Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sílvio César Otero-Garcia

Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue

Rio Claro - SP
2015

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sílvio César Otero-Garcia

Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro - SP
2015

517 Otero-Garcia, Sílvio César
O87i *Integrale, Longueur, Aire* de Henri Lebesgue / Sílvio César Otero-Garcia. - Rio Claro, 2015
374 f. : il., figs., quadros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Rosa Lúcia Sverzut Baroni

1. Cálculo. 2. Medida e integração. 3. História da análise matemática. 4. Teoria da medida. 5. Tradução especializada. 6. Hermenêutica das profundidades. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Sílvio César Otero-Garcia

Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão examinadora

Profa. Dra. Rosa Lucia Sverzut Baroni - Orientadora
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
UNIARARAS/Araras (SP)

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC/USP/São Carlos (SP)

Profa. Dra. Maria Laura Magalhães Gomes
ICE/UFMG/Belo Horizonte (MG)

Rio Claro - SP, 17 de dezembro de 2015

Resumo

Neste trabalho traduzimos e analisamos a tese de doutorado de Henri Lebesgue *Intégrale, Longueur, Aire*. Publicada em 1902, é nela que Lebesgue apresenta a teoria da medida e integração que levam o seu nome. A tradução, que pretende ser o mais fiel possível ao original, foi feita seguindo a metodologia de Vinay e Darbelnet (1977). A análise foi respaldada pelo referencial teórico da hermenêutica das profundidades proposta por Thompson (2011). O nosso objetivo geral é disponibilizar uma fonte original mais acessível para pesquisas em história da matemática bem como facilitar seu uso como recuso pedagógico na educação matemática; trazendo, assim, contribuições para essas áreas do conhecimento.
Palavras-chave: História da análise matemática. Teoria da medida. Integração. Tradução especializada. Hermenêutica das profundidades.

Résumé

Ce thèse porte sur une traduction et analyse de la thèse de doctorat d'Henri Lebesgue *Intégrale, Longueur, Aire*. Il s'agit d'une thèse parue en 1902 dans laquelle Lebesgue présente la théorie de la mesure et d'intégration ayant son nom. La traduction, de toute fidélité possible à son original, a pour base la méthodologie de Vinay et Darbelnet (1977). L'analyse se développe à partir du référentiel théorique de l'herméneutique des profondeurs plus spécifiquement, Thompson (2011). Notre intention est de rendre plus accessible une source originale en langue étrangère, le portugais du Brésil dans ce cas, pour contribuer avec les études en Histoire Mathématique mais aussi en avoir comme un outil pédagogique pour l'enseignement des mathématiques.
Mots-clés: Histoire de l'analyse mathématique. Théorie de la mesure. Intégration. Traduction spécialisée. Herméneutique des profondeurs.

Abstract

This thesis deals with the translation and analysis of Henri Lebesgue doctoral thesis, *Integrale, Longueur, Aire*. Published in 1902, this thesis presents the Lebesgue measure theory and integration named after him. The translation, intended to be as faithful to the original as possible, is based on Vinay and Darbelnet's (1977) methodology. The analysis is developed from the theoretical reference of the deep hermeneutics, more specifically, Thompson (2011). Our intention is to make available an original source in Portuguese to help with Brazilian studies in History of Mathematics and also ease its use as an educational tool for math teaching.
Keywords: History of analysis. Measure theory. Integration. Specialized translation. Deep hermeneutics.

Índice

Anexo

Prefácio

O meu interesse por traduzir a tese (LEBESGUE, 1902a) do renomado matemático Henri Lebesgue surgiu de várias maneiras. Ainda na graduação, durante o decurso dos meus dois estágios de iniciação científica, a saber, *Tópicos de análise real e topologia da reta* e *Tópicos de topologia geral*, surgiu naturalmente o interesse por certos conteúdos da análise e da topologia, bem como pelo ensino deles. Com esse interesse em mente, vim a conhecer a Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni, uma pessoa de formação em matemática e com grandes interesses pela história da matemática e pela educação matemática.

Das nossas conversas e inquietações mútuas, surgiu o que posso chamar de meu primeiro projeto de mestrado. À época, *A disciplina de análise real na formação de professores de matemática*. Nosso objetivo parecia-nos muito simples, responder à seguinte questão: por que análise real na licenciatura? Na realidade, essa pergunta já tinha sido feita por Moreira, Cury e Vianna (2005). O seu artigo, entretanto, mostrou-nos que todas as nossas inquietações e dificuldades para direcionar o projeto tinham uma razão de ser: responder a essa pergunta não é tarefa fácil. Então, da ideia inicial de discutir a importância dessa disciplina para a formação do professor e dos diversos estudos que descobrimos serem necessários para se fazer tal discussão com profundidade; dois projetos: *A disciplina de análise em cursos de formação de professores de matemática*, projeto de pesquisa *guarda-chuva* da Profa. Rosa, e o meu de mestrado, *Uma trajetória da disciplina de análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino* (OTERO-GARCIA, 2011).

Meu objetivo, mapear a produção brasileira em ensino de análise e traçar uma trajetória histórica dessa disciplina em duas instituições públicas do estado de São Paulo. Assim, a educação matemática e a história da matemática (ou a história da educação matemática), de algum modo, se fizeram presentes. Preocupações matemáticas, preocupações com o ensino, preocupações históricas... Boa parte dos meus mais destacados interesses estiveram presentes nesse mestrado, exceto um: línguas. Letras era minha segunda opção no ensino médio, e esse interesse acabou por ficar um pouco adormecido desde que ingressei na matemática, mas, durante o mestrado, ele retornou.

Maio de 2010, *A tradução: bellum sine bello*, evento que aconteceu em comemoração aos 70 anos do Professor Irineu Bicudo. Nele, a tradução estava em pauta. O meu contato com a tradução de *Os Elementos* era anterior, mas esse ambiente todo dedicado a questões da tradução, com a presença de professores do Departamento de Letras da UNESP de Araraquara, discussões técnicas e apresentação de trabalhos na área, tanto gerais quanto relacionados com a matemática só aconteceu mesmo naquele dia. Finalmente, matemática, história da matemática, educação matemática e línguas: todos os meus interesses estavam ali, donde ocorreu-me novamente o nome de Henri Lebesgue.

Digo novamente porque Henri Lebesgue nos foi "apresentado" também pela Profa. Rosa, lá na época do mestrado. Na ocasião, conforme já descrevi, optei por trabalhar com questões mais próximas do ensino de análise. Por diversos motivos, a ideia de trabalhar com a tese de Lebesgue foi "preterida", mas creio que o principal deles é que naquele momento não vislumbrávamos as possibilidades de intervenção que passamos a ver depois do *Bellum Sine Bello*. As preocupações com a disciplina de análise não se esvaíram, elas também encontraram um *locus* junto daqueles interesses já citados.

Com a proposta de não só traduzir, como analisar a tese de doutorado de Lebesgue, vim a conhecer o *referencial metodológico da hermenêutica das profundidades* por meio dos trabalhos do GHOEM (Grupo História Oral e Educação Matemática). A ideia de tratar a tese de Lebesgue como uma *forma simbólica* pareceu bastante adequada. Como não tinha experiência com esse referencial, resolvi iniciar um *projeto piloto* de análise com um artigo bem curto de Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (LEBESGUE, 1901). Nesse trabalho são apresentados pela primeira vez os conceitos de medida e de integração de Lebesgue (posteriormente detalhados em sua tese). Desse modo, o objetivo de tal piloto era, de algum modo, fazer em "menor escala" o que pretendíamos fazer com a tese.

O trabalho com o piloto, bem como as considerações da banca durante o exame de qualificação, mostraram-nos que a hermenêutica pretendida tornaria quase inviável, no tempo regimentar que me restava, traduzir e analisar uma tese do tamanho e da complexidade da de Lebesgue. De fato, o piloto com o artigo, bem mais simples e curto, já rendera mais de cem páginas. Para contornar esse problema, resolveu-se manter a tradução da tese, porém restringir as etapas de análise até um certo ponto. Isso porque a hermenêutica das profundidades, por meio de sucessivos movimentos, permite que se avance, teoricamente, de modo indefinido no processo de análise. Ou seja, guardadas as proporções, notei que não seria possível ir tão fundo na tese de Lebesgue quanto havia ido no artigo, apesar disso, entendo que, nesta tese, cheguei a um ponto adequado aos objetivos inicialmente propostos: apresentar uma tradução e análise de *Integrale, Longueur, Aire*. O piloto, portanto, serviu não apenas para corrigir rumos, como também forneceu elementos que puderam ser aproveitados na análise da tese, já que, sem querer minimizar demasiado as diferenças, ambos os trabalhos foram publicados pelo mesmo autor, em uma mesma época (1901 e 1902), tratam da mesma questão central (medida e integração) etc.

Isso posto, à maneira que Bicudo (2009) fez em sua tradução d'Os Elementos (EUCLIDES, 2009), trazemos na *Introdução* toda a análise da tese de Lebesgue, bem como considerações metodológicas mais gerais. Ou seja, falo, nessa parte do trabalho: sobre os princípios utilizados na tradução; sobre a hermenêutica das profundidades; um pouco do contexto histórico da França à época da publicação de *Integrale, Longueur, Aire*; de alguns aspectos considerados relevantes sobre a história do desenvolvimento das teorias da medida e da integração; da vida e obra de Henri Lebesgue; das resistências e dificuldades que sofreu Lebesgue para ter suas ideias aceitas; da similaridade entre alguns conceitos abordados por Lebesgue com teorias de contemporâneos seus como Borel, Baire e Jordan; das possibilidades de prosseguimento desta pesquisa, já na seção *Considerações finais*.

Prosseguindo, trago a tradução de *Integrale, Longueur, Aire* sob o título *Integral, Comprimento, Área*. Cabe, portanto, certa atenção ao leitor. Logo após as *Referências* da *Introdução*, inicia-se a tradução da tese de Lebesgue. Há, de qualquer forma, uma separação visível que marca esse evento.

Já nos *Apêndices*, há textos complementares sobre metodologia de tradução, hermenêutica e história da análise matemática. Além disso, trago ainda uma tradução do já citado artigo de Lebesgue de 1901, e de um texto do matemático Vito Volterra em que é apresentado um exemplo de função cuja derivada não é integrável.

No *Anexo* há a tese original de Lebesgue na íntegra em francês.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) pelo afastamento a mim concedido na fase final de elaboração desta tese.

Introdução

Introdução

1 Sinopse

O matemático francês Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) propôs, no começo do século XX, novos conceitos de integral e de medida. O primeiro deles generalizava as integrais propostas por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) e Augustin Louis Cauchy (1789-1857), sanando diversas deficiências dessas, e o segundo, as medidas de Camille Jordan (1838-1922) e Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) (HOCHKIRCHEN, 2003; CAJORI, 2007). Não por acaso, essas generalizações levaram o seu nome: integral de Lebesgue e medida de Lebesgue.

A integral de Riemann é aplicável tanto a funções contínuas como a funções que admitem um número finito de descontinuidades, entretanto, há restrições no caso do número de descontinuidades ser infinito. Um exemplo emblemático é o da função de Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859), $D : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Essa função, que é descontínua em todos os pontos do domínio, não é integrável segundo a definição de Riemann. Exatamente aí residia um dos pontos de partida de Lebesgue: a impossibilidade de encontrar uma primitiva de certas funções (HOCHKIRCHEN, 2003).

Entretanto, exemplos como o que citamos eram vistos com certa desconfiança ainda no início do século XX. Muitos matemáticos da época diziam que o estudo de tais casos particulares desviaria os jovens estudantes de problemas mais importantes que ainda estavam em aberto. Jules Henri Poincaré (1854-1912) partilhava dessa desconfiança: "Antigamente quando se inventava uma função nova, era com vistas a algum objetivo prático; hoje em dia inventa-se expressamente para colocar defeito nos raciocínios de nossos pais" (POINCARÉ, 1899, p. 159)[1].

Do mesmo modo também não foi bem recebida naquela época a tese de doutorado de Lebesgue, Intégrale, Longueur, Aire, defendida em 1902 pela Faculdade de Ciências de Paris

[1] Autrefois quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères.

(HOARE; LORD, 2002).

Após seu doutoramento, Lebesgue iniciou carreira acadêmica, durante a qual direcionou esforços não só para matemática, mas também para questões pedagógicas e relacionadas com a história da matemática. Seus primeiros postos como professor universitário foram na Universidade de Poitiers, e, em seguida, em 1906, na Universidade de Rennes. Durante esse período, ainda, Lebesgue ministrou cursos no *Collège de France* que resultaram nos livros *Leçons sur la integration et la recherche des fonctions primitives*, de 1904 (LEBESGUE, 1904), e *Leçons sur les séries trigonométriques*, de 1906 (LEBESGUE, 1906). Em 1910 foi nomeado para a Sorbonne, onde obteve a cátedra em 1918. Em 1921 ingressou, já como professor, no *Collège de France*, onde permaneceu até sua morte, que ocorreu em 26 de Julho de 1941. Foi eleito para a Academia de Ciências de Paris e para a Sociedade Matemática e a Sociedade Real de Londres, entre outras (HOCHKIRCHEN, 2003).

A trajetória acadêmica de Lebesgue, bem como a importância de seu novo conceito de integral tanto dentro da própria matemática como em aplicações, especialmente para a análise dos fenômenos descontínuos e de natureza estatística e probabilísticas, permitiram que a sua teoria da medida e integração finalmente fosse aceita (LINTZ, 2007; HOCHKIRCHEN, 2003).

Mas, de que se trata a Integral de Lebesgue?

O principal problema da definição de Riemann, apontado por Lebesgue, é que, ao se subdividir o domínio da variável independente, se uma função $y = f(x)$ tiver muitos pontos de descontinuidade, então à medida que o intervalo $x_{i+1} - x_i$ torna-se menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficarão necessariamente próximos. Lebesgue, ao contrário, pensou a teoria da integração com base na análise da variação da função. Utilizando essa ideia, Lebesgue propõe que seja feita a partição do intervalo $(\overline{f}, \underline{f})$, em que $\overline{f}$ e $\underline{f}$ são, respectivamente, os limites superior e inferior da função dentro do intervalo considerado, em subintervalos $[y_i, y_{i+1}]$. Em cada um desses subintervalos deve ser escolhido um y_i^*. Define-se, então, o conjunto E_i, formado pelos pontos do eixo x de sorte que $y_i \leqslant f(x) \leqslant y_{i+1}$. Isso posto, chegamos à seguinte soma, em que $m(E_i)$ é a medida (de Lebesgue) do conjunto E_i:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^* m(E_i),$$

Quando n tende a infinito, as diferenças $(y_{i+1} - y_i)$ tendem a zero, e a soma transforma-se na integral de Lebesgue.

Podemos retomar o exemplo da função de Dirichlet para ilustrar – mui sucintamente – como aquela função seria Lebesgue-integrável. Assumamos que a medida de Lebesgue do conjunto dos números racionais do intervalo $[0, 1]$ seja zero e que essa medida, no caso dos irracionais, seja um. Como a função de Dirichlet só não é nula num conjunto de medida zero, então sua integral será nula. Conforme já dissemos, a integral de Riemann no mesmo intervalo não existe.

* * *

Uma vez que já apresentamos uma visão geral sobre a tese de Lebesgue e sobre sua teoria da medida e integração, sigamos com nossos objetivos: disponibilizar, em língua portuguesa, uma tradução da tese de doutorado de Lebesgue. Essa tradução está acompanhada de uma análise presente nesta introdução. Queremos, com isso, disponibilizar uma fonte original mais acessível para pesquisas em história da matemática bem como facilitar seu uso como recurso pedagógico em educação matemática.

A relevância do nosso trabalho pode ser justificada sob três pontos de vista: o da história da matemática, o da educação matemática, o do projeto maior que o abarca. Mostraremos o primeiro deles retomando e aprofundando alguns pontos expostos linhas acima.

* * *

A filosofia do "quase-sempre" foi sistematizada por Lebesgue e nasceu juntamente com a sua integral. Segundo ele próprio: "Nós concordaremos em dizer que uma propriedade tem lugar quase sempre num intervalo (a, b), ou num conjunto ε, se os pontos de (a, b) ou de ε nos quais ela não tem lugar ou bem não existem, ou bem formam um conjunto de medida nula" (LEBESGUE, 1928, p.193)[2].

Esse conceito causou uma mudança tão extrema na análise real que, segundo Lintz (2007), não é exagero dividir a história desse ramo da matemática em duas: "antes de Lebesgue" e "depois de Lebesgue". De fato, ainda segundo esse mesmo historiador da matemática, além das numerosas aplicações que a teoria da medida de Lebesgue e a integral de Lebesgue têm, a análise funcional como um todo não teria surgido caso tais conceitos não fossem desenvolvidos. Consequentemente, áreas da física, como a mecânica quântica, que dependem desse ramo da matemática, também não (LINTZ, 2007).

Vários pesquisadores frisam, ainda, a importância, em particular, da tese de doutorado de Lebesgue. Segundo May (1966), ela foi tão "completa" e "perfeita" que basicamente não deixou espaço bastante para qualquer exploração cooperativa. Já Michael Loève diz que: "[...] o Arquimedes do período da extensão (isto é, a moderna teoria da medida) foi Henri Lebesgue. Ele deu o passo decisivo em sua tese... De fato, a contemporânea (teoria da medida) ainda dança a música de Lebesgue" (LOÈVE apud HOARE e LORD, 2002, p. 3)[3]. Para John Chales Burkill: "Não se pode duvidar que essa (a tese de Lebesgue) é uma das melhores que qualquer matemático já tenha escrito" (BURKILL apud HOARE e LORD, 2002, p. 3)[4]. Hoare e Lord

[2] Nous conviendrons de dire qu'une proprieté a lieu presque partout dans un intervalle (a, b), ou sur un ensemble ε, si les points de (a, b) ou de ε en lesquels elle n'a pas lieu ou bien n'existent pas, ou bien forment un ensemble de mesure nulle.

[3] [...] the Archimedes of the extension (i.e. modern theory of measure) period was Henri Lebesgue. He took the decisive step in his thesis. In fact contemporary (measure theory) still dances to Lebesgue's tunes.

[4] It cannot be doubted that (Lebesgue's thesis) is one of the finest which any mathematician as ever written

(2002) destacam ainda que, na tese de Lebesgue, as dificuldades que incomodavam na integral de Riemann foram completamente varridas e que essa realização viria a ser considerada mais tarde algo tão profundo quanto foi a expansão dos racionais para os reais.

Assim, são de grande valor a teoria da medida e a teoria da integração de Lebesgue para a matemática, e, consequentemente para a história da matemática. Naturalmente, falar da importância de tais teorias significa também falar da importância da tese de Lebesgue, visto que foi nela que ele efetivamente as introduziu[5].

Como esta tese se insere nesse contexto?

Baroni e Nobre (1999) destacam a dificuldade em se fazer, no Brasil, investigação pura em história da matemática sobre temas e personagens europeus por conta da pouca facilidade que se tem de encontrar fontes primárias em solo nacional. Desse modo, acreditamos que tornar disponível uma tradução da tese de Lebesgue para o português é relevante para a pesquisa no Brasil em história da matemática, sobretudo aquelas que vierem a tratar da história da análise, da teoria da medida e da integração ou, mais particularmente, de Henri Lebesgue. Sobre esse último, destacamos que, segundo May (1973), as fontes primárias mais importantes para o estudo sobre uma pessoa são seus próprios escritos e que mesmo antologias, traduções e versões editadas podem ser de grande valia.

Em segundo lugar, queremos destacar a relevância do nosso trabalho para a educação matemática, mais precisamente, para o campo denominado relações entre história e educação matemática. Um crescente interesse na história da matemática por parte de professores e educadores tem sido notado nos últimos vinte anos ou mais. Esse movimento trouxe reflexos para a educação matemática que podem ser notados pelo crescente número de artigos contendo reflexões e experiências sobre o uso da história da matemática no ensino e na aprendizagem da matemática. Mas, de que maneira esse uso pode se efetivar?

Em Fauvel e Maanen (2000), uma das referências mais notáveis sobre o assunto, bem como em Baroni, Teixeira e Nobre (2009) e Miguel e Miorim (2008), encontramos diversas respostas à questão do parágrafo anterior. Não é nosso objetivo aqui dissertar sobre todas elas, mas apenas sobre uma: o uso de fontes originais na educação matemática. Para isso, falaremos com mais detalhes do capítulo de Jahnke et al. (2000), *The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom*, contido em Fauvel e Maanen.

Jahnke et al. dizem que, a princípio, os objetivos e efeitos do uso de fontes originais na educação matemática não diferem das demais formas de conceber a história da matemática na educação matemática. Entretanto, destacam três aspectos que melhor descrevem os efeitos especiais desse tipo de uso: *substituição*, permite que se veja a matemática como uma atividade intelectual e não simplesmente como um conjunto de conhecimentos e técnicas; *reorientação*, mostra que conceitos matemáticos foram criados e não surgiram de modo espontâneo; *compreensão cultural*, coloca o desenvolvimento da matemática dentro de um contexto científico e tecnológico de uma determinada época e na história das ideias e das sociedades, considera

[5] Na realidade, Lebesgue já havia tratado de sua nova integral em 1901 no artigo "Sur une généralisation de l'intégrale définie" (LEBESGUE, 1901), conforme esmiuçaremos adiante.

também a história do ensino da matemática a partir de perspectivas que se encontram fora dos limites estabelecidos pelos conteúdos disciplinares.

É evidente que o uso da própria tese de Lebesgue pode propiciar esses três efeitos especiais descritos, entretanto, Jahnke et al. (2000) dizem que o obstáculo da língua e a necessidade de entendimento da época em que foram escritas as obras e do contexto geral das ideias são as principais dificuldades existentes no uso de originais na educação matemática. A nossa tradução deverá minimizar a barreira do idioma; a análise, parte das demais dificuldades.

Por último, destacamos a relevância do nosso trabalho para o projeto maior do qual faz parte: *A Disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática*. O objetivo central desse projeto da Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni é analisar os diversos aspectos, notadamente os históricos, envolvidos na questão do papel da disciplina de análise em cursos de formação de professores de matemática. Algumas problemáticas apontadas são: como a aritmetização da análise tem sido trabalhada, à luz da história, em cursos de licenciatura; que conteúdos podem ser caracterizados como componentes da estrutura da disciplina; a contribuição de matemáticos para o desenvolvimento da análise, tanto no Brasil como em nível mundial; como as licenciaturas têm trabalhado com essa disciplina etc. Definir *a priori* as possíveis contribuições da nossa pesquisa para esse trabalho maior é algo delicado. Entretanto, podemos traçar algumas possíveis direções. O uso como fonte original segundo o que detalhamos anteriormente, no ensino de análise e em cursos de formação de professores, é uma delas. Subsidiar discussões sobre as contribuições de Lebesgue para a análise, tanto a área da matemática como a disciplina escolar, e sobre o ensino dos conceitos, ou alguns dos conceitos, da teoria da medida e integral de Lebesgue, são duas outras.

2 Sobre a tradução

> Falarei primeiro e mais longamente sobre as dificuldades ligadas à tradução [...]. Essas dificuldades são resumidas de modo preciso no termo "prova", em seu duplo sentido de "provação" e de "exame". [...] Dois parceiros são de fato colocados em relação pelo ato de traduzir, o estrangeiro – termo cobrindo a obra, o autor, sua língua – e o leitor, destinatário da obra traduzida. E, entre os dois, o tradutor, que transmite, faz passar a mensagem inteira de um idioma ao outro. É nessa desconfortável situação que reside a prova em questão. Franz Rosenzweig deu a essa prova a forma de um paradoxo. Traduzir, ele diz, é servir a dois mestres: o estrangeiro em sua obra e o leitor em seu desejo de apropriação. Autor estrangeiro, leitor habituado a mesma língua que o tradutor. Esse paradoxo concerne efetivamente a uma problemática sem igual, sancionada duplamente por um voto de fidelidade e por uma suspeita de traição. Scleiermacher [...] decompunha o paradoxo em duas frases: "levar o leitor ao autor", "levar o autor ao leitor" (RICŒUR, 2012, p. 21-22).

Além do efeito estético de se iniciar uma seção com a citação de um autor célebre como Ricœur, há outros motivos para isso ter sido feito. Em nossa *sinopse* já deixamos claro que nosso trabalho consiste de uma tradução e análise da tese de Henri Lebesgue *Integrale, Longueur,* *Aire*. Traduzir já significa, em certa medida, analisar; entretanto, dizer que fazemos uma análise da tese de Lebesgue certamente causaria confusões. É certo que dizer ambas, também. Há inflexíveis, metódicos e espartanos – no sentido que atribui Neves (2003) – por todo canto, na academia não é diferente. O exercício da tradução tem gosto semelhante. Determinadas opções desagradam uns, outras, outros; algumas, talvez, todos. Sob uma antiégide do *paradoxo* citado por Ricœur, o tradutor permanece, então, exposto a todo tipo de descontente. "Essa tradução não é adequada". "Melhor seria traduzir dessa forma". Essas são algumas das frases que as pessoas que já se atreveram a traduzir certamente ouviram em alguma ocasião.

Essa espécie de *prelúdio* não tem a intenção de mostrar ingrata a tarefa a qual nos propomos. A intenção é deixar claro que as decisões que tomamos com relação a concepção de tradução são apenas opções. É fácil discordar delas, e mesmo pode haver dentre os que concordam (com a concepção), aqueles que discordam (de termos ou expressões usadas na tradução). Por conta disso, a primeira decisão tomada foi a de disponibilizar nesta tese, além da tradução, também a versão francesa nos *anexos*. Com isso, qualquer leitor, e, em particular aqueles que possuem maior familiaridade com o francês – língua na qual a tese de Lebesgue foi escrita –, poderá *retraduzir* ou *reinterpretar* Lebesgue à sua maneira. Procuramos facilitar esse trabalho tanto quanto (pareceu-nos ser) possível. A versão francesa não só está presente, como foi *redigitada* para manter formatação, estilo, e estrutura semelhante a da tradução; além disso, ao longo dela, e também da reprodução, há indicações, entre colchetes, das páginas nas quais se encontram, no original, os trechos que ali aparecem.

Isso posto, seguindo a nomenclatura que, por exemplo, Bicudo (2009) traz em sua tradução d'Os Elementos de Euclides, podemos dizer que neste trabalho temos uma *tradução à alemã*.

> De um modo grosseiro, poderíamos classificar os tipos de tradução como *tradução à francesa* e *tradução à alemã*. O ideal das primeiras encontra expressão na passagem: "Se há algum mérito em traduzir, só pode ser o de aperfeiçoar, se possível, seu original, de embelezá-lo, de apropriar-se dele, dar-lhe um ar nacional, de certa maneira, essa planta estrangeira". A meta das segundas está refletida nas seguintes críticas de *Schlegel* e de *Goethe* àquelas do primeiro grupo. Schlegel: "[...] é como se eles desejassem que cada estrangeiro, no país deles, se comportasse e se vestisse segundo os seus costumes, o que os leva a nunca conhecerem realmente um estrangeiro. Goethe: "O francês, assim como adapta à sua garganta as palavras estrangeiras, faz o mesmo com os sentimentos, os pensamentos e até os objetos; exige a qualquer preço, para cada fruto estrangeiro, um equivalente que tenha crescido no seu próprio território"(BICUDO, 2009, p. 20, grifos do autor).

É evidente, como bem observa Bicudo, que essas alcunhas não têm relação de equivalência com a nacionalidade dos tradutores: o chamado pai da psicanálise, o alemão Sigmund Freud, traduzia *à francesa*, ao passo que o renomado escritor, ensaísta e diplomata francês, François-René de Chateaubriand, traduzia à alemã. A propósito, há um observação bastante pertinente na tradução que Chateaubriand fez do inglês para o francês da obra *Paraíso Perdido* de John Milton:

> Se eu não quisesse dar senão uma tradução elegante do *Paraíso Perdido*,

> seria-me dado, talvez, conhecimento bastante da arte que não teria sido impossível de chegar à altura de uma tradução dessa natureza; mas é uma tradução literal, com toda a força do termo, que eu empreguei, uma tradução que uma criança e um poeta poderão seguir com o texto, linha por linha, palavra por palavra, como um dicionário aberto sob seus olhos (CHATEAUBRIAND, 1861, p. i)[6].

Essa observação é pertinente não só porque elucida bem o que significa traduzir *à alemã* e, como também porque ela mesma é uma tradução *à alemã* para o português de algo originalmente escrito em francês (ver nota de rodapé). Desse modo, fazendo uso dessa conveniente função *meta*, a seguir trazemos uma possível tradução *à francesa* desse mesmo excerto.

> Se eu quisesse traduzir de modo elegante o *Paraíso Perdido*, eu teria, talvez, conhecimento suficiente da arte para tornar possível chegar à altura de uma tradução dessa natureza; mas o que eu fiz foi uma tradução literal, com toda a força desse termo, uma tradução que tanto uma criança quanto um poeta poderá acompanhar com o texto, linha por linha, palavra por palavra, como se fosse um dicionário aberto sob seus olhos.

É fácil notar que a segunda tradução parece bem mais palatável que a primeira. Entretanto, nesta há um esforço muito maior em tentar captar o *sabor* original do francês em relação àquela. De certo que não há nem mérito nem demérito em qualquer uma dessas escolhas, somente levarão a traduções que não serão idênticas. Aliás, nem mesmo dois tradutores que sigam a mesma concepção fariam isso[7]; mais que isso, o próprio tradutor pode alterar com o tempo suas escolhas de palavras, tempos verbais etc., de modo que muito dificilmente traduziria um mesmo trecho sempre da mesma forma.

Parece-nos claro, então, ser ponto pacífico que discutir certas opções da tradução (ou do tradutor) é algo pouco relevante, por mais que se tente objetivar essa tarefa, ela é altamente subjetiva. Isso não significa, entretanto, que não se deva apresentá-las e justificá-las, conforme estamos fazendo nesta seção.

Semelhantemente a Bicudo (2009), adotamos a tradução *à alemã* pelo fato de a tese de Lebesgue já ser um texto relativamente antigo, já embebido de uma tradição, pensamentos e modos de expressão próprios, de modo que procuramos com essa opção estimular o leitor a acompanhar a tradução juntamente com o original a fazer o exercício da *linha por linha, palavra por palavra* e, assim, conseguir, de alguma maneira, experimentar o francês e a matemática do início do século XX (curiosamente, nossa tradução *à alemã* é de uma obra francesa).

---

[6] Si je n'avais voulu donner qu'une traduction élégante du Paradis perdu, on m'accordera peut-être assez de connaissance de l'art pour qu'il ne m'eût pas été impossible d'atteindre la hauteur d'une traduction de cette nature; mais c'est une traduction littérale dans toute la force du terme que j'ai entreprise, une traduction qu'un enfant et un poëte pourront suivre sur le texte, ligne à ligne, mot à mot, comme un dictionnaire ouvert sous leurs yeux.

[7] A observação de Chateaubriand também está presente em Bicudo (2009), que a traduz da seguinte forma: "Se eu quisesse ter feito apenas uma tradução elegante do *Paraíso Perdido*, talvez se considere que tenho suficiente conhecimento da arte para que não me fosse impossível atingir a altura de uma tradução dessa natureza; mas o que empreendi foi uma tradução literal, em toda força do termo, uma tradução que uma criança e um poeta poderão acompanhar no texto, linha por linha, palavra por palavra, como um dicionário aberto sob seus olhos (BICUDO, 2009, p. 20).

Embora o francês seja uma língua românica e que, portanto, guarda fortes semelhanças, tanto léxicas quanto estruturais, com o português, isso não significa que vez ou outra o leitor não deverá estranhar o resultado obtido.

O fato de termos optado por uma tradução *à alemã* não significa que a seguimos à risca o tempo todo; significa, apenas, que fizemos uso dela tanto quanto possível. Em alguns momentos, quando a clareza se mostrava muito comprometida, foram feitas inversões de frases, trocas de palavras e outras adaptações para o português mais semelhantes com uma tradução *à francesa*.

A apresentação da concepção adotada nesta tese permite ter uma visão geral do *modus operandi* da tradução, mas fala muito pouco sobre como isso efetivamente acontece. Procedimentalmente, segundo a nomenclatura de Vinay e Darbenelt (1977), realizamos – na maior parte do trabalho – uma *tradução direta* do francês (língua fonte) para o português (língua destino). A *tradução direta* divide-se em: *empréstimo*, *decalque* e a *tradução literal*. A *tradução literal* baseia-se na tradução palavra por palavra, isto é, é um método de transferência direta da língua original para a língua desejada com a apropriação da gramática e do idioma. Já o *decalque* mantém a expressão da língua de partida, traduzindo literalmente cada um dos elementos. Finalmente, no *empréstimo*, recupera-se os termos estrangeiros com a finalidade de introduzir a cultura da língua original na tradução.

Uma vez que nosso objetivo é disponibilizar em língua portuguesa um texto preciso e o mais fiel possível ao original de Lebesgue, valemo-nos, mormente, da *tradução literal*, do *decalque* e do *empréstimo*, nessa ordem. Quando foi necessário alterar a forma, por não haver paralelismo estrutural e metalinguístico entre os dois idiomas, realizamos uma *tradução oblíqua*[8] – segundo grande grupo de métodos e procedimentos básicos de tradução, ao lado da *tradução direta* –, que se divide em quatro métodos: *transposição*, que troca a classe de uma palavra por outra sem mudar o significado da mensagem; *modulação*, em que há a variação na forma da mensagem por meio de uma mudança de ponto de vista; *equivalência*, as mensagens são equivalentes, mas não mantêm a mesma natureza sintagmática; *adaptação*, uma nova situação é criada por inexistência de correspondência entre os dois idiomas[9].

Para finalizar, ressaltamos que todas as notas, bem como todos os grifos são do autor.

3 Os princípios de análise da obra

Entendemos a tese de doutorado de Lebesgue como uma *forma simbólica*; segundo Garnica e Oliveira (2008), para Thompson (2011) formas simbólicas são "ações, falas, escritos e imagens

[8] Embora possa se associar os métodos da *tradução direta* com a *tradução à alemã*, e os métodos da tradução oblíqua com a *tradução à francesa*, não existe tal equivalência. A separação de que fala Bicudo (2009) tem relação com a concepção da tradução, já em Vinay e Darbenelt (1977) temos métodos e procedimentos. Os lugares são diferentes, portanto.

[9] Para não nos alongarmos em demasiado, apresentamos no *Apêndice* A maiores detalhes sobre a metodologia de tradução proposta por Vinay e Darbenelt.

que servem, de um modo ou de outro, para sustentar ou estabelecer relações de poder" (p. 34). Esse fato tem consequências que impactam diretamente a nossa análise dessa obra.

Thompson, tomando por base as ideias de Paul Ricœur, Jürgen Habermas e outros, desenvolveu um referencial metodológico para o estudo das formas simbólicas, o qual ele chama de *referencial metodológico da hermenêutica das profundidades* (HP). De maneira muito sucinta[10], esse referencial propõe três dimensões analíticas que devem ser observados quando da análise de uma forma simbólica. São eles: *análise sócio-histórica*, *análise formal ou discursiva* e *interpretação/reinterpretação*.

Sobre as duas primeiras, Thompson diz:

> Formas simbólicas não subsistem num vácuo, elas são produzidas, transmitidas e recebidas em condições sociais e históricas específicas. [...] *O objetivo da análise sócio-histórica é reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas.* [...] Os objetos e expressões que circulam nos campos sociais são também *construções simbólicas complexas que apresentam uma estrutura articulada*. É esta característica que exige [...] um tipo de análise que está interessada primariamente com a organização interna das formas simbólicas, com suas características estruturais, seus padrões e relações. Esse tipo de análise, que chamei de *análise formal ou discursiva*, é um empreendimento perfeitamente legítimo, na verdade, indispensável; ele é possível pela própria constituição do campo objetivo (THOMPSON, 2011, p. 366-369, grifos do autor).

Já sobre a terceira:

> A terceira e última fase do enfoque da HP é o que chamarei de *Interpretação/Reinterpretação*. [...] Localizado dentro do referencial da HP, o processo de interpretação pode ser mediado pelos métodos da análise sócio-histórica, como também pelos métodos da análise formal ou discursiva. Os métodos podem ajudar o analista a ver a forma simbólica de uma maneira nova, em relação aos contextos de sua produção e recepção e à luz dos padrões e efeitos que a constituem. Mas o processo de interpretação vai além dos métodos da análise sócio-histórica e da análise formal ou discursiva. Ele transcende a contextualização das formas simbólicas tratadas como produtos socialmente situados, e o fechamento das formas simbólicas tratadas como construções que apresentam uma estrutura articulada. As formas simbólicas representam algo, elas dizem alguma coisa sobre algo, e é esse caráter transcendente que deve ser compreendido pelo processo de interpretação. O processo de interpretação, mediado pelos métodos do enfoque da HP, é simultaneamente um processo de *reinterpretação*. Pois, [...] as formas simbólicas que são o objeto de interpretação são parte de um campo pré-interpretado, elas já são interpretadas pelos sujeitos que constituem o mundo sócio-histórico. Ao desenvolver uma interpretação [...] estamos projetando um significado possível que pode divergir do significado construído pelos sujeitos que constituem o mundo sócio-histórico. [...] *A possibilidade de conflito de interpretação é intrínseco ao próprio processo de interpretação* (THOMPSON, 2011, p. 375-376, grifos do autor).

[10] Ao leitor interessado, recomenda-se a leitura do *Apêndice B*, no qual há maiores detalhes e discussões sobre esse referencial.

Thompson alerta, no entanto, que "Dentro de cada fase do enfoque da HP, uma variedade de métodos de pesquisa podem estar à disposição, e alguns métodos podem ser mais adequados que outros, dependendo do objeto específico de análise e das circunstâncias específicas da investigação" (THOMPSON, 2011, p. 366). Nesse sentido, embora tenhamos utilizado dos métodos da HP descritos por Thompson, não se pode dizer que, por um lado, tivemos a pretensão de cobrir todas as dimensões sugeridas por ele, nem que, por outro, tenhamos nos valido apenas delas. Para a análise formal, por exemplo, valemo-nos, de forma auxiliar, da ideia de paratexto descrita por Genette (2009). Esse autor considera como paratextos, por exemplo, os títulos, os subtítulos, prefácio, dedicatórias, ilustrações, anexos etc., e apresenta em sua obra algumas peculiaridades desses paratextos que podem nos auxiliar na compreensão de uma forma simbólica. De acordo com Genette (2009), um paratexto (ou a ausência dele) pode nos revelar informações, intenções ou até mesmo oferecer uma interpretação do texto analisado. Apesar de o autor tratar especificamente dos paratextos de livros, acreditamos que esse conceito pode ser estendido a outras formas simbólicas, como teses de doutoramento, que é o nosso caso.

Entendendo que as três dimensões da HP devem ser interligadas e ocorrer concomitantemente (c.f. figura 1), optamos por produzir diversos textos (ou seções) que contemplam, em maior ou menos grau a depender da particularidade de cada um, essas três dimensões. Ou seja, o leitor não encontrará nesta *Introdução* seções que abordem exclusivamente a análise formal da tese de Lebesgue, ou apenas os aspectos da análise sócio-histórica. Acreditamos que essa opção de escrever, em certo sentido, um texto único com todas as dimensões, e não três textos/capítulos/seções focando cada uma delas, é mais coerente com a própria concepção de Thompson, isto é, com a ideia de que essas dimensões não são estanques, elas interrelacionam-se e retroalimentam-se.

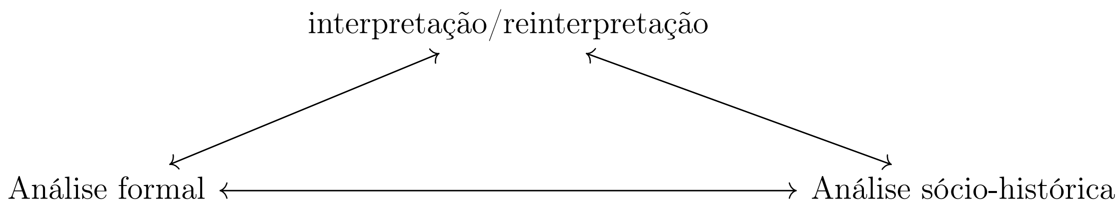


Figura 1: Diagrama que ilustra como as etapas da análise hermenêutica podem ser seguidas. Quanto mais ciclos completos desse se fizer, maior o refinamento em cada etapa da análise.

Nesse sentido, nas próximas seções o leitor encontrará textos que ajudam a compreender como a tese de Lebesgue se estrutura e quais as cercanias em que ela esteve inserida; sem haver, contudo, conforme já frisamos, a pretenção de esgotar todas as possibilidades de análise. Alguns aspectos que observamos foram: o desenvolvimento histórico da teoria da medida de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) a Lebesgue; a França nos anos que circundam o da publicação de *Integrale, Longueur, Aire*; quem foi Henri Lebesgue, como se estrutura sua tese e qual foi seu impacto à época, alguns conflitos nos quais as ideias de Lebesgue estiveram envolvidas, o primeiro trabalho de Lebesgue em que a sua nova integral foi apresentada; o relacionamento de Lebesgue com seu orientador, Borel, e as consequências disso para a aceitação da sua teoria; comparações entre a medida de Lebesgue com as medidas de contemporâneos seus, como a Borel e a de René-Louis Baire (1874-1932).

Algumas das principais obras que foram de grande valia para essa análise: Burton (2011), Cajori (2007), Eves (2004), Katz (1998), Lintz (2007), Struik (1948), Wussing (1998) (grandes obras de história geral da matemática); Jahnke (2003), Dugac (2003), Hairer e Wanner (2008) (referências para a história da análise); Dalen e Monna (1972) e Hawkins (1975, 1980) (para a teoria da integração); Chae (1995) (discute os pontos fracos da integral de Riemann); Burkill (1944), Hoare e Lord (2002), Montel (1941), Fehr (1942), Felix (1974), e Denjoy, Felix e Montel (1957) (sobre a vida e a obra de Lebesgue). Apesar de se tratarem de fontes secundárias, sempre que possível, também recorremos aos trabalhos originais, o que nos demandou muito tempo, mas que acreditamos ter valido a pena: o resultado são numerosas citações tanto em português como em suas línguas-fonte. E, por falar nisso, observamos que todas as citações de obras em língua estrangeira foram traduzidas livremente por nós, de forma que quaisquer eventuais erros ou impropriedades são de nossa inteira responsabilidade.

4 A França nos anos finais do século XIX e iniciais do século XX

> As formas simbólicas são produzidas (faladas, narradas, inscritas) e recebidas (vistas, ouvidas, lidas) por pessoas situadas em locais específicos, agindo e reagindo a tempos particulares e a locais especiais, e a reconstrução desses ambientes é uma parte importante da análise sócio-histórica (THOMPSON, 2011, p. 366).

Henri Léon Lebesgue nasceu em 1875, faleceu em 1941; suas principais obras sobre os seus conceitos de medida e integração foram publicadas em 1901 e 1902. Dessa forma, conforme sugere o título desta seção e a citação linhas acima, analisar o contexto histórico da França nos anos finais do século XIX e iniciais do século XX parece ser de grande relevância para compreender o meio em que Lebesgue e sua obra se inseriam[11].

* * *

Desde pelo menos o princípio do século XIX, a França passava por várias e profundas mudanças sociais, políticas e econômicas. Muitas delas promovidas ou ampliadas por guerras e conflitos religiosos, bem como por sentimentos de vingança, restauração e nacionalismo decorrentes de seus desfechos. Com isso, na maior parte desse período histórico, a França ou estava envolvida em uma guerra, ou se preparando para uma. Para isso, evidentemente, o país teve que tentar solucionar conflitos internos e lidar com o atraso relativo da França com relação a outras potências europeias.

[11] Este capítulo foi elaborado tendo por base, principalmente, Goubert (1996) e Ferro (2011).

Para se ter uma ideia, em 1911, 56% da população francesa era rural, em um contexto em que a proporção da população urbana era bem maior. O atraso relativo da França em relação a outras potências europeias também se refletia em sua malha ferroviária e produção industrial: em 1840 a Inglaterra possuía uma malha seis vezes maior que a da França; em 1870 a Inglaterra respondia por cerca de 30% da produção industrial mundial, a França tinha cerca de um terço disso; em 1913 a França respondia por pouco mais de 6% da produção mundial, a Rússia a seguia de perto e Inglaterra e Alemanha tinham, cada uma, participação pelo menos duas vezes maior.

Paralelamente a esses fatos, a França saiu de um regime monárquico em 1830 para sua terceira república em 1870, passando durante esses cerca de quarenta anos por uma segunda república e um segundo império estabelecido mediante um golpe de estado. Interessante notar, regressando um pouco mais na história, que entre 1799 e 1870 a França passou por nada mais, nada menos que oito regimes: "[...] a população, a economia e a sociedade francesas sofreram transformações pelo menos tão importantes, mas muito mais lentas. Muitas conferem à França do século XIX caracteres específicos, não forçosamente benéficos"(GOUBERT, 1996, p. 56).

A queda do segundo império se deu após o insucesso do governo em relação à guerra com a Prússia e consequente exílio de Napoleão III e perseguição e morte de seus descendentes. A república e o governo provisório são declarados em 4 de setembro de 1870, sendo que o novo regime deu continuidade à guerra com resultados não muito diferentes daqueles obtidos pelo antigo regime.

Em 1871 a França perde a guerra para os prussianos e, com isso, além de uma indenização em ouro, teve de ceder territórios e permanecer parcialmente ocupada por três anos: "Essa amputação foi cruelmente sentida, durante quarenta e três anos, vontade nacional e propaganda patriótica não cessaram de reclamar a restituição das províncias roubadas e a vingança sobre os prussianos" (GOUBERT, 1996, p. 86).

Além das guerras externas, a França sofreu com conflitos internos, como a Comuna de Paris[12] em 1871, que fez a capital francesa perder cerca de 80 mil de seus habitantes.

Com todos esses movimentos, quer internos, quer externos, a França saiu enfraquecida economicamente. Além da própria Prússia, a Alemanha, que também havia se envolvido na guerra franco-prussiana, dominou política e economicamente a Europa até quase o início do século XX. A propósito do papel da Alemanha nessa guerra, as tropas desse país, que ocupavam a França desde a derrota francesa, deixaram o país em setembro de 1873 quando a França pagou sua bilionária dívida da guerra contra a Prússia. Embora a França estivesse enfraquecida perante outras potências, conforme já dissemos, o pagamento dessa dívida de guerra seis meses

[12] A Comuna de Paris foi uma revolução proletária inacabada que teve como grande significado político a manifestação de uma política proletária. Essa política proletária ficou manifesta na [sua] essência autogestionária [...]. A negação proletária das instituições burguesas conviveu com o esboço de afirmação proletária da autogestão social. [...] A luta proletária saiu derrotada, mas deixou germinar a percepção do seu significado político, cujo reconhecimento também depende da luta de classes (VIANA, 2011, p.60).

antes do previsto certamente denota o poder de recuperação francês.

Ainda que houvesse adiantado o fim da ocupação alemã na França, o regime republicano sofria resistências internas de diversos segmentos, sobretudo daqueles que desejam uma restauração da monarquia.

> [...] a República ainda mal instalada esteve exposta a escândalos medíocres e quase rituais (tráficos e condecorações, "luvas", comprometimentos, mistura dos negócios e da política) que foram abundantemente explorados por realistas e conservadores, e por vezes também pelos primeiros socialistas (GOUBERT, 1996, p.90).

Evidentemente essa resistência tinha muito mais relação com as reformas republicanas que com os escândalos que a acometiam. Algumas das mais importantes reformas atingia a Igreja que recusava o regime republicano quase que unanimemente (católicos, ditos liberais, eram condenados mesmo muito tempo depois da instalação da república, como ocorreu, por exemplo, com Marc Sangnier em 1910). Antes da terceira república, a Igreja era responsável por quase todo o sistema de ensino francês, isso começou a mudar a partir de 1879. Dentre outras medidas, o novo regime garantiu a gratuidade total do ensino, obrigatoriedade escolar (6 aos 13 anos), ensino feminino e a laicidade do ensino.

> [...] estas medidas, tirando à Igreja a parte essencial da educação das crianças, sobretudo das raparigas, visaram dar à República uma base popular firme e de futuros eleitores conscientes e fiéis. Por outro lado, a formação simples, sólida, prática e patriótica dada aos futuros mestres (que seguiam obrigatoriamente uma preparação militar "superior") conseguiu instalar em quase todas as comunas uma espécie de "mentor"intelectual, prático e político, destinado a contrabalancear a influência do padre [...] (GOUBERT, 1996, p. 89).

Em outros campos, a Igreja também viu seu poder contestado pela república: endurecimento das leis sobre a abertura de congregações religiosas, fim do pagamento de qualquer tipo de pensão para padres ou outros religiosos, asseguramento da liberdade de credo.

A partir de 1907, no entanto, os conflitos com a Igreja diminuíram, pois a França passou a se preocupar mais com os movimentos sociais e com as crises internacionais. Por outro lado, o silêncio relativo da Igreja nessa época mostrou tanto que seu poder já não era o de antes, como que a separação entre Estado e Igreja, no fim das contas, não lhe foi assim tão prejudicial.

Um dos movimentos sociais de maior impacto nessa época foram as grandes greves: Anzin, 1884; Fourmies, 1889 e 1891 (9 mortos, 60 feridos); Courrières, 1906 e 1907; greve dos eletricistas, mineiros, carregadores e professores, 1907 (300 exonerações, 20 mortos, 600 feridos); greve dos empregados dos correios, 1909; dentre outras. Em todos os casos, fortes reações do governo francês. De qualquer modo, as sucessivas greves conseguiram, além de tímidos aumentos salariais, progressos, ainda que tardios, na legislação trabalhista: em 1892 foi proibido o trabalho de crianças em idade escolar; em 1900 foi dado início no processo de redução progressiva da carga horária semanal de trabalho, que era de 60 horas; em 1906 é instituído o repouso semanal obrigatório.

Seja como for, sindicalizados ou não sindicalizados, grevistas ou não, socialistas e não socialistas, católicos, protestantes e ateus: todos iriam se encontrar em campo de batalha anos depois. E a França vinha preparando-se para ela desde a derrota na franco-prussiana: "quarenta e três anos após a derrota e a amputação territorial, chegava a vingança tão desejada, num entusiasmo frequente, mas sem dúvida menos universal do que quiseram fazê-lo (GOUBERT, 1996, p. 95).

Dentre outras coisas, uma guerra necessita de tropas e de recursos. Desde 1872 uma lei militar instituía um serviço militar ativo de cinco anos; ginástica e pré-treino militar figuravam no programa das escolas, e os futuros professores, formados durante três anos nas escolas normais por instrutores militares, eram convocados para formar quadro de reserva; tropas coloniais foram requisitadas, sobretudo da Argélia e Senegal. Essas medidas – além de jornais, anúncios, poesias, músicas, discursos, tudo girando em torno de propaganda patriótica do governo – visavam elevar o exército francês ao nível do alemão. Tarefa bastante árdua, visto que a Alemanha na época possuía cerca de 50% mais habitantes que a França, além de uma população jovem relativa consideravelmente maior (44% contra 34%).

Do ponto de vista econômico e de infraestrutura e recursos, a França apresentava uma espantosa recuperação pós-guerra: tinha uma moeda estável e sua fortuna nacional saltara de 120 bilhões em 1870 para 300 bilhões em 1930. Boa parte desse dinheiro era emprestado para Espanha, Rússia, China, fazendo da França, juntamente com a Inglaterra, uma das maiores credoras do mundo naquele período. Além disso, mais e melhores estradas de ferro foram construídas, novos canais, portos ampliados e modernizados, importante frota de guerra foi construída, melhorias na agricultura para garantir abastecimento das tropas, esforço essencial na indústria com aumento da produção de carvão e ferro e com o desenvolvimento de diversos setores como o automobilístico (Renault), pneumático (Michelin), químico (Saint-Gobain).

Em resumo, a França saiu de uma situação pós-guerra bastante delicada para condições econômicas e militares ainda mediocremente favoráveis. Entretanto, todos esses avanços contariam na guerra com a fundamental ajuda anglo-saxônica.

> Desde 1905, existiam dois sistemas de aliança na Europa. Os incidentes entre a França e a Alemanha multiplicavam-se, num tom muito azedo [...]. No Império Otomano e nos estados que daí tinham resultado, Rússia e Áustria-Hungria opunham-se incessantemente. A Inglaterra, que tinha liquidado suas contas com a França, inquietava-se profundamente com o poderio crescente da marinha de guerra alemã e com a penetração dos engenheiros e dos comerciante germânicos no Império Turco e até à Ásia. [...] Quando o arquiduque herdeiro da Áustria foi assassinado [...] e o governo sérvio foi considerado responsável, o mecanismo diplomático era tal, que as primeiras medidas de mobilização prepararam-se um pouco por todo lado. Em França foram publicadas no dia 1 de agosto, no calor da ceifa e ao dom dos sinos a tocar a rebate. No dia 3 desencadeava-se uma guerra que os Estados-Maiores adversos tinham doutamente previsto curta, e que durou 52 meses. Desde a peste negra do século XIV, era a primeira vez que tantos milhões de homens eram chamados para morte (GOUBERT, 1996, p. 99).

Começara a primeira guerra mundial em 1914.

5 A moderna teoria da integração[13]

Riemann, a partir da definição de Cauchy, definiu e ampliou o conceito de integração para uma classe mais ampla de funções que as contínuas. Durante algum tempo, essa generalização foi considerada como a melhor que se poderia obter, e os pontos fracos da definição de Riemann, embora já fossem conhecidos, não eram tomados como críticos. Entretanto, o crescente interesse pelas funções patológicas, como a função nunca diferenciável dada por Dirichlet, e os estudos em teoria da medida de Camille Jordan e Émile Borel, abriram caminho para que Lebesgue obtivesse um novo conceito de integral.

Assim, baseando-nos principalmente nas ideias contidas em Horchkirchen (2003) e Hawkins (1975), e, em menor medida, nas de Desanti (1998) e Grattan-Guinness (1970), faremos um breve passeio histórico pelo desenvolvimento do conceito de integração de Fourier, Cauchy e Dirichlet a Borel, sem deixar de lado, claro, o conceito de medida, fundamental para a generalização da integral. Nas próximas seções falaremos com mais detalhes sobra a vida, obra e as contribuições de Lebesgue. Alguns aspectos da história da análise, como o desenvolvimento dos conceitos de função e de continuidade, embora relevantes, foram deixados de lado aqui, entretanto, o leitor interessado poderá recorrer ao *Apêndice C* para obter mais detalhes sobre esses assuntos.

5.1 As contribuições de Fourier, Cauchy e Dirichlet

Até meados do século XVIII, integrar era uma ideia fortemente vinculada à de derivar, isto é, integrar significava procurar a primitiva de uma função. É evidente que já se conhecia a relação existente entre a integração e o cálculo de áreas, entretanto, este era visto apenas como uma mera aplicação daquela. Foi a partir dos trabalhos de Fourier e principalmente dos de Cauchy, que a integral deixou de ser vista apenas como uma antiderivada.

Fourier (1822), ao definir os coeficientes

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx$$

da sua expansão de uma função arbitrária em séries trigonométricas, levantou uma questão: é possível definir $\int_a^b f(x)dx$ para qualquer f?

Cauchy (1823) respondeu a essa questão, ao menos em parte: toda função contínua limitada em um intervalo (ou no máximo seccionalmente contínua[14] é integrável, e sua integral

[13] Uma versão do texto que se segue encontra-se publicado em Otero-Garcia (2014)

[14] Uma função é dita seccionalmente contínua em um dado intervalo quando possui, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade nos quais existem os limites laterais (descontinuidade de primeira espécie).

é o limite da soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

que pode ser reescrita, utilizando-se a notação introduzida por Fourier (1822) como

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Para o caso em que f é contínua em $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_m, X)$ e descontínua em $x_1, x_2, \dots, x_m$,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{x_0}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} + \cdots + \int_{x_n - \varepsilon\nu_n}^{X} f(x)dx \right),$$

desde que o limite exista e independa da escolha dos μ_i, ν_i[15].

Quem também respondeu à questão levantada por Fourier foi Dirichlet (1829), que, a partir dos seus estudos do *Cours d'Analyse* de Cauchy (CAUCHY, 1821) e dos trabalhos sobre condução de calor de Fourier (FOURIER, 1822, 1826), publicou em seu *Sur la convergence des séries trigonométriques* (DIRICHLET, 1829) uma prova de que, se f, limitada em um dado intervalo, for monótona e contínua, exceto por um número finito de pontos, então ela admitirá uma expansão em séries de Fourier. Em sua prova, Dirichlet não utiliza a continuidade de f, entretanto, necessita considerar essa hipótese para que a integral definida faça sentido, já que a definição de integral de Cauchy (1823) garante a existência da integral para f com, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade.

Dirichlet acreditava que, quando f possuísse pontos de descontinuidade em número infinito, seria possível reduzi-la ao caso já considerado por ele:

> [...] se designarmos por a e b duas quantidades quaisquer compreendidas entre $-\pi$ e π, podemos sempre colocar entre a e b outras quantidades r e s suficientemente próximas para que a função permaneça contínua no intervalo de r a s. Perceberemos facilmente a necessidade dessa restrição considerando que os diferentes termos da série são integrais definidas [...] (DIRICHLET, 1829, p. 169)[16].

[15] Isso é equivalente a dizer que os limites laterais à direita e à esquerda dos pontos de descontinuidade devem existir. Ou seja, em uma linguagem mais moderna – reduzindo o número de pontos de descontinuidades a um, já que para um número finito de descontinuidades a definição será inteiramente análoga –, se f for limitada em $[a, b]$ e descontínua em $c \in (a, b)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

desde que existam os limites laterais.

[16] [...] si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différens termes de la série sont des intégrales définies [...].

Modernamente, isso significa que o conjunto de pontos de descontinuidade da função f deveria ser denso em parte alguma[17]. Apesar de mais geral que a condição de Cauchy, que admitia apenas um número finito de descontinuidades, Dirichlet não provou sua afirmação, embora tenha dito em seu artigo que o faria posteriormente em outro trabalho (que jamais existiu).

Seja como for, Dirichlet não só compreendeu a necessidade de se estender o conceito de integral de Cauchy, como também a dificuldade em fazê-lo, tanto que finaliza o seu artigo apresentando um exemplo de função que não atendia ao critério que ele próprio estabelecera:

> Teríamos um exemplo de uma função que não satisfaz essa condição se supuséssemos $\varphi(x)$ igual a uma constante determinada c quando a variável x obtém um valor racional, e igual a uma outra constante d, quando essa variável é irracional (DIRICHLET, 1829, p. 169)[18].

Se, por um lado, Riemann, anos mais tarde, definiria sua integral que resolveria boa parte dos problemas de Dirichlet, por outro, mais adiante, Lebesgue iria além, conseguindo dar conta, inclusive, da função apresentada no excerto linhas acima que, como se nota, é a famosa função que apresentamos em nossa *Sinopse*: a função D de Dirichlet. Assim, podemos afirmar, sem embargo, que os trabalhos de Dirichlet não só abriram caminho para a ampliação da integral de Cauchy por Riemann, como também a deste por Lebesgue.

5.2 A teoria da integração de Riemann

Uma das marcas mais importantes no trabalho de Riemann é a influência que Dirichlet exerceu sobre ele – os dois se conheceram quando Riemann foi estudar matemática em Berlim, um grande centro de pesquisa em matemática à época. Para citar apenas o exemplo mais emblemático dessa influência, poucos anos antes da morte de Dirichlet, Riemann defendeu sua *Habilitationsschrift*[19] (RIEMANN, 1854/1876), na qual ele se dedica a estudar, como fizera Dirichlet anos antes, a representação de funções por meio de séries trigonométricas.

Nesse contexto, Riemann, como era de se esperar, não pôde escapar daquela questão deixada por Fourier e que não fora respondida plenamente nem por Cauchy, nem por Dirichlet: sob que condições uma função é integrável? Mas, antes, ele respondeu a outra questão:

> O que devemos entender por $\int_a^b f(x)dx$? A fim de estabelecer isso, tomamos

[17] Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é dito denso em parte alguma se sempre for possível tomar um intervalo (a, b) em $\mathbb{R}$ que não contenha pontos de S. Analogamente, $S \subset \mathbb{R}$ é dito denso se todo intervalo (a, b) de S contiver pontos de $\mathbb{R}$. O conjunto dos números racionais é denso, enquanto que o conjunto dos números inteiros é denso em parte alguma.

[18] On aurait un exemple d'une fonction que ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient um valeur rationelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationalle.

[19] Algo como uma *habilitação*, título de mais alto grau acadêmico que um doutor pode atingir em alguns países da Europa, como a Alemanha. No Brasil, seria equivalente ao título de livre-docente, que, para ser obtido, o candidato, igualmente, deve apresentar uma segunda tese a ser defendida de forma similar a feita para se obter um doutorado.

> entre a e b, a sequência de valores ordenados por grandeza $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, e denotamos, por brevidade, $x_1 - a$ por δ_1, $x_2 - x_1$ por δ_2, ..., $b - x_{n-1}$ por δ_n, e por ε_i uma fração própria positiva. Então, o valor da soma
>
> $$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots$$
> $$+\delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)^{[20]},$$
>
> depende da escolha dos intervalos δ_i e dos valores ε_i. Se ela possuir a propriedade de, se todos os δ_i tornarem-se infinitamente pequenos, tender a um limite fixado A, não importando quais δ_i e ε_i sejam escolhidos, então seu valor será chamado $\int_a^b f(x)dx$ (RIEMANN, 1854/1876, p. 225)[21].

Ou seja, se, ao refinarmos a partição tomada, a soma de Riemann convergir para um valor fixado A, independentemente da escolha dos pontos $x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$, $\varepsilon_i \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, então f será dita integrável em $[a, b]$ e A será sua integral.

Definida sua integral, restava a Riemann, ainda, responder a questão de Fourier. Para isso, estabeleceu dois critérios equivalentes, que, ainda hoje, conhecemos como *critérios de integrabilidade de Riemann*:

1. Sendo $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, e $||P|| = \max\{(x_i - x_{i-1})\}$ a norma de P, então a integral de f no intervalo considerado existirá se, e somente se,

$$\lim_{||P|| \to 0} (D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n) = 0,$$

   em que δ_i, como já definido, denota o comprimento dos subintervalos de $[a, b]$ e D_i a oscilação de f nos correspondentes intervalos[22].
2. Sendo $s(P, \sigma)$ a soma dos comprimentos dos δ_i para os quais D_i é maior do que σ, então f será integrável se, e somente se, para quaisquer ε e σ positivos, existir $d > 0$ tal que, se P for uma partição de $[a, b]$ tal que $||P|| \leqslant d$, então $s(P, d) < \varepsilon$.

De posse de tais critérios, Riemann pôde exibir algo inimaginável até então, um exemplo

[20] Modernamente, quando se define a integral de Riemann via o que se costuma chamar de "Somas de Riemann", designa-se δ_i por Δ_i e $f(x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i)$ por $f(\xi_i)$, com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

[21] Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch δ_2, ..., $b - x_{n-1}$ durch δ_n, und durch ε_i einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots$$
$$+\delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewähtl werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)dx$.

[22] Ou seja, $D_i = M_i - m_i$, com $M_i = \max\{f(x), x_{i-1} < x < x_I\}$ e $m_i = \min\{f(x), x_{i-1} < x < x_I\}$

de função integrável descontínua em um subconjunto denso de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots + \frac{(nx)}{n^2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

em que

$$(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor\,, & \text{se} \quad x - \lfloor x \rfloor < 1/2 \\ 0, & \text{se} \quad x - \lfloor x \rfloor = 1/2 \\ x - \lfloor x \rfloor - 1, & \text{se} \quad x - \lfloor x \rfloor > 1/2 \end{cases},$$

com $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z}; m \leqslant x\}$. Essa função é descontínua em todos os pontos da forma $m/2n$ com m e n primos entre si. De fato, para tais valores de x, os limites de f pela direita e esquerda são:

$$\begin{aligned} f(x+) &= f(x) - \frac{1}{2n^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right] = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}; \\ f(x-) &= f(x) + \frac{1}{2n^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right] = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}. \end{aligned}$$

Entretanto, f é integrável, já que para qualquer $\sigma > 0$, existe apenas um número finito de pontos $x = m/2n$ para os quais o salto $f(x-) - f(x+) = \pi^2/8n^2$ é maior do que σ, o que satisfaz o segundo critério de integrabilidade (ver figura 2).

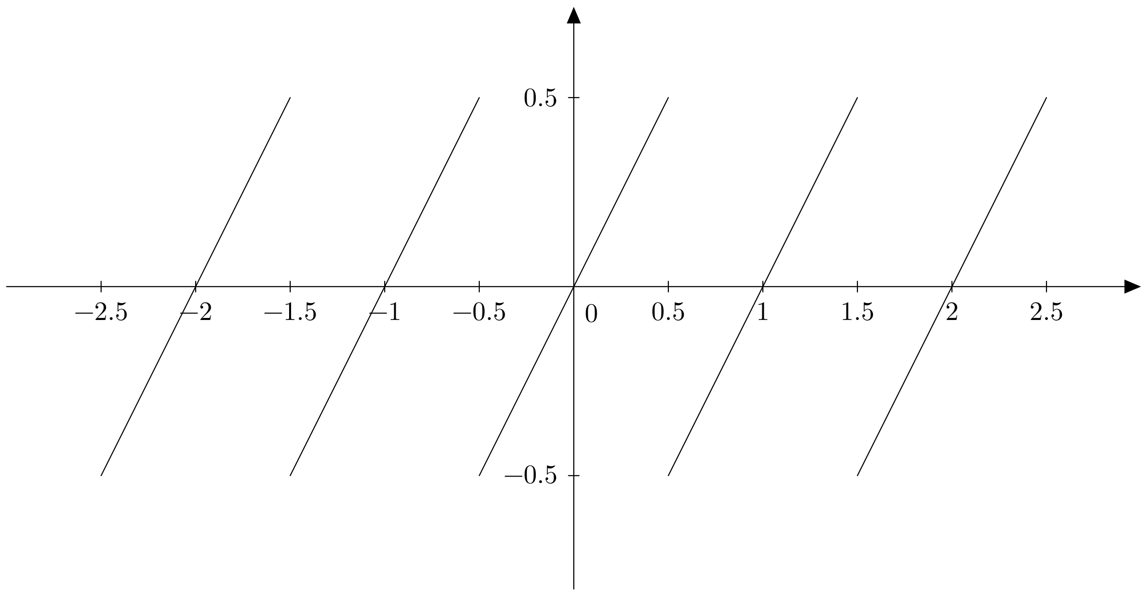


Figura 2: Esboço da função $f(x)$ de Riemann

* * *

Vemos, assim, que se Riemann, por um lado, baseou-se nas ideias de Cauchy para estabelecer sua nova integral, partindo, por exemplo, de uma partição para defini-la; por outro, construiu diferentes somas e se distanciou desse matemático francês ao expandir o conjunto das funções integráveis muito além das simplesmente contínuas ou seccionalmente contínuas. Essa generalidade com a qual Riemann tratou a questão causou uma certa comoção na comunidade matemática da época, que acreditava que se tinha chegado ao limite até onde era possível chegar com relação ao assunto. Segundo o matemático alemão Paul du Bois-Reymond (1831-1889), um dos maiores entusiastas dessa expoente teoria da integração: "Riemann estendeu o escopo das funções integráveis ao seu extremo limite" (DU BOIS-REYMOND, 1883, p. 274)[23]. Entretanto, alguns anos mais tarde se perceberia que esse não era bem o caso.

5.3 A integral de Darboux

Um dos primeiros passos mais importantes dados na direção de se estender a teoria de Riemann foi dado pelo matemático francês Jean-Gaston Darboux. É no seu trabalho *Mémoire sur les Fonctions Discontinues* (DARBOUX, 1875) que ele traz algumas das suas mais importantes considerações sobre a teoria da integração de Riemann.

Tomando por base apenas funções limitadas, para uma função f definida no intervalo $[a, b]$, Darboux define três números:

> [...] podemos fixar dois números M, m dando lugar às seguintes propriedades: M é maior ou igual aos diversos valores da função, e há ao menos um valor da função maior que $M - \varepsilon$, ε sendo tão pequeno quanto se queira. Analogamente, m é menor ou igual a todos os valores da função, e há ao menos um valor da função menor que $m + \varepsilon$. [...] A diferença, positiva ou nula, $M - m$ se chamará, conforme Riemann, a *oscilação da função* no intervalo dado (DARBOUX, 1875, p. 61)[24].

Darboux, assim, distingue os conceitos de supremo (que ele chama de limite máximo) e máximo e, analogamente, os de ínfimo (limite mínimo) e mínimo[25]. A diferença $M - m$ é denotada por Δ.

Na sequência, para o conjunto de valores compreendidos em $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, já tomados em ordem crescente (trata-se de uma partição do intervalo), Darboux define:

1. $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ números positivos inferiores a 1 (i.e., $\theta_i \in [0, 1]$);
2. $\delta_1 = x_1 - a$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, e assim sucessivamente;
3. $\Sigma = \delta_1 f(a + \theta_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n\delta_n)$.

Sendo M_i e m_i o limite máximo (supremo) e o limite mínimo (ínfimo) da função no i-ésimo intervalo, então o termo $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1}\delta_{i+1})$ ficará compreendido entre $\delta_i m_i$ e $\delta_i M_i$.

[23] Riemann den Spielraum integrierbarer Functionen bis an seine äusserste Grenze.

[24] [...] on peut assigner deux nombres M, m donnant lieu aux propriétés suivantes: M est supérieur ou égal au diverses valeurs de la fonction, et il y a au moins un valeur de la fonction supérieure à $M - \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut. De même m est inférieur ou égal à toutes les valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction inférieure à $m + \varepsilon$. [...] La différence positive ou nulle $M - m$ s'appellera, d'après Riemann, l'*oscillation de la fonction* dans l'intervalle donné.

[25] Modernamente, $M = \sup\{f(x); a \leqslant x \leqslant b\}$, $m = \inf\{f(x); a \leqslant x \leqslant b\}$

Portanto,

$$\delta_1 m_1 + \cdots + \delta_n m_n := m_{ab} \leqslant \Sigma \leqslant M_{ab} := \delta_1 M_1 + \cdots + \delta_n M_n.$$

Se o comprimento dos intervalos δ_i tender a zero e, consequentemente, o conjunto de valores x_n aumentar indefinidamente, Darboux diz que uma condição necessária e suficiente para que Σ tenha um limite é que

$$M_{ab} = m_{a,b}, \qquad \Delta_{ab} = 0.$$

Ou seja,

> [...] a condição necessária e suficiente para que a soma Σ tenha um limite é que o tamanho total dos intervalos nos quais as oscilações são maiores que σ tenda a zero quando todos os intervalos tenderem a zero, σ sendo fixado, mas tão pequeno quanto se queira (DARBOUX, 1875, p. 72)[26].

Como se nota, há grandes semelhanças entre esse critério de Darboux e os dois critérios de integrabilidade de Riemann.

Satisfeita a condição linhas acima, "o limite de Σ é dito a integral de $f(x)$ entre os limites a e b. Temos: $\lim \Sigma = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$" (DARBOUX, 1878, p. 72-73)[27].

Em linguagem moderna, a soma de Darboux

$$S(n, \delta, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_{i-1} + \theta_i \delta_i),$$

convergirá para um limite único (que independe de δ e θ) se, e somente se, a oscilação $\Delta(n)$ tender a zero, i.e., se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i.$$

A partir disso, Darboux conclui e demonstra que: i) Toda função contínua é integrável; ii) A integral de $f(x)$ continuará a existir e não mudará de valor caso se altere o valor da f para um número finito de valores de x; iv) A função $x \to \int_a^x f(y)dy$ é contínua em x; e, finalmente: v) se f é integrável e é a derivada de uma outra função F, então

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Provado o teorema fundamental do cálculo, pode-se dizer que, então, Darboux havia estabelecido seu conceito de integral. Talvez não exatamente uma extensão da proposta por

26 [...] la condition nécessaire et suffisante pour que la somme Σ ait une limite, c'est que la grandeur totale des intervalles dans lesquels les oscillations sont plus grandes que σ tende vers zéro quando tous le intervalles tendent vers zéro, σ étant fixe, mais aussi petit qu'on le veut.

27 la limite de Σ est dite l'intégrale de $f(x)$ entre les limites a, b. On a $\lim \Sigma = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Riemann, mas sim uma releitura conveniente. Tanto que muitos livros-texto atuais, ao introduzirem o conceito de integral, tendem a usar o elegante tratamento feito por Darboux do conceito original de Riemann (DUNHAM, 2005). De qualquer maneira, a integral de Riemann e a de Darboux são equivalentes, i.e., f será Darboux-integrável se, e somente se, for Riemann-integrável[28].

5.4 O teorema fundamental do cálculo e a procura por primitivas

Segundo Baroni, Batarce e Nascimento (2009), tanto do ponto de vista da teoria da medida quanto do cálculo de áreas, as preocupações de Riemann eram mais locais, voltadas essencialmente à questão deixada por Fourier. Nesse sentido, não é de se espantar que ele não tenha se preocupado em estender o teorema fundamental do cálculo de Cauchy, ao qual uma importante restrição se aplicava a f para que o teorema fosse válido: a continuidade. A mesma restrição que havia para a própria definição de integral de Cauchy. Riemann fez a extensão para o caso da integral, mas com relação ao TFC, quem o fez, conforme vimos no item anterior, foi Darboux, que passou a imputar a f' a condição de ser integrável, ao invés de f ser contínua.

Embora mais geral, o tratamento dado por Darboux logo se mostrou ainda incompleto para as necessidades da época, principalmente no tocante à procura por primitivas. O primeiro matemático que se tem registros a apontar esses problemas, segundo Hochkirchen (2003), foi italiano Ulisse Dini (1845-1918):

> Se uma função finita e contínua $F(x)$, sem ser sempre constante entre α e β, tendo máximo e mínimo ou passagens de invariabilidade em qualquer parte arbitrária do intervalo (α, β), e, ao mesmo tempo, sua derivada ordinária $F'(x)$ [...] sendo sempre determinada e finita, então essa derivada não será integrável em nenhum intervalo contido entre α e β e nem em qualquer passagem de invariabilidade da função (incluindo o intervalo (α, β) (DINI, 1878, p. 283)[29].

Ou seja, Dini havia mostrado que existem funções cuja derivada não é integrável.

Pouco depois disso, em consequência das discussões sobre funções patológicas, numerosos exemplos surgiram para ilustrar a afirmação de Ulisse Dini. Um dos mais emblemáticos – e de especial interesse para a teoria da medida e da integração – foi dado pelo conterrâneo de Dini: Vito Volterra (1860-1940).

Volterra foi influenciado em sua procura por exemplos de funções cuja derivada não é integrável justamente por conta do resultado anos antes publicado por Ulisse Dini. Em seu trabalho de 1881, escreve: "O Prof. Dini levanta dúvidas se em alguns casos a definição ordinária

[28] Uma prova dessa equivalência pode ser vista em Bartle e Sherbert (2011).

[29] Se una funzione finita e continua $F(x)$, senza essere sempre constante fra α e β, presenta dei massimi e minimi o dei tratti d'invariabilità in qualunque porzione dell'intervallo (α, β), e al tempo stesso la sua derivata ordinaria $F'(x)$ [...] sono sempre determinate e finite, queste derivate non saranno mai atte alla integrazione in nessun intervallo compreso fra α e β che non sia un tratto d'invariabilità della funzione (l'intervallo (α, β) incl.).

de integral pode não estar contemplada na de Riemann, ou seja, as funções cujas derivadas não podem ser integradas. Proponho-me dar exemplos de tais funções" (VOLTERRA, 1881, p. 334)[30]. E foi o que Volterra fez.

Tomando[31] o intervalo $(0, 1)$, Volterra define nele P, um subconjunto denso em parte alguma de medida positiva[32], obtido como o complementar de uma família infinita enumerável $F \subset (0, 1)$ de intervalos abertos disjuntos.

> No intervalo $(0, 1)$ pode-se construir um grupo de pontos de P, de segunda espécie, os quais têm a propriedade de não poderem ser enclausurados por um número finito de intervalos de soma tão pequena quanto se queira, mas tal que no interior de cada intervalo $(0, 1)$ existe um outro intervalo no qual faltam pontos do grupo (VOLTERRA, 1881, p. 334)[33].

Constrói, então, um intervalo genérico (a, b) de F, e a função $f(x, a, b)$ (ver *Figura 3*) cujas propriedades são:

1. $f(a) = f(b) = 0$.
2. Se $a < x \leqslant x_1$, em que x_1 é o maior ponto à direita de a e à esquerda do ponto médio do intervalo no qual a função atinge seu máximo, então
$$f(x) = A = (x - a)^2 \mathrm{sen}\,\frac{1}{x - a}.$$
3. Se $x_2 \leqslant x < b$, em que x_2 é o menor ponto à esquerda de b e à direita do ponto médio do intervalo no qual a função atinge seu máximo, então
$$f(x) = B = (x - b)^2 \mathrm{sen}\,\frac{1}{b - x}.$$
4. Se $x_1 < x < x_2$, então $f(x)$ é constante e igual a $f(x_1) = A_{x_1} = B_{x_2} = f(x_2)$.

A função f será finita, contínua, inferior a $(b - a)^2$, e terá derivada finita sempre inferior a $2(b - a) + 1$ em todo o seu domínio.

---

[30] Prof. Dini solleva il dubbio che in alcuni casi possa la definizione ordinaria di integrale non rientrare in quella di Riemann, cioè vi siano delle funzioni le cui dèrivate non sono atte alla integrazione. Mi propongo di dare alcuini esempi di tali funzioni.

[31] Tomaremos por base em nossa exposição, tanto a construção original de Volterra (1881), como leituras mais modernas de seu trabalho: tais como Katchi (1982), principalmente, e Benedetto e Czaja (2009, p. 10-11), Bruckner (1978, p. 45-47, 73), Bruckner, Bruckner e Thomson (1997, p. 49-50), Hawkins (1975, p. 56-58), e Wise e Hall (1993).

[32] Um dado conjunto C é de medida zero se dado qualquer $\varepsilon > 0$, C pode ser coberto por um número infinito enumerável de intervalos de comprimento menor que ε. Caso contrário, diremos que X possui medida positiva. Por sua vez, dizemos que uma família de conjuntos cobre um dado conjunto C, se os conjuntos dessa família contiverem C.

[33] Nell'intervallo $(0, 1)$ può costruirsi un gruppo di punti P di seconda specie i quali godono della proprietà che non si possono rinchiudere in un numero finito di intervalli di cui la somma sia tanto piccola quanto si vuole, tale però che nell'interno di ogni intervallo entro a quello totale $(0, 1)$ esista un nuovo intervallo in cui mancano punti del gruppo.

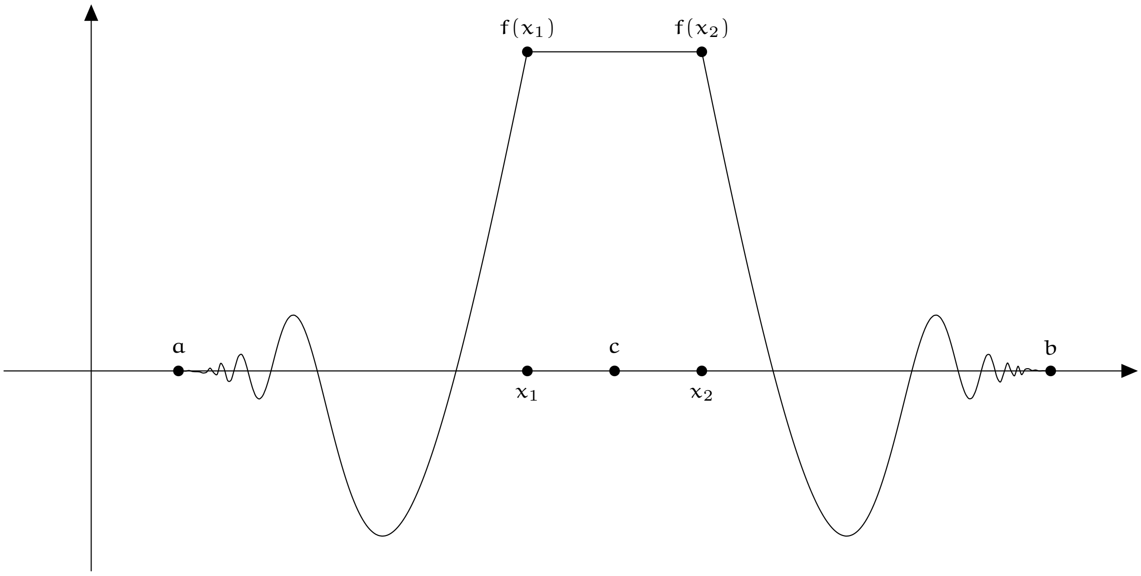


Figura 3: Esboço da função $f(x, a, b)$

A partir de f, Volterra define a função φ como se segue:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in P \\ f(x, a, b), & \text{se} \quad x \notin P \end{cases}.$$

Do modo como P foi definido, se $x \notin P$, então x pertence a um intervalo aberto do tipo (a, b). A função φ será diferenciável em $[0, 1]$, desde que se pode mostrar que é em P, e sua derivada será limitada, evidentemente primitivável, porém não será integrável em $[0, 1]$, pois é descontínua em P, que, como já dissemos, tem medida positiva.

Esse exemplo já seria suficiente para ilustrar a afirmação de Ulisse Dini, afinal, ele mostra a existência de uma função que admite primitiva, mas que não é integrável (no sentido de Riemann). Entretanto, Volterra foi além e, a partir de φ, definiu uma nova função cuja derivada não é integrável em nenhum ponto do intervalo $(0, 1)$[34]. No *Apêndice D*, traremos a construção completa dessa função[35].

* * *

Chegamos, portanto, ao segundo ponto crítico da teoria da integração de Riemann – se considerarmos que a existência de funções não-integráveis no sentido de Riemann, como a função de Dirichlet, se configurariam como o primeiro. Essas questões levariam, anos mais tarde, ao desenvolvimento de uma nova teoria da medida e da integração por Henri Lebesgue, que, em sua abordagem, permitiu a reversibilidade para todas as funções, i.e., toda função derivada passou a ser integrável. Entretanto, alguns problemas de longa data, como o da convergência uniforme de sequências e séries de funções ainda precisavam ser rediscutidos.

[34] Notemos que φ' não é integrável em $P \subset (0, 1)$ e não em todo o intervalo.

[35] Tradução do trecho de Volterra (1881) em que a construção de tal função é feita. Agradecemos a Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis colaborou conosco nessa tradução.

5.5 A integral de Riemann e a compatibilidade com o limite

Fourier foi mesmo um matemático ousado, e muito embora tenha feito afirmações consideradas incorretas anos depois, foi por meio da procura pela confirmação ou refutação delas que muita matemática se desenvolveu. Uma dessas afirmações era a que dizia que toda função definida em um intervalo finito podia ser representada por uma série de Fourier. Cauchy mostrou que eram necessárias mais restrições para que isso fosse verdade e, mais adiante, veremos que, de fato, a questão toda não se encerra nem de um lado, nem de outro. Seja como for, nosso destaque aqui é outro ponto que Fourier tocou: a questão da compatibilidade do conceito de integral com o de limite no contexto das sequências e séries de funções. Fourier (1822) afirma que a integral de uma soma infinita convergente de funções contínuas é a soma da integral de seus termos, i.e.:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b v_i(x)dx, \tag{1}$$

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx, \tag{2}$$

para $v_i(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $s_n(x) = v_1(x) + v_2(x) + \ldots + v_n(x)$. Em outros termos, Fourier garantiu que era possível comutar a integral e o limite para quaisquer séries (ou sequências) convergentes de funções contínuas (ou integráveis, no sentido de Cauchy) e, consequentemente, que era possível integrar termo a termo uma série nessas condições.

Os matemáticos, pelo menos até a segunda metade do século XIX, usavam sem muita hesitação essas premissas. Esse quadro começou a mudar por volta de 1870, quando Heinrich Eduard Heine (1821-1881) divulgou um importante resultado de Karl Theodor Wihelm Weierstrass (1815-1897) a respeito disso:

> Até recentemente acreditava-se que a integral de uma série convergente cujos termos permanecem finitos entre os limites de integração poderia ser a soma das integrais dos termos individuais, e apenas o Sr. *Weierstrass* notou que a prova desse teorema requer que a série não seja apenas convergente dentro dos limites de integração, mas que também convirja uniformemente (HEINE, 1870, p. 353)[36].

Os trabalhos de Weierstrass sobre continuidade uniforme são bem anteriores a isso, entretanto, eles só se tornaram conhecidos pela comunidade matemática da época algum tempo depois. Heine, que era amigo de Weierstrass, foi um dos grandes divulgadores das suas ideias.

[36] Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen endlich bleiben, gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr *Weierstrass* hat bemerkt, der Beweis dieses Satzes erfordere, dass die Reihe in den Integrationsgrenzen nich nur convergire, sondern dass sie auch in gleichem Grade convergire.

Em suas notas de aula, Weierstrass provou que uma condição suficiente para (2), era que a convergência fosse uniforme (HEINE, 1870, HAWKINS, 1980). Darboux, que fez uma revisão do trabalho de Heine sobre séries, também mostrou esse resultado no mesmo artigo em que trata da sua versão da integral de Riemann:

> Se todos os termos de uma série forem funções contínuas ou descontínuas suscetíveis à integração, e se a série for uniformemente convergente no intervalo dado (a, b), a função que representa a série, que não é necessariamente contínua, será suscetível à integração. Sua integral será a soma das integrais de todos os seus termos (DARBOUX, 1875, p. 82)[37].

Alguns anos depois dos trabalhos de Heine e Darboux, os matemáticos Cesare Arzelà (1847-1912) e William Fogg Osgood (1864-1943), mostraram que era possível estender o resultado de Weierstrass ao estabelecer a limitação uniforme (ARZELÀ, 1885, OSGOOD, 1897)[38] como condição essencial para que a igualdade (2) fosse verificada. Ou seja, se f_n for uma sequência de funções (eventualmente uma série) uniformemente limitadas e integráveis e que converge pontualmente para uma função integrável, então verifica-se a igualdade em (2).

Notemos, no entanto, que o resultado de Heine e Darboux, embora mais restritivo por necessitar da convergência uniforme, não requer, por hipótese, que a função para a qual a sequência converge seja integrável; isso já é uma consequência do teorema. O resultado de Arzelà e Osgood, ao contrário, pede essa hipótese adicional. Apesar disso, esses dois matemáticos não apresentaram um exemplo de função uniformemente limitada, convergente pontualmente cujo limite não fosse Riemann-integrável. Isso foi feito por Réné-Louis Baire (1874-1932) em 1889 (BAIRE, 1889, HAWKINS, 1980).

Baire (1889) considerou a sequência $f_n(x)$ com x no intervalo $[0, 1]$ da seguinte forma: $f_n(x) = 1$ se x puder ser escrito sob a forma p/q, com p e q inteiros, primos entre si, e $q \leqslant n$; nos demais casos $f_n(x) = 0$. Cada f_n é integrável, visto que é constante igual a zero exceto por um número finito de pontos. Além disso, $|f_n(x)| \leqslant 1$ para todo n, donde f_n é uniformemente limitada. A função limite existe e é justamente a já tão comentada função de Dirichlet: $f(x) = 1$ se x é racional; $f(x) = 0$ se x é irracional. Essa função, como se sabe, não é Riemann-integrável.

Em face dos resultados de Heine e Darboux, bem como do exemplo dado por Baire é que se pode dizer que "a integral de Riemann não é, em geral, compatível com o limite (HOCHKIRCHEN, 2003, p. 273)". Esse fato foi observado por Lebesgue (1902a) que, em sua teoria, mostra que se uma sequência de funções integráveis (à Lebesgue) for uniformemente limitada, então a função para a qual essa sequência converge será integrável (à Lebesgue) e, no caso das séries, sua integral é a soma das integrais de seus termos. A teoria de Lebesgue exclui,

[37] Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformement convergente dans un intervalle donné (a, b), la fonction que représente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes.

[38] Uma sequência f_n de funções é dita uniformemente limitada se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leqslant a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

assim, a hipótese adicional sobre a função limite, de maneira que sua integral é compatível com o limite sob condições bem mais gerais que as da de Riemann.

6 O desenvolvimento da teoria da medida

Antes de adentrarmos finalmente na teoria de Lebesgue, ainda precisaremos discutir mais alguns passos que foram fundamentais para que esse matemático francês pudesse estabelecer seus novos conceitos de medida e de integral. Isso porque as falhas da integral de Riemann já apontadas não eram consideradas à época como pontos críticos, e muito possivelmente elas por si só não teriam levado a se rediscutir a integração de Riemann.

6.1 A medida de Jordan

Jordan é bastante conhecido pelas suas contribuições à álgebra, notadamente nos campos dos grupos finitos e grupos clássicos. Entretanto, também foi substancial sua contribuição à análise, não só pelo seu *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (JORDAN, 1893, 1894, 1896), que influenciou diversas gerações de matemáticos, como também, dentre outras, sua contribuição para o desenvolvimento da teoria da medida.

Em seu trabalho *Remarques sur les intégrales définies*, Jordan (1892) faz um breve apanhado sobre a integral de Riemann e sobre alguns resultados de Darboux, em seguida afirma que os resultados desses dois matemáticos são bastante nítidos e deixam claro o papel que desempenha a função na integral. Entretanto, faz a ressalva que essa mesma clareza não se aplica quando o assunto é o domínio[39]. Em outras palavras, Jordan estava interessado em analisar a natureza da medida dos conjuntos, ou, ainda, em desenvolver uma teoria do *conteúdo* para subconjuntos do R^n. Isso porque, em todas as demonstrações de Riemann e Darboux, são usados dois fatos que para Jordan não eram autoevidentes: i) todo conjunto tem comprimento determinado, ii) se decompusermos um conjunto em n partes, a soma dos comprimentos desses n subconjuntos será igual ao comprimento do conjunto original. E Jordan tinha razão, desde os gregos até Riemann, em se tratando de medida, a maior preocupação era simplesmente medir, e não definir ou discutir o que isso significava[40].

Concentrando-se em subconjuntos do plano – ainda que seus resultados permaneçam válidos para R^n –, Jordan coloca:

> Decomponhamos esse plano por paralelas aos eixos em quadrados de lado r.

[39] Em francês a palavra utilizada é *champ*, que literalmente significa *campo*. Embora seja essa uma tradução possível, visto que essa palavra possui significado dentro do contexto da matemática, optamos por utilizar *domínio* porque em nossas referências em língua portuguesa essa foi a tradução mais comumente utilizada para a palavra em questão. Por outro lado, sem prejuízo, conforme apontam Baroni, Batarce e Nascimento (2009), é possível ainda o uso da palavra *região* que, inclusive, pode parecer até mais natural dentro do referido contexto.

[40] Há quem afirme que nem mesmo Jordan se interessou muito por isso, visto que ele desenvolveu sua teoria da medida para satisfazer o que ele entendia como sendo uma lacuna na teoria da integração, ao contrário, por exemplo, de Lebesgue, que desenvolveu uma teoria da medida e trouxe a sua integral como uma consequência dela. Para mais detalhes ver Baroni, Batarce e Nascimento (2009).

> O conjunto dos quadrados cujos pontos são todos interiores a E forma um domínio S interior a E; o conjunto daqueles que são interiores a E, ou que contém um ponto de sua fronteira, forma um novo domínio $S + S'$, ao qual E é interior. Esses domínios, sendo formados pela reunião de quadrados, possuem áreas determinadas, que podemos também representar por S e $S + S'$. Façamos variar a decomposição em quadrados de tal forma que r tenda a zero: *as áreas S e $S + S'$ tenderão a limites fixos* (JORDAN, 1892, p. 77, grifo do autor)[41].

Portanto, ele toma E como um subconjunto limitado arbitrário de R^2. Sendo P uma partição do plano em quadrados de lado r, Jordan define S como sendo a união dos quadrados completamente contidos em E, e $S + S'$ a união dos quadrados que contêm ao menos um ponto de E. Posto dessa forma, podemos ver que S' consiste dos quadrados que cobrem a fronteira de E[42].

Na demonstração da última afirmação do excerto linhas acima, Jordan utiliza de sucessivos refinamentos para mostrar que a área de S pode ser indefinidamente aumentada sem que ultrapasse um limite fixado A. Por outro lado, a área de $S+S'$ pode ser reduzida tanto quanto se queira sem que fique menor que o limite a fixado. Ou seja $S \to A$ quando $r \to 0$, da mesma forma, $S + S' \to a$ quando $r \to 0$. Jordan chama, então, A de *área interior* de E, e a de *área exterior* de E. Se S' tiver zero por limite, então E será dito quadrável[43]. Quando $E \subset R^n$ para $n > 2$, Jordan utiliza outra nomenclatura, diz que E é *mensurável* se a *extensão exterior* A é igual à *extensão interior* a: "As considerações precedentes são evidentemente aplicáveis a conjuntos com um número qualquer de dimensões. Poderemos determinar para cada um deles uma *extensão interior* e uma *extensão exterior*. Se elas coincidirem, o conjunto será dito *mensurável*" (JORDAN, 1892, p. 79)[44].

Isso posto, Jordan define sua integral:

> Seja $f(x, y, \ldots)$ uma função que conserva um valor limitado no interior de um domínio E que supomos mensurável. Decompomos E em domínios elementares $e_1, e_2, \ldots$ Designamos por M, m o máximo e o mínimo da função f em E; por M_k, m_k seu máximo e mínimo em e_k, e formamos as somas
>
> $$S = \sum M_k e_k, \quad s = \sum m_k e_k.$$

[41] Décomposons ce plan par des parallèles aux axes en carrés de côté r. L'ensemble de ceux de ces carrés dont tous les points sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux que sont intérieurs à E ou qui contiennent au point de sa frontière forment un nouveaux domaine $S + S'$, auquel E est intérieur. Ces domaines, étant formés par la réunion de carrés, ont des aires déterminés, qu'on peut également représenter par S et $S + S'$. Faisons varier la décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro: *les aires S et $S + S'$ tendront vers des limites fixes.*

[42] Dado um subconjunto $X \subset R^2$, a fronteira $\partial(X)$ de X é o conjunto de todos os $x \in X$ tais que qualquer que seja o aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, $U \cap X \neq \emptyset$ e $U \cap (\mathbb{R} - X) \neq \emptyset$. Ou seja, todo aberto na fronteira de X contém tanto pontos de X quanto de seu complementar.

[43] Em francês, *quarrable*, i.e., que pode ser dividido em pequenos quadrados.

[44] Les considérations précédents sont évidemment applicables aux ensembles d'un nombre quelconque de dimensions. On pourra déterminer pour chacun d'eux une *étendue intérieure* et une *étendue extérieure.* Si elles coincident, l'ensemble sera *mesurable.*

> Como temos evidentemente que
>
> $$m \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M,$$
>
> S e s estarão entre
>
> $$M \sum e_k = M \cdot E \ \text{ e } \ m \sum e_k = m \cdot E,$$
>
> e seus módulos serão, no máximo, iguais a $L \cdot E$, L designando o maior dentre os dois módulos $|M|$ e $|m|$ (ou o máximo de $|f|$ no domínio E). O Sr. Darboux mostrou que, se fizermos variar a decomposição de tal modo que os diâmetros dos elementos tendam a zero, S e s tenderão a limites fixos. [...] Esse número fixo $T = \lim S$ se chama integral por excesso da função $f(x, y, \cdots)$ no interior de E. Demonstramos analogamente que as somas s tendem ao seu máximo t, que será a integral por falta da função $f(x, y, \ldots)$. Temos evidentemente que $T \geqslant t$. Se $T = t$, a função será dita integrável, e $T = t$ será sua integral, a qual poderá ser representada pela notação $S_E f(x, y, \ldots) de$ (JORDAN, 1892, p. 81-84)[45].

Jordan possivelmente optou pela notação $S_E f(x, y, \ldots) de$ para diferenciar a sua integral, definida para funções com número de variáveis arbitrário, das integrais de Riemann e Darboux, definidas para funções de uma variável. Precisamente era essa uma das motivações de Jordan para definir sua medida: para ele, a extensão do conceito da integral de Riemann para os casos $n > 1$ não parecia clara, principalmente porque a sua definição e existência estavam baseadas em um conceito de área, que não era suficientemente preciso para gerar uma adequada definição geral (BARONI; BATARCE; NASCIMENTO, 2009, HAWKINS, 1970). Esse ponto crítico na definição de Riemann já havia sido notado anos antes pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) em sua obra de 1883 (PEANO, 1883).

Considerando-se que Darboux dividiu o intervalo $[a, b]$ em um número finito de subintervalos, e que Jordan admitiu conjuntos mensuráveis arbitrários, podendo ser, em particular, intervalos, fica claro que para o caso $n = 1$, se f for integrável à Riemann, e, consequentemente, à Darboux, será também integrável à Jordan. Nessa direção, é possível pensar: podemos generalizar o conceito de integral por meio de uma generalização do conceito de medida? Sim, na realidade, a medida de Jordan influenciou fortemente Émile Borel e Henri Lebesgue, e permitiu o desenvolvimento de um novo conceito de integral por meio de sua conexão com o conceito de medida, como veremos nas seções seguintesTelkes.

[45] Soit $f(x, y, \cdots)$ une fonction qui conserve une valeur bornée dans l'intérieur d'un domaine E, supposé mesurable. Décomposons E en domaines élémentaires mesurables $e_1, e_2, \ldots$ Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k, et formons les sommes $S = \sum M_k e_k$, $s = \sum m_k e_k$. Comme on a évidemment $m \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M$, S et s seront comprises entre $M \sum e_k = M \cdot E$ e $m \sum e_k = m \cdot E$, et leurs modules seront, au plus, égaux à $L \cdot E$, L désignant le plus grand des deux modules $|M|$ et $|m|$ (ou le maximum de $|f|$ dans le domaine E). M Darboux a montré que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que les diamètres des éléments tendent vers zéro, S et s tendront vers des limites fixes. [...] Ce nombre fixe $T = \lim S$ se nomme l'intégrale par excès de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans l'intérieur de E. On démontre de même que les sommes s tendent vers leur maximum t, qui sera l'intégrale par défaut de $f(x, y, \ldots)$. On a évidemment $T \geqslant t$. Si $T = t$, la fonction sera dite intégrable, et $T = t$ sera son intégrale, laquelle pourra être représentée par la notation $S_E f(x, y, \ldots) de$.

6.2 Conjuntos densos e a medida de Borel

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) introduziu noções topológicas sobre conjuntos que foram essenciais para o desenvolvimento da teoria da medida de Borel, isso porque foi por meio delas que as noções de dois tipos distintos de conjuntos finalmente se tornaram bem definidas: conjuntos de medida zero e conjuntos densos em parte alguma. Para que possamos entender – ainda que não profundamente, visto não ser esse o nosso enfoque – o motivo pelo qual os matemáticos confundiam as noções desses dois tipos de conjuntos, vamos defini-los.

Um conjunto $A \subset B$ será dito denso em parte alguma, se para todo $x \in A$ for sempre possível definir uma vizinhança de x que não contenha pontos de B. Analogamente, esse conjunto será dito denso se toda vizinhança de x contiver algum ponto de B. Nesse contexto, o conjunto dos números inteiros é denso em parte alguma em $\mathbb{R}$, já o conjunto dos racionais é denso em $\mathbb{R}$. Apesar de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ gozarem de propriedades distintas com relação à densidade, ambos, por outro lado, têm medida zero. Isso significa que podem ser cobertos por um número finito ou no máximo enumerável de intervalos.

