas para checar sua consistência. Por exemplo, tomemos novamente a variação da integral de ação sob uma transformação de Lorentz local,

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \mathcal{T}^{\mu}{}_{a}\, \delta e^{a}{}_{\mu}\, e\, d^4x \, . \tag{5.54}$$

Como vimos no capítulo anterior, a mudança *total* do campo de tetradas, isto é, $\delta_t e^a{}_\mu \equiv e'^a{}_\mu(x') - e^a{}_\mu(x)$, pode ser escrita como (veja a equação (4.40))

$$\delta_t e^a{}_\mu = -\epsilon^a{}_b e^c{}_\mu \, , \tag{5.55}$$

Então, substituindo a última expressão em (5.54), obtemos

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int (\mathcal{T}_{ca} - \mathcal{T}_{ac})\; \epsilon^{ca}\; h\, d^4x \, . \tag{5.56}$$

Então, levando-se em conta a arbitrariedade do parâmetro de Lorentz ϵ^{ca}, a invariância da integral de ação sob uma transformação de Lorentz *total* implica que

$$\mathcal{T}_{ca} = \mathcal{T}_{ac} \, .$$

Logo, se a integral de ação do campo de matéria é invariante sob uma transformação de Lorentz local, o tensor energia–momento dinâmico é necessariamente simétrico [19]. Este resultado, como pode-se ver, favorece a prescrição de acoplamento de Ricci.

Um outro problema da prescrição de acoplamento de Riemann–Cartan é o fato de que o tensor energia–momento neste caso não é conservado covariantemente. Em princípio, isto não seria um problema porque este tipo de conservação não é uma lei de conservação real no sentido de que ela não produz uma "carga" conservada no tempo, mas é simplesmente uma identidade que diz como energia e momento são trocados entre matéria e gravitação. No entanto, uma vez que $\mathcal{T}^\rho{}_\mu$ é o tensor que aparece como fonte no lado direito das equações do campo gravitacional, elas podem ser inconsistentes com as identidades de Bianchi da teoria, e isto certamente seria um problema.

Mas ainda existem outras dificuldades com relação à prescrição de acoplamento de Riemann–Cartan. Por exemplo, quando usada para descrever a interação gravitational do campo eletromagnético, ela destrói a invariância de gauge $U(1)$ da teoria de Maxwell. Por esta razão, afirma-se freqüentemente que o campo eletromagnético não sente torção [45]. Por outro lado, o acoplamento de Ricci, além de não apresentar os problemas acima, atribui à prescrição de acoplamento da relatividade geral uma espécie de caráter *universal* no sentido de que todas as outras prescrições de acoplamento tornam-se equivalentes a ela. Um exemplo particular é a gravidade teleparalela. Nesta teoria, a conexão de spin de Riemann–Cartan anula-se em toda parte, e a conexão de spin teleparalela é dada simplesmente por menos o tensor de contorção [46]. Inversamente, a relatividade geral corresponde ao caso em que a torção é nula, e a conexão de spin torna-se neste caso simplesmente o coeficiente de rotação de Ricci.

A idéia básica por trás desta prescrição de acoplamento é que, enquanto a curvatura geometriza a interação gravitacional, a contorção desempenha o papel de força [30]. Logo, quando o campo gravitacional apresenta simultaneamente curvatura e torção, a conexão de spin deve incluir necessariamente o tensor de contorção para dar conta desta força. De acordo com este ponto de vista, a gravitação poderia ser descrita alternativamente em termos de curvatura ou torção. A razão para esta descrição dual é a universalidade da interação gravitacional. Em outras palavras, como qualquer outra interação da Natureza, a gravitação admite um descrição como uma teoria de gauge. De fato, a gravitação teleparalela é conhecida ser uma teoria de gauge, em que a contorção desempenha um papel de força. Por outro lado, a universalidade da gravitação significa que todas as partículas sentem a gravidade da mesma forma. Em conseqüência disso, é possível descrever alternativamente a gravidade não como uma *força*, mas como uma *curvatura* no espaço–tempo, a interação gravitacional neste caso sendo obtida fazendo-se com que as partículas sigam as geodésicas do espaço–tempo. Esta é a abordagem usada na relatividade geral, onde o conceito de força gravitacional está ausente. Naturalmente, qualquer caso intermediário, em que a conexão apresenta curvatura e torção simultaneamente, também é possível, mas todas elas, segundo a prescrição de Ricci, resultar-se-ão equivalentes à relatividade geral.

Capítulo 6

Conclusões

Ao desenvolver a teoria da relatividade geral. Einstein buscava expandir a covariância da relatividade restrita para além da covariância de Lorentz. pois imaginava que com isso estenderia automaticamente o princípio de relatividade para movimentos acelerados. Para ele, uma teoria que generalizasse o princípio da equivalência — na forma em que assegura a equivalência entre aceleração uniforme e um campo gravitacional homogêneo — seria necessariamente uma teoria de gravitação. Apesar da hesitação inicial devido à dificuldade em se definir sistemas de coordenadas no espaço-tempo através das operações familiares usando barras e relógios padrões, Einstein sentiu-se obrigado, como ele próprio observou, a aceitar o requisito de covariância geral como resposta ao problema de extensão da relatividade simplesmente porque não conseguiu encontrar uma maneira natural de restringir os possíveis sistemas de coordenadas do espaço-tempo. De fato, covariância geral inclui transformações que não têm nada a ver com mudanças de estados de movimento, tais como transformações entre sistemas de coordenadas espaciais polares e cartesianas.

