

Fátima Quintiliano da Silva

Álgebra de Dirac e Algumas Identidades de
Fierz para uma Teoria Supersimétrica
em 5 Dimensões



Título da dissertação:

Álgebra de Dirac e algumas
identidades de Fierz para uma
teoria supersimétrica em

**ÁLGEBRA DE DIRAC E ALGUMAS
IDENTIDADES DE FIERZ PARA UMA
TEORIA SUPERSIMÉTRICA EM
5 DIMENSÕES**

Fátima Quintiliano da Silva

Dissertação de Mestrado

**Pós-Graduação em Matemática Aplicada
e Computacional
MAC 012**

Aluna: Fátima Quintiliano da Silva

Orientador: Professor Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

FÁTIMA QUINTILIANO DA SILVA

Título da dissertação:

Álgebra de Dirac e algumas
identidades de Fierz para uma
teoria supersimétrica em
5 dimensões.

Aluna: Fátima Quintiliano da Silva

Orientador: Professor Dr. Manoel Ferreira Borges Neto



FÁTIMA QUINTILIANO DA SILVA

**ÁLGEBRA DE DIRAC E ALGUMAS
IDENTIDADES DE FIERZ PARA UMA TEORIA
SUPERSIMÉTRICA EM 5 DIMENSÕES.**

Dissertação apresentada ao Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Campus de São José
do Rio Preto, para a obtenção do título
de Mestre em Ciências Exatas (Área de
Concentração: Matemática Aplicada e
Computacional).

Orientador: Prof^o Dr. Manoel Ferreira
Borges Neto



742/97

São José do Rio Preto
1996



Agradecimento

À DEUS, por todas as forças e inspirações divinas enviadas a mim.

Ao meu professor orientador Professor Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela força, orientações sábias e pelo exemplo de dedicação.

Ao meu filho Davi Quintiliano, por ter permitido que eu me dedicasse aos estudos, sempre me dando carinho e forças, apesar de sua pouca idade.

À amiga Ana Paula dos Santos Lázaro, que sempre me orientou nos momentos de dúvidas, ao Marcelo Lopes de Novaes, que sempre me atendeu nos problemas técnicos de computação, ao Rodrigo Augusto Quintiliano da Silva, que me ajudou assessorando nos momentos difíceis, ao companheiro de estudos Antonio Junio Poiate, pela força e companheirismo, e aos demais amigos que me encorajaram e incentivaram nos estudos.

Obrigada.



ABSTRACT

RESUMO

ÁLGEBRA DE DIRAC E ALGUMAS IDENTIDADES DE FIERZ PARA UMA TEORIA SUPERSIMÉTRICA EM CINCO DIMENSÕES.

Nesta dissertação após a apresentação de um estudo sobre noções fundamentais de análise, de estruturas algébricas, tais como grupos, anéis e módulos, de variedades diferenciáveis e de álgebra exterior, são estabelecidas, para algumas combinações de spinors e vetores, seguindo uma recente publicação [11], o caráter de realidade ou não dessas combinações - identidades de Fierz - bem como o grau e o grading (graduação) das formas associadas aos campos físicos. O conhecimento dessas identidades é fundamental para o cálculo efetivo da lagrangeana geométrica em teorias supersimétricas.

INDICE

I - NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE ANÁLISE

ABSTRACT

DIRAC'S ALGEBRA AND SOME FIERZ'S IDENTITIES FOR A SUPERSYMMETRIC THEORY IN FIVE DIMENSIONS.

In this dissertation, after the presentation (introduction) of a study about notions of fundamental analysis of algebraic structures, such as groups, rings modulus, differentiable manifolds and exterior algebra, the character of reality or no of these combinations of spinors and vectors - Fierz's identities - one worked out, according to a recent publication [11], like the degree (grade) and the grading of the associated forms of the physical fields. The knowledge of these identities is fundamental to the effective calculation of the Lagrangeana geometric in the supersymmetric theories.

II - TRANSFORMAÇÕES

4.1 - Campos Vetores como geradores de grupos de transformações	21
4.2 - Derivadas de Lie	25
4.3 - Expressões coordenadas locais da derivada de Lie	27
4.4 - Campos de tensores invariantes sob um grupo de transformações	29
4.5 - Grupos de Lie II	31
4.6 - Transformações esquerda e direita de G ; Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G ; Estruturas constantes	35
4.7 - Subgrupos de um-parâmetro	37
4.8 - Representação Adjunta	39
4.9 - A forma Canônica ou Maurer-Cartan	41

ÍNDICE

1 - NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE ANÁLISE	8
1.1 - Conjuntos	8
1.2 - Mapeamentos - Traçados	9
1.3 - Relações	11
1.4 - Arranjos	12
2 - ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	14
2.1 - Grupos	14
2.2 - Anéis	15
2.3 - Módulos	15
2.4 - Álgebras	16
2.5 - Espaços Lineares	16
3 - VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	17
3.1 - Introdução	17
3.2 - Dois gráficos de uma variedade	18
3.3 - Difeomorfismo	19
3.4 - Grupos de Lie I	19
4 - GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES	21
4.1 - Campos Vetores como geradores de grupos de transformações	21
4.2 - Derivadas de Lie	25
4.3 - Expressões coordenadas locais da derivada de Lie	27
4.4 - Campos de tensores invariantes sob um grupo de transformações	29
4.5 - Grupos de Lie II	31
4.6 - Transformações esquerda e direita de G ; Álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G ; Estruturas constantes	35
4.7 - Subgrupos de um-parâmetro	37
4.8 - Representação Adjunta	39
4.9 - A forma Canônica ou Maurer-Cartan	41

5 - FORMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES - ÁLGEBRA EXTERIOR

5.1 - Coordenadas locais; bases para $\Lambda^p(X)$; componentes pontuais	43
5.2 - Diferenciação exterior	47
5.3 - Imagem recíproca de uma forma	52
5.4 - Derivação e antiderivação em $\Lambda(X)$	54
5.5 - Formas definidas em um grupo Lie	55
5.6 - Estruturas de equações Maurer-Cartan	56
5.7 - Sistemas diferenciais exteriores	57

6 - ÁLGEBRA DE DIRAC E ALGUMAS IDENTIDADES DE FIERZ PARA UMA TEORIA SUPERSIMÉTRICA EM 5 DIMENSÕES

6.1 - Introdução	61
6.1.1 - Bases de um espaço vetorial	61
6.1.2 - A representação de operadores lineares por matrizes	62
6.1.3 - Operador no espaço dual	63
6.1.4 - A representação espectral de um operador	65
6.1.5 - A formação de bases pelos autovetores de um operador linear	65
6.1.6 - Diagonalização de matrizes normais	66
6.2 - Sobre a equação de Dirac	69
6.3 - Spinors de Dirac	72
6.4 - Álgebra de Dirac em 5 dimensões	74
6.5 - Algumas identidades de Fierz em 5 dimensões	75

7 - CONCLUSÃO

8 - BIBLIOGRAFIA

1. NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE ANÁLISE [1], [2]

1.1. Conjuntos

Recordamos abaixo algumas notações fundamentais e axiomas da teoria de conjuntos.

NOTAÇÕES: $x \in X$: x é um elemento do conjunto X

$x \notin X$: x não é elemento do conjunto X

O conjunto vazio é um conjunto sem elementos, simbolizado por $\emptyset$. Se todo elemento de um conjunto X é também elemento de um conjunto Y , então X é um subconjunto de Y : $X \subset Y$ ou $Y \supset X$.

Se $X = Y$ significa que $X \subset Y$ e $Y \subset X$.

O subconjunto de X consistindo de todo $x \in X$ possuindo a propriedade de P é simbolizado $\{x:P\}$.

Seja A um subconjunto de um conjunto X .

A função: $X_A(x) = 1$ $x \in A$, $X_A(x) = 0$ $x \in X$ $x \notin A$ é chamada de função característica de A .

Um subconjunto próprio do conjunto Y é um conjunto o qual não é igual a Y . Nós simbolizaremos $X \subset Y$ e $X \neq Y$, ou algumas vezes $X \subsetneq Y$. A união dos conjuntos X e Y , simbolizando $X \cup Y$, é o conjunto de todos elementos os quais pertencem também para X ou para Y .

A intersecção de X e Y , simbolizada $X \cap Y$, é o conjunto de todos elementos os quais pertencem aos conjuntos X e Y .

Dois conjuntos são disjuntos se a intersecção deles é vazia. Uma classe de conjuntos é disjuntos se todo par de conjunto distintos na classe é disjuntos.

Seja A um subconjunto do conjunto X , o complemento de A relativo a X é a totalidade de pontos $x \in X$ os quais não estão contidos em A . Notação: $C_x A$.

Sejam A e B dois subconjuntos do conjunto X ; a diferença $A-B$ é a totalidade de pontos $x \in A$ os quais não estão contidos em B : $A-B = A \cap C B$.

A diferença simétrica de A e B é $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$.

O produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) onde $x \in X$ e $y \in Y$.

A divisão de X é uma classe $\{X_i\}$ de subconjuntos diferentes não vazios cuja união é X , onde i pertence à família I de índices.

Se X tem número finito "n" de elementos, o conjunto de todos subconjuntos de X tem 2^n elementos incluindo $\emptyset$. Motivado por este fato, denota-se por 2^X o conjunto de todos subconjuntos de X e o chamamos de conjunto comando.

1.2. Mapeamentos - Traçados

Notação: $f: X \rightarrow Y$ por $x \rightarrow y = f(x)$,
também escrito $y = f(x)$

O traçado f de x em y associa a todo elemento $x \in X$ um elemento determinado exclusivamente $y=f(x) \in Y$. O domínio de f , simbolizado $D(f)$ é X . Sua extensão, simbolizada $R(f)$, é contida em Y .

Um traçado de X em Y é também chamado uma função em X com valores em Y . Uma função em X com valores em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$, é também chamada uma função numérica em X , frequentemente abreviada para "função em X ".

O traçado complexo de dois traçados, $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ é o traçado $g \circ f: X \rightarrow Z$ por $x \rightarrow g(f(x))$.

O símbolo $f(M)$ simboliza o subconjunto $\{f(x); \forall x \in M\}$ de Y ; $f(M)$ é a imagem de M sob o traçado de f .

O símbolo $f^{-1}(N)$ simboliza o subconjunto $\{x \in M; \exists y = f(x) \in N\}$ de X ; $f^{-1}(N)$ é a imagem inversa de N sob o traçado f . Ele tem as propriedades:

$$Y_1 = f(f^{-1}(Y_1)) \text{ para todo } Y_1 \subset f(X)$$

$$X_1 \subset f^{-1}(f(X_1)) \text{ para todo } X_1 \subset X$$

Se para todo $y \in f(X)$ há apenas um $x \in X$ tal que $f(x) = y$ então f tem um traçado inverso de f^{-1} e é dito ser um a um (injetivo).

$$f^{-1}: f(X) \rightarrow X \text{ por } y \rightarrow x = f^{-1}(y).$$

O traçado f é dito traçar X em Y (subjetivo) se $f(X) = Y$. O traçado f é uma bijeção se ele é um a um e sobre.

Exemplo: Considere o traçado seguinte de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$x \rightarrow x^3$ é uma bijeção,

$x \rightarrow \exp(x)$ é um a um mas não sobre,

$x \rightarrow x^3 + x^2$ é sobre, mas não um a um,

$x \rightarrow \sin x$ é também não sobre um a um.

O traçado f é uma extensão de g (g é uma restrição de f) se $D(f)$ contém $D(g)$ e $f(x) = g(x)$ para todo x em $D(g)$. A restrição de f para um domínio U é simbolizado $f|_U$.

Uma sequência (A_n) de subconjuntos de um conjunto X é um traçado do conjunto de números naturais $\mathbb{N}$ em 2^X por $n \rightarrow A_n$.

Um conjunto X é calculável infinito se há uma bijeção entre X e o conjunto de números naturais $\mathbb{N}$. Um conjunto é calculável se é também finito ou calculavelmente infinito.

Mais geralmente dois conjuntos são chamados equipotentes (tem a mesma cardinalidade) se há uma bijeção entre eles.

Uma categoria é uma classe, cujo membros são chamados objetos, junto com conjuntos $\text{Hom}(X,Y)$, um para cada par ordenado de objetos (X,Y) e traçados.

$\text{Hom}(X,Y) \times \text{Hom}(Y,V) \rightarrow \text{Hom}(X,V)$ para $(f,g) \rightarrow h = g \circ f$, tal que:

- 1) Se $f \in \text{Hom}(X,Y)$; $g \in \text{Hom}(Y,V)$ e $h \in \text{Hom}(V,U)$ então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- 2) Para cada objeto X há um elemento único em $\text{Hom}(X,X)$, simbolizando I_X , tal que todos objetos Y
 $f \circ I_X = f, \quad \forall f \in \text{Hom}(X,Y)$
 $I_Y \circ g = g, \quad \forall g \in \text{Hom}(Y,X)$.

Os membros de $\text{Hom}(X,Y)$ são chamados morfismos e a operação $\circ$ é chamada composição.

Exemplo: O traçado identidade $\text{id}: X \rightarrow X$ por $x \rightarrow x$ é bijetivo. A constante do traçado $f: X \rightarrow Y$ é definida por $f(x) = c$ com c fixado em Y e não é injetivo (subjetivo) se X [se Y] tem mais do que um elemento.

Um morfismo $f \in \text{Hom}(X,Y)$ é chamado um isomorfismo se existe $g \in \text{Hom}(Y,X)$, tal que:

$$f \circ g = I_Y, \quad g \circ f = I_X.$$

Exemplo: A classe de todos conjuntos junto com os traçados entre eles é uma categoria: os isomorfismos são as bijeções.

Sejam A e B duas categorias, $\text{Mor}(A)$ e $\text{Mor}(B)$ as classes dos seus morfismos. Um fator covariante de A para B é um traçado $C: (A, \text{Mor}(A)) \rightarrow (B, \text{Mor}(B))$ tal que:

- 1) Se f é um morfismo $X \rightarrow Y$, $C(f)$ é um morfismo $C(X) \rightarrow C(Y)$.
- 2) Se f e g são morfismos em A os quais podem ser compostos então: $C(g) \circ C(f) = C(g \circ f)$.
- 3) $C(I_X) = I_{C(X)}$

Para um fator covariante de A para B temos o diagrama:



$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \quad X, Y, Z \in A$$

$$C(X) \xrightarrow{c_f} C(Y) \xrightarrow{c_g} C(Z), \quad C(X), C(Y), C(Z) \in B$$

Um traçado $c: (A, \text{Mor}(A)) \rightarrow (B, \text{Mor}(B))$ é chamado um fator contravariante de A para B se:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \quad X, Y, Z \in A$$

$$C(X) \xleftarrow{c_f} C(Y) \xleftarrow{c_g} C(Z), \quad C(X), C(Y), C(Z) \in B$$

$$e \quad C(f) \circ C(g) = C(g \circ f)$$

$$C(\text{id}_X) = \text{id}_{C(X)}.$$

$C(f)$ é muitas vezes simbolizado por f^* .

Lidaremos mais tarde com outras categorias, cujos objetos são conjuntos com estrutura adicional e cujos morfismos são traçados preservando esta estrutura, por exemplo, a classe de todos grupos com seus homomorfismos. Um isomorfismo será então um morfismo bijetivo cujo inverso é também um morfismo. Contudo, desde que nós teremos frequentemente que considerar várias estruturas simultaneamente usaremos em geral uma terminologia mais explícita, e reservaremos a palavra isomorfismo para uma categoria mais básica dentro da extensão deste texto, isto é, a categoria cujos objetos são os espaços de vetores topológicos, e cujos morfismos são traçados lineares contínuos.

1.3. Relações

A relação entre X e Y é um subconjunto IR de $X \times Y$, onde x e y são ditos ser a relação IR se $(x, y) \in IR$, também escrito $x IR y$.

Uma relação $IR \in X \times X$ é uma relação de equivalência em X se ela é:

- Reflexiva: $(x, x) \in IR, \quad \forall x \in X,$
- Simétrica: $(x, y) \in IR \Rightarrow (y, x) \in IR, \quad \forall x, y \in X,$
- Transitiva: $(x, y) \in IR \text{ e } (y, z) \in IR \Rightarrow (x, z) \in IR, \quad \forall x, y, z \in X.$



Se x é relacionado para y por uma relação equivalente em $\mathbb{R}$, escrevemos $x \sim y$ ou $x = y \pmod{R}$.

A classe de equivalência de $x \in X$, simbolizada $[x]$, é o subconjunto de X tal que $\{y; y \sim x\}$. X é a união disjunta de classes de equivalência. O conjunto destas classes de equivalência é simbolizado $X/\mathbb{R}$ ou $X/\mathbb{I}\mathbb{N}$.

Exemplo: Faça uma classe de equivalência com pontos $x \in \mathbb{R}$ pela relação de equivalência: $x \sim x_0$, se $x - x_0 = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ $[x] = \{x : x \pm 2\pi n = x_0\}$. Uma destas classes de equivalência $[x]$ pode ser considerada como um ponto em um círculo.

Exemplo: Seja P o conjunto $\mathbb{I}\mathbb{N}$ de todos números inteiros positivos, e seja $m \leq n$ tal que m divide n . Então

$\text{Sup.}(m, n) = \text{mínimo múltiplo comum de } m \text{ e } n$.

$\text{Inf.}(m, n) = \text{maior divisor comum de } m \text{ e } n$.

$\mathbb{I}\mathbb{N}$ não tem elemento máximo.

1.4. Arranjos

Uma relação $\mathbb{R} \subset X \times X$ é uma disposição parcial de X se esta for:

- Reflexiva: $(x, x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X$.
- Anti simétrica: $(x, y) \in \mathbb{R} \text{ e } (y, x) \in \mathbb{R} \Rightarrow x = y$
- Transitiva: $(x, y) \in \mathbb{R} \text{ e } (y, z) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathbb{R}$

Notação: $x \leq y$ (x precede y ou y segue x). x é relatado para y pela disposição parcial $\leq$.

Seja P ser um conjunto disposto e $a, b, c \in P$. Se $a \leq c$ e $b \leq c$, então c é dito ser limite superior para a e b . Se além disso $c \leq d$ para todo $d \in P$ os quais são limites superiores para a e b , então c é dito ser o menor limite superior, ou o supremo de a e b , e denotamos $c = \sup(a, b)$.

Similarmente, definimos um limite mais baixo e o maior limite mais baixo ou ínfimo de a e b e simbolizamos por $\inf(a, b)$.

Um conjunto parcialmente disposto P é conduzido se todo par de elementos de P tem um limite superior.

Se $\sup(a, b)$ e $\inf(a, b)$ existe para todo par (a, b) , então P é uma rótula.

Seja $m, p \in P$; m é máximo se $m \leq p$ implicar que $m = p$, isto é, nenhum outro elemento, a não ser o próprio m , segue m .

Um conjunto parcialmente ordenado P é linearmente ordenado ou totalmente ordenado, se para qualquer dois elementos $a, b \in P$ têm-se $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Dado qualquer conjunto não vazio de conjuntos distintos não vazios $X_i, i \in I$, um conjunto pode ser formado o qual contém precisamente um elemento que pertence a cada conjunto X_i (axioma de escolha de ZERMELO).

