

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

Fusão Nuclear: dos tokamaks à dinâmica não linear

Luis Antonio Deviechi Rocha

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

LUIS ANTONIO DEVIECHI ROCHA

FUSÃO NUCLEAR: DOS TOKAMAKS À DINÂMICA NÃO
LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2025

R672f	Rocha, Luis Antonio Deviechi Fusão Nuclear : dos tokamaks à dinâmica não linear / Luis Antonio Deviechi Rocha. -- Rio Claro, 2025 80 p. : il., tabs. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientador: Luiz Antonio Barreiro 1. Física Nuclear. 2. Fusão Nuclear. 3. Tokamaks. 4. Dinâmica não linear. 5. Dinâmica não linear do Plasma. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp.
Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.

Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

LUIS ANTONIO DEVIECHI ROCHA

FUSÃO NUCLEAR: DOS TOKAMAKS À DINÂMICA NÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

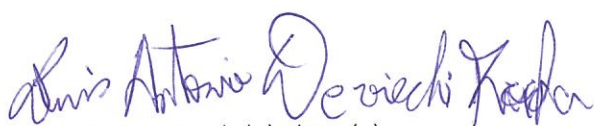
Comissão Examinadora

Luiz Antonio Barreiro (orientador)

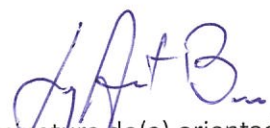
André Luis Prando Livorati

Everton Santos Medeiros

Rio Claro, 14 de Novembro de 2025.



Assinatura do(a) aluno(a)



assinatura do(a) orientador(a)

"Dedico esta monografia a todos que me inspiraram a não só seguir a carreira que escolhi, mas a todos que me acolheram em tempos de necessidade."

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo ao principal pilar que me deu e me da suporte inigualável, minha mãe Lunalva Aparecida Deviechi Rocha, tal como vosso nome, ela tem sido meu guia brilhante durante toda minha vida. Agradeço a minha irmã, Heloise Deviechi Rocha, que, por mais que nosso contato atual seja pouco, devido a agendas caóticas, sempre me suportou, em ambos os sentidos, e continua dando suporte sempre que necessito. Agradeço também ao resto de minha família que sempre me incentivaram e deram apoio.

Agradeço a todos meus amigos que tenho, de longa ou curta data que sempre deram seu apoio e paciência, especialmente em dias difíceis. Dentre estes dedico especialmente a Alphadio Stephanus Souleymane Huisman pelos conselhos, conversas mais introspectivas e profundas que sua visão e análise de mundo proporcionam, sua sabedoria e amizades são únicas e João Lucas Nery Pinto, meu amigo de mais longa data, meu irmão de outra mãe, que sempre me tratou com tanto carinho, de prontidão sempre para ajudar com o que eu precisasse e o que estivesse dentro de seu alcance, sua amizade é insubstituível; A Eduardo de Andrade Turbino Júnior pelas risadas e falas absurdas, Gustavo Primo Romero por sua alegria a paz inata a você que sempre leva a conversas interessantes, Lucas Parisotto de Assis por sua tranquilidade e falas que são diretas, precisas e duras e André Felipe Francisco Oliveira pelas conversas malucas, risadas, seu apoio e muito mais; Obrigado por todos estes anos e os futuros ainda por vir.

Aos meus amigos da faculdade, que caminharam junto comigo nesta jornada complicada, os que eram de minha turma e turmas além, passadas ou futuras, muito obrigado por serem sempre gentis e acolhedores de minha presença sem mesmo eu ter feito muito para merecer tal gentileza, dedico especialmente a Antony Morangon pelas conversas de múltiplos assuntos, quaisquer que seja, e sua simpatia inigualável, a Pedro Henrique Lopes Nanzer por me salvar de diversas enrascadas matemáticas e físicas, especialmente pela amizade incrível e as diversas conversas seja elas da física ou passatempos que compartilhamos, a Guilherme Cauet Faria Sobrinho pela sua natureza brincalhona que sempre rende boas risadas e amizade, a Gustavo Moreno Mantuani Reis pelas conversas variadas, enrascadas que nos salvamos em tempos difíceis e muito mais, a Matheus Henrique

de Matos Ramos pelo ano que compartilhamos em um mesmo teto, conversas profundas, cômicas, esclarecedoras e pela constante amizade carinhosa, a Lourenço Buoro Filier também pelo ano compartilhado debaixo do mesmo teto, sua personalidade única e alegre, incentivos, ajuda e amizade nada menos que dourada, a Lucas Pimentel Colmanetti por sua amizade e sabedoria, por ser meu guia em diversos momentos, por me salvar em diversos momentos e sempre estar disposto a bater um papo por mais bobo que seja. Obrigado a todos que não mencionei, como disse, sua gentileza e carinho nunca passa despercebido por mim.

Agradeço a Juliano Nicolau Matos, professor de física do ensino médio também graduado nesta Unesp que me cativou com seu ensino e felicidade em ser professor de física, inspirou-me e continua a ser uma inspiração para nunca desistir.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro, pela paciência e atenção na construção deste trabalho, especialmente em momentos ao qual me senti completamente perdido, sua gentileza é sempre notável.

Resumo

Esta monografia busca discutir a fusão nuclear, o trabalho apresenta uma seção inicial apresentando as motivações do estudo da fusão nuclear, tais motivos apresentam-se como preocupações ambientais e disponibilidade energética para a população crescente do planeta. Segue-se então com a breve discussão da história do estudo da vida estelar, apresentando a formação de uma estrela até a sequência principal. A discussão termina em estrelas similares ao Sol por sua pertinência a este estudo. Seguindo desta, têm-se a apresentação por uma lente histórica do estudo da fusão nuclear terrestre, do surgimento do reator conhecido como Tokamak, e seu sucesso no estudo assim como a motivação de sua escolha, resultante de grande avanço tecnológico e busca por um reator comercialmente viável. Adiante, progride-se para a descrição do reator assim como as principais características deste. A descrição das ferramentas matemáticas usadas nos cálculos deste trabalho são formuladas em seguida, para então se fazer a descrição básica de como o confinamento de plasmas é realizado nos reatores. Apresenta-se a modelagem e descrição da interação da partícula com os campos magnéticos que a confinam, assim como as potenciais derivas na trajetória dessas partículas. Finalmente, há uma discussão sobre o fator de segurança o qual é de suma importância para este trabalho e a modelagem de um mapa do espaço de fases conhecido como não twist, através de uma seção de Poincaré, que busca descrever a ação de uma perturbação crescente sobre o campo magnético confinante e as consequências desta perturbação. Os mapas foram construídos no Wolfram Mathematica 13.3.

Palavras-Chave: Fusão Nuclear, Tokamaks e Dinâmica Não Linear do Plasma

Abstract

This monograph will discuss nuclear fusion; the work presents, in its initial section, the motivation for the study of nuclear fusion, which are environmental concerns and the availability of energy for the increasing population of the planet. From this, the next topic discusses, briefly, the history of the study of the life of stars, from their formation up until it's main sequence. The discussions around stars ends with the Sun as it is most relevant for this study. Following this, there's a brief discussion, from a history perspective, of the study of nuclear fusion on earth, the emergence of the reactor known as the Tokamak and it's success for the study as well as the motivation for the study of this reactor, resulting from it's large technological advance and the search for a commercially viable reactor. Onward, the text progresses to the description of said reactor as well as it's main characteristics. The description of the mathematical tools used on this work are formulated right after, with a basic description on confinement and how plasma is confined within the reactors. The modeling and description of the interaction between a particle and the magnetic fields that confine it, as well as the potential drifts on the trajectories of it's particles is presented afterward. Finally, there's a discussion on the safety factor, which is of high importance for this work. The modeling for the phase space map known as non-twist is done through a Poincaré section, which will describe the effects of an increasing perturbation on the magnetic field responsible for confinement and the consequences of said perturbation. The maps were made with Wolfram Mathematica 13.3.

Key Words: Nuclear Fusion, Tokamaks, Non-Linear Dynamics of Plasma

Lista de Figuras

1.1	Consumo global de energia na previsão até 2060 em exajoules (adaptado de [1]).	13
1.2	Consumo energético global no período de 1978 a 2018 em exajoules(adaptado de [1]).	14
1.3	Diagrama ilustrativo contendo os principais processos de fusão que acontecem em estrelas similares ao Sol contendo, na primeira linha a equação que forma Deutério, a segunda com a formação de Hélio-3 e Trítio e a última contendo formação de Hélio-4	17
1.4	Da esquerda para a direita, Oleg Aleksandrovich Lavrent'ev (adaptada), Igor Vasilyevich Kurchatov e Andrei Dmitrievich Sakharov (editada). . . .	19
1.5	Representação esquemática do Stellarator Alemão Wendelstein 7-X [2]. A parte amarela representa o plasma toroidal, enquanto que a azul representa as bobinas magnéticas.	22
1.6	Injetor de Feixe Neutro encontrado no ITER.	28
1.7	Aquecimento de radio frequência encontrado no ITER, vistos à esquerda, com o verde sendo o aquecimento de ressonância eletrônica e o azul a ressonância iônica. À direita pode-se ver o injetor de feixe neutro mencionado acima em laranja com o objeto em amarelo representando um injetor de feixe neutro para testes.	29
2.1	Representação simples de um torus em (a), visão da seção do mesmo torus em (b) com suas coordenadas primitivas	31
2.2	Deriva ∇B perpendicular ao campo $\vec{B}$ (adaptado de[3]), com $\vec{B}$, saindo do plano	48

2.3	Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ com campos indicado perpendicularmente uns aos outros,	
	com $\vec{B}$ saindo do plano, tal como o movimento das partículas (adaptado	
	de [4]).	51
3.1	Seção ou Mapa de Poincaré. Responsável por demonstrar, usando um	
	subespaço de menor dimensão Σ , para projetar as trajetórias de um sistema	
	pela análise desta interseção.	57
3.2	Espaços de fases gerados e o processo de reconexão das ilhas $a = 0.345$ e	
	temos para (a) $b = 0.35$, (b) $b = 0.364096$, (c) $b = 0.376072$, (d) $b = 0.382$. .	62
3.3	Espaços de fases gerados e o processo de reconexão das ilhas $a = 0.345$ e	
	temos para (a) $b = 0.392$, (b) $b = 0.42$, (c) $b = 0.461434$, (d) $b = 0.465$	63

Lista de Tabelas

2.1	Frequências Ciclotron η e seus valores em Hertz $f = \frac{ \eta }{2\pi}$ para elétrons e	
	prótons [5]	45
2.2	Raios das Órbitas de Larmor para elétrons e prótons, estes apresentados	
	em diferentes temperaturas, aqui apresentadas em eV [5]	45

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Motivação	12
1.2	Aspectos Fundamentais da Fusão Nuclear e sua História	14
1.2.1	Estrelas	14
1.2.2	Na Terra, uma visão histórica	18
1.3	Tokamaks	21
1.3.1	Motivação	21
1.3.2	Combustível e Plasma	23
1.3.3	Aquecimento	27
2	Revisão bibliográfica e Confinamento	30
2.1	Estrutura e Fundamentos	30
2.1.1	Sistema de Coordenadas	32
2.1.2	Mecânica Hamilton-Lagrange	35
2.2	Eletromagnetismo	38
2.3	Órbitas de Larmor	42
2.4	Deriva de Partículas	45
2.4.1	Deriva Curvada	46
2.4.2	Deriva $\nabla \vec{B}$	47
2.4.3	Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$	50
2.4.4	Deriva Polarizada	52
2.5	Fator de Segurança q	53
3	Dinâmica Não Linear	56
3.1	Introdução e Motivação	56

3.2	Modelagem do Mapa Não-Twist e a Seção de Poincaré	58
3.3	Resultados e Discussão	60
4	Conclusões e Perspectivas	65
A	Cálculo Vetorial	68
B	Verificação do Jacobiano	73
	Referências Bibliográficas	74

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Dentre diversos motivos para o estudo da fusão nuclear, destaca-se com frequência a problematização da emissão de diversos gases de efeito estufa, provenientes da queima de combustíveis fósseis para geração de energia. Esse problema tem sido discutido amplamente na sociedade científica, acompanhando as mudanças climáticas e do aquecimento global. Ademais, há grande destaque para o crescente consumo energético, principalmente localizado nos países e economias em desenvolvimento. Consumo energético que se relaciona também a fatores como o desenvolvimento tecnológico dos países desenvolvidos, o uso destas novas tecnologias e a exportação para os países em desenvolvimento, os quais, por sua vez, também passam a consumir mais energia provindas deste uso.

Em um estudo realizado pelo Conselho de Energia Mundial (WEC, em inglês) em 2019, com simulações e previsões para 2060, apresentado na figura [1.1](#), o mundo foi dividido em 17 regiões para análise da distribuição energética com fatores como menor custo de implementação, demanda, suprimento e emissão de CO_2 correspondente. Um modelo detalhado do sistema energético de cada região foi construído, desde a extração do recurso usado na produção energética, até o uso da energia produzida. Chegou-se a três formas as quais o trabalho nomeou de Jazz moderno, Sinfonia incompleta e Metal pesado [\[1\]](#).

Para fins deste trabalho, basta a informação que, Jazz moderno é caracterizado por um governo e economia mais balanceada, com energia disponível à todos, preocupação

ambiental mas foco na expansão de mercado econômico ainda presente. Sinfonia incompleta por sua vez caracteriza-se pela forma mais regulamentada com foco em preservação ambiental e preocupação climática, e finalmente Metal pesado reflete a maneira que os governos atuais se comportam.

Ademais, temos que valores encontrados sobre o consumo energético, com uma média de consumo dobrado, assim como também dobrou no período de 1978 a 2018 (conforme ilustrado [1.2](#)). Grande parte da produção ainda é realizada por queima de combustíveis fósseis, atingindo, em termos de custo por tonelada de CO_2 , valores de até 110 US\$-2010¹. Logo, em vista do crescimento do consumo energético e da emissão de gases de efeito estufa, o estudo da fusão nuclear caracteriza-se como uma resposta que abrangeria ambas frentes e solucionaria com eficácia a questão energética global.

Neste trabalho, serão explorados a história da fusão, os reatores conhecidos como Tokamaks, sua história, uma simples modelagem do confinamento através do eletromagnetismo, das órbitas, derivas e o fator de segurança encontrado nas partículas no plasma, finalizando-se com um estudo sobre a dinâmica não linear do plasma e suas consequências à fusão.

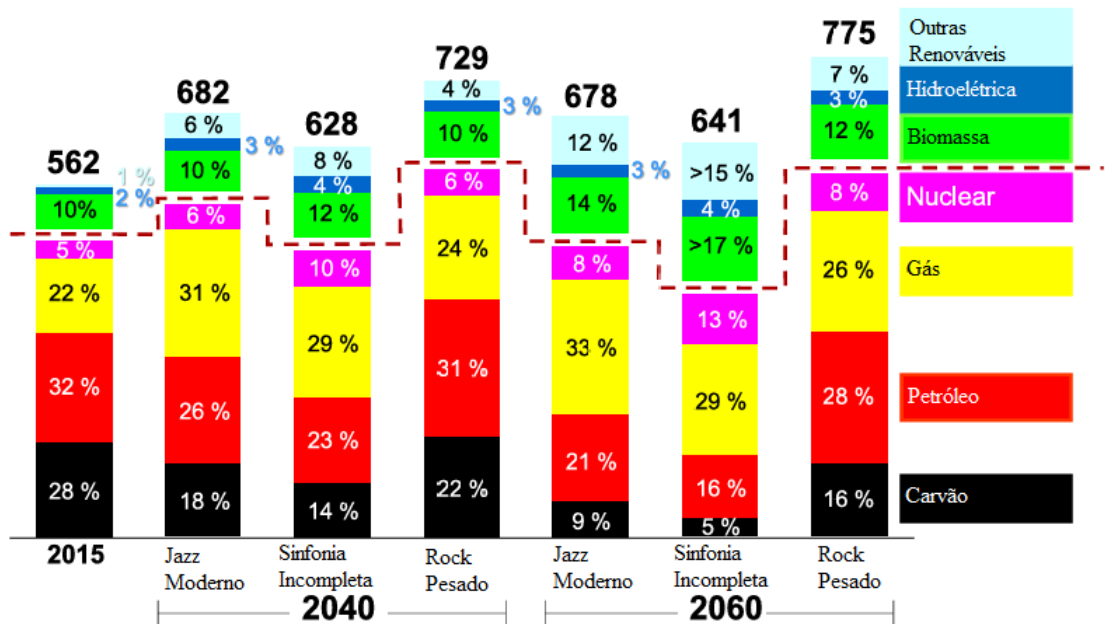


Figura 1.1: Consumo global de energia na previsão até 2060 em exajoules (adaptado de [\[1\]](#)).

Fonte: Conselho Mundial de Energia (WEC,2019). Acesso em: 2 jun. 2025

¹Este valor é calculado com base no valor do dólar de 2010 como indicado.

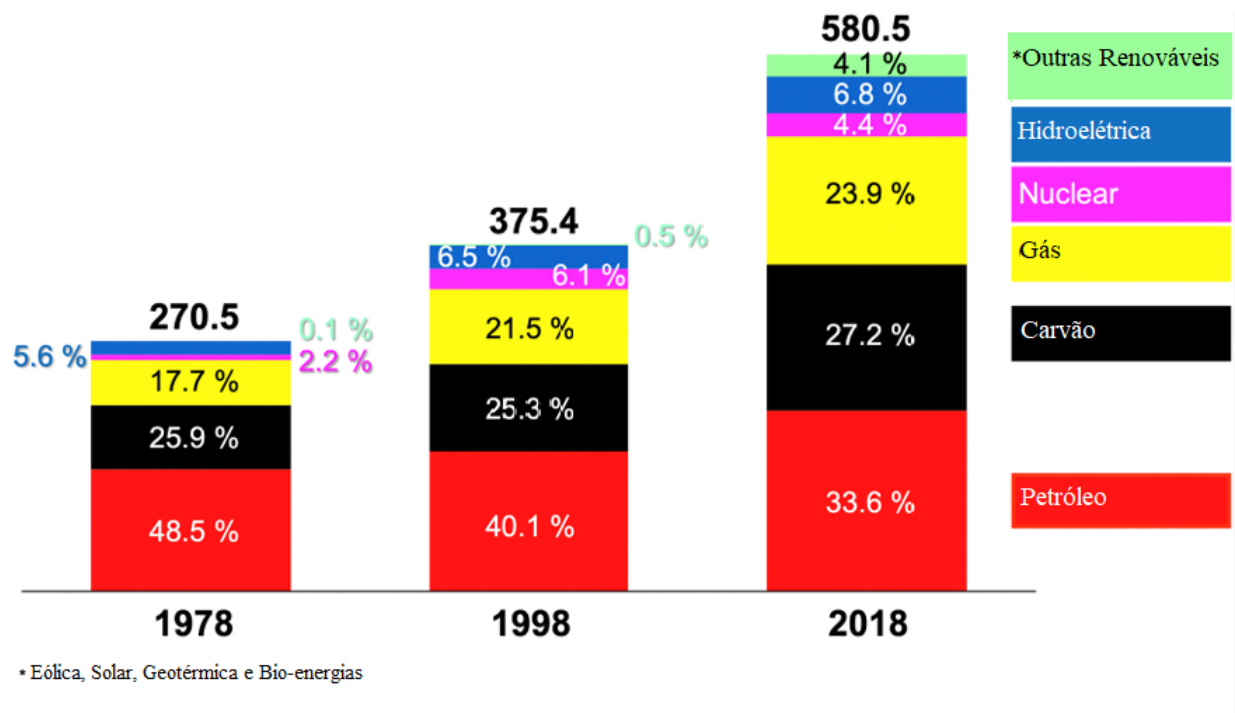


Figura 1.2: Consumo energético global no período de 1978 a 2018 em exajoules(adaptado de [1]).