Outro problema relacionado à covariância geral é o fato de, aparentemente, ela não possuir significado físico, visto que qualquer teoria é passível de receber uma formulação covariante geral. Em outras palavras, ela não leva a uma prescrição de acoplamento minimal, e não tem, portanto, conteúdo dinâmico. Agora, interpretando-se a relatividade geral como uma teoria de gauge, e levando-se em conta a idéia de Guttmann e Lyre [17] de que as quantidades e os objetos fisicamente significantes podem ser representados por funções definidas nas fibras do fibrado da teoria em questão (o que não significa que, inversamente, todas as estruturas nas fibras são fisicamente relevantes), podemos eliminar tais problemas. Com efeito, através da introdução de um vínculo entre o campo de tetradas e a conexão de spin, dado por

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_{b\mu}\, x^b \ ,$$

concluímos primeiramente que o grupo de simetria *local* que governa a interação gravitacional é o grupo de Lorentz. Tal afirmação contraria a visão corrente segundo a qual a gravitação deve estar necessariamente relacionada à uniformidade do espaço-tempo. Baseado nesse resultado, construimos um novo princípio de gauge para a gravitação. Em outras palavras, estabelecemos as bases de uma nova teoria de gauge para a gravitação, fundamentada no grupo de Lorentz. Em completo acordo com as teorias de Yang-Mills, cujos campos fundamentais são conexões em fibrados, o campo fundamental da gravitação, conforme os nossos resultados, não é a métrica ou a tetrada, mas a conexão de spin, isto é, uma conexão assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Mostramos que nessa reformulação da relatividade geral — dada por uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz — a prescrição de acoplamento minimal obtida da derivada covariante de Lorentz coincide com a prescrição de acoplamento minimal da formulação tradicional da relatividade geral. Nesta nova formulação, portanto, o conceito de covariância geral não desempenha nenhum papel dinâmico, não sendo necessário na descrição da interação gravitacional. Os estados de movimento arbitrários podem ser representados por campos de tetradas que se relacionam através das transformações de Lorentz locais. Não temos aqui, portanto, o problema de restringir o grupo de transformações de modo a não incluir sistemas de coordenadas que não representam estados de movimento.

Dentro do contexto das teorias de gauge, mostramos em seguida como as leis de conservação de energia-momento e momento angular podem ser obtidas através do requerimento de invariância sob transformações atuando no espaço tangente (interno), como é usual em teorias de gauge, mas de modo distinto à forma como são obtidas na formulação usual da relatividade geral, isto é, através do requerimento de invariância sob o grupo de difeomorfismos do espaço-tempo. Ou seja, as densidades de energia-momento e momento angular são correntes de gauge na nossa formulação da relatividade geral.

Fock, entre outros, entendia um princípio de relatividade como uma declaração de uniformidade do espaço-tempo. Sob este ponto de vista, realmente, a relatividade geral não generaliza a "relatividade" da teoria da relatividade especial. Pelo contrário, a reduz drasticamente, uma vez que o grupo de simetria é reduzido para o trivial, aquele que contém apenas a transformação identidade. Por outro lado, vista como uma teoria de gauge para o grupo das Lorentz, a teoria da gravitação de Einstein adquire naturalmente o direito de se chamar "relatividade geral", pois como vimos seu grupo de covariância vai muito além do grupo de Lorentz de dimensão finita da relatividade especial. Ele é um grupo de dimensão infinita — o grupo *local* de Lorentz.

Apêndice A

Cinemática de um Espaço-Tempo com Constante Cosmológica Infinita

A.1 Introdução

Usando-se contrações de Inönü–Wigner dos grupos e espaços de de Sitter, estudaremos neste apêndice uma solução das equações de Einstein sem fonte com um valor infinito para a constante cosmológica Λ [23]. Quando $\Lambda \to \infty$, o espaço-tempo torna-se um cone quadrimensional, dual ao espaço de Minkowski por uma inversão espaço-temporal. Esta inversão relaciona o vértice do 4–cone com o infinito do espaço de Minkowski, e o infinito do 4–cone com o cone de luz de Minkowski. O limite não-relativístico $c \to \infty$ é depois considerado, o grupo cinemático sendo neste caso um grupo de Galileu modificado em que as translações no espaço e no tempo são trocadas pelos limites não-relativísticos das correspondentes transformações conformes próprias. Este grupo satisfaz a mesma álgebra de Lie abstrata do grupo de Galileu e pode ser chamado de grupo de *Galileu conforme*. Os resultados podem ser de interesse para a cosmologia do Universo primordial.

Qualquer grupo cinemático tem sempre um subgrupo relacionado à isotropia do espaço (grupo de rotações) e um subgrupo relacionado à equivalência de referenciais inerciais (boosts). As transformações restantes, genericamente ditas *translações*, podem ser ou não comutativas, e são responsáveis pela homogeneidade do espaço e do tempo. Isto vale não apenas para a cinemática da relatividade especial, mas também para a cinemática galileana e para outras cinemáticas não-relativísticas concebíveis [47], que diferem uma da outra precisamente por serem fundamentadas em diferentes grupos cinemáticos.