Lema de ZORN: seja P um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que todo subconjunto de P linearmente ordenado tenha um limite superior em P . Então para cada $x \in P$ existe um elemento máximo $y \in P$, tal que $x \leq y$. O lema de ZORN é equivalente para a axioma de escolha de ZERMELO.

Exemplo: Seja P o conjunto $\mathbb{N}$ de todos números inteiros positivos, e seja $m \leq n$ tal que m divide n . Então

Sup. (m, n) = mínimo múltiplo comum de m e n .

Inf. (m, n) = maior divisor comum de m e n .

$\mathbb{N}$ não tem elemento máximo.

2. ESTRUTURAS ALGÉBRICAS [1]

Definições:- Uma operação interna de um conjunto X é um traçado de $X \times X$ em X . Seja A e X conjuntos. Um traçado de $A \times X$ em X é chamado uma operação externa de X . Os elementos de A são chamados operadores em X

2.1. Grupos

Um grupo é um conjunto X junto com uma operação interna $X \times X \rightarrow xy$ tal que:

1) A operação é associativa

$$(xy)z = x(yz) \text{ para todo } x, y, z \in X$$

2) Há elementos $e \in X$ chamado a identidade, tal que:

$$xe = ex \text{ para todo } x \in X,$$

3) Para cada $x \in X$ há um elemento de X chamado o inverso de x , denotado por x^{-1} , tal que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$

Pode ser usado com mais frequência.

O grupo abeliano = comutativo se $xy = yx$ para todo $x, y \in X$. A operação é então frequentemente chamada adição e escrita $(x, y) \rightarrow x + y$. Neste caso o inverso de x é escrito $-x$ e a identidade é simbolizada por 0 .

O centro do grupo X é o conjunto de elementos os quais comutam com todos os elementos do grupo.

Um subconjunto A de X é um subgrupo de X se $xy \in A$ e $x^{-1} \in A$ para cada $x \in A, y \in A$ (equivalente, $xy^{-1} \in A$).

Seja A um subgrupo de X . O conjunto $Ax = \{ax; a \in A\}$ e $x \in X$ é chamado "coset" direito de A em X .

Um "coset" esquerdo (direito) pode ser definido como o conjunto equivalência $[x] = A_x$ [o conjunto equivalência $[x] = A_x$] determinado pela relação de equivalência $y \sim x$ se $y^{-1} \in A$ [se $xy^{-1} \in A$]. Analogamente para o "coset" direito.



Um subgrupo A de X é invariante (normal) se $xax^{-1} \in A$ para todo $a \in A$ e todo $x \in X$. O "coset" direita A_x e o "coset" esquerdo x^A de um subgrupo invariante A são idênticos.

A coleção de todos os "coset" de um subgrupo invariante A em X é um grupo chamado o grupo quociente (fator) de X por A ; e simbolizado por X/A . A operação de grupo em X/A é: $(xA)(yA) = (xy)A$

2.2. Anéis

Um anel é um conjunto X com duas operações internas $(x,y) \rightarrow xy$ e $(x,y) \rightarrow x + y$, chamados respectivamente multiplicação e adição, tal que:

- 1) X é um grupo abeliano sob adição,
- 2) Multiplicação é associativa e distributiva com relação à adição, isto é:

$$\begin{aligned}(xy)z &= x(yz) \\ x(y+z) &= xy + xz \\ (y+z)x &= yx + zx \text{ para todo } x,y,z \in X\end{aligned}$$

Se para a multiplicação há um elemento $e \in X$, tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in X$, então o anel é um anel com identidade (unidade). Se o anel é abeliano sob multiplicação ele é chamado um círculo abeliano.

Seja X um círculo com identidade. Se um elemento $x \in X$ tem um inverso, x é dito ser regular (invertível, não singular).

Um anel com identidade é chamado um campo se todos seus elementos exceto o zero (elemento neutro da adição) são regulares.

Simbolizamos por K os campos de números complexos ou reais $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Um imaginário esquerdo I de um círculo X é um subanel (um subconjunto com propriedades de anéis de X , tal que: $i \in I \Rightarrow x_i \in I, \forall x \in X$

Seja I um imaginário em X ; a relação $x \sim y$ se $x - y \in I$ é uma relação de equivalência. O conjunto X/I de conjuntos equivalentes distintos $[x] = \{x + i; i \in I\} = x + I$, forma um anel sob $([x], [y]) \rightarrow [x][y] = [xy]$ e adição $([x], [y]) \rightarrow [x] + [y] = [x + y]$. O anel X/I é chamado de anel quociente (fator) de X por I .

2.3. Módulos

Um módulo X acima do círculo R é um grupo abeliano X com uma operação externa, chamada multiplicação escalar, $R \times X \rightarrow X$ por $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$, tal que:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

para todo $\alpha, \beta \in R$ e $x, y \in X$. Se o anel R tem uma identidade e então: $1x = x$ para todo $x \in X$.

2.4. Álgebras

Uma álgebra A é um módulo acima de um anel R com identidade e com uma operação associativa interna, geralmente chamada multiplicação, tal que:

1) A é um anel.

2) a operação externa $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ é tal que: $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

A maioria das álgebras são espaços lineares junto com uma operação interna chamada multiplicação. A definição geral dada aqui inclui tais álgebras, como a álgebra de campos de tensores sobre anéis de funções.

2.5. Espaços Lineares

Um espaço linear é um módulo para o qual o anel de operadores é um campo. O campo é o campo K de números reais R ou de números complexos C . Os elementos de um espaço linear serão chamados vetores.

Seja L e M subespaços lineares do espaço linear X . Se cada vetor $z \in X$ é unicamente expresso na forma $z = x + y$ com $x \in L$ e $y \in M$, então X é dito ser a soma direta (geométrica) simbolizada $L \oplus M$, dos subespaços L e M . L e M são então complementares. Eles necessariamente implicam que $L \cap M = \{0\}$.

Um subconjunto A de um espaço linear X é chamado linearmente independente se para todo subconjunto finito não vazio $\{x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ de A em relação $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, $\lambda_i \in K$ implica $\lambda_i = 0$ para todo $i \leq n$.

3. VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

3.1. Introdução

O conceito de uma variedade diferenciável [3] generaliza o conceito de uma superfície diferenciável em R^3 , isto é, de uma superfície com um plano tangente em cada ponto. Os vetores tangentes para uma variedade serão definidos intrinsecamente, isto é, sem referência a um sistema de coordenada particular.

Uma definição precisa de uma variedade (topológica) é a de um espaço topológico de Hausdorff, tal que todo ponto tem um homeomórfico aberto a R^n .

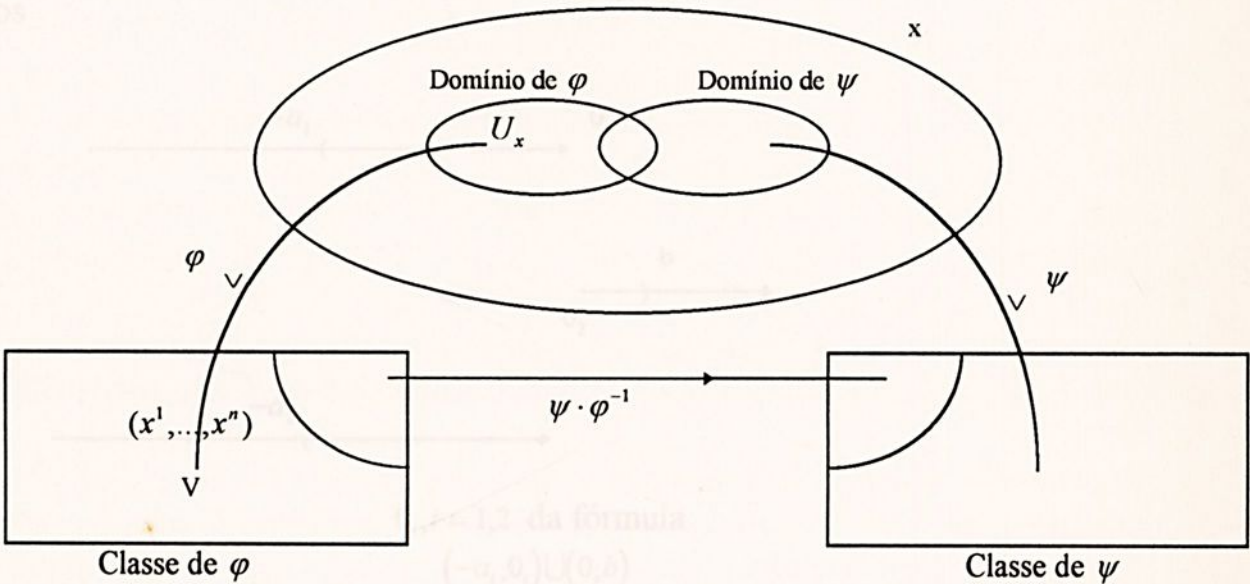
Um gráfico (U, φ) de uma variedade X é um conjunto aberto U de X , chamado de domínio do gráfico, junto com um homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ de U sobre um conjunto V em R^n .

As coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ da imagem $\varphi(x) \in R^n$ do ponto $x \in U \subset X$ são chamadas as coordenadas de x no gráfico (U, φ) (coordenadas locais de x). O gráfico (U, φ) é também chamado um sistema local de coordenadas.

Um atlas da classe C^k em uma variedade X é um conjunto $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de gráficos de X tal que os domínios $\{U_\alpha\}$ sejam de X e homeomorfismos satisfaçam a seguinte condição de compatibilidade:

Os mapas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ são conjuntos abertos de R^n em R^n de classe C^k . Em outras palavras, quando (x^i) e (y^i) são respectivamente as coordenadas de x nos gráficos $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) , o gráfico $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é dado em $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ por n real avaliado. C^k funções de n variáveis

$$(x^i) \rightarrow y^i = f^i(x^i)$$



3.2. Dois gráficos de uma variedade

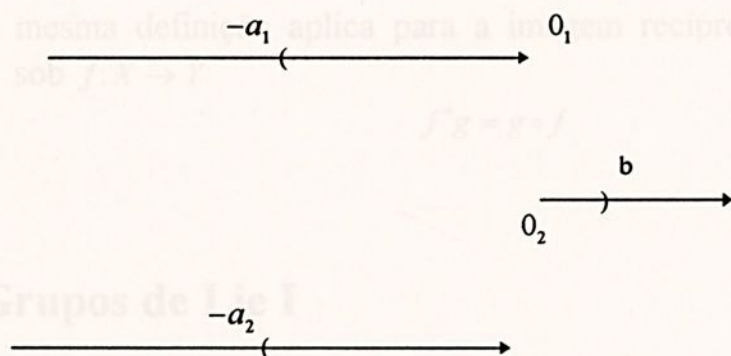
Dois atlas $C^k (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$ são equivalentes se e somente se a união do domínio deles $(U_\alpha, U_{\alpha'})$ com os homeomorfismos $(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'})$ é novamente um atlas C^k .

Uma variedade topológica X junto com uma classe equivalente C^k atlas é uma C^k estruturada em X , dizemos que X é uma variedade C^k .

Estritamente falando uma variedade diferenciável é uma variedade tal que os mapas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ de conjuntos abertos em R^n dentro de R^n são diferenciáveis, mas não necessariamente continuamente diferenciável; mas as expressões de variedades diferenciáveis; variedade planos são frequentemente usadas para designar uma variedade C^k onde k é grande e suficiente para o contexto dado, eventualmente $k = \infty$. Uma variedade analítica real (C^∞) é definida similarmente: os mapas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ tem que ser analítico reais, isto é, dados por n funções de n variáveis os quais podem ser expandidas em uma série convergente de Taylor em uma vizinhança de cada ponto.

Uma variedade complexa analítica é definida similarmente com C^∞ , substituindo R^n , e os mapeamentos $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sendo holomórficos (analítico complexos).

Observação 1: Algumas vezes uma variedade é definida apenas como um espaço localmente euclidiano topológico X , junto com exigências apropriadas para os mapas os quais traçam um conjunto aberto de X em R^n . Mas então X pode ter a característica indesejável de ser não Hausdorff como será mostrada no seguinte exemplo. Considere o espaço o qual que consiste de duas semi-retas fechadas $(-\infty, 0]$ e uma semi-reta aberta $(0, +\infty)$, junto com uma base de vizinhos abertos



$0_i, i = 1, 2$ da fórmula
 $(-a_i, 0_i) \cup (0, b)$

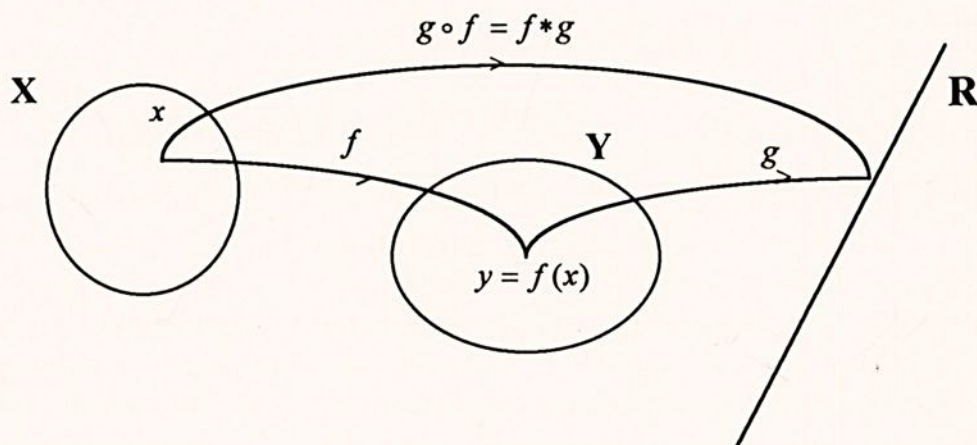
Este espaço é localmente euclidiano; ele não é Hausdorff porque qualquer dois conjuntos abertos contendo 0_1 e 0_2 conterá um segmento $(0,b)$.

Exemplo 1: $\rightarrow \mathbb{R}^n$ junto com a operação de adição de vetor é um grupo de Lie com a estrutura usual diferenciável.

3.3. Difeomorfismo

Em particular f é um (C^r) difeomorfismo se f é uma bijeção e f e f^{-1} são continuamente diferenciáveis (C^r) . Difeomorfismo são para variedades diferenciáveis o que homeomorfismos são para espaços topológicos, e o que isomorfismos são para espaços vetoriais.

Seja $f: X \rightarrow Y$ e seja g uma função em Y



A imagem recíproca sob f da função g é a função $g \circ f: x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$; e é simbolizada por

$$g \circ f = f^*(g)$$

A mesma definição aplica para a imagem recíproca $f^* \circ g$ de um gráfico $g: Y \rightarrow Z$ sob $f: X \rightarrow Y$

$$f^*g = g \circ f$$

3.4. Grupos de Lie I

Um grupo Lie [1] G é um grupo que é também uma variedade diferenciável tal que a estrutura diferenciável é compatível com a estrutura do grupo, isto é, tal que a operação $G \times G \rightarrow G$ por $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ é um gráfico diferenciável.

4. Dois grupos de Lie são isomórficos se existe um difeomorfismo entre eles o qual preserva a estrutura do grupo (a qual é um homomorfismo de grupo).

Exemplo 1: $\rightarrow R^n$ junto com a operação de adição de vetor é um grupo de Lie quando dotado com sua estrutura usual diferenciável.

4.1. Campos de vetores como geradores de grupos de transformações

Seja X uma variedade plana de dimensão n com pontos $x, y, \dots \in X$. Seja v um campo vetorial em X e seja $\sigma: I \subset R \rightarrow X$ uma curva tal que a tangente à curva σ em $t = \sigma(t)$ é o vetor $v(x)$. A curva σ satisfaz a equação diferencial

$$d\sigma(t)/dt = v(\sigma(t)) \quad t \in I$$

equação de campo diferencial

σ é chamada uma curva integral do campo vetor v

Sistemas dinâmicos são frequentemente governados por este tipo de equação. Uma curva integral é então chamada de uma trajetória do sistema.

Dado um campo do vetor v , pode alguém sempre encontrar uma curva integral através de um ponto x ? Esta curva é única? Resposta: "sim, localmente, se v é C^1 ". Enunciamos o seguinte:

TEOREMA: Suponha que v é um C^1 campo do vetor variedade X , então para todo $x \in X$, existe uma curva integral de v , $t \rightarrow \sigma(t, x)$, tal que:

- 1) $\sigma(t, x)$ é definida por t para algum intervalo $I(x) \subset R$, contendo $t = 0$, e é de classe C^1
- 2) $\sigma(0, x) = x$ para todo $x \in X$
- 3) Esta curva é única, ou seja, $x \in X$, não há curva integral C^1 de v definida em um intervalo estritamente maior do que $I(x)$, e passando através de x (isto é, tal que $\sigma(0, x) = x$).

A prova é facilmente obtida da prova dada por equações diferenciais ordinárias. O seguinte teorema é uma consequência da única propriedade 3:

TEOREMA

Se $t, s, t+s \in I(x)$ então $\sigma(t, \sigma(s, x)) = \sigma(t+s, x)$



4. GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

Em toda esta seção “plano” significa “diferenciável da classe C^k ”, com k grande o suficiente para as afirmações serem significativas.

4.1. Campos de vetores como geradores de grupos de transformações

Seja X uma variedade plana de dimensão n com pontos $x, y, \dots \in X$. Seja v um campo vetorial em X e seja $\sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ uma curva tal que a tangente à curva σ em $x = \sigma(t)$ é o vetor $v(x)$. A curva σ satisfaz a equação diferencial

$$d\sigma(t)dt = v(\sigma(t)) \quad t \in I$$

equação de campo diferencial

σ é chamada uma curva integral do campo vetor v

Sistemas dinâmicos são frequentemente governados por este tipo de equação. Uma curva integral é então chamada de uma trajetória do sistema.

Dado um campo do vetor v , pode alguém sempre encontrar uma curva integral através de um ponto x_0 ? Esta curva é única? Resposta: “sim, localmente, se v é C^1 ”. Enunciamos o seguinte:

TEOREMA: Suponha que v é um C^r campo do vetor variedade X , então para todo $x \in X$, existe uma curva integral de v , $t \rightarrow \sigma(t, x)$, tal que:

- 1) $\sigma(t, x)$ é definida por t para algum intervalo $I(x) \subset \mathbb{R}$, contendo $t = 0$, e é de classe C^{r+1}
- 2) $\sigma(0, x) = x$ para todo $x \in X$
- 3) Esta curva é única, ou seja, $x \in X$, não há curva integral C^1 de v definida em um intervalo estritamente maior do que $I(x)$, e passando através de x (isto é, tal que $\sigma(0, x) = x$).

