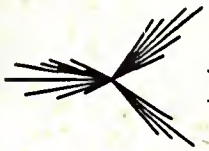
95



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT-D.001/95

SIMETRIA QUIRAL, MODELOS DE QUARKS E ESPALHAMENTO π-π NO FORMALISMO FOCK-TANI

Luiz Alberto Manzoni Vieira Junior

Orientador
Gastão Inácio Krein



Janeiro 1995

Agradecimentos

Ao Gastão, pela orientação.

Ao Orimar, pelo estímulo, pela disposição em ajudar (no que fosse necessário) e esclarecer dúvidas e pela convivência.

Ao Sérgio, pela ajuda com Fock-Tani.

Ao Boldo, à Evelise, ao Jeferson, à Rozane e ao Tadeu, pela convivência nestes anos de SP e pela "força" em muitos momentos. Pelo mesmo motivo agradeço, apesar de tudo, ao Orildo.

À companheira Thelma pelo apoio, paciência e por tudo mais.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideramos modelos de quarks quirais para estudar o espalhamento $\pi - \pi$ a baixas energias. A quebra dinâmica da simetria quiral é estudada através do método variacional de Bogoliubov-Valatin. Dentro deste esquema, a estrutura de quarks dos pions considerados como bosons de Goldstone é obtida. Através do formalismo Fock-Tani obtemos um Hamiltoniano efetivo em termos dos graus de liberdade piônicos e a partir deste obtemos a amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ no limiar. Usando a propriedade de "crossing" da matriz de espalhamento, o resultado é estendido para energias além do limiar. O resultado concorda com aquele obtido por Weinberg no contexto da álgebra de correntes.

Palavras-chaves: Simetria quiral, modelos de quarks, espalhamento de mesons.

Área do conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

We consider chiral quark models to study $\pi - \pi$ scattering at low energies. The dynamical chiral symmetry breaking is studied by means of the Bogoliubov-Valatin variational method. Within such a scheme, the quark structure of the pions considered as Goldstone bosons is obtained. By means of the Fock-Tani formalism we obtain an effective Hamiltonian in terms of pion degrees of freedom and from this we obtain the $\pi - \pi$ scattering matrix at threshold. Using the crossing property of the scattering matrix, the result is extended to energies beyond threshold. The result agrees with the one obtained by Weinberg in context of current algebra.

Key words: Chiral symmetry, quark models, meson scattering

Índice

1 Introdução **3**

2 Modelos de Quarks Quirais **7**

2.1 O Hamiltoniano 7

2.2 A Transformação de Bogoliubov-Valatin 15

2.3 O Hamiltoniano Transformado Bogoliubov-Valatin 18

2.4 Um Exemplo de Hamiltoniano 22

2.5 O Píon como Bóson de Goldstone 23

2.6 Simetria Quiral Aproximada (PCAC) 26

2.7 O Modelo de Nambu e Jona-Lasinio 28

3 O Formalismo Fock-Tani **33**

3.1 A Transformação Fock-Tani 33

3.2 A Transformação Fock-Tani dos Operadores 39

3.3 O Hamiltoniano Transformado Fock-Tani 48

4 Espalhamento $\pi - \pi$ no Formalismo Fock-Tani **54**

4.1 O Formalismo Fock-Tani e a Simetria Quiral 56

4.2 Espalhamento Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani 59

4.3 Espalhamento $\pi - \pi$ 65

5 Conclusão e Perspectivas Futuras **73**

Apêndices **75**

A Matrizes de Pauli, de Dirac e de Gell-Mann **75**

B Produtos internos de espinores do modelo NJL 77

Referências Bibliográficas 79

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, existe a convicção generalizada de que a Cromodinâmica Quântica (QCD) seja a teoria fundamental para descrever as interações fortes [1]. Esta convicção vem do grande sucesso que esta teoria tem alcançado na descrição dos fenômenos envolvendo hadrons a altíssimas energias e grandes momenta transferidos. A propriedade de liberdade assintótica da teoria [2] permite o uso da teoria de perturbações para tais processos e, por isso, cálculos sistemáticos podem ser efetuados. Entretanto, para processos na escala de alguns GeV's a QCD não pode ser tratada perturbativamente. Este fato, em conexão com a inexistência de métodos de aproximação não-perturbativos que sejam suficientemente precisos em teorias quânticas de campos, implica em que a QCD não pode ser tratada a baixas energias. Desta forma, fenômenos que são eminentemente não perturbativos, tais como o confinamento de cor e a quebra espontânea da simetria quiral, permanecem à espera de uma explicação adequada por parte da QCD. Teorias de calibre na rede têm alcançado algum progresso nesta direção, mas os resultados obtidos até o momento não são ainda suficientemente precisos para uso prático. Deste modo, para que se possa obter alguma intuição física a respeito da estrutura dos hadrons, bem como de suas interações a baixas energias, torna-se necessário o emprego de modelos.

Muito tem sido aprendido a respeito da espectroscopia e transições hadrônicas com o emprego de modelos de quarks constituintes [3]. Em tais modelos, os hadrons são estados ligados de um número finito de quarks massivos; os barions são constituídos de três quarks e os mesons são constituídos de um quark e um antiquark. Um modelo tal para os hadrons parece estar em contradição, à primeira vista, com a QCD, pois, sob o ponto de vista estrito

de uma teoria quântica de campos, o número de constituintes de um estado ligado não está definido. A possível reconciliação [4] entre o modelo de quarks constituintes e a QCD vem através do fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral no setor de quarks leves. Através deste fenômeno, os graus de liberdade da QCD na escala de energias da ordem de alguns poucos GeV's não são os graus de liberdade que aparecem no Lagrangiano da QCD, os quais são os gluons sem massa e os quarks de massas da ordem de poucos MeV's, mas sim, quarks e gluons constituentes com massas de algumas centenas de MeV's e bosons de Goldstone cujas massas são muito menores que as massas dos hadrons mais leves. O caráter não perturbativo de tal fenômeno é evidente, tendo em vista que a interção fundamental da QCD deve produzir a transmutação de quarks e gluons leves para quarks e gluons massivos e produzir os bosons de Goldstone como estados ligados de quarks e gluons. Enquanto tal fenômeno não puder ser deduzido a partir da QCD, a atitude que tem sido seguida é a de empregar modelos efetivos que o realizem de maneira menos complicada. Está claro que para tornar estas idéias em boa fenomenologia, são necessárias novas hipóteses, contato com dados experimentais, e sobretudo desenvolver uma intuição a respeito do problema.

Tendo isto em vista, nesta dissertação, vamos considerar uma classe de modelos de quarks que incorporam a simetria quiral do Hamiltoniano da QCD, para estudar o mecanismo de quebra da simetria quiral. A técnica empregada para estudar a quebra de simetria é similar àquela empregada por Nambu e Jona-Lasinio [5]. Partindo de um Hamiltoniano para campos fermiônicos sem massa, empregamos o método de Bogoliubov-Valatin para construir o estado de vácuo do modelo através da condensação de pares de quarks e antiquarks. A função de correlação dos pares de quarks and antiquarks no vácuo, usualmente chamada de ângulo quiral, é determinada exigindo que a densidade de energia do vácuo tenha um mínimo frente a variações desta função. Com isto, obtemos a equação de "gap". As quantidades físicas que indicam a quebra dinâmica da simetria quiral, tais como o condensado de quarks no vácuo, a massa dos quarks constituintes e a constante de decaimento do píon são funções do ângulo quiral. Adicionalmente, obtemos a função de onda do píon a partir da estrutura do vácuo, considerando-o como o bóson de Goldstone associado à quebra dinâmica da simetria quiral [6] [7]. A classe de moldelos considerados nos permite incluir a característica do confinamento dos quarks [8] [9] [10], embora este aspecto não

seja relevante para as aplições nesta dissertação.

Considerando a estrutura de quarks dos pions obtida destes modelos de quarks, nos propomos a considerar o espalhamento $\pi - \pi$ levando em conta esta estrutura. O espalhamento de partículas compostas é um problema de muitos corpos muito complicado. Além das complicações usuais que caracterizam um problema de muitos corpos, existe a dificuldade adicional devido à presença simultânea de partículas compostas e seus constituintes. Estas dificuldades se devem ao fato que as técnicas usuais da teoria de campos, tais como diagramas de Feynman, funções de Green, teorema de Wick, etc., são desenvolvidas para campos satisfazendo relações de comutação canônicas, o que não é o caso em tal problema.

Para lidar com um problema tal, consideramos um método desenvolvido em 1971, independentemente, por Girardeau [11] e Vorob'ev e Khomkin [12] para tratar problemas em física atômica onde os graus de liberdade internos dos átomos não podem ser desprezados. Este método foi empregado com sucesso para estudar uma variedade de problemas de reações envolvendo átomos e seus constituintes, e tem sido aperfeiçoado ao longo dos últimos anos [14] [15] [16]. Girardeau cunhou o nome de $Fock - Tani$ para o formalismo, devido a semelhança com uma transformação empregada por Tani [13] para estudar o espalhamento de uma partícula por um potencial com um estado ligado. Recentemente, este formalismo foi estendido para problemas de espalhamento no contexto da física de hadrons [17] [18].

O método Fock-Tani consiste em introduzir operadores de criação e destruição de partículas fictícias, chamadas de *partículas ideais*, em corresponência direta com os estados ligados, de tal forma que estes operadores obedeçam relações de comutação de partículas elementares, i.e., relações de comutação canônicas. Isto é feito através de uma transformação unitária, a qual transforma os estados de um hádron real em um estado de um hádron ideal. A aplição desta transformação unitária ao Hamiltoniano microscópico de quarks, resulta num Hamiltaniano efetivo envolvendo os graus de liberdade originais e os graus de liberdade hadrônicos.

Uma propriedade importante do Hamiltoniano transformado é que este não permite a formação dos estados ligados que foram transformados em hadrons ideiais. Esta característica da transformação Fock-Tani realiza a idéia de quasi-partículas de Weinberg [19].

Weinberg introduz partículas fictícias em correspondência direta com os estados ligados, as chamadas *quasi-partículas*, e, para não mudar a física do problema, o potencial deve ser modificado. A modificação do potencial é tal que este se torna enfraquecido e não é mais capaz de formar os estados ligados em questão.

Utilizando o método Fock-Tani, calculamos a amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ no limiar no contexto dos modelos de quarks quirais considerados nesta dissertação. O objetivo de se efetuar tal cálculo é estudar a viabilidade de empregar o formalismo Fock-Tani para estudar as interações entre hadrons a baixas energias no contexto de modelos de quarks quirais. Mais especificamente, este cálculo será efetuado para o modelo de Nambu e Jona-Lasinio. Devido à sua simplicidade matemática, este modelo permite que o cálculo seja efetuado analiticamente. Utilizando a propriedade de "crossing" da amplitude de espalhamento, estendendemos o resultado para energias além do limiar. Com isto, é possível comparar com o resultado obtido por Weinberg [20] através da álgebra de correntes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 consideramos o modelo de quarks a ser tratado. Inicialmente, obtemos alguns resultados de caráter geral e, no final, estes resultados são detalhados para o modelo de Nambu e Jona-Lasinio. No Capítulo 3, fazemos uma revisão do formalismo Fock-Tani,e obtemos o potencial de interação méson-méson a ser usado na obtenção da amplitude de espalhamento $\pi - \pi$. No Capítulo 4 verificamos a preservação da simetria quiral pelo formalismo Fock-Tani e obtemos a amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ no limiar. As conclusões e Perspectivas futuras são apresentadas no Capítulo 5. A dissertação apresenta ainda dois Apêndices.

Capítulo 2

Modelos de Quarks Quirais

Neste capítulo iremos considerar uma classe de modelos de quarks invariantes sob transformações quirais. O objetivo principal será o estudo, no contexto destes modelos, da quebra espontânea da simetria quiral e a obtenção dos parâmetros quirais mais importantes. A estrutura de quarks do píon será estudada identificando este como sendo o bóson de Goldstone da quebra espontânea da simetria. Como exemplo de aplicação do formalismo, vamos considerar o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [5].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 definimos o Hamiltoniano que caracteriza a classe de modelos de quarks que vamos estudar. Na Seção 2.2 introduzimos a transformação de Bogoliubov-Valatin. Na Seção 2.3 consideramos o Hamiltoniano transformado e obtemos a equação de "gap". Na Seção 2.5 obtemos a estrutura de quarks do píon como um bóson de Goldstone, na Seção 2.6, consideramos a introdução do termo de quebra explícita de simetria no Hamiltoniano. Na Seção 2.7 consideramos o modelo de Nambu e Jona-Lasinio.

2.1 O Hamiltoniano

As massas dos quarks que aparecem no Hamiltoniano da QCD, massas de corrente, são pequenas quando comparadas à escala de energias hadrônica ($\sim$ 1 Gev) [21]. Isto é verdade pelo menos para os três quarks mais leves: u, d e s. Deste ponto de vista, temos que uma boa aproximação seria considerar os quarks como tendo massas iguais e nulas. Para os nossos objetivos nesta dissertação, vamos nos concentrar no setor de quarks u e d.

No caso de considerarmos quarks u e d com massas iguais a zero, verifica-se que o Hamiltoniano da QCD é invariante sob o grupo de transformações $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$[22], cujos geradores são as cargas vetorial e axial de isospin, dadas, respectivamente, por:

$$Q^a(t) = \int d^3x \Psi^{i\dagger}(x) \frac{\tau^a}{2} \Psi^i(x) \,,$$

$$Q^{5a}(t) = \int d^3x \Psi^{i\dagger}(x) \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi^i(x) \,, \tag{2.1}$$

onde $\Psi(x)$ é o operador de campo de quarks, e i é o índice que identifica a cor.

O fato que estas cargas geram a álgebra $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ pode ser visto definindo as seguintes cargas:

$$\begin{aligned} Q^a_L &= \frac{1}{2}\left(Q^a - Q^{5a}\right) \,, \\ Q^a_R &= \frac{1}{2}\left(Q^a + Q^{5a}\right) \,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

as quais obedecem, separadamente, a álgebra do grupo $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \left[Q^a_L(t), Q^b_L(t)\right] &= i\epsilon^{abc} Q^c_L(t) \,, \\ \left[Q^a_R(t), Q^b_R(t)\right] &= i\epsilon^{abc} Q^c_R(t) \,, \\ \left[Q^a_L(t), Q^b_R(t)\right] &= 0 \,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde ϵ^{abc} é o tensor totalmente antissimétrico com $a, b, c = 1, 2, 3$ e $\epsilon^{123} = 1$. Devido à forma de (2.2), que tem estrutura $1 \pm \gamma^5$ e, portanto, é autoestado do operador quiralidade γ^5, esta álgebra também é chamada $SU(2) \otimes SU(2)$ quiral.

Esta simetria do Hamiltoniano da QCD (H_{QCD}) implica em importantes consequências para o espectro hadrônico. Seja $|h>$ um autoestado de H_{QCD} representando um hádron h, em repouso, de massa m:

$$H_{QCD}|h> = m|h> \,. \tag{2.4}$$

A invariância do Hamiltoniano sob os grupos de simetria $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$ implica em que este comute com os geradores destes grupos e, portanto:

$$\begin{aligned} H_{QCD} Q^a |h> &= m Q^a |h> \,, \\ H_{QCD} Q^{5a} |h> &= m Q^{5a} |h> \,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Isto implica que os estados $Q^a|h>$ e $Q^{5a}|h>$ são degenerados com o estado $|h>$. Adicionalmente, indicando por $\mathcal{P}$ o operador paridade, temos:

$$\mathcal{P}Q^a\mathcal{P}^{-1} = Q^a\ , \qquad \mathcal{P}Q^{5a}\mathcal{P}^{-1} = -Q^{5a}\ , \tag{2.6}$$

o que, juntamente com a Eq. (2.5) implica que os hadrons devem se manifestar em multipletos de isospin e que para cada multipleto haja o correspondente multipleto de paridade oposta. Ocorre, porém, que apenas os multipletos de isospin de massas aproximadamente degeneradas são observados experimentalmente; não há a correspondente manifestação de hadrons em dubletos de paridade.

A manifestação de uma simetria de um Hamiltoniano através de multipletos degenerados é conhecida como realização *a la* Wigner. A discussão acima pode então ser resumida dizendo que a simetria quiral da QCD não se manisfesta no modo de Wigner.

Assim, o estado $Q^{5a}|h>$ não pode ser interpretado como o estado de um hádron de mesma massa que o hádron h. No entanto, este estado pode ser interpretado como um estado contendo um píon e um hádron h. Sendo estes estados degenerados, o píon deve ter massa nula. Este argumento, com h substituido pelo vácuo, implica em que a carga quiral não aniquile o vácuo:

$$Q^{5a}|0> \neq 0\ . \tag{2.7}$$

Diz-se, então, que a simetria quiral foi espontaneamente quebrada: ainda que o Hamiltoniano seja invariante sob o grupo de simetria, esta não se reflete no espectro de autoestados. Os estados gerados pela aplicação dos geradores de simetria $Q^{5a}|0>$, conforme veremos, podem ser associados aos pions de massa e momentum nulos. Isto é, em essência, a manifestação do teorema de Goldstone, o qual associa partículas de massa nula à quebra espontânea de uma simetria contínua, sendo que as partículas de massa nula têm os números quânticos do gerador de simetria quebrado[22][23].

A manifestação no espectro de uma simetria da maneira como discutida no parágrafo anterior é conhecida como realização *a la* Nambu-Goldstone. Na literatura é comum a expressão de quebra dinâmica da simetria quiral, ao invés de quebra espontânea. Apesar de haverem autores que fazem distinção entre quebra dinâmica e quebra espontânea, nesta dissertação, estas duas nomenclaturas serão usadas como se representassem a mesma coisa.

Muito do que foi aprendido fenomenologicamente a respeito das interações hadrônicas a baixas energias nas últimas quatro décadas foi obtido a partir da implementação da simetria quiral em modelos efetivos. Com o advento da QCD como candidata para teoria fundamental das interações fortes, há a expectativa de que, finalmente, ter-se-ia um entendimento mais preciso do mundo hadrônico. No entanto, como discutido na Introdução, devido ao fato de os fenômenos de quebra espontânea de simetria serem de natureza não perturbativa, não foi possível demonstrar a partir do Hamiltoniano da QCD que a simetria quiral se manifeste *a la* Nambu Goldstone. Portanto, o uso de modelos torna-se uma necessidade prática.

A idéia da quebra espontânea da simetria quiral pode ser ilustrada de maneira muito simples através do modelo de Nambu–Jona-Lasinio. Este é um modelo de teoria quântica de campos para férmions auto-interagentes, originalmente construído em termos de graus de liberdade de núcleons. Após o advento da QCD, este modelo, agora formulado em termos dos graus de liberdade de quarks, tem sido empregado como protótipo para a realização da simetria quiral na QCD. A densidade Hamiltoniana do modelo, para quarks u e d, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{NJL} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ &= \bar{\Psi}(x)\,(-i\gamma\cdot\nabla)\,\Psi(x) - G\left[\left(\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\right)^2 - \left(\bar{\Psi}(x)\gamma^5\tau^a\Psi(x)\right)^2\right], \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde G é a constante de acoplamento entre os quarks. Não foram explicitados os índices de cor e sabor, i.e., cada espinor Ψ tem, além das quatro componentes no espaço de Dirac, duas componentes no espaço de sabor (isospin) e três componentes no espaço de cor.

Não é difícil mostrar que a Hamiltoniana de NJL é invariante sob transformações de $SU(2)\otimes SU(2)$. Para tal, é crucial a ausência de um termo de massa, do tipo $H_s = -m\bar{\Psi}\Psi$. A questão que se quer investigar é saber se a simetria manifesta em $\mathcal{H}_{NJL}$ é quebrada espontaneamente. A maneira mais simples de se responder esta questão é a sugerida por Nambu e Jona-Lasinio em sua publicação original [5]: encontrar o propagador dos férmions, $S(p)$. A simetria será quebrada espontaneamente se (1) o propagador contiver um termo de massa e, (2) se a energia do vácuo calculada com este propagador com termo de massa for menor que a energia calculada com o propagador sem termo de massa. A questão consiste

então em como calcular o propagador de férmions (no presente caso, quarks).

A estratégia adotada por NJL foi a seguinte. Como a geração de massa é o resultado dos efeitos de auto-interação entre os férmions, a informação da geração de massa deve estar contida na auto-energia dos férmions, denotada por $\Sigma(p)$, e definida por:

$$S^{-1}(p) = S^{(0)-1}(p) - \Sigma(p) \,, \tag{2.9}$$

onde $S^{(0)-1}(q)$ é o inverso do propagador referente a $\mathcal{H}_0$ da Eq. (2.8), dado por

$$S^{(0)-1}(q) = \not{p} \,. \tag{2.10}$$

Como foi dito anteriormente, não é possível gerar massa em teoria de perturbação. Pois, em primeira ordem de teoria de perturbação, a auto-energia é dada por:

$$\Sigma^{(1)}(p) = \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \mathrm{Tr}[S^{(0)}(q)] - S^{(0)}(q) - \gamma_5 \mathrm{Tr}[S^{(0)}(q)\gamma_5] + \gamma_5 S^{(0)}(q)\gamma_5 \right\} \,. \tag{2.11}$$

Substituindo $S^{(0)}$ obtido pela inversão da Eq. (2.10) na Eq. (2.10), pode-se mostrar que:

$$\Sigma^{(1)}(p) = 0 \,. \tag{2.12}$$

Portanto, $S^{(1)}(p)$, o propagador em primeira ordem em teoria de perturbação, é dado por

$$S^{(1)}(p) = \frac{1}{\not{p}} = S^{(0)}(p) \,. \tag{2.13}$$

Agora, não é difícil se convencer que a auto-energia continuará sendo igual a zero em qualquer ordem de teoria de perturbação, pois calcular a auto-energia em ordens mais altas significa simplesmente iterar o resultado da ordem imediatamente inferior à desejada. Fica claro a necessidade de um método não perturbativo.

Nambu e Jona-Lasinio sugerem o seguinte. Como o interesse está na geração de um termo de massa, então, um termo da forma $\mathcal{H}_s = M\overline{\Psi}\Psi$ é adicionado ao Hamiltoniano $\mathcal{H}_{int}$ original e, ao mesmo tempo, substraído de $\mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{NJL} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ &= (\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_s) + (\mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_s) \\ &\equiv \mathcal{H}'_0 + \mathcal{H}'_{int} \,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

A seguir, ao invés de diagonalizar $H_0 = \int d^3x\ \mathcal{H}_0$ e tratar $H_{int} = \int d^3x\ \mathcal{H}_{int}$ como uma perturbação, $H'_0 = \int d^3x\ \mathcal{H}'_0$ é diagonalizado e $H'_{int} = \int d^3x\ \mathcal{H}'_{int}$ é tratado em teoria de perturbação. Desta forma, o vácuo é um autoestado de H'_0 e, portanto, não é invariante quiral, embora o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{NJL}$ ainda o seja. Então, M pode ser determinado exigindo que a auto-energia correspondente à nova interação H'_{int} seja igual a zero. De fato, isto leva a uma equação autoconsistente para M, chamada de equação de "gap" de massa, dada pela expressão:

$$M = \frac{26G}{(2\pi)^3} \int^{\Lambda} d^3k\ \frac{M}{\sqrt{M^2 + k^2}}\ , \tag{2.15}$$

onde Λ é um momentum de corte, o qual é necessário devido ao fato de o modelo não ser renormalizável.

Encontrada uma solução diferente de zero para M, Nambu e Jona-Lasinio mostraram que a densidade de energia do vácuo calculada com o propagador com termo de massa:

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - M + i\varepsilon}\ , \tag{2.16}$$

é, de fato, menor que a densidade de energia calculada com $S^{(0)}$.

No que segue, vamos considerar uma classe de modelos quirais similares ao modelo de NJL, mas que incorporam os aspectos de interções não-puntuais da QCD, simulando a interação quark-glúon. Em particular, o modelo considerado pode tratar interações que incorporem a importante característica do confinamento dos quarks [8] [9] [10].

A quebra espontânea da simetria quiral nestes modelos será estudada através de uma técnica muito similar à proposta originalmente por NJL. Partindo da formulação Hamiltoniana com $H = H_0 + H_i$, obtém-se $H = H'_0 + H'_{int}$ através do método variacional de Bogoliubov-Valatin, o qual surgiu no contexto da teoria da supercondutividade. No método de Bogoliubov-Valatin, H'_{int}, do qual foram subtraídos efeitos de auto-energia, é tratado como uma perturbação e H'_0 é diagonalizado exatamente.