O exemplo mais conhecido é do grupo de Poincaré $\mathcal{P}$, um grupo naturalmente associado ao espaço-tempo de Minkowski M como seu grupo de movimentos. Ele contém, na forma de um produto semi-direto, o grupo de Lorentz $\mathcal{L} = SO(3,1)$ e o grupo de translações $\mathcal{T}$, sendo que o último atua transitivamente em M e sua variedade é apenas M. De fato, o espaço-tempo de Minkowski é um espaço homogêneo sob $\mathcal{P}$, precisamente o quociente $M \equiv \mathcal{T} = \mathcal{P}/\mathcal{L}$. A invariância de M sob as transformações de $\mathcal{P}$ reflete a sua uniformidade. O subgrupo de Lorentz guarante uma isotropia ao redor de um dado ponto de M, e a invariância por translações impõe esta isotropia ao redor de qualquer outro ponto. Este é o significado usual de "uniformidade", em que $\mathcal{T}$ é responsável pela equivalência de todos os pontos do espaço-tempo.

O conceito de contração de grupo, por outro lado, foi introduzido inicialmente [48, 49] para formalizar e generalizar o fato bem conhecido de que o grupo de Galileu pode ser obtido do grupo de Lorentz tomando-se o limite não-relativístico $c \to \infty$. O processo geral de contração de grupo envolve sempre uma escolha preliminar de coordenadas convenientes, em termos das quais um certo parâmetro é explicitado. Uma cinemática nova pode então ser obtida tomando-se um limite apropriado deste parâmetro. No caso específico da contração do grupo de Lorentz para o grupo de Galileu, o parâmetro é a velocidade da luz c, e o limite é encontrado fazendo c tender ao infinito.

Um outro exemplo bem conhecido de contração de grupo é aquele em que o grupo de Poincaré é obtido a partir de qualquer um dos dois grupos de de Sitter através de um limite não-cosmológico [50]. Neste caso, o parâmetro de contração é o pseudo-raio de de Sitter $\mathcal{R}$, e o limite é obtido tomando-se $\mathcal{R} \to \infty$. Os espaços de de Sitter são soluções das equações de Einstein para um espaço vazio com uma constante cosmológica não-nula $\Lambda = R/4$, sendo R a curvatura escalar dos espaços de de Sitter. Já que $R \propto \mathcal{R}^{-2}$, este limite é equivalente ao limite em que $\Lambda \to 0$.

Modelos cosmológicos inflacionários, por outro lado, supõem um valor muito grande para a constante cosmológica Λ nos primeiros estágios do Universo. A relação entre seu valor atual* Λ_0 e seu valor Λ_{GUT} quando houve a quebra da simetria de grande unificação é [55]

$$\Lambda_{GUT} \approx 10^{108}\, \Lambda_0 \,.$$

Subseqüentemente, com a quebra de simetria eletro-fraca, houve uma outra fase de transição de escala de energia da ordem de

$$\Lambda_{EW} \approx 10^{57}\, \Lambda_0 \,.$$

Logo, de acordo com este esquema, a constante cosmológiaca foi muito alta no começo do Universo, mudando mais tarde para Λ_{GUT}, depois para Λ_{EW}, e por fim para Λ_0. Como Λ conseguiu mudar de um valor inicial tão grande para seu valor atual é uma questão em aberto.

*Alguns resultados observacionais recentes parecem indicar um valor alto para a atual constante cosmológica. Veja, por exemplo, as referências [51, 52, 53, 54].

Agora, por razões de simetria, é tentador assumir um Λ primordial infinito, em algum instante inicial, a ser seguido nas épocas posteriores por um decaimento (ou através de uma dependência temporal ou através de transições de fase) mas ainda com um termo cosmológico grande que causasse a inflação. Toda matéria (energia) torna-se insignificante na presença de uma constante cosmológica infinita, de modo que no estágio inicial o espaço-tempo do Universo devia ser uma solução limite para a equação de Einstein sem fonte com um Λ infinito. Usando contrações de Inönü–Wigner [50, 56] dos grupos e espaços de de Sitter, já se mostrou que esta solução é um espaço-tempo cone quadrimensional, cujo grupo cinemático correspondente é o grupo de Poincaré *conforme* [57]. Neste espaço-tempo cone, a métrica é singular em todo lugar exceto num subespaço, o cone de luz tridimensional. Esta característica singular da métrica não proíbe a existência bem definida da conexão de Levi-Civita e do tensor de Riemann. Ela faz do cone quadridimensional, entretanto, um espaço-tempo muito estranho. Distâncias podem ser definidas somente no cone de luz, onde ela é nula entre quaisquer dois pontos. Em particular, nenhuma distância está definida nas seções tipo-espaço. Seções espaciais podem, entretanto, recuperar uma noção de distância no limite não-relativístico da velocidade da luz c infinita. Neste limite, o cone fornece sua métrica limite à seção espacial. Nossa meta aqui é estudar, usando contrações de Inönü–Wigner, as propriedades geométricas e o grupo cinemático de tal espaço-tempo especulativo, em que ambas a constante cosmológica e a velocidade da luz são infinitas. Começamos com uma breve revisão dos espaços e grupos de de Sitter.