A prova é facilmente obtida da prova dada por equações diferenciáveis ordinárias. O seguinte teorema é uma consequência da única propriedade 3:

TEOREMA:

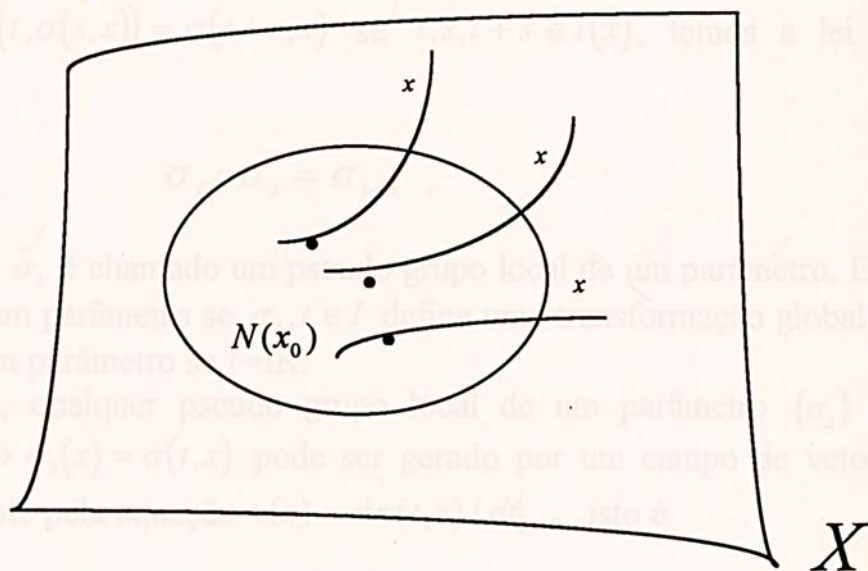
Se $t, s, t+s \in I(x)$ então $\sigma(t, \sigma(s, x)) = \sigma(t+s, x)$



PROVA: As curvas $t \rightarrow \sigma(t, \sigma(s, x))$ e $t \rightarrow \sigma(t+s, x)$ satisfazem a mesma equação diferencial, e a mesma condição inicial $\sigma(0, \sigma(s, x)) = \sigma(s, x)$.

O mapeamento $\sigma: \sum_v \rightarrow X$ por $(x, t) \rightarrow \sigma(t, x)$ é chamado de fluxo de C^1 campo do vetor v . Se X e v são C^∞ , o fluxo é C^∞ .

O mapeamento $\sigma(t, \bullet) \equiv \sigma_t: x \rightarrow \sigma(t, x)$ é definido em $N(x_0) \subset X$ para $t \in I(x_0)$. Ele é uma transformação de $N(x_0)$ - transformação local de X - gerada pelo campo do vetor v . Sob este mapeamento, um ponto $x \in N(x_0)$ é levado para um ponto $\sigma_t(x) \in X$ ao longo da curva integral de v em X - a localização de $\sigma_t(x)$ ao longo da curva sendo determinada por t .



Geralmente o intervalo $I(x_0) \subset \mathbb{R}$ depende de $N(x_0)$. A intersecção I de todos os intervalos $I(x_0)$ correspondendo para um conjunto de vizinhos $\{N(x_0)\}$ cobrindo X pode ou não ser vazia. I não é vazio quando X é compacto, desde que ele seja então dado por uma intersecção finita. Quando I não é vazio, então σ , com $t \in I$ define uma transformação global de X . Além do mais podemos definir σ_t para todo $t \in \mathbb{R}$ através da relação:

$$\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s,$$

e cada σ_t tem um inverso, σ_{-t} . Temos, então, provado o seguinte

TEOREMA: Um campo de vetor plano em uma variedade compacta X gera um grupo de um parâmetro de difeomorfismo de X .

Como consequência natural, mostraremos

COROLÁRIO: Um campo vetorial plano em uma variedade X , o qual desaparece fora de um conjunto compacto $K \subset X$, gera um grupo de um parâmetro de difeomorfismos de X .

PROVA: Seja $x \in X \setminus K$, σ_t é o mapeamento identidade, definido por todo t . Consequentemente nós sabemos que cobrindo K com um número finito de vizinhos abertos $IN(x_0)$, que há um intervalo não vazio $I \subset \mathbb{R}$, tal que o mapeamento σ_t seja definido no inteiro de X por $t \in I$, deste modo para todo $t \in \mathbb{R}$.

Desde que $\sigma(t, \sigma(s, x)) = \sigma(t+s, x)$ se $t, s, t+s \in I(x)$, temos a lei da composição

$$\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}.$$

O mapeamento σ_t é chamado um pseudo grupo local de um parâmetro. Este é um grupo local de um parâmetro se $\sigma_t, t \in I$ define uma transformação global de X ; I é um grupo de um parâmetro se $I = \mathbb{R}$.

Contrariamente, qualquer pseudo grupo local de um parâmetro $\{\sigma_t\}$ de transformação $\sigma_t: x \rightarrow \sigma_t(x) = \sigma(t, x)$ pode ser gerado por um campo de vetor v definido exclusivamente pela equação $v(x) = d\sigma(t, x) / dt|_{t=0}$, isto é

$$v(x) = d\sigma(t, x) / dt|_{t=0} \text{ implica } v(\sigma(t, x)) = d\sigma(t, x) / dt.$$

PROVA: Considere a curva C_x gerada de x por σ_t , tal que:

$$\sigma_{t+s}(x) = \sigma_s \circ \sigma_t(x) ; \quad t, s, t+s \in I(x)$$

Derivando ambos os membros desta equação com relação a s

$$\frac{d}{ds} \sigma(t+s, x) = \frac{d}{dt} \sigma(t+s, x) = \frac{d}{ds} \sigma(s, \sigma(t, x)) ,$$



a qual implica que

PROVA: $\frac{d}{dt}\sigma(t, x) = \frac{d}{ds}\sigma(s, \sigma(t, x))|_{s=0} = v(\sigma(t, x))$ pela definição de v .

O campo de vetor v é o gerador do pseudo grupo de transformação $\{\sigma_t\}$.

Os físicos frequentemente chamam este vetor um gerador “infinitésimo” e escrevem a equação prévia na forma

$$\delta\sigma = v\delta t$$

Então, desde que $\sigma(0, x_0) = x_0$ temos,

$$\sigma(\delta t) = x_0 + v\delta t.$$

TEOREMA: Dado um campo de vetor v gerando o pseudo grupo local σ_t , a imagem $(f'v)$ de v sob o difeomorfismo f de X sobre X gera o pseudo grupo local de um parâmetro $\{f \circ \sigma_t \circ f^{-1}\}$.

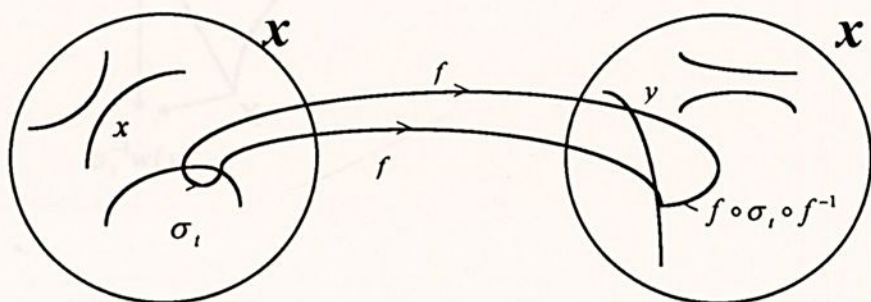
PROVA: Provaremos que $W(y)$ definido por

$$W(y) = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma_t \circ f^{-1}(y))|_{t=0}$$

é igual para $(f'v)(y)$. Realmente

$$\frac{d}{dt}(f' \circ \sigma_t(x))|_{t=0} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_t^j(x)} \frac{d\sigma_t^j(x)}{dt}|_{t=0} = (f'(v(x)))^i$$

Alternativamente poderíamos observar que sua definição $W(y)$ é o vetor **tangente** para a curva $f \circ \sigma(\cdot, x) \circ f^{-1}$ em y



COROLÁRIO: O campo de vetor v é invariante sob f se f comuta com σ_t .

PROVA: v é invariante sob f se e somente se

$$f_*v = v$$

isto é, se $\frac{d}{dt}(f \circ \sigma_t \circ f^{-1}(y))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\sigma_t(y)|_{t=0}$.

$$f \circ \sigma_t \circ f^{-1} = \sigma_t \Rightarrow f \circ \sigma_t = \sigma_t \circ f$$

4.2. Derivadas de Lie

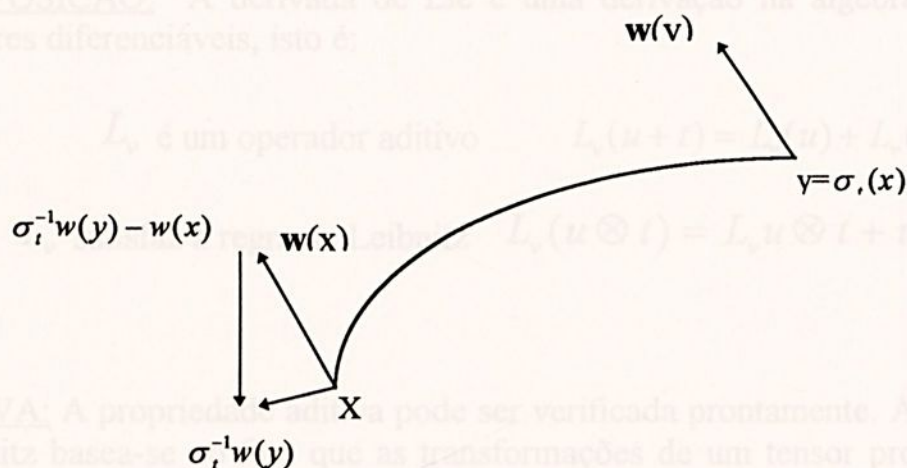
O fluxo de um campo vetorial v determina transformações locais σ_t de uma variedade X , mapeando a vizinhança $N(x) \subset X$ em X .

A derivada de Lie de um campo de tensor caracteriza a diferença entre o campo tensorial e sua imagem [inversa] sob σ_t [2].

A derivada de Lie $L_v w$ do campo vetorial contravariante é definida:

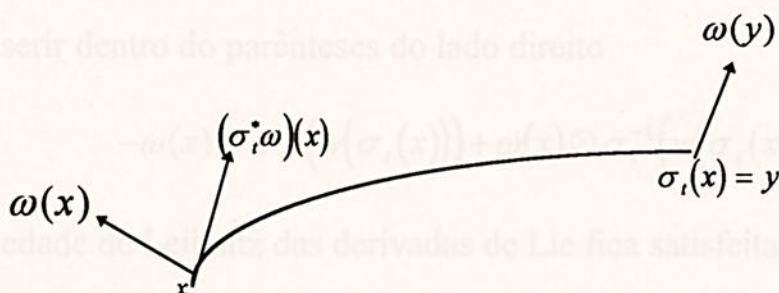
$$L_v w|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\sigma_t^{-1}(w(\sigma_t(x))) - w(x)]$$

onde é necessária a introdução do mapeamento inverso σ_t^{-1} para computar a derivada de Lie em x



A derivada de Lie $L_v \omega$ de um campo de vetores covariantes ω é o campo dos vetores covariantes e é definida por

$$L_v \omega|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\sigma_t^* (\omega(\sigma_t(x))) - \omega(x)]$$



EXERCÍCIO: Compute a derivada de Lie de uma função f .

Resposta:
$$L_v f|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\sigma_t(x)) - f(x)] = v(f)|_x$$

PROPOSIÇÃO: A derivada de Lie é um operador local:

$$\text{se } u=t \text{ em } N(x) \subset X, \quad L_v u = L_v t \text{ em } N(x)$$

$$\text{se } v_1 = v_2 \text{ em } N(x), \quad L_{v_1} u = L_{v_2} u \text{ em } N(x)$$

PROPOSIÇÃO: A derivada de Lie é uma derivação na álgebra de campos de tensores diferenciáveis, isto é:

$$L_v \text{ é um operador aditivo} \quad L_v(u+t) = L_v(u) + L_v(t) ;$$

$$L_v \text{ satisfaz a regra de Leibnitz} \quad L_v(u \otimes t) = L_v u \otimes t + u \otimes L_v t .$$

PROVA: A propriedade aditiva pode ser verificada prontamente. A propriedade de Leibnitz basea-se no fato que as transformações de um tensor produto é o tensor produto das transformações de seus fatores. Tipicamente

$$(\sigma_i^* \otimes \sigma_i^{-1})(\omega \otimes w) = \sigma_i^* \omega \otimes \sigma_i^{-1} w .$$

Deste modo,

$$L_v(\omega \otimes w)|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\sigma_t^* (\omega(\sigma_t(x))) \otimes \sigma_t^{-1} (w(\sigma_t(x))) - (\omega \otimes w)(x) \right] .$$

Vamos inserir dentro do parênteses do lado direito

$$-\omega(x) \otimes \sigma_t^{-1} (w(\sigma_t(x))) + \omega(x) \otimes \sigma_t^{-1} (w(\sigma_t(x))) ;$$

e a propriedade de Leibnitz das derivadas de Lie fica satisfeita.

4.3. Expressões coordenadas locais da derivada de Lie [2]

Se , por exemplo, a expressão coordenada local de um tensor arbitrário é da forma

$$t = t_{jk}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k$$

então

$$\begin{aligned} L_v t|_x &= L_v(t_{jk}^i(x)) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k + t_{jk}^i(x) L_v \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \otimes dx^j \otimes dx^k \\ &+ t_{jk}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes L_v(dx^j) \otimes dx^k + t_{jk}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes L_v(dx^k) \end{aligned}$$

Por definição

$$\left(L_v \frac{\partial}{\partial x^i} \right)|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\sigma_t^{-1*} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_y \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right] .$$

Os componentes de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ no sistema de coordenadas naturais são $\frac{\partial}{\partial x^i} = \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$; as componentes desta transformação $\sigma_t^{-1*}(\partial/\partial x^i)$ são

$$\frac{\partial p^j(t, y)}{\partial y^h} \delta_i^h = \frac{\partial p^j(t, y)}{\partial y^i} .$$

Deste modo, em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} \left(L_v \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_x &= \lim_t \frac{1}{t} \left[\frac{\partial p^j(t, y)}{\partial y^j} - \delta_i^j \right] \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial p^j}{\partial y^j} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \quad \text{usando } \delta_i^j = \frac{\partial p^j(0, y)}{\partial y^j} \\ &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \quad \text{usando } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p^j}{\partial y^h} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x^i} \right) = \frac{d}{dt} \delta_i^j = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$L_v \frac{\partial}{\partial x^i} = - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{usando } d\sigma(t)/dt = v(\sigma(t)).$$

Um cálculo similar conduz a

$$L_v dx^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Em resumo,

$$(L_v t)^i_{jk} = v^l \partial_l t^i_{jk} - t^l_{jk} \partial_l v^i + t^i_{lk} \partial_j v^l + t^i_{jl} \partial_k v^l.$$

EXERCÍCIO: Compute a derivada de Lie de um campo de vetores contravariantes

Resposta:

$$\begin{aligned} L_v w &= L_v(w^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + w^i L_v \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = [v, w]. \end{aligned}$$

4.4. Campos de tensores invariantes sob um grupo de transformações

TEOREMA: Um campo de tensor é invariante sob o (local, pseudo) grupo $\{\sigma_t\}$ de transformações gerado por v se e somente se sua derivada de Lie com relação a v for zero.

PROVA: Pela definição da derivada de Lie, da invariância do tensor implica o desaparecimento da derivada de Lie:

$$\sigma_t^* w(x) = w(\sigma_t(x)) \Rightarrow L_v w = 0$$

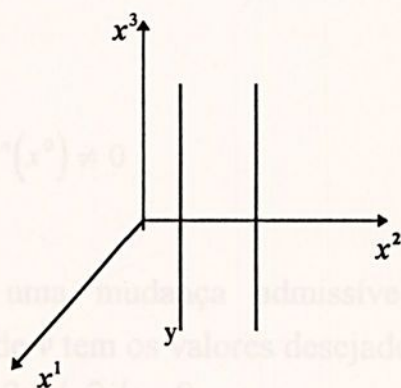
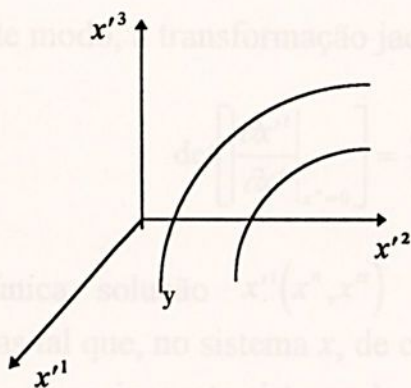
$$\sigma_t^* \omega(\sigma_t(x)) = \omega(x) \Rightarrow L_v \omega = 0$$

A prova do inverso, isto é, $L_v t = 0 \Rightarrow$ “ t invariante sob o grupo de transformações geradas por v ”, será efetuado na vizinhança de um ponto x_0 onde $v \neq 0$. O caso geral é obtido por um procedimento limite quando v não é identicamente zero na vizinhança de x_0 . Construímos um sistema coordenado onde,

$$v^n = 1, \quad v^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, n$$

Seja (x'^i) um sistema coordenado na vizinhança de x_0 tal que

$$x_0'^n = 0 \text{ e } v'^n(x_0) \neq 0$$



Seja (x^i) o sistema coordenado desejado. Neste sistema a curva integral de v a qual passa por x em $t=0$ é

$$\sigma^i(t, x) = x^i + \delta_n^i t.$$

Desde que uma mudança de coordenadas mapeia curvas integrais em curvas integrais, as funções $x'^i(x^n, x^\alpha)$, as quais caracterizam a mudança de coordenadas, satisfazem as equações,

$$dx'^i / dx^n = v'^i(x'^j(x^n, x^\alpha)),$$

onde a variável x^n tem sido escolhida como parâmetro ao longo da curva. Localmente, este sistema tem exatamente uma solução $x'^i(x^n, y)$ a qual passa de y para $x^n = 0$

$$x'^i(0, y) = y'^i.$$

Por conveniência escolha pontos em y tal que $0 = y'^n = x'^n(0, y)$ e escolha o x -sistema tal que y tenha as mesmas coordenadas em ambos os sistemas $y'^i = y^i = x^i$. Segue que,

$$\left. \frac{\partial x'^j}{\partial x^\alpha} \right|_{x^n=0} = \frac{\partial x'^j(0, y)}{\partial x^\alpha} \quad \text{usando a continuidade de } x'^i \text{ em } x^n$$

$$= \delta_\alpha^j \quad \text{usando a condição inicial}$$

Deste modo, a transformação jacobiana

$$\det \left[\left. \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right|_{x^n=0} \right] = \left. \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \right|_{x^n=0} = v'^n(x^0) \neq 0.$$

A única solução $x'^i(x^n, x^\alpha)$ caracteriza uma mudança admissível de coordenadas tal que, no sistema x , de coordenadas de v tem os valores desejados.

Além do mais, neste sistema de coordenada $\partial v^i / \partial x^j = 0$ e os componentes da derivada de Lie de t se reduz em à derivada parcial de seus componentes com relação à x^n , ou seja,

$$(L_v t)_i^{jk} = \partial_i^{jk} / \partial x^n .$$

Deste modo,

$$L_v t = 0 \Rightarrow \partial_i^{jk} / \partial x^n = 0 \Rightarrow t_i^{jk}(x^\alpha) .$$

As curvas integrais de v sendo

$$\sigma^i(t, x) = x^i + \delta_n^i t ,$$

não dependem de t . t é invariante sob as transformações $\{\sigma_i\}$ geradas por v .