Consideramos modelos cujos Hamiltonianos podem ser escritos na seguinte forma geral:

$$H = \int d^3x\ \Psi^{\dagger}(\mathrm{x})(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\Psi(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\int d^3x\ d^3y\ J^{\mu}_a(\mathrm{x})D^{ab}_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})J^{\nu}_b(\mathrm{y})\ , \tag{2.17}$$

onde as correntes $J^{\mu}_a(\mathrm{x})$ são da forma geral:

$$J^{\mu}_a(\mathrm{x}) = \Psi^{\dagger}(\mathrm{x})\Gamma^{\mu}_a\Psi(\mathrm{x})\ . \tag{2.18}$$

Como no caso do modelo NJL, não foram explicitados os índices de Dirac, nem os de simetria interna de cor e sabor. As matrizes Γ estão no espaço de Dirac, cor e sabor. $D_{\mu\nu}$ é o propagador, representando a interação entre os quarks. As matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ que aparecem em Eq. (2.17) são as matrizes de Dirac (Apêndice A). As matrizes Γ^{μ}_{a} em geral terão a seguinte estrutura:

$$\Gamma^{\mu}_{a} = A^{\mu} \otimes C_{a} \,, \tag{2.19}$$

onde a matriz A^{μ} está relacionada às matrizes de Dirac γ^{μ}, podendo ser dada por uma delas ou um produto destas, e a matriz C_a será uma matriz de cor de Gell-Mann $\frac{\lambda^a}{2}$, $a = 1, \ldots, 8$ (Apêndice A), ou uma matriz de Pauli $\frac{\tau^a}{2}$, $a = 1, \ldots, 3$, ou ainda o produto de ambas (neste caso o índice a é na realidade dois índices, um para a cor, outro para o sabor). Para o modelo NJL, C_a é a matriz identidade no espaço de cor, e é a matriz identidade ou a matriz de Pauli de sabor (ver Eq. (2.8)).

Os campos de quarks Ψ e $\Psi^{\dagger}$ satisfazem as relações de anticomutação, a tempos iguais, usuais:

$$\begin{aligned} \{\Psi^{i}_{\alpha}(x), \Psi^{j}_{\beta}(y)\} &= \{\Psi^{i\dagger}_{\alpha}(x), \Psi^{j\dagger}_{\beta}(y)\} = 0 \,, \\ \{\Psi^{i}_{\alpha}(x), \Psi^{j\dagger}_{\beta}(y)\} &= \delta^{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathrm{x} - \mathrm{y}) \,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde, agora sim, foram explicitados os índices de Dirac α e β e os de simetria interna i, j.

Por toda parte se usará $\hbar = c = 1$ e, a menos que seja especificado o contrário, a convenção de somatório sobre índices repetidos.

É importante notar que a interação entre os quarks não inclui efeitos de retardamento, i.e., os modelos considerados não são covariantes. Apesar de ser uma restrição importante, como será visto no decorrer desta dissertação, a não covariância não representa um empecilho para o desenvolvimento de um estudo muito interessante a respeito da quebra dinâmica da simetria quiral e suas consequências para a espectroscopia [9] [10] e interações hadrônicas no contexto de modelos de quarks. Por outro lado, o modelo incorpora algumas características relativísticas, como pode ser visto da forma do termo cinético e da expansão para os operadores de campo da Eq. (2.21) abaixo. Voltaremos a discutir um pouco mais sobre a não covariância mais adiante.

Para quarks não interagentes sem massa, a expansão Fourier para os operadores de

campo, em $t = 0$, é dada por

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left[u_s^{(0)}(\mathrm{k}) q_s^{(0)}(\mathrm{k}) + v_s^{(0)}(-\mathrm{k}) \bar{q}_s^{(0)\dagger}(-\mathrm{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \tag{2.21}$$

onde s indica projeção de spin. Os espinores $u_s^{(0)}(\mathrm{k})$ e $v_s^{(0)}(-\mathrm{k})$ são dados por:

$$u_s^{(0)}(\mathrm{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathrm{k}} \end{pmatrix} \chi_s , \tag{2.22}$$

$$v_s^{(0)}(-\mathrm{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathrm{k}} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s^c , \tag{2.23}$$

onde

$$\chi_s^c = -i\sigma_2 \chi_s^* , \tag{2.24}$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ e σ_2 as matrizes de Pauli (Apêndice A) e χ_s o espinor de Pauli. Note que não estamos explicitando as funções correspondentes a cor e sabor. Na realidade, os espinores $u_s^{(0)}(\mathrm{k})$ e $v_s^{(0)}(\mathrm{k})$, dados respectivamente pelas Eqs. (2.22-2.23), devem ser multiplicados pelas funçẽos de cor e sabor. Mas como estas entram de maneira trivial e não interferem na transformação de Bogoliubov-Valatin, vamos simplesmente continuar escrevendo-os como acima.

Os espinores $u^{(0)}$ e $v^{(0)}$ estão normalizados como:

$$\begin{aligned} u_r^{(0)\dagger}(\mathrm{k}) u_s^{(0)}(\mathrm{k}) = v_r^{(0)\dagger}(-\mathrm{k}) v_s^{(0)}(-\mathrm{k}) = \delta_{rs} , \\ u_r^{(0)\dagger}(\mathrm{k}) v_s(-\mathrm{k}) = v_r^{(0)\dagger}(-\mathrm{k}) u_s^{(0)}(\mathrm{k}) = 0 . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Para que o Hamiltoniano da Eq. (2.17) seja invariante quiral, é necessário que a estrutura operatorial do produto das matrizes Γ e do propagador $D_{\mu\nu}$ seja tal que este comute com Q^{5a}. Na Seção (2.4) apresentamos um exemplo específico de Hamiltoniano quiral.

No que segue, vamos implementar o método variacional de Bogoliubov-Valatin para o estudo da quebra dinâmica da simetria quiral no contexto de modelos do tipo da Eq. (2.17). Este método é particularmente conveniente para o estudo das interações entre hadrons através do formalismo Fock-Tani discutido no próximo capítulo.

2.2 A Transformação de Bogoliubov-Valatin

Uma maneira prática de se estudar a quebra dinâmica da simetria quiral com um Hamiltoniano da forma da Eq. (2.17) é o método variacional de Bogoliubov-Valatin (BV). A idéia básica do método BV é construir o vácuo que quebra a simetria a partir do vácuo invariante, através da população deste último com pares quark-antiquark. Como ficará claro no que segue, os pares quark-antiquark no vácuo são os equivalentes pares de elétrons num supercondutor, os chamados pares de Cooper.

Inicialmente, o operador de campo $\Psi(\mathbf{x})$ é expandido em termos de novos espinores $u_s(\mathrm{k})$ e $v_s(\mathbf{k})$:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left[u_s(\mathrm{k}) q_s(\mathrm{k}) + v_s(-\mathrm{k}) \bar{q}_s^\dagger(-\mathrm{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \tag{2.26}$$

onde $u_s(\mathrm{k})$ e $v_s(\mathrm{k})$ não mais são os espinores do campo de quarks sem massa, e não necessariamente são soluções da equação de Dirac. Estes são espinores variacionais que serão determinados a partir da minimização da densidade de enegia de um vácuo variacional, a ser definido a seguir. Além disto. estes espinores devem ser tais que mantenham as relações de anticomutação dadas na Eq. (2.20) e as normalizações:

$$u_r^\dagger(\mathrm{k}) u_s(\mathrm{k}) = v_r^\dagger(-\mathrm{k}) v_s(-\mathrm{k}) = \delta_{rs} ,$$

$$u_r^\dagger(\mathrm{k}) v_s(-\mathrm{k}) = v_r^\dagger(-\mathrm{k}) u_s(\mathrm{k}) = 0 . \tag{2.27}$$

Sendo assim, implementa-se o método BV através de uma transformação unitária tal que, sendo $|0^{(0)}>$ o vácuo trivial, não-interagente, definido como

$$q_s^{(0)}(\mathrm{k})|0^{(0)}> = \bar{q}_s^{(0)}(\mathrm{k})|0^{(0)}> = 0 , \tag{2.28}$$

um novo vácuo é definido como um condensado de pares quark-antiquark (vácuo não trivial), relacionado ao vácuo trivial da seguinte forma:

$$|0> \equiv U|0^{(0)}> \equiv \exp(B^\dagger - B)|0^{(0)}> , \tag{2.29}$$

onde

$$B^\dagger = \int d^3k \, \phi(k) \, q_r^{(0)\dagger}(\mathrm{k}) \chi_r^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathrm{k}} \chi_s^c \bar{q}_s^{(0)\dagger}(-\mathrm{k}) . \tag{2.30}$$

A função $\phi(k)$ é chamada de "ângulo quiral", a qual é uma função (real) variacional a ser determinada pela minimização da energia do vácuo não trivial.

A forma do operador $B^\dagger$ é definida de modo que tenhamos o acoplamento $^3P_0$ entre o par quark-antiquark, resultando na paridade correta para o vácuo. Isto pode ser visto notando que na Eq. (2.30) temos a matriz $M \equiv -\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathrm{k}} i\sigma_2$, cujos elementos são dados por:

$$M_{s_1 s_2} = \sqrt{6}\sum_{m,\sigma=-1}^{1} <11,\sigma m|11,00><1/2\ 1/2,s_1 s_2|1/2\ 1/2,1\sigma>\hat{\mathrm{k}}_m\ , \tag{2.31}$$

onde $\hat{\mathrm{k}}_m$ é o m-ésimo componente do tensor esférico de ordem 1 correspondente ao vetor $\hat{\mathrm{k}}$:

$$\hat{\mathrm{k}}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathrm{k}}_x + i\hat{\mathrm{k}}_y\right), \qquad \hat{\mathrm{k}}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathrm{k}}_x - i\hat{\mathrm{k}}_y\right), \qquad \hat{\mathrm{k}}_0 = \hat{\mathrm{k}}_z\ . \tag{2.32}$$

Adicionalmente, o fato de o ângulo quiral $\phi(k)$ depender apenas de $|\mathrm{k}|$ garante a invariância rotacional do novo vácuo.

Tendo definido o novo vácuo, o próximo passo é definir os novos operadores de criação e aniquilação de um quark (antiquark). Sendo $q_s^{(0)}(\mathrm{k})$ e $\overline{q}_s^{(0)}(-\mathrm{k})$ os operadores de destruição de um quark e um antiquark, respectivamente, no vácuo trivial, temos que no vácuo não trivial os operadores de destruição são dados por

$$\begin{aligned} q_s(\mathrm{k}) &= U q_s^{(0)}(\mathrm{k}) U^{-1}\ , \\ \overline{q}_s(\mathrm{k}) &= U \overline{q}_s^{(0)}(-\mathrm{k}) U^{-1}\ . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Os novos operadores de criação são dados de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano de (2.33).

Para obter a relação entre os operadores transformados e os antigos operadores, faremos uso do fato que

$$e^A C e^{-A} = C + [A,C] + \frac{1}{2!}[A,[A,C]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,C]]] + \ldots\ , \tag{2.34}$$

onde $A \equiv B^\dagger - B$ e

$$\begin{aligned} \left[(B^\dagger - B), q_s^{(0)}(\mathrm{k})\right] &= -\phi(k)\boldsymbol{\sigma}_{sr}^c \cdot \hat{\mathrm{k}}\bar{q}_r^{(0)\dagger}(-\mathrm{k})\ , \\ \left[(B^\dagger - B), \bar{q}_s^{(0)\dagger}(-\mathrm{k})\right] &= \phi(k)\boldsymbol{\sigma}_{sr}^{c\dagger}\cdot\hat{\mathrm{k}} q_r^{(0)}(\mathrm{k})\ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Assim, obtemos uma série infinita para os operadores transformados, que é linear nos antigos operadores, e cujos termos podem ser somados para obtermos a transformação de Bogoliubov-Valatin para os novos operadores como:

$$\begin{pmatrix} q_r(\mathrm{k}) \\ \bar{q}_s^{\dagger}(-\mathrm{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi(k) & -\mathrm{sen}\phi(k)\boldsymbol{\sigma}^c_{rs}\cdot\hat{\mathrm{k}} \\ \mathrm{sen}\phi(k)\boldsymbol{\sigma}^{c\dagger}_{sr}\cdot\hat{\mathrm{k}} & \cos\phi(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r^{(0)}(\mathrm{k}) \\ \bar{q}_s^{(0)\dagger}(-\mathrm{k}) \end{pmatrix} , \tag{2.36}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^c_{rs} = \chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\chi^c_s$. As relações para $q_r^{\dagger}(\mathrm{k})$ e $\bar{q}_s(-\mathrm{k})$ são obtidas tomando o hermitiano conjugado da eq. (2.36).

Para obter a transformação BV para os espinores, notamos que a imposição que o operador de campo seja invariante sob esta transformação é equivalente a fazer

$$u_s(\mathrm{k})q_s(\mathrm{k}) + v_s(-\mathrm{k})\bar{q}_s^{\dagger}(-\mathrm{k}) = u_s^{(0)}(\mathrm{k})q_s^{(0)}(\mathrm{k}) + v_s^{(0)}(-\mathrm{k})\bar{q}_s^{(0)\dagger}(-\mathrm{k}) .$$

Então, invertendo a Eq. (2.36) e substituindo nesta última expressão, obtemos a transformação para os espinores

$$u_r(\mathrm{k}) = \cos\phi(k)u_r^{(0)}(\mathrm{k}) - \mathrm{sen}\phi(k)v_s^{(0)}(-\mathrm{k})\boldsymbol{\sigma}^{c\dagger}_{sr}\cdot\hat{\mathrm{k}} , \tag{2.37}$$

$$v_s(-\mathrm{k}) = \mathrm{sen}\phi(k)u_r^{(0)}(\mathrm{k})\boldsymbol{\sigma}^c_{rs}\cdot\hat{\mathrm{k}} + \cos\phi(k)v_s^{(0)}(-\mathrm{k}) . \tag{2.38}$$

As Eqs. (2.36-2.38) definem a transformação BV. Para que completemos a implementação da transformação BV devemos obter o Hamiltoniano transformado, o que será feito na próxima Seção. Porém, ao se fazer a transformação do Hamiltoniano será necessário o uso dos projetores definidos como:

$$\begin{aligned} \Lambda^{+}(\mathrm{k}) &\equiv u_s(\mathrm{k})u_s^{\dagger}(\mathrm{k}) ; \\ \Lambda^{-}(\mathrm{k}) &\equiv v_s(-\mathrm{k})v_s^{\dagger}(-\mathrm{k}) . \end{aligned} \tag{2.39}$$

Usando as Eqs .(2.37-2.38), temos

$$\begin{aligned} \Lambda^{+}(\mathrm{k}) &= \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{sen}2\phi(k)\,\beta + \cos2\phi(k)\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathrm{k}}\right] ; \\ \Lambda^{-}(\mathrm{k}) &= \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{sen}2\phi(k)\,\beta - \cos2\phi(k)\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathrm{k}}\right] . \end{aligned} \tag{2.40}$$

Da expressão (2.40) observamos que fazendo $\phi(k) = 0$, obtemos os projetores na base dos espinores livres sem massa:

$$\Lambda^{(0)\pm}(\mathrm{k}) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathrm{k}}\right) . \tag{2.41}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e β são as matrizes de Dirac.

2.3 O Hamiltoniano Transformado Bogoliubov-Valatin

Nesta Seção vamos efetuar a tranformação BV no Hamiltoniano. Isto é, vamos obter o Hamiltoniano em termos dos novos operadores de criação e aniquilação. Para tanto, vamos considerar Hamiltonianos da forma da Eq. (2.17) bastante gerais, com a única restrição que as matrizes C_a tenham traço nulo. O caso em que C_a não têm traço nulo será considerado somente no caso específico do modelo de Nambu e Jona-Lasinio.

Para que tenhamos uma forma conveniente para o Hamiltoniano, convém considerarmos

$$H_N = N_W\,[H]\ , \tag{2.42}$$

ao invés da Eq. (2.17), onde N_W indica o ordenamento de Wick. Portanto, usando o teorema de Wick, podemos escrever o Hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H_N \;=\; & :\int d^3x \Psi^\dagger(\mathrm{x})\,(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\Psi(\mathrm{x}): + :\int d^3x\ \underline{\Psi^\dagger(\mathrm{x})\,(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\Psi(\mathrm{x})}: \\ & + \frac{1}{2}:\int d^3x\ d^3y\ \Psi^\dagger(\mathrm{x})\Gamma_a^\mu\Psi(\mathrm{x})D_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Psi^\dagger(\mathrm{y})\Gamma_a^\nu\Psi(\mathrm{y}): \\ & + \frac{1}{2}:\int d^3x\ d^3y\ \underline{\Psi^\dagger(\mathrm{x})\Gamma_a^\mu\Psi(\mathrm{x})D_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Psi^\dagger(\mathrm{y})}\Gamma_a^\nu\Psi(\mathrm{y}): \\ & + \frac{1}{2}:\int d^3x\ d^3y\ \Psi^\dagger(\mathrm{x})\Gamma_a^\mu\underline{\Psi(\mathrm{x})D_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Psi^\dagger(\mathrm{y})}\Gamma_a^\nu\Psi(\mathrm{y}): \\ & + \frac{1}{2}:\int d^3x d^3y\underline{\Psi^\dagger(\mathrm{x})\Gamma_a^\mu\Psi(\mathrm{x})D_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Psi^\dagger(\mathrm{y})\Gamma_a^\nu}\Psi(\mathrm{y}):\ , \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde, por simplicidade deixamos de lado os índices de Dirac, isospin e cor.

As contrações de Wick são dadas por

$$\underline{\Psi_\alpha^i(\mathrm{x})\Psi_\beta^{j\,\dagger}(\mathrm{y})} = \frac{\delta^{ij}}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathrm{k})\ e^{i\mathrm{k}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})}\ , \tag{2.44}$$

$$\underline{\Psi_\beta^{j\,\dagger}(\mathrm{y})\Psi_\alpha^i(\mathrm{x})} = \frac{\delta^{ij}}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathrm{k})\ e^{i\mathrm{k}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})}\ . \tag{2.45}$$

Estas expressões evidenciam que o ordenamento normal depende da base usada através dos projetores. Para se obter o Hamiltoniano ordenado normalmente na base de espinores livres sem massa, deve-se substituir $\Lambda^{\pm}(\mathrm{k})$ nas contrações acima por $\Lambda^{(0)\pm}(\mathrm{k})$.

Pode-se observar que não há termos contraídos no mesmo vértice na Eq. (2.43), isto é conseqüência do fato que estamos considerando $\mathrm{Tr}\,[C_a] = 0$. Adicionalmente, pode-se notar que a Eq. (2.43) tem a seguinte estrutura

$$H = \xi V + H_2 + H_4 \,. \tag{2.46}$$

onde ξ, uma constante, é a densidade de energia do vácuo e V é o volume de todo o espaço. H_2 é um termo envolvendo somente dois operadores de quarks (ou antiquarks) e H_4 é um termo envolvendo quatro operadores.

Conforme foi dito na Seção 2.1, o Hamiltoniano pode ser separado em $H = H'_0 + H'_i$, onde identificamos o termo a ser diagonalizado, H'_0, com $\xi V + H_2$, e o termo a ser tratado perturbativamente, H'_i, com H_4. Consideremos agora cada um dos termos Eq. (2.46) separadamente.

Para obtermos a densidade de energia do vácuo, usamos as Eqs. (2.44-2.45) e o fato que $C_a C_a = F$, onde F é uma constante, e também que $\mathrm{Tr}\,[C_a C_a] = FN$ onde $N = N_c N_f$ é o número total de quarks. Com isto, obtemos:

$$\begin{aligned} \xi\,[\phi] &= \frac{N}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \mathrm{Tr}\left[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{k})\Lambda^-(\mathrm{k})\right] \\ &+ \frac{FN}{2(2\pi)^6}\int d^3k_1\, d^3k_2\ D_{\mu\nu}(\mathrm{k}_1-\mathrm{k}_2)\mathrm{Tr}\left[A^\mu\Lambda^+(\mathrm{k}_1)A^\nu\Lambda^-(\mathrm{k}_2)\right]\,, \end{aligned} \tag{2.47}$$

onde $D_{\mu\nu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ é a transformada de Fourier de $D_{\mu\nu}(\mathbf{z})$, definida como:

$$D_{\mu\nu}(\mathrm{k}_1-\mathrm{k}_2) = \int d^3z\ D_{\mu\nu}(\mathbf{z})\ e^{-i(\mathrm{k}_1-\mathrm{k}_2)\cdot\mathbf{z}}\,. \tag{2.48}$$

A função $\phi(k)$ é determinada a partir da minimização da funcional densidade de energia do vácuo não trivial, dada pela Eq. (2.47). Ao fazer isto, e considerando que a paridade é conservada nas interações fortes, o que implica em $D_{\mu\nu}(\mathbf{z}) = D_{\mu\nu}(-\mathbf{z})$, obtemos a equação de "gap" de massa:

$$A(\mathrm{k})\cos 2\phi(k) - B(\mathrm{k})\mathrm{sen}2\phi(k) = 0\,, \tag{2.49}$$

onde $A(\mathrm{k})$ e $B(\mathrm{k})$ são dados por:

$$A(\mathrm{k}) = \frac{F}{8(2\pi)^3}\int d^3k'\ D_{\mu\nu}(\mathrm{k}-\mathrm{k}')\ \mathrm{Tr}\left[A^\nu\beta A^\mu\left(\Lambda^+(\mathrm{k}') - \Lambda^-(\mathrm{k}')\right)\right]\,, \tag{2.50}$$

$$B(\mathrm{k}) = k + \frac{F}{8(2\pi)^3}\int d^3k'\; D_{\mu\nu}(\mathrm{k}-\mathrm{k}')\;\mathrm{Tr}\left[A^\nu \alpha\cdot\hat{\mathrm{k}}A^\mu\left(\Lambda^+(\mathrm{k}')-\Lambda^-(\mathrm{k}')\right)\right]\;. \tag{2.51}$$

A equação de "gap" determina $\phi(k)$ e, portanto, fica determinada a transformação BV.

O método BV consite em, feita a transformação, procurarmos por um estado BV (o vácuo não trivial) que minimize a funcional densidade de energia. Ou seja, devemos obter o ângulo quiral $\phi(k)$ tal que :

$$\frac{\delta\xi}{\delta\phi(k)} = 0\;, \tag{2.52}$$

e, ao mesmo tempo:

$$\frac{\delta^2\xi}{\delta\phi(k)^2} > 0\;. \tag{2.53}$$

A primeira das condições acima é a equação de "gap". Tratar a segunda destas condições é um problema bastante difícil em geral [8]. Uma forma equivalente, porém menos rigorosa, de resolvermos este problema é, após obtermos uma solução da equação de "gap", verificarmos se esta solução é tal que,

$$\Delta\xi < 0\;, \tag{2.54}$$

onde

$$\Delta\xi \equiv \xi\left[\phi(k)\right] - \xi\left[\phi(k)=0\right]\;, \tag{2.55}$$

é a diferença entre a densidade de energia do vácuo não trivial e a densidade de energia do vácuo trivial. Quando isto acontece, o vácuo não trivial passa a ser o vácuo físico, e há quebra espontânea de simetria.

Vamos agora considerar o termo do Hamiltoniano contendo dois operadores de quarks (H_2). Usando as contrações dadas nas Eqs. (2.44-2.45), H_2 pode ser posto na forma:

$$H_2 =: \int d^3k\left[u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k})q^{i\;\dagger}_{s_1}(\mathrm{k}) + v^\dagger_{s_1}(-\mathrm{k})\bar{q}^i_{s_1}(-\mathrm{k})\right]\; H(\mathrm{k})\;\left[u_{s_2}(\mathrm{k})q^i_{s_2}(\mathrm{k}) + v_{s_2}(-\mathrm{k})\bar{q}^{i\dagger}_{s_2}(-\mathrm{k})\right] :\,, \tag{2.56}$$

onde

$$H(\mathrm{k}) = A(\mathrm{k})\beta + B(\mathrm{k})\alpha\cdot\hat{\mathrm{k}}\;. \tag{2.57}$$

Deve-se notar a semelhança entre a Eq. (2.57) e o Hamiltoniano da partícula livre de Dirac. Com base nesta analogia, temos que $A(\mathrm{k})$ é um termo de massa dinamicamente gerada e, analogamente, $B(\mathrm{k})$ é um termo cinético dinamicamente gerado[9].