Fonte: Conselho Mundial de Energia (WEC,2019). Acesso em: 2 jun. 2025

1.2 Aspectos Fundamentais da Fusão Nuclear e sua História

1.2.1 Estrelas

Sabe-se atualmente o método com o qual estrelas como o Sol produzem sua energia, através da fusão nuclear. Entretanto, tal energia irradiada pelo Sol e por todas as estrelas visíveis no céu terrestre constituía um mistério para a física com relação ao seu verdadeiro funcionamento e a forma como produziam essa energia, até então compreendida como praticamente infinita. Com a dedução da provável equação mais famosa de toda a física, $E = mc^2$, com m representando a massa e c a velocidade da luz, realizada por Albert Einstein em 1905, teve-se a construção do primeiro passo na estrada que seria a compreensão da fusão nuclear.

Logo após, Francis Aston [6], na construção e compreensão de seus espectrômetros de massa, conseguiu medir com precisão diversos elementos, seus isótopos e suas massas

atômicas, e logo verificaram que:

1. A regra de massas com números inteiros não são de fato seguidas como se teorizava, com o próprio hidrogênio possuindo massa de 1.008;
2. A soma de quatro massas atômicas do hidrogênio (H) não resultam precisamente na massa atômica do hélio (He), este sendo ligeiramente menor.

Em seu livro, “*The Internal Constitution of the Stars*” publicado em 1926², Arthur Eddington [8], [9] explicitou motivos, questionando e totalizando 7 pontos contra o fenômeno nomeado por ele de “Transmutação do Hidrogênio”, como o mais provável método pelo qual estrelas como o Sol produzem sua energia. Os pontos contra são notáveis, afinal a mecânica quântica ainda apresentava-se em sua infância. Não obstante, após maior desenvolvimento da mesma, pode-se uma melhor e maior compreensão que de fato o hidrogênio é o combustível estelar [10].

O funcionamento da fusão estelar é diferente daquela realizada na Terra, em reatores, os quais serão discutidos na seção 1.3.2. Devido à massa estelar, não há a necessidade de se aquecer às temperaturas comumente associadas quando se mencionam reatores de fusão, tal como o Tokamak; trata-se um processo governado majoritariamente pela ação da gravidade. No entanto, inicialmente também realizam um processo similar ao realizado na Terra, e após um dado momento, dão início a sua sequência principal.

A formação inicial de uma estrela dá-se em “Berçários Estelares” como são conhecidos popularmente, ou Gigantes Complexos de Nuvem Molecular. Como descrito em sua pertinente publicação, “*The Early Life of Stars*” por Steven Stahler, esse constitui o nome oficial destas grandes forjas estelares, nuvens que podem chegar a tamanhos de até 300 anos-luz de comprimento e costumam ser as maiores estruturas encontradas em galáxias [11].

O processo para a formação de estrelas acontece com a aglomeração, devido à gravidade, de gás hidrogênio e poeira encontrado nesses complexos, os quais condensam-se em chamados núcleos densos. É dentro deste núcleo, sob constante colapso e colisão entre as moléculas de Hidrogênio (H_2), que se dão forma as protoestrelas, ainda não de fato ainda uma estrela em sua sequência principal, pois a mesma ainda não realiza a fusão

²O qual não deve ser confundido com seu artigo publicado anteriormente em 1920, com o mesmo título [7], apesar de ambos discutirem sobre a possibilidade da fusão nuclear ser o processo responsável pela vida estelar

apesar de sua intensa luminosidade e também não visível devido a poeira acumulada ao seu redor. A poeira inibe a passagem de luz no espectro visível, pois absorvem grande parte da energia dos fótons e reemite comprimentos de onda mais longos [11].

Quando a protoestrela atinge massa cerca de dez vezes menor do que a do Sol, tem-se temperatura suficientemente alta em seu núcleo para início da fusão nuclear. Entretanto, mesmo com a grande quantidade de hidrogênio nestas nuvens, não é este que se funde; na verdade é seu isótopo, o Deutério (D), que possui um nêutron e um próton em seu núcleo, que passa a fundir no centro protoestelar.

A temperatura necessária para que a fusão de H se torne plausível é cerca de $10^7 K$; D, em contrapartida necessita apenas de $10^6 K$ para fundir-se, e de forma benéfica a protoestrela, libera ainda vastas quantias de energia. A energia liberada resulta na expansão da estrela devido à convecção interna gerada, que carrega mais deutério da região mais externa da nuvem que circunda a estrela para o núcleo ativo e instável. Esta convecção é causada pelo surgimento de bolhas de gás superaquecido que se expandem e realizam um movimento de ascensão, enquanto o gás frio desce em direção ao centro.

O processo de acúmulo de matéria, fusão de deutério e expansão volumétrica estelar, e o aumento da temperatura constante devido a energia fornecida pela fusão, leva à eventual dispersão do núcleo denso, principalmente da poeira que o circunda, dando espaço a um novo objeto, agora no espectro visível, uma estrela em sua fase pré-sequência principal. Há uma redução na convecção, e a estrela por sua vez reduz em tamanho; a pressão proveniente da temperatura evita que ela entre em processo de implosão. No entanto, seu combustível principal, o deutério, terá essencialmente se esgotado. A temperatura irradiada por sua superfície resfria-a e pressão interna aumenta devido a gravidade; e por consequência, a temperatura também aumenta até alcançar a temperatura previamente mencionada para o início da fusão de hidrogênio, tornando-se assim uma estrela de sequência principal, tal como o Sol.

Uma estrela em sequência principal é estável, e sua fusão, agora de hidrogênio, libera energia suficientemente alta para impedir a compressão da estrela por conta da gravidade. O processo agora é bem conhecido, assim como as energias liberadas por cada um deles. A fusão de hidrogênio leva à produção de D; o processo libera um pósitron e um neutrino, o qual fora utilizado como forma de se medir o número de reações de fusão no Sol. Sua detecção envolve um processo delicado e complexo, usando

estruturas de proporções massivas devido a sua quase nula interação com a matéria.

Subsequente a produção de deutério, este pode fundir-se com outro hidrogênio e formar um átomo de Hélio-3, isótopo do átomo de hélio, a fusão também pode ocorrer entre dois deutérios formando um trítio (T), isótopo radioativo do átomo de hidrogênio com período de meia vida de 4500 ± 8 dias ou $\sim 12.3288 \pm 0.02192$ anos [12].

Finalmente, tem-se a fusão entre dois átomos do isótopo hélio-3 formando um átomo de Hélio-4 (He_4), liberando dois prótons e temos a fusão Deutério-Trítio (DT ou D-T) o qual também forma um átomo de hélio, liberando um nêutron, todas estas abordadas e esquematizadas na Figura 1.3. O Sol não é capaz de realizar a fusão de materiais mais pesados, incluindo o próprio Hélio, devido a sua massa e temperatura baixas. Ao final de sua vida, quando quase toda sua modesta massa tenha-se convertido, este começará um processo de expansão de suas camadas mais externas até que elas se dispersem enquanto as mais internas se retraem e resfriam tal como a externa deixando em seu legado uma pequena anã branca.

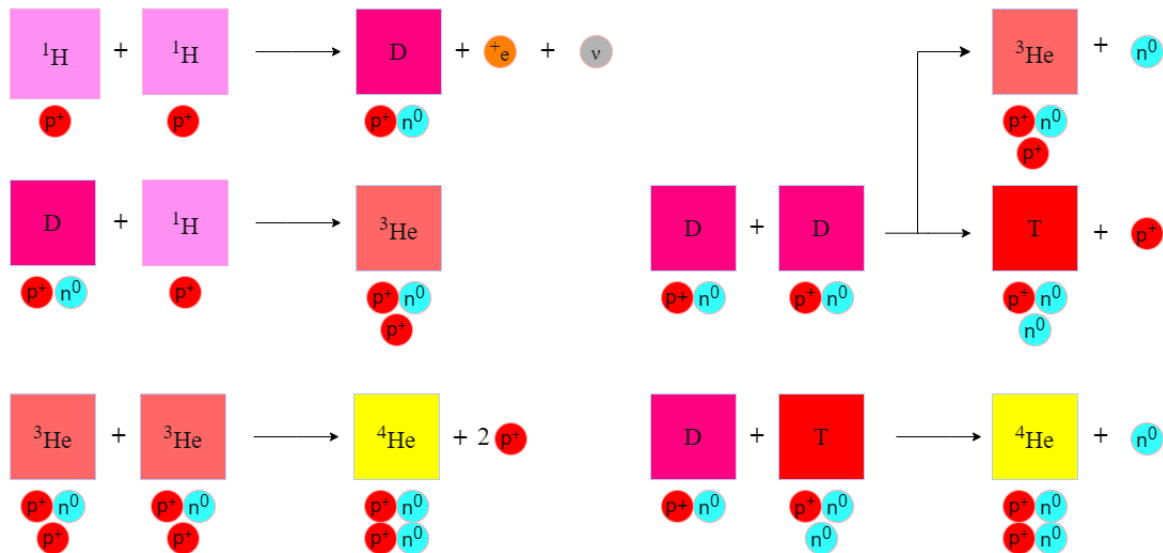


Figura 1.3: Diagrama ilustrativo contendo os principais processos de fusão que acontecem em estrelas similares ao Sol contendo, na primeira linha a equação que forma Deutério, a segunda com a formação de Hélio-3 e Trítio e a última contendo formação de Hélio-4

Fonte: Autoral, construída utilizando do programa de montagem de diagramas online, Diagrams.

Acesso em: 31 maio 2025. Disponível em: <https://app.diagrams.net/>

Estrelas de massas maiores seguem no processo de fusão, como descrito no processo proto estelar, ao término da fusão de H_2 , por não apresentarem temperatura adequada para a fusão do He_4 , passam a entrar em processo de colapso sob sua própria gravidade até atingirem temperatura suficiente para o processo de fusão se reinicie. Com uma temperatura mais elevada, tem-se a consequência da queima de combustível mais rápido, com ordens de magnitude se reduzindo no tempo restante para queima do combustível. Configura-se assim, de modo geral, o processo estelar para estrelas maiores até encontrarem a barreira de estabilidade final, a qual a estrela não atinge temperatura suficiente para o próximo combustível ou ela atinge o material final no estágio de fusão: o ferro, que possui estabilidade muito alta. A estrela não é capaz de continuar e entra em processo de supernova.

1.2.2 Na Terra, uma visão histórica

Tratando-se de uma introdução, apresenta-se aqui uma seção curta da história complexa da pesquisa em fusão e como o reator conhecido como Tokamak se tornou centro das pesquisas em fusão nuclear.

O processo do estudo e busca do controle da fusão para geração de energia começa mais tarde que o estudo da fusão astronômica e tentativa de reprodução da mesma [8]. Após o termino da Segunda Guerra em 1945 com a detonação das armas atômicas construídas no Projeto Manhattan, e o início da Guerra Fria em 1947, tensões políticas entre oriente e ocidentes estavam em constante ascensão. Em especial, projetos confidenciais para pesquisas em produção de armamentos bélicos ainda mais poderosos que os produzidos e detonados no Japão.

A pesquisa em fusão também era alvo de confidencialismo; os projetos iniciais tinham objetivo de produção bélica mais poderosa com o investimento em fusão a fim de utilizar da sua capacidade de produção de materiais destinados a bombas atômicas, e possivelmente, termonucleares. Apenas depois que a decisão de utilizar a fusão como forma de geração de energia limpa tornou-se foco [13]. O primeiro registro de um aparato que viria ser um reator de fusão foi a patente criada por G. P. Thomson e M. Blackman em 1946, sobre um reator de fusão nuclear toroidal a partir de deutério³, no Reino Unido, o Tokamak de fato não viria a ser mencionado por mais uma década.

³Conhecidos como “pinch reactors” ou reatores de belisco

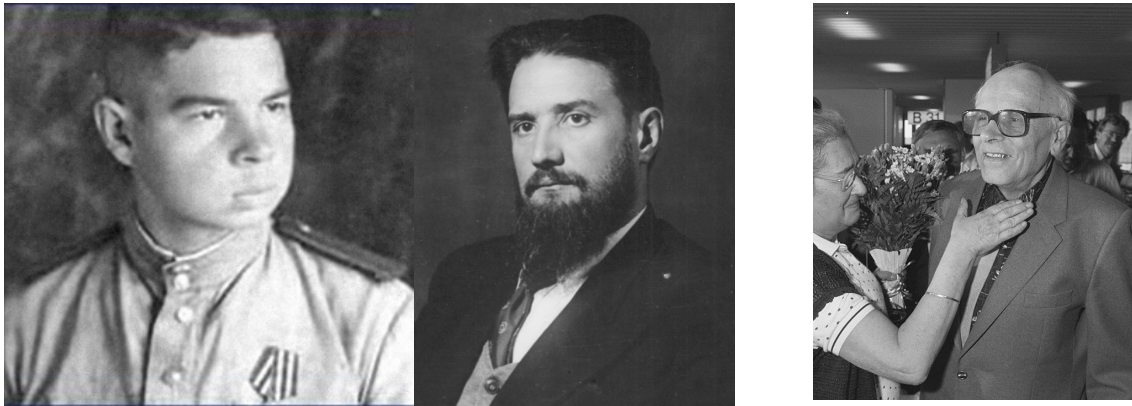


Figura 1.4: Da esquerda para a direita, Oleg Aleksandrovich Lavrent'ev (adaptada), Igor Vasilyevich Kurchatov e Andrei Dmitrievich Sakharov (editada)

Fontes: As imagens encontram-se nos sites, cada site respectivo com a sequência em que a foto aparece:
<https://www.iter.org/node/20687/kremlin-letter-started-it-all>, fotógrafo desconhecido;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Igor_Kurchatov#/media/Ficheiro:Igor_Kurchatov_001.png, fotógrafo desconhecido;

https://en.wikipedia.org/wiki/Andrei_Sakharov#/media/File:BonnerSacharov1989.jpg, fotógrafo: Rob C. Croes;

Acessas em: 1 jul. 2025

Em contrapartida, por detrás das cortinas de ferro na antiga URSS, a pesquisa havia similarmente se iniciado e com os mesmos objetivos iniciais, porém com uma das primeiras ideias da contenção do plasma sugeridas por um sargento em 1950. Na época, mesmo sem ter ensino superior, Oleg Aleksandrovich Lavrent'ev escreveu uma carta direcionada ao Comitê Central Comunista, a qual logo chegou às mãos de Andrei Dmitrievich Sakharov, membro Candidato das Ciências Físico-matemáticas, para avaliação do documento, que podem ser vistos na Figura [1.4](#). A carta detalhava, entre muitos, o uso de materiais alternativos na produção bélica, assim como sugestões do uso de uma bomba atômica para detonação de uma de hidrogênio. Mas o mais importante foi a discussão que o mesmo fez em relação a importância do controle da reação termonuclear com o propósito de futura geração de energia. Ademais sugeriu uma ideia de contenção do plasma utilizando de sistemas eletrostáticos, sugestão esta que, por mais que não aplicável para controle e confinamento de plasma, Andrei tomou como extremamente importante ao escrever sua carta-resposta, e levou às primeiras ideias mais aplicáveis para confinamento de fato [\[14\]](#).

Tensões de ambos os lados se manteriam, com efetivamente nenhuma menção de estudo ou comunicação sobre suas pesquisas. Até que em 25 de Março de 1951, o presidente Argentino Juan Peron expôs a público que Ronald Richter, um físico alemão, havia produzido nêutrons no reator de fusão em que trabalhava localizado em um ilha argentina, e assim supostamente atingido fusão, fato que depois foi apontado como falso. Tal ex-

posição causou pânico interno em todos os países envolvidos na pesquisa e tornou-se acidentalmente o primeiro passo para quebra dessa confiança associada a pesquisa.

Pouco depois, em 1955, a Primeira Conferência Internacional das Nações Unidas no Uso Pacífico de Energia Atômicas que aconteceu em Genev⁴ [13], abriu mais portas para comunicações, apesar de muitos cientistas ali presentes trocarem conhecimentos entre si, sem de fato mencionar diretamente que eram sobre fusão nuclear. Um ano depois a essa reunião, Igor Vasilyevich Kurchatov tomou mais um passo no objetivo de desclassificar os experimentos em fusão e em Abril, o mesmo fez uma visita à Grã Bretanha. Lá ministrou uma palestra com o tema “A viabilidade de uma reação termonuclear em uma descarga num gás” no instituto de pesquisas atômicas em Harwell, novamente sem de fato mencionar a pesquisa, porém na luta pela quebra de segredo. Esse foi o primeiro passo internacional dado em prol da contribuição para uma pesquisa em controle da fusão. Kurchatov infelizmente veio a falecer em 1960 e era defensor do desarmamento nuclear, reconhecendo também a grande importância da cooperação e pesquisa aberta em fusão [10].

O nome dos reatores toroidais, conhecidos hoje como “Tokamak”⁵ (discutido mais a fundo na seção seguinte), não foi utilizado até por volta de 1957, pouco antes da segunda conferência de Genev, apesar de um reator de funcionamento semelhante que já havia sido construído em 1955, o TMP. Os mesmos continuaram como segredo de pesquisa e, ao participarem na segunda conferência de 1958, com a apresentação do Stellarator⁶ de Lyman Spitzer, uma proposta por Kurchatov fora feita para que houvesse uma mudança na pesquisa para foco no stellarator ao invés do tokamak; felizmente tal mudança não foi seguida e a pesquisa nos tokamaks continuaram. Com avanços no confinamento do plasma e sua posição dentro da câmara dos tokamaks, na terceira conferência da Agência Internacional de Energia Atômica⁷, o grande sucesso da pesquisa nos reatores russos foi revelada, com a apresentação do recém construído na época o tokamak T-3, o qual havia atingido a temperaturas médias de elétrons próximas a 1 keV⁸. A notícia chocou toda

⁴Tais conferências futuras são comumente mencionadas como apenas “conferência de Genev”

⁵Do Russo “Toroidal’naya Kamera Magnitnomy Katushkami” ou Câmara Toroidal Magnética ou Câmara Toroidal em Bobina Magnética, quando traduzidas.

⁶Outro tipo de reator de fusão o qual é mais superficialmente detalhado no capítulo seguinte, nas motivações do estudo

⁷IAEA em inglês

⁸Cerca de ~ 11 Milhões de Kelvins. Em geral na literatura usa-se elétron Voltz como unidade de medida, provinda da definição da distribuição de Maxwell-Boltzmann, da mecânica estatística.

a comunidade científica presente na reunião, com muitos suspeitando dos dados. Em resposta, cientistas do Reino Unido foram convidados a fazerem suas medidas usando espalhamento Thomson, método este utilizado até hoje nas medidas de temperatura [15]. Após levar todo seu equipamento para medida em 1969, com todo o aparato ali presente, a energia 1 keV foi confirmada e no ano seguinte iniciou-se a grande mudança global para foco nos estudos em tokamaks. Conhecido na comunidade científica como o “boom dos tokamaks” [16].