Para muitos matemáticos importantes da época, conjuntos densos em parte alguma e conjuntos de medida zero eram conceitos equivalentes. No mesmo trabalho em que trata do conceito abstrato de função e traz a sua definição desse ente matemático, Hermann Hankel (1839-1873) discute a questão da continuidade, pois essas duas ideias estiveram por muito tempo atreladas dentro da história da matemática (HANKEL, 1870). Nesse contexto, ele analisa as características de certos conjuntos de descontinuidades de funções singulares geradas por meio do método de condensação de singularidades[46]. A partir desses exemplos, Hankel enuncia e demonstra que toda função cujo conjunto de pontos de continuidade é denso é integrável. Na demonstração, ele assume que os conjuntos densos em parte alguma possuem medida nula. Por conta dessa confusão, a demonstração estava incorreta e, na verdade, o próprio teorema mostrar-se-ia falso. Em 1875 o matemático inglês Henri John Stephen Smith (1826-1883) apresenta um exemplo de função não-integrável cujo conjunto de pontos de descontinuidade é denso em parte alguma (SMITH, 1875).

Parte da referida confusão entre conjuntos densos em parte alguma e conjuntos de medida nula devia-se ao fato da não existência de exemplos que a contrariasse. Entretanto, a função de que falamos linhas acima apresentada por Smith fazia exatamente isto: seu conjunto de pontos de descontinuidade, embora denso em parte alguma, possuía medida positiva (e por isso não era integrável). Apesar do exemplo de Smith, os dois conceitos ainda seriam confundidos pelo menos até os trabalhos de Volterra (1881) e Cantor (1879, 1880, 1882, 1883a, 1883b, 1884) serem publicados, isso porque os resultados de Smith não ficaram tão conhecidos em sua época.

Cantor (1879, 1880, 1882, 1883a, 1883b, 1884) em sua série de trabalhos publicados na

[46] A partir de uma função com uma determinada singularidade num ponto, construía-se uma nova função que possuía essa propriedade num conjunto denso de pontos. Ver *Apêndice C, Funções patológicas.*

renomada revista *Mathematische Annalen* não só apresenta exemplos como os de Smith como "introduz todas as ideias que depois se generalizariam para espaços topológicos, como 'ponto de acumulação', 'conjunto derivado', 'conjunto denso', 'perfeito' e outros" (LINTZ, 2007, p. 493).

* * *

Para os matemáticos da época, por conta da confusão de que falamos antes, parecia muito estranho que um conjunto denso como $\mathbb{Q}$ pudesse ter medida nula. Assim, quando Jordan elaborou sua medida, ele simplesmente não contemplou tais conjuntos, ou seja, conjuntos densos não são mensuráveis à Jordan (BARONI; BATARCE; NASCIMENTO, 2009). Uma vez que a tal confusão foi desfeita e certos resultados e conceitos relativos à teoria dos conjuntos estavam mais bem definidos após os trabalhos de Cantor, Borel finalmente pôde dar um passo na direção de estender a medida de Jordan: conjuntos densos são mensuráveis à Borel.

Borel, em seu trabalho de 1898, introduz seu conceito de medida por meio de um axioma intuitivo relativo à medida de intervalos, em seguida, apresenta um axioma sobre a aditividade de sua medida e finaliza com um axioma sobre a medida de um conjunto contido em outro:

> Todos os conjuntos que consideraremos serão formados de pontos compreendidos entre 0 e 1. Quando um conjunto é formado por todos os pontos contidos em uma infinidade enumerável de intervalos que não se sobrepõem uns aos outros e cujo comprimento é s, diremos que o conjunto *tem por medida* s. Quando dois conjuntos não possuem pontos em comum, e suas medidas são s e s', o conjunto obtido pela sua reunião, quer dizer, sua soma, tem por medida $s + s'$. [...] Mais geralmente, se tivermos uma infinidade enumerável de conjuntos que, dois a dois, não possuem nenhum ponto em comum e que possuem, respectivamente, $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ por medida, sua soma (ou o conjunto formado por sua reunião) terá por medida
>
> $$s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots .$$
>
> [...] se um conjunto E tiver por medida s e contiver todos os pontos de um conjunto E' cuja medida é s', o conjunto $E - E'$, *formado por todos os pontos de* E *que não pertencem a* E'*, será dito de medida* $s - s'$. [...] *Os conjuntos para os quais a medida pode ser definida em virtude das definições precedentes serão chamados mensuráveis* [...] *a medida jamais é negativa; todo conjunto cuja medida não é nula não é enumerável* (BOREL, 1898, p. 46-48)[47].

[47] Tous les ensembles que nous considérerons seront formés de points compris entre 0 et 1. Lorsqu'un ensemble sera formé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et ayant une longueur totale s, nous dirons que l'ensemble *a pour mesure* s. Lorsque deux ensembles n'ont pas de points communs, et que leurs mesures sont s et s', l'ensemble obtenu en les réunissant, c'est-à-dire leur somme, a pour mesure $s + s'$. [...] Plus généralement, si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles n'ayant deux à deux aucun point commun et ayant respectivement por mesures $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ leur somme (ou ensemble formé par leur réunion) a pour mesure $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$. [...] si un ensemble E a pour mesure s, et contient tous le points d'un ensemble E' dont la mesure est s', l'ensemble $E - E'$, *formé des points de* E *qui n'appartiennent pas à* E'*, sera dit avoir*

Os conjuntos de Borel podem, portanto, gerar outros conjuntos por meio da diferença ou da união enumerável de outros conjuntos de Borel. A sua medida corresponde a do comprimento dos intervalos. Borel, entretanto, não discute o quão extensíveis seus conjuntos eram, i.e., que conjuntos seriam Borel-mensuráveis e quais não seriam. O máximo que faz é mostrar que os conjuntos perfeitos[48] e limitados são mensuráveis – interessante notar que, para definir esses conjuntos, Borel cita justamente os trabalhos de Cantor de que falamos. Além disso, Borel também não conecta seu conceito de medida ao de integração, como havia feito Jordan.

Apesar de muito valoroso para a teoria da medida, o próprio Borel considerava o trabalho de Jordan mais geral que o seu, talvez por isso ele não tenha se dedicado a estudar algumas consequências dos conjuntos que havia definido: "Seria interessante comparar as definições que nós demos com as definições mais gerais que o Sr. Jordan deu em seu *Cours d'Analyse*" (BOREL, 1898, p. 46, grifo nosso)[49]. Seja como for, tanto os trabalho de Jordan como os de Borel foram fundamentais para que o jovem matemático Henri Lebesgue desenvolvesse suas ideias.

7 Medida e integral de Lebesgue

Lebesgue, conforme já adiantamos, propôs, no começo do século XX, novos conceitos de integral e de medida. O primeiro deles generalizava as integrais propostas por Riemann e Cauchy, sanando diversas deficiências dessas, e o segundo, as medidas de Jordan e Borel (HOCHKIRCHEN, 2003; CAJORI, 2007). Não por acaso, essas generalizações levaram o seu nome: integral de Lebesgue e medida de Lebesgue.

A integral de Riemann é aplicável tanto a funções contínuas como a funções que admitem um número finito de descontinuidades, entretanto, há restrições no caso do número de descontinuidades ser infinito. Além dessa limitação, a definição dada por Riemann, muito embora tenha satisfeito os matemáticos durante algum tempo, apresentava outras falhas. Seguindo Chae (1995), apontaremos novamente algumas delas usando uma linguagem mais moderna.

A primeira e mais notável é que a classe de funções integráveis à Riemann é muito restrita, ainda que seja uma ampliação das funções integráveis à Cauchy. A própria função de Dirichlet pode ser tomada como um exemplo dessa limitação (e, de fato acabou sendo usada por

pour mesure $s - s'$ [...] *Les ensembles dont on peut définir la mesure en vertu des définitions précédents seront dits par nous ensembles mesurables* [...] *la mesure n'est jamais négative; tout ensemble dont la mesure n'est pas nulle n'est pas dénombrable.*

[48] Um conjunto P é dito perfeito se coincidir com seu conjunto derivado P', que, por sua vez, será formado pelos pontos de acumulação de P.

[49] Il serait intéressant de comparer les définitions que nous avons données avec les définitions plus générales que M. Jordan donne dans dans son Cours d'Analyse

Lebesgue nesse sentido). Um segundo ponto fraco é que, em geral, não é verdade que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

quando $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de funções integráveis à Riemann em $[a.b]$ que tende a $f(x)$. Isso porque o limite da esquerda pode não existir, e, mesmo que exista, a função f pode não ser integrável à Riemann e, finalmente, ainda que ela o seja e o limite exista, a igualdade pode não ser satisfeita. Finalmente, ainda que tenhamos uma função f contínua e derivável em um certo intervalo $[a, b]$, f' não será sempre Riemann-integrável, isto é, a relação fundamental

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

não é sempre verificável.

Precisamente nessas falhas residiam os pontos de partida de Lebesgue. Entretanto, exemplos como o da função de Dirichlet eram vistos com certa desconfiança ainda no início do século XX. Muitos matemáticos da época, dentre eles o já reconhecido Jules Henri Poincaré (1854-1912), diziam que o estudo de tais casos particulares desviaria os jovens estudantes de problemas mais importantes que ainda estavam em aberto. Além disso, as demais falhas da integral de Riemann nem sempre foram consideradas como *pontos críticos*. Dessa forma, não foi bem recebida à época a tese de doutorado de Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*. Conforme já citamos, é nessa obra que Lebesgue desenvolve suas ideias sobre seus conceitos de medida e integração, que haviam sido introduzidos anos antes em uma série de cinco artigos publicados no *Comptes Rendus*, em especial no último deles, *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (LEBESGUE, 1899b, 1899c, 1900a, 1900b, 1901).

Antes de abordarmos com mais detalhes essas duas obras – o artigo de 1901[50], e a tese de 1902 –, gostaríamos de fazer uma pequena digressão a fim de compreender um pouco melhor quem foi Henri Lebesgue.

7.1 Uma pequena biografia

> A primeira oportunidade (da minha vida) é de ter nascido de pais bem talentosos; depois, de ter sido doente e extremamente pobre, o que me impediu das brincadeiras violentas e de toda distração onerosa; então, tomei gosto pela única brincadeira possível para mim, e que continuo sempre a brincar: fazer números e figuras sobre todos os pedaços de papel que eu encontro. Então, tive a chance de ter, bastante jovem, mestres que decidiram sobre meu futuro sem que eu precisasse me preocupar com isso, e, sobretudo, de ter uma mãe incomparável mesmo neste país de boas mães que é a França. Se a felicitássemos, minha mãe não compreenderia, certamente; viúva com crianças das quais a mais velha não tinha cinco anos, devendo manter a todos com o seu trabalho que nem sempre lhe permitia satisfazer sua fome,

[50] No *Apêndice E*, trazemos a tradução desse trabalho publicada em Otero-Garcia (2012).

> ela aceitaria, no entanto, com alegria e sem hesitação, que suas crianças fossem dirigidas por caminhos que, por muito tempo ainda, não seriam para ela senão um fardo; mas, na sua opinião, toda mãe teria feito o mesmo (LEBESGUE, 1972 *apud* FÉLIX, 1974, p. 4)[51].

Henri Léon Lebesgue nasceu em 28 de junho de 1875 em Beauvais[52], em um meio modesto, porém intelectualmente bastante promissor: seu pai era tipógrafo e sua mãe, professora dos anos iniciais; segundo Perrin (1998), eles possuíam uma biblioteca considerável para época e desde muito cedo teriam estimulado seu filho a ler. Lebesgue iniciou sua educação básica na sua cidade natal, completando-a em Paris, primeiramente no *Lycée Saint Louis* e, depois no *Lycée Louis le Grand*. Graduou-se em matemática pela *École Normale Supérieure* de Paris em 1897. Concluído seus estudos, Lebesgue trabalhou na biblioteca da *École Normale* até 1899. Durante esse período, segundo apontam Hoare e Lord (2002), Lebesgue tomou contato com os trabalhos de René Baire sobre classificação de funções descontínuas e sobre medida, o que influenciou algumas ideias presentes em sua tese e que, também, gerou uma certa rivalidade entre eles, conforme veremos adiante. Além disso, foi durante esses anos que Lebesgue publicou seu primeiro artigo (LEBESGUE, 1898), no qual apresenta uma prova simples do teorema da aproximação de Weierstrass (Hoare; Lord, 2002).

> O primeiro trabalho que publiquei estava dedicado, sobretudo, à demonstração deste teorema de Weierstrass: uma função contínua pode ser representada por um polinômio com a aproximação que quisermos. As demonstrações que possuíamos então, embora muito simples, pareciam-me mais eruditas que o exigido pela natureza elementar das noções que intervinham no enunciado de Weierstrass. Guiado pelo desejo de sempre ver somente as coisas simples, analisei a questão assim: a função $f(x)$ a representar está aproximada de tão perto quanto se queira pela função $\varphi(x)$ tal que a curva $y = \varphi(x)$ seja um polígono inscrito na curva $y = f(x)$. É suficiente de se ocupar, portanto, dessas funções $\varphi(x)$ (LEBESGUE, 1922, p. 52)[53].

---

[51] La première chance (de ma vie) est d'être né de parents bien doués; puis d'avoir été maladif et extrêmement pauvre ce qui m'a interdit les jeux violents et toute distraction onéreuse; aussi ai-je pris goût au seul jeu pour moi possible, à celui que je continue toujours à jouer: faire des chiffres et des figures sur tous les bouts de papier que je rencontre. Puis j'ai eu la chance d'avoir, tout jeune, des maîtres qui ont décidé de mon avenir sans que j'aie à m'en soucier, et surtout d'avoir une mère incomparable même en ce pays de bonnes mères qu'est la France. Si on l'en félicitait, ma mère ne comprendrait pas; certes, restée veuve avec des enfants dont l'aînée n'avait cinq ans, devant suffire à tout grâce à son travail qui ne lui permit pas toujours de manger à sa faim, elle acceptera cependant, avec joie et sans hésitation, que ses enfants fussent dirigés dans des voies où, long-temps encore, ils ne seraient pour elle qu'une charge; mais à son avis, toute mère eut fait comme elle.

[52] Cidade do norte da França que dista aproximadamente 80km de Paris, com cerca de 20 mil habitantes em 1900. Nessa mesma época, para efeitos comparativos, Paris contava com cerca de 2,7 milhões de habitantes e a França como um todo, com cerca de 40 milhões.

[53] Le premier travail que j'ai publié était consacré surtout à la démonstration de ce théorème de Weierstrass: une fonction continue peut être représenté par un polynôme avec telle approximation que l'on veut. Les démonstrations que l'on en possédait alors, bien que très simples, m'avaient paru plus savantes que ne l'exigeait la nature élémentaire des notions intervenant dans l'énoncé de Weierstrass. Guidé par le désir de toujours voir simplement les choses simples, j'ai analysé ainsi la question: la fonction $f(x)$ à représenter est approchée d'aussi près que l'on veut par la fonction $\varphi(x)$ telle que la courbe $y = \varphi(x)$ soit un polygone inscrit dans la courbe $y = f(x)$. Il suffit donc de s'occuper de ces fonctions $\varphi(x)$.

Já como professor, de 1899 a 1902, Lebesgue lecionou no *Lycée Centrale* de Nancy[54]. Tomando por base trabalhos como os de Émile Borel, Camile Jordan e do já citado René Baire, foi nessa época que Lebesgue formulou sua teoria da medida, tendo, em 1901, publicado seu famoso trabalho *Sur une généralisation de l'intégrale définie* no qual, como sugere o título, define uma generalização do conceito de integral que seria trabalhado com maiores detalhes em sua tese de 1902 (LEBESGUE, 1901, 1902a). Consoante com as tradições francesas da época, o recém doutor de vinte e sete anos foi nomeado em 1902 como *maître de conférences*[55] de matemática da Faculdade de Ciências de Rennes[56], depois, em 1906, na Universidade de Poitiers[57] e, finalmente, em 1910, na *Sorbonne*[58], em Paris, onde se torna professor titular em 1920. Em 1921 é nomeado, também como titular, no *Collège de France*, onde permanece até sua morte em 1941 (PERRIN, 1998).

É curioso notar que Lebesgue, em sua carreira, não centrou esforços no campo que ele ajudou a criar. O motivo, talvez, tenha relação a seguinte citação sua: "Reduzida a teorias gerais, a matemática deviria uma bela forma sem conteúdo; ela morreria rapidamente" (LEBESGUE *apud* MEYER, 2006, p. 24)[59]. Ou seja, a generalização que ele próprio propusera poderia, em suas palavras, contribuir, metaforicamente, para uma rápida morte da matemática. O que ocorreu depois mostrou que suas preocupações eram infundadas, dado que sua teoria, pelo contrário, contribuiria para que muita matemática nova fosse desenvolvida. Seja como for, Lebesgue colaborou para outros campos da matemática, como cálculo de variações, teoria dos conjuntos, teoria das superfícies e dimensões, dentre outros. Apaixonado por questões pedagógicas, Lebesgue, embora nunca tenha deixado de trabalhar com a matemática pura, pouco a pouco se distanciou desta em favor daquela, tendo publicado, notadamente depois de 1920, diversos trabalhos sobre ensino da matemática, história da matemática e geometria elementar (foi um grande colaborador da revista *L'Enseignement mathématique*): "[...] a matemática, como resultado, interessa-me cada vez menos, o que me apaixona é o trabalho do pensamento humano que exige uma pesquisa matemática" (LEBESGUE *apud* FÉLIX, 1974, p. 6)[60]. Produtivo até o fim de sua vida, publicou mais de 150 obras entre livros e artigos (PALARO, 2006, PERRIN, 1998).

[54] Cidade do leste da França, distante cerca de 280km de Paris, que, em 1900, tinha cerca de 100 mil habitantes.

[55] Algo que poderia ser traduzido como professor associado ou professor adjunto, dependendo da carreira com a qual se está estabelecendo a comparação. O fato é que essa era a posição inicial para um recém doutor e tinha uma certa independência da carreira de *professeur* (professor pleno, professor titular).

[56] Cidade do oeste da França que dista cerca de 300km de Paris e que em 1900 tinha cerca de 75 mil habitantes.

[57] Cidade situada a cerca de 340km a sudoeste de Paris, em 1900 tinha cerca de 40 mil habitantes.

[58] Mais precisamente, na própria Faculdade de Ciências de Paris onde ele obteve seu título de doutor. Antes da reforma de maio de 1968, diversas faculdades e institutos compunham a Universidade de Paris, conhecida como Sorbonne. Após essa data, elas foram subdivididas em treze universidades. A Faculdade de Ciências deu origem as atuais Paris VI (*Université Pierre-et-Marie-Curie*), Paris VII (*Université Paris-Diderot*), e Paris XIII.

[59] Réduite aux théories générales, les mathématiques deviendraient une belle forme sans contenu; elles mourraient rapidement.

[60] [...] le mathématiques, en tant que résultats, m'intéressent de moins en moins; ce qui me passionne, c'est le travail de pensée humaine qu'exige une recherche mathématique.

Figura 4: Henri Lebesgue em 1931.

Apesar de ter sofrido grande resistência da comunidade matemática no início da sua carreira, sobretudo por conta de sua tese de doutorado e de outros trabalhos correlatos (considerados muito audaciosos àquela época), sua trajetória acadêmica lhe garantiu uma série de honrarias ao longo de sua vida. Foi eleito membro da Academia de Ciências – na seção de geometria, substituindo o já grande geômetra Camille Jordan –; da Academia dei Lincei de Roma; das academias reais de Londres, da Dinamarca, da Bélgica e da Romênia; da Academia Polonesa de Ciências e de Letras. Diversas universidades lhe conferiram o título de doutor *honoris causa* e recebeu, ainda, numerosos prêmios como o Prêmio Houllevigue, Poncelet, Saintour, e o Petit d'Ormoy.

7.2 Sobre uma generalização da integral definida

Apresentado por Charles Émile Picard (1856-1941), publicado no *Comptes Rendus* da Academia de Ciências de Paris[61], o breve artigo de cerca de duas páginas e meia[62], *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, trouxe, pela primeira vez, os conceitos de medida e de integral de Lebesgue que seriam, um ano depois, detalhados em *Integrale, Longueur, Aire*.

Lebesgue inicia seu artigo partindo da ideia de que nem toda função derivada é Riemann-integrável, e que, portanto, essa integral não resolve o problema da procura por funções primitivas, e sugere que, ao invés de se subdividir um intervalo do domínio da função, para o cômputo da integral, a subdivisão de um intervalo do conjunto imagem levaria a uma generalização do conceito posto. Isso significa que sua integral tem, como caso particular, a de Riemann e, ao mesmo tempo, consegue apresentar primitivas de funções que Riemann não conseguiu.

Dividindo uma função $m \leqslant y \leqslant M$ em subintervalos, a integral de Lebesgue dessa função é dada por uma das seguintes somas, desde que a distância entre dois m_i tenda a zero:

$$m_0\lambda_0 + \sum_i m_i\lambda_i \text{ ou } m_0\lambda_0 + \sum_i m_{i-1}\lambda_i,$$

sendo que $m = m_0 < m_1 < \cdots < m_{p-1} < M = m_p; y = m$, se x pertence a E_0, e $m_{i-1} < y \leqslant m_i$ se x pertence a E_i. Ou seja, $E_0 = y^{-1}(m) = \{x \in [a,b]; y(x) = m\}$ e $E_i = y^{-1}(m_{i-1}, m_i] = \{x \in [a,b]; m_{i-1} < y(x) \leqslant m_i\}$. Já λ_0 e λ_i são, respectivamente, as medidas (de Lebesgue) dos conjuntos E_0 e E_i. Note-se que como Lebesgue define os conjuntos E_i em termos de intervalos abertos à direita, $m_0\lambda_0$ ficou fora do somatório. Ainda, a única diferença entre as duas expressões está nos termos m_i e m_{i-1}, ou seja, Lebesgue diz-nos

[61] O mister do *Comptes Rendus* era publicar trabalhos dos membros da Academia de Ciências de Paris e de seus correspondentes. Porém, trabalhos de não membros também eram aceitos, desde que apresentados por um membro. É exatamente esse o caso do artigo de Lebesgue, que, em 1901, ainda não fazia parte da Academia. Desse modo, seu trabalho só pode ser publicado mediante a apresentação de Picard.

[62] Os membros da Academia não podiam publicar mais que cinquenta páginas por ano, e os chamados correspondentes, trinta e duas. Cada trabalho de membro poderia ter, no máximo, seis páginas, no caso dos correspondentes, quatro. Aos trabalhos apresentados cabia o limite de três páginas.

que é indiferente a escolha pelo limitante superior ou pelo inferior de cada intervalo. Na realidade, sabemos que é indiferente a escolha por qualquer $m_{i-1} \leqslant y_i^* \leqslant m_i$, e poderíamos optar por uma partição conveniente, de modo a eliminar o termo $m_0\lambda_0$ de fora do somatório. Assim, em notação mais moderna, particionando-se do intervalo $(\bar{f}, \underline{f})$ – em que $\bar{f}$ e $\underline{f}$ são, respectivamente, os limites superior e inferior da função dentro do intervalo considerado –, em $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, com $\bar{f} = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \underline{f}$, chegamos à seguinte soma, em que $m(E_i)$ é a medida (de Lebesgue) do conjunto E_i:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^* m(E_i).$$

Quando n tende a infinito, as diferenças $(y_{i+1} - y_i)$ tendem a zero, e a soma transforma-se na integral de Lebesgue.

Lebesgue define sua medida[63] de um conjunto de pontos contido num intervalo aberto como sendo o limite inferior da soma dos comprimentos dos intervalos (infinitos) em que esses pontos são encerrados. Ou seja, a medida do conjunto $E \subseteq (a, b)$ pode ser definida como $m(E) := \inf\{\sum_i l(I_i); E \subseteq \cup_i I_i\}$, em que $I_i = (a_i, b_i]$ e $l(I_i) = b_i - a_i$, já que não importa quais intervalos sejam escolhidos para cobrir E. Por outro lado, um conjunto será dito mensurável se a soma de sua medida com a do seu complementar em relação ao conjunto que o contém for igual à medida desse conjunto. Em outros termos, $E \subseteq (a, b)$ é mensurável se $m(a, b) = m(E) + m((a, b) \cap E^C)$. Novamente, não importa qual intervalo que contém E é considerado. Logo a seguir, Lebesgue mostra-nos que os conjuntos mensuráveis formam uma σ-álgebra:

> [...] uma infinidade de conjuntos mensuráveis E_i sendo dada, o conjunto dos pontos que fazem parte de, pelo menos, um dentre eles é mensurável; se os E_i não têm dois a dois algum ponto em comum, a medida do conjunto obtido é a soma das medidas E_i. O conjunto dos pontos comuns a todo os E_i é mensurável (LEBESGUE, 1901, p. 1026 tradução de OTERO-GARCIA, 2012, p. 69)[64].

De fato, o conjunto vazio é mensurável, já que $\emptyset^C = (a, b)$; o complementar de qualquer conjunto mensurável é mensurável pela própria definição; finalmente, a união enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável. Mais geralmente, o que Lebesgue nos afirma é que a

63 Em sua tese, Lebesgue chamaria essa medida de medida exterior, como a conhecemos atualmente, e, a partir dela, define a medida que hoje se chama de medida de Lebesgue. Na realidade, o que se deu foi mais uma mudança de nomenclatura que de definição propriamente dita. Isso porque em seu artigo Lebesgue define medida e impõe uma condição adicional para que um conjunto seja dito mensurável. Já em sua tese, Lebesgue chama essa medida de medida exterior, e a condição de mensurabilidade passa a ser incorporada na definição de medida. Em outros termos, a medida de Lebesgue (em sua tese) nada mais é que uma restrição da medida exterior (ou medida de Lebesgue, em seu artigo) aos conjuntos mensuráveis.

64 [...] une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l; ensemble obtenu est la somme des mesures E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable.

tripla $((a,b),\ell,m)$ – em que ℓ é a família de subconjuntos de (a,b) (mensuráveis), e m é a função medida de Lebesgue – é um espaço de medida. Com efeito, (a,b) é um conjunto, ℓ é uma σ-álgebra (como mostramos), a função medida de Lebesgue é tal que $m(\emptyset)=0$, e, sendo os conjuntos E_i disjuntos, $m(\cup_i E_i)=\Sigma m(E_i)$.

A fim de trazer mais detalhes sobre sua integral, e, acreditamos, facilitar a nomenclatura, Lebesgue diz que uma função integrável pelo seu procedimento é dita somável. Se, ao retirarmos do domínio de uma função um conjunto de medida nula, obtivermos um conjunto no qual a função é contínua, então ela será somável. Desse modo, é simples construir funções que são somáveis mas que não são integráveis no sentido de Riemann, já que os conjuntos de medida nula podem ser, inclusive, infinitos. Um exemplo típico e clássico é o da função de Dirichlet, D : $[0,1]\to$ R dada por:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{se} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}.$$

D não é integrável no sentido de Riemann, entretanto, se considerarmos a restrição de D ao conjunto dos irracionais, $D|_{\mathbb{I}}$, teremos uma função contínua ($\mathbb{Q}$ tem medida nula), donde D será somável[65]

A função de Dirichlet é dada por Lebesgue como um exemplo particular de um método mais geral de se produzir funções somáveis que não são integráveis no sentido de Riemann. Tomando $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções contínuas quaisquer, $\varphi(x)$ não sendo sempre nula, define-se uma função que é sempre igual a $f(x)$, a não ser num conjunto de medida nula, no qual será igual a $f(x)+\varphi(x)$. Esse processo mostra que o conjunto das funções somáveis é mais geral que o conjunto das funções contínuas.

Como o conjunto de funções somáveis inclui, evidentemente, as funções constante e identidade, e a soma e produto de funções somáveis são somáveis, bem como o limite de uma sequência de funções somáveis é uma função somável; são somáveis também as funções polinomiais, contínuas e os limites de funções contínuas.

Lebesgue encerra seu artigo apresentando uma aplicação geométrica da sua integral. Se $|f'|$, $|\psi'|$, $|\varphi'|$ são limitadas superiormente, o comprimento da curva $x=f(t), y=\varphi(t), z=\psi(t)$ será dado pela integral de $\sqrt{(f'^2+\varphi'^2+\psi'^2)}$.

O comprimento da curva pode ser obtido por meio de sucessivas (e infinitas) aproximações lineares suas, da semelhante maneira que o método da exaustão nos ensina sobre o cálculo de áreas e volumes sob regiões curvas. Por outro lado, o cálculo ensina-nos que o comprimento

[65] Cumpre esclarecer que D é descontínua em todo seu domínio, já a seguinte variação de D:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{se} \quad x=0\\ 1/q, & \text{se} \quad x=p/q, mdc(p,q)=1, q>0\\ 0, & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, \tag{3}$$

ao contrário, é descontínua apenas em $\mathbb{Q}$, que, conforme já dissemos, tem medida nula. Assim, uma vez que uma função será Riemann-integrável se, e somente se, seu conjunto de pontos de descontinuidade possuir medida nula; f será Riemann-integrável, diferentemente de D.

dessa curva, num dado intervalo (a, b), pode ser dado pela seguinte fórmula:

$$\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt,$$

desde que as derivadas sejam limitadas.

O que ocorre com esse exemplo, e que motivou Lebesgue a apresentá-lo, é que, assim como o problema da primitivação não é resolvido pela integração (de Riemann), também nesse caso há curvas que podem ser seus comprimentos obtidos pelo método das aproximações lineares sucessivas, mas que não podem ter seus comprimentos obtidos via integração. A integral de Lebesgue torna as duas noções equivalentes.

7.3 Integral, Comprimento, Área

A tese de Lebesgue, *Integrale, Longueur, Aire*, orientada por Émile Borel, foi defendida em 30 de junho de 1902 na Faculdade de Ciências de Paris (FCP). Nesse mesmo ano, foi publicada na íntegra também no *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (LEBESGUE, 1902b). Participaram da comissão examinadora, Charles Émile Picard (1856-1941), Gabriel Xavier Paul Kœnigs (1858-1931) e Jean-Baptiste Édouard Goursat (1858-1936), todos professores dessa mesma faculdade.

Em 1901, a FCP contava com 1363 alunos, chegando a cerca de 4550 em 1938-39, resultado da expansão pela qual passavam as universidades francesas no começo do século XIX. Esse aumento foi acompanhado de outros, como o de laboratórios, prédios, cadeiras (cátedras), verba etc. Como também é de se esperar de um período entre guerras, no caso, a primeira e segunda guerras mundiais, naqueles anos ocorria ainda uma reforma curricular. Quer como estudantes, quer como professores, renomados cientistas passaram por essa faculdade, como Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), Siméon Denis Poisson (1781-1840), Jean Gaston Darboux (1842-1917), além dos laureados Pierre Curie (1859-1906) e Marie Skłodowska-Currie (1867-1934). Telkes (1990) aponta-nos outras formas de se compreender o quão reconhecida era àquela época a Faculdade de Ciências de Paris: cerca de 72% dos professores participavam ativamente de ao menos uma sociedade científica, 38% colaboravam frequentemente com revistas científicas, 64% foram eleitos para a Academia de Ciências ou outras academias nacionais de prestígio em suas áreas.

Thompson (2011), ao falar dos *campos de interação*, das *instituições sociais* e da *estrutura social*, frisa a importância de se compreender esses dois aspectos quando da análise de uma forma simbólica na medida que eles revelam, por exemplo, as relações existentes entre as pessoas e as oportunidades que estavam acessíveis a elas. Nesse sentido, Lebesgue, homem branco europeu, doutor por uma conceituada universidade, não deve ter encontrado maiores obstáculos para que suas ideias expressas em sua tese fossem aceitas. Não foi bem isso que aconteceu: conforme já citamos, e voltaremos a tratar mais adiante, apesar de privilegiado segundo os aspectos há pouco elencados, outros fatores foram relevantes para que a tese de Lebesgue não fosse aceita logo de início.

Com 134 páginas no total e 129 de corpo, seis capítulos e uma introdução, Lebesgue dedicou sua tese ao *Monseieur A. Cauquil*, diretor do colégio em que completou seus estudos, o *Lycée Louis-le-Grand* (também conhecido como *Collège de Clermont*). Para a redação dos estudos científicos, costuma-se orientar que a escrita das orações ocorram em ordem direta (sujeito, verbo, complemento), com raras intercalações de períodos e evitando-se o uso excessivo da voz passiva, de modo que a leitura torne-se mais clara e precisa. Em *Integrale, Longueur, Aire*, porém, vemos o uso constante dessas intercalações, sejam por orações subordinadas substantivas, sejam por subordinadas adjetivas ou coordenadas. Além disso, a ordem indireta também é muito requisitada, como, por exemplo em "à curva C corresponde a curva Γ, $X = \varphi[f(t)]$" (p. 89)[66], em que vemos um objeto indireto, verbo e sujeito. Consoante com nossas concepções já explicitadas, esse tipo de escrita, exceto em casos em que a clareza estivesse muito comprometida, foi mantida na tradução.

No primeiro capítulo de sua tese, Lebesgue apresenta os seguintes axiomas, que devem ser verificados para qualquer medida:

> Nós nos propomos a fixar a cada conjunto limitado um número positivo ou nulo, que nós chamaremos de sua medida, e que satisfará as condições seguintes:
> 1. Existem conjuntos cuja medida não é nula.
> 2. Dois conjuntos iguais têm a mesma medida.
> 3. A medida da soma de um número infinito, ou de uma infinidade enumerável de conjuntos, sem pontos em comum; dois a dois, é a soma das medidas desses conjuntos (LEBESGUE, 1902a, p. 6)[67].

Como se pode notar, à exceção do segundo axioma, os demais foram definidos à maneira como Borel havia feito em 1898. Com forte apelo geométrico, Lebesgue, então, define sua medida e demonstra certos resultados relativos a ela a partir do caso em que os elementos dos conjuntos são pontos de uma reta, em seguida estende os resultados para o plano e para dimensões quaisquer.

Lebesgue define o que ele chama de *medida exterior* de um conjunto de pontos contido num intervalo aberto como sendo o limite inferior da soma dos comprimentos dos intervalos (infinitos) que cobrem esses pontos. Ou seja, a medida exterior, denotada por m_e do conjunto $E \subseteq (a, b)$, pode ser definida como

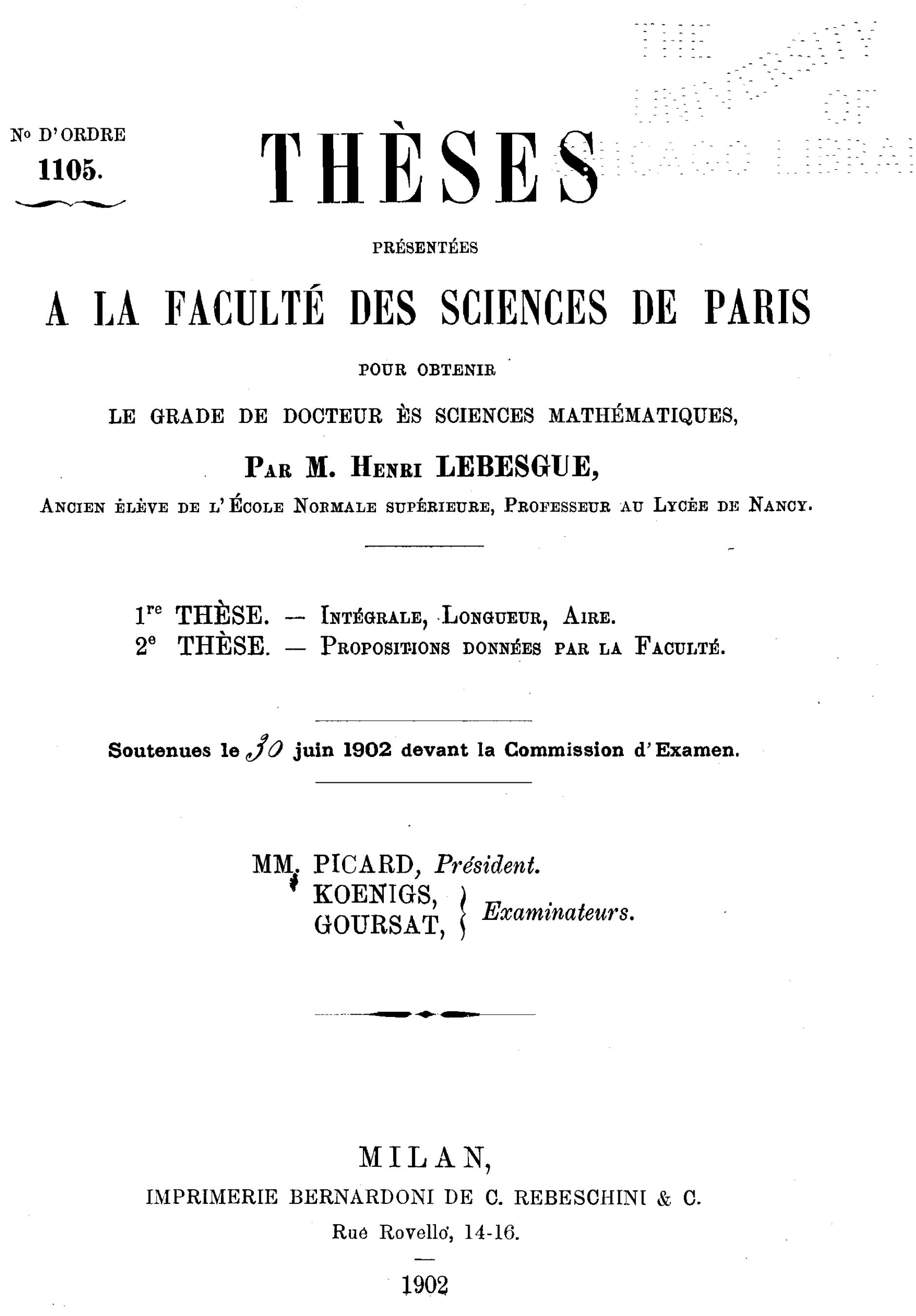
$$m_e(E) := \inf \left\{ \sum_i l(I_i); E \subseteq \cup_i I_i \right\},$$

em que $I_i = (a_i, b_i]$ e $l(I_i) = b_i - a_i$, já que não importa quais intervalos sejam escolhidos para cobrir E. Essa definição generaliza a *extensão exterior* da medida de Jordan.

---

[66] A la courbe C correspond la courbe Γ, $X = \varphi[f(t)]$.

[67] Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes: 1. Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle. 2. Deux ensembles égaux ont même mesure. 3. La mesure de là somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs; deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles



Nº D'ORDRE
1105.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI LEBESGUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

1re THÈSE. — INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 juin 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. PICARD, *Président.*
KOENIGS, GOURSAT, *Examinateurs.*

MILAN,
IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.
Rue Rovello, 14-16.
—
1902

Figura 5: Capa da tese de doutorado de Henri Lebesgue defendida em 1902 pela Faculdade de Ciências de Paris.

Por outro lado, denotando por $C_{ab}(E)$ o complementar de $E \subset (a, b)$ em relação a (a, b), Lebesgue define a *medida interior* de um conjunto como sendo:

$$m_i(E) = m(ab) - m_e[C_{ab}(E)],$$

em que $m(a, b) = b - a$, o comprimento do intervalo, como em Borel. Um conjunto é dito mensurável se $m_e = m_i$.

Lebesgue mostra adiante que se $E_1 \subset E_2$, então $m(E_2 - E_1) = m(E_2) - m(E_1)$, exatamente como colocado por Borel em um de seus axiomas. Além disso, sua medida assim definida satisfaz os três axiomas por ele colocados no início de seu trabalho. Mais que isso, em linguagem moderna, Lebesgue mostra que sua medida forma uma σ-álgebra. De fato, o conjunto vazio é mensurável, já que $\emptyset^C = (a, b)$; o complementar de qualquer conjunto mensurável é mensurável, pela própria definição; finalmente, a união enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável. Mais geralmente, o que Lebesgue nos afirma é que a tripla $((a, b), \ell, m)$ – em que ℓ é a família de subconjuntos de (a, b) (mensuráveis), e m é a função medida de Lebesgue – é um espaço de medida. Com efeito, (a, b) é um conjunto, ℓ é uma σ-álgebra (como mostramos), a função medida de Lebesgue é tal que $m(\emptyset) = 0$, e, sendo os conjuntos E_i disjuntos, $m(\cup_i E_i) = \sum m(E_i)$.

Antes de estabelecer as conexões entre sua medida e o conceito de integral, Lebesgue demonstra que os conjuntos mensuráveis à Jordan são também mensuráveis com relação à sua medida, e, além disso, essas medidas são iguais. Ou seja, a definição de Lebesgue estende a de Jordan. Da mesma forma, no que se refere à medida de Borel: "todo conjunto mensurável está contido em um conjunto E_1 e contém um conjunto E_2, E_1 e E_2 sendo mensuráveis (B) [à Borel] e de mesma medida" (LEBESGUE, 1902a, p. 11)[68]. Ou seja, a medida de Lebesgue também prolonga a de Borel.

* * *

No segundo capítulo de sua tese, Lebesgue aplica a sua teoria da medida à integração. De modo semelhante ao que fez em seu artigo de 1901, parte da ideia de que nem toda função derivada é Riemann-integrável, e que, portanto, essa integral não resolve o problema da procura por funções primitivas, Lebesgue sugere, então, que, ao invés de se subdividir um intervalo do domínio da função para o cômputo da integral, a subdivisão de um intervalo do conjunto imagem leva a uma generalização do conceito posto.

Seja $m \leqslant f \leqslant M$ uma função limitada em um intervalo fechado $[a, b]$. Sendo P a partição

$$m = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < M = a_p,$$

[68] [...] tout ensemble mesurable est contenu dans un ensemble E_1 et contient un ensemble E_2, E_1 et E_2 étant mesurables (B) et de même mesure.

a integral de Lebesgue estará compreendida entre as seguintes somas:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i), \quad \Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i);$$

sendo que $e_i = y^{-1}(a_i, a_{i+1}] = \{x \in [a,b]; a_i < y(x) \leqslant a_i\}$ e $m(e_i)$ é a medida de Lebesgue do conjunto e_i. A diferença $\Sigma - \sigma$ não supera $||P||(b-a)$, já que a medida dos comprimentos e_i é evidentemente menor que a medida de $(b-a)$ e $||P|| = \max\{a_{i+1} - a_i\}$. Dessa forma:

$$\Sigma - \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) m(e_i) \leqslant ||P||(b-a).$$

Quando os a_i se tornam suficientemente pequenos, ou seja, $||P|| \to 0$, as duas somas convergem para o mesmo valor, que será a integral de Lebesgue no intervalo considerado:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i).$$

Essa definição – embora tenhamos usado o caso particular de funções de uma variável, é estendida para o caso de mais variáveis –, como Lebesgue deixou claro em sua tese que era de seu desejo, generalizou o conceito de integral definida, superando todas as limitações da integral de Riemann que apontamos ao longo desta seção. Com efeito, a função D de Dirichlet passou a ser integrável. Na realidade, de um modo mais geral, toda função que se torna contínua ao se retirar dela um conjunto de medida nula é Lebesgue-integrável – i.e. uma função *quase sempre* contínua. Evidentemente esse é o caso da função D, e sua integral é zero. Além disso, se f definida em $[a, b]$ for tal que sua derivada f' é limitada, então sempre será válido que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Finalmente, se uma sequência f_n de funções integráveis for uniformemente limitada e tem f como limite, então f será integrável e sua integral será o limite das integrais de f_n, ou seja

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx,$$

ou ainda, o limite e a integral são intercambiáveis.

8 Lebesgue e um jogo de forças

Segundo Lützen (2003), a função contínua não derivável em nenhum ponto de Weierstrass pode ser considerada a mais conhecida, dentre um grande número de funções chamadas patológicas, construídas por volta de 1870. Pode-se dizer, de modo geral, que funções patológicas são aquelas que ferem o senso comum – no caso, o senso comum matemático de uma certa época. Essas funções provocaram grandes mudanças na análise matemática do século XIX e início do século XX, anunciando uma nova tendência. Se, inicialmente, surgiam vindas de áreas mais aplicadas, já a essa época eram abordadas pelos próprios matemáticos que, valendo-se delas, procuravam delinear conceitos como de função, limite, continuidade, diferenciabilidade e, em especial (para nós), de integrabilidade.

Lebesgue valeu-se de várias dessas funções para estudar e apresentar seus novos conceitos de medida e de integração. De fato, a conhecida função de Dirichlet, apresentada por Lebesgue em seu artigo e em sua tese, de tão patológica não é contínua em nenhum dos pontos de seu domínio, embora viria a ser, posteriormente, integrável no sentido de Lebesgue.

Esses novos ideais de matemática e análise matemática não surgiram nem marcaram tendências sem partidários contrários. Muitos matemáticos, inclusive o já à época renomado Henri Poincaré, criticavam duramente a busca e o estudo de tais funções:

> É quando vimos surgir um grande número de funções bizarras que pareciam se esforçar parecer tanto quanto possível com funções honestas que servem para alguma coisa. [...] Antigamente quando se inventava uma função nova, era com vistas a algum objetivo prático; hoje em dia, inventa-se expressamente para colocar defeito nos raciocínios de nossos pais, e não tiraremos delas nada além disso (POINCARÉ, 1899, p. 158-159)[69].

Poincaré era membro da Academia de Ciências e fazia parte da Seção de Geometria do *Comptes Rendus*. Desse modo, o artigo de 1901 de Lebesgue não deve ter ocorrido sem percalços ou resistências, quer por parte de Poincaré, quer por parte de outros membros da Academia. De fato, entre junho de 1899 e abril de 1901, Lebesgue publicou cinco trabalhos no *Comptes Rendus* (LEBESGUE, 1899b, 1899c, 1900a, 1900b, 1901). Esses trabalhos interconectados, que tratavam de assuntos que posteriormente seriam discutidos em sua tese, sofreram forte oposição de membros da *Académie*. O primeiro deles, que segundo Burkill (1944), quebrou as convenções da geometria diferencial clássica, deixou Darboux escandalizado; esse trabalho também sofreu oposição de Charles Hermite (1822-1901), que foi abertamente contrário à sua publicação (HAWKINS, 1970; HOARE; LORD, 2002).

> Em 1899, eu remetera ao Sr. Picard uma nota [...] sobre as superfícies não regradas aplicadas sobre o plano; Hermite quis, por um instante, opôr-se a sua inclusão no Comptes Rendus de l'Académie; Sr. Picard teve de defender minha nota. Sabemos quanto, entretanto, Hermite estava benevolente e pródigo em elogios, mas isso foi um pouco próximo à época em que ele escreveu a Stieltjès: "Eu me distancio com terror e horror dessa praga lamentável de funções que não têm derivada", e ele desejaria ver excluídas do domínio matemático todas as pesquisas em que essas funções horríveis estivessem (LEBESGUE, 1922, p. 13)[70].

[69] C'est alors qu'on vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible au honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnement de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

[70] En 1899, j'avais remis à M. Picard une Note [...] sur les surfaces non réglées applicables sur le plan; Hermite voulut un instant s'opposer à son insertion dans le Comptes Rendus de l'Académie; M. Picard dut défendre ma Note. On sait combien, cependant, Hermite était bienveillant et prodigue d'éloges,

Em especial com Darboux, Lebesgue viria a ter muitos enfrentamentos posteriores; a atitude insensível de Darboux com relação à tese de Lebesgue, por exemplo, segundo Palaro (2006), deve ter causado considerável angústia ao matemático da medida e da integral. Darboux já tinha sido da seção de Geometria, mas em 1901, era secretário permanente da seção de ciências matemáticas da *Académie*, foi nomeado para a função em 1900 (COMPTES RENDUS, 1900). O cargo de secretario permanente, alerta Crosland (1992), era mais importante dentro da Academia que o próprio cargo de presidente. Se ter um opositor dentro da seção podia ser um problema, com o secretário, portanto, mais ainda.

Nem mesmo com o orientador da sua tese de doutorado, Borel, Lebesgue tinha uma relação fácil. Apesar de se respeitarem e de se admirarem mutuamente, os dois eminentes matemáticos regularmente estavam envolvidos em alguma questão problemática, e, claro, de lados opostos (DENJOY; FELIX; MONTEL, 1957). Borel, um construtivista, não reconhecia a integral proposta por Lebesgue porque, segundo seu entendimento, não havia sido de fato construída. Além disso, Borel reclamava que a medida proposta por Lebesgue era, na realidade, dele, proposta em 1898 (BOREL, 1898); para Lebesgue, a medida advinha da sua integral (BURKILL, 1944; HOARE; LORD, 2002). Sobre isso, Saks (1933, p. 252) diz-nos que, de certa maneira, o que fez Lebesgue em 1901 foi redefinir de uma maneira mais simples a definição proposta por Borel em 1898. Voltaremos a tratar desse ponto mais adiante.

Do outro lado dessa balança havia (principalmente) Picard. Conforme já citamos, Picard presidiu a banca de exame da tese de doutorado de Lebesgue, tendo sido um entusiasta e elogiador de suas ideias. Picard escreveu: "Riemann, ao que parecia, tinha aprofundado tanto quanto possível a noção de integral definida. Lebesgue mostrou que não era nada disso"[71] (PICARD, 1917, p. 21). Segundo Denjoy, Felix e Montel (1957), Picard apoiou as ideias de Lebesgue quando ainda mais ninguém o fazia. O grande temor na época era que trabalhos como os de Lebesgue instaurassem uma teratologia das funções. Picard e Lebesgue lecionaram juntos na École de Sèvres, e o apoio de Picard, dentro da Académie, não se limitou ao primeiro artigo de Lebesgue sobre sua nova integral, àquele que sofreu oposição de Hermite, ou mesmo ao conjunto de cinco trabalhos que mais tarde comporiam sua tese (FELIX, 1974, DENJOY; FELIX; MONTEL, 1957). Na realidade, a grande maioria dos trabalhos que Lebesgue viria a publicar no *Comptes Rendus* antes de sua nomeação para a *Académie*, em 1922, foram apresentados por Picard (dezesseis de um total de dezenove), o que demonstra o quão importante foi esse matemático para a divulgação e aceitação das ideias de Lebesgue (COMPTES-RENDUS, 1922; LEBESGUE, 1899a, 1899b, 1899c, 1900a, 1900b, 1901, 1902c, 1903a, 1903b, 1904b, 1905a, 1905b, 1907a, 1907b, 1909, 1910, 1911, 1912a, 1912b).

Segundo Hoare e Lord (2002), outros apreciadores das ideias de Lebesgue foram Paul

mais c'était à peu près l'époque où il écrivait à Stieltjès: "Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées", et il aurait voulu voir exclues du domaine mathématiques toutes les recherches où ces horrifiques fonctions internaient.

[71] Riemann, semblait-il, avait approfondi autant qu'il possible la notion d'intégrale définie. Lebesgue a montré qu'il n'en était rien.

Antoine Aristide Montel (1876-1975) e Camille Jordan, a quem, inclusive, veio a substituir dentro da *Académie*. Durante a seção de 4 de junho de 1923, Lebesgue leu um longo texto de sua autoria sobre a vida e obra de Jordan. Nele. Lebesgue relata manifestações de apoio de Jordan às suas ideias –"Perseverai na pesquisa científica [...], vós provareis nela grandes alegrias." (JORDAN in LEBESGUE, 1957, p. 92)[72] – e sua admiração pelo matemático que foi Jordan – "Depois de Jordan, ousamos estudar funções reais gerais" (LEBESGUE, 1957, p. 98)[73]. Além desses, poderíamos citar, ainda, Goursat, que integrou a banca examinadora da tese de Lebesgue juntamente com Picard e Jordan, e Paul Émile Appell (1855-1930), que juntamente com Jordan, apresentou dois dos três trabalhos que Lebesgue publicou no *Comptes Rendus* sem a chancela de Picard.

Não só seus apoios, mas a brilhante trajetória acadêmica de Lebesgue, bem como a importância de seu novo conceito de integral tanto dentro da própria matemática como em aplicações, especialmente para a análise dos fenômenos descontínuos e de natureza estatística e probabilística, permitiram que a sua teoria da medida e integração finalmente fosse aceita (LINTZ, 2007; HOCHKIRCHEN, 2003). Isso, porém, não antes da primeira década do século XX, ou seja, muito depois da publicação de seu artigo (LEBESGUE, 1901) ou mesmo de sua tese (LEBESGUE, 1902a) (HOARE; LORD, 2002).

9 As cartas de Lebesgue a Borel

Lebesgue trocava muitas correspondência com matemáticos contemporâneos seus. Dentre eles, Borel. As cartas de Lebesgue a Borel foram encontradas nos porões do Instituto Henri Poincaré, de onde Borel foi diretor[74]. Com datas estimadas entre 1901 e 1918, e tendo como principais atores Lebesgue, Baire e Borel, são um importante material do começo da história da análise moderna. As cartas mostram uma certa face de Lebesgue que certamente seus trabalhos acadêmicos não podem revelar: "Lebesgue é, em suas cartas, de uma sinceridade tão plena quanto se possa ser. Ele escreve visivelmente sem rascunho, de uma só vez, o que lhe vem à mente, e sem rodeios" (BRU; DUGAC, 1991, p. 508)[75].

As primeiras cartas (LEBESGUE, 1991, p. 1-3) remontam a época da publicação de *Sur une généralisation de l'intégrale définie* e de *Integrale, Longueur, Aire*. Por não encontrar muitos interlocutores interessados em discutir suas ideias, Lebesgue correspondia-se com Borel: "Desculpai-me, ninguém aqui, salvo o Sr. Lacour[76], por gentileza, interessa-se por essas coisas e porque podem enfadar a qualquer um, eu sou obrigado a fazê-lo por correspondência

[72] Persévérez dans la recherche scientifique [...] vous y éprouverez des grandes joies.

[73] Après Jordan, on ose étudier des fonctions réelles générales.

[74] Foram publicadas em 1991 por Bernard Bru e Pierre Dugac – ver Lebesgue (1991) –, que tentaram encontrar também as cartas de Borel a Lebesgue. Mas, segundo esses pesquisadores, o filho de Lebesgue teria lhes escrito dizendo que seu pai não tinha o hábito de guardar suas correspondências.

[75] Lebesgue est dans ses lettres d'une sincérité aussi totale qu'on puisse l'être. Il écrit visiblement sans brouillon, d'une traite, au fil de la plume et sans détours.

[76] Émile Lacour, nascido em 1854, aluno da École Normale, foi professor na Université de Nancy (BRU, DUGAC, in LEBESGUE, 1991).

(LEBESGUE, 1991, p. 3)[77]. Para Bru e Dugac (1991), nessas primeiras cartas é possível ver especialmente dois pontos:

1. As hesitações de Lebesgue sobre o grau de generalidade e de novidade de sua integral:

   > Vós dizeis que as definições da medida de Jordan são mais gerais que as vossas. Sim, Jordan fixa a todo conjunto dois números, mas esses dois números não me parecem ter outra propriedade que não a existência, e somente no caso em que eles coincidem, e então eles coincidem com os vossos. Dizei-me se me engano e se, na vossa opinião, as definições de Jordan apresentam qualquer interesse outro que dar uma definição mais simples da medida, no caso de um conjunto um pouco bizarro (LEBESGUE, 1991, p. 1)[78].

   Lebesgue faz referência à seguinte afirmação de Borel, presente em seu *Leçons sur la théorie des fonctions*, ao falar de sua definição de um conjunto mensurável: "Compararemos com proveito as definições que demos com as definições mais gerais que o Sr. Jordan deu em seu *Cours d'analyse*"(BOREL, 1898, p. 46, grifo nosso)[79]. Já a hesitação, ao fato de Lebesgue ver a sua própria medida como uma generalização da de Borel, donde, claramente, tem-se um conflito caso a de Jordan fosse mais geral que essa. Em 1904, em seu *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (LEBESGUE, 1904a), Lebesgue mostraria uma identidade entre a integração de Riemann e a medida de Jordan (LEBESGUE, 1991).

2. A influência de Jordan na formação das ideias de Lebesgue, que utilizou de um procedimento de Jordan para construir a medida em sua tese (LEBESGUE, 1902a) e em seu *Leçons...* (LEBESGUE, 1904a).

   > É evidente que Jordan diz sempre alguma coisa, ser-vos-ia fácil de fazê-lo também, e de falar de medida exterior e interior. Essas seriam os limites inferior e superior de conjuntos que compreendem o conjunto dado ou compreendidos nesse conjunto. Esses dois números estão entre os de Jordan[80] (LEBESGUE, 1991, p. 3)[81].

* * *

Lebesgue não tinha dúvidas somente com relação ao grau de generalidade e novidade de sua integral. "Eu disse em minha nota que existiam funções derivadas não integráveis no sentido de

---

[77] Excusez-moi, personne ici, sauf Mr. Lacour par amabilité, ne s'intéresse à ces choses et puisqui'il faut ennuyer quelqu'un je suis obligé de le faire par correspondance.

[78] Vous dites que les définitions de la mesure de Jordan sont plus générales que les vôtres. Oui, Jordan attache à tout ensemble deux nombres, mais ces deux nombres ne me paraissent avoir d'autre propriété que d'exiter, que dans le seul cas où ils coïncident et alors ils coïncident avec les vôtres. Dites moi si je me trompe et si, à votre avis, les définitions de Jordan présentent quelqu'intérêt, autre que donner une définition plus simples de la mesure, dans le cas d'un ensemble un peu bizarre

[79] On comparera avec fruit les définitions que nous allons donner avec les définitions plus générales que donne M. Jordan dans son Cours d'analyse.

[80] Ver também na sua tese (LEBESGUE, 1902a, p. 10-12)

[81] Il est évident que Jordan dit toujours quelque chose, il vous serait facile d'en faire autant et de parler de mesure extérieure et intérieure. Ce seraient les limites inférieure et supérieure des ensembles comprenant l'ensemble donné ou compris dans cet ensemble. Ces deux nombres sont entre ceux de Jordan.

Riemann. Eu estava certo disso, eu estou um pouco menos agora" (LEBESGUE, 1991, p. 1)[82]. Nesse trecho da carta I, Lebesgue faz referência a sua nota de 1901, possivelmente ao seguinte trecho que usou para abrir seu artigo: "No caso das funções contínuas, há uma identidade entre as noções de integral e de função primitiva. Riemann definiu a integral de certas funções descontínuas, mas nem todas as funções derivadas são integráveis no sentido de Riemann (LEBESGUE, 1901, p. 1025 tradução de OTERO-GARCIA, 2012, p. 68)[83] Lebesgue já não estava tão certo do que escrevera. Com efeito, Lebesgue exibe um exemplo de função somável sem ser integrável (ou, integrável em seu sentido, mas não no de Riemann), exibe até mesmo um procedimento mais geral para se obter funções somáveis não-integráveis, entretanto, não justifica a sua afirmação de abertura do artigo, i.e., não exibe qualquer função derivada que não possua integral no sentido de Riemann. Se Lebesgue foi depois tomado pela dúvida, talvez tenha sido porque de fato não possuía um tal exemplo. Ou, como parece ser o caso, porque se valeu de uma citação que fazia referência a uma tal função, porém sem ter verificado a fonte:

> Eu sei que existe um artigo de Volterra, *Giornale di Matematiche*, volume 19, página 337, tratando do assunto. Mas eu o conheço por uma citação e a palavra alemã *Ableitung* é empregada por Lüroth tanto no sentido de derivada, tanto para exprimir as derivadas à direita ou à esquerda, tanto mesmo para os números de Dini. Eu tenho portanto algumas dúvidas. Muito pouco, é verdade (LEBESGUE, 1991, p. 1)[84].

A intuição de Lebesgue estava correta, e o motivo ter dúvidas – "porém nem tanto" – também. Conforme já vimos (item 5.4 desta *Introdução*), em seu artigo, Volterra (1881) apresenta um exemplo de função cuja derivada não é Riemann-integrável. Não dispondo de tantos recursos como os de hoje, Lebesgue pediu a ajuda de Borel para obter o artigo de Volterra. Isso porque, segundo ele, a École Normale[85] não dispunha de um exemplar do *Giornale*, ao passo que a *Société Mathématique* de Borel, sim. E finaliza mantendo o tom de relativa despreocupação com o assunto: "Mas eu não tenho necessidade dessa informação senão para a tranquilidade de minha consciência, que está um pouco perturbada; eu vos peço que não olhe o artigo senão quando tiverdes a oportunidade de ir à Biblioteca" (LEBESGUE, 1991, p. 2)[86]. Aparentemente, Borel atendeu ao pedido de Lebesgue, pois cerca de um ano depois, em sua tese, ele não só torna a citar a função de Volterra, como a exibe e constrói

[82] J'ai dit dans ma note qu'il existait des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann. J'en étais certain, je le suis un peu moin maintenant.

[83] Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne son pas intégrables au sens de Riemann.

[84] Je sais qu'il existe un article de Volterra, *Giornale di Matematiche*, tome 19, page 337, traitant du sujet. Mais je le sais par une citation et le mot allemand *Ableitung* est empoyé par Lüroth, tantôt dans le sens de dérivée, tantôt pour exprimer les dérivées à droite ou à gauche, tantôt même pour les nombres de Dini. J'ai donc quelques doutes. Fort peu, il est vrai.

[85] Embora não fosse mais aluno da École Normale, provavelmente Lebesgue cita a biblioteca dessa instituição por ter trabalhados por dois anos nela logo após a sua graduação (MAY, 1966).

[86] Mais je n'ai besoin de ce renseignement que pour la tranquilité de ma conscience, laquelle est peu troublée; je vous prie de ne regarder l'article que lorsque vous aurez l'occasion d'aller à la Bibliothèque.

(LEBESGUE, 1902a, p. 35).

10 A medida de Lebesgue e as medidas de Borel e de Baire

Além da própria influência de Jordan, conforme já apontamos, para Bru e Dugac (1991), Lebesgue deve a Baire e a Borel o surgimento e implementação da sua medida e integral.

Logo no início de sua terceira carta a Borel, Lebesgue reconhece ter "muito ligeiramente modificado a linguagem" (LEBESGUE, 1991, p. 3)[87]. Ele se refere à definição de conjuntos mensuráveis dada por ele em sua nota de 1901:

> Consideremos um conjunto de pontos de (a, b); pode-se, de uma infinidade de maneiras, encerrar esses pontos em uma infinidade enumerável de intervalos; o limite inferior da soma dos comprimentos desses intervalos é a medida do conjunto. Um conjunto E é dito *mensurável* se sua medida, acrescida daquela do conjunto de pontos que não fazem parte de E, dá a medida de (a, b)(LEBESGUE, 1901, p. 1026 tradução de OTERO-GARCIA, 2012, p. 69)[88]

Imediatamente após esse trecho segue-se uma nota de rodapé: "Se ajuntarmos a esses conjuntos, conjuntos de medida nula convenientemente escolhidos, teremos conjuntos mensuráveis no sentido do Sr. Borel (*Lições sobre a teoria de funções*)[89] (LEBESGUE, 1901, p. 1026 tradução de OTERO-GARCIA, 2012, p. 69). Assim, Lebesgue, já citava a semelhança que existia entre os seus conjuntos mensuráveis e os de Borel, porém, somente depois admite que essa semelhança ia além, não sendo outra coisa que não uma mudança de linguagem. De fato, Borel (1898, p. 50) define conjuntos mensuráveis como sendo aqueles que podem ser obtidos a partir da retirada de uma quantidade enumerável de intervalos de um intervalo dado. Assim, se E for um subconjunto de (a, b) tal que

$$E = (a, b) - [(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \cdots + (a_n, b_n) + \cdots],$$

então E será mensurável. Como Borel (1898) diz-nos que "a medida da diferença de dois conjuntos é igual à diferença de suas medidas" (p. 48)[90], podemos escrever:

$$\begin{aligned} m(E) &= m\big((a, b) - [(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \cdots + (a_n, b_n) + \cdots]\big) \\ &= m(a, b) - m\big([(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \cdots + (a_n, b_n) + \cdots]\big). \end{aligned}$$

Donde $m(E) + m\big([(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \cdots + (a_n, b_n) + \cdots]\big) = m(a, b)$, ou seja, obtemos

[87] [...] très légèrement modifié le langage.

[88] Considérons un ensemble de points de (a, b); on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit *mesurable* si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (a, b).

[89] Si l'on ajoute à ces ensembles des ensembles de mesures nulles convenablement choisis, on a des ensembles mesurables au sens de M. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

[90] [...] la mesure de la différence de deux ensembles est égale à la différence de leurs mesures.

a definição de conjunto mensurável de Lebesgue. Com as propriedades que Lebesgue (1901, 1902a) apresenta-nos em seu artigo e em sua tese, é possível fazer o caminho inverso e provar, por fim, que as definições são equivalentes.

Sobre a influência de Baire, o historiador da ciência Giorgio Israel (1945-2015) enviou a Bru e Dugac fotocópias das correspondências de Lebesgue a Vito Volterra[91] A carta número um contém uma análise da tese de Lebesgue, que, sobre a questão da medida, escreve:

> O problema é possível e de uma só maneira por uma categoria muito extensa de conjuntos, que eu chamo de mensuráveis, que compreendem os conjuntos no sentido do Sr. Borel e no sentido do Sr. Jordan. Eu não conheço conjunto não mensurável. Existe um? [...] Eu não me sirvo dos mesmos resultados de Baire, mas eu trabalhei um pouco na mesma ordem de questões e ele me mostra que muitas das ideias que me guiaram decorrem daquelas que expõe Baire (LEBESGUE, 1991, p. 349)[92].

Demais, Medvedev (1976) assinala que:

> Já dissemos que, em sua tese, Baire[93] introduziu os conjuntos do tipo $E[f(x) \geqslant a]$. No entanto, nem nela, nem nos trabalhos seguintes Baire encontrou para tais conjuntos aplicações especialmente úteis. Lebesgue, ao contrário, ainda em 1901 e depois na sua tese, e em trabalhos posteriores, usou esses conjuntos como base para a construção de um novo conceito de integral e para o estudo de funções, definindo, com sua ajuda, em particular, a própria noção de função mensurável. Desse modo, ele elaborou um método mais geral da teoria das funções extremamente frutífero (МЕДВЕДЕВ, 1976, p. 61)[94].

Para Bru e Dugac (1991) foi a intuição geométrica de Lebesgue que lhe permitiu obter, a partir de sua integral, uma conveniente definição de função mensurável – "Nós dizemos que uma função, limitada ou não, será mensurável se, quaisquer que sejam α e β, o conjunto $E[\alpha < f(x) < \beta]$ for mensurável" (LEBESGUE, 1904a, p. 111)[95]. Essa intuição estaria relacionada às construções presentes na tese de Baire (1899)[96], mas a formatação foi feita com

---

91 As correspondências de Volterra encontram-se na Accademia dei Lincei, Roma (LEBESGUE, 1991).

92 Le problème est possible et d'une seule manière pour une catégorie très étendue d'ensembles, que j'appelle mesurables, que comprend les ensembles au sens de Mr. Borel et au sens de Mr. Jordan. Je ne connais pas d'ensemble non mesurable. En existe-t-il? [...] Je ne me sers pas des résultats de Baire, mais j'ai travaillé un peu dans le même ordre de questions et il me semble que beaucoup des idées qui m'ont guidé découlent de celles qu'expose Baire.

93 (BAIRE, 1899, p. 72-73, 81).

94 Мы упоминали [...] что в своей диссертации Бэр ввел множества вида $E[f(x) \geqslant a]$. Однако ни в ней, ни в последующих работах Бэр не нашел этим множествам особенно плодотворных применений. Напротив, Лебег еще в 1901 г. а затем в диссертации и ряде последующих работ положил эти множества как в основу конструкции нового понятия интеграла, так и вообще в основу изучения функций, определив, в частности, с их помощью само понятие измеримой функции. Тем самын он разработал весьма обшсций и чрезвычайно плодотворный метод теории функций.

95 Nous dirons qu'une fonction bornée ou non est mesurable si, quels que soient α et β, l'ensemble $E[\alpha < f(x) < \beta]$ est mesurable.

96 Lebesgue demonstra que, para que uma função seja mensurável, é suficiente e necessário que o conjunto $E[f(x) > \alpha]$ para qualquer α seja mensurável. Como se nota, essa condição poderia ser posta, de modo mais fraco, em termos do conjunto de Baire do trecho de Medvedev.

a ajuda da medida de Borel: "Nesse sentido, como Lebesgue escreve, ele fez uma 'aplicação'[97] da medida de Borel, mesmo se ele reconstruiu essa última à sua maneira ou mais exatamente à de Jordan (BRU; DUGAC, 1991, p. 508)[98].

11 Considerações finais

> Na brevidade das nossas observações, de modo pessoal, abordamos as dificuldades da rememoração do passado, espiamos por cima do muro da filologia, esboçamos o personagem, comentamos-lhe a obra. Subimos ao pico das certezas, poucas, marchamos pela planície das suposições, muitas, pois, afinal, de certezas e suposições é que se tece a história, *speculum vitae*. É possível que onde viramos à esquerda, outros dobrassem à direita; é possível que gritassem, onde mantivemos obsequioso silêncio; corressem, onde quisessem paz, quando clamamos por guerra; ficassem a pregar, quando saímos a divulgar a boa nova, eles nos paços, nós com os nossos passos – porque pode-se ser tudo isso sem ser nada disso – e, por fim, é possível, diante de tantos contrastes, estarmos falando as mesmas coisas (BICUDO, 2009, p. 91).

Essa citação de Bicudo reflete bem o caminho que percorremos tanto com a tradução quanto com a análise de *Integrale, Longueur, Aire*. Fizemos uma determinada opção com relação à concepção de tradução e, seguindo adiante, optamos por métodos específicos de tradução, por determinadas expressões, determinadas palavras etc. De certo que fosse outro o tradutor, o resultado não seria o mesmo. De forma semelhante, em nossa análise também houve escolhas desde a metodologia até *o que analisar* e *até onde chegar*. Novamente, outro pesquisador entregaria um trabalho diferente. Isso não significa, no entanto, que nossos resultados sejam *quaisquer*, e sim que são *resultados possíveis* dentre um grande rol de outros.

Nesse contexto, há um caminho natural para se percorrer daqui por diante dentro das duas frentes supracitadas.

Com relação à tradução, de certo que é possível refiná-la à medida que se faz sucessivas revisões. Embora consideremos o resultado entregue nesta tese adequado, pretendemos prosseguir com esse refinamento.

Com relação à análise, houve um momento em que foi necessário dar o trabalho por findo, entretanto, ele não está esgotado. Há diversos aspectos da análise formal da tese de Lebesgue que ainda nos interessam compreender; em se tratando da análise sócio-histórica, o leque de possibilidades ainda em aberto é deveras maior. Esses dois movimentos já mais finos requerem não somente um olhar bastante aguçado e muito fôlego, requerem um conhecimento profundo da história da análise e da vida e obra de Henri Lebesgue. Nesse sentido, compreendemos que se especializar, traduzindo e analisando outras obras de Lebesgue, é um caminho necessário e desejamos percorrê-lo.

[97] O termo "aplicação" é recorrente nas cartas de Lebesgue, quer de forma direta ou indireta: "j'ai très légèrement modifié le langage"(p. 3), "j'ai appliqué intelligemment la notion de mesure" (p. 30), "il me reste comme travail 'entièrement personnel' l'introduction des mots 'de mesure nulle'" (p. 340).

[98] En ce sens, comme Lebesgue l'écrit, il a fait une 'application' de la mesure de Borel, même s'il a reconstruit cette dernière à sa manière ou plutôt à celle de Jordan.

Aliás, o trabalho com a tese de Lebesgue dentro dessas duas frentes mostrou-nos que elas não somente colaboram entre si, como também se tornam mais indissociáveis à medida que se aprofunda nelas. Ou seja, atingir a excelência na tradução de um trabalho de grande envergadura é tanto mais difícil se não se caminha com o mesmo desejo em sua análise; a volta, embora em menor grau, também se verifica, ao menos, evidentemente, quando se fala de obras que não estão originalmente escritas em português.

Por fim, nossas preocupações pedagógicas e de pesquisa relacionadas ao ensino de análise e à história da análise encontraram, nesta tese, um objeto afim: disponibilizamos, conforme nossos objetivos, um material em língua portuguesa que poderá apoiar iniciativas quer em uma área, quer em outra. E não haverá maior satisfação decorrente deste trabalho que ver isso acontecer, de maneira que esperamos fortemente que ocorra; será o combustível para os desdobramentos aqui citados.

Referências

ARZELÀ, Cesare. Sulla Integrazione per Serie. **Atti Della Accademia Nazionale dei Lincei**, Roma, v. 4, n. 1, p. 532-537, 596-599.

BAIRE, René-Louis. **Sur les fonctions de variables réelles**. 1899. 123f. Tese (Doutorado) – Sciences Mathématiques, Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1899.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; NOBRE, Sérgio Roberto. A Pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 129-136.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; BATARCE, Marcelo Salles; NASCIMENTO, Vanderlei Marcos do. Elementos sobre o Desenvolvimento da Teoria da Medida. In: FOSSA, John Andrew. **Matemática e Medida**: três momentos históricos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; TEIXEIRA, Marcos Vieira; NOBRE, Sérgio Roberto. A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009. p. 164-185.

BARTLE, Robert Gardner; SHERBERT, Donald R. **Introduction to Real Analysis**. 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

BENEDETTO, Joseph Benedetto; CZAJA, Wojciech. **Integration and Modern Analysis**. Boston: Birkhäuser, 2009.

BICUDO, Irineu. Introdução. In: EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. p. 19-20.

BOREL, Émile. **Leçons sur la Théorie des Fonctions**. Paris: Gauthier-Villarts et Fils, 1898.

BRU, Bernard; DUGAC, Pierre. Postface. **Cahiers du Séminaire d'histoire des Mathématiques**, Paris, v. 12, n., p. 507-511, 1991.

BRUCKNER, Andrew Michael. **Differentiation of Real Functions**. New York: Springer-Verlag, 1978.

BRUCKNER, Andrew Michael; BRUCKNER, Judith Brostoff; THOMSON, Brian. **Real Analysis**. New Jersey: Prentice Hall (Pearson), 1997.

BURKILL, John Charles. Henri Lebesgue 1875-1941. **Obtuary Notices of Fellows of the Royal Society**, v. 4, n. 13, p. 483-490. nov. 1944.

BURTON, David. **The History of Mathematics**: an introduction. 7. ed. New York: McGraw Hill, 2011.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007. Do Original A History of Mathematics, Fifth Edition.

CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 15, n. 1, p. 1-7, 1879.

CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 17, n. 3, p. 355-358, 1880.

CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 20, n. 1, p. 113-121, 1882.

CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 21, n. 1, p. 51-58, 1883.

CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 21, n. 4, p. 545-591, 1883.

CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 22, n. 4, p. 453-488, 1884.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique**: premier partie, analyse algébrique. Paris: Chez Debure frères, 1821.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Résumé des Leçons Données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal**. Paris: Chez Debure, 1823.

CHAE, Soo Bong. **Lebesgue Integration**. New York: Springer, 1995.

CHATEAUBRIAND, François-René. Remarques. In: MILTON, John. **Paradis Perdu**. Tradução de François-René Chateaubriand. Paris: Chez Renault & Cie, Libraries-Éditeurs, 1861, p.i-xiv.

COMPTES RENDUS: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Paris: Gauthier-Villars, v. 131, n. 23, 3 déc. 1900.

COMPTES RENDUS: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Paris: Gauthier-Villars, v. 174, n. 22, 29 mai. 1922.

CROSLAND, Maurice. **Science Under Control**: the French Academy of Sciences 1795-1914. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

DALEN, D. van; MONNA, A. F. **Sets and Integration: an outline of the development**. Groningen: Wolters-noorhoof, 1972.

DARBOUX, Jean-Gaston. Mémoire sur les Fonctions Discontinues. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, Paris, v. 4, n. 2, p. 57-112, 1875.

DENJOY, Arnaud; FELIX, Lucienne; MONTEL, Paul. Henri Lebesgue le Savant, le Professeur, l'Homme. **L'Enseignement mathématique**. Genève, v. 3, n. 1, p. 1-18, 1957.

DESANTI, Jean. De Cauchy à Riemann, ou la naissance de la théorie des fonctions de variables réelles. In: LIONNAIS, François le (Ed.). **Les Grands Courants de la Pensée Mathématique**. Paris: Hermann, 1998. p. 179-187.

DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeune. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites arbitraire. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, v. 4, n., p. 157-169, 1829.

DUGAC, Pierre. **Histoire de l'Analyse**. Paris: Vuibert, 2003. Texte édité par Bernard Bru e Roger Laurent.

DUNHAM, William. **The Calculus Gallery**: masterpieces from Newton to Lebesgue. New Jersey: Princeton University Press, 2005.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. Título Original: An Introduction to the History of Mathematics.

FAUVEL, John; MAANEN, Jan van. **History in Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FEHR, Henri. Henri Lebesgue, **L'Enseignement Mathématique**, 38, p. 330-332, 1942.

FELIX, Lucienne. **Message d'un mathématicien**: Henri Lebesgue. Paris: Librairie Scientifique et Technique, 1974.

FERRO, Marc. **História de França**. Tradução de Pedro Elói Duarte. Lisboa: Edições 70, 2011.

FOURIER, Jean-Baptiste Joseph. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Chez Firmin Didot, 1822.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; OLIVEIRA, Fábio Donizeti. Manuais didáticos como forma simbólica: considerações iniciais para uma análise hermenêutica. **Horizontes**, Itatiba, v.26, n.1, p.31-43, jan./jun. 2008.

GENETTE, Gérard. **Paratextos Editoriais**. Tradução de Álvaro Faleiros. Cotia: Ateliê Editorial, 2009. 376 p. Título Original: Seuils.

GOUBERT, Pierre. **História concisa de França**. Tradução de Isabel Veríssimo. Lisboa: Publicações Europa-América, 1996. 2v.

GRATTAN-GUINESS, Ivor. **The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann**. Massachusetts: The Colonial Press Inc., 1970. Copyright by The Massachussetts Institute of Technology.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Analysis by its History**. [S.L.]: Springer, 2008.

HANKEL, Hermann. **Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen**. Tübingen: Ludwig Friedrich Fues, 1870.

HAWKINS, Thomas. **Lebesgue's Theory of Integration**. Madison: The University of Wisconsin Press, 1975.

HAWKINS, Thomas. The Origins of Moderns Theories of Integration. In: GRATTAN-GUINNESS, Ivor (Ed.). **From the Calculus to Set Theory, 1630-1910**: an introductory history. Princeton: Princeton University Press, 1980. p. 149-180.

HEINE, Heinrich Eduard. Über Trigonometrische Reihen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, v. 70, n., p. 353-365, 1870.

HOARE, Graham. T. Q.; LORD, Nick. J. 'Integrale, Longueur, Aire' the centenary of the Lebesgue integral. **The Mathematical Gazette**, Leicester, v. 86, n. 505, p.3-27, mars. 2002.

HOCHKIRCHEN, Thomas. Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 261-290. Geschichte der Analysis.

JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003.

JAHNKE, Hans Niels et al. The use of original sources in the Mathematics classroom. FAUVEL, John; MAANEN, Jan van. **History in Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 291-328.

JORDAN, Camille. Remarques sur les intégrales définies. **Journal de Mathématiques Pures et Apliquées**, Paris, v. 8, n., p. 69-100, 1892. 4^{e} série.

JORDAN, Camille. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1893. Tome Premier. Édition Entièrement Refondue.

JORDAN, Camille. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1894. Tome Deuxième. Édition Entièrement Refondue.

JORDAN, Camille. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1896. Tome Troisième. Édition Entièrement Refondue.

KATCHI, Haroun. O Exemplo de Volterra de uma Função Primitivável mas Não Integrável. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, Lisboa, v. 82, n. 5, p. 49-55. nov. 1982.

KATZ, Victor Joseph. **A History of Mathematics**: an introduction. [S.L.]: Addison-Wesley, 1998.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur l'approximation des fonctions. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, Paris, v. 22, n. 2, p. 278-287. nov. 1898.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur les fonctions de plusieurs variables. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 128, n. 13, p. 811-813. 27 mars. 1899a.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 128, n. 25, p. 1502-1505. 19 juin. 1899b.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur la définition de l'aire d'une surface. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 129, n. 22, p. 870-873. 27 nov. 1899c.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur la définition de certaines intégrales de surface. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 131, n. 22, p. 867-870. 26 nov. 1900a.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur le minimum de certaines intégrales. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 131, n. 23, p. 935-937. 3 déc. 1900b.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur une généralisation de l'intégrale définie. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 132, n. 17, p.1025-1028, 29 abr. 1901.

LEBESGUE, Henri Léon. **Intégrale, Longueur, Aire**. 1902. 134 f. Tese (Doutorado) – Sciences Mathématiques, Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1902a.

LEBESGUE, Henri Léon. Integrale, Longueur, Aire. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Milano, v. 7, n. 3, p. 231-359, 1902b.

LEBESGUE, Henri Léon. Un théorème sur les séries trigonométriques. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 134, n. 10, p. 585-587, 10 mars. 1902c.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur l'existence des dérivées. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 136, n. 11, p. 659-661, 16 mars. 1903a.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur une propriété des fonctions. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 137, n. 26, p. 1228-1230. 28 déc. 1903b.

LEBESGUE, Henri Léon. **Leçons sur la intégration et la recherche des fonctions primitives**. Paris: Gauthier-Villars, 1904a.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur les fonctions représentables analytiquement. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 139, n.1, p. 29-31, 4 juil. 1904b. Apresentado por Camille Jordan.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur une condition de convergence des séries de Fourier. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 140, n. 21, p. 1378-1381. 22 mai. 1905a.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur la divergence et la convergence non uniforme des séries de Fourier. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires de Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 141, n.22, p. 875-877. 27 nov. 1905b.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur le problème de Dirichlet. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 144, n. 6, p. 316-318. 11 févr. 1907a. Apresentado por Paul Émile Appell.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur le problème de Dirichlet, deuxième note. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 144, n. 11, p. 622-623. 18 mars. 1907b. Apresentado por Paul Émile Appell.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur les suites de fonctions mesurables. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 149, n. 2, p. 102-103. 12 juil. 1909.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur l'intégrale de Stieltjès et sur les opérations fonctionnelles linéaires. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 150, n. 2, p.86-88. 10 janv. 1910.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur l'invariance du nombre des dimensions d'un espace et sur le théoreme de M. Jordan relatif aux variétés férmées. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 124, p. 841-843. 1911.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur le problème de Dirichlet. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 154, n. 6, p. 335-337. 5 févr.1912a.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur le principe de Dirichlet. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 155, n. 16, p. 699-701. 14 oct. 1912b.

LEBESGUE, Henri Léon. **Notice sur les travaux scientifiques**. Toulouse: Imprimerie et Libraire Édouard Privât, 1922.

LEBESGUE, Henri Léon. **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**. Paris: Gauthier-Villars et cie, 1928. 357 p.

LEBESGUE, Henri Léon. Notices sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838-1922). **L'Enseignement mathématique**. Genève, v. 3, n. 2, p. 81-106. 1957. IIe. Série.

LEBESGUE, Henri Léon. Lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel. **Cahiers du Séminaire d'histoire des Mathématiques**, Paris, v. 12, n., p.1-506, 1991.

LINTZ, Rubens Gouvêa. **História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007. Volume 2.

LÜTZEN, Jesper. The Foundation of Analysis in the 19th Century. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 155-195. Geschichte der Analysis.

MAY, Kenneth Ownsworth. Biographical Sketch of Henri Lebesgue. In: LEBESGUE, Henri. **Measure and the Integral**. Tradução de Kenneth O. May. São Francisco: Holden-Day Inc, 1977. p. 1-7.

МЕДВЕДЕВ, Федор Андреевич. **Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв.**. Москва: Наука, 1976. Referência transliterada para o alfabeto latino: MEDVEDEV, Fedor Andreevich. **Francuzskaja shkola teorii funkcij i mnozhestv na rubezhe XIX-XX vv.**. Moskva: Nauka, 1976.

MEYER, Yves. Comment mesurer les surfaces? **Gazette des Mathématiciens**, Paris, n. 109, p. 23-36, juil. 2006.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MONTEL, Paul. Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 213, n. 5, p. 197-200. 4 aout.1941.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, n.23, p.11-42, jan./jun. 2005.

NEVES, Maria Helena de Moura. **Guia de uso do Português**. São Paulo: Editora UNESP, 2003.

OSGOOD, William Fogg. Non-Uniform Convergence and the Integration of Series Term by Term. **American Journal of Mathematics**, Baltimore, v. 19, n. 2, p. 155-190, 1897.

OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino**. 2011. 2 v. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

OTERO-GARCIA, Sílvio César. Sobre uma Generalização da Integral Definida: tradução do primeiro trabalho de Henri Lebesgue sobre sua nova integral. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Campinas, v. 12, n. 25, p.65-71, ago./dez. 2012.

OTERO-GARCIA, Sílvio César. A Moderna Teoria da Medida. In: BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

PALARO, Luzia Aparecida. A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue. 2006. 340f. Tese (Doutorado) – Educação Matemática, PUCSP, São Paulo, 2006.

PEANO, Giuseppe. Sulla Integrabilità delle Funzioni. **Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino**, Torino, v. 8, n., p. 307-314, apr. 1883.

PERRIN, Louis. Henri Lebesgue, rénovateur de l'analyse moderne. In: LIONNAIS, François le (Org.). **Les grands courants de la pensée mathématique**. Paris: Hermann, 1998.

POINCARÉ, Henri. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. **L'Enseignement mathématique**, v. 1, p. 157-162, 1899.

RICŒUR, Paul. **Sobre a tradução**. Tradução de Patrícia Lavelle. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012.

RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. (1854). Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. In: RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. **Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge**. [Leipzig]: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1876. Herausgegeben Unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber.

SAKS, Stanisław. **Théorie de l'Intégrale**. English Translation by L. C. Young. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk: 1933. Seria Monografie Matematyczne.

SMITH, Henri John Stephen. On the Integration of Discontinuous Functions. **Proceedings of the**

London Mathematical Society, v. 6, p. 140-153, 1875.

STRUIK, Dirk Jan. **A Concise History of Mathematics**. New York: Dover Publications, 1948. 2v.

TELKES, Eva. Présentation de la Faculté des sciences et son personal, à Paris (1901-1939). **Revue d'histoire des sciences**, v. 43, n. 4, p. 451-476, 1990.

THOMPSON, John Brookshire. **Ideologia e Cultura Moderna**: teoria social crítica na era dos meios de comunicação em massa. Tradução do Grupo de Estudos sobre Ideologia, Comunicação e Representações Sociais da Pós-Graduação do Instituto de Psicologia da PUCRS. Petrópolis: Editora Vozes, 2011. Título Original: Ideology and Modern Culture: critical social theory in the era of mass comunication.

VIANA, Nildo. O significado politico da Comuna de Paris. **Em Debate**, Florianópolis, n. 6, p. 60-82, set. 2011. ISSN 1980-3532.

VINAY, Jean Paul; DARBENELT, Jean. **Stylistique comparée du français et de l'anglais**: méthode de traduction. Paris: Didier, 1977.

VOLTERRA, Vito. Sui Principii del Calcolo Integrale. **Giornale di Matematiche**, Napoli, v. 19, n., p. 333-372, 1881.

WISE, Gary Lamar; HALL, Eric. **Counterexamples in Probability and Real Analysis**. New York: Oxford University Press, 1993.

WUSSING, Hans. **Leciones de Historia de las Matematicas**. Tradução de Elena Ausejo, José Luis Escorihuela, Mariano Hormigón, Daria Kara-Murzá, Ana Millán. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998. Título Original: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.

Integral, Comprimento, Área

Integral, Comprimento, Área

(*por* H. Lebesgue, *de Nancy*)

Introdução

Neste trabalho, eu procuro apresentar definições tão gerais e precisas quanto possível de alguns dos números que consideramos em Análise: integral definida, comprimento de uma curva, área de uma superfície.

O Sr. JORDAN, na segunda edição do seu *Curso de Análise*, fez um estudo profundo desses números. Pareceu-me útil neste momento retomar esse estudo, e eis o porquê. Sabemos que existem funções derivadas não integráveis, quando adotamos, como fez o Sr. JORDAN, a definição de integral dada por RIEMANN; de sorte que a integração, tal como definiu RIEMANN, não permite, em todos os casos, resolver o problema fundamental do cálculo integral:

Encontrar uma função conhecendo sua derivada.

Pode, portanto, parecer natural procurar uma outra definição de integral tal que, nos casos mais gerais, a integração seja a operação inversa da derivação.

Por outro lado, como observado pelo Sr. Jordan, a área de uma superfície que não tem planos tangentes variando de uma maneira contínua não está definida; e os enunciados que seríamos tentados a admitir como análogos à definição de comprimento de uma curva não podem ser adotados[1]. É adequado, portanto, procurar uma definição de área, e pode ser também modificar [2] a de comprimento, de modo que essas duas definições sejam tão análogas quanto possível.

Nos estudos das questões relativas à teoria das funções de variáveis reais, reconhecemos que frequentemente seria conveniente poder associar aos conjuntos de pontos, números, satisfazendo certas propriedades dos comprimentos de segmentos ou das áreas de polígonos.

[1] Ver SCHWARZ, carta a GENOCCHI. Essa carta está reproduzida na edição litografada do *Curso proferido na Faculdade de Ciências por Charles Hermite*, durante o segundo semestre de 1882. (Segunda tiragem, página 25) – Ver também PEANO, *Atti della Accademia dei Licei*, 1890.

Propusemos diferentes definições desses números que chamamos as medidas dos conjuntos[2]; aquela que foi a mais frequentemente adotada se encontra exposta e estudada no livro do SR. JORDAN.

No primeiro capítulo eu defino, como o SR. BOREL, a medida de um conjunto por meio de suas propriedades essenciais. Depois de completar e precisar as indicações um pouco rápidas dadas pelo SR. BOREL[3], eu indico quais relações há entre a medida assim definida e a medida no sentido do SR. JORDAN. A definição que adoto se aplica aos espaços de várias dimensões; da noção de medida de um conjunto cujos elementos são os pontos de um plano, deduzimos aquela da área de um domínio plano; se os elementos são pontos do espaço ordinário, deduzimos a noção de volume etc.

Essas preliminares postas, não há mais inconvenientes para definir a integral de uma função contínua como a área de um domínio plano; e esse mesmo método tem a vantagem de conduzir a uma definição de integral de uma função descontínua limitada como a medida de um certo conjunto de pontos. É essa definição geométrica que eu adoto no Capítulo II. Podemos, aliás, substituí-la por uma definição analítica, a integral se apresenta então como sendo o limite de um conjunto de somas suficientemente análogas àquelas que consideramos na definição de RIEMANN. As funções às quais se aplica essa definição geométrica são aquelas que eu chamo de *somáveis*.

[3] Eu não conheço função alguma que não seja somável, eu não sei se existe. Todas as funções que podemos definir com o auxílio das operações aritméticas e da passagem para o limite são somáveis. Todas as funções integráveis no sentido de Riemann são somáveis, e as duas definições de integral conduzem ao mesmo número. Toda função derivada limitada é somável.

A integral de uma derivada limitada, considerada como função do limite superior de integração, é uma função primitiva da derivada dada, o problema fundamental do cálculo integral é, portanto, teoricamente resolvido todas as vezes em que a função derivada é limitada.

Para obter resultados mais gerais, é necessário dar uma definição de integral que se aplique às funções não limitadas. É fácil encontrar uma tal definição, mas aquela que me pareceu a mais simples e a mais natural não se aplica a todas as funções derivadas não limitadas; de sorte que, para as funções não limitadas, o problema da procura de funções primitivas não é resolvido em todos os casos. Com minhas definições, eu encontro que *a condição necessária e suficiente para que uma função derivada tenha uma integral é que sua função primitiva seja de variação limitada. Todas as vezes que a integral existe, ela dá a conhecer uma função primitiva.*

O cálculo efetivo de uma integral depende essencialmente da maneira pela qual é dada a função a ser integrada. No caso em que a função é definida com o auxílio de séries, poderemos

[2] Ver sobre essas definições, SCHŒNFLIES, *Jahresberieht der deutschen Mathematiher-Vereinigung*, 1900.
[3] *Leçons sur la théorie des Fonctions.*

nos servir desta propriedade, da qual um caso particular foi obtido pelo Sr. Osgood[4]: *uma série cujos termos têm integrais e cujos restos são, em valor absoluto, inferiores a um número fixado, é integrável termo a termo.*

A definição da integral estende-se imediatamente às funções de várias variáveis.

No primeiro capítulo, eu desenvolvi uma generalização da noção de comprimento de um segmento, uma generalização feita num sentido diferente dado à noção de comprimento de uma curva. No terceiro capítulo, no qual me ocupo dessa noção, adoto a definição seguinte: *o comprimento de uma curva* C *é o menor limite dos comprimentos das linhas poligonais que tendem uniformemente a* C. Essa definição é exatamente equivalente à definição clássica[5]. Uma curva de comprimento finito é dita retificável. Retomo rapidamente os principais resultados relativos a essas curvas obtidos pelo Sr. Jordan.

A procura de uma expressão para o comprimento de uma curva que tenha tangentes conduz a uma nova aplicação da integral definida no capítulo precedente. *Se* f', φ', ϕ' *existem, a condição necessária e suficiente para que* [4] *a curva*

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \phi(t),$$

seja retificável, é que a integral $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \phi'^2}$ *exista. Todas as vezes que essa integral existe, ela representa o comprimento da curva.* A definição que adotava P. Du Bois Reymond[6] é, portanto, um caso particular da definição clássica, mesmo estendendo-a como eu o fiz com o sentido da palavra integral.

No quarto capítulo, *eu chamo de área de uma superfície* L *o menor limite das áreas das superfícies poliédricas que tendem uniformemente a* L. Podemos deduzir disso uma definição de área análoga àquela do comprimento de uma curva definida como limite dos comprimentos dos polígonos inscritos.

O estudo da representação da área com o auxílio de uma integral dupla não é abordado senão no caso muito particular em que a superfície admite planos tangentes que variam de uma forma contínua; retomamos a integral clássica $\int\int \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.

Os dois últimos capítulos são dedicados a questões bastante diferentes. Trata-se de ver, nos exemplos, se a extensão dada aos sentidos das palavras comprimento, área, não desencadeia modificações correspondentes nos enunciados ou nos fundamentos da geometria das superfícies. Nesses fundamentos, geralmente, supomos analíticas as superfícies e as curvas, ou, pelo menos, definidas com o auxílio de funções que tenham um certo número de derivadas.

O primeiro problema que me proponho é este das superfícies aplicáveis sobre o plano: procurar as superfícies correspondentes ponto a ponto a um plano, de forma que os comprimentos sejam conservados. Eu encontro, por um lado, *que existem superfícies aplicáveis sobre o plano e que não contém nenhum segmento de reta, por outro lado, que existem*

[4] *American Journal*, 1897.
[5] Scheeffer, *Acta Mathematica*, 5; Jordan, *Cours d'Analyse.*
[6] *Mathematische Annalen*, v. 15, p. 287 e *Acta Mathematica*, 6.

curvas espaciais que têm em cada ponto um plano oscilador a partir do qual as tangentes formam uma superfície não aplicável sobre o plano. Os procedimentos elementares que empreguei não me deram todas as superfícies aplicáveis sobre o plano, mas me fizeram conhecer as condições necessárias e suficientes para que uma superfície cilíndrica, cônica, uma superfície formada pelas tangentes de uma curva espacial, uma superfície [5] de revolução, sejam aplicáveis sobre o plano; enfim, mostram que a aplicação conserva as áreas.

O segundo problema é este de LAGRANGE ou de PLATEAU: sendo dado um contorno fechado, encontrar uma superfície limitada a esse contorno cuja área seja mínima. Eu mostro que esse problema é sempre possível e que admite uma infinidade de soluções.

Seria muito interessante saber se, entre todas essas superfícies-solução, não se encontra uma superfície analítica. O método que se apresenta imediatamente à mente, e que consiste em demonstrar sucessivamente a existência de cada uma das derivadas necessárias ao estabelecimento da equação diferencial parcial das superfícies mínimas, parece fortemente difícil de aplicar. Ao mesmo tempo, raciocínios muito elementares permitiram-me, num caso particular, demonstrar a existência de planos tangentes a uma das superfícies-solução.

Os métodos desse último capítulo são análogos àqueles que permitiram ao SR. HILBERT[7] retomar o estudo do problema de DIRICHLET pelo procedimento de RIEMANN. Os resultados obtidos pelo SR. HILBERT e aqueles que venho a indicar, ainda que sejam incompletos, parecem mostrar que há vantagem em deixar de lado, ao menos momentaneamente, as equações diferenciais parciais que dão os métodos ordinários do cálculo das variações; e em raciocinar diretamente sobre a integral que se trata de tornar mínima. Eu indiquei os principais resultados deste trabalho em diferentes artigos do *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (19 de Junho e 27 de Novembro de 1899, 26 de Novembro e 3 de Dezembro de 1900, 29 de Abril de 1901).

[7] *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Août 1900.

CAPÍTULO 1

Medida dos conjuntos

1. Um conjunto de pontos é dito limitado se a distância de dois de seus pontos for limitada superiormente. Dois conjuntos são ditos iguais se, movendo um dos dois, pudermos levá-los a coincidir. Os conjuntos $E_1, E_2, \ldots$, [6] sendo dados, o conjunto soma E é formado pelos pontos que pertencem a pelo menos um dos E_i. Nós não vamos considerar senão um número finito ou uma infinidade enumerável de conjuntos E_i, e colocamos:

$$E = E_1 + E_2 + \cdots$$

Se todo ponto de E_2 é ponto de E_1, diremos que E_1 contém E_2, e chamaremos a diferença de E_1 e E_2, $(E_1 - E_2)$, o conjunto de pontos de E_1 que não pertencem a E_2. É importante notar que E_2 contendo E_3, os conjuntos

$$E_1 + (E_2 - E_3) \text{ e } (E_1 + E_2) - E_3$$

diferem se existirem pontos comuns ao mesmo tempo a E_1, E_2 e E_3.

Essas definições postas:

Nós nos propomos a fixar a cada conjunto limitado um número positivo ou nulo, que nós chamaremos de sua medida, e que satisfará as condições seguintes:

1. *Existem conjuntos cuja medida não é nula.*
2. *Dois conjuntos iguais têm a mesma medida.*
3. *A medida da soma de um número infinito, ou de uma infinidade enumerável de conjuntos, sem pontos em comum, dois a dois, é a soma das medidas desses conjuntos.*

Nós não resolvemos esse problema da medida senão para os conjuntos que chamamos de mensuráveis Esse problema admite ainda soluções diferentes, conforme nos limitamos aos conjuntos cujos pontos estão sobre uma reta, ou àqueles cujos pontos estão num plano etc. Para distinguir, diremos, quando necessário: medida linear, medida superficial etc.

Notemos que se o problema da medida admite uma solução, multiplicando todas as medidas obtidas por um mesmo número, temos um outro sistema de medidas. Nós não consideraremos como diferentes de tais soluções, de sorte que, sem perda de generalidade, podemos atribuir a medida 1 a um conjunto qualquer de medida não nula. [7]

1 Os elementos do conjunto são os pontos de uma reta

2. Suponhamos possível o problema da medida. Um conjunto formado de um só ponto tem medida nula, pois um conjunto limitado contendo uma infinidade de pontos deve ter uma medida finita. O conjunto de pontos de um segmento MN tem, portanto, mesma medida fazendo ou não M e N parte do conjunto; aliás, MN não pode ter uma medida nula sem que o mesmo ocorra para todo conjunto limitado.

Escolhemos um segmento MN e atribuímos a ele a medida 1. Sabemos que se fixarmos MN como unidade de comprimento, podemos fixar a cada segmento PQ um número, seu comprimento; esse número é também a medida do conjunto de pontos de PQ. Para se convencer disso, é suficiente se lembrar de que, se o comprimento l de PQ é comensurável e igual a $\frac{\alpha}{\beta}$, existe um segmento RS contido α vezes em PQ e β vezes em MN, e que se l é incomensurável, a todo número λ inferior a l corresponde um segmento contido em PQ, e de comprimento λ; e a todo número λ superior a l, um segmento contendo PQ, e de comprimento λ.