Deste modo, vemos que o vácuo considerado como um condensado de pares $q\bar{q}$ gera uma massa para os quarks, mesmo quando a massa no Hamiltoniano original é nula. Isto pode ser entendido com base em uma analogia com um sistema constituído de uma partícula com spin e um material ferromagnético (que é um exemplo de sistema onde ocorre quebra espontânea da simetria rotacional). Do mesmo modo que a partícula com spin no ferromagneto sente a ação do campo magnético criado pelos spins alinhados, um quark no vácuo com estrutura sente a ação dos pares $q\bar{q}$, criando um "gap" de energia entre o estado de vácuo e o estado com uma partícula com momentum zero.

Não é difícil mostrar que a condição de minimização da funcional densidade de energia (2.47) é equivalente à diagonalização de H_2. A forma final diagonalizada de H_2 fica sendo:

$$H_2 = \int d^3k \; E(\mathrm{k}) \left[q_s^{i\dagger}(\mathrm{k}) q_s^i(\mathrm{k}) + \bar{q}_s^{i\dagger}(-\mathrm{k}) \bar{q}_s^i(-\mathrm{k}) \right] \; , \tag{2.58}$$

onde $E(\mathrm{k})$, a energia de um quark (ou antiquark), é dada por

$$E(\mathrm{k}) = A(\mathrm{k}) \mathrm{sen} 2\phi(k) + B(\mathrm{k}) \mathrm{cos} 2\phi(k) \; . \tag{2.59}$$

Esta, juntamente com a Eq. (2.49), implica em

$$A(\mathrm{k}) = E(\mathrm{k}) \mathrm{sen} 2\phi(k) \; ; \quad B(\mathrm{k}) = E(\mathrm{k}) \mathrm{cos} 2\phi(k) \; , \tag{2.60}$$

e, obviamente:

$$E(\mathrm{k})^2 = \left\{ [A(\mathrm{k})]^2 + [B(\mathrm{k})]^2 \right\} \; . \tag{2.61}$$

Assim, as Eqs. (2.47) e (2.58) provam que $H'_0 = \xi V + H_2$ está diagonalizado.

O termo do Hamiltoniano contendo quatro operadores, que será tratado perturbativamente, é dado por

$$\begin{aligned} H_4 \;=\; & \frac{1}{2(2\pi)^3} : \int d^3k_1 \; d^3k_2 \; d^3k_3 \; d^3k_4 \; \delta(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_3 - \mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_4) \; D_{\mu\nu}(\mathrm{k}_1 - \mathrm{k}_2) \\ \times \; & \left[u_{s_1}^\dagger(\mathrm{k}_1) q_{s_1}{}^\dagger(\mathrm{k}_1) + v_{s_1}^\dagger(-\mathrm{k}_1) \bar{q}_{s_1}(-\mathrm{k}_1) \right] \Gamma_a^\mu \left[u_{s_2}(\mathrm{k}_2) q_{s_2}(\mathrm{k}_2) + v_{s_2}(-\mathrm{k}_2) \bar{q}_{s_2}^\dagger(-\mathrm{k}_2) \right] \\ \times \; & \left[u_{s_3}^\dagger(\mathrm{k}_3) q_{s_3}^\dagger(\mathrm{k}_3) + v_{s_3}^\dagger(-\mathrm{k}_3) \bar{q}_{s_3}(-\mathrm{k}_3) \right] \Gamma_a^\nu \left[u_{s_4}(\mathrm{k}_4) q_{s_4}(\mathrm{k}_4) + v_{s_4}(-\mathrm{k}_4) \bar{q}_{s_4}^\dagger(-\mathrm{k}_4) \right] : \; . \end{aligned}$$

Após avaliar os produtos internos de espinores $u_s(\mathrm{k})$ e $v_s(\mathrm{k})$, encontramos dez amplitudes de interação em H_4. Os produtos internos dos espinores $u_s(\mathrm{k})$ e $v_s(\mathrm{k})$ para o modelo de Nambu e Jona-Lasinio, o qual será dicutido na Seção (2.7), estão listados no Apêndice B.

2.4 Um Exemplo de Hamiltoniano

Nesta Seção vamos exemplificar alguns resultados da Seção anterior para uma interação de troca de um bóson vetorial do tipo de um glúon. Neste caso, a corrente $J_a^\mu(\mathrm{x})$ da Eq. (2.18) é dada por:

$$J_a^\mu(\mathrm{x}) = \bar{\Psi}(\mathrm{x})\gamma^\mu \frac{1}{2}\lambda_a \Psi(\mathrm{x}) \,, \tag{2.62}$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac e $\frac{1}{2}\lambda_a$ são as matrizes de Gell-Mann. Para o propagador, podemos escrever:

$$D_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = g_{\mu\nu} D(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \,, \tag{2.63}$$

onde $D(\mathrm{x}-\mathrm{y})$ é um função arbitrária de $\mathrm{x}-\mathrm{y}$, a qual pode ser identificada como um potencial.

O Hamiltoniano é então dado por:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\, \Psi^\dagger(\mathrm{x})\,(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\,\Psi(\mathrm{x}) \\ &+ \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, D(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \left[\Psi^\dagger(\mathrm{x})\frac{\lambda_a}{2}\Psi(\mathrm{x})\Psi^\dagger(\mathrm{y})\frac{\lambda_a}{2}\Psi(\mathrm{y})\right. \\ &- \left.\Psi^\dagger(\mathrm{x})\boldsymbol{\alpha}\frac{\lambda_a}{2}\Psi(\mathrm{x})\Psi^\dagger(\mathrm{y})\boldsymbol{\alpha}\frac{\lambda_a}{2}\Psi(\mathrm{y})\right] . \end{aligned} \tag{2.64}$$

Este Hamiltoniano é claramente invariante quiral, pois cada um dos termos nesta expressão é, por si só, invariante.

O primeiro passo a ser dado, conhecido o Hamiltoniano, é determinar a densidade de energia do vácuo e obter a equação de "gap". Tomando o ordenamento de Wick deste Hamiltoniano, e usando as Eqs. (2.44-2.45), temos que a funcional densidade de energia do vácuo, Eq. (2.47), para este Hamiltoniano é dada por:

$$\begin{aligned} \xi[\phi] &= -\frac{6N_f}{(2\pi)^3}\int d^3k\; k\cos 2\phi(k) \\ &+ \frac{2N_f}{(2\pi)^6}\int d^3k_1\, d^3k_2\; D(\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(\mathrm{k}_1)\Lambda^-(\mathrm{k}_2) - \boldsymbol{\alpha}\Lambda^+(\mathrm{k}_1)\cdot\boldsymbol{\alpha}\Lambda^-(\mathrm{k}_2)\right], \end{aligned} \tag{2.65}$$

onde foi usado o fato de que estamos trabalhando com $N_c = 3$, e que para as matrizes de Gell-Mann, a constante F da Eq. (2.47) é 4/3.

Após avaliados os traços, $\xi[\phi]$ pode ser escrita como

$$\xi[\phi] = \frac{N_f}{(2\pi)^3}\int d^3k\,[2C(\mathrm{k}) - 3E(\mathrm{k}) - 3k\cos 2\phi(k)] \,. \tag{2.66}$$

onde a função $C(\mathbf{k})$ é definida como

$$C(\mathbf{k}) \equiv -\frac{2}{(2\pi)^3}\int d^3k'\; D(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{2.67}$$

As quantidades $A(\mathbf{k})$ e $B(\mathbf{k})$ são dadas por:

$$A(\mathbf{k}) = \frac{8}{3(2\pi)^3}\int d^3k'\; D(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{sen}2\phi(\mathbf{k}')\,, \tag{2.68}$$

$$B(\mathbf{k}) = k + \frac{8}{3(2\pi)^3}\int d^3k'\; D(\mathbf{x}-\mathbf{y})\;\cos 2\phi(k')\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}'\,. \tag{2.69}$$

$E(\mathbf{k})$ é dada pela Eq. (2.59).

Conhecendo $A(\mathbf{k})$ e $B(\mathbf{k})$, a equação de "gap" é dada diretamente pela Eq. (2.49). Para resolvermos a equação de "gap" e verificarmos se a solução corresponde a um mínimo da densidade de energia do vácuo, temos que explicitar a forma da função $D(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

Uma variedade de potenciais têm sido empregados na literatura. As Refs. [10][8] apresentam várias formas de potenciais. Em particular. o emprego de potenciais confinantes é particularmente interessante para estudar a quebra de simetria quiral conjuntamente com confinamento.

Para os nossos objetivos nesta dissertação, não vamos nos deter neste modelo, pois isto exigiria um estudo numérico das equações acima. No entanto, na Seção (2.7) vamos discutir o modelo de Nambu–Jona-Lasinio, o qual permite soluções analíticas da maioria das equações. Antes disto, vamos dar continuidade ao estudo dos parâmetros quirais e do píon como bóson de Goldstone no contexto geral.

2.5 O Píon como Bóson de Goldstone

A afirmação que o Hamiltoniano da Eq. (2.17) é invariante quiral significa

$$UHU^{\dagger} = H\,, \tag{2.70}$$

onde U é dado por

$$U = \exp\left(i\alpha^a Q^{5a}\right)\,, \tag{2.71}$$

onde os α^a são números reais e Q^{5a} é a carga quiral dada pela Eq. (2.1), a qual pode ser escrita (para $t = 0$) como:

$$Q^{5a} = \int d^3x \; \Psi^{i\dagger}(\mathrm{x})\gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi^i(\mathrm{x}) \; . \tag{2.72}$$

A Eq. (2.70) é equivalente à afirmação que o Hamiltoniano comuta com os geradores da transformação:

$$\left[Q^{5a}, H\right] = 0 \; . \tag{2.73}$$

Deve-se notar que a relação de comutação do Hamiltoniano com a carga quiral é independente de estarmos considerando a base de espinores livres sem massa ou o Hamiltoniano transformado BV, uma vez que as relações de comutação canônicas dos campos de quarks, Eq. (2.20), se mantém invariantes frente a uma transformação de Bogoliubov-Valatin, visto que esta é uma transformação unitária. Ocorre, porém, que na base dos espinores livres sem massa, esta simetria se estende ao espectro de estados do Hamiltoniano, visto que o vácuo trivial é invariante quiral

$$Q^{5a}|0^{(0)}>= 0 \quad \Rightarrow \quad U|0^{(0)}>= |0^{(0)}> \; . \tag{2.74}$$

Este é, conforme já foi dito na Seção 2.1, o modo de Wigner de realizar a simetria.

Na base dos espinores transformados das Eqs. (2.37-2.38), o vácuo não é invariante quiral:

$$Q^{5a}|0> \neq \; 0 \quad \Rightarrow \quad U|0> \neq \; |0> \; . \tag{2.75}$$

Então, temos que a transformação BV realiza a simetria no modo de Nambu-Goldstone, como desejávamos. Pelo teorema de Goldstone, quando ocorre quebra espontânea de uma simetria contínua, devem existir partículas de spin zero e massa nula associadas a esta quebra de simetria, sendo que há um bóson de Goldstone para cada gerador que não aniquila o vácuo. Assim, da Eq. (2.75), temos que existe um isotripleto de bósons de Goldstone, os quais têm os números quânticos do píon.

No formalismo aqui usado, desde que H_4 é tratado como uma perturbação, vemos que o vácuo é aproximadamente autoestado de H com autovalor ξV. Subtraindo a energia do vácuo temos

$$H_{efet}|0> \approx \; 0 \; , \tag{2.76}$$

onde $H_{efet} = H - \xi V$. Neste contexto, quando aplicamos H_{efet} no estado criado por Q^{5a} temos, devido à relação de comutação da Eq. (2.73), que

$$H_{efet}Q^{5a}|0>= 0 \; . \tag{2.77}$$

Assim, vemos que o estado de momentum nulo criado por Q^{5a} também tem energia nula, de modo que podemos associar $Q^{5a}|0>$ ao estado de um píon com momentum nulo[6][7]. Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} |\pi^a(\mathbf{0})> &= N_\pi Q^{5a}|0> ; \\ &= N_\pi \int d^3k \; q^{i\dagger}_{s_1 f_1}(\mathrm{k})\chi^\dagger_{s_1}\frac{\tau^a_{f_1 f_2}}{2}\chi^c_{s_2}\bar{q}^{i\dagger}_{s_2 f_2}(-\mathrm{k})\mathrm{sen}2\phi(\mathrm{k})|0> , \end{aligned} \tag{2.78}$$

onde indicamos os índices de cor e sabor. N_π é uma constante de normalização. Usando a invariância translacional, o estado de um píon com momentum $\mathbf{p}$ é dado por

$$|\pi^a(\mathrm{p})>= N_\pi \int d^3k \; q^{i\dagger}_{s_1 f_1}(\mathrm{k}+\mathrm{p}/2)\chi^\dagger_{s_1}\frac{\tau^a_{f_1 f_2}}{2}\chi^c_{s_2}\bar{q}^{i\dagger}_{s_2 f_2}(-\mathrm{k}+\mathrm{p}/2)\mathrm{sen}2\phi(\mathrm{k})|0> \; . \tag{2.79}$$

Sendo I_z a componente z do isospin, temos que os pions carregados $\pi^\pm$ têm projeção $I_z = \pm 1$ e o píon neutro π^0 tem $I_z = 0$. Desta forma, de acordo com as propriedades de trasformação dos tensores esféricos de ordem 1, temos a seguinte associação entre a Eq. (2.79) e os pions físicos:

$$\begin{aligned} |\pi^\pm(\mathrm{p})> &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\pi^1(\mathrm{p})> \pm i|\pi^2(\mathrm{p})> ,\right\} \\ |\pi^0(\mathrm{p})> &= |\pi^3(\mathrm{p})> \; . \end{aligned} \tag{2.80}$$

Extritamente falando, quando temos a realização da simetria no modo de Nambu-Goldstone, Eq. (2.75), a carga que não aniquila o vácuo não existe, no sentido de que o estado $Q^{5a}|0>$ não é normalizável. Impondo a normalização

$$<\pi^a(\mathbf{0})|\pi^b(\mathrm{p})>= \delta^{ab}\delta(\mathrm{p}) \; , \tag{2.81}$$

obtemos, usando as Eqs. (2.78-2.79), que

$$<\pi^a(\mathbf{0})|\pi^b(\mathrm{p})>= \left(|N_\pi|^2\frac{N}{2}\int d^3k \; \mathrm{sen}^2 2\phi(\mathrm{k})\right) \; \delta^{ab}\delta(\mathrm{p}) \; . \tag{2.82}$$

De modo que a constante de normalização N_π satisfaz

$$|N_\pi|^2 \frac{N}{2} \int d^3k \text{sen}^2 2\phi(\text{k}) = 1 \ . \tag{2.83}$$

É importante notar que a realização da simetria quiral no modo de Nambu-Goldstone no contexto dos modelos de quarks tratados através da transformação de Bogoliubov-Valatin depende do fato de que o vácuo BV seja um autoestado aproximado de H_{efet}. Dito de outra forma, é importante que a Eq. (2.76) seja verificada para cada modelo. No caso do modelo de Nambu–Jona-Lasinio, como foi discutido na Seção (2.1), esta equação é obviamente satisfeita, pois foi exatamente a imposição da Eq. (2.76) que levou a à equação de "gap" para o modelo, a Eq. (2.15).

2.6 Simetria Quiral Aproximada (PCAC)

Na Seção anterior obtivemos o píon, de massa nula, como bóson de Goldstone partindo de um Hamiltoniano invariante quiral. Ocorre, porém, que nem o píon possui massa nula nem o Hamiltoniano da QCD é exatamente invariante quiral. Deste modo, devemos adicionar ao Hamiltoniano da Eq. (2.17) um pequeno termo de quebra explícita de simetria. Isto é feito dando uma pequena massa de corrente para os quarks, supondo $m_u = m_d = m_o$, temos que o Hamiltoniano de quebra de simetria é:

$$H_{sb} = m_o \int d^3x \ \bar{\Psi}(\text{x})\Psi(\text{x}) \ . \tag{2.84}$$

Como uma conseqüência da introdução do termo H_{sb} no Hamiltoniano, visto que não há mais simetria quiral, não podemos obter os pions como bosons de Goldstone. Porém, desde que m_o é pequena na escala hadrônica, a simetria quiral pode ser considerada como uma simetria aproximada do Hamiltoniano, e os pions podem ser obtidos como "quasi" bosons de Goldstone. Isto justifica usarmos a transformação BV mesmo na presença de H_{sb}.

O termo de quebra de simetria modifica a estrutura do vácuo, como pode ser visto do fato que a densidade de energia do vácuo passa a ser dada por

$$\xi'[\phi] = \xi[\phi] - \frac{2Nm_o}{(2\pi)^3} \int d^3k \ \text{sen}2\phi(k) \ , \tag{2.85}$$

com $\xi[\phi]$ dado pela Eq. (2.47), e o segundo termo do lado direito da Eq. (2.85) sendo a contribuição de H_{sb}. Assim, a equação de "gap" passa a ser dada por:

$$[m_o + A(\mathbf{k})]\cos 2\phi(k) - B(\mathbf{k})\mathrm{sen}2\phi(k) = 0 \ , \tag{2.86}$$

com $A(\mathbf{k})$ e $B(\mathbf{k})$ dados pelas Eqs. (2.50-2.51).

Considerando a inclusão de H_{sb}, temos que o vácuo passa a ser um autoestado de $H'_0 = \xi' V + H'_2$, sendo $H'_2 = H_2 + :H_{sb}:$, e H_2 dado pela Eq. (2.58). $E(\mathbf{k})$ passa a ser dada por:

$$E(\mathbf{k}) = [m_\circ + A(\mathbf{k})]\,\mathrm{sen}2\phi(k) + B(\mathbf{k})\cos 2\phi(k) \ . \tag{2.87}$$

Assim, o termo de interação a ser considerado como uma perturbação continua sendo dado por H_4.

Desta forma, a massa do píon. em primeira ordem em teoria de perturbação, é dada por:

$$<\pi^a(\mathbf{0})|H'_{efet}|\pi^a(\mathbf{0})> = m_\pi \delta(\mathbf{0}) \ , \tag{2.88}$$

onde $H'_{efet} = H + H_{sb} - \xi' V$. Não há somatório sobre o índice a na expressão acima.

Adicionalmente, podemos observar que:

$$\begin{aligned} <\pi^a(\mathbf{0})|H'_{efet}|\pi^a(\mathbf{0})> &= |N_\pi|^2 < 0|Q^{5a}H'_{efet}Q^{5a}|0> \\ &= |N_\pi|^2 \frac{1}{2}\left[<0|\left[\left[Q^{5a}, H'_{efet}\right], Q^{5a}\right]|0> \right. \\ &+ \left. <0|\{H'_{efet}, Q^{5a}Q^{5a}\}|0>\right] \\ &\approx |N_\pi|^2 \frac{1}{2} <0|\left[\left[Q^{5a}, H_{sb}\right], Q^{5a}\right]|0> \ , \end{aligned} \tag{2.89}$$

onde, na passagem da segunda para a terceira linha, foi feito o uso da Eq (2.73), e da Eq. (2.76). Evidentemente, H'_{efet} foi usado no lugar de H_{efet}.

Podemos obter uma relação entre a constante de normalização N_π, a massa do píon m_π e a constante de decaimento do píon, cujo valor experimental é $f_\pi \simeq 93$ MeV. Para tanto notamos que, sendo $J_0^{5a}(\mathbf{x})$ a componente temporal da corrente axial, em $t = 0$, temos[25] :

$$<0|J_0^{5a}(\mathbf{x})|\pi^b(\mathbf{p})> = \frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{i f_\pi p_0}{(2p_0)^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \ . \tag{2.90}$$

Usando a Eq. (2.78) e a condição de normalização da Eq. (2.81), obtemos a relação:

$$|N_\pi|^2 \delta(\mathbf{0}) = <0|Q^{5a}Q^{5a}|0>$$

$$= \int d^3p <0|Q^{5a}|\pi^b(\mathbf{p})><\pi^b(\mathbf{p})|Q^{5a}|0> , \tag{2.91}$$

onde saturamos os estados intermediários com pions, e está subentendido somatório sobre o índice b, mas não sobre o índice a. Portanto, usando as Eqs. (2.90-2.91), obtemos :

$$|N_\pi|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2}{m_\pi f_\pi^2} , \tag{2.92}$$

Por outro lado, a Eq. (2.83) então implica em:

$$f_\pi = \sqrt{\frac{N}{(2\pi)^3 m_\pi}}\left[\int d^3k \ \mathrm{sen}^2 2\phi(\mathrm{k})\right]^{\frac{1}{2}} , \tag{2.93}$$

onde $N = N_c N_f$ é o número total de quarks.

A relação da Eq. (2.92), juntamente com as Eqs. (2.88-2.89), e o fato que

$$<0|\left[\left[Q^{5a}, H_{sb}\right], Q^{5a}\right]|0> = -(2\pi)^3 m_o <\bar{\Psi}\Psi> \delta(\mathbf{0}) , \tag{2.94}$$

resulta em

$$m_\pi^2 = -\frac{m_o}{f_\pi^2} <\bar{\Psi}\Psi> . \tag{2.95}$$

Este resultado é conhecido da álgebra de correntes, conhecido como a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner.

2.7 O Modelo de Nambu e Jona-Lasinio

O Hamiltoniano do modelo de Nambu-Jona-Lasinio pode ser escrito, a partir da Eq. (2.8), na forma dos Hamiltonianos da Seção (2.1) como:

$$\begin{aligned} H_{NJL} &= \int d^3x \ \mathcal{H}_{NJL} \\ &= \int d^3x \ \Psi^\dagger(\mathrm{x})\left(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\Psi(\mathrm{x}) \\ &- \frac{1}{2}\int d^3x \ d^3y \ \Psi^{i\dagger}(\mathrm{x})\gamma^0 \ \Psi(\mathrm{x}) \ D_S(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \ \Psi^\dagger(\mathrm{y})\gamma^0\Psi(\mathrm{y}) \\ &- \frac{1}{2}\int d^3x \ d^3y \ \Psi^{i\dagger}(\mathrm{x})\gamma^0\gamma^5\tau^a\Psi(\mathrm{x}) \ D_{PS}(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \ \Psi^\dagger(\mathrm{y})\gamma^0\gamma^5\tau^a\Psi(\mathrm{y}) , \end{aligned} \tag{2.96}$$

onde os propagadores escalar D_S e pseudo-escalar D_{PS} são dados por:

$$D_S(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = -D_{PS}(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = 2G\delta(\mathrm{x}-\mathrm{y}) . \tag{2.97}$$

O Hamiltoniano de NJL é invariante quiral, embora os termos escalar e pseudo-escalar não o sejam independentemente. Os termos proporcionais a $D_S(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ e $D_{PS}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ que não são invariantes sob a transformação de simetria se cancelam mutuamente.

Deve-se notar que devido ao fato de a interação entre os quarks do modelo NJL ser puntual (de contato), a propriedade de confinamento dos quarks não está contida no modelo. Esta talvez seja a maior limitação do modelo. Estudos de teorias de calibre na rede indicam que os fenômenos da quebra espontânea da simetria quiral e o confinamento dos quarks estão intimamente ligados. Esta indicação vem de estudos da QCD na rede a altas temperaturas, donde há evidências que as temperaturas críticas das transições de fase de desconfinamento dos quarks e da restauração da simetria quiral são muitos próximas uma da outra, se não forem iguais. Isto estaria significando que ambos fenômenos ocorrem na mesma escala de energias e, portanto, um modelo que não incorpore ambas características pode estar perdendo muito da física da QCD. Neste sentido, os modelos quirais tratados na Seção (2.1), os quais podem incorporar de maneira natural o confinamento, são muito interessantes e devem ser estudados com mais vigor.