1.3 Tokamaks

1.3.1 Motivação

Na seção [1.1] deste capítulo, foi expresso a motivação pela escolha do estudo da fusão nuclear; aqui será brevemente explicado a motivação pela escolha do Tokamak em específico. Foi mencionado brevemente na seção acima outro tipo de reator de fusão, o Stellarator, ilustrado na Figura [1.5], tal qual o Tokamak também é um reator toroidal de confinamento magnético do plasma. Porém, sua estrutura e campo magnético gerado é meticulosamente planejada para maior controle do plasma. Todos os campos gerados para contenção do plasma são gerados apenas pelas bobinas externas e não há indução magnética de uma corrente presente dentro do plasma. A evolução da pesquisa em Stellarators desacelerou devido ao boom dos tokamaks, assim como a dificuldade encontrada no aquecimento do plasma e sua contenção. Logo, construção de novos reatores, tais quais o Wendelstein para pesquisa, recebeu pouco investimento, esta questão econômica, junto da complexidade da fabricação e montagem de um Stellarator caracterizam o maior motivo para a escolha do Tokamak como estudo. Felizmente, estes continuam sendo pesquisados e a tecnologia evoluiu, mas a apresentada nos tokamaks está mais avançada em comparação, com recordes como o da França, atingido no seu reator IRFM, de tempo de fusão superando o anterior tempo mais longo, da China [17].

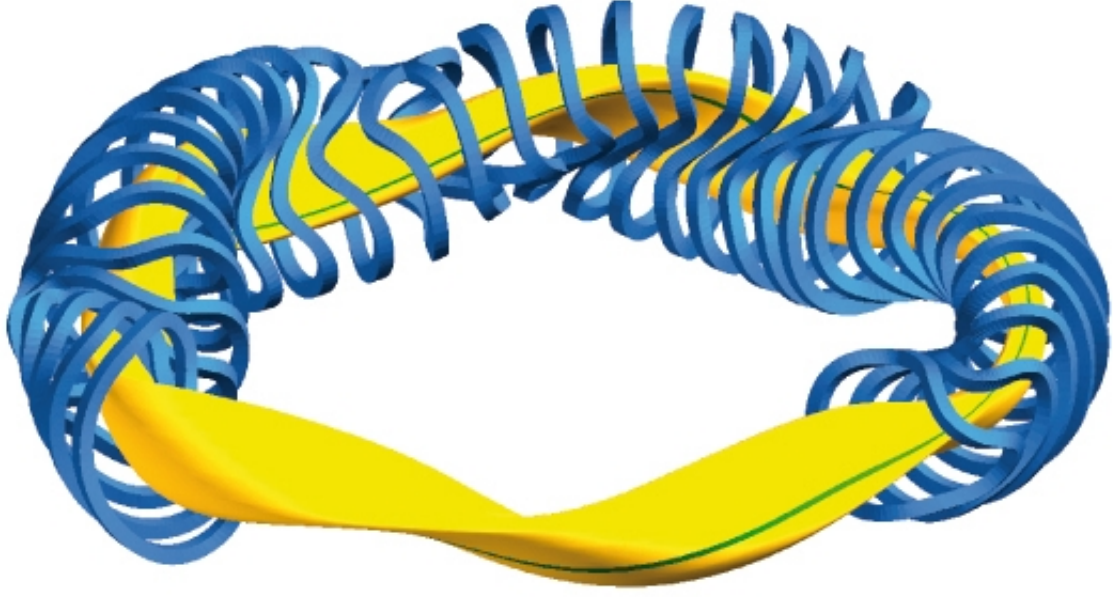


Figura 1.5: Representação esquemática do Stellarator Alemão Wendelstein 7-X [2]. A parte amarela representa o plasma toroidal, enquanto que a azul representa as bobinas magnéticas.

Fonte: Construction of Wendelstein 7-X (IEEE, 2009) . Acesso em: 23 jul. 2025.

Similarmente, há mais uma forma de se realizar fusão nuclear a qual tem-se pesquisa de ponta e avanços significativos: o Confinamento Inercial. De forma simplificada, o confinamento é realizado com lasers de alta potência, buscando causar uma implosão na cápsula contendo o combustível que se deseja fundir, antes que o material possa expandir e dissipar sua energia, motivo este por seu nome de confinamento inercial. Tal método atingiu recentemente o cogitado coeficiente de rendimento Q maior do que 1 [18].

$$Q = \frac{E_{out}}{E_{in}} \quad (1.1)$$

Este coeficiente é responsável por informar aos pesquisadores a relação da energia liberada pela reação, dividida pela colocada dentro do sistema para que a fusão aconteça como é expressa em (1.1). Logo, pode-se presumir com uma análise superficial de que este seria o método para uma maior discussão sobre o solucionamento da questão energética. No entanto, como expresso pelos autores do trabalho [18], este método não é estudado em escalas suficientemente grandes para geração de energia, e não conhecemos quais problemas seriam enfrentados se este caminho for seguido, desta forma, infelizmente, confinamento inercial permanece apenas no campo de pesquisa.

Tal análise se aplica aos tokamaks: estes possuem reatores que se classificam apenas como de pesquisa. Contudo, a construção de reatores para o uso comercial energético e seus avanços é notável parte de seu objetivo. Ademais a construção do Reator Termonuclear Experimental Internacional⁹ iniciada em 2010, com o objetivo de se testar a viabilidade de um reator comercial considerando a tecnologia mais atual, é outro incentivo a este estudo específico destes reatores. Sua construção está próxima de completa e testes serão iniciados assim que plausíveis.

1.3.2 Combustível e Plasma

Na seção (1.2.1) foi exposto como uma estrela emite exorbitantes quantias de energia através da fusão sobre ação gravitacional. Na Terra, enfrenta-se a barreira que é a força eletrostática repulsiva de partículas de mesma carga, sobretudo as positivas. Sabemos que, similarmente à força gravitacional, a força eletrostática que uma carga exerce sobre outra possui modelagem similar, dada pela força de Coulomb ou Lei de Coulomb [19]:

$$F_{el} = \frac{k_e q_1 q_2}{d^2}, \quad (1.2)$$

com q_1 e q_2 representando as cargas, d a distância entre elas e k é a constante de Coulomb ou constante eletrostática de valor $k_e = 8,988 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.

A equação é a mesma, salvo a constante eletrostática, a qual é diferente, sendo ela na Lei da Gravitação Universal $G = 6.674184 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, e o uso de cargas, as quais são as massas dos objetos interagentes. Podemos então, fazer um comparativo direto entre Lei de Coulomb e a Lei da Gravitação.

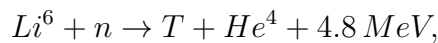
Assumindo duas partículas iguais, ou seja, de mesmo sinal de carga e mesma massa, temos uma força eletrostática repulsiva e uma força gravitacional atrativa entre ambas. Usando prótons como exemplo temos que, ao colocarmos os devidos dados como sua carga, que é a carga elementar de valor $e = 1.602176 \times 10^{-19} \text{ C}$, e massa, que para o próton é $m_p = 1.672621 \times 10^{-27} \text{ kg}$, nas respectivas equações, e considerarmos uma distância de $d = 1 \text{ cm}$, encontramos que a força de repulsão eletrostática é da ordem de $\sim 10^{36}$ vezes mais intensa que a força gravitacional.

⁹ITER em inglês, que também significa “caminho” do Latim

Esta é a principal barreira a ser vencida para que a fusão de dois átomos em um novo seja plausível. De maneira a facilitar o processo, a escolha de um combustível adequado também é de interesse tanto para pesquisa avançar, alcançando-se a ignição, quanto para o objetivo energético de produção de energia com o método.

Atualmente ainda é utilizado a combinação de Deutério e Trítio ou combustível DT, cujo processo da reação de fusão se encontra no canto inferior direito da figura [1.3]. A escolha por estes combustíveis é devido à baixa temperatura necessária para uma fusão adequada, comparada ao Hidrogênio puro, como mencionado em [1.2.1], que necessita de temperaturas ainda maiores considerando a pequena força gravitacional que atrai e confina as partículas. Além disso, o combustível DT libera quantidade de energia adequada para o sistema, apesar de grande parte se encontrar no nêutron liberado¹⁰, ponto este argumentado extensivamente com notáveis menções a combustíveis alternativos e futuros em [20]. Porém, caracteriza-se como o material mais disponível, considerando que deutério e trítio são isótopos de hidrogênio, com um e dois nêutrons, respectivamente, e com deutério encontrado abundantemente em nossos oceanos, sendo um em cada 6700 átomos de hidrogênio, um deutério [5].

Trítio por sua vez, como mencionado em [1.2.1], é radioativo e possui curto tempo de meia vida [12], levando à sua inexistência na natureza. Felizmente, é facilmente produzido com bombardeamento de nêutrons sobre Lítio-6 (Li-6) ou Lítio-7(Li-7)¹¹, Li-7 sendo mais abundante e usando de camas reprodutoras [21] para a produção de gás trítio para o sistema usando do nêutron encontrado como resultado da fusão dos combustíveis, assim sustentando-se a reação. Esta é uma das formas de produção do gás, já que o nêutron por ser uma partícula sem carga, não é confinada no sistema magnético dos reatores. Outra alternativa para produção de nêutrons é por reações de fissão para a produção de trítio, ademais as reações que os produzem seguem:



Em que n é um nêutron e T é Trítio, como mencionado previamente no texto. A

¹⁰Cerca de 14.1 MeV dos 17.6 MeV liberados na reação encontram-se no nêutron.

¹¹Lítio sendo outro material com grandes reservas através de todo o planeta.

energia total liberada na fusão do combustível DT é cerca de 17.6 MeV^[12], por reação de fusão, então a cada par DT que se funde, 17.6 MeV são liberados ^[20], o qual, através da partícula alfa emitida^[13], que também é confinada, retorna parte da energia, cerca de 3.5 MeV, ao plasma, na literatura chamada de aquecimento alfa.

Tal energia, quando convertida em termos mais diários, encontramos que apenas 1 quilograma de combustível, assumindo que metade seja Deutério e metade seja Trítio, com massas respectivas de aproximadamente 2 gramas e 3 gramas por mol, temos cerca de 250 mol de Deutério e 166,67 mol de trítio. Logo, temos 166,67 mol pares DT para fusão, resultando em $\sim 3,35 \times 10^{27}$ MeV, que quando convertido de MeV para kWh encontramos cerca de $\sim 1,5 \times 10^8$ kWh. Ou seja, a produção de uma usina elétrica que diariamente supre 1GigaW por dia é suprida por 1 quilograma deste combustível.

No entanto, antes mesmo de se pensar na energia liberada por uma reação de fusão, há de se questionar como fazer com que este combustível, apresentado até então como potencial solução energética futura, realmente funcione como combustível para o reator, afinal, tem-se de vencer a força repulsiva que cargas de mesmo sinal exercem umas nas outras. É aqui que o processo se assemelha à fusão que se inicia em protoestrelas, apresentada na seção inicial deste trabalho. Como também mencionado na seção ^[1.2.2], o tokamak T-3 atingiu 1 keV em 1969; atualmente tokamaks trabalham em temperaturas que se encontram entre 10 keV e 30 keV^[14], com a grande maioria trabalhando em 10 keV. O motivo da seleção de temperaturas, que, quando comparadas a qualquer outro exemplo diário, incluindo o Sol, são exorbitantemente altas, é o aumento do conceito conhecido na mecânica estatística como seção de choque ^[22].

A seção de choque diz com relação à probabilidade, em um dado sistema, que um processo como uma colisão ou encontro entre duas partículas ocorra, a qual, em física nuclear, é diretamente proporcional à seção de choque ^[5]; assim, quanto maior a seção, maior a chance da colisão acontecer, exatamente o processo desejado. Entretanto é também importante mencionar que este crescimento da seção de choque não ocorre indefinidamente, há um máximo o qual se encontra a ~ 100 keV. Contudo, aquecer a temperaturas acima das aqui mencionadas são de pouco interesse, pois o custo energético associado e a reação

¹²Facilmente encontrada usando a relação de Einstein $E = \delta mc^2$, em que δm é a variação entre as massas do combustível fundido, o átomo e a partícula resultante.

¹³Vale lembrar que uma partícula alfa é exatamente um núcleo de Hélio-4 acelerado.

¹⁴Convertendo novamente para mais facilidade na leitura, estes valores correspondem entre 100 e 300 milhões de Kelvin. Comparativamente, o núcleo do Sol se encontra a aproximadamente 15 milhões de Kelvin.

acontecendo a temperaturas mais baixas, por exemplo, são motivos já suficientes a evitar gastos desnecessários. Uma análise mais profunda tomaria mais uma seção e foge ao que propõe este trabalho.

Quando um gás é aquecido a altas temperaturas o processo de ionização, em que o átomo torna-se um íon dissociado de seu elétron, vagando de maneira livre no gás. Ionização resulta na neutralização do efeito de repulsão dos núcleos iônicos pela presença de um número igual dos elétrons, este gás globalmente é neutro o nomeado plasma, localmente, no entanto, o mesmo é iônico¹⁵. No plasma, a temperaturas adequadas, partículas com alta energia térmica, ou de maneira mais correta alta velocidade térmica, apresenta as condições necessárias para a fusão acontecer. Os métodos de aquecimento serão discutidos brevemente na seção seguinte.

Como é de se imaginar, não há materiais terrestres conhecidos que sejam capazes de armazenar e conter o plasma na temperatura desejada. Assim utiliza-se do confinamento magnético¹⁶ para armazenar e conter o plasma dentro de uma câmara sem que haja contato direto com a superfícies internas. O uso de campos magnéticos é precisamente disponível em um tokamak. Esta configuração escolhida para o confinamento resulta em um movimento orbital das partículas, discutidos na seção 2.3 do Capítulo seguinte.

Os dois parâmetros mencionados nos parágrafos acima, estes sendo ignição e aquecimento alfa, estão diretamente relacionados. Ignição é o objetivo final, que vai além da produção energética, da pesquisa em fusão nuclear. Corresponde ao momento em que a fusão nuclear é autossustentável, de maneira análoga à combustão de combustíveis fósseis, onde só é necessário que combustível seja constantemente adicionado ao sistema para que a reação continue. A razão por esse objetivo final é a possibilidade de atingirmos fusão com a presença dos métodos de aquecimento ainda funcionando para manutenção da reação e adquirirmos um Coeficiente Q, da equação (1.1), maior do que 1. Portanto, se a Ignição for atingida, tais métodos de aquecimento podem ser desligados e a reação mantida gerando a energia limpa desejada em um reator comercial.

A partícula alfa é um dos meio pelo qual a Ignição poderá ser atingida, com a energia que esta devolve para a reação¹⁷ sendo exatamente a energia que sustentaria a fusão, pois

¹⁵Esta característica é utilizada na contenção do plasma quando uma corrente é induzida no mesmo, explorada na seção 2.2

¹⁶Pois um gás ionizado é um excelente condutor.

¹⁷Lembrando que isto só ocorre devido ao fato de ser possível o confinamento da partícula, logo a energia que esta carrega da fusão não sai do confinamento mas sim é adicionado ao plasma.

injeta a mesma quantia que é perdida por dissipação, e apenas o combustível deve ser injetado. Outro meio é melhorando a construção e engenharia do reator, o qual melhorará diretamente o confinamento do plasma e minimizará perdas de energia, devido à melhor qualidade do equipamento usado; o estudo das equações que modelam a dinâmica do plasma, a qual em geral é não linear, representa outra linha de pesquisa para melhor compreensão do confinamento e é discutida no capítulo 3 deste trabalho.

1.3.3 Aquecimento

Como será discutido na seção (2.2), um dos campos magnéticos usados para o confinamento do plasma é gerado através da indução eletromagnética no plasma o qual gera uma corrente no interior do plasma e este por consequência o campo desejado. Fruto desta interação e do Efeito Joule, através da dissipação Ôhmica, ocorre o aquecimento do gás, e caracteriza um dos meios utilizados para o aquecimento até que se atinja a temperatura de $10keV$ ¹⁸ desejada. Todavia, o método perde eficácia conforme a temperatura se eleva¹⁹ devido à alta condução do plasma, logo sua perda devido a resistência é reduzida e deve suplementar o aquecimento via outros métodos.

Ao total são utilizados dois outros métodos para o aquecimento [10]:

Injeção de Feixe Neutro

O primeiro é a injeção de dêuterons neutros acelerados por um acelerador de partículas externo, para transferir sua energia ao plasma através de colisões; o injetor pode ser observado na Figura 1.6. Para tal, íons de deutério são produzidos e acelerados externamente utilizando de uma sequência de campos com altas voltagens até determinada energia, que é definida pelo volume do plasma e sua densidade dentro do tokamak. Para evitar que as partículas sejam defletidas pelo campo magnético do tokamak, os íons produzidos devem ser antes neutralizados para de fato serem injetados dentro do plasma.

¹⁸Em geral na literatura usa-se elétron Voltz como unidade de medida, provinda da definição da distribuição de Maxwell-Boltzmann, da mecânica estatística.

¹⁹Cerca de $\sim 1keV$ é a temperatura máxima com o qual é possível se atingir utilizando apenas deste método.