A métrica g é um tensor 2-covariante simétrico não degenerado em X . Uma isometria é um difeomorfismo de X a qual deixa g invariante. As isometrias de X formam um grupo de transformações de X . Um grupo, um-parâmetro de transformações gerado por um campo de vetores v é um grupo de isometria se e somente se

$$0 = (L_v g)_{hk} = v^i \left(\partial_{g_{hk}} / \partial x^i \right) + g_{hi} \left(\partial v^i / \partial x^k \right) + g_{ik} \left(\partial v^i / \partial x^h \right) .$$

Faça $v_h = g_{hi} v^i$, então esta equação torna-se:

$$\frac{\partial v_h}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^h} + v^i \left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} \right) = 0$$

4.5. Grupos de Lie II

DEFINIÇÕES :

Consideremos o grupo dimensional finito de transformações $\{\sigma_g\}$: g é um elemento de um grupo Lie G de dimensão p . O conjunto $\{\sigma_g\}$ é um grupo Lie de transformações se o mapeamento

$$\sigma: G \times X \rightarrow X \text{ por } (g, x) \rightarrow \sigma(g, x)$$

é diferenciável e se o conjunto de transformações $\{\sigma_g: X \rightarrow X; \sigma_g(x) = \sigma(g, x)\}$; junto com o mapeamento composição, segue a propriedade do grupo.

$$\begin{aligned} \sigma_g \circ \sigma_h &= \sigma_{gh} \quad (\text{ação esquerda de } G \text{ em } X) \\ \text{ou} \quad \sigma_g \circ \sigma_h &= \sigma_{hg} \quad (\text{ação direita de } G \text{ em } X) \\ \sigma_e &\text{ é a transformação identidade} \end{aligned}$$

Segue que, $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$

Desta maneira,

- (1) $\rightarrow G$ opera efetivamente em X se $\sigma_g(x) = x$ para todo $x \in X$ implica $g=e$
- (2) $\rightarrow G$ opera livremente em X se $\sigma_g(x) \neq x$ a menos que $g=e$
- (3) $\rightarrow G$ opera transitivamente em X se para todo $x \in X$ e $y \in X$ existe $g \in G$ tal que $\sigma_g(x) = y$

As propriedades do grupo de transformações uni-dimensional $\{\sigma_t\}$ são amplamente exprimidas em termos do campo do vetor v o qual o gera. Propriedades similares para as propriedades de $\{\sigma_t\}$ podem ser derivadas para os grupos de transformações $\{\sigma_g(t); t \in R\}$ onde $\{g(t); t \in R\}$ é um subgrupo de G de um parâmetro.

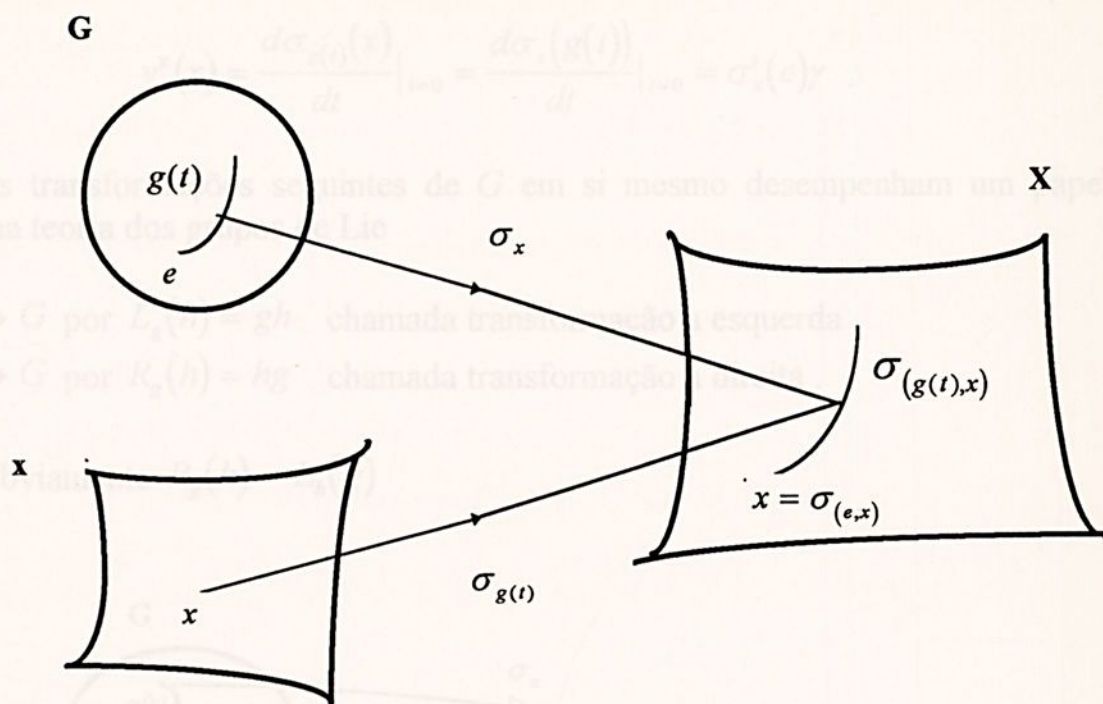
Um subgrupo de um parâmetro de um grupo de Lie G é uma curva diferenciável

$$R \rightarrow G \quad \text{por} \quad t \rightarrow g(t)$$

tal que

$$\begin{cases} g(t)g(s) = g(t+s) \\ g(0) = e \end{cases}$$

Os conceitos desenvolvidos para o grupo $\{\sigma_t\}$ se aplicam para o grupo $\{\sigma_{g(t)}\}$ consequentemente podemos classificar o campo do vetor Killing o qual gera $\{\sigma_{g(t)}\}$ por $\gamma = dg(t)/dt|_{t=0}$ por γ .



$$\sigma_{g(t)}(x) = \sigma(g(t), x) = \sigma_x(g(t))$$

A curva gerada pelas transformações $\{\sigma_{g(t)}; t \in R\}$ operando em x é a imagem do subgrupo de um parâmetro $\{g(t); t \in R\}$ por σ_x onde $\sigma_x(g(t)) = \sigma(g(t), x) = \sigma_{g(t)}(x)$.

O campo do vetor o qual gera o grupo de transformação $\{\sigma_{g(t)}; t \in R\}$ é chamado um campo do vetor de Killing em X relativo a ação do grupo G (doravante chamaremos vetor de Killing, simplesmente vetor Killing).

A curva integral passando por x do campo do vetor Killing v satisfaz as equações

$$\begin{cases} d\sigma_x(g(t)) / dt = v(\sigma_x(g(t))) \\ \sigma_x(e) = x \end{cases}$$

Veremos que um subgrupo de um parâmetro é definido pelo seu vetor tangente γ em e

$$\gamma = dg(t) / dt|_{t=0}$$

Consequentemente podemos classificar o campo do vetor Killing o qual gera $\{\sigma_{g(t)}; dg(t) / dt|_{t=0} = \gamma, t \in R\}$ por γ ,

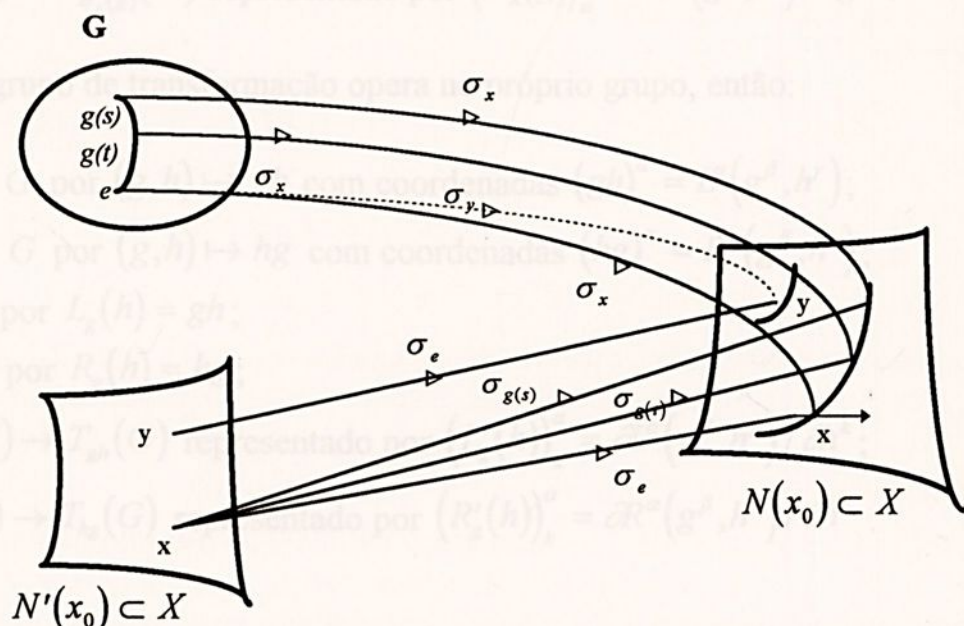
$$v^r(x) = \frac{d\sigma_{g(t)}(x)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\sigma_x(g(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \sigma'_x(e)\gamma.$$

As transformações seguintes de G em si mesmo desempenham um papel central na teoria dos grupos de Lie

$L_g: G \rightarrow G$ por $L_g(h) = gh$ chamada transformação a esquerda

$R_g: G \rightarrow G$ por $R_g(h) = hg$ chamada transformação a direita.

Obviamente $R_g(h) = L_h(g)$



O campo de vetor Killing v^r é definido por

$$v^r(x) = \frac{d\sigma_{g(t)}(x)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\sigma_x(g(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \sigma'_x(e)\gamma$$

σ_x mapeia o subgrupo de um parâmetro $g(t)$ dentro da curva integral de v^r na trajetória de x . Cada subgrupo de um parâmetro de G define um campo de vetor Killing em X . Se G atua efetivamente em X , o espaço dos campos de vetores Killing é isomórfico para a álgebra de Lie de G .

OBSERVAÇÕES: Resumiremos aqui as anotações usadas no estudo de grupos de transformações de múltiplos, quando coordenadas locais são usadas. Abreviamos $f(x^1, \dots, x^n)$ para $f(x^i)$.

$x \in X$ com coordenadas $(x^i) \in \mathbb{R}^n$ e $g \in G$ com coordenadas $(g^\alpha) \in \mathbb{R}^p$;

$\sigma: G \times X \rightarrow X$ por $(g, x) \rightarrow \sigma(g, x)$ com coordenadas $(\sigma^i(g^\alpha, x^j)) \in \mathbb{R}^n$;

$\sigma_g: X \rightarrow X$ por $\sigma_g(x) = \sigma(g, x)$;

$\sigma_x: G \rightarrow X$ por $\sigma_x(g) = \sigma(g, x)$;

$\sigma'_g(x): T_x(X) \rightarrow T_{\sigma_g(x)}(X)$ representado por $(\sigma'_g(x))^i_j = \partial \sigma^i(g^\alpha, x^j) / \partial x^j$;

$\sigma'_x(g): T_g(G) \rightarrow T_{\sigma_x(g)}(X)$ representado por $(\sigma'_x(g))^\alpha_i = \partial \sigma^i(g^\beta, x^j) / \partial g^\beta$.

Se o grupo de transformação opera no próprio grupo, então:

$L: G \times G \rightarrow G$ por $(g, h) \mapsto gh$ com coordenadas $(gh)^\alpha = L^\alpha(g^\beta, h^\gamma)$;

$R: G \times G \rightarrow G$ por $(g, h) \mapsto hg$ com coordenadas $(hg)^\alpha = R^\alpha(g^\beta, h^\gamma)$;

$L_g: G \rightarrow G$ por $L_g(h) = gh$;

$R_g: G \rightarrow G$ por $R_g(h) = hg$;

$L'_g(h): T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$ representado por $(L'_g(h))^\alpha_k = \partial L^\alpha(g^\beta, h^\gamma) / \partial h^\gamma$;

$R'_g(h): T_h(G) \rightarrow T_{hg}(G)$ representado por $(R'_g(h))^\alpha_k = \partial R^\alpha(g^\beta, h^\gamma) / \partial h^\gamma$.

4.6. Transformações esquerda e direita de G . Álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G . Estruturas constantes.

Os dois grupos de transformações de um grupo de Lie G em G definidos pelas translações esquerda e direita atuam efetivamente, transitivamente e livremente em G .

O conjunto de campos vetores invariantes sobre de translações esquerda [direita] são chamados de os campos de vetores invariantes de esquerda [direita] em G . Mostraremos que cada um daqueles dois conjuntos formam um espaço vetor da mesma dimensão como G e que, junto com a operação de suporte de Lie, cada um é uma álgebra de Lie.

Um campo de vetor v em G é invariante esquerda se

$$L'_g(v(h)) = v(L_g h) = v(gh), \quad \forall g, h \in G$$

Segue que

$$L'_g \gamma = v(g) \quad \text{com } \gamma = v(e).$$

Em coordenadas locais a equação

$$v^\alpha(g) = \left. \frac{\partial (gh)^\alpha}{\partial h^\beta} \right|_{h=e} \gamma^\beta.$$

Contrariamente $L'_g v(e) = v(g)$ implica que v é invariante esquerda

$$v(L_g h) = v(gh) = L'_{gh} v(e) = (L_g \circ L_h)' v(e) = L'_g \circ L'_h v(e) = L'_g v(h).$$

Deste modo, temos provado o seguinte

TEOREMA: Há uma correspondência bijetiva entre o conjunto de campos dos vetores invariantes esquerdos e o conjunto de vetores tangentes para G em e , isto é, o espaço vetor tangente $T_e(G)$.

Poderemos, sem prova, enunciar o seguinte:

TEOREMA: O conjunto de campos dos vetores invariantes esquerdos [direito] é fechado sob a operação suporte de Lie.

Como consequência, seja $\{v_\alpha; \alpha = 1, \dots, p\}$ uma base da álgebra Lie. Existem números $C_{\alpha\beta}^\gamma$, tal que:

$$[v_\alpha, v_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma.$$

Os coeficientes $C_{\alpha\beta}^\gamma$ são chamados as estruturas constantes do grupo Lie G . Suas propriedades do suporte de Lie são

- (1) antisimetria do suporte Lie $\Rightarrow C_{\alpha\beta}^{\gamma} = -C_{\beta\alpha}^{\gamma}$
- (2) identidade Jacobi para o suporte Lie $\Rightarrow$
 $C_{\alpha\beta}^{\gamma} C_{\gamma\sigma}^k + C_{\beta\sigma}^{\gamma} C_{\gamma\alpha}^k + C_{\sigma\alpha}^{\gamma} C_{\gamma\beta}^k = 0$
- (3) bilinearidade do suporte Lie $\Rightarrow (C_{\alpha\beta}^{\gamma})$ transforma por uma troca da base em $\mathcal{G}$ como os componentes de um tensor de terceira ordem.

4.7. Subgrupos de um-parâmetro

TEOREMA: Os subgrupos de um parâmetro de G são as curvas integrais passando pela origem e dos campos de vetores invariantes esquerdos [equivalentemente direitos].

As curvas integrais de campos de vetores invariantes direitos e esquerdos os quais não passam pela origem e coincidem apenas quando o grupo é abeliano.

PROVA: Seja $g: IR \rightarrow G$ um subgrupo de um parâmetro

$$L_{g(t)}g(s) = g(t+s).$$

Consequentemente

$$L'_{g(t)} \frac{dg(s)}{ds} = \frac{dg(t+s)}{ds} = \frac{dg(t+s)}{dt}.$$

Colocando $s = 0$, teremos

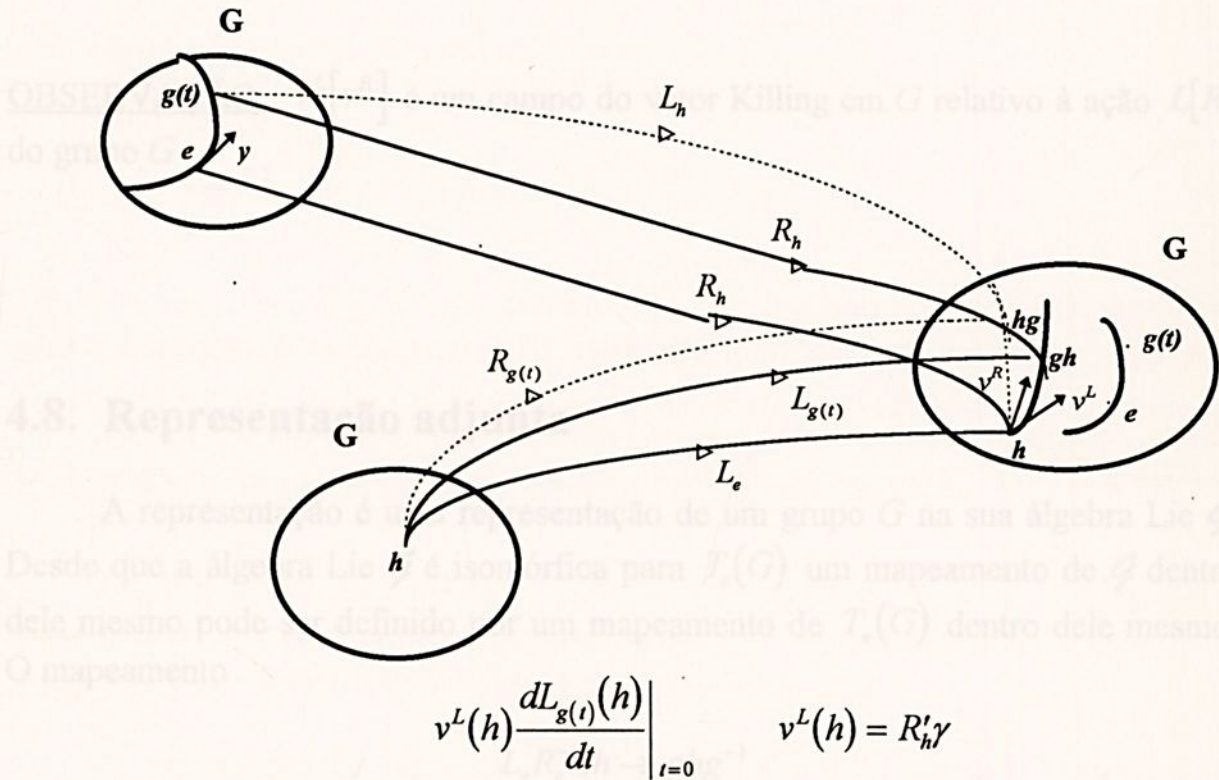
$$L'_{g(t)}\gamma = dg(t)/dt$$

onde γ é o vetor tangente em $g(0)=e$ para a curva $t \rightarrow g(t)$.

Contrariamente, para cada $\gamma \in T_e(G)$ existe uma solução única $g(t)$, passando pela origem, da equação diferencial para cada campo do vetor invariante esquerdo ou direito. Esta solução obedece a propriedade de grupo $g(t)g(s) = g(t+s)$.