A.2 Grupos e Espaços de de Sitter

Os espaços de de Sitter são os únicos espaços-tempos métricos quadrimensionais uniformemente curvos [19]. Há dois tipos deles [58], um com curvatura positiva, e outro com curvatura negativa. Eles podem ser definidos como hiperfícies nos espaços pseudo-euclidianos $\mathbf{E}^{4,1}$ e $\mathbf{E}^{3,2}$, inclusões cujos pontos em coordenadas cartesianas $(\xi^A) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ satisfazem, respectivamente,

$$\eta_{AB}\xi^A\xi^B \equiv -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 = \mathcal{R}^2 ;$$

$$\eta_{AB}\xi^A\xi^B \equiv -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 = -\mathcal{R}^2 .$$

Usamos η_{ab} $(a, b = 0, 1, 2, 3)$ para a métrica de Lorentz $\eta = \text{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$, e a notação $\epsilon = \eta_{44}$ para colocar ambas as condições acima juntas como

$$\eta_{ab}\,\xi^a\xi^b + \epsilon\left(\xi^4\right)^2 = \epsilon\mathcal{R}^2 . \tag{A.1}$$

O espaço de de Sitter $dS(4,1)$, cuja métrica pode ser colocada na forma diagonal $\eta_{AB} = (-1,+1,+1,+1,+1)$, tem o grupo pseudo-ortogonal $SO(4,1)$ como grupo de movimentos. O outro, com métrica $\eta_{AB} = (-1,+1,+1,+1,-1)$, é freqüentemente chamado de espaço de anti-de Sitter e é denotado por $dS(3,2)$ porque seu grupo de movimentos é $SO(3,2)$. Os espaços de de Sitter são ambos espaços homogêneos:

$$dS(4,1) = SO(4,1)/SO(3,1) \quad \text{e} \quad dS(3,2) = SO(3,2)/SO(3,1)\,.$$

A variedade de cada grupo de de Sitter é o fibrado com o correspondente espaço de de Sitter como espaço base e $\mathcal{L} = SO(3,1)$ como fibra [59].

Em coordenadas cartesianas ξ^A, os geradores das transformações de de Sitter infinitesimais são dados por

$$J_{AB} = \eta_{AC}\,\xi^C \frac{\partial}{\partial \xi^B} - \eta_{BC}\,\xi^C \frac{\partial}{\partial \xi^A}\,, \tag{A.2}$$

e satisfazem as relações de comutação

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{BC}J_{AD} + \eta_{AD}J_{BC} - \eta_{BD}J_{AC} - \eta_{AC}J_{BD}\,. \tag{A.3}$$

As coordenadas estereográficas quadrimensionais x^μ são definidas como [50]

$$\xi^a = n(x)\,\delta^a{}_\mu\,x^\mu \equiv h^a{}_\mu\,x^\mu \quad \text{e} \quad \xi^4 = -\mathcal{R}\,n(x)\left(1 - \epsilon\,\frac{\sigma^2}{4\mathcal{R}^2}\right)\,, \tag{A.4}$$

onde

$$n(x) = \frac{1}{1 + \epsilon\sigma^2/4\mathcal{R}^2} \tag{A.5}$$

e

$$\sigma^2 = \eta_{\mu\nu}\,x^\mu x^\nu\,, \tag{A.6}$$

com $\eta_{\mu\nu} = \delta^a{}_\mu\,\delta^b{}_\nu\,\eta_{ab}$. O $h^a{}_\mu$ introduzido em (A.4) são as componentes de um campo de tetradas, ou melhor, membros da base de 1-formas $\omega^a = h^a{}_\mu dx^\mu = n(x)\,\delta^a{}_\mu dx^\mu$.

Nestas coordenadas, o elemento de linha

$$ds^2 = \eta_{AB}\,d\xi^A d\xi^B \tag{A.7}$$

escreve-se como $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$, sendo

$$g_{\mu\nu} = h^a{}_\mu\,h^b{}_\nu\,\eta_{ab} \equiv n^2(x)\,\eta_{\mu\nu} \tag{A.8}$$

o correspondente tensor métrico. Os espaços de de Sitter, portanto, são conformemente planos, com o fator conforme dado por $n^2(x)$. Poderíamos ter escrito simplesmente $\xi^\mu = n(x)\,x^\mu$, porém estamos usando cuidadosamente o alfabeto latino para os índices de álgebra (e espaço plano), e o alfabeto grego para índices espaciais dos campos e cocampos. Como sempre acontece com mudanças de espaço tangente plano para espaço-tempo. letras dos dois tipos são intercambiadas com a ajuda do campo de tetradas. Isto vale para qualquer índice tensorial. Conexões. que são vetores apenas no último índice (de 1-forma), ganharão um termo extra de "vácuo" [24].