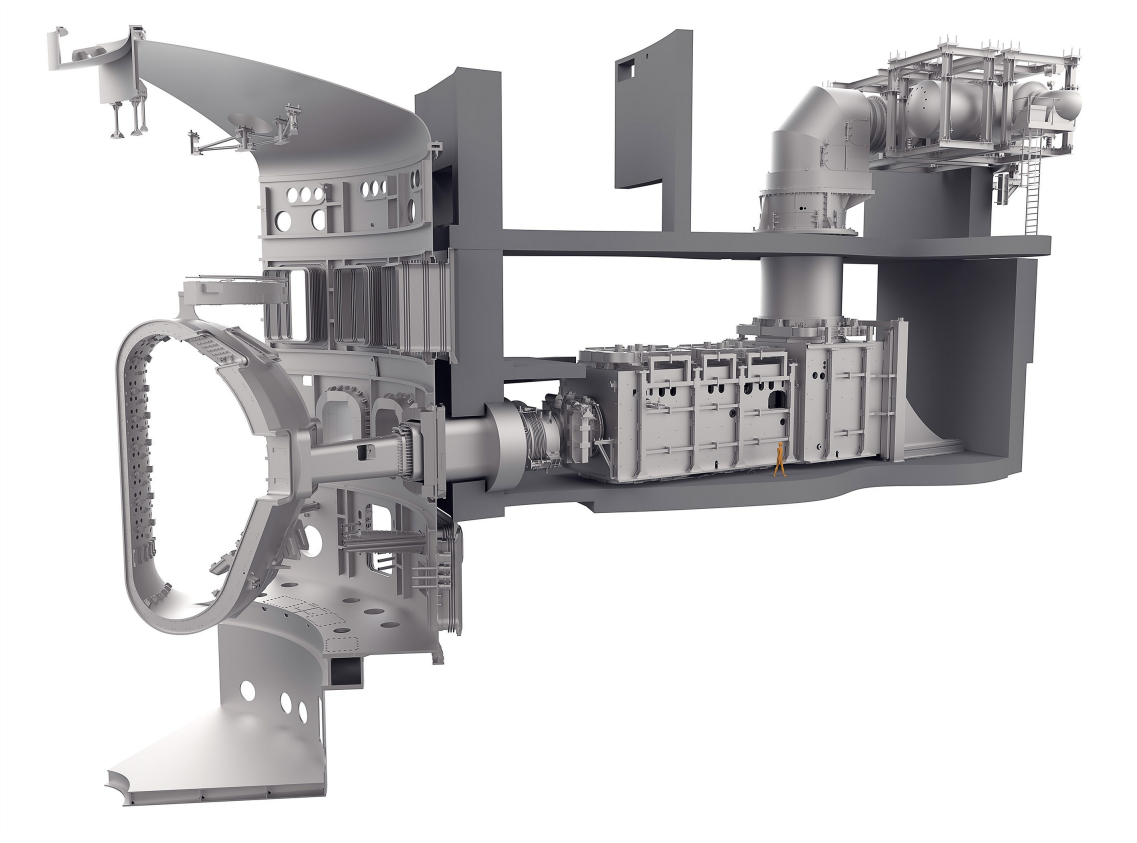


Figura 1.6: Injetor de Feixe Neutro encontrado no ITER.
Fonte: Imagem do site do ITER. Acesso em: 10 out. 2025. Disponível em:
<https://www.iter.org/node/20687/system-makes-tokamak-feel-small>

Aquecimento por Radiofrequência

Como o nome indica, este método utiliza de ondas eletromagnéticas de alta frequência para transferência de energia ao plasma, causando o aumento na temperatura desejado. Utiliza-se frequências de ressonância de ambos elétrons e íons pois a energia transferida aumenta sua velocidade e ao mesmo tempo a sua temperatura. Ambas formas de aquecimento por radio frequência podem ser vistas na Figura 1.7

Aquecimento por Ressonância Ciclotron Iônica:

A frequência de ressonância iônica é dada pela relação carga massa²⁰ $\left(\frac{Z}{A}\right)$ do íon e o campo magnético toroidal do tokamak, com a ressonância fundamental sendo de $15.2 \left(\frac{Z}{A}\right)$ MHz/T (Mega Hertz por Tesla) e funcionam entre 40 e 70 MHz [10].

Aquecimento por Ressonância Ciclotron de Eletrônica:

²⁰Relembrando que Z é o número atômico e A é o número de massa.

Similarmente, a frequência de ressonância eletrônica aplica-se aos elétrons e sua frequência específica depende apenas do campo magnético toroidal. A ressonância fundamental é 28 GHz/T e operam entre 60 e 120 GHz [10].

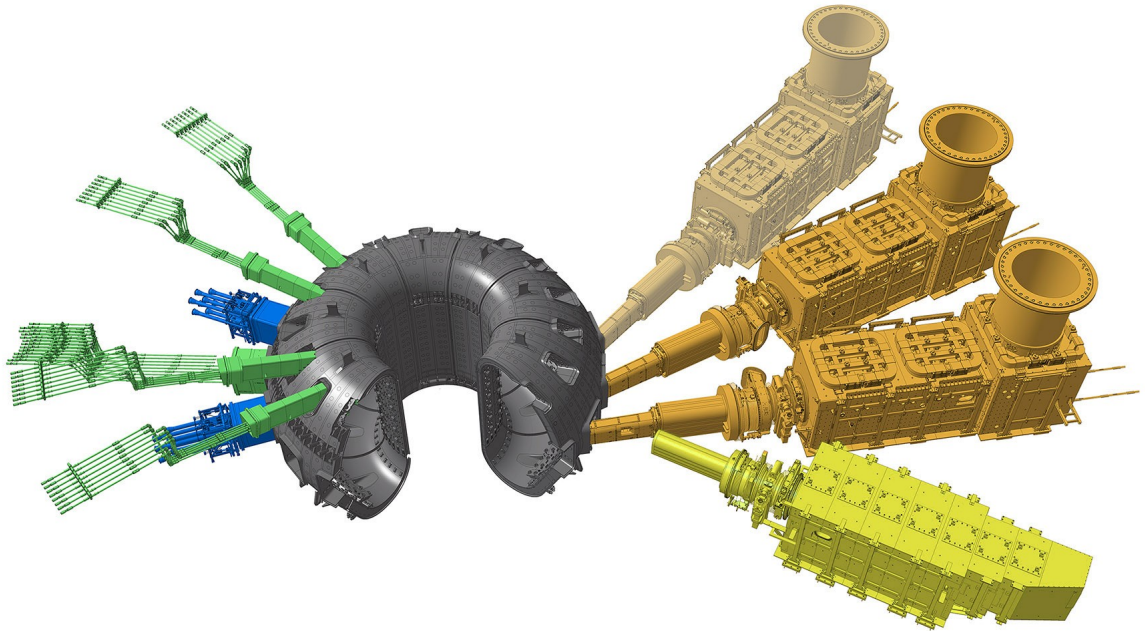


Figura 1.7: Aquecimento de radio frequência encontrado no ITER, vistos à esquerda, com o verde sendo o aquecimento de ressonância eletrônica e o azul a ressonância iônica. À direita pode-se ver o injetor de feixe neutro mencionado acima em laranja com o objeto em amarelo representando um injetor de feixe neutro para testes.

Fonte: Imagem do site do ITER. Acesso em: 10 out. 2025. Disponível em:
<https://www.iter.org/node/20687/system-makes-tokamak-feel-small>

Capítulo 2

Revisão bibliográfica e Confinamento

2.1 Estrutura e Fundamentos

Como anteriormente explicitado, Tokamaks são reatores com formato de um torus. Este não é o único meio com o qual se confina reações de fusão, há ambos confinamentos de sistemas abertos e fechados. No presente caso, temos um sistema fechado, em que o plasma confinado segue as linhas de campo curvadas de maneira efetiva tal que terminem em si mesmas, formando assim um ciclo completo.

Ademais, devido ao formato de um torus, temos regiões sem interseções das linhas de campo e a magnetização completa do plasma, resultante do posicionamento adequado das bobinas responsáveis pela geração do campo, assim como a topologia adequada. Usando tais cautelas, a consequência desta escolha, de que o campo responsável pelo confinamento não é uniforme, pode ser evitada [23].

Entretanto, o formato não era a escolha perfeita sem complicações, e como Hazeltine explicitou em seu livro, um campo axissimétrico de magnitude puramente toroidal tem sua formação dada por um solenoide dobrado sobre si, e seu campo varia inversamente com o raio maior, representado esquematicamente na figura 2.1 por R_0 ; era a variação do campo e sua curvatura que eram e continuam responsáveis pela maioria das instabilidades e dificuldades encontradas no confinamento do plasma. Felizmente, um campo poloidal potente pode ser imposto de maneira a guiar-se as partículas confinadas para trajetórias centrais, reduzindo o problema.

Estabelecido esta vantagem da seleção do formato toroidal, segue-se a descrição.

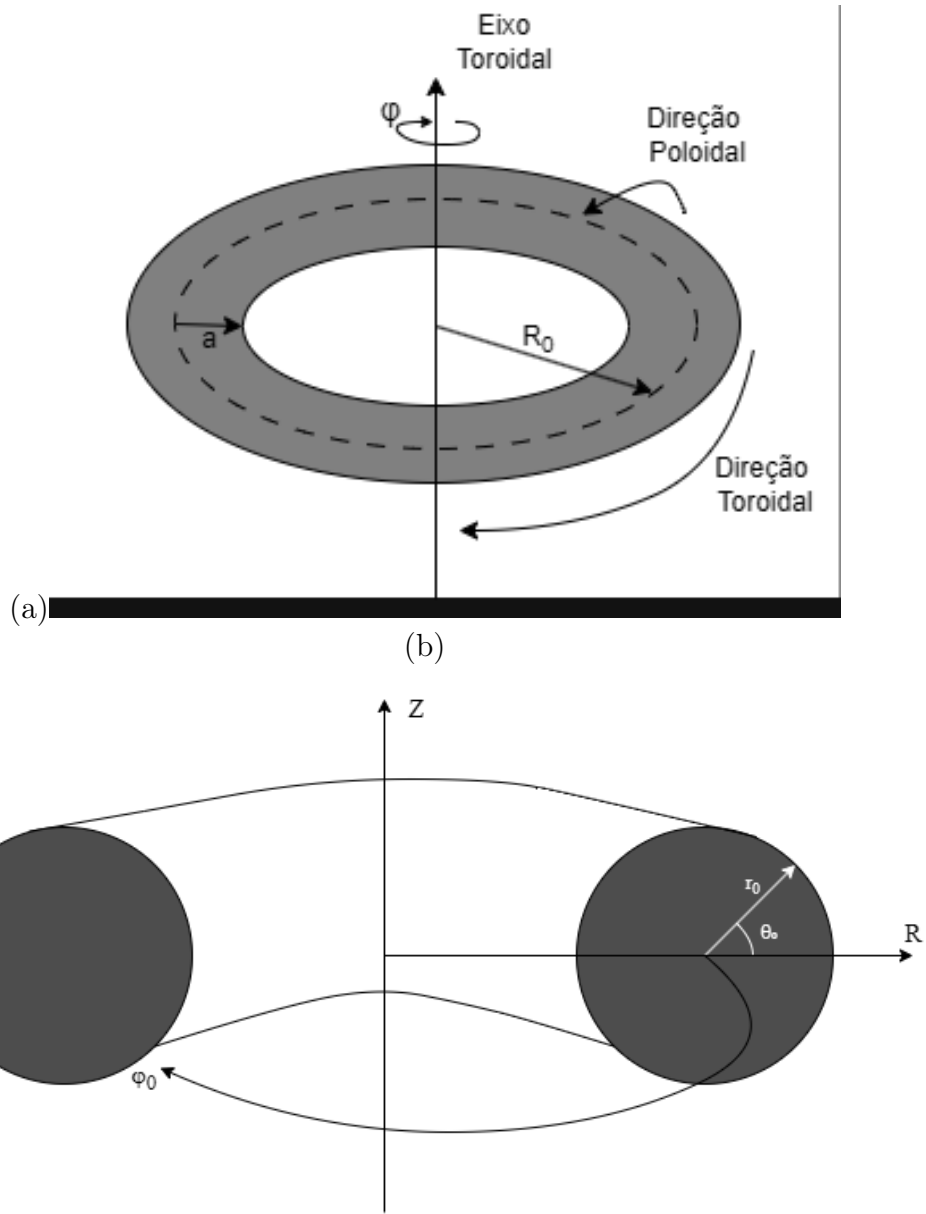


Figura 2.1: Representação simples de um torus em (a), visão da seção do mesmo torus em (b) com suas coordenadas primitivas

Fonte: Autoral, construída utilizando do programa de montagem de diagramas online, Diagrams.

Acesso em: 5 jul. 2025. Disponível: <https://app.diagrams.net/>

Um Tokamak, sendo um torus portanto, apresenta as seguintes características: Tem-se o raio maior, comumente representado por R ou R_0 ; o raio menor, comumente representado por r , r_0 ou a ; o ângulo poloidal, comumente representado por θ ou θ_0 ; e o ângulo toroidal, comumente representado por φ , φ_0 , ζ ou ζ_0 .

Cada uma destas variáveis apresentam certa variação na literatura dependendo da escolha do autor. Para este trabalho, as aqui apresentadas serão usadas e, caso alteradas,

por exemplo de θ para θ_0 , ou indicarem um mesmo valor/condição, será explicitado a mudança/indicação de maneira a evitar confusões, caso contrário, assuma que representam valores/condições diferentes.

Similarmente, a outras variáveis definidas pela mesma letra durante o trabalho, também é válido a noção de que representam valores/condições diferentes, salvo quando indicado o oposto. Tomando isto, fica evidente que o uso de coordenadas apropriadas sejam vantajosas para a descrição que será feita sobre os reatores. Encontra-se na literatura primariamente a escolha de coordenadas cilíndricas e toroidais, ambas são úteis na descrição e serão apresentadas.

2.1.1 Sistema de Coordenadas

O sistema Cartesiano apresenta-se como um sistema apto para a descrição deste espaço físico. Denotamos por $x = (x, y, z)$ ou (x^1, x^2, x^3) , uma série de funções $F^i(x) = F^i(x, y, z)$ com $i = 1, 2, 3$, note que estes não são expoentes mas apenas índices supraescritos, indicando um sistema de três coordenadas generalizadas. Tais coordenadas podem ser usadas se forem funções bem comportadas, e similarmente, se as posições no sistema Cartesiano de coordenadas forem funções bem comportadas de $F^i(x)$.

$F^i(x)$ é bem comportada e não degenerada, se e somente se, o Jacobiano,

$$j = \nabla F^1 \cdot (\nabla F^2 \times \nabla F^3) = \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) \quad (2.1)$$

não desaparece, ou seja, não é infinito e diferente de zero. Se o Jacobiano $j > 0$ temos um sistema de coordenadas dextrogiro. Uma seção curta de Calculo Vetorial pode ser encontrada no Apêndice [A](#).

Coordenadas toroidais são utilizadas na compreensão do confinamento magnético e coordenadas cilíndricas são úteis na descrição local de um torus. Ademais podemos transformar de um tipo de sistema de coordenadas para outro pela função, em coordenadas cartesianas, pela seguinte transformação:

$$\vec{x} = x(x^1, x^2, x^3)\hat{x} + y(x^1, x^2, x^3)\hat{y} + z(x^1, x^2, x^3)\hat{z} \quad (2.2)$$

Para coordenadas toroidais, as coordenadas primitivas dadas por $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, com r_0

sendo o raio menor, θ_0 o ângulo poloidal e φ_0 o ângulo toroidal. Similarmente, coordenadas cilíndricas são definidas por (R, θ, Z) , com a diferença que Z , o eixo cilíndrico, não é especificado, diferentemente das toroidais; R representa o raio cilíndrico e θ o ângulo azimutal.

Temos então que, as coordenadas ficam definidas, para cilíndricas e toroidais, respectivamente:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.3)$$

$$Z = z.$$

E

$$r_0 = \sqrt{(R - R_0)^2 + Z^2},$$

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{Z}{R - R_0}\right), \quad (2.4)$$

$$\varphi_0 = -\theta.$$

Os Jacobianos de cada respectivo sistema de coordenadas são $j = 1/R$ para cilíndricas e $j = 1/(r_0 R)$ para toroidais, com o sinal negativo em φ_0 sendo necessário para que o sistema seja dextrogiro. O eixo de simetria do sistema se encontra em $R = 0$.

Como explicitado na equação (2.1), um sistema generalizado de coordenadas toroidais pode ser representado por um conjunto de funções bem comportadas, logo um Jacobiano finito e positivo em todo o espaço, tomemos então:

$$j = \nabla \rho \cdot (\nabla \theta \times \nabla \varphi) \quad (2.5)$$

Seguindo que devem ser comportadas temos que $\rho(x)$, que representa a coordenada radial generalizada, deve assumir um valor único, tal que:

$$\rho(r_0, \theta_0 + 2\pi m, \varphi_0 + 2\pi n) = \rho(r_0, \theta_0, \varphi_0). \quad (2.6)$$

Essa definição nos garante representação apropriada para um toro²¹ e podemos extrair informação extra dela. Para as superfícies toroidais de valores constantes de $\rho(x)$, encontramos que esta define uma sequência de toros concêntricos em r_0 . Para $r_0 = 0$ temos um circuito toroidal²² da forma de um círculo, este é degenerado e nomeado de “eixo menor”²³. Esse eixo menor também se apresenta como um circuito toroidal do toro mais interno concentricamente, e não necessariamente necessita ser o círculo encontrado em r_0 . Topologicamente, existem diversos circuitos distintos que podem ser definidos, entretanto, são equivalentes de forma que podem ser convertidos um nos outros com deformações apropriadas.

Além disso, para quaisquer duas funções de coordenadas radiais, ρ e ρ' são relacionadas monotonicamente por uma função do tipo $\rho'(\rho)$. Comumente se denota como “ r ” qualquer uma destas funções de coordenadas radiais que desaparece no eixo menor, aumenta monotonicamente em direção ao exterior e tem dimensão de comprimento; logo podemos identificar este r como o raio menor do toro.

Dando continuidade às definições, para o ângulo poloidal generalizado, temos que sua função $\theta(x)$ deve ser uma função da posição também de valor único para qualquer circuito toroidal. Porém, esta muda com relação ao circuito poloidal em proporções de 2π , tal que:

$$\theta(r_0, \theta_0 + 2\pi m, \varphi_0 + 2\pi n) = \theta(r_0, \theta_0, \varphi_0) + 2\pi m, \quad (2.7)$$

com m representando qualquer valor.

Similarmente, para o ângulo poloidal, temos uma definição análoga, desta vez mudando em relação a um circuito toroidal:

$$\varphi(r_0, \theta_0 + 2\pi m, \varphi_0 + 2\pi n) = \varphi(r_0, \theta_0, \varphi_0) + 2\pi n, \quad (2.8)$$

²¹Na literatura, considerando que a grande maioria é encontrada em inglês, encontra-se a palavra “tori” que é o plural de toro em latim.

²²Um circuito toroidal é definido como qualquer circuito/”loop” que circunda o eixo de simetria do toro uma vez

²³Similarmente ao circuito toroidal, há o circuito poloidal, definido como um circuito/”loop” que circunda o eixo menor exatamente uma vez

com n representando qualquer valor.

Com tais definições, para funções (ρ, θ, φ) bem comportadas, os ângulos generalizados (1.8, 1.9), podem ser representados mais genericamente:

$$\theta = \theta_0 + P_1(r_0, \theta_0, \varphi_0), \quad (2.9)$$

$$\varphi = \varphi_0 + P_2(r_0, \theta_0, \varphi_0), \quad (2.10)$$

em que P_1 e P_2 são funções periódicas de (θ_0, φ_0) . Para as coordenadas toroidais, uma relação deve ser também válida para quaisquer dois pares de coordenadas.

2.1.2 Mecânica Hamilton-Lagrange

A mecânica Hamiltoniana e Lagrangiana servem de base a diversas áreas de estudo da física, e tal aplicação ao estudo do confinamento de plasmas é de extrema necessidade, afinal têm-se um sistema de muitas partículas²⁴ e sua descrição perante as coordenadas e velocidades para a Lagrangiana, e coordenadas e momento para a Hamiltoniana^[24, 25], apresentam-se como pertinentes a este estudo.

A formulação de sistemas mecânicos hamiltonianos foi dada sobre um princípio, este conhecido como Princípio de Hamilton ou Princípio da Ação Mínima. De acordo com este, há uma função para qualquer sistema mecânico definida por $L(q, \dot{q}, t)$, nomeada de Lagrangiana, ou, de maneira extensa:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

ao qual o sistema tem de satisfazer a condição que: tomando dois instantes de tempo, t_1 e t_2 , aos quais o sistema ocupa posições²⁵ diferentes, determinadas, dadas pelas coordenadas²⁶ q_1 e q_2 , e entre essas posições, o movimento do sistema é dado por:

²⁴Densidade de partículas em um tokamak encontra-se por volta de $10^{19} \sim 10^{20} m^{-3}$, que é um fator um milhão de vezes menor que o gás atmosférico ^[5]

²⁵Representadas aqui e na literatura pela letra q .