Tomando o ordenamento de Wick na Eq. (2.96), temos que o Hamiltoniano ordenado normalmente para o modelo de NJL será dado pela soma de termos da forma dada na Eq. (2.43), mais termos devido à contribuição de diagramas "tadpolelike", os quais não foram considerados anteriormente. Isto se deve ao fato que para o modelo NJL, no termo de interação escalar (o termo proporcional a D_S), as matrizes C_a são dadas pelo produto das matrizes identidade 3×3 no espaço de cor, e 2×2 no espaço de sabor, de modo que $\mathrm{Tr}\,(C_a)\neq 0$.

A contribuição devido aos diagramas "tadpolelike" é dada por

$$\begin{aligned} H^T_{NJL} = & - :\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, \underline{\Psi^\dagger(\mathbf{x})\gamma^0\Psi(\mathbf{x})} D_S(\mathbf{x}-\mathbf{y})\underline{\Psi^\dagger(\mathbf{y})\gamma^0\Psi(\mathbf{y})}: \\ & - :\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, \underline{\Psi^\dagger(\mathbf{x})\gamma^0\Psi(\mathbf{x})} D_S(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Psi^\dagger(\mathbf{y})\gamma^0\Psi(\mathbf{y}): \\ & - :\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, \Psi^\dagger(\mathbf{x})\gamma^0\Psi(\mathbf{x}) D_S(\mathbf{x}-\mathbf{y})\underline{\Psi^\dagger(\mathbf{y})\gamma^0\Psi(\mathbf{y})}: \,. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Assim, a densidade de energia do vácuo, dada pela soma da Eq. (2.47) com o primeiro

termo da Eq. (2.98) acima, resulta em

$$\begin{aligned}\xi_{NJL} &= -\frac{2N}{(2\pi)^3}\int d^3k k\,\cos 2\phi(k) \\ &+ \frac{4GN}{(2\pi)^6}\int d^3k_1\, d^3k_2 \;-\; 2GN(2N+1)I^2\,,\end{aligned} \tag{2.99}$$

onde o termo de ordem N^2 vem da contribuição dos diagramas "tadpolelike", e I é definido como

$$I \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\mathrm{sen}2\phi(k)\,. \tag{2.100}$$

As funções $A(\mathbf{k})$ e $B(\mathbf{k})$, incluindo as contribuições dos dois últimos termos da Eq. (2.98), são dados por:

$$\begin{aligned}A(\mathrm{k}) &= 2G(2N+1)I \equiv M\,, \\ B(\mathrm{k}) &= k\,.\end{aligned} \tag{2.101}$$

Os termos "tadpolelike" contribuem com o termo $4GNI$ para $A(\mathbf{k})$ apenas.

Das das Eqs. (2.49,2.101), temos que a equação de "gap" de massa vem a ser

$$\mathrm{tg}2\phi(k) = \frac{2G(2N+1)I}{k} = \frac{M}{k}\,, \tag{2.102}$$

onde M é a massa dinamicamente gerada para os quarks. Portanto, como

$$\mathrm{tg}2\phi(k) = \frac{\sin 2\phi(k)}{\cos 2\phi(k)}\,, \tag{2.103}$$

e

$$\sin^2 2\phi(k) + \cos^2 2\phi(k) = 1\,, \tag{2.104}$$

temos que:

$$\sin 2\phi(k) = \frac{M}{\sqrt{k^2+M^2}}\,, \tag{2.105}$$

e

$$\cos 2\phi(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2+M^2}}\,. \tag{2.106}$$

A Eq. (2.102), juntamente com a Eq. (2.100), fornece a relação de autoconsistência

$$M = \frac{2G(2N+1)}{(2\pi)^3}\int^{\Lambda} d^3k\,\frac{M}{\sqrt{M^2+k^2}}\,. \tag{2.107}$$

Esta é exatamente a mesma relação de auto-consistência obtida por Nambu e Jona-Lasinio [5], Eq. (2.15).

A integral da Eq. (2.107) diverge quadraticamente. Para evitar esta divergência introduz-se um "cutoff" ultravioleta (Λ), o qual passa a ser um parâmetro do modelo, pois o modelo não é renormalizável. A equação de auto-consistência tem uma solução trivial, $M = 0$, e uma outra, não-trivial, $M \neq 0$:

$$\frac{2\pi^2}{G(2N+1)\Lambda^2} = \left(1+\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{M^2}{\Lambda^2}\ln\left[\frac{\Lambda}{M} + \left(1+\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{2.108}$$

a qual terá solução $M \neq 0$ se[5]

$$G\Lambda^2 > \frac{2\pi^2}{2N+1}.$$

Esta é a condição para a quebra de simetria, pois sendo $\alpha = G\Lambda^2$ menor que o valor crítico $\alpha_c = 2\pi^2/(2N+1)$, a equação de "gap" tem apenas a solução trivial $M = 0$, e a simetria quiral não é quebrada. Porém, para $\alpha > \alpha_c$ a massa dinamicamente gerada difere de zero e há quebra de simetria.

A diferença entre a densidade de energia do vácuo não trivial $\xi_{NJL}[\phi(k)]$ e do vácuo trivial $\xi_{NJL}[\phi(k)=0]$ é dada por

$$\Delta\xi_{NJL} = -\frac{2N}{(2\pi)^3}\int^{\Lambda} d^3k\,\left(\sqrt{k^2+M^2}-k\right) + \frac{N}{2G(2N+1)}M^2, \tag{2.109}$$

a qual, para as soluções desejadas, deve ser negativa. Deste modo, o vácuo gerado como um condensado de pares quark-antiquark tem energia mais baixa que o vácuo trivial e, portanto, pode ser considerado como o vácuo físico.

Adicionalmente, podemos calcular o parâmetro de ordem:

$$<\bar{\Psi}\Psi> \equiv <0|\Psi^{i\dagger}(x)\gamma^0\Psi^i(x)|0>. \tag{2.110}$$

Usando a expasão dos campos Ψ, Eq. (2.26), em termos dos espinores u e v, dados na Eq. (2.37), o parâmtero de ordem é dado por:

$$\begin{aligned} <\bar{\Psi}\Psi> &= -\frac{2N}{(2\pi)^3}\int^{\Lambda} d^3k\,\frac{M}{\sqrt{k^2+M^2}} \\ &= -\frac{3}{\pi^2}M\Lambda^2\left[\left(1+\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{M^2}{\Lambda^2}\ln\left[\frac{\Lambda}{M}+\left(1+\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Em nossa notação, $<\bar{\Psi}\Psi>=<\bar{u}u> + <\bar{d}d>$, onde u e d são os operadores de campo dos quarks "up" e "down", respectivamente.

A partir da Eq. (2.111), pode-se ver que quando não há quebra de simetria ($M = 0$), temos $< \bar{\Psi}\Psi >= 0$ e, quando M aumenta a partir de zero (há quebra de simetria), o parâmetro de ordem $< \bar{\Psi}\Psi >$ também aumenta. Por isso, $< \bar{\Psi}\Psi >$ pode ser interpretado como uma medida do grau de quebra de simetria.

O modelo de NJL tem dois parâmetros ajustáveis, G e Λ. A equação de autoconsistência, Eq. (2.108) relaciona G e Λ a M, a massa constituinte dos quarks. É claro que os parâmetros devem ser ajustados a dados experimentais. Os mais comumente empregados são o parâmetro de ordem $< \bar{\Psi}\Psi >$, a constante de decaimento do píon f_π, e a massa do píon m_π. A Ref. [24] apresenta um estudo detalhado do ajuste dos parâmetros do modelo NJL aos dados experimentais.

Capítulo 3

O Formalismo Fock-Tani

Neste capítulo, inicialmente será feita uma revisão do formalismo Fock-Tani tendo em vista sua aplicação para a interação $\pi - \pi$. Esta revisão está baseada nas referências [14] [17] [18]. Não vamos nos alongar no formalismo mais geral possível, mas sim vamos nos concentrar no formalismo para estados hadrônicos da forma do estado $|\Pi^a(\mathbf{p})>$ da seção anterior. Estados de três ou mais quarks, e estados contendo quarks e gluons, não são considerados aqui. O formalismo geral para tais estados pode ser encontrado na Ref. [18]. Após esta revisão, vamos obter o potencial efetivo méson-méson, o qual é o objetivo principal deste capítulo.

O capítulo está organizado como segue. Na seção 3.1 considera-se a transformação Fock-Tani e seu significado físico. Na seção 3.2 obtém-se os operadores de quark e antiquark transformados. Na seção 3.3 obtém-se o Hamiltoniano transformado Fock-Tani para o modelo de quarks, em particular, a interação efetiva méson-méson.

3.1 A Transformação Fock-Tani

Para que possamos definir a transformação de Fock-Tani, para um sistema envolvendo mesons, devemos considerar a representação do sistema no espaço de Fock, usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares, no caso quarks e antiquarks. Nesta representação os operadores de criação de um méson composto podem ser definidos em termos de um produto de operadores de criação de quarks e

antiquarks. Assim, sendo $|\alpha>$ o vetor de estado de um méson no estado α, pode-se escrever

$$|\alpha>= M_\alpha^\dagger|0> , \tag{3.1}$$

onde $M_\alpha^\dagger$ é o operador de criação de um méson composto e $|0>$ é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu|0>= \bar{q}_\nu|0>= 0 . \tag{3.2}$$

O operador $M_\alpha^\dagger$ é definido como

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger , \tag{3.3}$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do méson. O índice α indica os números quânticos do méson: $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$. Os índices μ e ν, por sua vez, indicam os números quânticos dos quarks: $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$.

É conveniente trabalhar com as funções de onda normalizadas de forma que

$$<\alpha|\beta>= \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} . \tag{3.4}$$

Com o operador de criação de um méson $M_\alpha^\dagger$ definido pela Eq. (3.3) e o operador de aniquilação M_α dado pelo conjugado Hermitiano da Eq. (3.3), podemos obter as relações de comutação destes operadores entre si e com os operadores de quarks. Fazendo uso das relações de anticomutação usuais para os operadores de quarks e antiquarks

$$\begin{aligned} &\{q_\mu, q_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0 , \\ &\{q_\mu, q_\nu^\dagger\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu} , \end{aligned} \tag{3.5}$$

juntamente com a condição de normalização da Eq. (3.4), temos que as relações de comutação dos operadores de mésons compostos são dadas por:

$$\begin{aligned} &[M_\alpha, M_\beta] = 0 , \\ &[M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\mu\sigma}\bar{q}_\sigma^\dagger\bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\rho\nu}q_\rho^\dagger q_\mu . \tag{3.7}$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned}
[q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0 \ , \\
[q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \delta_{\mu\mu'} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \bar{q}_\nu^\dagger \ , \\
[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\delta_{\nu\nu'} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} q_\mu^\dagger \ .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A presença do termo $\Delta_{\alpha\beta}$ na Eq. (3.6), bem como o fato de os dois últimos comutadores na Eq. (3.8) não se anularem, são uma expressão da natureza composta e da estrutura interna dos mesons. A existência do termo $\Delta_{\alpha\beta}$ na Eq. (3.6) complica em muito os problemas em que os graus de liberdade internos dos mesons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos (funções de Green, teorema de Wick, etc.) são desenvolvidas para operadores satisfazendo relações de comutação (ou anticomutação) canônicas e, portanto, não podem ser aplicadas em tal sistema.

Seria desejável obtermos uma representação na qual os operadores de criação e aniquilação dos mesons satisfizessem as relações de comutação elementares de Bose. Este é o objetivo da transformação de Fock-Tani: partindo do espaço de Fock ordinário para o sistema, onde todos os operadores são dados em termos de $q, q^\dagger, \bar{q}$ e $\bar{q}^\dagger$, fazer uma mudança de representação de modo que os mesons compostos passem a ser representados por operadores de "mesons compostos ideais" satisfazendo relações de comutação canônicas.

Para que se possa introduzir os operadores de mesons compostos ideais que, por definição, comutam com os operadores de criação e aniquilação dos quarks e antiquarks, devemos aumentar o espaço de Fock original, pois não há neste espaço nenhum operador (com exceção de múltiplos do operador unidade) que satisfaça tais relações de comutação.

Assim, consideramos o espaço de Fock físico, indicado por $\mathcal{F}$, como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados da forma

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0> \ , \tag{3.9}$$

com l e m arbitrários.

Introduz-se, então, m_α e $m_\alpha^\dagger$ como os operadores de aniquilação e criação de mesons compostos ideais que, por definição, satisfazem as relações de comutação elementares de Bose

$$[m_\alpha, m_\beta] = 0 \ ,$$

$$[m_\alpha, m_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \; . \tag{3.10}$$

Estes operadores atuam em um espaço de Hilbert $\mathcal{M}$, o espaço de mesons ideais, completamente independente do espaço de Fock físico $\mathcal{F}$. Este espaço de mesons ideais é gerado por todas as combinações lineares de estados da forma

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0)_{\mathcal{M}} \; , \tag{3.11}$$

com n arbitrário e $|0)_{\mathcal{M}}$ o vácuo de $\mathcal{M}$, definido por

$$m_\alpha |0)_{\mathcal{M}} = 0 \; . \tag{3.12}$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado "espaço de estados ideais", como o produto direto dos espaços de Fock físico $\mathcal{F}$ e de mesons ideais $\mathcal{M}$. Representando o espaço de estados ideais por $\mathcal{I}$, temos: $\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}$. E o vácuo de $\mathcal{I}$ é dado por

$$|0) \equiv |0> \otimes |0)_{\mathcal{M}} \; . \tag{3.13}$$

Os operadores de quarks atuam em $|0>$ e os operadores de mesons ideais atuam em $|0)_{\mathcal{M}}$, de modo que temos

$$q_\mu |0) = \bar{q}_\nu |0) = m_\alpha |0) = 0 \; . \tag{3.14}$$

Desta forma, as relações de comutação da Eq. (3.10), inicialmente definidas em $\mathcal{M}$, passam a valer também em $\mathcal{I}$. Do mesmo modo, as relações de comutação das Eqs. (3.6)-(3.8), inicialmente definidas em $\mathcal{F}$, são válidas também em $\mathcal{I}$. Adicionalmente, em $\mathcal{I}$ temos que são válidas as relações

$$\begin{aligned} [q_\mu, m_\alpha] &= [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = 0 \\ [\bar{q}_\mu, m_\alpha] &= [\bar{q}_\mu, m_\alpha^\dagger] = 0 \; , \end{aligned} \tag{3.15}$$

as quais expressam a independência cinemática dos operadores de quark (antiquark) com relação a m_α e $m_\alpha^\dagger$.

Tendo aumentado o espaço de Fock original, de forma que o novo espaço comporte os operadores m_α e $m_\alpha^\dagger$ satisfazendo as relações de comutação desejadas, conforme as Eqs. (3.10,3.15), se faz necessário estabelecer uma correspondência um-para-um entre os

estados do espaço de Fock físico $\mathcal{F}$ e os estados de algum subespaço de $\mathcal{I}$. Esta correspondência pode ser estabelecida notando-se que, se $\mathcal{I}_o$ é um subespaço de $\mathcal{I}$ tal que

$$m_\alpha|\Omega>=0 \quad \forall\,\alpha\,, \qquad \text{ou} \qquad N_m|\Omega>=0\,, \tag{3.16}$$

para todo $|\Omega>\in\mathcal{I}_o$, onde N_m é o operador número total de mesons ideais

$$N_m=\sum_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha\,. \tag{3.17}$$

Então, há um isomorfismo trivial entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{I}_o$. De modo que, para cada estado $|\Omega>\in\mathcal{F}$ há um estado correspondente em $\mathcal{I}_o$. A Eq. (3.16) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em $\mathcal{I}$.

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, revela que em $\mathcal{I}_o$ os mesons ideais são modos redundantes, no sentido de estados totalmente desocupados. Estes mesons ideais adquirem sentido no momento em que se faz uma transformação unitária sobre um estado de um méson composto que, de algum modo, muda a representação para um estado de um méson ideal. É importante notar que satisfazer a condição de vínculo é necessário para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

Assim, deve-se encontrar uma transformação unitária U, a transformação Fock-Tani, tal que

$$M_\alpha^\dagger|0>\rightarrow U^{-1}M_\alpha^\dagger|0)=m_\alpha^\dagger|0)\,. \tag{3.18}$$

O operador U, que realiza esta transformação, é dado explicitamente por [14]

$$U=\exp\left(-\frac{\pi}{2}F\right)\,, \tag{3.19}$$

onde F, o gerador da transformação, é dado por:

$$F=\sum_\alpha\left(m_\alpha^\dagger M_\alpha-M_\alpha^\dagger m_\alpha\right)\,. \tag{3.20}$$

Conforme pode ser facilmente verificado fazendo uso da definição da exponencial como uma série de potências, e aplicando o gerador da transformação sucessivamente em $M_\alpha^\dagger|0)$, que:

$$\begin{aligned} U^{-1}M_\alpha^\dagger|0) &= \cos\frac{\pi}{2}\,M_\alpha^\dagger|0)+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m}_\alpha^\dagger|0) \\ &= m_\alpha^\dagger|0). \end{aligned}$$

Deve-se notar que o operador unitário U é definido em $\mathcal{I}$ e não pode ser definido $\mathcal{F}$. Contudo, U é definido em $\mathcal{I}_o$ que é isomórfico a $\mathcal{F}$.

Pode-se, agora, definir o espaço de de Fock-Tani $\mathcal{F}_{\rm FT}$, o espaço onde serão efetuados os cálculos, como o espaço imagem de $\mathcal{I}_o$. Simbolicamente a relação entre $\mathcal{F}_{\rm FT}$ e $\mathcal{I}_o$ pode ser escrita como

$$\mathcal{F}_{\rm FT} = U^{-1}\mathcal{I}_o \ . \tag{3.21}$$

Assim, o espaço $\mathcal{F}_{\rm FT}$ é o subespaço de $\mathcal{I}$ cujos vetores de estado $|\Omega)$ estão relacionados aos vetores de estado de $\mathcal{I}_o$ por

$$|\Omega> = U|\Omega) \Rightarrow |\Omega) = U^{-1}|\Omega>, \tag{3.22}$$

de modo que para todo e qualquer estado $|\Omega> \in \mathcal{I}_o$, há um estado correspondente $|\Omega) \in \mathcal{F}_{\rm FT}$. Assim sendo, qualquer cálculo efetuado no espaço físico é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani pois, sendo O um operador arbitrário, temos

$$<\Omega|O|\Omega'> = (\Omega|U^{-1}OU|\Omega') = (\Omega|O_{\rm FT}|\Omega') \ , \tag{3.23}$$

onde

$$O_{\rm FT} = U^{-1}OU \ , \tag{3.24}$$

é o operador transformado Fock-Tani. Além disso, os produtos escalares são preservados, pois a transformação Fock-Tani é uma transformação unitária:

$$<\Omega|\Omega'> = (\Omega|\Omega') \ . \tag{3.25}$$

Adicionalmente, temos que os estados pertencentes ao espaço $\mathcal{F}_{\rm FT}$ têm que satisfazer a condição subsidiária transformada:

$$U^{-1}m_\alpha U|\Omega) = 0 \quad \forall\, \alpha \ , \qquad |\Omega) \in \mathcal{F}_{\rm FT} \ , \tag{3.26}$$

ou, equivalentemente

$$U^{-1}N_\alpha U|\Omega) = 0 \ , \ \ |\Omega) \in \mathcal{F}_{\rm FT} \ . \tag{3.27}$$

Ainda que todos os cálculos efetuados em $\mathcal{F}_{\rm FT}$ sejam equivalentes àqueles efetuados em $\mathcal{F}$, a vantagem de trabalhar em $\mathcal{F}_{\rm FT}$ está em que neste espaço todos estados ligados são representados por operadores ideais, e os operadores $q, q^\dagger, \bar{q}$ e $\bar{q}^\dagger$ representam somente quarks e antiquarks não ligados. Assim, todos os operadores de criação e aniquilação em $\mathcal{F}_{\rm FT}$ satisfazem relações de (anti)comutação canônicas.

Finalmente, deve-se notar que a transformação Fock-Tani foi definida em termos da atuação do operador unitário U em estados de um único méson composto. Porém, quando atuando em estados contendo vários mesons compostos, $|\alpha_1,\cdots,\alpha_n>= M^\dagger_{\alpha_1}\cdots M^\dagger_{\alpha_n}|0)$, esta transformação não resulta, em geral, em um estado produto de mesons ideais da forma $m^\dagger_{\alpha_1}\cdots m^\dagger_{\alpha_n}|0)$, pois $U^{-1}M^\dagger_\alpha U$ difere de $m^\dagger_\alpha$ por uma série infinita contendo efeitos de quarks.

No entanto, estes termos contendo efeitos de quarks são esperados contribuir somente quando temos sistemas de altas densidades, de modo que para estados assintóticos (como é o caso para estados de espalhamento) vale a relação:

$$\begin{aligned} |\alpha_1,\cdots,\alpha_n>\to U^{-1}|\alpha_1,\cdots,\alpha_n> &= |\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \\ &= m^\dagger_{\alpha_1}\cdots m^\dagger_{\alpha_n}|0)\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Isto é o que se espera com base no fato que em estados assintóticos as funções de onda não se superpõem, de modo os mesons se comportam como se fossem partículas sem estrutura e o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ não contribui na relação de comutação da Eq. (3.6), o que imediatamente leva a relação da Eq. (3.28).

3.2 A Transformação Fock-Tani dos Operadores

Para implementarmos a transformação Fock-Tani devemos obter os operadores transformados. Uma vez que os operadores do modelo de quarks são sempre expressos em termos dos operadores de quark e antiquark, basta obtermos a transformação para estes. Assim, temos

$$\begin{aligned} q_{\rm FT} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\rm FT} &= U^{-1}\bar{q}U\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Os operadores de criação são dados de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (3.29) e lembrando que $U^{-1} = U^{\dagger}$.

Ao avaliarmos a Eq. (3.29) pelo método de multicomutadores, conforme a Eq. (2.36), obtemos séries infinitas que devido à presença do termo $\Delta_{\alpha\beta}$ na Eq. (3.6) são muito complicadas, de modo que a esperança de reconhecer os termos relevantes para o processo em questão é pequena. Porém, pode-se resolver a Eq. (3.29) iterativamente através do método de equações de movimento [14]. Neste método, para qualquer operador O, define-se:

$$O(t) = \exp(-tF) O \exp(tF) , \tag{3.30}$$

onde t é um parâmetro real (a notação t é adotada devido ao fato que a transformação é avaliada pelo método de equações de movimento, ainda que t seja um ângulo de rotação no espaço de Hilbert).

Diferenciando a expressão acima com relação a t, obtemos a equação de movimento para o operador O:

$$\frac{dO(t)}{dt} = [O(t), F] , \tag{3.31}$$

com a condição inicial

$$O(t=0) = O . \tag{3.32}$$

e com os operadores transformados Fock-Tani dados pelas soluções das Eqs. (3.31-3.32) quando $t = -\frac{\pi}{2}$:

$$O_{\rm FT} = U^{-1} O U = O(-\pi/2) . \tag{3.33}$$

Deste modo, usando a Eq. (3.31) e o gerador da transformação conforme dado na Eq. (3.20), temos que as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F] \\ &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu} \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t) , \end{aligned} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} &= [\bar{q}_\nu(t), F] \\ &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} q_\mu^\dagger(t) m_\alpha(t) . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Desde que as equações de movimento para q e $\bar{q}$ envolvem $m_\alpha(t)$, é necessário obter a equação de movimento para $m_\alpha(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F] \\ &= M_\alpha(t) \, . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}\frac{dM_\alpha(t)}{dt} &= [M_\alpha(t), F] \\ &= -[\delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}(t)]\, m_\beta(t) \, . \end{aligned} \tag{3.37}$$

As Eqs. (3.34)-(3.37), juntamente com suas Hermitianas conjugadas, formam um conjunto de equações diferenciais não lineares acopladas, e são tão difíceis de resolver quanto as expressões obtidas pela técnica de multicomutadores. Porém, notando que ao fazer uma aproximação de ordem zero (isto é, desprezando a estrutura do méson) os termos desprezados nas Eqs. (3.6,3.8) são potências positivas em Φ_α e Φ^*_α, é razoável supor que se possa resolver este conjunto de equações iterativamente, considerando cada um dos operadores como sendo uma soma de termos

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t) \, , \qquad & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t) \, , \\ m_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t) \, , \qquad & M_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(t) \, , \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde (i) indica a ordem dos operadores nas funções de onda de estado ligado Φ_α e Φ^*_α. Para que se tenha uma contagem de potências consistente com as Eqs. (3.36-3.37), as funções de onda implícitas, entrando por meio da definição da Eq. (3.3) para M_α e $M^\dagger_\alpha$, não devem contribuir para a contagem.