O símbolo de Christoffel correspondente à métrica $g_{\mu\nu}$ é

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left[\delta^{\lambda}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} + \delta^{\lambda}{}_{\nu}\delta^{\sigma}{}_{\mu} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma}\right] \partial_{\sigma}[\ln n(x)] \,. \tag{A.9}$$

As componentes do tensor de Riemann correspondente,

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\,\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\epsilon\sigma}\,\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\rho} \,,$$

são dadas por

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \epsilon\,\frac{1}{\mathcal{R}^2}\,\left[\delta^{\mu}{}_{\rho}g_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}g_{\nu\rho}\right] \,. \tag{A.10}$$

O tensor de Ricci e a curvatura escalar são, conseqüentemente,

$$R_{\mu\nu} = \epsilon\,\frac{3}{\mathcal{R}^2}\,g_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad R = \epsilon\,\frac{12}{\mathcal{R}^2} \,. \tag{A.11}$$

Em termos das coordenadas $\{x^{\mu}\}$, os geradores (A.2) das transformações de de Sitter infinitesimais se escrevem como

$$J_{ab} \;\equiv\; \delta_a{}^{\mu}\,\delta_b{}^{\nu}\,\left(\eta_{\rho\mu}\,x^{\rho}\,P_{\nu} - \eta_{\rho\nu}\,x^{\rho}\,P_{\mu}\right) \tag{A.12}$$

$$J_{a4} \;\equiv\; \epsilon\,\delta_a{}^{\mu}\,\left(\mathcal{R}\,P_{\mu} + \frac{\epsilon}{4\mathcal{R}}\,K_{\mu}\right) \,, \tag{A.13}$$

onde

$$P_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad \text{e} \quad K_{\mu} = \left(2\eta_{\mu\lambda}x^{\lambda}x^{\rho} - \sigma^2\delta_{\mu}{}^{\rho}\right)P_{\rho} \tag{A.14}$$

são respectivamente os geradores de translações e as transformações conformes próprias. Se $\epsilon = +1$, obtemos os geradores do grupo de de Sitter $SO(4,1)$. Se $\epsilon = -1$, obtemos os geradores do grupo de de Sitter $SO(3,2)$.

A.3 Contração para a Constante Cosmológica Infinita

Consideremos agora o limite $\mathcal{R} \to 0$. Inicialmente, reescrevemos as Eqs. (A.12) e (A.13) na forma

$$J_{ab} \;\equiv\; \delta_a{}^{\mu}\,\delta_b{}^{\nu}\,L_{\mu\nu} \tag{A.15}$$

$$J_{a4} \;\equiv\; \mathcal{R}^{-1}\,\delta_a{}^{\mu}\,\kappa_{\mu} \,, \tag{A.16}$$

onde $L_{\mu\nu}$ são os geradores do grupo de Lorentz, e

$$\kappa_\mu = \tfrac{1}{4}\, K_\mu + \epsilon\, \mathcal{R}^2\, P_\mu \,. \tag{A.17}$$

Em termos destes geradores, as relações de comutação (A.3) tornam-se

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] \;=\; \eta_{\nu\lambda}\, L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho}\, L_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\rho}\, L_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\, L_{\nu\rho} \,, \tag{A.18}$$

$$[\kappa_\mu, L_{\lambda\rho}] \;=\; \eta_{\mu\lambda}\, \kappa_\rho - \eta_{\mu\rho}\, \kappa_\lambda \,, \tag{A.19}$$

$$[\kappa_\mu, \kappa_\lambda] \;=\; -\mathcal{R}^2\, L_{\mu\lambda} \,. \tag{A.20}$$

Agora, no limite de contração $\mathcal{R} \to 0$, pode-se ver que

$$\lim_{\mathcal{R}\to 0} L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \quad ; \quad \lim_{\mathcal{R}\to 0} \kappa_\mu = \tfrac{1}{4}\, K_\mu \,, \tag{A.21}$$

e conseqüentemente, a álgebra de de Sitter contrai-se para

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] \;=\; \eta_{\nu\lambda}\, L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho}\, L_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\rho}\, L_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\, L_{\nu\rho} \,, \tag{A.22}$$

$$[K_\mu, L_{\lambda\rho}] \;=\; \eta_{\mu\lambda} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\lambda \,, \tag{A.23}$$

$$[K_\mu, K_\lambda] \;=\; 0 \,. \tag{A.24}$$

Estas relações de comutação coincidem na aparência com aquelas da álgebra de Lie do grupo de Poincaré. Todavia, o grupo de Lie correspondente a esta álgebra, denotado por $\mathcal{Q}$ e formado pelo produto semi–direto de transformações de Lorentz e transformações conformes próprias, é completamente diferente do grupo de Poincaré. Ele foi chamado de *segundo* grupo de Poincaré, ou grupo de Poincaré *conforme* [57], e é o grupo que determina a cinemática local de espaços com Λ muito grande.

Pode-se ver facilmente que o limite de contração $\mathcal{R} \to 0$ conduz ambos os espaços de de Sitter para um espaço cone quadrimensional, denotado por N, em que $ds = 0$. Ele apresenta uma geometria relacionada gravitacionalmente a uma constante cosmológica infinita, e seu grupo de movimentos cinemático é $\mathcal{Q}$. Analogamente ao caso de Minkowski, N é também um espaço homogêneo, mas agora sob o grupo cinemático $\mathcal{Q}$, ou seja, $N = \mathcal{Q}/\mathcal{L}$. Em outras palavras, o conjunto de pontos de N é o conjunto de pontos das transformações conformes próprias. O grupo cinemático $\mathcal{Q}$, assim como o grupo de Poincaré, tem o grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ como o subgrupo responsável pela isotropia do espaço cone N. Agora, porém, as transformações conformes próprias introduzem um novo tipo de homogeneidade. De fato, ao invés de equivalentes por translações ordinárias, todos os pontos de N são equivalentes por transformações conformes próprias.