Para que a 3a. condição do problema da medida seja satisfeita, é necessário que o comprimento de um segmento-soma de um número finito ou de uma infinidade de outros segmentos, não se estendendo uns sobre os outros, seja a soma dos comprimentos desses segmentos.

Das propriedades dos comprimentos, segue-se que isso é assim se os segmentos componentes estão em número finito; e é ainda verdade se eles estiverem em número infinito. (*Ver Leçons sur la Théorie des fonctions*, do SR. BOREL.)

3. Um conjunto E sendo dado, podemos, de uma infinidade de maneiras, encerrar seus pontos em um número finito ou em uma infinidade enumerável de intervalos. O conjunto E_1 dos pontos desses intervalos contém E, portanto, a medida $m(E)$ de E é, no máximo, igual àquela $m(E_1)$de E_1, isto é, no máximo igual à soma dos comprimentos dos intervalos considerados. O limite inferior dessa soma é um limite superior de $m(E)$, nós a chamaremos de medida exterior de E, $m_e(E)$.

Suponhamos que todos os pontos de E pertençam a um segmento AB. Nós chamaremos complementar de E com relação a AB, $C_{AB}(E)$, o conjunto $AB - E$. Visto que a medida de $C_{AB}(E)$ é, no máximo, $m_e[C_{AB}(E)]$, aquela [8] de E é, no mínimo, $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Esse número não depende daquele dos segmentos AB contendo E fixado; nós o chamaremos a medida interior de E, $m_i(E)$. Dois conjuntos iguais têm medidas interiores iguais e medidas exteriores iguais. Aliás, porque temos:

$$m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geqslant m(AB),$$

a medida exterior nunca é inferior à medida interior. Se o problema da medida é possível, a medida de um conjunto E está compreendida entre os dois números $m_e(E)$ e $m_i(E)$, que acabamos de definir.

4. Nós chamaremos de *conjuntos mensuráveis*[8] *aqueles cujas medidas exteriores e interiores são iguais*, o valor comum desses dois números será a medida do conjunto, se o problema da medida for possível. Das propriedades que se seguem, resultará que o número $m(E)$ assim definido satisfaz as condições do problema da medida, *se nos impusermos a considerar apenas conjuntos mensuráveis*.

A definição de conjuntos mensuráveis é equivalente a esta aqui: Um conjunto E é dito mensurável se é possível encerrar seus pontos dentro de intervalos α, e aqueles de seu complementar dentro de intervalos β, de maneira que a soma dos comprimentos das partes comuns a α e a β seja tão pequena quanto se queira.

Seja um número finito ou uma infinidade enumerável de conjuntos mensuráveis $E_1, E_2, \ldots$, mostremos que o conjunto soma E é mensurável.

Nós supomos todos os conjuntos E_i formados dos pontos de um segmento AB em relação ao qual nós tomamos os complementares. Encerremos os pontos de E_1dentro dos intervalos α_1, não se estendendo uns sobre os outros, e $C(E_1)$ dentro dos intervalos β_1; as partes comuns a α_1 e a $\beta_1$tendo comprimento total escolhido arbitrariamente ε_1. Encerremos E_2dentro dos intervalos α_2, e $C(E_2)$em β_2, tendo em comum um comprimento total ε_2. Sejam α'_2 e β'_2 as partes de α_2 e β_2 comuns a β_1. A E_3 correspondendo intervalos α_3, β_3 e um número ε_3, sejam α'_3 e β'_3 as partes de α_3 e β_3 comuns a β_2; e assim sucessivamente.

Os pontos de E podem ser cobertos pelos intervalos α_1, α'_2, α'_3, ... Aqueles de $C(E)$ podem ser encerrados nos intervalos β'_i, qualquer que seja i. Ora, essas duas séries de intervalos têm partes comuns de comprimento total [9] no máximo igual a

$$l_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + m(\alpha'_{i+1}) + m(\alpha'_{i+2}) + \cdots$$

A série $\Sigma m(\alpha'_i)$ será convergente se, portanto, escolhermos os ε_i de modo que a série $\Sigma\varepsilon_i$ seja convergente e tenha ε como soma, poderemos tomar i suficientemente grande para que l_i seja inferior a 2ε.

Portanto E é somável. – A soma de um número finito ou de uma infinidade enumerável de conjuntos somáveis sendo um conjunto somável, há sentido em colocar o problema da medida somente para os conjuntos mensuráveis.

Se os $E_1, E_2, \ldots$ não têm, dois a dois, algum ponto em comum, os pontos de E_i são interiores aos intervalos α'_i, de sorte que $m(\alpha'_i) - m(E_i)$ é no máximo igual a ε_i.Ora, $m(E)$ difere de

$$m(\alpha_1) + m(\alpha'_2) + m(\alpha'_3) + \cdots$$

de menos de

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots$$

portanto temos

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$$

[8] Adotando essa definição, modificamos a linguagem que adota o Sr. Borel.

e a 3a. condição do problema da medida.

5. O problema da medida é, portanto, possível para os conjuntos mensuráveis; e ele não admite senão uma só solução, pois os fundamentos que nos serviram para definir os dois números m_e e m_i, aplicados a um conjunto mensurável, não envolvem senão conjuntos mensuráveis.

Não está demonstrado de forma alguma que o problema da medida seja impossível para os conjuntos (se eles existem) cujas medidas interiores e exteriores são diferentes. Mas, em seguida, não encontraremos senão conjuntos mensuráveis. Com efeito, os procedimentos que empregaremos para definir um conjunto poderão sempre se resumir aos dois seguintes.

$1.^o$ Fazer a soma de um número finito, ou de uma infinidade enumerável de conjuntos previamente definidos.

2^o Considerar o conjunto dos pontos comuns a um número finito ou a uma infinidade enumerável de conjuntos dados.

E esses dois procedimentos aplicados a conjuntos mensuráveis geram conjuntos mensuráveis. Nós já vimos para o primeiro, demonstremos para o segundo. [10]

Sejam $E_1, E_2, \dots$ os conjuntos dados; o conjunto procurado e_1 pode ser definido tendo como complementar a soma dos complementares de $E_1, E_2, \dots$, o que demonstra a proposição.

Seja e_i o conjunto análogo a e_1, relativo à sequência $E_i, E_{i+1}, \dots$. O conjunto soma dos e_i é formado dos pontos comuns a todos os E_i, pelo menos a partir de um certo valor de i, variável, aliás, de um ponto a outro; como soma de conjuntos mensuráveis, é mensurável.

Eis aqui uma outra aplicação do segundo procedimento. Seja E_1 contendo E_2, $E_1 - E_2$ é o conjunto dos pontos comuns a E_1 e $C(E_2)$, portanto se E_1 e E_2 são mensuráveis, $E_1 - E_2$ também o é. Aliás, já que temos:

$$E_1 = (E_1 - E_2) + E_2$$

$$m(E_1 - E_2) = m(E_1) - m(E_2)$$

6. Posto que nós conhecemos um conjunto mensurável, que é formado de todos os pontos de um intervalo, os dois procedimentos precedentes aplicados um número finito de vezes nos permitem defini-lo de novo. Aqueles que podemos obter por esse método, e seus complementares, são os que o Sr. Borel chama de mensuráveis[9], e que nós nomearemos *conjuntos mensuráveis* (B). Eles são definidos por uma infinidade enumerável de condições, o conjunto deles tem a potência do contínuo. Entre esses conjuntos, é necessário citar aqueles que são somas de intervalos e os conjuntos fechados, isto é, que contêm seus derivados[10], dos quais os complementares são somas de intervalos.

[9] *Leçons sur la théorie des fonctions*, pages 46 à 50.

[10] Esses são os conjuntos que o Sr. Jordan chama de perfeitos e o Sr. Borel de relativamente perfeitos. Um tal conjunto contém sua fronteira (que será definida mais adiante).

O conjunto E formado dos pontos das abscissas:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots,$$

em que os a_i são iguais a 0 ou 2, sendo perfeito, é mensurável (B). Seu complementar é formado de um intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de comprimento $\frac{1}{3}$, de dois intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)$ de comprimento $\frac{1}{3^2}$, de quatro intervalos de comprimento $\frac{1}{3^3}$ etc, tendo, portanto, por medida

$$\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{3^2} + 2^2\,\frac{1}{3^3} + \cdots = 1$$

[11] e, por consequência, E é de medida nula. E tem a potência do contínuo, portanto, podemos formar com os pontos de E uma infinidade de conjuntos que, tendo uma medida exterior nula, são todos mensuráveis. A potência do conjunto desses conjuntos é a do conjunto dos conjuntos de pontos; existem, portanto, conjuntos mensuráveis que não são mensuráveis (B), e a potência do conjunto dos conjuntos mensuráveis é a do conjunto dos conjuntos de pontos.

7. Seja E um conjunto mensurável. Escolhamos números $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ que decrescem até zero. Podemos encerrar E em uma infinidade enumerável de intervalos α_i de medida $m(E) + \varepsilon_i$. O conjunto E_1 dos pontos que fazem parte ao mesmo tempo dos conjuntos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ é mensurável (B), tem por medida $m(E)$, e contém E. O conjunto $E_1 - E$ é de medida nula. Podemos cobri-lo sob intervalos β_i, contidos em α_i, e de medida ε_i. O conjunto e dos pontos comuns a todos os β_i é mensurável (B) e de medida nula. O conjunto $E_2 = E_1 - e$ é, portanto, mensurável (B) e de medida $m(E)$; de sorte que *todo conjunto mensurável está contido num conjunto* E_1 *e contém um conjunto* E_2*,* E_1 *e* E_2 *sendo mensuráveis* (B) *e de mesma medida.* Os conjuntos que chamamos mensuráveis são, portanto, aqueles que os métodos do Sr. Borel permitem medir, à condição de ter em conta as observações enunciadas no fim da página 48[11] (loc. cit.).

De maneira análoga demonstra-se que a medida exterior de um conjunto E é o limite inferior das medidas dos conjuntos mensuráveis que contêm E, e que existe certamente um conjunto mensurável (B) contendo E e de medida $m_e(E)$. Do mesmo modo, $m_i(E)$ é o limite superior das medidas dos conjuntos mensuráveis contidos em E, e existe certamente um conjunto mensurável (B) contido em E tendo $m_i(E)$ por medida.

8. Em seu tratado de análise, o Sr. Jordan dá as definições seguintes. Um ponto M é ponto interior de um conjunto E se é interior a um segmento cujos pontos todos são pontos de E. A fronteira de E é o conjunto de pontos que não são interiores nem a E, nem a $C(E)$.

Dividamos o segmento AB, que contém E, em subintervalos. Dentre eles, seja l a soma dos comprimentos dos intervalos cujos pontos são todos interiores [12] a E, e L a soma dos

[11] "Contudo, se um conjunto E contém todos os elementos de um conjunto mensurável E_1 de medida α_1, podemos dizer que a medida de E é superior a α_1, sem nos preocupar se E é mensurável ou não. Inversamente,... As palavras superior e inferior não excluem, aliás, a igualdade"

comprimentos dos que contêm pontos de E ou da sua fronteira. Demonstra-se que, quando se faz variar de uma maneira qualquer a divisão de AB, de modo que o máximo do comprimento dos intervalos parciais tenda a zero, os dois números l e L tendem para limites determinados, as *extensões interior e exterior* de E. Dessa definição resulta que a extensão exterior é no mínimo igual à medida exterior e que a extensão interior é no máximo igual à medida interior. O Sr. JORDAN chama mensuráveis os conjuntos cujas duas extensões, exterior e interior, são iguais; esses conjuntos que chamamos de *mensuráveis* (J) são mensuráveis, no sentido de que nós adotamos e as duas definições de medida concordam quando são todas as duas aplicáveis.

Pode-se ainda dizer que a extensão interior de E é a medida do conjunto dos seus pontos interiores, sendo tal conjunto aberto[12], ou seja, não contendo nenhum ponto de sua fronteira, tem por complementar um conjunto fechado, e, consequentemente, é mensurável (B). A extensão exterior de E é a medida do conjunto soma de E e do conjunto soma da sua fronteira, o qual, sendo fechado, é mensurável (B). Portanto, para que um conjunto seja mensurável (J), é necessário e suficiente que a sua fronteira seja de medida nula.

Um conjunto fechado, tendo por extensão exterior sua medida, se é de medida nula, podemos afirmar que é mensurável (J). Em particular, o conjunto perfeito definido no §6 é mensurável (J); e é do mesmo modo para todos aqueles que podemos formar com seus pontos, portanto, o conjunto dos conjuntos mensuráveis (J) tem a mesma potência que o conjuntos dos conjuntos de pontos, e existem conjuntos mensuráveis (J) que não são mensuráveis (B).

9. Acabamos de fixar a certos conjuntos uma medida, resta-nos procurar como podemos calcular esse número. Isso depende, evidentemente, da maneira pela qual o conjunto é dado.

Suponhamos que um intervalo qualquer (a, b) sendo dado, saibamos reconhecer se existem em (a, b) pontos do conjunto dado E ou de sua fronteira, e se existem pontos de $C(E)$. Nós poderemos, então, por um número finito de operações, calcular um número qualquer de termos das duas sequências (que podemos supor uma decrescente e a outra crescente) cujos limites são as extensões exterior e interior de E. O hábito que temos de lidar com as séries leva a considerar as extensões como bem definidas. [13] Sabemos, assim, calcular a medida de um conjuntoSerá mensurável (J) e a consideração simultânea das duas sequências permite ter um limite superior do erro cometido ao se fixar a um termo qualquer.

É bem mais difícil de calcular $m_e(E)$ e $m_i(E)$ para um conjunto qualquer. Esses números são, de fato, definidos pela consideração de uma infinidade não enumerável de números. Para encontrar uma sequência de números tendendo para $m_e(E)$, seria necessário considerar divisões do segmento AB, que contêm E, em intervalos parciais que dependeriam do conjunto E.

Se um conjunto for mensurável (B) e for definido com o auxílio das duas operações que nós indicamos a partir de sequências de intervalos, será fácil calcular sua medida apoiando-se sobre a terceira condição do problema da medida e sobre esta propriedade: o conjunto E dos pontos comuns a todos os conjuntos mensuráveis $E_1, E_2, \ldots$, que são tais que cada um contém

[12] Todos os pontos de um tal conjunto são interiores ao conjunto.

todos aqueles que o sucedem, é o limite inferior da sequência $m(E_1), m(E_2), \ldots$

Com efeito, $C(E)$ é a soma dos conjuntos, sem pontos em comum; dois a dois, $C(E), [C(E_2)- C(E_1)], [C(E_3) - C(E_2)] \ldots$

Então

$$m[C(E)] = m[C(E_1)] + m[C(E_2) - C(E_1)] \ldots$$

e

$$m(E) = m(E_1) + [m(E_2) - m(E_1)] \ldots$$

2 Os elementos do conjunto são os pontos de um plano

[10] As considerações precedentes estendem-se, sem prejuízo, aos conjuntos cujos elementos são os pontos de um espaço de várias dimensões; limitar-nos-emos ao caso do plano.

Raciocinando como no §2, vemos que todo conjunto limitado de pontos sobre uma linha tem uma medida superficial nula, e que o conjunto dos pontos de um quadrado não pode ter 0 como medida. Portanto, atribuamos arbitrariamente 1 como medida de um quadrado $MNPQ$.

Os fundamentos que empregamos em geometria elementar para encontrar a área de um triângulo provam que a medida do conjunto dos pontos de um triângulo não pode diferir da metade do produto dos números que medem o seu lado e sua altura, MN sendo a unidade de comprimento.

[14] A medida de um triângulo estando assim definida, é necessário demonstrar que *a medida de um triângulo, soma de triângulos que não se interpenetram uns sobre os outros, é a soma das medidas desses triângulos*.

Os argumentos apresentados pelo Sr. HADAMARD na nota *D* do seu *Géometrie élémentaire* provam que é bem dessa forma se os triângulos componentes estiverem em número finito. O caso em que eles estão em número infinito se trata por um raciocínio semelhante àqueles que nós utilizamos no caso dos conjuntos de pontos sobre uma reta (BOREL, *Théorie des fonctions*, página 42).

11. Nós podemos, agora, dar as definições análogas àquelas do §3.

A medida exterior $m_e(E)$ de um conjunto E é o limite inferior da soma das medidas dos triângulos (em número finito ou infinito) nos os quais pode-se encerrar os pontos de E.

E sendo interior a um triângulo ABC, por definição,

$$C_{ABC}(E) = (ABC) - E.$$

A medida interior de E será, por definição,

$$m_i(E) = m(ABC) - m_e[C_{ABC}(E)].$$

Um conjunto, para o qual os dois números assim definidos são iguais, será dito mensurável e o valor comum desses dois números será sua medida.

Demonstramos, como no §4, que o problema da medida é possível e não admite senão uma solução quando nos limitamos a conjuntos mensuráveis; e que os dois procedimentos do §5 aplicados a conjuntos mensuráveis geram conjuntos mensuráveis. Esses dois procedimentos, aplicados um número finito de vezes a conjuntos tais que cada um é formado por pontos de um triângulo, dão os conjuntos planos que, chamaremos, assim como seus complementares, conjuntos mensuráveis (B).

Seja um conjunto aberto E, cada um dos seus pontos M é interior a E. Nós podemos, portanto, a M fazer corresponder um quadrado tendo M por centro, de lados paralelos às direções retangulares dadas, e definido como sendo o maior quadrado cujos pontos interiores são todos interiores a E. E sendo a soma daqueles dentre esses quadrados que correspondem aos pontos cujas duas coordenadas são racionais, é mensurável (B).

O complementar de um conjunto fechado é um conjunto aberto, assim, todo conjunto fechado é mensurável (B).

[15] Definiremos as extensões exterior e interior de um conjunto como no caso da reta: uma divisão de uma porção da reta que contém o conjunto em um número finito de segmentos, será substituída por uma divisão em um número finito de quadrados de uma porção do plano que contém o conjunto. Daí a noção de conjunto mensurável (J).

Todos esses conjuntos e todos esses números têm entre eles as mesmas relações que os conjuntos e os números de mesmos nomes encontrados anteriormente.

3 O problema das áreas[13]

12. Sabemos que chamamos de curva plana o conjunto das duas equações

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \tag{1}$$

f e φ sendo contínuas no intervalo (a, b) finito onde elas são definidas. A cada valor de t podemos fazer corresponder o ponto cujas coordenadas são os valores correspondentes de x e y. Uma curva define portanto um conjunto de pontos, esse conjunto é perfeito[14]. Um ponto é dito múltiplo se corresponde a vários valores de t. No caso de uma curva sem pontos múltiplos, conhecer o conjunto de pontos da curva é suficiente para defini-la, pois não consideramos como diferentes a curva (1) e aquelas que deduzimos substituindo t por uma função $\theta(t)$ sempre crescente ou sempre decrescente.

Uma curva é dita fechada sem pontos múltiplos se ela não tiver outro ponto múltiplo senão um ponto duplo correspondente a $t = a$ e $t = b$. Consideramos essa curva como definida pelo conjunto de seus pontos. Uma tal curva sendo dada, sabemos que ela divide o plano em duas regiões: uma interior e outra exterior[15].

Nós chamaremos de domínio o conjunto de pontos no interior de uma curva fechada C

[13] Jordan, Volume I. – J. Hadamard, Géométrie Elémentaire.
[14] Não seria assim se, como se apresenta muitas vezes em mecânica, o intervalo (a, b) fosse infinito.
[15] Jordan. Cours d'Analyse, 2a. edição, Volume I, páginas 90 à 100.

sem pontos múltiplos. C é a fronteira do domínio, o qual é um [16] conjunto aberto. Diremos que um domínio D é soma de domínios $D_1, D_2, \ldots$ em número finito ou não, se todo ponto de D pertencer a um, e somente um, dos D_i, ou então ao menos uma das fronteiras dos D_i.
13.

Nós nos propomos *a fixar a cada domínio um número positivo que nós chamaremos sua área e que satisfaz às condições a seguir*:

$1.^0$. *Dois domínios iguais têm mesma área.*

$2.^0$ *A área de um domínio que é a soma de um número finito ou infinito de outros domínios é a soma das áreas desses domínios.* Esse é *o problema das áreas.*

Se esse problema for possível, ele o será de uma infinidade de maneiras, e podemos atribuir arbitrariamente 1 para a área de um quadrado MNPQ. Os raciocínios conhecidos da geometria elementar provam que a área de um retângulo não pode diferir do produto dos comprimentos dos seus lados, MN sendo a unidade de comprimento, isto é, da medida superficial do retângulo.

Um domínio, sendo um conjunto aberto, é, como já vimos, soma de uma infinidade enumerável de retângulos, os quais, podemos supor, não se interpenetram uns sobre os outros. Portanto, sua área não pode diferir da soma das áreas desses retângulos, quer dizer, da medida superficial do domínio considerado como conjunto de pontos.

Sejam, agora, dois domínios, D_1 e D_2, sem pontos comuns, tendo em comum um arco de fronteira $\alpha\beta$, e somente um. O domínio D – soma do conjunto de pontos de D_1, do conjunto de pontos de D_2, do conjunto de pontos de $\alpha\beta$ (exceto α e β), – tem por medida a soma das medidas desses três conjuntos, que são todos os três mensuráveis, posto que, os dois primeiros são abertos e o terceiro é perfeito, aos pontos α e β próximos. Para que a segunda condição do problema das áreas seja satisfeita, é necessário que a medida superficial do arco $\alpha\beta$ seja nula.

O problema das áreas não é, portanto, possível se não considerarmos senão os domínios cujas fronteiras são de medida superficial nula.

Nós chamaremos esses domínios de *domínios quadráveis* e as curvas cujas medidas superficiais são nulas *curvas quadráveis.*

Seja D um domínio quadrável, soma dos domínios quadráveis $D_1, D_2, \ldots$ O conjunto dos pontos de D contém a soma dos conjuntos sem pontos em comum dois a dois $D_1, D_2, \ldots$ e, como nenhum dos D_i tem medida nula, eles formam no máximo uma infinidade enumerável. As fronteiras têm uma medida superficial nula, podemos desprezá-las no cálculo da medida ou área de D.

[17] O problema das áreas é, portanto, possível para os domínios quadráveis e ele não admite senão uma única solução, se fixarmos a unidade de área.

14. Vamos supor agora que o segunda condição do problema das áreas seja alterado para a seguinte forma:

A área de um domínio resultante da soma de outros dois é a soma das áreas desses *dois outros*[16].

Retomando raciocínios já empregados, veremos que a área de um domínio D está compreendida entre as extensões interior e exterior desse domínio. De sorte que a área de um domínio quadrável é ainda bem determinado.

A área de um domínio D não quadrável, limitado por uma curva não quadrável C está compreendida entre os números $m(D)$ e $m(D) + m(C)$[17].

Mostremos que o problema das áreas assim colocado é indeterminado para os domínios não quadráveis. Nós nos apoiaremos sobre esta propriedade: quando dois domínios D_1, D_2 têm em comum um arco de fronteira $\alpha\beta$, podemos encontrar um domínio D contendo $\alpha\beta$ (sem possivelmente α e β) tal que, ou bem todo ponto de D, interior a D_1, é interior a D_2, e vice-versa; ou bem todo ponto de D, interior a D_1, não pertence a D_2, e vice-versa[18]. No primeiro caso diremos que D_1 e D_2 estão do mesmo lado de $\alpha\beta$, e no segundo que estão de lados diferentes.

Seja $\alpha\beta$ um arco de curva, sem ponto múltiplo e não quadrável, suponhamos que faça parte da fronteira de um domínio Δ. Seja, agora, D um domínio qualquer limitado por uma curva C. C e $\alpha\beta$ podem ter arcos em comum (nós negligenciamos os pontos comuns, se existem, não fazendo parte de tais arcos). Seja E o conjunto desses arcos ao longo dos quais D e Δ estão de um mesmo lado de $\alpha\beta$, e E_1, o conjunto dos arcos para os quais isso não acontece. Escolhamos arbitrariamente, de uma vez por todas, um [18] número θ compreendido entre 0 e 1. Atribuiremos a D a área:

$$m(D) + \frac{1}{2}m(C - E - E_1) + \theta m(E) + (1 - \theta)m(E_1).$$

Demonstraremos muito facilmente que a área assim definida verifica a segunda condição do problema das áreas, como foi colocado no início deste parágrafo [19]

Em resumo, o problema das áreas não é ao mesmo tempo possível e bem determinado senão para os domínios quadráveis. Na sequência não falaremos de área senão no caso de um domínio quadrável.

Raciocínios análogos aos precedentes poderão ser feitos com relação a volumes de domínios de espaço ordinário, e de uma maneira mais geral, a extensão de um domínio de um espaço a um número qualquer de dimensões.

---

[16] É assim que o Sr. HADAMARD coloca o problema das áreas para os polígonos (*Géometrie Elémentaire*, Nota D.).

[17] Existem curvas não quadráveis, pois existem curvas que passam por todos os pontos de um quadrado. Para formar uma curva não quadrável, sem pontos múltiplos, é suficiente modificar ligeiramente o método que o Sr. *Hilbert* emprega para definir uma curva que passa por todos os pontos de um quadrado (*Mathematische Annalen*, v. 38 ou PICARD, *Traité d'Analyse*, Segunda Edição, Volume I). Substituiremos cada quadrado que figura na definição do Sr. HILBERT por um polígono interior a esse quadrado, de área suficientemente grande, escolhido de modo que as fronteiras de dois desses polígonos não tenham em comum senão o vértice, se existe, pelo qual a curva passa de um polígono para o outro.

[18] A demonstração não oferece nenhuma dificuldade.

[19] Será necessário para isso apoiar-se sobre esta propriedade: se um domínio for soma de dois domínios D_1 e D_2, D_1eD_2 terão em comum um, e apenas um, arco de fronteira, e nenhum ponto comum fora desse arco.

CAPÍTULO 2

Integral

1 Integral definida de funções de uma variável

15. Do ponto de vista geométrico, o problema da integração pode ser posto desta forma:

Uma curva C *sendo dada pela sua equação* $y = f(x)$ (f *é uma função contínua positiva, os eixos são retangulares*), *encontrar a área do domínio limitado por um arco de* C, *um segmento de* $0x$ *e duas paralelas ao eixo dos* y *de abscissas* a *e* b *dadas* $(a < b)$.

Essa área é chamada integral definida de f tomada entre os limites a e b, e é representada por $\int_a^b f(x)dx$.

Arquimedes, ao fazer a quadratura de um segmento de parábola, resolveu um caso particular desse problema. O método clássico aplicável ao caso geral consiste [19] essencialmente em avaliar as extensões internas e externas do domínio por meio de uma divisão do plano em retângulos cujos lados são paralelos à $0x$ e $0y$. Para obter esses retângulos, traçamos primeiro as paralelas a $0y$; em seguida, dividimos as faixas obtidas pelos segmentos paralelos a $0x$, de ordenadas variáveis de uma faixa a outra. Se R_1 dos retângulos R assim formados for considerado para calcular uma das extensões, todos os retângulos R situados na mesma faixa, e compreendidos entre R_1 e $0x$, devem também ser considerados para o cálculo da mesma extensão. As extensões são, portanto, limites de somas de áreas de retângulos que têm as suas bases sobre $0x$.

Sejam $\delta_1, \delta_2, \ldots$ os comprimentos dessas bases; $m_1, m_2 \ldots, M_1, M_2 \ldots$ os valores inferiores e superiores de f nos intervalos correspondentes. Se supormos os δ dados, ou seja, as paralelas a $0y$ traçadas, e se escolhermos segmentos paralelos a $0x$ de maneira a obter valores os mais próximos possíveis para as extensões, obteremos para esses valores próximos:

$$s = \Sigma \delta_i m_i, \quad S = \Sigma \delta_i M_i.$$

Assim, sabemos calcular as duas extensões do domínio; demonstra-se que são iguais, o problema que colocamo-nos tem portanto um sentido, e sabemos resolvê-lo.

Relativamente às funções f limitadas quaisquer, o Sr. DARBOUX demonstrou[20] que as duas somas s e S tendem para limites perfeitamente determinados; nós as chamamos de

[20] DARBOUX, *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Annales de l'École Normale, 1875.

integrais por falta e por *excesso*. Quando essas duas integrais são iguais, e isso não ocorre para outras funções senão as contínuas, a função é dita *integrável* e o limite comum de s e S é chamado desde RIEMANN[21], *integral definida de* f *tomada entre* a *e* b.

16. Para interpretar geometricamente esses números, associamos a toda função f positiva definida em (a, b) o conjunto E dos pontos cujas coordenadas verificam ao mesmo tempo as duas desigualdades

$$a \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(y).$$

[20] As somas s e S são, evidentemente, valores aproximados das extensões interior e exterior de E e, portanto, s e S têm limites bem determinados: essas extensões. Assim, do ponto de vista geométrico, a existência das integrais por falta e por excesso é uma consequência da existência das extensões interna e externa de um conjunto limitado. – para que a função f seja integrável é necessário e suficiente que E seja mensurável (J); a medida de E é a integral.

Qualquer que seja o sinal de f, fazemos corresponder a ela o conjunto E dos pontos cujas coordenadas verificam as três desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad xf(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant y^2 \leqslant \overline{f(x)}^2.$$

O conjunto E é a soma dos conjuntos E_1 e E_2 formados por pontos de ordenadas positivas para E_1 e negativas para E_2[22]. A integral por falta é a extensão interior de E_1 menos a extensão exterior de E_2; a integral por excesso é a extensão exterior de E_1 menos a extensão interior de E_2. Se E é mensurável (J) (nesse caso E_1 e E_2 também o são) a função é integrável, a integral sendo $m(E_1) - m(E_2)$.

17. Esses resultados sugerem imediatamente a generalização seguinte: *se o conjunto* E *for mensurável* (*nesse caso* E_1 *e* E_2 *também o são*), *chamaremos integral definida de* f*, tomada entre* a *e* b*, a quantidade*

$$m(E_1) - m(E_2).$$

as funções f *correspondentes serão chamadas somáveis.*

Relativamente às funções não somáveis, se existem, definiremos as integrais inferiores e superiores como iguais a

$$m_i(E_1) - m_i(E_2), \quad m_e(E_1) - m_e(E_2).$$

Esses dois números estão entre as integrais por falta e por excesso.

18. Vamos definir analiticamente as funções somáveis.

Porque E é mensurável, ele está contido num conjunto E' e contém um conjunto E'', E' e E'' sendo mensuráveis (B) e de medida $m(E)$, §7. Aliás, os raciocínios que nos deram esse resultado provam que podemos supor que E' e E'' são formados de segmentos paralelos a $0y$

[21] RIEMANN, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.*
[22] Pouco importa considerar os pontos do eixo x como parte de E_1 ou E_2.

e têm seus pés sobre $0x$, ou seja, correspondem a duas funções f_1 e f_2 ($f_1 \geqslant f_2$).

[21] Sejam e, e', e'' os conjuntos formados dos pontos de E, E', E'' cujas ordenadas são maiores que um número $m > 0$ dado; e, e', e'' são mensuráveis e de mesma medida. Sejam s, s', s'' as seções desses conjuntos pela reta $y = m + h$; s' e s'' são mensuráveis (B) linearmente, e $m(s')$, $m(s'')$ não decrescem quando h tende a zero; sejam S', S'' seus limites. Mostremos que eles são iguais. – Com efeito, do contrário, para h suficientemente pequeno teríamos sempre

$$m(s') \geqslant m(s'') + \varepsilon.$$

E podemos encontrar h_1 e h_2, $h_1 < h_2$, pequenos o suficiente para que

$$m[s'(h_1)] \geqslant m[s'(h_2)] \geqslant m[s''(h_1)] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam e'_1, e''_1 os pontos de e' e e'' compreendidos entre $y = h_1$ e $y = h_2$, temos:

$$\begin{aligned} m(e'_1) &\geqslant (h_2 - h_1) \cdot m[s'(h_2)] \\ m(e''_1) &\leqslant (h_2 - h_1) \cdot m[s''(h_2)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m(e'_1) \geqslant m(e''_1) + (h_2 - h_1)\frac{\varepsilon}{2},$$

o que é impossível, pois e'_1 e e''_1 devem ter a mesma medida.

Portanto s' e s'' têm a mesma medida linear e, por conseguinte, s é mensurável; isso quer dizer que *o conjunto dos valores de* x *para os quais* $f(x)$ *é maior que* $m > 0$ *é mensurável*. Analogamente, *o conjunto dos valores de* x *para os quais* $f(x)$ *é menor que* $m < 0$ *é mensurável*.

Disso resulta que o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ é menor ou igual a $m > 0$ (maior ou igual a $m < 0$) é mensurável; portanto o conjunto dos pontos para os quais têm-se $a \geqslant f(x) > b > 0$, ou $0 > c > f(x) \geqslant d$, ou $e \geqslant f(x) \geqslant g$ ($eg < 0$), é mensurável; e, fazendo b tender para a, ou d para c, ou e e g para 0, vemos que o conjunto dos pontos para os quais y tem um valor dado, é mensurável. Em resumo, sem se ocupar dos sinais de a e b, *se* f *é somável, o conjunto dos valores de* x*, para os quais temos*:

$$a > f(x) > b,$$

é mensurável.

[22] 19. Reciprocamente: *se, para quaisquer* a *e* b*, o conjunto dos valores de* x *para os quais tem-se* $a > f(x) > b$*, é mensurável, e a função* $f(x)$ *é limitada, ela é somável.*

Com efeito, dividamos o intervalo de variação de $f(x)$; sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ os pontos de divisão. Seja e_i $(i = 0, 1, \ldots n)$ o conjunto de valores de x para os quais $f(x) = a_i$.

Seja e'_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ o conjunto dos valores de x para os quais $a_i < f(x) < a_{i+1}$.

Os pontos do conjunto E de $f(x)$, que correspondem aos valores de x que pertencem a e_i, formam um subconjunto mensurável do plano de medida $|a_i| \cdot m_l(e_i)$, ($m_l(e_i)$ designando uma medida linear).

Os pontos de E que correspondem àqueles de e'_i formam um conjunto que contém um conjunto mensurável de medida $|a_i| \cdot m_l(e_i)$, e está contido em um conjunto mensurável de medida $|a_{i+1}| m_l(e'_i)$.

E contém, portanto, um conjunto de medida

$$\sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_{i-1}| m_l(e'_i)$$

e está contido em um conjunto de medida

$$\sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_i| m_l(e'_i).$$

Esses dois conjuntos diferem em menos de $(a_n - a_0)\alpha$, sendo α o máximo de $a_i - a_{i-1}$, de maneira que podemos fazê-los tão próximos quanto queiramos, e E é mensurável, portanto, f é somável.

Além disso, sabemos calcular a medida de E; portanto, *se f é positiva, a integral é o limite comum das duas somas*

$$\sigma = \sum_0^n a_i \cdot m_l(e_i) + \sum_1^n a_{i-1} \cdot m_l(e'_i) \quad \Sigma = \sum_0^n a_i \cdot m_l(e_i) + \sum_1^n a_i \cdot m_l(e'_i)$$

quando $a_{i-1} - a_i$ tende a zero.

Ora, se f não é sempre positiva, o limite da soma dos termos de σ ou Σ, que são positivos, dá a medida do conjuntos que chamamos de E_1, §16, e o limite da soma dos termos negativos dá – $m(E_2)$, portanto, *em todos os casos, σ e Σ definem a integral.*

Pode não ser inútil mostrar que raciocínios analíticos teriam podido nos conduzir à consideração de funções somáveis e daquilo que acabamos de chamar de suas integrais.

[23] Seja uma função contínua sempre crescente $f(x)$ definida entre α e β $(\alpha < \beta)$ e variando entre a e b $(a < b)$. Tomemos arbitrariamente por x os valores

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \beta$$

os quais correspondem por $f(x)$ os valores

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$

A integral definida, no sentido ordinário da palavra, é o limite comum das duas somas

$$\sum_{1}^{n}(x_i - x_{i-1})a_{i-1} \quad \sum_{1}^{n}(x_i - x_{i-1})a_i$$

quando o máximo de $x_i - x_{i-1}$ tende a zero.

Mas x_i é dado se a_i o é, e $x_i - x_{i-1}$ tende a zero se $a_i - a_{i-1}$ tende a zero. Portanto, *para definir a integral de uma função contínua crescente* $f(x)$, *podem-se se dar os* a_i, *ou seja, a divisão do intervalo de variação de* $f(x)$ *no lugar de se dar os* x_i, *ou seja, a divisão do intervalo de variação de* x.

Procurando operar da mesma forma, de início, no caso simples das funções contínuas que variam em todo intervalo e não têm senão um número finito de máximos e mínimos, e, em seguida, no caso de uma função contínua qualquer, somos facilmente conduzidos a esta propriedade. Seja uma função contínua $f(x)$ definida em (α, β) e variando entre a e b, $(a < b)$. Escolhamos arbitrariamente

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b;$$

$f(x) = a_i$ para os pontos de um conjunto fechado e_i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$; $a_i < f(x) < a_{i+1}$ para os pontos de um conjunto soma de intervalos e'_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$; os conjuntos e_i e e'_i são mensuráveis.

As duas quantidades

$$\sigma = \sum_{0}^{n} a_i \cdot m(e_i) + \sum_{1}^{n} a_i \cdot m(e'_i) \quad \Sigma = \sum_{0}^{n} a_i \cdot m(e_i) + \sum_{1}^{n} a_{i+1} \cdot m(e'_i)$$

tendem para $\int_a^b f(x)dx$ quando o número de a_i aumenta de maneira que o máximo de $a_i - a_{i-1}$ tende a zero.

Essa propriedade obtida, podemos tomá-la por definição de integral de $f(x)$. Mas as duas quantidades σ e Σ têm significado para outras funções [24] além das funções contínuas: são as funções somáveis. Nós vamos demonstrar que para essas funções σ e Σ tenham um mesmo limite, independente da escolha dos a_i, esse limite será, por definição, a integral de $f(x)$ tomada ente α e β.

Quando, entre os a_i, introduzimos novos pontos de divisão, σ não decresce, e Σ não cresce, portanto σ e Σ possuem limites. Eles são iguais, porque $\Sigma - \sigma$ é, no máximo, igual a $\beta - \alpha$ multiplicado pelo máximo de $a_i - a_{i-1}$.

Seja, agora, um outro modo de divisão da variação de $f(x)$ com o auxílio de pontos b_i e sejam σ' e Σ' os valores correspondentes de σ e Σ. Sejam σ'' e Σ'' os valores correspondentes ao modo de divisão no qual empregamos ao mesmo tempo os a_i e b_i. As duas séries de inequações

$$\sigma \leqslant \sigma'' \leqslant \Sigma'' \leqslant \Sigma'$$

$$\sigma' \leqslant \sigma'' \leqslant \Sigma'' \leqslant \Sigma$$

provam que as seis somas σ, σ', σ'', Σ, Σ', Σ'' têm o mesmo limite.

A existência da integral está, portanto, demonstrada. Se adotarmos esse método de exposição, um pouco diferente do precedente, aliás, não ficará evidente que a definição de integral tal como RIEMANN deu, não está em desacordo com a precedente. Para demonstrar isso, apoiar-nos-emos no seguinte fato: Os pontos de descontinuidade de uma função integrável formam um conjunto de medida nula[23]. – Seja $f(x)$ uma função integrável e seja E o conjunto de pontos para os quais temos

$$a \leqslant f(x) \leqslant b$$

a e b sendo dois números quaisquer. Os pontos limite de E que não fazem parte de E são pontos de descontinuidade; eles formam, portanto, um conjunto e de medida nula. $E+e$ sendo fechado é mensurável, e é mensurável, portanto E o é. Isso é suficiente para concluirmos que f é somável.

Se, em um intervalo de comprimento l, o máximo de f é M e o mínimo m, a integral (no sentido que demos a essa palavra) está compreendida entre lM e lm. Além disso, se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números crescentes, temos:

$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} = \int_{a_1}^{a_n}$$

(as integrais tendo o sentido que nós adotamos).

[25] Disso resulta que a integral de uma função somável está compreendida entre as integrais por falta e por excesso, e, em particular, que as duas definições de integral concordam quando são ambas aplicáveis.

21. A integral tomada entre os limites a e b não foi definida senão se a é inferior a b, nós complementaremos a definição pela identidade

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

Disso resulta que:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \cdots + \int_k^l f(x)dx = \int_a^l f(x)dx,$$

quaisquer que sejam $a, b, \dots l$.

Temos necessidade, também, da noção de integral de uma função f definida somente para

[23] RIEMANN enuncia essa propriedade da seguinte maneira: Para que uma função seja integrável é necessário que “a soma total dos intervalos para os quais as oscilações são maiores que σ, qualquer que seja σ, possa ser tomada infinitamente pequena”.

os pontos de um conjunto E[24]. Seja AB um segmento que contém E, definamos uma função φ como sendo igual a f para os pontos de E e igual a 0 para os pontos de $C_{AB}(E)$. A integral de f tomada em E é, por definição, a integral de φ tomada em AB. É evidente que a integral de f assim definida não depende da escolha do segmento AB que contém E.

Se E é a soma de $E_1, E_2, \dots$, todos esses conjuntos sendo mensuráveis, dois a dois sem pontos em comum, e se a função f é somável em E, temos:

$$\int_E f(x)dx = \Sigma \int_{E_i} f(x)dx.$$

Notemos ainda que podemos definir a integral inferior de uma função f como o limite superior das integrais das funções φ somáveis não superiores a f; dentre essas funções φ, existe uma cuja integral é igual à integral inferior de f. Enunciaremos uma propriedade análoga para a integral superior.

22. Nós vamos agora mostrar que as operações aritméticas elementares aplicadas a funções somáveis geram funções somáveis.

[26] Sejam f e φ duas funções somáveis que permanecem compreendidas entre m e M. Dividamos o intervalo (m, M); os pontos de divisão.

$$m_0 = m < m_1 < m_0 \dots < m_n = M.$$

Seja e_i $(i = 0, 1, \dots n)$ o conjunto de valores de x; para os quais temos: $m_{i-1} < f \leqslant m_i$, seja e'_i o conjunto correspondente a φ.

Seja e_{ij} o conjunto de pontos comuns a e_i e $e'j$, para os pontos desse conjunto, temos:

$$m_{i-1} + m_{j-1} < f + \varphi \leqslant m_i + m_j;$$

e_i, $e'j$, e_{ij} são mensuráveis.

Sejam a e b dois números dados. Seja E o conjunto soma daqueles dentre os e_{ij} cujos pontos estão compreendidos entre a e b. E é mensurável.

Aumentemos indefinidamente o número dos m_i de maneira que o máximo de $m_i - m_{i-1}$ tenda a zero. Teremos uma sequência infinita de conjuntos E cuja soma, que é mensurável, é o conjunto dos valores de x para os quais temos:

$$a < f + \varphi < b$$

donde $f + \varphi$ é somável.

A integral de f é a soma das integrais de f tomadas nos conjuntos e_{ij}, donde temos:

$$\Sigma m(e_{ij}) m_{i-1} < \int f(x)dx < \Sigma m(e_{ij}) m_i.$$

[24] Poderíamos, de início, ter definido as funções somáveis em E, e, em seguida, suas integrais com o auxílio das mesmas definições de antes, com a condição de se abstrair todos os pontos que não pertencem a E.

E, raciocinando da mesma forma para a função $f + \varphi$,

$$\Sigma m(e_{ij})(m_{i-1} + m_{j-1}) < \int (f+\varphi)dx < \Sigma m(e_{ij})(m_i + m_j).$$

Disso resulta que

$$\left| \int (f+\varphi)dx - \int f dx - \int \varphi dx \right| < \Sigma m(e_{ij})(m_i + m_j - m_{i-1} - m_{j-1})$$

portanto

$$\int (f+\varphi)dx = \int f dx + \int \varphi dx^{[25]}.$$

[27] Essa propriedade generaliza-se imediatamente, de sorte que *a soma de um número qualquer de funções somáveis é uma função somável* e a integral é a soma das integrais.

Demonstraremos também que o produto de *duas funções somáveis é uma função somável; que o inverso de uma função somável* f *que verifica a desigualdade*

$$0 < m < |f| < M$$

é uma função somável; que a m*-ésima raiz aritmética de uma função* f *somável, para a qual essa raiz existe, é somável*; que se f *e* φ *são duas funções somáveis, tais que* $f(\varphi)$ *tenha sentido, a função* $f(\varphi)$ *é somável; do mesmo modo,* $f\varphi$ *é somável se* f *e* φ *o são*, etc.

Uma proposição mais importante é a seguinte: *se uma função* f *limitada é o limite de uma sequência de funções* f *somáveis,* f *é somável.*

Com efeito, seja e_i o conjuntos dos valores para os quais f_i está compreendida *entre* a e b. O conjunto e dos pontos comuns a todos os e_i, pelo menos a partir de um certo valor de i, é o conjunto de valores de x para os quais f está compreendida entre a e b. Ora, os e_i sendo mensuráveis, e o é, donde f é somável.

23. As proposições que acabamos de obter permitem definir uma classe importante de funções somáveis.

Nós nos apoiaremos sobre o fato que se $y = h$ e $y = x$ são funções somáveis; então kx^m é somável e todo polinômio é somável.

Desde Weierstrass sabemos que toda função contínua é o limite de uma sequência de polinômios, donde as funções contínuas são somáveis. Mas existem funções outras que as funções contínuas e que são limites de polinômios, são as funções que o Sr. Baire estudou, e que são chamadas funções de primeira classe (*Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica, 1899). As funções de primeira classe são, portanto, somáveis. Os limites de funções de primeira classe ou de funções de segunda classe são somáveis, etc. Todas as funções do conjunto que o Sr. Baire designou por E (página 70, loc. cit.) são somáveis.

Esses resultados nos fornecem numerosos exemplos de funções somáveis, descontínuas

[25] A introdução das noções de integral inferior e exterior teria permitido limitar-se à segunda parte do raciocínio precedente.

e não integráveis (no sentido de RIEMANN). Nós podemos, ainda, obter tais exemplos da maneira que se segue. – O raciocínio que nos permitiu no parágrafo 20 demonstrar que toda função integrável é somável prova que: se, fazendo a abstração de um conjunto de medida [28] nula, restar um conjunto em cada ponto do qual uma função é contínua, essa função será somável. Portanto, se f e φ são duas funções contínuas, a função F, definida como igual a f exceto nos pontos de um conjunto E de medida nula, para os quais temos

$$F = f + \varphi,$$

é somável. Ora, se φ nunca é nula e se E é denso em todo intervalo, todos os pontos são pontos de descontinuidade para F que não é, portanto, integrável (no sentido de RIEMANN).

Esse procedimento permite-nos construir funções somáveis formando um conjunto cuja potência é igual àquela do conjunto das funções.

24. O método geométrico que nos serviu no começo deste capítulo, estando baseado sobre a noção de medida de um conjunto limitado, era aplicável apenas às funções limitadas[26]. Ao contrário, o método analítico indicado no §20 se aplica quase sem modificações às funções não limitadas superiormente em valor absoluto.

Uma função será dita somável se, quaisquer que sejam a *e* b*, o conjunto dos valores de* x *para os quais temos*:

$$a < f(x) < b$$

é mensurável. Nós distinguiremos as funções somáveis limitadas, aquelas com as quais temos nos ocupado, até o momento, das funções somáveis não limitadas.

Seja $f(x)$ uma função somável. Escolhamos números

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

variando desde $-\infty$ até $+\infty$ e tais que $m_i - m_{i-1}$ seja limite superior em valor absoluto. Seja sempre e_i o conjunto de valores de x para os quais $f(x)$ é igual a m_i, e e'_i o conjunto de valores de x para os quais

$$m_i < f(x) < m_{i+1}.$$

Consideremos as duas somas

$$\sigma = \Sigma m_i \cdot m(e_i) + \Sigma m_i \cdot m(e'_i), \quad \Sigma = \Sigma m_i \cdot m(e_i) + \Sigma m_{i+1} \cdot m(e'_i).$$

em que os sinais Σ representam somas de duas séries, uma [29] de termos positivos, e a outra de termos negativos. Essas séries podem ser convergentes ou divergentes; se aquelas que figuram em σ são convergentes, quer dizer, se σ tem um sentido, Σ tem um sentido, e inversamente; e o mesmo vale quaisquer que sejam os m_i escolhidos.

[26] Não haveria, de resto, nenhuma dificuldade para colocar o problema da medida dos conjunto de pontos para todos os conjuntos, limitados ou não.

Raciocinando como no parágrafo 20, vemos que as duas somas $/sigma$ e $/Sigma$ tendem para o mesmo limite, independentemente dos m_i escolhidos, quando aumentamos o número dos m_i de maneira que o máximo de $m_i - m_{i-1}$ tenda a zero. – Esse limite é a integral.

Com essa extensão dos sentidos das palavras *função somável* e *integral*, todos os enunciados dados anteriormente mantêm-se precisos[27] Mas é necessário lembrar que uma função somável não limitada não têm, necessariamente, uma integral[28].

25. O cálculo da integral de uma função dada apresenta as mesmas dificuldades que o cálculo da medida de um conjunto dado.

A maior parte das funções descontínuas consideradas até o momento em Análise eram definidas com o auxílio das séries, há, portanto, interesse em conhecer o teorema seguinte.

Se uma sequência de funções somáveis, que tem integrais $f_1, f_2, f_3 \ldots$, *tem um limite* f, *e se* $|f - f_n|$ *permanece, qualquer que seja* n, *inferior a um número fixo* M, f *tem uma integral que é o limite das integrais das funções* f_n[29].

De fato, temos:

$$f = f_n + (f - f_n)$$

As duas funções do segundo membro tendo integrais, o mesmo vale para f e a integral de f é a soma das integrais de f_n e $f - f_n$. Procuremos um limite superior dessa segunda integral.

Escolhamos arbitrariamente um número positivo Σ. Seja e_n o conjunto dos valores de x para os quais não temos, para todo valor positivo ou nulo [30] de p

$$|f - f_{n+p}| < \varepsilon,$$

e_n é mensurável.

Seja E o conjunto mensurável no qual tomamos as integrais, temos:

$$\left|\int (f - f_n)dx\right| \leqslant M \cdot m(e_n) + \varepsilon[m(E) - m(e_n)].$$

Ora, cada conjunto e_n contém todos os conjuntos cujos índices são maiores e não existe nenhum ponto comum a todos os e_n. Portanto, $m(e_n)$ tende a zero com $1/n$ e, consequentemente, o mesmo ocorre com

$$\left|\int (f - f_n)dx\right|$$

[27] O primeiro dos enunciados do § 22 demanda, contudo, algumas explicações. Se f e φ são somáveis, $f + \varphi$ o são e, evidentemente, $\int(f+\varphi) = \int f + \int \varphi$ se $\int f$ e $\int \varphi$ têm significado; mas $\int(f+\varphi)$ pode ter significado sem que o mesmo ocorra com $\int f$ e $\int \varphi$.

[28] Faltaria examinar o caso em que f torna-se infinita para certos valores de x. Se esses valores estiverem em um número finito, será suficiente definir a integral fazendo a abstração dos valores que tornam f infinita, de modo que os enunciados comuns não sejam alterados.

[29] O caso particular mais interessante desse teorema, aquele em que f e as f_i são funções contínuas, já foi obtido com o auxílio de considerações bem diferentes do Sr. Osgood em seu *Mémoire sur la convergence non uniforme* (*American Journal*, 1894).

Quando f for limitada, a proposição poderá ser enunciada assim: quando uma sequência $f_1, f_2, \ldots$ de funções somáveis, limitadas superiormente em valor absoluto em sua totalidade, tem um limite f, a integral de f é o limite das integrais das funções f_n.

Eis uma outra forma do enunciado relativa ao caso geral:

Quando o conjunto dos restos de uma série convergente de funções integráveis é limitado superiormente em valor absoluto, a série é integrável termo a termo.

Como caso muito particular temos o teorema sobre a integração de séries uniformemente convergentes.

2 Integrais indefinidas e funções primitivas de funções de uma variável

26. Chamamos de integral indefinida de uma função $f(x)$, que possui integral definida em um intervalo (α, β), uma função $F(x)$ definida em (α, β) tal que, quaisquer que sejam a e b compreendidos entre α e β, tenha-se:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

[31] Dessa igualdade obtemos:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + F(a).$$

Portanto, toda função que tem uma integral definida, admite uma infinidade de integrais indefinidas que não diferem senão por uma constante $F(a)$.

A integral indefinida é uma função contínua[30], isso é evidente se a função $f(x)$ é limitada. Para demonstrar o caso geral, retomemos as anotações do parágrafo 24, a sendo arbitrariamente escolhido, é necessário demonstrar que desde que h é inferior, em valor absoluto, a uma certa quantidade, temos:

$$|F(a+h) - F(a)| = \left|\int_a^{a+h} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Vamos, para simplificar, supor h positivo.

Existe *no máximo* uma infinidade enumerável de números m_i tais que os conjuntos e_i correspondentes tenham uma medida não nula, poderemos supor, portanto, que os m_i não foram tomados dentre esses valores excepcionais, isso quer dizer que faremos $m(e_i) = 0$, o que simplifica as somas σ e Σ.

[30] Podemos também acrescentar que ela tem uma variação limitada, essa variação sendo, no máximo, igual a $\int |f(x)|dx$. A demonstração é a mesma que a empregada pelo Sr. Jordan (*Cours d'Analyse* §*81*. Isso explica os resultados obtidos mais adiante (§§, 30, 31, 32)

Assim, se supusermos $m_0 = 0$[31], podemos escrever

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \lim \left\{ \sum_0^{\infty} m_{i+1} m[e_i'(h)] + \sum_{-1}^{-\infty} m[e_i'(h)] \right\}$$

designando por $e_i'(h)$ a porção de e_i' compreendida entre a e $a+h$. Consideremos um sistema fixo de números m_i. As duas séries do segundo membro não variarão senão se h varia, e podemos supor h tão pequeno que o número absoluto de um número finito qualquer de termos do segundo membro seja tão pequeno quanto se queira. Portanto, podemos tomar h tão pequeno que as duas séries do segundo membro, que são, uma de termos positivos, e a outra de termos negativos, sejam também tão pequenas em valor absoluto quanto queiramos.

[32] Mas, para passar o limite, é necessário, entre os m_i escolhidos, introduzir novos números; essa operação faz diminuir, em valor absoluto, as duas séries do segundo membro; portanto fica demonstrado que $\int_a^{a+h} f(x)dx$ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira. A integral indefinida é, portanto, realmente uma função contínua.

27. Se M e m são o máximo e o mínimo de $f(x)$ em $(a, a+h)$, temos:

$$mh < \int_a^{a+h} f(x)dx < Mh$$

em que

$$m < \frac{F(a+h) - F(a)}{h} < M$$

então, para $x = a$, se $f(x)$ é contínua nesse ponto, $F(x)$ tem uma derivada igual a $f(a)$.

Se $f(x)$ é contínua para todos os valores de x, $F(x)$ é qualquer uma das funções que admitem por derivada $f(x)$, isto é, uma das *funções primitivas* de $f(x)$.

Assim, no caso das funções contínuas, existe uma identidade entre a procura pelas funções primitivas e a procura das integrais indefinidas de uma função dada. Esse resultado bem conhecido é ainda verdadeiro quando se trata de uma função derivada integrável no sentido de Riemann[32]. Mas existem funções derivadas que não são integráveis no sentido de Riemann[33]; uma dessas funções sendo dada, não podemos calcular suas funções primitivas com o auxílio da integração no sentido de Riemann.

Veremos que toda função derivada limitada admite uma integral indefinida que é uma de suas funções primitivas; saberemos, assim, calcular a função primitiva, se ela existir, de uma função limitada dada.

Relativamente às funções derivadas não limitadas, demonstraremos que se elas admitem integrais, existe uma identidade entre suas funções primitivas e suas integrais indefinidas.

[33] 28. A derivada de uma função $f(x)$ é o limite quando h tende a zero da expres-

[31] Assim, e_0 não será, talvez, de medida nula, mas isso não tem importância para o que se segue.

[32] Ver Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*

[33] Sr. Volterra foi o primeiro a dar efetivamente um exemplo dessas funções (*Giornale de Battaglini*, t. XIX, 1881). Esse exemplo é reproduzido mais adiante.

são:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x)$$

a qual, h sendo fixo, representa uma função contínua; donde a derivada é limite de funções contínuas, ela é somável.

Suponhamos que a derivada f' seja sempre inferior em valor absoluto a M. Em virtude do teorema do valor médio $\varphi(x)=f'(x+\theta h)$, donde as funções $f(x)$ são limitadas em todo seu domínio e, consequentemente tem-se (§25):

$$\int_a^b f'(x)dx=\lim\int_a^b \varphi(x)dx=\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx\right]_a^b$$

donde

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a).$$

Toda função derivada limitada admite como integrais indefinidas suas funções primitivas; esse resultado é ainda verdadeiro quando se trata de derivada à direita, ou à esquerda limitada; ou de um limite ao qual tende $\varphi(x)$ para certos valores de h próximos de zero.

29. Para aplicar isso que precede, vamos procurar se existem funções primitivas para a função definida da maneira seguinte:

Seja um conjunto E fechado não denso em qualquer porção de $(0,1)$ e de medida não nula. Sejam (a,b) um intervalo contíguo a E[34] e c o meio desse intervalo. A função:

$$\varphi(x-a)=2(x-a)\,\text{sen}\,\frac{1}{x-a}-\cos\frac{1}{x-a}$$

se anula uma infinidade de vezes entre a e c; seja $a+d$ o ponto mais próximo de c, entre a e c, para o qual ela se anula.

A função $f(x)$ da qual vamos nos ocupar é nula para todos os pontos de E; em cada intervalo (a,b) contíguo a E, ela é igual a $\varphi(x-a)$ entre a e $a+d$, nula entre $a+d$ e $b-d$, igual a $-\varphi(b-x)$ entre $b-d$ e b.

[34] Essa função é contínua em cada intervalo contíguo a E, descontínua para todos os pontos de E que são pontos de descontinuidade de segunda espécie.

Além disso, $f(x)$ está sempre compreendida entre -3 e $+3$. Para que $f(x)$ admita uma função primitiva, é necessário primeiramente que ela admita uma integral definida no intervalo $(0,1)$. Essa integral, se existir, é igual a integral tomada em E mais a integral tomada em $C(E)$, supondo que elas existem. Ora, a integral em E existe e é nula; a integral em $C(E)$ também existe, pois ela é a soma das integrais tomadas nos intervalos contíguos a E, os quais são nulos.

De acordo com isso, a função $F(x)$ é nula para todos os pontos de E, e é definida para

[34] Ou seja, um intervalo que não contém pontos de E e cujas extremidades são pontos de E. – Essa expressão é do Sr. Baire.

todo o intervalo (a, b) contíguo a E pelas igualdades:

$$F(x) = (x-a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}, \text{entre } a \text{ e } a+d$$

$$F(x) = d^2 \operatorname{sen} \frac{1}{d}, \text{entre } a+d \text{ e b-d}$$

$$F(x) = (b-x)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{b-x}, \text{entre } b-d \text{ e } b$$

é igual a $\int f(x)dx$.

Portanto, se $f(x)$ tiver funções primitivas, $F(x)$ será uma delas. Para todos os pontos em que $f(x)$ é contínua, quer dizer, para todos os pontos de $C(E)$, temos evidentemente

$$F'(x) = f(x).$$

Seja a um ponto de E; se a é extremidade de um intervalo contíguo a E, situado à direita de a, $F(x)$ é, evidentemente, uma derivada nula à direita. Suponhamos que à direita de a encontrem-se uma infinidade de pontos de E, tendo a por ponto limite. Sejam α_i um desses pontos, para x superior a α_i, a relação

$$r(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

é, em valor absoluto, inferior a

$$\frac{(x-\alpha_i)^2}{x-a} < x - a,$$

donde tende a zero quando x tende a a.

[35] Em todos os pontos de E, $F(x)$ tem, evidentemente, uma derivada à direita não nula, veremos que, da mesma forma, ela tem derivada à esquerda nula, e, consequentemente, para todo valor de x compreendido entre 0 e 1, temos:

$$F'(x) = f(x).$$

A função $f(x)$ é, portanto, uma função derivada; ela não é integrável (no sentido de Riemann), pois o conjunto de seus pontos de descontinuidade tem medida não nula.

Esse exemplo de função derivada não integrável no sentido de Riemann é devido ao Sr. Volterra, *Giornale de Battaglini*, volume XIX[35].

30. As funções primitivas que acabamos de encontrar possuem variação limitada[36] Nós

[35] Das séries uniformemente convergentes, cujos termos são funções análogas àquelas que acabamos de considerar, permitiram ao Sr. Volterra dar exemplos de funções derivadas que não são integráveis em nenhum intervalo. A integração termo a termo dessas séries dar-nos-á as funções primitivas.

[36] Servir-nos-emos aqui de algumas propriedades dessas funções (Ver Jordan, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1881 e *Cours d'Analyse* segunda edição, volume I). A maior parte dessas propriedades estão incluídas no capítulo seguinte, de maneira que os parágrafos 30 a 35 poderiam ser postos nesse capítulo. A ordem adotada no texto permite reunir tudo o que tem a ver com a investigação

vamos demonstrar que: a condição necessária e suficiente para que a integral da derivada (limitada ou não) de uma função derivável exista é que essa função tenha variação limitada. Se é assim, a função é uma das integrais indefinidas de sua derivada.

Porque $f'(x)$ é somável, para procurar sua integral, operamos como no parágrafo 24. Suporemos todos os e_i de medida nula, além disso, $m_0 = 0$, o que é possível se, no lugar de raciocinar sobre a função dada $f(x)$, raciocinarmos sobre $f(x) + Kx$, K tendo sido convenientemente escolhido.

A cada ponto x_0 de e'_i, podemos fazer corresponder um intervalo (α, β) tal que se tivermos:

$$\alpha < a \leqslant x_0 \leqslant b \leqslant \beta$$

teremos também

$$m_i < r(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}.$$

Nós definiremos (α, β) como sendo o maior intervalo possível de comprimento no máximo igual a um número σ dado, tendo como meio x_0.

Se $m_i - m_{i-1}$ é sempre inferior a η, $(b - a)r(a, b)$ é a $\eta(b - a)$ e quase igual a $f'(x_0)(b - a)$.

[36] Seja $E_i(\sigma)$ o conjunto soma dos intervalos que correspondem aos pontos e'_i. $E_i(\sigma)$ pode ser considerado como soma dos intervalos que não se interpenetram uns sobre os outros; se (a, b) é um desses intervalos e se tivermos:

$$a < \alpha < \beta < b,$$

teremos também

$$m_i < r(\alpha, \beta) < m_{i+1}$$

desde que, entre α e β, encontra-se pelo menos um ponto de e'_i.

$E_i(\sigma)$ contém e'_i. Façamos σ tender a zero e seja x_0 um ponto pertencente a uma infinidade de conjuntos $E_i(\sigma)$. $f'(x_0)$ é o limite dos valores de $r(\alpha, \beta)$ relativos aos intervalos de $E_i(\sigma)$ que contêm x_0, portanto, x_0 é ponto de e_i, de e'_i ou de e_{i+1}. Consequentemente, o conjunto E_i, formado pelos pontos comuns a uma infinidade de $E_i(\sigma)$ relativos a valores de σ que tendem a zero, contém e'_i e pontos de $e_i + e_{i+1}$, por isso, tem a mesma medida de e'_i. Além disso, como cada $E_i(\sigma)$ contém os conjuntos relativos aos menores valores de σ, $m(E_i)$ é o limite de $m[E_i(\sigma)]$. Podemos, portanto, escolher os números

$$\ldots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

das funções primitivas.

de maneira que a soma D seja tão pequena quanto se queira,

$$D = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot (m[E_i(\sigma_i)] - m(E_i)) \, .$$

Isso posto, notemos que $\int f'dx$ e $\int |f'|dx$ existem ao mesmo tempo, de sorte que $\int f'dx$ existe se a série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m(e_i') = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m(E_i)$$

é convergente, ou seja, se, da mesma forma

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m[E_i(\sigma_i)].$$

Podemos sempre, entre os intervalos que formam os $E_i(\sigma_i)$, escolher um número finito de maneira que, se V for divergente, a contribuição de seus intervalos A em V seja tão grande quanto se queira, e tão próximos quanto se queira do valor de V se essa série for convergente. Suprimamos uma quantidade suficiente desses intervalos A, sem alterar o conjunto soma desses intervalos, de modo que nenhum [37] dos intervalos conservados esteja no interior dos outros intervalos conservados. A contribuição em V desses intervalos suprimidos é menor que D.

Consideremos dois intervalos que se interpenetram um sobre o outro (a_i, b_i), (a_j, b_j) relativos a e_i' e $e'j$. Suponhamos que se tenha

$$a_i < a_j < b_i < b_j.$$

Entre a_j e b_j não pode haver, ao mesmo tempo, pontos de e_i' e $e'j$ sem que $r(a_j+\varepsilon, b_i-\varepsilon)$ estivesse ao mesmo tempo compreendido entre m_i e m_{i+1} e entre m_j e m_{j+1}. Podemos, portanto, encontrar entre a_j e b_i um ponto c tal que entre a_i e c encontra-se um ponto de e_i' e entre c t b_j um ponto de e_j'. Assim, temos:

$$|f(c) - f(a_i)| + |f(b_j) - f(c)| = (c - a_i)|r(a_i, c)| + (b_j - c)|r(c, b_j)|.$$

Donde o primeiro membro, isto é, a variação de $f(x)$ entre a_i e b_j quando consideramos a divisão

$$a_i \qquad c \qquad b_j,$$

é igual à contribuição em V dos dois intervalos (a_i, b_i), (a_j, b_j) a menos de $(b_i - a_j)|m_j - m_i| + \eta(b_j - a_i)$. A quantidade $(b_i - a_j)|m_j - m_i|$ é inferior à contribuição em D do intervalo (a_j, b_i).

Continuando assim, somos levados a considerar uma sequência de valores crescentes $x_0 x_1 x_2 \ldots$ em número finito. A soma $\sum |f(x_i) - f(x_{i+1})|$ difere da contribuição dos intervalos A em V em menos de $D + \eta m(A)$. Ora, essa soma é inferior à variação total de $f(x)$.

Donde o limite de V, isto é, $\int |f'|dx$ é inferior, ou no máximo igual, à variação total de $f(x)$. Isso quer dizer que se $f(x)$ tem variação limitada, $\int |f'|dx$ existe e é inferior à variação de $f(x)$.

31. Suponhamos que a integral $\int |f'|dx$ exista.

Encerremos os pontos de e_i numa infinidade enumerável de intervalos A_i, podemos escolher $m(A_i)$ tão pequeno quanto queiramos. A cada ponto x_0 de e_i fazemos corresponder o maior intervalo (α, β) de comprimento inferior a $\sigma' i$, tendo x_0 como meio, todo interior a A_i; e tal que

$$\alpha < a \leqslant x_0 \leqslant b \leqslant \beta$$

implique

$$m_i - \varepsilon_i < r(a, b) < m_i + \varepsilon_i.$$

[38] Seja $e_i(\sigma'_i)$ a soma desses intervalos. Desde que escolhamos convenientemente os σ'_i e ε_i, a soma P será tão pequena quanto quisermos,

$$D' = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m[e_i(\sigma'_i)].$$

Cada $E_i(\sigma_i)$ ou $e_i(\sigma'_i)$ é soma de uma infinidade enumerável de intervalos que não se interpenetram uns sobre os outros. Se $f(x)$ está definida em (a, b), cada ponto interior a (a, b) é interior a pelo menos um desses intervalos, além disso, a e b são extremidades de tais intervalos, donde, de acordo com um teorema sobre conjuntos, podemos escolher dentre os intervalos que formam os $E_i(\sigma_i)$ e os $e_i(\sigma'_i)$ um número finito de intervalos B tais que todo ponto interior a (a, b) seja interior a um dos B.

Suporemos essa escolha feita de maneira que nenhum intervalo tomado seja interior aos outros intervalos tomados. A contribuição em V dos intervalos dos $E_i(\sigma_i)$ não empregados é, no máximo, igual a $D + D_i$, D sendo a integral de $|f'|$ no conjunto dos $e_i(\sigma'_i)$.

Raciocinando em B como em A, somos levados a considerar os números

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b.$$

A soma $\Sigma|f(x_i) - f(x_{i-1})|$, a menos de $D + D' + \eta(b - a)$, é igual à contribuição em V dos intervalos tomados de $E_i(\sigma_i)$.

Ora, dois números x_i consecutivos provêm de um mesmo intervalo pertencente a um dos $E_i(\sigma_i)$ ou dos $e_i(\sigma'_i)$, o qual pode ser decomposto em intervalos de comprimento no máximo iguais a $2\sigma_i$ ou $2\sigma'_i$, a soma das variações correspondentes a tal divisão difere sempre de V menos que $2D + D_i + D' + \eta(b - a)$. Ora, pela introdução desses novos pontos de divisão, tomando o máximo σ de σ_i e σ'_i bastante pequeno, tornamos a soma $\Sigma|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ tão próxima quanto desejamos da variação total de $f(x)$ em (a, b).

Disso resulta que se $\int f'(x)dx$ existe, a função $f(x)$ tem variação limitada, essa variação sendo igual ao valor da integral $\int |f|dx$.

Nós encontramos, assim, a condição necessária e suficiente para que a integral de $|f'|$ exista, e nós conhecemos seu significado.

Mas, o raciocínio precedente fornece outros resultados. Com efeito, retomemos esse raciocínio e voltemos nossa atenção sobre os conjuntos $e_i, E_i, E_i(\sigma)$ etc. com índices positivos.

[39] Vimos que a variação positiva total de $f(x)$ entre a e x é igual à integral de $f'(x)$ estendida ao conjunto de pontos para os quais f é positiva, ou seja, a integral

$$p(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' + |f'|)dx.$$

Do mesmo modo, para a variação negativa temos:

$$-n(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' - |f'|)dx.$$

E como temos:

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx.$$

Assim, uma função $f(x)$ sendo dada, sabemos reconhecer se ela é a derivada de uma função de variação limitada e, sendo assim, sabemos encontrar suas funções primitivas.

Se $f(x)$ é limitada, suas funções primitivas, se elas existirem, têm variação limitada, e podemos encontrá-las.

Mas a integração, tal como temos definido, não nos permite saber se uma função dada tem funções primitivas de variação não limitada[37].

33. A função $f(x)$ dada por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é contínua e tem variação não limitada.

[40] De fato,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) &= 0 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) &= (-1)^k \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

donde a soma das variações é $\Sigma \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$, série divergente.

[37] Esse último resultado é evidente, pois (nota do § 26) toda integral indefinida tem variação limitada. A demonstração precedente mostrou que, para obter uma função $f(x)$ de variação não limitada conhecendo sua derivada, por um método análogo àquele que empregamos quando f tem variação limitada, seria necessário por certa ordem nos termos de séries como $\Sigma m_i m[E_i(\sigma_i)]$, $\Sigma m_i m(e_i')$. A generalização da noção de integral indefinida dada no parágrafo seguinte permite, em alguns casos, obter esse resultado; também ele dará as funções primitivas de variação não limitada.

Essa função admite uma derivada $f'(x)$,

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, \text{ para } x \neq 0$$

e

$$f'(0) = 0.$$

$f'(x)$ nos fornece um exemplo de função não limitada, somável, que não tem integral; $f'(x)$ sendo dada, os métodos precedentes não permitem encontrar $f(x)$.

É interessante observar que a definição clássica da integral de uma função que se torna infinita na vizinhança de um ponto, permite encontrar $f(x)$ conhecendo $f'(x)$. É que, no caso em que a função a ser integrada não é limitada, a definição que temos adotado não é uma generalização da definição clássica, é uma definição diferente, mas concorda com ela quando ambas se aplicam. De resto, seria muito fácil generalizar a noção de integral definida de maneira que a definição clássica e essa que temos adotado tornem-se casos particulares de uma definição mais geral. Para simplificar os enunciados que seguirão, conservaremos, contudo, à expressão *integral definida*, o sentido previamente adotado, mas estenderemos o sentido da expressão *integral indefinida*. Vimos que toda integral indefinida era contínua. Se, agora, consideramos essa propriedade como uma das partes da definição das integrais indefinidas, seremos conduzidos a dizer que:

Uma função $f(x)$ *definida em* (α, β) *tem, nesse intervalo, uma integral indefinida* $F(x)$ *se existir uma função contínua* $F(x)$, *e uma, e somente uma, constante aditiva, de tal modo que tenhamos*:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

[41] *para todos os sistemas de números* a *e* b *escolhidos entre* α *e* β, *de maneira que o segundo membro tenha sentido*[38]

34. A integral indefinida de uma função derivada é sempre uma de suas funções primitivas, pois uma função primitiva é contínua e, de acordo com o que já dissemos, verifica a igualdade

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

sempre que o segundo membro tem sentido.

Saberemos, assim, encontrar a função primitiva da função $f'(x)$ do parágrafo 30.

Mas é fácil formar funções derivadas que não têm integrais indefinidas.

Seja $\varphi(x)$ uma função derivável definida entre 0 e 1 que: assim como sua derivada, se anula para 0 e 1; tem variação limitada em todo intervalo *interior* a $(0, 1)$; tem variação não limitada em todo intervalo cujas extremidades são 0 ou 1.

Sabemos encontrar $\varphi(x)$ quando conhecemos $\varphi'(x)$, pois φ é uma das integrais indefi-

[38] Compare essa definição com a de integral definida de uma função não limitada dada pelo Sr. JORDAN. *Cours d'Analyse, 2. Edição, Volume II, p. 46 a 94.*

nidas de $p'(x)$ que se anula para $x = 0$.

Consideremos um conjunto E fechado, não denso em parte alguma de $(0, 1)$ e de medida não nula, por exemplo, aquele que obtemos retirando de $(0, 1)$ uma sequência infinita de intervalos cujos meios são pontos de abscissas racionais e que cuja soma de comprimentos é inferior a 1.

Definamos uma função $f(x)$ contínua, pela condição de ser igual a $(b-a)^2\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ em todo intervalo (a, b) contíguo ao conjunto E, $f(x)$ é, então, nula em todos os pontos de E. Essa função é derivável, sua derivada é nula para todos os pontos de E, igual a $(b-a)\varphi'\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ para todos os pontos de um intervalo contíguo a E.

Essa derivada $f'(x)$ não admite integral indefinida. De fato, se ela admitisse, suas integrais indefinidas seriam $f(x) + c^{te}$. Mas, seja $\psi(x)$ a função que representa a medida do conjunto dos pontos de E que [42] estão no intervalo $(0, x)$; $\psi(x)$ é uma função contínua, constante em todo intervalo contíguo a E, donde $f(x) + \psi(x)$ satisfaz a igualdade

$$[f(x) + \psi(x)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx$$

para todos os sistemas α, β para os quais o segundo membro tem sentido.

As definições que demos não são suficientes, portanto, para que seja possível falar de integrais indefinidas de $f'(x)$.

O problema da procura de funções primitivas não está completamente resolvido[39].

35. Seja $f(x)$ uma função contínua; podemos dar a h uma sequência de valores tendendo a zero tais que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

tenha um limite. O conjunto de números assim definido, correspondendo aos valores positivos de h, admite um limite superior Λ_d e um limite inferior λ_d que são os extremos oscilatórios à direita da função $f(x)$ para o ponto x_0. Do mesmo modo, definimos Λ_g, λ_g. Esses quatro números são os números derivados; em certos problemas eles prestam os mesmos serviços da derivada[40].

O problema seguinte: *encontrar uma função conhecendo um de seus números derivados*[41], é, portanto, uma generalização do problema de acabamos de tratar.

Alguns casos particulares desse problema resolvem-se com o auxílio da integração no sentido de Riemann (Dini, loc. cit.). A integração, tal como [43] a definimos, permitiria

[39] Podemos dizer que sabemos resolver esse problema quando o intervalo de variação de x pode ser considerado como soma de um conjunto não denso E e de um conjunto de intervalos (α, β) contíguos a E, o conjunto E sendo redutível e a função proposta tendo uma integral indefinida $F(x)$ em cada intervalo (α, β). Mesmo se E não for redutível, o problema pode ser resolvido desde que a função seja integrável em E e que a série das quantidades $[F(\beta) - F(\alpha)]$ seja absolutamente convergente. É assim no exemplo precedente, mas esse não é o caso geral.

[40] Ver Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

[41] Esse problema tem um sentido; isso quer dizer que todas as funções que têm um mesmo número derivado dado não diferem senão por uma constante (Volterra. *Sui principii del Calcolo Intégrale.* Giornale de Battaglini, XIX).

resolvê-la nos casos mais amplos. Limitar-nos emos às considerações que se seguem.

Em primeiro lugar, se um dos quatro números derivados é sempre finito, Λ_d por exemplo, é uma função somável. De fato, procuremos o conjunto E dos valores de x para os quais Λ_d é superior a um número dado M. Demos a h todos os valores positivos racionais inferiores a ε_i; a cada um deles corresponde uma função $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x,h)$. A $\varphi(x,h)$ corresponde um conjunto mensurável $E(h)$ formado por todos os pontos para os quais temos:

$$\varphi(x,h) > M.$$

Seja $E(\varepsilon_1)$ o conjunto soma de todos os $E(h)$; ele é mensurável.

A $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ correspondem $E(\varepsilon_2), E(\varepsilon_3), \ldots$

Se os ε tendem a zero, o conjunto comum a todos os $E(\varepsilon_i)$, que é mensurável, contém o conjunto procurado mais os pontos pelos quais tem-se $\Lambda_d = M$. Isso é suficiente para que concluamos que a função Λ_d é somável.

Suponhamos agora que um desses quatro números derivados seja limitado, nesse caso, todos os outros também serão[42]. Λ_d terá, então, uma integral.

Consideremos uma sequência $h_1, h_2, \ldots$ de números positivos decrescendo até zero e as funções

$$\varphi(x,h_i) = \frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}.$$

A cada valor de x corresponde um valor n tal que, para $i \geqslant n$, temos:

$$\varphi(x,h_i) < \Lambda_d(x) + \varepsilon.$$

Seja E_k o conjunto dos valores de x para os quais temos $n \leqslant k$. O complementar $C(E_k)$ tomado em relação ao intervalo considerado tem uma medida que tende a zero com $1/k$, e para os pontos desse conjunto temos:

$$|\varphi(x,h_k) - \Lambda_d(x)| \leqslant M$$

[44] se M é o limite superior do valor absoluto de Λ_d. Donde[43]

$$\int_a^b \varphi(x,h_k)dx < \int_a^b \Lambda_d(x)dx + \varepsilon m(E_k) + Mm[C(E_k)].$$

Avaliemos o primeiro membro

$$\int_a^b \varphi(x,h_k)dx = \int_a^b \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k} = f(b+\theta h_k) - f(a+\theta' h_k).$$

[42] Porque, se Λ_d está sempre compreendido entre A e B, a razão $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ estará sempre compreendida entre A e B (voir Dino, *Fondamenti*, etc.).

[43] Para que $\int_a^b \varphi(x,h_k)dx$ tenha sentido, é necessário que $f(x)$ esteja definida em $a, b+h_k$. É suficiente definir $f(x)$ como constante e igual a $f(b)$ para x maior que b.

Quando k aumenta indefinidamente, essa quantidade tende a $f(b) - f(a)$, temos, portanto,

$$f(b) - f(a) < \int_a^b \Lambda_d(x)dx.$$

Do mesmo modo, encontraríamos

$$\int_a^b \lambda_d(x)dx < f(b) - f(a).$$

Donde *se dois números derivados à direita (ou à esquerda) de uma função* $f(x)$ *são limitados e têm mesma integral, suas integrais indefinidas são iguais a* $f(x)$ *a menos de uma constante aditiva.*

3 Integrais definidas de funções de várias variáveis

36. Não há nenhuma dificuldade em estender os resultados obtidos às funções de várias variáveis.

Uma função f será dita somável se o conjunto dos pontos para os quais temos:

$$a < f < b$$

é mensurável, quaisquer que sejam os números a e b.

[45] As funções contínuas em relação a todas as variáveis são somáveis. A soma, o produto de duas funções somáveis, o de limite de uma sequência de funções somáveis, são funções somáveis. Portanto, as funções descontínuas que o Sr. BAIRE chama de funções de primeira classe, segunda classe etc., são somáveis.

As funções de n variáveis, contínuas em relação a cada uma delas, são ao menos de $n-1$-ésima classe [44], portanto elas são somáveis.

Seja $f(x)$ uma função somável. Consideremos os números

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

tais que $m_i - m_{i-1}$ tenha um máximo η.

$f = m_i$ para os pontos de um conjunto mensurável e_i; $m_i < f < m_{i+1}$ para os pontos de um conjunto mensurável e'_i. As duas somas

$$\sigma = \Sigma m_i m(e_i) + \Sigma m_i m(e'_i), \qquad \Sigma = \Sigma m_i m(e_i) + \Sigma m_{i+1} m(e'_i)$$

ao mesmo tempo têm e não têm um significado.

Se elas têm um significado, da mesma forma é quaisquer que sejam os m_i escolhidos e essa duas somas tendem a um mesmo limite quando η tende a zero.

[44] Ver LEBESGUE. *Sur l'approximation des fonctions.* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1898).

Esse limite é a integral de f. σ e Σ têm significado quando f for limitada, de sorte que *toda função somável limitada tem uma integral.*

As definições precedentes se aplicam, se a função estiver definida num domínio ou para os pontos de um conjunto, o qual deverá necessariamente ser mensurável para que a função seja somável.

Seja f uma função limitada definida em um conjunto E mensurável. Se f não é somável, existe uma infinidade de funções somáveis limitadas φ tais que tenhamos sempre

$$f(x) > \varphi(x).$$

Seja $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots$ uma séries dessas funções cujas integrais tendem ao limite superior das integrais das funções φ. Seja $\psi(x)$ uma função igual, para cada valor de x_0, ao limite superior dos números $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0) \ldots$. Demonstraremos facilmente que $\psi(x)$ é somável. Sua integral não é inferior às integrais das funções $\varphi_i(x)$ e como $\psi(x)$ [46] é uma função $\varphi(x)$, a integral de $\psi(x)$ é exatamente igual ao limite superior das integrais das funções $\varphi(x)$.

Portanto, sendo dada uma função limitada f, existe uma função somável ψ não superior a f e cuja integral é o limite superior das integrais das funções somáveis não superiores a f. *É a integral inferior de* f.

Definiremos da mesma forma a integral superior[45].

Vamos considerar se podemos reduzir o cálculo de uma integral múltipla a cálculos de integrais simples. Limitando-nos ao caso de duas variáveis, vamos tentar generalizar a fórmula clássica

$$\int\int f dx dy = \int \left(\int f dy \right) dx.$$

O caso mais simples a considerar corresponde a $f = 1$. Vamos, então, avaliar a medida superficial de um conjunto em função das medidas lineares de suas seções. As considerações desenvolvidas nos parágrafos 18 e 19 resolvem um caso particular desse problema.

Seja E um conjunto plano mensurável. Designaremos por $E(x_0)$ o conjunto de pontos de E cuja abscissa é x_0, isto é, a seção de E por $x = x_0$. $E(x_0)$ não é necessariamente mensurável, existem conjuntos de pontos sobre uma linha não mensuráveis linearmente, pois todo todo conjunto limitado de pontos sobre uma linha é mensurável superficialmente. Mas $E(x_0)$ será mensurável (B) linearmente se E for mensurável (B) superficialmente. Ora, sabemos que E contém um conjunto mensurável (B) $E_1(x_0)$ de medida $m(E)$, a medida de $E_1(x_0)$ será, portanto, no máximo igual à medida inferior de $E(x_0)$; isto é, no máximo igual à integral inferior, tomada sobre $x = x_0$, da função φ igual a 1 para os pontos de E, nula para os outros pontos. Portanto,

$$m_l[E_1(x_0)] \leqslant \int_{inf} \varphi(x_0, y) dy.$$

[45] Todas essas definições são interpretadas geometricamente como no caso de uma variável. Se há n variáveis, é necessário considerar um espaço de $n + 1$ dimensões.

Referindo-se ao parágrafo 7, no qual é demonstrada a existência de E_1, vemos que E_1 é definido como formado dos pontos comuns a todos os conjuntos da sequência $A_1, A_2, \ldots$; o conjunto A_i sendo soma de uma infinidade enumerável de retângulos que não se interpenetram uns sobre os outros e cujos lados são paralelos a $0x$ e $0y$. A_i contém $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots$

[47] Ora, $m_l[A_i(x)]$ é a soma das medidas das seções pela reta de abscissa x dos retângulos C_{ij} que compõem A_i. Temos, portanto:

$$m_l[A_i(x)] = \sum_j m_l[C_{ij}(x)].$$

Nessa série, os restos são limitados superiormente em valor absoluto, pois E_1 sendo limitado, todos os A_i estão situados em um mesmo domínio limitado, e, consequentemente, o conjunto (em relação a i e a x) dos números $m_l[A_i(x)]$ é limitado. Essa série é, portanto, integrável termo a termo, §25.

A integral de $m_l[C_{ij}(x)]$ é a área de C_{ij}, portanto,

$$m_s(A_i) = \int m_l[A_i(x)]dx.$$

Ora, os limites, para i infinito, dos números $m_l[A_i(x)]$, $m_s(A_i)$ são $m_l[E_1(x)]$ e $m_s(E_1)$ e como o conjunto desses números é limitado, temos:

$$\int m_l[E_1(x)]dx = \lim_{i=\infty} \int m_l[A_i(x)]dx = \lim_{i=\infty} m_s(A_i) = m_s(E_i)^{[46]}.$$

Podemos, portanto, concluir que:

$$m_s(E) \leqslant \int_{inf.} m_{l,int.}[E(x)]dx,$$

e também que

$$m_s(E) \leqslant \int_{inf.} \left(\int_{inf.} \varphi(x,y)dy \right) dx.$$

Da mesma maneira, demonstraremos que:

$$m_s(E) \geqslant \int_{sup.} \left(\int_{sup.} \varphi(x,y)dy \right) dx.$$

Disso concluímos que temos:

$$m_s(E) = \int_{inf.} \left(\int_{inf.} \varphi(x,y)dy \right) dx = \int_{sup.} \left(\int_{sup.} \varphi(x,y)dy \right) dx.^{[47]}.$$

[46] Esse raciocínio pode ser interpretado da seguinte maneira: $m_s[E_1(x)]$ é uma função de, no máximo, segunda classe.

[47] Até aqui, as integrais são estendidas a certos segmentos dos eixos $0x$ e $0y$.

[48] Para a função $f = 1$, definida somente no conjunto somável E cujas seções não são talvez todas mensuráveis

$$\iint^{E} f dx dy = \int_{inf.int}^{e} \left(\int_{inf.int.}^{E(x)} f dy \right) dx = \int_{sup.ext}^{e} \left(\int_{sup.ext.}^{E(x)} f dy \right) dx$$

a integral com relação a x sendo estendida ao conjunto e projeção de E sobre $0x$, a segunda ao conjunto $E(x)$. Mas esses dois conjuntos não são talvez mensuráveis linearmente. O sinal $\int_{inf.int}^{A}$ indica o limite superior das integrais inferiores de f estendidas aos conjuntos mensuráveis contidos em A. A igualdade precedente pode, ainda, ser escrita:

$$m_s(E) = \int_{inf.int}^{e} m_{l,int.}[E(x)]dx = \int_{sup.ext}^{e} m_{l,ext.}[E(x)]dx.$$

38. A fórmula encontrada para exprimir $\iint_E f dx dy$ é geral, ela se aplica a todas as funções somáveis limitadas.

Designemos por $\varphi(x, y)$ uma função igual a f para os pontos de E, nula para os outros pontos. Se E é todo interior ao retângulo OACB cujos lados OA e OB são portados por ox e oy, a fórmula a demonstrar é equivalente à seguinte:

$$\iint_{OACB} \varphi(x,y)dxdy = \int_{O,inf.}^{A} \left(\int_{O,inf.}^{B} \varphi(x,y)dy \right) dx = \int_{O,sup.}^{A} \left(\int_{O,sup.}^{B} \varphi(x,y)dy \right) dx.$$

É essa fórmula que vamos demonstrar.

Sejam $m_0, m_1, \dots m_n$ as divisões do intervalo de variação de $\varphi(x, y)$. Designemos por $\varphi_p(x, y)$ a função igual a φ para os pontos de e_p (notações do §19), nula para os outros pontos; e por $\varphi'_p(x, y)$ a função igual a φ para os pontos de e'_p, nula para os outros pontos.

Temos:

$$\iint \varphi(x,y)dxdy = \sum_p \iint \varphi_p(x,y)dxdy + \sum_p \iint \varphi'_p(x,y)dxdy$$

[49] $\iint \varphi_p(x, y)dxdy$ é igual a $m_p \cdot m(e_p)$ e, de acordo com o parágrafo precedente, temos:

$$\iint \varphi_p(x,y)dxdy = \int_{inf.} \left(\int_{inf.} \varphi_p(x,y)dy \right) dx,$$

$\iint \varphi'_p(x, y)dxdy$ está compreendida entre $m_p m(e'_p)$ e $m_{p+1}m(e'_p)$; aliás, se substituirmos φ'_p por uma função ψ, igual a m_p ou m_{p+1} em todos os pontos em que φ_p é diferente de zero, nula quando φ'_p é nula, alteramos a integral em menos de $(m_{p+1} - m_p)m(e'_p)$. Além disso, as duas expressões

$$\int_{inf.}\left(\int_{inf.}\psi dy\right)dx \qquad \int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi' dy\right)dx$$

também diferem em menos de $(m_{p+1}-m_p)m(e'_p)$. Portanto, a menos de $2(m_{p+1}-m_p)m(e'_p)$, temos:

$$\int\int \varphi'_p(x,y)dxdy = \int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi'_p(x,y)dy\right)dx.$$

Seja η o máximo de $m_{p+1}-m_p$; a menos de $2\eta m(OACB)$, teremos:

$$\int\int \varphi(x,y)dxdy = \sum_p \int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi(x,y)dy\right)dx + \sum_p \int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi'_p(x,y)dy\right)dx.$$

Ora, temos:

$$\int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi(x,y)dy\right)dx \leqslant \sum_p \left\{\int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi_p(x,y)dy\right)dx + \int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi'_p(x,y)dy\right)dx\right\}.$$

Temos, portanto, qualquer que seja η:

$$\int\int \varphi(x,y)dydx \leqslant \int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi(x,y)dy\right)dx + 2\eta\cdot m(OABC).$$

[50] Dessa desigualdade e da desigualdade análoga relativa às integrais superiores, resulta a fórmula enunciada.

39. Se a função dada é tal que todos os conjuntos e'_p sejam mensuráveis (B) – em cujo caso poderemos dizer que a função é somável (B) – a fórmula simplifica-se e torna-se:

$$\int\int_{OACB}\varphi(x,y)dxdy = \int_O^A\left(\int_O^B \varphi(x,y)dy\right)dx.$$

É a fórmula clássica. Sabemos que essa fórmula deve ser substituída por uma fórmula mais complicada, análoga àquela que obtivemos, quando nos ocupamos da integração, no sentido de Riemann, aplicado em toda sua generalidade[48].

Entre as funções somáveis (B), podemos citar as funções contínuas, os limites de funções contínuas ou funções de primeira classe, os limites de funções de primeira classe ou funções de segunda classe, e, de maneira geral, todas as funções de classe n, n sendo finito.

Em particular, a fórmula clássica simples é aplicável às funções de n variáveis contínuas em relação a cada uma delas.

Essa fórmula é também aplicável às funções f''_{xy}, f''_{yx}[49] se elas existirem e forem limitadas.

[48] Ver Jordan (loc. cit.) §§ 56, 57, 58.
[49] Pois elas são, no máximo, de segunda classe.

Portanto temos:

$$f(x,y) - f(0,y) - f(x,0) + f(0,0) = \int_0^x \left(\int_0^y f''_{xy} dy \right) dx = \int \int f''_{xy} dx dy.$$

Essa fórmula resolve o problema que, no caso de suas variáveis, é análogo ao relativo à busca de funções primitivas.

40. Podemos estender quaisquer dos resultados precedentes às funções não limitadas.

Uma função não somável não limitada pode ter uma integral inferior e uma integral superior. Sem que seja necessário retomar os raciocínios precedentes, pode-ser ver que temos:

$$\int \int \varphi(x,y) dx dy = \int_{inf.} \left(\int_{inf.} \varphi(x,y) dy \right) dx = \int_{sup.} \left(\int_{sup.} \varphi(x,y) dy \right) dx$$

[51] todas as vezes que as integrais envolvidas nessa fórmula têm um sentido. É do mesmo modo para a fórmula clássica:

$$\int \int \varphi(x,y) dx dy = \int \left(\int \varphi(x,y) dy \right) dx.$$

Os raciocínios empregados neste capítulo conduziram a uma generalização da noção de integral definida.

Para que uma tal generalização possa servir, é necessário que ela satisfaça a certas condições que percebemos facilmente e que podemos impor *a priori*.

Eis algumas dessas condições. É necessário que tenhamos:

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c, \qquad \int f + \varphi = \int f + \int \varphi.$$

É necessário que a definição adotada contenha como caso particular a de RIEMANN.

É necessário que não haja diferenças notáveis ente o caso de uma variável e o caso de várias variáveis.

Enfim, se desejamos que a integração permita resolver o problema fundamental do cálculo integral: encontrar uma função conhecendo sua derivada, é necessário que a integral definida de uma função derivada, considerada como função do seu limite superior, seja uma função primitiva de f.

A definição que adotei, ao menos para o caso em que a função a integrar é limitada, satisfaz plenamente todas essas condições. Mas essas condições não são suficientes para definir a integral de uma função limitada (salvo no caso em que a função é uma soma algébrica de funções integráveis no sentido de RIEMANN e de funções derivadas), de sorte que os métodos do primeiro capítulo[50]não podem ser empregados.

[50] Esses métodos são análogos àqueles do Sr.DRACH (Essai sur une théorie générale de l'intégration – Introduction à l'Etude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure). Ver sobre esse assunto a nota 1, página 48 da obra do Sr. BOREL. Ver também HADAMARD, *Géometrie Elémentaire*, primeira

[52] Não podendo demonstrar que a definição proposta era a única que preenchia as condições impostas, tentei mostrar que ela era natural e que, do ponto de vista geométrico, ela parecia quase necessária.

Tentei, além disso, mostrar que ela era útil: com efeito, ela permite resolver o problema fundamental do cálculo diferencial em todo caso em que a função derivada é limitada, e, como consequência, ela permite integrar equações diferenciais que podem ser reduzidas a quadraturas. Por exemplo, $f(x)$ sendo uma função limitada qualquer, saberemos reconhecer se a equação

$$y' + ay = f(x)$$

admite soluções e, se admitir, encontrá-las[51].

Nos capítulos seguintes, nos quais fala-se das noções de comprimento e de área, encontraremos aplicações geométricas da integração.

parte, nota D.

[51] Essa observação conduz a problemas interessantes. Por exemplo, $f(x)$ e $\varphi(x)$ sendo limitadas, todas as soluções da equação

$$y' + f(x)y = \varphi(x)$$

estão compreendidas na fórmula clássica $y = \int \varphi(x) e^{\int f(x) fx} dx \cdot e^{-\int f(x) dx}$?

CAPÍTULO 3

Comprimento das curvas

41. Nós nos propomos neste capítulo a definir o comprimento de uma curva plana ou espacial[52]

Essas palavras – comprimento de uma curva – são empregadas constantemente na linguagem comum. Sabemos, por exemplo, medir o comprimento de uma estrada, de um corrimão. Suponhamos que se efetue essa medida com o auxílio de uma regra rígida; o procedimento empregado mostra que chamamos ordinariamente de comprimento de uma curva, ou mais exatamente o valor aproximado desse comprimento, o [53] comprimento, ou seja, a soma dos comprimentos dos lados das linhas poligonais que se confundem com a curva para o grau de precisão que se pode atingir.

Quando raciocinamos sobre o comprimento de uma curva como um número determinado, assume-se que, por meio de medidas convenientes, obtêm-se valores aproximados que têm um limite que chamamos de comprimento da curva considerada.

O comprimento de uma curva C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

é, assim, definido como o limite dos comprimentos das linhas poligonais que tendem uniformemente para a curva, isso quer dizer que as coordenadas da p-ésima dessas linhas C_p se exprimem por

$$x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

f_p, φ_p, ψ_p tendendo uniformemente para f, φ, ψ.

Diremos que C é o limite das C_p.

Se, qualquer que fosse a sequência de linhas poligonais tendendo para uma curva C, a sequência correspondente dos comprimentos tivesse um limite, que seria, por consequência, independente das linhas poligonais escolhidas, o exposto seria suficiente para definir o comprimento da curva C. Mas não é assim, e podemos escolher as linhas poligonais de maneira que seus comprimentos aumentem indefinidamente.

Dar uma definição do comprimento de uma curva, é, portanto, dizer qual sequência de linhas poligonais escolhemos.

[52] Uma curva espacial se define como uma curva plana usando três equações ao invés de duas.

Segundo o Sr. PEANO[53], os postulados que Arquimedes admitia equivalem à definição seguinte:

O comprimento de um arco de curva plana convexa é o valor comum do limite superior dos comprimentos das linhas poligonais inscritas e do limite inferior das circunscritas.

Arquimedes demonstra ainda a identidade dos limites nos casos que ele estuda.

A definição ordinariamente adotada é a seguinte:

[54] O comprimento de um arco de curva é o limite para o qual tende o comprimento de uma linha poligonal inscrita na curva quando o número de lados dessa linha aumenta indefinidamente de maneira que o comprimento máximo dos lados dessa linha tenda para zero[54].

Sr. PEANO adota a primeira parte da definição de Arquimedes: o comprimento de uma curva é o limite superior das linhas poligonais inscritas.

A identidade dessas definições demonstra-se facilmente, ela resulta, aliás, dos resultados que nós vamos obter.

42. Se queremos que haja alguma analogia entre o sentido vulgar e o sentido matemático da palavra comprimento, é necessário tentar definir o comprimento de uma curva C, se existir uma sequência de linhas poligonais tendo C por limite e tal que a sequência correspondente de comprimentos não aumenta indefinidamente. Chamaremos essas curvas de *curvas retificáveis*.

Para definir o comprimento dessas curvas, recordemos, antes, de algumas definições.

Seja um conjunto de sequências de números. Os valores que formam uma dessas sequências formam um conjunto E, o conjunto derivado de E é o conjunto de todos os limites da sequência considerada. O conjunto dos conjuntos E' assim definidos é o conjunto dos limites das sequências do conjunto considerado; o limite superior desse conjunto é o que chamamos desde Cauchy de o maior dos limites. Definimos do mesmo modo o menor dos limites.

Esses dois números, que chamamos algumas vezes também de limites superior e inferior de indeterminação, podem ser infinitos.

Seja C uma curva, consideremos o conjunto das sequências formadas dos comprimentos das linhas poligonais que tendem uniformemente para C.

O maior dos limites do conjunto é infinito. O mesmo é verdade para o menor, se C não é retificável. Pelo contrário, se C é retificável, o menor dos limites é finito.

Nós chamaremos comprimento de uma curva C *o menor dos limites para os quais tendem os comprimentos das linhas poligonais que tendem uniformemente para* C.

Uma curva retificável tem comprimento finito.

[55] Uma curva não retificável não tem comprimento, ou, se quisermos, tem comprimento infinito.

43. Seja C uma cuva de extremidades A e B. Toda linha poligonal cujas extremidades

[53] *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* Rendiconti 1900, 1. semestre.

[54] As consequências dessa definição foram particularmente estudadas por LUDWIG SCHEEFFER (*Acta Mathematica*, tome V) e pelo Sr. JORDAN na segunda edição do seu Cours d'Analyse. Ver também STUDY. *Mathematische Annalen*, XLV.

tendem para A e B tem um comprimento que não pode tender a um número inferior ao comprimento de AB. Isso quer dizer que o comprimento de um arco de curva não é inferior ao comprimento da corda.