Em contradição à solução $\sigma(t)$ obtida anteriormente, a qual foi definida somente para vizinhos em X e para $t \in I \subset IR$, $g(t)$ é uma transformação global de

G e é definida para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$. Em outras palavras $\{\sigma_t\}$ é um pseudo grupo local, considerando que $\{g(t)\}$ é um grupo.



Um elemento $\gamma \in T_e(G)$ define o gerador v^L [o gerador v^R] de um subgrupo de um parâmetro de transformações $\{L_{g(t)}\}$ [de transformações $\{R_{g(t)}\}$]; v^L é também o campo de vetor invariante de direita gerado por γ . Similarmente a curva integral através de h do campo de vetor invariante de direita e esquerda v^L e v^R geradas pelo mesmo elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ coincidem. Os isomorfismos de $\mathfrak{g}$ com os espaços de campos de vetores invariantes de direita e esquerda são definidos por $\gamma \leftrightarrow v^L$, $\gamma \leftrightarrow v^R$.

TEOREMA: Seja v^L o gerador do grupo de transformações de um parâmetro $\{L_{g(t)}; t \in \mathbb{R}\}$ de G sobre G . Então v^L é um campo de vetor invariante de direita. Similarmente o gerador v^R de $\{R_{g(t)}\}$ é um campo de vetor invariante de esquerda.

PROVA:

$$v^L(h) = \left. \frac{dL_{g(t)}(h)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dR_h(g(t))}{dt} \right|_{t=0} = R'_h \gamma$$

OBSERVAÇÃO: $v^L[v^R]$ é um campo do vetor Killing em G relativo à ação $L[R]$ do grupo G .

4.8. Representação adjunta

A representação é uma representação de um grupo G na sua álgebra Lie $\mathcal{G}$. Desde que a álgebra Lie $\mathcal{G}$ é isomórfica para $T_e(G)$ um mapeamento de $\mathcal{G}$ dentro dele mesmo pode ser definido por um mapeamento de $T_e(G)$ dentro dele mesmo. O mapeamento

$$L_g R_g^{-1}: h \rightarrow ghg^{-1}$$

é um automorfismo interior de G que define um mapeamento linear $(L_g R_g^{-1})'(e)$ de $T_e(G)$ em si mesmo. O mapeamento

$$Ad(g): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

é por definição o mapeamento correspondente para $(L_g R_g^{-1})'(e)$ no isomorfismo entre $T_e(G)$ e $\mathcal{G}$. Seja $\alpha_e, \gamma_e \in T_e(G)$; seja $\alpha, \gamma \in \mathcal{G}$ os campos de vetores invariantes de esquerda gerados por α_e e γ_e respectivamente

$$\alpha_e = (L_g R_g^{-1})'(e) \gamma_e \Leftrightarrow \alpha = Ad(g) \gamma.$$

Identificaremos frequentemente $T_e(G)$ com $\mathcal{G}$ e escrevemos

$$Ad(g) = (L_g R_g^{-1})'(e) = L'_g(g^{-1}) R_g^{-1}(e).$$

O mapeamento de G , dentro do espaço $L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ de mapeamentos lineares de $\mathcal{G}$ dentro de si mesmo

$$Ad: G \mapsto L(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \quad \text{por} \quad Ad: g \mapsto Ad(g)$$

é chamado a representação adjunta de G em $\mathcal{G}$.

A seguinte anotação abreviada é também usada:

$$Ad(g)\gamma = g\gamma g^{-1}, \quad \gamma \in \mathcal{G}.$$

Esta equação é literalmente correta se G é o grupo linear $GL(n)$ ou um dos seus subgrupos. Realmente L_g e R_g são então mapeamentos lineares e a derivada de um mapeamento linear pode ser identificada com o seu próprio mapeamento.

EXERCÍCIO: Prove que o mapeamento Ad é uma representação.

O centro de G é a parte central do homomorfismo $g \rightarrow L_g R_g^{-1}$, e é também a parte central da representação adjunta provida de G é conectada. Em um certo senso esta mede a não comutatividade de G .

A **representação adjunta** Ad de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}$ é a diferencial da representação adjunta de G em $\mathcal{G}$ na origem, modula o isomorfismo de $T_e(G)$ sobre $\mathcal{G}$

$$Ad = Ad'(e).$$

Mostraremos que:

$$Ad: \mathcal{G} \rightarrow L(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \quad \text{por} \quad Ad(\delta)(\cdot) = [\delta, \cdot].$$

Realmente, na anotação abreviada,

$$Ad(g(t))\gamma = g(t)\gamma g(t)^{-1},$$

$$\left. \frac{d}{dt} Ad(g(t))(\gamma) \right|_{t=0} = Ad'(e)\delta(\gamma) = Ad(\delta)(\gamma)$$

onde $\delta = dg(t)/dt|_{t=0}$ modula o isomorfismo de $T_e(G)$ em $\mathcal{G}$. Por outro lado,

$$\left. \frac{d}{dt} g(t)\gamma g(t)^{-1} \right|_{t=0} = [\delta, \gamma].$$

O mapeamento $Ad(\delta): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é chamado um mapa adjunto.

Seja $\{e_\alpha\}$ uma base de $\mathcal{G}$, e $c_{\gamma\beta}^\alpha$ as estruturas constantes nesta base e $\gamma = \gamma^\alpha e_\alpha$, $\delta = \delta^\alpha e_\alpha$. A expressão coordenada de $Ad(\delta)(\gamma) = [\delta, \gamma]$ nos dá

$$Ad(\delta)_\beta^\alpha = \delta^\gamma c_{\gamma\beta}^\alpha \quad \text{também escrita} \quad Ad(\delta) = \delta \cdot c.$$

Aqui dois dos três índices das estruturas constantes atuam a regra de índices de matrizes, mas não qualquer dos dois índices.

Desde que Ad é um homomorfismo de G dentro de $L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$, este mapea um subgrupo de um parâmetro $\{g(t)\}$ de G em um subgrupo $\{Ad(g(t))\}$ de $L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$. Consequentemente, existe uma transformação linear $A: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que:

$$Ad(g(t)) = \exp.tA.$$

A é prontamente obtido de $d(Ad(g(t)))/dt|_{t=0}$ e encontrado igual para $Ad(\delta)$ onde δ é o gerador de $\{g(t)\}$. A equação

$$Ad(\exp \delta) = \exp(Ad(\delta))$$

é também escrita com a precaução dada abaixo

$$Ad(\exp \delta) = \exp(\delta \cdot c).$$

A forma Killing em $\mathcal{G}$ é a forma bilinear $B(\gamma, \delta) = \text{tr} Ad(\gamma) Ad(\delta)$.

4.9. A Forma Canônica ou Maurer-Cartan

A forma canônica ou Maurer-Cartan ω em um grupo Lie G é uma forma com valores na álgebra Lie $\mathcal{G}$ de G definida através da relação

$$\omega(vg) = \gamma \quad \text{onde} \quad \gamma = L_g^{-1} vg \in T_e(G).$$

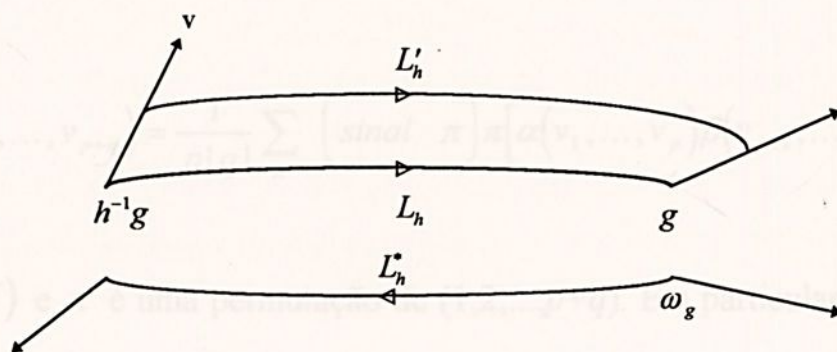
A forma Maurer-Cartan é frequentemente definida pela equação $\omega(vg) = g^{-1}vg$. Esta notação abreviada é literalmente correta se G é o grupo linear $GL(n)$ ou um dos seus subgrupos desde que a derivada de um mapeamento linear possa ser identificado com o seu próprio mapeamento.

TEOREMA: A forma canônica ω é invariante esquerda e sua imagem recíproca sob uma translação a direita satisfaz a equação

$$R_g^* \omega = Ad(g^{-1}) \circ \omega.$$

PROVA:

$$\begin{aligned} (L_h^* \omega)(v_{h^{-1}g}) &= \omega(L'_h v_{h^{-1}g}) \text{ pela definição de } L_h^* \\ &= L_g^{-1} L'_h v_{h^{-1}g} \text{ pela definição de } \omega \\ &= L_{h^{-1}g}^{-1} v_{h^{-1}g} = \omega(v_{h^{-1}g}). \end{aligned}$$



Similarmente:

$$\begin{aligned} (R_h^* \omega)(v_{gh^{-1}}) &= \omega(R'_h v_{gh^{-1}}) \\ &= L_g^{-1} R'_h v_{gh^{-1}} \text{ por definição de } \omega \\ &= L_h^{-1} L_{gh^{-1}}^{-1} R'_h v_{gh^{-1}} \\ &= L_h^{-1} R'_h L_{gh^{-1}}^{-1} v_{gh^{-1}} \text{ desde que } R' \text{ e } L' \text{ sempre comutem} \\ &= L_h^{-1} R'_h \omega(v_{gh^{-1}}) \text{ por definição de } \omega. \end{aligned}$$

5. FORMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES - ÁLGEBRA EXTERIOR [4], [5], [6]

Um campo tensorial covariante de ordem p totalmente antisimétrico é chamado de uma diferencial exterior p -forma (forma de grau p).

$\Lambda_x^p(X)$ é o espaço de p -formas em X . Uma forma de medida p superior para a dimensão n do múltiplo no qual ele é definido é identicamente ZERO porque os únicos componentes não ZERO de um campo-tensorial de ordem p totalmente anti simétrico são aqueles nos quais todos os índices são diferentes. Uma situação a qual nunca pode existir se $p > n$.

O produto exterior $\wedge$ (produto Grassman) de uma p -forma e uma q -forma é um mapeamento

$$\wedge: (\Lambda^p(X), \Lambda^q(X)) \rightarrow \Lambda^{p+q}(X)$$

por $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta$ com $\alpha \wedge \beta$ definido por

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} \left(\text{sign} \pi \right) \pi \left[\alpha(v_1, \dots, v_p) \beta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \right]$$

onde $v_i \in T(X)$ e π é uma permutação de $(1, 2, \dots, p+q)$. Em particular, se α e β são 1-formas

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha.$$

5.1. Coordenadas locais. Bases para $\Lambda(X)$. Componentes

PROPRIEDADES:

Segue da definição que o produto exterior é

- | | |
|-----------------|---|
| (1) associativo | $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ |
| (2) bilinear | $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$ |
| | $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$ |
| | $f(\alpha \wedge \beta) = f\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge f\beta$ |

e em geral não é comutativo



$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \text{ se } \alpha \in \Lambda^p, \beta \in \Lambda^q.$$

Para mostrar esta última propriedade note que, no processo de permutação de β e α , termos comparáveis serão obtidos fazendo p 1-forma saltar q vezes, isto é, por pq permutações.

O conjunto de formas de todas as medidas em X junto com o produto exterior é chamado a álgebra exterior (Grassman). Esta é simbolizada $\Lambda(X)$ ou simplesmente $\Lambda.X$.

Nota: Alguns autores usam o fator $1/(p+q)!$ antes do que $1/p!q!$.

Então se α e β são 1-formas

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha).$$

$\Lambda.X$ é o espaço de formas em x . Uma 1-forma é também chamada uma forma linear. Uma função f em X pode ser considerada também como um elemento do círculo no qual o módulo $\Lambda(X)$ é definido, ou como uma 0-forma. O produto de uma forma α e um a função f é $f \wedge \alpha = f\alpha$.

A álgebra $\Lambda(X)$ é uma álgebra graduada, isto é, é uma coleção $\{\Lambda^p(X)\}$ dos módulos indexada pelos números inteiros p junto com um mapeamento associativo bilinear $\Lambda(X) \times \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X)$.

5.1. Coordenadas locais. Bases para $\Lambda^p(X)$. Componentes pontuais.

1) Em um ponto $x \in X$. Seja $(\theta^i; i = 1, \dots, n)$ uma base arbitrária de $T_x^*(X)$.

Uma base de $\Lambda_x^p(X^n)$ é o conjunto de $\binom{n}{p}$ p -formas independentes

$$\{\theta^{I_1} \wedge \dots \wedge \theta^{I_p}; I_j = 1, \dots, n\}.$$

PROVA: O espaço de p -formas em x é um subespaço de $\otimes^p T_x^*$. O conjunto $\{\theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}; i_j = 1, \dots, n\}$ é uma base para $\otimes^p T_x^*$. Consequentemente, uma p -forma pode ser escrita

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \quad \text{com } \alpha_{i_1 \dots i_p} \text{ totalmente antisimétrico}$$

$$\alpha = \frac{1}{p!} \epsilon_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} \alpha_{k_1 \dots k_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}$$

$$= \frac{1}{p!} \alpha_{k_1 \dots k_p} \theta^{k_1} \wedge \dots \wedge \theta^{k_p}$$

$$= \alpha_{k_1 \dots k_p} \theta^{k_1} \wedge \dots \wedge \theta^{k_p}.$$

As últimas duas linhas são ambas perfeitamente boas expansões de α . Contudo, o conjunto $\{\theta^{k_1} \wedge \dots \wedge \theta^{k_p}\}$ não é uma base para $\Lambda_x^p(X)$ porque seus elementos não são independentes, por exemplo: $\theta^{k_1} \wedge \theta^{k_2} \wedge \dots \wedge \theta^{k_p} = -\theta^{k_2} \wedge \theta^{k_1} \wedge \dots \wedge \theta^{k_p}$. No espaço $\otimes^p T_x^*(X^n)$, os componentes de α são $\{\alpha_{k_1 \dots k_p}\}$. No espaço $\Lambda_x^p(X^n)$ os componentes com índices escolhidos são chamados os componentes estritos de α .

A dimensão do espaço $\Lambda_x^p(X^n)$ é igual para o coeficiente binômial $\binom{n}{p} = n! / (n-p)! p!$. Em particular, uma m -forma $\alpha \in \Lambda_x^m(X^n)$ tem somente um componente estrito $\alpha_{i_1 \dots i_m}$. A soma da dimensão dos espaços de formas de todas medidas é $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.

Uma p -forma com somente um componente $\alpha = \alpha \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$ é chamada de um monômio.

2) Seja (θ^i) uma base arbitrária para campos de vetores covariantes no domínio de um gráfico. Então (θ^i) é também a base natural (dx^i) ou uma estrutura local $\{\theta^i = a_j^i dx^j\}$ onde $[a_j^i(x)]$ é uma matriz diferenciável regular. Segue que $\{\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}\}$ é uma base para as p -formas no gráfico escolhido.

EXEMPLO:

Seja α e β serem duas 1-formas em IR^3

$$\alpha = \alpha_i dx^i \quad \beta = \beta_i dx^i .$$

Seja (α_i) as componentes de um vetor V e (β_i) as componentes de um vetor U . Então

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta = & (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) dx^1 \wedge dx^3 \\ & + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) dx^2 \wedge dx^3 . \end{aligned}$$

As componentes de $\alpha \wedge \beta$ estão relacionadas com as componentes do vetor produto $V \times U$. Notamos que estes seriam iguais se as bases de $\Lambda^2(IR^3)$ fossem $(dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2)$ ao invés de $(dx^{I_1} \wedge dx^{I_2})$.

Sejam agora $\alpha \in \Lambda^p(X^n), \beta \in \Lambda^q(X^n)$. Então,

$$(\alpha \wedge \beta)_{i_1 \dots i_{p+q}} = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \epsilon_{i_1 \dots i_{p+q}}^{j_1 \dots j_p k_1 \dots k_q} \alpha_{j_1 \dots j_p} \beta_{k_1 \dots k_q} = \epsilon_{i_1 \dots i_{p+q}}^{J_1 \dots J_p K_1 \dots K_q} \alpha_{J_1 \dots J_p} \beta_{K_1 \dots K_q} .$$

onde a escolha dos índices no caso superior é uma escolha parcial na qual o subconjunto J e o subconjunto K são ambos totalmente ordenados, mas não relacionados um com o outro.

Troca de base. A transformação dos componentes de uma p -forma induzida pela troca de base $(\theta^i) \rightarrow (\theta^{i'} = a^{i'}_j \theta^j)$ pode ser prontamente obtida da fórmula acima. Seja $\omega = \omega_{i'_1 \dots i'_p} \theta^{i'_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i'_p}$ com $\omega_{i'_1 \dots i'_p}$ totalmente antisimétrica.

Então,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{p!} \omega_{i'_1 \dots i'_p} \theta^{i'_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i'_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{i'_1 \dots i'_p} a^{i'_1}_{j_1} \dots a^{i'_p}_{j_p} \theta^{j_1} \wedge \dots \wedge \theta^{j_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{i'_1 \dots i'_p} \epsilon_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_p} a^{i'_1}_{k_1} \dots a^{i'_p}_{k_p} \theta^{j_1} \wedge \dots \wedge \theta^{j_p} . \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\omega_{J_1 \dots J_p} = \omega_{I'_1 \dots I'_p} \in_{J_1 \dots J_p}^{k_1 \dots k_p} a_{k_1}^{I'_1} \dots a_{k_p}^{I'_p}$$

os termos $\in_{J_1 \dots J_p}^{k_1 \dots k_p} a_{k_p}^{I'_p}$ são os determinantes de todas as $p \times p$ matrizes obtidas da matriz $n \times n$ $[a_j^{i'}]$ eliminando $n-p$ linhas e $n-p$ colunas em todas as maneiras possíveis. É frequentemente conveniente considerar determinantes como os elementos de uma nova matriz chamada a matriz p -complexa derivada de $[a_j^{i'}]$.

Se a troca de base é uma troca de base natural induzida pela troca de coordenadas $x \rightarrow \bar{x}(x)$, então $a_i^{j'} = \partial \bar{x}^{j'} / \partial x^i$ e

$$\omega_{J_1 \dots J_p}(x) = \omega_{I'_1 \dots I'_p}(\bar{x}(x)) \frac{D(\bar{x}^{I'_1}, \dots, \bar{x}^{I'_p})}{D(x^{J_1}, \dots, x^{J_p})}.$$

$D(\bar{x}^{i'}) / D(x^j)$ é a matriz p -complexa derivada da matriz jacobiana $[\partial \bar{x}^{i'} / \partial x^j]$. Estas relações dão as regras para a troca de variáveis de uma p -integral, num espaço n -dimensional. Uma troca de coordenadas pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{i'_1 \dots i'_p}(\bar{x}(x)) d\bar{x}^{i'_1}(x) \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{i'_p}(x), \end{aligned}$$

onde: $d\bar{x}^{i'_j}(x) = \left(\partial \bar{x}^{i'_j} / \partial x^{k_j} \right) dx^{k_j}$.