²⁶Aqui é usado o número supraescrito para indicar o conjunto de coordenadas como feito anteriormente

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.11)$$

cuja integral de S deve assumir o menor valor possível, e está é definida como a Integral de Ação Mínima ^[27]. Assumindo, então, de maneira a simplificar a definição, que q possua um grau de liberdade e terá sua função $q(t)$ apresentar um mínimo em S , pôde-se então substituí-la por uma função que apresentava uma variação infinitesimal do tipo: $q(t) + \delta q(t)$; a mesma respeitava tal variação através de todo o caminho entre t_1 e t_2 . Aplicando-a em (2.11), temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \partial q, \dot{q} + \partial \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt,$$

a qual pode-se notar o mesmo formato da variação infinitesimal de q , assim, nomeou-se também esta de variação da integral, e escreveu-se:

$$\partial S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \partial q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \partial \dot{q} \right) dt = 0,$$

nota: quaisquer variável denotada por $\dot{x}$ definimos como $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$.

Integrando-a por partes, e lembrando que a variação infinitesimal através de todo o caminho implica: $\partial q(t_1) = \partial q(t_2) = 0$, encontram-se as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.12)$$

com $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$.

Através desta função, um sistema mecânico cuja a função de Lagrange é conhecida, terá todas suas coordenadas, acelerações e velocidades determinadas.

Similarmente à descrição de Lagrange, a descrição Hamiltoniana, feita sobre as coordenadas e momentos generalizados como previamente mencionado, apresentou-se como uma valiosa ferramenta, afinal, tal qual a mecânica Lagrangiana, ela também apresentava a propriedade da conservação de energia caso não fosse dependente do tempo explicitamente.

²⁷Como explicitado em seu livro ^[24], Landau menciona que tal formulação não é válida para o caminho total, mas sim para trechos pequenos do caminho total.

Para determinar-se então as equações do movimento que correspondem à mecânica Hamiltoniana necessitamos de outra ferramenta²⁸ de importante utilidade, sendo capaz de transformar um conjunto de variáveis dependentes em outras, a Transformada de Legendre.

Para definirmos então, tomou-se a equação (2.12) e sua derivada total, tal que:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \rightarrow dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i, \quad (2.13)$$

a expressão pode ser escrita desta maneira pois, por definição, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ e $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ representam os momentos generalizados. Assim, ao tomar-se o segundo termo da equação à direita da seta, tem-se que esta pode ser reescrita de forma:

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i,$$

a qual pode ser substituída na equação (2.13) após isolar o primeiro termo, passando-o para o lado de dL , assim obtêm-se que:

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i.$$

Apesar de sua forma não usual, esta equação é a equação de Hamilton, com o termo que acompanha a derivada representando a energia; assim, escreve-se mais claramente que:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (2.14)$$

e,

$$\delta H = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i, \quad (2.15)$$

a qual, pode-se notar facilmente as relações entre posição e momento. Escrevendo-as de maneira mais clara:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.17)$$

²⁸Não explorada neste trabalho, salvo esta menção e aplicação.

Estas então, representam as equações do movimento na mecânica Hamiltoniana e são as equações de Hamilton desejadas.

2.2 Eletromagnetismo

Considerando a natureza do plasma, este formado pelo super aquecimento de um gás de forma que os elétrons e o núcleo se dissociem, restando elétrons e íons livres [5], é compreensível que o uso de campos magnéticos afim de confinar-se o plasma seja uma opção válida. Esta é de fato a maneira com o qual o plasma é confinado, utilizando três campos magnéticos— um de natureza poloidal, um de natureza toroidal e um responsável pelo formato helicoidal.

O campo magnético toroidal é gerado através de bobinas colocadas na parte externa, no que corresponderia ao comprimento do tokamak se visto de cima, e, como a força sentida pelas partículas é perpendicular ao campo²⁹, as bobinas, portanto, possuem formato poloidal e garantem que o plasma, que tem tendência a se expandir, mantenha-se a uma distância adequada das paredes internas do reator.

O campo poloidal, similarmente, é gerado por bobinas que apresentam formato semelhante à letra maiúscula D, e a câmara do tokamak passa pelo espaço interno da letra. Assim, seguindo a mesma lógica da força ser perpendicular, temos a geração de um campo magnético poloidal.

Todavia, a presença destes dois campos não seria suficiente para o confinamento adequado de partículas em um tokamak. Uma partícula que se encontra na região mais externa do toros sentirá uma força menor do que uma partícula que se encontra ao centro, resultando no escape da partícula do confinamento. Para evitar que isto ocorra, utiliza-se do efeito de indução, similar ao empregado nos transformadores, para este controle.

A natureza condutora do plasma devido a presença de elétrons livres, apresenta-se como a solução encontrada para geração do campo helicoidal. Um solenoide é presente na estrutura central do reator, no espaço entre o eixo toroidal e a parede externa do toros no círculo interior. Ele é responsável por gerar um campo magnético, o qual induzirá uma corrente no interior do plasma, e esta, por sua vez, devido aos elétrons em movimento

²⁹Esta propriedade conhecida popularmente nos livros didáticos como regras da mão direita e esquerda, dependendo da carga da partícula.

circular em torno das linhas de campo, induz o campo magnético helicoidal desejado. Para o controle da intensidade desse campo, controla-se o quanto o campo magnético do solenoide central varia em determinado período de tempo.

A presença deste terceiro campo resulta na torção do campo magnético no formato helicoidal e as partículas por sua vez passam a orbitar as linhas de campo no interior da câmara. As órbitas e suas derivas são exploradas nas seções (2.3) e (2.4) respectivamente.

Assim é evidente que a modelagem do eletromagnetismo apresenta as ferramentas necessárias para compreender o confinamento do plasma. As equações fundamentais do eletromagnetismo relacionando campos elétricos e magnéticos foi descrita por James Clerk Maxwell por volta do meio do século XIX [19]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.21)$$

Os quais, $\vec{E}$ é o campo elétrico, $\vec{B}$ o magnético, $\vec{J}$ a densidade da corrente elétrica, ρ a densidade de cargas elétricas, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo dada em Faradays por metro e μ_0 é a permissividade magnética do vácuo, dada em Henry por metro.

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1},$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}.$$

Pela equação (2.19) temos que $\vec{B}$ pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.22)$$

em que $\vec{A}$ é um vetor potencial. Assim com esta equação (2.22), podemos substituí-la na

equação (2.20) e obter que:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = 0$$

simplificando³⁰:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Esta representação nos permite analisar o conteúdo do parênteses, o qual pode ser expresso por um gradiente de um potencial escalar da forma:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla \phi, \\ \vec{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como ambos potenciais, $\vec{A}$ e $\vec{\phi}$, podem ser reescritos por uma transformação de calibre do tipo: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$, $\vec{\phi}' = \vec{\phi} - \frac{\partial f}{\partial t}$; eles não são necessariamente definidos, assim, temos $\vec{B}$ e $\vec{E}$ definidos pelas equações (2.22) e (2.23), respectivamente.

Outro conceito a ser explicitado é o vetor de Poynting, definido como o fluxo de energia direcional em um campo eletromagnético, dado por:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}, \quad (2.24)$$

é de interesse para a descrição de um campo magnético que possui fluxo de cargas constante. Da equação (2.24) e das equações (2.20) e (2.21) podemos determinar que a densidade de energia eletromagnética, ε , dada por:

$$\varepsilon = \epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0},$$

tem variação temporal definida por:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right)$$

³⁰Pela identidade 6 do cálculo vetorial no apêndice A.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial |\vec{B}|^2}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.25}$$

da equação (2.20), temos:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E},$$

e da equação (2.21), temos:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\vec{J}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\nabla \times \vec{B}),$$

assim, substituindo ambas na equação (2.19), obtêm-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}}{2} \cdot \left(-\frac{\vec{J}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\nabla \times \vec{B}) \right) + \frac{\vec{B}}{2\mu_0} \cdot (-\nabla \times \vec{E}),$$

simplificando³¹ e organizando, encontra-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J},\tag{2.26}$$

Nesta equação acima (2.26), o primeiro termo corresponde ao divergente do vetor de Poynting, como explicitado acima, e o segundo termo representa a transferência de energia do campo às partículas.

Outra equação fundamental dentro do eletromagnetismo e para a descrição do movimento das partículas do plasma é a equação de Lorentz. Esta é responsável por ditar a força sentida por uma partícula imersa em um campo eletromagnético. Plasmas em geral são compostos por diversos tipos de partículas com carga, com as mais comuns sendo elétrons de carga fundamental $e_e = -e$ com $e = 1,6021 \times 10^{-19} C$ e massa m_e , prótons de carga fundamental $e_p = e$ e massa m_p e alguma espécie de íon carregado de carga dependente de seu número atômico Z , dada por: $e_i = Z_i e$, com massa m_i . Em geral, denota-se uma partícula qualquer pelo subscrito “s” de maneira que carga e massa respectivamente são apresentadas como e_s e m_s . Assim, pode-se descrever a força que uma partícula sente

³¹Identidade 8 do cálculo vetorial, apêndice A

pela Força de Lorentz:

$$m_s \frac{d^2 q}{dt^2} = e_s \vec{E} + e_s \left(\frac{dq}{dt} \times \vec{B} \right), \quad (2.27)$$

nota: q aqui representa a coordenada generalizada tal qual usada nas definições da mecânica na seção anterior. Ademais, temos um sistema de partículas não relativísticas.

2.3 Órbitas de Larmor

A equação de Lorentz apresentada acima descreve a força sentida por uma partícula em um campo. Para campos uniformes e invariantes sobre o tempo, tal força resulta no movimento da partícula e pode-se decompor sua velocidade baseada no campo magnético sentido pela partícula, assim, escreve-se:

$$\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|},$$

como o vetor unitário na direção do campo magnético. A definição implica que, para uma velocidade paralela ao campo, a partícula move-se livremente. Logo, escrevemos $\frac{dq}{dt} = \mathbf{v}$ e decompõe-se $\mathbf{v} = v_{\parallel} \hat{b} + \vec{v}_{\perp}$.

A porção perpendicular é influenciada diretamente pelo campo e descreverá o movimento de rotação em torno das linhas de campo que busca-se descrever. Assim, temos que: $v_{\perp} = \hat{b} \times (\mathbf{v} \times \hat{b})$.

De forma geral, pode-se descrever tal velocidade em função da Força de Lorentz (2.27) iniciando pelo termo em paralelo ao campo. Seu movimento é livre e sem influência do campo magnético, portanto, o segundo termo à direita da equação (2.27) é nulo. Logo, há apenas influência do campo elétrico sobre a partícula e sua velocidade é constante [5], vista abaixo na equação (2.31), resultando em:

$$v_{\parallel}(t) = v_{\parallel}(0) + \frac{e_s}{m_s} E_{\parallel} t. \quad (2.28)$$

Já o componente perpendicular ao campo é influenciado diretamente pelo mesmo e descreve um movimento orbital em torno das linhas de campo. Podemos modelar tal movimento orbital separando novamente as componentes $\mathbf{v}$ do movimento de $v_{\perp}$.

Tomando que o campo está na direção z , define-se as componentes como:

$$\frac{dv_x}{dt} = \eta_s v_y, \quad (2.29)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\eta_s v_x, \quad (2.30)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (2.31)$$

e η representando a Frequência Ciclotrônica, com o subscrito “s” representando uma partícula qualquer:

$$\eta_s = \frac{e_s \vec{B}}{m_s}. \quad (2.32)$$

Às equações (2.29 e 2.30), por separação de variáveis, encontra-se:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\eta_s^2 v_x,$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\eta_s^2 v_y,$$

Equações estas bem conhecidas na física, as quais apresentam solução do tipo: $v_x = v_\perp^* \sin(\eta t)$, $v_y = v_\perp^* \cos(\eta t)$. Assim constrói-se que a velocidade perpendicular da partícula é dada por:

$$v_\perp(t) = v_\perp^* [\vec{q}_1 \cos(\eta_s t) - \vec{q}_2 \sin(\eta_s t)] + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (2.33)$$

no qual, $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ são vetores unitários arbitrários que formam uma base ortonormal tripla com o vetor unitário $\vec{b}$: $\vec{b} \cdot \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = 1$. O segundo termo à direita da igualdade perpendicular é conhecido como Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, discutidas na seção 2.4. Integrando ambas equações (2.28 e 2.33) em relação ao tempo uma vez, nos dá:

$$P(t) = X(t) + r(t), \quad (2.34)$$

$$r(t) = r_L [\vec{q}_1 \sin(\eta_s t) + \vec{q}_2 \cos(\eta_s t)], \quad (2.35)$$

em que o termo $X(t)$ representa a parte não orbital do movimento da partícula e,

$$r_L = \frac{\vec{v}_\perp}{\eta_s},$$

ou,

$$r_L = \frac{m_s \vec{v}_\perp}{e_s \vec{B}}$$

é o Raio ou Órbita de Larmor descrito pela partícula.

Com relação ao primeiro termo $X(t)$, este é definido por sua derivada, tal que:

$$\dot{X}(t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \vec{b} \frac{e_s}{m_s} E_\parallel t. \quad (2.36)$$

Notavelmente, o movimento da partícula descrito pelo termo não orbital é composto pela deriva da mesma dentro do campo, junto de seu movimento livre sem influência do campo, o que condiz com a teoria.

Assim, em seu total, o movimento da partícula $P(t)$ imersa um campo é definida pela superposição de derivas de seu movimento, aceleração paralela e movimento orbital. Como mencionado no início desta seção, os campos aqui considerados são invariantes no tempo e uniformes, e, para casos simples, a descrição de movimentos orbitais possuem soluções exatas. Entretanto, para a maioria dos casos da descrição do movimento de partículas através das equações de Lorentz — principalmente devido a interação de distância infinita dos campos eletromagnéticos sentidos e influenciados por todas as partículas de um dado sistema — encontra-se sistemas de natureza não linear e suas soluções são, em geral, impossíveis [23]. Abaixo temos tabelas (2.1) e (2.2) que apresentam as frequências ciclotrônicas e os valores para as órbitas de Larmor ρ , respectivamente, encontradas no livro [5].

Com a adição da seguinte seção, uma descrição mais completa do movimento de uma partícula será encontrada ao fim deste capítulo, levando em conta todos os as derivas e órbitas descritas.

Frequência	Campo Magnético		
	1 Tesla	3 Teslas	5 Teslas
$ \eta_e (s^{-1})$	1.76×10^{11}	5.28×10^{11}	8.79×10^{11}
$\eta_p (s^{-1})$	9.58×10^7	2.87×10^8	4.79×10^8
f_e	$28 GHz$	$84 GHz$	$140 GHz$
f_p	$15 GHz$	$46 GHz$	$76 GHz$

Tabela 2.1: Frequências Ciclotron η e seus valores em Hertz $f = \frac{|\eta|}{2\pi}$ para elétrons e prótons [5]

nota: o subscrito em η e f denota qual partícula a frequência está representando

B	Raio de Larmor	Temperatura			
		10 eV	100 eV	1 keV	10 keV
3 Teslas	ρ_e	$0.003 mm$	$0.011 mm$	$0.035 mm$	$0.11 mm$
	ρ_p	$0.15 mm$	$0.48 mm$	$1.5 mm$	$4.8 mm$
5 Teslas	ρ_e	$0.002 mm$	$0.007 mm$	$0.021 mm$	$0.67 mm$
	ρ_p	$0.09 mm$	$0.29 mm$	$0.91 mm$	$2.9 mm$

Tabela 2.2: Raios das Órbitas de Larmor para elétrons e prótons, estes apresentados em diferentes temperaturas, aqui apresentadas em eV [5]

Um fato curioso que pode-se observar desta tabela [2.2] é que a órbita de elétrons aumenta de raio na presença de um campo magnético mais intenso — fato não discordante da teoria. Todavia, o uso de campos magnéticos mais intensos que estes apresentados na tabela são comuns, pois aumentam o controle sobre o plasma e melhoram o confinamento. Considerando o combustível utilizado, contendo prótons, os quais tem seu raio de órbita reduzido e nêutrons, os quais não interagem com o campo porém influenciam diretamente no raio orbital em uma relação inversamente proporcional devido à massa que adicionam [5], os valores condizem com a teoria.

2.4 Deriva de Partículas

Da modelagem construída acima, temos diversos sistemas que podem ser construídos e equacionados afim de encontrarmos soluções para as partículas que nele se encontram. Porém, qualquer desvio da suposição de campos uniformes e invariantes resulta na deriva de partículas ou em sua aceleração paralela ao campo magnético [5], trataremos nesta seção das derivas destas partículas.

Em geral, temos quatro motivos pelos quais partículas orbitando entorno as linhas de campo apresentam sua deriva dentro do plasma. Primeiramente é necessário explicitar que, as órbitas de Larmor descritas pelas partículas, acontecem geralmente ao centro do confinamento da câmara que contém seu movimento e em altas frequências como vistas nas tabelas da seção anterior, logo quaisquer deriva perpendicular é amplificada para escalas maiores e surgem dos seguintes motivos:

- 1) Presença de um campo magnético curvado;

Principalmente advinda da estrutura dos reatores aqui estudados.

- 2) Presença de um gradiente no campo magnético perpendicular ao campo magnético;

A qual, a variação de campos magnéticos para maior controle e manipulação do confinamento é essencial.

- 3) Presença de um campo elétrico perpendicular ao campo magnético;

Esta, produzida principalmente pela existência de partículas em movimento, como de se esperar pela teoria eletromagnética.

- 4) Campo Elétrico dependente do tempo;

Em um sistema real, produção de campos uniformes, principalmente nas condições aqui discutidas, são de grande dificuldade ou impossíveis devido à geometria.

2.4.1 Deriva Curvada

Iniciando pela deriva curvada, a partícula confinada tende a seguir a linha de campo central que guia seu movimento orbital. Para o presente caso, a mesma sofre seu desvio para além do plano de maneira perpendicular à linha de curvatura do campo magnético ao qual se encontrava. Para modelagem deste movimento é conveniente transformar para um sistema que acompanhe o movimento angular $\frac{v_{\parallel}}{R_0}$, descrito pela partícula a qual similarmente a seção anterior, $v_{\parallel}$ descreve a velocidade da partícula paralela ao campo magnético e R_c descreve o raio de curvatura do campo³².

Considerando este sistema escolhido, deve-se levar em conta a força centrífuga que a partícula sofre, e ao equacionarmos usando da equação Força de Lorentz (2.27), temos:

³²É incerto afirmar que tal raio de curvatura do campo é o mesmo ou possui mesma proporção que o raio maior de um tokamak R_0 com base nas referências utilizadas neste trabalho.

$$m_s \frac{dv}{dt} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \vec{i}_c + e_s (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.37)$$

no qual $\vec{v}_c$ representa o vetor unitário que acompanha o raio da curvatura. Analogamente a dedução feita para a Força de Lorentz, também pode-se dividir o movimento da partícula através do campo selecionando as devidas coordenadas. Novamente tomamos a coordenada z no mesmo sentido de $\vec{B}$, com y como a coordenada perpendicular ao campo elétrico temos que as equações do movimento da partícula ficam definidas como:

$$m_s \frac{dv_x}{dt} = e_s v_y \vec{B},$$

$$m_s \frac{dv_y}{dt} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} - e_s v_x \vec{B},$$

tomando a frequência ciclotron η anterior, e sabendo das soluções pelos mesmo métodos os quais encontramos as soluções em Lorentz, temos:

$$v_x = v_{\perp} \sin(\eta_s t) + v_{dc},$$

$$v_y = v_{\perp} \cos(\eta_s t),$$

em que v_{dc} é a velocidade da Deriva Curvada, dada por:

$$v_{dc} = \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_s R_c} \quad (2.38)$$

Da definição de η , este carrega o sinal da carga da partícula que traduz no movimento dos elétrons e íons terem direções opostas em suas derivas, com íons tomando a direção $\vec{i}_c \times \vec{B}$.