Marquemos sobre o arco AB, entre A e B, um ponto D. O arco AB é a soma dos arcos AD e DB, e o comprimento do arco AB é, evidentemente, a soma dos comprimentos dos arcos AD e DB. Portanto, o comprimento do arco AB não é inferior a $AD + DB$.

Raciocinando dessa forma, vemos que o comprimento do arco é maior ou igual a de uma linha poligonal inscrita qualquer[55]

Consideremos uma sequência de linhas poligonais inscritas, tais que o máximo do comprimento dos lados tenda para zero. Essas linhas tendem uniformemente para a curva, o menor limite da sequência correspondente dos comprimentos não é inferior ao comprimento da curva C. Mas, de acordo com o que veremos, todos os números dessa sequência são, no máximo, iguais ao comprimento de CX; o maior limite é, no máximo, igual a esse comprimento.

Portanto, a sequência dos comprimentos considerados tem por limite o comprimento de C e há uma identidade entre a definição que adotamos e a definição clássica, a de SCHEEFFER e do Sr. JORDAN.

Nós demonstramos ao mesmo tempo a identidade dessa definição e a do Sr. PEANO.

Ao adotar a definição que foi dada, obtemos uma analogia completa entre as definições de comprimento e de áreas. A identidade dessa definição e da definição clássica permite-nos encontrar o comprimento por uma infinidade enumerável de operações.

Dizemos que uma curva C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{1}$$

é o limite de uma família de curvas C_p

$$C_p \qquad x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

se f_p, φ_p, ψ_p tendem uniformemente para f, φ, ψ.

[56] Do que precede resulta que o comprimento de C é, no máximo, igual ao menor limite dos comprimentos dos C_p, e que existem famílias de curvas C_p tais que o comprimento de C seja o limite dos comprimentos dos C_p. É isso o que exprimimos dizendo que o comprimento de uma curva C é o menor limite dos comprimentos das curvas das quais C é o limite[56]. Podemos, portanto, colocar assim o problema da medida dos comprimentos das curvas.

Associar a cada curva um número positivo finito ou infinito que chamaremos seu comprimento, satisfazendo as condições seguintes:

1. *Existem curvas que têm comprimento finito. Duas curvas iguais[57] têm mesmo compri-*

[55] Supomos estar bem compreendido que, dentro da ordem na qual eles se apresentam sobre a linha poligonal, os vértices dessa linha correspondem a valores crescentes de t.

[56] Se considerarmos o comprimento como função da curva, poderemos dizer que a função é sempre igual a seu mínimo ou, ainda, semicontínua inferiormente (BAIRE, loc. cit.).

[57] Duas curvas são iguais se passamos as fórmulas que definem a primeira àquelas que definem a segunda

mento.

2. *Uma curva soma de duas outras* [58] *tem por comprimento a soma dos comprimentos dessas duas outras.*
3. *O comprimento de uma curva C é o menor limite dos comprimentos das linhas poligonais das quais C é o limite.*

45. Seja C uma curva retificável, o comprimento $(0, t)$ do arco $s(t)$ é uma função crescente de t. Assim, as quantidades $s(\theta - 0)$, $s(\theta + 0)$ existem. Consideremos a curva $C(\varepsilon)$ formada pelo arco $(0, \theta - \varepsilon)$, pela linha $\theta - \varepsilon$, $\theta + \varepsilon$ e pelo arco $(\theta + \varepsilon, \theta + h)$. Quando ε tende a zero, $C(\varepsilon)$ tende a C. Ora, o comprimento de $C(\varepsilon)$ é

$$s(\theta - \varepsilon) + [s(\theta + h) - s(\theta + \varepsilon)] + \text{comp } [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon].$$

Fazendo ε tender a zero, deduzimos:

$$s(\theta + h) \leqslant s(\theta - 0) + [s(\theta + h) - s(\theta + 0)]$$

Donde resulta $s(\theta + 0) = s(\theta - 0)$ e $s(t)$ é uma função contínua de t.

Existem curvas cujos arcos não são retificáveis, nenhum deles. É assim [57] para certos valores de a e de b da curva

$$x = \sum_0^\infty b^n \cos a^n = t, \qquad y = 0 \qquad z = 0^{[59]}.$$

Seja Γ uma curva soma de uma curva retificável C e de uma curva C_1 cujos arcos não são retificáveis. Se C corresponde ao intervalo $(0, \theta)$, $s(t)$ é uma função contínua crescente entre 0 e θ, além disso, para t superior a θ essa função torna-se infinita.

46. Chamaremos a projeção da curva (1) sobre o eixo dos x, a curva

$$x = f(t), \qquad y = 0, \qquad z = 0;$$

e sobre o plano dos xy, a curva

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = 0.$$

A um polígono inscrito na curva 1 corresponde um polígono inscrito na curva de projeção.

Cada lado de um polígono de projeção é, no máximo, igual ao lado projetado, donde *as*

pelas fórmulas de mudança de coordenadas.

[58] Se as duas curvas componentes forem dadas por $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ e $x = f_1(t)$, $y = \varphi_1(t)$, $z = \psi_1(t)$, $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$, com $f(b) = f(a_1)$, $\varphi(b) = \varphi(a_1)$, $\psi(b) = \psi(a_1)$; a curva soma será definida por $x = F(t)$, $y = \Phi(t)$, $z = \Psi(t)$ com $F = f$, $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$, se $a \leqslant t \leqslant b$ e $F(t+b-a_1) = f_1(t)$, $\Phi(t + b - a_1) = \varphi_1(t)$, $\Psi(t + b - a_1) = \psi_1(t)$ se $b \leqslant t \leqslant b + b_1 - a_1$.

[59] Ver JORDAN, (loc. cit.), página 318.

projeções de uma curva retificável são retificáveis.

Aliás, um lado projetado tem um comprimento no máximo igual à soma dos comprimentos dos três lados de projeção sobre os três eixos coordenados, donde *se uma curva tem projeções retificáveis sobre os três eixos coordenados, ela é retificável.*

47. Procuremos a forma mais geral da função $f(t)$ para a qual a curva $x = f(t)$ portada pelo eixo dos x seja retificável.

Consideremos um polígono inscrito nessa curva, suas somas correspondem aos valores crescentes $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ de t. O comprimento desse polígono é $\Sigma|f(t_i) - f(t_{i-1})|$, essa quantidade se chama a variação de f para o sistema de valores $t_0, t_1, \ldots t_n$.

Essa soma decompõe-se em duas outras Σ_1, Σ_2. A primeira correspondendo aos termos $f(t_i) - f(t_{i-1})$ que são positivos, a segunda aos termos negativos. Chamamo-los de *variação positiva* e de *variação negativa* de f para o sistema $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Suponhamos que a e b estejam fixados, o número dos t_i aumenta indefinidamente de maneira que o máximo de $t_i - t_{i-1}$ tende para zero. Desde que esse [58] máximo é inferior a um certo número η, $\Sigma_1 + \Sigma_2$ diferirá do comprimento do arco de a até b em menos de ε; se esse comprimento for finito; e será maior que M, se o comprimento do arco de a até b for infinito; caso contrário, seria possível encontrar uma sequência de polígonos inscritos tendendo para a curva com seus comprimentos não tendendo para o dela.[60]. Portanto, $\Sigma_1 + \Sigma_2$ tem por limite o comprimento do arco (a, b); essa quantidade $s = v$ chama-se variação total de f entre a e b. Se essa variação é finita, a função f é dita de variação limitada entre a e b. Se a variação é infinita, a função é de variação não limitada.

$\Sigma_1 - \Sigma_2$ é sempre igual a $f(b) - f(a)$, portanto, tem por limite $f(b) - f(a)$.

Disso resulta que Σ_1 e Σ_2 têm limites perfeitamente determinados p e n, que chamamos de variação positiva e variação negativa de f entre a e b; e tem-se:

$$\begin{aligned} p + n &= v \\ p - n &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Vimos que se a é fixo, v é uma função contínua de b para funções de variação limitada. Dessas fórmulas resulta que p e n, que são funções crescentes, ou, ao menos, jamais decrescentes, são funções contínuas. A fórmula

$$f(b) = f(a) + p - n$$

mostra que toda função contínua de variação limitada é a diferença de duas funções contínuas não decrescentes.

Para uma função contínua crescente, n é nulo, donde uma função crescente é de variação

[60] Em outros termos, se polígonos inscritos T tendem para C, o comprimento de T tende uniformemente para o de C.

limitada. Além disso, se

$$f = \varphi - \psi,$$

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|$$

donde a diferença de duas funções de variação limitada é uma função de variação limitada.

Há, portanto, identidade entre as funções de variação limitada e as diferenças de funções contínuas não decrescentes[61].

[59] Se

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

são as equações de uma curva retificável, f, φ, ψ *são diferenças de duas funções contínuas não decrescentes e vice-versa.*

48. Eis exemplos de funções de variação limitada.

Seja em um intervalo $(0, 1)$ um conjunto enumerável de pares de pontos a_i, b_i $(a_i < b_i)$ tais que entre a_i e b_i não se encontra nenhum ponto a ou b de índice inferior a i.

Designemos por $f_0(x)$ a função x, e por $f_p(x)$ a função contínua que admite $a_1, a_2, \dots, a_p$, $b_1, b_2, \dots, b_p$ por máximo ou mínimo, que entre esses dois pontos é da forma $\pm x + h$, e que é igual a $f_0(x)$ entre 0 e o primeiro dos pontos de índice no máximo igual a p.

Vemos imediatamente que o máximo de $|f_p(x) - f_{p-1}(x)|$ se obtém para $x = b_p$ e é igual a $2|f_{p-1}(a_p) - f_{p-1}(b_p)| = 2\varepsilon_p$ se ε_p designa o comprimento $a_p b_p$.

Portanto, se a série Σ_{ε_p} é convergente, $f_p(x)$ tende uniformemente para um limite $f(x)$; e como $f_p(x)$ tem entre 0 e x uma variação total igual a x, a de $f(x)$ é, no máximo, x.

Para os pontos de índice no máximo igual a p temos:

$$|f(x) - f_p(x)| \leqslant 2 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}.$$

A variação de $f(x)$ para o sistema $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$, é, portanto, superior a

$$x - 4p\Sigma\varepsilon_{p+h}$$

donde se $p\Sigma\varepsilon_{p+h}$ tende para zero com $1/p$, $f(x)$ tem x por variação total entre 0 e x.

Seja um intervalo (α, β), se as condições precedentes são satisfeitas, o conjunto dos a_p é denso em toda parte e podemos encontrar em (α, β) um intervalo (a_p, b_p). Suponhamos que entre a_p e b_p, $f_p(x)$ seja da forma $x + h$, temos:

$$\begin{aligned} f(b_p) - f(a_p) = f_p(b_p) - f_p(a_p) + [f(b_p) - f_p(b_p)] + \\ +[f_p(a_p) - f(a_p)] \geqslant \varepsilon_p - 4 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}; \end{aligned}$$

61 Podemos nesse enunciado suprimir a palavra contínuas, (sobre isso ver Jordan, loc. cit.).

portanto, se pelo menos a partir de um certo valor de i, tivermos:

$$\varepsilon_p > 4\Sigma\varepsilon_{p+h}$$

[60] $f(x)$ não será sempre decrescente de a_p a b_p e muito menos de α a β. Mas, do mesmo modo, provaríamos que ela não é crescente, donde *em todo intervalo,* $f(x)$ *admite máximo e mínimo.*

Para alcançar todas essas condições, tomemos para o conjunto dos meios de (a_i, b_i) o conjunto dos números racionais arranjados em uma ordem qualquer. Tomemos para ε_1 um número irracional qualquer tal que a_1 e b_1 estejam compreendidos entre 0 e 1. Tomemos para ε_i o menor dos números $\frac{\varepsilon_{i-1}}{1}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{3}, \ldots$ tais que a_i e b_i estejam compreendidos entre 0 e 1 e que entre a_i e b_i não se encontre nenhum dos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$.

Definiremos assim uma função cuja variação total entre 0 e x é x, e que tem, em todo intervalo, máximo e mínimo.

Desenhemos ao longo dos dois eixos retangulares a reta $z = x$. Sejam A_i, B_i os pontos dessa reta cujas abscissas são a_i, b_i.

Dobremos a folha de papel sobre $z = x$, primeiro de acordo com a paralela a $0x$, passando por A_1, depois, de acordo com a paralela a $0x$, passando por B_1; construímos a curva $z = f_1(x)$. Ao dobrar novamente o papel em torno das paralelas a $0x$ passando por A_2 e B_2, construímos $z = f_2(x)$ e assim por diante.

Portanto, com uma precisão que não é limitada senão pela possibilidade de fazer a dobragem, podemos construir as curvas $z = f(x)$ que acabamos de definir. Podemos ainda demonstrar que, escolhendo convenientemente os A_i, B_i, podemos construir qualquer curva $z = f(x)$ de variação total entre 0 e x igual a x.

49. Sabemos que, em casos simples em que as funções f, φ, ψ têm derivadas contínuas, podemos representar o comprimento por uma integral. Eis uma primeira generalização simples. Suponhamos que f', φ', ψ' existam, sejam limitadas e integráveis no sentido de RIEMANN.

Seja AB uma corda cujas extremidades correspondem aos valores t_i, t_{i+1} do parâmetro. Temos:

$$\text{comprimento } AB = \sqrt{\overline{f(t_{i+1}) - f(t_i)}^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}\,\text{[62]}.$$

Designemos por $m_i, M_i; m_2, M_2; m_3, M_3$ os limites inferiores e superiores de $|f'(t)|$, $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ entre t_i e t_{i+1}.

[61] O teorema do valor médio mostra que

$$(t_{i+1} - t_i)\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \leqslant \text{comp }.AB \leqslant \sqrt{M_i^2 + M_2^2 + M_3^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Seja $t_0, t_1, \ldots, t_n$ uma divisão do intervalo de variação t; corresponde a ele um polígono

[62] Supomos os eixos retangulares.

inscrito P, e temos:

$$\sum(t_{i+1}-t_i)\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\leqslant \text{comp }.P\leqslant \sum(t_{i+1}-t_i)\sqrt{M_i^2+M_2^2+M_3^2}.$$

Se entre os t_i escolhidos intercalarmos novos valores de t, a primeira soma aumenta e a terceira diminui, donde elas tendem para limites quando fazemos $t_{i+1}-t_i$ tender a zero; aliás, esses dois limites são iguais, pois a diferença entre o primeiro e o terceiro membro é, no máximo,

$$\sum(t_{i+1}-t_i)[(M_1-m_1)+(M_2-m_2)+(M_3-m_3)],$$

quantidade que tende para zero, pois $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ são integráveis porque f', φ', ψ' o são.

A expressão

$$\sum(t_{i+1}-t_i)\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},\ \left(t=\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$$

está compreendida entre a primeira e a terceira soma, seu limite é a integral

$$\int\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}dt,$$

que representa, portanto, o comprimento da curva.

50. Servem-nos, agora, os resultados obtidos no capítulo anterior.

Se f', φ', ψ' existem e se a curva é retificável, essas derivadas admitem integrais e, consequentemente, do mesmo modo $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$. Reciprocamente, se essa quantidade admite uma integral, da mesma forma f', φ', ψ', porque temos:

$$\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\geqslant|f'|,$$

e a curva é retificável.

Teremos, portanto, que nos ocupar da integral de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$ para as curvas retificáveis. Para demonstrar que essa integral representa o comprimento da curva, raciocinaremos como no capítulo precedente.

Dividamos os intervalos de variação (finitos ou não) de f', φ', ψ' com o auxílio de números m_i. Isso resulta em uma divisão em conjuntos de intervalos de variação t.

[62] Para aqueles que chamaremos e_{ijk} temos:

$$m_i<f'<m_{i+1}$$

$$m_j<\varphi'<m_{j+1}$$

$$m_k<\psi'<m_{k+1}$$

Para aqueles que chamaremos $e^i_{\alpha jk}$ a primeira dessas desigualdades é substituída por:

$$m_i = f'.$$

Do mesmo modo, teremos $e^j_{i\alpha k}$ $e^k_{ij\alpha}$; nessas expressões, α é um símbolo que indica qual das desigualdades que é substituída por uma igualdade e não um dos números inteiros.

Temos ainda os conjuntos $e^{ij\alpha}_k$, as duas primeiras desigualdades são substituídas por

$$m_i = f', \qquad m_j = \varphi'.$$

Finalmente, teremos conjuntos e^{ijk} para os quais f', φ', ψ' serão iguais a m_i, m_j, m_k.

Todos esses conjuntos são mensuráveis; escolhendo convenientemente os m_i, todos esses conjuntos, exceto os e_{ijk}, serão de medida nula.

A cada ponto t_0 de e_{ijk} podemos fazer corresponder o maior intervalo possível (α, β) de comprimento inferior a σ_{ijk}, tendo t_0 por meio e tal que

$$\alpha < a \leqslant t_0 \leqslant b < \beta$$

implica

$$m_i < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}$$
$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$
$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Seja $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ a soma desses intervalos. Façamos σ_{ijk} tender para zero, o conjunto E_{ijk} dos pontos comuns a todos os $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ terá a mesma medida que e_{ijk}.

A cada ponto t_0 de e_{ijk} podemos fazer corresponder o maior intervalo possível (α, β) de comprimento inferior a σ_{ijk}, tendo t_0 por meio [63] e tal que

$$\alpha < a \leqslant t_0 \leqslant b < \beta$$

implica

$$m_i - \varepsilon^i_{\alpha jk} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1} + \varepsilon^i_{\alpha jk}$$
$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$
$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Seja $E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})$ a soma desses intervalos.

Façamos tender simultaneamente $\sigma^i_{\alpha jk}$ e $\varepsilon^i_{\alpha jk}$ para zero, o conjunto $E^i_{\alpha jk}$ formado pelos pontos comuns a todos os $E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})$, terá a mesma medida de $e^i_{\alpha jk}$. Definiremos do mesmo modo $E^{ij\alpha}_k(\sigma^{ij\alpha}_k)$, $E^{ijk}(\sigma^{ijk})$.

Se $m_{i+1} - m_i$ é, qualquer que seja i, inferior a η, a integral de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ é igual a

$$\sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}[m(e_{ijk}) + m(e^i_{\alpha jk} \ldots + m(e^{ijk}))]$$

a menos de $2\eta l$, a integral estendida a um intervalo de comprimento l. Podemos escolher os números σ e ε tão pequenos que essa soma difira tão pouco, menos que D, quanto queiramos de

$$V = \sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}\left[m[E_{jk}(\sigma_{ijk})] + m[E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})] + \ldots + m[E^{ijk}(\sigma^{ijk})]\right]$$

Dos intervalos que formam os E, podemos deles escolher outros, de um número finito de maneiras, tal que todo ponto de um intervalo considerado seja interior a um dos intervalos conservados e que as extremidades de um intervalo considerado sejam extremidades dos intervalos conservados.

Suporemos esses intervalos conservados A escolhidos de modo que nenhum deles seja interior a outro. A contribuição em V dos intervalos não conservados é inferior a D.

Consideremos dois intervalos conservados (a, b), (a_1, b_1) que se interpenetram um sobre o outro e seja

$$a < a_1 < b < b_1;$$

suponhamos que eles correspondam a $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ e $E_{i'j'k'}(\sigma_{i'j'k'})$. Entre a e b podemos encontrar um ponto c tal que entre a e c se encontre ao menos um ponto de e_{ijk}, e entre c e b_1, ao menos um ponto de $e_{i'j'k'}$; com efeito, se fosse diferente [64], todos os pontos de e_{ijk} e de $e_{i'j'k'}$ contidos em ab estariam entre a e b (ou entre a_1 e b_1), e tomando em a_1b dois pontos α e β suficientemente próximos de a e b, teríamos ao mesmo tempo

$$m_i < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < m_{i+1}$$

$$m_i' < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < m_{i'+1}$$

e as desigualdades análogas. Ora, não temos ao mesmo tempo $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$.

Substituiremos os intervalos (a, b), (a_1, b_1) por (a, c), (c, b_1). Poderíamos ter feito o mesmo para os intervalos correspondentes a $E^i_{\alpha jk}$, $E^{i'j'\alpha}_k \ldots$.

Não há dificuldade senão quando os três índices são idênticos, isto é, por exemplo, se os dois intervalos correspondem a $E^i_{\alpha jk}$, $E^{\alpha jk}_i$, caso em que tomaremos como ponto c um ponto qualquer de (a_1, b).

Continuando assim, substituímos os intervalos A pelos intervalos A', que não se interpenetram uns nos outros. A contribuição em V dos intervalos $A - A'$ é inferior a D.

Consideremos agora a linha poligonal inscrita na curva e cujos vértices correspondem às extremidades de A'.

O lado dessa linha que corresponde ao intervalo (α, β) tem comprimento igual a $(\beta - \alpha)\sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}$ a menos de

$$3\eta(\beta - \alpha) \text{ ou } (2\eta + \varepsilon^i_{\alpha jk})(\beta - \alpha) \text{ ou } (\eta + 2\varepsilon^k_{ij\alpha}(\beta - \alpha) \cdots$$

segue que (α, β) corresponde a E_{ijk}, $E^i_{\alpha jk}$, $E^{ij\alpha}_k \ldots$

Se, então, os ε são escolhidos bastante pequenos, o comprimento da linha poligonal difere da contribuição de A' em V em menos de $3\eta l$.

Assim, escolhendo convenientemente os números η, σ, ε, o procedimento que acabamos de indicar conduz a considerar uma linha poligonal inscrita numa curva, cujos lados são tão pequenos quanto se queira, e cujo comprimento é tão próximo quanto se queira da integral

$$\int \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}dt.$$

Essa integral representa, portanto, o comprimento da curva.

51. Os raciocínios que acabamos de indicar são análogos aos dos parágrafos 30, 31. De uma maneira mais geral, a todo raciocínio da segunda parte do Capítulo II, podemos fazer corresponder raciocínios [65] relativos à retificação de curvas. Vamos indicar o que é análogo à proposição do parágrafo 35.

Nesse parágrafo foi demonstrado que se os números derivados de uma função $f(t)$ são limitados e se os h são números positivos tendendo para zero, temos:

$$\int \lambda_d(t)dt < \lim \int \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} dt < \int \Lambda_d(t)dt.$$

Um raciocínio análogo prova que, se designamos por D_d e d_d a maior e menor das duas quantidades $|\Lambda_d|$ e $|\lambda_d|$, temos:

$$\int d_d dt < \lim \int \left| \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} \right| dt < \int D_d dt$$

e também que os limites de

$$\int \left| \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} - \Lambda_d(t) \right| dt \text{ e } \int \left| \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} - \lambda_d(t) \right| dt$$

são inferiores a $\int (D_d - d_d)dt$.

Isso posto, seja $C(h_i)$ a curva

$$x = \frac{F(t + h_i) - F(t)}{h_i}, \qquad y = \frac{\Phi(t + h_i) - \Phi(t)}{h_i}, \qquad z = \frac{\Psi(t + h_i) - \Psi(t)}{h_i},$$

$F(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ sendo as funções primitivas de $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ cujos números derivados supomos limitados. $C(h_i)$ tem por comprimento

$$l_i = \frac{1}{h_i}\int \sqrt{[f(t+h_i)-f(t)]^2 + [\varphi(t+h_i)-\varphi(t)]^2 + [\psi(t+h_i)-\psi(t)]^2}dt.$$

Quando h_i tende para zero, os limites de l_i estão compreendidos entre

$$\int \sqrt{\overline{D_d(f)}^2 + \overline{D_d(\varphi)}^2 + \overline{D_d(\psi)}^2}dt \text{ e } \int \sqrt{\overline{d_d(f)}^2 + \overline{d_d(\varphi)}^2 + \overline{d_d(\psi)}^2}dt.$$

Suporemos que essas duas integrais tenham o mesmo valor, então l_i tenderá para um limite determinado que nós vamos demonstrar ser o comprimento de C.

Se essas duas integrais têm o mesmo valor, é porque a dupla de integrais $\int D_d dt$ e $\int d_d dt$ tem, também, os mesmos valores e suas integrais representam as variações totais de f, φ, ψ. De resto, como temos:

$$D_d - d_d \leqslant \Lambda_d - \lambda_d \leqslant 2D_d,$$

[66] as duplas de integrais $\int \Lambda_d dt$ e $\int \lambda_d dt$ têm, também, os mesmos valores e reciprocamente.

De sorte que temos:

$$\int D_d dt = \int d_d dt = \int |\Lambda_d| dt = \int |\lambda_d| dt.$$

Consideremos uma linha poligonal inscrita em $C(h_i)$ correspondendo a

$$t_0, t_1, \dots t_n$$

e a linha análoga inscrita em C. Sejam A_iB_i por um lado, AB, por outro, dois lados correspondentes $(t_\alpha, t_{\alpha+1})$. As projeções do primeiro sobre os três eixos são

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\varphi(t+h_i)-\varphi(t)}{h_i}dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\psi(t+h_i)-\psi(t)}{h_i}dt$$

as do segundo são

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(f)dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\varphi)dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\psi)dt.$$

A diferença entre os comprimentos desses dois lados é, portanto, no máximo igual à soma dos valores das três integrais análogas a

$$\left|\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \left[\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \Lambda_d(f)\right] dt\right|.$$

Donde a diferença dos comprimentos entre os dois polígonos considerados é, no máximo

$$S_{f,\varphi,\psi}\left|\iint\left[\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}-\Lambda_d(f)\right]dt\right|.$$

Ora, cada uma das três integrais dessa soma tende para zero com h_i, donde o comprimento de C_i tem por limite o comprimento de C.

Para enunciar esse resultado, daremos a definição seguinte: seja $f(t)$ uma função contínua, chamaremos derivada à direita $f'_d(t)$ uma função definida [67] para $t = t_0$ como igual a qualquer dos limites para os quais tende

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

quando h tende decrescentemente para zero.

A derivada à direita é, em geral, indeterminada. Acabamos de demonstrar que:

Se as derivadas à direita $f'_d(t)$, $\varphi'_d(t)$, $\psi'_d(t)$ *são limitadas e se a integral*

$$\int\overline{f'_d(t)+\varphi'_d(t)+\psi'_d(t)}dt$$

tem um valor bem determinado, independentemente das derivadas à direita escolhidas, essa integral é o comprimento da curva

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),\qquad z=\psi(t).$$

52. A proposição precedente é uma generalização do resultado clássico relativo à representação do comprimento de uma curva que tem tangentes variando de forma contínua.

Esse resultado clássico sendo conhecido, se tivéssemos proposto generalizar analiticamente a noção de comprimento, a proposição precedente poderia ter sido tomada por definição; vemos que o comprimento assim definido não depende da escolhas dos eixos de coordenadas e, em particular, permanece o mesmo se substituirmos as derivadas à direita pelas derivadas à esquerda.

Essa definição não se aplica senão às curvas retificáveis. Seria interessante procurar a quais curvas retificáveis ela se aplica ou se ela se refere a todas as curvas retificáveis. Se, para exprimir os pontos de uma curva retificável, tomarmos t como parâmetro do comprimento do arco, teremos as funções f, φ, ψ cujos números derivados são limitados; a proposição do parágrafo precedente se aplica todas as vezes em que o conjunto de pontos, para os quais uma das diferenças tais que $\Lambda_d(f)-\lambda_d(f)$ é diferente de zero, tem medida nula.

CAPÍTULO 4

Área de superfícies

53. As palavras *área de uma superfície* designam, na linguagem usual, a área, isto é, a soma das áreas das faces de superfícies poliédricas confundidas com a superfície considerada no grau de precisão que podemos alcançar.

Em geometria, consideramos frequentemente a área de uma superfície S como o limite das áreas de certas superfícies poliédricas que têm S por limite; definir a área é, então, dizer qual sequência de poliedros consideramos.

Por analogia com a definição de comprimento de uma curva, consideramos em primeiro lugar os poliedros inscritos. É assim que, de acordo com o Sr. PEANO[63], os postulados admitidos por Arquimedes equivalem à definição seguinte.

A área de uma superfície convexa é o valor comum entre o limite superior das áreas das superfícies poliédricas convexas inscritas e o limite inferior das circunscritas; – aliás, no caso que ele estudou, Arquimedes demonstra a coincidência dos dois limites.

Durante muito tempo, admitiu-se que a área de uma superfície poderia ser definida como o limite das áreas das superfícies poliédricas inscritas[64], o máximo da área das faces e o máximo do comprimento das arestas tendendo para zero. Mas SCHWARZ em uma carta a GENOCCHI mostrou que as áreas das superfícies poliédricas inscritas em um pedaço finito de cilindro de revolução não tinham limite superior. A mesma observação foi feita pelo Sr. PEANO em suas notas da Universidade de Turin em 1881-82, antes da publicação da carta de SCHWARZ no curso proferido na Faculdade de Ciências durante o segundo semestre de 1882 por CH. HERMITE (segunda tiragem, p. 25).

Se quisermos definir a área por meio da consideração de poliedros inscritos, é necessário, portanto, sujeitar esses poliedros a condições suplementares. Éramos [69] algumas vezes obrigados a não considerar os poliedros senão aqueles cujos ângulos das faces não tendiam a zero ou aqueles cujos ângulos das faces com os planos tangentes tendiam a zero[65]. Assim, a maior parte das restrições que consideramos se mostram insuficientes porque existe um limite; além disso, elas são tão particulares que somente a existência do limite legitimaria sua

[63] *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, Rendiconti, 1890.

[64] Aos vértices de uma superfície poliédrica inscrita podemos fazer corresponder os pontos de um plano (u, v) aos quais correspondem os vértices como pontos da superfície proposta. A cada face do poliedro corresponde, assim, um polígono do plano (u, v), supomos aqui e em todo que se segue, que esses polígonos não se interpenetram uns sobre os outros.

[65] Ver a respeito desses tipos de definição a nota já citada do Sr. PEANO.

consideração.

54. Resta-nos citar duas definições[66] de HERMITE e do Sr.PEANO. Elas apresentam essa característica comum de não mais repousar sobre a consideração de poliedros inscritos e de admitir, como generalização da divisão de uma curva em arcos parciais, a divisão de uma superfície em pedaços por contornos fechados.

Hermite[67] considera uma superfície $z = f(x, y)$ que tem planos tangentes variando de uma maneira contínua. Sejam d um contorno do plano dos xy, m um ponto interior a esse contorno, M o ponto da superfície que corresponde a ele, D' o contorno situado no plano tangente em M à superfície que tem por projeção d, e D o contorno da superfície que se projeta em d. A D fazemos corresponder a área de D' (supomos d quadrável). Isso posto, dividimos a superfície em pedaços; a soma dos números ligados aos contornos empregados é um valor aproximado da área. A área é o limite desses valores quando o número de pedaços aumenta indefinidamente de maneira que o diâmetro máximo desses pedaços tenda a zero (a existência do limite supõe que o contorno considerado que limita superfície não seja qualquer; assim também era para as definições precedentes).

A definição de HERMITE, portanto, faz intervir explicitamente os eixos das coordenadas, além disso, ela não é a generalização da definição de comprimento pela consideração de polígonos inscritos.

[70] A definição do Sr.PEANO não apresenta esses inconvenientes. Seja C uma curva espacial fechada, demonstraremos, pelo menos para um caso simples, que existe uma curva plana fechada c tal que sobre todo plano as projeções ortogonais de C e c delimitam áreas iguais[68]; a cada curva C fixamos o número que representa a área do domínio plano delimitado por c. Do mesmo modo, na definição de comprimento, a cada arco parcial fixamos o comprimento do segmento que une suas extremidades, isto é, o comprimento do segmento que sobre toda reta tem a mesma projeção ortogonal[69] do arco. Isso posto, dividamos uma superfície por contornos fechados; a cada divisão faremos corresponder a soma dos números fixados aos contornos empregados. Sr. PEANO chama de área o limite superior da soma desses números.

55. Todas essas definições, exceto a do Sr. PEANO, supõem a existência do limite de uma sequência de números, e a existência desse limite não está demonstrada senão para as superfícies que têm planos tangentes variando de uma forma contínua. Ora, nesse caso, não se trata de fixar a cada superfície um número, mas sim de fixar a cada superfície domínios planos

[66] Em um artigo recente (*Ueber die Dégriffé Lange, Oberfldehe und Volumen – Jahresbericht der Beulsehen Matfiematiker- Vereinigung*, 1901) Sr.MINKOWSKI adota para o comprimento e área as definições seguintes. De cada ponto de uma curva C traçamos uma esfera de raio r, o conjunto de pontos interiores a pelos menos uma dessas esferas é mensurável, seja $V(r)$ sua medida; o limite, se existir, em relação a $\frac{V(r)}{\pi r^2}$, quando r tende a zero, é dito o comprimento de C. Do mesmo modo, se $V(r)$ é a medida do conjunto de pontos cuja distância a um dos pontos da superfície S é inferior a r, o limite de $\frac{V(r)}{2r}$ define a área de S.

[67] *Loc. cit.*

[68] Se a projeção de C tem múltiplos pontos, a área delimitada por C deve ser calculada como se ela estivesse expressa com o auxílio da integral curvilínea $\frac{1}{2}\int x dy - y dx$.

[69] Não se trata aqui da curva projeção, mas da distância de duas extremidades do arco projeção.

cuja soma das áreas define como limite ou limite superior ou limite inferior um número igual a integral dupla $\int\int \sqrt{EG - F^2} du dv$; toda definição geométrica que não conduzir a esse número consagrado pelo uso será de fato rejeitada. Uma definição de área que não se aplica senão às superfícies que têm planos tangentes variando de uma forma contínua pode indicar uma propriedade geométrica interessante, mas não é uma verdadeira definição de área, o número a definir é conhecido antes da definição.

56. A definição do Sr. PEANO aplica-se a todas as superfícies cuja fronteira é um desses contornos C, os quais podemos fazer corresponder contornos planos c, como foi dito mais acima. Mas essa definição não é verdadeiramente interessante senão se pudermos sobre a superfície traçar uma quantidade suficiente de contornos C, para que seja possível dividir a superfície em pedaços de diâmetros tão pequenos quanto se queira, cujas fronteiras são curvas C; [71] nesse caso somente a área depende da forma de todas as partes da superfície. Essa condição é satisfeita, por exemplo, se a superfície tiver planos tangentes variando de forma contínua.

Tomemos esse caso, as curvas C formam um conjunto cuja potência é a do contínuo, então, a área é definida como limite superior de um conjunto de números cuja potência é a do contínuo.

Para calcular a área é necessário, nesse conjunto, isolar uma infinidade enumerável de números que tendem ao limite superior; podemos demonstrar que, se considerarmos uma sequência de divisões da superfície pelos contornos C, o diâmetro máximo desses contornos tenderão a zero, e os números correspondentes a essas divisões tenderão para a área. Mas não é evidente que possamos sempre atingir por uma infinidade enumerável de operações o número que define o Sr. PEANO; acrescentemos que não conhecemos sobre esse número nada além de sua existência.

57. Uma superfície sendo definida por:

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

(u, v) sendo um ponto de um domínio plano D.

Não consideramos como diferentes aqueles que obtivemos exprimindo u, v em função das coordenadas u_1, v_1 dos pontos de um domínio D_1; entre D e D_1, existe uma correspondência pontual biunívoca e contínua. É dito que temos duas representações paramétricas da mesma superfície.

O conjunto de pontos que correspondem à curva que limita o domínio D forma a curva fronteira da superfície[70].

Duas superfícies serão ditas iguais se pudermos passar de uma à outra pelas fórmulas de mudança de coordenadas.

[70] Reservamos, portanto, o nome de *superfície* ao que chamamos ordinariamente uma calota de um só contorno, simplesmente conexa. – Seria necessário repetir para os pontos de uma superfície o que foi dito no capítulo I para os pontos de uma curva.

Uma superfície S será dita soma de superfícies S_i, em número finito ou não, se o domínio D do plano dos (u, v) ao qual corresponde S for soma dos domínios D_i aos quais correspondem os S_i e se a porção de S que corresponde a D_i for idêntica a S_i.

Uma superfície S será dita o limite de superfícies S_p dadas pelas funções f_p, φ_p, ψ_p se f_p, φ_p, ψ_p estiverem definidas no mesmo domínio de f, φ, ψ e tenderem uniformemente para f, φ, ψ.

[72] Isso dito, por analogia com o problema da medida de curvas, colocamos assim o problema da medida das superfícies.

Fixar a cada superfície um número positivo finito ou infinito que nós chamaremos sua área e que satisfaz às condições a seguir:

1. *Existem superfícies planas que têm área finita.*
2. *Duas superfícies iguais têm mesma área.*
3. *Uma superfície soma de várias outras tem por área a soma das áreas das superfícies componentes.*
4. *A área de uma superfície* S *é o menor limite das áreas das superfícies poliédricas cujo limite é* S.

As três primeiras condições, já vimos, são suficientes quando não consideramos senão domínios planos. O problema não é possível senão para os domínios limitados por curvas quadráveis.

Notemos, aliás, que é irrelevante modificar a terceira condição do problema assim:

3. bis. *Uma superfície soma de duas outras tem por área a soma das áreas dessas duas outras.*

As condições 1, 2, 3 bis são suficientes, de fato, para os domínios quadráveis. Seja, agora, um domínio não quadrável, ele é limite de domínios quadráveis cujas áreas tendem para a medida dos pontos do domínio[71]; como o Sr. Jordan, chamaremos esse número de *área interior* do domínio não quadrável. A condição 4 mostra que devemos chamar de área a área interior, mas, então, a condição 3 bis não é satisfeita[72].

O problema das áreas assim posto não é, portanto, possível senão para os domínios quadráveis. Está bem entendido que isso não quer dizer que o problema das áreas é impossível para toda família de domínios senão a de domínios quadráveis. É evidente, por exemplo, que o problema das áreas é possível para toda família que compreende um número finito de domínios determinados em grandeza e em posição, sejam esses domínios quadráveis ou não. Queremos dizer somente que o problema não é possível para o conjunto de todos os domínios, mas que ele é possível para os domínios quadráveis.

[73] Demonstraremos facilmente que, se colocarmos o problema com as condições 1, 2, 3, 4, não existirá nenhuma família de domínios formada de domínios quadráveis e de outros domínios para a qual o problema das áreas seja possível; ao contrário, existem tais famílias

[71] Notemos que chamamos de domínio o conjunto dos pontos *interiores à fronteira*.

[72] Do mesmo modo, importa pouco na 3a. condição do problema da medida de curvas, falar de uma curva soma de duas outras ou de uma curva soma de várias outras.

se colocamos o problema com as condições 1, 2, 3 bis, 4 e se não considerarmos senão os domínios planos.

Lembremos somente que o problema das áreas não é possível no plano senão para certas famílias de domínios, no espaço, ele não será possível, portanto, senão para certas famílias de superfícies.

58. Diremos que uma superfície S, correspondente ao domínio D do plano (u, v), é fechada se a todos os pontos da fronteira de D corresponder o mesmo ponto para S.

Diremos que um arco de curva $\alpha\beta$ é interior a uma superfície fechada S se for impossível traçar uma curva que encontra $\alpha\beta$, tendo um braço infinito, e que não encontra S.

Diremos que um arco $\alpha\beta$ é quadrável se for possível encontrar uma sequência de superfícies poliédricas fechadas $S_1, S_2, \dots$ contendo $\alpha\beta$, cujas áreas, soma das áreas das faces, tendem a zero e que têm por superfície limite uma superfície cujo conjunto dos pontos é idêntico ao conjunto dos pontos de $\alpha\beta$.

Uma curva fechada será dita quadrável se cada um de seus arcos for quadrável. Nós não resolvemos o problema das áreas senão para as superfícies limitadas por curvas quadráveis[73].

Para dar um exemplo geral de curvas quadráveis, mostremos que toda curva retificável é quadrável. Seja C uma curva retificável de comprimento l, dividamo-la em arcos de comprimento a.

Sejam $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta \dots$ esses arcos. Consideremos os cilindros de revolução cujos eixos são as cordas $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta \dots$ e cujos raios são iguais a a. Limitaremos o cilindro $\alpha\beta$ às duas paralelas cujos planos passam por α e β e do mesmo modo para os outros cilindros.

Dois cilindros consecutivos, $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$ por exemplo, serão ligados por um, convenientemente escolhido, dos dois fusos que as paralelas limites desses dois cilindros destacam sobre a esfera de raio a e de centro β. Delimitaremos os cilindros extremos por semiesferas.

[74] O conjunto dessas superfícies é uma superfície fechada que contém C. A soma das áreas desses cilindros e esferas, a palavra área tendo o sentido que se atribui em geometria elementar, no máximo igual a

$$\frac{l}{a} 4\pi a^2 + 2\pi a \Sigma \text{comp } \alpha\beta \leqslant 4\pi a l + 2\pi a l.$$

Ao substituir os cilindros por prismas inscritos e as esferas por poliedros convexos inscritos, temos uma superfície poliédrica fechada contendo C de área no máximo igual a $6\pi a l$; quando a diminui, essas superfícies tendem para C, que é quadrável.

Veremos mais adiante que toda curva quadrável no plano é quadrável no espaço.

59. Seja C uma curva fechada, *chamaremos área mínima de* C *o menor limite das áreas das superfícies poliédricas cujas fronteiras tendem para* C.

[73] Em uma nota do Comptes Rendus de novembro de 1899, eu me ocupei da definição de área de uma classe particular de superfícies, as superfícies retificáveis. Eu pude, então, adotar uma outra definição de curvas quadráveis.

Sejam três curvas fechadas formadas pelos arcos (α,β) para a primeira, (β,γ) para a segunda, (α,γ) para a terceira. Suponhamos β quadrável; podemos encerrá-lo em superfícies poliédricas fechadas $B_1, B_2 \ldots$ cujas áreas tendem para zero e cujos pontos tendem para os de β. Sejam $A_1, A_2 \ldots$ superfícies poliédricas cujas fronteiras tendem para (α,β) e cujas áreas tendem para a área mínima de (α,β). Do mesmo modo, sejam as superfícies $C_1, C_3 \ldots$ relativas a (β,γ).

Se i é suficientemente grande e j suficientemente pequeno, A_i e C_i encontram B_j de acordo com as curvas.

Suponhamos A_i definido por meio de funções de variáveis u, v; os pontos (u,v) estando em um certo domínio D independente de i; seja b a parte da fronteira de D que corresponde a β. Os pontos de A_i interiores a B_j correspondem a um certo conjunto de pontos do plano (u,v) o qual contém um domínio cuja fronteira compreende b. Suponhamos esse domínio d_{ij} tomado o maior possível e seja b_{ij} a parte de sua fronteira que não faz parte daquela de D.

A curva β_{ij} de A_i, que corresponde a b_{ij}, está sobre b_j; se i e j aumentam simultaneamente, β_{ij} tende para β [74].

Do mesmo modo, definiremos a curva β'_{ij} relativa a B_j, C_i. Sobre B_j [75] podemos juntar as extremidades de β_{ij} e β'_{ij} que tendem para a extremidade m de β por uma linha poligonal m_{ij} cujos pontos todos tendem para m; do mesmo modo, seja n_{ij} uma curva de B_j que junta as extremidades de β_{ij} e β'_{ij} que tendem para a extremidade n de β.

Sejam A'_{ij} a porção de A_i correspondente a $D - d_{ij}$ e C'_{ij} a porção análoga de C_i. A superfície formada por A'_{ij}, C'_{ij} e de uma das duas superfícies limitadas sobre B_j por β_{ij}, β'_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, tem sua fronteira que tende para (α,γ) e uma de suas curvas que tende para β. Sua área tende para uma quantidade no máximo igual à soma das áreas mínimas de (α,β) e (β,γ); é, aliás, evidente que o limite não pode ser inferior a essa soma, ele é, portanto, igual.

É essa propriedade que nos servirá na sequência. Observemos que ela é suficiente para provar que toda curva plana não quadrável em um plano não é quadrável no espaço.

60. Consideremos uma curva retificável fechada C de comprimento l e seja uma sequência de polígonos inscritos $P_1, P_2 \ldots$ que obtemos dividindo C em arcos iguais de comprimentos $a_1, a_2 \ldots$ que tendem para zero. Seja A um dos vértices de P_i, a superfície que fixamos no § 58 à curva C considerada como aberta e de extremidades A, A e P_i, menos as duas semi-esferas que a delimitam, constitui o que nós chamaremos de superfície anular. Substituindo os cilindros e fusos que a compõem por poliedros, temos uma superfície anular poliédrica S_i.

Consideremos sobre S_i um contorno fechado formado, sobre os prismas, de paralelas às arestas dos prismas, e sobre os poliedros que substituem os fusos, de linhas poligonais inscritas nos grandes círculos desses fusos, seja Γ_i; o comprimento de Γ_i é, evidentemente, inferior

[74] Para não conduzir a desenvolvimentos muito longos, nós admitiremos essas propriedades

a:

$$l + 2\pi a_i \frac{l}{a_i} = (2\pi + 1)l.$$

Consideremos o conjunto E dos polígonos que compreendem: 1. os trapézios cujas bases são os eixos dos cilindros e as paralelas às geratrizes que fazem parte de Γ_i; 2. os triângulos que obtivemos juntando cada vértice m de P_i aos vértices de Γ_i situados sobre a esfera de raio a_i e de centro m. A soma das áreas desses polígonos é, no máximo:

$$\frac{(2\pi + 1)l + l}{2} a_i = (\pi + 1)a_i l.$$

[76] Isso posto, vimos no parágrafo precedente que podemos considerar a área mínima de C como o menor limite das áreas das superfícies poliédricas A_i cujas fronteiras C_i, portadas pelas superfícies S_i, tendem para C.

Consideremos a superfície formada pelo conjunto E, por um dos conjuntos de polígonos de S_i cujas fronteiras são os lados de C_i e de Γ_i, e da superfície A_i[75]; sua área difere da de A_i em menos de $(\pi + 1)a_i l$ aumentada da soma das áreas dos polígonos que formam S_i. Portanto, a área mínima de C é o limite das áreas mínimas dos contornos P_i, e a área mínima de P_i é o limite inferior das áreas das superfícies poliédricas cuja fronteira é P_i. Sabemos, portanto, encontrar a área mínima de P_i por meio de uma sequência enumerável de operações, donde a área mínima de C pode ser obtida com o auxílio de uma infinidade enumerável de operações. Mas é necessário observar que isso não é uma sequência enumerável de operações; em outras palavras, a área mínima de uma curva retificável não é definida como a soma de uma série, mas como a soma de uma série cujos termos são séries.

Os polígonos P_i são polígonos particulares inscritos em C, podemos substituir essa sequência de polígonos por uma sequência qualquer de polígonos inscritos em C e que tendem para C. Com efeito, sejam dois polígonos P e Q de comprimentos inferiores a l, e que se correspondem ponto a ponto, os pontos homólogos estando distantes em menos de ε; raciocinando sobre P e Q da mesma forma que sobre Γ_i e P_i, vemos que as áreas mínimas de P e Q diferem em menos de l_ε.

61. O menor limite das áreas das superfícies poliédricas que tendem para uma superfície S dada é o que nós chamaremos de *área interior* de S.

De acordo com a condição 4 do problema das áreas, esse número deverá ser a área de S. Antes de procurar se ele verifica a condição 3 desse problema, nós vamos estudar as superfícies cuja área interior é finita. Essas superfícies são as *superfícies quadráveis*, elas correspondem às curvas retificáveis.

Seja a a área interior de S. Suponhamos que o conjunto de projeções dos pontos de S sobre o plano dos xy contenha um domínio. Seja $ABCD$ um retângulo de lados paralelos a ox e a oy e contido nesse domínio.

Seja $S_1, S_2 \ldots$ uma série de superfícies poliédricas que tendem para S e cujas áreas

[75] Admitimos aqui que todos esses polígonos formam uma superfície.

$a_1, a_2 \ldots$ tendem para a. O conjunto de projeções dos pontos de S_i sobre o plano dos xy contém um retângulo $A_iB_iC_iD_i$ de lados paralelos [77] a ox e oy. Podemos supor que A_i, B_i, C_i, D_i tendem para A, B, C, D, quando i aumenta indefinidamente.

Seja $l_i(y)$ a soma dos comprimentos das seções das linhas poligonais de S_i por $y = y_i$, $l_i(y)$ será indeterminado se no plano das ordenadas y encontrar-se uma face de S_i, nós não nos ocuparemos dos valores de y para os quais isso ocorre. Seja l_i o limite inferior de $l_i(y)$ quando y varia de y_i, ordenada de A_iB_i, a y_i', ordenada de D_iC_i. Temos evidentemente:

$$a_i \geqslant l_i(y_i' - y_i).$$

Ora, a_i tende para a, $y_i' - y_i$ tende para o comprimento do lado BC, donde o maior dos limites para os quais l_i tende é, no máximo $\dfrac{a}{\text{comp } BC}$, uma quantidade finita. Aliás, $l_i(y)$ sendo contínuo, o valor l_i é obtido por um valor α_i de y.

A seção de S_i pelo plano $y = \alpha_i$ compõe-se de um número finito de linhas poligonais que decompõem S_i em um número finito de pedaços.

Suponhamos escolhidos sobre S dois pontos M e N que se projetam sobre o plano dos xy de ambos os lados da faixa compreendida entre as retas indefinidas AB e CD, e sejam M_i e N_i pontos de S_i que tendem respectivamente para M e N. As projeções de M_i e N_i são, desde que i é suficientemente grande, em ambos os lados da faixa compreendida entre as retas indefinidas A_iB_i e C_iD_i; M_i e N_i pertencem, então, a dois pedaços diferentes de S_i; designemos por L_i uma das linhas que compõe a seção de S_i por $y = \alpha_i$, escolhida de maneira que M_i e N_i estejam sobre S_i de ambos os lados de L_i. L_i tem comprimento no máximo igual a l_i.

Veremos, §95 e §96, que certos L_i têm uma curva limite L cujo comprimento é no máximo igual a $\dfrac{a}{\text{comp .}BC}$.

L é, aliás, uma curva plana situada no plano $y = \alpha$, sendo o limite dos números α_i correspondentes às curvas L_i consideradas. Além disso, L divide S em dois pedaços, um contendo M, o outro contendo N.

Portanto, *toda superfície quadrável pode ser dividida em dois pedaços por uma curva retificável*, podemos ainda supor que essa curva está em um plano paralelo ao plano P dado. Mas a demonstração precedente supõe que existe um plano perpendicular a P sobre o qual o conjunto das projeções dos pontos de S contém um domínio. As únicas superfícies para as quais isso não ocorre são aquelas que são somas de superfícies portadas pelos [78] planos paralelos a P, e superfícies cujo conjunto dos pontos é também o conjunto dos pontos de uma curva cuja projeção não preenche domínio algum. Raciocínios longos mais simples, análogos àqueles que acabamos de empregar, permitem mostrar que o teorema precedente se aplica também a essas superfícies, donde *toda superfície quadrável pode ser decomposta, com o auxílio de curvas retificáveis, em um número finito de superfícies cujas áreas interiores são tão pequenas quanto se queira.*

62. Consideremos uma superfície quadrável S e seja uma sequência de divisões de S em

um número finito de superfícies com o auxílio de curvas quadráveis. Tais divisões existem sempre de acordo com o que precede; além disso, podemos supor que, na i-ésima divisão de D_i, o máximo da distância de dois pontos de um mesmo pedaço seja ε_i, ε_i tendendo para zero com $1/i$. Sejam A, B, $C\ldots$ os n pedaços que provêm da divisão D_i; a, b, $c\ldots$ os contornos desses pedaços. Sejam α, β, $\gamma\ldots$ superfícies poliédricas cujas áreas diferem em menos de ε/n das áreas mínimas de a, b, $c\ldots$ e cujas fronteiras diferem de menos de ε_i dessas fronteiras. Podemos encerrar A num cubo de lado ε_i e podemos supor que α está inteiramente no cubo.

Isso posto, o raciocínio do § 59 nos mostra que é possível construir uma superfície poliédrica S_i cuja área seja tão próxima quanto se queira da soma das áreas de α, β, $\ldots$, isto é, cuja área seja menor que a soma das áreas mínimas de a, $b\ldots$ aumentada de ε ou ao menos tão próximo quanto se queira dessa soma.

Se fizermos corresponder ponto a ponto α e A, os pontos de correspondência serão distantes no máximo de $\varepsilon_i\sqrt{3}$, donde podemos supor que S_i e S correspondem-se ponto a ponto, o máximo da distância de dois pontos homólogos tão próximos quanto se queira de $\varepsilon_i\sqrt{3}$.

As superfícies S_i têm por limite, portanto, S, e por consequência o menor limite de suas áreas é, no mínimo, igual à área interior de S.

Fixemos a cada divisão D_i o número m_i, soma das áreas mínimas dos contornos a, $b\ldots$. A área interior de S é, no máximo, igual ao menor limite dos números m_i.

Consideremos uma sequência de superfícies poliédricas Σ_p que tendem para S e cujas áreas tendem para a área interior de S. Tracemos sobre elas curvas que tendem para a, b, $c\ldots$. Dividimos, assim, Σ_p em n pedaços que tendem, respectivamente, para A, B, $\ldots$ e cuja soma das áreas tende para um limite [79] superior a soma das áreas mínimas de a, $b\ldots$. Portanto, qualquer que seja i, m_i é inferior à área interior de S.

Portanto, *qualquer que seja a sequência de divisões* D_i, *os números* m_i *correspondentes terão um limite: a área inferior de* S.

Dessa definição de área inferior resulta que se dividirmos uma superfície S em duas superfícies S_1, S_2 por uma curva quadrável, a área interior de S será a soma das áreas interiores de S_1 e S_2. Portanto, *se colocarmos o problema das áreas com as condições 1, 2, 3 bis, 4, ele será possível e de uma só maneira para as superfícies limitadas por curvas quadráveis, com a área de uma superfície sendo sua área interior.*

63. Diremos que uma curva C traçada sobre uma superfície S é quadrável sobre essa superfície se for possível encerrá-la nos pedaços de S cuja soma das áreas é tão pequena quanto se queira; com a palavra área tendo o sentido que acaba de ser indicado.

Suponhamos traçada sobre S uma curva C fechada que divide S em dois pedaços. Um deles é interior a C. Nesse pedaço, podemos traçar curvas quadráveis C_i dividindo S em dois pedaços que tendem para C; C_i limita sobre S uma superfície S_i; é evidente que a área de S_i tende para a área interior do pedaço Σ limitado por C. Ao contrário, se considerarmos curvas C_i tendendo para C, mais exteriores a Σ, é possível que as áreas das superfícies S_i

que limitam os C_i não tendam para a área interior daquela limitada por C. Um raciocínio completamente idêntico àquele que emprega o Sr. JORDAN para o caso em que S é um plano (Cours d'Analyse, 2a. edição, §36) mostra que as áreas dos S_i tendem para um limite determinado, *a área exterior de* Σ *sobre* S.

No caso em que C é quadrável sobre a superfície, e nesse caso somente, essas duas áreas (interior e exterior) são iguais.

Vemos que uma curva de S quadrável no espaço é quadrável sobre S. Isso significa dizer que se considerarmos sobre S uma família de curvas quadráveis no espaço $C(\gamma)$ variando de uma maneira contínua com γ, a curva $C(\gamma)$ que limita sobre S uma superfície $S(\gamma)$, a área de $S(\gamma)$ será uma função continua de γ.

64. Podemos agora demonstrar que a área de uma superfície satisfaz a condição 3 do problema das áreas. Seja S uma superfície dividida pelas curvas em pedaços S_1, $S_2 \ldots$. Podemos substituir cada superfície S_i por uma superfície S'_i que a compreende, de maneira que a diferença das áreas entre S'_i e S_i seja inferior a um número ε escolhido arbitrariamente.

[80] Para demonstrar que a soma das áreas dos S_i não é superior à área de S, nem é inferior, é suficiente, portanto, demonstrar que é a mesma da soma das áreas dos S'_i. Cada ponto de S sendo interior a um dos S_i; por causa do que precede, isso seria evidente se os S'_i estivessem em número finito. Ora, tomando o raciocínio que o Sr. BOREL emprega na página 42 de seu *Leçons sur la théorie des fonctions* e que nós já utilizamos, vemos que é suficiente escolher convenientemente um número finito de superfícies S'_i para que todo ponto de S seja interior a um deles.

O problema das áreas colocado com as condições 1, 2, 3, 4 é, portanto, possível e de uma só maneira, para as superfícies limitadas por curvas quadráveis, a área de uma superfície sendo sua área interior.

Veremos também que na definição da área interior, com a ajuda das divisões D_i do §62, é inútil que essas divisões não façam intervir senão em um número finito de pedaços.

Observemos que essa definição de área interior de uma superfície é análoga à definição de comprimento de uma curva como limite dos perímetros de polígonos inscritos. Com efeito, um polígono inscrito define uma divisão da curva à qual fazemos corresponder uma divisão da superfície com o auxílio de curvas quadráveis. Ao comprimento de um lado ab de um polígono, isto é, ao limite inferior dos comprimentos das curvas que unem os dois pontos de divisão consecutivos a, b, fazemos corresponder o limite inferior das áreas das superfícies limitadas por C, um dos contornos quadráveis que intervém na divisão da superfície.

A analogia prossegue um pouco mais, pois é possível demonstrar que sendo dada uma curva fechada C, existe uma superfície limitada por C e que tem por área inferior a área mínima de C[76]. Essas superfícies correspondem aos lados dos polígonos inscritos.

65. Em geometria elementar, definimos as áreas das superfícies cilíndricas, das superfícies cônicas e das superfícies convexas; é-nos de legitimar essas definições.

Sejam um cilindro limitado por duas seções retas e A, B duas de suas geratrizes, elas

[76] Ver capítulo VI.

recortam sobre a superfície um pedaço D. A projeção de A e B sobre o plano de uma superfície poliédrica que tende para D cobre um domínio que tende ao menos para o retângulo limitado por A, B; donde a área dessa superfície poliédrica tenda ao menos para a área desse retângulo. Disso [81] resulta que a área de um cilindro é ao menos a de todo prisma inscrito. Mas, se as faces de um tal prisma tenderem para zero, o prisma tenderá para o cilindro, e, por consequência, sua área tenderá, ao menos, para a do cilindro, portanto, exatamente para essa área.

A mesma demonstração aplica-se ao cone. Vemos que os os cilindros de diretrizes planas retificáveis e que os cones de diretrizes esféricas retificáveis são os únicos quadráveis.

Seja S uma superfície fechada convexa, isto é, que não encontra reta alguma em mais de dois pontos; e sejam S_1, $S_2 \ldots$ superfícies poliédricas fechadas que tendem para S e cujas áreas tendem para a área interior de S[77].

Seja O um ponto interior a S. Tomemos em relação a O os homotéticos S_1', $S_2' \ldots$ de S_1, $S_2 \ldots$, os correspondentes sendo tais que S_i' não tenha ponto algum interior a S. É suficiente para isso que o correspondente relativo a S_i seja $\dfrac{R}{R - \varepsilon_i}$, se dois pontos correspondentes de S e S_i' estiverem distantes no máximo ε_i e se R for o mínimo da distância de O aos pontos de S, e porque ε_i tende para zero com $1/i$, a área de S será o limite das áreas dos S_i'.

Isso posto, consideremos um poliedro convexo P inscrito em S; todos os pontos de P sendo interiores a S e, por consequência, a S_i', a área de P será inferior a de S', isto é, no máximo igual a de S. Se, portanto, considerarmos uma sequência de poliedros convexos inscritos em S e que tendem a S, veremos, por um lado, que o menor limite das áreas desses poliedros não é inferior à área de S, e, por outro lado, que o maior limite não é superior, isto é, que *a área de S é o limite das áreas dos poliedros convexos inscritos que tendem para* S.

Se não consideramos senão um pedaço de S limitado por uma curva quadrável, o mesmo resultado será verdadeiro, como resulta da demonstração precedente. Observemos, aliás, que toda seção plana de S sendo convexa e retificável é, por consequência, quadrável.

[82] Vemos também que se uma superfície convexa S envelopar uma superfície convexa S', a área de S será superior a de S'; disso resulta que a área de S' será finita se a de S for finita e como podemos tomar por S um cubo, toda superfície convexa será quadrável. Além disso, sua área pode ser definida como o limite superior daquelas dos poliedros convexos inscritos.

Os exemplos desse parágrafo mostram que poderíamos, em geometria elementar, definir de uma maneira geral a área de uma superfície S como o menor limite das áreas das superfícies que tendem para S.

66. Para as superfícies simples que acabamos de examinar, a área calcula-se por uma sequência enumerável de operações. No caso geral, para calcular a área da superfície pelos

[77] Porque definimos uma superfície fechada como tendo todos seus pontos da fronteira reunidos em um ponto A, podemos somente afirmar que as fronteiras dos S_i tendem para A, e não que os S_i são fechados. Mas, cortando S_i por uma esfera Σ de centro A, o que determina ao redor da fronteira de S_i uma curva C_i, e cobrindo a porção de S_i exterior a Σ_i sob uma das porções limitadas por C_i sobre Σ_i, substituímos S_i por uma superfície fechada, a qual é poliédrica se empregamos no lugar de Σ_i um poliedro convenientemente inscrito em Σ_i.

procedimentos previamente indicados, é necessário, primeiro, dividir a superfície por curvas quadráveis em pedaços tão pequenos quanto se queira. Sabemos obter uma tal divisão se a superfície for dada como limite de superfícies poliédricas cujas áreas não aumentam indefinidamente.

Suponhamos a superfície S dada por:

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v);$$

u, v descrevendo um domínio D. Dividamos essa superfície por $x = \lambda$, o que resulta sobre S um número finito ou infinito de curvas. Sejam sobre S dois pontos M, N que supomos em ambos os lados de $x = \lambda$; chamaremos $C(\lambda)$ uma das seções de curva de S por $x = \lambda$, que separa S em dois pedaços, um contendo M, o outro, N. A $C(\lambda)$ corresponde, no plano (u, v), $\gamma(\lambda)$. Seja D_1 uma parte de D varrida por $\gamma(\lambda)$.

Inscrevamos em $\gamma(\lambda)$ um polígono de lados iguais a l_1, sendo $P(\lambda, l_1)$ o polígono correspondente inscrito em $C(\lambda)$ e $l(\lambda, l_1)$ seu comprimento. $l(\lambda, l_1)$ é uma função contínua de λ, podemos, portanto, defini-la para uma infinidade enumerável de valores aqueles que correspondem ao valores racionais de λ; e, consequentemente, encontrar seu mínimo $m(l_1)$ e o valor λ_1, para o qual ele é atingido.

Sejam $l_1, l_2, \ldots$ tendendo para zero, os valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ correspondentes têm um valor limite λ_0; $C(\lambda_0)$ tem por comprimento o limite de $m(l_1)$, $m(l_2) \ldots$ e é a curva de menor comprimento entre os $C(\lambda)$. Portanto, se $m(l_1)$, $m(l_2) \ldots$ aumentar indefinidamente, S não será quadrável; senão, saberemos dividir S em dois pedaços por uma curva quadrável.

Podemos, portanto, por uma infinidade enumerável de operações saber se uma superfície é quadrável e, se for, encontrar sua área.

[83] 67. Demonstremos que toda curva quadrável sobre uma superfície $z = f(x, y)$ é quadrável no espaço. Seja Γ uma curva quadrável sobre a superfície considerada S; encerremo-la num pedaço D de S limitado por uma curva retificável C, seja l o comprimento de C. Façamos D sofrer as translações $\dfrac{\varepsilon}{l}$ paralelas por um lado a oz, por outro a zo. As novas posições de D e o conjunto das posições ocupadas por C constituem uma superfície fechada cuja área é duas vezes a de D aumentada de ε. Essa área pode, portanto, ser feita tão pequena quanto se queira; e, porque uma superfície fechada pode ser substituída por uma superfície poliédrica próxima, e a área alterada tão pouco quanto se queira, Γ será quadrável no espaço.

Essa propriedade se aplica em particular ao plano, assim como havíamos anunciado; mas ela não é geral, isso quer dizer que uma curva não quadrável no espaço pode ser quadrável sobre uma superfície.

Com efeito, consideremos uma curva plana fechada não quadrável C e uma circunferência Γ interior a C. C não é quadrável no espaço e, contudo, C é quadrável sobre a superfície quadrável formada, por um lado, da superfície limitada por C sobre o plano, por outro lado, da coroa limitada sobre o plano por C e Γ.

68. Consideremos as superfícies:

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

que têm em todo ponto um plano tangente, e tais que f, φ, ψ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Isolemos sobre a superfície um pedaço que, em relação a eixos convenientes, tenha por equação $z = f(x, y)$, o plano tangente não é jamais paralelo a oz.

Seja D o domínio projeção do pedaço Σ considerado sobre ox; seja M o mínimo, em valor absoluto, das derivadas de primeira ordem. Dividamos D em quadrados de lados paralelos a ox e oy; suponhamos todos esses quadrados de lado a e seja n o número desses quadrados que são interiores a D (negligenciamos aqueles que não são interiores a D).

Sejam $\alpha\beta\gamma\delta$ um desses quadrados, C a curva que corresponde a ele sobre Σ, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ o paralelogramo que se projeta sobre $\alpha\beta\gamma\delta$ e que está no plano tangente em um ponto (ξ, η, ζ) do pedaço de Σ limitado por C.

A diferença entre a área desse paralelogramo e a área mínima de C é, no máximo, a área da parte do prisma que projeta C limitado por essa curva [84] e $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Se designamos por ε o máximo da variação das derivadas parciais em quaisquer dos n quadrados, essa área será, no máximo, $2a^2\varepsilon \cdot 4$.

A área de $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ é

$$\sqrt{\overline{f'_x(\xi, \eta)}^2 + \overline{f'_y(\xi, \eta)}^2 + 1} \cdot a^2.$$

A área interior de Σ, ou melhor, a parte de Σ que se projeta no interior desses quadrados considerados, é igual a

$$A = a^2\Sigma\sqrt{f'^2_\xi + f'^2_\eta + 1}$$

a menos de $8a^2\eta\varepsilon$. Ora, A tende, quando a tende para zero, para a integral

$$\int\int\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1} dxdy$$

estendida ao domínio D; $a^2\eta$ é inferior à área de D, ε_i tende para zero com a, donde a área é dada pela integral

$$\int\int\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy.$$

É suficiente uma mudança de variáveis para recair sobre a fórmula conhecida:

$$\int\int\sqrt{\overline{D\frac{(f, \varphi)}{(u, v)}}^2 + \overline{D\frac{(\varphi, \psi)}{(u, v)}}^2 + \overline{D\frac{(\psi, f)}{(u, v)}}^2}\, dudv.$$

Encontramos ao mesmo tempo a definição que emprega o Sr. Hermite.

69. Seria interessante saber se, em todos os casos em que a integral precedente existe,

ela representa a área e em quais casos essa integral existe.

Os métodos do §50 com os quais fizemos o estudo análogo no caso das curvas, permitiram talvez, ainda que novas dificuldades se apresentassem, examinar os casos em que um plano tangente existe. Mas seria necessário ainda estudar o caso em que as derivadas parciais de x, y, z existem sem que o plano tangente exista.

Indicarei somente o resultado seguinte cuja demonstração é muito simples. Se as derivadas de x, y, z, consideradas como funções de u ou de v, são todas inferiores em valor absoluto a um número M, a integral precedente dá um limite superior da área.

[85] 70. No capítulo III aprendemos a formar funções que definem a curva retificável mais geral; não resolvemos o problema análogo referente às superfícies quadráveis[78], vamos mostrar somente que podemos definir uma família interessante bastante vasta de superfícies quadráveis que goza de propriedades análogas àquelas da família de curvas retificáveis: é a família de *superfícies retificáveis*.

Diremos que uma superfície S

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

definida para um certo domínio D do plano (u, v), é retificável se, a toda curva retificável de D, corresponder a uma curva retificável de S.

Assinalemos primeiro uma diferença entre as curvas e as superfícies retificáveis. Dizer que uma curva é retificável é dar uma propriedade do conjunto de seus pontos; dizer que uma superfície é retificável é dar uma propriedade do conjunto de seus prontos e uma propriedade da representação particular que define a superfície. Em outras palavras, uma superfície retificável pode deixar de ser se mudarmos a representação paramétrica. Por exemplo, a semiesfera

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

não é retificável, e a semiesfera

$$x = R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \qquad y = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = R \cos \theta$$

é.

É evidente, de início, que, para que uma superfície seja retificável, é necessário e suficiente que suas projeções sejam; que se trata das projeções sobre os planos ou sobre as retas. Podemos, portanto, raciocinar sobre a superfície

$$x = f(u, v), \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

[78] No entanto, uma superfície quadrável, sendo limite de superfícies cujas áreas não aumentam indefinidamente, é fácil indicar um procedimento regular que permite obter toda superfície quadrável por uma sequência enumerável de operações. Mas um tal procedimento não é comparável por simplicidade àquele que fornece as curvas retificáveis.

Sejam a, b dois pontos do plano (u, v), A e B os pontos da superfície que correspondem a eles. Vamos demonstrar que a relação

$$\frac{\text{distância } AB}{\text{distância } ab} = r(a, b)$$

[86] é limitada. Com efeito, se ela não fosse, poderíamos encontrar uma sequência a_1, b_1; a_2, b_2; ... tal que as relações correspondentes aumentassem indefinidamente; poderíamos mesmo supor que os pontos a_i, por um lado, b_i, por outro, têm pontos limite a e b. a e b coincidem, sem que $r(a, b)$ seja infinita, o que é impossível. Escolhamos uma série convergente de termos positivos decrescentes, seja

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$$

Sejam a_{α_i}, b_{β_i} dois pontos cujas distâncias a a são inferiores a ε_i e tais que $r(a_{\alpha_i}, b_{\beta_i})$ é superior a $\dfrac{1}{\varepsilon_i}$. Consideremos a curva obtida percorrendo em linha reta de a a a_{α_1}, de a_{α_1} a b_{β_1}, de b_{β_1} a a_{α_1}, e assim sucessivamente, tantas vezes que o caminho percorrido sobre $a_{\alpha_1}b_{\beta_1}$ esteja compreendido entre ε_1 e $2\varepsilon_1$, chegaremos, assim, seja em α_1, seja em β_1; percorremos a reta que une esse ponto a a, depois, iremos de a a a_{α_2} e percorremos sobre $a_{\alpha_2}b_{\beta_2}$ um comprimento compreendido entre ε_2 e $2\varepsilon_2$, e vamos de a_{α_2} ou b_{β_2} a a e assim sucessivamente. A curva do plano (u, v) assim percorrida tem comprimento, no máximo,

$$4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots).$$

A curva da superfície assim percorrida tem comprimento, no mínimo,

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{1}{\varepsilon_2} + \ldots$$

portanto, de comprimento infinito, o que é contrário à hipótese.

Assim, $r(a, b)$ é limitado, essa condição é evidentemente suficiente; podemos exprimi-la assim: *a condição necessária e suficiente para que uma superfície seja dada sob forma retificável é que* $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, *consideradas como funções somente de* u *ou somente de* v, *tenham números derivados limitados.*

Ocupemo-nos da superfície de projeção sobre $0x$. As curvas

$$u = f_1(t), \qquad v = \varphi_1(t),$$

f_1 e φ_1 sendo crescentes, que unem u_0, v_0 a u, v, têm comprimento, no máximo, igual a $u - u_0 + v - v_0$ (supomos que u_0, v_0 são os menores valores de u e v e que u_0, v_0 definem um ponto da superfície; é fácil de se livrar dessa hipótese); as curvas correspondentes da superfície têm, portanto, comprimentos [87] no máximo iguais a

$$M\sqrt{2}(u + v - u_0 - v_0)$$

se os números derivados de f forem inferiores a M.

Seja $V(u,v)$ o máximo desses comprimentos, isso é uma função crescente de u e de v cujos números derivados são inferiores a M.

Além disso, se

$$u_1 > u_2, \qquad v_1 > v_2,$$

temos:

$$V(u_1,v_1) - V(u_2,v_2) \geqslant |f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)|,$$

donde

$$\begin{aligned} n(u,v) &= \frac{1}{2}[V(u,v) - f(u,v)] \\ p(u,v) &= \frac{1}{2}[V(u,v) + f(u,v)] \end{aligned}$$

são funções crescentes de u e v e $f(u,v)$ *é a diferença de duas funções crescentes cujos números derivados são inferiores a* M.

Se tivéssemos procurado a condição para a qual toda curva retificável $t = \chi(\theta)$ do eixo dos t corresponde sobre a curva

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

uma curva retificável

$$x = f[\chi(\theta)], \qquad y = \varphi[\chi(\theta)], \qquad z = \psi[\chi(\theta)],$$

também teríamos encontrado que f, φ, ψ são diferenças de funções crescentes de números derivados limitados.

71. Mostremos que as superfícies retificáveis são quadráveis. Dividamos o domínio D do plano (u,v) em quadrados. Seja a o lado de um deles, a curva que corresponde a seu perímetro tem comprimento no máximo igual a $4Ma$. A área mínima dessa curva C é, no máximo, a área do cone cujo vértice está sobre C e cuja diretriz é C. Ora, obtemos essa área como limite das áreas análogas relativas aos polígonos inscritos em C e que tendem para C; a área mínima de C é, portanto, no máximo igual àquela que limita no plano uma curva de comprimento $4Ma$, isto é, no máximo a área $\dfrac{4M^2a^2}{\pi}$ do círculo de circunferência $4Ma$.

[88] A área da superfície é, portanto, no máximo aquela do domínio D multiplicada por $\dfrac{4M^2}{\pi}$.

Uma superfície retificável é, portanto, quadrável e a relação da área de um pedaço da superfície com a área da parte correspondente do plano (u,v) *é limitada.*

72. O conjunto das superfícies retificáveis é extremamente vasto; ele compreende, por exemplo, todas as superfícies analíticas, todos os cilindros e cones desenvolvíveis[79], todas

[79] Capítulo VI.

as superfícies conexas, com a condição de se escolher convenientemente a representação paramétrica. Mas existem superfície quadráveis que não são retificáveis, qualquer que seja a representação paramétrica escolhida.

Com efeito, consideremos uma curva $z = f(x)$ no plano zx, passando pela origem, definida para $0 < x < 1$ e tal que, s sendo o arco, temos:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Essa curva não é retificável, mas todo arco dessa curva que não compreenda a origem é; isso quer dizer que o cilindro $z = f(x)$ não é quadrável, mas que todo pedaço que não encontra o eixo dos y é.

Consideremos a parte do cilindro que está situada entre os planos $x = 0$, $x = y$; ela é quadrável e de área:

$$\int_0^1 x ds = \int_0^1 dx = 1$$

A superfície que compreende esse pedaço do cilindro é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = -y$ é, portanto, quadrável; mas não passa nenhuma curva retificável dessa superfície pela origem, donde ela não pode ser escrita sob a forma retificável.

CAPÍTULO 5

Superfícies aplicáveis sobre o plano

[89] 73. Servir-nos-emos da propriedade seguinte:

Se em todo intervalo as funções (f, f_1); (φ, φ_1); (ψ, ψ_1) tiverem as mesmas variações totais finitas, as duas curvas (f, φ, ψ) e (f_1, ψ_1, φ_1) terão o mesmo comprimento.

Com efeito, seja uma divisão do intervalo de variação de t

$$t_0, t_1, \dots t_n.$$

O comprimento da primeira curva tem por valor aproximado

$$\Sigma\sqrt{\overline{f(t_{i+1}) - f(t_i)}^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}.$$

Seja $\nu[f(t)]$ a variação total de f entre t_0 e t.

A soma precedente difere de

$$\Sigma\sqrt{\overline{\nu[f(t_{i+1}) - f(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]}^2}.$$

de menos de

$$\Sigma S_{f,\varphi,\psi}\overline{\nu[f(t_{i+1}) - f(t_i)] - |f(t_{i+1}) - f(t_i)|} = S\overline{\nu[f(t_n)] - \Sigma|f(t_{i+1}) - f(t_i)|}.$$

Portanto o comprimento pode ser definido como o limite de

$$\Sigma\sqrt{\overline{\nu[f(t_{i+1}) - f(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]}^2}.$$

e essa soma é a mesma para as duas curvas.

74. Consideremos uma curva retificável qualquer C, $x = f(t)$, portada pelo eixo dos x, efetuemos a transformação pontual $X = \varphi(x)$, φ sendo contínua. À curva C corresponde a curva Γ, $X = \varphi[f(t)]$. Propomo-nos procurar qual deve ser a função $\varphi(x)$ para que C e Γ tenham sempre o mesmo comprimento.

Se a função $f(t)$ se reduz a t, Γ tem por equação $X = \varphi(t)$, o que mostra que $\varphi(x)$ deve ter, entre t_0 e t_1, uma variação total igual a $t_1 - t_0$. [90] Suponhamos essa condição satisfeita e tomemos por C uma curva retificável qualquer. Inscrevamos nessa curva um polígono, seja ε o comprimento máximo dos lados desse polígono. Se os vértices desse polígono corresponderem aos números t_i, seu comprimento será:

$$l(C) = \Sigma|f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

e o do polígono correspondente de Γ

$$l(\Gamma) = \Sigma|\varphi[f(t_{i+1}] - \varphi[f(t_i)]|.$$

Ora, quando ε tende para zero, o menor dos limites dessa soma é igual à variação total de φ entre $f(t_0)$ e $f(t_n)$, isto é, $|f(t_n) - f(t_0)|$. O comprimento de Γ é, portanto, superior à corda que une as extremidades de C.

Dividamos C em arcos parciais, o mesmo raciocínio mostra que o comprimento de Γ é superior àquele do polígono formado pelas cordas dos arcos parciais considerados. Portanto, o comprimento de Γ não é inferior ao de C.

Aliás, o comprimento de Γ é o limite da soma $l(\Gamma)$ e, de acordo com o que supusemos, temos:

$$|\varphi[f(t_{i+1})] - \varphi[f(t_i)]| \leqslant |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

isso quer dizer que $l(\Gamma)$ é inferior a $l(C)$.

Portanto, C e Γ têm o mesmo comprimento.

Para encontrar todas as transformações pontuais do eixo dos x que não alteram os comprimentos das curvas portadas por esse eixo, é suficiente, portanto, encontrar todas as funções φ cuja variação total em um intervalo qualquer é igual à variação de x nesse intervalo. Para isso, tomemos uma função contínua de variação limitada $f(t)$, isto é, a diferença de duas funções contínuas crescentes. Seja $\nu(t)$ a função que representa a variação total de f entre t_0 e t, afetada pelo sinal $+$ ou $-$ conforme t é superior ou inferior a t_0. A equação $x = \nu(t)$ pode ser resolvida em relação a t pois $\nu(t$ é uma função crescente, seja $t = \psi(x)$. A função $f[\psi(x)]$ é a mais geral que responde a essa questão.

75. Sejam três funções F, Φ, Ψ, cujas variações totais são, em todo intervalo, iguais ao comprimento do intervalo.

A transformação pontual

$$X = F(x), \qquad Y = \Phi(x), \qquad Z = \Psi(x)$$

faz corresponder a toda curva C uma curva Γ de mesmo comprimento. De [91] fato, se C é definida por $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, Γ é definida por $F[f(t)]$, $\Phi[\varphi(t)]$, $\Psi[\psi(t)]$; e as duas funções $f(t)$, $F[f(t)]$, têm, em todo intervalo, a mesma variação total, e é do mesmo modo para $\varphi(t)$, $\Phi[\varphi(t)]$; $\psi(t)$, $\Psi[\psi(t)]$.

A transformação de que se trata faz corresponder a cada ponto do espaço (x, y, z) um só ponto do espaço (X, Y, Z). Mas a um ponto desse espaço pode corresponder um conjunto de pontos de (x, y, z) tendo a potência do contínuo. Se a transformação fosse biunívoca, isso seria uma simetria mais um deslocamento ou um deslocamento.

Observemos ainda que a toda curva do espaço (x, y, z) corresponde uma curva do espaço (X, Y, Z), mas que a recíproca não é verdadeira.

76. Seja S uma superfície, apliquemos nela a transformação pontual do parágrafo precedente; encontramos uma superfície Σ. A toda curva traçada sobre S corresponde uma linha de mesmo comprimento traçada sobre Σ; a toda curva de Σ corresponde uma curva de S pois, dar uma curva sobre S ou sobre Σ, é dar uma curva no domínio plano (u, v), que serve para definir S.

Entre os pontos de S *e de* Σ *podemos estabelecer uma correspondência biunívoca tal que a toda curva retificável traçada sobre uma dessas superfícies corresponde sobre a outra uma curva de mesmo comprimento.*

Duas superfícies que gozam dessa propriedade são ditas *aplicáveis uma sobre a outra.* Essa definição não é interessante senão se para todo ponto das superfícies consideradas passarem várias curvas retificáveis. Ela seria pouco interessante se se tratasse de cilindros de seção reta não retificáveis, pois sobre tais cilindros as geratrizes são as únicas curvas retificáveis.

A definição precedente não teria nenhum sentido se se tratasse de superfícies da forma

$$z = f(x) + \varphi(y),$$

f e φ tendo variação não limitada, tais superfícies não contêm, em geral, nenhum arco de curva retificável.

77. É, ao contrário, muito interessante saber se duas superfícies analíticas são aplicáveis uma sobre a outra. Sabemos que, para uma superfície analítica

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

o comprimento de um arco correspondente às funções u, v, que tem derivadas [92] contínuas, tem por diferencial:

$$\begin{aligned} ds^2 &= S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} \cdot du^2 + 2S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right)} \cdot du dv + S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \cdot dv^2 \\ &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \end{aligned}$$

Para que duas superfícies analíticas sejam aplicáveis uma sobre a outra, os pontos (u, v) das duas superfícies correspondendo-se, é necessário que, para as duas superfícies, as quantidades E, F, G sejam as mesmas.

Mostremos que essas condições são suficientes; isso é evidente para as curvas analíticas e para aquelas que são compostas por um número finito de arcos analíticos.

Seja, agora, um arco retificável qualquer sobre uma superfície analítica S. Consideremos uma linha poligonal P inscrita nessa curva. Aos vértices de P correspondem no plano (u, v)

pontos que consideramos como os vértices de um polígono π do plano dos (u, v); seja Π a curva de S que corresponde a π. Nós vamos demonstrar que, quando os lados de P são bastante pequenos, a diferença dos comprimentos entre P e Π é tão pequena quanto se queira.

Seja AB um lado de P, ab o lado correspondente de π. Avaliemos a relação comp AB : comp ab. Se as coordenadas de a e b forem (u, v); $(u + t\cos\theta, v + t\operatorname{sen}\theta)$ essa relação será:

$$\left(\frac{AB}{ab}\right)^2 = r^2(u, v, \theta, t) = \frac{1}{t^2} S[f(u + t\cos\theta, v + t\operatorname{sen}\theta) - f(u, v)]^2.$$

Essa função não é definida senão para $t \neq 0$, colocamos:

$$r^2(u, v, \theta, 0) = E\cos^2\theta + 2F\operatorname{sen}\theta\cos\theta + G\operatorname{sen}^2\theta.$$

A função r^2 assim definida é contínua em relação ao conjunto $u, v, \theta, 0$. Isso é evidente se $t \neq 0$; mostremos que é ainda assim para o ponto $u_0, v_0, \theta_0, 0$. Se isso não fosse, seria possível encontrar uma sequência de valores u_i, v_i, θ_i, t_i tendendo para $u_0, v_0, \theta_0, 0$, com os valores correspondentes $r^2(u_i, v_i, \theta_i, t_i)$ não tendendo para $r^2(u_0, v_0, \theta_0, 0)$. Em uma tal sequência, tão distante que se vá, encontraremos valores de t_i diferentes de zero, pois $r(u, v, \theta, 0)$ é contínua em relação ao conjunto u, v, θ. Podemos, portanto, suprimir todos os grupos u_i, v_i, θ_i, t_i para os quais t_i é nulo, ou, o que é o mesmo, supor todos os t_i diferentes de zero. Vamos procurar [93] o limite de

$$\frac{1}{t_i^2} S[f(u_i + t_i\cos\theta_i, v_i + t_i\operatorname{sen}\theta_i) - f(u_i, v_i)]^2.$$

Isso se escreve

$$S[f'_u(u_i + \eta'_i t_i\cos\theta_i, \eta_i + \eta'_i t_i\operatorname{sen}\theta_i)\cos\theta_i +$$

$$+ f'_v(u_i + \eta'_i t_i\cos\theta_i, \eta_i + \eta'_i t_i\operatorname{sen}\theta_i)\operatorname{sen}\theta_i]^2.$$

Os números η'_i correspondendo a f, n''_i a φ, n'''_i a ψ, estando compreendido entre zero e um.

As primeiras derivadas são contínuas em relação ao conjunto u, v donde o limite é:

$$S[f'_u(u_0, v_0)\cos\theta_0 + f'_v(u_0, v_0)\operatorname{sen}\theta_0]^2 = r^2(u_0, v_0, \theta_0, 0).$$

a função $r^2(u, v, \theta, t)$ sendo contínua, podemos encontrar um valor η tal que, para

$$|u_1 - u_2| < \eta, \qquad |v_1 - v_2| < \eta, \qquad |t_1 - t_2| < \eta,$$

temos:

$$|r(u_1, v_1, \theta, t_1) - r(u_2, v_2, \theta, t_2)| < \varepsilon.$$

Suponhamos todos os lados de π de comprimento inferior a η e seja $A\alpha B$ o arco de Π

correspondente ao lado ab de π. Avaliemos o comprimento desse arco.

Para isso, inscrevamos um polígono Q no arco, um lado MN deste polígono corresponde a um segmento mn portado pelo lado ab e tem-se, conservando as notações precedentes,

$$\left|\frac{\text{comp } MN}{\text{comp } mn} - r(u, v, \theta, 0)\right| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$|\text{comp } A\alpha B - \text{comp } ab \cdot r(u, v, \theta, 0)| < \text{comp } ab \cdot \varepsilon.$$

Mas temos também

$$|\text{comp } AB - \text{comp } ab \cdot r(u, v, \theta, 0)| < \text{comp } ab \cdot \varepsilon.$$

E por consequência

$$\text{comp } A\alpha B - \text{comp } AB < 2\text{comp } ab \cdot \varepsilon.$$

Disso deduzimos:

$$\text{comp } \Pi - \text{comp } P < 2\text{comp } \pi \cdot \varepsilon.$$

[94] O comprimento de π tende para o comprimento da curva c do plano dos (u, v) que corresponde à curva considerada C do espaço. Mostremos que c é retificável se a superfície de que se trata não tem ponto singular. Sabemos que chamamos assim aquilo para o qual os três determinantes funcionais tais que $\dfrac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ são nulos. (Isto é, quer pontos singulares da superfície, quer pontos singulares da representação paramétrica em u, v).

As derivadas primeiras de f, φ, ψ não se anulam, portanto, ao mesmo tempo, e, consequentemente, $r^2(u, v, \theta, 0)$ é sempre superior a um número fixo positivo. Se escolhermos π tão pequeno, o mesmo ocorre para $0 < t < \pi$ de $r^2(u, v, \theta, t)$, que suporemos superior a $M^2 > 0$.

Portanto temos:

$$\frac{\text{comp } ab}{\text{comp } AB} < \frac{1}{M}(M > 0)$$

e por consequência

$$\frac{\text{comp } c}{\text{comp } C} < \frac{1}{M}$$

e porque C é retificável, c o é.

A diferença comp .π − comp .P tende, portanto, para zero quando P tende para C e podemos dizer que: sobre uma porção de superfície analítica, que não contém nenhum ponto singular, o comprimento de uma curva C é o limite inferior dos comprimentos das curvas da superfície cujo limite é C.

Nós já vimos que, se duas superfícies analíticas S e Σ tiverem o mesmo ds^2, à toda curva analítica – ou composta de um número finito de arcos analíticos – de uma corresponderá uma curva de mesmo comprimento sobre o outra. A curva que designamos por Ψ é composta de um número finito de arcos analíticos, a definição de comprimentos que acabamos de encontrar prova, portanto, que a toda curva retificável S corresponde uma curva de mesmo comprimento sobre Σ e inversamente.

Nós encontramos o resultado clássico para que duas superfícies analíticas sejam aplicáveis uma sobre a outra, os pontos dessas superfícies correspondendo aos mesmos valores de u, v, sendo homólogos: é necessário e suficiente que elas tenham o mesmo ds^2[80].

[95] 78. Perguntamo-nos, agora, se todas as superfícies aplicáveis sobre uma superfície analítica são analíticas.

Por exemplo, todas as superfícies aplicáveis sobre o plano são analíticas? – Seja C o cone

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Sabemos, de acordo com a teoria clássica, que ele é aplicável sobre o plano. Efetuemos a transformação pontual

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \Psi(z),$$

Ψ tendo entre z_0 e z, uma variação total igual a $|z_0 - z_1|$. A C corresponde uma superfície Γ aplicável sobre C; Γ é de revolução e não é nem um cone, nem um cilindro, é uma superfície não analítica. Se, em particular, tomarmos pela função Ψ uma daquelas que foram definidas no capítulo III e que têm máximo e mínimo em todo intervalo[81], a superfície Γ *será uma superfície de revolução aplicável sobre o plano e que não contém segmento algum da reta*[82].

79. Exemplos análogos a esse precedente podem ser obtidos por diferentes procedimentos. Ocupamo-nos sempre das superfícies aplicáveis sobre o plano.

A teoria clássica mostra que os desenvolvíveis analíticos são aplicáveis sobre o plano. Seja S um tal desenvolvível, G uma de suas geratrizes, G divide S em dois pedaços S_1, S_2.

Façamos transladar S_2 ao longo de G, depois façamos girar S_2 em torno de G. Depois dessa dupla operação geométrica obtermos uma nova superfície Σ que é aplicável sobre o plano ou, mais exatamente, da qual um pedaço que compreende um segmento de G, mais ou menos grande dependendo da grandeza da translação de S_2, é aplicável sobre o plano.

A mesma operação repetida um número infinito de vezes, para uma infinidade enumerável de geratrizes que formam um conjunto denso sobre a superfície, dará, se as translações e rotações estão convenientemente escolhidas, uma superfície regrada aplicável sobre o plano e que não contém pedaço algum do desenvolvível.

[96] Tomemos agora um desenvolvível analítico S e seja C uma curva analítica traçada sobre S. Realizemos a correspondência entre S e o plano, seja c a transformada de C. Sejam A um ponto qualquer de C, P o plano tangente em A a S, Q o plano osculador em A a C, e seja P' o simétrico de P com relação a Q.

[80] Poderíamos estender esse resultado a casos mais gerais, não supondo as superfícies analíticas. Mas, o que precede é suficiente para legitimar as aplicações que fazemos do método clássico.

[81] Isso quer dizer que, $f(x)$ sendo a função definida no §49, colocamos $\Psi(x) = f(x)$.

[82] De uma forma mais precisa, o meridiano de Γ não contém segmento algum da reta, mais ainda, Γ não pode conter nenhum pedaço da superfície espacial de revolução, donde Γ não contém a reta.

Os planos P' assim definidos envolvem um desenvolvível S' no qual podemos realizar a aplicação sobre o plano de maneira que C corresponda a c. Se C não é geodésico, S e S' são duas superfícies diferentes.

c divide o plano em duas regiões A_1, A_2; C divide s em duas regiões S_1, S_2 correspondendo, respectivamente, a A_1 e A_2; da mesma forma, sobre S' temos duas regiões S'_1, S'_2.

Seja S a superfície $S_1+S'_2$; é uma superfície não desenvolvível aplicável sobre o plano[83].

Para melhor definir Σ, isto é, para distinguir entre $S_1+S'_2$ e $S_2+S'_1$, tomamos arbitrariamente um ponto M sobre S, esse ponto M fixará qual das regiões que designamos por S_1. Em todas as operações ulteriores, esse ponto M permanecerá fixo.

Σ pode ser definida como a superfície aplicável sobre o plano, formada de dois pedaços de desenvolvíveis analíticos cuja fronteira comum é a linha correspondente a c, e que ao redor de M coincide com S; o que chamaremos pela notação $\Sigma(S, c, M)$.

$c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ sendo n curvas analíticas planas que não se encontram, designaremos por $\Sigma(S, c_1, c_2, \ldots c_n, M)$ a superfície aplicável sobre o plano formada de pedaços de desenvolvíveis analíticos cujas linhas singulares – isto é, as fronteiras comuns aos dois pedaços analíticos – são as curvas que correspondem a $c_1, c_2, \ldots c_n$ e que coincide com S ao redor do ponto M.

Sejam agora $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ curvas analíticas planas que não se encontram.

Consideremos as superfícies

$$S, \Sigma(S, c_1, c'_1, M), \sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, M) \ldots,$$

se as curvas c_i, c'_i são convenientemente escolhidas, essas superfícies terão uma superfície limite aplicável sobre o plano.

Para obter o exemplo do parágrafo precedente, é necessário escolher por [97] superfície S o cone

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad z > 0,$$

por curvas c_i, c'_i aquelas que correspondem às paralelas desse cone passando pelos pontos A_i, B_i (notação do parágrafo 48) situados sobre a geratriz

$$y = 0, \qquad z = x$$

e por M, a origem O.

Designemos por $\Sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots O)$ a superfície assim obtida.

80. Podemos passar dessa superfície para seu desenvolvimento por uma deformação contínua. Para ver isso, consideremos o desenvolvimento do cone S que assumimos perfurado ao longo da geratriz $y = 0$, $z = x$. Esse desenvolvimento é um setor que supomos colocado no plano dos xy do lado dos y positivos, a geratriz $y = 0$, $z = x$ tendo por transformada a parte positiva do eixo dos x, e a porção do cone vizinha dessa geratriz está situada do lado dos y positivos que têm por transformada a porção do plano dos xy vizinha do eixo dos x. Seja

[83] Ou, ao menos, da qual um pedaço que compreende um arco de C é aplicável sobre o plano.

$S(0)$ esse setor, é sobre ele que são traçadas as circunferências c_i, c'_i. Designemos por $S(t)$ o cone

$$z^2 = t^2(x^2 + y^2), \qquad z > 0,$$

ou mais exatamente, a porção do cone aplicável sobre $S(0)$ limitado pela geratriz $y = 0$, $z = tx$ e que, na vizinhança dessa geratriz, está do lado dos y positivos.

$S(1)$ é o cone S considerado anteriormente.

Se t representa o tempo, por uma deformação contínua que conserva os comprimentos, passamos da superfície $S(0)$ (no início do tempo), ao cone S (no tempo 1). Passamos, do mesmo modo, da superfície $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, c_2, c'2 \dots c_n, c'_n, 0]$ para a superfície $\Sigma[S, c_1, c'_1, c_2,$ $c'_2 \dots c_n, c'_n, 0]$ por intermédio das superfícies $\Sigma[S(t), c_1, c'_1 \dots c_n, c'_n, 0]$.

Essa superfícies têm, t permanecendo fixo, uma superfície limite $\Sigma[S(t), c_1, c'_1 \dots c_n, c'_n, 0]$. A transformação pontual

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \Psi_t(z)$$

que permite passar dessa superfície de revolução, assumida inteira, ao cone $S(t)$, assumido inteiro e definido por uma função $\Psi_t(z)$ que admite entre z_0 e z_1 uma variação total igual a $(z_0 - z_1)$[84]. Portanto, essa superfície é aplicável sobre $S(0)$.

[98] Como as superfícies $S(0)$, $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, \dots c_n, c'_n, 0]$, $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, \dots 0]$ são idênticas, vemos que passamos por uma deformação contínua do setor plano à superfície de revolução $\Sigma(S, c_1, c'_1, \dots, 0)$.

É fácil de realizar modelos das superfícies de revolução aplicáveis sobre o plano que acabamos de obter.

Sabemos, com o auxílio de uma folha de papel, realizar o modelo do cone de revolução por uma deformação, imagem da deformação do cone $S(t)$. Do mesmo modo, podemos realizar uma deformação do papel, imagem da deformação da superfície $\Sigma[S(t), c_1, 0]$, o que dá um modelo da superfície $\Sigma[S, c_1, 0]$ a qual é formada de dois pedaços de cones de revolução.

De uma maneira geral, sabemos formar um modelo de $\Sigma[S, c, c'_1, \dots c'_n, 0]$ pela deformação de uma folha de papel; portanto, por esse procedimento realizamos, com a aproximação que quisermos, a imagem de $\Sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \dots, 0)$.

Se admitirmos que podemos realizar por deformação do papel a imagem de todo desenvolvível analítico, as imagens de todas as superfícies definidas no §79 serão obtidas pelo mesmo procedimento.

A deformação de uma folha de papel nos permite, portanto, obter imagens de superfícies não analíticas aplicáveis sobre o plano tão perfeitas quanto aquelas que obtemos pelo mesmo procedimento para representar as superfícies analíticas. Nesse sentido, podemos dizer que, para prever a existência de superfícies não analíticas aplicáveis sobre o plano, é suficiente observar quanto a forma das superfícies fisicamente aplicáveis sobre o plano difere daquelas das superfícies desenvolvíveis.

Notemos ainda que o procedimento que parece ser o mais simples, aquele que primeiro

[84] Vê-lo-íamos retomando os raciocínios do parágrafo 48.

vem à mente, que permite fazer corresponder um problema geométrico ao problema físico da deformação de superfícies, conduziu à consideração de funções contínuas que não têm derivadas.

81. Os resultados precedentes estão em contradição com os enunciados clássicos relativos à aplicação e à deformação de superfícies. Encontramos, por exemplo, superfícies aplicáveis sobre o plano e não desenvolvíveis.

A contradição não é senão aparente. Os enunciados clássicos são, de fato, obtidos com o auxílio de raciocínios que supõem implicitamente ou explicitamente a existência e a continuidade de todas as derivadas que se é conduzido a considerar. O número dessas derivadas varia de uma questão a outra. Em alguns raciocínios supõe-se ainda que as funções das quais se ocupa são analíticas, de sorte que os enunciados clássicos não são demonstrados senão para certos conjuntos de superfícies que variam segundo a natureza da questão. De uma [99]
maneira geral, as demonstrações são variáveis para o conjunto de superfícies analíticas e, na maioria das vezes, às superfícies analíticas se aplicam os raciocínios empregados.

Tomemos, por exemplo, este teorema: todas as superfícies aplicáveis sobre o plano são desenvolvíveis.

A demonstração dada por Ossian Bonnet[85] *aplica-se a todas as superfícies que têm raios de curvatura principal variando de uma forma contínua*. Com efeito, Ossian Bonnet demonstra que se x, y, z são as coordenadas de um ponto da superfície α, β aquelas do ponto correspondente do plano, devemos ter:

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}}{\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta}}$$

e disso ele conclui que as três funções $\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}$ são funções de uma dentre elas, e a teoria ordinária do determinante funcional supõe a continuidade das derivadas que intervêm no jacobiano.

As derivadas segundas $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$, ... devem, portanto, existir e ser contínuas para que o raciocínio do Sr.O. Bonnet tenha um sentido, o que retorna a supor que a superfície goza da propriedade geométrica indicada.

As superfícies construídas no parágrafo 78 nos mostram que não somente o enunciado do teorema de Ossian Bonnet não é legitimado senão para certas superfícies, como também que ele não é exato senão se fizermos certas restrições sobre a natureza das superfícies consideradas.

82. Como outro exemplo tomemos a recíproca do teorema de Ossian Bonnet:

toda superfície desenvolvível é aplicável sobre o plano.

Demonstramo-la ordinariamente supondo que se chama superfície desenvolvível a super-

[85] *Annali di Matematica*, 2. série, volume VII. Essa demonstração está reproduzida com as mesmas notações no volume I de *Leçons sur la théorie des surfaces* do Sr.Darboux e no *Traités d'Analyse* dos Srs.Jordan e Picard

fície formada pelas tangentes a uma curva espacial que tem planos osculatórios variando de uma maneira contínua, pois colocamos o ds^2 da [100] superfície sob a forma

$$ds_1^2 = \left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right) e^{i\int \frac{ds}{R}} \cdot \left(ds + dl - il\frac{ds}{R}\right) e^{-i\int \frac{ds}{R}}$$

(notação do tratado de análise do Sr. PICARD), R designando o raio de curvatura da curva espacial.