5.2. Diferenciação exterior

Seja α uma p -forma diferencial de classe C^k ($\alpha_{i_1 \dots i_p}(x)$ são funções diferenciáveis de x da classe C^k).



O operador de diferenciação exterior d mapea uma p -forma α da classe C^k para uma $p+1$ forma $d\alpha$ da classe C^{k-1} chamada a derivada exterior (colimite) de α . Este tem as seguintes propriedades:

- 1) d é linear: $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$,
se λ é a constante $d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha$.
- 2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.
- 3) $d^2 = 0$.
- 4) se f é a 0-forma, df é a diferencial ordinária df de f .
- 5) a operação d é local, isto é, se α e β coincidem em um conjunto aberto U , então $d\alpha = d\beta$ em U . Ou seja, o comportamento de α exterior de U não afeta $d\alpha$ em U , $(d\alpha)|_U = d(\alpha|_U)$.

TEOREMA: Propriedades de 1 a 4, definem exclusivamente o operador d .

PROVA: Seja d' um operador o qual satisfaz as propriedades 1 a 4 e seja α uma p -forma diferencial

$$\alpha = \alpha_{I_1 \dots I_p} \wedge dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p}$$

onde $\alpha_{I_1 \dots I_p}$ é tratado aqui como uma 0-forma porque no curso da prova este será operado por d' . Mostraremos que $d'\alpha$ é exclusivamente definido.

De fato, pela propriedade 2

$$d'\alpha = d'_{I_1 \dots I_p} \wedge dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p} + \alpha_{I_1 \dots I_p} d'(dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p}).$$

Se o produto exterior é definido com $(p+q)!$ preferencialmente do que $p! q!$, então a derivada exterior é modificada adequadamente. Temos então que, $\bar{d} = d / (p+1)$ quando operando em uma p -forma. Nós escolhemos a definição do produto exterior a qual conduz para uma expressão mais simples para a fórmula de Stokes.

Pela propriedade 4



$$d'\alpha_{I_1 \dots I_p} = d\alpha_{I_1 \dots I_p}, \quad d'x^i = dx^i.$$

Pelas propriedades 2 e 3

$$d'(d'x^{I_1} \wedge \dots \wedge d'x^{I_p}) = 0.$$

Consequentemente

$$d'\alpha = d\alpha_{I_1 \dots I_p} \wedge dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p}$$

e d' é o operador exclusivamente definido d .

Verificamos (1) que o operador d definido em coordenadas locais por esta expressão satisfaz as propriedades 1 a 5, (2) que esta definição não depende da escolha de coordenadas, e (3) que $d\alpha$ dado por esta expressão em todos os gráficos é uma $(p+1)$ -forma definida acima da variedade inteira.

(1) De $d\alpha = d\alpha_{I_1 \dots I_p} \wedge dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p}$

obtemos a expansão de $d\alpha$

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_{I_1 \dots I_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p} = \in_{J_1 \dots J_{p+1}}^{k, I_1 \dots I_p} \frac{\partial \alpha_{I_1 \dots I_p}}{\partial x^k} dx^{J_1} \wedge \dots \wedge dx^{J_{p+1}}.$$

Desta definição de $d\alpha$, pode-se prontamente verificar as propriedades 1, 2 e 5.

A propriedade 3 segue da simetria em j e k das segundas derivadas $\partial^2 / \partial x^j \partial x^k$. A propriedade segue da anticomutatividade de duas 1-formas.

(Sugestão: no reagrupamento de termos necessários para provas a propriedade (2), $d\beta_{I_1 \dots I_q}$ tem que saltar p termos $d_{x^{I_1}} \wedge \dots \wedge dx^{I_p}$).

(2) Fazendo a troca de coordenadas $(x^i) \rightarrow (\bar{x}^{i'})$. Seja $(d\alpha)_x$ a expressão para $d\alpha$ no sistema coordenado x . Das regras obtidas anteriormente para a transformação de uma forma debaixo de uma troca de coordenadas temos

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \frac{1}{p!} \alpha_{i'_1 \dots i'_p} (\bar{x}(x)) d\bar{x}^{i'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{i'_p}.$$

Deste modo, depois de alguns cálculos

$$\begin{aligned}(d\alpha)_x &= \frac{1}{p!} \frac{\partial \alpha_{i'_1 \dots i'_p}}{\partial \bar{x}^{k'}} \frac{\partial \bar{x}^{k'}}{\partial x^j} dx^1 \wedge d\bar{x}^{i'_j} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{i'_p} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial \alpha_{i'_1 \dots i'_p}}{\partial \bar{x}^{k'}} d\bar{x}^{k'} \wedge d\bar{x}^{i'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{i'_p} \\ &= (d\alpha)_{\bar{x}}.\end{aligned}$$

(3) Sejam U_i e U_j os domínios dos dois mapas. Sejam d_i e d_j as derivadas exteriores definidas em U_i e U_j respectivamente. Então $d_i = d_j$ em $U_i \cap U_j$ pelo teorema único. Isto completa a prova da existência e unicidade de d .

OBSERVAÇÃO:

(1) A prova acima mostra que, considerando $\partial \alpha_{i_1 \dots i_p} / \partial x^k$ não são os componentes de um $p+1$ -tensor, as expressões anti simetrizadas $\epsilon_{j_1 \dots j_{p+1}}^{k l_1 \dots l_p} \partial \alpha_{i_1 \dots i_p} / \partial x^k$ são o conjunto de componentes de tensores.

(2) A derivada exterior de uma n -forma em X^n é zero.

(3) d é um exemplo de uma anti derivação.

Seja $A = \{A^p\}$ uma álgebra graduada. Um mapeamento linear $T: A \rightarrow A$ é um operador diferencial de grau s em A se

$$TT = 0 \quad \text{e} \quad T: A^p \rightarrow A^{p+s}.$$

Deste modo, $\Lambda(X)$ junto com d é a álgebra graduada com operador diferencial de grau 1 ou uma álgebra graduada diferencial (AGD).

Nos seguintes exemplos as formas são definidas em $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLO 1: A derivada exterior de uma 0-forma f é a 1-forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Os componentes de df são os componentes de $\text{grad } f$.



EXEMPLO 2: A derivada exterior de uma 1-forma $\alpha = A dx + B dy + C dz$. Seja V o vetor com componentes (A, B, C) .

$$d\alpha = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Os componentes de $d\alpha$ com respeito à base indicada, são componentes de rotação $V \equiv \text{rot } V \equiv \nabla \times V$.

EXEMPLO 3: Derivada exterior de uma 2-forma

$$\omega = P dy \wedge Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Seja W o vetor axial (relativo ao eixo) com componentes (P, Q, R) ; um vetor axial é o conjunto das 3 componentes não relacionados de um tensor anti simétrico de ordem 2 definido em $\mathbb{R}^3$. Em notação de cálculo denotamos vetor $\omega = W \cdot d\theta$ onde $d\theta$ é a área do elemento vetor infinitésimo.

As componentes de $d\omega$ são as componentes de $\text{div } W$.

EXEMPLO 4: Da propriedade $d^2 = 0$ concluímos que:

$$ddf = \text{rot } (\text{grad } f) = 0$$

$$dd\alpha = \text{div } (\text{rot } V) = 0.$$

Onde: rot =rotacional, div =divergente e grad =gradiente.

EXERCÍCIO: Compute $\text{grad } fg$, $\text{rot } fV$, $\text{div } fV$, $\text{div } (V \times U)$ onde V e U são vetores em $\mathbb{R}^3$, usando a relação

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad p = \text{grau}(\alpha).$$

Resposta:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } fg &= g \text{ grad } f + f \text{ grad } g \\ \text{curl } fV &= \text{grad } f \times V + f \text{ rot } V \\ \text{div } fV &= \text{grad } f \cdot V + f \text{ div } V \end{aligned} \right\} p=0$$

$$\text{div}(V \times U) = U \cdot \text{rot } V - V \cdot \text{rot } U \quad p=1$$

5.3. Imagem recíproca de uma forma

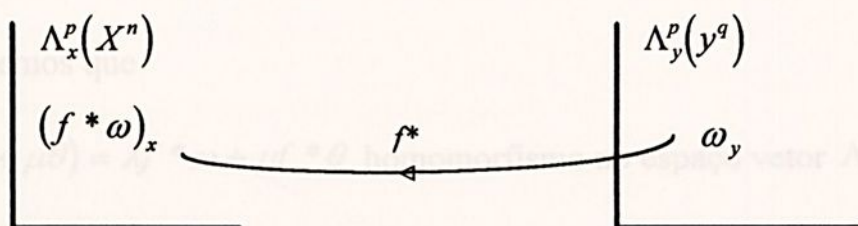
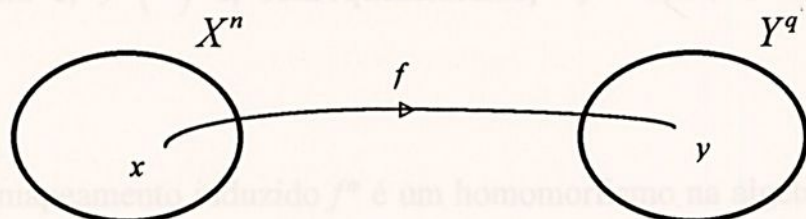
Imagens recíprocas representam uma regra importante na integração de formas e em integração de sistemas diferenciais exteriores.

Seja f um mapeamento diferenciável $X^n \rightarrow Y^q$ e seja $v \in T_x(X^n)$.

Então,

$$f_* v \in T_{f(x)}(Y^q).$$

Seja f^* o mapeamento induzido por f em p -formas



A imagem recíproca (fazer retroceder) $f^* \omega$ da forma ω é definido por

$$(f^* \omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega(fv_1, \dots, fv_p).$$

A imagem recíproca $f^* \omega$ é também chamada a forma induzida por f de ω . Nas coordenadas locais f é definido por $y^\alpha(x^i)$ com $i=1, \dots, n$ e $\alpha=1, \dots, q$.

Então:

$$\begin{aligned} (f^* \omega)_{i_1 \dots i_p} &= \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \\ &= \frac{D(y^{\alpha_1}, \dots, y^{\alpha_p})}{D(x^{i_1}, \dots, x^{i_p})} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \end{aligned}$$

e desde que:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{A_1 \dots A_p}(y) dy^{A_1} \wedge \dots \wedge dy^{A_p} \quad A_j = 1, \dots, q, \\ f^* \omega &= \omega_{A_1 \dots A_p}(y(x)) dy^{A_1}(x) \wedge \dots \wedge dy^{A_p}(x) \\ &= (f^* \omega)_{I_1 \dots I_p}(x) dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p} \quad I_j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos $f^* \omega$ de ω simplesmente expressando y^α como uma função de x^i , isto é, $y^\alpha(x^i)$ e, conseqüentemente, dy^α como a diferencial de $y^\alpha(x^i)$.

TEOREMA: O mapeamento induzido f^* é um homomorfismo na álgebra graduada diferencial $\Lambda(Y^q)$.

PROVA: Sabemos que

$$f^*(\lambda\omega + \mu\theta) = \lambda f^* \omega + \mu f^* \theta \text{ homomorfismo no espaço vetor } \Lambda(Y^q).$$

Manipulações algébricas simples mostram que

$$f^*(\omega \wedge \theta) = f^* \omega \wedge f^* \theta \text{ homomorfismo a álgebra de grau } \Lambda(Y^q).$$

Mostraremos agora a prova disso



$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ homomorfismo no AGD (Álgebra Graduada Diferencial).

Uma forma arbitrária é uma soma finita de produtos exteriores de funções e de funções diferenciais, consequentemente, temos que provar o teorema apenas nos casos onde ω é um-forma exata.

1) ω é uma 0-forma g

$$\begin{aligned} f^* dg &= d(g \circ f) \text{ por definição de uma imagem recíproca} \\ &= d(f^* g) . \end{aligned}$$

2) ω é uma diferencial exata dg

$$f^*(d dg) = 0 .$$

Por outro lado

$$d(f^* dg) = d d(f^* g) = 0 .$$

5.4. Derivação e antiderivação em $\Lambda(X)$

(1958 - Lichnerowicz)

Já mencionamos que a derivada Lie é uma derivação no espaço de campos de tensores e que a derivada exterior é uma antiderivação em $\Lambda(X)$. Desejamos agora dar algumas propriedades gerais de derivação e antiderivação e introduzir outro exemplo de antiderivação, o produto interior.

Seja T um operador linear em $\Lambda(X)$, $T(\lambda\omega + \mu\sigma) = \lambda T\omega + \mu T\sigma$, onde λ, μ são constantes. T é dito ser de grau p se

$$T: \Lambda^r(X) \rightarrow \Lambda^{r+p}(X) \quad \text{para todo } r .$$

T é uma derivação em $\Lambda(X)$ se seu grau é par e se ele obedece a regra Leibnitz

$$T(\omega \wedge \theta) = T\omega \wedge \theta + \omega \wedge T\theta .$$

T é uma antiderivação em $\Lambda(X)$ se seu grau é ímpar e se ele obedece a regra antiLeibnitz

$$T(\omega \wedge \theta) = T\omega \wedge \theta + (-1)^{\text{grau de } \omega} \omega \wedge T\theta .$$

PROPOSIÇÃO: - O comutador de duas antiderivadas é uma derivação.

- O anticomutador de duas antiderivadas é uma derivação.

- O comutador de uma derivação com uma antiderivação é uma antiderivação.

Um operador T em formas é dito ser local se a restrição de $T\omega$ para qualquer conjunto aberto U depende somente da restrição de ω para U .

PROPOSIÇÃO: - Duas derivações [antiderivações] são iguais se elas são iguais em 0-formas e em 1-forma.

PROPOSIÇÃO: - Se T é uma derivação local ou antiderivação a qual comuta com a derivada exterior d , então ele é completamente determinada por sua ação em 0-formas.

PROVA:

$$T(g \, df) = Tg \wedge df + gT(df) = Tg \wedge df + g \, d(Tf)$$

5.5. Formas definidas em um grupo Lie

Consideramos uma variedade G o qual é também um grupo Lie. Uma forma diferencial ω em G é um invariante à esquerda (consequentemente $\omega(g)$ significa $\omega_g \in T_g^*(G)$) se

$$L_g^* \omega(L_g h) = \omega(h) \quad \text{onde } L_g h = gh, \quad g, h \in G.$$

Como no caso dos campos vetores em G , ω é um invariante à esquerda se e somente se $L_g^* \omega(g) = \omega(e)$ onde e é o elemento identidade de G .

A diferencial invariante esquerda p -formas em G , forma um espaço vetor de dimensão $\binom{n}{p}$.

A forma diferencial invariante direita é definida similarmente.

Se ω é uma forma invariante diferencial esquerda [direita], então $d\omega$ é invariante esquerda [direita]

$$L_g^* d\omega = dL_g^* \omega = d\omega.$$

5.6. Equações estruturais de Maurer-Cartan

O dual (composto de dois números dual) $\mathcal{G}^*$ da álgebra Lie $\mathcal{G}$ de G é o espaço de formas lineares invariantes esquerdas em G .

Seja (v_α) e (θ^β) bases duais em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^*$ respectivamente. Desde que $d\theta^\alpha$ é também invariante esquerdo, pode ser expresso na base $(\theta^\beta \wedge \theta^\gamma)$ para o espaço de 2-formas invariantes esquerdas

$$d\theta^\alpha = -c_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma = -\frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma \quad \text{Equações estruturais de Maurer-Cartan}$$

$$[v_\beta, v_\gamma] = c_{\beta\gamma}^\alpha v_\alpha.$$

PROVA: As componentes de $d\theta^\alpha$ são

$$\begin{aligned} (d\theta^\alpha)_{\beta\gamma} &= d\theta^\alpha(v_\beta, v_\gamma) \\ &= \mathcal{L}_{v_\beta} \theta^\alpha(v_\gamma) - \mathcal{L}_{v_\gamma} \theta^\alpha(v_\beta) - \theta^\alpha([v_\beta, v_\gamma]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\theta^\alpha \left([v_\beta, v_\gamma] \right) \text{ usando } \theta^\alpha(v_\gamma) = \delta_\gamma^\alpha \\
 &= -\theta^\alpha \left(c_{\beta\gamma}^\delta v_\gamma \right) = -c_{\beta\gamma}^\alpha .
 \end{aligned}$$

Note que $c_{\beta\gamma}^\alpha = i_{[v_\beta, v_\gamma]} \theta^\alpha$.

5.7. Sistemas diferenciais exteriores

Encontrar variedades integrais de um sistema de equações diferenciais exteriores. Sistemas diferenciais exteriores compostos de 1-forma, chamados sistemas Pfaff, são particularmente simples. Uma variedade integral de um sistema S de formas de grau arbitrário pode ser descrito em termos de variedades integrais de um sistema Pfaff associado com o fechamento de S . O sistema Pfaff é chamado o sistema característico de S .

Equações diferenciais parciais podem ser escritas como sistemas diferenciais exteriores. Por exemplo, um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$F^\alpha \left(x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^p, \frac{\partial z^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial z^1}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial z^p}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial z^p}{\partial x^n} \right) = 0$$

pode ser declarado em termos do seguinte sistema diferencial exterior

$$\begin{cases} f^\alpha = F^\alpha(x^i, z^1, p_i^1) = 0 \\ \theta^1 = dz^1 - p_i^1 dx^i = 0 \end{cases}$$

Trataremos em detalhes do caso da equação diferencial parcial de primeira ordem não linear.

1) EQUAÇÕES EXTERIORES

Consideramos quantidades definidas em um ponto $x \in X^n$; ocasionalmente o subscrito x é omitido por concisão nos parágrafos 1, 2 e 3 quando não pode ocorrer confusão. Como uma regra nesta seção os símbolos $\theta, \theta^\alpha, \dots$ designam 1-formas (Pfaff formas); $\omega, \omega^\alpha, \varphi, \xi, \zeta \dots$ designam formas de grau arbitrário.

Uma solução do sistema de equações exteriores

$$\left\{ \omega_x^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \right\}$$

é qualquer sub espaço $P \subset T_x(X^n)$ tal que $\omega_x^\alpha(v_1, \dots, v_{p_\alpha}) = 0, \quad \forall \alpha$ quando $v_1, \dots, v_{p_\alpha} \in P$, isto é, qualquer sub espaço P o qual anula cada ω_x^α .

Note que se P é de dimensão menos do que p , uma p -formas ω_x desaparece em P trivialmente. Segue que, se todos ω_x^α são de grau maior do que ou igual a p , então todos sub espaços de T_x de dimensões menores do que p são soluções.