Uma propriedade importante do espaço cone N é que seu tensor métrico é singular em todo lugar,

$$\lim_{\mathcal{R}\to 0} g_{\mu\nu} = 0 : \quad \lim_{\mathcal{R}\to 0} g^{\mu\nu} \to \infty \,, \tag{A.25}$$

exceto nos pontos definidos por $\sigma^2 = 0$, onde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \,.$$

Em outras palavras, a métrica acaba por ser definida apenas no subespaço cone de luz tridimensional do espaço–tempo cone N. Ela é singular em qualquer outro ponto. Todavia, a conexão de Levi–Civita (A.9) é bem definida em todo lugar, e conseqüentemente também o tensor de curvatura de Riemann. Um cálculo explícito mostra que, enquanto ambos os tensores de curvatura de Riemann e de Ricci se anulam quando $\mathcal{R} \to 0$, a curvatura escalar vai para infinito:

$$\lim_{\mathcal{R}\to 0} R \to \infty \,. \tag{A.26}$$

Esta é uma propriedade característica de um espaço-tempo com uma constante cosmológica infinita. Finalmente, é importante mencionar que o grupo de Poincaré *conforme* $\mathcal{Q}$, que é o grupo de movimentos do espaço cone N, preserva a estrutura do cone de luz.

A.4 Contração para o Limite Não–Relativístico

Como já foi mencionado, nenhuma distância pode ser definida nas seções tipo–espaço do espaço cone N. No entanto, uma noção de distância pode ser recuperada no limite não–relativístico. Vamos então examinar o limite em que a velocidade da luz c tende ao infinito. Para fazer isto, precisamos introduzir novas coordenadas de modo a explicitar c [48]. Denotamos as coordenadas velhas com uma barra e definimos as coordenadas novas x^μ como

$$\bar{x}^\mu = \frac{1}{c}\, x^\mu \,. \tag{A.27}$$

Em termos das novas coordenadas, os geradores do grupo de Poincaré conforme tornam-se ($i = 1, 2, 3$)

$$L_{ij} \;=\; \eta_{ik} x^k P_j - \eta_{jk} x^k P_i \tag{A.28}$$

$$L_{i4} = -cB_i \tag{A.29}$$

$$K_i = cT_i \tag{A.30}$$

$$K_4 = T\,, \tag{A.31}$$

onde usamos a notação

$$B_i = tP_i - \eta_{ik}\,\frac{x^k}{c^2}\,P \tag{A.32}$$

$$T_i = 2\eta_{ik}\,\frac{x^k x^j}{c^2}\,P_j + 2\eta_{ik}\,\frac{x^k t}{c^2}\,P - t^2 P_i + \frac{r^2}{c^2}\,P_i \tag{A.33}$$

$$T = 2tx^i P_i + t^2 P + \frac{r^2}{c^2}\,P \tag{A.34}$$

com $P = \partial/\partial t$ e $P_i = \partial/\partial x^i$. Além disso note que

$$\sigma^2 = -t^2 + (r^2/c^2)\,, \tag{A.35}$$

com $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Em termos dos geradores L_{ij}, B_i, T_i e T, as relações de comutação (A.22), (A.23) e (A.24) do grupo de Poincaré conforme podem ser reescritas na forma:

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \eta_{jk}\,L_{il} + \eta_{il}\,L_{jk} - \eta_{jl}\,L_{ik} - \eta_{ik}\,L_{jl} \tag{A.36}$$

$$[L_{ij}, B_k] = \eta_{jk}\,B_i - \eta_{ik}\,B_j \tag{A.37}$$

$$[B_i, B_k] = -\frac{1}{c^2}\,L_{ik} \tag{A.38}$$

$$[T_i, B_k] = -\frac{1}{c^2}\,\eta_{ik}T \tag{A.39}$$

$$[T_i, L_{kl}] = \eta_{ik}\,T_l - \eta_{il}\,T_k \tag{A.40}$$

$$[T, B_k] = T_k \tag{A.41}$$

$$[T, L_{kl}] = [T_i, T_k] = [T, T] = 0\,. \tag{A.42}$$

Vamos agora considerar o limite $c \to \infty$. É fácil ver que, neste limite, os geradores tomam a forma

$$L_{ij} = \eta_{ik} x^k P_j - \eta_{jk} x^k P_i \tag{A.43}$$

$$B_i = t P_i \tag{A.44}$$

$$T_i = -t^2 P_i \tag{A.45}$$

$$T = 2t x^i P_i + t^2 P \, . \tag{A.46}$$

A relações de comutação correspondentes tornam-se

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \eta_{jk} L_{il} + \eta_{il} L_{jk} - \eta_{jl} L_{ik} - \eta_{ik} L_{jl} \tag{A.47}$$

$$[L_{ij}, B_k] = \eta_{jk} B_i - \eta_{ik} B_j \tag{A.48}$$

$$[B_i, B_k] = [T_i, B_k] = 0 \tag{A.49}$$

$$[T_i, L_{kl}] = \eta_{ik} T_l - \eta_{il} T_k \tag{A.50}$$

$$[T, B_k] = T_k \tag{A.51}$$

$$[T, L_{kl}] = [T_i, T_k] = [T, T] = 0 \, . \tag{A.52}$$

Esta tabela de comutação coincide na forma com a álgebra de Lie do grupo de Galileu. O grupo, no entanto, é muito diferente do grupo de Galileu. Os geradores de rotação e boost, dados respectivamente por L_{ij} e B_k, são os mesmos que aqueles do grupo de Galileu. Isto significa que o conceito de isotropia de espaço e a equivalência de referenciais inerciais coincide com aquele do grupo de Galileu. Entretanto, os conceitos de homogeneidade de espaço e tempo são completamente diferentes. Ao invés de translações de espaço e tempo ordinárias, a homogeneidade de ambos espaço e tempo são definidas pelos geradores T_i e T, respectivamente, dados pelo limite não-relativístico dos geradores conformes próprios. Por esta razão, chamamos este novo grupo de grupo de *Galileu conforme*.