Damos correntemente à palavra superfície desenvolvível dois significados distintos. Chamamos assim:

1. Uma superfície decomponível em cones, cilindros e superfícies geradas pelas tangentes a uma curva espacial.

2. A superfície envelope de um plano dependente de um parâmetro. – É essa definição que serve no teorema de OSSIAN BONNET.

Seja

$$ux + vy + wz + p = 0$$

esse plano. – O envelope é definido por essa equação e

$$u'x + v'y + w'z + p' = 0,$$

as derivadas sendo tomadas em relação ao parâmetro t do qual o plano depende. Isso quer dizer que obtemos a equação da superfície resolvendo essa segunda equação em relação a t e levando na primeira. A teoria das equações implícitas supõe a existência e a continuidade de u'', v'', w'', p''; mas isso não quer dizer que a superfície seja desenvolvível no sentido 1.

Com efeito, suponhamos que φ'' seja contínua, o plano

$$z = tx + t^2y + \varphi(t) \tag{1}$$

tem um envelope. As geratrizes dadas por (1) e

$$o = x + 2ty + \varphi'(t) \tag{2}$$

variam de uma forma contínua. Se, portanto, a curva dada por (1), (2) e

$$o = 2y + \varphi''(t)$$

for tangente às geratrizes, ela será retificável. Podemos tomar $\varphi''(t)$ de variação não limitada, donde a superfície (1), (2) é desenvolvível no sentido 2 sem ser no sentido 1. É evidente, aliás, que toda superfície desenvolvível no sentido 1 não é necessariamente no sentido 2.

O enunciado recíproco do teorema de OSSIAN BONNET supõe, portanto, que a palavra desenvolvível tenha o sentido restrito dado no início deste parágrafo.

[101] Para obter um resultado um pouco mais geral, vamos procurar em quais casos

podemos aplicar sobre um cilindro, um cone, uma superfície formada pelas tangentes de uma curva espacial.

83. Para que um cilindro seja aplicável sobre o plano, é necessário que entre quaisquer de seus pontos possamos traçar uma curva retificável. Se os dois pontos escolhidos não estiverem sobre uma mesma geratriz, a projeção dessa curva sobre o plano da seção reta do cilindro não se reduzirá a um ponto e, por consequência, será uma curva portada pela curva de seção reta; isso quer dizer que se

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

for a seção reta, a projeção considerada terá equações que serão obtidas substituindo nessas fórmulas t por uma função contínua de um parâmetro.

A projeção sendo retificável, a seção reta também é[86].

Para que um cilindro seja aplicável sobre o plano, é necessário, portanto, que sua seção reta seja retificável; isso é também suficiente. Com efeito, tomemos sobre a seção reta uma origem O, e façamos corresponder a todo ponto a dessa seção reta o ponto A do eixo dos x, tal que OA seja igual ao comprimento do arco de seção reta Oa. Façamos corresponder, ainda, a toda geratriz uma paralela ao eixo dos y (os eixos são retangulares), os comprimentos portados pelas geratrizes sendo conservados. Essa correspondência realiza a aplicação.

Com efeito, sejam c uma curva do cilindro, C a curva correspondente do plano, a e b dois pontos de c, A e B os pontos correspondentes de C, a_1 e b_1 os pontos da seção reta que pertecem às mesmas geratrizes que a e b, e A_1 e B_1 os pontos correspondentes do plano. Temos, evidentemente:

$$\overline{A_1B_1} > \overline{a_1b_1}$$

e, consequentemente, $\overline{AB} > \overline{ab}$.

Os dois trapézios retangulares aa_1b_1b, AA_1B_1B, têm as mesmas bases, donde a diferença entre as hipotenusas é inferior a das alturas,

$$\overline{AB} - \overline{ab} > \overline{A_1B_1} - \overline{a_1b_1}.$$

[102] Donde, se dividirmos c em arcos como ab,

$$\Sigma\overline{AB} - \Sigma\overline{ab} = \Sigma(\overline{AB} - \overline{ab}) > \Sigma(\overline{A_1B_1} - \overline{a_1b_1}) = \Sigma\overline{A_1B_1} - \Sigma\overline{a_1b_1}.$$

As duas primeiras somas tendendo para os comprimentos de C e c, as duas últimas para os comprimentos das projeções de C e c sobre o eixo dos x, por um lado, sobre a seção reta, por outro. Essas duas últimas somas são iguais, donde C e c têm o mesmo comprimento.

84. Resolvamos o mesmo problema para os cones. Seja um cone que tem por vértice a origem, se ele é aplicável sobre o plano, ele contém curvas retificáveis não portadas pelas

[86] Disso resulta uma propriedade que já nos serviu: sobre um cilindro cuja seção reta não é retificável, as únicas curvas retificáveis são portadas pelas geratrizes.

geratrizes. Seja

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

uma dessas curvas. A curva retificável,

$$x = \frac{f(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \qquad z = \frac{\psi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}},$$

é portada por uma diretriz esférica do cone. Chamamos assim o cone cujas geratrizes têm os cossenos diretores

$$\alpha = f_1(t), \qquad \beta = \varphi_1(t), \qquad \gamma = \psi_1(t),$$

as curvas

$$x = kf_1(t), \qquad y = k\varphi_1(t), \qquad z = k\psi_1(t),$$

k sendo independente de t.

Em um cone aplicável sobre o plano, a diretriz esférica é, portanto, retificável. E, reciprocamente, todo cone de diretriz esférica retificável é aplicável sobre o plano; como vemos, fazendo corresponder à diretriz esférica um arco de círculo de raio igual ao da diretriz esférica e às geratrizes dos raios desse arco.

Nessa aplicação, se a diretriz esférica tiver comprimento superior à circunferência que porta sua transformada, a um ponto do plano corresponderão vários pontos do cone; mas em torno de cada ponto do cone, exceto do vértice, poderemos encontrar um fragmento do cone para o qual a transformação precedente realizará uma correspondência biunívoca com um certo domínio do plano; essa correspondência conserva os comprimentos como mostra um raciocínio análogo àquele do parágrafo precedente. Dizemos de um tal cone que ele é aplicável sobre o plano sem procurar se, após a aplicação, um ponto do plano corresponde ou não a um único ponto do cone.

[103] Podemos agora dizer que *a condição necessária e suficiente para que um cone ou um cilindro sejam aplicáveis sobre o plano é que exista sobre a superfície uma curva retificável que encontra todas as geratrizes e que, se se tratar do cone, não passa pelo vértice.*

Observemos que, porque existem funções deriváveis de variação não limitada, existem curvas que têm tangentes em todo ponto e que não são retificáveis, *donde existem cones e cilindros que têm planos tangentes, segundo cada geratriz, e que não são aplicáveis sobre o plano.*

85. Consideremos uma superfície regrada e suponhamos que possamos, sobre essa superfície, traçar duas curvas retificáveis que não se encontram e que encontram, cada uma, uma vez cada geratriz; sejam $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $x(\theta)$, $y(\theta)$, $z(\theta)$ essas duas curvas. A cada ponto t da primeira curva, façamos corresponder o ponto θ da segunda situado sobre a mesma geratriz, então, θ é uma função contínua sempre crescente ou decrescente de t. Substituindo θ pelo seu valor em função de t, a segunda curva torna-se $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$.

A curva

$$x = x(t) - x_1(t), \qquad y = y(t) - y_1(t), \qquad z = z(t) - z_1(t)$$

encontra todas as geratrizes do cone diretor da superfície cujo vértice é a origem, essa curva sendo retificável, o cone será aplicável sobre o plano.

Isso posto, vamos demonstrar que *para que a superfície formada pelas tangentes de uma curva espacial seja aplicável sobre o plano, é necessário e suficiente que seu cone diretor seja aplicável sobre o plano*. Nesse enunciado, chamamos de superfície aplicável sobre o plano uma superfície que a todo ponto dela podemos fazer corresponder um ponto do plano, essa correspondência conservando os comprimentos; a um ponto do plano corresponde um número finito ou infinito de pontos da superfície.

De acordo com o que precede, a condição é necessária; para mostrar que ela é suficiente, efetuemos antes a aplicação do cone diretor sobre o plano. Vamos, agora, fazer corresponder à curva espacial dada Γ uma curva plana γ, os arcos correspondentes tendo o mesmo comprimento, a tangente em todo ponto a de γ sendo paralela ao desenvolvimento da geratriz do cone diretor que é paralela à tangente de Γ no ponto A homólogo a a[87].

[104] Para construir γ, dividamos Γ com o auxílio dos pontos A_i correspondentes aos valores t_i do parâmetro, e portemos sobre as geratrizes Oa'_i correspondentes do desenvolvimento do cone diretor de comprimentos $Oa'_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$; $s(t)$ representando o comprimento do arco $(0, t)$ de Γ.

Seja OM_i o vetor soma de $Oa'_1, Oa'_2 \dots Oa'_i$. Consideremos o polígono $OM_1M_2M_3\dots$, se supusermos $t_0 = 0$, o comprimento $OM_1M_2\dots M_i$, calculado sobre esse polígono, será igual a $s(t_i)$. Façamos corresponder esse polígono a Γ de maneira que os comprimentos sejam conservados; então M_i corresponde a A_i.

Suponhamos que aumentemos indefinidamente o número dos t_i de maneira que o máximo de $t_i - t_{i-1}$ tenda para zero e mostremos que esses polígonos têm um limite; será suficiente demonstrar que os pontos correspondentes aos valores t_i escolhidos tendem uniformemente para os pontos limite.

Sejam M_i e N_{α_i} dois vértices correspondentes de dois polígonos considerados. Temos:

$$\begin{aligned} \text{comp } M_iN_{\alpha_i} &\leqslant |\text{comp } OM_i - \text{comp } ON_{\alpha_i}| \\ &\leqslant \sum_1^i |\text{comp } M_iM_{i-1} - \text{comp } N_{\alpha_i}N_{\alpha_{i-1}}|. \end{aligned}$$

O comprimento M_iM_{i-1} é o mesmo do segmento Oa'_i; o de $N_{\alpha_i}N_{\alpha_{i-1}}$ é o mesmo da resultante dos segmentos

$$Ob'_{\alpha_{i-1}+1}, Ob'_{\alpha_{i-1}+2} \dots Ob'_{\alpha_i}.$$

87 Essa propriedade do desenvolvimento da aresta da cúspide deve ser considerada como a generalização do teorema clássico: a curvatura da aresta da cúspide é conservada.

A soma dos comprimentos desses segmentos é Oa'_i, e eles farão entre eles ângulos inferiores a ε, se ε for o máximo dos ângulos $a'_iOa'_{i-1}$; portanto:

$$0 \leqslant \text{comp } M_iM_{i-1} - \text{comp } N_{\alpha_i}N_{\alpha_{i-1}} \leqslant \varepsilon[s(t_i) - s(t_{i-1})].$$

Assim, se nos ocuparmos do arco $(0, t)$ de Γ, quaisquer que sejam os novos pontos escolhidos sobre Γ entre os A_i, a distância entre dois pontos correspondentes dos polígonos será inferior a $\varepsilon s(t)$.

Ora, ε tende para zero com o máximo de $t_i - t_{i-1}$. Os polígonos têm, portanto, uma curva limite γ.

[105] Tomemos para eixo dos x no plano a geratriz Oa'_0 do desenvolvimento do cone diretor; se o intervalo $(0, t)$ é suficientemente pequeno[88], o ângulo das geratrizes $Oa'_1, Oa'_2 \ldots$ com o eixo dos x é inferior a uma reta e, por consequência, os polígonos cujo limite é γ têm equações da forma:

$$y = f_1(x), y = f_2(x) \ldots$$

Suponhamos que essas equações representem não os polígonos tais como $0A_1A_2\ldots$, mas as curvas que obtemos conectando os lados consecutivos $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} por arcos de círculos. Suporemos esses arcos escolhidos tão pequenos que os comprimentos das curvas tendam para o comprimento comum dos polígonos, isto é, aquele de Γ. As funções $f_i(x)$ têm derivadas contínuas. Além disso, quando i aumenta, a derivada $f'_i(x_0)$ tende para o coeficiente angular da geratriz do desenvolvimento do cone diretor que corresponde ao ponto $x = x_0$ de γ, seja $\varphi(x_0)$.

As funções limitadas em seu conjunto $f'_i(x)$ tendem para $\varphi(x)$, portanto temos:

$$\lim \int_0^x f'_i(x)dx = \lim f_i(x) = \int_0^x \varphi(x)dx.$$

Donde γ tem por equação:

$$y = \int_0^x \varphi(x)dx,$$

e como $\varphi(x)$ é uma função contínua,

$$y'_x = \varphi(x),$$

e as tangentes a γ são paralelas às geratrizes correspondentes ao desenvolvimento do cone diretor.

Além disso,

$$\lim \int_0^x \sqrt{1 + \overline{f'_i(x)}^2}dx = \int_0^x \sqrt{1 + \varphi^2(x)}, dx$$

[88] Essa restrição não tem importância; com efeito, é suficiente demonstrar que, em torno de cada geratriz, podemos encontrar um pedaço aplicável sobre o plano, de modo que ele também seja para toda a superfície.

donde γ tem o mesmo comprimento que Γ.

[106] 86. Vamos, agora, definir a correspondência entre o plano e a superfície. A todo ponto de Γ corresponde um ponto de γ como já foi dito. A um ponto A da superfície, situado sobre a geratriz que passa pelo ponto A_1 de Γ, corresponde um ponto a situado sobre a tangente de γ no ponto a_1 homólogo de A_1 tal que $a_1a = A_1A$, esses dois segmentos estando orientados com relação a γ e Γ no sentido correspondente.

Designemos por A' o ponto do cone diretor situado sobre a geratriz paralela a A_1A e tal que

$$\overline{A_1A} = \overline{OA'},$$

e por a' o desenvolvimento de A'. Então temos:

$$\overline{a_1a} = \overline{Oa'}.$$

Sejam C uma curva retificável da superfície; c, C', c' os lugares dos pontos, a, A', a' correspondendo aos pontos A de C. Temos as igualdade segmentares se A e B estão sobre C,

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1} + \overline{A'B'},$$

$$\overline{ab} = \overline{a_1b_1} + \overline{a'b'},$$

donde

$$|\text{comp } AB - \text{comp } ab| \leqslant |\text{comp } A_1B_1 - \text{comp } a_1b_1| + |\text{comp } A'B' - \text{comp } a'b'|.$$

Suponhamos que C não encontra senão uma vez cada geratriz. Então C' é retificável, § 85, e tem-se:

$$|\text{comp } AB - \text{comp } ab| \leqslant |\text{comp arc } A_1B_1 \text{ de } \Gamma - A_1B_1| +$$

$$+ |\text{comp arc } a_1b_1 \text{ de } \gamma - a_1b_1| + |\text{comp arc } A'B' \text{ de } C' - A'B'| +$$

$$+ |\text{comp arc } a'b' \text{ de } c' - a'b'|.$$

Se, portanto, consideramos um polígono P inscrito em C e os polígonos p, P', p', P_1, p_1 correspondentes, temos:

$$|\text{comp } P - \text{comp } p| \leqslant (\text{comp } \Gamma - \text{comp } P_1) + (\text{comp } \gamma - \text{comp } p_1) +$$

$$+ (\text{comp } C' - \text{comp } P') + (\text{comp } c' - \text{comp } p').$$

Portanto, C e c têm o mesmo comprimento. Esse resultado estende-se imediatamente às curvas que encontram um número finito de vezes as geratrizes. Para as outras, que são limites de curvas que não encontram as geratrizes senão um número finito de vezes, podemos afirmar que o comprimento da curva da [107] superfície é, no mínimo, igual ao comprimento da curva correspondente do plano.

Mas a porção considerada de γ é convexa, as tangentes nas duas extremidades fazem um ângulo inferior a uma reta; portanto, se não consideramos senão uma seção da superfície (limitada por Γ), a correspondência com o plano será unívoca.

Seja, na porção correspondente do plano, um segmento ab, consideremo-lo como a curva c. Vemos imediatamente que c é retificável, donde c' o é, e, por consequência, também C. Disso resulta que:

$$AB \leqslant ab.$$

Isso posto, seja C uma curva retificável qualquer, inscrevamos nessa curva uma linha poligonal P com um número finito ou infinito de lados, tomando cuidado que todos os pontos de encontro de C e de Γ sejam vértices (ou limites de vértices) desse polígono, p sendo o polígono correspondente, temos:

$$\text{comp } p \geqslant \text{comp } P,$$

d'ou

$$\text{comp } c \geqslant \text{comp } C.$$

Aproximando esse resultado do precedente, temos:

$$\text{comp } c = \text{comp } C,$$

e a superfície é aplicável sobre o plano.

Sabemos, portanto, construir uma curva espacial mais geral cujas tangentes formam uma superfície aplicável sobre o plano; com efeito, é suficiente dar o cone diretor aplicável sobre o plano, o que sabemos fazer, e a função contínua positiva crescente $s(t)$ e disso deduzir Γ por uma construção análoga àquela que deu γ.

Nos parágrafos precedentes chamamos superfície aplicável sobre o plano uma superfície S que corresponde a uma superfície Σ portada pelo plano, a correspondência pontual entre S e Σ sendo biunívoca e conservando os comprimentos.

S sendo dada, Σ não é determinada. Com efeito, se S for um cone, poderemos tomar por Σ um setor. Seja G um de seus raios que divide Σ em Σ_1 e Σ_2 e seja Σ_2' o simétrico de Σ_2 com relação a G; podemos tomar por Σ, $\Sigma_1 + \Sigma_2'$.

[108] As superfícies Σ, que acabamos de definir relativamente aos cones e às superfícies formadas das tangentes a uma curva, são tais que ao redor de cada um de seus pontos (aqueles que correspondem ao vértice do cone, exceto os pontos da aresta da cúspide) podemos encontrar um pedaço de Σ que não encontra senão uma vez o plano. Seja Σ_1 um tal pedaço, S_1 o pedaço correspondente a S; entre S_1 e Σ_1, a correspondência pontual é biunívoca e Σ_1 é um domínio plano.

É a superfície Σ assim definida, que é única porque duas dessas superfícies seriam compostas de pedaços iguais dispostos paralelamente, o que chamamos de desenvolvimento de S. 88.

Podemos agora dar exemplos de *curvas espaciais cujas tangentes formam uma superfície não aplicável sobre o plano.*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \varphi(t)$$

$\varphi(x)$ sendo uma função cuja derivada é contínua, mas de variação não limitada, dá-nos um tal exemplo. Sabemos que podemos mesmo supor que $\varphi''(x)$ exista, donde há *curvas espaciais que têm em todo ponto um plano oscilador, e cujas tangentes formam uma superfície não aplicável sobre o plano. Uma tal superfície admite planos tangentes; o plano tangente é o mesmo ao longo de toda geratriz; o plano tangente depende, portanto, de um só parâmetro.*

89. Terminaremos procurando superfícies de revolução aplicáveis sobre o plano.

Demonstremos primeiro que, se um pedaço da superfície de revolução é aplicável sobre o plano, os meridianos correspondem a retas paralelas ou concorrentes. É evidente que os meridianos sendo linhas de comprimento mínimo ou geodésico têm por transformadas geodésicas do plano, isto é, retas.

Sejam A, B dois pontos de um meridiano, a, b seus correspondentes no plano; A', B' dois pontos de outro meridiano situado, respectivamente, sobre as paralelas de A e B, a', b' seus homólogos.

Temos $ab = a'b'$, aliás, as duas curvas da superfície que correspondem às duas retas ab, $a'b'$, são simétricas uma à outra em relação ao plano bissetor dos meridianos de A e de A'; Eles são iguais e

$$ab' = a'b.$$

A figura $abb'a'$ é, portanto, um trapézio isósceles.

[109] Sejam A'', B'' os simétricos de A, B com relação ao plano meridiano de A'; $a''b''b'a'$ é simétrico de $abb'a'$ com relação a $b'a'$, donde as três retas ab, $a'b'$, $a''b''$ ou bem concorrem em um mesmo ponto O, que é o centro da circunferência passando, respectivamente, por a, a', a'' e por b, b', b''; ou bem são paralelas e a, a', a'', por um lado, b, b', b'', por outro, estão em linha reta, aa' e ab sendo perpendiculares.

Se fixamos a posição de um meridiano pelo seu ângulo θ com o meridiano de A, e se A' corresponde a θ_0, o raciocínio precedente mostra que todos os pontos do meridiano de A correspondentes aos valores $\dfrac{m\theta_0}{2n}$, m e n sendo inteiros, têm seus homólogos sobre a circunferência ou a reta $aa'a''$; eles formam um conjunto denso em toda parte sobre essa circunferência. Do mesmo modo é para os pontos do meridiano de B. Os pontos dos meridianos de A e B correspondentes ao mesmo valor de θ estão sobre o mesmo raio. Portanto, os meridianos têm por homólogos as retas paralelas ou concorrentes e as paralelas correspondem às trajetórias ortogonais dessas retas.

Suponhamos primeiro que as retas homólogas dos meridianos sejam paralelas, então as paralelas são iguais, donde têm o mesmo raio e porque os meridianos são retificáveis, as únicas superfícies dessa natureza são:

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$, sendo de variação limitada.

Suponhamos agora as retas concorrentes. Sejam A, B, C três pontos do mesmo meridiano, conservando as notações precedentes, temos:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{\text{arc } bb' - \text{arc } aa'}{\text{arc } cc' - \text{arc } bb'},$$

isso quer dizer que se o eixo dos z é o eixo de revolução, o meridiano é da forma $z = f(x)$, e sendo s seu arco, temos:

$$\frac{\delta s}{\delta x} = \text{ constante}$$

qualquer que seja δx. A distância de dois pontos de abscissas x_0 e x_1 sendo, no mínimo, $|x_0 - x_1|$, a constante é, no mínimo, igual a 1, colocamos:

$$\delta s = \sqrt{1+K}\delta x.$$

Se K é nulo, a superfície é engendrada pelo eixo dos x girando ao redor do eixo dos z, é o plano dos xy.

[110] Suponhamos agora K positivo. Uma solução particular do problema é obtida efetuando a transformação pontual

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \psi(z)$$

(ψ tendo, em todo intervalo de comprimento l, uma variação total igual a l) sobre o cone

$$z^2 = K^2(x^2 + y^2);$$

vamos demonstrar que é a solução geral.

Com efeito, seja $z = f(x)$ um meridiano, se $\nu(x)$ é a variação total de f entre x_0 e x, a superfície de revolução cujo meridiano é $z = \nu(x)$ é também aplicável sobre o plano. Vamos demonstrar que $\nu(x)$ é igual a $K(x - x_0)$.

Sejam dois pontos (x_0, x_1) da curva $z = \nu(x)$, o comprimento do arco dessa curva, compreendida entre esses dois pontos, é superior a

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + \overline{\nu(x_1) - \nu(x_0)}^2};$$

essa quantidade deve, portanto, ser inferior a $K|x_1 - x_0|$, isso quer dizer que temos:

$$0 < \frac{\nu(x_1) - \nu(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant K.$$

Isso posto, consideremos um polígono inscrito em $z = \nu(t)$ e o polígono Q inscrito em $z = K(z - x_0)$ cujos vértices têm as mesmas abscissas, é evidente que:

$$\text{comp } P \leqslant \text{comp } Q.$$

Considerações de geometria elementar mostram que, se R é o polígono inscrito em $z = K(x - x_0) - \nu(x)$ cujos vértices têm mesmas abscissas que as de P e Q, temos:

$$\text{comp } Q - \text{comp } P \geqslant \text{comp } R - (x_1 - x_0),$$

se nos ocupamos do intervalo $x_1 - x_0$.

Se fazemos tender para zero o máximo do comprimento dos lados de P, o segundo membro não tende para zero senão se $\nu(x) - K(x - x_0) = 0$, ora, o primeiro membro tende para zero, portanto:

$$\nu(x) = K(x - x_0).$$

As únicas superfícies de revolução aplicáveis sobre o plano são aquelas que [111] *obtemos pela transformação do* §*78 aplicado às superfícies analíticas aplicáveis sobre o plano; o eixo de revolução sendo* $0z$.

90. Consideremos uma superfície aplicável sobre o plano. Se exprimimos as coordenadas de um ponto dessa superfície em função das do ponto correspondente do plano, temos a superfície sob a forma retificável, ela é, portanto, quadrável. Vamos demonstrar que, na aplicação sobre o plano, as áreas são conservadas. O raciocínio estender-se-ia, aliás, às superfícies aplicáveis sobre uma superfície analítica qualquer.

Seja S uma superfície aplicável sobre o plano (u, v). Dividamos o plano (u, v) com o auxílio de paralelas em três direções, $w = 0$, $w = 60°$, $w = 120°$, em triângulos equiláteros. A uma rede desses triângulos corresponde um poliedro inscrito na superfície S; cada face desse poliedro sendo de área inferior ao triângulo correspondente do plano (u, v), a área de S é, no máximo, a do domínio correspondente em (u, v).

Consideremos agora uma sequência de superfícies S_i que tendem para S. Escolhamos arbitrariamente um número l e seja m_i o mínimo do comprimento das curvas Γ_i de S_i que correspondem àqueles Γ que unem os pares de pontos do plano (u, v) que estão distantes de l, pelo menos.

O menor limite dos m_i quando $\dfrac{1}{l}$ tende para zero é, no mínimo, l. Com efeito, se ele fosse inferior a l, poderíamos encontrar uma sequência de curvas $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2} \ldots$ cujos comprimentos teriam um limite inferior a l. Ora, isso é impossível porque iria demonstrar a existência de uma curva de comprimento inferior a l, limite de certas curvas $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2} \ldots$, isto é, de uma curva que corresponde a uma curva Γ do plano (u, v).

Portanto, se l é superior a um certo número i_0, as curvas que unem pontos dos lados opostos de um quadrado de lado l do plano (u, v) têm por homólogas curvas da superfície S_i de comprimentos superiores a $l - \varepsilon$.

Sejam M e M_i as partes de S e S_i correspondentes a esse quadrado. Podemos, sem aumentar o menor limite das áreas das S_i, supor que as superfícies S_i são analíticas.

Dividamos M_i por duas séries de curvas ortogonais C_p, C'_p homólogas das curvas do plano (u, v) que unem pontos dos lados opostos do quadrado. Sejam $a_{j,k}$ o comprimento do arco determinado sobre C_k por C'_j e C'_{j+1}, e $a'_{k,j}$ o comprimento do arco determinado por C_j e C_{j+1} sobre C'_k. A área de M_i é o limita da soma

$$\sum_k \sum_j a_{kj} a'_{kj}$$

[112] quando o máximo de a_{kj} e a'_{kj} tende para zero. Ora, essa soma é, evidentemente, superior a $(l - \varepsilon)^2$, donde a menor das áreas dos M_i é est l^2.

Quando uma superfície é aplicável sobre o plano, as partes correspondentes do plano e da superfície têm, portanto, mesma área – se elas são quadráveis ou não são –, mesmas áreas interiores e exteriores.

Quando duas superfícies analíticas são aplicáveis uma sobre a outra, os comprimentos, as áreas e os ângulos são conservados; vimos que, quando se trata de superfícies não analíticas, os comprimentos e as áreas ainda se conservam, mas os ângulos não[89].

[89] Suponhamos realizada a imagem material de uma superfície. A área, no sentido usual da palavra, de uma tal superfície, pode ser mensurável pela massa da matéria que a constitui. Em uma deformação da superfície, essa massa não se altera, também a área, no sentido usual da palavra, não se altera. Uma das condições que deve cumprir a área, no sentido matemático, para que possamos assimilar à área, no sentido usual da palavra, e para que possamos considerar a deformação física de uma superfície como a imagem de uma deformação geométrica, é, portanto, de não se alterar por deformações geométricas que conservam os comprimentos.

CAPÍTULO 6

O problema de Plateau

91. Nós nos propomos, neste capítulo, a demonstrar a existência de uma superfície S que tem por fronteiras um contorno C dado e por área interior a área mínima de C. A área de qualquer outra superfície que tiver por fronteira C será, no mínimo, igual àquela de S; nesse sentido, a área de S será um mínimo e a superfície S poderá ser dita *mínima*. No caso de nos limitarmos à análise de superfícies que têm todos os elementos que geralmente são considerados (planos, tangentes, raios de curvatura etc.), esse problema recebeu o nome de *problema de* PLATEAU.

Não está demonstrado senão que o problema de PLATEAU tem solução; vamos ver que se não se impuser à superfície mínima condição suplementar alguma, a existência dessa superfície poderá ser facilmente demonstrada. Os resultados que vamos obter podem, assim, ser considerados como preparativos para o estudo da existência da solução do problema de PLATEAU.

[113] Os raciocínios que se seguem se aplicam a outros problemas que o de PLATEAU; para enunciar esses problemas, nós vamos antes definir certas integrais de curva e de superfície.

92. Consideremos uma curva C cujos pontos dependem de uma forma contínua de um parâmetro t, uma função de t será dita fixada aos pontos de C. Suponhamos C retificável e $f(t)$ contínua. Dividamos C em um número finito de arcos parciais de comprimentos $l_1, l_2, \ldots$ e sejam $f_1, f_2, \ldots$ os valores de f para certos pontos desses arcos parciais. A soma $\Sigma l_i f_i$, quando o máximo dos l_i tende para zero, tende para um limite determinado[90] que nós representaremos por

$$\int_C f(t)ds.$$

Se $f(t) = 1$, a integral representa o comprimento.

Consideremos uma superfície quadrável S cujos pontos dependem de uma maneira contínua de (u, v) e uma função contínua $f(u, v)$ fixada aos pontos dessa superfície. Dividamos S em um número finito de pedaços quadráveis de áreas $a_1, a_2, \ldots$, e sejam $f_1, f_2, \ldots$ os valores de f para certos pontos desses pedaços quadráveis. Quando o máximo do diâmetro desses pe-

[90] É suficiente retomar o raciocínio clássico relativo à existência da integral de uma função contínua para obter esse resultado.

daços e o máximo de a_i[91] tendem para zero, a soma $\Sigma f_i a_i$ tende para um limite determinado que representaremos por:

$$\int\int_S f(u,v)da.$$

Se $f(u,v) = 1$, a integral representa a área.

Poderíamos ter definido essas integrais pelo procedimento seguinte. É fácil de fazer corresponder a C um segmento; os comprimentos estando conservados, é possível demonstrar que podemos estabelecer, entre os pontos de S e os pontos de um plano, uma correspondência que conserva as áreas[92]. Essas correspondências estabelecidas, elas definem sobre a reta, ou no plano, uma função F que corresponde a f; a integral de F é igual à integral da curva ou da superfície que definimos.

[114] Um ou outro procedimento permite indicar em que casos diremos que f é somável e, por consequência, de estender a definição de integral ao caso em que f não é contínua; mas isso não nos será de utilidade alguma.

93. Consideremos uma família de curvas retificáveis C e uma família de superfícies quadráveis S. E seja f uma função definida no conjunto dos pontos de todos os C ou S, e jamais negativa. Suporemos que f é contínua nesse conjunto. As integrais

$$\int_C fds, \qquad \int\int_S fda$$

têm, então, um sentido. Demonstremos que, se C (ou S) for o limite das curvas C_i (ou das superfícies S_i) tomadas na família considerada, a integral relativa a C (ou S) será, no máximo, igual ao menor limite das integrais relativas a C_i (ou S_i).

Dividamos C (ou S) em um número finito de pedaços de comprimentos (ou de áreas) $m_1, m_2, \ldots$ e sejam $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ os valores mínimos de f nos pedaços correspondentes. À divisão de C (ou de S) corresponde sobre C_i (ou S_i) uma divisão em pedaços de comprimentos (ou de áreas) $m_1^i, m_2^i, \ldots$; os valores mínimos de f nos pedaços correspondentes são $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots$

Quando i aumenta indefinidamente, γ_j^i tem por limite γ_j e o menor dos limites de m_j^i é, no mínimo, igual a m_j, donde o menor limite de $\Sigma_j m_j^i \gamma_j^i$ é, no mínimo, igual a $\Sigma_j m_j \gamma_j$

É suficiente aumentar indefinidamente o número dos pedaços de maneira que o máximo de seus diâmetros tenda para zero para ter a propriedade enunciada.

Adotando as denominações do Sr.BAIRE, podemos dizer que a integral considerada é por toda parte igual a seu mínimo, ou, ainda, que, como função de C (ou de S), ela é semicontínua internamente.

Se a família das curvas (ou superfícies) compreender todas as superfícies retificáveis (ou todas as superfícies quadráveis), o valor da integral para C (ou S) será exatamente o menor limite das integrais relativas às curvas (ou superfícies) das quais C (ou S) será o limite[93]; porque podemos escolher os C_i (ou os S_i) de maneira que γ_j^i tenha γ_j por limite.

---

[91] É fácil de demonstrar que essa segunda condição é uma consequência da primeira.

[92] Pode ser que essa correspondência não seja unívoca.

[93] Essa propriedade poderia ter sido tomada como definição da integral considerada. Esse método tem a

[115] 94. Suponhamos que as curvas C (ou que as superfícies S) sejam todas as que satisfazem a certas condições de contorno – extremidades de C dadas, ou sobre curvas ou sobre superfícies dadas, – fronteira de S dada ou sobre superfícies dadas.

Suporemos, ainda, que C (ou S) está sujeita a permanecer em uma porção limitada Π do espaço, ou que C desloca-se sobre uma superfície Σ que não tem cobertura infinita. f sendo uma função contínua em Π ou sobre Σ, propomo-nos a investigar se a função

$$\varphi(C) = \int_C f ds \qquad \left(\text{ou } \varphi(S) = \int\int_S f da\right)$$

atinge seu mínimo.

Quando procuramos demonstrar que uma função $f(E)$ de certos elementos E atinge seu mínimo, pelo método que serve para as funções contínuas de pontos, somos conduzidos às duas operações seguintes:

I. Escolher uma sequência de elementos $E_1, E_2, \ldots$ que tem um elemento limite e, e tal que $f(E_1), f(E_2), \ldots$ tenda para um limite inferior $mf(E)$ de $f(E_i)$.

II. Demonstrar que $f(e) = mf(E)$.

De acordo com o que acabamos de dizer, se c (ou s) for o limite de C_i, (ou S_i), $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] será, no máximo, igual ao menor dos limites dos $\varphi(C_i)$ [ou $\varphi(S_i)$]; além disso, $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] será, no máximo, igual a $m\varphi(C)$ [ou $m\varphi(S)$], donde efetuamos a operação II.

95. Para efetuar a operação I, empregaremos um método que o Sr.HILBERT indicou em uma nota dos *Nouvelles Annales* (agosto de 1900), nota que ele já tinha apresentado em setembro de 1899 no congresso de Munique.

Ou bem sabemos que existe um elemento e tal que $f(e) = mf(E)$, ou bem sabemos que podemos encontrar uma sequência de elementos $E_1, E_2, \ldots$ tais que $f(E_1), f(E_2), \ldots$ tenham por limite $mf(E)$. Tudo se resume a escolher entre os E_i uma sequência de elementos que tenham um elemento limite.

Suporemos que E é uma função de n variáveis, contínua em relação ao conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dessas variáveis, definida em uma porção D do espaço $(x_1 x_2 \ldots x_n)$, e que temos sempre $|E| < P$. Então, E será dita [116] o limite[94] de E_i se, qualquer que seja ε, pudermos escolher

vantagem de sugerir definições das integrais

$$\int f(x, y, x', y')dt$$

$$\int\int f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) dudv$$

no caso em que as funções f são contínuas e jamais negativas. O caso em que f é contínua reduz-se a esse pela adição de uma constante. Com essas definições, podemos fazer aplicações mais vastas das observações que se seguem.

[94] Suporemos, portanto, que a função E_i tende uniformemente para E. A palavra limite foi empregada precedentemente em um sentido diferente, ver, por exemplo, §23.

i tão grande para que tenhamos:

$$(p > 0) \qquad |E(x_1, x_2, \ldots, x_n) - E_{i,p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

para todo ponto de D.

O Sr.HILBERT observa que, se tivermos certas informações sobre a variação da função E_i, será suficiente escolher entre os E_i uma sequência de elementos e_j tais que, a todo ponto de um conjunto A denso em toda parte de D, corresponda um valor de E_j que tenha um limite quando j aumentar indefinidamente de modo que os E_j tenham um limite. Para esclarecer, suporemos que o conjunto dos números derivados dos E_i considerados como funções de qualquer uma só das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seja limitado.

Suporemos, portanto, que se tenha, quaisquer que sejam $i, x_1, x_2, \ldots, x_n, h, p$,

$$\left| \frac{E_i(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) - E_j(x_1, x_2, \ldots, x_p + h, x_{p+1}, \ldots, x_n)}{h} \right| < M, \qquad (1)$$

M sendo fixo, tomamos por A um conjunto enumerável denso em toda parte de P; seja $P_1, P_2, \ldots$ os pontos de A. Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ números que decrescem até zero.

Os diferentes valores $E_i(P_1)$ estando todos, em valor absoluto, inferiores a P, têm, pelo menos, um valor limite α. Chamamos E_i^1 aqueles dentre os E_i tais que:

$$|E_i(P_1) - \alpha_1| < \varepsilon_1$$

e chamamos e_1 um deles.

Os valores $E_i^1(P_2)$ têm pelo menos um valor limite α_2. Chamamos E_i^2 aqueles dentre os E_i^1 tais que

$$|E_i^1(P_2) - \alpha_2| < \varepsilon_2,$$

e_2 é um dos E_i^2. Definimos da mesma forma $e_3, e_4, \ldots; \alpha_3, \alpha_4, \ldots$

Vamos mostrar que podemos definir uma função e contínua em D pelas igualdades $e(P_i) = \alpha_i$.

Das igualdades (1) deduzimos:

$$\left| \frac{E_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}} \right| <$$

$$< \frac{|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_n|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}} M.$$

[117] O máximo do segundo membro é $\sqrt{n}M$, sendo, portanto, também o máximo do primeiro. A desigualdade precedente pode, portanto, ser escrita:

$$\left| \frac{E_i(P) - E_i(Q)}{l(PQ)} \right| < \sqrt{n}M,$$

o símbolo $l(PQ)$ representando o que podemos chamar de distância de P a Q.

Isso posto, consideremos todos os pontos de A distantes de um ponto M de D de menos de η, eles estão distantes entre eles de menos de 2η, donde os α correspondentes diferem de menos de $2\eta\sqrt{n}M$. Portanto, todos os α correspondentes aos P_i tendendo para M têm um valor limite $e(M)$ que é função contínua de M. Além disso, temos também:

$$\left|\frac{e(P)-e(Q)}{l(PQ)}\right| < \sqrt{n}M.$$

Designemos por l_i o máximo, quando M percorre D, do limite inferior de $l(MP_1)$, $l(MP_2)$,...,$l(MP_i)$, l_i tende para zero com $\frac{1}{i}$. Temos j sendo escolhido inferior a i, de maneira que $l(MP_j)$ não seja superior a l_i,

$$\begin{aligned} |e_i(M)-e(M)| &\leqslant |e_i(M)-e_i(P_j)|+|e_i(P_j)-e(P_j)|+|e(P_j)-e(M)| \\ &\leqslant l_i\sqrt{n}M+\varepsilon_i+l_i\sqrt{n}M, \end{aligned}$$

donde e é o limite da sequência $e_1, e_2, \ldots$

Supomos que E é uma função; se E for um conjunto de um número finito de funções cujos números derivados são limitados, a conclusão subsistirá.

Resta ver se o elemento limite e assim definido faz parte dos elementos E considerados[95].

96. Retomemos a função

$$\varphi(C)=\int_C f ds.$$

O elemento C é o conjunto de três funções que representam as coordenadas [118] dos pontos de C. Suponhamos que tenhamos $f>k>0$, então se $\varphi(C_i)$ tender para $m\varphi(C)$, o comprimento de C_i não aumentará indefinidamente. Seja L um número superior aos comprimentos dos C_i. As coordenadas dos pontos dessas curvas podem ser expressas por funções de um parâmetro t, que varia entre 0 e L, e cujos números derivados são inferiores a 1. Daí a existência de um elemento limite c, dado que supomos que C permanece na porção finita Π do espaço ou sobre a superfície Σ. c realmente faz parte da família de curvas C.

Demonstramos imediatamente, portanto, a existência do mínimo num caso bastante vasto[96].

97. Consideremos a função

$$\varphi(S)=\int\int_S f da.$$

O elemento S é o conjunto de três funções que representam as coordenadas dos pontos de

[95] Em sua nota dos *Nouvelles Annales*, o Sr. HILBERT não expôs seu método para estabelecer a existência do elemento limite senão para dois exemplos particulares. Parece-me que o método que emerge desses dois exemplos é o do §95. Em todo caso, os resultados desse parágrafo são suficientes para demonstrar a existência dos elementos limite nos dois exemplos do Sr. HILBERT.

[96] Para $f=1$ encontra-se um dos exemplos que trata o Sr. HILBERT.

S. Suponhamos que tenhamos encontrado uma sequência $S_1, S_2, \ldots$ tal que $\varphi(S_1), \varphi(S_2), \ldots$ tende para $m\varphi(S)$; suponhamos todos os S_i expressos com o auxílio das coordenadas (u, v) dos pontos de um domínio D por funções cujos números derivados são limitados, então, o que precede demonstra a existência de um elemento limite.

Obteremos um exemplo em que essas condições estejam realizadas supondo $f = 1$, as superfícies S sendo todas as que têm uma fronteira dada C que satisfaz as condições seguintes:

1. A projeção de C sobre o plano dos (x, y) é convexa.

2. Todo plano que contém pelo menos três pontos de C faz, com o plano dos xy, um ângulo inferior a $\alpha(\alpha < 90^o)$.

Da primeira condição resulta que c é retificável, donde o cilindro que projeta C é aplicável sobre o plano. Nessa aplicação, c torna-se $\omega\xi$, e uma das geratrizes, $\omega\eta$, C torna-se C_1 de equação:

$$\eta = \psi(\xi).$$

Toda secante de C faz, de acordo com a condição 2, um ângulo menor que α com o plano dos xy, donde *a fortiori* toda secante de C_1 faz com $\omega\xi$ um ângulo inferior a α. ψ tem, portanto, números derivados inferiores, em valor absoluto, a $\operatorname{tg}\alpha$; C_1 e C são retificáveis.

[119] Encontramos precedentemente que, C sendo retificável, sua área mínima é o limite das dos polígonos inscritos em C e que tendem para C. Seja P_1 um polígono inscrito em C, seja n o número de seus vértices. Designemos por S_p aquele dentre os poliedros de faces triangulares que tem P_1 por fronteira, $n + p$ vértices (sobre P_1 ou não) e cuja área é a menor possível.

S_p existe e pode teoricamente ser obtido por operações algébricas, pois todos os poliedros de $n + p$ vértices podem ser convertidos por deslocamentos contínuos dos p vértices variáveis em um número finito de figuras, e tais deslocamentos fazem variar a área de uma forma contínua.

S_p não pode ter ângulo poliédrico convexo algum, ou, mais geralmente, ângulo poliédrico algum que um plano P possa cortar segundo um contorno fechado. Sejam, com efeito, S o vértice de tal ângulo, Γ o contorno formado pelos lados que não passam por S das faces que passam em S. Γ está inteiramente de um mesmo lado de P, donde o ângulo poliédrico obtido, juntando-se os vértices de Γ à projeção s de S sobre P, tem suas faces respectivamente menores que as do ângulo poliédrico considerado.

S_p não pode ser cortado por um plano P segundo uma curva fechada; com efeito, essa curva limitaria sobre S_p uma superfície Σ, seja M um ponto de Σ, desloquemos o plano P paralelamente a ele mesmo do lado de M até a posição limite Π que ele não pode cruzar sem deixar de encontrar Σ. Todos os vértices de Σ que estão em Π são vértices dos ângulos poliédricos que podem ser cortados por um plano segundo um contorno fechado[97], o que é

[97] Isso não é absolutamente exato. Os vértices de Σ que estão em P são somente os que algum dos ângulos poliédricos correspondentes está inteiramente de um mesmo lado do plano; mas, observando que a fronteira de Σ não tem pontos em Π, demonstraríamos a existência de ângulos poliédricos que teriam a

impossível.

Consideremos agora o plano P de uma face, e mostremos que ele encontra o contorno P_1 em pelo menos três pontos. Em primeiro lugar, é evidente que P contém pelo menos dois pontos de P_1, caso contrário, poderíamos cortar a superfície segundo uma curva fechada por um plano adjacente a P. Suponhamos que P não contenha senão dois pontos de P_1, A e B. Seja γ o contorno de um grupo de faces contidas em P. A seção da superfície por P compõe-se de grupos de faces e de linhas quebradas que juntam A e B a todos esses grupos de faces. Existe, portanto, uma linha traçada sobre a superfície e em P, que junta A ao contorno γ, seja $A\alpha$ e uma linha análoga $B\beta$. Juntemos α a β por uma linha l interior a γ e seja AM_1B, AM_2B as duas partes de P_1. Os [120] contornos $AM_1\beta l\alpha A$, $AM_2\beta l\alpha A$ não atravessam o plano P, da mesma forma as porções de S_p limitadas por esses contornos. Ora, sobre uma das duas linhas quebradas α, β, nas quais γ é dividido, poderemos encontrar um vértice Q tal que os dois lados que resultam em Q formam um ângulo agudo. Vemos sem dificuldade que um plano adjacente de P corta o ângulo poliédrico Q segundo uma curva fechada; o que é impossível.

No que precede, não supomos nada sobre o polígono P_1, agora temos de levar em conta o fato de que, como C, ele verifica as duas condições enunciadas no início deste parágrafo.

A projeção de S_p é, então, o domínio do plano dos xy limitado pela projeção p_1 de P_1, cada ponto desse domínio sendo projeção de um só ponto de S_p [98]. A equação de S_p será, portanto, da forma

$$z = f(x, y),$$

f tendo números derivados no máximo iguais, em valor absoluto, a $\operatorname{tg}\alpha$ e estando definido no domínio limitado por p_1.

Consideremos uma das superfícies S_p de índice bastante grande, de modo que sua área difira da área mínima de P_1 de menos de ε_1. Adicionemos a S_p triângulos que tenham por bases os lados de P_1 e, respectivamente, por vértices os meios dos arcos que limitam sobre C as bases correspondentes.

A nova superfície tem um contorno P_1' sobre o qual operamos como sobre P_1, e assim sucessivamente.

Somos conduzidos a uma superfície S^1

$$z = f_1(x, y),$$

f_1 estando definida em c e tendo seus números derivados inferiores a $\operatorname{tg}\alpha$. Se a_1 é a área da porção do plano compreendida entre c e p_1, a área de S^1 difere da área mínima de P_1 de menos de

$$\varepsilon_1 + \frac{a_1}{\cos\alpha}.$$

propriedade indicada.

[98] Se fosse de outra forma, poderíamos, com efeito, encontrar um plano paralelo a oz que cortaria S_p segundo uma curva fechada.

Escolhamos uma sequência de polígonos $P_1, P_2 \dots$ inscritos em C, e que tendem para C, e números $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ que decrescem para zero. A P_i fazemos corresponder uma superfície $S^i[z = f_i(x, y)]$ cuja área difere da área mínima [121] de P_i de menos de

$$\varepsilon_i + \frac{a_i}{\cos\alpha}.$$

O método do Sr.HILBERT aplicado a funções $f_i(x, y)$ permite-nos encontrar uma superfície S

$$z = f(x, y)$$

limite de certas superfícies S^i. ϵ_i e a_i tendendo para zero, as áreas dos S_i tendem para a área mínima de C, que é, portanto, a área de S. Sabemos ainda que os números derivados de f são, em valor absoluto, no máximo iguais a $\operatorname{tg}\alpha$.

Provamos, portanto, em um caso particular, conforme tínhamos nos proposto, a existência de uma solução para o problema de PLATEAU generalizado.

98. O exemplo precedente mostra-nos que os raciocínios do §95 não são suficientes para provar imediatamente a existência de uma superfície que torna mínima a função $\varphi(S)$, enquanto que eles eram suficientes no caso estendido para a função $\varphi(C)$. Tratando do caso particular relativo à integral $\int\int_S da$, veremos como podemos, em certos casos, demonstrar a existência do elemento limite. Os raciocínios seguintes serão aplicados todas as vezes que se quiser demonstrar a existência de uma superfície por um contorno C dado e que torna mínima $\varphi(S)$, se soubermos:

1. que existe uma sequência de superfícies $S_1, S_2 \dots$ cujas áreas são limitadas e tais que $\varphi(S_i)$ tende para $m\varphi(S)$,

2. que a distância de dois pontos de S_i permanece, qualquer que seja i, inferior a um número fixo l, que tende para zero com o maior diâmetro de C.

99. Seja C o contorno dado. Sejam $S_1, S_2, \dots$ superfícies poliédricas cujas áreas tendem para a área mínima de C e cujos contornos $P_1, P_2, \dots$ tendem para C; suporemos que esses contornos não têm lado paralelo algum a um dos planos coordenados, e que as superfícies S_i não têm face paralela alguma aos planos coordenados, o que é sempre legítimo.

Dividamos C, com o auxílio de um número finito de pontos $A, B, C \dots K$, em arcos tais que a projeção sobre ox de qualquer desses arcos cubra um segmento de comprimento, no máximo, igual a ε; sejam $A_i, B_i \dots K_i$ os pontos de divisão correspondentes sobre P_i.

[122] Dividamos por um plano paralelo ao plano dos yz passando entre A e B, a seção de S_i por esse plano compõe-se de um certo número de linhas quebradas. O mínimo da soma dos comprimentos dessas linhas permanece, qualquer que seja i, inferior a um número fixo Z; esse mínimo é atingido para uma certa abscissa x_i do plano secante $P(x_i)$. Seja L_i aquela (ou uma daquelas) das linhas quebradas que compõem a seção $(S_i, P(x_i))$ que junta um ponto situado entre A_i e B_i a um ponto ponto de $P(x_i)$. As abscissas e os comprimentos dos L_i formam um conjunto limitado, donde é possível escolher uma sequência de superfícies S_i para

as quais as L_i tenham uma curva limite L[99]. Essa curva L está situada em um plano paralelo a yoz que passa entre A e B e junta dois pontos de C.

Vemos que podemos, dentre os S_i, escolher uma sequência $S_1^1, S_2^1 \ldots$ tal que certas seções dessas superfícies por planos paralelos a yoz tenham curvas limitadas. Essas curvas limitadas são retificáveis, cada uma delas junta dois pontos de C; existe pelo menos uma extremidade dessas curvas entre A e B, ao menos uma entre B e C etc.

Sejam a, b duas extremidades consecutivas sobre C de duas curvas limitadas α, β; os planos de α e β, que podemos sempre supor distintos, estão distantes de, no máximo, 2ε. Sejam c e d as duas outras extremidades de α e β, e sejam a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i os elementos correspondentes a a, b, c, d, α, β sobre S_i^1. O contorno a_ib_i, β_i, d_ic_i, α_i limita sobre S_1^1 uma superfície; d e c são, portanto, dois pontos consecutivos sobre C, sem os quais d_i e c_i não seriam consecutivos sobre S_1^1, também não seriam a_1 e b_1, o que é impossível. Como resultado, a projeção do arco cd sobre ox cobre um segmento de comprimento no máximo igual a 2ε.

O contorno a_ib_i, β_i, d_ic_i, α_i está inteiramente compreendido entre dois planos paralelos a yoz, P_i, Q_i, que tomaremos tão próximos quanto possível. Substituamos a porção Σ de S^1 limitada pelo contorno considerado pela que obtemos substituindo as partes de Σ, que não estão compreendidas entre P_i e Q_i, pelas partes desses planos limitadas pelas curvas (P_i, Σ), (Q_i, Σ).

Fazendo o mesmo para cada um dos contornos tais como a_ib_i, β_i, d_ic_i, α_i e cada superfície S_i^1, obteremos uma nova sequência de superfícies[100] $S_1^{(1)}S_2^{(1)}\ldots$ Podemos dizer que o contorno C é a soma dos contornos $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}\ldots$ de modo [123] que ab, β, dc, α; cada um desses contornos está compreendido entre dois planos paralelos a yoz distantes de menos de 2ε. Aos contornos $C_j^{(1)}$ corresponde sobre $S_i^{(1)}$ um contorno que limita uma superfície $S_{i,j}^{(1)}$.

Raciocinando sobre cada uma das superfícies $S_{i,j}^{(1)}$ como sobre S_i, e fazendo desempenhar o plano zox o papel do plano zoy. Somos conduzidos à consideração de contornos retificáveis $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \ldots$ dos quais C é a soma; esses contornos são formados dos arcos dos $C_i^{(1)}$ e de curvas situadas nos planos paralelos a zox, cada um deles está compreendido entre dois planos $x = \mathrm{const}$ distantes de menos de 2ε. Somos também conduzidos a superfícies $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \ldots$ das quais certas curvas tendem para $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \ldots$, os pedaços limitados por essas curvas estando contidos nos menores prismas quadrangulares de faces paralelas a zox e yoz e que contêm as fronteiras.

Substituindo, enfim, o plano zox pelo plano xoy, somos conduzidos aos contornos retificáveis

$$C_{1,1}, C_{1,2}, \ldots$$

que podemos encerrar em cubos de lado 2ε cuja soma é C, e a uma sequência de superfí-

[99] É o raciocínio do qual nos servimos no §61.

[100] Essa operação introduz faces paralelas aos planos coordenados, mas isso não terá importância para o que se segue.

cies

$$S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots$$

das quais certas curvas tendem para esses contornos; os pedaços assim limitados sobre essas superfícies sendo encerrados nos menores paralelepípedos de faces paralelas a xoy, yoz, zox que contêm as fronteiras.

Raciocinando sobre as superfícies $S_{1,i}$ como sobre as superfícies S_i, e substituindo ε por $\frac{\varepsilon}{2}$, somos conduzidos à sequência $S_{2,i}$; depois, substituindo ε por $\frac{\varepsilon}{3}$, à sequência $S_{3,i}$, e assim sucessivamente. Teremos também os contornos $C_{2,i}, C_{3,i} \ldots$

Isso posto, consideremos um contorno c fechado sem pontos múltiplos do plano (u, v), fazemo-lo corresponder ao contorno C. Dividamos o domínio limitado por c em domínios parciais com o auxílio de contornos sem pontos duplos $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots$ Suporemos esses contornos escolhidos de maneira que seja possível, para i bastante grande, fazer corresponder $S_{1,i}$ ao domínio limitado por c, de maneira que os contornos de $S_{1,i}$ que tendem para $C_{1,1}C_{1,2} \ldots$ correspondam a $c_{1,1}, c_{1,2} \ldots$.

Temos, assim, uma correspondência entre a rede de contornos $C_{1,1}C_{1,2} \ldots$ que respeita a correspondência já estabelecida entre C e c. Traçamos [124] contornos $c_{2,1}, c_{2,2} \ldots$ que podemos fazer corresponder a $C_{2,1}, C_{2,2} \ldots$ sem destruir as correspondências já estabelecidas, e assim sucessivamente.

Mostremos que é possível definir, no domínio limitado sobre c, três funções contínuas com relação ao conjunto (u, v):

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

pela condição de que, a todo ponto de uma curva $c_{i,j}$, elas façam corresponder o ponto homólogo de $C_{i,j}$. f, φ, ψ estão atualmente definidas para o conjunto E dos pontos de $c_{i,j}$; é suficiente, portanto, demonstrar que a todos os pontos de E, suficientemente próximos de um ponto (u_0, v_0) escolhido arbitrariamente, correspondem pontos distantes entre eles de menos de η.

Escolhamos n suficientemente grande para que $2\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$ seja inferior a η. O ponto (u_0, v_0) está no interior de um contorno $c_{n,i}$ ou sobre vários desses contornos $c_{n,i_1}, c_{n,i_2} \ldots, c_{n,i_p}$. A todos os pontos de E interiores a C_{n,i_1}, ou sobre C_{n,i_1}, correspondem pontos, quer interiores ao menor paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados e que contém C_{n,i_1}, quer situados sobre esse paralelepípedo; portanto, pontos que diferem de menos de $\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$ E, como todos os c_{n,i_α} têm, no mínimo, um ponto em comum, a todos os pontos interiores à soma dos domínios que eles limitam correspondem pontos distantes de menos de η.

As funções f, φ, ψ definem uma superfície S limitada por C sobre a qual são traçados contornos retificáveis C_{ij}.

A área dessa superfície é o limite, para n infinito, da soma das áreas mínimas dos contornos $C_{n,i}$. Essa soma é, no máximo, igual ao menor limite das áreas das superfícies $S_{n,i}$. Mas, a operação que permite passar de $S_1, S_2 \ldots$ a $S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots$, não aumenta o menor limite das áreas, do mesmo modo, não se aumenta esse limite passando das $S_{1,i}$ às $S_{2,i}$ etc., donde a área de S é, no máximo, igual à área mínima de C. Aliás, a área de S não pode ser inferior a essa área mínima, *demonstramos, portanto, a existência de uma superfície de área mínima limitada por um contorno dado qualquer.*

100. Resta interrogarmo-nos se a solução obtida é a única solução do problema.

A superfície definida por:

$$x = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\cos\omega, \quad y = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\omega, \qquad z = 0,$$

[125] para $1 \geqslant \rho \geqslant \frac{1}{2}$, e por

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{1}{2} - \rho,$$

para $\frac{1}{2} \geqslant \rho \geqslant 0$, é mínima para seu contorno, que é a circunferência de raio 1 do plano dos xy, contudo, não é uma superfície plana.

Esse exemplo mostra que, no caso das superfícies, se um dos problemas, que fazemos correspondência aos problemas ordinários do cálculo de variações, admitir uma solução, ele admitirá uma infinidade.

101. Já observamos quanto era mais difícil de demonstrar a existência do elemento limite para $\varphi(S)$ que para $\varphi(C)$; podemos agora aperceber uma nova diferença. Enquanto que, para o caso da curva, a natureza das condições de contorno importava pouco, no caso da superfície a dificuldade do problema varia com a natureza dessas condições.

Com efeito, suponhamos que não se tratasse mais de encontrar a superfície de área mínima passando por um contorno fixo dado, mas suponhamos que uma parte desse contorno esteja sujeito a permanecer sobre uma superfície S. Retomando os raciocínios precedentes, somos conduzidos às funções

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

definidas para todos os pontos interiores a c e contínuas em (u, v) para esses pontos; mas nada sabemos sobre os pontos de c. O conjunto dos pontos que correspondem àqueles do domínio limitado por c_1, interior a c, forma uma superfície; quando c_1 tende para c, a área dessa superfície tende para o valor mínimo das áreas das superfícies, o que responde à questão; mas, não sabemos se a curva correspondente a c_1 tem um limite.

102. Seria interessante saber quais relações existem entre as superfícies de área mínima que encontramos e aquelas que satisfazem à equação das derivadas parciais:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \tag{2}$$

Observemos primeiro que se o problema de Plateau, tal como se põe na teoria das superfícies, admitir uma solução, essa solução convirá também ao problema generalizado. Com efeito, por hipótese, não existe superfície tal que p, q, r, s, t existam e sejam contínuas, passando pelo contorno dado e que tenha uma área menor que da superfície S, solução do problema não generalizado; se existisse uma superfície S_1 de área inferior a de S, [126] existiria uma superfície Σ_1 de área tão próxima quanto quiséssemos da de S_1, passando pelo contorno dado, e tal que em todos esses pontos, salvo talvez sobre os do contorno, p, q, r, s, t existiriam e seriam contínuas. [101]. Há, portanto, uma contradição.

Seria necessário, agora, procurar se, entre as superfícies-soluções do problema generalizado, não se encontra uma superfície que satisfaça à equação de derivadas parciais (2). O método que parece mais natural consiste em demonstrar sucessivamente a existência e a continuidade de cada uma das derivadas necessárias para o estabelecimento da fórmula (2). Os raciocínios que se seguem mostram que, em certos casos, considerações elementares permitem abordar essa questão.

103. Supomos que o contorno C dado satisfaz às condições do parágrafo 97 e que, além disso, ele é tal que S, uma das superfícies de área mínima construídas como foi dito nesse parágrafo, não seja encontrada por nenhuma reta em um número infinito de pontos.

Essas condições são compatíveis, porque elas são satisfeitas quando S é uma superfície analítica e C um contorno bastante pequeno traçado sobre essa superfície.

Vimos que S é da forma $z = f(x, y)$, os números derivados de z sendo inferiores a um certo número M, quando nos deslocamos sobre uma curva retificável qualquer do plano dos xy e consideramos z como função do comprimento S percorrido sobre essa curva.

Dividamos S por um plano qualquer P paralelo a oz, existe uma seção de curva cuja equação é $z = \varphi(s)$. Essa curva admite em um ponto A qualquer duas semitangentes, isso quer dizer que φ tem derivadas à direita e à esquerda; se fosse diferente, se, por exemplo, não existisse derivada à direita, a reta procedente do ponto A, situada em P, e que faz com o plano dos xy um ângulo cuja tangente é $\dfrac{\Delta_d + \lambda_d}{2}$, ($\Lambda_d$ e λ_d sendo os números derivados à direita de φ, são inferiores a M), encontraria a seção de curva e, por consequência, S, em um número infinito de pontos[102].

[127] 104. Seja a a projeção de A sobre o plano dos xy. Tracemos uma circunferência Γ de centro em a e raio r, seja γ a curva de S que se projeta em Γ e seja γ_1 o homotético de γ, A sendo o centro da homotetia e a relação sendo tal que a projeção de γ_1 seja a circunferência Γ_1 de raio 1.

Seja $z = \psi(s)$ a equação de γ_1, s sendo o arco de Γ_1. Se fizermos r tender para zero,

[101] Poderemos obter essa superfície Σ_1 modificando a de um dos poliedros que servem para definir a área de S_1.

[102] É unicamente por causa dessa consequência que intervém no raciocínio a condição: S não é encontrada por nenhuma reta em um número infinito de pontos. As semitangentes podem, aliás, existir sem que a condição precedente seja verificada. Eu enunciei essa condição, porque acreditava que havia demonstrado que ela era satisfeita quando o contorno satisfaz a certas condições com o auxílio dos raciocínios elementares sobre poliedros que servem para definir S, §97. Considero ainda como provável que, ao menos para os contornos simples, tais raciocínios conduzam à demonstração, embora eu possa não ter alcançado, em qualquer caso, essa demonstração.

s permanecendo fixo, ψ tenderá para um valor limite $\chi(s)$, $z = \chi(s)$ definindo o conjunto de pontos que se projetam sobre Γ_1 e estão situados sobre as semitangentes precedentemente encontradas. Mas ψ tem seus números derivados inferiores a M, disso se deduz imediatamente que ψ tende uniformemente para $\chi(s)$; donde $\chi(s)$ é continua, as semitangentes formam um cone Λ.

Designemos por $\varepsilon(\rho)$ o máximo de $|\chi(s) - \psi(s)|$ quando r é menor ou igual a $\rho, \varepsilon(\rho)$ tende para zero com ρ.

Observemos ainda que $\chi(s)$, tendo seus números derivados inferiores a M, a curva $z = \chi(s)$ será retificável; Λ será aplicável sobre o plano e, portanto, quadrável.

Seja λ a curva de Λ que se projeta sobre Γ. Designemos por s e σ as áreas dos domínios S' e Λ' limitados sobre S e Λ pelas curvas retificáveis γ e λ. Vamos procurar um limite superior da quantidade $\frac{1}{r^2}|s - \sigma|$.

Seja η um número positivo arbitrariamente escolhido; desde que traçamos sobre Λ bastantes geratrizes, dividimos Λ' em pedaços tais que a soma das áreas mínimas dos contornos desses pedaços difere da área de Λ de menos de $r^2\eta$. Então, conservando as mesmas geratrizes, o mesmo ocorre qualquer que seja r.

Os cilindros que projetam sobre xy os contornos que dividem Λ' em pedaços, traçam sobre S' contornos que dividem essa superfície em pedaços correspondentes. A área de S' é exatamente a soma das áreas mínimas dos contornos desses pedaços. Ora, as áreas mínimas desses dois contornos correspondentes diferem de menos da área que limitam esses dois contornos sobre o cilindro paralelo a oz sobre o qual eles são traçados. Seja, portanto, lr a soma dos comprimentos das bases, em xoy, desses cilindros, temos:

$$|s - \sigma| < r^2\eta + lr \cdot r\varepsilon(r).$$

Nessa fórmula, l é independente de r, mas depende de η, $\varepsilon(r)$ tende para [128] zero com r; portanto, sob a condição de tomar r bastante pequeno, teremos:

$$\frac{|s - \sigma|}{r^2} < 2\eta$$

e isso qualquer que seja η.

r sendo assim escolhido, substituamos S' pela superfície Λ' e a faixa que limitam γ e λ sobre o cilindro paralelo a oz que os contêm. A área dessa nova superfície S_1' é, no máximo, $s + 2\eta r^2 + 2\pi r^2 \varepsilon(r)$, portanto, se r for bastante pequeno, ela será inferior a $s + 3\eta r^2$.

Isso posto, digo que Λ é uma superfície mínima. Com efeito, se não fosse assim, poderíamos substituir Λ' por uma superfície Λ_1' limitada a γ e de área menor; seja $\sigma - K^2 r^2$ sua área, K é independente de r. Para essa mudança, substituímos S_1' por S_2' cuja área é, no máximo, $s + (3\eta - K^2)r^2$.

Mas, porque η pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, se K não for nulo, S não será uma superfície de área mínima. Portanto, K é nulo, Λ é uma superfície de área mínima.

105. Resta-nos procurar quais são os cones Λ de área mínima. Apliquemos Λ sobre o plano e tracemos sobre a superfície assim desenvolvida uma circunferência L_1, seja L essa curva antes do desenvolvimento. Se Λ não for um plano[103] poderemos encontrar sobre L dois pontos A, B tais que a distância AB não seja igual à distância dos pontos correspondentes A_1, B_1 de L_1. Consideremos o cone Σ de vértice A e de diretriz L. Sejam a e a' dois pontos de L adjacentes a A, em ambos os lados de A; desenvolvamos a porção desse cone que compreende AB e que é limitada por Aa e Aa'. Seja A_2B_2 o desenvolvimento de AB, sem fazer variar A_2B_2, façamos tender a e a' para A, o que obtemos assim pode ser chamado o desenvolvimento do cone Σ aberto segundo sua geratriz de comprimento nulo [104].

Seja L_2 o desenvolvimento de L, a área limitada por L_2 nesse desenvolvimento é a área que limita L sobre Σ; ora, essa área é menor que a que limita L sobre Λ, ou L_1 no plano, pois L_2 não é uma circunferência.

[129] Portanto, Λ é um plano, *a superfície S admite planos tangentes*.

A demonstração precedente supõe estabelecido que, de todas as curvas isoperimétricas, a circunferência é aquela que encerra a maior área e que não existe nenhuma curva de mesmo perímetro que encerra a mesma área que a circunferência. Existem várias demonstrações rigorosas dessa propriedade; para a aplicação precedente é necessário, o que é fácil, estender essas demonstrações ao caso em que as curvas serão traçadas sobre uma superfície de RIEMANN que tem linhas de intersecção procedentes de A_2, pois não demonstramos que C girava em torno de A_2.

[103] Sabemos que Λ é da forma $z = f(x, y)$, por isso não precisamos resolver o caso em que Λ cobriria várias vezes um plano.

[104] Essas precauções seriam inúteis se demonstrássemos que L tem tangentes. Apoiando-se sobre a condição: S não é encontrada por nenhuma reta em um número infinito de pontos, demonstramos que ao longo de cada geratriz de Λ existem dois semiplanos tangentes. Ora, o conjunto desses dois semiplanos deve formar uma superfície mínima, portanto, Λ tem planos tangentes, L tem tangentes.

Apêndices

APÊNDICE A

Uma metodologia para a tradução

Dentro da área que hoje é chamada tradutologia, existem duas grandes modalidades de tradução, a literária e a técnica, embora pareça haver um movimento direcionado à sua unificação (POLCHLOPEK; AIO, 2009). Na tradução técnica, também muitas vezes denominada "técnico-científica" (DURÃO, 2007)[1], incluem-se os manuais, bulas, artigos científicos, dissertações, teses etc. Claramente é nessa modalidade que se enquadra a primeira etapa nosso trabalho. Isso posto, seguiremos a metodologia de tradução descrita em Vinay e Darbelnet (1977, 2004), aplicável tanto a traduções literárias como técnicas. Segundo esses autores, existem dois grupos de métodos e procedimentos básicos de tradução: a tradução direta e a tradução oblíqua.

> De um modo geral, tradutores podem escolher entre dois métodos de tradução, chamados de tradução direta, ou tradução literal, e tradução oblíqua. Em algumas traduções pode ser possível transpor uma mensagem, da língua fonte para a língua de destino, de uma forma elementar, porque i) há categorias paralelas, e nesse caso podemos falar de paralelismo estrutural; ou ii) há um paralelismo conceitual, que é resultado de paralelismos metalinguísticos. Mas o tradutor por encontrar lacunas na língua de destino (LD), que deve ser preenchido de modo a manter a mesma impressão geral para as duas mensagens. Pode acontecer, no entanto, que, devido às diferenças estruturais ou metalinguísticas, certos efeitos estilísticos não possam ser transpostos para a língua de destino (LD) sem que se perturbe a ordem sintática ou de léxico. Nesse caso, entende-se que métodos mais complexos devem ser utilizados, o que, à primeira vista, pode parecer estranho, entretanto, são eles que permitem aos tradutores obter um rigoroso controle sobre a fiabilidade de seu trabalho: esses procedimentos são chamados de métodos de tradução oblíqua (VINAY; DARBENELT, 1977, p. 48)[2].

[1] Recentemente esse termo tem sido substituído por "tradução especializada".

[2] Generally speaking, translators can choose from two methods of translating, namely direct, or literal translation and oblique translation. In some translation tasks it may be possible to transpose the source language message element by element into the target language, because it is based on either (i) parallel categories, in which case we can speak of structural parallelism, or (ii) on parallel concepts, which are the result of metalinguistic parallelisms. But translators may also notice gaps, or "lacunae", in the target language (TL) which must be filled by corresponding elements, so that the overall impression is the same for the two messages. It may, however, also happen that, because of structural or metalinguistic differences, certain stylistic effects cannot be transposed into the TL without upsetting the syntactic order, or even the lexis. In this case it is understood that more complex methods have to be used which at first may look unusual but which nevertheless can permit translators a strict control over the reliability of their work: these procedures are called oblique translation methods.

1 Métodos da tradução direta

A tradução direta pode ser subdivida em três métodos: empréstimo, decalque e tradução literal. Cada um desses métodos pode ser usado isoladamente ou em combinação, quer com outros métodos da tradução direta, quer com os métodos da tradução oblíqua, que detalharemos adiante.

A *tradução literal* baseia-se na tradução palavra por palavra, ou seja, é um método de transferência direta da língua fonte para a língua de destino com a apropriação da gramática e do idioma (Quadro 1). Em princípio, a tradução literal é o único método basicamente reversível em si mesmo. É mais comum quando se trabalha com línguas de uma mesma família, como o português e o francês, por exemplo, sendo mais facilmente empregável quanto mais próximos forem os idiomas, como o português com o espanhol.

Eu deixei meus óculos sobre a mesa do andar debaixo.	J'ai laissé mes lunettes sur la table en bas.
Onde você está?	Où êtes-vous?
Este trem chega à estação central às 10 horas.	Ce train arrive à la gare Centrale à 10 heures.

Quadro 1: Exemplos de tradução literal baseados em Vinay e Darbelnet (2004, p. 86)

No *empréstimo*, recuperam-se os termos estrangeiros com a finalidade de introduzir a cultura da língua original na tradução. Esse recurso é muito utilizado quando se encontra uma lacuna na língua de destino ou quando o tradutor quer introduzir o sabor da língua fonte em sua tradução. Por exemplo, em uma história passada na França, "Je lui ai parlé de l'affaire *en passant*" pode ser bem traduzido para o português com empréstimo do francês das palavras realçadas para "Eu lhe falei do caso *en passant*". A decisão de se tomar por empréstimo alguma palavra da língua fonte para a língua de destino depende do estilo que o tradutor quer imprimir a seu texto e, principalmente, da mensagem.

Finalmente, o *decalque* é um tipo especial de empréstimo no qual empresta-se à língua de destino o sintagma da língua fonte traduzindo literalmente cada um dos elementos. Há dois tipos de decalque. O *decalque de expressão*, no qual se mantém a estrutura sintática da língua de destino, mas se insere nela um novo tipo de expressão (cf. *cumprimentos da estação* para *compliments of the season!*). No *decalque de estrutura*, insere-se na língua de destino uma estrutura não usual. Um exemplo desse tipo de decalque seria a tradução do termo *science fiction* para *science-fiction* em francês, ou *ciência-ficção*, em português, ao invés de *fiction scientifique* e *ficção científica*, respectivamente, já que, tanto no francês, quanto no português, o adjetivo vem posposto ao substantivo[3].

[3] Para esse exemplo em particular, em português ficou consagrada a tradução *ficção científica*, mas em francês, espanhol (*ciencia ficción*) e galego (*ciencia ficción*), por exemplo, prevaleceu a tradução com o decalque de estrutura. Particularmente com relação ao galego, existem escritores que defendem o uso do termo *ficción científica* nos mesmos moldes com o que aconteceu com o português.

2 Métodos da tradução oblíqua

A tradução oblíqua pode ser dividida em quatro métodos: transposição, modulação, equivalência e adaptação. Cada um deles pode ser usado isoladamente ou em combinação, quer com outros métodos da tradução oblíqua, quer com os métodos da tradução direta, conforme já frisamos anteriormente.

Na *transposição*, uma parte do discurso pode ser trocada por outra sem que se mude o significado da mensagem. Por exemplo, a expressão de base *Il a annoncé qu'il reviendrait* pode ser transposta para *Il a annoncé sa retour*, que será chamada de *expressão transposta*. Ao traduzirmos a expressão transposta para o português, teremos *Ele anunciou seu retorno*. Esse tipo de transposição é chamado de *transposição facultativa*, pois nesse caso, poder-se-ia ter traduzido do francês a expressão base diretamente para *Ele anunciou que retornaria*. Entretanto, dependendo da expressão, ou mesmo do idioma fonte e do idioma de destino, pode ser necessário o segundo caso de transposição, chamado *transposição obrigatória*. É o caso da expressão *Dès son lever...*, que para o inglês seria traduzido por transposição obrigatória para *As soon as he got up*, já que no inglês não se consegue traduzir "lever" com um substantivo. Essa mesma expressão, se fosse traduzida para o português, teria sua transposição facultativa, já que tanto poderia ser traduzida por *Desde seu levante*, como por *Assim que ele se levanta*. Nota-se que a segunda expressão parece mais natural ao nosso idioma, de modo que o contexto e o estilo do tradutor determinariam qual tradução seria mais adequada.

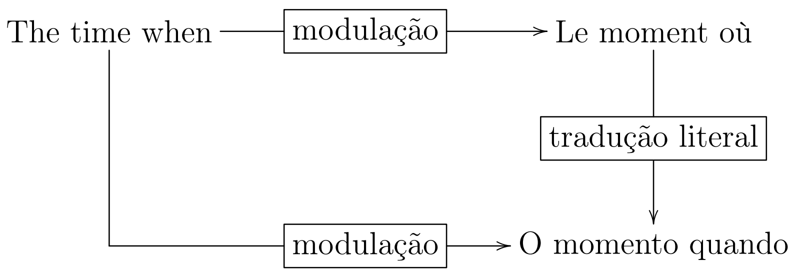


Figura 1: Neste exemplo, a modulação é obrigatória quando a mensagem é vertida do inglês para o francês; entretanto, quando a mensagem é vertida do francês para o português, o método empregado é a tradução direta.

A *modulação* varia a forma da mensagem por meio de uma mudança de ponto de vista; trata-se de uma manipulação mais semântico-estilística que léxico-sintática – embora possam ocorrer as duas coisas, o contrário do que ocorre com a transposição, é necessária quando os demais processos resultam em um enunciado formalmente correto, porém estranho à língua de destino. Assim como ocorre com a transposição, também a modulação pode ser obrigatória ou facultativa. Um exemplo de modulação obrigatória ocorre na tradução da expressão *The time when...*, literalmente *O tempo quando...*, para o francês, *Le moment où...*, que em português poderia ser traduzido por *O momento quando...* Vemos que, nesse exemplo, a frase em inglês precisou ser traduzida por modulação para o francês, porém, se considerássemos a expressão de partida *Le moment où*, esta poderia ser traduzida literalmente para o português sem problemas (cf. Figura 1). O exemplo mais frequente de modulação facultativa ocorre em enunciados negativos na língua fonte que são modulados para um enunciado negativo na língua de destino (cf. Figura 2). Ressalta-se que a modulação facultativa será cada vez mais obrigatória quando a expressão modulada for mais usual na língua de destino. Em alguns casos de uso consagrado, a modulação passa a ser não apenas obrigatória, mas a sua falta pode ser interpretada como um erro (BASTIANETTO, 1996).

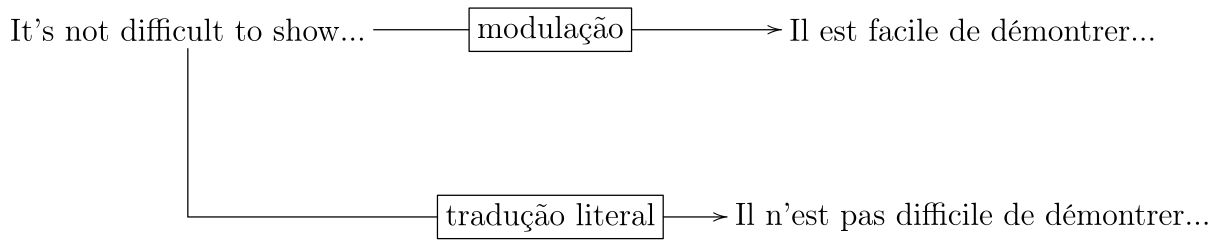


Figura 2: Neste exemplo, a modulação é facultativa porque ambos os enunciados em francês são possíveis, embora o primeiro (modulado) seja mais comum. Ambos poderiam ser facilmente traduzidos literalmente para o português para *É fácil de mostrar..* e *Não é difícil de mostrar...*, respectivamente. Nota-se que, no caso do português, ambos os enunciados são amplamente utilizados, o que faria o tradutor preferir o traduzido literalmente ante o modulado.

Na *equivalência*, como o próprio nome sugere, as mensagens são equivalentes, mas não mantêm a mesma natureza sintagmática, e caso fossem traduzidas literalmente, teriam significados diferentes. Esse recurso é geralmente utilizado para traduzir provérbios, clichês, locuções substantivas e adjetivas (cf. Figura 3).

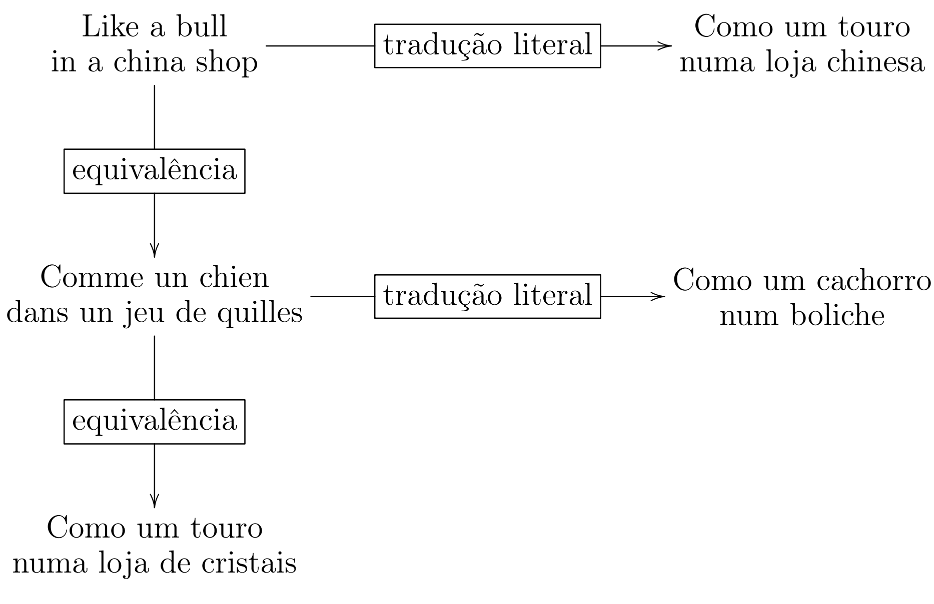


Figura 3: Neste exemplo, vemos que, ao se manter a expressão mais próxima da original, por meio da tradução literal, perde-se o seu significado, já que, em cada uma dessas línguas, existe uma expressão equivalente de semelhante significado, porém ligeiramente diferente. A adaptação, assim, mostra-se como o método mais adequado para o caso.

A *adaptação* é um recurso utilizado quando há uma inexistência de correspondência entre dois idiomas. Nesse caso, o tradutor deverá escolher uma nova mensagem que, ao mesmo tempo que seja coerente com a mensagem da língua fonte, não seja estranha à língua de destino. Assim, o enunciado em inglês *He kissed his daughter on the mouth* poderia ser traduzido literalmente para o francês como *Il embrassa sa fille sur la bouche*, ou, em português, *Ele beijou sua filha na boca*. Ocorre que essa cena seria bem aceita no caso do pai inglês, mas não o seria no caso do pai francês e, talvez, também não no caso do pai brasileiro. Entretanto, se analisado o contexto, o sentido do enunciado leva a crer que trata-se apenas de um gesto carinhoso do pai para com sua filha; então uma melhor tradução, por adaptação, seria *Il serra tendrement sa fille dans ses bras*, que, em português, por tradução literal seria *Ele apertou carinhosamente sua filha em seus braços*, e por transposição seria *Ele abraçou carinhosamente sua filha* (cf. Figura 4).

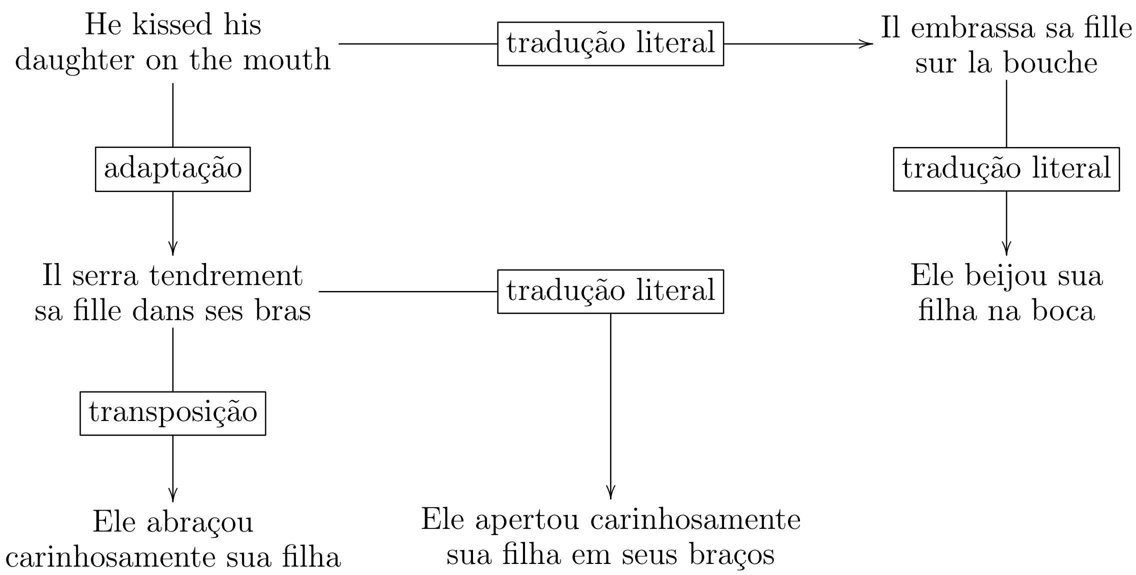


Figura 4: Embora correta, a tradução literal, em alguns casos, pode gerar mensagens artificiais para a língua de destino. Neste exemplo, o verbo beijar melhor se traduz para o francês pelo verbo abraçar. Para o caso do português, tanto a opção via adaptação quanto a via tradução literal traz enunciados plausíveis, embora a primeira opção nos pareça menos estranha. Este exemplo traz ainda, se considerarmos a língua fonte o francês e a língua de destino o português, um caso de transposição facultativa.

* * *

Por fim, se, por um lado, conforme já alertamos, os sete métodos de tradução possam ser usados isoladamente ou em combinação, por outro, em muitos casos pode ser difícil distinguir que métodos foram empregados em algumas traduções, que, claramente, podem fugir aos exemplos simples que aqui trouxemos (cf. Figura 5).

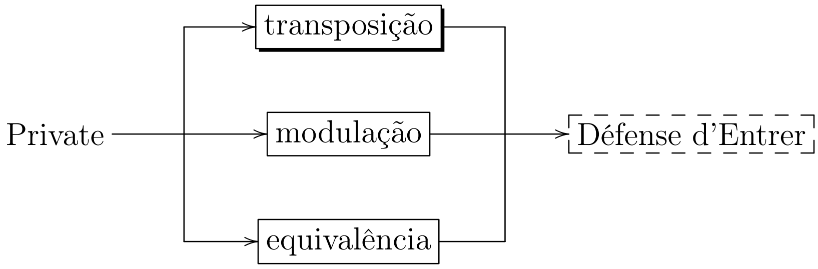


Figura 5: A mensagem em inglês *Private* pode ser traduzida pelo francês como *Défense d'Entrer*. Entretanto, ao analisarmos essa tradução, tanto é possível interpretar que ela foi feita por transposição, já que um adjetivo se transformou num sintagma nominal; modulação, pois se mudou o ponto de vista de uma constatação para uma ordem; ou mesmo por equivalência, já que as mensagens possuem o mesmo significado mas estruturas bastante diferentes.

Referências

BASTIANETTO, Patrizia Collina. J. P. VINAY, J. DARBELNET – STYLISTIQUE COMPARÉE DU FRANÇAIS ET DE L'ANGLAIS: MÉTHODE DE TRADUCTION. In: VIEIRA; Else Ribeiro Pires (Org.). **Teorizando e Contextualizando a Tradução**. Belo Horizonte: Curso de Pós-Graduação em Estudos Linguísticos, 1996.

DURÃO, Maria do Rosário Frade. **Tradução Científica e Técnica**: proposta para Formação de tradutores pluricompetentes especializados na produção de documentação científica e técnica do Inglês para o Português. 2007. 586 f. Tese (Doutorado em Estudos Portugueses) – Universidade Aberta, Lisboa, 2007.

POLCHLOPEK, Silvana; AIO, Michelle de Abreu. Tradução Técnica: armadilhas e desafios. **Revista Brasileira de Tradutores**: Tradução & Comunicação, Valinhos, n. 19, p.101-113, 27 abr. 2010.

VINAY, Jean Paul; DARBENELT, Jean. **Stylistique comparée du français et de l'anglais**: méthode de traduction. Paris: Didier, 1977.

VINAY, Jean Paul; DARBELNET, Jean. Methodology of Translation. In: VENUTI, Lawrence. **The Translation Studies Reader**. Abingdon: Routhedge Taylor & Francis Group, 2004. p. 128-137.

APÊNDICE B

Hermenêutica das profundidades[1]

O Grupo História Oral e Educação Matemática (GHOEM)[2], desde 2005, vem constituindo um acervo de livros relacionados à educação matemática. Atualmente esse acervo conta com mais de mil e quinhentas obras publicadas tanto no Brasil como no exterior, com datas que variam do século XVII até meados de 1970. Com isso, constituíram-se também diversas possibilidades de estudo desse acervo.

No que concerne aos livros didáticos, Oliveira (2008), observou que, à época em que realizou sua pesquisa, a maioria dos estudos a que o grupo tinha acesso não trazia em detalhes os procedimentos adotados para a análise dos livros ou sequer implementava uma discussão metodológica. Nessa perspectiva, a análise é vista como algo "natural" segundo procedimentos-padrão já bem conhecidos (ANDRADE, 2012). Destarte, com o intuito de promover uma discussão metodológica aprofundada que considerasse "a articulação entre uma análise interna e um estudo sócio-histórico que permitisse compreender os vínculos entre a obra didática e a sociedade na qual ela estava inserida" (OLIVEIRA, 2008, p. 12), Oliveira apresentou uma metodologia de análise de livros didáticos baseada nas ideias do sociólogo britânico John B. Thompson.

O caminho percorrido por Oliveira (2008) é importante para entendermos como e por que o trabalho de Thompson, já conhecido de outras áreas, se tornou relevante dentro do GHOEM, em particular, e tem conquistado espaço, de um modo mais geral, dentro da própria educação matemática.

Essa trajetória inicia-se com estudos do trabalho de Schubring (2003), que mostrou que a hermenêutica poderia ser um interessante caminho na busca de um referencial adequado para a análise de livros didáticos, já que esse autor demonstra preocupações com uma metodologia que extrapole uma análise interna. Entretanto, Schubring desconsidera diversas teorias hermenêuticas posteriores a Friedrich August Wolf, em quem se baseia. Diante disso, Oliveira (2008), a fim de melhor compreender as teorias hermenêuticas, procurou em Palmer (2006)[3]

[1] Parte deste texto encontra-se publicado em Otero-Garcia e Silva (2013).

[2] Apesar de estarmos mais diretamente vinculados aos trabalhos e atividades do Grupo de Pesquisa em História da Matemática e/ou suas Relações com a Educação Matemática – grupo do qual a orientadora deste projeto faz parte – temos nos aproximado do GHOEM por conta das relevantes discussões que o grupo vem travando no campo da hermenêutica das profundidades

[3] Oliveira (2008) baseou-se na edição de 1986 da obra de Richard E. Palmer; em nossas considerações, entretanto, faremos menção à edição de 2006.

– que dá

> ao leitor uma ideia da fluidez da hermenêutica e dos problemas complexos que se ligam à sua definição [...], [que discute] os problemas básicos que preocuparam quatro dos maiores pensadores sobre esse tema [Friedrich Daniel Ernst Schleiermacher, Wilhelm Dilthey, Martin Heidegger e Hans-Georg Gadamer] [...], [e que apresenta] referências bibliográficas básicas para exploração ulterior (PALMER, 2006, p. 16).

– o passo seguinte; conduzindo-se, assim, aos trabalhos de Paul Ricœur. Isso porque, além da sua familiaridade com o autor, esse filósofo francês, segundo Oliveira (2008, p. 13), constitui "uma abordagem hermenêutica 'em diálogo', numa visada histórica frente a outras abordagens hermenêuticas [...], e também [...] [sua] apropriação pelos historiadores e cientistas sociais é frequente".

Oliveira (2008) relata, então, que, por meio dos estudos da Hermenêutica de Ricœur e do contato com outros educadores matemáticos[4], foi-lhe apresentada a obra de Thompson, *Ideology and Modern Culture: critical social theory in the era of mass communication*[5], que, "partindo justamente do conceito de Hermenêutica de Profundidade[6] de Ricœur, propõe uma metodologia para a interpretação do que ele, na esteira de outros estudiosos, denomina 'formas simbólicas' enfatizando, em seu trabalho, os meios de comunicação em massa" (OLIVEIRA, 2008, p. 52, grifo nosso). Para Thompson, formas simbólicas são

> [...] um amplo espectro de ações e falas, imagens e textos, que são produzidos por sujeitos e reconhecidos por eles e outros como construtos significativos. Falas linguísticas e expressões, sejam elas faladas ou escritas, são cruciais a esse respeito. Mas formas simbólicas também podem ser não linguísticas ou quase-linguística sem sua natureza (por exemplo, uma imagem visual ou um construto que combina imagens e palavras). Podemos analisar o caráter significativo das formas simbólicas em termos de quatro aspectos típicos – que chamarei de aspectos "intencional", "convencional", "estrutural" e "referencial" das formas simbólicas. Há um quinto aspecto das formas simbólicas que chamarei de aspecto "contextual" [...] (THOMPSON, 2011, p. 79)[7].

[4] Oliveira cita nominalmente Antônio Miguel, professor da faculdade de Educação da Universidade de Campinas (UNICAMP).

[5] Essa obra de 1990 foi traduzida para o português sob o nome de Ideologia e Cultura Moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação em massa, tendo sido reeditada diversas vezes. As nossas considerações levarão em conta a mais recente edição em língua portuguesa; Oliveira (2008) faz uso da edição de 1995.

[6] Preferimos o termo "Hermenêutica das Profundidades" ao invés de "Hermenêutica de Profundidade", conforme explicitaremos mais adiante.

[7] Mais adiante em seu texto, Thompson esclarece esses cinco aspectos: "Vamos considerar, primeiramente, o aspecto 'intencional' das formas simbólicas. O que entendo com isso é que as *formas simbólicas são expressões de um sujeito e para um sujeito (ou sujeitos).* Isto é, as formas simbólicas são produzidas, construídas e empregadas por um sujeito que, ao produzir e empregar tais formas, está buscando certos objetivos e propósitos e tentando expressar aquilo que ele 'quer dizer' ou 'tenciona' nas e pelas formas assim produzidas. [...] A segunda característica das formas simbólicas é o aspecto 'convencional'. Isso quer dizer que *a produção, construção ou emprego das formas simbólicas, bem como a interpretação das mesmas pelos sujeitos que as recebem, são processos que, caracteristicamente, envolvem a aplicação de regras, códigos ou convenções de vários tipos.* Essas regras, códigos ou convenções variam desde regras de gramática a convenções de estilo e expressão, desde códigos que relacionam sinais específicos e letras,

E, assim, Oliveira (2008, p. 52-53) justifica sua escolha:

> Elegemos, então, o trabalho de John Thompson como um novo ponto de partida para as nossas reflexões sobre possibilidades metodológicas para compreender a análise de textos didáticos de matemática, já que o conceito de forma simbólica por ele assumido é suficientemente abrangente para considerarmos sua teoria aplicável a essas obras. Além disso, Thompson (1995) não desconsidera as influências causadas pelo contexto de produção, transmissão e apropriação das formas simbólicas, uma das nossas maiores preocupações com os trabalhos que se propunham a analisar livros didáticos de matemática. Não apenas prevê em sua metodologia a análise sócio-histórica como reformula o conceito de cultura proposto por [Clifford James] Geertz defendendo-a como o estudo das formas simbólicas em contextos estruturados, o que é, no nosso entender, um dos principais aspectos do seu trabalho, sem negligenciar, porém, vinculada ao estudo social, a necessidade de se analisar internamente as formas simbólicas [...] propondo que esta deva ser embasada em teorias consistentes.

A partir disso, Oliveira (2008), balizado pelos conceitos utilizados por Thompson (2011), estrutura uma metodologia para análise de livros didáticos. É claro que a ideia de dispor de uma tal metodologia aplicável a livros didáticos nos parece bastante potente. Entretanto, defendemos que não só a Hermenêutica das Profundidades de Thompson (cf. nota 6), como também ela própria enviesada pelas ideias de Oliveira (2008), podem servir de instrumento para análise de outras obras, desde que possamos interpretá-las como formas simbólicas. Outros trabalhos de educadores matemáticos, quer pertencentes ao GHOEM, quer não, têm se valido tanto da HP de Thompson quanto da HP pelo viés de Oliveira (2008) para analisar diversas formas simbólicas, tais como: livros didáticos, livros científicos, documentos oficiais e outras[8].

---

palavras ou situações concretas específicas [...], até convenções que governam a ação e interação de indivíduos que tentam expressar-se ou interpretar as expressões de outros [...] A terceira característica das formas simbólicas é o aspecto 'estrutural', que significa que *as formas simbólicas são construções que exibem uma estrutura articulada*. Elas exibem uma estrutura articulada no sentido de que consistem, tipicamente, de elementos que se colocam em determinadas relações uns com os outros. [...] A quarta característica das formas simbólicas é o aspecto 'referencial', o que significa [...] que *as formas simbólicas são construções que tipicamente representam algo, referem-se a algo, dizem algo sobre alguma coisa.* Uso, aqui, o termo 'referencial' de uma maneira bastante ampla, abrangendo o sentido geral através do qual uma forma simbólica, ou um elemento desta, pode, em um determinado contexto, substituir ou representar um objeto, indivíduo ou situação, bem como num sentido mais específico através do qual uma expressão linguística pode, em uma determinada ocasião de uso, referir-se a um objeto particular. [...] A quinta característica das formas simbólicas para a qual quero chamar a atenção é o aspecto 'contextual'. Isso significa [...] que *as formas simbólicas estão sempre inseridas em processos e contextos sócio-históricos específicos dentro dos quais e por meio dos quais elas são produzidas, transmitidas e recebidas.* [...] O que essas formas simbólicas são, a maneira como são construídas, circulam e são recebidas no mundo social, bem como o sentido e o valor que elas têm para aqueles que as recebem, tudo depende, em certa medida, dos contextos e instituições que as geram, medeiam e mantêm" (THOMPSON, 2011, p. 183-192, grifos do autor).

[8] Por exemplo, Silva (2010, 2013), Andrade (2012), Cardoso (2009).

1 A hermenêutica como um sistema de interpretação

Embora não seja nosso objetivo nos aprofundarmos em uma discussão filosófica acerca das diferentes acepções modernas da palavra *hermenêutica*, acreditamos ser necessário, no entanto, fazer uma breve incursão sobre a terminologia que Thompson (2011) usa para dar nome ao seu referencial metodológico. Em que a Hermenêutica das Profundidades se diferencia da Hermenêutica?

Segundo nos aponta Palmer (2006):

> [...] levada até a sua raiz grega mais antiga, a origem das actuais palavras 'hermenêutica' e 'hermenêutico' sugere o processo de 'tornar compreensível', especialmente enquanto tal processo envolve a linguagem, visto ser a linguagem o meio por excelência neste processo. Este processo [...] está implícito nas três vertentes básicas patentes no significado de *hermeneuien* e *hermeneia*, no seu uso antigo. As três orientações, usando a forma verbal (*hermêneuein*) para fins exemplificativos, significam: 1) exprimir em voz alta, ou seja, 'dizer'; 2) explicar, como quando se explica uma situação, e 3) traduzir, como na tradução de uma língua estrangeira. Os três significados podem ser expressos pelo verbo português 'interpretar' (PALMER, 2006, p. 24).

Em suma, pode-se entender, ainda que de modo pouco refinado, a *hermenêutica* como a *ciência da interpretação*. Muito embora tal significado já pareça fazer sentido dentro da proposta de Thompson (2011) de uma *Metodologia da Interpretação das Formas Simbólicas*, cumpre ainda entendermos sob qual roupagem se veste tal *metodologia da interpretação* para que seja denominada *Referencial Metodológico da Hermenêutica das Profundidades*.

Prosseguindo com Palmer (2006), temos que, a partir do sentido clássico,

> [...] nos tempos modernos, o campo da hermenêutica tem sido definido pelo menos de seis maneiras diferentes [...] como: 1) uma teoria da exegese bíblica; 2) uma metodologia filológica geral; 3) uma ciência de toda a compreensão linguística; 4) uma base metodológica dos *Geisteswissenschaften*; 5) uma fenomenologia da existência e da compreensão existencial; 6) sistemas de interpretação, simultaneamente recolectivos e iconoclásticos, utilizados pelo homem para alcançar o significado subjacente aos mitos e símbolos. [...] Cada uma representa essencialmente um ponto de vista a partir do qual a hermenêutica é encarada; cada uma esclarece aspectos diferentes mas igualmente legítimos do acto da interpretação, especialmente da interpretação de textos (PALMER, 2006, p. 43-44).

Essas seis concepções, evidentemente, possuem intersecções e até sobreposições, e, ainda, "se encontram, em graus variáveis, no *spectrum* do pensamento hermenêutico contemporâneo" (PALMER, 2006, p. 55). Daremos destaque à última delas, representada por Paul Ricœur, uma das principais influências teóricas da metodologia proposta por Thompson (2011).