Há uma peculiaridade desta deriva com relação a falta de corrente presente no sistema, que resulta em uma combinação com a deriva $\nabla \vec{B}$, vista na subseção seguinte.

2.4.2 Deriva $\nabla \vec{B}$

Ilustrado na figura [2.2](#), a deriva gradiente ocorre perpendicularmente a ambos campo magnético e ao próprio gradiente de B. Configuração comum dentro de diversos sistemas

de confinamento incluindo aqueles de um tokamak, ocorrendo para campos que possuam gradiente transversal ao campo, nas porções da câmara toroidal que possuam campo magnético mais intenso, visto que o mesmo não é uniforme.

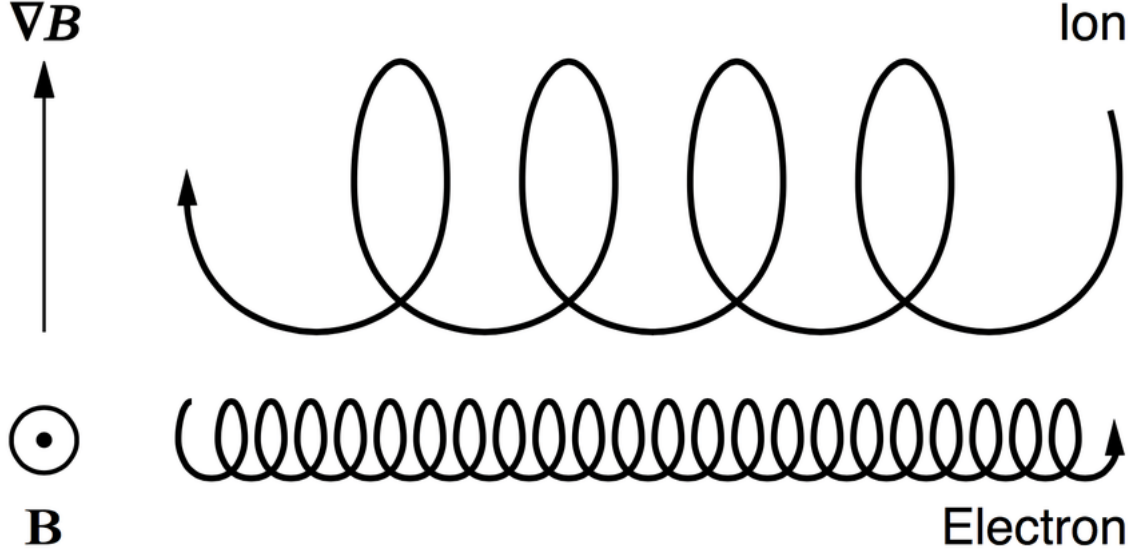


Figura 2.2: Deriva ∇B perpendicular ao campo $\vec{B}$ (adaptado de [3]), com $\vec{B}$, saindo do plano

Fonte: PhD thesis, 2009. Acesso em: 05 out. 2025

Para sua modelagem, tomemos parâmetros similares assumidos na Deriva Curvada, z é a direção do campo e, desta vez, y representa a direção gradiente do campo. É através da modelagem da equação do movimento em y e que pode-se encontrar a magnitude do desvio da deriva da partícula, assim, descrevemo-la:

$$m_s \frac{dv_y}{dt} = -e_s v_x \vec{B}. \quad (2.39)$$

Assumindo que a variação no campo magnético é pequena suficiente tal que a órbita de Larmor seja pequena comparada a B e seu gradiente, podemos descrever o campo por uma combinação:

$$B = B_0 + \vec{B}'y$$

com $y = 0$ sendo o centro do plano de órbita da partícula.

Usando desta assumida pequena variação do campo como uma perturbação para descrição da órbita, aplicada à equação (2.39), temos:

$$\frac{m_s}{e_s} \frac{dv_y}{dt} = -v_{0x}(B_0 + B'y) - v_{dB}B_0 \quad (2.40)$$

no qual, o termo v_{dB} representa a velocidade de deriva da partícula.

Assumindo nenhuma perturbação, o movimento da partícula perpendicular é dado por:

$$v_{0x} = v_{\perp} \sin(\eta_s t),$$

$$y = \omega_s \sin(\eta_s t),$$

o qual, $\omega_s = \frac{v_{\perp}}{\eta_s}$. Substituindo ambas na equação (2.40), têm-se:

$$\frac{m_s}{e_s} \frac{dv_y}{dt} = -v_{\perp} \sin(\eta_s t)(B_0 + B'\omega_s \sin(\eta_s t)) - v_{dB}B_0,$$

isolando a derivada à esquerda da equação e tomando-a como nula, encontramos a velocidade de deriva na direção x :

$$v_{dB} = \omega_s \frac{\vec{B}'}{B} v_{\perp}, \quad (2.41)$$

como presente de maneira mais comum na literatura, a forma vetorial de v_{dB} é:

$$v_{dB} = \frac{1}{2} \omega_s \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} v_{\perp}, \quad (2.42)$$

é importante lembrar que, devido à presença de η na definição de ω , o sinal é carregado dependendo da carga da partícula e a deriva da mesma será definida por este sinal, razão pelo qual elétrons e íons tem sentidos opostos.

Munidos deste, podemos agora tratar do caso particular da Deriva Curvada, que é a ausência de correntes. Neste, o campo ∇B passa portanto a tomar a mesma direção que a Deriva Curvada e forma similar, tal que:

$$\nabla B = -\frac{\vec{i}_c B}{R_c},$$

e sua velocidade de deriva, pela equação (2.42) passa a ser:

$$v_{dB} = \frac{1}{2} \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_s R_c},$$

o qual podemos combinar com a Velocidade de Deriva Curvada, equação (2.38), resultando na deriva combinada:

$$v_{dBc} = \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\eta_s R_c},$$

ou, novamente, na sua forma vetorial, mais encontrada na literatura:

$$v_{dBc} = \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\eta_s} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.43)$$

2.4.3 Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$

Sendo a deriva de maior influência, $\vec{E} \times \vec{B}$ é de grande importância na descrição, surgindo naturalmente na modelagem da órbitas de Larmor e fruto da construção eletromagnética. A deriva afeta o plasma completamente, pois a mesma independe da carga, massa e energia da partícula [5, p. 45]. Assim então, caracteriza-se como uma deriva provinda da existência de um campo elétrico perpendicular ao campo magnético, como o próprio nome indica, o qual resulta no movimento das partículas imersas em ambos os campos a tomarem caminhos orbitais perpendiculares a ambos os campos como de se esperar. O movimento pode ser observado na figura abaixo (2.3).

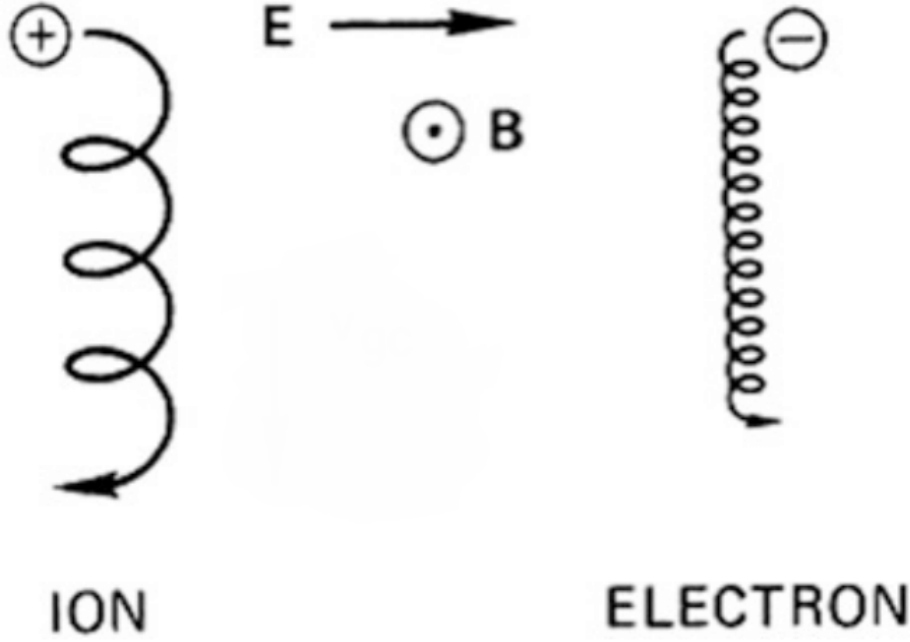


Figura 2.3: Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ com campos indicado perpendicularmente uns aos outros, com $\vec{B}$ saindo do plano, tal como o movimento das partículas (adaptado de [4]).

Fonte: Europa's atmosphere, 2018. Acesso: em 05/10/2025.

O processo da modelagem é análogo ao caso Curvado e logo, omitirei sua dedução, apontando que as mudanças estão presentes na substituição do termo $\frac{mv_{\parallel}^2}{R_c}$ pelo termo da Força de Lorentz, $e_s \vec{E}$ e analogamente o termo v_{dc} é substituído por $v_{dEB} = \frac{E}{B}$, tal que temos:

$$v_x = v_{\perp} \sin(\eta_s t) + v_{dEB}, \quad (2.44)$$

$$v_y = v_{\perp} \cos(\eta_s t). \quad (2.45)$$

Utilizando da construção eletromagnética desta deriva, pode-se notar que o campo $\vec{E}$ é dependente de seu sistema de coordenadas, logo podemos transformá-lo movendo o sistema para um que possua uma velocidade perpendicular do tipo:

$$\vec{E} + v_t \times \vec{B} = 0,$$

em que:

$$\vec{v}_t = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.46)$$

A vantagem de descrevermos o movimento da partícula neste sistema é que sua órbita passa a ser circular e, com essa observação, pode-se então concluir que no sistema original a partícula também terá uma órbita circular junto da velocidade de deriva $v_{dEB} = \vec{v}_t$, assim fazendo o produto vetorial com $\vec{B}$ da equação acima, temos que:

$$v_{dEB} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (2.47)$$

como previamente encontrada na equação (2.33), é a Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$.

2.4.4 Deriva Polarizada

Com a construção da Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, podemos agora tratar da Deriva Polarizada, resultante de um campo elétrico perpendicular tal qual a deriva anterior porém este é variante com respeito ao tempo. Como visto anteriormente nas outras derivas, íons e elétrons tem direções diferentes em suas derivas, similarmente nomeando esta deriva.

Modulando a partir da Força de Lorentz novamente, temos agora a presença de um campo Elétrico variante no tempo, que:

$$m_s \frac{dv}{dt} = e_s (\vec{E}(t) + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Utilizando, similarmente da transformação feita para se encontrar a equação (2.47) encontramos que a equação do movimento agora é, para um campo elétrico em um sistema acelerado:

$$m_s \frac{dv}{dt} = e_s \vec{v} \times \vec{B} - m_s \frac{dv_t}{dt},$$

de maneira que, v_t é a mesma velocidade definida anteriormente, logo tem-se:

$$m_s \frac{dv}{dt} = e_s \vec{v} \times \vec{B} - \frac{m_s}{B^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \times \vec{B}, \quad (2.48)$$

pode-se notar que o formato da equação não alterou-se muito salvo o termo que representa: $e_s \vec{E}$, ser substituído por: $-\frac{m_s}{B^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \times \vec{B}$, logo das construções anteriores e lembrando que $\vec{E}$ é perpendicular a $\vec{B}$, temos a velocidade de deriva polarizada dada por:

$$v_{dp} = -\frac{m_s}{e_s B^2} \frac{d\vec{E}}{dt} = -\frac{1}{\eta_s B} \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (2.49)$$

Descrita as derivas aqui e modeladas, juntamente da órbita de Larmor, podemos descrever de forma mais completa o movimento da partícula imersa em um campo eletromagnético. É importante explicitar que esta modelagem não é completa, ainda há diversos outros fatores a serem considerados como o diamagnetismo do plasma, mecânica de fluidos, magnetoidrodinâmica, e outros tópicos pertinentes à descrição do confinamento que infelizmente escapam ao que propõe esta monografia e logo não serão tratados³³.

Assim, finalizando a modelagem combinando todas as derivas aqui vistas encontramos:

$$v = \left(v_{\parallel}(0) + \frac{e_s}{m_s} E_{\parallel} t \right) \vec{b} + \rho [\vec{q}_1 \sin(\eta_s t) + \vec{q}_2 \cos(\eta_s t)] + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\eta_s} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} - \frac{1}{\eta_s B} \frac{d\vec{E}}{dt}, \quad (2.50)$$

com o primeiro termo, representando o movimento paralelo ao campo, o segundo a órbita em torno das linhas de campo, o terceiro a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, o quarto representando o termo de deriva ∇B e deriva curvada, e finalmente o último termo sendo a deriva polarizada.

2.5 Fator de Segurança q

O fator de segurança q é de grande importância para este estudo, especialmente para o capítulo seguinte pois atua diretamente em fornecer um valor qualitativo para a estabilidade do confinamento do reator, assim como um fator na teoria de transporte [5].

O fator em si é associado às linhas de campo e quantas vezes um trajeto é percorrido pelas partículas, isto se aplica a todas as linhas de campo presentes dentro do reator. É sobre as linhas que uma partícula confinada orbita conforme descreve seu trajeto no interior do torus.

O circuito poloidal mencionado próximo do final da seção (2.1.1) é o trajeto analisado em relação ao número de órbitas que uma partícula completa dentro do trajeto, logo uma relação entre os circuitos poloidal e toroidal. Tomando a modelagem adotada na

³³Para mais informações, os livros usados e citados na referência, com atenção extra ao livro [26] e a extensa obra compilada e organizada pela IAEA [20], o qual é um excelente livro e acessível a estudantes da graduação.

seção (2.1.1), um determinado ângulo toroidal qualquer φ_0 descreverá uma certa posição do circuito poloidal, o qual após um circuito completo, retornará à mesma posição, logo caracterizamos ela como uma coordenada que se comporta como o tempo de um sistema. Esta é demarcada por uma variação no ângulo toroidal $d\varphi_0$, logo podemos escrever q , para uma linha de campo qualquer:

$$q = \frac{d\varphi_0}{2\pi}. \quad (2.51)$$

Isto diz que, para um $q = 1$ a linha de campo completa uma volta e retorna a sua posição inicial após um circuito, se a mesma realiza um caminho maior seguindo uma linha de campo mais externa por exemplo, o valor de q será maior. Para valores racionais de $q = \frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros, com m sendo o número de voltas na direção toroidal e n na poloidal, temos expressa diretamente a importância do fator pois deseja-se um maior número de órbitas toroidais, ou seja ao redor da linha, do que um número de órbitas poloidais, ou seja através de todo o trajeto do tokamak. Se a partícula completa mais órbitas ao redor das linhas de campo do que trajetos no reator, indica uma pequena área varrida e logo menor possibilidade de se escapar do confinamento, danificando o reator, interrompendo ou atrapalhando a reação.

Tomando que o campo magnético de um tokamak é composto por duas componentes magnéticas³⁴ $\mathbf{B}_{\theta_0}$ e $\mathbf{B}_{\varphi_0}$, poloidal e toroidal respectivamente, tal que: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\theta_0} + \mathbf{B}_{\varphi_0}$, podemos modelar uma fórmula suficientemente aproximada através desta definição de campo e de um toro cilíndrico, tal qual representado em (2.1 (a)), adotando que a equação da linha campo seja [5, p. 111-112], [23]:

$$\frac{R_0 d\varphi_0}{ds} = \frac{B_{\varphi_0}}{B_{\theta_0}},$$

em que ds representa a distância percorrida na direção poloidal conforme move-se através do ângulo toroidal $d\varphi_0$ e R_0 o raio maior. Assim tomando a equação (2.51):

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R_0} \frac{B_{\varphi_0}}{B_{\theta_0}} ds, \quad (2.52)$$

³⁴Infelizmente a descrição detalhada destas duas componentes tomaria muito espaço e, portanto, não são contempladas neste trabalho. O capítulo 3 do livro [23] de Hazeltine encontrado na bibliografia deste trabalho apresenta uma elegante e rigorosa descrição destes campos, sua leitura não aparenta grande complicação e deve ser acessível à estudantes da graduação.

na qual a integral é de um circuito poloidal completo, tal qual a linha pontilhada ao centro da imagem (2.1 (a)). A simplificação desta equação acima deve-se, para um fator de segurança mais apropriadamente descrito, descrevê-lo para todas as linhas de campo magnético, logo para cada superfície magnética. Assim, simplifica-se a descrição para um toros cilíndrico, ou seja, para um torus que possua proporção dos raios $\frac{R_0}{r}$, com $R_0 > r$, faz-se:

$$\frac{2\pi R_0}{2\pi r} q \approx \frac{B_{\varphi_0}}{B_{\theta_0}} \Rightarrow q \approx q_c \equiv \frac{r}{R_0} \frac{B_{\varphi_0}}{B_{\theta_0}}, \quad (2.53)$$

$$q(r) \approx q_c = \frac{r}{R_0} \frac{B_{\varphi_0}}{B_{\theta_0}} \quad (2.54)$$

q_c chamado na literatura comumente de fator de segurança cilíndrico.

Novamente nota-se a relação entre caminho percorrido no sentido toroidal e no poloidal, agora envolvendo os raios menor e maior. Para melhor confinamento usando desta descrição, um q de valor pequeno é melhor para o confinamento, pois indica a pequena órbita descrita pela partícula ao redor da linha de campo, assim quanto mais próximo de zero, mais o movimento se assemelha a linha descrita pelo circuito poloidal, logo, melhor a qualidade do confinamento.

Capítulo 3

Dinâmica Não Linear

3.1 Introdução e Motivação

O estudo da dinâmica não linear e a teoria caótica moderna vêm se demonstrando, desde sua concepção, no trabalho de Edward Norton Lorenz de 1963 [27], como área vital na compreensão de sistemas dinâmicos de condições iniciais sensíveis. Indubtavelmente, sua aplicação ao estudo dos plasmas contidos em Tokamaks surge como uma proposta não apenas de grande interesse, mas também de valiosa importância. O plasma é confinado por campos magnéticos axissimétricos, como discutido na seção (2.2), logo sua estrutura de linhas de campo são governadas por equações Hamiltonianas as quais podem ter um termo perturbativo inserido a fim de estudarmos as consequências de regiões caóticas no plasma.

Devido a toda construção da dinâmica Hamiltoniana, as linhas de campo usadas para descrição dos mapas magnéticos são, em geral, órbitas destes sistemas Hamiltonianos, com o ângulo toroidal sendo usado como variável temporal. Consequentemente, seções de Poincaré, que pode ser visualizada na Figura 3.1, surgem como a forma mais adequada para a descrição das perturbações, estas as quais tem suas linhas de campo interseccionando com a seção poloidal do toro [28, 29]. Tais órbitas são bem conhecidas e foram descritas anteriormente, no capítulo acima, ademais o fator de segurança q , modelado na seção (2.5), é monitorado constantemente em testes pois o mesmo dita sobre a estabilidade do plasma e, em geral, quanto maior seu valor, mais estável o plasma se encontra. As instabilidades ocorrem no plasma devido a forma do confinamento, como expressado

na seção (2.1), e sua pequena não uniformidade pode ser estudada como uma perturbação a ser inserida nas equações Hamiltonianas.