2) EQUAÇÃO EXTERIOR AVULSA $\omega_x = 0$, ONDE ω_x É UMA p -FORMA EM x

Seja $\{\theta^j; j = 1, \dots, n\}$ uma base em $T_x^*(X^n)$. A expressão geral para ω_x , inclui todos n elementos desta base. Contudo é frequentemente possível encontrar um subconjunto linearmente independente $\{\bar{\theta}^\alpha; \alpha = 1, \dots, r \text{ com } p \leq r < n\}$ de T_x^* , com menos do que n elementos em termos dos quais ω_x pode ser expresso:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \bar{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}^{\alpha_p} \\ &= \omega_{A_1 \dots A_p} \bar{\theta}^{A_1} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}^{A_p} \end{aligned}$$

onde $A_j = 1, \dots, r$ e $A_1 < A_2 < \dots < A_p$. Agora seja r o número mínimo de 1-formas linearmente independentes necessários para expressar ω_x ; então ω_x é dito ser de grau r . Note que $p \leq r \leq n$. O espaço Q_x^* produzido pelo conjunto mínimo $\{\bar{\theta}^\alpha; \alpha = 1, \dots, r\}$ é chamado espaço associado ω_x ; isto é, Q_x^* é o menor sub espaço de T_x^* , tal que $\omega_x \in \Lambda^p(Q_x^*)$ ($\wedge(T_x^*X)$) ou ($\wedge(Q_x^*)$).

Se $r=p$ a forma ω é o monômio (consiste de somente um termo $\omega_{1 \dots p} \bar{\theta}^1 \wedge \dots \wedge \bar{\theta}^p$) e contrariamente. Uma 1-forma é sempre de ordem (não identicamente zero).

Seja $\tilde{Q}_x$ o espaço de vetores v , tal que $i_v \theta = 0$ para todo $\theta \in Q_x^*$. O espaço $\tilde{Q}_x$ é um sub espaço de T_x de dimensão $n-r$ porque as equações homogêneas $\bar{\theta}_i^\alpha v^i = 0$ para v tem $n-r$ soluções linearmente independentes.

Note que enquanto T_x e T_x^* são espaços duais, $\tilde{Q}_x$ e Q_x^* não são dual.

O espaço $\tilde{Q}_x$ é uma solução particularmente interessante da equação $\omega_x = 0$. Chamamos a solução máxima de Q_x^* . Toda solução do sistema Pfaff associado a Q_x^* é um sub espaço $\tilde{Q}_x$. O teorema seguinte da outra caracterização do espaço $\tilde{Q}_x$.

TEOREMA: Seja ω_x ser uma p -forma em $x \in X^n$ com espaço associado Q_x^* , deixe $\tilde{Q}_x$ ser o espaço de vetores v , tal que $i_v \theta = 0$ para todo $\theta \in Q_x^*$. Então

$$v \in \tilde{Q}_x \Leftrightarrow i_v \omega_x \equiv 0 .$$

PROVA:

1) $v \in \tilde{Q} \Rightarrow i_v \omega = 0$, porque se

$$\omega_x = \omega_{A_1 \dots A_p} \bar{\theta}^{A_1} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}^{A_p}, \quad A_j = 1, \dots, r$$

então

$$i_v \omega_x = \sum_j (\pm) \omega_{A_1 \dots A_p} \bar{\theta}^{A_1} \wedge \dots \wedge i_v \bar{\theta}^{A_j} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}^{A_p} = 0 .$$

2) $i_v \omega_x \equiv 0 \Rightarrow v' \in \tilde{Q}_x$.

Seja $\tilde{Q}'_x$ ser o espaço de vetores v' tal que $i_{v'} \omega \equiv 0$. Seja Q_x^* ser o espaço de formas θ' tal que $i_{v'} \theta' = 0, \forall v' \in \tilde{Q}'_x$. Provaremos que $Q_x^* \subset Q'^*$ o qual implica $\tilde{Q}'_x \subset \tilde{Q}_x$ e prova a proposição. Seja $\{\theta'^i; i = 1, \dots, n\}$ ser uma base de T_x^* , tal que seus primeiros elementos geram Q_x^* . Nesta base

$$\omega = \omega'_{I_1 \dots I_p} \theta'^{I_1} \wedge \dots \wedge \theta'^{I_p}$$

e

$$i_v \omega = \left(\sum_{I_j \leq r'} + \sum_{I_j \geq r'+1} \right) (\pm) \omega'_{I_1 \dots I_p} \theta'^{I_1} \wedge \dots \wedge i_v \theta'^{I_j} \wedge \dots \wedge \theta'^{I_p} .$$

Desde que $i_{\nu'} \theta'^{I_j} = 0$ para $i_j \leq r'$, a primeira soma é zero. Além do mais

$$i_{\nu'} \theta'^i = \nu'^i$$

onde ν'^i são os componentes de ν' na base dual para $\{\theta'^i\}$. Deste modo os primeiros r' componentes de ν' nesta base são zero, os restantes $n-r'$ são arbitrários. Desde que $i_{\nu'} \omega \equiv 0$

$$0 \equiv i_{\nu'} \omega \equiv \sum_{I_j \geq r'+1} (\pm) \nu'^{I_j} \omega_{I_1 \dots I_j \dots I_p} \theta'^{I_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}'^{I_j} \wedge \dots \wedge \theta'^{I_p}$$

(o circunflexo indica omissão), concluímos que,

$$\omega_{I_1 \dots I_j \dots I_p} = 0 \quad \text{para} \quad I_j \geq r' + 1.$$

Consequentemente ω pode ser expresso em termos do conjunto $\{\theta'^i; i = 1, \dots, r'\}$. O espaço associado Q_x^* de ω_x está contido em Q_x^* .

6. ÁLGEBRA DE DIRAC E ALGUMAS IDENTIDADES DE FIERZ PARA UMA TEORIA SUPERSIMÉTRICA EM 5 DIMENSÕES [7], [11]

6.1. Introdução

6.1.1. Bases de um Espaço Vetorial

A posição de uma partícula em um sistema de coordenadas OXYZ (coordenadas), consideremos apenas um espaço vetorial 3-dimensional, é dada pelo vetor

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1),$$

onde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são respectivamente vetores unitários ao longo dos eixos x, y, z .

Esses vetores unitários são chamados de vetores bases. Eles definem um sistema de coordenadas, ou base, na qual x, y, z são as coordenadas da partícula.

A demais:

I) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são linearmente independentes

II) Se $\vec{r} = 0$, então $x=y=z=0$,

III) Qualquer vetor no espaço 3-dimensional pode ser expresso como combinação linear de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$,

IV) O quadrado do comprimento do vetor $\vec{r}$ é definido por:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras para 3-dimensões}) \quad (2)$$

Com o objetivo de construir um algoritmo que nos leve a (2), nos é útil introduzir um tipo de multiplicação de vetores conhecida como produto escalar definido como segue:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0 \quad (3)$$

Isso prova a existência de ortogonalidade dos vetores base.

Então temos a Ortogonalidade dos vetores-bases.



Se requerermos que a multiplicação escalar de vetores abdica a lei distributiva da multiplicação, então:

$$\begin{aligned} \vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \\ &= x^2\hat{i}\hat{i} + xy\hat{i}\hat{j} + xz\hat{i}\hat{k} + yx\hat{j}\hat{i} + y^2\hat{j}\hat{j} + yz\hat{j}\hat{k} + zx\hat{k}\hat{i} + zy\hat{k}\hat{j} + z^2\hat{k}\hat{k} = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Análise vetorial pode ser generalizada para vetores complexos em um espaço vetorial n -dimensional, onde n é finito, porém arbitrário. Um espaço vetorial é, por definição, n -dimensional se existirem “ n ” vetores linearmente independentes e quaisquer “ $n+1$ ” vetores sejam linearmente dependentes.

Chama-se este espaço de C_n .

Seja $\vec{u}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço de “ n ” dimensões

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{x}_i \quad (6)$$

O conjunto de vetores $\vec{u}_i$ formam uma base em C_n . Os $\vec{x}_i$ são as componentes de $\vec{x}$ na base $\vec{u}_i$ de C_n .

A expressão:

$$x^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2, \text{ é chamada também de o quadrado do comprimento de } x.$$

6.1.2. A representação de operadores lineares por matrizes.

Um operador L é determinado se e somente se, seu efeito em cada vetor é conhecido. Em particular, seu efeito em cada vetor base precisa ser conhecido. Isto significa que a matriz menor tal que:

$$L \vec{u}_i = \sum_j u_j L_{ji},$$

precisa ser uma matriz conhecida. O inverso é também verdadeiro, ou seja, o conhecimento de matriz L , em um dado sistema de coordenadas, determina completamente L . É preciso então mostrar somente que o conhecimento de L nos habilita ao cálculo de,



$$\vec{y} = L \vec{x} \quad (2) \text{ , para cada } \vec{x}$$

A prova é trivial, ou seja:

$$\vec{x} = \sum_i \vec{u}_i x_i \quad (3), \text{ então:}$$

$$\vec{y} = L \vec{x} = L \sum_i \vec{u}_i x_i = \sum_i (L \vec{u}_i) x_i = \sum_{i,j} (\vec{u}_j L_{ji}) x_i \quad (4)$$

O último resultado pode ser ainda reescrito como:

$$y_i = \sum_j L_{ji} x_j \quad (5) \text{ ou } y = Lx \quad (6)$$

Uma demonstração alternativa de que L , determina L é dada pelo procedimento seguinte

A partir de

$$L \vec{u}_i = \sum_j u_j L_{ji}$$

segue que,

$$L \sum_i \vec{u}_i u_i^* = \sum_i L \vec{u}_i \vec{u}_i^* = \sum_{ji} \vec{u}_j L_{ji} \vec{u}_i^* \quad (7)$$

Como

$$\sum_i u_i \vec{u}_i^* = 1 \quad (8) \text{ então } L = \sum_{i,j} \vec{u}_i L_{ij} \vec{u}_j^* \quad (9)$$

6.1.3. Operador no espaço dual

Seja

$$\vec{x} = \sum_i \vec{u}_i x_i, \quad (10)$$

então o correspondente vetor no espaço dual é

$$\vec{x}^* = \sum_i \vec{x}_i \vec{u}_i^* \quad (11)$$

A partir da definição:

$$\vec{y} = L \vec{x} \quad (12)$$

temos que:

$$y = Lx \quad (13) \text{ ou } y_i = \sum_j L_{ij} x_j \quad (14)$$

Então:

$$\bar{y}_i = \sum_j \bar{x}_j \bar{L} \quad (15) \text{ ou } y^* = x^* L^* \quad (16)$$

O resultado (16) sugere a seguinte notação:

$$y^* = x^* L^* \quad (17). \text{ Se: } L = \sum_{i,j} \vec{u}_i L_{ij} \vec{u}_j^* \quad (18), \text{ então: } L^* = \sum_{i,j} \vec{u}_i \bar{L}_{ji} \vec{u}_j^* = \sum_{i,j} \vec{u}_i L_{ij}^* \vec{u}_j^* \quad (19)$$

Do resultado (19) segue que as “n” linhas y^* são respectivamente a representação do vetor y^* e do operador linear L^* no espaço dual, do mesmo modo que as “n” colunas y e a matriz L são respectivamente as representações do vetor y e do operador linear L no espaço vetorial n-dimensional.

Observe que o último resultado é equivalente ao algoritmo.

$$(L \vec{x})^* = \vec{x}^* L^* \quad (20)$$

Algumas propriedades da operação* são:

- I) $(\vec{x}^*)^* = \vec{x}$
- II) $(L^*)^* = L$
- III) $\vec{x}^* \vec{y} = (\vec{y}^* \vec{x})^* = (\vec{y}^* \vec{x})$

Então:

$$(\vec{x}^* L \vec{y})^* = (L \vec{y})^* \vec{x} = \vec{y}^* L^* \vec{x}$$

6.1.4. A representação espectral de um operador

Se um operador L e um vetor $\vec{x}$ são relacionados por:

$L\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (21) onde λ é um escalar ($\vec{x}$ quando “operado” por L é transformado em um múltiplo de si próprio), então $\vec{x}$ é chamado de um auto-vetor do operador L , λ é chamado de um auto valor do operador L .

Suponha agora que os auto-vetores do operador linear L , chamados aqui $\vec{u}_i$, formam uma base bi-ortogonal.

Então:

$$L\vec{u}_i = l\vec{u}_i \quad (22)$$

onde: l é o outro valor de L pertencente ao auto-vetor $\vec{u}_i$, isto é,

$$L = \sum_i \vec{u}_i l \vec{u}_i^* \quad (23)$$

Esta representação do operador L evidencia todas as suas características, isto é, seus auto-valores e auto-vetores. Ela é conhecida como a representação espectral do operador L . A representação espectral do operador L^* , ou o adjunto hermitiano do operador L , na base dos autovetores $\vec{u}_e$ é dado por

$$L = \sum_e \vec{u}_e l \vec{u}_e^*$$

6.1.5. A formação de bases pelos autovetores de um operador linear

Anteriormente foi suposto que os autovetores do operador linear L formavam uma base bi-ortogonal. Isso, no entanto, não é verdadeiro para todos os operadores. Contudo, isso será sempre verdadeiro para operadores L que satisfaçam a condição

$$(1) \quad LL^* = L^*L.$$

Operadores satisfazendo a condição (1) são conhecidos como operadores normais.

Deveremos mostrar que $L^*L=LL^*$ é uma condição necessária e suficiente para que os autovetores do operador L formem uma base bi-ortogonal.

Mostraremos apenas a condição necessária: Sejam $\vec{u}_l$ os auto-vetores de L . Então:

$$(2) \quad L = \sum_l \vec{u}_l l \vec{u}_l^* \quad \text{e ainda}$$

$$\begin{aligned} L^* &= \sum_{l'} \vec{u}_{l'} \bar{l}' \vec{u}_{l'}^* \\ (3) \quad \Rightarrow LL^* &= \left(\sum_l \vec{u}_l l \vec{u}_l^* \right) \left(\sum_{l'} \vec{u}_{l'} \bar{l}' \vec{u}_{l'}^* \right) = \\ &= \sum_l \vec{u}_l \|l\|^2 \vec{u}_l^* = L^* \cdot L \end{aligned}$$

usando que:

$$\vec{x}^* \vec{x} = \sum_i \|x_i\|^2; \quad \sum_i \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i^* = 1.$$

6.1.6. Diagonalização de matrizes normais

Seja $A^* \cdot A = A \cdot A^*$. A matriz A é chamada então de matriz normal. Qualquer outra matriz H que satisfaça a condição $H=H^*$ é chamada matriz hermitiana.

Claramente matrizes hermitianas são matrizes normais

$$(1) \quad H^* \cdot H = H \cdot H^* \quad \Rightarrow \quad H \cdot H = H \cdot H \quad (2)$$

É fácil verificar também que qualquer matriz dual simétrica é uma matriz normal, por quanto aquela pode ser considerada como um caso especial de uma matriz hermitiana

$$t_{ij} = t_{ji} \quad \begin{pmatrix} & t_{12} \\ t_{21} & \end{pmatrix} \quad \text{Matriz } (M \times N)$$

Qualquer matriz U , tal que $U^* = U^{-1}$,

$$(3) \quad U^*U = UU^* = 1 \rightarrow \text{é chamada de matriz unitária}$$

$$U \cdot U^{-1} = 1, \quad U^{-1}U = 1 \rightarrow \text{Matriz unitária são matrizes normais.}$$

Posto que $U^*U = UU^*$, então é óbvio que matrizes unitárias são matrizes normais.

Para qualquer matriz normal A , corresponde um operador normal que é expresso em uma base ortogonal $\vec{u}_i$. Como:

$$(4) \quad A = \sum_i \vec{u}_i A_{ij} \vec{u}_j^*,$$

os autovetores $\vec{x}_\sigma$ de $\vec{A}$ satisfazem:

$$(5) \quad A\vec{x}_\sigma = \vec{x}_\sigma \lambda_\sigma$$

e podem ser escolhidos para formar uma base ortogonal se:

$$(6) \quad \vec{x}_\sigma = \sum_i \vec{u}_i S_{i\sigma}, \text{ então de:}$$

$$(7) \quad Y_j = \sum_i L_{ji} x_i \text{ e } Y = LX$$

temos que:

$$(8) \quad AS_{i\sigma} = S_{i\sigma} \lambda_\sigma \Rightarrow$$

$$AS = S\Lambda$$

$$(9) \quad \begin{aligned} A\left(\sum_i u_i S_{i\sigma}\right) &= x_\sigma \lambda_\sigma \\ A\left(\sum_i u_i S_{i\sigma}\right) &= \left(\sum_i u_i S_{i\sigma}\right) \lambda_\sigma \\ (AS_{i\sigma}) \sum_i \vec{u}_i &= \sum_i u_i (S_{i\sigma} \lambda_\sigma) \end{aligned}$$

$$(10) \quad AS_{i\sigma} = S_{i\sigma} \lambda_\sigma.$$

Desde que $\vec{x}_\sigma$ e $\vec{u}_i$ são bases ortogonais, S é unitária. Se A é normal

$$(11) \quad AS = SA$$

6.2. Sobre a Equação de Dirac

$$(12) \quad \begin{cases} S^* A S = \Lambda \\ S^* S = 1 \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} A = S \Lambda S^* \\ S^* S = 1 \end{cases}$$

Se A^* é dual (M normal) então $A.A^*=A^*A$

então

$$AS = S\Lambda$$

$$S^* A S = (S S^*) \Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^* A S = \Lambda \Rightarrow A(S S^*) = S \Lambda S^*$$

$$(14) \quad A = S \Lambda S^* .$$

Isso significa que uma matriz normal pode ser diagonalizada por uma matriz unitária.

S diagonaliza a matriz A , porque S é unitária.

Λ é a Matriz dos autovetores.

$\lambda_\sigma \rightarrow$ autovetores - diagonal da matriz

$$S_{i\sigma} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \\ 0 & & \lambda_{33} \\ 0 & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & & \lambda_{\sigma\sigma} \end{pmatrix}$$

Mostraremos agora os auto valores das matrizes hermitianas (H) são reais.

Se:

$$(15) \quad HS = S\Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^* HS = \Lambda$$

$$= S^* H^* S =$$

$$= (S^* HS)^* =$$

$$= (S^* S \Lambda)^* =$$

$$= \Lambda^*$$

Então $\Lambda^* = \Lambda$ ou $\bar{\lambda}_\sigma = \lambda_\sigma$.

6.2. Sobre a Equação de Dirac

Por volta de 1925, P.A.M. Dirac recebeu um artigo de Werner Heisenberg no qual o jovem físico alemão lançava os fundamentos matemáticos de uma teoria para os fenômenos atômicos, que seria a partir de então conhecida como Mecânica Quântica. Dirac imediatamente percebeu que o trabalho de Heisenberg antecipava um novo modo de examinar o universo numa escala sub-microscópica. No ano subsequente Max Born, Wolfgang Pauli, Pascual Jordan e o mesmo Heisenberg reelaboraram o trabalho original de Heisenberg, colocando-o agora em termos da matemática de matrizes. Na primavera de 1926, o físico austríaco Erwin Schrödinger propunha outra teoria quântica - mecânica ondulatória - que produzia os mesmos resultados quanto as mais abstratas versões anteriores. Muitos na época acreditavam ser essas versões, e a proposta de Schrödinger, eram meramente aspectos de uma teoria geral da mecânica-quântica [8].