Os termos dependendo das funções de onda de estado ligado Φ_α e Φ^*_α entram no problema através de operadores, presentes no lado direito das Eqs. (3.6,3.8), que se anulam no limite de densidade zero, ou seja, quando não há superposição das funções de onda dos mésons e sua estrutura pode ser desprezada. Desta forma, a expansão da Eq. (3.38) pode ser considerada, neste sentido, como uma expansão na densidade do sistema.

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são dadas por:

$$\frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} = 0 \, ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 \ , \\
\frac{dM_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(0)}(t) \ , \\
\frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= M_\alpha^{(0)}(t) \ .
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Usando as condições iniciais, as soluções resultam em

$$\begin{aligned}
q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu \ , \\
\bar{q}_\nu^{(0)}(t) &= \bar{q}_\nu \ , \\
m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \text{sent} \ , \\
M_\alpha^{(0)}(t) &= M_\alpha \cos t - m_\alpha \text{sent} \ .
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Deve-se notar que as condições iniciais foram impostas sobre o termo de ordem zero na expansão da Eq. (3.38). Assim, para que esta expansão seja consistente com a Eq. (3.32), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem ≥ 1 que:

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\mu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = M_\alpha^{(i)}(t=0) = 0 \ , \text{ para } i \geq 1 \ . \tag{3.41}$$

Desde que o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ não contribui para as equações de movimento de primeira ordem, temos que estas são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \ , \\
\frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \ , \\
\frac{dM_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(1)}(t) \ , \\
\frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= M_\alpha^{(1)}(t) \ .
\end{aligned} \tag{3.42}$$

que, juntamente com as condições iniciais da Eq. (3.41), implicam em

$$\begin{aligned}
q_\mu^{(1)}(t) &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \left[m_\alpha \text{sent} + \mathrm{M}_\alpha \left(1 - \cos \mathrm{t}\right) \right] \ , \\
\bar{q}_\nu^{(1)}(t) &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger \left[m_\alpha \text{sent} + \mathrm{M}_\alpha \left(1 - \cos \mathrm{t}\right) \right] \ , \\
m_\alpha^{(1)}(t) &= 0 \ , \\
M_\alpha^{(1)}(t) &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Consideremos agora as equações de movimento de segunda ordem para m_α e M_α. Conforme pode ser visto da definição de $\Delta_{\alpha\beta}$, Eq. (3.7), este termo começa a contribuir em segunda ordem na função de onda de estado ligado, sendo que esta contribuição vem da substituição de $q, \bar{q}, q^\dagger$ e $\bar{q}^\dagger$ por seus termos de ordem zero. Assim, continuando a indicar por $\Delta_{\alpha\beta}$ o termo $\Delta^{(2)}_{\alpha\beta}$ temos que

$$\frac{dm^{(2)}_\alpha(t)}{dt} = M^{(2)}_\alpha(t) \ ,$$
$$\frac{dM^{(2)}_\alpha(t)}{dt} = -m^{(2)}_\alpha(t) + \Delta_{\alpha\beta} m^{(0)}_\beta(t) \ .$$

O termo $\Delta_{\alpha\beta}$ quebra a simetria das equações acima, de modo que obtemos duas equações diferenciais não homogêneas para $m^{(2)}_\alpha$ e $M^{(2)}_\alpha$. Estas equações podem ser facilmente resolvidas pelo método dos coeficientes indeterminados. Porém, estas originam termos seculares (funções não trigonométricas de t) que levam a dificuldades tais como discrepâncias "post-prior" na análise de espalhamento [26] [16].

Este problema é resolvido generalizando-se o gerador da transformação Fock-Tani F, tal que [15]:

$$F = \sum_\alpha \left(m^\dagger_\alpha O_\alpha - O^\dagger_\alpha m_\alpha \right) \ , \tag{3.44}$$

onde o operador O_α é uma função somente dos operadores de quarks e antiquarks, escolhido de tal forma que satisfaça relações de comutação canônicas, ou seja:

$$[O_\alpha, O_\beta] = 0 \ ,$$
$$[O_\alpha, O^\dagger_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \ . \tag{3.45}$$

Isto leva a equações de movimento simétricas para m_α e O_α em todas as ordens nas funções de onda de estado ligado Φ_α e Φ^*_α:

$$\frac{dm_\alpha(t)}{dt} = [m_\alpha(t), F] = O_\alpha(t) \ ,$$
$$\frac{dO_\alpha(t)}{dt} = [O_\alpha(t), F] = -m_\alpha(t) \ , \tag{3.46}$$

cujas soluções

$$m_\alpha(t) = O_\alpha \mathrm{sen\,t} + \mathrm{m}_\alpha \cos \mathrm{t} \ ,$$
$$O_\alpha(t) = O_\alpha \cos t - m_\alpha \mathrm{sen\,t} \ , \tag{3.47}$$

contém somente funções trigonométricas de t e, portanto, não introduzirão termos seculares nas expressões para q e $\bar{q}$.

O operador O_α é determinado iterativamente, ou seja ordem a ordem em Φ_α e Φ^*_α, de modo que O_α pode ser expandido como

$$O_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} O_\alpha^{(i)}(t) \,, \tag{3.48}$$

onde, novamente, (i) indica a ordem considerada em Φ_α e Φ^*_α. O termo de ordem zero é escolhido de modo a reproduzir os resultados da transformação Fock-Tani original, em ordem mais baixa. Deste modo $O_\alpha^{(0)} = M_\alpha$, e de (3.6)-(3.7) fica evidente que as relações de comutação (3.45) são satisfeitas somente até segunda ordem. Os demais termos $O_\alpha^{(i)}$ com $i \geq 2$, visto que não há nenhum termo indesejado de primeira ordem, são determinados de forma a cancelar os operadores indesejados até a orde (i) na direita da Eq. (3.45). Assim, até terceira ordem verifica-se que O_α é dado por [17]:

$$O_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M^\dagger_\beta[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma + \cdots \,, \tag{3.49}$$

onde $\cdots$ indica contribuições de quarta ordem ou maior. De modo que, com O_α dado pela Eq. (3.49), temos

$$\begin{aligned} [O_\alpha, O_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [O_\alpha, O^\dagger_\beta] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) \,, \end{aligned} \tag{3.50}$$

com $\mathcal{O}(\Phi^4)$ indicando contribuições de ordem superior ou igual a quatro nas funções de onda de estado ligado.

Antes de prosseguirmos, devemos observar que a equação de vínculo transformada Eq. (3.26), quando submetida a transformação Fock-Tani generalizada da Eq. (3.44), resulta na condição:

$$O_\alpha|\Omega) = 0 \quad \forall\, \alpha \,, \tag{3.51}$$

conforme pode ser visto de (3.47) com $t = -\frac{\pi}{2}$.

Portanto, para estados assintóticos Eq. (3.28), desde que O_α é uma função somente de ope-radores de quark e antiquark e, portanto, comuta com $m^\dagger_\alpha$, a condição de vínculo é

substituída pela condição que O_α aniquile o vácuo:

$$O_\alpha|0) = 0 \quad \forall\alpha\,. \tag{3.52}$$

Esta é, mais do que uma suposição razoável [18] a ser feita com base nos termos até terceira ordem para O_α, uma condição necessária a ser imposta sobre O_α se desejamos que o vácuo permaneça invariante sob a transformação Fock-Tani, pois somente no caso da Eq. (3.52) ser satisfeita teremos:

$$F|0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U|0) = |0)\,, \tag{3.53}$$

o que é uma propriedade extremamente importante para que possamos realizar os cálculos no espaço $\mathcal{F}_{\rm FT}$.

Assim, pode-se supor que $O_\alpha^{(i)}$, $i > 0$ possa sempre ser construído como um produto ordenado normalmente contendo sempre um operador de aniquilação na direita, de modo que a Eq. (3.52) seja satisfeita e, portanto, a equação de vínculo seja satisfeita trivialmente para estados assintóticos.

Adicionalmente, pode-se notar que

$$M_\alpha^\dagger|0) = O_\alpha^\dagger|0)\,, \tag{3.54}$$

o que até terceira ordem segue imediatamente da Eq. (3.49) e, de acordo com as observações acima, espera-se que se mantenha para qualquer ordem desejada. Desta forma a transformação Fock-Tani sobre um estado contendo um único méson composto pode ser escrita como

$$\begin{aligned} U^{-1}M_\alpha^\dagger|0) &= U^{-1}O_\alpha^\dagger|0) = U^{-1}O_\alpha^\dagger U|0) \\ &= m_\alpha^\dagger|0) \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde o último passo segue da eq. (3.47) com $t = -\frac{\pi}{2}$. Desta forma, nota-se que a transformação Fock-Tani generalizada mantém o significado físico da transformação original, dada pela Eq. 3.20).

Podemos, agora, considerar as equações de movimento de segunda ordem dadas pela tranformação Fock-Tani generalizada. Para m_α e O_α temos, diretamente da Eq. (3.46),

que

$$\frac{dm_\alpha^{(2)}(t)}{dt} = O_\alpha^{(2)}(t) \,,$$
$$\frac{dO_\alpha^{(2)}(t)}{dt} = -m_\alpha^{(2)}(t) \,. \tag{3.56}$$

Ao considerarmos as equações de movimento para os operadores q e $\bar{q}$, também temos que considerar as contribuições adicionais que advém da mudança do gerador da transformação. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} &= -\delta_{\mu\mu_1}\Big[\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(1)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1}\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(0)}(t)M_\gamma^{(0)}(t) \\ &- \frac{1}{2}\Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1}\Phi_\alpha^{\mu\nu_1}M_\gamma^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(0)}(t)m_\alpha^{(0)}(t)\Big] \,, \\ \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(t)}{dt} &= \delta_{\nu\nu_1}\Big[\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}q_{\mu_1}^{\dagger(1)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2}\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)M_\gamma^{(0)}(t)\bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \\ &- \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2}\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1}M_\alpha^{\dagger(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t)\bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t)\Big] \,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

As condições iniciais para $m_\alpha^{(i)}(t), q_\mu^{(i)}(t)$ e $\bar{q}_\nu^{(i)}(t)$ com $i \geq 1$ são dadas na Eq. (3.41). Porém, para $O_\alpha^{(i)}(t)$, temos que

$$O_\alpha^{(i)}(t=0) = O_\alpha^{(i)} \quad \forall\, i \tag{3.58}$$

onde $O_\alpha^{(i)}$ é o termo correspondente na Eq. (3.49). Assim, temos $O_\alpha^{(2)}(t=0) = \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta$ e, integrando as Eqs. (3.56,3.47), temos

$$\begin{aligned} m_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta \mathrm{sent} \,, \\ O_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta \cos t \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_\mu^{(2)}(t) &= \delta_{\mu\mu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1}\Phi_\beta^{\mu_1\nu_1}\Big[m_\alpha^\dagger M_\beta \mathrm{sent}\cos\mathrm{t} - \mathrm{m}_\alpha^\dagger \mathrm{m}_\beta \mathrm{sen}^2\mathrm{t} - \mathrm{M}_\alpha^\dagger \mathrm{M}_\beta(2 - 2\cos\mathrm{t} \\ &- \mathrm{sen}^2\mathrm{t}) - \mathrm{M}_\alpha^\dagger \mathrm{m}_\beta\,(2\mathrm{sent} - \mathrm{sent}\cos\mathrm{t})\Big] q_{\mu_2} \\ \bar{q}_\nu^{(2)}(t) &= \delta_{\nu\nu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2}\Phi_\beta^{\mu_1\nu_1}\Big[m_\alpha^\dagger M_\beta \mathrm{sent}\cos\mathrm{t} - \mathrm{m}_\alpha^\dagger \mathrm{m}_\beta \mathrm{sen}^2\mathrm{t} - \mathrm{M}_\alpha^\dagger \mathrm{M}_\beta(2 - 2\cos\mathrm{t} \\ &- \mathrm{sen}^2\mathrm{t}) - \mathrm{M}_\alpha^\dagger \mathrm{m}_\beta\,(2\mathrm{sent} - \mathrm{sent}\cos\mathrm{t})\Big] \bar{q}_{\nu_2} \,. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Do mesmo modo as equações de movimento de terceira ordem para os operadores de quarks e antiquarks são

$$\begin{aligned}
\frac{dq_\mu^{(3)}(t)}{dt} &= -\delta_{\mu\mu_1}\frac{1}{2}\left\{2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\left[\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(2)}(t)m_\alpha^{(0)}(t)+\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t)m_\alpha^{(2)}(t)\right]\right.\\
&+ \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1}\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1}\left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(1)}(t)M_\gamma^{(0)}(t)-M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(1)}(t)m_\gamma^{(0)}(t)\right]\\
&+ \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma}\Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma}\Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1}M_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_{\sigma_1}^{\dagger(0)}(t)M_\delta^{(0)}(t)m_\alpha^{(0)}(t)\\
&+ \Phi_\alpha^{\rho\sigma}\Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1}\Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1}M_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{\dagger(0)}(t)M_\delta^{(0)}(t)m_\alpha^{(0)}(t)\\
&- \left.\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1}\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t)\Delta_{\gamma\alpha}(t)m_\alpha^{(0)}(t)\right\},\\
\frac{d\bar{q}_\nu^{(3)}(t)}{dt} &= \delta_{\nu\nu_1}\frac{1}{2}\left\{2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\left[q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t)m_\alpha^{(2)}(t)+q_{\mu_1}^{\dagger(2)}(t)m_\alpha^{(0)}(t)\right]\right.\\
&+ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho\nu_1}\left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)M_\beta^{(0)}(t)-M_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)m_\beta^{(0)}(t)\right]\\
&- \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho\nu_1}\Phi_\gamma^{\rho_1\sigma}M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t)\\
&- \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho_1\sigma}\Phi_\gamma^{\rho\nu_1}M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t)\\
&+ \left.\Phi_\beta^{\rho\nu_1}q_\rho^{\dagger(0)}(t)\Delta_{\gamma\beta}(t)m_\beta^{(0)}(t)\right\}, \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

que podem ser integradas para dar

$$\begin{aligned}
q_\mu^{(3)}(t) &= \delta_{\mu\mu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\mu_1\sigma}\Phi_\gamma^{\rho\sigma_1}\bar{q}_{\sigma_1}^\dagger\left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \mathrm{sen}^3\mathrm{t}+\mathrm{M}_\alpha^\dagger \mathrm{M}_\beta \mathrm{m}_\gamma\left(\mathrm{sent}-\mathrm{sen}^3\mathrm{t}\right)\right.\\
&+ M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma\left(2\mathrm{sent}-\mathrm{sent}\cos\mathrm{t}-\mathrm{sen}^3\mathrm{t}\right)\\
&+ \left(M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma\right)\left(-\cos t+\cos^3 t\right)\\
&+ m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma\left(-\cos t+\cos^3 t+\mathrm{sen}^2\mathrm{t}\right)\\
&+ M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma\left(2-\cos t-\cos^3 t-\mathrm{sen}^2\mathrm{t}\right)\\
&+ \left.m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma\left(\mathrm{sent}-\mathrm{sent}\cos\mathrm{t}-\mathrm{sen}^3\mathrm{t}\right)\right]\\
&+ \delta_{\mu\mu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\Phi_\beta^{\rho\sigma_1}\bar{q}_{\nu_1}^\dagger\bar{q}_{\sigma_1}^\dagger\bar{q}_\sigma\left[2M_\beta\left(\cos t-1\right)-m_\beta\mathrm{sent}\right]\\
&+ \delta_{\mu\mu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\Phi_\beta^{\rho_1\sigma}\bar{q}_{\nu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho\left[2M_\beta\left(\cos t-1\right)-m_\beta\mathrm{sent}\right]\\
\bar{q}_\nu^{(3)}(t) &= -\delta_{\nu\nu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho\nu_1}\Phi_\gamma^{\rho_1\sigma}q_{\rho_1}^\dagger\left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \mathrm{sen}^3\mathrm{t}+\mathrm{M}_\alpha^\dagger \mathrm{M}_\beta \mathrm{m}_\gamma\left(\mathrm{sent}-\mathrm{sen}^3\mathrm{t}\right)\right.\\
&+ \left.M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma\left(2\mathrm{sent}-\mathrm{sent}\cos\mathrm{t}-\mathrm{sen}^3\mathrm{t}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma\right)\left(-\cos t + \cos^3 t\right) \\
&+ m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma\left(-\cos t + \cos^3 t + \mathrm{sen}^2\mathrm{t}\right) \\
&+ M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma\left(2 - \cos t - \cos^3 t - \mathrm{sen}^2\mathrm{t}\right) \\
&+ m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma\left(\mathrm{sent} - \mathrm{sent}\cos\mathrm{t} - \mathrm{sen}^3\mathrm{t}\right)\Big] \\
&+ \delta_{\nu\nu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\Phi_\beta^{\rho\sigma_1} q_{\mu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma \left[2M_\beta\left(1-\cos t\right) + m_\beta \mathrm{sent}\right] \\
&+ \delta_{\nu\nu_1}\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\Phi_\beta^{\rho_1\sigma} q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho \left[2M_\beta\left(1-\cos t\right) + m_\beta \mathrm{sent}\right] \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Em princípio, este processo pode ser continuado até qualquer ordem desejada, ainda que a complexidade das expressões obtidas para os operadores de quark e antiquark aumente muito com a ordem considerada. Porém, para que o método seja útil devemos ter que apenas os termos de ordem mais baixa devem ser suficientes para descrever os processos desejados. Verifica-se [14][17] que para obter uma interação efetiva méson-méson necessita-se ir somente até terceira ordem nos operadores de quarks transformados. Assim, os operadores transformados Fock-Tani que nos serão necessários são obtidos das Eqs. (3.40)-(3.61) mediante a substituição $t = -\frac{\pi}{2}$.

3.3 O Hamiltoniano Transformado Fock-Tani

Tendo obtido a tranformação Fock-Tani para os operadores de quark e antiquark, devemos agora obter o Hamiltoniano transformado. Para tanto, é necessário que tenhamos uma forma explícita para o Hamiltoniano em termos de $q, q^\dagger, \bar{q}$ e $\bar{q}^\dagger$.

Para as aplicações nesta dissertação, mais especificamente o espalhamento $\pi - \pi$ a baixas energias, os termos relevantes de Hamiltonianos da forma da Eq. (2.17) podem sempre ser colocados na forma:

$$
\begin{aligned}
H &= T(\mu)\, q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu)\, \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\, q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\
&+ \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\, \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\, q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma \,. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

Alguns outros termos presentes no Hamiltoniano da Eq. (2.17) contribuem para a interação entre mesons, mas não para a interação $\pi - \pi$ no limiar.

O Hamiltoniano transformado é obtido pela aplicação da transformação unitária U conforme indicado na Eq. (3.33). O Hamiltoniano original da Eq. (3.62) tem apenas operadores de quarks e antiquarks, de modo que a presença de mesons compostos não aparece explicitamente na álgebra dos observáveis. Após a transformação Fock-Tani, obtemos um Hamiltoniano que contém os operadores $q, q^\dagger, \bar{q}$ e $\bar{q}^\dagger$, sendo que agora estes representam apenas quarks e antiquarks não ligados. Adicionalmente, o Hamiltoniano transformado dependerá de m_α e $m_\alpha^\dagger$ representando os mesons compostos.

A estrutura geral do Hamiltoniano transformado $U^{-1}HU \equiv H_{\rm FT}$ é:

$$H_{\rm FT} = H_{\rm q} + H_{\rm m} + H_{\rm mq} \,, \tag{3.63}$$

onde $H_{\rm q}$ indica termos contendo somente operadores de quarks e antiquarks, $H_{\rm m}$ contém apenas operadores de mesons e $H_{\rm mq}$ indica termos contendo operadores de mesons e quarks. O procedimento para obter a Eq. (3.63) é substituir na Eq. (3.62) os operadores de quarks transformados e, então, colocar todos os operadores em ordem normal.

Vamos agora considerar cada um dos termos de (3.63) em separado. O termo $H_{\rm q}$ tem estrutura muito semelhante à Eq. (3.62), sendo dado por:

$$\begin{aligned} H_{\rm q} \;=\; & T(\mu)\, q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu)\, \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\, q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\, \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\, q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma \,. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Conforme pode ser visto na expressão acima (e na Eq. (3.65) abaixo), H e $H_{\rm q}$ diferem pela forma do termo de interação quark-antiquark. Como será visto logo abaixo, a interação quark-antiquark da Eq. (3.62) é capaz de formar estados ligados, enquanto que a interação quark-antiquark da Eq. (3.64) não é capaz, pois estes são tratados em separado pelo termo $H_{\rm m}$. Portanto, os operadores q e $\bar{q}$ presentes em H e $H_{\rm q}$ têm significados distintos, pois em $H_{\rm q}$ estes representam somente quarks e antiquarks não ligados.

Os primeiros quatro termos em $H_{\rm q}$ são obtidos diretamente da substituição em (3.62) dos operadores q e $\bar{q}$ pelos seus termos de ordem zero nas funções de onda de estado ligado. Por exemplo, o termo de interação quark-quark é obtido de $\frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\, q_\mu^{(0)\dagger} q_\nu^{(0)\dagger} q_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)}$.

O termo de interação quark-antiquark, $\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)$, é dado por [17]:

$$\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \;=\; [V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) - \Delta(\mu\nu;\mu'\nu')\, H(\mu'\nu';\sigma\rho) - H(\mu\nu;\sigma'\rho')\Delta(\sigma'\rho';\sigma\rho)$$

$$+ \quad \Delta(\mu\nu;\mu'\nu')\, H(\mu'\nu';\sigma'\rho')\Delta(\sigma'\rho';\sigma\rho)]\; q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma \;, \tag{3.65}$$

onde $\Delta(\mu\nu;\mu'\nu')$ é o "kernel de estado ligado"

$$\Delta(\mu\nu;\mu'\nu') = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu'\nu'} \;. \tag{3.66}$$

e $H(\mu\nu;\sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu;\mu'\nu') = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}\,[T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu') \;. \tag{3.67}$$

O primeiro termo da Eq. (3.65) vem da contribuição dos termos de ordem zero nas funções de onda de estado ligado para os operadores de quarks:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(0)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)} \;. \tag{3.68}$$

O segundo termo vem dos termos:

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(0)} \;, \quad T(\nu) q_\nu^{\dagger(1)} q_\nu^{(0)} \;, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)} \;. \tag{3.69}$$

O terceiro termo é dado pelo conjugado Hermitiano destes. O quarto termo vem dos termos:

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(1)} \;, \quad T(\nu) q_\nu^{\dagger(1)} q_\nu^{(1)} \;, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)} \;. \tag{3.70}$$

Seja $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ um autoestado do Hamiltoniano microscópico de quarks, isto é:

$$H(\mu\nu;\mu'\nu')\, \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} = \epsilon_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \;, \tag{3.71}$$

onde ϵ_α é a energia total do méson, dada por

$$\epsilon_\alpha = <\alpha|H|\alpha> \;. \tag{3.72}$$

Neste caso a Eq. (3.65) reduz-se a

$$\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \longrightarrow V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) - \sum_\alpha \epsilon_\alpha \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\alpha^{\sigma\rho} \;. \tag{3.73}$$

Esta modificação no potencial de interação quark-antiquark é tal que esta não é mais capaz de formar os estados ligados $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$. Isto fica evidente se notarmos que a Eq. (3.64),

juntamente com a Eq. (3.73), e usando a relação de ortonormalização dada pela Eq. (3.4), implicam em que:

$$<\alpha|H_{\rm q}|\alpha>=0\ , \tag{3.74}$$

onde $|\alpha>$ é o estado ligado de um quark e um antiquark dado pela Eq. (3.1).

Este fato de que a interação quark-antiquark remanescente não pode formar os estados ligados empregados na transformação unitária é uma realização explícita da idéia de quasi-partículas de Weinberg [19]. O formalismo de quasi-partículas de Weinberg foi introduzido com o objetivo de calcular amplitudes de espalhamento para potenciais muito fortes, para os quais a teoria de perturbação não pode ser empregada. Neste formalismo, partículas elementares fictícias são introduzidas na teoria, em correspondência direta com os estados ligados da teoria. Para que a física do problema não seja modificada, Weinberg argumenta que é necessário mudar simultaneamente o potencial. Como os estados ligados da teoria original são introduzidos como partículas elementares, o potencial modificado não deve produzir estes estados ligados. Portanto, o potencial modificado torna-se mais fraco e, por isso, a teoria de perturbação pode ser usada. No formalismo Fock-Tani, o potencial enfraquecido de Weinberg é realizado pelo potencial da Eq. (3.73).