* * *

Ricœur (1965) assim define: "nous entendrons toujours par herméneutique la théorie des règles que président à une exégèse, c'est à dire à l'interprétation d'un texte singulier ou d'un ensemble de signes susceptibles d'être considéré comme un texte" (p. 18)[9]. Nesse sentido, não só os textos, como aquilo que pode ser visto como tal, são passíveis de uma hermenêutica, de modo que, quando nos referimos ao termo texto daqui por diante, estaremos nos referindo a seu sentido mais amplo.

O texto, segundo Ricœur (1965), pode ser constituído por símbolos equívocos e símbolos unívocos. Estes, de natureza lógico-simbólica, e aqueles, de múltiplos significados, o verdadeiro centro da hermenêutica, já que podem ter um sentido superficial coerente e, ao mesmo tempo, um significado mais fundo: "a hermenêutica é o sistema pelo qual o significado mais fundo é revelado, para além do conteúdo manifesto" (PALMER, 2006, p. 53). Dito de outro modo, a hermenêutica de Ricœur é a interpretação do oculto, do profundo. Em alguns momentos, como em Ricœur (1986), essa hermenêutica, ou certo espectro dela, é denominada *Herméneutique des Profondeurs*, ou, *Hermenêutica das Profundidades*.

Em inglês o termo corrente é *Depth hermeneutics* que, em português, em Thompson (2011), foi traduzido como *Hermenêutica de Profundidade*. Defendemos o plural, *das Profundidades* ante o *de Profundidade*, não só por conta da expressão usada em francês, mas porque o *de Profundidade* carrega consigo uma nuance diferente do *das Profundidades*. *Hermenêutica de Profundidade* remete à ideia de uma hermenêutica profunda, ou uma interpretação profunda. E toda hermenêutica não é profunda? A *Hermenêutica das Profundidades* está em outro nível: ela fala da hermenêutica do profundo, ou seja, da interpretação daquilo que não é superficial. É evidente que o *de Profundidade* também possibilita tal interpretação, mas é ambíguo. Tal ambiguidade pode ser suprimida pela opção que sugerimos, a qual torna mais claro que a profundidade fala do *locus* em que a hermenêutica se dá e não da maneira como se dá, ou de que tipo é. Assim, entendemos que *Hermenêutica das Profundidades* está mais consoante com as ideias de Ricœur, já expostas neste trabalho, além de que essa tradução nos parece mais próxima da expressão usada por ele. É nesse esteio que Thompson (2011), então, afirma que:

> [...] podemos buscar na tradição da hermenêutica algo a mais que um conjunto de condições gerais para a investigação sócio-histórica? Podemos buscar nela um referencial metodológico que possa ser empregado para o estudo das formas simbólicas em geral, e para a análise da ideologia em particular? Podemos encontrar os inícios de uma resposta a essas questões na obra de Paul Ricœur, Jürgen Habermas e outros. A obra de Ricœur é de interesse particular nesse assunto, porque ele procurou construir sobre as intuições de Heidegger e Gadamer, sem abandonar as preocupações metodológicas. Ele procurou, explícita e sistematicamente, mostrar que a hermenêutica pode oferecer tanto uma reflexão filosófica sobre o ser e a compreensão como uma reflexão metodológica sobre a natureza e tarefas da interpretação na pesquisa social. A chave desse caminho de reflexão é o que Ricœur e outros chamaram de 'hermenêutica *de* profundidade' (HP) (THOMPSON, 2011, p. 362, grifo nosso).

[9] Nós sempre entendemos por hermenêutica a teoria de regras que presidem a uma exegese, isto é, a interpretação de um texto singular ou de um conjunto de signos susceptíveis de ser considerado como um texto.

Assim, o termo *Hermenêutica das Profundidades* não foi cunhado por Thompson, mas sim foi emprestado de Ricœur, Habermas e outros, muito embora seja mais frequentemente associado a Thompson, talvez por ter sido ele quem sistematizou um referencial metodológico em torno desse nome. Em Ricœur (1986); ele nos diz que o termo é emprestado de Habermas: "Certes, la psychanalyse reste dans la sphère du comprendre et d'un comprendre qui s'achève dans la prise de conscience du patient; en ce sens, Habermas l'appelle une *Tiefenhermeneutik*, une herméneutique des profondeurs"' (p. 396)[10].

É evidente que, assim como o todo deste texto, as afirmativas desta pequena incursão terminológica nada mais são que interpretações, ou reinterpretações, conforme defende Thompson (2011); são apenas apropriações possíveis do sujeito (nós) de um campo já pré-interpretado, e que, portanto, "é necessariamente arriscado, cheio de conflito e aberto à discussão" (THOMPSON, 2011, p. 376). Essa observação, para os nossos objetivos, vai além de uma meta-análise, como iremos discutir mais adiante.

* * *

Embebido das ideias de Ricœur e outros, sem, no entanto, divergir em certos pontos, Thompson (2011) desenvolve o seu referencial metodológico da Hermenêutica das Profundidades.

> Embora eu concorde com os objetivos gerais da obra de Ricœur, o marco referencial metodológico que desenvolverei irá diferir significativamente de seu entendimento a respeito da HP. Pois Ricœur coloca demasiada ênfase no que ele chama de 'a autonomia semântica do texto', e com isso ele abstrai muito rapidamente das condições sócio-históricas em que os textos, ou as coisas análogas a textos, são produzidos e recebidos (THOMPSON, 2011, p. 362).

Thompson (2011) não pormenoriza essa crítica, somente o faz em Thompson (1981), e, a nós, não cumpre o papel de fazê-la aqui.

2 O referencial metodológico da hermenêutica das profundidades

Para Thompson (2011), as formas simbólicas são construídas em contextos sociais que influenciam na sua produção e, para compreendê-las, é indispensável entender aspectos contextuais do espaço e do tempo em que foram produzidas. De acordo com Cardoso (2009), a Hermenêutica das Profundidades de Thompson é "[...] uma análise cultural, que foca as formas simbólicas em relação aos contextos que as produzem, transmitem e recebem" (p.26). Assim, podemos entendê-la como um esforço para compreender uma forma simbólica, considerando-se os contextos de produção e apropriação que compõem, juntamente com os elementos internos, a

[10] Com efeito, a psicanálise permanece na esfera do compreender, e de um compreender que se encerra na tomada de consciência do paciente; nesse sentido, Habermas a chama de uma *Tiefenhermeneutik*, uma "hermenêutica das profundidades".

própria forma simbólica. Oliveira (2008) defende que tecer relações entre eles possibilita ao hermeneuta uma interpretação plausível do seu objeto de estudo:

> [...] as formas simbólicas são sócio-historicamente estruturadas e, portanto, a análise do contexto sócio-histórico deve fazer parte da metodologia da interpretação para garantir maior plausibilidade à interpretação. Dessa forma, as relações sociais, a estrutura das instituições e suas interações ocorridas nos momentos de produção e apropriação das formas simbólicas, bem como os meios técnicos de sua produção e transmissão, devem fazer parte do processo de análise (p.38).

A Hermenêutica das Profundidades de Thompson (2011) é composta por três movimentos analíticos: *análise sócio-histórica* (ou contextual, muitas vezes relacionado a uma "análise externa"), *análise formal* (ou discursiva, muitas vezes relacionado a uma "análise interna") e *interpretação/reinterpretação*. Detalhamos, a seguir, como entendemos esses movimentos que compõem o referencial metodológico da Hermenêutica das Profundidades. Vale ressaltar que essas estratégias analíticas não são estanques, nem lineares, ou seja, o processo hermenêutico dá-se ciclicamente: ora a abordagem sócio-histórica toma a frente, ora a abordagem discursiva, e a todo o momento o hermeneuta interpreta e reinterpreta a forma que tomou como seu objeto de investigação. Além disso, concordamos com Thompson (2011, p. 366) quando ele alerta que a eficácia da aplicação dessas três fases depende, na prática, do pesquisador, e que devido às particularidades de cada trabalho, pode-se adotar um ou outro movimento com maior destaque; do mesmo modo, pode-se dar ênfase a alguns de seus aspectos ou mesmo adotar outros não descritos inicialmente por Thompson (2011). Por fim, no decorrer da análise, outros métodos auxiliares podem aparecer, como os paratextos editoriais de Genette (2009), de que falaremos logo a seguir.

* * *

As formas simbólicas estão inseridas em contextos sociais que influenciam na sua produção e mobilização, sendo produzidas por/para regras específicas, por/para comunidades específicas, por/para instituições sociais específicas (ANDRADE, 2012, THOMPSON, 2011). Dessa forma, para garantir maior plausibilidade à interpretação desses materiais, Thompson (2011) propõe que, na análise sócio-histórica, o foco da investigação seja o contexto em que as formas simbólicas foram produzidas e/ou apropriadas e destaca cinco aspectos a serem considerados, os quais descrevemos sucintamente:

1. *Situações Espaço-Temporais*: Thompson defende que é importante reconstruir os tempos particulares e os locais específicos nos quais foram produzidas as formas simbólicas.
2. *Campos de Interação*: É o "espaço" onde as instituições se constituem. São um conjunto de posições e trajetórias que acabam por determinar as relações existentes entre as pessoas e que oportunidades estavam acessíveis a elas. Oliveira (2008) exemplifica dizendo que os campos de interação de um autor renomado são o que pode mantê-lo publicando sem que sua obra precise passar por processos de avaliação como aqueles pelos quais passam os novos.
3. *Instituições Sociais*: Thompson (p. 367) diz que "Instituições sociais podem ser vistas

como conjuntos relativamente estáveis de regras e recursos, juntamente com relações sociais que são estabelecidas por eles." Oliveira cita, como exemplos de instituições sociais, as escolas, as famílias, as comunidades de bairro, os sistemas de ensino, as sociedades de matemática etc.

4. *Estrutura Social*: Nesse ponto são analisadas as "(...) assimetrias e diferenças relativamente estáveis que caracterizam as instituições sociais e os campos de interação" (THOMPSON, 2011, p. 367). Oliveira (2008) diz que essas diferenças podem ser, por exemplo, as de etnia e gênero.
5. *Meios Técnicos de Construção e Transmissão*: De um modo geral, as formas simbólicas sempre requerem algum meio pelo qual elas são produzidas e transmitidas. No caso de livros, teses, artigos, sofreram alteração ao longo do tempo tanto o tipo de papel empregado, quanto a encadernação e diagramação. Esse tipo de mudança afeta a maneira e a forma como essas formas simbólicas são concebidas. Para Oliveira, analisar tais pontos pode dar indicações sobre a representatividade da forma simbólica à sua época.

Assim, concordamos quando Andrade (2012, p. 36) afirma que "a análise sócio-histórica extrapola a obra em si" (p.10), pois exige do hermeneuta conhecimento dos aspectos sócio-político-econômico-culturais da época.

Há uma pluralidade de registros que podem contribuir para reconstruir[11] o contexto em que uma forma simbólica foi produzida e/ou apropriada, como os diários oficiais, decretos, regulamentações, cartas, bilhetes, dedicatórias, jornais, revistas, depoimentos, músicas, pinturas, fotografias, gravações, romances, catálogos, documentos dos arquivos de editoras etc.

* * *

Na análise formal, o hermeneuta volta o seu olhar para os aspectos internos da forma simbólica. Esse momento é manifestado na descrição detalhada e criteriosa dos materiais analisados, sendo, portanto, um momento mais "objetivo" da análise, mas essencial para a sua interpretação, tornando-se tão mais adequada quanto mais houver esforço de tecer relação com o contexto sócio-histórico em que a forma simbólica foi produzida e/ou apropriada.

Do mesmo modo que na *análise sócio-histórica*, a *análise formal* pode contemplar alguns aspectos como: a) *análise semiótica* (características estruturais internas, seus elementos constitutivos e suas inter-relações, como figuras, definições, exemplos e demonstrações); b) ânálise sintática (o foco está nos elementos levantados na análise semiótica, tomados individualmente); c) *análise narrativa* (a forma como a história é contada, a forma de apresentação dos conteúdos tem influência sobre a postura do leitor) e d) *análise argumentativa* (harmonia da obra, sequência de assuntos, estrutura de apresentação, coerência interna etc.; é de grande importância para textos matemáticos, visto que a matemática é uma ciência hipotético-dedutiva na qual as cadeias de raciocínio compõem a estrutura argumentativa da obra).

[11] Assim como Oliveira (2008), entendemos que "reconstruir é construir novamente, mas dessa vez, uma apropriação criativa, como uma nova criação" (p. 39).

Para subsidiar a análise formal, acreditamos que outras metodologias podem ser mobilizadas, dentre elas destacamos a ideia de paratextos editoriais apresentada por Genette (2009). O autor considera como paratextos o nome do autor, os títulos, os subtítulos, prefácio, dedicatórias, ilustrações, anexos etc., e apresenta em sua obra algumas peculiaridades desses paratextos que podem nos auxiliar na compreensão de uma forma simbólica. De acordo com Genette (2009), um paratexto (ou a ausência dele) pode nos revelar informações, intenções ou até mesmo oferecer uma interpretação do texto analisado. Apesar de o autor tratar especificamente dos paratextos de livros, acreditamos que esse conceito pode ser estendido a outras formas simbólicas.

* * *

A interpretação/reinterpretação desenvolve-se com o estudo das aproximações e divergências detectadas num cotejamento entre os elementos que os momentos anteriores de análise constituíram. Para Oliveira (2008), esse momento de análise "é a reflexão sobre os dados obtidos anteriormente, relacionando contextos e elementos de forma a construir um significado à forma simbólica" (p.43).

A análise da forma simbólica, no processo metodológico da Hermenêutica das Profundidades, constitui-se quando olhamos para os seus aspectos internos e contextuais e conseguimos tecer relações entre eles, valendo-nos de um para compreender o outro. Esse movimento de análise desenvolve-se durante a interpretação/reinterpretação, que, por sua vez, não ocorre de forma independente dos outros movimentos, nem é meramente posterior a eles, mas percorre todo o processo analítico. Dessa forma, a interpretação/reinterpretação é um momento da análise que se faz na relação entre as análises contextual e formal, em que se tenta compreender as relações entre a produção, as formas de produção e a interferência do contexto sócio-político na elaboração da forma simbólica.

Os movimentos sócio-histórico e formal, nesse nosso modo de entender, não abarcam toda a análise da forma simbólica, pois precisam ser "costurados" nos indícios levantados em cada um deles por um movimento de reinterpretação. Essa última instância, assim constituída, produzirá uma interpretação possível/plausível da forma simbólica, de tal modo que não será mais possível identificar quais fios têm origem num ou noutro movimento.

Consideramos que esse momento é o diferencial metodológico das investigações que mobilizam a Hermenêutica das Profundidades em relação às pesquisas que, apesar de ressaltar o contexto das formas simbólicas que analisam, não tecem relações entre o contexto e os aspectos internos. Para Thompson (2011):

> *Por mais rigorosos e sistemáticos que os métodos da análise formal ou discursiva possam ser, eles não podem abolir a necessidade de uma construção criativa do significado, isto é, de uma explicação interpretativa do que está representado ou do que é dito.* [...] o processo de interpretação vai além dos métodos da análise sócio-histórica e da análise formal ou discursiva. Ele transcende a contextualização das formas simbólicas tratadas como produtos socialmente situados, e o fechamento das formas simbólicas como construções que apresentam uma estrutura articulada. As formas simbólicas representam algo, elas dizem alguma coisa sobre algo, e é esse caráter

> transcendente que deve ser compreendido pelo processo de interpretação (THOMPSON, 2011, p. 375-376, grifo do autor).

Destaca-se, por fim, que, para Thompson (2011), a interpretação mediada pelos métodos da Hermenêutica das Profundidades é interpretação de um campo já pré-interpretado pelos sujeitos que constituem o mundo sócio-histórico e, por isso, essa interpretação é, ao mesmo tempo uma reinterpretação. Isso significa que o movimento de interpretação/reinterpretação permeia toda a análise hermenêutica, conforme já apontamos.

3 Uma hermenêutica das profundidades é ainda uma hermenêutica

O potencial da Hermenêutica das Profundidades, enquanto método de pesquisa na educação matemática, no que nos toca, está muito bem apresentado em Oliveira (2008). Embora o pesquisador tenha centrado suas discussões na questão do livro didático, acreditamos que as ideias centrais de suas colocações são extensíveis a quaisquer formas simbólicas de interesse, dentro da educação matemática, conforme já apontamos:

> [...] o conceito de forma simbólica por ele assumido é suficientemente abrangente para considerarmos a sua teoria aplicável a essas obras. Além disso, Thompson (1995) não desconsidera as influências causadas pelo contexto de produção, transmissão e apropriação das formas simbólicas, uma das nossas maiores preocupações com os trabalhos que se propunham a analisar livros didáticos de matemática. Não apenas prevê em sua metodologia a análise sócio-histórica, como reformula o conceito de cultura proposto por Geertz, defendendo-a como o estudo das formas simbólicas em contextos estruturados, o que é, no nosso entender, um dos principais aspectos do seu trabalho, sem negligenciar, porém, vinculada ao estudo social, a necessidade de se analisar internamente as formas simbólicas [...] propondo que esta deva ser embasada em teorias consistentes. O caráter ideológico das formas simbólicas presente na teoria de Thompson, coerente com os conceitos de Paul Ricœur, é, no nosso entender, outro ponto forte de sua obra. Para ele, as formas simbólicas são ideológicas quando seus significados são usados para estabelecer ou sustentar relações de dominação. Embora essa concepção de ideologia [...] tenha enfrentado atualmente certa resistência [...], em nossa investigação sobre os livros didáticos, entretanto, nos parece ser suficiente considerar esses manuais como potenciais portadores de significados culturais e se preocupar com os possíveis usos aos quais esses significados podem servir. [...] Além de ser uma proposta hermenêutica, como pretendíamos desde o princípio, e de satisfazer os critérios que julgamos interessantes para a análise de livros didáticos de matemática, a teoria de Thompson elimina, de uma vez por todas, as preocupações que Schubring manifesta acerca da aplicabilidade da hermenêutica para esse fim bem como de tal análise negligenciar os aspectos sociais (OLIVEIRA, 2008, p. 52-53).

E, parafraseando Oliveira (2008, p. 53), concebemos, então, os conceitos utilizados por Thompson (2011) como uma metodologia para a análise de formas simbólicas, em educação matemática, por acreditarmos que sua teoria é uma possibilidade de sistematização de uma hermenêutica que tem contemplado certos anseios de uma certa comunidade de educadores matemáticos, mesmo conscientes de que essa não é a única possibilidade, nem mesmo que podemos afirmar ser a melhor.

Por fim, acreditamos que a potencialidade da Hermenêutica das Profundidades está muito mais naquilo que já expusemos que em uma presumida novidade. De fato, ao compreendermos as potencialidades da hermenêutica (como um todo) para a interpretação de textos – sejam de educação matemática ou não – vemos que a Hermenêutica das Profundidades de Thompson (2011) "nada mais" é que uma sistematização de ideias que permeiam essa hermenêutica geral e, mais particularmente, as hermenêuticas de Habermas e Ricœur, especialmente deste último. Ao buscar responder às perguntas "Como interpretar um texto? O que buscar compreender no texto?", Bicudo (1991) dá-nos alguns indicativos que ajudam a esclarecer essa questão, que poderíamos chamar de relações entre a Hermenêutica das Profundidades e a Hermenêutica, retomando discussões introduzidas no início deste texto:

> Pode-se buscar o autor do texto; tentar alcançar os motivos psicológicos que o levaram a dizer o que disse; procurar compreender o que ele diz do mundo e de sua experiência no mundo. O texto seria a objetificação da vida do autor, tal como Dilthey o entende. A hermenêutica permite revelar a vida interior do homem, o qual se expressa no texto. Entretanto, ao perseguir o lado psicológico, enquanto manifestações da vida interior do autor, o trabalho hermenêutico revela, concomitantemente, a expressão de uma realidade social e histórica jacente no momento presente da experiência vivida por essa pessoa. Podem ser buscadas as estruturas internas do texto, tratando-o sob a perspectiva da "ideologia absoluta do texto" olhando-o como sem mundo e sem autor. O texto pode ser interpretado em termos das explicações das suas ligações internas, da sua estrutura, da composição das suas frases, das figuras metafóricas, dos símbolos, das analogias, dos mitos por ele usados. Nessa abordagem, a interpretação internalista do mesmo permite uma incursão nas suas formas de dizer, nos símbolos, signos, mitos e metáforas que utiliza. Permite uma análise linguística que clarifique enunciados. Pode ser interpretado sob a perspectiva da crítica da ideologia, relevando o que está obscuro na comunicação linguística sob a perspectiva das instituições sociais. Nessa abordagem, o texto é encarado sob "suspeitas". Pode ser interpretado buscando a relação viva à qual a palavra se reporta. Nesse caso, a interpretação do texto visa a experiência fenomenológica estrutural, que indica o sentido do que é dito no texto. A interpretação pode enfocar símbolos, mitos e metáforas, como dizeres que falam de uma experiência primitiva. Pode ser interpretado mediante a compreensão do seu tema. O texto é tradição, é história, veicula ideologias e concepções de mundo, padroniza modos de dizer, portanto, modos de pensar e de experienciar o mundo. A tarefa do intérprete é a de interrogá-lo, compreendendo-o do seu presente, que é horizontal (por englobar passado e futuro). Ao fazer isso, o dito no texto – a tradição, horizonte do autor do texto e do próprio texto – encontra o horizonte do intérprete, leitor, permitindo que o mundo se lhe abra (p. 90-91).

Nota-se, portanto, que, se não todos, a maioria dos elementos que Thompson (2011) apresenta em sua Hermenêutica das Profundidades está presente nesse excerto de Bicudo (1991). Entretanto, ainda que a Hermenêutica das Profundidades de Thompson (2011) não traga uma novidade *lato sensu*, acreditamos que é justamente a sua apropriação, devidamente enviesada, pela sociologia que permitiu uma nova – para além da já estabelecida pela Filosofia – aproximação com a educação matemática. E encerremos esta seção retomando o principal interlocutor de Thompson, que vai ao encontro de muito do que já dissemos: uma Hermenêutica das Profundidades é, ainda, uma Hermenêutica: "Je ne reviens pas sur les arguments déjà exposés un peu plus haut et qui tendent à atténuer la différence entre mécompréhension et distorsion; *une herméneutique des profondeurs est encore une herméneutique*"[12] (RICŒUR, 1986, p. 412-413, grifo nosso).

Referências

ANDRADE, Mirian Maria. **Ensaios sobre o Ensino em Geral e o de Matemática em Particular, de Lacroix**: análise de uma forma simbólica à luz do Referencial Metodológico da Hermenêutica de Profundidade. 2012. 281 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A Hermenêutica e o trabalho do professor de matemática. *Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos*, Rio Claro, v. 3, n. 3, p. 63-92, 1991.

CARDOSO, Virginia Cardia. **A Cigarra e a Formiga**: uma reflexão sobre educação matemática brasileira na primeira década do século XXI. 2009. 212p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

GENETTE, Gérard. **Paratextos Editoriais**. Tradução de Álvaro Faleiros. Cotia: Ateliê Editorial, 2009. 376 p. Título Original: Seuils.

OLIVEIRA, Fábio Donizeti. **Análise de textos didáticos**: três estudos. 2008. 222f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

OTERO-GARCIA, Sílvio César; SILVA, Tatiane Taís Pereira da. Pressupostos da Hermenêutica das Profundidades e suas potencialidades para a pesquisa em Educação Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 3, p. 551-571, set./dez. 2013.

PALMER, Richard Edward. **Hermenêutica**. Tradução de Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: Edições 70, 2006. Título Original: Hermeneutics.

RICŒUR, Paul. **De l'interprétation**. Paris: Seuil, 1965.

RICŒUR, Paul. **Du texte à l'action**. Paris: Seuil, 1986.

SCHUBRING, Gert. **Análise Histórica de Livros de Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2003.

SILVA, Tatiane Taís Pereira. **Matrizes e suas Cercanias**: um estudo histórico a partir de livros didáticos de matemática. 2010. 137f. Relatório (Iniciação Científica) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru. 2010.

SILVA, Tatiane Taís Pereira. **Os Movimentos da Matemática Moderna**: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra *Matemática Curso Ginasial* do SMSG. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

THOMPSON, John Brookshire. **Critical Hermeneutics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

THOMPSON, John Brookshire. **Ideologia e Cultura Moderna**: teoria social crítica na era dos meios de comunicação em massa. Tradução do Grupo de Estudos sobre Ideologia, Comunicação

[12] Eu não gostaria de retornar aos argumentos já expostos, mencionados um pouco mais acima, que tendem a atenuar a diferença entre compreensão equivocada e distorção; uma hermenêutica das profundidades é ainda uma hermenêutica.

e Representações Sociais da Pós-Graduação do Instituto de Psicologia da PUCRS. Petrópolis: Editora Vozes, 2011. Título Original: Ideology and Modern Culture: critical social theory in the era of mass comunication.

APÊNDICE C

Análise matemática no século XIX

Nossa intenção neste apêndice é trazer os aspectos mais relevantes da história da análise de maneira a compreender melhor o caminho que essa área da matemática percorreu até a época de Lebesgue[1].

1 O conceito de função

Há inúmeras diferenças entre o cálculo da época de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o cálculo que veio depois da época de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), e uma dessas diferenças recai sobre o conceito de função. Por volta de 1700, o cálculo lidava com a noção de variáveis e pelos anos 1800 já se usava a ideia de função. Veremos mais adiante que o conceito de função foi usado por Cauchy para esclarecer o conceito de limite e tornar possível uma definição rigorosa de derivada.

Baseado em motivações físicas (movimento de corpos), Newton estabeleceu uma relação íntima entre os conceitos de função, variação e cálculo fluxional. O método de fluxões descreve as variações em termos de grandezas fluentes (funções) e só tem sentido se pensado em contextos naturais. Já Leibniz teve seu interesse despertado pelo estudo de curvas e o problema de tangentes; e foi nesse contexto que elaborou os conceitos fundamentais do cálculo. Tanto a ideia de função como a distinção entre curvas algébricas e transcendentes ocorreram a Leibniz quando ele se deparou com problemas de natureza geométrica ligados ao cálculo.

Pelo que se tem registro, a palavra *função* apareceu, pela primeira vez, num artigo escrito por Leibniz em 1692 (LEIBNIZ, 1692). Ele chamava de funções as quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como coordenadas, tangentes, subtangentes, normais, raios de curvatura etc. Mas foi juntamente com Johann Bernoulli (1667-1748) que o conceito e a simbologia usada para representar funções ficaram estabelecidos. Isso porque Bernoulli, em um artigo sobre um problema isoperimétrico (1698) – originalmente em latim, republicado em francês alguns anos depois (BERNOULLI, 1706/1707) –, usava o termo *fonctions quelconques de appliquées*[2] para quaisquer expressões que contivessem as ordenadas como

[1] Ressaltamos que parte deste capítulo foi publicado em coautoria com a orientadora deste projeto, Rosa Lúcia Sverzut Baroni, em 2014, sob a forma de livro pela Cultura Acadêmica, editora da UNESP (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014).

[2] O termo "appliquée", nesse contexto, pode ser traduzido como "ordenadas" – ainda que literalmente não

variáveis. Leibniz não se opôs ao uso do termo por Bernoulli e os dois discutiram, por cartas, como designar simbolicamente as "funções". Finalmente, em 1718, Bernoulli (1718/1741) definiu o conceito formalmente, e essa definição foi usada e padronizada por Leonhard Euler (1707-1783) em seu *Introductio in analysin infinitorum* (1748) da seguinte maneira: "Uma função de uma quantidade variável é uma *expressão analítica* formada de qualquer modo por tal quantidade variável e por números ou quantidades constantes" (EULER, 1748, p. 4)[3]. Euler não explicita o que seja *expressão analítica*, mas subentende-se que incluia expressões algébricas (compostas por somas, subtrações, produtos, quocientes e raízes), expressões que envolviam funções elementares transcendentes (exponencial, logarítmica, trigonométricas), e também séries de potências e outras expressões que envolviam limites (BOTTAZZINI, 1986; JAHNKE, 2003).

Essa obra de Euler representou um importante momento na história da análise porque o conceito de função foi colocado em seu centro, ou seja, foram as funções (ao invés das curvas) os principais objetos de estudo que permitiram a algebrização da geometria e a consequente separação da análise infinitesimal da geometria propriamente dita.

Em sua outra *Institutiones Calculi Differentialis*, Euler (1755) retoma o conceito de função com mais generalidade: "Aquelas quantidades que dependem de outras, isto é, aquelas quantidades que experimentam uma variação quando outras variam, chamam-se funções dessas quantidades" (EULER, 1755, p. vi)[4], mais próximo, portanto, não só do conceito atual de função, como também do conceito que seria adotado por Cauchy no século seguinte.

* * *

Cauchy (1821), em seu *Cours d'analyse*, uma das obras consideradas percursoras da nova era de rigor que caracterizou o século XIX[5], escreveu:

> Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entre si que, os valores de algumas sendo dados, podemos determinar os valores de todas aquelas outras, imaginamos essas diversas quantidades expressas por meio de algumas dentre elas, as quais recebem então o nome de variáveis independentes; e as quantidades restantes, expressas por meio das variáveis independentes, são o que chamamos de funções dessas variáveis (CAUCHY, 1821, p. 19-20)[6].

Além disso, introduziu a ideia de *função explícita* (por exemplo $\log x, \operatorname{sen} x, x+y, xyz$ etc.) e

tenha esse sentido.

[3] Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.

[4] Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent.

[5] Para mais detalhes sobre o conceito de função na obra de Euler, recomendamos a leitura de Martínez (2008).

[6] Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes des autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, que prennent alors le nom de variables indépendantes; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des fonctions de ces mêmes variables.

de *função implícita* (quando somente as relações entre as funções e as variáveis são dadas, ou seja, as funções não podem ser expressas diretamente em termos das variáveis), mas sempre indicando que funções são dadas por meio de alguma equação ou expressão. Isso também ocorre quando ele define funções simples e compostas. Dessa forma, mesmo que Cauchy tenha suprimido o termo *expressões analíticas* de sua definição, essa noção ainda estava presente em sua mente – por outro lado, conforme veremos em (2), nem todas as suas demonstrações e conceitos relacionados a funções estavam baseados na ideia de expressão analítica.

Também Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), um ano depois de Cauchy, apresentou seu conceito de função:

> Em geral, a função fx representa uma sequência de valores ou de ordenadas das quais cada uma é arbitrária. A abscissa x podendo receber uma infinidade de valores, haverá um mesmo número de ordenadas fx. Todos têm valores numéricos reais, ou positivos, ou negativos, ou zero. Nós não supomos que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de uma maneira qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade (FOURIER, 1822, p. 552)[7].

Diferentemente de Cauchy, Fourier, ao se referir à função como uma sucessão de valores quaisquer, evitou conscientemente a ideia de que as ordenadas devessem seguir uma lei matemática única. Como resultado, a identificação até então em voga de função como expressão analítica também passou a ser discutida (WUSSING, 1998). Entretanto, Fourier, em sua demonstração da convergência da série (de Fourier) de uma função arbitrária, explicitamente usou o fato de que se dois valores a e x diferem *muito pouco* (um valor infinitamente pequeno), então os valores $f(a)$ e $f(x)$ coincidem, ou seja, Fourier ainda atrelava ao conceito de função o de continuidade (FOURIER, 1822; LÜTZEN, 2003).

Passos mais claros na direção de, num primeiro momento, retirar a exigência de uma expressão analítica para a definição de função, foram dados pelos matemáticos Nicolas Ivanovich Lobachevskiy (1793-1856) e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Em 1834, Lobachevskiy, em seu trabalho sobre séries trigonométricas, escreveu:

> O conceito geral sugere que como função de se denomine um número que está dado para todo e que varia progressivamente com ele. O valor da função pode tanto ser obtido por meio de uma expressão analítica, quanto por meio de uma condição que ofereça uma maneira de se examinar todos os números e de eleger um dentre eles; bem, por último, pode existir uma dependência que permaneça desconhecida (apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 77, em inglês e russo)[8].

---

[7] En général, la fonction fx représente une suite de valeurs ou d'ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées fx. Toutes ont des valeurs numériques actuelles, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité.

[8] Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано и аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать, и оставаться неизвестной.

Três anos mais tarde, Dirichlet (1837) conceituou função, baseando-se na definição de Fourier:

> Vamos supor que a e b são dois valores dados e seja uma quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores entre a e b. Agora, se a cada x corresponde um único, finito y de modo que, conforme x varia continuamente através do intervalo de a até b, $y = f(x)$ varia do mesmo modo gradualmente, então y é chamado uma função contínua de x para esse intervalo (p. 152)[9].

Como se nota, tanto Lobachevskiy (*para todo* x *e que varia progressivamente com ele*), quanto Dirichlet (x *seja uma quantidade que assume, gradualmente, todos os valores entre* a *e* b), tinham em mente exclusivamente funções contínuas. Assim, uma vez que a questão das expressões analíticas fora resolvida, restava a da continuidade para que uma definição mais geral de função fosse obtida; Hankel (1870, 1871) deu esse segundo passo em seus dois trabalhos *Grenze* e *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* (HAWKINS, 1975; WUSSING, 1998).

Nesses trabalhos, Hankel observa que a definição dada por Dirichlet não permitia que as funções possuíssem propriedades mais gerais, uma vez que certas relações existentes entre seus diferentes valores simplesmente desapareciam. A partir disso, apresenta uma nova definição, muito próxima da noção moderna de correspondência entre dois conjuntos de números:

> Uma função se diz y de x se a cada valor da magnitude variável x que se move dentro de um certo intervalo, corresponde-lhe um determinado valor de y; não importa se y depende de x em todo o intervalo segundo a mesma lei ou não; se a dependência pode ser expressa por meio de operações matemáticas ou não (HANKEL, 1870, p. 5)[10].

Vale ressaltar, no entanto, que nem o conceito de "conjunto" nem o de "número" estavam estabelecidos na época. Na verdade, a definição em termos de conjuntos arbitrários apareceu apenas no início do século XX, quando Georg Cantor (1845-1918), com a teoria dos conjuntos, define função como um subconjunto do produto cartesiano de dois ou mais conjuntos com determinadas propriedades (WUSSING, 1998).

2 As contribuições de Cauchy

> [Cauchy] apresentou um novo estilo de rigor que formou o princípio-guia para grande parte do desenvolvimento da análise no século XIX (BARON;

[9] Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspriecht unn jedem x ein einziges endliches y und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sieh ebenfalls ällmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall.

[10] Eine Function heisst y von x, wenn jedem Werthe der veränderlichen Grösse, x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Werth von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operstionen ausgedrückt werden kann oder nicht.

> BOS, 1985, p. 45).
>
> Para terminar nossos breves comentários sobre a influência de Cauchy na Matemática ocidental, iremos colocá-lo dentro da perspectiva histórica apropriada. Assim, ele pertence ao período prévio ao "estágio de arte" de nossa Matemática, sendo um de seus precursores. Ocupa, portanto, a posição que Eudoxo ocupou na Matemática grega. Com mais precisão, Eudoxo resolveu o "impasse dos incomensuráveis" na Geometria grega com sua "teoria das magnitudes", como exposta no Livro V dos *Elementos* de Euclides, e Cauchy resolveu o "impasse dos infinitésimos" com sua "teoria dos limites". Esses fatos fundamentais são em geral obscurecidos porque não são colocados dentro de uma perspectiva histórica correta, isto é, como períodos correspondentes na evolução de duas Culturas Históricas distintas: a Grega e a Ocidental (LINTZ, 2007, p. 357).

Como já foi observado, o século XIX é chamado de "era do rigor". Esse rigor podemos compreender como sendo algo que invadiu quase toda a análise, transformando-a na disciplina que hoje em dia é ensinada nas universidades; não foi apenas uma questão de tornar mais claros determinados conceitos básicos e mudar as demonstrações de uns poucos teoremas. Foi um processo de criação que produziu novas áreas e conceitos na matemática como, por exemplo, continuidade uniforme e pontual, convergência uniforme e pontual, compacidade, completude etc.

Mas o rigor em si não era o objetivo dos matemáticos da época; eles estavam voltados a resolver questões técnicas e desenvolver novos teoremas. Um exemplo disso é o interesse despertado pelas séries de Fourier, que acabou mudando velhas ideias a respeito de funções, integral, convergência, continuidade etc. Também podemos citar o desenvolvimento das equações diferenciais, teoria do potencial e funções elípticas como outras áreas que contribuíram com o processo de rigorização (LÜTZEN, 2003).

Também podemos olhar o aspecto educacional como um grande motivador no que dizia respeito ao rigor, uma vez que vários professores buscavam por mudanças ao ensinar os fundamentos da análise. Esse foi o pano de fundo para as reformas promovidas por Cauchy e Karl Weierstrass (1815-1897) e da construção dos números reais por Richard Dedekind (1831-1916) (LÜTZEN, 2003, GRABINER, 2005, BOTTAZZINI, 1986).

* * *

No século XVIII e começo do século XIX, na França, a análise estava bastante ligada à física teórica; por outro lado, sobretudo na Alemanha, na primeira metade do século XIX, as escolas e universidades tomaram o lugar das escolas técnicas com relação a formação e pesquisa em matemática (SCHUBRING, 1993). Esse cenário, combinado com o movimento neo-humanista, culminou no desenvolvimento da matemática como campo independente. Ao mesmo tempo, a análise estava se separando da geometria: Newton e Leibniz são considerados os pais do cálculo, mas inconsistências em suas teorias fundamentadas nos infinitésimos[11],

[11] Euler (1755) definiu infinitésimos como quantidades menores que qualquer outra quantidade dada.

cuja base maior era a geometria, fizeram com que se procurasse uma alternativa para se constituir a análise: os números. Os reais foram construídos a partir dos racionais que, por sua vez, foram construídos a partir dos naturais e a análise passou a se basear diretamente nessas novas ideias desligando-se, assim, completamente da geometria (LÜTZEN, 2003, REIS, 2001).

O movimento de rigorização da análise pode ser dividido, segundo Lützen (2003) em dois períodos: o francês – dominado por Cauchy, tratado neste capítulo; e o alemão – dominado por Weierstrass, que será tratado em (5.1). É evidente que outros matemáticos tiveram importante papel nesse processo; muitos deles serão lembrados no decorrer de nossas colocações.

* * *

Durante o período de quinze anos em que foi professor na *École Polytechnique*, Cauchy produziu grande parte de seus trabalhos ligados à fundamentação da análise. Isso se deve, em parte, ao compromisso estabelecido pelos professores dessa escola de escreverem textos em todos os níveis (didático, científico). Cauchy seguiu essa tradição e, nesse período escreveu três livros: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821); *Résume des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829)[12]. Apesar de gostar muito de lecionar, Cauchy nem sempre era bem aceito, tanto pelos seus alunos, que não apreciavam seu estilo teórico, nem pelos seus próprios colegas e superiores, que consideravam que ele gastava muito tempo com detalhes na parte introdutória, em detrimento das aplicações. Mas foram exatamente essas características que o tornaram famoso e iniciaram o movimento em torno do rigor. (CAUCHY, 1829; DIEUDONNÉ, 2012; GILAIN, 1989).

Cauchy tem trabalhos em diversas áreas, tais como na teoria de funções complexas, álgebra (permutações), teoria dos erros, mecânica celeste, física matemática; mas seu nome está associado definitivamente à análise, pela contribuição que deu em seus fundamentos. Na verdade, foi a obra de Cauchy sobre o cálculo, como um todo, e não seus elementos separadamente, que a fizeram tão diferente da de seus predecessores. Talvez, por isso, alguns autores indicam que Cauchy "tomou" várias ideias de Bernard Bolzano (1781-1848) – é fato que ideias semelhantes às de Cauchy a respeito do cálculo foram desenvolvidas ao mesmo tempo por Bolzano, um padre tcheco que sempre viveu em Praga; tudo indica, no entanto, que durante o período em que viveu lá, Cauchy e Bolzano não se encontraram, e que a semelhança entre suas ideias foi uma simples coincidência; retomaremos esse assunto em (3.2). Além disso, são encontradas várias semelhanças entre certos pontos de seus trabalhos com os de Euler, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Sylvestre François Lacroix (1765-1843) e Siméon Denis Poisson (1781-1840); indicando, de certa forma, raízes naturais para seus conceitos, teoremas

Modernamente, $x \in \mathbb{R}^*$, em que $\mathbb{R}^*$ é uma extensão do conjunto dos números reais, é um infinitesimal se $|x| < r$, para todo real positivo r (KEISLER, 1976). Voltaremos a tratar desse ponto mais adiante.

[12] De início, os professores deveriam, antes de ensinar cálculo diferencial e integral, apresentar por escrito o que chamavam de "análise algébrica", correspondendo mais ou menos ao volume um do Introductio de Euler (1748). O famoso *Cours d'analyse* de Cauchy teve, a princípio, esse papel.

e demonstrações (JOURDAIN, 1913).

Vamos, agora, semelhantemente a Lützen (2003), detalhar um pouco mais alguns conceitos da análise de Cauchy, listando uma série de definições que aparecem em seu *Cours d'analyse* (variável, limite, quantidade infinitamente pequena, continuidade) (CAUCHY, 1821) e em seu *Résumé* (derivada, integral) (CAUCHY, 1823).

2.1 Variáveis e limites

> Nomeamos quantidade *variável* aquela que se considera como passível de receber sucessivamente muitos valores diferentes uns dos outros. [...] Chamamos, ao contrário, quantidade *constante* [...] toda quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a terminar por dele diferir tão pouco quanto queiramos, esse último é chamado o *limite* de todos os outros (CAUCHY, 1821, p. 4)[13].

A definição de Cauchy de variável se diferencia da de Euler em alguns aspectos. Por exemplo, Euler (1748, p. 4) definiu variável como "uma quantidade numérica indeterminada ou geral que abrange todos os valores determinados"[14], enquanto que para Cauchy, as variáveis assumem diferentes valores, mas não necessariamente todos, ou seja, podem estar limitadas a um certo intervalo. Além disso, o conceito de Cauchy é dinâmico já que, em particular, as variáveis podem ter limites, enquanto que o conceito de Euler se aproxima mais do sentido moderno de elemento arbitrário ou genérico de um conjunto. Mas deve ser observado que, diferentemente do que temos hoje, Cauchy permitia, em alguns casos, que uma variável (ou sequência) pudesse ter mais do que um limite. Isso pode ser visto em sua formulação do teste da raiz para a convergência de séries de termos positivos, mais propriamente na demonstração desse resultado em que o limite, no caso, é o que hoje consideramos um ponto de acumulação[15] e o maior valor desses limites é exatamente o que chamamos de $\limsup$ (LÜTZEN, 2003).

> Primeiro Teorema: Procura o limite, ou os limites, para os quais converge, ao mesmo tempo em que n cresce indefinidamente, a expressão $(u_n)^{1/n}$; e designa por k o maior desses limites, ou, em outros termos, o limite dos maiores valores da expressão da qual se trata. A série $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots]$ será convergente, se se tem $k < 1$, e divergente se se tem $k > 1$ (CAUCHY, 1821, p. 132)[16].

[13] On nome quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. [...] On appelle au contraire quantité *constante* [...] toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

[14] Cum ergo omnes valores determinati numeris exprimi queant, quantitas variabilis omnes numeros cujusvis generis involvit.

[15] Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se todo aberto A contendo a contém pelo menos um ponto de X distinto de a.

[16] Premier Théorème. Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croit indéfiniment, l'expression $(u_n)^{1/n}$; et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série série $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots]$ sera

Já o conceito de limite de Cauchy (presente no mesmo excerto), conforme nos aponta Grabiner (2005), se aproxima muito da correspondente concepção moderna quando consideramos não propriamente a maneira como limite foi definido por ele, mas como de fato operava com essa definição. Quando provava algum resultado, Cauchy traduzia sua definição de limite em termos de desigualdades e épsilons e deltas, como se faz atualmente. Para efeitos comparativos, definições comuns no século XVIII, como as de Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) e Jean-Baptiste de La Chapelle (1710-1792) (na *Encyclopédie*) nunca foram traduzidas em termos de inequações e, também, nunca foram usadas para provar nenhum resultado substancial. Entretanto, conforme nos aponta Grabiner (2005), é necessário destacar que, à época do *Cours*, já haviam se passado mais de cem anos desde que a ideia de que o cálculo poderia ser entendido em termos de limites estava presente na matemática, e isso certamente foi fundamental para guiar Cauchy na direção certa (GRABINER, 2005).

Quantidade Infinitamente Pequena

> Dizemos que uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena, quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero (CAUCHY, 1821, p. 26)[17].

A noção de grandeza infinitamente pequena já pode ser percebida na matemática antiga dos gregos em suas tentativas de superar as dificuldades lógicas encontradas em expressar razões e proporções de segmentos (vaga ideia de continuidade), em termos de números (para eles sempre discretos). Todavia, o rigor grego excluía o *infinitamente pequeno* das demonstrações geométricas e o que prevaleceu na época foi o chamado *método de exaustão*. Problemas de variação não eram abordados quantitativamente pelos cientistas gregos. Também podemos perceber algumas aproximações desse conceito, por exemplo, com os filósofos escolásticos, nos indivisíveis de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e na introdução da geometria analítica e representação de quantidades variáveis, no século XVII (BOURBAKI, 2007; THIELE, 2003).

Mas foi com a constituição do cálculo, sobretudo com Newton e Leibniz, que os infinitésimos tomaram importância. Newton, embora os usasse, dizia que seu cálculo (fluxões) não dependia deles; já Leibniz trabalhou bastante com essas quantidades, sobretudo com as diferenciais. Sabemos ainda que as ideias de Newton e Leibniz receberam várias críticas e esse processo acabou por estabelecer um movimento de aprimoramento das noções do cálculo. Euler defendia que uma quantidade infinitamente pequena (ou evanescente) era simplesmente algo que viria a ser zero, mas também recebeu críticas. E assim foi com d'Alembert, Lagrange e outros, até chegarmos a Cauchy que, como vimos, escreveu que uma variável que tem zero como limite *se torna* infinitamente pequena. Esse conceito é usado por Cauchy em várias

convergente, si l'on $k < 1$, et divergente, si l'on a $k > 1$.

[17] On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro.

de suas obras, mas hoje muitos historiadores defendem que a centralidade está no conceito de limite e os infinitésimos seriam apenas abreviações úteis para as variáveis que tem limite nulo. Assim, devemos ressaltar que, mesmo aceitando a simplicidade dos infinitésimos, Cauchy redefiniu esse conceito, sobretudo em relação às concepções de Euler e Leibniz para quem os infinitésimos eram constantes. Para Cauchy, essas quantidades eram variáveis.

Por fim, apesar dos avanços que Cauchy conseguiu na direção do rigor pretendido a sua época, ressalta-se que os seus infinitésimos também não foram aceitos, pois ainda se baseavam em ideias e conceitos em vigor desde o século XVIII. Além disso, o atrelamento dos infinitésimos à geometria (considerada pouco rigorosa) não havia sido totalmente superado. Esse problema só seria resolvido com o movimento que ficou conhecido como aritmetização da análise, a partir do qual a base dos conceitos deslocou-se dos infinitésimos para os limites e, consequentemente, da geometria para os números.

2.2 Continuidade

> Seja $f(x)$ uma função da variável x, e suponhamos que, para cada valor de x entre dois limites dados, essa função admita constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor de x compreendido entre esses limites, atribuímos à variável x um aumento infinitamente pequeno α, a função receberá ela mesma por aumento a diferença $f(x+\alpha)-f(x)$, que dependerá ao mesmo tempo da nova variável α e do valor de x. Isso posto, a função $f(x)$ será, entre os dois limites fixados para a variável x, função *contínua* dessa variável, se, para cada valor de x intermediário entre esses limites, o valor numérico da diferença $f(x+\alpha)-f(x)$, decresce indefinidamente com o de α. Em outros termos, a função $f(x)$ permanecerá contínua em relação a x entre os limites dados se, entre esses limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzir sempre um aumento infinitamente pequeno da própria função. Dizemos ainda que a função $f(x)$ é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, função contínua dessa variável, todas as vezes que ela é contínua entre dois limites de x, mesmo muito próximos, que contêm o valor a que se referem (CAUCHY, 1821, p. 34-35)[18].

A maior novidade, e talvez o conceito mais central na obra de Cauchy, é a noção de continuidade, notadamente diferente da de Euler, que na época era a mais aceita. Por exemplo, para

[18] Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limite données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans la voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Euler a função

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geqslant 0 \end{cases}. \tag{1}$$

era descontínua, já que era representada por mais de uma expressão analítica[19]. Essa concepção levava a algumas incoerências, como observou Cauchy (1844). Ao se escrever a série de Fourier da função acima obtém-se uma expressão analítica que indica que essa função poderia ser contínua segundo a própria definição de Euler (LÜTZEN, 2003):

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geqslant 0 \end{cases} = \sqrt{x^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{t^2 + x^2} dt, \tag{2}$$

ou seja, "uma simples mudança de notação é suficiente para transformar uma função contínua no sentido de Euler em uma função descontínua no sentido de Euler, e vice-versa" (LÜTZEN, 2003, p. 165).

* * *

A alternativa de Cauchy para a definição de Euler, segundo entende Lützen (2003), foi concebida por meio do estudo das funções com saltos. O matemático francês Louis François Antoine Arbogast (1759-1803) já havia trabalhado com a definição de (des)continuidade nesse tipo de função, tendo dado ao conceito o nome de "(des)contiguidade" (ARBOGAST, 1791; JOURDAIN, 1913). Entretanto, tratava-se, ainda, apenas de uma generalização da definição de Euler. Cauchy foi além. Alguns anos antes de seu *Cours d'Analyse*, em suas investigações sobre integrais definidas, Cauchy (1814/1827) escreveu:

> A primeira dificuldade que se apresenta, concerne às funções de uma só variável. Se uma integral indefinida é expressa por uma certa função da variável aumentada de uma constante arbitrária, a mesma integral, tomada entre dois limites dados, a e b, será expressa em geral pela diferença dos valores da função relativa a esses dois limites. Todavia, esse teorema não é verdadeiro senão no caso em que a função encontrada cresce ou decresce de uma maneira continua entre os dois limites em questão. Mas, se, quando fazemos crescer a variável em graus imperceptíveis, a função encontrada passa subitamente de um valor a outro, a diferença, estando sempre compreendida entre os limites de integração, a diferença desses dois valores deverá ser retirada da integral definida, como de costume, e cada um dos saltos bruscos que poderá fazer a função encontrada, necessitará de uma correção de mesma natureza (p. 614-615)[20].

[19] Segundo nos esclarece Jahnke (2003), para Euler eram contínuas as funções que podiam ser representadas por uma única expressão analítica, e descontínuas as demais.

[20] La première difficulté que se présente regarde les fonctions d'une seule variable. Si une intégrale indéfinie est exprimée par une certaine fonction de la variable augmentée d'une constante arbitraire, la même intégrale, prise entre deux limites donnés, a e b, sera exprimée en général par la différence des valeurs de la fonction relative à ces deux limites. Toutefois ce théorème n'est vrais que dans le cas où la fonction trouvée croit ou décroit d'une manière continue entre les deux limites dont il s'agit. Mais si, lorsqu'on

e mais adiante:

> Se a função $\varphi(z)$ cresce ou decresce de uma maneira contínua entre os limites $z = b'$, $z = b''$, o valor da integral será representado, como de costume, por
>
> $$\left[\int_{b'}^{b''} \varphi'(z)dz = \right] \varphi(b'') - \varphi(b').$$
>
> Mas, se, para um certo valor de z representado por Z e compreendido entre os limites de integração, a função $\varphi(z)$ passar subitamente de um valor determinado a outro valor sensivelmente diferente do primeiro, de sorte que designando por ξ uma quantidade muito pequena, tenhamos $\varphi(Z+\xi) - \varphi(Z-\xi) = \delta$, então o valor ordinário da integral definida, a saber, $\varphi(b'')-\varphi(b')$, deverá ser diminuído da quantidade δ, como se pode facilmente demonstrar (p. 687-688)[21].

Assim, o que Cauchy fez em 1814 foi definir descontinuidade por meio de uma tradução de propriedades das funções com salto. Entretanto, essa formulação algébrica de 1814 não é, embora possa parecer, inconsistente com a definição de continuidade que apareceria anos depois em seu *Cours*. (GRABINER, 2005). São definições de naturezas diversas. Vamos analisar essa afirmação com um pouco mais de cuidado.

Em sua definição de 1821, Cauchy especifica claramente um valor da variável x e estabelece que $f(x+\alpha) - f(x)$ tende a zero quando α tende a zero. Isso lembra o conceito atual de continuidade pontual. Por outro lado, na definição de 1814, não se fala em um valor específico de x, mas do acréscimo da função. Isso pode remeter à ideia de continuidade uniforme. Embora Cauchy trabalhasse com as duas definições e conseguisse estabelecer sua análise com elas, ele não conseguia distingui-las claramente. Isso só seria feito por Bolzano em 1830; entretanto, esse trabalho só seria publicado cem anos depois (BOLZANO, 1830/1930, GRABINER, 2005, LÜTZEN, 2003). Voltaremos a falar disso em (3.2).

2.3 Convergência

> Chamamos série uma sequência indefinida de quantidades $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ que derivam umas das outras segundo uma lei determinada. Essas quantidades são elas mesmas diferentes termos da série que consideramos. Seja $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ a soma dos n primeiros termos, n designando um número inteiro qualquer. Se, para valores de n sempre crescentes, a soma s_n se aproxima indefinidamente de um certo limite s, a série será

fait croitre la variable par degrés insensibles, la fonction trouvée passe subitement d'une valeur à une autre, la variable étant toujours comprise entre les limites de l'intégration, la différence de ces deux valeurs devra être retranchée de l'intégrale définie prise à l'ordinaire, et chacun des sauts brisques que pourra faire la fonction trouvée nécessitera une correction de même nature.

[21] Si la fonction $\varphi(z)$ croit ou décroit d'une manière continue entre les limites $z = b'$, $z = b''$, la valeur de l'intégrale sera représentée, à l'ordinaire, par $\varphi(b'') - \varphi(b')$. Mais, si, pour certaine valeur de z représentée par Z et comprise entre les limites de l'intégration, la fonction $\varphi(z)$ passe subitement d'une valeur déterminée à une autre valeur sensiblement différent de la première, en sorte qu'en désignant par ξ une quantité très-petite, on ait $\varphi(Z+\xi) - \varphi(Z-\xi) = \delta$, alors la valeur ordinaire de l'intégrale définie, savoir, $\varphi(b'') - \varphi(b')$, devra être diminuée de la quantité δ, comme on peut aisément s'en assurer.

> dita convergente, e o limite em questão se chamará a soma da série. Ao contrário, se, ao mesmo tempo que n cresce indefinidamente, a soma s_n não se aproxima de algum limite fixo, a série será divergente e não terá soma (CAUCHY, 1821, p. 123)[22].

Durante o século XVIII, era comum definir a convergência ou divergência de uma série em termos de seu n-ésimo termo. Assim, a série cujo n-ésimo termo tendia a zero, convergia, do contrário, não. Sabemos que essa condição não é sempre verdadeira, e a série harmônica $\sum 1/n$ talvez seja o contra-exemplo mais emblemático. Esse resultado já era conhecido desde pelo menos Nicole d'Oresme, mas isso não era exatamente um problema, já que a própria ideia de convergência era outra, ou seja, a série harmônica convergia mesmo que sua soma não fosse finita (GRABINER, 2005).

Na definição de Cauchy, a atenção se desloca dos termos da série (convergindo para zero) para sua própria soma (convergindo para um valor fixo). É evidente que essa noção gerou problemas, já que uma mesma série poderia divergir no sentido de Cauchy e convergir no sentido descrito no parágrafo anterior. Ou seja, o desafio ia além da definição matemática de um conceito, perpassava pela própria definição do conceito, em outros termos, não bastava explicitar rigorosa e matematicamente o conceito de convergência, era necessário também se estabelecer o que se entendia por ele. E Cauchy, de fato, não foi o precursor dessa nova ideia de convergência; Euler, por exemplo, às vezes operava com ela em seu *Institutiones Calculi Differentialis* (1755).

Então, qual foi, de fato, a contribuição de Cauchy? Nossa resposta poderá ser restritiva, mas, ainda que sob esse risco, destacaremos alguns dos pontos que Lützen (2003) e Grabiner (2005) trazem sobre o assunto: a caracterização da convergência de séries, em várias demonstrações, por meio do par $\varepsilon - N$ e, em particular, sua insistência em afirmar que séries divergentes não têm soma. Essa posição "chocou" os matemáticos da época, de modo que Cauchy se sentiu impelido a, antes de encontrar as somas das séries, melhor caracterizar (ou estabelecer) a convergência. A partir disso, provou diversos testes de convergência como o da raiz, o do quociente e aquele que, por vezes, é conhecido como critério de Cauchy[23]. Alguns desses testes já eram conhecidos, entretanto, Cauchy inovou realmente foi nas provas rigorosas deles e na importância fundamental que deu a eles pela preocupação estabelecida com a questão da convergência das séries.

---

[22] On appelle série une suite indéfinie de quantités $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ la somme des $n$premiers termes, n désignanant un nombre entier quelconques. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente, et n'aura plus de somme.

[23] Uma série $\sum u_i$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um natural N tal que $|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$, para todo $n > N$. Ou, equivalentemente, a série converge se, e somente se, suas somas parciais formam uma sequência de Cauchy. Entretanto, Cauchy apenas demonstrou a suficiência desse resultado. E isso é compreensível, pois a necessidade é um resultado derivado da completude do conjunto dos números reais. Por fim, vale ressaltar que por vezes damos o nome de Cauchy ao teste da raiz, então convém não confundir esse teste com o que chamamos aqui de critério de Cauchy.

Apesar da incontestável contribuição dada por Cauchy no que diz respeito ao parágrafo anterior, foi mesmo o teorema que liga os conceitos de continuidade e convergência que mais obteve destaque dentro do seu *Cours*.

> Quando os diferentes termos da série $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}]$ são funções de uma mesma variável x, contínuas com relação a essa variável em uma vizinhança de um valor particular para o qual a série é convergente, a soma s da série é também, na vizinhança desse valor particular, função contínua de x (p. 131-132)[24].

Como já adiantamos, esse teorema seria alvo de algumas controvérsias, tendo sua demonstração, alguns anos depois, contestada por Niels Henrik Abel (1802-1829) (ver 3.3). Modernamente, por um lado, alguns historiadores consideram que Cauchy cometeu um erro, pois se consideramos os modernos significados atribuídos a alguns elementos da demonstração, esse teorema é falso. Por outro lado, se considerarmos que Cauchy tinha em mente, na época, convergência uniforme numa vizinhança de x, o resultado será verdadeiro (LÜTZEN, 2003; SCHUBRING, 1983). Voltaremos a tratar desse assunto nas próximas seções.

2.4 Derivada

> Quando a função $y = f(x)$ permanece contínua entre dois limites dados da variável x, e quando atribuímos a essa variável um valor compreendido entre os dois limites a que se referem, um aumento infinitamente pequeno atribuído à variável produz um aumento infinitamente pequeno da própria função. Por consequência, se pusermos então $\Delta x = i$, os dois termos do quociente das diferenças
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$
>
> serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, enquanto esses dois termos se aproximam indefinidamente e simultaneamente do limite zero, o quociente poderá ele mesmo convergir rumo a um outro limite, seja positivo, seja negativo. Esse limite, quando existe, tem um valor determinado, para cada valor particular de x, mas ele varia com x. [...] a forma da função nova que servirá de limite ao quociente $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar essa dependência, damos à nova função o nome de função derivada, e a designamos com a ajuda de um acento, pela notação y' ou $f'(x)$ (CAUCHY, 1823, p. 9)[25].

[24] Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'unes même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.

[25] Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pode alors $\Delta x = i$, les deux termes du rapport aux différences $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. [...] la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite

Embora Cauchy tenha usado de Lagrange o termo "derivada" e até mesmo a sua notação f', "rejeitou" a definição (de Lagrange) em termos de expansões de séries de potências – $f(x+i) = f(x)+if'(x)+iV$, em que V é uma função que tende a zero junto com i –, optando por traduzi-la a partir de uma percepção semelhante à de Lacroix, que definiu derivada em termos do quociente das diferenças (GRABINER, 2005, KATZ, 1998, LAGRANGE, 1797). Entretanto, Cauchy foi além e tratou esse quociente como um limite, eliminando assim a ideia de quociente de infinitésimos – presente nos trabalhos de Euler. Inclusive, o próprio termo infinitésimo (ou quantidade infinitamente pequena) é bastante evitado na obra de Cauchy, aparecendo mais como um recurso estilístico (linguagem abreviada) ou para indicar um limite que tende a zero (ver item 2.1) (LINTZ, 2007).

Cauchy calculou a derivada de um grande número de funções, como $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = x^a$, com a real. Para Katz (1998), no que diz respeito à definição de derivada, Cauchy não fez nada de particularmente relevante. Grande parte de suas demonstrações, por exemplo, já haviam sido feitas por Lagrange. Entretanto, a definição de Lagrange presumia que toda função podia ser expandida em séries de potências. Esse falso fato, conjuntamente com o fato de Cauchy ter traduzido boa parte dessa linguagem e de outros matemáticos contemporâneos seus em uma definição conveniente para se demonstrar teoremas, fez com que sua abordagem prevalecesse por tanto tempo, estando ainda em considerável parte presente em textos universitários modernos (EVES, 2004).

2.5 Integral

> Suponhamos que a função $y = f(x)$ seja contínua com relação a variável x entre dois limites finitos $x = x_0$, $x = X$. Designamos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ os novos valores de x interpostos entre esses limites, e que estejam sempre crescendo ou decrescendo desde o primeiro limite até o segundo. Poderemos nos servir desses valores para dividir a diferença $X - x_0$ em elementos $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, X - x_{n-1}$, que serão todos de mesmo sinal. Isso posto, concebemos que multiplicamos cada elemento pelo valor de $f(x)$ correspondente à origem desse mesmo elemento, a saber, o elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, o elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1)$, ..., enfim, o elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; e seja $S = (x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$ a soma dos produtos assim obtidos. A quantidade S dependerá, evidentemente, primeiro do número n de elementos dentro dos quais teremos dividido a diferença $X - x_0$, segundo, dos próprios valores desses elementos, e, por consequência, do modo de divisão adotado. Ora, é importante notar que, se os valores numéricos dos elementos tornam-se muito pequenos e o número n muito significativo, o modo de dividir não terá mais sobre o valor de S uma influência senão imperceptível; [...] o valor de S terminará por ser sensivelmente constante, ou, em outros termos, ele terminará por alcançar um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valo-

au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonctions proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonctions le nom de fonctions dérivée, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation y' ou $f'(x)$.

> res extremos, x_0, X, atribuídos à variável x. Esse limite é o que chamamos uma integral definida (CAUCHY, 1823, p. 81, 83)[26].

Se, em relação às derivadas, Cauchy não apresentou grandes inovações, o mesmo não podemos dizer quanto ao tratamento dado por ele às integrais. Seus antecessores (século XVIII) aceitavam a ideia, advinda principalmente de Newton, de integração como o inverso da diferenciação. Cauchy apresentou um novo enfoque, mais inspirado em Leibniz – que havia considerado as integrais como somas de infinitésimos, definindo a integral como um somatório que tende a um limite. A ideia de integral como inversa da derivada tornava o cálculo integral uma espécie de apêndice do cálculo diferencial. Cauchy rompe com esse ponto de vista, já que define a integral de maneira independente da derivada. Por conta disso, Cauchy teve que provar a relação de dependência, e o fez por meio do Teorema do Valor Médio, que já era conhecido à sua época (ver próximo item).

Seja como for, devemos observar que foi Fourier, em um seu trabalho de 1822, quem primeiro mudou esse cenário, ao perceber que para calcular certos coeficientes – que hoje levam seu nome (ver 4) – de funções arbitrárias, ele não poderia usar o cálculo diferencial, que não se aplicava a determinados tipos de funções. Assim, ele focou as integrais definidas e estabeleceu seu significado como a área entre a curva e o eixo. Também foi Fourier quem estabeleceu a notação $\int_a^b f(x)dx$ colocando os limites de integração a e b na parte superior e inferior do símbolo da integral (FOURIER, 1822).

Cauchy, de certa forma, seguiu Fourier, mas foi mais longe ao definir sua integral como o limite de uma soma à esquerda. Isso se mostrou mais preciso e permitiu que ele provasse que a continuidade era uma condição suficiente para a integrabilidade. Essa demonstração, segundo Lützen (2003, p. 170), "é uma das obras primas do *Calculus de Cauchy*".

Cauchy (1823) ainda define a integral de funções descontínuas num conjunto finito de valores. Essa definição pode ser comparada com a de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que, por outro lado, em 1854 se baseou na definição de integral de Cauchy para estendê-la a uma classe mais abrangente de funções que as contínuas (LÜTZEN, 2003, RIEMANN, 1854/1876).

[26] Supposons que, la fonctions $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$, $x = X$, on désigne par $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs, pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, X - x_{n-1}$, qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir, l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soi $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S déprendra évidentement, 1°. du nombre n des éléments dans lesquels on aura divise la différence $X - x_0$, 2°. des valeurs mêmes de ces éléments, et par conséquent du mode de division adopté. Or, il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très-petites et le nombre n très-considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influente insensible; [...] la valeur de S finira par être sensiblement constante, ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$, et les valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une intégrale définie.

2.6 Teorema fundamental do cálculo

> Se, na integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, fizermos variar um dos dois limites, por exemplo, a quantidade X, a integral variará ela mesma com essa quantidade; e, se substituirmos o limite X, tornando-o variável, por x, obteremos por resultado uma nova função de x, que será o que chamamos de uma integral tomada a partir da origem $x = x_0$. Seja
>
> $$\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \tag{1}$$
>
> essa nova função. Obtemos da fórmula (19) [Lição 22][27]
>
> $$\mathfrak{F}(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)],\ \mathfrak{F}(x_0) = 0, \tag{2}$$
>
> θ sendo um número inferior à unidade; e da fórmula (7) [Lição 23][28]
>
> $$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \text{ ou}$$
>
> $$\mathfrak{F}(x + \alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha). \tag{3}$$
>
> Segue das equações (2) e (3) que, se a função $f(x)$ é finita e contínua na vizinhança de um valor particular arbitrário da variável x, a nova função $\mathfrak{F}(x)$ será não somente finita, mas também contínua na vizinhança desse valor, pois a um incremento infinitamente pequeno de x corresponderá um incremento infinitamente pequeno de $\mathfrak{F}(x)$. Portanto, se a função $f(x)$ permanece finita e contínua desde $x = x_0$ até $x = X$, o mesmo ocorrerá com a função $\mathfrak{F}(x)$. Acrescentemos ainda que, se dividirmos por α os dois membros da fórmula (3), concluiremos, passando o limite, que
>
> $$\mathfrak{F}'(x) = f(x). \tag{4}$$
>
> Portanto a integral (1), considerada como função de x, tem por derivada a função $f(x)$ contida abaixo do sinal $\int$ dessa integral (CAUCHY, 1823, p. 101)[29].

Uma vez que Cauchy definiu as operações de integração e derivação de modo independente,

[27] Isto é, $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$.

[28] Isto é, $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx$, em que $x_0 \leqslant \xi \leqslant X$.

[29] Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'origine $x = x_0$. Soit (1) $\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [[22.e leçon] (2) $\mathfrak{F}(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)]$, $\mathfrak{F}(x_0) = 0$, θ étant um nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.e leçon] $\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x+\theta\alpha)$, ou (3) $\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha f(x+\theta\alpha)$. Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathfrak{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathfrak{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathfrak{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deus membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites, (4) $\mathfrak{F}'(x) = f(x)$. Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale.

foi necessário estabelecer a relação existente entre esses dois conceitos, o que se deu por meio da demonstração do *Teorema Fundamental do Cálculo* (TFC)[30]. Ele mostrou que se $f(x)$ é uma função contínua, então $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ tem por derivada a função f. Newton e Leibniz já haviam formulado o TFC[31] mas foi Cauchy o primeiro, ao que se sabe, a trazer uma prova rigorosa desse importante teorema para o cálculo e para a análise (BOYER, 1949).

Em sua prova, Cauchy utilizou essencialmente dois conceitos: o do teorema do valor médio para integrais, resultado bem conhecido atribuído a Lagrange; e linearidade da integração para com a operação de adição, resultado este que, para Cauchy, resultou imediatamente da sua definição de integral. Na realidade, Cauchy não utilizou somente o resultado de Lagrange para o Teorema do Valor Médio para Integrais (TVMI)[32], mas também a sua própria demonstração do TFC (GRABINER, 2005).

Lagrange, em sua demonstração do TVMI, definiu a integral como o inverso da derivada, e estabeleceu esse teorema como uma variação do Teorema do Valor Médio para Derivadas[33]. Como Cauchy definiu a integração por meio de uma soma, não pôde usar do mesmo artifício. Ele derivou o seu TVMI a partir de alguns dos passos da sua própria definição de integral. Com relação ao TFC, a demonstração de Lagrange possuía diversas limitações, uma vez que ele não havia definido o conceito de integral definida e, em sua prova, exige que a função tomada fosse monótona. Mais uma vez, como no caso do TVMI, Cauchy tomou esse resultado já dado, deu a ele uma base lógica distinta e tornou-o suficientemente rigoroso (GRABINER, 2005).

Assim, Cauchy, baseando-se numa prova considerada aceitável do TVMI, estabeleceu uma prova do TFC que pode ser utilizada mesmo nos dias de hoje. Mais que isso, de uma maneira mais geral, refletindo sobre seus conceitos de derivada, integral e sua demonstração do TFC, podemos dizer que ele iniciou um processo que primeiro converteu o cálculo integral, antes entendido apenas como inverso do cálculo diferencial, em uma disciplina autônoma, e, posteriormente, com contribuições sobretudo de Riemann e Henri Léon Lebesgue (1875-1941) no estudo de uma classe de funções que possuem ou não integral, seja qual for a concepção de integral usada.

3 Gauss, Bolzano e Abel

Escolhemos falar desses três matemáticos, no contexto da fundamentação da análise, porque tanto Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quanto Bolzano tiveram ideias a esse

30 Vale salientar que essa denominação para o referido teorema é mais moderna. Segundo Sriraman (2012), o nome desse teorema conforme hoje o conhecemos provavelmente se deve à tradição francesa de utilizar a palavra *fondamentale* (fundamental) para designar algo básico.

31 Segundo Toeplitz e Bressound (2007), foi o matemático Isaac Barrow, ainda em 1667, o primeiro a demonstrar esse teorema. Para mais detalhes, consultar a referida obra (p. 95-99).

32 Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em seu intervalo de definição, então existe um valor z, com $a < z < b$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(z)(b - a)$. Geometricamente esse teorema nos garante que existe um valor z tal que o retângulo de base $(b - a)$ e altura $f(z)$ tem exatamente a mesma área da região sob a curva de f.

33 Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em seu intervalo de definição, e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Geometricamente esse teorema nos diz que existe um ponto c no gráfico de f cuja reta tangente tem exatamente a mesma inclinação do segmento AB.

respeito bastante semelhantes às de Cauchy, e Abel teve papel importante nesse início de reformas nos fundamentos da matemática. Além disso, Gauss, Bolzano e Abel, assim como seu contemporâneo Cauchy, foram pioneiros do moderno rigor da matemática. O século XVII tinha sido essencialmente um período de experimentação, no qual os resultados surgiram com grande abundância. Tinha chegado a época de se refletir sobre o significado dos resultados... (STRUIK, 1948).

3.1 Carl Friedrich Gauss

Gauss trabalhou em diversas áreas, como teoria dos números, álgebra, geometria, astronomia, cristalografia, magnetismo, e análise. No que tange à última, Lützen (2003) observa que há grande semelhança entre a introdução de Cauchy no seu *Cours d'Analyse* e as ideias de Gauss contidas numa carta endereçada a Heinrich Christian Schumacher (1780-1850), no que diz respeito ao ataque que fazem à crença na generalidade do mecanismo da análise e uma especial repulsa [pelos matemáticos] às séries divergentes.

Embora essa carta tenha sido escrita em 1850, bem depois da publicação do *Cours d'Analyse*, as ideias expressas nela eram da época da juventude de Gauss, portanto bastante anteriores ao *Cours*. Por exemplo, por volta de 1800, numa discussão sobre séries trigonométricas, Gauss começou a analisar os fundamentos da teoria das séries infinitas e, em uma de suas anotações, já aparecem as noções de $\limsup$ e $\liminf$ para séries, de forma bastante precisa e "até mais rigorosa que a encontrada mais tarde no *Cours d'Analyse* de Cauchy" (LÜTZEN, 2003, p. 174)[34].

A relutância de Gauss em publicar seus resultados – perfeccionista que era, não publicava nenhuma de suas obras antes que estivessem completas, concisas, acabadas e convincentes, adotando o lema *Pauca sed matura* (poucos, porém maduros) – fez com ele tivesse pouco impacto no desenvolvimento dos fundamentos da análise. Entretanto, ele levantou a questão das séries infinitas em sua tese de doutorado (GAUSS, 1799/1866) quando tratava do teorema fundamental da álgebra e também em seu artigo (GAUSS, 1812/1866) sobre séries hipergeométricas.

3.2 Bernard Bolzano

Apesar de Bolzano ter ido mais longe nos fundamentos da análise do que qualquer outro de seus contemporâneos – e hoje ser considerado um dos pioneiros em estabelecer bases rigorosas aos conceitos do cálculo, observadas em sua aritmetização e no estudo cuidadoso sobre o infinito – a maneira como conduziu sua carreira, com um quase absoluto isolamento, o fato de Praga não ser um centro matemático importante à época, e de boa parte dos mais importantes resultados seus não terem sido publicados em vida, fizeram com que seus trabalhos permanecessem praticamente desconhecidos por cerca de cinquenta anos (FOLTA,

[34] Esses conceitos aparecem em Cauchy quando ele tenta tornar mais clara a prova do teste da raiz.

1981, LÜTZEN, 2003).

Segundo Lützen (2003), uma das mais importantes obra de Bolzano é o seu *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (1817). É nesse trabalho que são provados diversos resultados e dadas diversas definições, como a de função contínua, que, à primeira vista, indicava claramente que a ideia básica de continuidade estava no conceito de limite:

> [...] uma função $f(x)$ varia de acordo com a lei de continuidade para todos os valores x dentro e fora de certos limites da seguinte maneira: se x é algum tal valor, a diferença $f(x+\omega)-f(x)$ pode se tornar menor do que qualquer quantidade dada, desde que ω pode ser tomado tão pequeno quanto se quiser (BOLZANO, 1817, p. 11-12)[35].

Essa definição não é essencialmente diferente da dada por Cauchy, em 1821, mas, na opinião de alguns, como de Grabiner (2005), é muito mais elegante. A partir dela, Bolzano provou o teorema do valor intermediário. A prova, consideravelmente diferente da apresentada por Cauchy, usou o que modernamente chamamos de propriedade dos números reais de Bolzano-Weierstrass (GRABINER, 2005).

Outra semelhança com Cauchy está nas sequências fundamentais (hoje também conhecidas como sequências de Cauchy). Bolzano as definiu e "provou" que elas convergem a uma quantidade constante, porém essa demonstração não foi satisfatória. De fato, o que Bolzano provou foi, em primeiro lugar, que é possível assumir que o limite seja uma constante e, em segundo lugar, que esse limite é único e pode ser determinado de forma tão precisa quanto desejarmos. Seja como for, a partir desses resultados, Bolzano demonstrou a existência do supremo de um conjunto não-vazio limitado superiormente, i.e., a propriedade de Bolzano-Weierstrass de que há pouco falamos. Hoje sabemos que esse resultado caracteriza a completude do conjunto dos números reais, mas, na época de Bolzano, isso ainda não estava em pauta. Nos livros modernos, uma das provas mais comumente encontradas é a que usa a propriedade dos intervalos encaixados, o que nada mais é do que uma equivalência da propriedade do supremo de Bolzano.

Para Bolzano, seu resultado principal era a demonstração do teorema do valor intermediário, porém, resultados secundários advindos desse – como os que citamos – também possuem grande importância para a história da análise, muito embora tenham sido por muito tempo ignorados.

Por fim, os últimos resultados que gostaríamos de destacar advêm de uma publicação póstuma de Bolzano, *Funktionenlehre* (BOLZANO, 1830/1930). É nela que Bolzano traz outra definição de continuidade pontual; mais precisa em relação à que havia apresentado em 1817, sendo adequada, inclusive, para os padrões atuais:

[35] [...] eine Function fx für alle Werthe von x, die inneroder außerhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.

> Se a função monótona de uma ou mais variáveis Fx é constituída de tal forma que a variação sofrida quando uma de suas variáveis passa de um determinado valor x para um diferente valor $x + \Delta x$ diminui infinitamente à medida que Δx diminui infinitamente, isto é, quando Fx, bem como $F(x + \Delta x)$ – o último, pelo menos, para certos valores de Δx e menores que ele – forem mensuráveis[36] e o valor absoluto da diferença $F(x + \Delta x) - Fx$ se tornar inferior que qualquer fração $1/N$ para Δx suficientemente pequeno, que, no entanto, pode ser tomado ainda menor, então eu digo que a função Fx é contínua em x para um incremento positivo (ou em uma direção positiva), quando o que acabamos de dizer ocorre para um valor positivo de Δx; e contínua em x para um incremento negativo (ou em uma direção negativa), por outro lado, quando o que acabamos de dizer ocorre para um valor negativo de Δx; se, finalmente, a condição descrita é satisfeita tanto para um incremento positivo quanto negativo de x, eu digo, simplesmente, que Fx é contínua em x (BOLZANO, 1830/1930, p. 14)[37].

Podemos notar que Bolzano define até mesmo continuidade à direita e à esquerda. Mais importante que essa definição de continuidade pontual, certamente é a distinção que Bolzano faz entre esse tipo de continuidade e a uniforme, conceitos que pareciam confusos na obra de Cauchy (ver 2.2):

> Não é por que uma função Fx é contínua para todos os valores de sua variável x que se encontra entre a e b, que se seque que para todo x entre esses valores, há um número fixo e pequeno o suficiente que se possa afirmar que é necessário tomar Δx em valor absoluto $< e$ a fim de garantir que $F(x + \Delta x) - Fx < 1/N$ (BOLZANO, 1830/1930, p. 23-24)[38].

Ou seja, Bolzano diz que não é por que uma função é contínua em um intervalo que ela é necessariamente uniformemente contínua.

Entretanto, embora originalmente escrita em 1830, essa obra de Bolzano só foi publicada cem anos depois. É por esse motivo que costumamos atribuir esses resultados ao matemático Eduard Heine (1821-1881), que teve sua obra publicada sessenta anos antes da de Bolzano (ver 5.1) (HEINE, 1871).

---

[36] Não no sentido da teoria da medida, como vermos adiante; nesse contexto, reais e finitos.

[37] Wenn eine einförmige Function Fx von einer oder auch mehreren Veränderlichen so beschaffen ist, daß die Veränderung, die sie erfährt, indem eine ihrer Veränderlichen x aus dem bestimmten Werthe x in den Veränderten $x + \Delta x$ übergehet, in das Unendliche abnimmt, wenn Δx in das Unendliche abnimmt, wenn also der Werth Fx sowohl als auch der Werth $F(x + \Delta x)$, der letztere wenigstens anzufangen von einem gewissen Werthe der Differenz Δx für alle kleineren abermahls meßbar ist, der Unterschied $F(x + \Delta x) - Fx$ aber seinem absoluten Werthe nach kleiner als jeder gegebene Bruch $1/N$ wird und verbleibt, wenn man nur Δx klein genug nimmt, und so klein man es dann auch noch ferner werden läßt: so sage ich, daß die Function Fx für den Werth x stetig verändere, und zwar bey einem positiven Zuwachse oder im positiver Richtung, wenn das nur eben gesagte bey einem positiven Werthe von Δx eintritt: und daß sie dagegen sich stetig verändere bey einem negativen Zuwachse oder in negativer Richtung, wenn das Gesagte bey einem negativen Werthe von Δx Statt hat: wenn endlich das Gesagte bey einem positiven sowohl als negativen Zuwachs von Δx gilt: so sage ich schlechtweg nur, daß Fx stetig sey für den Werth x.

[38] Blos daraus, daß eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen x stetig sey, folgt nicht, daß es für alle innerhalb dieser Grenze gelegenen Werthe von x eine und eben dieselbe Zahl e geben müsse, klein genug, um behaupten zu können, daß man Δx nach seinem absoluten Werthe nie $< e$ zu machen brauche, damit der Unterschied $F(x + \Delta x) - Fx < 1/N$ ausfalle.

Ainda em *Funktionenlehre*, Bolzano construiu uma função contínua não diferenciável em um conjunto denso (na realidade, não diferenciável em ponto algum). Esse resultado, portanto, *contrariaria* as expectativas de Lagrange e André-Marie Ampère (1775-1836), que por muito tempo tentaram provar que todas as funções contínuas, exceto por pontos isolados, eram diferenciáveis. Embora Cauchy não tenha tentado exatamente o mesmo que Lagrange e Ampère, podemos notar pelo seu trabalho (ver 2) que muitas vezes ele passa essa impressão.

Essa função criada por Bolzano em 1830 *poderia* ter servido para a matemática como algo crucial naquele momento, mostrando, a despeito de todas as intuições geométricas e sugestões da física, que funções contínuas não necessariamente possuem derivadas. Todavia, destacamos o *contrariaria* e o *poderia* linhas acima por que o trabalho de Bolzano não foi reconhecido naquele tempo e, conforme já apontamos, sua obra de 1830 só fui publicada muito tempo depois. Por esse motivo, assim como os louros da continuidade ficaram para Heine, o primeiro a publicar um exemplo de função não diferenciável em um conjunto denso acabou sendo Weierstrass em 1872, quase quarenta anos depois de Bolzano, portanto (WEIERSTRASS, 1872/1895).

De modo geral, pudemos observar que, embora as ideias de Bolzano indicassem a direção que deveriam seguir não só a formulação das leis do cálculo, mas também a maioria do pensamento do século XIX, elas não foram decisivas para isso. Seu trabalho permaneceu sem divulgação até ser redescoberto e publicado muitos anos depois, quando Cauchy, Heine e Weierstrass, com ideias semelhantes, mas escritas de forma diferente, já haviam estabelecido os fundamentos da análise e traçado a história de outra maneira[39].

3.3 Niels Henrik Abel

Terceiro nome importante no contexto da reforma dos fundamentos da matemática, Niels Henrik Abel (1802-1829), em sua curta vida, interrompida pela tuberculose, sofreu muitas privações, apesar disso, o seu grande talento manifestou-se por meio de trabalhos valiosos para a matemática. Um de seus mais famosos textos (ABEL, 1824) é o que prova a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau por meio de radicais – um problema que tinha ocupado matemáticos como Rafael Bombelli (1526-1572), Viète e Paolo Ruffini (1765-1822) (EVES, 2004, BURTON, 2011).

Abel escreveu vários artigos sobre convergência de séries, trazendo grande contribuição à tentativa de definir de forma precisa esse conceito. Isso o coloca como um dos precursores, junto com Cauchy, da defesa de que algo deveria ser feito para fundamentar a Matemática em "bases sólidas e rigorosas". É sobre esse aspecto de Abel que vamos discorrer.

Em março de 1826, numa carta a seu professor Christopher Hansteen (1784-1873), ele manifestava sua intenção de "trazer mais luz à vasta escuridão que, sem dúvida, existe na análise" (ABEL, 1902, p. 21)[40]. Dizia ainda que pouquíssimos teoremas haviam sido provados

[39] Para mais detalhes sobre o papel de Bolzano na história da análise matemática, recomendamos a leitura de Jarník (1981) e Rusnock e Kerr-Lawson (2005).

[40] Alle mine Kræfter vil jeg anvende paa at bringe noget mere Lys i det uhyre Mørke som der uimodsigelig

com rigor convincente, e que em todo lugar ele encontrava métodos imprecisos que concluíam do particular para o geral. Também numa carta a seu amigo Bernt Michael Holmboe (1745-1850), ele tece críticas à falta de fundamentação nos estudos das séries infinitas e questiona, por exemplo, o fato de que vários resultados eram aplicados a essas séries como se fossem finitas (diferenciação, multiplicação, divisão etc.) (STUBHAUG, 2002). Além disso, pontuava:

> Nós podemos deduzir qualquer coisa que quisermos quando as usamos [séries divergentes], e elas têm feito muito dano e causado muitos paradoxos. Você pode pensar em algo mais terrível do que dizer que $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n +$ etc. quando n é um inteiro positivo. Meus olhos têm sido abertos da forma mais espantosa; de fato quando você excetua os casos simples, por exemplo, as séries geométricas, dificilmente existe em toda a matemática uma única série infinita cuja soma tenha sido determinada de maneira rigorosa. Em outras palavras a parte mais importante da matemática está sem uma fundamentação. Muito disso está correto, é verdade, e é muito estranho. Eu tentarei encontrar as razões para isso (ABEL, 1902, p. 16)[41].

Nessa mesma carta ele diz que encontrou uma prova rigorosa da convergência de $\varphi(x + \alpha) = \varphi x + \alpha\varphi' x + \alpha/2\varphi'' x + \cdots$ no *Resumé* de Cauchy (1823).

Essas críticas de Abel mostram que ele apontava fraquezas nos argumentos de seus contemporâneos, como Cauchy e Gauss. Em algumas de suas cartas, anuncia que publicaria alguns pequenos artigos sobre essas questões, entretanto, sua morte prematura o impediria de tal feito, ou ao menos de todo ele. Um desses trabalhos, sobre o teorema binomial, foi publicado em 1826 (ABEL, 1826/1895, 1902, LÜTZEN, 2003).

* * *

De certa forma, Abel deu maior precisão a alguns resultados de Cauchy, como, por exemplo, ao estudar a definição de convergência, no caso de uma série de funções convergentes (no sentido pontual). Ele achou que o teorema de Cauchy (sobre a continuidade da soma de séries de funções contínuas, ver 2.3) era incorreto no sentido de que ele não valia para todas as séries. Ele exemplificou sua ideia com a série $\operatorname{sen}\varphi - 1/2\operatorname{sen}2\varphi + 1/3\operatorname{sen}3\varphi - \cdots$, que é descontínua para cada valor $(2m+1)\pi$ de φ, em que m é um inteiro (ABEL, 1826/1895, p. 9)[42]. A série em questão é a série de Fourier da função $1/2x$ que é, de fato, descontínua nos pontos indicados.

A fim de dar uma formulação mais precisa do teorema de Cauchy, Abel enunciou os dois resultados que se seguem:

nu tindes i Analysen.

41 Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer. Kan der tænkes noget skrækkelige[re] end at sige at $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n +$ etc hvor n er et heelt positivt Tal. Risum teneatis amici. Jeg har i det hele faaet Øjnene op paa en meget forbausende Maneer; thi naar man [undtager] de aller- simpleste Tilfælde for Ex: de geometriske Rækker, saa gives der i hele Mathe- niatiken næsten ikke en eneste uendelig Række, hvis Sum er bestemt paa en stræng Maade: med andre Ord det vigtigste af Mathematiken staaer uden Begrundelse. Det meeste er rigtigl; det er sandt, og det er overordentlig forunderligt. Jeg bestræber mig for at søge Grunden dertil.

42 Hoje sabemos que há uma infinidade de séries com propriedades semelhantes.

> Quando a série $f(\alpha) = \nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots + \nu_m\alpha^m + \cdots$ converge para um valor definido δ de α, então ela irá convergir para qualquer valor menor do que α, de modo que $f(\alpha - \beta)$ se aproximará do limite $f(\alpha)$ para valores decrescentes de β, uma vez que α é menor ou igual a δ [...] Seja $\nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots$, uma série convergente para a qual $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ são funções contínuas de uma mesma variável x entre os limites $x = a$ e $x = b$, então a série $f(x) = \nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots$, para $\alpha < \delta$ é convergente e é uma função contínua de x entre os mesmos limites (ABEL, 1826/1895, p. 7-8)[43].

Apesar de seus esforços, ainda podem ser observados problemas nesses teoremas de Abel. A demonstração do primeiro deles parece ser correta em princípio, mas seu enunciado não é suficientemente claro com relação à questão da uniformidade, fato esse que é completamente ignorado na demonstração do teorema seguinte. Isso é muitas vezes considerado uma falha e deixa dúvidas se Abel de fato tinha o conceito de convergência uniforme em mente. Seja como for, conforme já apontamos, essa questão só seria resolvida por Weierstrass (LÜTZEN, 2003).

4 Séries de Fourier e o teorema de Cauchy

Quando se trata da questão do rigor na análise, pode ser observado que dois problemas estiveram em cena impulsionando diversos matemáticos: o da convergência das séries de Fourier e o teorema de Cauchy da continuidade da soma de uma série de funções contínuas. Por isso, vamos dar um destaque particular a cada um deles nesta seção.

4.1 Convergência das séries de Fourier

Vimos anteriormente que Abel apresentou a série $\operatorname{sen}\varphi - 1/2\operatorname{sen}2\varphi + 1/3\operatorname{sen}\varphi - 1/4\operatorname{sen}4\varphi + \cdots$ como um contra-exemplo ao teorema de Cauchy (2.3). Ele provou a convergência e determinou a soma usando sua própria versão complexa do teorema binomial. Na verdade, ele não poderia se referir a uma prova geral da convergência da série de Fourier porque tal prova rigorosa ainda não existia (LÜTZEN, 2003).

* * *

O trabalho em que Fourier introduz as *séries de Fourier* (FOURIER, 1822) acabou por contribuir fortemente para o desenvolvimento da matemática, conforme já pontuamos anteriormente.

[43] Wenn die Reihe $f(\alpha) = \nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots + \nu_m\alpha^m + \cdots$ für einen gewissen Werth δ von α convergirt, so wird sie auch für jeden kleineren Werth von α convergiren, und von der Art sein, dass $f(\alpha - \beta)$ für stets abnehmende Werthe von β sich der Grenze $f(\alpha$ beliebig nähert, vorausgesetzt, dass α gleucg ider kleiner ist als δ [...] Es sei $\nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots$, eune convergente Reihe, in welcher $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ continuirliche Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse x sind zeischen den Grenzen $x = a$ e $x = b$, so ist die Reihe $f(x) = \nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots$, para $\alpha < \delta$ convergente und eine stetige Function von zwichen denselben Grenzen.

Nesse trabalho, Fourier afirma que se f é uma função (ver 1) definida em um intervalo finito, como $(-\pi, \pi)$, então pode ser representada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \tag{3}$$

em que as constantes a_n e b_n são determinadas pelas seguintes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{4}$$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx (n \geqslant 1), \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx (n \geqslant 1). \tag{6}$$

Essa afirmação causou muita polêmica, pois, à época, já havia trabalhos que afirmavam que algumas funções bem comportadas podiam ser representadas por séries trigonométricas, mas Fourier foi ousado ao estendê-la para qualquer função definida em um intervalo finito. Tal ousadia lhe rendeu alguns infortúnios, como a recusa de uma versão anterior de seu *Théorie Analytique* de 1811, julgado por Lagrange, Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Legendre. Entretanto, a Academia de Ciências da França, para encorajar Fourier a desenvolver suas ideias, instituiu um prêmio cujo tema era justamente a propagação do calor. Fourier o ganhou, mas ainda assim não teve seu trabalho aceito nas *Mémoires* da Academia. Foi só com a publicação do seu tratado da teoria analítica do calor de 1822 que obteve reconhecimento. Nomeado então secretário da Academia dois anos depois, conseguiu, finalmente, publicar, em 1826, seu trabalho original de 1811 (FOURIER, 1826, BURTON, 2011, EVES, 2004).

O ponto central da discórdia, conforme já adiantamos, era mesmo a questão da convergência das séries de Fourier. O próprio Fourier tentou provar que em alguns casos sua expansão em séries de fato convergia para a função que representava calculando explicitamente coeficientes em termos de integrais que representavam áreas reais. Para ele, esse era um argumento suficiente. Entretanto, nos casos em que a função considerada não se comporta muito bem, $f(x)\cos nx$ ou $f(x)\operatorname{sen} nx$ podem gerar gráficos cheios de cantos e quebras (BURTON, 2011, KATZ, 1998).

Poisson (1820) também publicou seu próprio argumento. Sua ideia foi, ao invés de trabalhar com os coeficientes dados pela integral de Fourier, ver o que acontece se a série dos cossenos for multiplicada pelos termos da série geométrica $\sum p^n$ para $p \in (0, 1)$. A série resultante $\sum_{n=1}^{\infty} p^n a_n \cos nx$ ele mostrou ser convergente e sua soma foi obtida em termos das chamadas integrais de Poisson. Para finalizar, fez $p = 1$ e, por meio de argumentos questionáveis, concluiu que o resultado era f. Ou seja, também Poisson não conseguiu satisfatoriamente, do ponto de vista do rigor matemático, mostrar que a série original converge para a função f (LÜTZEN, 2003).

Cauchy, em 1823 (CAUCHY, 1823), mostrou, usando argumentos parecidos com os de

Poisson, que a soma "é equivalente" a f, mas não deixou claro o significado dessa equivalência. Sua prova, no contexto das variáveis complexas, usava seu recém-descoberto teorema dos resíduos, mas Dirichlet (1829) mostrou que era incompleta, argumentando que a teoria de funções complexas não poderia ser aplicada no caso em que a função f não era dada como uma expressão analítica, porque não fica claro quais valores podem ser designados a ela fora do conjunto dos reais.

> A caminhada que esse geômetra célebre [Cauchy] seguiu nessa pesquisa exige que se considere os valores que a função $\varphi(x)$, que se trata de desenvolver, obtêm quando se substitui a variável x por uma quantidade da forma $u + v\sqrt{-1}$. A consideração desses valores parece estranha à questão, e não se vê bem em parte alguma o que se deve compreender pelo resultado de uma tal substituição quando a função na qual é feita não pode ser expressa por uma fórmula analítica (DIRICHLET, 1829, p. 157)[44].

No mesmo trabalho em que tece críticas ao argumento de Cauchy, Dirichlet também apresenta uma primeira prova rigorosa de que, sob certas condições, as séries de Fourier de uma função f converge (HAWKINS, 1975). Ele mostrou, primeiramente que a representação de f por 3 pode ser reescrita como:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}[1/2(2n+1)(t-x)]}{\operatorname{sen}[1/2(t-x)]}dt. \tag{7}$$

A partir disso, conclui que, em um dado intervalo, se f é limitada[45] e contínua, exceto no máximo por um número finito de pontos, então a igualdade em 3 ou, equivalentemente, em 7, é verdadeira, já que o lado esquerdo dessas igualdades, para $x \in (-\pi, \pi)$ converge para $\lim_{\varepsilon\to 0} 1/2(f(x+\varepsilon) + (f(x-\varepsilon))$, e para $\lim_{\varepsilon\to 0} 1/2(f(-\pi+\varepsilon) + (f(\pi-\varepsilon))$, quando $x = -\pi$ ou $x = \pi$; o que, em ambos os casos, é igual a $f(x)$, já que f é contínua. Em sua prova, Dirichlet não utiliza a hipótese da continuidade, entretanto, precisou considerá-la para que a integral definida fizesse sentido (HAWKINS, 1975; KATZ, 1998). Dirichlet, no fim de seu artigo, diz ser possível generalizar esse resultado para funções com menos restrições que as impostas por ele. Tal generalização seria apresentada em uma nota posterior, que, entretanto, jamais foi publicada.

Esse problema só seria tratado, de fato, com grande generalidade apenas vários anos depois, com a filosofia do *quase sempre* de Henri Lebesgue. De fato, modernamente definimos a série de Fourier de funções, em geral, dadas no intervalo $(-\pi, \pi)$ e que pertençam ao espaço de funções integráveis segundo Lebesgue. Antes disso, porém, o estudo das séries de Fourier promoveu o desenvolvimento de várias ideias centrais da análise. Para citar alguns exemplos, Riemann (ao que se sabe) foi levado a estudar a integral que hoje tem seu nome

---

[44] La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u + v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangère à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique.

[45] Diz que uma função f é limitada se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x.

a partir do estudo das séries trigonométricas; Cantor, ao investigar o problema da unicidade da representação de funções por séries trigonométricas, definiu os números reais como limites de sucessões de racionais e criou a chamada Teoria dos Conjuntos; e, finalmente, Weierstrass define, por meio de uma série de Fourier, o primeiro exemplo de função contínua sem derivada em ponto algum (5.1) (BOURBAKI, 2007; GANDULFO, 1990; LINTZ, 2007).

4.2 O teorema de Cauchy e a convergência uniforme

Como vimos (2.3), alguns autores interpretaram as noções básicas de Cauchy de tal modo que o teorema se torna verdadeiro. Também foi visto que Abel (3.3) apontou uma saída interessante admitindo um domínio adequado em que um caso especial do teorema permanece válido. Isso posto, seguindo de perto as exposições feitas por Lützen (2003) e Bottazzini (1986) sobre o assunto, teceremos nossas considerações sobre os trabalhos que três importantes matemáticos desempenharam nesse campo.

Iniciemos falando dos trabalhos do matemático alemão Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896) e do matemático irlandês George Stokes (1819-1903), que fizeram uma análise bastante profunda do teorema de Cauchy.

Em suas considerações, Seidel (1848) seguiu um procedimento próprio que, mais tarde, seria denominado método de provas e refutações. A ideia central desse método consiste em, a partir de um contra-exemplo, descobrir qual hipótese oculta foi usada na demonstração do teorema e que não é satisfeita pelo contra-exemplo. A partir disso, uma nova versão do teorema pôde ser dada:

> Se uma série convergente representa uma função descontínua de uma quantidade x, e seus termos são funções contínuas, então na vizinhança imediata do ponto em que a função dá o salto, existem valores de x em que a série converge arbitrariamente devagar (SEIDEL, 1848, p. 383)[46].

Seidel não explicita o que seja *convergência arbitrariamente devagar*, mas pela sua demonstração pode ser visto que essa foi a maneira que ele encontrou para descrever a falta de convergência uniforme perto do ponto de descontinuidade, ou seja, para Seidel, uma série converge arbitrariamente devagar se ela não converge uniformemente numa vizinhança do ponto.

Segundo o matemático inglês Godfrey Harold Hardy[47], que publicou em 1918 um artigo no qual discute vários conceitos de convergência uniforme presentes nas obras de importantes matemáticos da época, como o próprio Seidel, Stokes e Weierstrass, a *convergência arbitrariamente devagar* de Seidel pode ser identificada com o conceito que modernamente chamamos de *convergência uniforme em uma vizinhança de um ponto*:

[46] Hat man eine convergirende Reihe, welche eine discontinuirliche Function einer Grösse x darstellt, von der ihre einzelnen Glieder continuirliche Functionen sind, so muss man in der unmittelbaren Umgebung der Stelle, vo die. Function springt, Werthe von x angeben können, für welche die Reihe beliebig langsam convergiert.

[47] Godfrey Hadold Hardy (1877-1947) é reconhecido, principalmente, pelos seus trabalhos tanto dentro da análise matemática de um modo geral, como na teoria dos números, de modo mais particular.

> Uma série $[s_n(x)]$ é dita uniformemente convergente na vizinhança de um ponto ξ de um intervalo (a, b) [...] se existir $\delta(\xi)$ para o qual (A) $[|r_n(x)| \leqslant \varepsilon]$ é verdade para todo ε positivo, $n \geqslant n_0(\xi, \delta, \varepsilon) = n_0(\xi, \varepsilon)$, e para $\xi - \delta(\xi) \leqslant x \leqslant \xi + \delta(\xi)$ [...] é substancialmente isso que foi definido por Seidel em 1848 (HARDY, 1918, p. 150)[48].

Sendo que se $s(x)$ representa a soma de uma série então, $s_n(x)$ e $r_n(x)$ são, respectivamente, a soma dos n primeiros termos, e o resto, i.e. $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Stokes (1849/2009) definiu o que chamou de *convergência infinitamente devagar* de forma semelhante:

> A convergência de uma série é dita infinitamente devagar quando, se n é o número de termos que precisam ser tomados em ordem para tornar a soma dos termos desprezados numericamente menor que uma dada quantidade, e que pode ser tão pequena quanto desejarmos, n cresce além de todos os limites conforme h decresce além de todos os limites (p. 281)[49].