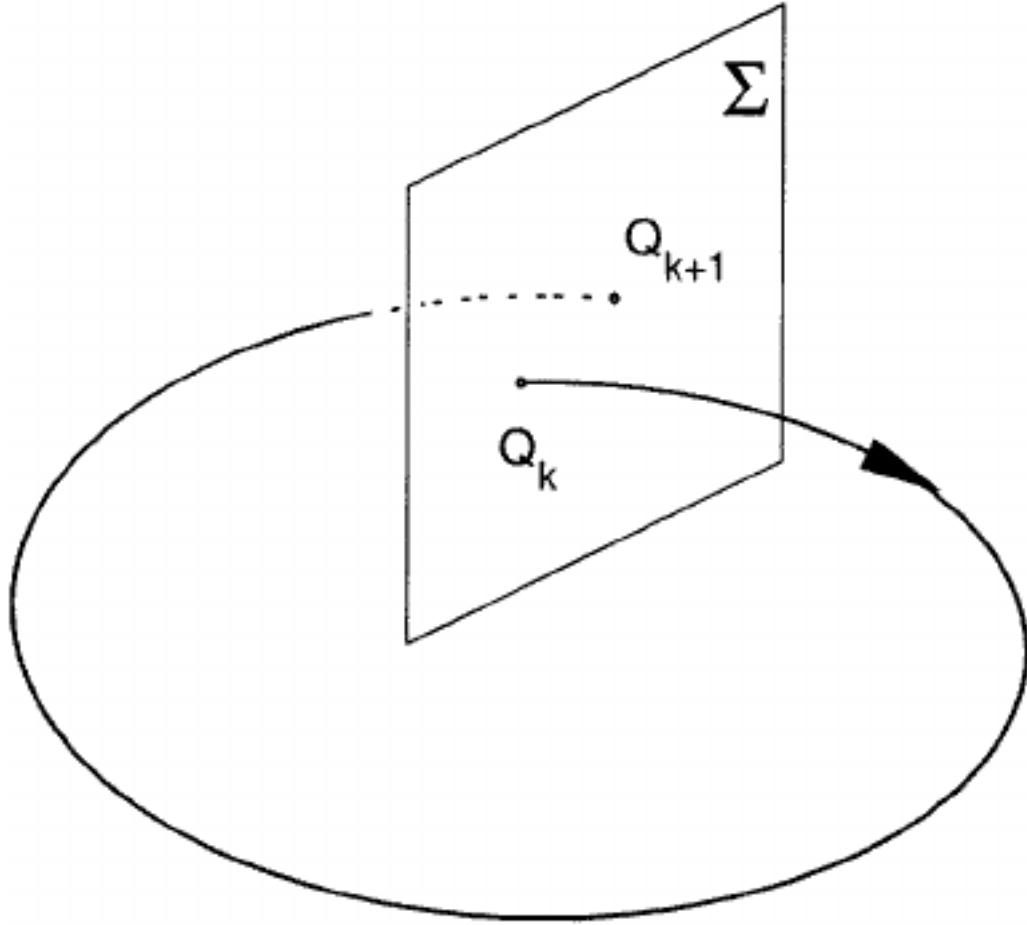


Figura 3.1: Seção ou Mapa de Poincaré. Responsável por demonstrar, usando um subespaço de menor dimensão Σ , para projetar as trajetórias de um sistema pela análise desta interseção.

Fonte: A new integration method of Hamiltonian systems by symplectic maps - Scientific Figure on ResearchGate. Disponível em:

https://www.researchgate.net/figure/Sketch-of-Poincare-section-and-Poincare-map_fig1_230660497

Acesso em: 15 out. 2025

Em geral, quando o fator de segurança é uma função monotônica do raio, temos um mapa conhecido como *twist*, quando isto não é verdade, por exemplo quando o fator de segurança q tem um máximo, temos um mapa *não-twist* [28, 30, 29]. Mapas *não-twist* são de grande interesse de estudo matemático pois são mapas de áreas conservativas que viola a condição de *twist* localmente no espaço de fase [31]:

$$\frac{\delta x_{i+1}(x_i, y_i)}{\delta y_i} \neq 0 \quad \forall (x_i, y_i). \quad (3.1)$$

Ademais, teorias como a de Kolmogorov-Arnold-Moser(KAM) [32, p. 306-307] e Poincaré-

Birkhoff [33] que descrevem mapas de áreas conservativas assumem a condição twist³⁵[34]. Assim, mapas não-twist são atrativos matematicamente, mas também fisicamente relevantes por sua baixa dimensionalidade ser capaz de descrever diversos sistemas físicos, incluindo as linhas de campo magnético em tokamaks [31]. O estudo aqui feito focou-se sobre um dos aspectos encontrados nos plasmas, as “barreiras de cisalhamento”³⁵, foco deste estudo, e o fenômeno consequente desta, a “pegajosidade” ou “aderências”³⁶.

Na literatura, encontra-se o termo “curvas de cisalhamento” com frequência, estas curvas são as barreiras de cisalhamento as quais formam-se em sistemas não monotônicos e são responsáveis pela barragem perfeita de partículas no transporte caótico, entretanto quando tais barreiras são quebradas o efeito de aderência se torna presente, em que partículas ficam aprisionadas nestas barreiras rompidas e devido a essa aderência, ainda comportam-se como barreiras, o que leva a comportamentos caóticos e transporte anômalo [30, 35], este que pode levar a partículas escapando o confinamento magnético do plasma e colidindo com as paredes internas da câmara resultando em potenciais danos ao reator [36].

Assim, o estudo dos mapas não twist, em específico o estudo das curvas, barreiras de cisalhamento e suas quebras, se tornam mais um caminho a ser explorado para viabilizar e melhor controlar o confinamento do plasma e a fusão termonuclear, influenciando diretamente na vida útil dos dispositivos. Esses efeitos foram investigados e analisados matematicamente através de simulações numéricas encontradas nas seções seguintes.

3.2 Modelagem do Mapa Não-Twist e a Seção de Poincaré

Como mencionado, para este estudo usaremos dos mapas não-twist, em específico o mapa conhecido como “padrão” ou SNM³⁷, o qual é apresentado em [37] como mapas de áreas conservadas, afinal tais sistemas são de dinâmica hamiltoniana e logo tem sua energia conservada, se não dependentes do tempo explicitamente.

³⁵“Shearless Barriers” em inglês

³⁶Do inglês “Stickiness”

³⁷Do inglês “Standard Nontwist Map”

O mapa então utilizado tem forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} &= y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

os quais $(x, y) \in T \times \mathbb{R}$ são coordenadas do espaço de fases e $a, b \in \mathbb{R}$ são parâmetros.

Por ser não-twist, este viola a condição da equação 3.1 mencionada acima, através da curva no espaço de fases. Sobretudo para este estudo nos interessa o parâmetro b , pois o mesmo está associado com a perturbação do sistema. O parâmetro a esta relacionado ao fator de segurança $q(r)$, o qual na literatura da dinâmica não linear aparece com mais frequência com o nome “número de enrolamento” ou, mais adequadamente, o número de voltas descrito pelas linhas helicoidais $\iota = \frac{2\pi}{q}$. Esta também possui outro nome, discutido logo em seguida

A verificação do Jacobiano do sistema, garantindo que este é conservativo, pode ser encontrada no apêndice B

Usando da modelagem da equação (2.53), tem-se:

$$\begin{aligned} q(r) &= \frac{d\varphi_0}{d\theta_0} = \frac{r}{R_0} \frac{B_{\varphi_0}}{B_{\theta_0}} \\ \frac{d\theta_0}{d\varphi_0} &= \frac{1}{q(r)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assumindo então, uma seção de Poincaré em $\phi_n = 2\pi n$, tal que:

$$d\phi \sim \partial\phi = \phi_{n+1} - \phi_n = 2\pi(n+1) - 2\pi n = 2\pi$$

$$\partial\theta = \frac{\partial\phi}{q(r)} \rightarrow \theta_{n+1} - \theta_n = \frac{2\pi}{q}$$

Temos então que um mapeamento discreto pode ser construído na forma:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n)}, r_{n+1} = r_n \quad (3.4)$$

Tratando de incluir as perturbações do sistema, usamos de uma simples modulação

toroidal periódica do campo, assim:

$$r_{n+1} = r_n + \beta \sin(2\pi\theta_n) \quad (3.5)$$

e a equação angular:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_{n+1})} \quad (3.6)$$

O qual, para um $q(r)$ não monótono, de forma a violar a equação 3.1, tomamos $\frac{2\pi}{q(r)} = \iota(r) = \alpha(1 - r^2)$, retornando as equações x e y (3.2). A variável $\iota(r)$ que aparece na equação anterior é nomeada de raio de cisalhamento na literatura e deve ter um local mínimo local para a condição de não-twist, tal como, se $\frac{d\iota(r)}{dr} = 0$, apresentando portanto um extremo, temos a condição não-twist, similarmente.

Assim temos o mapa não-twist:

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + \beta \sin(2\pi\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \alpha(1 - r_{n+1}^2) \end{cases}$$

Como mencionado no resumo deste trabalho, os mapas apresentados na seção seguinte foram gerados utilizando a versão 13.3.1.0 do Wolfram Mathematica, foi utilizado o método numérico para gerar-se os mapas com 10^4 iterações para cada valor de a , variando b no intervalo de $[0.3, 0.5]$, com condições iniciais uniformemente distribuídas em $x_0 \in [0, 2\pi]$ e $y_0 \in [-1, 1]$. De maneira mais clara, foi utilizado as equações x e y de 3.2, e portanto, os mapas apresentaram x e y com as variáveis a e b . Entretanto, o mesmo mapa poderia ser construído com as equações r_{n+1} e θ_{n+1} encontradas acima sem mudança nos resultados com $x = \theta_{n+1}$, $y = r_{n+1}$, $\alpha = a$ e $\beta = b$.

3.3 Resultados e Discussão

Os mapas aqui gerados também se encontram nos trabalhos [29, 34] e foram a inspiração para este estudo.

Do contrário dos mapas KAM comumente vistos, os mapas não twist³⁸ tem a presença de ilhas com mesmo período e disposição que segue ao longo de uma barreira de cisalhamento ou curva invariante, e em lados opostos a essa barreira, de tal forma que aparentam

³⁸O qual a teoria KAM não é válida.

ser espelhadas. Essa formação espelhada ocorre devido à construção não monotônica do raio para violação da condição twist.

O fator a é fixo e busca-se variar a perturbação b do sistema, o qual conforme aumenta-se tal perturbação, ao invés de desaparecerem como usualmente em outros mapas, muitos deles sendo consumidos pelo mar caótico do sistema, ocorre uma reconexão de suas separatrizes. Esta reconexão apresenta duas formas da qual são identificadas na literatura [29]:

1. **Homoclínica:** Na qual as ilhas tem seus centros alinhados verticalmente.
2. **Heteroclínica:** Na qual as ilhas possuem pontos elípticos de uma cadeia de ilhas alinhadas com os pontos hiperbólicos umas das outras, resultando em um mapa que tem ilhas sequenciais se alinhadas.

Os mapas gerados aqui são heteroclínicos:

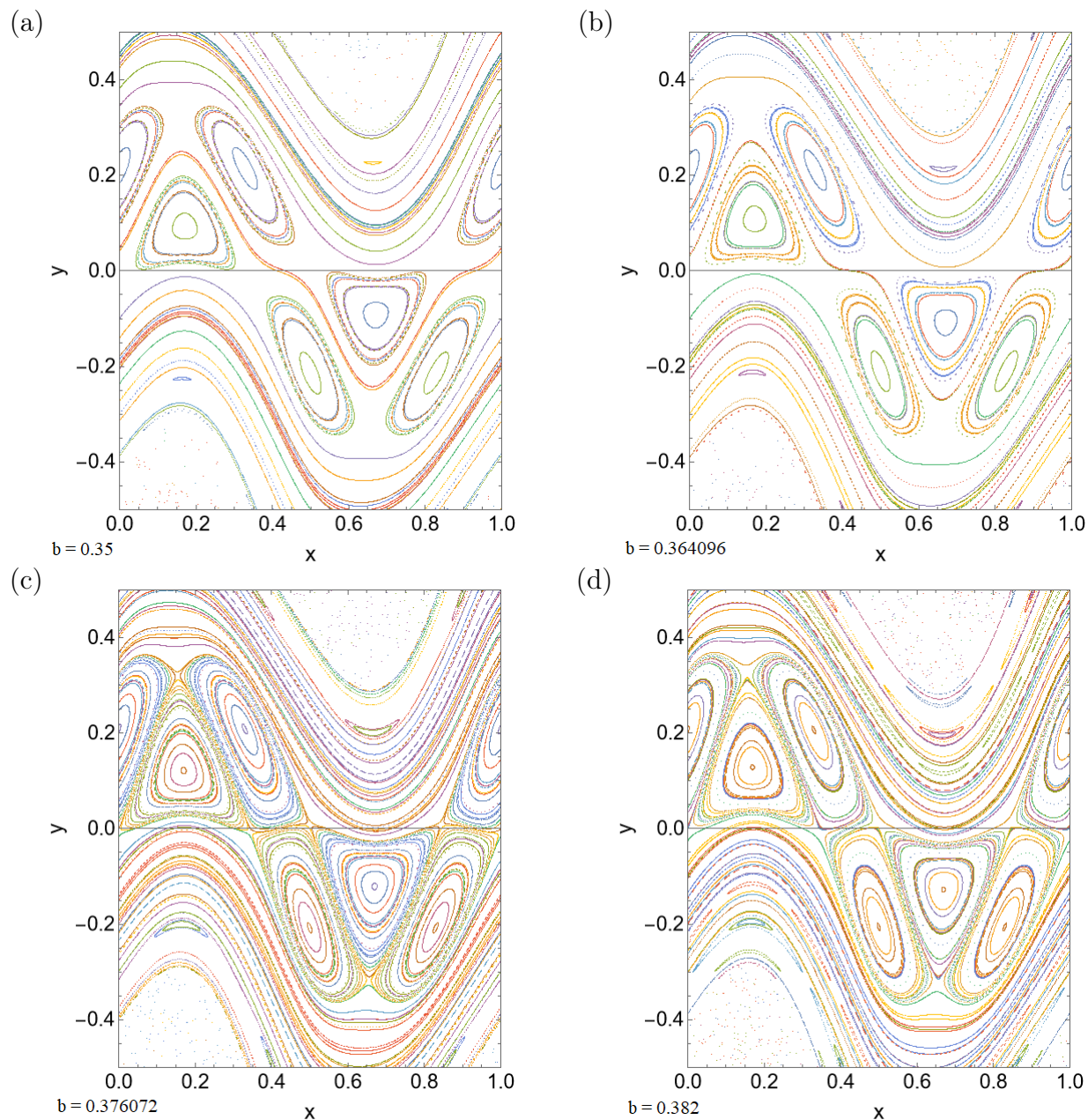


Figura 3.2: Espaços de fases gerados e o processo de reconexão das ilhas $a = 0.345$ e temos para (a) $b = 0.35$, (b) $b = 0.364096$, (c) $b = 0.376072$, (d) $b = 0.382$

Fonte: Autoral, gerados dia 10 out. 2025 utilizando a versão 13.3.1.0 do Wolfram Mathematica.

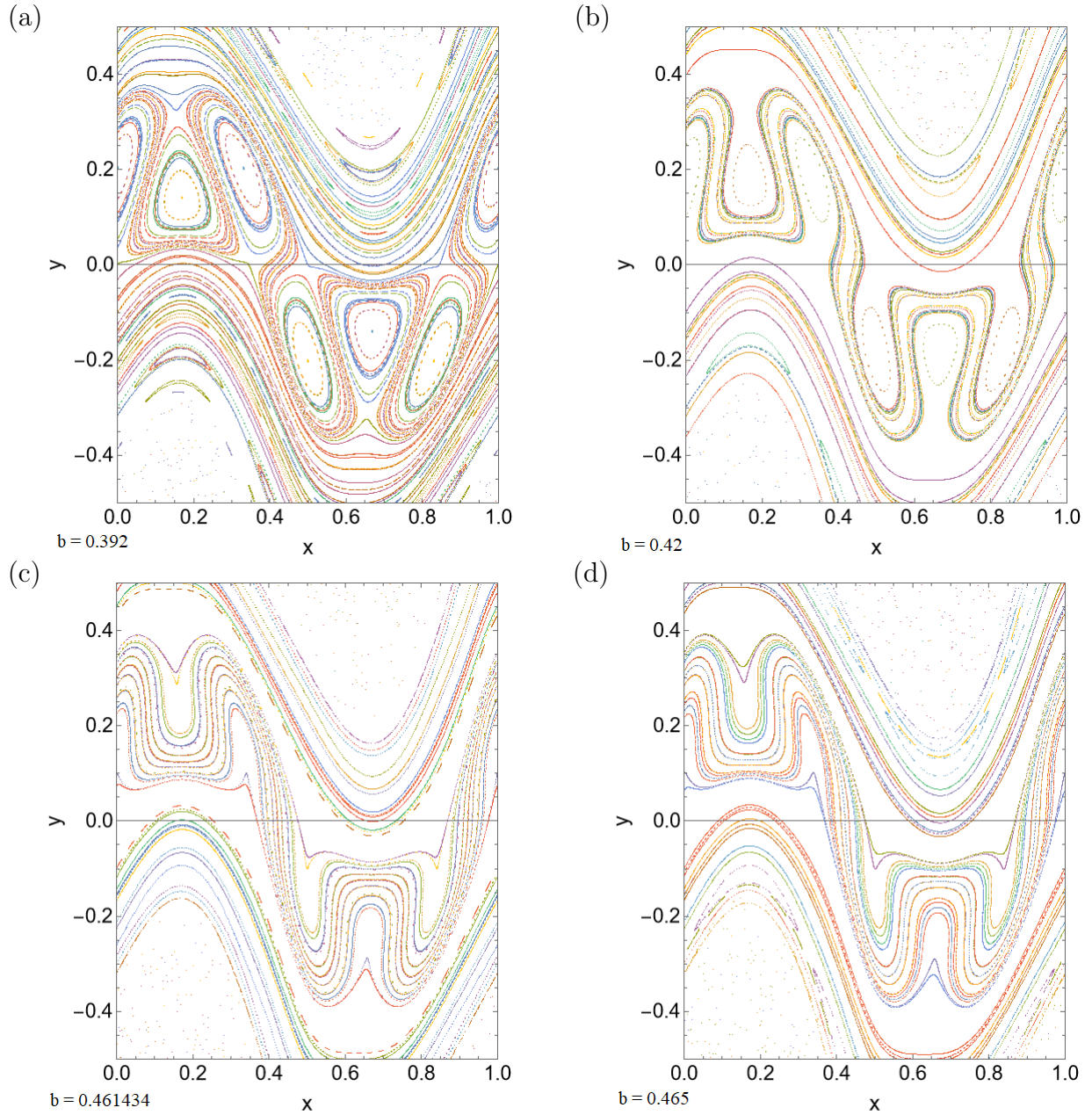


Figura 3.3: Espaços de fases gerados e o processo de reconexão das ilhas $a = 0.345$ e temos para (a) $b = 0.392$, (b) $b = 0.42$, (c) $b = 0.461434$, (d) $b = 0.465$

Fonte: Autoral, gerados dia 10 out. 2025 utilizando a versão 13.3.1.0 do Wolfram Mathematica.