A.5 Observações Finais

Como é bem conhecido, através do processo de contração de Inönü–Wigner $\mathcal{R} \to \infty$, ambos os grupos de de Sitter são reduzidos ao grupo de Poincaré $\mathcal{P}$, e ambos os espaços-tempos de de Sitter são reduzidos ao espaço-tempo de Minkowski M. Por outro lado, de modo similar tomando-se o limite $\mathcal{R} \to 0$, que corresponde a $\Lambda \to \infty$, ambos os grupos de de Sitter são contraídos para o grupo de Poincaré *conforme* $\mathcal{Q}$, formado pelo produto semi–direto de transformações de Lorentz e conformes próprias, e ambos os espaços de de Sitter são reduzidos ao espaço cone N, um espaço-tempo caracterizado por apresentar tensores de curvatura de Riemann e Ricci nulos, mas uma curvatura escalar infinita. Os espaços de Minkowski e o espaço-tempo cone podem ser considerados *duais* entre si no sentido de que suas geometrias são determinadas, respectivamente, por uma constante cosmológica nula e infinita. O mesmo pode ser dito de seus grupos de movimento cinemáticos: $\mathcal{P}$ está associado a uma constante cosmológica nula, e $\mathcal{Q}$ a uma constante cosmológica infinita. A transformação de *dualidade* conectando estas duas geometrias é a inversão espaço-temporal

$$x^\mu \to -\frac{x^\mu}{\sigma^2} \, .$$

Sob tal transformação, o grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ é transformado no grupo de Poincaré *conforme* $\mathcal{Q}$, e o espaço de Minkowski M torna-se o espaço cone quadrimensional N. Os pontos no infinito de M estão concentrados no vértice do espaço cone N, e aqueles no cone de luz de M tornam-se o infinito de N.

Agora, como vimos, a métrica de N é singular em toda parte exceto no cone de luz tridimensional, onde ela coincide com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Embora aceitável sob o ponto de vista matemático, um Universo descrito por tal espaço-tempo seria bastante peculiar. Nenhuma distância poderia ser definida, exceto no cone de luz onde ela seria sempre nula. Entretanto, no limite não–relativístico $c \to \infty$, a noção de distância é recuperada. Por outro lado, como é bem sabido, neste limite, o grupo de Poincaré é contraído para o grupo de Galileu, e o espaço–tempo é dividido em duas partes desconexas, um espaço euclidiano tridimensional e um eixo temporal, que torna-se um parâmetro. Sob o mesmo limite, o grupo de Poincaré *conforme* $\mathcal{Q}$ é contraído para um grupo que inclue as mesmas rotações tridimensionais e transformações de boost do grupo de Galileu, porém translações espaciais e temporais são trocadas pelo correspondente limite não-relativístico da transformação conforme própria. Curiosamente, este grupo apresenta a mesma álgebra de Lie abstrata do grupo de Galileu, e por esta razão foi chamado de grupo de Galileu *conforme*. De forma análoga ao que ocorre com o espaço de Minkowski, quando $c \to \infty$ o espaço e um eixo temporal, que também neste limite torna-se um parâmetro. Além disso, como o espaço euclidiano tridimensional vem do cone de luz, onde a métrica é bem definida, a métrica do espaço euclidiano resultante será também bem definida. O grupo de movimentos deste espaço é o grupo de Galileu conforme, cujos geradores de transformações infinitesimais são dados pelas Eqs. (A.43)-(A.46).

Finalmente, é importante mencionar que a ordem das contrações ($\Lambda \to \infty$ depois $c \to \infty$, ou $c \to \infty$ depois $\Lambda \to \infty$) não é importante no resultado obtido. Os resultados intermediários, entretanto, mudariam. De fato, o limite não-relativístico ($c \to \infty$) dos grupos e espaços de de Sitter levam respectivamente ao grupo e espaço de Newton–Hooke [60]. Uma contração para constante cosmológica infinita ($\Lambda \to \infty$) levaria então ao grupo de Galileu conforme.

Referências

[1] E. Kretschmann, Ann. Phys. 53 (1917) 575.

[2] J. L. Anderson. *Principles of Relativity Physics* (Academic. New York. 1967).

[3] J. D. Norton. Rep. Prog. Phys. 56 (1993) 791.

[4] A. Einstein, Ann. Phys. 55 (1918) 240.

[5] E. Cartan. Ann. Sci. ENS 40 (1923) 325.

[6] K. Friedrichs, Mathematische Annalen 98 (1927) 566.

[7] A. Einstein, *The Meaning of Relativity* (Princeton University Press. Princeton, 1922).

[8] W. Pauli. *Theory of Relativity* (Pergamon. London. 1958).