Mas ele deu um tratamento diferente ao problema. Ele considera uma seqüência de funções v_n, implicitamente tomadas como contínuas num intervalo $[0, a]$, com $v_n(0) = u_n$. Também assume que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)$ é convergente para todo $h \in [0, a]$, sendo $V(h)$ o limite da série para $h \neq 0$ e U o limite para $h = 0$. Nesse contexto ele afirma que o limite $V = \lim_{h \to 0} V(h)$ é igual a U, exceto quando a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)$ se torna infinitamente devagar quando h se anula. A menos da exceção, o problema pode ser colocado como uma questão de intercâmbio entre limite e soma, ou seja,

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{h \to 0} v_n(h). \tag{8}$$

Stokes também provou a recíproca, entretanto, pelo fato de descrever alguns de seus resultados e conceitos essencialmente por meio de palavras, há controvérsia de interpretação. Por exemplo, se interpretarmos a definição de *convergência infinitamente devagar* como o que modernamente entendemos como convergência quase-uniforme em uma vizinhança, a recíproca de seu teorema será falsa. Para Hardy (1918), é exatamente esse o caso:

> Uma série $[s_n(x)]$ é dita quase-uniformemente convergente na vizinhança de um ponto ξ [...] se existir um $\delta(\xi)$ positivo para o qual (A) $[|r_n(x)| \leqslant \varepsilon]$ é verdade para todo ε positivo, todo N, e $n_0(\xi, \delta, \varepsilon, N) = n_0(\xi, \varepsilon, N)$ maior que N, para $\xi - \delta(\xi) \leqslant x \leqslant \xi + \delta(\xi)$ [...] *esta* foi a definição que realmente Stokes deu (HARDY, 1918, p. 152, grifo do autor)[50].

---

[48] The series is said to be uniformly convergent in the neighbourhood of the point ξ of the interval (a, b) [...] if a positive $\delta(\varepsilon)$ exists such that (A) is true for every positive ε, for $n \geqslant n_0(\xi, \delta, \varepsilon) = n_0(\xi, \varepsilon)$, and for $\xi - \delta(\xi) \leqslant x \leqslant \xi + \delta(\xi)$. [...] is substantially that defined by Seidel in 1848.

[49] The convergency of the series is here said to become infinitely slow when, if n be the number of terms which must be taken in order to render the sum of the neglected terms numerically less than a given quantity and which may be as small as we please, n increases beyond all limit as h decreases beyond all limit.

[50] The series is said to be quasi-uniformly convergent in the neighbourhood of ξ [...] if a positive $\delta(\xi)$ exists such that (A) ir true for every positive ε, every N, an $n_0(\xi, \delta, \varepsilon, N) = n_0(\xi, \varepsilon, N)$ greater than N, and $\xi - \delta(\xi) \leqslant x \leqslant \xi + \delta(\xi)$ [...] it is really *this* definition that is given by Stokes.

Por outro lado, se entendermos seu conceito como o que modernamente conhecemos como convergência quase-uniforme em um ponto, conforme defende Lützen (2003), a recíproca será verdadeira e nesse caso, Stokes pode ter sido o primeiro a encontrar o teorema correto, estabelecendo que a soma $s(x)$ é contínua em ξ, se, e somente se, a série converge quase-uniformemente nesse ponto. Para Hardy (1918), no entanto, não tendo Stokes estabelecido o conceito de convergência quase-uniforme em um ponto, mas sim o de convergência quase-uniforme em uma vizinhança, o pioneirismo na formulação correta do teorema de Cauchy ficou mesmo para o italiano Ulisse Dini (1845-1918), que publicou esse resultado quase trinta anos depois de Stokes.

> Uma série $[s_n(x)]$ é dita quase-uniformemente convergente em $x = \xi$ se para todo ε positivo e todo N, corresponde um $\delta(\xi, \varepsilon, N)$ positivo e um $n_0(\xi, \varepsilon, \delta, N) = n_0(\xi, \varepsilon, N)$, maior que N, tal que (A) $[|r_n(x)| \leqslant \varepsilon]$ é verdade para $n = n_0(\xi, \varepsilon, N)$ e para $\xi - \delta(\xi, \varepsilon, N) \leqslant x \leqslant \xi + \delta(\xi, \varepsilon, N)$ [...] [Essa] definição [...] é de grande interesse, tanto em si mesma, quanto em relação ao trabalho de Stokes. A *condição necessária e suficiente para que* $s(x)$ *seja contínua em* $x = \xi$, *é que a série seja quase-uniformemente convergente em* $x = \xi$. Esse teorema é essencialmente atribuído a Dini (HARDY, 1918, p. 152-153, grifo do autor)[51].

* * *

Cauchy acabou voltando, depois de muitos anos, a esse teorema problemático a partir de uma observação de dois alunos seus, Charles Auguste Briot (1817-1882) e Jean Claude Bouquet (1819-1885) – da parceria de Cauchy com esses alunos, inclusive, resultariam diversos outros resultados (CAJORI, 2007). E, em 1853 (CAUCHY, 1853), ele publicou o teorema em que chega muito perto do conceito de *convergência uniforme num intervalo*. Entretanto, não cita os resultados nem de Abel, tampouco os de Stokes ou Seidel. O referido conceito só seria de fato formulado anos mais tarde por Weierstrass, conforme veremos adiante. E a formulação rigorosa e mais geral do teorema de Cauchy, como afirmamos linhas acima, seria dada por Dini quase no fim daquele século (DINI, 1878).

5 Weierstrass e o movimento do rigor

Nesta seção vamos falar do matemático Weierstrass, que teve papel fundamental no desenvolvimento da análise, especialmente no uso dos épsilons e deltas, característica do formalismo que a disciplina possui até hoje. O exemplo de função contínua derivável em ponto algum dado por ele se tornou um dos mais emblemáticos exemplos das funções patológicas definidas

[51] The series is said to be quasi-uniformly convergent for $x = \xi$ if to every positive ε and every N correspond a positive $\delta(\xi, \varepsilon, N)$ and an $n_0(\xi, \varepsilon, \delta, N) = n_0(\xi, \varepsilon, N)$, greater than N, such that (A) is true for $n = n_0(\xi, \varepsilon, N)$ and for $\xi - \delta(\xi, \varepsilon, N) \leqslant x \leqslant \xi + \delta(\xi, \varepsilon, N)$ [...] [This] definition is also of great interest, both in itself and in relation to Stoke's memoir. For *the necessary and sufficient condition that* $s(x)$ *should be continuous for* $x = \xi$, *is that the series shoud be quasi-uniformly convergent for* $x = \xi$. This theorem is in substance due to Dini.

em sua época, desencadeando um processo complexo, com idas e vindas, com o qual análise ganhou rigor e generalidade.

5.1 O formalismo dos $\varepsilon - \delta$

Weierstrass lidou com o conceito de convergência uniforme influenciado pelo seu professor Guderman, que, em seu artigo sobre funções elípticas (GUDERMAN, 1838) usou o termo *convergência de um modo uniforme* para indicar uma convergência de séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, \varphi, \tau)$ que fosse independente das variáveis φ e τ. Guderman não deu uma definição exata desse conceito, que, mais tarde, seria identificado com o que conhecemos por convergência normal. Weierstrass, que deve ter tomado contato com esse trabalho quando foi aluno de Guderman, em 1839, usou o conceito de seu professor de outro modo, em um artigo de 1841, no qual ele introduz (sem definir): "[...] qualquer que seja o número positivo δ, podemos retirar da série um número finito de termos de modo que o restante da série, para todo x dentro do domínio [de convergência], seja menor em valor absoluto que δ" (WEIERSTRASS, 1841/1894, p. 68-69)[52]. Nesse mesmo trabalho (p. 73-74), Weierstrass mostrou que se uma série de funções analíticas converge uniformemente num determinado domínio, sua soma é analítica, e podemos diferenciá-la termo a termo. Esse artigo não foi publicado até 1894 e essas ideias de Weierstrass só viriam a público quando ele foi ensinar na Universidade de Berlim (DUGAC, 2003, LÜTZEN, 2003). De qualquer modo, conforme nos aponta Bottazzini (1986), Weierstrass só de fato definiu convergência uniforme vários anos após seu trabalho de 1841, durante sua longa carreira na Universidade de Berlim. Em suas notas de aula[53], definiu convergência uniforme em um intervalo da seguinte maneira: "a série $\sum u_n(x)$ converge uniformemente em um intervalo $[a, b]$ quando, para todo ε positivo arbitrariamente pequeno, existe um $n_0(\varepsilon)$ de modo que $|r_n(x)| < \varepsilon$ para $n > n_0$ e para todo $a < x < b$" (WEIERSTRASS *apud* BOTTAZINI, 1986, p. 204).

Os trabalhos sobre convergência uniforme (ver 4.2) são apenas uma pequena parte da contribuição de Weierstrass para o que costumamos chamar de *refundamentação da análise*. E, como já se pode observar, o período em que Weierstrass atuou na Universidade de Berlim foi particularmente produtivo. Nos primeiros anos, Weierstrass explicava sua abordagem sobre os fundamentos da análise no começo de seu primeiro curso[54] e, a menos de algumas variações, ele desenvolveu esse ciclo por 16 vezes, de 1857 a 1887. O conteúdo desse primeiro curso nunca foi publicado enquanto Weierstrass viveu, mas suas ideias principais foram se tornando

[52] einer beliebigen positiven Grösse δ eine endliche Anzahl von Gliedern so herausheben, dass die Summe aller übrigen Glieder für jedes der angegebenen Werthsysteme [...] ihrem absoluten Betrage nach $< \delta$ ist.

[53] Algumas dessas notas foram recentemente reeditadas e publicadas no todo ou em partes por Pierre Dugac (Eléments d'analyse de Karl Weierstrass), W. Scharlau e P. Ullrich (Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen), e R. Siegmund-Schultz (Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre).

[54] As aulas de Weierstrass eram dadas num ciclo de quatro semestres consistindo dos seguintes cursos: teoria das funções analíticas; teoria das funções elípticas; aplicações das funções elípticas à geometria e mecânica; teoria das funções abelianas.

conhecidas por meio de testemunhos, anotações e trabalhos de muitos de seus alunos, tanto alemães como estrangeiros que estiveram reunidos em Berlim, muitos com o especial objetivo de assistir às suas aulas. A partir de 1864, ele mudou um pouco a maneira de dar início aos seus cursos, passando a introduzir a teoria das funções analíticas com a construção dos números reais.

A abordagem de Weierstrass aos fundamentos da análise é encontrada em sua discussão geral sobre funções e séries, de maneira muito semelhante ao que é feito hoje em dia, e, em sua construção dos reais, ele resolveu questões sobre completude que haviam escapado a Cauchy e Bolzano. Além disso, a definição dada por ele de função contínua (em um ponto) não contém certas ambiguidades presentes nas definições de seus antecessores:

> Se $f(x)$ é uma função de x, e x é um valor definido, então a função mudará para $f(x+h)$ quando x for trocado por $x+h$. A diferença $f(x+h)-f(x)$ é chamada de mudança que a função sofre quando x é trocado por $x+h$. Agora, se é possível determinar um limite δ, tal que para todos os valores de h, com valor absoluto menor do que δ, $f(x+h)-f(x)$ torna-se menor do que qualquer quantidade arbitrariamente pequena ε, então dizemos que mudanças infinitamente pequenas no argumento correspondem a mudanças infinitamente pequenas da função. De fato, se o valor absoluto de uma quantidade pode se tornar menor do que uma quantidade arbitrariamente pequena, então dizemos que ela pode se tornar infinitamente pequena. Quando uma função é de tal natureza que mudanças infinitamente pequenas do argumento correspondem a mudanças infinitamente pequenas da função, então dizemos que é uma função contínua do argumento ou que varia continuamente com o argumento (WEIERSTRASS in DUGAC, 1973, p.119-120)[55].

Nessa definição, Weierstrass usava o conceito de infinitamente pequeno, mas apenas como uma abreviação útil, podendo ser retirado facilmente sem prejuízo do entendimento, o que, mais tarde, acabou sendo feito de fato por ele mesmo e seus sucessores. Outro ponto a se destacar nessa definição é o uso que Weierstrass faz dos épsilons e deltas (muitos chamam isso de *estilo epsilônico*). Cauchy havia usado quantificadores ε's e δ's em algumas demonstrações mais difíceis, mas Weierstrass usou a técnica não só nessa e em outras definições, mas em todas as suas provas.

Uma distinção entre continuidade pontual e uniforme, entretanto, só ficou evidente em 1871, quando Heine, de posse do formalismo dos $\varepsilon-\delta$ de Weierstrass, separou os dois conceitos e provou que uma função contínua num intervalo fechado e limitado é uniformemente

[55] Ist $f(x)$ eine Funktion von x und x ein bestimmter Wert, so wird sich die Funktion, wenn x in $x+h$ übergeht, in $f(x+h)$ ändern; die Differenz $f(x+h)-f(x)$ nennt man die Veränderung, welche die Funktion dadurch erfährt, daß das Argument von x in $x+h$. übergeht. Ist es nun rn6glich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, sodaß für alle Werte von h welche ihrem absoluten Betrage noch kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, es entsprechen unendlich kleine Aenderungen des Arguments unendlich kleinen Aenderungen der Funktion. Denn man sagt, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleinen Aenderungen des Arguments unendlich kleine Aenderungen der Funktion entsprechen, so sagt man, daß dieselbe eine continuierliche Funktion sei vom Argument, oder daß sie sich stetig mit diesem Argument ändere.

contínua (DUNHAN, 2005, HEINE, 1871)[56]. Conforme já apontamos (ver 3.2), Bolzano já havia demonstrado esses resultados em 1830, entretanto, sua obra só foi publicada quase sessenta anos depois da de Heine.

Os resultados de Heine em 1871, juntamente com duas palestras proferidas por Weierstrass, em 1870 e 1872, foram os primeiros vislumbres que o público teve dos métodos de Weierstrass. Essas palestras foram responsáveis pela divulgação de dois grandes resultados que chegaram a desafiar algumas crenças da época: o primeiro (WEIERSTRASS, 1870/1895) foi o estabelecimento definitivo da diferença entre máximo e supremo (ou mínimo e ínfimo)[57] e o segundo (WEIERSTRASS, 1872/1895) foi a exibição de um exemplo de função contínua sem derivada em ponto algum,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi), \tag{9}$$

em que a é impar, $b \in [0,1)$ e $ab > 1+3/2\pi$; o que contradizia a intuição da maioria de seus contemporâneos de que funções contínuas eram diferenciáveis, exceto em *pontos especiais*[58]. Essa função se tornou o exemplo mais conhecido de um grande número de funções ditas patológicas. Vamos detalhar um pouco mais esse assunto.

5.2 Funções patológicas

Antes do exemplo de Weierstrass, algumas funções poderiam ser classificadas como patológicas como, por exemplo a função nunca diferenciável dada por Dirichlet em 1829, $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ em que:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}. \tag{10}$$

Além disso, essa função não é Riemann-integrável. A função de Dirichlet, assim como outro notável exemplo de função patológica, a função de Volterra – cuja derivada também não é Riemann-integrável (ver os *Apêndices D* e *E*) –, foram usadas por Henri Lebesgue em seu famoso artigo de 1901, como exemplos das limitações dessa integral (LEBESGUE, 1901)[59].

O próprio Riemann, em conexão com seus estudos de séries trigonométricas e integração, também deu numerosos exemplos de funções patológicas em 1854; assim como seu fiel seguidor, o matemático francês Jean Gaston Darboux (1842-1917), que apresentou vários exemplos de funções patológicas em seus estudos sobre a integral de Riemann (DARBOUX, 1872, 1875,

[56] Heine não foi aluno de Weierstrass, mas tomou conhecimento de sua abordagem relativamente à analise por meio de Cantor e Schwartz.

[57] Apontamos anteriormente que Bolzano já havia chamado a atenção, antes de Weierstrass, para essa diferença importante, mas ainda havia muita confusão a esse respeito.

[58] Também apontamos que Bolzano havia descoberto, mas não publicado em vida, um exemplo semelhante.

[59] A tradução para o português pode ser encontrada em Otero-Garcia (2012).

1879; RIEMANN, 1854/1876).

Hankel, em 1870, não só deu vários exemplos de funções desse tipo como também utilizou um método que criava funções patológicas, denominado por ele *condensação de singularidades* que consistia no seguinte: a partir de uma função com uma determinada singularidade num ponto, ele construía uma nova função que possuía essa propriedade num conjunto denso de pontos (HANKEL, 1870). Esse método, na realidade, foi apresentado pela primeira vez por Riemann, e perfeitamente aperfeiçoado por Hankel. O fato mais curioso é que Riemann o apresentou para exibir exemplos de funções que, sendo integráveis segundo seu conceito, mostravam a generalidade com que ele tinha definido sua integral. Entretanto, anos depois, a *condensação de singularidades* foi usada para produzir funções patológicas que demonstraram que a integral de Riemann não era geral o suficiente.

Esses exemplos mostram que as séries trigonométricas, assim como a teoria de integração, fomentaram a criação e o estudo dessas funções bizarras. Entretanto, as funções patológicas eram vistas com certa desconfiança ainda no fim do século XIX e inicio do século XX. Muitos matemáticos da época diziam que o estudo de tais casos particulares desviaria os jovens estudantes de problemas mais importantes que ainda estavam em aberto. Henri Poincaré (1854-1912) partilhava dessa desconfiança: "Antigamente quando se inventava uma função nova, era com vistas a algum objetivo prático; hoje em dia inventa-se expressamente para colocar defeito nos raciocínios de nossos pais" (POINCARÉ, 1899, p. 159)[60].

Essa desconfiança, no entanto, não impediu que elas também cumprissem um papel importante, que foi justamente o reconhecimento pelos próprios matemáticos de algumas deficiências em definições ou demonstrações, levando ao aprimoramento dos fundamentos da análise. Por exemplo, por meio desses exemplos pôde ser visto que o conceito de Dirichlet de função (ver 1) era muito geral para servir como uma base para a análise. Esse movimento passou por Weierstrass, Riemann, Hankel, Lebesgue... E assim, num processo complexo, com idas e vindas, a análise ganhou rigor e generalidade, mas perdeu "em elegância e simplicidade e se afastou da intuição e aplicações físicas" (LÜTZEN, 2003, p. 188).

5.3 Difusão e aceitação do movimento do rigor

Do mesmo modo que ocorreu com as funções patológicas, o processo de rigorização não foi aceito de imediato por toda a comunidade matemática, e, consequentemente, também não foi tão logo incorporado ao ensino ou à pesquisa.

Vimos que quando Cauchy introduziu seu novo modelo de rigor na Escola Politécnica (2), ele foi criticado por seus colegas e superiores por enfatizar a fundamentação em detrimento das aplicações. Seu primeiro colaborador no curso, Ampère, seguiu Cauchy em alguns aspectos, mas Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), que havia iniciado sua carreira de professor nessa escola em 1819, continuou enfatizando as aplicações e não concordava com a abordagem

[60] Autrefois quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères.

rigorosa de Cauchy. Durante os anos 1840, os métodos de Cauchy voltaram a ser ensinados na escola, mesmo sem o entusiasmo de alguns professores, como por exemplo Joseph Liouville (1809-1882) e Jacques Charles François Sturm (1803-1855). Mesmo assim, esse último acabou se tornando responsável, de forma indireta, pela disseminação das ideias de Cauchy, já que suas notas de aulas, publicadas depois de sua morte, fizeram muito sucesso, com sucessivas reedições até pelo menos o começo do século XX. Ainda na França, destacamos o papel de Darboux, que, em uma série de trabalhos, chamou a atenção da comunidade matemática francesa para a necessidade de se estabelecer métodos mais rigorosos na análise ao mostrar os perigos existentes em se confiar demasiado na intuição (DARBOUX, 1872, 1875, 1879, GISPERT, 1983, HOCHKIRCHEN, 2003).

Já o rigor weierstrassiano teve em Schwartz, que foi aluno de Weierstrass e editou um livro com suas notas e palestras (WEIERSTRASS, 1893), e nos matemáticos franceses Georges Henri Halphen (1844-1889) e Camille Jordan (1838-1922), que introduziram os $\varepsilon - \delta$ em suas obras (HALPHEN, 1886, 1888, 1891; JORDAN, 1893, 1894, 1896), seus principais propagadores (KLEIN; SOMMERFELD, 2010). Particularmente com relação a Jordan, o seu bastante popular *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (segunda edição, totalmente reformulada) foi o maior responsável pela difusão dos novos padrões, influenciando uma legião de matemáticos, como Émile Borel (1871-1956) e Henri Lebesgue:

> Ousando incorporar certas partes da teoria dos conjuntos em seu curso da École Polytechnique, Jordan, de certa forma, restabeleceu essa teoria; ele afirmou que ela é um braço útil da matemática. Ele fez mais que afirmar, ele provou isso por meio de seus estudos sobre a medida de áreas e de conjuntos, sobre integração que, como seus estudos sobre a retificação de curvas, sobre as séries trigonométricas, sobre a análise situs[61], têm preparado o caminho para diversos trabalhos, especialmente o meu (LEBESGUE, 1922, p. 16) [62].

No prefácio do segundo volume, Jordan (1894) enaltece a abordagem de Weierstrass e cita a edição feita por Schwartz e a obra de Halphen: "A superioridade incontestável dos métodos do Sr. Weierstrass nos fez decidir tomar por guia nessa nova exposição os *Formeln und Lehrsätze* do Sr. Schwartz e o Traité des fonctions elliptiques de Halphen" (p. v)[63].

O cenário foi parecido no que diz respeito às pesquisas. O próprio Cauchy várias vezes transgrediu contra seu próprio método, e, no que tange à matemática aplicada, o rigor nem sempre era considerado. Por exemplo, quando as séries divergentes não puderam mais ser usadas, com elas também foram excluídos muitos argumentos que haviam feito sucesso na física

[61] Nome pelo qual a Topologia era conhecida à época. Isso porque esse era o título da obra de Henri Poincaré considerada a pioneira desse ramo da matemática

[62] En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'École Polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'analysis situs, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier.

[63] La supériorité incontestable des méthodes de M. Weierstrass nous a décidé à prendre pour guide dans cette nouvelle exposition les *Formeln und Lehrsätze* de M. Schwartz et le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen.

aplicada e astronomia. Nessa direção, Oliver Heaviside (1850-1925) deu grande contribuição para a teoria do eletromagnetismo usando séries divergentes e fazia críticas ácidas a esse "engessamento" que o rigor da análise exigia.

Desse modo, a dificuldade encontrada em se aceitar os novos métodos advinha não só da própria dificuldade em trabalhar com eles (alguns matemáticos prodigiosos, como Joseph Liouville (1809-1882), relatavam não conseguir entender os argumentos empregados), e eventualmente do conservadorismo, como também da necessidade que esses métodos criaram de se rever antigos resultados que há muito eram considerados corretos.

* * *

Retomando o exemplo das séries divergentes, alguns matemáticos começaram a criar novas teorias para tentar contornar esse radicalismo imposto pela análise. Poincaré (1886) criou uma teoria das assim chamadas séries assintóticas que recuperava muitos argumentos das séries divergentes. Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), na mesma época e de forma independente de Poincaré, apresentou uma teoria semelhante (STIELTJES, 1886)[64]. Outra abordagem foi iniciada por Frobenius e por Otto Hölder (1859-1937), e desenvolvida por Ernesto Cesàro (1859-1906), que definia a soma de uma grande classe de séries divergentes (CESÀRO, 1890). Embora a soma de uma série divergente não se aproxime de um limite quando o número de termos cresce, a soma de Cèsaro fazia sentido tanto para as aplicações quanto para trabalhos teóricos. Não só a questão das séries divergentes foi alvo de críticas, mas também a de diferenciabilidade, o que levou, por exemplo, à criação da moderna teoria das distribuições (já na metade do século XX) de Laurent Schwartz (1915-2002) em que as derivadas não necessariamente existem como funções, mas como funções generalizadas (SCHWATZ, 1950, 1951/1978).

Por fim, como já adiantamos antes, esse movimento do rigor fez com que se procurasse uma alternativa à abordagem dos infinitésimos, que, como nos demais casos do parágrafo anterior, apesar de se mostrar útil, recebia críticas por conta de certas inconsistências lógicas. Nesse contexto é que surge uma conceitualização rigorosa do conceito de limite de uma função, que passou a fundamentar o cálculo a partir de então. Tal conceitualização dependeu de releituras da definição de função e do conceito de número (notadamente o de número real), pois a partir delas é que foi possível se demonstrar, sem o recurso da geometria, teoremas fundamentais da análise. Esse processo é chamado por muitos como *aritmetização da análise*.

E, assim, com a evolução dessas pesquisas de "releitura", do fim do século XIX para o início do século XX, o novo modelo de rigor passou a dominar as pesquisas matemáticas. Há quem considere esse modelo como uma restrição desnecessária (criando problemas que antes não existiam), mas devemos reconhecer que a maior parte das ideias desenvolvidas no século XX tiveram sua base no rigor do século XIX.

[64] Após os trabalhos e Poincaré e Stieltjes, as chamadas séries assintóticas ganharam grande importância dentro da análise, antes disso, eram empregadas apenas na astronomia (CAJORI, 2007, p. 484).

Referências

ABEL, Niels Henrik. (1826). **Untersuchungen über die Rheihe**. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1895.

ABEL, Niels Henrik. Texte Original des Lettres Écrites par Abel en Norvégien. In: HOLST, Elling; Strørmer, Carl; Sylow, Ludwig (Orgs.). **Niels Henrik Abel Mémorial Publié l'Occasion du Centenaire de sa Naissance**. Kristiania: Jacob Dybwad, 1902. p. 1-61.

ARBOGAST, Louis François Antoine. **Mémoire sur la Nature des Fonctions Arbitraires qui Entrent dans les Intégrales des Équations aux Différentielles Partielles**. St. Pétersbourg: Académie Impériale des Sciences, 1791.

BARON, Margaret Eleanor; BOS, Henk Jan Maarten. **Curso de Historia da Matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Unidade 4: O Cálculo o Século XVIII – Fundamentos.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

BERNOULLI, Johann. (1706). Sur les Isoperimetres. In: Académie Royale des Sciences de Paris (Ed.). **Histoire de l'Academie Royale des Sciences**: avec les memoires de Mathématique & de Physique pour le même année. Paris: Chez Jean Boudot, 1707. p. 235-245.

BERNOULLI, Johann. (1718). Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres. **Histoire de l'Académie Royale des Sciences**: avec les mémoires de Mathématique & de Physique pour le même année. Paris: De L'Imprimerie Royale, 1741.

BOTTAZZINI, Umberto. **The Higher Calculus**: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass. Translated by Warren Van Egmond. New York: Springer-Verlag, 1986. 332 p.

BOLZANO, Bernard. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege**. Prag: Gottlieb Haase, 1817.

BOLZANO, Bernard. (1830). **Bernard Bolzano's Schriften**. Band 1. Functionenlehre. Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1930.

BOURBAKI, Nicolas. **Eléments d'histoire des mathématiques**. [Heidelberg]: Springer-Verlag, 2007. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1984.

BOYER, Carl Benjamin. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover Publications Inc., 1949.

BURTON, David. **The History of Mathematics**: an introduction. 7. ed. New York: McGraw Hill, 2011.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007. Do Original A History of Mathematics, Fifth Edition.

CAUCHY, Augustin-Louis. (1814) Mémoire sur les intégrales définies. In: Académie Royale des Sciences (Ed.). **Mémoires présentés par divers savants a l'Académie (Royale) des Sciences de l'Institut de France**. Tome Premier. Paris: Imprimerie Royale, 1827. Lu à l'Institut le 22 août 1814.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique**: premier partie, analyse algébrique. Paris: Chez Debure frères, 1821.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Résumé des Leçons Données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal**. Paris: Chez Debure, 1823.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Leçons sur le Calcul Différentiel**. Paris: Chez Debure, 1829.

CAUCHY, Augustin-Louis. Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 36, n. 11, p. 454-459, 14 mar. 1853.

CESÀRO, Ernesto. Sur la Multiplication des Séries. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, Paris, v. 14, n., p. 114-120, 1890. Tome XXIV de la Collection.

DARBOUX, Jean-Gaston. Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions. **Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques**, Paris, v. 3, n., p. 307-313, 1872.

DARBOUX, Jean-Gaston. Mémoire sur les Fonctions Discontinues. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, Paris, v. 4, n. 2, p. 57-112, 1875.

DARBOUX, Jean-Gaston. Addition au Mémoire sur les fonctions discontinues. **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, Paris, v. 8, n., p. 195-202, 1879.

DIEUDONNÉ, Jean. Cauchy Augustin-Louis (1789-1857). In: SOCIETÉ D'ÉDITION ENCYCLOÆDIA UNIVERSALIS S.A. (Ed.) **Encyclopædia Universalis**. Disponível em: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/augustin-louis-cauchy/>. Acessado em: 30/12/12.

DINI, Ulisse. **Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali**. Pisa: Tipografia T. Nistri e C., 1878.

DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeune. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites arbitraire. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, v. 4, n., p. 157-169, 1829.

DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeune. Ueber die Darstellung ganz willkürilicher Functionen durcj Sinus-und Cosinusreihen. **Repertorium der Physik**, Berlin, v. 1, n., p. 152-174. 1837. Republicado In: Ostwald, Wilhelm (Ed.). **Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften**. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1900. p. 3-34.

DUGAC, Pierre. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. **Archive for History of Exact Sciences**, [S.L.], v. 10, n. 1-2, p. 41-174, 28 jun. 1973.

DUGAC, Pierre. **Histoire de l'Analyse**. Paris: Vuibert, 2003. Texte édité par Bernard Bru e Roger Laurent.

DUNHAM, William. **The Calculus Gallery**: masterpieces from Newton to Lebesgue. New Jersey: Princeton University Press, 2005.

EVLERO, Leonhardo. **Introductio in Analysin Infinitorum**. Lausannæ: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. 2v.

EVLERO, Leonhardo. **Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Vsu in Analysi Finitorum**. Petropolitanae: Imprensis Academiae Imperialis Scientarum, 1755.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. Título Original: An Introduction to the History of Mathematics.

FOLTA, Jaroslav. Life and scientific endeavor of Bernard Bolzano. In: JARNÍK, Vojtěch. **Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis**. Praha: Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, 1981. p. 11-32.

FOURIER, Jean-Baptiste Joseph. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Chez Firmin Didot, 1822.

FOURIER, Jean-Baptiste Joseph. Théorie du Mouvement de la Chaleur dans le Corps Solides. **Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France**, Paris, v. 5, n., p. 153-246, 1826.

GANDULFO, Roberto Oscar. Séries de Fourier e Convergência. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v., n. 11, p. 27-52, jun. 1990.

GAUSS, Carolo Friderico. (1799). Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. In: GAUSS, Carl Friedrich. **Werke 3**. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866. p. 1-30.

GAUSS, Carolo Friderico. (1812). Disquistiones Generales Circa Seriem Infinitam. In: GAUSS, Carl Friedrich. **Werke 3**. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866. p. 1-30.

GILAIN, Christian. Cauchy et le Cours d'Analyse de l'École Polytechinique. **Bulletin SABIX**, Paris, v., n. 5, p. 3-46, jul. 1989.

GISPERT, Hélène. Sur les fondements de l'analyse en France. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 28, n. 1, p. 37-106, 1983.

GRABINER, Judith Victor. **The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus**. Mineola: Dover Publications, 2005.

GUDERMANN, Christoph. Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, v. 18, n., p. 1-54, 1838.

HALPHEN, Georges Henri. **Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs Applications**. Paris: Gauthier-Villars, 1886. Premier Partie.

HALPHEN, Georges Henri. **Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs Applications**. Paris: Gauthier-Villars, 1888. Deuxième Partie.

HALPHEN, Georges Henri. **Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs Applications**. Paris: Gauthier-Villars, 1891. Troisième Partie.

HANKEL, Hermann. **Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen**. Tübingen: Ludwig Friedrich Fues, 1870.

HANKEL, Hermann. Grenze. In: ERSCH, Johann Samuel; GRUBER, Johann Gottfried (Eds.). **Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste**. Leipzig: F. A. Brockhaus, 1871. v. 90. p. 185-211.

HARDY, Godfrey Harold. Sir George Stokes and the concept of uniform convergence. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. London, v. 19, n. 4, p. 148-156, 1918.

HAWKINS, Thomas. **Lebesgue's Theory of Integration**. Madison: The University of Wisconsin Press, 1975.

HEINE, Heinrich Eduard. Die Elemente der Functionenlehre. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, v. 74, n., p. 172-188, 1871.

HOCHKIRCHEN, Thomas. Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 261-290. Geschichte der Analysis.

JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003.

JORDAN, Camille. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1893. Tome Premier. Édition Entièrement Refondue.

JORDAN, Camille. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1894. Tome Deuxième. Édition Entièrement Refondue.

JORDAN, Camille. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1896. Tome Troisième. Édition Entièrement Refondue.

JOURDAIN, Philip Edward Bertrand, The Origin of Cauchy's Conceptions of a Definite Integral and of the Continuity of a Function. **Isis**, Chicago, v. 1, n. 4, p. 661-703, 1913.

KATZ, Victor Joseph. **A History of Mathematics**: an introduction. [S.L.]: Addison-Wesley, 1998.

KEISLER, Howard Jerome. **Foundations of Infinitesimal Calculus**. Boston: Prindle, Weber&Schmidt, 1976.

KLEIN, Felix; SOMMERFELD, Arnold. **The Theory of the Top**. Translated by Raymond J. Nagem and Guido Sandri. Boston: Birkhäuser, 2010. Volume 2.

LAGRANGE, Joseph-Louis. **Théorie des Fonctions Analytiques**: contenant les principes du calcul différentiel, dégages de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits a l'analyse algébrique des quantités finies. Paris: Chez Bernard, 1797.

LEBESGUE, Henri Léon. Sur une généralisation de l'intégrale définie. **Comptes Rendus**: Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 132, n. 17, p.1025-1028, 29 abr. 1901.

LEBESGUE, Henri Léon. **Notice sur les travaux scientifiques**. Toulouse: Imprimerie et Libraire Édouard Privât, 1922.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm von. De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis. **Acta Eruditorum**, Lipsiæ, v. 11, n., p. 168-171, 1692.

LINTZ, Rubens Gouvêa. **História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007. Volume 2.

LÜTZEN, Jesper. The Foundation of Analysis in the 19th Century. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 155-195. Geschichte der Analysis.

MARTÍNEZ, Carmen Adame. El concepto matemático de función en la obra de Euler. **Miscelánea Matemática**, Ciudad de México, v., n. 46, p. 73-91, may. 2008.

OTERO-GARCIA, Sílvio César. Sobre uma Generalização da Integral Definida: tradução do primeiro trabalho de Henri Lebesgue sobre sua nova integral. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Campinas, v. 12, n. 25, p.65-71, ago./dez. 2012.

POISSON, Siméon Denis. Mémoire sur la Manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de quantités périodiques, et sur l'Usage de cette Transformation dans la Résolution de Différents Problèmes. **Journal de l'École Royale Polytechnique**, v. 11, n. 18, p. 417-489,1820.

POINCARÉ, Henri. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. **L'Enseignement mathématique**, v. 1, p. 157-162, 1899.

REIS, Frederico da Silva. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. (1854). Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. In: RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. **Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge**. [Leipzig]: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1876. Herausgegeben Unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber.

SEIDEL, Philipp Ludwig von. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierliche Functionen darstellen. **Abhandlungen der Mathem.-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, v. 7, n., p. 379-394, 1848.

SCHUBRING, Gert. The German mathematical community. In: FAUVEL, John; FLOOD, Raymond; WILSON, Robin (Eds.). **Möbius and his band**. Oxford: Oxford University Press, 1993. p. 21-34.

SCHWARTZ, Laurent. (1950-1951). **Théorie des distributions**. Paris: Hermann, 1978. Le tome I a été publié en 1950 et le tome II, publié d'abord en 1951.

SRIRAMAN, Bharath. **Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education**. Missoula: Information Age Publishing, 2012.

STIELTJES. Thomas Joannes. Recherches sur quelques séries semi-convergentes. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, Paris, v. 3, n. 3, p. 201-258, 1886.

STOKES, George Gabriel. (1849). On the Critical Values of the Sum of Periodic Series. In: STOKES, George Gabriel. **Mathematical and Physical Papers**. New York: Cambridge University Press, 2009. From the Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. VIII, p. 533.

STRUIK, Dirk Jan. **A Concise History of Mathematics**. New York: Dover Publications, 1948. 2v.

STUBHAUG, Arild. **Niels Henrik Abel and his Times**: Called too Soon by Flames After. Translated by R. Daly. New York: Springer, 2000.

THIELE, Rüdiger. Antiquity. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 1-39. Geschichte der Analysis.

WEIERSTRASS, Karl. (1841). Zur Theorie der Potenzreihen. In: WEIERSTRASS, Karl. **Mathematische Werk 1**. Berlin: Mayer&Müller, 1894. p. 67-74.

WEIERSTRASS, Karl. (1870). Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. In: WEIERSTRASS, Karl. **Mathematische Werk 2**. Berlin: Mayer&Müller, 1895. p. 49-54.

WEIERSTRASS, Karl. (1872). Über continuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten bezitsen. In: WEIERSTRASS, Karl. **Mathematische Werk 2**. Berlin: Mayer&Müller, 1895. p. 71-74.

WEIERSTRASS, Karl. **Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen**. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1893. Bearbeitet und Herausgegeben von H. A. Schwarz.

WUSSING, Hans. **Leciones de Historia de las Matematicas**. Tradução de Elena Ausejo, José Luis Escorihuela, Mariano Hormigón, Daria Kara-Murzá, Ana Millán. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998. Título Original: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.

YOUSCHKEVITCH, Adolf Pavlovitch. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. **Archive for History of Exact Sciences**, [S. L], v. 16, n. 1, p. 37-85, 27 sep. 1976.

APÊNDICE D

Um exemplo de função cuja derivada não é integrável

No intervalo $(0,1)$ pode-se construir um grupo de pontos de P, de segunda espécie, os quais têm a propriedade de não poderem ser enclausurados por um número finito de intervalos de soma tão pequena quanto se queira, mas tal que no interior de cada intervalo $(0,1)$ existe um outro intervalo no qual faltam pontos do grupo[1].

Construímos no intervalo (a,b) uma função que indicaremos com

$$f(x,a,b)$$

a qual tem as seguintes propriedades: 1^a se anula em a e b; 2^a é definida por esta expressão:

$$A=(x-a)^2\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$$

a partir do ponto a até o ponto x_1 à direita de a correspondente ao máximo da função situado à esquerda do ponto médio c do intervalo (a,b) mais próximo a esse ponto; 3^a é definida pela expressão

$$B=(b-x)^2\operatorname{sen}\frac{1}{b-x}$$

do ponto b até o ponto x_2 à esquerda de b correspondente ao máximo da função à direita do ponto c e mais próximo a esse ponto; 4^a do ponto x_1 ao ponto x_2 é constante e igual ao valor comum das expressões A e B nos pontos x_1 e x_2 de x, respectivamente. A função $f(x,a,b)$ será uma função finita, inferior a $(b-a)^2$, contínua e que possui em todos os pontos do intervalo (a,b) uma derivada finita e inferior sempre a $2(b-a)+1$ (igual a zero nos extremos); essa derivada terá somente uma descontinuidade de segunda espécie nos pontos a e b, pois, na vizinhança desses pontos, ela assume valores tão próximos a 1 e a -1 quanto se queira.

É fácil também observar que, em um ponto qualquer m do intervalo (a,b), a função tem um valor inferior aos dois números, $(m-a)^2$, $(m-b)^2$.

Isso posto, construímos no intervalo $(0,1)$ uma função $\varphi(x)$ a qual é nula em todos os pontos do grupo e nos seus pontos limites; escolhido depois um ponto qualquer que não esteja nem no grupo nem em um ponto extremo dele, e determinada a maior vizinhança desse ponto,

[1] Ver a minha nota: *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue*. Giornale di Matematica diretto dal Prof. G. Battaglini. Vol. XIX, pag. 76.

(a, b), na qual não existem pontos do grupo, nesse intervalo (a, b) tomamos a função $\varphi(x)$ como sendo $f(x, a, b)$.

Teremos assim definida em todos os pontos a $\varphi(x)$, a qual será finita, inferior a 1 e contínua em todos o intervalo $(0, 1)$; mais do que isso, terá derivada em todos os pontos. Que a derivada exista nos pontos que não são do grupo nem são pontos limites, isso é evidente; nos pontos do grupo e nos pontos limites a derivada é nula. De fato, tomo um ponto m qualquer do grupo ou um ponto limite, teremos:

$$\frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} = \frac{\varphi(m+h)}{h}.$$

Mas $\varphi(m+h)$ não pode ser maior que h^2, logo em valor absoluto teremos:

$$\frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} < h$$

e

$$\lim \frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} = 0.$$

Agora temos mostrado que, no interior do intervalo arbitrário $(0, 1)$, existe sempre um outro intervalo no qual faltam pontos do grupo P, logo, em vizinhanças arbitrariamente pequenas de um ponto desse grupo ou de um ponto limite dele, não existem pontos nos quais $\varphi(x)$ tem derivada tão próxima a 1 ou -1 quanto se queira. A derivada de $\varphi(x)$ é portanto uma função descontínua em todos os pontos do grupo P e nos seus pontos limites, e seus saltos nesses pontos são iguais a 1, logo, uma vez que os pontos do grupo P não podem ser enclausurados por um número finito de intervalos cuja soma seja arbitrariamente pequena, essa derivada não é integrável.

A função $\varphi(x)$ que temos construído agora tem a propriedade que tomado um intervalo arbitrário em $(0, 1)$, nele se pode construir um outro intervalo no qual a derivada é integrável. Veremos agora como construir uma outra função cuja derivada não seja integrável em parte alguma do intervalo $(0, 1)$.

A função

$$(b-a)\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

definida entre a e b será sempre finita, inferior em valor absoluto a $(b - a)$, contínua e terá em todos os seus pontos a derivada determinada e finita, inferior a $3(b - a)$ e não integrável em todo intervalo (a, b), pois em um grupo de pontos não enclausuráveis em intervalos de soma arbitrariamente pequena, que chamaremos de P_{ab}, ela é descontínua e tem saltos iguais a 1. Definimos agora uma função $\varphi_1(x)$ no intervalo $(0, 1)$ igual a 0 em todos os pontos do grupo P e em seus pontos limites; tomado depois um ponto arbitrário m que não pertence ao grupo P, nem aos seus pontos limites, e construída a vizinhança máxima (a, b) dele que não contém pontos do grupo P, nesse intervalo seja $\varphi_1(x)$ definida pela expressão

$$(b-a)\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Seja P_1 o conjunto de todos os pontos do grupo P e do grupo P_{ab} que dessa forma foram obtidos. Construímos uma nova função $\varphi_2(x)$ igual a zero nos pontos do grupo P_1 e nos seus pontos limites; tomado depois um ponto m não pertencente ao grupo, nem aos seus pontos limites, e construída a vizinhança máxima (a_1, b_1) que não contém pontos do grupo P_1, nessa vizinhança seja $\varphi_2(x)$ definida pela expressão

$$(b_1-a_1)\varphi\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right);$$

assim, analogamente se constrói as funções $\varphi_3(x), \varphi_4(x), \ldots, \varphi_n(x)$ por meio dos grupos de pontos $P_2, P_3, \ldots P_{n-1}$ obtidos de forma análoga a P_1. É fácil observar que em cada intervalo superior a $\frac{1}{2^{2n}}$ existe sempre pontos do grupo P_n, e no interior de cada intervalo podem-se construir outros intervalos nos quais faltam pontos do próprio grupo.

Dito isso constrói-se a série:

$$\phi(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi_1(x)}{3^2} + \cdots + \frac{\varphi_n(x)}{3^{2n}} + \cdots$$

Esta será convergente igualmente em todo intervalo $(0,1)$, além disso, a série das derivadas

$$\varphi'(x) + \frac{\varphi_1'(x)}{3^2} + \cdots + \frac{\varphi_n'(x)}{3^{2n}} + \cdots$$

sendo também ela uniformemente convergente, teremos que a função $\phi(x)$ será finita e contínua e terá em todos os pontos derivada finita e determinada, que será a série das derivadas dos termos[2]. Demonstremos que a $\phi'(x)$ em qualquer parte do intervalo $(0,1)$ não é integrável. De fato, seja (α, β) um intervalo qualquer em $(0,1)$, se ele é maior que $\frac{1}{2^{2n-1}}$ deverá conter mais que um ponto do grupo P_n, e, portanto, um intervalo (c,d), no qual faltam pontos do grupo P_n, mas tal que c e d sejam pontos desse grupo ou seus pontos limites.

No intervalo (c,d) as funções $\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_{n-1}'$ são contínuas, enquanto φ_n' não é integrável, pois no grupo de pontos P_{cd} é descontínua e tem saltos iguais a 1. Segue que no mesmo intervalo, e, portanto, em (α, β), a $\phi'(x)$ não é integrável, pois os saltos da soma

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi_m'(x)}{3^{2m}}$$

são certamente inferiores a $\frac{1}{3^{2n}}$ e, portanto, inferior aos saltos dessa função.

[2] Dini. *Fondamenti per per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 115

APÊNDICE E

Sobre uma generalização da integral definida

No caso das funções contínuas, há uma identidade entre as noções de integral e de função primitiva. Riemann definiu a integral de certas funções descontínuas, mas nem todas as funções derivadas são integráveis no sentido de Riemann. O problema da procura de funções primitivas não é, portanto, resolvido pela integração, e podemos desejar uma definição da integral compreendendo como caso particular a de Riemann, e permitindo resolver o problema das funções primitivas[1].

Para definir a integral de uma função contínua crescente:

$$y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

dividimos o intervalo (a, b) em subintervalos e fazemos a soma das quantidades obtidas ao multiplicar o comprimento de cada subintervalo por um dos valores de y quando x está dentro desse subintervalo. Se x está no intervalo (a_i, a_{i+1}), y, varia entre certos limites m_i, m_{i+1}, e, reciprocamente, se y está entre m_i e m_{i+1}, x está entre a_i e a_{i+1}. De sorte que no lugar de se dar a divisão da variação de x, ou seja, de se dar os números a_i, teríamos podido dar a divisão da variação de y, ou seja, os números m_i. Disso, duas maneiras de generalizar a noção de integral. Sabemos que a primeira (de se dar os a_i) conduz à definição dada por Riemann e às definições de integrais por excesso e por falta dadas pelo Sr. Darboux. Vejamos a segunda.

Seja a função y compreendida entre m e M. Dados:

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{p-1} < M = m_p;$$

$y = m$ quando x faz parte de um conjunto E_0; $m_{i-1} < y \leqslant m_i$, quando x faz parte de um conjunto E_i.

Nós definiremos mais adiante as medidas λ_0, λ_1 desses conjuntos. Consideremos uma ou outra destas duas somas:

$$m_0\lambda_0 + \Sigma m_i\lambda_i; \quad m_o\lambda_0 + \Sigma m_{i-1}\lambda_i;$$

[1] Essas duas condições impostas *a priori* a qualquer generalização da integral são evidentemente compatíveis, porque qualquer função derivada integrável, no sentido de Riemann, tem por integral uma de suas funções primitivas.

se, quando a distância máxima entre dois m_i *consecutivos tende a zero, essas somas tendem a um mesmo limite, independentemente dos* m_i *escolhidos, esse limite será, por definição, a integral de* y*, que será dita integrável.*

Consideremos um conjunto de pontos (a, b), pode-se, de uma infinidade de maneiras, cobrir esses pontos em uma infinidade enumerável de intervalos; o limite inferior da soma dos comprimentos desses intervalos é a medida do conjunto. Um conjunto E é dito *mensurável* se sua medida, acrescida daquela do conjunto de pontos que não fazem parte de E, dá a medida de (a, b)[2]. Eis duas propriedades desses conjuntos: uma infinidade de conjuntos mensuráveis E_i sendo dada, o conjunto dos pontos que fazem parte de pelo menos um dentre eles é mensurável; se os E_i não têm dois a dois algum ponto em comum, a medida do conjunto obtido é a soma das medidas dos E_i. O conjunto dos pontos comuns a todos os E_i é mensurável.

É natural considerar primeiramente as funções tais que os conjuntos que figuram na definição da integral sejam mensuráveis. Encontramos que: *se uma função limitada superiormente em valor absoluto é tal que, quaisquer que sejam* A *e* B*, o conjunto dos valores de* x *para os quais se tem* $A < y \leqslant B$ *é mensurável, ela é integrável* pelo procedimento indicado. Uma tal função será dita *somável*. A integral de uma função somável está compreendida entre a integral por falta e a integral por excesso. De sorte que, *se uma função integrável no sentido de Riemann é somável, a integral é a mesma com as duas definições*. Ou, *toda função integrável no sentido de Riemann é somável*, pois o conjunto de seus pontos de descontinuidade é de medida nula, e podemos demonstrar que se, fazendo abstração de um conjunto de valores de x de medida nula, resta um conjunto em cada ponto do qual uma função é contínua, essa função é somável. Essa propriedade permite construir imediatamente funções não integráveis no sentido de Riemann e ao mesmo tempo somáveis. Sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções contínuas, $\varphi(x)$ não sendo sempre nula; uma função que difere de $f(x)$ não mais que nos pontos de um conjunto de medida nula sempre denso e que nesses pontos é igual a $f(x) + \varphi(x)$, é somável sem ser integrável no sentido de Riemann. Exemplo: a função igual a 0 se x é irracional, igual a 1 se x é racional. O processo de formação que precede mostra que o conjunto de funções somáveis tem uma força superior ao contínuo. Eis duas propriedades desse conjunto:

1. Se f e φ são somáveis, $f + \varphi$ e $f\varphi$ o são e a integral de $f + \varphi$ é a soma das integrais de f e de φ.
2. Se uma sequência de funções somáveis tem um limite, é uma função somável.

O conjunto de funções somáveis contém evidentemente $y = k$ e $y = x$; portanto, de acordo com (1), ele contém todos os polinômios e como, de acordo com (2), ele contém seus limites, ele contém portanto todas as funções contínuas, todos os limites de funções contínuas, isto é, as funções de primeira classe (ver Baire, *Annali di Matematica*, 1899); ele contém todas essas de segunda classe etc.

Em particular, *toda função derivada, limitada superiormente em valor absoluto*, sendo

[2] Se ajuntarmos a esses conjuntos, conjuntos de medida nula convenientemente escolhidos, teremos conjuntos mensuráveis no sentido do Sr. Borel (*Lições sobre a teoria de funções*).

de primeira classe, *é somável*, e podemos demonstrar que sua integral, *considerada como função de seu limite superior, é uma de suas funções primitivas*.

Eis agora uma aplicação geométrica. Se $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ são limitadas superiormente, a curva

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

tem por comprimento a integral de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Se $\varphi = \psi = 0$, temos a variação total da função f de variação limitada. No caso em que f', φ', ψ' não existem, podemos obter um teorema quase idêntico substituindo as derivadas pelos números derivados de Dini.

Anexo

Integrale, Longueur, Aire

Integrale, Longueur, Aire

(*par* H. Lebesgue, *à Nancy*)

Introduction

Dans ce travail j'essaie de donner des définitions aussi générales et précises que possible de quelques uns des nombres que l'on considère en Analyse: intégrale définie, longueur d'une courbe, aire d'une surface.

Mr. JORDAN, dans la seconde édition de son *Cours d'Analyse*, a fait une étude approfondie de ces nombres. Il m'a semblé utile cependant de reprendre cette étude, et voici pourquoi. On sait qu'il existe des fonction dérivées non intégrables, lorsque l'on adopte, comme le fait Mr. JORDAN, la définition de l'intégrale qu'a donnée RIEMANN, de sorte que l'intégration, telle que l'a définie RIEMANN, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral:

Trouver une fonction connaissant sa dérivée.

Il peut donc sembler naturel de chercher une autre définition de l'intégrale, telle que, dans des cas plus étendus, l'intégration soit l'opération inverse de la dérivation.

D'autre part, comme le remarque Mr. JORDAN, l'aire d'une surface n'ayant pas des plans tangents variant d'une façon continue n'est pas définie; et les énoncés que l'on serait tenté d'admettre comme analogues à la définition de la longueur d'une courbe ne peuvent être adoptés[1]. Il y a donc lieu de chercher une définition de l'aire et peut être aussi de modifier celle [2] de la longueur de façon que ces deux définitions soient aussi analogues que possible.

Dans l'étude des questions relatives à la théorie, des fonctions de variables réelles on reconnaît souvent qu'il serait commode de pouvoir attacher aux ensembles de points des nombres jouissant de certaines des propriétés des longueurs des segments ou des aires des polygones. On a proposé différentes définitions de ces nombres que l'on appelle les mesures

[1] Voir SCHWARZ, lettre à GENOCCHI. Cette lettre est reproduite dans l'édition lithographiée du Cours professé à la Faculté des sciences par Ch. HERMITE, pendant le second semestre de 1882. (Second tirage, page 25.) – Voir aussi PEANO, *Atti della Accademia dei Lincei*, 1820.

des ensembles[2]; celle qui a été le plus souvent adoptée se trouve exposée et étudiée dans le livre de Mr. Jordan.

Dans le premier chapitre je définis, avec Mr. Borel, la mesure d'un ensemble par ses propriétés essentielles. Après avoir complété et précisé les indications un peu rapides que donne Mr. Borel[3], j'indique quelles relations il y a, entre la mesure ainsi définie et la mesure au sens de Sr. Jordan. La définition que j'adopte s'applique aux espaces à plusieurs dimensions; de la notion de mesure d'un ensemble dont les éléments sont les points d'un plan, on déduit celle d'aire d'un domaine plan; si les éléments sont des points de l'espace ordinaire on en déduit la notion de volume, etc.

Ces préliminaires posés, il n'y a plus d'inconvénients à définir l'intégrale d'une fonction continue comme l'aire d'un domaine plan; et même cette méthode a l'avantage de conduire à une définition de l'intégrale d'une fonction discontinue bornée comme mesure d'un certain ensemble de points. C'est cette définition géométrique que j'adopte au chapitre II; on peut d'ailleurs la remplacer par une définition analytique, l'intégrale se présente alors comme étant la limite d'une suite de sommes assez analogues à celles que l'on considère dans la définition de Riemann. Les fonctions auxquelles s'applique cette définition géométrique sont celles que j'appelle *sommables*.

[3] Je ne connais aucune fonction qui ne soit sommable, je ne sais s'il en existe. Toutes les fonctions qu'on peut définir à l'aide des opérations arithmétiques et du passage à la limite sont sommables. Toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann sont sommables et les deux définitions de l'intégrale conduisent au même nombre. Toute fonction dérivée bornée est sommable.

L'intégrale d'une dérivée bornée, considérée comme fonction de la limite supérieure d'intégration est une fonction primitive de la dérivée donnée, le problème fondamental du calcul intégral est donc théoriquement résolu toutes les fois que la fonction dérivée donnée est bornée.

Pour obtenir des résultats plus généraux il est nécessaire de donner une définition de l'intégrale s'appliquant à des fonctions non bornées. Il est facile de trouver une telle définition, mais celle qui m'a paru la plus simple et la plus naturelle ne s'applique pas à toutes les fonctions dérivées non bornées; de sorte que pour les fonctions non bornées, le problème de la recherche des fonctions primitives n'est pas résolu dans tous les cas. Avec mes définitions je trouve que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivée ait une intégrale est que sa fonction primitive soit à variation bornée. Toutes les fois que l'intégrale existe elle fait connaître une fonction primitive.*

Le calcul effectif d'une intégrale dépend essentiellement de la façon dont est donnée la fonction à intégrer. Dans le cas où la fonction est définie à l'aide de séries on pourra se servir de cette propriété, dont un cas particulier a été obtenu par Mr. Osgood[4]: *Une série dont*

[2] Voir au sujet de ces définitions Schœnflies, *Jahresberieht der deutschen Mathematiher-Vereinigung*, 1900.
[3] *Leçons sur la théorie des Fonctions.*
[4] *American Journal*, 1897.

les termes ont des intégrales et dont les restes sont, en valeur absolue, inférieurs à un nombre fixe est intégrable terme à terme.

La définition de l'intégrale s'étend immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Dans le premier chapitre j'ai développé une généralisation de la notion de longueur d'un segment, une généralisation faite dans un sens différent donne la notion de longueur d'une courbe. Dans le troisième chapitre, où je m'occupe de cette notion, j'adopte la définition suivante: *la longueur d'une courbe* C *est la plus petite limite des longueurs des lignes polygonales qui tendent uniformément vers* C. Cette définition est exactement équivalente à la définition classique[5]. Une courbe à longueur finie est dite rectifiable. Je retrouve rapidement les principaux résultats relatifs à ces courbes obtenus par MR. JORDAN. La recherche d'une expression de la longueur d'une courbe ayant des tangentes conduit à une nouvelle application de l'intégrale définie au chapitre précédent. *Si* f', φ', ϕ' *existent, la condition nécessaire et suffisante pour que* [4] *la courbe*

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \phi(t),$$

soit rectifiable est que l'intégrale $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \phi'^2}$ *existe. Toutes les fois que cette intégrale existe elle représente la longueur de la courbe.* La définition qu'adoptait P. DU BOIS REYMOND[6] est donc un cas particulier de la définition classique, même en étendant comme je l'ai fait le sens du mot intégrale.

Dans le quatrième chapitre *j'appelle aire d'une surface* L *la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent uniformément vers* L. On peut déduire de là une définition de l'aire analogue à celle de la longueur d'une courbe définie comme limite des longueurs des polygones inscrits.

L'étude de la représentation de l'aire à l'aide d'une intégrale double n'est abordée que dans le cas très particulier où la surface admet des plans tangents variant d'une façon continue; on retrouve l'intégrale classique $\int\int \sqrt{EG - F^2} du\, dv$.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à des recherches assez différentes. Il s'agit de voir, sur des exemples, si l'extension donnée aux sens des mots longueur, aire n'entraine pas des modifications correspondantes dans les énoncés ou les raisonnements de la géométrie des surfaces. Dans ces raisonnements on suppose généralement les surfaces et les courbes analytiques, ou tout au moins définies à l'aide de fonctions ayant un certain nombre de dérivées.

Le premier problème que je me propose est celui des surfaces applicables sur le plan: Chercher les surfaces correspondant point à point à un plan, de façon que les longueurs soient conservées. Je trouve d'une part qu'il *existe des surfaces applicables sur le plan et ne contenant aucun segment de droite, d'autre part qu'il existe des courbes gauches ayant en chaque point un plan oscillateur et dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan.* Les procédés élémentaires que j'ai employés ne m'ont pas donné toutes les surfaces

[5] SCHEEFFER, *Acta Mathematica*, 5; JORDAN, *Cours d'Analyse.*
[6] *Mathematische Annalen*, Bd. 15, pag. 287 e *Acta Mathematica*, 6.

applicables sur le plan, mais ils m'ont fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface cylindrique, conique, une surface formée par les tangentes d'une courbe gauche, une une surface [5] de révolution soient applicables sur le plan; enfin ils montrent que l'application conserve les aires.

Le second problème est celui de Lagrange ou de Plateau: étant donné un contour fermé trouver une surface limitée à ce contour et dont l'aire soit mini ma. Je montre que ce problème est toujours possible et admet une infinité de solutions.

Il serait très intéressant de savoir si, parmi toutes ces surfaces solutions, ne se trouve pas une surface analytique. La méthode qui se présente immédiatement à l'esprit et qui consiste à démontrer successivement l'existence de chacune des dérivées nécessaires à l'établissement de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima, paraît fort difficile à appliquer. Cependant des raisonnements très élémentaires m'ont permis dans un cas particulier de démontrer l'existence des plans tangents à l'une des surfaces solutions.

Les méthodes de ce dernier chapitre sont analogues à celles qui ont permis à Mr. Hilbert[7] de reprendre l'étude du problème de Dirichlet par le procédé de Riemann. Les résultats obtenus par Mr. Hilbert et ceux que je viens d'indiquer, si incomplets qu'ils soient, semblent montrer qu'il y a avantage à laisser de côté, au moins momentanément, les équations aux dérivées partielles que donnent les méthodes ordinaires du calcul des variations, et à raisonner directement sur l'intégrale qu'il s'agit de rendre minima.

J'ai indiqué les principaux résultats de ce travail dans différentes notes des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (19 Juin et 27 Novembre 1899, 26 Novembre et 3 Décembre 1900, 29 Avril 1901).

[7] *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Août 1900.

CHAPITRE 1

Mesure des ensembles

1. Un ensemble de points est dit borné si la distance de deux de ses points est limitée supérieurement. Deux ensembles sont dits égaux si, en déplaçant l'un deux, on peut les amener à coïncider. Des ensembles $E_1, E_2, \ldots$, [6] étant donnés, l'ensemble somme E est formé des points appartenant à l'un au moins des E_i. Nous n'aurons jamais à considérer qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles E, et nous poserons

$$E = E_1 + E_2 + \cdots$$

Si tout point de E_2, est point de E_1, on dit que E_1 contient E_2 et l'on appelle différence de E_1 et E_2 $(E_1 - E_2)$ l'ensemble des points de E_1 qui n'appartiennent pas à E_2. Il faut bien remarquer que E_2 contenant E_3, les ensembles

$$E_1 + (E_2 - E_3) \text{ e } (E_1 + E_2) - E_3$$

diffèrent s'il existe des points communs à la fois à E_1, E_2 et E_3

Ces définitions posées:

Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes:

1. *Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.*

2. *Deux ensembles égaux ont même mesure.*

3. *La mesure de là somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.*

Nous ne résoudrons ce problème de la mesure que pour les ensembles que nous appellerons mesurables. Ce problème admet d'ailleurs des solutions différentes suivant que l'on se borne aux ensembles dont tous les points sont sur une droite, ou à ceux dont tous les points sont dans un plan, etc. Pour distinguer nous dirons, quand il sera nécessaire: mesure linéaire, mesure superficielle, etc.

Remarquons que si le problème de la mesure admet une solution, en multipliant toutes les mesures obtenues par un même nombre on a un autre système de mesures. Nous ne considérerons pas comme différentes de telles solutions, de sorte que, sans nuire à la généralité, nous pourrons attribuer la mesure 1 à un ensemble quelconque de mesure non nulle. [7]

1 Les éléments de l'ensemble sont les points d'une droite

2. Supposons possible le problème de la mesure. Un ensemble formé d'un seul point a une mesure nulle car un ensemble borné contenant une infinité de points doit avoir une mesure finie. L'ensemble des points d'un segment MN a donc même mesure que M et N fassent ou non partie de l'ensemble; d'ailleurs MN ne peut avoir une mesure nulle sans qu'il en soit de même pour tout ensemble borné.

Choisissons un segment MN et attribuons lui 1 pour mesure. On sait que si l'on prend MN pour unité de longueur on peut attacher à chaque segment PQ un nombre, sa longueur; ce nombre est aussi la mesure de l'ensemble des points de PQ. Pour s'en convaincre il suffit de se rappeler que si la longueur l de PQ est commensurable et égale à $\frac{\alpha}{\beta}$ il existe un segment RS contenu α fois dans PQ et β fois dans MN et que si l est incommensurable, à tout nombre λ inférieur à l correspond un segment contenu dans PQ, et de longueur λ et à tout nombre λ supérieur à l un segment contenant PQ et de longueur λ.

Pour que la 3e. condition du problème de la mesure soit remplie il faut que la longueur d'un segment-somme d'un nombre fini ou d'une infinité d'autres segments, n'empiétant pas les uns sur les autres, soit la somme des longueurs de ces segments.

Des propriétés des longueurs il résulte qu'il en est bien ainsi si les segments composants sont en nombre fini; cela est encore vrai s'ils sont en nombre infini (*Voir les Leçons sur la Théorie des fonctions*, de MR. BOREL).

3. Un ensemble E étant donné, on peut d'une infinité de manières enfermer ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles. L'ensemble E_1 des points de ces intervalles contient E donc la mesures $m(E)$ de E est au plus égale à celle $m(E_1)$ de E_1, c'est à dire au plus égale à la somme des longueurs des intervalles considérés. La limite inférieure de cette somme est une limite supérieure de $m(E)$, nous l'appellerons la mesure extérieure de E, $m_e(E)$.

Supposons que tous les points de E appartiennent à un segment AB. Nous appellerons complémentaire de E par rapport AB, $C_{AB}(E)$, l'ensemble $AB - E$. Puisque la mesure de $C_{AB}(E)$est au plus $m_e[C_{AB}(E)]$ celle [8] de E est au moins $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Ce nombre ne dépend pas de celui des segments AB contenant E choisi; nous l'appellerons la mesure intérieure de E, $m_i(E)$. Deux ensembles égaux ont des mesures intérieures égales et des mesures extérieures égales. D'ailleurs puisque l'on a:

$$m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geqslant m(AB)$$

la mesure extérieure n'est jamais inférieure à la mesure intérieure. Si le problème de la mesure est possible, là mesure d'un ensemble E est comprise entre les deux nombres $m_e(E)$, $m_i(E)$ que nous venons de définir.

4. Nous appellerons *ensembles mesurables*[8] *ceux dont les mesures extérieure et inté-*

[8] En adoptant cotte définition nous modifions le langage qu'adopte MR. BOREL.

rieure sont égales, la valeur commune de ces deux nombres sera la mesure de l'ensemble, si le problème de la mesure est possible. Des propriétés qui suivent il résultera que le nombre $m(E)$ ainsi défini satisfait bien aux conditions du problème de la mesure si *l'on s'astreint à ne considérer que des ensembles mesurables*.

La définition des ensembles mesurables est équivalente à celle ci: Un ensemble E est dit mesurable s'il est possible d'enserrer ses points dans des intervalles α, et ceux de son complémentaire dans des intervalles β de manière que la somme des longueurs des parties communes aux α et aux β soit aussi petite que l'on veut.

Soit un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles mesurables $E_1, E_2, \ldots$ montrons que l'ensemble somme. E est mesurable.

Nous supposons tous les ensembles E_i formés des points d'un segment AB par rapport auquel nous prendrons les complémentaires. Enserrons les points de E_1 dans des intervalles α_1 n'empiétant pas les uns sur les autres et $C(E_1)$ dans des intervalles β_1; les parties communes aux α_1, et aux β_1, étant de longueur totale choisie arbitrairement ε_1. Enserrons E_2 dans des intervalles α_2 et $C(E_2)$ dans β_2 ayant en commun une longueur totale ε_2. Soient α'_2 et β'_2 les parties des α_2 et β_2 communes aux β_1. A E_3 correspondent des intervalles α_3, β_3 et un nombre ε_3, soient α'_3 et β'_3 les parties des α_3 et β_3 communes aux β_2 et ainsi de suite.

Les points de E peuvent être enfermés dans les intervalles α_1, α'_2, α'_3, ... Ceux de $C(E)$ peuvent être enserrés dans les intervalles β'_i, quel que soit i. Or ces deux séries d'intervalles ont des parties communes de longueur totale [9] au plus égale à

$$l_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + m(\alpha'_{i+1}) + m(\alpha'_{i+2}) + \cdots$$

La série $\Sigma m(\alpha'_i)$ est convergente, si donc on a choisi les ε_i de façon que la série $\Sigma\varepsilon_i$ soit convergente et ait ε pour somme, on pourra prendre i assez grand pour que l_i soit inférieur à 2ε.

Donc E est sommable. – La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sommables étant un ensemble sommable, cela a bien un sens de poser le problème de la mesure seulement pour les ensembles mesurables.

Si les $E_1, E_2, \ldots$ n'ont deux à deux aucun point commun, les points de E_i sont intérieurs aux intervalles α'_i de sorte que $m(\alpha'_i) - m(E_i)$ est au plus égal à ε_i. Or $m(E)$ diffère de

$$m(\alpha_1) + m(\alpha'_2) + m(\alpha'_3) + \cdots$$

de moins de

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots$$

donc on a:

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$$

et la 3.ème condition du problème de la mesure est remplie.

5. Le problème de la mesure est donc possible pour les ensembles mesurables; et il n'admet

qu'une seule solution, car les raisonnements qui nous ont servi à définir les deux nombres m_e et m_i, appliqués à un ensemble mesurable, ne font intervenir que des ensembles mesurables.

Il n'est nullement démontré que le problème de la mesure soit impossible pour les ensembles (s'il en existe) dont les mesures intérieure et extérieure sont inégales. Mais dans la suite nous ne rencontrerons que des ensembles mesurables. En effet les procédés que nous emploierons pour définir un ensemble pourront toujours se ramener aux deux suivants.

$1.^o$ Faire la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis.

$2.^o$ Considérer l'ensemble des points communs à un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles donnés; et ces deux procédés appliqués à des ensembles mesurables donnent des ensembles mesurables. Nous l'avons vu pour le premier, démontrons le pour le second. [10]

Soient $E_1, E_2, \dots$ les ensembles donnés; l'ensemble cherché e_1 peut être défini comme ayant pour complémentaire la somme des complémentaires de $E_1, E_2, \dots$ ce qui démontre la proposition.

Soit e_i l'ensemble analogue à e_1, relatif à la suite $E_i, E_{i+1}, \dots$; l'ensemble somme des e_i est formé des points communs à tous les E_i, au moins à partir d'une certaine valeur de i, variable d'ailleurs d'un point à l'autre; comme somme d'ensembles mesurables il est mesurable.

Voici une autre application du 2.ème procédé. Soit E_1 contenant E_2, E_1-E_2 est l'ensemble des points communs à E_1 et $C(E_2)$, donc si E_1 et E_2 sont mesurables, E_1-E_2 l'est. D'ailleurs, puisque l'on a:

$$E_1 = (E_1 - E_2) + E_2$$

$$m(E_1 - E_2) = m(E_1) - m(E_2)$$

6. Puisque nous connaissons un ensemble mesurable, celui formé de tous les points d'un intervalle, les deux procédés précédents appliqués un nombre fini de fois nous permettent d'en définir de nouveaux. Ceux que l'on peut obtenir par cette méthode et leurs complémentaires sont ceux que Mr. Borel appelle mesurables[9] et que nous nommerons *ensembles mesurables* (B). Ils sont définis par une infinité dénombrable de conditions, leur ensemble a la puissance du continu. Parmi ces ensembles il faut citer ceux qui sont des sommes d'intervalles et les ensembles fermés, c'est-à-dire contenant leur dérivé[10], dont les complémentaires sont sommes d'intervalles.

L'ensemble E formé des points d'abscisses:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$$

où les a_i sont égaux à 0 ou 2, étant parfait est mesurable (B). Son complémentaire est

[9] *Leçons sur la théorie des fonctions*, pages 46 à 50.

[10] Ce sont ces ensembles que Mr. Jordan appelle parfaits et Mr. Borel relativement parfaits. Un tel ensemble contient sa frontière (laquelle sera définie plus loin).

formé d'un intervalle $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de longueur $\frac{1}{3}$, de deux intervalles $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}, \frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)$ de longueur $\frac{1}{3^2}$, de quatre intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$ etc, donc a pour mesure

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 2^2\frac{1}{3^3} + \cdots = 1$$

[11] et par suite E est de mesure nulle. E a la puissance du continu, donc on peut former avec les points de E une infinité d'ensembles qui tous, ayant une mesure extérieure nulle, sont mesurables. La puissance de l'ensemble de ces ensembles est celle de l'ensemble des ensembles de points; il existe donc des ensembles mesurables qui ne sont pas mesurables (B), et la puissance de l'ensemble des ensembles mesurables est celle de l'ensemble des ensembles de points.

7. Soit E un ensemble mesurable. Choisissons des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ décroissant jusqu'à zéro. On peut enfermer E dans une infinité dénombrable d'intervalles α_i de mesure $m(E)+\varepsilon_i$. L'ensemble E_1 des points qui font partie à la fois des ensembles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ est mesurable (B), il a pour mesure $m(E)$ et contient E. L'ensemble $E_1 - E$ est de mesure nulle. On peut l'en fermer dans des intervalles β_i contenus dans les α_i et de mesure ε_i. L'ensemble e des points communs à tous les β_i est mesurable (B) et de mesure nulle. L'ensemble $E_2 = E_1 - e$ est donc mesurable (B) et de mesure $m(E)$; de sorte que *tout ensemble mesurable est contenu dans un ensemble* E_1 *et contient un ensemble* E_2, E_1 *et* E_2 *étant mesurables (B) et de même mesure*. Les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de Mr. Borel, permettent de mesurer, à condition de tenir compte des remarques énoncées à la fin de la page 48[11](loc. cit.).

D'une manière analogue on démontre que la mesure extérieure d'un ensemble E est la limite inférieure des mesures des ensembles mesurables contenant E et qu'il existe effectivement un ensemble mesurable (B) contenant E et de mesure $m_e(E)$. De même, $m_i(E)$ est la limite supérieure des mesures des ensembles mesurables contenus dans E et il existe effectivement un ensemble mesurable (B) contenu dans E ayant $m_i(E)$ pour mesure.

8. Dans son traité d'Analyse Mr. Jordan donne les définitions suivantes. Un point M est point intérieur d'un ensemble E s'il est intérieur à un segment dont tous les points sont points de E. La frontière de E est l'ensemble des points qui ne sont intérieurs ni à E, ni à $C(E)$.

Divisons le segment AB qui porte E, en intervalles partiels. Soit l la somme des longueurs de ceux de ces intervalles dont tous les points sont intérieurs [12] à E et L la somme des longueurs de ceux que contiennent des points de E ou de sa frontière. On démontre que, lorsque l'on fait varier d'une manière quelconque la division de AB, de façon que le maximum de la longueur des intervalles partiels tende vers zéro, les deux nombres l et L tendent vers des

[11] "Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 de mesure α_1 nous pourrons dire que la mesure de E est supérieure à α_1, sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement,... Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité"

limites déterminées les *étendues intérieure et extérieure* de E. De cette définition il résulte que l'étendue extérieure est au moins égale à la mesure extérieure et que l'étendue intérieure est au plus égale à la mesure intérieure. Mr. Jordan appelle mesurables les ensembles dont les deux étendues extérieure et intérieure sont égales; ces ensembles que nous nommerons *mesurables* (J) sont donc mesurables, au sens que nous avons adopté et les deux définitions de la mesure concordent lorsqu'elles sont toutes deux applicables.

On peut encore dire que l'étendue intérieure de E est la mesure de l'ensemble de ses points intérieurs, lequel ensemble étant ouvert[12], c'est-à-dire ne contenant aucun point de sa frontière, a pour complémentaire un ensemble fermé et par suite est mesurable (B). L'étendue extérieure de E est la mesure de l'ensemble somme ide E et de sa frontière, lequel étant fermé est mesurable (B). Donc pour qu'un ensemble soit mesurable (J) il faut et il suffit que sa frontière soit de mesure nulle.

Un ensemble fermé, ayant pour étendue extérieure sa mesure, s'il est de mesure nulle on peut affirmer qu'il est mesurable (J). En particulier l'ensemble parfait défini au § 6 est mesurable (J); il en est de même de tous ceux que l'on peut former avec ses points, donc l'ensemble des ensembles mesurables (J) a même puissance que l'ensemble des ensembles de points, et il existe des ensembles mesurables (J) qui ne sont pas mesurables (B).

9. Nous venons d'attacher à certains ensembles une mesure, il nous reste à rechercher comment on peut calculer ce nombre. Cela dépend évidemment de la manière dont l'ensemble est donné.

Supposons qu'un intervalle quelconque (a, b) étant donné, on sache reconnaître s'il existe dans (a, b) des points de l'ensemble donné E ou de sa frontière, et s'il y existe des points de $C(E)$. Nous pourrons, alors, par un nombre fini d'opérations, calculer un nombre quelconque de termes des deux suites (que l'on peut supposer l'une décroissante, l'autre croissante) dont les limites sont les étendues extérieure et intérieure de E. L'habitude que nous avons de manier les séries conduit à considérer les étendues comme bien définies. [13] On sait donc calculer la mesure d'un ensemble mesurable (J) et la considération simultanée des deux suites permet d'avoir une limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque.

Il est beaucoup plus difficile de calculer $m_e(E)$ et $m_i(E)$ pour un ensemble quelconque. Ces nombres sont en effet définis par la considération d'une infinité non dénombrable de nombres; pour trouver une suite de nombres tendant vers $m_e(E)$ il faudrait considérer des divisions du segment AB portant E, en intervalles partiels qui dépendraient de l'ensemble E.

Si un ensemble est mesurable (B) et est défini à l'aide des deux opérations que nous avons indiquées à partir de suites d'intervalles, il est facile de calculer sa mesure en s'appuyant sur la 3ème condition du problème de la mesure et sur cette propriété: l'ensemble E des points communs à tous les ensembles mesurables $E_1, E_2, \ldots$ qui sont tels que chacun contient tous ceux qui le suivent, est la limite inférieure de la suite $m(E_1), m(E_2), \ldots$

En effet $C(E)$ est la somme des ensembles, sans point commun, deux à deux, $C(E), [C(E_2) - C(E_1)], [C(E_3) - C(E_2)] \ldots$

[12] Tous les points d'un tel ensemble sont intérieurs à l'ensemble.

Donc

$$m[C(E)] = m[C(E_1)] + m[C(E_2) - C(E_1)] \dots$$

et

$$m(E) = m(E_1) + [m(E_2) - m(E_1)] \dots$$

2 Les éléments de l'ensemble sont les points d'un plan

10. Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux ensembles dont les éléments sont les points d'un espace à plusieurs dimensions; nous nous bornerons au cas du plan.

En raisonnant comme au §2 on voit que tout ensemble borné de points sur une droite a une mesure superficielle nulle et que l'ensemble des points d'un carré ne peut avoir 0 pour mesure. Attribuons donc arbitrairement 1 pour mesure à un carré $MNPQ$.

Les raisonnements que l'on emploie en géométrie élémentaire pour trouver l'aire d'un triangle, prouvent que la mesure de l'ensemble des points d'un triangle ne peut différer de la moitié du produit des nombres qui mesurent son côté et sa hauteur, MN étant l'unité de longueur.

[14] La mesure d'un triangle étant ainsi définie, il faut démontrer que *la mesure d'un triangle, somme de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres, est la somme des mesures de ces triangles.*

Les raisonnements exposés par MR. HADAMARD dans la note *D* de sa *Géométrie élémentaire* prouvent qu'il en est bien ainsi si les triangles composants sont en nombre fini. Le cas où ils sont en nombre infini se traite par un raisonnement semblable à celui qui nous a été utile dans le cas des ensembles de points sur une droite (BOREL, *Théorie des fonctions*, page 42).

11. Nous pouvons maintenant donner les définitions analogues à celles du §3.

La mesure extérieure $m_e(E)$ d'un ensemble E est la limite inférieure de la somme des mesures des triangles (en nombre fini ou infini) dans lesquels on peut enfermer les points de E.

E étant intérieur à un triangle ABC, par définition

$$C_{ABC}(E) = (ABC) - E.$$

La mesure intérieure de E sera, par définition

$$m_i(E) = m(ABC) - m_e[C_{ABC}(E)].$$

Un ensemble pour lequel les deux nombres ainsi définis sont égaux sera dit mesurable, et la valeur commune de ces nombres sera sa mesure.

On démontre comme au §4 que le problème de la mesure est possible et n'admet qu'une solution quand on se borne aux ensembles mesurables; et que les deux procédés du §5 appliqués à des ensembles mesurables donnent des ensembles mesurables. Ces deux procédés, appliqués un nombre fini de fois à des ensembles dont chacun est formé des points d'un triangle, donnent les ensembles plans que nous appellerons, ainsi que leurs complémentaires, ensembles mesurables (B).

Soit un ensemble ouvert E, chacun de ses points M est intérieur à E. Nous pouvons donc à M faire correspondre un carré ayant M pour centre, de côtés parallèles à des directions rectangulaires données, et défini comme étant le plus grand dont tous les points intérieurs sont intérieurs à E. E étant somme de ceux de ces carrés qui correspondent aux points dont les deux coordonnées sont rationnelles, est mesurable (B).

Le complémentaire d'un ensemble fermé est un ensemble ouvert, donc tout ensemble fermé est mesurable (B).

[15] On définira les étendues extérieure et intérieure d'un ensemble comme dans le cas de la droite, une division de la portion de droite contenant l'ensemble en un nombre fini de segments étant remplacée par une division en un nombre fini de carrés de la portion de plan contenant l'ensemble. De là la notion d'ensemble mesurable (J).

Tous ces ensembles et tous ces nombres ont entre eux les mêmes rapports que les ensembles et les nombres de mêmes noms rencontrés précédemment.

3 Le problème des aires[13]

12. On sait que l'on appelle courbe plane l'ensemble des deux équations

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \tag{1}$$

f et φ étant continues dans l'intervalle (a, b) fini où elles sont définies. A chaque valeur de t on peut faire correspondre le point dont les coordonnées sont les valeurs correspondantes de x et y. Une courbe définit donc un ensemble de points, cet ensemble est parfait[14]. Un point est dit multiple s'il correspond à plusieurs valeurs de t. Dans le cas d'une courbe sans point multiple la connaissance de l'ensemble des points de la courbe suffit à la définir, car on ne considère pas comme différentes la courbe (1) et celles qu'on en déduit en remplaçant t par une fonction $\theta(t)$ toujours croissante ou toujours décroissante.

Une courbe est dite fermée sans point multiple si elle n'a d'autre point multiple qu'un point double correspondant à $t = a$ et $t = b$. On considère cette courbe comme définie par l'ensemble de ses points. Une telle courbe étant donnée, on sait qu'elle divise le plan en deux régions l'une intérieure, l'autre extérieure[15].

Nous appellerons domaine l'ensemble des points à l'intérieur d'une courbe fermée C sans point multiple. C est la frontière du domaine, lequel est un [16] ensemble ouvert. Nous dirons qu'un domaine D est somme des domaines $D_1, D_2, \ldots$ en nombre fini ou non, si tout point de D appartient à un et un seul des D_i, ou bien à l'une au moins des frontières des D_i.

[13] JORDAN, Tome I. – J. HADAMARD, Géométrie Elémentaire.
[14] Il n'en serait pas ainsi si, comme cela se présente souvent en mécanique, l'intervalle (a, b) était infini.
[15] JORDAN. Cours d'Analyse, 2ème. Edition, Tome I, pages 90 à 100.

13. Nous nous proposons *d'attacher à chaque domaine un nombre positif que nous appellerons son aire et satisfaisant aux conditions suivantes:*

1.^{0} *Deux domaines égaux ont même aire.*

2.^{0} *L'aire d'un domaine somme d'un nombre fini ou infini d'autres domaines est la somme des aires de ces domaines.*

C'est *le problème des aires.*

Si ce problème est possible, il l'est d'une infinité de manières et l'on peut attribuer arbitrairement 1 pour aire à un carré MNPQ. Les raisonnements connus de la géométrie élémentaire prouvent que l'aire d'un rectangle ne peut différer du produit des longueurs de ses côtés, MN étant l'unité de longueur, c'est-à-dire de la mesure superficielle du rectangle.

Un domaine étant un ensemble ouvert est, comme nous l'avons vu, somme d'une infinité dénombrable de rectangles, dont on peut supposer qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres; donc son aire ne peut différer de la somme des aires de ces rectangles, c'est-à-dire de la mesure superficielle du domaine considéré comme ensemble de points.

Soient maintenant deux domaines D_1, et D_2 sans point commun, ayant en commun un arc de frontière $\alpha\beta$, et un seul. Le domaine D – somme de l'ensemble des points de D_1, de l'ensemble des points de D_2, de l'ensemble des points de $\alpha\beta$ (autres que α et β), – a pour mesure la somme des mesures de ces trois ensembles, qui sont tous trois mesurables puisque les deux premiers sont ouverts et que le troisième est parfait, aux points α et β près. Pour que la 2ème. condition du problème des aires soit remplie il faut donc que la mesure superficielle de l'arc $\alpha\beta$ soit nulle.

Le problème des aires n'est donc possible que si l'on ne considère que les domaines dont la frontière est de mesure superficielle nulle.

Nous appellerons ces domaines *domaines quarrables* et les courbes dont la mesure superficielle est nulle *courbes quarrables*.

Soit un domaine quarrable D, somme des domaines quarrables $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots$ L'ensemble des points de D contient la somme des ensembles sans point commun deux à deux $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots$ et comme aucun des D_i n'a une mesure nulle ils forment au plus une infinité dénombrable. Les frontières ont une mesure superficielle nulle, on peut les négliger dans le calcul de la mesure ou aire de D.

[17] *Le problème des aires est donc possible pour les domaines quarrables et il n'admet qu'une seule solution, si l'on fixe l'unité d'aire.*

14. Nous allons supposer maintenant que la 2.ème condition du problème des aires est ainsi modifiée:

L'aire d'un domaine somme de deux autres est la somme des aires de ces deux autres[16].

En reprenant des raisonnements déjà employés on verra que l'aire d'un domaine D est comprise entre les étendues intérieure et extérieure de ce domaine. De sorte que l'aire d'un

[16] C'est ainsi que Mr. HADAMARD pose le problème des aires pour les polygones (*Géométrie Elémentaire*, Note D.).

domaine quarrable est encore bien déterminée.

L'aire d'un domaine D non quarrable, limité par une courbe non quarrable C est comprise entre les nombres $m(D)$ et $m(D) + m(C)$[17].

Montrons que le problème des aires ainsi posé est indéterminé pour les domaines non quarrables. Nous nous appuierons sur cette propriété: lorsque deux domaines D_1, D_2 ont en commun un arc de frontière $\alpha\beta$, on peut trouver un domaine D contenant $\alpha\beta$ (sans peut-être α et β) et tel que, ou bien tout point de D intérieur à D_1, est intérieur à D_2 et inversement, ou bien tout point de D intérieur à D_1, n'appartient pas à D_2 et inversement[18]. Dans le premier cas nous dirons que D_1 et D_2 sont du même côté de $\alpha\beta$ et dans le second qu'ils sont de côtés différents.

Soit un arc de courbe $\alpha\beta$, sans point multiple et non quarrable, supposons qu'il fasse partie de la frontière d'un domaine Δ. Soit maintenant un domaine quelconque D limité par une courbe C. C et $\alpha\beta$ peuvent avoir des arcs en commun (nous négligeons les points communs, s'il en existe, ne faisant pas partie de tels arcs). Soit E l'ensemble de ceux de ces arcs le long desquels D et Δ sont d'un même côté de $\alpha\beta$ et E_1, l'ensemble des arcs pour lesquels cela n'est pas. Choisissons arbitrairement, une fois pour toutes, un [18] nombre θ compris entre 0 et 1. Nous attribuerons à D l'aire:

$$m(D) + \frac{1}{2} m(C - E - E_1) + \theta m(E) + (1 - \theta) m(E_1).$$

On démontrera très facilement que l'aire ainsi définie vérifie la seconde condition du problème des aires, telle qu'elle a été posée au début de ce paragraphe[19]

En résumé le problème des aires n'est à la fois possible et bien déterminé que pour les domaines quarrables. Dans la suite nous ne parlerons d'aire que dans le cas d'un domaine quarrable.

Des raisonnements analogues aux précédents pourront être faits au sujet des volumes des domaines de l'espace ordinaire, et d'une façon plus générale de l'étendue d'un domaine d'un espace à un nombre quelconque de dimensions.

---

[17] Il existe des courbes non quarrables puisqu'il existe des courbes passant par tous les points d'un carré. Pour former une courbe non quarrable, sans point multiple il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie Mr. *Hilbert* pour définir une courbe passant par tous les points d'un carré (*Mathematische Annalen*, Bd. 38 ou PICARD, *Traité d'Analyse*, 2.ème Edition, Tome I). On remplacera chacun des carrés qui figure dans la définition de Mr. HILBERT par un polygone intérieur à ce carré, d'aire assez grande, choisi de façon que les frontières de deux de ces polygones n'aient en commun que le sommet, s'il existe, par lequel la courbe passe de l'un dans l'autre.

[18] La démonstration n'offre aucune difficulté.

[19] Il faudra pour cela s'appuyer sur cette propriété: Si un domaine est somme de deux domaines D_1 et D_2, D_1 et D_2 ont en commun un arc de frontière et un seul, et aucun point commun en dehors de cet arc.

CHAPITRE 2

Integrale

1 Integrale définie des fonctions d'une variable

15. Au point de vue géométrique le problème de l'intégration peut se poser ainsi:

Étant donnée une courbe C *par son équation* $y = f(x)$ *(*f *est une fonction continue positive, les axes sont rectangulaires) trouver l'aire du domaine limité par un arc de* C*, un segment de* $0x$ *et deux parallèles à l'axe des* y *d'abscisses données* a *et* b, $(a < b)$.

Cette aire s'appelle l'intégrale définie de f prise entre les limites a et b, elle se représente par $\int_a^b f(x)dx$.

Archimède en quarrant un segment de parabole a résolu un cas particulier de ce problème. La méthode classique applicable au cas général consiste [19] essentiellement à évaluer les étendues intérieure et extérieure du domaine à l'aide d'une division du plan en rectangles dont les côtes sont parallèles à $0x$ et $0y$.

Pour avoir ces rectangles traçons d'abord des parallèles à $0y$, puis divisons les bandes obtenues par des segments parallèles à $0x$, d'ordonnées variables d'une bande à l'autre. Si l'un R_1 des rectangles R ainsi formés doit être considéré pour calculer l'une des étendues, tous les rectangles R situés dans la même bande et compris entre R_1 et $0x$ doivent aussi être considérés pour le calcul de la même étendue. Les étendues sont donc des limites de sommes d'aires de rectangles ayant leurs bases sur $0x$.

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots$ les longueurs de ces bases; $m_1, m_2 \ldots, M_1, M_2 \ldots$ les valeurs inférieures et supérieures de f dans les intervalles correspondants. Si l'on suppose les δ donnés, c'est-à-dire les parallèles à $0y$ tracées, et si l'on choisit les segments parallèles à $0x$ de manière à obtenir les valeurs les plus approchées possibles pour les étendues, on obtiendra pour ces valeurs approchées :

$$s = \Sigma\delta_i m_i \quad S = \Sigma\delta_i M_i.$$

Ainsi on sait calculer les deux étendues du domaine; on démontre qu'elles sont égales, le problème que nous nous sommes posé a donc un sens et nous savons le résoudre.

Relativement aux fonctions f bornées quelconques Mr. DARBOUX a démontré[20] que les deux sommes s et S tendent vers des limites parfaitement déterminées; on les appelle *intégrales par défaut* et par *excès*. Lorsque ces deux intégrales sont égales, et cela se présente

[20] DARBOUX, *Mémoire sur les fonctions discontinues*. Annales de l'École Normale, 1875.

pour d'autres fonctions que les fonctions continues, la fonction est dite *intégrable* et la limite commune de s et S est appelée depuis RIEMANN[21].

16. Pour interpréter géométriquement ces nombres, attachons à toute fonction f positive définie dans (a, b) l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient à la fois les deux inégalités

$$a \leqslant b 0 \leqslant y \leqslant f(y),$$

[20] Les deux sommes s et S sont évidemment des valeurs approchées des étendues intérieure et extérieure de E et par suite s et S ont des limites bien déterminées: ces étendues. Ainsi, au point de vue géométrique, l'existence des intégrales par défaut et par excès est une conséquence de l'existence des étendues intérieure et extérieure d'un ensemble borné. – Pour que la fonction f soit intégrable il faut et il suffit que E soit mesurable (J); la mesure de E est l'intégrale.

Si la fonction f est de signe quelconque, nous lui faisons correspondre l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient les trois inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad x f(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant y^2 \leqslant \overline{f(x)}^2.$$

L'ensemble E est somme de deux ensembles E_1 et E_2 formés des points à ordonnées positives pour E_1 et négatives pour E_2[22]. L'intégrale par défaut est l'étendue intérieure de E_1 moins l'étendue extérieure de E_2; l'intégrale par excès est l'étendue extérieure de E_1, moins l'étendue intérieure de E_2. Si E est mesurable (J) (auquel cas E_1 et E_2 le sont) la fonction est intégrable, l'intégrale étant $m(E_1) - m(E_2)$.

17. Ces résultats suggèrent immédiatement la généralisation suivante: *si l'ensemble* E *est mesurable, (auquel cas* E_1 *et* E_2 *le sont) nous appellerons intégrale définie de* f*, prise entre* a *et* b*, la quantité*

$$m(E_1) - m(E_2)$$

Les fonctions f *correspondantes seront dites sommables.*

Relativement aux fonctions non sommables, s'il en existe, nous définirons les intégrales inférieure et supérieure comme égales à

$$m_i(E_1) - m_i(E_2), \quad m_e(E_1) - m_e(E_2).$$

Ces deux nombres sont compris entre les intégrales par défaut et par excès.

18. Nous allons définir analytiquement les fonctions sommables.

Puisque E est mesurable il est contenu dans un ensemble E′ et contient un ensemble E″, E′ et E″ étant mesurables (B) et de mesure $m(E)$,§7. D'ailleurs les raisonnements qui nous ont donné ce résultat prouvent que l'on peut supposer E′ et E″ formés de segments

21 RIEMANN, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. intégrale définie de* f *prise entre* a *et* b

22 Il importe peu de considérer les points de l'axe x comme faisant partie de E_1 ou de E_2.

parallèles à $0y$ et ayant leurs pieds sur $0x$, c'est-à-dire correspondant à deux fonctions f_1 et f_2 ($f_1 \geqslant f_2$).

[21] Soient e, e', e" les ensembles formés de ceux des points de E, E', E" dont les ordonnées sont plus grandes qu'un nombre donné $m > 0$; e, e', e'' sont mesurables et de même mesure. Soient s, s', s" les sections de ces ensembles par la droite $y = m + h$; s' et s" sont mesurables (B) linéairement, et $m(s')$, $m(s'')$ ne décroissent pas quand h tend vers zéro; soient S', S" leurs limites. Montrons qu'elles sont égales. – En effet, s'il en était autrement pour h assez petit on aurait toujours

$$m(s') \geqslant m(s'') + \varepsilon.$$

Et l'on peut trouver h_1 et h_2, $h_1 < h_2$, assez petits pour que

$$m[s'(h_1)] \geqslant m[s'(h_2)] \geqslant m[s''(h_1)] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient e_1', e_1'' les points de e' et e'' compris entre $y = h_1$ et $y = h_2$, on a:

$$m(e_1') \geqslant (h_2 - h_1) \cdot m[s'(h_2)]$$

$$m(e_1'') \leqslant (h_2 - h_1) \cdot m[s''(h_2)].$$

Donc

$$m(e_1') \geqslant m(e_1'') + (h_2 - h_1)\frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est impossible car e_1' et e_1'' doivent avoir la même mesure.

Donc s' et s'' ont même mesure linéaire et par suite s est mesurable; c'est-à-dire que *l'ensemble des valeurs de* x *pour lesquelles* $f(x)$ *est supérieure à* $m > 0$ *est mesurable*. De même *l'ensemble des valeurs de* x *pour lesquelles* $f(x)$ *est inférieure à* $m < 0$ *est mesurable*.

De là résulte que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est inférieure ou égale à $m > 0$ (supérieure ou égale à $m < 0$) est mesurable; donc que l'ensemble des points pour lesquels on a soit a $a \geqslant f(x) > b > 0$, soit $0 > c > f(x) \geqslant d$, soit $e \geqslant f(x) \geqslant g$ ($eg < 0$) est mesurable; et en faisant tendre b vers a, ou d vers c, ou e et g vers 0 ou voit que l'ensemble des points pour lesquels y a une valeur donnée est mesurable. En résumé, sans qu'il soit nécessaire de s'occuper des signes de a et b, *si* f *est sommable, l'ensemble des valeurs de* x *pour lesquelles on a*:

$$a > f(x) > b$$

est mesurable.

[22] 19. Réciproquement: *si quels que soient* a *et* b *l'ensemble des valeurs de* x *pour lesquelles on a* $a > f(x) > b$ *est mesurable, et si la fonction* $f(x)$ *est bornée, elle est sommable.*

En effet, divisons l'intervalle de variation de $f(x)$; soient $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ les points de division. Soit e_i ($i = 0, 1, \ldots n$) l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = a_i$.

Soit e_i' ($i = 0, 1, 2, \ldots n - 1$) l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $a_i < f(x) <$

a_{i+1}.

Les points de l'ensemble E attaché à $f(x)$, correspondant aux valeurs de x qui appartiennent à e_i, forment un ensemble mesurable dans le plan et de mesure $|a_i| \cdot m_l(e_i)$, ($m_l(e_i)$ désignant une mesure linéaire).

Les points de E qui correspondent à ceux de e'_i forment un ensemble contenant un ensemble mesurable de mesure $|a_i| \cdot m_l(e_i)$, et contenu dans un ensemble mesurable de mesure $|a_{i+1}| m_l(e'_i)$.

E contient donc un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_{i-1}| m_l(e'_i)$$

et est contenu dans un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_i| m_l(e'_i).$$

Ces deux mesures diffèrent de moins de $(a_n - a_0)\alpha$ en appelant α le maximum de $a_i - a_{i-1}$, donc on peut les rendre aussi voisines que l'on veut et E est mesurable, donc f sommable.

De plus on sait calculer la mesure de E; donc, *si f est positive l'intégrale est la limite commune des deux sommes*

$$\sigma = \sum_0^n a_i \cdot m_l(e_i) + \sum_1^n a_{i-1} \cdot m_l(e'_i) \quad \Sigma = \sum_0^n a_i \cdot m_l(e_i) + \sum_1^n a_i \cdot m_l(e'_i)$$

lorsque $a_{i-1} - a_i$ tend vers zéro.

Or si f n'est pas toujours positive la limite de la somme de ceux des termes de σ ou Σ qui sont positifs donne la mesure de l'ensemble que nous avons appelé E_1, §16, et la limite de la somme des termes négatifs donne – $m(E_2)$, donc *dans tous les cas σ et Σ définissent l'intégrale*.

Il n'est peut-être pas inutile de montrer que des raisonnements analytiques auraient pu nous conduire à la considération des fonctions sommables et de ce que nous venons d'appeler leurs intégrales.

[23] Soit une fonction continue toujours croissante $f(x)$ définie entre α et β ($\alpha < \beta$) et variant entre a et b ($a < b$). Prenons arbitrairement pour x les valeurs

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \beta$$

auxquelles correspondent pour $f(x)$ les valeurs

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$

L'intégrale définie, au sens ordinaire du mot, est la limite commune des deux sommes

$$\sum_{1}^{n}(x_i - x_{i-1})a_{i-1} \quad \sum_{1}^{n}(x_i - x_{i-1})a_i$$

quand le maximum de $x_i - xi - 1$ tend vers zéro.

Mais x_i est donné si a_i l'est, et $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro si $a_i - a_{i-1}$ tend vers zéro. Donc *pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante* $f(x)$ *on peut se donner les* a_i*, c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de* $f(x)$*, au lieu de se donner les* x_i*, c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de* x.

En cherchant à opérer de même, d'abord dans le cas simple des fonctions continues variables dans tout intervalle, et n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, puis dans le cas d'une fonction continue quelconque on est facilement conduit à cette propriété. Soit une fonction continue $f(x)$ définie dans (α, β) et variant entre a et b, $(a < b)$. Choisissons arbitrairement

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b;$$

$f(x) = a_i$ pour les points d'un ensemble fermé e_i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$; $a_i < f(x) < a_{i+1}$ pour les points d'un ensemble, somme d'intervalles e_i', $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$; les ensembles e_i et e_i' sont mesurables.

Les deux quantités

$$\sigma = \sum_{0}^{n} a_i \cdot m(e_i) + \sum_{1}^{n} a_i \cdot m(e_i') \quad \Sigma = \sum_{0}^{n} a_i \cdot m(e_i) + \sum_{1}^{n} a_{i+1} \cdot m(e_i')$$

tendent vers $\int_a^b f(x)dx$ quand le nombre des a_i augmente de façon que le maximum de $a_i - a_{i-1}$ tende vers zéro.