Fisicamente, as imagens representam um corte transversão no torus de um reator tokamak, com a linha mais externa representa as paredes internas do reator, com o mar caótico de pontos representando a região externa ao reator e fora do confinamento. As linhas e ilhas ao interior, também são caóticas e representam a turbulência do plasma; com essa descrição a relação física com a realidade fica estabelecida e uma análise das linhas segue.

Pode-se notar com clareza a divisão das ilhas por uma linha invariante, presentes

nas figuras (3.2(a) e 3.2(b)), em que a maior perturbação em (b) resulta no início do processo da quebra da barreira de cisalhamento, vista separando as ilhas, a qual se funde às diversas curvas invariantes na figura (3.2(c)). Porém, apesar de sua quebra, na figura (3.2(d)) pode-se notar a presença de mais curvas invariantes entre as ilhas, tais linhas, mesmo que mais distorcidas, traçam o caminho previamente descrito pela barreira de cisalhamento encontrada em (3.2(a)).

Conforme a perturbação continua a aumentar, as ilhas passam a conectar as separatrizes com os pontos hiperbólicos e criam um circuito, vistas em (3.3(a)). Em perturbações suficientemente altas, figura (3.3(c)), a linha que antes separava as ilhas no espaço de fazes existe no centro. Esta passa por todas as áreas nas quais as ilhas existiam, e as demais linhas ao centro configuram barreiras que isolam o espaço central das outras linhas invariantes que encontram-se na região mais externa.

As figuras (3.3 (b), (c) e (d)), as quais apresentam as linhas retorcidas similares a uma senoide, representam um tipo de instabilidade conhecida como belisco-Z ou de dobra, causada exatamente por um campo magnético não uniforme, logo, perturbado, com regiões o qual o campo é mais intenso e a consequência é uma dobra física no plasma

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foi descrito motivações para o estudo da fusão nuclear, do reator conhecido como Tokamak, assim como a importância da dinâmica não linear para a compreensão e melhoramento do confinamento do plasma, assim como a descrição breve do funcionamento de estrelas e como similarmente realizamos o processo da fusão no meio terrestre, a história pela qual a criação do tokamak se tornou realidade e centro dos estudos da fusão. A modelagem simples do movimento descrito por uma partícula no interior de seu confinamento magnético, permitindo estabelecer sua conexão com a estabilidade do confinamento que finalmente termina com o estudo da dinâmica não linear inerente ao plasma e as consequências associadas com turbulências e perturbações que o meio pode possuir.

Os resultados obtidos, utilizando da variação do parâmetro β , o qual representa a perturbação no campo magnético, demonstra que pequenas flutuações são suficientes para causar efeitos, como a eliminação de curvas invariantes e reconexões significativas nas ilhas de ressonância, alterando a topologia do espaço de fases. Além de também apresentarem a instauração de novas linhas invariantes, configurando novas barreiras de transporte as quais podem resultar em mais transportes anômalos que poderiam vir a danificar o equipamento.

Esses resultados não só corroboram com a importância do estudo dos mapas não-twist e da análise de sistemas Hamiltonianos quase integráveis, como também contribuem diretamente para a compreensão das relações que os mecanismos principais de confinamento de plasmas nos dispositivos do tipo Tokamak apresentam, integrando a abordagem teórica

da dinâmica não linear à física de plasmas magneticamente confinados e a investigação do transporte anômalo.

O estudo, portanto, representa uma ponte conceitual entre a teoria do caos hamiltoniano e os fenômenos observados no confinamento magnético de plasmas em Tokamaks experimentais, contribuindo para o aprimoramento de modelos analíticos e numéricos na física de plasmas confinados.

Entretanto, apesar de representar um modelo adequado e útil para o estudo e análise qualitativa da topologia do estado de fases e suas características, o mesmo apresenta limitações inerentes à sua formulação idealizada. Dentre as simplificações adotadas, destaca-se a ausência de termos dissipativos, provindos das colisões entre as partículas, a perda de energia radiativa ou por interação de borda do plasma com as paredes internas do reator, os quais desempenham um papel relevante não só ao confinamento como também à dinâmica real do plasma.

Ademais, por ser um modelo bidimensional, não está incluso variações espaciais e temporais do campo magnético, restringindo a aplicação direta a situações experimentais de maior complexidade a qual a investigação das variações do campo seja o foco. Mas, mesmo com as limitações apresentadas o sistema ainda foi capaz de fornecer uma análise detalhada das estruturas invariantes e transições entre regimes ordenados e caóticos, os quais podem ser iterados e servem de base para estudos posteriores de maior complexidade.

Logo, como progressão e desdobramento deste estudo, pode-se propor algumas linhas de pesquisa futuras que visam aprofundar a compreensão dos mecanismos de confinamento e transporte em Tokamaks:

1. Inclusão dos termos dissipativos nas equações do mapa, representando os efeitos de colisão, interação de borda, resistividade e gradientes de pressão, os quais possibilitam a investigação para sistemas de equilíbrio não hamiltonianos e regimes estacionários;
2. Extensão do modelo para incluir mais graus de liberdade, permitindo estudos tridimensionais do campo magnético e a análise de fenômenos como o transporte radial e a reconexão magnética em geometrias mais realistas;
3. Aplicação de técnicas de análise estatística e medidas de caos, por exemplo os expoentes de Lyapunov ou entropia de Kolmogorov-Sinai, de maneira a quantificar a

transição entre regimes regulas e caóticos no espaço de fase;

4. Comparação direta com resultados experimentais, especialmente os dados de seções de Poincaré obtidos nos dispositivos reais, como DIII-D, JET, JT-60SA ou o futuro ITER quando este começar seus testes, a fim de validar o comportamento qualitativo previsto pelos modelos não-twist aqui apresentados.

Essas perspectivas apontam para a possibilidade de construção de modelos mais abrangentes, capazes de capturar de forma mais fiel a complexidade dos sistemas de confinamento magnético, contribuindo tanto para a teoria quanto para a prática experimental na física de plasmas.

Apêndice A

Cálculo Vetorial

Aqui será apresentado de forma sucinta as identidades mais importantes do cálculo vetorial que o trabalho considera que o leitor conheça. Para mais informações sobre as definições e demonstrações à rigor, o autor recomenda a leitura dos livros [38, 39, 40] encontrados na bibliografia. Vetores aqui são indicados por letras minúsculas em negrito e campos vetoriais por letras maiúsculas em negrito, tal qual se encontra em grande parte da literatura.

O uso do calculo vetorial é extenso na física, e ao que tange este trabalho, principalmente na descrição do eletromagnetismo, define-se aqui as operações da álgebra vetorial e as identidades:

Soma Vetorial e Produto por escalar

Para a soma, tomemos o espaço em $\mathbb{R}^3$ (a definição pode ser estendida a qualquer espaço real) e dois tripletos ordenados (x^1, x^2, x^3) e (y^1, y^2, y^3) , define-se então que:

$$(x^1, x^2, x^3) + (y^1, y^2, y^3) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$$

Similarmente define-se a subtração, trocando apenas a operação realizada.

Para o produto com um escalar temos que, para o mesmo espaço $\mathbb{R}^3$, um escalar³⁹ qualquer α e o tripleto (x^1, x^2, x^3) , define-se então:

³⁹Definimos um numero real qualquer como um escalar, logo, são sinônimos

$$\alpha(x^1, x^2, x^3) = (\alpha x^1, \alpha x^2, \alpha x^3)$$

Produto Escalar ou Produto Interno

Para o produto escalar, tomemos dois vetores $\vec{a}, \vec{b}$ em $\mathbb{R}^3$, tomemos que $\mathbf{a} = a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k}$ e $\vec{b} = b^1\hat{i} + b^2\hat{j} + b^3\hat{k}$, define-se produto vetorial como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$$

Note que o produto vetorial/interno de dois vetores resulta em um escalar e a propriedade $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ e $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$.

Produto Vetorial

Tomemos os mesmo vetores anteriormente utilizados em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k}$ e $\mathbf{b} = b^1\hat{i} + b^2\hat{j} + b^3\hat{k}$, o produto vetorial então, entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$$

Ademais, temos propriedades algébricas que surgem de tal definição que serão úteis para as identidades abaixo:

Tomando os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ sendo da mesma forma de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e os escalares α, β e γ , tem-se que:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
2. $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
3. $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

De 1. temos que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{a}$, logo, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Similarmente, $\hat{i} \times \hat{i} = 0, \hat{j} \times \hat{j} = 0$ e $\hat{k} \times \hat{k} = 0$. Tem-se também que $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ e $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, permutando ciclicamente.

A ultima propriedade é o produto triplo, dado por:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

nesta ordem resulta em um número real. Similarmente, temos $\mathbf{a} = a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k}$, $\mathbf{b} = b^1\hat{i} + b^2\hat{j} + b^3\hat{k}$ e $\mathbf{c} = c^1\hat{i} + c^2\hat{j} + c^3\hat{k}$, logo então:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \hat{k} \right) \cdot (c^1\hat{i} + c^2\hat{j} + c^3\hat{k})$$

É fácil de notar que este produto resulta em:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Gradiente

Tomando uma função $f(x^i)$ com $i = 1, 2, 3$, podendo se estender a n variáveis ou dimensões se necessário, representando, neste caso, coordenadas cartesianas tridimensional variáveis e G como a matriz diferencial 1×3 de forma:

$$G = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \end{array} \right|$$

Assim, aplicando G em $f(x^i)$, temos:

$$Gf(x^i) = \frac{\partial f}{\partial x^1} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \hat{k}$$

que resulta no vetor correspondente, nomeado de gradiente de f , comumente denotado ∇f ou $\text{grad} f$

$$\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^1} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \hat{k}$$

Divergente

Definido pelo **operador del**, divergente (e o rotacional, definido abaixo) é usado, tal

que:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x^1} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial x^2} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial x^3} \hat{k}$$

é o operador.

Assim, definimos o divergente como o produto escalar do operador ∇ com um campo vetorial $\mathbf{F}$ em que $\mathbf{F} = F^1 \hat{i} + F^2 \hat{j} + F^3 \hat{k}$, que resulta no campo escalar:

$$\text{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}$$

Rotacional

Similarmente ao divergente, o rotacional é definido pelo produto vetorial do operador ∇ com um campo vetorial $\mathbf{F}$, resulta em um campo vetorial tal que:

$$\text{rot} \mathbf{F} = \text{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) \hat{k}$$

Operador de Laplace

Um dos operadores mais importantes para a física e suas leis, este é definido pelo divergente do gradiente de uma função f qualquer, tal que:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

nota: devido a escolha anterior da representação do espaço de coordenadas x^i , o laplaciano, que necessita do uso da derivada parcial segunda, teria uma notação confusa, assim, nesta representação, o número subscrito representa a coordenada tal que $x^i \rightarrow x_i$ e o número supraescrito representa de fato um expoente, indicando o grau segundo da derivada.

Identidades Básicas do Cálculo Vetorial

Apresento aqui as identidades mais básicas do cálculo vetorial, não todas usadas mas úteis de serem lembradas.

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$	2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, c sendo uma constante
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$	4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, para $g \neq 0$
5. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$	6. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
7. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$	8. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$
9. $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$	10. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$
11. $\nabla \times \nabla f = 0$	12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
13. $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$	14. $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

Apêndice B

Verificação do Jacobiano

Verificarei aqui rápida e sucintamente o Jacobiano do mapa não twist utilizado. Definimos o Jacobiano pela matriz:

$$J = \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right),$$

com F^i representando as i 's funções do sistema e x^j representando as coordenadas usadas. Tomando que no mapa não twist utilizado trata-se de duas funções x e y , temos que $i = j = 2$, logo temos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x+a(1-(y-b\sin(2\pi x))^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x+a(1-(y-b\sin(2\pi x))^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y-b\sin(2\pi x))}{\partial x} & \frac{\partial(y-b\sin(2\pi x))}{\partial y} \end{vmatrix},$$

a qual, quando tomamos as derivadas, encontramos:

$$J = \begin{vmatrix} 1 + 4ab\pi\cos(2\pi x)[y - b\sin(2\pi x)] & -2a[y - b\sin(2\pi x)] \\ -2b\pi\cos(2\pi x) & 1 \end{vmatrix},$$

o determinante desta matriz é portanto:

$$(\det)J = \{1 + 4ab\pi\cos(2\pi x)[y - b\sin(2\pi x)]\} * 1 - \{-2a[y - b\sin(2\pi x)] * -2b\pi\cos(2\pi x)\} = \\ \{1 + 4ab\pi\cos(2\pi x)[y - b\sin(2\pi x)]\} - \{4ab\pi\cos(2\pi x)[y - b\sin(2\pi x)]\} = 1$$

Logo, verifica-se que sim, o sistema hamiltoniano utilizado é de fato conservativo.

Referências Bibliográficas

- [1] Tom Kober, H-W Schiffer, Martin Densing, and Evangelos Panos. Global energy perspectives to 2060—wec’s world energy scenarios 2019. *Energy Strategy Reviews*, 31:100523, 2020.
- [2] Hans-Stephan Bosch, V. Erckmann, Ralf W. T. Koenig, Felix Schauer, Reinhold J. Stadler, and A. Werner. Construction of wendelstein 7-x-engineering a steady-state stellarator. *IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE*, 38(3, 1):265–273, MAR 2010. 23rd IEEE/NPSS Symposium on Fusion Engineering, San Diego, CA, MAY 31-JUN 05, 2009.
- [3] Sam Taylor. *Photoionisation and Spacecraft-Shadow Interactions in Saturn’s Inner Magnetosphere*. PhD thesis, 08 2019.
- [4] Hans Huybrighs. *A search for signatures of Europa’s atmosphere and plumes in Galileo charged particle data*. 12 2018.
- [5] J. Wesson and D.J. Campbell. *Tokamaks*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 2004.
- [6] Gordon Squires. Francis aston and the mass spectrograph. *Journal of the Chemical Society, Dalton Transactions*, (23):3893–3900, 1998.
- [7] A. S. Eddington. The internal constitution of the stars. *The Scientific Monthly*, 11(4):297–303, 1920.
- [8] MB Chadwick, GM Hale, MW Paris, JP Lestone, C Bates, JB Wilhelmy, SA Andrews, W Tornow, and SW Finch. The earliest dt nuclear fusion discoveries. *arXiv preprint arXiv:2302.04206*, 2023.

- [9] Arthur Stanley Eddington. *The internal constitution of the stars*. Cambridge University Press, 1988.
- [10] Garry McCracken and Peter Stott. *Fusion: the Energy of the Universe*. Academic Press, 2013.
- [11] Steven W Stahler. The early life of stars. *Scientific American*, 265(1):48–55, 1991.
- [12] Larry L Lucas and Michael P Unterweger. Comprehensive review and critical evaluation of the half-life of tritium. *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology*, 105(4):541, 2000.
- [13] Vitalii D Shafranov, BD Bondarenko, German A Goncharov, Oleg A Lavrentâev, Andrei D Sakharov, et al. On the history of the research into controlled thermonuclear fusion. *Physics-Uspekhi*, 44(8):835–843, 2001.
- [14] Englen A Azizov. Tokamaks: from a d sakharov to the present (the 60-year history of tokamaks). *Physics-Uspekhi*, 55(2):190, 2012.
- [15] Klaus Hesch. Progress in particular fields of fusion technology presented at the 29th iaea fusion energy conference 2023. *Nuclear Fusion*, 64(11):117002, oct 2024.
- [16] Matteo Barbarino. A brief history of nuclear fusion. *Nature Physics*, 16(9):890–893, 2020.
- [17] CEA IRFM. West sets a new plasma duration record. https://www.youtube.com/watch?v=N9Z9EqB0pc8&ab_channel=CEAIRFM, Feb 2025.
- [18] Abu-Shawareb et al. Achievement of target gain larger than unity in an inertial fusion experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 132:065102, Feb 2024.
- [19] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4 edition, 2017.
- [20] *Fusion Physics*. entity. INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Vienna, 2012.
- [21] Yixiang Gan, Francisco Hernandez, Dorian Hanaor, Ratna Annabattula, Marc Kamalah, and Pavel Pereslavitsev. Thermal Discrete Element Analysis of EU Solid Breeder

- Blanket Subjected to Neutron Irradiation. *Fusion Science and Technology*, 66(1):83–90, 2017.
- [22] S. R. Salinas. *Introdução à Física Estatística*. EDUSP, 1997.
- [23] Richard D Hazeltine and James D Meiss. *Plasma confinement*. Courier Corporation, 2013.
- [24] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Mechanics*, volume 1 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann Limited, Oxford, third edition, 1976.
- [25] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [26] Jeffrey P. Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press.
- [27] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow 1. In *Universality in Chaos, 2nd edition*, pages 367–378. Routledge, 2017.
- [28] Jefferson SE Portela, Ibere L Caldas, Ricardo L Viana, and Philip J Morrison. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(05):1589–1598, 2007.
- [29] Jefferson Stafusa Elias Portela, Iberê Luiz Caldas, and Ricardo Luiz Viana. Tokamak magnetic field lines described by simple maps: Dedicated to professor celso grebogi on the occasion of his 60th birthday. *The European Physical Journal Special Topics*, 165(1):195–210, 2008.
- [30] Iberê Luiz Caldas, Ricardo Luiz Viana, Celso Vieira Abud, Júlio César David da Fonseca, Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho, Tiago Kroetz, Francisco Alberto Marcus, Adriane Beatriz Schelin, JD Szezech, Dennis Lozano Toufen, et al. Shearless transport barriers in magnetically confined plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(12):124035, 2012.
- [31] K Fuchss, A Wurm, A Apte, and PJ Morrison. Breakup of shearless meanders and âouterâ tori in the standard nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(3), 2006.

- [32] Boris V Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5):263–379, 1979.
- [33] Agustin Moreno and Otto van Koert. A generalized poincaré–birkhoff theorem. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 24(2):32, 2022.
- [34] A Wurm, A Apte, and PJ Morrison. On reconnection phenomena in the standard nontwist map. *Brazilian journal of physics*, 34:1700–1706, 2004.
- [35] LA Osorio, M Roberto, IL Caldas, RL Viana, and Y Elskens. Onset of internal transport barriers in tokamaks. *Physics of Plasmas*, 28(8), 2021.
- [36] Matheus S Palmero and Iberê L Caldas. Confining and escaping magnetic field lines in tokamaks: analysis via symplectic maps. *Fundamental Plasma Physics*, 8:100027, 2023.
- [37] Diego del Castillo-Negrete and PJ Morrison. Chaotic transport by rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(4):948–965, 1993.
- [38] J.W. Gibbs and E.B. Wilson. *Vector Analysis: A Text-book for the Use of Students of Mathematics and Physics, Founded Upon the Lectures of J. Willard Gibbs ...* Yale bicentennial publications. C. Scribner’s Sons, 1901.
- [39] Jorge Costa Duarte Filho and Maria Silvia C. Favareto. *Cálculo Vetorial e Geometria Analítica*. Universidade Federal da Paraíba, 2011.
- [40] J.E. Marsden. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, 2012.