Vamos agora considerar o termo do Hamiltoniano transformado (3.63) contendo somente operadores de mesons: $H_{\rm m}$. Este termo tem a forma

$$H_{\rm m}=T_{\rm m}+V_{\rm mm}\ , \tag{3.75}$$

onde $T_{\rm m}$ é um termo de energia de um único méson, e é dado por

$$\begin{aligned} T_{\rm m} &= \sum_{\alpha\beta}\Phi^{*\mu\nu}_{\alpha}\left\{\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}\left[T\left(\mu'\right)+T\left(\nu'\right)\right]+V_{q\bar{q}}\left(\mu\nu;\mu'\nu'\right)\right\}\Phi^{\mu'\nu'}_{\beta}m^{\dagger}_{\alpha}m_{\beta} \\ &= \sum_{\alpha\beta}\Phi^{*\mu\nu}_{\alpha}H(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi^{\mu'\nu'}_{\beta}m^{\dagger}_{\alpha}m_{\beta}\ . \end{aligned} \tag{3.76}$$

Nesta expressão, os termos proporcionais a $T(\mu)$ vêm de:

$$T(\mu)q^{\dagger(1)}_{\mu}q^{(1)}_{\mu}\ , \tag{3.77}$$

e o proporcional a $V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)$ vem de:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger(1)}_{\mu}\bar{q}^{\dagger(0)}_{\nu}\bar{q}^{(0)}_{\rho}q^{(1)}_{\sigma}\ . \tag{3.78}$$

Se Φ_α é um autoestado do Hamiltoniano microscópico de quarks, Eq. (3.71), temos que o termo $T_{\rm m}$ reduz-se ao seguinte:

$$T_{\rm m} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha \ . \tag{3.79}$$

O termo $V_{\rm mm}$ em (3.75) é uma interação efetiva méson-méson:

$$V_{\rm mm} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\rm mm}(\alpha\beta;\gamma\delta) m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma \ , \tag{3.80}$$

onde $V_{\rm mm}(\alpha\beta;\gamma\delta)$ é dado por:

$$\begin{aligned} V_{\rm mm}(\alpha\beta;\gamma\delta) \ = \ & -\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{*\rho\sigma} H(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi_\delta^{\mu'\sigma}\Phi_\gamma^{\rho\nu'} - \Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} H(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi_\delta^{\mu'\nu'}\Phi_\gamma^{\rho\sigma} \\ & - \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi_\delta^{\mu'\sigma}\Phi_\gamma^{\rho\nu'} - \Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi_\delta^{\mu'\nu'}\Phi_\gamma^{\rho\sigma} \\ & - \Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho;\mu'\rho')\Phi_\delta^{\mu'\nu}\Phi_\gamma^{\rho'\sigma} - \Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu;\sigma'\nu')\Phi_\delta^{\mu\nu'}\Phi_\gamma^{\rho\sigma'} \\ & + 2\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi_\delta^{\rho\nu'}\Phi_\gamma^{\mu'\sigma} + \Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho;\mu'\rho')\Phi_\delta^{\rho'\nu}\Phi_\gamma^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu;\sigma'\nu')\Phi_\delta^{\rho\nu'}\Phi_\gamma^{\mu\sigma'} \ . \end{aligned} \tag{3.81}$$

Os termos proporcionais a $T(\mu)$ que contribuem para os dois primeiros termos acima através de $H(\mu\nu;\mu'\nu')$ vêm de:

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(3)} q_\mu^{(1)} + \text{h.c.} \ , \tag{3.82}$$

onde h.c. significa Hermitiano conjugado. Os termos proporcionais à interação quark-quark vêm de:

$$\frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} q_\nu^{\dagger(1)} q_\rho^{(1)} q_\sigma^{(1)} \ , \tag{3.83}$$

do mesmo modo os termos de interação antiquark-antiquark vêm de:

$$\frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \bar{q}_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\rho^{(1)} \bar{q}_\sigma^{(1)} . \tag{3.84}$$

Os termos de interação quark-antiquark vêm de

$$\left[V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)} + \text{h.c.}\right] \ , \qquad \left[V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)} + \text{h.c.}\right] \ , \tag{3.85}$$

os quais contribuem através de $H(\mu\nu;\mu'\nu')$ para os dois primeiros termos da Eq. (3.81), e para os terceiro e quarto termos desta mesma equação. Também há uma contribuição que vem de:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\rho^{(1)} q_\sigma^{(1)} \ . \tag{3.86}$$

É importante notar que esta interação efetiva méson-méson foi obtida através da expansão em funções Φ até a terceira ordem. Os termos de ordem mais alta contribuem para a interação méson-méson como correções de ortogonalidade aos termos acima [17]. Para o caso que estamos interessados nesta dissertação, espalhamento $\pi - \pi$ no limiar, a interação efetiva entre os pions se comporta como se fosse uma interação puntual, devido à natureza de bosons de Goldstone dos pions, e, portanto, correções de ortogonalidade não são importantes. No entanto, para espalhamento $\pi - \pi$ a energias acima do limiar, estas correções podem contribuir de maneira importante.

Finalmente, o termo do Hamiltoniano transformado contendo operadores de quarks e mesons não será considerado explicitamente aqui, pois não contribuem para o espalhamento $\pi - \pi$ no limiar, como será discutido no próximo capítulo. Apenas a título de ilustração, mostramos aqui um termo típico de $H_{\rm mq}$. O termo:

$$H_{\rm mm\to q\bar{q}q\bar{q}} = \frac{1}{2} V^{\mu\nu\sigma\rho}_{\alpha\beta} q^\dagger_\mu \bar{q}^\dagger_\nu q^\dagger_\rho \bar{q}^\dagger_\sigma m_\beta m_\alpha \,, \tag{3.87}$$

onde

$$V^{\mu\nu\sigma\rho}_{\alpha\beta} = V^{\mu\rho\mu'\sigma'}_{\rm qq} \Phi^{\rho'\sigma}_{\alpha} \Phi^{\mu'\nu}_{\beta} + V^{\nu\sigma\nu'\sigma'}_{\bar{q}\bar{q}} \Phi^{\mu\sigma'}_{\alpha} \Phi^{\rho\nu'}_{\beta} + 2 V^{\mu\sigma\mu'\nu'}_{q\bar{q}} \Phi^{\mu'\nu}_{\alpha} \Phi^{\rho\nu'}_{\beta} \,, \tag{3.88}$$

representa a quebra de dois mesons em dois quarks e dois antiquarks. Num modelo que incorpore o confinamento dos quarks, este termo somente contribuirá quando iterado com o seu Hermitiano conjugado, o qual representa a recombinação de dois quarks e dois antiquarks em dois mesons.

O formalismo necessário para tratar o espalhamento $\pi - \pi$ a baixas energias foi apresentado nas seções acima. No próximo capítulo vamos colocar este formalismo no contexto dos modelos de quarks quirais apresentados no capítulo anterior.

Capítulo 4

Espalhamento $\pi - \pi$ no Formalismo Fock-Tani

Neste Capítulo vamos empregar o formalismo Fock-Tani para o espalhamento $\pi - \pi$ a baixas energias empregando os modelos quirais descritos no Capítulo 2. O objetivo maior de tal estudo é investigar as interações entre hadrons a baixas energias, empregando o formalismo Fock-Tani, no contexto de modelos quirais formulados em termos dos graus de liberdade de quarks. Um estudo tal tem a pretensão de ser mais fundamental do que a teoria de perturbação quiral (TPQ), na qual são empregadas Lagrangianas fenomenológicas contendo um número infinito de constantes de acoplamento. Na formulação da TPQ, os processos hadrônicos são calculados perturbativamente em potências da energia dos hadrons; a medida que novos gráficos de ordem mais alta na energia são calculados, novas constantes de acoplamento são necessárias. Essas constantes de acoplamento, que em prinçípio são fixadas pela QCD, são determinadas experimentalmente fitando alguns observáveis. Há uma limitação de ordem prática, qual seja, o aumento brutal do número de gráficos a serem levados em conta à medida que processos a mais altas energias são considerados. O emprego do formalismo Fock-Tani serviria para transferir a ignorância das constantes de acoplamento da TPQ para os parâmetros do modelo de quarks microscópico, bem como a complicação do acúmulo do número de diagramas a ser considerado com o aumento da energia.

Para evitar o número infinito de constantes de acoplamento da TPQ, Weinberg, em seu memorável artigo de 1979 [28], sugere empregar um formalismo similar ao das quasi-partículas, por ele desenvolvido nos anos 60 [19]. Especificamente, Weinberg imagina que seria possível "enfraquecer" as forças da QCD através da introdução de um "cutoff" in-

fravermelho λ, preservando o conteúdo físico da teoria pela introdução dos estados ligados da teoria como partículas elementares fictícias. Estes estados ligados nada mais são do que os hadrons ordinários, os quais devem ser descritos por uma Lagragiana quiral fenomenológica. Os parâmetros desta Lagrangiana fenomenológica teriam que ser funções de λ, definidas por equações diferenciais que garantam a independência da matriz S do parâmetro λ, com a condição inicial de que a teoria no limite de $\lambda \to 0$ seja a QCD. A expectativa seria que a baixas energias, poder-se-ia estender as soluções destas equações para um valor de λ tal que se pudesse empregar a teoria de perturbação.

Nesta dissertação, a formulação do problema das interações hadrônicas através do formalismo Fock-Tani é, obviamente, menos pretenciosa que a ideia de Weinberg discutida acima. Em primeiro lugar, não empregamos a QCD diretamente, mas sim modelos de quarks. Também, não relacionamos os parâmetros dos modelos de quarks aos parâmetros fundamentais da QCD, tais como a constante quark-glúon e o parâmetro de escala Λ_{QCD}. Portanto, nosso estudo aqui deve ser entendido como um passo intermediário tendo em vista o objetivo maior.

Especificamente, o objetivo aqui é efetuar um estudo exploratorio a respeito da viabilidade prática de se calcular a amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ através do formalismo Fock-Tani empregando modelos de quarks, como os discutidos no Capítulo 2. Para tal, vamos calcular a amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ no limiar, empregando como modelo de quarks o modelo de Nambu–Jona-Lasinio. Através do emprego da propriedade de "crossing" da amplitude de espalhamento, o cálculo pode ser estendido para energias além do limiar. Para tal, vamos usar uma técnica similar à que Weinberg empregou em 1966 [20] para estudar o espalhamento $\pi - \pi$ a baixas energias no contexto das álgebras de corrente. Em princípio, tanto o formalismo Fock-Tani quanto o modelo de NJL, não são fatores limitantes para o estudo do espalhamento a energias muito além do limiar. Efetuamos o cálculo no limiar devido a duas razões importantes. A razão determinante é que para energias acima do limiar, é necessário o emprego de cálculos numéricos muito extensos. A segunda razão é que a amplitude $\pi - \pi$ a energias baixas pode ser calculada analiticamente empregando o modelo NJL e, por isso, pode ser imediatamente comparada com o resultado da álgebra de correntes derivado por Weinberg.

Na próxima Seção vamos discutir a preservação da simetria quiral frente ao truncamento da transformação unitária de Fock-Tani. Na Seção 4.2 vamos discutir o espalhamento de mesons compostos no formalismo de Fock-Tani e apresentar algumas fórmulas gerais da teoria do espalhamento. Nesta mesma Seção vamos também discutir a propriedade de "crossing" da matriz de espalhamento. A matriz de espalhamento para espalhamento $\pi - \pi$ a baixas energias, empregando o formalismo Fock-Tani, será apresentada na Seção 4.3.

4.1 O Formalismo Fock-Tani e a Simetria Quiral

O modelo de quarks considerado no capítulo 2 tem como principal objetivo considerar algumas conseqüências da quebra dinâmica da simetria quiral. Assim sendo, é importante saber como a transformação Fock-Tani preserva a simetria quiral do Hamiltoniano. Esta questão seria trivial se a transformação tivesse sido implementada sem truncamentos, já que a transformação é unitária, por construção:

$$U^{-1}\left[H,\, Q^{5a}\right]U = \left[U^{-1}HU,\, U^{-1}Q^{5a}U\right] = 0. \tag{4.1}$$

Ocorre, porém, que ao avaliarmos a transformação FT sobre o Hamiltoniano de quarks consideramos os operadores transformados como uma série de potências na função de onda de estado ligado e esta série foi truncada em Φ^3.

Como o Hamiltoniano transformado H_{FT} foi calculado com termos até a ordem Φ^3, a questão importante a ser analisada é se a transformação é consistente, no sentido de que H_{FT} é invariante quiral até a ordem de $\mathcal{O}(\Phi^3)$. Ou seja, como a transformação FT foi truncada em termos $\mathcal{O}(\Phi^3)$, eventuais termos que não preservam a invariância quiral devem ser, no mínimo de ordem $\mathcal{O}(\Phi^4)$.

O Hamiltoniano microscópico de quarks, dado pela Eq. (2.17):

$$H = \int d^3x\ \Psi^\dagger(\mathrm{x})\,(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\Psi(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\int d^3x\ d^3y\ J_a^\mu(\mathrm{x})D_{\mu\nu}^{ab}(\mathrm{x}-\mathrm{y})J_b^\nu(\mathrm{y})\,, \tag{4.2}$$

é invariante quiral porque comuta com o gerador da simetria Q^{5a}:

$$Q^{5a} = \int d^3x\ \Psi^\dagger(\mathrm{x})\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\Psi(\mathrm{x})\,. \tag{4.3}$$

Isto é:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[H,\, Q^{5a}\right] \\ &= \int d^3x\, d^3x' \left[\Psi^\dagger(\mathrm{x})\,(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\,\Psi(\mathrm{x}),\ \Psi^\dagger(\mathrm{x}')\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\Psi(\mathrm{x}')\right] \\ &+ \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, d^3x' \left[J^\mu_a(\mathrm{x})D^{ab}_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})J^\nu_b(\mathrm{y}),\ \Psi^\dagger(\mathrm{x}')\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\Psi(\mathrm{x}')\right] . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para provar isso, faz-se uso das relações de anticomutação dos campos fermiônicos:

$$\begin{aligned} &\{\Psi^i_\alpha(x), \Psi^{j\dagger}_\beta(y)\} = \{\Psi^{i\dagger}_\alpha(x), \Psi^j_\beta(y)\} = 0\,, \\ &\{\Psi^i_\alpha(x), \Psi^{j\dagger}_\beta(y)\} = \delta^{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sob a transformação FT, temos que a equação que garante a invariancia quiral do Hamiltoniano fica sendo:

$$\begin{aligned} U^{-1}\left[H, Q^{5a}\right]U &= \left[U^{-1}HU, U^{-1}Q^{5a}U\right] \\ &= \int d^3x\, d^3x' \left[\Psi^\dagger_{FT}(\mathrm{x})\,(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\,\Psi_{FT}(\mathrm{x}), {\Psi^i_{FT}}^\dagger(\mathrm{x}')\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\Psi^i_{FT}(\mathrm{x}')\right] \\ &+ \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, d^3x' \left[J^\mu_a(\mathrm{x})D^{ab}_{\mu\nu}(\mathrm{x}-\mathrm{y})J^\nu_b(\mathrm{y}), {\Psi^i_{FT}}^\dagger(\mathrm{x}')\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\Psi^i_{FT}(\mathrm{x}')\right] . \end{aligned}$$

Portanto, precisamos provar que a expressão acima difere de zero por termos $\mathcal{O}(\Phi^4)$. Para tal, precisamos provar que as relações de anticomutação dos campos de quarks são preservadas até $\mathcal{O}(\Phi^3)$ sob a transformação FT .

Os campos de quarks $\Psi(\mathrm{x})$ foram transformados de acordo com:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathrm{x}) \to \Psi_{FT}(\mathrm{x}) &= U^{-1}\Psi(\mathrm{x})U \\ &= \sum_m \Psi^{(m)}(\mathrm{x})\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde

$$\Psi^{(m)}(\mathrm{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k\, \left\{u_s(\mathrm{k})q^{(m)}_s(\mathrm{k}) + v_s(-\mathrm{k})\bar{q}^{\dagger(m)}_s(-\mathrm{k})\right\} e^{i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}}\,, \tag{4.7}$$

sendo que o índice (m) indica a ordem considerada na função de onda de estado ligado Φ.

Devido a (4.7), temos que a relação de anticomutação Eq. (4.5) sob a transformação FT é:

$$\left\{(\Psi_{FT})_\alpha(\mathrm{x}), (\Psi^\dagger_{FT})_\beta(\mathrm{y})\right\} = \sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\Psi^{(p)}_\alpha(\mathrm{x}), \Psi^{\dagger(q)}_\beta(\mathrm{y})\right\}\,. \tag{4.8}$$

O anticomutador do lado direito na expressão acima pode ser colocado em termos de anticomutadores de quarks usando-se (4.7), de modo que temos:

$$\begin{aligned}\left\{\Psi_\alpha^{(p)}(\mathbf{x}), \Psi_\beta^{\dagger(q)}(\mathbf{y})\right\} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{p,q}\int d^3k_1\, d^3k_2\, e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{y})}\Big[u_{s_1\alpha}(\mathbf{k}_1)u^\dagger_{s_2\beta}(\mathbf{k}_2)\\
&\times \{q^{(p)}_{s_1}(\mathbf{k}_1), q^{\dagger(q)}_{s_2}(\mathbf{k}_2)\} + u_{s_1\alpha}(\mathbf{k}_1)v^\dagger_{s_2\beta}(-\mathbf{k}_2)\{q^{(p)}_{s_1}(\mathbf{k}_1), \bar{q}^{(q)}_{s_2}(-\mathbf{k}_2)\}\\
&+ v_{s_1\alpha}(\mathbf{k}_1)u^\dagger_{s_2\beta}(\mathbf{k}_2)\{\bar{q}^{\dagger(p)}_{s_1}(-\mathbf{k}_1), q^{\dagger(q)}_{s_2}(\mathbf{k}_2)\} + v_{s_1\alpha}(\mathbf{k}_1)v^\dagger_{s_2\beta}(\mathbf{k}_2)\\
&\times \{\bar{q}^{\dagger(p)}_{s_1}(-\mathbf{k}_1), \bar{q}^{(q)}_{s_2}(-\mathbf{k}_2)\}\Big]\ . \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Estes anticomutadores podem ser calculados ordem a ordem em Φ empregando as expressões dadas no Capítulo 3 para os operadores de criação de quarks e anitiquarks transformados FT.

Os comutadores de ordem zero em Φ resultam na relação de anticomutação usual para os operadores de campo, conforme pode ser visto da Eq. (3.40):

$$q^{(0)}_\mu(t) = q_\mu\ ,$$
$$\bar{q}^{(0)}_\nu(t) = \bar{q}_\nu\ ,$$

onde voltamos a usar os índices μ e ν para indicar os números quânticos dos quarks.

Para os termos de ordem (1), temos:

$$\{q^{(0)}_\mu, q^{\dagger(1)}_\nu\} + \{q^{(1)}_\mu, q^{\dagger(0)}_\nu\} = -2\Delta(\mu\nu_2;\nu\nu_2)\bar{q}^\dagger_{\nu_1}\bar{q}_{\nu_2}\ ,$$

$$\{q^{(0)}_\mu, \bar{q}^{(1)}_\nu\} + \{q^{(1)}_\mu, \bar{q}^{(0)}_\nu\} = 0\ .$$

O termos de ordem (2) são dados por:

$$\{q^{(1)}_\mu, q^{\dagger(1)}_\nu\} + \{q^{(0)}_\mu, q^{\dagger(2)}_\nu\} + \{q^{(2)}_\mu, q^{\dagger(0)}_\nu\} = 2\Delta(\mu\nu_1;\nu\nu_2)\bar{q}^\dagger_{\nu_1}\bar{q}_{\nu_2} + \mathcal{O}(\Phi^4)$$

$$\begin{aligned}\{q^{(1)}_\mu, \bar{q}^{(1)}_\nu\} + \{q^{(0)}_\mu, \bar{q}^{(2)}_\nu\} + \{q^{(2)}_\mu, \bar{q}^{(0)}_\nu\} &= 2\Phi^{\mu\nu_1}_\alpha\Delta(\mu_1\nu;\mu_2\nu_1)q^\dagger_{\mu_1}q_{\mu_2}m_\alpha\\
&- 2\Delta(\mu\nu_1;\mu_1\nu_2)\Phi^{\mu_1\nu}_\alpha\bar{q}^\dagger_{\nu_1}\bar{q}_{\nu_2}m_\alpha + \mathcal{O}(\Phi^4)\ .\end{aligned}$$

Finalmente, os termos de ordem (3) são dados por:

$$\{q_\mu^{(2)}, q_\nu^{\dagger(1)}\} + \{q_\mu^{(1)}, q_\nu^{\dagger(2)}\} + \{q_\mu^{(0)}, q_\nu^{\dagger(3)}\} + \{q_\mu^{(3)}, q_\nu^{\dagger(0)}\} = \mathcal{O}(\Phi^4)$$

$$\begin{aligned}\{q_\mu^{(2)}, \bar{q}_\nu^{(1)}\} + \{q_\mu^{(1)}, \bar{q}_\nu^{(2)}\} + \{q_\mu^{(0)}, \bar{q}_\nu^{(3)}\} + \{q_\mu^{(3)}, \bar{q}_\nu^{(0)}\} &= -2\Phi_\alpha^{\mu\nu_1}\Delta(\mu_1\nu;\mu_2\nu_1)q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2} m_\alpha \\ &+ 2\Delta(\mu\nu_1;\mu_1\nu_2)\Phi_\alpha^{\mu_1\nu}\bar{q}_{\nu_1}^\dagger \bar{q}_{\nu_2} m_\alpha \\ &+ \mathcal{O}(\Phi^4)\,,\end{aligned}$$

Termos da forma $\{\bar{q}_\mu^{\dagger(p)}, \bar{q}_\nu^{(q)}\}$ e $\{\bar{q}_\mu^{\dagger(p)}, q_\nu^{\dagger(q)}\}$ podem ser obtidos dos termos acima por conjugação Hermitiana destes. Não há necessidade de considerarmos os demais comutadores que contribuem para a Eq. (4.9), visto que estes já são diretamente de ordem maior do que três.

Como pode ser visto, somando-se todos os anticomutadores de quarks de uma dada ordem (m) os termos em Φ^m cancelam-se, de modo que sobram apenas termos de ordem $> m$. Deste modo, temos que:

$$\left\{(\Psi_{FT}^i)_\alpha(\mathbf{x}), (\Psi_{FT}^{j\dagger})_\beta(\mathbf{y})\right\} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\Phi^4)\,. \tag{4.10}$$

Seguindo um procedimento análogo ao resumido acima obtem-se:

$$\left\{(\Psi_{FT}^i)_\alpha(\mathbf{x}), (\Psi_{FT}^j)_\beta(\mathbf{y})\right\} = \mathcal{O}(\Phi^4)\,. \tag{4.11}$$

Isto prova que a transformação FT preserva a invariância quiral.