Em 1927, trabalhando por 6 meses no Instituto de Física Teórica, Copenhagen - Dinamarca, Dirac encontrou a teoria geral tão esperada. Sua teoria generalizadora, pode ser sintetizada nas palavras do físico inglês Charles G. Darwin (neto do famoso naturalista) que escreveu à Bohr, em 26 de dezembro de 1927: “Eu estive em Cambridge, há alguns dias e encontrei Dirac. Ele conseguiu encontrar um sistema completamente novo de equações para o elétron, a qual produz corretamente o SPIN em todos os casos e parece ser a coisa. Suas equações são todas equações diferenciais de primeira ordem, contrariamente às equações de Schrödinger que são equações ‘de segunda ordem’” [9].

“A coisa”, como chamou Darwin, foi a equação de Dirac para o elétron, que invariante por transformações de Lorentz, satisfazia os muitos requisitos da relatividade especial [10]. Esta era, portanto, uma equação relativista, que levava em conta, além das transformações de Lorentz, o SPIN do elétron que assumia valores $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, SPIN “UP” ou SPIN “DOWN”. A equação de Schrödinger não era relativista; a sua versão relativista ficou conhecida como equação de Klein-Gordon, no entanto esta não levava em consideração o spin do elétron.

O uso de apenas derivadas da 1ª ordem, foi crucial por duas razões. Primeiro porque Dirac manteve a estrutura formal da equação de Schrödinger, a qual continha a derivada de primeira ordem apenas no tempo, e segundo porque ele aproximou-se da relatividade, que contém derivadas de 1ª ordem. Dirac conseguiu conciliar os dois critérios de uma maneira bela e funcional: quando ele aplicou a nova equação para o caso de um elétron movendo-se num campo eletromagnético, o valor correto do SPIN era obtido automaticamente. Esta bem sucedida equação, conhecida desde então como equação de onda de Dirac, é plena de sutilezas e por ser uma equação cujos componentes são “SPINORS”, levou ao nascimento de uma nova linha de pesquisas, conhecida hoje como “análise de Spinors”. Esta poderosa linha de pesquisas proporciona estruturas matemáticas para análise de problemas



em praticamente todas as áreas da Física e ao desenvolvimento das equações de onda relativísticas para partículas tendo SPIN diferente de $\frac{1}{2}$.

Recentemente uma equação de onda de Dirac foi encontrada para uma reoria de Yang-Mills em 5 dimensões, desenvolvida numa variedade de grupo, a partir de critérios como os de supersimetria e análise dimensional dos campos envolvidos [11].

Cabe-nos estabelecer para as combinações de spinors e vetores *bosônicos*, o caráter de *realidade* ou não dessas combinações - identidades de Fierz - bem como o grau e o grading (graduação) das formas associadas aos campos fisicos. Faremos isso na próxima seção.

TABELA I

Equação de Schrödinger	Equação de Klein-Gordon	Equação de Dirac
$\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi =$ $= \frac{-h^2}{8\pi m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi$ onde: E = energia total do elétron r = distância para o núcleo e = carga do elétron ψ = função de onda de Schrödinger m = massa do elétron	$(\square + m^2)\psi(x) = 0,$ onde: $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu;$ $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ $\square = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \Delta =$ $= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} V - m_0 c k \right) \Lambda = 0$ Equação de Dirac para um elétron em um campo eletromagnético Λ = Campo de Dirac (SPINOR) V = matriz associada ao vetor potencial eletromagnético $k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\tau^m \Lambda_m = 0$ onde: $\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) \left(\frac{-\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) \left(\frac{-\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.3. Spinors de Dirac

Em um recente artigo [11] um conjunto de curvaturas para uma teoria supersimétrica de Yang-Mills foi encontrada. É interessante ressaltar que na solução das identidades de Bianchi para o sistema originalmente proposto, ou de suas condições de integrabilidade, os parâmetros livres só foram todos calculados, e por conseguinte, aquelas curvaturas explicitamente determinadas, se uma importante condição, que apareceria como condição de vínculo, for imposta nos cálculos de todos os passos intermediários. Essa condição é a própria equação de Dirac

$$\Gamma^m \Lambda_m = 0 .$$

Os Γ^m são as chamadas matrizes de Dirac em 5 dimensões, cujas propriedades, ou algumas delas, dissertaremos brevemente ao longo da presente seção, na sequência, após o que calcularemos algumas identidades, chamadas em supersimetria de Identidade de Fierz ⁽¹⁾, para o caso específico do problema recentemente resolvido. Estas identidades serão importantes para o estudo da ação geométrica de Yang-Mills em 5 dimensões.

Em um espaço de tempo arbitrário, as matrizes de Dirac satisfazem a relação fundamental [12]:

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab}$$

onde η_{ab} é o tensor métrico de Minkowski, para $d=5$, em particular, escolhemos

$$\eta_{ab} \rightarrow \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1) .$$

Em $d=5$, as matrizes Γ_a são 4×4 e os “SPINORS” possuem quatro parâmetros complexos sendo definidos então por oito parâmetros reais. Neste caso, contudo, não é possível ter “SPINORS” que tornam-se puramente reais na

(1) Uma vasta literatura foi desenvolvida entre as duas grandes guerras, sobre equação de onda relativista (equação de Dirac). Vários textos foram publicados sobre equações envolvendo Spinors e sem dúvida o mais importante sobre o assunto, que incluía o que se convencionou chamar desde então de “Identidades de Fierz” foi: “M.Fierz, Über die Relativistische theorie Kraftfreier Teilchen mit beliebigen SPIN”, *Hev Phys Acta*, 12,3 (1938) .



representação apropriada da Γ_a' s. Isto é possível em $d=4$, quando “SPINORS” a la Majorana podem ser definidos

$$a) \psi^C = \psi, \quad \text{onde: } b) \psi^C = C\psi^{-T}$$

C sendo a matriz de conjugação de carga cujas propriedades mais notáveis podem ser encontradas na próxima seção.

Além de usar a definição (b) e algumas das propriedades das matrizes Γ e C [seção 1.8.2] podemos deduzir:

$$\begin{aligned} (\psi^C)^C &= C\overline{\psi^C}^T = C\left[(C\Gamma_0^T\psi^*)^+\Gamma_0\right]^T = \\ &= C(\Gamma^TC)\Gamma_0\psi = \\ &= C\Gamma_0\Gamma_0\psi = -\psi \end{aligned}$$

Isto então mostra que “SPINORS” de Majorana não podem ser definidos em um espaço-tempo de Minkowski em 5-dimensões. Trabalharemos então com “SPINORS” de Dirac os quais em $d=5$, podem ser decompostos da seguinte forma

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

onde ψ_1 e ψ_2 são tais que

$$\psi_1^C = C\overline{\psi_1}^{-T} = \psi_2$$

$$\psi_2^C = C\overline{\psi_2}^{-T} = -\psi_1.$$

Poderemos agora introduzir uma anotação mais útil

$$\psi_A^C = C\overline{\psi_A}^T = \epsilon_{AB} \psi_B \quad A, B = 1, 2$$

ϵ_{AB} são as entradas da matriz.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^2 = -1$$

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$$

6.4. Álgebra de Dirac em 5 dimensões

6.4.1. $\Gamma_A \rightarrow$ matriz de DIRAC em $d=5$

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab} \quad (\text{A.1})$$

$$\eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1) \\ a, b = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (\text{A.2})$$

6.4.2. As matrizes Γ^a podem ser definidas a partir das matrizes de DIRAC em 4 dimensões, ou seja:

$$\Gamma^a = i\gamma^5 \gamma^a \quad (a = 0, 1, 2, 3) \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma^4 = i\gamma^5. \quad (\text{A.4})$$

É conveniente mencionar algumas propriedades úteis das matrizes Γ em cinco dimensões:

$$\Gamma_0^+ = \Gamma_0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_i^+ = -\Gamma_i; \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_0 \Gamma_a \Gamma_0 = \Gamma_a^+ \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_0 \sum_{ab} \Gamma_0 = \sum_{ab}^+ \quad (\text{A.8})$$

$$[\Gamma_a, \sum_{bc}] = i(\eta_{ab}\Gamma_c - \eta_{ac}\Gamma_b) \quad (\text{A.9})$$

$$\{\Gamma_a; \sum_{bc}\} = \epsilon_{ablm} \sum^{lm} \quad (\text{A.10})$$

$$[\sum_{ab}, \sum_{cd}] = -i(\eta_{ac} \sum_{bd} + \eta_{bd} \sum_{ac} - \eta_{ad} \sum_{bc} - \eta_{bc} \sum_{ad}) \quad (\text{A.11})$$

$$\{\sum_{ab}, \sum_{cd}\} = \frac{1}{2}(\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) \cdot 1 + \frac{1}{2} \epsilon_{abcdk} \Gamma^k \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_{ab} = \frac{i}{4} [\Gamma_a, \Gamma_b] \quad (\text{A.13})$$

onde: ϵ_{abcde} é o tensor de Levi-Civita. $\epsilon_{abcde} = 0$ se dois sub-índices coincidirem. $\epsilon_{abcde} = +1$ se a permutação de sub-índices for par e $\epsilon_{abcde} = -1$ se a permutação for impar.

6.4.3. C: matriz de conjugação de carga

$$C^2 = -1 \quad (\text{A.14})$$

$$C^T = -C \quad (\text{A.15})$$

$$C\Gamma^a C^{-1} = \Gamma^{a+} \quad (\text{A.16})$$

$$C\sum^{ab} C^{-1} = \left(-\sum^{ab}\right)^+ \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma_0^+ C = C\Gamma_0 \quad (\text{A.18})$$

6.5. Algumas identidades de Fierz em 5 dimensões

Nas combinações entre as 1-formas ψ e as 0-formas λ do espaço de cinco dimensões, vamos considerar, por exemplo:

$$\bar{\psi}_A \wedge \sum^{ab} \psi_A. \quad (\text{A.19})$$

A partir da definição de que

$$\psi_A^C = C \bar{\psi}_A^T = \epsilon_{AB} \psi_B, \quad A, B = 1, 2, \text{ então:}$$

$$(\psi_A^C)^T C = \bar{\psi}_A \quad (\text{A.20})$$

$$-C(\bar{\psi}_A^C)^T = \psi_A. \quad (\text{A.21})$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_A \wedge \sum^{ab} \psi_A &= -(\psi_A^C)^T \wedge C \sum^{ab} C(\bar{\psi}_A^C)^T = \\ &= (\psi_A^C) \alpha \left(\sum^{ab} \right) \alpha \beta (\bar{\psi}_A^C) \beta = \\ &= -\bar{\psi}_A^C \wedge \sum^{ab} \psi_A^C = -\bar{\psi}_A \wedge \sum^{ab} \psi_A = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Nesta última, foram usadas a definição do produto exterior e as definições na [seção 6.4].

Usando raciocínio análogo, é possível descobrir combinações entre as 1-forma ψ e as 0-formas λ , se serão, por exemplo, nulas ou não. Uma lista completa é mostrada na tabela II. Outra importante consideração sobre combinações de λ e ψ diz respeito se essas possuem caráter real ou imaginário.

Como um exemplo, tomemos

$$\bar{\lambda}_A \wedge \Gamma^a \psi_A \quad (\text{A.23})$$

a qual é logicamente diferente de zero em geral, posto que ela é a combinação de dois “fermions” diferentes. Estudemos sua realidade. Teremos que:

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_A \psi_A)^* &= \left[(\lambda_A^*)_{\alpha} (\Gamma_0)_{\alpha\beta} (\Gamma_a)_{\beta\gamma} (\psi_A)_{\gamma} \right]^* = \\ &= (\psi_A^*)_{\gamma} (\Gamma_a^+)_{\beta\gamma} (\Gamma_0^+)_{\alpha\beta} (\lambda_A)_{\alpha} = \\ &= \psi_A^+ \wedge \Gamma_a^+ \Gamma_0^+ \lambda_A = \bar{\psi}_A \Gamma_0 \Gamma_a^+ \Gamma_0 \lambda_A = \bar{\psi}_A \wedge \Gamma_a \lambda_A \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Depois de usar a conjugação complexa exploremos as propriedades da simetria de $\underline{C\Gamma^a}$ e anti comutação do produto exterior:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_A \wedge \Gamma_a \lambda_A &= -\left(\psi_A^C\right)^T \wedge C\Gamma_a C\left(\bar{\lambda}_A^C\right)^T = \\ &= \psi_A^+ \wedge \Gamma_a^+ \bar{\lambda}_A^+ = (\psi_A)\alpha \wedge (\Gamma_a)\beta\alpha(\bar{\lambda}_A)\beta = \hspace{10em} (A.25) \\ &= -(\bar{\lambda}_A)\beta \wedge (\Gamma_a)\beta\alpha(\psi_A)\alpha = -\bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_a \psi_A \end{aligned}$$

$$\left(\bar{\lambda}_A \Gamma_a \psi_A\right)^* = -\bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_a \psi_A . \hspace{10em} (A.26)$$

Portanto a combinação que estamos considerando é puramente imaginária. Em um modo análogo, podemos descobrir outros resultados os quais são também mostrados na tabela II .

TABELA II

Identities for some combinations in 5 dimensions		Property of Reality or not of some combinations in 5 dimensions	
Anulando-se	Não anulando-se	Real	Imaginário
$\bar{\psi}_A \Sigma^{ab} \psi_A$	$\bar{\psi}_A \wedge \psi_A$	$\bar{\lambda}_A \wedge \Sigma^{ab} \psi_A$	$\bar{\psi}_A \wedge \psi_A$
$\bar{\psi}_A^C \wedge \psi_A$	$\bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A$		$\bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A$
$\bar{\psi}_A^C \wedge \Gamma^a \psi_A$	$\bar{\psi}_A^C \wedge \Sigma^{ab} \psi_A$		$\bar{\lambda}_A \wedge \psi_A$
$\bar{\lambda}_A \wedge \lambda_A$	$\bar{\lambda}_A \wedge \Sigma_{ab} \lambda_A$		$\lambda_A \wedge \Gamma^a \psi_A$



TABELA III

“Grading”(graduação) e grau dos campos seguintes

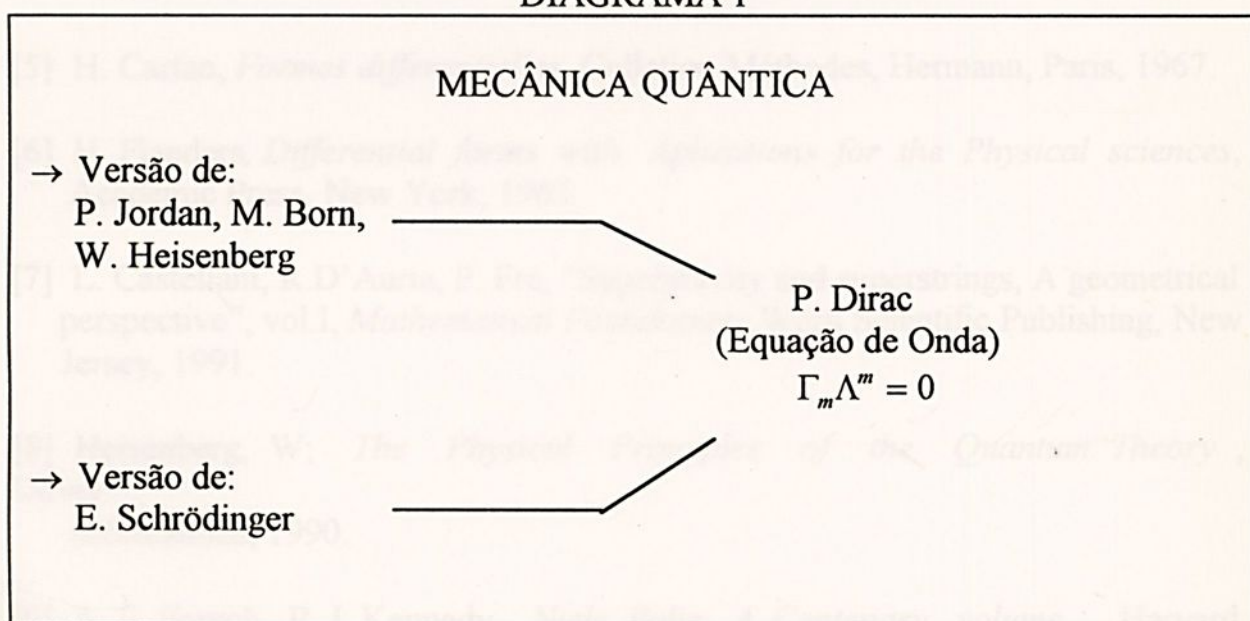
C A M P O S	GRADING (graduação)		Grau	
	1	0	0	1
	λ_A (férmion)	φ (bóson)	Λ_A (férmion)	A (bóson)
		A (bóson)	φ (bóson)	
	ψ_A (férmion)	V (bóson)	λ_A (férmion)	V (bóson)
			Φ_a (bóson)	
	Λ_A (férmion)	Φ_a (bóson)	F^{ab} (bóson)	ψ_A (férmion)
		F^{ab} (bóson)		



CONCLUSÃO

A equação de Dirac para o movimento do elétron, que reproduz o SPIN e é relativista, tem um caráter generalizador que transcende a motivação maior que levou a sua descoberta, ou seja: unificar as versões de Schrödinger e as de Born, Pauli e P. Jordan, dando origem a uma teoria geral para os fenômenos atômicos, conhecida hoje como Mecânica Quântica (Diagrama 1)

DIAGRAMA 1



A equação de onda $\Gamma_m \Lambda^m = 0$ de Dirac aparece em modernas propostas supersimétricas como um limite de validade geométrica das teorias. Sem a condição de vínculo imposta pela equação de Dirac, as identidades de Bianchi não são satisfeitas e portanto não há como se estabelecer uma interpretação geométrica para aquelas.

As identidades de Fierz são utilíssimas para que se estabeleça o caráter real ou imaginário das combinações algébricas em que apareçam matrizes e Spinors de Dirac e no posterior estabelecimento da lagrangeana geométrica e das equações de movimento.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie algebras*, Hermann, Paris, 1975.
- [2] Y.Choquet - Brunat, C. Dewitt - Morette, *Analysis, manifolds and Physics*, North Holland, vols.I e II, 1991.
- [3] A. L. Brown, A. Page, *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1971.
- [4] Cartan E., *Leçons sur la geometric des espaces de Riemann*, Gauthier - Vellars, Paris, 1955.
- [5] H. Cartan, *Formes differentielles*, Colletion Méthodes, Hermann, Paris, 1967.
- [6] H. Flanders, *Differential forms with Aplications for the Physical sciences*, Academic Press, New York, 1963.
- [7] L. Castellani, R.D'Auria, P. Fré, "Supergravity and superstrings, A geometrical perspective", vol.I, *Mathematical Foundations*, Word Scientific Publishing, New Jersey, 1991.
- [8] Heisenberg, W; *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover publications, 1990.
- [9] A. P. French, P. J. Kennedy, *Niels Bohr: A Centenary volume*, Harvard University Press, 1985.
- [10] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1980.
- [11] M. F. Borges, *Journal of Geometry and Physics*, Amsterdam, 20 (2), 1996, 142.
- [12] J. Scherk, *Lectures notes at Cargese School*, North - Holland, 1978.