[9] V. Fock, *The Theory of Space-Time and Gravitation*, (Pergamon, New York, 1959).

[10] J. L. Synge, *Perspective in Geometry and Relativity*. ed. B. Hoffmann (Indiana University Press, Blooming, 1966).

[11] E. Cartan, *L'Enseignement Mathématique* 26 (1927) 200.

[12] A. Einstein. Ann. Phys. 49 (1916) 769.

[13] J. Earman, Found. Phys. 4 (1974) 267.

[14] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories: Relativistic Physics and the Philosophy of Science* (Princeton University Press. Princeton. 1983).

[15] R. Jones, *After Einstein*. ed. P. Barker and C. G. Shugart (Memphis State University Press. Memphis. 1981).

[16] J. Ehlers, *The Physicist's Conception of Nature*. ed. Mehra (Reidel, Dordrecht. 1973).

[17] Y. Guttmann and H. Lyre, *Fiber Bundle Gauge Theories and "Field's Dilemma"*, (arXiv:physics/0005051).

[18] A. Trautman, *General Relativity and Gravitation: One Hundred Years after the Birth of Albert Einstein*, ed. A. Held (Plenum Press, New York, 1980).

[19] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[20] Veja, por exemplo: N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Gauge Fields* (Harwood Academic Publishers, New York, 1980).

[21] N. Byers, Proceedings of a Symposium on the Heritage of Emmy Noether, (physics/9807044).

[22] M. Calçada and J. G. Pereira, Int. J. Theor. Phys. (2002), em impressão (gr-qc/0201059).

[23] R. Aldrovandi, A. L. Barbosa, M. Calçada and J. G. Pereira, *Kinematics of a Spacetime with an Infinite Cosmological Constant*, submetido para publicação (gr-qc/0105068).

[24] Veja, por exemplo: R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[25] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. 2 (1961) 212.

[26] A. Trautman, in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[27] K. Hayashi, Lett. Nuovo Cimento 5 (1972) 529.

[28] Veja, por exemplo R. M. Wald, *General Relativity* (Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984).

[29] Para uma descrição geral da abordagem de gauge para a gravitação, veja: F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'emann, Phys. Rep. 258 (1995) 1.

[30] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev D 56 (1997) 4689.

[31] P. A. M. Dirac, em: *Planck Festscrift*, ed. W. Frank (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958).

[32] Veja, por exemplo, P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2nd edition (Addison-Wesley, Redwood, 1989).

[33] V. A. Fock and D. Ivanenko, Z. Phys. 54 (1929) 798; V. A. Fock, Z. Phys. 57 (1929) 261.

[34] M. Calçada and J. G. Pereira, *Angular Momentum and Energy–Momentum Densities as Gauge Currents*, submetido para publicação (gr-qc/0201076).

[35] M. J. G. Veltman, em: *Methods in Field Theory*, Les Houches 1975, ed. R. Balian and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1976).

[36] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1975).

[37] F. J. Belinfante, Physica 6 (1939) 687.

[38] M. J. Gotay and J. E. Marsden, Cont. Math. 132 (1992) 367.

[39] W. Kopczyński, J. D. McCrea and F. W. Hehl, Phys. Lett. A 135 (1989) 89.

[40] L. Rosenfeld, Mém. Acad. Roy. Belg. Sci. 18 (1940) 1.

[41] F. W. Hehl, Rep. Math. Phys. 9 (1976) 55.

[42] F. W. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, in *Geometry and Theoretical Physics*, eds. J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Heidelberg, 1991), pag. 56.

[43] E. M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave–Equations* (Hafner, New York, 1953).

[44] M. Calçada, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Some Remarks on the Gravitational Coupling Prescription of Matter Fields*, submetido para publicação.

[45] V. de Sabbata and C. Sivaram, *Spin and Torsion in Gravitation* (World Scientific, Singapore, 1994).

[46] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, Phys. Rev D 64, (2001) 027502.

[47] H. Bacry and J-M. Lévy-Leblond, J. Math. Phys. 9 (1967) 1605.

[48] E. Inönü and E. P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Scien. 39 (1953) 510.

[49] E. Inönü. In F. Gürsey, editor, *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, Istanbul Summer School of Theoretical Physics. Gordon and Breach, New York, 1962.

[50] F. Gürsey In F. Gürsey, editor, *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, Istanbul Summer School of Theoretical Physics. Gordon and Breach, New York, 1962.

[51] A. G. Riess *et al*, Ap. J. 116 (1998) 1009.

[52] S. Perlmutter *et al*, Ap. J. 517 (1999) 565.

[53] P. de Bernardis *et al*, Nature 404 (2000) 955

[54] S. Hanany *et al*, Ap. J. Letters 545 (2000) 5.

[55] J. V. Narlikar, *Introduction to Cosmology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).

[56] Y. S. Kim and M. E. Noz, *Theory and Applications of the Poincaré Group* (Reidel, Dordrecht, 1985).

[57] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, in H Aratyn *et al*, editors, *Topics in Theoretical Physics: Festschrift for A. H. Zimerman*. Fundação IFT, São Paulo, 1998.

[58] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space–Time* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973).

[59] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York, 1963).

[60] R. Aldrovandi, A. L. Barbosa, L. C. B. Crispino and J. G. Pereira, Class. Quant. Grav. 16 (1999) 495.