4.2 Espalhamento Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani

Consideremos o espalhamento méson-méson:

$$A + B \longrightarrow C + D\,. \tag{4.12}$$

Sejam os estados iniciais e finais, $|i>$ e $|f>$, dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}|i> &= |A, B> \equiv M_A^\dagger M_B^\dagger |0> \\ |f> &= |C, D> \equiv M_C^\dagger M_D^\dagger |0>\,,\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $M_A^\dagger, \cdots$ são os operadores de criação dos mesons $A, \cdots$:

$$|A>= M_A^\dagger|0>, \cdots . \tag{4.14}$$

Suponhamos que operador $M_A^\dagger$ seja definido como na Eq. (3.3):

$$M_A^\dagger = \Phi_A^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger , \tag{4.15}$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do méson. O índice α indica os números quânticos do méson: $A = \{\text{espacial}, \text{spin}, \text{isospin}\}$. Os índices μ e ν, por sua vez, indicam os números quânticos dos quarks: $\mu, \nu = \{\text{espacial}, \text{spin}, \text{sabor}, \text{cor}\}$. Estes estados de um méson são normalizados como:

$$< A|A' >= \delta_{AA'} . \tag{4.16}$$

A matriz S_{fi} para o espalhamento da Eq. (4.12) é dada por

$$S_{fi} =< f, out|i, in > , \tag{4.17}$$

onde *in* e *out* indicam passado e futuro remoto, respectivamente. Assim, desde que a transformação FT é unitária, temos que no espaço $\mathcal{F}_{FT}$:

$$S_{fi} = (f, out|i, in) . \tag{4.18}$$

onde os estados $|i, in)$ e $|f, out)$ são os estados transformados FT:

$$\begin{aligned} |i, in) &= U^{-1}|i, in > , \\ |f, out) &= U^{-1}|f, out > , \end{aligned} \tag{4.19}$$

Da Eq. (4.18) segue que, em primeira aproximação de Born, o elemento de mariz S_{fi} é dado, na representação Fock-Tani, por:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)\delta(E_f - E_i)(f|V_{FT}|i) , \tag{4.20}$$

onde E_i e E_f são as energias totais dos estados $|i)$ e $|f)$, respectivamente, que são os estados transformados FT de $|i >$ e $|f >$ e, desde que os estados $|A, B >$ e $|C, D >$ na Eq. (4.13)

são assintóticos, temos que

$$\begin{aligned} |i) &= U^{-1}|i> = U^{-1}M_A^\dagger M_B^\dagger|0> \\ &= U^{-1}M_A^\dagger UU^{-1}M_B^\dagger UU^{-1}|0> \\ &= m_A^\dagger m_B^\dagger|0) \,, \\ |f) &= m_C^\dagger m_D^\dagger|0) \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

V_{FT} na Eq. (4.20) é o Hamiltoniano de interação transformado FT $\mathcal{O}(\Phi^3)$, e é dado pela expressão Eq. (3.80):

$$V_{FT} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\rm mm}(\alpha\beta;\delta\gamma) m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma m_\delta \,, \tag{4.22}$$

onde $V_{\rm mm}(\alpha\beta;\gamma\delta)$ é dado pela Eq. (3.81).

Ao se calcular explicitamente o elemento de matriz $(f|V_{FT}|i)$, usando a expressão da Eq. (4.22), obtem-se uma função delta de Dirac, a qual representa a conservação de momentum no processo, que pode ser fatorada como:

$$(f|V_{FT}|i) = \delta^{(3)}(\mathrm{p}_A + \mathrm{p}_B - \mathrm{p}_C - \mathrm{p}_D) h_{fi} \,, \tag{4.23}$$

onde h_{fi} é uma função dos momenta assintóticos. Com isto, temos que a matriz S_{fi} da Eq. (4.20) pode ser escrita como:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)\delta(E_f - E_i)\delta^{(3)}(\mathrm{p}_A + \mathrm{p}_B - \mathrm{p}_C - \mathrm{p}_D) h_{fi} \,. \tag{4.24}$$

Por outro lado, a matriz S_{fi} para o espalhamento $\pi - \pi$, que é o objeto de nosso interesse, é escrita em termos da matriz invariante de Lorentz $\mathcal{M}_{fi}$ como*:

$$S = 1 + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}(2\pi)^{-6}(16E_AE_BE_CE_D)^{-1/2} \,, \tag{4.25}$$

onde os estados mesônicos são normalizados covariantemente como:

$$<A|A'> = 2E_A(2\pi)^3\delta_{AA'} \,. \tag{4.26}$$

Comparando esta última equação com a Eq. (4.16), vemos que [31]:

$$\mathcal{M}_{fi} = -(2\pi)^3(16E_AE_BE_CE_D)^{1/2}h_{fi} \,. \tag{4.27}$$

*Note que esta definição envolve $+i$, ao invés de $-i$ como na Ref. [29].

Para o que segue na próxima Seção, é conveniente definir as varáveis de Mandelstan s, t e u:

$$s = (p_A + p_B)^2, \qquad t = (p_A - p_C)^2, \qquad u = (p_A - p_D)^2 \quad . \tag{4.28}$$

Para o caso em que a massas dos quatro bósons são iguais, $m_A = m_B = m_C = m_D \equiv M$, temos que:

$$s + t + u = 4M^2 \; . \tag{4.29}$$

Por completeza, vamos apresentar as fórmulas das seções de choque diferenciais e totais escritas em termos de h_{fi}. Temos que [31]:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{c.m} = \frac{1}{64\pi^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \pi^4 \, s \, |h_{fi}|^2 \; , \tag{4.30}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s(s-4M^2)}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{4\pi^5 s}{(s-4M^2)}|h_{fi}|^2 \; , \tag{4.31}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{16\pi s(s-4M^2)} \int_{-(s-4M^2)}^{0} dt \; |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{4\pi^5 s}{(s-4M^2)} \int_{-(s-4M^2)}^{0} dt \; |h_{fi}|^2 \; . \end{aligned} \tag{4.32}$$

O elemento de matriz h_{fi} nestas relações deve ser calculado no sistema c.m.:

$$\mathrm{p}_A = -\mathrm{p}_B \equiv \mathrm{p} \; , \tag{4.33}$$

$$\mathrm{p}_D = -\mathrm{p}_C \equiv \mathrm{p}' \; . \tag{4.34}$$

Uma propriedade importante da matriz S que faremos uso na próxima Seção é a simetria de "crossing" [27]. Esta simetria tem a ver com o seguinte: considermos um processo que envolve quatro partículas assintoticamente livres, cujos quadri-momenta são p_1, p_2, p_3, p_4 e cujas massas são $p_i^2 = M_i^2$. A invariância translacional do processo de espalhamento exige que

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0 \; . \tag{4.35}$$

A componente temporal E_i de cada quadri-momentum pode ser considerada positiva ou negativa, dependendo se se trata de uma partícula incidente ou emergente. Cada conjunto escolhido de valores de E_i, consistente com a conservação de energia, corresponde *a priori*

a um processo físico diferente. Se nenhuma das partículas decai numa das outras três restantes, três escolhas diferentes são possíveis, cada uma correspondendo a um processo de espalhamento diferente, isto é:

$$\begin{aligned} A + B &\longrightarrow C + D \,, \\ A + \bar{C} &\longrightarrow \bar{B} + D \,, \\ A + \bar{D} &\longrightarrow \bar{B} + C \,. \end{aligned} \tag{4.36}$$

As partículas $\bar{B}$, $\bar{C}$, e $\bar{D}$ são as conjugadas de carga de B, C, e D. Note que uma partícula incidente de energia negativa corresponde à sua conjugada de carga emergente. Uma inversão do sentido da flecha é obtida pela invariância CPT. Cada um dos processos acima é referido como um canal.

A simetria de "crossing" diz que uma mesma amplitude relativisticamente invariante representa, ao mesmo tempo, todos os diferentes processos das Eq. (4.36). Deve-se notar que, no entanto, é impossível passar de um canal para outro através de um número finito de processos físicos; as regiões das variáveis cinemáticas, onde os diferentes processos são físicos, são desconectadas.

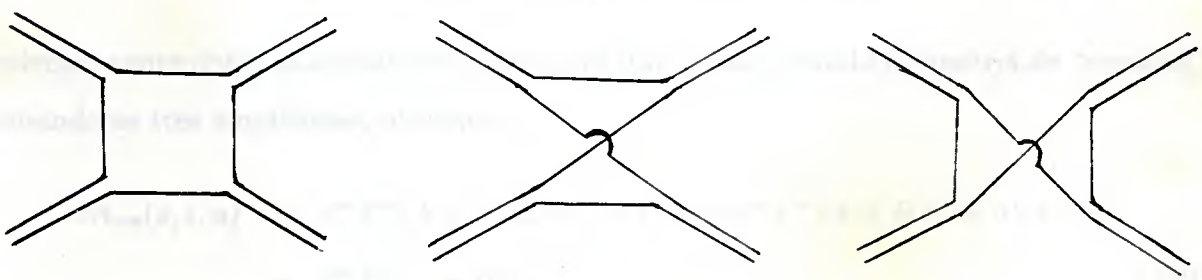


Figura 1. Representação gráfica das amplitudes $\mathcal{M}$ da Eq. (4.36).

Para uso na próxima seção, vamos discutir a forma geral da amplitude de espalhamento $\pi - \pi$, $\mathcal{M}_{\pi\pi}$, consistente com a propriedade de "crossing", baseados em diagramas de dualidade [30]. A idéia é representar graficamente o conteúdo de quarks dos pions. Para um dado processo, deve-se desenhar todas as possíveis maneiras de reajustamentos de linhas de quarks que possam levar aos estados finais do processo. Os diagramas possíveis para o espalhamento $\pi - \pi$ estão representados na Figura 1 acima.

Vamos a seguir obter a forma geral da matriz $\mathcal{M}_{\pi\pi}$ no plano s, t, u seguindo a estratégia de Weinberg [20]. Até a primeira ordem nas variáveis s, t e u, a matriz de espalhamento no canal s pode ser escrita como:

$$\mathcal{M}(\text{canal s}) = \delta^{ab}\delta^{cd}\,(A + B_1\,u + B_2\,t + C\,s)\ , \tag{4.37}$$

onde a, b, c, d são os índices isovetoriais dos pions. Usamos a conservação do isospin, e A, B_1, B_2 e C são constantes independentes do isospin e de s, t, u. Agora, pela estatística de Bose-Einstein, esta amplitude deve ser invariante frente a trocas $(p_A, a) \leftrightarrow (p_B, b)$ ou $(p_C, c) \leftrightarrow (p_D, d)$. Em termos das variáveis de Mandelstam, estas trocas equivalem à troca $u \leftrightarrow t$. Isto implica em:

$$B_1 = B_2 \equiv B\ , \tag{4.38}$$

e, portanto:

$$\mathcal{M}(\text{canal s}) = \delta^{ab}\delta^{cd}\,[A + B\,(u+t) + C\,s]\ . \tag{4.39}$$

Podemos agora obter as amplitudes nos outros dois canais usando a simetria de "crossing". Somando as três amplitudes, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\pi\pi}(s,t,u) &= \delta^{ab}\delta^{cd}\,[A + B\,(u+t) + C\,s] + \delta^{ac}\delta^{bd}\,[A + B\,(s+u) + C\,t] \\ &+ \delta^{ad}\delta^{bc}\,[A + B\,(t+s) + C\,u]\ .\end{aligned} \tag{4.40}$$

Agora, pelo argumento de auto-consistência de Adler [33], o qual diz que a amplitude $\mathcal{M}_{\pi\pi}$ deve se anular no limite em que o quadri-momentum de um dos píons for igual a zero e os outros três pions estiverem na camada de massa, obtemos:

$$A + 2m_\pi^2 B + m_\pi^2 C = 0\ . \tag{4.41}$$

Isto se segue notanto que no limite de Adler, $s = t = u = m_\pi^2$. Esta relação nos será útil na próxima Seção para a determinação dos coeficientes A, B, C da Eq. (4.40).

Na próxima Seção vamos analisar o espalhamento $\pi - \pi$ com o formalismo Fock-Tani e obteremos, usando a simetria de "crossing", a amplitude relativística completa $\mathcal{M}_{\pi\pi}$.

4.3 Espalhamento $\pi - \pi$

Nesta Seção vamos calcular explicitamente a matriz de espalhamento $\mathcal{M}$ para o espalhamento píon-píon a baixas energias, mais precisamente, no limite dos momentos externos irem a zero. Empregando o modelo de Nambu–Jona-Lasinio, este cálculo pode ser realizado analiticamente, sem a necessidade do uso de cálculo numérico.

Vamos iniciar definindo os estados iniciais e finais. Seja $\Pi_\alpha^\dagger$ o operador de criação de um píon com os números quânticos $\alpha \equiv (\mathrm{p}_\alpha, I_\alpha)$, onde I_α denota o autovalor de isospin. Podemos escrever os estados inicial e final do processo de espalhamento como:

$$|i> = \Pi_{\alpha_1}^\dagger \Pi_{\alpha_2}^\dagger |0> ,$$
$$|f> = \Pi_{\alpha_3}^\dagger \Pi_{\alpha_4}^\dagger |0> \ . \tag{4.42}$$

Os operadores de criação de pions são escritos em termos dos operadores de criação de quark e antiquark como:

$$\Pi_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \ . \tag{4.43}$$

Os índices μ e ν identificam os números quânticos espaciais e de simetria interna, $\mu = (\mathrm{k}_1, s_1, f_1, i)$, $\nu = (-\mathrm{k}_2, s_2, f_2, j)$, onde s_1, s_2, f_1, f_2 e i, j indicam respectivamente spin, sabor e cor.

A função de onda $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é dada pela Eq. (2.79):

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = N_\pi \delta_{ij} \delta(\mathrm{p} - \mathrm{k}_1 - \mathrm{k}_2) \frac{1}{2} (\tau^a)_{f_1 f_2} \chi_{s_1}^\dagger \chi_{s_2}^c \mathrm{sen} 2\phi(1/2|\mathrm{k}_1 - \mathrm{k}_2|) \ , \tag{4.44}$$

onde foi feita uma transformação para coordenadas centro de massa e relativas. N_π é a constante de normalização determinada pela condição:

$$<\pi^a(\mathrm{p}')|\pi^b(\mathrm{p})> = \delta^{ab} \delta^{(3)}(\mathrm{p}' - \mathrm{p}) \ , \tag{4.45}$$

a qual nos leva a

$$|N_\pi|^2 \frac{N}{2} \int d^3k \mathrm{sen}^2 2\phi(\mathrm{k}) = 1 \ , \tag{4.46}$$

onde $N = N_f N_c = 6$.

Para os estados transformados FT, $|i)$ e $|i)$, dados pelas Eqs. (4.19), escrevemos

$$\begin{aligned} |i) &= \pi^\dagger_{\alpha_1} \pi^\dagger_{\alpha_2} |0) \ , \\ |f) &= \pi^\dagger_{\alpha_3} \pi^\dagger_{\alpha_4} |0) \ , \end{aligned} \tag{4.47}$$

onde denotamos os operadores de criação de pions transformados FT por $\pi^\dagger_\alpha$.

Para calcular a amplitude de espalhamento, precisamos das amplitudes de V_{FT}, as quantidades $1/2V_{\mathrm{mm}}$ dadas pela Eq. (3.81). Vamos iniciar considerando a primeira amplitude, a qual vamos denotar por T_H:

$$T_H = -\frac{1}{2} \Phi^{*\mu\nu}_{\alpha_3} H(\mu\nu;\mu'\nu') \Phi^{*\rho\sigma}_{\alpha_4} \Phi^{\mu'\sigma}_{\alpha_2} \Phi^{\rho\nu'}_{\alpha_1} \tag{4.48}$$

O segundo termo da Eq. (3.81) é o complexo conjugado do primeiro. Uma representação gráfica desta expressão é mostrada na Figura 2 abaixo.

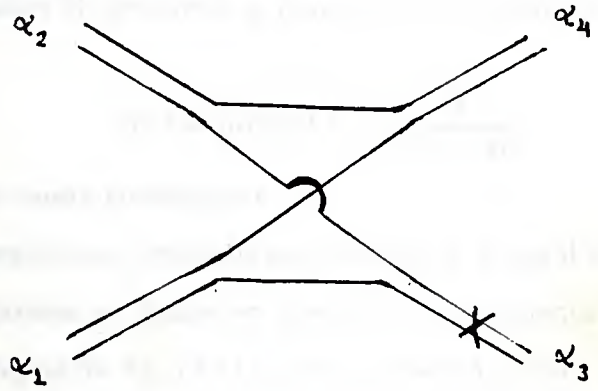


Figura 2. Representação gráfica de T_H. O X nos gráficos significa a atuação do operador Hamiltoniano sobre os respectivos estados.

Comparando este gráfico com os gráficos de dualidade da Figura 1, vemos que a amplitude dada pelo formalismo Fock-Tani corresponde ao segundo gráfico desta figura, o qual corresponde ao canal t.

Sejam as funções de onda Φ, dadas na Eq. (4.44), auto-estados do Hamiltoniano de quarks microscópico, isto é:

$$H(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi_{\alpha}^{\mu'\nu'} = E_{\pi}(\mathrm{p}_{\alpha})\Phi_{\alpha}^{\mu\nu} \ , \tag{4.49}$$

onde $E_{\pi}(\mathrm{p}_{\alpha})$ é a energia total do píon de momentum p_{α}. Então, obtemos para T_H a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} T_H = \ & - \ \delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_1} + \mathrm{p}_{\alpha_2} - \mathrm{p}_{\alpha_3} - \mathrm{p}_{\alpha_4}) \ \frac{3\times 2}{2} \times \frac{1}{16}\mathrm{Tr}(\tau^{\alpha_1}\tau^{\alpha_3}\tau^{\alpha_2}\tau^{\alpha_4}) \\ & \times \ E_{\pi}(\mathrm{p}_{\alpha_3}) \ I_{\Lambda}(\mathrm{p}_{\alpha_1},\mathrm{p}_{\alpha_2},\mathrm{p}_{\alpha_3},\mathrm{p}_{\alpha_4}) \ . \end{aligned} \tag{4.50}$$

No produto 3×2, 3 é devido à cor e 2 é devido ao spin. A integral $I_{\Lambda}(\mathrm{p}_{\alpha_1},\mathrm{p}_{\alpha_2},\mathrm{p}_{\alpha_3},\mathrm{p}_{\alpha_4})$ é dada por:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}(\mathrm{p}_{\alpha_1},\mathrm{p}_{\alpha_2},\mathrm{p}_{\alpha_3},\mathrm{p}_{\alpha_4}) \ = \ & N_{\pi}^4 \int d^3k_{\mu} \, d^3k_{\nu} \, d^3k_{\rho} \, d^3k_{\sigma} \delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_3} - \mathrm{k}_{\mu} - \mathrm{k}_{\nu}) \delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_4} - \mathrm{k}_{\rho} - \mathrm{k}_{\sigma}) \\ & \times \ \delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_2} - \mathrm{k}_{\mu} - \mathrm{k}_{\sigma}) S(1/2|\mathrm{k}_{\mu} - \mathrm{k}_{\nu}|) \ S(1/2|\mathrm{k}_{\rho} - \mathrm{k}_{\sigma}|) \\ & \times \ S(1/2|\mathrm{k}_{\mu} - \mathrm{k}_{\sigma}|) S(1/2|\mathrm{k}_{\rho} - \mathrm{k}_{\nu}|) \ . \end{aligned} \tag{4.51}$$

onde, como no Apêndice B, definimos a função $S(k)$, a qual no modelo NJL é dada pela Eq. (2.105):

$$S(k) = \sin 2\phi(k) = \frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \ , \tag{4.52}$$

onde M é a massa do quark constituinte.

Agora, para prosseguirmos, teríamos que resolver a integral acima numericamente. No entanto, se nos limitarmos ao limite em que todos os momenta dos pions externos vão a zero, temos que a integral da Eq. (4.51) pode ser escrita como:

$$I_{\Lambda}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) = N_{\pi}^4 \int_0^{\Lambda} d^3k \ S^4(k) = \frac{\int_0^{\Lambda} d^3k \ S^4(k)}{\left[\frac{N}{2}\int_0^{\Lambda} d^3k \ S^2(k)\right]^2} \ . \tag{4.53}$$

Re-escalonando com Λ os momenta nas integrais acima, temos que

$$I_{\Lambda}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) = \frac{\Lambda^3 \int_0^1 d^3x \ S^4(x)}{\left[\Lambda^3 \frac{N}{2}\int_0^1 d^3x \ S^2(x)\right]^2} = \frac{1}{\Lambda^3}\frac{\int_0^1 d^3x \ S^4(x)}{\left[\frac{N}{2}\int_0^1 d^3x \ S^2(x)\right]^2} \ . \tag{4.54}$$

Vamos agora considerar os outros termos da interação efetiva píon-píon V_{FT}, dados pelas Eqs. (3.80,3.81), os quais vamos denotar por T_G:

$$\begin{aligned} T_G &= -\Phi^{*\mu\nu}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\sigma}_{\alpha_4}V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi^{\mu'\sigma}_{\alpha_2}\Phi^{\rho\nu'}_{\alpha_1} - \Phi^{*\mu\sigma}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\nu}_{\alpha_4}V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi^{\mu'\nu'}_{\alpha_2}\Phi^{\rho\sigma}_{\alpha_1} \\ &- \Phi^{*\mu\sigma}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\nu}_{\alpha_4}V_{qq}(\mu\rho;\mu'\rho')\Phi^{\mu'\nu}_{\alpha_2}\Phi^{\rho'\sigma}_{\alpha_1} - \Phi^{*\mu\sigma}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\nu}_{\alpha_4}V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu;\sigma'\nu')\Phi^{\mu\nu'}_{\alpha_2}\Phi^{\rho\sigma'}_{\alpha_1} \\ &+ 2\Phi^{*\mu\sigma}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\nu}_{\alpha_4}V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\mu'\nu')\Phi^{\rho\nu'}_{\alpha_2}\Phi^{\mu'\sigma}_{\alpha_1} + \Phi^{*\mu\sigma}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\nu}_{\alpha_4}V_{qq}(\mu\rho;\mu'\rho')\Phi^{\rho'\nu}_{\alpha_2}\Phi^{\mu'\sigma}_{\alpha_1} \\ &+ \Phi^{*\mu\sigma}_{\alpha_3}\Phi^{*\rho\nu}_{\alpha_4}V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu;\sigma'\nu')\Phi^{\rho\nu'}_{\alpha_2}\Phi^{\mu\sigma'}_{\alpha_1} \ . \end{aligned} \tag{4.55}$$

Para prosseguirmos, precisamos das interações $V_{q\bar{q}}$, V_{qq} e $V_{\bar{q}\bar{q}}$. Estas são dadas a partir da Eq. (2.96):

$$\begin{aligned} V_{qq}(\mu,\nu;\sigma,\rho) &= \frac{2G}{(2\pi)^3}\delta^{ij}\delta^{jk}\delta(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_3-\mathrm{k}_2-\mathrm{k}_4) \\ &\times \Big[\delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4}u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k}_1)\gamma^0u_{s_2}(\mathrm{k}_2)u^\dagger_{s_3}(\mathrm{k}_3)\gamma^0u_{s_4}(\mathrm{k}_4) \\ &- (\tau_a)_{f_1f_2}(\tau_a)_{f_3f_4}u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k}_1)\gamma^0\gamma^5u_{s_2}(\mathrm{k}_2)u^\dagger_{s_3}(\mathrm{k}_3)\gamma^0\gamma^5u_{s_4}(\mathrm{k}_4)\Big] \ , \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned} V_{q\bar{q}}(\mu,\nu;\sigma,\rho) &= \frac{2G}{(2\pi)^3}\delta^{ij}\delta^{kl}\delta(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_3-\mathrm{k}_2-\mathrm{k}_4) \\ &\times \Big\{\delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4}\Big[u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k}_1)\gamma^0u_{s_2}(\mathrm{k}_2)v^\dagger_{s_3}(-\mathrm{k}_3)\gamma^0v_{s_4}(-\mathrm{k}_4) \\ &+ u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k}_1)\gamma^0v_{s_2}(-\mathrm{k}_2)v^\dagger_{s_3}(-\mathrm{k}_3)\gamma^0u_{s_4}(\mathrm{k}_4)\Big] \\ &- (\tau_a)_{f_1f_2}(\tau_a)_{f_3f_4}\Big[u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k}_1)\gamma^0\gamma^5u_{s_2}(\mathrm{k}_2)v^\dagger_{s_3}(-\mathrm{k}_3)\gamma^0\gamma^5v_{s_4}(-\mathrm{k}_4) \\ &+ u^\dagger_{s_1}(\mathrm{k}_1)\gamma^0\gamma^5v_{s_2}(-\mathrm{k}_2)v^\dagger_{s_3}(-\mathrm{k}_3)\gamma^0\gamma^5u_{s_4}(\mathrm{k}_4)\Big]\Big\} \ . \end{aligned} \tag{4.57}$$

O termo $V_{\bar{q}\bar{q}}$ é obtido de V_{qq} trocando os espinores u pelos v. Os produtos internos da forma $u\Gamma u$, $v\Gamma v$, $u\Gamma v$ e $v\Gamma u$, onde Γ representa uma ou o produto de duas matrizes de Dirac, que aparecem nestas equações são dadas explicitamente no Apêndice B.

Substituindo estes termos na Eq. (4.55), não é difícil se convencer que T_G é da forma geral:

$$T_G = F_{CSS}\delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_1}+\mathrm{p}_{\alpha_2}-\mathrm{p}_{\alpha_3}-\mathrm{p}_{\alpha_4})J_\Lambda(\mathrm{p}_{\alpha_1},\mathrm{p}_{\alpha_2},\mathrm{p}_{\alpha_3},\mathrm{p}_{\alpha_4}) \ , \tag{4.58}$$

onde F_{CSF} é um fator que só depende de cor, spin e sabor e $J_\Lambda(\mathrm{p}_{\alpha_1},\mathrm{p}_{\alpha_2},\mathrm{p}_{\alpha_3},\mathrm{p}_{\alpha_4})$ é uma integral que só depende dos momenta e envolve as funções $S(k)$, as quais vêm tanto das

funções de onda Φ, como também dos termos de interação V_{qq}, $V_{\bar{q}\bar{q}}$, e $V_{q\bar{q}}$. No limite de momenta externos iguais a zero, não é difícil de mostrar que J_Λ é da forma:

$$J(0,0,0,0) = GN_\pi^4 \int_0^\Lambda d^3k\ P[S(k)] = G\frac{\int_0^\Lambda d^3k\ P[S(k)]}{\left[\frac{N}{2}\int_0^\Lambda d^3k\ S^2(k)\right]^2}\ , \tag{4.59}$$

onde $P[S(k)]$ é uma funcional polinomial da função $S(k)$ definida na Eq. (4.52).

Re-escalonando os momenta com Λ nas integrais acima, temos que J_Λ pode ser escrita como:

$$J_\Lambda(0,0,0,0) = G\frac{\Lambda^3\int_0^1 d^3x\ P[S(x)]}{\left[\Lambda^3\frac{N}{2}\int_0^1 d^3k\ S^2(k)\right]^2} = \frac{1}{\Lambda^5}(G\Lambda^2)\frac{\int_0^1 d^3x\ P[S(x)]}{\left[\frac{N}{2}\int_0^1 d^3k\ S^2(k)\right]^2}\ . \tag{4.60}$$

No limite de momenta iguais a zero, os pions se comportam no espalhamento como se fossem partículas puntuais. Um píon puntual implica que a energia de ligação do par quark-antiquark que compõem este píon seja infinita. No entanto, como a massa do píon é finita, a massa do quark constituinte deve ser infinita. Portanto, o limite de momenta externos iguais a zero é equivalente a tomar o limite de massas constituintes infinitas.

No modelo de NJL, a massa constituinte é determinada por uma única escala, o "cutoff" Λ. Portanto, ao se tomar o limite $M \longrightarrow \infty$, deve-se tomar concomitantemente o limite $\Lambda \longrightarrow \infty$, tal que a razão $\bar{M} \equiv M/\Lambda$ seja matida fixa. Por outro lado, a equação de "gap" Eq. (2.15) pode ser escrita em termos de $\bar{M}$ como:

$$\bar{M} = \frac{26G\Lambda^2}{(2\pi)^3}\int_0^1 d^3x\ \frac{\bar{M}}{\sqrt{x^2+\bar{M}^2}}\ . \tag{4.61}$$

Como a integral acima é finita, para que a quantidade $\bar{M}$ permaneça inalterada no limite de $\Lambda \longrightarrow \infty$, a constante adimensional $G\Lambda^2$ também deve permanecer inalterada neste limite [32].

Neste mesmo limite, a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner, Eq. (2.95), exige que que f_π^2/Λ^3 pemaneça finita, pois $<\bar{\Psi}\Psi> \sim \Lambda^3$. Esta expectativa é realmente confirmada, pois pela Eq. (2.93), temos:

$$f_\pi = \sqrt{\frac{N}{(2\pi)^3 m_\pi}}\left[\int_0^\Lambda d^3k\ S^2(k)\right]^{\frac{1}{2}} = \Lambda^{3/2}\sqrt{\frac{N}{(2\pi)^3 m_\pi}}\left[\int_0^1 d^3x\ S^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}\ . \tag{4.62}$$

O valor $f_\pi = 93$ MeV é determinado experimentalmente no limite assintótico de pions com momenta iguais a zero. No contexto do modelo NJL, o valor $f_\pi = 93$ MeV deve ser entendido, portanto, como sendo determinado no limite em que f_π^3/Λ^3 é fixo.

As discussões acima nos levam à seguinte concluão: no limite de zero momenta dos pions externos, ou, equivalentemente de $\Lambda \longrightarrow \infty$, os termos T_G se tornam desprezíveis frente aos termos de T_H, pois:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \frac{J_\Lambda(0,0,0,0)}{I_\Lambda(0,0,0,0)} \sim \frac{1}{\Lambda^2} \,. \tag{4.63}$$

Prosseguimos agora para a determinação da amplitude de espalhamento $\pi - \pi$. Inicialmente, notamos que podemos escrever a integral $I_\Lambda(0,0,0,0)$ como:

$$\begin{aligned} I_\Lambda(0,0,0,0) &= N_\pi^4 \int d^3k\; S^4(k) = N_\pi^4 \int d^3k\; S^2(k)\left[1 - C^2(k)\right] \\ &\simeq N_\pi^4 \int d^3k\; S^2(k) = \frac{2}{N} N_\pi^2 \,, \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde usamos a Eq. (4.46) para N_π, e $C(k)$ é dado pela Eq. (2.106):

$$C(k) = \cos 2\phi(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \,. \tag{4.65}$$

Com isto, podemos escrever para a amplitude T_H o seguinte:

$$\begin{aligned} T_H = &- \delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_1} + \mathrm{p}_{\alpha_2} - \mathrm{p}_{\alpha_3} - \mathrm{p}_{\alpha_4}) \frac{1}{16} \mathrm{Tr}(\tau^{\alpha_1}\tau^{\alpha_3}\tau^{\alpha_2}\tau^{\alpha_4})\; E_\pi(0)\; N_\pi^2 \\ = &- \delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_1} + \mathrm{p}_{\alpha_2} - \mathrm{p}_{\alpha_3} - \mathrm{p}_{\alpha_4}) \frac{1}{8} \mathrm{Tr}(\tau^{\alpha_1}\tau^{\alpha_3}\tau^{\alpha_2}\tau^{\alpha_4})\; \frac{E_\pi(0)}{(2\pi)^3 m_\pi f_\pi^2} \,, \end{aligned} \tag{4.66}$$

onde na última linha usamos para N_π a Eq. (2.92).

Finalmente, usando o fato de que o traço do produto de quatro matrizes de Pauli é dado por:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau^{\alpha_1}\tau^{\alpha_3}\tau^{\alpha_2}\tau^{\alpha_4}) = \delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_4} + \delta^{\alpha_1\alpha_4}\delta^{\alpha_2\alpha_3} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_4} \,. \tag{4.67}$$

e que a energia de um píon em repouso é igual à sua massa:

$$E_\pi(0) = m_\pi \,, \tag{4.68}$$

obtemos para T_H:

$$T_H = -\delta^{(3)}(\mathrm{p}_{\alpha_1} + \mathrm{p}_{\alpha_2} - \mathrm{p}_{\alpha_3} - \mathrm{p}_{\alpha_4})\; \frac{1}{4}\left(\delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_4} + \delta^{\alpha_1\alpha_4}\delta^{\alpha_2\alpha_3} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_4}\right) \frac{1}{(2\pi)^3 f_\pi^2} \,. \tag{4.69}$$

Podemos agora somar a esta amplitude o segundo termo da Eq. (3.81), o qual é o complexo conjugado de T_H. Usando a Eq. (4.27), obtemos a amplitude invariante $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \frac{4m_\pi^2}{f_\pi^2}\left(\delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_4} + \delta^{\alpha_1\alpha_4}\delta^{\alpha_2\alpha_3} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_4}\right) \,. \tag{4.70}$$

onde usamos a simetria de Bose-Einstein, a qual requer que a amplitude seja simétrica frente à troca de entre pions iniciais ou finais entre si.

O passo final é obter a amplitude completa $\mathcal{M}_{\pi\pi}$. Esta é dada pela soma das amplitudes correspondentes aos diagramas da Figura 1. A partir do diagrama da Figura 2, podemos obter as amplitudes correspondentes aos outros diagramas através da imposição da simetria de "crossing". Lembrando que o "crossing" implica que troquemos o sinal da energia das partículas correspondentes e, por conveniência, trocando os índices de isospin de acordo com

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\to a \,, \\ \alpha_2 &\to c \,, \\ \alpha_3 &\to d \,, \\ \alpha_4 &\to b \,, \end{aligned} \tag{4.71}$$

obtemos finalmente para a amplitude $\mathcal{M}_{\pi\pi}$ no limite de momenta externos iguais a zero a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi\pi} &= \frac{4m_\pi^2}{f_\pi^2}\left[\left(\delta^{ad}\delta^{bc}+\delta^{ab}\delta^{cd}-\delta^{ac}\delta^{bd}\right)-\left(\delta^{ad}\delta^{bc}+\delta^{ac}\delta^{bd}-\delta^{ab}\delta^{cd}\right)\right. \\ &+ \left.\left(\delta^{ab}\delta^{cd}+\delta^{ac}\delta^{bd}-\delta^{ad}\delta^{bc}\right)\right] \\ &= \frac{4}{f_\pi^2}\left(3m_\pi^2\delta^{ab}\delta^{cd}-m_\pi^2\delta^{ac}\delta^{bd}-m_\pi^2\delta^{ad}\delta^{bc}\right) \end{aligned} \tag{4.72}$$

Agora estamos na posição de determinar as constantes indeterminadas A, B, C da Eq. (4.40). Inicialmente vamos escrever a Eq. (4.40) para momenta iguais a zero. Neste limite, temos que as variáveis de Mandelstam são dadas por:

$$s = (p_A + p_B)^2 = 4m_\pi^2 \,, \tag{4.73}$$

$$t = (p_A - p_C)^2 = 0 \,, \tag{4.74}$$

$$u = (p_A - p_D)^2 = 0 \,, \tag{4.75}$$

e, portanto, a Eq. (4.40) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi\pi}(4m_\pi^2,-m_\pi^2,-m_\pi^2) &= \delta^{ab}\delta^{cd}\left(A+C\,4m_\pi^2\right)+\delta^{ac}\delta^{bd}\left(A+B\,4m_\pi^2\right) \\ &+ \delta^{ad}\delta^{bc}\left(A+B\,4m_\pi^2\right) \,. \end{aligned} \tag{4.76}$$

A comparação da equação acima com a Eq. (4.72), juntamente com a Eq. (4.41), nos leva às seguintes equações para os coeficientes A, B, C:

$$A + B\, 2m_\pi^2 + C\, m_\pi^2 = 0 \,, \tag{4.77}$$

$$A + C\, 4m_\pi^2 = \frac{12m_\pi^2}{f_\pi^2} \,, \tag{4.78}$$

$$A + B\, 4m_\pi^2 = -\frac{4m_\pi^2}{f_\pi^2} \,. \tag{4.79}$$

Subtraindo acima a última equação da segunda, nos leva à seguinte relação entre B e C:

$$C = \frac{4}{f_\pi^2} + B \,. \tag{4.80}$$

Substituindo esta nas Eqs. (4.78-4.79) e subtraindo as equações resultantes destas substituições, obtemos:

$$B = 0 \,, \tag{4.81}$$

a qual nos leva a

$$C = \frac{4}{f_\pi^2} \,. \tag{4.82}$$

Agora, substituindo estas duas últimas equações em qualquer uma das Eqs. (4.78-4.79), obtemos:

$$A = -\frac{4m_\pi^2}{f_\pi^2} \,. \tag{4.83}$$

Substituindo os valores de A, B, C na Eq. (4.40), obtemos, finalmente, a matriz $\mathcal{M}_{\pi\pi}(s,t,u)$ a baixas energias:

$$\mathcal{M}_{\pi\pi}(s,t,u) = \frac{4}{f_\pi^2}\left[\delta^{ab}\delta^{cd}\left(s - m_\pi^2\right) + \delta^{ac}\delta^{bd}\left(t - m_\pi^2\right) + \delta^{ad}\delta^{bc}\left(u - m_\pi^2\right)\right] \,. \tag{4.84}$$

Este é o célebre resultado de Weinberg [20], derivado no contexto das álgebras de correntes.

Para energias além do limiar, torna-se necessário considerar ordens mais altas do que a aproximação empregada aqui. Em particular, torna-se necessário o cálculo de "loops" com T_H e dos termos correspondentes à amplitude T_G.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas Futuras

Considerando uma classe bastante ampla de modelos de quarks quirais, derivamos alguns resultados de caráter geral a respeito da simetria quiral, através do método variacional de Bogoliubov-Valatin. Estes resultados aparecem como função do ângulo quiral $\phi(k)$, o qual é determinado da equação de "gap" para cada potencial específico. Adicionalmente, dentro deste contexto, obtivemos o estado de um píon como um par ligado $q\bar{q}$, como o bóson de Goldstone associado à quebra de simetria, em termos do ângulo quiral.

Então, introduzimos o formalismo Fock-Tani e consideramos a viabilidade de se tratar o espalhamento $\pi - \pi$, levando em consideração a estrutura de quarks do píon obtida nos modelos quirais considerados. Demonstramos, então, que não há nenhum motivo *a priori* para que o método Fock-Tani não seja aplicável em conexão com os modelos de quarks quirais, visto que a implementaçâo da transformação FT se dá de forma consitente com a simetria quiral, ou seja, a simetria quiral é preservada ordem a ordem na função de onda de estado ligado Φ.

Utilizando o modelo de Nambu–Jona-Lasinio obtivemos a amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ no limiar de energia, empregando o Hamiltoniano de interação méson-méson obtido através do emprego do formalismo Fock-Tani ao Hamiltoniano do modelo de quarks. Devido a propriedade de "crossing" da amplitude de espalhamento foi possível estendermos este cálculo para energias além do limiar. Obtivemos o mesmo resultado derivado por Weinberg usando a álgebra de correntes.

Ainda que este último resultado tenha sido derivado considerando o modelo de Nambu–Jona-Lasinio, está claro que é de se esperar que o mesmo possa ser obtido para outras

formas de potenciais. O único fator determinante a favor de que considerássemos Nambu-Jona-Lasinio foi sua simplicidade matemática.

Estes resultados são bons indícios de que podemos investigar de modo mais profundo a aplicação do método Fock-Tani em conex ao a modelos de quarks quirais para o estudo das interações entre hadrons a baixas energias. Isto podería se dar seja estendendo diretamente o cálculo da amplitude de espalhamento $\pi - \pi$ para energias acima do limiar, por um cálculo numérico, seja pela consideração de modelos para os quais o potencial de interação seja confinante. Esta última é uma possibilidade particularmente atrativa pois permitiria o estudo concomitante da influência da quebra da simetria quiral e do confinamento sobre as interações hadrônicas a baixas energias.

Outras possibilidades incluem o emprego de modelos de quarks que permitam a inclusão de barions e/ou de modelos que permitam considerarmos, em adição aos graus de liberdade de quarks, graus de liberdade de gluons [18].

Apêndice A

Matrizes de Pauli, de Dirac e de Gell-Mann

a) **As matrizes de Pauli** σ^i (ou τ^a) são as matrizes Hermitianas 2×2 de traço nulo, dadas por:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

e satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \left[\sigma^i, \sigma^j\right] &= 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k , \\ \left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} &= 2\delta^{ij} . \end{aligned} \tag{A.2}$$

b) **As matrizes de Dirac** α e β são dadas por

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{A.3}$$

onde 1 é a matriz identidade 2×2. As matrizes γ^μ são dadas em termos destas como:

$$\gamma^0 = \beta , \qquad \gamma^i = \beta\alpha^i , \qquad \text{com} \quad i = 1, 2, 3. \tag{A.4}$$

Sendo que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} , \tag{A.5}$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.6}$$

c) **As matrizes de Gell-Mann** λ^a são as matrizes hermitianas de traço nulo 3×3, que podem ser escolhidas tendo a forma:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

tendo normalização

$$\mathrm{Tr}\left[\lambda^a \lambda^b\right] = 2\delta^{ab}\,, \tag{A.8}$$

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}\,. \tag{A.9}$$

f^{abc} é totalmente antissimétrico com membros não nulos dados por:

$$f^{123} = 1\,, \qquad f^{147} = \frac{1}{2}\,, \qquad f^{156} = -\frac{1}{2}\,,$$

$$f^{246} = \frac{1}{2}\,, \qquad f^{257} = \frac{1}{2}\,, \qquad f^{345} = \frac{1}{2}\,,$$

$$f^{367} = -\frac{1}{2}\,, \qquad f^{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \tag{A.10}$$

Apêndice B

Produtos internos de espinores do modelo NJL

Neste Apêndice vamos apresentar os produtos internos dos espinores u e v do modelo de Nambu–Jona-Lasinio, os quais são necessários para a interação H_4, Eq. (2.62).

Na seqüência serão adotadas as seguintes convenções:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{rs} &\equiv \chi_r^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_s \; ; \\
\boldsymbol{\sigma}^c_{rs} &\equiv \chi_r^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi^c_s \; ; \\
\boldsymbol{\sigma}^{c\,\dagger}_{rs} &\equiv \chi^{c\,\dagger}_r \boldsymbol{\sigma} \chi_s \; ; \\
\boldsymbol{\sigma}^{cc}_{rs} &\equiv \chi^{c\,\dagger}_r \boldsymbol{\sigma} \chi^c_s \; .
\end{aligned}$$

Para o termo escalar temos de considerar os produtos internos

$$\begin{aligned}
u^\dagger_{s_1}(\mathbf{k}_1)\gamma^0 u_{s_2}(\mathbf{k}_2) &= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1+S_1}\sqrt{1+S_2} - \sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1\cdot\hat{\mathbf{k}}_2\right)\delta_{s_1 s_2}\right. \\
&- \left.\sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\, i\boldsymbol{\sigma}_{s_1 s_2}\cdot(\hat{\mathbf{k}}_1\times\hat{\mathbf{k}}_2)\right] \; ; \\
v^\dagger_{s_1}(-\mathbf{k}_1)\gamma^0 v_{s_2}(-\mathbf{k}_2) &= -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1+S_1}\sqrt{1+S_2} - \sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1\cdot\hat{\mathbf{k}}_2\right)\delta_{s_1 s_2}\right. \\
&- \left.\sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\, i\boldsymbol{\sigma}^{cc}_{s_1 s_2}\cdot(\hat{\mathbf{k}}_1\times\hat{\mathbf{k}}_2)\right] \; ;
\end{aligned}$$

$$u^{\dagger}_{s_1}(\mathbf{k}_1)\gamma^0 v_{s_2}(-\mathbf{k}_2) = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1-S_1}\sqrt{1+S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1 + \sqrt{1+S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_2\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}^{c}_{s_1 s_2}\right] ;$$

$$v^{\dagger}_{s_1}(-\mathbf{k}_1)\gamma^0 u_{s_2}(\mathbf{k}_2) = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1-S_1}\sqrt{1+S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1 + \sqrt{1+S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_2\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}^{c}_{s_1 s_2}{}^{\dagger}\right] ,$$

onde $S \equiv \mathrm{sen}2\phi(\mathbf{k})$.

Para o termo pseudo-escalar temos

$$u^{\dagger}_{s_1}(\mathbf{k}_1)\gamma^0\gamma^5 u_{s_2}(\mathbf{k}_2) = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1-S_1}\sqrt{1+S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1 - \sqrt{1+S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_2\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}_{s_1 s_2}\right] ;$$

$$v^{\dagger}_{s_1}(-\mathbf{k}_1)\gamma^0\gamma^5 v_{s_2}(-\mathbf{k}_2) = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1-S_1}\sqrt{1+S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1 - \sqrt{1+S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_2\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}^{cc}_{s_1 s_2}\right] ;$$

$$u^{\dagger}_{s_1}(\mathbf{k}_1)\gamma^0\gamma^5 v_{s_2}(-\mathbf{k}_2) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1+S_1}\sqrt{1+S_2} + \sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1\cdot\hat{\mathbf{k}}_2\right)\chi^{\dagger}_{s_1}\chi^{c}_{s_2}\right.$$

$$\left. + \sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\, i\boldsymbol{\sigma}^{c}_{s_1 s_2}\cdot(\hat{\mathbf{k}}_1\times\hat{\mathbf{k}}_2)\right] ;$$

$$v^{\dagger}_{s_1}(-\mathbf{k}_1)\gamma^0\gamma^5 u_{s_2}(\mathbf{k}_2) = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1+S_1}\sqrt{1+S_2} + \sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\,\hat{\mathbf{k}}_1\cdot\hat{\mathbf{k}}_2\right)\chi^{c}_{s_1}{}^{\dagger}\chi_{s_2}\right.$$

$$\left. + \sqrt{1-S_1}\sqrt{1-S_2}\, i\boldsymbol{\sigma}^{c}_{s_1 s_2}{}^{\dagger}\cdot(\hat{\mathbf{k}}_1\times\hat{\mathbf{k}}_2)\right] .$$

Referências Bibliográficas

[1] Uma boa fonte de referências a respeito da QCD pode ser encontrada nos anais da conferência Twenty Years of QCD, editados por P. Zerwas, H. Kastrup (2 volumes), World Scientific, Cingapura (1993).

[2] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).

[3] A. Le Yaouanc, L. Olivier, O. Pène e J.-C. Raynal, Hadron Transitions in the Quark Model, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam (1988).

[4] H.D. Politzer, Nucl. Phys. **B117**, 397 (1976).

[5] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).

[6] A. Mishra, H. Mishra e S. P. Misra, Z. Phys. C **57**, 241 (1993).

[7] H. Misrha e S. P. Misra, Phys. Rev. D **48**, 5376 (1993).

[8] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène e J.-C. Raynal, Phys. Rev. D **29**, 1233 (1984).

[9] A. Le Yaouanc, L. Oliver, S. Ono, O. Pène e J.-C. Raynal, Phys. Rev. D **31**, 137 (1985).

[10] P. J. de A. Bicudo e J. E. F. T. Ribeiro, Phys. Rev. D **42**, 1611 (1990).

[11] M. D. Girardeau, Phys. Rev. Lett. **27**, 1416 (1971).

[12] V. S. Vorob'ev and A. L. Khomkin, Teor. i Mat. Fiz. **8**, 109 (1971) (em Russo). Tradução para o Inglês: Consultants Bureau, Plenum Publ. Co., New York, 1972.

[13] S. Tani, Phys. Rev. **117**, 252 (1960).

[14] M. D. Girardeau, J.Math. Phys. **16**, 1901 (1975).

[15] M. D. Girardeau and J.D. Gilbert, Physica **97 A**, 42 (1979).

[16] C. Lo and M. D. Girardeau, Phys. Rev. A **41**, 158 (1990).

[17] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel, J. S. da Veiga, submetido para publicação.

[18] M. Betz, M. D. Girardeau, G. Krein, em preparação.

[19] S. Weinberg, Phys. Rev. **130**, 776 (1963); **131**, 440 (1963); **133**, B232 (1964); S. Weinberg and M. Scadron, Phys. Rev. 133, B1589 (1964).

[20] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).

[21] J. Gasser e H. Leutwyler, Phys. Rep. 87 (1982) 77.

[22] T.-P. Cheng e L.-F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, N. Y. (1988).

[23] T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publ., Amsterdam (1981).

[24] V. Bernard, Phys. Rev. D **34**, 1601 (1986).

[25] J. J. Sakurai, Currents and Mesons, University of Chicago Press, Chicago (1969).

[26] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1968).

[27] V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, e C. Rossetti, Currents in Hadron Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1973).

[28] S. Weinberg, Physica A **96A**, 327 (1979).

[29] J.D. Bjorken e S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill Book Compani, Nova Iorque (1964).

[30] H. Harari, Phys. Rev. Lett. **22**, 562 (1969); H. Harari e J. L. Rosner, Phys. Rev. Lett. **22**, 689 (1969).

[31] T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. D **46**, 131 (1992).

[32] V. Bernard, U.G. Meissner, A.H. Blin e B. Hiller, Phys. Lett. B **253**, 443 (1991).

[33] S.L. Adler, Phys. Rev. **137**, B1022 (1965); B1638 (1965).