Cette propriété obtenue, on peut la prendre pour définition de l'intégrale de $f(x)$. Mais les deux quantités σ et Σ ont un sens pour d'autres fonctions [24] que les fonctions continues, ce sont les fonctions sommables. Nous allons démontrer que pour ces fonctions σ et Σ ont une même limite indépendante du choix des a_i; cette limite sera, par définition, l'intégrale de $f(x)$ prise entre α et β.

Lorsque, entre les a_i, on introduit de nouveaux points de division, σ ne décroît pas, Σ ne croît pas, donc σ et Σ ont des limites. Elles sont égales, car $\Sigma - \sigma$ est au plus égal à $\beta - \alpha$ multiplié par le maximum de $a_i - a_{i-1}$.

Soit maintenant un autre mode de division de la variation de $f(x)$ à l'aide de points b_i et soient σ' et Σ' les valeurs correspondantes de σ et Σ. Soient σ'' et Σ'' les valeurs correspondant au mode de division dans lequel on emploie à la fois les a_i et b_i. Les deux séries d'inégalités

$$\sigma \leqslant \sigma'' \leqslant \Sigma'' \leqslant \Sigma'$$

$$\sigma' \leqslant \sigma'' \leqslant \Sigma'' \leqslant \Sigma$$

prouvent que les six sommes σ, σ', σ'', Σ, Σ', Σ'' ont la même limite.

L'existence de l'intégrale est donc démontrée. Si l'on adopte cette méthode d'exposition, d'ailleurs peu différente de la précédente, il n'est pas évident que la définition de l'intégrale telle que l'a donnée RIEMANN n'est jamais en désaccord avec la précédente. Pour le démontrer nous nous appuierons sur ce fait: Les points de discontinuité d'une fonction intégrable forment un ensemble de mesure nulle[23]. – Soit $f(x)$ une fonction intégrable et soit E l'ensemble des points pour lesquels on a

$$a \leqslant f(x) \leqslant b$$

a et b étant deux nombres quelconques. Les points limites de E qui ne font pas partie de E sont des points de discontinuité; ils forment donc un ensemble e de mesure nulle. $E + e$ étant fermé est mesurable, e est mesurable, donc E l'est. Cela suffit pour qu'on en conclut que f est sommable.

Si dans un intervalle de longueur l, le maximum de f est M et le minimum m, l'intégrale (au sens que nous avons donné à ce mot) est comprise entre lM et lm. De plus si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres croissants, on a:

$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} = \int_{a_1}^{a_n}$$

(les intégrales ayant le sens que nous avons adopté).

[25] De là résulte que l'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre les intégrales par défaut et par excès, et en particulier que les deux définitions de l'intégrale concordent lorsqu'elles sont toutes deux applicables.

21. L'intégrale prise entre les limites a et b n'a été définie que si a est inférieur à b, nous compléterons la définition par l'identité

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

De là résulte que l'on a:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \cdots + \int_k^l f(x)dx = \int_a^l f(x)dx$$

et cela quels que soient $a, b, \ldots l$.

Nous aurons aussi besoin de la notion d'intégrale d'une fonction f définie seulement pour les points d'un ensemble E[24]. Soit un segment AB contenant E, définissons une fonction φ

[23] RIEMANN énonce cette propriété de la façon suivante: Pour qu'une fonction soit intégrable il faut que "la somme totale des intervalles, pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, quel que soit σ, puisse être rendue infiniment petite".

[24] On aurait pu d'abord définir les fonctions sommables dans E, puis leurs intégrales à l'aide des mêmes définitions que précédemment, à condition de faire abstraction de tous les points qui n'appartiennent pas à E.

comme égale à f pour les points de E et à 0 pour les points de $C_{AB}(E)$. L'intégrale de f prise dans E est, par définition, l'intégrale de φ prise dans AB. Il est évident que l'intégrale de f ainsi définie ne dépend pas du choix du segment AB contenant E.

Si E est somme de $E_1, E_2, \ldots,$ tous ces ensembles étant mesurables et sans point commun deux à deux, et si la fonction f est sommable dans E, on a:

$$\int_E f(x)dx = \Sigma \int_{E_i} f(x)dx.$$

Remarquons encore que l'on peut définir l'intégrale inférieure d'une fonction f comme la limite supérieure des intégrales des fonctions φ sommables non supérieures à f; il existe une de ces fonctions φ dont l'intégrale est égale à l'intégrale inférieure de f. On énoncerait une propriété analogue pour l'intégrale supérieure.

22. Nous allons maintenant montrer que les opérations arithmétiques élémentaires appliquées à des fonctions sommables donnent des fonctions sommables.

[26] Soient f et φ deux fonctions sommables qui restent comprises entre m et M. Partageons l'intervalle (m, M) soient les points de division

$$m_0 = m < m_1 < m_0 \ldots < m_n = M.$$

Soit $e_i(i = 1, 2, \ldots n)$ l'ensemble des valeurs de x; pour lesquelles on a: $m_{i-1} < f \leqslant m_i$ l'ensemble correspondant pour φ.

Soit e_{ij} l'ensemble des points communs à e_i et $e'j$, pour les points de cet ensemble on a:

$$m_{i-1} + m_{j-1} < f + \varphi \leqslant m_i + m_j;$$

e_i, $e'j$, e_{ij} sont mesurables.

Soient a et b deux nombres donnés. Soit E l'ensemble somme de ceux des e_{ij} dont tous les points sont compris entre a et b. E est mesurable.

Augmentons indéfiniment le nombre des m_i de façon que le maximum de $m_i - m_{i-1}$ tende vers zéro. Nous aurons une suite, infinie d'ensembles E dont la sommé, qui est mesurable, est l'ensemble de valeurs de x pour lesquelles on a: $a < f + \varphi < b$ donc $f + \varphi$ est sommable.

L'intégrale de f est la somme des intégrales de f prises dans les ensembles e_{ij}, donc on a:

$$\Sigma m(e_{ij})m_{i-1} < \int f(x)dx < \Sigma m(e_{ij})m_i.$$

Et, en raisonnant de même pour la fonction $f + \varphi$,

$$\Sigma m(e_{ij})(m_{i-1} + m_{j-1}) < \int (f + \varphi)dx < \Sigma m(e_{ij})(m_i + m_j).$$

De là résulte que

$$\left|\int(f+\varphi)dx-\int fdx-\int\varphi dx\right| < \Sigma m(e_{ij})(m_i+m_j-mi-1-mj-1)$$

donc

$$\int(f+\varphi)dx=\int fdx+\int\varphi dx^{[25]}.$$

[27] Cette propriété se généralise immédiatement, de sorte que: *la somme d'un nombre quelconque de fonctions sommables est une fonction sommable* et l'intégrale est la somme des intégrales.

On démontrera de même que le produit de *deux fonctions sommables est une fonction sommable; que l'inverse d'une fonction sommable* f *vérifiant l'inégalité*

$$0<m<|f|<M$$

est une fonction sommable; que la racine m*-ième arithmétique d'une fonction* f *sommable, pour laquelle cette racine existe, est sommable*; que si f *et* φ *sont deux fonctions sommables, telles que* $f(\varphi)$ *ait un sens, la fonction* $f(\varphi)$ *est sommable; de même* $f\varphi$ *est sommable si* f *et* φ *le sont*, etc.

Une proposition plus importante est la suivante: *Si une fonction* f *bornée est la limite d'une suite de fonctions* f *sommables,* f *est sommable.*

En effet soit et l'ensemble des valeurs pour lesquelles f, est comprise *entre* a et b. L'ensemble e des points communs à tous les e_i, au moins à partir d'une certaine valeur de i, est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est comprise entre a et b. Or les e_i, étant mesurables e l'est, donc f est sommable.

23. Les propositions que nous venons d'obtenir permettent de définir une classe importante de fonctions sommables.

Nous nous appuierons sur ce fait que $y=h$ et $y=x$ sont des fonctions sommables; alors kx^m est sommable et tout polynôme est sommable.

Depuis WEIERSTRASS on sait que toute fonction continue est la limite d'une suite de polynômes, donc les fonctions continues sont sommables. Mais il existe des fonctions autres que les fonctions continues qui sont limites de polynômes, ce sont les fonctions qu'a étudiées Mr. BAIRE et qu'il a appelées, fonctions de première classe. (*Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica, 1899.) Les fonctions de première classe sont donc sommables,: Les limites de fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe sont sommables, etc. Toutes les fonctions de l'ensemble que Mr. BAIRE désigne par E (page 70, loc. cit.) sont sommables.

Ces résultats nous fournissent de nombreux exemples de fonctions sommables, discontinues et non intégrables (au sens de RIEMANN). On peut d'ailleurs obtenir de tels exemples de la

[25] L'introduction des notions d'intégrales inférieure et extérieure aurait permis de se borner à la 2ème partie du raisonnement précédent.

façon suivante. – Le raisonnement qui nous a permis au paragraphe 20 de démontrer que toute fonction intégrable est sommable prouve que: Si, en faisant abstraction d'un ensemble de mesure [28] nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Donc, si f et φ sont deux fonctions continues, la fonction F, définie comme égale à f sauf aux points d'un ensemble E de mesure nulle, pour lesquels on a

$$F = f + \varphi,$$

est sommable. Or si φ n'est jamais nulle et si E est dense dans tout intervalle, tous le points sont points de discontinuité pour F que n'est donc pas intégrable (au sens de RIEMANN).

Ce procédé nous permet de construire des fonctions sommables formant un ensemble dont la puissance est égale à celle de l'ensemble des fonctions.

24. La méthode géométrique qui nous a servie au début de ce chapitre, étant basée sur la notion de mesure d'un ensemble borné, ne s'appliquait qu'aux fonctions bornées[26]. Au contraire la méthode analytique indiquée au §20 s'applique presque sans modification à des fonctions non limitées supérieurement en valeur absolue.

Une fonction sera dite sommable si, quels que soient a *et* b*, l'ensemble des valeurs de* x *pour lesquelles on a*

$$a < f(x) < b$$

est mesurable. Nous distinguerons les fonctions sommables bornées, celles dont nous nous sommes occupés, jusqu'à présent, et les fonctions sommables non bornées.

Soit $f(x)$ une fonction sommable. Choisissons des nombres

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

variant depuis $-\infty$ ce jusqu'à $+\infty$ et tels que $m_i - m_{i-1}$ soit limité supérieurement en valeur absolue. Soit toujours e_i l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ égale m_i et e_i' l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$m_i < f(x) < m_{i+1}.$$

Considérons les deux sommes

$$\sigma = \Sigma m_i \cdot m(e_i) + \Sigma m_i \cdot m(e_i'), \quad \Sigma = \Sigma m_i \cdot m(e_i) + \Sigma m_{i+1} \cdot m(e_i').$$

dans lesquelles les signes Σ représentent des sommes de deux séries l'une à [29] termes positifs, l'autre à termes négatifs. Ces séries peuvent être convergentes ou divergentes; si celles qui figurent dans σ sont convergentes, c'est-à-dire si σ a un sens, Σ a un sens et inversement; et il en est de même quels que soient les m_i choisis.

[26] Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à peser le problème-de la mesure dés/ ensembles de points pour tous les ensembles, bornés ou non.

En raisonnant comme au paragraphe 20 on verra que les deux sommes $/sigma$ et $/Sigma$ tendent vers la même limite, indépendante des m_i choisis, quand on augmente le nombre des m_i de façon que le maximum de $m_i - mi - 1$ tende vers zéro. – Cette limite est l'intégrale.

Avec cette extension du sens des mots *fonction sommable* et *intégrale*, tous les énoncés donnés précédemment restent exacts[27] Mais il faut se rappeler qu'une fonction sommable non bornée n'a pas nécessairement une intégrale[28].

25. Le calcul de l'intégrale d'une fonction donnée présente les mêmes difficultés que le calcul de la mesure d'un ensemble donné.

La plupart des fonctions discontinues que l'on a considérées jusqu'à présent en Analyse étaient définies à l'aide de séries, il y a donc intérêt à connaître le théorème suivant.

Si une suite de fonctions sommables, ayant des intégrales $f_1, f_2, f_3, \dots$ *a une limite* f *et si* $|f - f_n|$ *reste, quel que soit* n, *inférieure à un nombre fixe* M, f *a une intégrale qui est la limite des intégrales des fonctions* f_n[29].

En effet on a:

$$f = f_n + (f - f_n)$$

Les deux fonctions du second membre ayant des intégrales il en est de même de f et l'intégrale de f et la somme des intégrales de f_n et $f - f_n$. Cherchons une limite supérieure de cette seconde intégrale.

Choisissons arbitrairement un nombre positif Σ. Soit e_n l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on n'a pas, pour toute valeur positive ou nulle [30] de p

$$|f - f_{n+p}| < \varepsilon,$$

e_n est mesurable.

Soit E l'ensemble mesurable dans lequel on prend les intégrales, on a:

$$\left|\int (f - f_n) dx\right| \leqslant M \cdot m(e_n) + \varepsilon[m(E) - m(e_n)].$$

Or chaque ensemble e_n contient tous les ensembles dont les indices sont plus grands et il n'existe aucun point commun à la fois à tous les e_n. Donc $m(e_n)$ tend vers zéro avec $1/n$ et

[27] Le premier des énoncés du § 22 demande cependant quelques explications. Si f et φ sont sommables $f + \varphi$ l'est et l'on a bien $\int(f + \varphi) = \int f + \int \varphi$ si $\int f$ et $\int \varphi$ ont un sens; mais $\int(f + \varphi)$ peut avoir un sens sans qu'il en soit de même de $\int f$ et $\int \varphi$.

[28] Il resterait à examiner le cas ou f devient infinie pour certaines valeurs de x. Si ces valeurs sont en nombre fini il suffit de définir l'intégrale en faisant abstraction des valeurs qui rendent f infinie, pour que les énoncés ordinaires ne soient pas changés.

[29] Le cas particulier le plus intéressant de ce théorème, celui où f et les f_i sont des fonctions continues, a déjà été obtenu, à l'aide de considérations toutes différentes par Mr. Osgood dans son Mémoire sur la convergence non uniforme (*American Journal*, 1894).

par suite il en de même de

$$\left|\int (f - f_n) dx\right|$$

Lorsque f est bornée la proposition peut s'énoncer ainsi: Lorsqu'une suite $f_1, f_2, \dots$ de fonctions sommables, limitées supérieurement en valeur absolue dans leur ensemble, a une limite f 'l'intégrale de f est la limite des intégrales des fonctions f_n.

Voici une autre forme de l'énoncé relatif au cas général:

Lorsque l'ensemble des restes d'une série convergente de fonctions ayant des intégrales est limité supérieurement en valeur absolue, la série est intégrable terme à terme.

Comme cas très particulier on a le théorème sur l'intégration des séries uniformément convergentes.

2 Intégrales indéfinies et fonctions primitives des fonctions d'une variable

26. On appelle intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$, ayant une intégrale définie dans un intervalle (α, β), une fonction $F(x)$ définie dans (α, β) et telle que, quels que soient a et b compris entre α a et β on ait:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

[31] De cette égalité on tire:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a).$$

Donc toute fonction ayant une intégrale définie admet une infinité d'intégrales indéfinies qui ne diffèrent que par une constante $F(a)$.

L'intégrale indéfinie est une fonction continue[30], cela est évident si la fonction $f(x)$ est bornée. Pour le démontrer dans le cas général reprenons les notations du paragraphe 24; a étant arbitrairement choisi il faut démontrer que dès que h est inférieur en valeur absolue à une certaine quantité on a:

$$|F(a+h) - F(a)| = \left|\int_a^{a+h} f(x) dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Nous allons, pour simplifier, supposer h positif.

Il existe *au plus* une infinité dénombrable de nombres m_i tels que les ensembles e_i correspondants aient une mesure non nulle, on pourra donc supposer que les m_i n'ont pas été

[30] On peut aussi ajouter qu'elle a une variation bornée; cette variation étant au plus égale à $\int |f(x)| dx$. La démonstration est la même que celle qu'emploie Mr. JORDAN (*Cours d'Analyse §81.* Ceci explique les résultats obtenus plus loin (§§, 30, 31, 32)

pris parmi ces valeurs exceptionnelles, c'est-à-dire que nous ferons $m(e_i) = 0$, ce qui simplifie les sommes σ et Σ.

Alors si l'on suppose $m_0 = 0$[31], on peut écrire

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \lim \left\{ \sum_0^{\infty} m_{i+1} m[e_i'(h)] + \sum_{-1}^{-\infty} m[e_i'(h)] \right\}$$

en désignant par $e_i'(h)$ la portion de e_i' comprise entre a et $a+h$. Considérons un système fixe de nombres m_i. Les deux séries du second membre ne varieront que si h varie et l'on peut supposer h assez petit pour que la valeur absolue d'un nombre fini quelconque de termes du second membre soit aussi petite que l'on veut. Donc on peut prendre h assez petit que les deux séries du second membre, qui sont l'une à termes positifs, l'autre à termes négatifs, soient aussi petites que l'on veut en valeur absolue.

[32] Mais pour passer à la limite il faut, entre les m_i choisis, introduire de nouveaux nombres; cette opération fait diminuer, en valeur absolue, les deux séries du second membre; donc il est bien démontré que $\int_a^{a+h} f(x)dx$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. L'intégrale indéfinie est donc bien une fonction continue.

27. Si M et m sont les maximum et minimum de $f(x)$ dans $(a, a+h)$ on a:

$$mh < \int_a^{a+h} f(x)dx < Mh$$

d'ou

$$m < \frac{F(a+h) - F(a)}{h} < M$$

donc pour $x = a$, si $f(x)$ est continue en ce point, $F(x)$ a une dérivée égale à $f(a)$.

Si $f(x)$ est continue pour toute valeur de x, $F(x)$ est l'une quelconque des fonctions qui admettent pour dérivée $f(x)$, c'est-à-dire l'une des *fonctions primitives* de $f(x)$.

Ainsi dans le cas des fonctions continues il y a identité entre la recherche des fonctions primitives et la recherche des intégrales indéfinies d'une fonction donnée. Ce résultat bien connu est encore vrai lorsqu'il s'agit d'une fonction dérivée intégrable au sens de Riemann[32]. Mais il existe des fonctions dérivées qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann[33]; une de ces fonctions étant donnée on ne peut pas calculer ses fonctions primitives à l'aide de l'intégration, au sens de Riemann.

Nous allons voir que toute fonction dérivée bornée admet une intégrale indéfinie qui est une de ses fonctions primitives; nous saurons donc calculer la fonction primitive, si elle existe, d'une fonction bornée donnée.

Relativement aux fonctions dérivées non bornées, nous démontrerons que si elles admettent

[31] Alors e_0 ne sera peut-être pas de mesure nul, mais cela n'a pas d'importance pour la suite.
[32] Voir Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*
[33] Mr. Volterra a le premier donné effectivement un exemple de ces fonctions (*Giornale de Battaglini*, t. XIX, 1881). Cet exemple est reproduit plus loin.

des intégrales il y a identité entre leurs fonctions primitives et leurs intégrales indéfinies.

[33] 28. La dérivée d'une fonction $f(x)$ est la limite quand h tend vers zéro de l'expression:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x)$$

laquelle, h étant fixe, représente une fonction continue; donc la dérivée est limite de fonctions continues, elle est sommable.

Supposons que la dérivée f' soit toujours inférieure en valeur absolue à M. En vertu du théorème des accroissements finis $\varphi(x) = f'(x+\theta h)$, donc les fonctions $f(x)$ sont bornées dans leur ensemble et par suite l'on a (§ 25):

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim \int_a^b \varphi(x)dx = \left[\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx\right]_a^b$$

donc

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Toute fonction dérivée bornée admet comme intégrales indéfinies ses fonctions primitives; ce résultat est encore vrai s'il s'agit de dérivée à droite, ou à gauche bornée; ou d'une limite vers laquelle tend $\varphi(x)$ pour certaines valeurs de h tendant vers zéro.

29. Pour appliquer ce qui précède, nous allons rechercher s'il existe des fonctions primitives pour la fonction définie de la manière suivante:

Soit un ensemble E fermé non dense dans toute portion de $(0,1)$ et de mesure non nulle. Soient (a,b) un intervalle contigu à E[34] et c le milieu de cet intervalle. La fonction

$$\varphi(x-a) = 2(x-a)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a}$$

s'annule une infinité de fois entre a et c; soit $a+d$ le point le plus voisin de c, entre a et c, pour lequel elle est nulle.

La fonction $f(x)$ dont nous allons nous occuper est nulle pour tous les points de E; dans chaque intervalle (a,b) contigu à E, elle est égale à $\varphi(x-a)$ entre a et $a+d$, nulle entre $a+d$ et $b-d$, égale à $-\varphi(b-x)$ entre $b-d$ et b.

[34] Cette fonction est continue dans chaque intervalle contigu à E, discontinue pour tous les points de E qui sont des points de discontinuité de seconde espèce.

De plus $f(x)$ est toujours comprise entre -3 et $+3$. Pour que $f(x)$ admette une fonction primitive, il faut d'abord qu'elle admette une intégrale définie dans l'intervalle $(0,1)$. Cette intégrale, si elle existe, est égale à l'intégrale prise dans E plus l'intégrale prise dans $C(E)$, à supposer qu'elles existent. Or l'intégrale dans E existe et est nulle; l'intégrale dans $C(E)$ existe aussi, car elle est la somme des intégrales prises dans les intervalles contigus à E, lesquelles

[34] C'est-à-dire un intervalle ne contenant pas de points de E et dont les extrémités sont points de E. – Cette expression est de Mr. Baire.

sont nulles.

D'après cela la fonction $F(x)$ nulle pour les points de E, et définie dans tout intervalle (a, b) contigu à E par les égalités

$$F(x) = (x-a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}, \text{entre } a \text{ et } a+d$$

$$F(x) = d^2 \operatorname{sen} \frac{1}{d}, \text{entre } a+d \text{ et b-d}$$

$$F(x) = (b-x)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{b-x}, \text{entre } b-d \text{ et } b$$

est égale à $\int f(x)dx$.

Donc si $f(x)$ a des fonctions primitives, $F(x)$ est l'une d'elles. Pour tous les points où $f(x)$ est continue, c'est-à-dire pour tous les points de $C(E)$, on a évidemment

$$F'(x) = f(x).$$

Soit a un point de E; si a est extrémité d'un intervalle contigu à E, situé à droite de a, $F(x)$ a évidemment une dérivée à droite nulle. Supposons qu'à droite de a se trouve une infinité de points de E, ayant a pour point limite. Soient α_i un de ces points, pour x supérieur à α_i le rapport

$$r(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

est en valeur absolue inférieur à

$$\frac{(x-\alpha_i)^2}{x-a} < x-a,$$

donc tend vers zéro quand x tend vers a.

[35] En tous les points de E, $F(x)$ a donc une dérivée à droite nulle, on verrait de même qu'elle a une dérivée à gauche nulle, et par suite pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1 on a:

$$F'(x) = f(x).$$

La fonction $f(x)$ est donc une fonction dérivée; elle n'est pas intégrable (au sens de Riemann) puisque l'ensemble de ses points de discontinuité a une mesure non nulle.

Cet exemple de fonction dérivée non intégrable au sens de Riemann est dû à Mr. Volterra, *Giornale de Battaglini*, tome XIX[35].

30. Les fonctions primitives que nous venons de trouver sont à variation bornée[36]. Nous

---

[35] Des séries uniformément convergentes, dont les termes sont des fonctions analogues à celle que nous venons de considérer, permettent à Mr. Volterra de donner des exemples de fonctions dérivées qui ne sont intégrables dans aucun intervalle. L'intégration terme à terme de ces séries nous donnera les fonctions primitives.

[36] Nous nous servirons ici de quelques unes des propriétés de ces fonctions (Voir Jordan, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1881 et *Cours d'Analyse* 2ème Edition, tome l). La plupart de ces propriétés sont reprises dans le chapitre suivant, de sorte que les paragraphes 30 à 35 pourraient être mis dans ce chapitre. L'ordre adopté dans le texte permet de réunir tout ce qui a trait à la recherche des fonctions

allons démontrer que: la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la dérivée (bornée ou non) d'une fonction dérivable existe est que cette fonction soit à variation bornée. S'il en est ainsi, la fonction est l'une des intégrales indéfinies de sa dérivée.

Puisque $f'(x)$ est sommable, pour rechercher son intégrale opérons comme au paragraphe 24. Nous supposerons tous les e_i de mesure nulle et de plus $m_0 = 0$, ce qui est possible si, au lieu de raisonner sur la fonction donnée $f(x)$, on raisonne sur $f(x) + Kx$, K ayant été convenablement choisi.

A chaque point x_0 de e'_i, on peut faire correspondre un intervalle (α, β) tel que si l'on a:

$$\alpha < a \leqslant x_0 \leqslant b \leqslant \beta$$

on ait aussi

$$m_i < r(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}.$$

Nous définirons (α, β) comme étant le plus grand intervalle possible de longueur au plus égale à un nombre donné σ et ayant x_0 pour milieu.

Si $m_i - m_{i-1}$ est toujours inférieur à η, $(b - a)r(a, b)$ est à $\eta(b - a)$ près égal à $f'(x_0)(b - a)$.

[36] Soit $E_i(\sigma)$ l'ensemble somme des intervalles qui correspondent aux points de e'_i. $E_i(\sigma)$ peut être considéré comme une somme d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres; si (a, b) est l'un de ces intervalles et si l'on a:

$$a < \alpha < \beta < b,$$

on a aussi

$$m_i < r(\alpha, \beta) < m_{i+1}$$

pourvu que, entre α et β, se trouve au moins un point de e'_i.

$E_i(\sigma)$ contient e'_i. Faisons tendre σ vers zéro et soit x_0 un point appartenant à une infinité d'ensembles $E_i(\sigma)$. $f'(x_0)$ est la limite des valeurs de $r(\alpha, \beta)$ relatives aux intervalles des $E_i(\sigma)$ qui contiennent x_0, donc x_0 est point de e_i, de e'_i ou de e_{i+1}. Par suite l'ensemble E_i, formé des points communs à une infinité de $E_i(\sigma)$ relatifs à des valeurs de σ tendant vers zéro, contient e'_i et des points de $e_i + e_{i+1}$, il a donc même mesure que e'_i. De plus comme chaque $E_i(\sigma)$ contient les ensembles relatifs aux valeurs plus petites de σ, $m(E_i)$ est la limite de $m[E_i(\sigma)]$. On peut donc choisir les nombres

$$\ldots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

---

primitives.

de manière que la somme D soit aussi petite que l'on veut,

$$D = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot (m[E_i(\sigma_i)] - m(E_i))\,.$$

Ceci posé, remarquons que $\int f'dx$ et $\int |f'|dx$ existent en même temps, de sorte que $\int f'dx$ existe si la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m(e'_i) = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m(E_i)$$

est convergente, c'est-à-dire s'il en est de même pour

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m[E_i(\sigma_i)].$$

On peut toujours, parmi les intervalles formant les $E_i(\sigma_i)$, en choisir un nombre fini de manière que la contribution de ces intervalles A dans V soit aussi grande que l'on veut si V est divergente, et aussi près que l'on veut de la valeur de V si cette série est convergente. Supprimons assez de ces intervalles A, sans changer l'ensemble somme de ces intervalles, pour qu'aucun [37] des intervalles conservés ne soit à l'intérieur d'autres intervalles conservés. La contribution dans V des intervalles supprimés est moindre que D.

Considérons deux intervalles empiétant l'un sur l'autre (a_i, b_i), (a_j, b_j) relatifs à e'_i et $e'j$. Supposons que l'on ait

$$a_i < a_j < b_i < b_j.$$

Entre a_j et b_j il ne peut y avoir à la fois des points de e'_i et e'_j sans quoi $r(a_j + \varepsilon, b_i - \varepsilon)$ serait à la fois compris entre m_i et m_{i+1} et entre m_j et m_{j+1}. On peut donc trouver entre a_j et b_i un point c tel qu'entre a_i et c se trouve un point de e'_i et entre c et b_j un point de e'_j. Alors on a:

$$|f(c) - f(a_i)| + |f(b_j) - f(c)| = (c - a_i)|r(a_i, c)| + (b_j - c)|r(c, b_j)|.$$

Donc le premier membre, c'est-à-dire la variation de $f(x)$ entre a_i et b_j quand on considère la division

$$a_i \qquad c \qquad b_j,$$

est égal à la contribution dans V des deux intervalles $(a_i, b_i), (a_j, b_j)$ à moins de $(b_i - a_j)|m_j - m_i| + \eta(b_j - a_i)$ près. La quantité $(b_i - a_j)|m_j - m_i|$ est inférieure à la contribution dans D de l'intervalle (a_j, b_i).

En continuant ainsi, on est conduit à considérer une suite de valeurs croissantes $x_0 x_1 x_2 \ldots$ en nombre fini. La somme $\Sigma|f(x_i) - f(x_{i+1})|$ diffère de la contribution des intervalles A dans V de moins de $D + \eta m(A)$. Or cette somme est inférieure à la variation totale de $f(x)$. Donc la limite de V c'est-à-dire $\int |f'|dx$ est inférieure ou au plus égale à la variation totale de $f(x)$. C'est-à-dire que si $f(x)$ est à variation bornée $\int |f'|dx$ existe et est inférieure à la variation de

$f(x)$.

31. Supposons que l'intégrale $\int |f'|dx$ existe. Enfermons les points de e_i dans une infinité dénombrable d'intervalles A_i, on peut choisir $m(A_i)$ aussi petite que l'on veut. A chaque point x_0 de e_i faisons correspondre le plus grand intervalle (α, β) de longueur inférieure à $\sigma' i$ ayant x_0 pour milieu, tout entier à l'intérieur de A_i; et tel que

$$\alpha < a \leqslant x_0 \leqslant b < \beta$$

entraine

$$m_i - \varepsilon_i < r(a, b) < m_i + \varepsilon_i.$$

[38] Soit $e_i(\sigma'_i)$ la somme de ces intervalles. A condition de choisir convenablement les σ'_i et ε_i, la somme P sera aussi petite qu'on le voudra,

$$D' = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| \cdot m[e_i(\sigma'_i)].$$

Chaque $E_i(\sigma_i)$ ou $e_i(\sigma'_i)$ est somme d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. Si $f(x)$ est définie dans (a, b), chaque point intérieur à (a, b) est intérieur à l'un au moins de ces intervalles et de plus a et b sont des extrémités de tels intervalles, donc, d'après un théorème sur les ensembles, on peut choisir parmi les intervalles qui forment les $E_i(\sigma_i)$ et les $e_i(\sigma'_i)$ un nombre fini d'intervalles B tel que tout point intérieur à (a, b) soit intérieur à l'un des B.

Nous supposerons ce choix fait de façon qu'aucun intervalle conservé ne soit intérieur à d'autres intervalles conservés. La contribution dans V des intervalles des $E_i(\sigma_i)$ non employés est au plus égale à $D + D_i$, D étant l'intégrale de $|f'|$ dans l'ensemble des $e_i(\sigma'_i)$.

En raisonnant sur les B comme sur les A, on est conduit à considérer des nombres

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b.$$

La somme $\Sigma|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ est égale à la contribution dans V des intervalles conservés provenant des $E_i(\sigma_i)$ à moins de $D + D' + \eta(b - a)$ près.

Or deux nombres x_i consécutifs proviennent d'un même intervalle appartenant à l'un des $E_i(\sigma_i)$ ou des $e_i(\sigma'_i)$, lequel peut être décomposé en intervalles de longueurs au plus égales à $2\sigma_i$ ou $2\sigma'_i$, la somme des variations correspondantes à une telle division diffère toujours de V de moins de $2D + D_i + D' + \eta(b - a)$. Or par l'introduction de ces nouveaux pointe de division, en prenant le maximum σ des σ_i et σ'_i assez petit, on rend la somme $\Sigma|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ aussi voisine que l'on veut de la variation totale de $f(x)$ dans (a, b).

De là résulte que si $\int f'(x)dx$ existe, la fonction $f(x)$ est à variation bornée, cette variation étant égale à la valeur de l'intégrale $\int |f|dx$.

32. Nous avons ainsi trouvé la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $|f'|$ existe, et nous connaissons sa signification.

Mais le raisonnement précédent fournit d'autres résultats. Reprenons en effet ce raisonnement et portons notre attention sur les ensembles $e_i, E_i, E_i(\sigma)$, etc. à indices positifs.

[39] Nous voyons que la variation positive totale de $f(x)$ entre a et x est égale à l'intégrale de $f'(x)$ étendue à l'ensemble des points pour lesquels f est positive, c'est-à-dire à l'intégrale

$$p(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' + |f'|)dx.$$

De même pour la variation négative on a:

$$-n(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' - |f'|)dx.$$

Et comme l'on a:

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$$
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx.$$

Ainsi une fonction $f(x)$ étant donnée nous savons reconnaître si elle est la dérivée d'une fonction à variation bornée et, s'il en est ainsi, nous savons trouver ses fonctions primitives.

Si $f(x)$ est bornée, ses fonctions primitives s'il en existe sont à variation bornée, nous pouvons les trouver.

Mais l'intégration, telle que nous l'avons définie, ne nous permet pas de savoir si une fonction donnée a des fonctions primitives à variation non bornée[37].

33. La fonction $f(x)$ donnée par $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue et à variation non bornée.

[40] En effet

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) &= 0 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) &= (-1)^k \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

donc la somme des variations est $\Sigma \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$, série divergente.

[37] Ce dernier résultat était évident puisque (Note du §26) toute intégrale indéfinie est à variation bornée. La démonstration qui précède montré que, pour obtenir une fonction $f(x)$ à variation non bornée connaissant sa dérivée, par une méthode analogue à celle que nous avons employée quand f est à variation bornée, il faudrait mettre un certain ordre dans les termes des séries telles que $\Sigma m_i m[E_i(\sigma_i)]$, $\Sigma m_i m(e_i')$. La généralisation de la notion d'intégrale indéfinie donnée dans le paragraphe suivant, permet dans quelques cas d'obtenir ce résultat; aussi elle donnera des fonctions primitives à variation non bornée.

Cette fonction admet une dérivée $f'(x)$,

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, \text{pour } x \neq 0$$

et

$$f'(0) = 0.$$

$f'(x)$ nous fournit un exemple de fonction non bornée, sommable, n'ayant pas d'intégrale, $f'(x)$ étant donnée, les méthodes précédentes ne permettent pas de trouver $f(x)$.

Il est intéressant de remarquer que la définition classique de l'intégrale d'une fonction devenant infinie dans le voisinage d'un point, permet de trouver $f(x)$ connaissant $f'(x)$. C'est que, dans le cas où la fonction à intégrer n'est pas bornée, la définition que nous avons adoptée n'est pas une généralisation de la définition classique, elle est autre que cette définition, mais concorde avec elle lorsque toutes deux s'appliquent. Il serait d'ailleurs très facile de généraliser la notion d'intégrale définie de façon que la définition classique et celle que nous avons adoptée deviennent des cas particuliers d'une définition plus générale. Pour simplifier les énoncés qui suivront, nous conserverons cependant au mot *intégrale définie* le sens précédemment adopté, mais nous étendrons le sens du mot *intégrale indéfinie*. Nous avons vu que toute intégrale indéfinie était continue. Si maintenant nous considérons cette propriété comme l'une des parties de la définition des intégrales indéfinies, nous sommes conduits à dire que:

Une fonction $f(x)$ *définie dans* (α, β) *a dans cet intervalle une intégrale indéfinie* $F(x)$, *s'il existe une fonction continue* $F(x)$, *et une seule à une constante additive près, telle que l'on ait*:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

[41] *pour tous les systèmes de nombres* a *et* b *choisis, entre* α *et* β *de manière que le second membre ait un sens*[38].

34. L'intégrale indéfinie d'une fonction dérivée est toujours une de ses fonctions primitives puisqu'une fonction primitive est continue et, d'après ce que nous avons dit, vérifie bien l'égalité

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

toutes les fois que le second membre a un sens.

Nous saurons ainsi trouver la fonction primitive de la fonction $f'(x)$ du paragraphe 30.

Mais il est facile de former des fonctions dérivées n'ayant pas d'intégrales indéfinies.

Soit $\varphi(x)$ une fonction dérivable définie entre 0 et 1 s'annulant pour 0 et 1 ainsi que sa dérivée, ayant une variation bornée dans tout intervalle *intérieur* à $(0, 1)$, ayant une variation non bornée dans tout intervalle dont une des extrémités est 0 ou 1.

[38] Comparer cette définition avec celle que donne Mr. Jordan de l'intégrale définie d'une fonction non bornée. *Cours d'Analyse*, 2. Edition, Tome II, p. 46 à 94.

On sait trouver $\varphi(x)$ quand on connaît $\varphi'(x)$, car $\varphi(x)$ est celle des intégrales indéfinies de $p'(x)$ qui s'annule pour $x = 0$.

Considérons un ensemble E fermé non dense dans toute partie de $(0, 1)$ et de mesure non nulle; par exemple, celui que l'on obtient en retranchant de $(0, 1)$ une suite indéfinie d'intervalles dont les milieux sont les points d'abscisses rationnelles et dont la somme des longueurs est inférieure à 1.

Définissons une fonction $f(x)$ continue, par la condition d'être égale à $(b-a)^2\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ dans tout intervalle (a, b) contigu à l'ensemble E. $f(x)$ est alors nulle en tous les points de E. Cette fonction est dérivable, sa dérivée est nulle pour les points de E, égale à $(b-a)\varphi'\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ pour les points d'un intervalle contigu à E.

Cette dérivée $f'(x)$ n'admet pas d'intégrale indéfinie. En effet si elle en admettait, ses intégrales indéfinies seraient $f(x) + c^{te}$. Mais soit $\psi(x)$ la fonction qui représente la mesure de l'ensemble de ceux des points de E qui [42] sont dans l'intervalle $(0, x)$; $\psi(x)$ est une fonction continue, constante dans tout intervalle contigu à E, donc $f(x) + \psi(x)$ satisfait à l'égalité

$$[f(x) + \psi(x)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f'(x)dx$$

pour tous les systèmes α, β pour lesquels le second membre a un sens.

Les définitions que nous avons données ne suffisent donc pas pour qu'il soit possible de parler d'intégrales indéfinies de $f'(x)$.

Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est pas complètement résolu[39].

35. Soit $f(x)$ une fonction continue; on peut donner à h une suite de valeurs tendant vers zéro telles que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ait une limite. L'ensemble des nombres ainsi définis, correspondant aux valeurs positives de h, admet une limite supérieure Λ_d et une limite inférieure λ_d qui sont les extrêmes oscillatoires à droite de la fonction $f(x)$, pour le point x_0. De même on définit Λ_g, λ_g. Ces quatre nombres sont les nombres dérivés; dans certains problèmes ils rendent les mêmes services que la dérivée[40].

Le problème suivant: *trouver une fonction connaissant l'un de ses nombres dérivés*[41], est donc une généralisation du problème que nous venons de traiter.

Quelques cas particuliers de ce problème se résolvent à l'aide de l'intégration au sens de

[39] On peut dire que nous savons résoudre ce problème lorsque l'intervalle de variation de x peut être considéré comme somme d'un ensemble non dense E et de l'ensemble des intervalles (α, β) contigus à E, l'ensemble E étant réductible et la fonction proposée ayant une intégrale indéfinie $F(x)$ dans chaque intervalle (α, β). Même si E n'est pas réductible le problème peut être résolu, à condition que la fonction soit intégrable dans E et que la série des quantités $[F(\beta) - F(\alpha)]$ soit absolument convergente. Il en est ainsi dans l'exemple précédent, mais ce n'est pas le cas général.

[40] Voir Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

[41] Ce problème a un sens; c'est-à-dire que toutes les fonctions qui ont un même nombre dérivé donné ne diffèrent que par une constante (Volterra. *Sui principii del Calcolo Intégrale.* Giornale de Battaglini, XIX).

RIEMANN (DINI, loc. cit.). L'intégration, telle que nous [43] l'avons définie, permettrait de la résoudre dans des cas plus étendus. Nous nous bornerons aux indications qui suivent.

Tout d'abord, si l'un des quatre nombres dérivés est toujours fini, Λ_d par exemple, c'est une fonction sommable. En effet cherchons l'ensemble E des valeurs de x pour lesquelles Λ_d est supérieur à un nombre donné M. Donnons à h toutes les valeurs positives rationnelles inférieures à ε_i; à chacune d'elles correspond une fonction $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x,h)$. A $\varphi(x,h)$ correspond un ensemble mesurable $E(h)$ formé de tous les points pour lesquels on a:

$$\varphi(x,h) > M.$$

Soit $E(\varepsilon_1)$ l'ensemble somme de tous les $E(h)$; il est mesurable.

A $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ correspondent $E(\varepsilon_2), E(\varepsilon_3), \ldots$

Si les ε tendent vers zéro, l'ensemble commun à tous les $E(\varepsilon_i)$ qui est mesurable contient l'ensemble cherché, plus des points pour lesquels on a: $\Lambda_d = M$. Cela suffit pour qu'on en conclue que la fonction Λ_d est sommable.

Supposons maintenant que l'un des quatre nombres dérivés soit borné, auquel cas tous les autres le sont[42] Λ_d aura alors une intégrale.

Considérons une suite de nombres positifs décroissant jusqu'à zéro $h_1, h_2, \ldots$ et les fonctions

$$\varphi(x,h_i) = \frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}.$$

A chaque valeur de x correspond une valeur n telle que, pour $i \geqslant n$, on a:

$$\varphi(x,h_i) < \Lambda_d(x) + \varepsilon.$$

Soit E_k l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $n \leqslant k$. Le complémentaire $C(E_k)$ pris par rapport à l'intervalle considéré a une mesure qui tend vers zéro avec $1/k$, et pour les points de cet ensemble on a:

$$|\varphi(x,h_k) - \Lambda_d(x)| \leqslant M$$

[44] si M est la limite supérieure de la valeur absolue de Λ_d. Donc[43]

$$\int_a^b \varphi(x,h_k)dx < \int_a^b \Lambda_d(x)dx + \varepsilon m(E_k) + Mm[C(E_k)].$$

Evaluons le premier membre

$$\int_a^b \varphi(x,h_k)dx = \int_a^b \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k} = f(b+\theta h_k) - f(a+\theta' h_k).$$

---

[42] Car si Λ_d est toujours compris entre A et B, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est toujours compris entre A et B (voir DINO, *Fondamenti*, etc.).

[43] Pour que $\int_a^b \varphi(x,h_k)dx$ ait um sens il faut que $f(x)$ soit définie dans $a, b+h_k$. Il suffit de définir $f(x)$ comme constante et égale à $f(b)$ pour x plus grand que b.

Lorsque k augmente indéfiniment cette quantité tend vers $f(b) - f(a)$, on a donc

$$f(b) - f(a) < \int_a^b \Lambda_d(x)dx.$$

De même on trouverait

$$\int_a^b \lambda_d(x)dx < f(b) - f(a).$$

Donc *si les deux nombres dérivés à droite (ou à gauche) d'une fonction* $f(x)$ *sont bornés et ont même intégrale, leurs intégrales indéfinies sont égales à* $f(x)$ *à une constante additive près.*

3 Intégrales définies de fonctions de plusieurs variables

36. Il n'y a aucune difficulté à étendre les résultats obtenus aux fonctions de plusieurs variables.

Une fonction f sera dite sommable si l'ensemble des points pour lesquels on a:

$$a < f < b$$

est mesurable, quels que soient les nombres a et b.

[45] Les fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables sont sommables. La somme, le produit de deux fonctions sommables, la limite d'une suite de fonctions sommables sont des fonctions sommables. Donc les fonctions discontinues que Mr. BAIRE appelle fonctions de première classe, de seconde classe, etc. sont sommables.

Les fonctions de n variables continues par rapport à chacune d'elles sont de $n-1$ ème classe au plus[44], donc elles sont sommables.

Soit f une fonction sommable. Considérons des nombres

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

tels que $m_i - m_{i-1}$ ait un maximum η.

$f = m_i$ pour les points d'un ensemble mesurable e_i; $m_i < f < m_{i+1}$ pour les points d'un ensemble mesurable e'_i. Les deux sommes

$$\sigma = \Sigma m_i m(e_i) + \Sigma m_i m(e'_i), \qquad \Sigma = \Sigma m_i m(e_i) + \Sigma m_{i+1} m(e'_i)$$

ont en même temps un sens ou n'en ont pas.

Si elles ont un sens, il en est de même quels que soient les m_i choisis et ces deux sommes tendent vers une même limite quand η tend zéro.

Cette limite est l'intégrale de f. σ et Σ ont un sens lorsque f est bornée de sorte que *toute*

[44] Voir LEBESGUE. *Sur l'approximation des fonctions.* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1898).

fonction sommable bornée a une intégrale.

Les définitions qui précèdent s'appliquent, que la fonction soit définie dans un domaine ou pour les points d'un ensemble, lequel devra nécessairement être mesurable pour que la fonction soit sommable.

Soit une fonction f bornée définie dans un ensemble E mesurable. Si f n'est pas sommable il existe une infinité de fonctions sommables bornées φ telles que l'on ait toujours

$$f(x) > \varphi(x).$$

Soit $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots$ une série de ces fonctions dont les intégrales tendent vers la limite supérieure des intégrales des fonctions φ. Soit $\psi(x)$ une fonction égale, pour chaque valeur de x_0 à la limite supérieure des nombres $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0) \dots$. On démontrera facilement que $\psi(x)$ est sommable. Son intégrale n'est pas inférieure aux intégrales des fonctions $\varphi_i(x)$ et comme $\psi(x)$ [46] est une fonction $\varphi(x)$ l'integrale de $\psi(x)$ est exactement égale à la limite supérieure des intégrales des fonctions $\varphi(x)$.

Donc, étant donnée une fonction bornée f, il existe une fonction sommable ψ non supérieure à f et dont l'intégrale est la limite supérieure des intégrales des fonctions sommables non supérieures à f. *C'est l'intégrale inférieure de* f.

On définirait de même l'intégrale supérieure[45].

37. Nous allons rechercher si l'on peut ramener le calcul d'une intégrale multiple à des calculs d'intégrales simples. En nous bornant au cas de deux variables nous allons essayer de généraliser la formule classique

$$\int\int f dx dy = \int \left(\int f dy \right) dx.$$

Le cas le plus simple que nous ayons à examiner correspond à $f = 1$. Nous avons alors à évaluer la mesure superficielle d'un ensemble en fonction des mesures linéaires de ses sections. Les considérations développées aux paragraphes 18 et 19 résolvent un cas particulier de ce problème.

Soit E un ensemble plan mesurable. Nous désignerons par $E(x_0)$ l'ensemble des points de E dont l'abscisse est x_0, c'est-à-dire la section de E par $x = x_0$. $E(x_0)$ n'est pas nécessairement mesurable, s'il existe des ensembles de points sur une droite non mesurables linéairement, puisque tout ensemble borné de points sur une droite est mesurable superficiellement. Mais $E(x_0)$ sera mesurable (B) linéairement si E est mesurable (B) superficiellement. Or on sait que E contient un ensemble mesurable (B) $E_1(x_0)$ de mesure $m(E)$, la mesure de $E_1(x_0)$ sera donc au plus égale à la mesure intérieure de $E(x_0)$; c'est-à-dire au plus égale à l'intégrale inférieure, prise sur $x = x_0$, de la fonction φ égale à 1 pour les points de E, nulle pour les autres points.

[45] Toutes ces définitions s'interprètent géométriquement comme pour le cas d'une variable. S'il y a n variables, il faut considérer un espace à $n + 1$ dimensions.

Donc
$$m_l[E_1(x_0)] \leqslant \int_{inf} \varphi(x_0, y)dy.$$

En se reportant au paragraphe 7 où a été démontrée l'existence de E_1, on voit que E_1 est défini comme formé des points communs à tous les ensembles de la suite $A_1, A_2, \ldots$; l'ensemble A_i étant somme d'une infinité dénombrable de rectangles n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les côtés sont parallèles à $0x$ et $0y$. A_i contient $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots$

[47] Or $m_l[A_i(x)]$ est la somme des mesures des sections par la droite d'abscisse x des rectangles C_{ij} qui composent A_i. On a donc

$$m_l[A_i(x)] = \sum_j m_l[C_{ij}(x)].$$

Dans cette série les restes sont limités supérieurement en valeur absolue, car E_1 étant borné tous les A_i sont situés dans un même domaine borné, et par suite l'ensemble (par rapport à i et à x) des nombres $m_l[A_i(x)]$ est borné. Cette série est donc intégrable terme à terme, §25.

L'intégrale de $m_l[C_{ij}(x)]$ est l'aire de C_{ij}, donc

$$m_s(A_i) = \int m_l[A_i(x)]dx.$$

Or les limites pour i infini des nombres $m_l[A_i(x)]$, $m_s(A_i)$ sont $m_l[E_1(x)]$ et $m_s(E_1)$ et comme l'ensemble de ces nombres est borné, on a:

$$\int m_l[E_1(x)]dx = \lim_{i=\infty} \int m_l[A_i(x)]dx = \lim_{i=\infty} m_s(A_i) = m_s(E_i)^{[46]}.$$

On peut donc en conclure que:

$$m_s(E) \leqslant \int_{inf.} m_{l,int.}[E(x)]dx$$

et aussi que
$$m_s(E) \leqslant \int_{inf.} \left(\int_{inf.} \varphi(x, y)dy \right) dx.$$

De la même façon on démontrera que:

$$m_s(E) \geqslant \int_{sup.} \left(\int_{sup.} \varphi(x, y)dy \right) dx.$$

[46] Ce raisonnement peut être interprété de la façon suivante: $m_s[E_1(x)]$ est une fonction de seconde classe au plus.

De là on conclut que l'on a:

$$m_s(E) = \int_{inf.} \left(\int_{inf.} \varphi(x,y)dy \right) dx = \int_{sup.} \left(\int_{sup.} \varphi(x,y)dy \right) dx.^{[47]}.$$

[48] Pour la fonction $f = 1$ définie seulement dans l'ensemble sommable E dont les sections ne sont peut-être pas toutes mesurables

$$\int\int^{E} fdxdy = \int_{inf.int}^{e} \left(\int_{inf.int.}^{E(x)} fdy \right) dx = \int_{sup.ext}^{e} \left(\int_{sup.ext.}^{E(x)} fdy \right) dx$$

l'intégrale par rapport à x étant étendue à l'ensemble e projection de E sur $0x$, la seconde à l'ensemble $E(x)$. Mais ces deux ensembles ne sont peut-être pas mesurables linéairement. Le signe $\int_{inf.int}^{A}$ indique la limite supérieure des intégrales inférieures de f étendues aux ensembles mesurables contenus dans A. L'égalité précédente peut encore s'écrire

$$m_s(E) = \int_{inf.int}^{e} m_{l,int.}[E(x)]dx = \int_{sup.ext}^{e} m_{l,ext.}[E(x)]dx.$$

38. La formule trouvée pour exprimer $\int\int_E fdxdy$ est générale, elle s'applique à toutes les fonctions sommables bornées.

Désignons par $\varphi(x,y)$ une fonction égale à f pour les points de E, nulle pour les autres points. Si E est tout entier intérieur au rectangle $OACB$ dont les côtés OA et OB sont portés par ox et oy, la formule à démontrer est équivalente à la suivante

$$\int\int_{OACB} \varphi(x,y)dxdy = \int_{O,inf.}^{A} \left(\int_{O,inf.}^{B} \varphi(x,y)dy \right) dx = \int_{O,sup.}^{A} \left(\int_{O,sup.}^{B} \varphi(x,y)dy \right) dx.$$

C'est cette formule que nous allons démontrer.

Soient $m_0, m_1, \dots m_n$ les divisions de l'intervalle de variation de $\varphi(x,y)$. Désignons par $\varphi_p(x,y)$ la fonction égale à φ pour les points de e_p (notations du §19), nulle pour les autres points, et par $\varphi'_p(x,y)$ la fonction égale à φ pour les points de e'_p, nulle pour les autres points.

On a:

$$\int\int \varphi(x,y)dxdy = \sum_p \int\int \varphi_p(x,y)dxdy + \sum_p \int\int \varphi'_p(x,y)dxdy$$

[47] Jusqu'ici les intégrales sont étendues à certains segments des axes $0x$ et $0y$.

[49] $\iint \varphi_p(x,y)dxdy$ est égale à $m_p \cdot m(e_p)$ et, d'après le paragraphe précédent, on a:

$$\iint \varphi_p(x,y)dxdy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi_p(x,y)dy \right) dx,$$

$\iint \varphi'_p(x,y)dxdy$ est comprise entre $m_p m(e'_p)$ et $m_{p+1}m(e'_p)$; d'ailleurs si l'on remplace φ'_p par une fonction ψ, égale à m_p ou m_{p+1} en tous les points où φ_p est différente de zéro, nulle quand φ'_p est nulle, on modifie l'intégrale de moins de $(m_{p+1}-m_p)m(e'_p)$. De plus les deux expressions

$$\int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \psi dy \right) dx \qquad \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi' dy \right) dx$$

diffèrent aussi de moins de $(m_{p+1}-m_p)m(e'_p)$. Donc, à moins de $2(m_{p+1}-m_p)m(e'_p)$ près, on a:

$$\iint \varphi'_p(x,y)dxdy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x,y)dy \right) dx.$$

Soit η le maximum de $m_{p+1} - m_p$; à moins de $2\eta m(OACB)$ près on aura

$$\iint \varphi(x,y)dxdy = \sum_p \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x,y)dy \right) dx + \sum_p \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x,y)dy \right) dx.$$

Or on a:

$$\int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x,y)dy \right) dx \leqslant \sum_p \left\{ \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi_p(x,y)dy \right) dx + \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x,y)dy \right) dx \right\}.$$

On a donc, quel que soit η:

$$\iint \varphi(x,y)dydx \leqslant \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x,y)dy \right) dx + 2\eta \cdot m(OABC).$$

[50] De cette inégalité et de l'inégalité analogue relative aux intégrales supérieures, résulte la formule annoncée.

39. Si la fonction donnée est telle que tous les ensembles e'_p soient mesurables (B), auquel cas on pourra dire que la fonction est sommable (B), la formule se simplifie et devient

$$\iint_{OACB} \varphi(x,y)dxdy = \int_O^A \left(\int_O^B \varphi(x,y)dy \right) dx.$$

C'est la formule classique. On sait que cette formule doit être remplacée par une formule plus compliquée, analogue à celle que nous avons obtenue, quand on s'occupe de l'intégration, au sens de RIEMANN, appliquée dans toute sa généralité[48].

Parmi les fonctions sommables (B) on peut citer les fonctions continues, les limites de

[48] Voir JORDAN (loc. cit.) §§ 56, 57, 58.

fonctions continues ou fonctions de première classe, les limites des fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe, et d'une manière générale toutes les fonctions de classe n, n étant fini.

En particulier la formule classique simple est applicable aux fonctions de n variables continues par rapport à chacune d'elles.

Cette formule est aussi applicable aux fonctions f''_{xy}, f''_{yx}[49] si elles existent et sont bornées.

Donc on a:

$$f(x,y)-f(0,y)-f(x,0)+f(0,0)=\int_0^x\left(\int_0^y f''_{xy}dy\right)dx=\int\int f''_{xy}dxdy.$$

Cette formule résout le problème qui, dans le cas de deux variables, est l'analogue de celui concernant la recherche des fonctions primitives.

40. On peut étendre quelques-uns des résultats précédents aux fonctions non bornées.

Une fonction non sommable non bornée peut avoir une intégrale inférieure et une intégrale supérieure. Sans qu'il soit nécessaire de reprendre les raisonnements précédents on voit que l'on a:

$$\int\int\varphi(x,y)dxdy=\int_{inf.}\left(\int_{inf.}\varphi(x,y)dy\right)dx=\int_{sup.}\left(\int_{sup.}\varphi(x,y)dy\right)dx$$

[51] toutes les fois que les intégrales qui interviennent dans cette formule ont un sens. Il en est de même pour la formule classique

$$\int\int\varphi(x,y)dxdy=\int\left(\int\varphi(x,y)dy\right)dx.$$

Les raisonnements employés dans ce chapitre ont conduit à une généralisation de la notion d'intégrale définie.

Pour qu'une telle généralisation puisse servir il faut qu'elle satisfasse à certaines conditions que l'on aperçoit facilement et qu'on peut imposer a priori.

Voici quelques unes de ces conditions. Il faut que l'on ait:

$$\int_a^c=\int_a^b+\int_b^c,\qquad\int f+\varphi=\int f+\int\varphi.$$

Il faut que la définition adoptée contienne comme cas particulier celle de RIEMANN.

Il faut qu'il n'y ait pas de différences notables entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables.

Enfin, si l'on veut que l'intégration permette de résoudre le problème fondamental du calcul intégral: trouver une fonction connaissant sa dérivée, il faut que l'intégrale définie d'une fonction dérivée, considérée comme fonction de sa limite supérieure, soit une fonction primitive

[49] Car elles sont de seconde classe au plus.

de f.

La définition que j'ai adoptée, au moins pour le cas où la fonction à intégrer est bornée, remplit bien toutes ces conditions. Mais ces conditions ne suffisent pas pour définir l'intégrale d'une fonction bornée (sauf dans le cas où la fonction est une somme algébrique de fonctions intégrables au sens de RIEMANN et de fonctions dérivées), de sorte que les méthodes du premier chapitre[50] n'ont pu être employées.

[52] Ne pouvant démontrer que la définition proposée était la seule remplissant les conditions imposées, j'ai essayé de montrer qu'elle était naturelle et qu'au point de vue géométrique elle apparaissait presque comme nécessaire.

J'ai essayé de plus de montrer qu'elle était utile: elle permet en effet de résoudre le problème fondamental du calcul différentiel dans tous les cas où la fonction dérivée est bornée, et, comme conséquence, elle permet d'intégrer des équations différentielles qui se ramènent à des quadratures. Par exemple, $f(x)$ étant une fonction bornée quelconque, nous saurons reconnaître si l'équation

$$y' + ay = f(x)$$

admet des solutions et, si elle en admet, les trouver[51].

Dans les chapitres suivants, où il est question des notions de longueur et d'aire, on trouvera des applications géométriques de l'intégration.

[50] Ces méthodes sont analogues à celles de Mr. DRACH (Essai sur une théorie générale de l'intégration – Introduction à l'Etude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure). Voir à ce sujet la note 1, page 48 de l'ouvrage de Mr. BOREL. Voir aussi HADAMARD, *Géométrie Elémentaire*, 1.ère partie, note D.

[51] Cette remarque conduit à des problèmes intéressants. Par exemple, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant bornées, toutes les solutions de l'équation

$$y' + f(x)y = \varphi(x)$$

sont-elles comprises dans la formule classique $y = \int \varphi(x)e^{\int f(x) fx}dx \cdot e^{-\int f(x)dx}$?

CHAPITRE 3

Longueur des courbes

41. Nous nous proposons dans ce chapitre de définir la longueur d'une courbe plane ou gauche[52].

Ces mots – longueur d'une courbe – sont d'un emploi constant dans le langage usuel. On sait par exemple mesurer la longueur d'une route, d'une rampe d'escalier. Supposons que l'on effectue cette mesure à l'aide d'une règle rigide; le procédé employé montre que l'on appelle ordinairement longueur d'une courbe, ou plus exactement valeur approchée de cette longueur, la [53] longueur, c'est-à-dire la somme des longueurs des côtés de lignes polygonales qui se confondent avec la courbe au degré de précision que l'on peut atteindre.

Lorsque l'on raisonne sur la longueur d'une courbe comme sur un nombre déterminé, on fait l'hypothèse que, par des mesures convenables, on obtient des valeurs approchées ayant une limite que l'on appelle la longueur de la courbe considérée.

La longueur d'une courbe C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

est ainsi définie comme limite des longueurs de lignes polygonales tendant uniformément vers la courbe, c'est-à-dire que les coordonnées de la p-ième de ces lignes C_p s'expriment par

$$x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

f_p, φ_p, ψ_p tendant uniformément vers f, φ, ψ.

Nous dirons que C est la limite des C_p.

Si, quelle que soit la suite de lignes polygonales tendant vers une courbe C, la suite correspondante des longueurs avait une limite, qui serait par conséquent indépendante des lignes polygonales choisies, ce qui précède suffirait à définir la longueur de la courbe C. Mais il n'en est pas ainsi et l'on peut choisir les lignes polygonales de façon que leurs longueurs augmentent indéfiniment.

Donner une définition de la longueur d'une courbe, c'est donc dire quelle suite de lignes polygonales on choisit.

[52] Une courbe gauche se définit comme ume courbe plane à l'aide de trois équations au lieu de deux.

D'après Mr. PEANO[53], les postulats qu'admettait Archimède équivalent à la définition suivante:

La longueur d'un arc de courbe plane convexe est la valeur commune de la limite supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites et de la limite inférieure des circonscrites.

Archimède démontre d'ailleurs l'identité des limites dans les cas qu'il étudie.

La définition ordinairement adoptée est la suivante:

[54] La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans la courbe quand le nombre des côtés de cette ligne augmente indéfiniment de façon que la longueur maximum des côtés de cette ligne tende vers zéro[54].

Mr. PEANO adopte la première partie de la définition d'Archimède: la longueur d'une courbe est la limite supérieure des lignes polygonales inscrites.

L'identité de ces définitions se démontre facilement, elle résulte d'ailleurs des résultats que nous allons obtenir.

42. Si l'on veut qu'il y ait quelque analogie entre le sens vulgaire et le sens mathématique du mot longueur, il ne faut essayer de définir la longueur d'une courbe C, que s'il existe une suite de lignes polygonales ayant C pour limite et telle que la suite correspondante de longueurs n'augmente pas indéfiniment. Nous appellerons ces courbes, *courbes rectifiables*.

Pour définir la longueur de ces courbes, rappelons d'abord quelques définitions.

Soit un ensemble de suites de nombres. Les valeurs qui forment l'une de ces suites forment un ensemble E, l'ensemble dérivé de E est l'ensemble de toutes les limites de la suite considérée. L'ensemble des ensembles E' ainsi définis est l'ensemble des limites des suites de l'ensemble considéré; la limite supérieure de cet ensemble est ce que l'on appelle depuis Cauchy la plus grande des limites. On définit de même la plus petite des limites.

Ces deux nombres, que l'on appelle aussi quelquefois limites supérieure et inférieure d'indétermination, peuvent être infinis.

Soit une courbe C, considérons l'ensemble des suites formées des longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C.

La plus grande des limites de l'ensemble est infinie. Il en est de même de la plus petite si C n'est pas rectifiable. Au contraire si C est rectifiable la plus petite des limites est finie.

Nous appellerons longueur d'une courbe C, *la plus petite des limites vers lesquelles tendent les longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers* C.

Une courbe rectifiable a une longueur finie.

[55] Une courbe non rectifiable n'a pas de longueur, ou si l'on veut a une longueur infinie.

43. Soit une courbe C d'extrémités A et B. Toute ligne polygonale dont les extrémités tendent vers A et B a une longueur qui ne peut tendre vers un nombre inférieur à la longueur de AB. C'est-à-dire que la longueur d'un arc de courbe n'est pas inférieure à la longueur de

[53] *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* Rendiconti 1900, 1. semestre.

[54] Les conséquences de cette définition on été particulièrement étudiées par LUDWIG SCHEEFFER (*Acta Mathematica*, tome V) et par Mr. JORDAN dans la seconde édition de son cours d'Analyse. Voir aussi STUDY. *Mathematische Annalen*, XLV.

la corde.

Marquons sur l'arc AB entre A et B un point D. L'arc AB est dit la somme des arcs AD et DB et la longueur de l'arc AB est évidemment la somme des longueurs des arcs AD et DB. Donc la longueur de l'arc AB n'est pas inférieure à $AD + DB$.

En raisonnant ainsi on voit que la longueur de l'arc est supérieure ou au moins égale à celle d'une ligne polygonale quelconque inscrite[55].

Considérons une suite de lignes polygonales inscrites, telles que le maximum de la longueur des côtés tende vers zéro. Ces lignes tendant uniformément vers la courbe, la plus petite limite de la suite correspondante des longueurs n'est pas inférieure à la longueur de la courbe C. Mais d'après ce que nous venons de voir tous les nombres de cette suite sont au plus égaux à là longueur de C; la plus grande limite est au plus égale à cette longueur.

Donc la suite des longueurs considérées a pour limite la longueur de C et il y a identité entre la définition que nous avons adoptée et la définition classique, celle de SCHEEFFER et de Mr. JORDAN.

Nous avons en même temps démontré l'identité de cette définition et de celle de Mr PEANO.

En adoptant la définition qui a été donnée, on obtient une analogie complète entre les définitions des longueurs et des aires. L'identité de cette définition et de la définition classique nous permet de trouver la longueur par une infinité dénombrable d'opérations.

44. Nous disons qu'une courbe C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{1}$$

est la limite d'une famille de courbes C_p

$$C_p \qquad x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

si f_p, φ_p, ψ_p tendent uniformément vers f, φ, ψ.

[56] De ce qui précède résulte que la longueur de C est au plus égale à la plus petite limite des longueurs des C_p, et qu'il existe des familles de courbes C_p telles que la longueur de C soit la limite des longueurs des C_p. C'est ce que nous exprimerons en disant que la longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des courbes dont C est la limite[56]. On peut donc poser ainsi le problème de la mesure des longueurs des courbes.

Attacher à chaque courbe un nombre positif fini ou infini que l'on appellera sa longueur et satisfaisant aux conditions suivantes:

1. *Il existe des courbes ayant une longueur finie.*
2. *Deux courbes égales[57] ont même longueur.*

[55] On suppose bien entendu que, dans l'ordre où ils se présentent sur la ligne polygonale, les sommets de cette ligne correspondent à des valeurs croissantes de t.

[56] Si l'on considère la longueur comme fonction de la courbe, on peut dire que la fonction est partout égale à son minimum ou encore semi-continue inférieurement (BAIRE, loc. cit.).

[57] Deux courbes sont égales si l'on passe des formules qui définissent la première à celles qui définissent

3. *Une courbe somme de deux autres*[58] *a pour longueur la somme des longueurs de ces deux autres.*
4. *La longueur d'une courbe* C *est la plus petite limite des longueurs des lignes polygonales dont* C *est la limite.*

45. Soit C une courbe rectifiable, la longueur $(0, t)$ de l'arc $s(t)$ est une fonction croissante de t. Donc les quantités $s(\theta - 0)$, $s(\theta + 0)$ existent. Considérons la courbe $C(\varepsilon)$ formée de l'arc $(0, \theta - \varepsilon)$ de la droite $\theta - \varepsilon$, $\theta + \varepsilon$ et de l'arc $(\theta + \varepsilon, \theta + h)$. Quand ε tend vers zéro $C(\varepsilon)$ tend vers C. Or la longueur de $C(\varepsilon)$ est

$$s(\theta - \varepsilon) + [s(\theta + h) - s(\theta + \varepsilon)] + \text{long}\ [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon].$$

En faisant tendre ε vers zéro, on déduit:

$$s(\theta + h) \leqslant s(\theta - 0) + [s(\theta + h) - s(\theta + 0)]$$

d'où il resulte $s(\theta + 0) = s(\theta - 0)$ et $s(t)$ est une fonction continue de t.

Il existe des courbes dont aucun arc n'est rectifiable. Il en est ainsi, [57] pour certaines valeurs de a et de b, de la courbe

$$x = \sum_0^\infty b^n \cos a^n = t, \qquad y = 0 \qquad z = 0\text{[59]}.$$

Soit une courbe Γ somme d'une courbe rectifiable C et d'une courbe C_1, dont aucun arc n'est rectifiable. Si C correspond à l'intervalle $(0, \theta)$, $s(t)$ est une fonction continue croissante entre 0 et θ, puis pour t supérieur à θ cette fonction devient infinie.

46. Nous appellerons projection de la courbe (1) sur l'axe des x la courbe

$$x = f(t), \qquad y = 0, \qquad z = 0;$$

et sur le plan des xy la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = 0.$$

A un polygone inscrit dans la courbe (1) correspond un polygone inscrit dans la courbe projection.

Chaque côté d'un polygone projection est au plus égal au côté projeté, donc *les projections d'une courbe rectifiable sont rectifiables.*

---

la seconde par les formules du changement de coordonnées.

[58] Si les deux courbes composantes sont données par $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ et $x = f_1(t)$, $y = \varphi_1(t)$, $z = \psi_1(t)$, $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$, avec $f(b) = f(a_1)$, $\varphi(b) = \varphi(a_1)$, $\psi(b) = \psi(a_1)$. La courbe somme est définie par $x = F(t)$, $y = \Phi(t)$, $z = \Psi(t)$ avec $F = f$, $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$, si $a \leqslant t \leqslant b$ et $F(t + b - a_1) = f_1(t)$, $\Phi(t + b - a_1) = \varphi_1(t)$, $\Psi(t + b - a_1) = \psi_1(t)$ si $b \leqslant t \leqslant b + b_1 - a_1$.

[59] Voir Jordan, (loc. cit.), page 318.

D'ailleurs un côté projeté a une longueur au plus égale à la somme des longueurs des trois côtés projections sur les trois axes de coordonnées, donc *si une courbe a des projections rectifiables sur les trois axes de coordonnées elle est rectifiable*.

47. Cherchons la forme la plus générale de la fonction $f(t)$ pour que la courbe $x = f(t)$ portée par l'axe des x soit rectifiable.

Considérons un polygone inscrit dans cette courbe, ses sommets correspondent aux valeurs croissantes $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ de t. La longueur de ce polygone est $\Sigma|f(t_i) - f(t_{i-1})|$, cette quantité s'appelle encore la variation de f pour le système de valeurs $t_0, t_1, \ldots t_n$.

Cette somme se décompose en deux autres Σ_1, Σ_2. La première correspondant aux termes $f(t_i) - f(t_{i-1})$ qui sont positifs, la seconde aux termes négatifs. On les appelle *variation positive* et *variation négative* de f pour le système $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Supposons que a et b restant fixes, le nombre des t_i augmente indéfiniment de manière que le maximum de $t_i - t_{i-1}$ tende vers zéro. Dès que ce [58] maximum est inférieur à un certain nombre η, $\Sigma_1 + \Sigma_2$ diffère de la longueur de l'arc de a à b de moins de ε, si cette longueur est fini, et est plus grande que M, si la longueur de l'arc de a à b est infinie; sans quoi il serait possible de trouver une suite de polygones inscrits tendent vers la courbe et dont les longueurs ne tendraient pas vers celle de la courbe[60]. Donc $\Sigma_1 + \Sigma_2$ a pour limite la longueur de l'arc (a, b); cette quantité $s = v$ s'appelle la variation totale de f entre a et b. Si cette variation est finie, la fonction f est dite à variation bornée entre a et b. Si la variation est infinie la fonction est à variation non bornée.

$\Sigma_1 - \Sigma_2$ est toujours égale à $f(b) - f(a)$, donc a pour limite $f(b) - f(a)$.

De là il résulte que Σ_1 et Σ_2 ont des limites parfaitement déterminées p et n que l'on appelle la variation positive et la variation négative de f entre a et b; et l'on a:

$$\begin{aligned} p + n &= v \\ p - n &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Nous avons vu que si a est fixe, v est une fonction continue de b pour les fonctions à variation bornée. De ces formules il résulte que p et n qui sont des fonctions croissantes, ou du moins jamais décroissantes, sont des fonctions continues. La formule

$$f(b) = f(a) + p - n$$

montre que toute fonction continue à variation bornée est la différence de deux fonctions continues non décroissantes.

Pour une fonction continue croissante n est nulle, donc une fonction croissante est à variation bornée. D'ailleurs si

$$f = \varphi - \psi,$$

60 En d'autres termes si des polygones inscrits T tendent vers C la longueur de T tend uniformément vers celle de C.

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|$$

donc la différence de deux fonctions à variation bornée est une fonction à variation bornée.

Il y a donc identité entre les fonctions à variation bornée et les différences de fonctions continues non décroissantes[61].

[59] Si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

sont les équations d'une courbe rectifiable, f, φ, ψ *sont des différences de deux fonctions continues non décroissantes et inversement.*

48. Voici des exemples de fonctions à variation bornée.

Soit dans l'intervalle $(0, 1)$ un ensemble dénombrable de couples de points a_i, b_i $(a_i < b_i)$ tels qu'entre a_i et $b_i$ne se trouve aucun point a ou b d'indice inférieur à i.

Désignons par $f_0(x)$ la fonction x, et par $f_p(x)$ la fonction continue qui admet $a_1, a_2, \dots, a_p$, $b_1, b_2, \dots, b_p$ pour maxima ou minima, qui entre deux de ces points est de la forme $\pm x + h$ et qui est égale à $f_0(x)$ entre 0 et le premier des points d'indice au plus égal à p.

On voit immédiatement que le maximum de $|f_p(x) - f_{p-1}(x)|$ s'obtient pour $x = b_p$ et est égal à $2|f_{p-1}(a_p) - f_{p-1}(b_p)| = 2\varepsilon_p$ si ε_p désigne la longueur $a_p b_p$.

Donc si la série Σ_{ε_p} est convergente $f_p(x)$ tend uniformément vers une limite $f(x)$; et comme $f_p(x)$ a entre 0 et x une variation totale égale à x, celle de $f(x)$ est au plus x.

Pour les points d'indice au plus égal à p on a:

$$|f(x) - f_p(x)| \leqslant 2 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}.$$

La variation de $f(x)$ pour le système $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ est donc supérieure à

$$x - 4p\Sigma\varepsilon_{p+h}$$

donc si $p\Sigma\varepsilon_{p+h}$ tend vers zéro avec $1/p$, $f(x)$ a x pour variation totale entre 0 et x.

Soit un intervalle (α, β), si, les conditions précédentes étant remplies, l'ensemble des a_p est partout dense on peut trouver dans (α, β) un intervalle (a_p, b_p). Supposons qu'entre a_p et b_p $f_p(x)$ soit de la forme $x + h$, on a:

$$f(b_p) - f(a_p) = f_p(b_p) - f_p(a_p) + [f(b_p) - f_p(b_p)] + \\ +[f_p(a_p) - f(a_p)] \geqslant \varepsilon_p - 4 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h};$$

[61] On peut dans cet énoncé supprimer le mot continues, (voir à ce sujet Jordan, loc. cit.).

donc si, au moins à partir d'une certaine valeur de p, on a:

$$\varepsilon_p > 4\Sigma\varepsilon_{p+h}$$

[60] $f(x)$ n'est pas toujours décroissante de a_p à b_p et a fortiori de α à β. Mais de même on prouverait qu'elle n'est pas croissante, donc *dans tout intervalle* $f(x)$ *admet des maxima et des minima*.

Pour réaliser toutes ces conditions prenons pour l'ensemble des milieux des (a_i, b_i) l'ensemble des nombres rationnels rangés dans un ordre quelconque. Prenons pour ε_1 un nombre irrationnel quelconque, tel que a_1 et b_1 soient compris entre 0 et 1. Prenons pour ε_i le plus petit des nombres $\frac{\varepsilon_{i-1}}{1}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{3}, \ldots$ tels que a_i et b_i soient compris entre 0 et 1 et qu'entre a_i et b_i ne se trouve aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$.

Nous définirons ainsi une fonction dont la variation totale entre 0 et x; est x et qui a dans tout intervalle des maxima et des minima.

Traçons par rapport à deux axes rectangulaires la droite $z = x$. Soient A_i, B_i les points de cette droite dont les abscisses sont a_i, b_i.

Plions la feuille de papier sur laquelle nous avons tracé $z = x$ d'abord suivant la parallèle à $0x$; passant par A_1, puis suivant la parallèle à $0x$; passant par B_1, nous réalisons la courbe $z = f_1(x)$. En pliant de nouveau le papier autour des parallèles à $0x$ passant par A_2 et B_2 on réalise $z = f_2(x)$ et ainsi de suite.

Donc, avec une précision qui n'est limitée que par la possibilité d'effectuer le pliage, on peut réaliser les courbes $z = f(x)$ que nous venons de définir. On peut même démontrer qu'en choisissant convenablement les A_i, B_i on peut réaliser toute courbe $z = f(x)$ de variation totale entre 0 et x égale à x.

49. On sait que, dans le cas simple où les fonctions f, φ, ψ ont des dérivées continues on peut représenter la longueur par une intégrale. Voici une première généralisation simple. Nous supposons que f', φ', ψ' existent, soient bornées et intégrables au sens de RIEMANN.

Soit AB une corde, dont les extrémités correspondent aux valeurs t_i, t_{i+1} du paramètre. On a:

$$\text{longueur } AB = \sqrt{\overline{f(t_{i+1}) - f(t_i)}^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}\,[62].$$

Désignons par $m_i, M_i; m_2, M_2; m_3, M_3$ les limites inférieures et supérieures de $|f'(t)|$, $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ entre t_i et t_{i+1}.

[61] Le théorème des accroissements finis montre que

$$(t_{i+1} - t_i)\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \leqslant \text{long } AB \leqslant \sqrt{M_i^2 + M_2^2 + M_3^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Soit une division $t_0, t_1, \ldots, t_n$ de l'intervalle de variation de t; il lui correspond un polygone

[62] Nous supposons les axes rectangulaires.

inscrit P et l'on a:

$$\Sigma(t_{i+1}-t_i)\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2} \leqslant \text{Long P} \leqslant \Sigma(t_{i+1}-t_i)\sqrt{M_i^2+M_2^2+M_3^2}.$$

Si entre les t_i choisis on intercale de nouvelles valeurs de t, la première somme augmente la troisième diminue, donc elles tendent vers des limites quand on fait tendre vers zéro $t_{i+1}-t_i$; d'ailleurs ces deux limites sont égales car la différence entre le premier et le troisième membre est au plus

$$\Sigma(t_{i+1}-t_i)[(M_1-m_1)+(M_2-m_2)+(M_3-m_3)]$$

quantité qui tend vers zéro car $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont intégrables puisque f', φ', ψ' le sont.

L'expression

$$\Sigma(t_{i+1}-t_i)\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},\ \left(t=\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$$

est comprise entre la première et la troisième somme, sa limite est l'intégrale

$$\int\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}dt$$

qui représente donc la longueur de la courbe.

50. Servons nous maintenant des résultats obtenus dans le chapitre précédent.

Si f', φ', ψ' existent et si la courbe est rectifiable, ces dérivées admettent des intégrales et il en est par suite de même de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$. Réciproquement si cette quantité admet une intégrale, il en est de même de f', φ', ψ', car l'on a:

$$\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2} \geqslant |f'|,$$

et la courbe est rectifiable.

Nous n'avons donc à nous occuper de l'intégrale de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$ que pour les courbes rectifiables. Pour démontrer que cette intégrale représente la longueur de la courbe nous raisonnerons comme dans le chapitre précédent.

Divisons les intervalles de variation (finis ou non) de f', φ', ψ' à l'aide de nombres m_i. Il en résulte une division en ensembles de l'intervalle de variation de t.

[62] Pour ceux que nous nommerons e_{ijk} on a:

$$m_i < f' < m_{i+1}$$

$$m_j < \varphi' < m_{j+1}$$

$$m_k < \psi' < m_{k+1}$$

Pour ceux que nous nommerons $e^i_{\alpha jk}$, la première de ces inégalités est remplacée par:

$$m_i = f'.$$

Nous aurons de même $e^j_{i\alpha k}$ $e^k_{ij\alpha}$ dans ces expressions α est un symbole indiquant celle des inégalités qui est remplacée par une égalité et non l'un des nombres entiers.

Nous aurons encore les ensembles $e^{ij\alpha}_k$, les deux premières inégalités sont remplacées par

$$m_i = f', \qquad m_j = \varphi'.$$

Enfin nous aurons des ensembles e^{ijk} pour lesquels f', φ', ψ' seront égales à m_i, m_j, m_k.

Tous ces ensembles sont mesurables; en choisissant convenablement les m_i tous ces ensembles, sauf les e_{ijk}, seront de mesure nulle.

A chaque point t_0 de e_{ijk} nous pouvons faire correspondre le plus grand intervalle possible (α, β) de longueur inférieure à σ_{ijk}, ayant t_0 pour milieu et tel que

$$\alpha < a \leqslant t_0 \leqslant b < \beta$$

entraîne

$$m_i < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}$$

$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$

$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Soit $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ la somme de ces intervalles. Faisons tendre σ_{ijk} vers zéro, l'ensemble E_{ijk} des points communs à tous les $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ a même mesure que e_{ijk}.

A chaque point t_0 de $e^i_{\alpha jk}$ nous pouvons faire correspondre le plus grand intervalle possible (α, β) de longueur inférieure à $\sigma^i_{\alpha jk}$, ayant t_0 pour milieu [63] et tel que

$$\alpha < a \leqslant t_0 \leqslant b < \beta$$

entraîne

$$m_i - \varepsilon^i_{\alpha jk} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1} + \varepsilon^i_{\alpha jk}$$

$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$

$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Soit $E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})$ la somme de ces intervalles.

Faisons tendre simultanément $\sigma^i_{\alpha jk}$ et $\varepsilon^i_{\alpha jk}$ vers zéro, l'ensemble $E^i_{\alpha jk}$ formé des points communs à tous les $E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})$, a même mesure que $e^i_{\alpha jk}$. On définira de même $E^{ij\alpha}_k(\sigma^{ij\alpha}_k)$,

$E^{ijk}(\sigma^{ijk})$.

Si $m_{i+1} - m_i$ est, quel que soit i, inférieur à η l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ est égale à

$$\sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}[m(e_{ijk}) + m(e^i_{\alpha jk} \ldots + m(e^{ijk}))]$$

à moins de $2\eta l$ près, l'intégrale étant étendue à un intervalle de longueur l. Or peut choisir les nombres σ et ε assez petits, pour que cette somme diffère aussi peu qu'on le veut, de moins de D, de

$$V = \sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}\left[m[E_{jk}(\sigma_{ijk})] + m[E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})] + \ldots + m[E^{ijk}(\sigma^{ijk})]\right]$$

Parmi les intervalles formant les E on en peut choisir un nombre fini de manière que tout point de l'intervalle considéré soit intérieur à l'un des intervalles conservés et que les extrémités de l'intervalle considéré soient des extrémités d'intervalles conservés.

Nous supposerons ces intervalles conservés A choisis de façon qu'aucun d'eux ne soit à l'intérieur d'un autre. La contribution dans V des intervalles non conservés est inférieure à D.

Considérons deux intervalles conservés (a, b), (a_1, b_1) empiétant l'un sur l'autre et soit

$$a < a_1 < b < b_1;$$

supposons qu'ils correspondent à $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ et $E_{i'j'k'}(\sigma_{i'j'k'})$.Entre a et b on peut trouver un point c tel que entre a et c se trouve un point au moins de e_{ijk} et entre c et b_1 un point au moins de $e_{i'j'k'}$; en effet s'il en était autrement [64] c'est que tous les points de e_{ijk} et $e_{i'j'k'}$ contenus dans ab, seraient entre a et b (ou entre a_1 et b_1) et prenant dans a_1b deux points α et β suffisamment voisins de a et b on aurait à la fois

$$m_i < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < m_{i+1}$$

$$m'_i < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < m_{i'+1}$$

et les inégalités analogues. Or on n'a pas à la fois $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$.

Nous remplacerons les intervalles (a, b), (a_1, b_1) par (a, c), (c, b_1). On aurait pu faire de même pour des intervalles correspondant à $E^i_{\alpha jk}$, $E^{i'j'\alpha}_k \ldots$.

Il n'y a de difficulté que si les trois indices sont identiques, c'est-à-dire par exemple si les deux intervalles correspondent à $E^i_{\alpha jk}$, $E^{\alpha jk}_i$, auquel cas on prendra comme point c un point quelconque de (a_1, b).

En continuant ainsi on remplace les intervalles A par des intervalles A' n'empiétant plus les uns sur les autres. La contribution dans V des intervalles $A - A'$ est inférieure à D.

Considérons maintenant la ligne polygonale inscrite dans la courbe et dont les sommets correspondent aux extrémités de A'.

Le côté de cette ligne qui correspond à l'intervalle (α, β) a une longueur égale à $(\beta - \alpha)\sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}$ à moins de

$$3\eta(\beta - \alpha) \text{ ou } (2\eta + \varepsilon^i_{\alpha jk})(\beta - \alpha) \text{ ou } (\eta + 2\varepsilon^k_{ij\alpha}(\beta - \alpha) \cdots$$

près, suivant que (α, β) correspond à E_{ijk}, $E^i_{\alpha jk}$, $E^{ij\alpha}_k \ldots$

Si donc les ε sont choisis assez petits, la longueur de la ligne polygonale diffère de la contribution de A' dans V de moins de $3\eta l$.

Ainsi, en choisissant convenablement les nombres η, σ, ε, le procédé que nous venons d'indiquer conduit à considérer une ligne polygonale inscrite dans la courbe, dont les côtés sont aussi petits que l'on veut, et dont la longueur est aussi voisine que l'on veut de l'intégrale

$$\int \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2} dt.$$

Cette intégrale représente donc la longueur de la courbe.

51. Les raisonnements que nous venons d'indiquer sont analogues à ceux des paragraphes 30, 31. D'une façon plus générale, à tout raisonnement de la deuxième partie du chapitre II, on peut faire correspondre des raisonnements [65] relatifs à la rectification des courbes. Nous allons indiquer ce qui est l'analogue de la proposition du paragraphe 35.

Dans ce paragraphe il a été démontré que si les nombres dérivés d'une fonction $f(t)$ sont bornés et si les h sont des nombres positifs tendant vers zéro on a:

$$\int \lambda_d(t) dt < \lim \int fracf(t + h_i) - f(t) h_i dt < \int \Lambda_d(t) dt.$$

Un raisonnement analogue prouve que, si l'on désigne par D_d et d_d la plus grande et la plus petite des deux quantités $|\Lambda_d|$ et $|\lambda_d|$, on a:

$$\int d_d dt < \lim \int \left| \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} \right| dt < \int D_d dt$$

et aussi que les limites de

$$\int \left| \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} - \Lambda_d(t) \right| dt \text{ et } \int \left| \frac{f(t + h_i) - f(t)}{h_i} - \lambda_d(t) \right| dt$$

sont inférieures à $\int (D_d - d_d) dt$.

Ceci posé soit $C(h_i)$ la courbe

$$x = \frac{F(t + h_i) - F(t)}{h_i}, \qquad y = \frac{\Phi(t + h_i) - \Phi(t)}{h_i}, \qquad z = \frac{\Psi(t + h_i) - \Psi(t)}{h_i},$$

$F(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ étant les fonctions primitives de $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ dont nous supposons les nombres dérivés bornés. $C(h_i)$ a pour longueur

$$l_i = \frac{1}{h_i}\int \sqrt{[f(t+h_i)-f(t)]^2+[\varphi(t+h_i)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+h_i)-\psi(t)]^2}dt.$$

Quand h_i tend vers zéro les limites de l_i sont comprises entre

$$\int \sqrt{\overline{D_d(f)}^2+\overline{D_d(\varphi)}^2+\overline{D_d(\psi)}^2}dt \text{ et } \int \sqrt{\overline{d_d(f)}^2+\overline{d_d(\varphi)}^2+\overline{d_d(\psi)}^2}dt.$$

Nous supposerons que ces deux intégrales ont la même valeur, alors l_i tend vers une limite déterminée que nous allons démontrer être la longueur de C.

Si ces deux intégrales ont la même valeur c'est que les couples d'intégrales $\int D_d dt$ et $\int d_d dt$ ont aussi les mêmes valeurs et ces intégrales représentent les variations totales de f, φ, ψ. D'ailleurs comme l'on a:

$$D_d - d_d \leqslant \Lambda_d - \lambda_d \leqslant 2D_d,$$

[66] les couples d'intégrales $\int \Lambda_d dt$ et $\int \lambda_d dt$ ont aussi les mêmes valeurs et réciproquement.

De sorte que l'on a:

$$\int D_d dt = \int d_d dt = \int |\Lambda_d| dt = \int |\lambda_d| dt.$$

Considérons une ligne polygonale inscrite dans $C(h_i)$ correspondant à

$$t_0, t_1, \dots t_n$$

et la ligne analogue inscrite dans C. Soient A_iB_i d'une part, AB d'autre part deux côtés correspondants $(t_\alpha, t_{\alpha+1}$. Les projections du premier sur les trois axes sont

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\varphi(t+h_i)-\varphi(t)}{h_i}dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\psi(t+h_i)-\psi(t)}{h_i}dt$$

celles du second sont

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(f)dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\varphi)dt, \qquad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\psi)dt.$$

La différence entre les longueurs de ces deux côtés est donc au plus égale à la somme des valeurs des trois intégrales analogues à

$$\left|\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \left[\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \Lambda_d(f)\right] dt\right|.$$

Donc la différence des longueurs entre les deux polygones considérés est au plus

$$S_{f,\varphi,\psi}\left|\iint\left[\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}-\Lambda_d(f)\right]dt\right|.$$

Or chacune des trois intégrales de cette somme tend vers zéro avec h_i, donc la longueur de C_i a pour limite la longueur de C.

Pour énoncer ce résultat donnons la définition suivante: Soit $f(t)$ une fonction continue, nous appellerons dérivée à droite $f'd(t)$ une fonction définie [67] pour $t = t_0$ como égale à l'une quelconque des limites vers lesquelles tend

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

quando h tend en décroissant vers zéro.

La dérivée à droite est en général indéterminée. Nous venons de démontrer que:

Si les dérivées à droite $f'_d(t)$, $\varphi'_d(t)$, $\psi'_d(t)$ *sont bornées et si l'intégrale*

$$\int\overline{f'_d(t)+\varphi'_d(t)+\psi'_d(t)}dt$$

a une valeur bien déterminée, indépendante des dérivées à droite choisies, cette intégrale est la longueur de la courbe

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),\qquad z=\psi(t).$$

52. La proposition précédente est une généralisation du résultat classique concernant la représentation de la longueur d'une courbe ayant des tangentes variant d'une façon continue.

Ce résultat classique étant connu, si l'on s'était proposé de généraliser analytiquement la notion de longueur, la proposition précédente aurait pu être prise pour définition; on voit que la longueur ainsi définie ne dépend pas du choix des axes de coordonnées et, en particulier, reste la même si l'on remplace les dérivées à droite par des dérivées à gauche.

Cette définition ne s'applique qu'à des courbes rectifiables. Il serait intéressant de rechercher à quelles courbes rectifiables elle s'applique ou si elle concerne toutes les courbes rectifiables. Si, pour exprimer les points d'une courbe rectifiable, on prend comme paramètre t la longueur de l'arc, on a des fonctions f, φ, ψ dont les nombres dérivés sont bornés; la proposition du paragraphe précédent s'applique toutes les fois que l'ensemble des points pour lesquels l'une des différences telles que $\Lambda_d(f)-\lambda_d(f)$ est différence de zéro a une mesure nulle.

CHAPITRE 4

Aire des surfaces

[68] 53. Les mots *aire d'une surface* désignent dans le langage usuel l'aire, c'est-à-dire la somme des aires des faces, de surfaces polyédrales confondues avec la surface considérée au degré de précision que l'on peut atteindre.

En géométrie on considère souvent l'aire d'une surface S comme la limite des aires de certaines surfaces polyédrales ayant S pour limite; définir l'aire c'est alors dire quelle suite de polyèdres l'on considère.

Par analogie avec la définition de la longueur d'une courbe, on a tout d'abord considéré les polyèdres inscrits. C'est ainsi que, d'après Mr. Peano[63], les postulats qu'admettait Archimède équivalent à la définition suivante:

L'aire d'une surface convexe est la valeur commune de la limite supérieure des aires des surfaces polyédrales convexes inscrites et de la limite inférieure des circonscrites; d'ailleurs, dans les cas qu'il étudie, Archimède démontre la coïncidence des deux limites.

Pendant longtemps on a admis que l'aire d'une surface pouvait être définie comme la limite des aires des surfaces polyédrales inscrites[64], le maximum de l'aire des faces et le maximum de la longueur des arêtes tendant vers zéro. Mais Schwarz dans une lettre à Genocchi a montré que les aires des surfaces polyédrales inscrites dans un morceau fini de cylindre de révolution n'avaient pas de limite supérieure. La même observation a été faite par Mr. Peano, dans ses leçons de l'Université de Turin en 1881-82, avant la publication de la lettre de Schwarz dans le cours professé à la Faculté des Sciences pendant le second semestre 1882 par Ch. Hermite (second tirage, p. 25).

Si l'on veut définir l'aire par la considération de polyèdres inscrits il faut donc assujettir ces polyèdres à des conditions supplémentaires. On s'est [69] quelquefois astreint à ne considérer que les polyèdres dont les angles des faces ne tendent pas vers zéro ou des polyèdres dont les angles des faces avec les plans tangents tendent vers zéro[65]. La pluspart des restrictions que l'on a ainsi considérées se sont trouvées insuffisantes pour qu'il existe une limite; d'ailleurs elles sont si particulières que, seule, l'existence de la limite légitimerait leur considération.

---

[63] *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, Rendiconti, 1890.

[64] Aux sommets d'une surface polyédrale inscrite on peut faire correspondre les points du plan (u, v) auxquels correspondent les sommets en tant que points de la surface proposée. A chaque face du polyèdre correspond ainsi un polygone du plan (u, v), nous supposons ici et dans tout ce qui suit que ces polygones n'empiètent pas les uns sur les autres.

[65] Voir au sujet de ces essais de définition la note déjà citée de Mr. Peano.

54. Il nous reste à citer deux définitions[66] dues à HERMITE et à Mr. PEANO. Elles présentent ce caractère commun de ne plus reposer sur la considération de polyèdres inscrits et d'admettre, comme généralisation de la division d'une courbe en arcs partiels, la division d'une surface en morceaux par des contours fermés. plupart Hermite[67] considère une surface $z = f(x, y)$ ayant des plans tangents variant d'une façon continue. Soient un contour d du plan des xy, m un point intérieur à ce contour, M le point de la surface qui lui correspond, D' le contour situé dans le plan tangent en M à la surface qui a pour projection d et D le contour de la surface qui se projette en d. A D on fait correspondre l'aire de D' (on suppose d quarrable). Ceci posé on divise la surface en morceaux; la somme des nombres attachés aux contours employés est une valeur approchée de l'aire. L'aire est la limite de ces valeurs lorsque le nombre des morceaux augmente indéfiniment de manière que le diamètre maximum de ces morceaux tende vers zéro (l'existence de la limite suppose que le contour considéré limitant la surface n'est pas quelconque; il en était de même pour les définitions précédentes).

La définition d'HERMITE fait donc intervenir explicitement les axes de coordonnées, de plus elle n'est pas la généralisation de la définition de la longueur par la considération des polygones inscrits.

[70] La définition de Mr. PEANO ne présente pas ces inconvénients. Soit une courbe gauche fermée C, on démontre, au moins dans les cas simples, qu'il existe une courbe plane fermée c telle que sur tout plan les projections orthogonales de C et c limitent des aires égales[68]; à chaque courbe C on attache le nombre qui représente l'aire du domaine plan limité par c. De même dans la définition de la longueur, à chaque arc partiel on attache la longueur du segment qui joint ses extrémités, c'est-à-dire la longueur du segment qui sur toute droite a même projection orthogonale[69] que l'arc. Ceci posé divisons une surface par des contours fermés; à chaque division nous faisons correspondre la somme des nombres attachés aux contours employés. Mr. PEANO appelle aire la limite supérieure de la somme de ces nombres.

55. Toutes ces définitions, celle due à Mr. PEANO exceptée, supposent l'existence de la limite d'une suite de nombres et l'existence de cette limite n'est démontrée que pour les surfaces ayant des plans tangents variant d'une façon continue. Or, dans ce cas, il ne s'agit pas d'attacher à chaque surface un nombre, mais bien d'attacher à chaque surface des domaines plans dont la somme des aires définissent comme limite ou limite supérieure ou limite inférieure

---

[66] Dans un article récent (*Ueber die Dégriffé Lange, Oberfldehe und Volumen – Jahresbericht der Beulsehen Matfiematiker- Vereinigung*, 1901) Mr. MINKOWSKI adopte pour la longueur et l'aire les définitions suivantes. De chaque point d'une courbe C comme centre traçons une sphère de rayon r l'ensemble des points intérieurs à l'une au moins de ces sphères est mesurable, soit $V(r)$ sa mesure; la limite, si elle existe, du rapport $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ quand r tend vers zéro est dite la longueur de C. De même si $V(r)$ est la mesure de l'ensemble des points dont la distance à l'un des points d'une surface S est inférieure à r, la limite de $\frac{V(r)}{2r}$ définit l'aire de S.

[67] Loc. cit.

[68] Si la projection de C a des points multiples, l'aire limitée par C doit être comptée comme si elle était exprimée à l'aide de l'intégrale curviligne $\frac{1}{2}\int x dy - y dx$.

[69] Il ne s'agit pas ici de la courbe projection mais de la distance des deux extrémités de l'arc projection.

un nombre égal à l'intégrale double $\int\int \sqrt{EG - F^2} du dv$; toute définition géométrique qui ne conduirait pas à ce nombre consacré par l'usage serait en effet rejetée. Une définition de l'aire qui ne s'applique qu'aux surfaces ayant des plans tangents variant d'une façon continue, peut faire connaître une propriété géométrique intéressante, mais n'est pas une véritable définition de l'aire, le nombre à définir étant connu avant la définition.

56. La définition due à Mr. PEANO s'applique à toutes les surfaces dont la frontière est un de ces contours C auxquels on peut faire correspondre des contours plans c, comme il a été dit plus haut. Mais cette définition n'est vraiment intéressante que si l'on peut sur la surface tracer assez de ces contours C pour qu'il soit possible de diviser la surface en morceaux de diamètres aussi petits que l'on veut et dont les frontières sont des courbes C; [71] dans ce cas seulement l'aire dépend de la forme de toutes les parties de la surface. Cette condition est remplie par exemple si la surface a des plans tangents variant d'une façon continue.

Prenons ce cas, les courbes C forment un ensemble dont la puissance est celle du continu, alors l'aire est définie comme limite supérieure d'un ensemble de nombres dont la puissance est celle du continu.

Pour calculer l'aire il faut, dans cet ensemble, isoler une infinité dénombrable de nombres tendant vers la limite supérieure; on peut démontrer que si l'on considère une suite de divisions de la surface par des contours C, le diamètre maximum de ces contours tendant vers zéro, les nombres correspondant à ces divisions tendent vers l'aire. Mais il n'est pas évident que l'on puisse toujours atteindre par une infinité dénombrable d'opérations le nombre que définit Mr. PEANO; ajoutons qu'on ne connaît rien d'autre sur ce nombre que son existence.

57. Une surface étant définie par

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

(u, v) étant un point d'un domaine plan D.

On ne considère pas comme différentes celles que l'on obtient en exprimant u, v en fonction des coordonnées u_1, v_1 des points d'un domaine D_1; entre D et D_1, existe une correspondance ponctuelle biunivoque et continue. On dit que l'on a deux représentations paramétriques de la même surface.

L'ensemble des points qui correspondent à la courbe qui limite le domaine D forme la courbe frontière de la surface[70].

Deux surfaces sont dites égales si l'on passe de l'une à l'autre par les formules du changement de coordonnées.

Une surface S est dite somme de surfaces S_i, en nombre fini ou non, si le domaine D du plan des (u, v) auquel correspond S est somme des domaines D_i auxquels correspondent les S_i et si la portion de S qui correspond à D_i est identique à S_i.

[70] Nous réservons donc le nom de *surface* à ce que l'on appelle ordinairement une calotte à un seul contour, simplement connexe. – Il faudrait répéter pour les points d'une surface ce qui a été dit au chapitre I pour les points d'une courbe.

Une surface S est dite la limite de surfaces S_p données par des fonctions f_p, φ_p, ψ_p si f_p, φ_p, ψ_p sont définies dans le même domaine que f, φ, ψ et tendent uniformément vers f, φ, ψ.

[72] Ceci rappelé, par analogie avec le problème de la mesure des courbes, nous posons ainsi le problème de la mesure des surfaces.

Attacher à chaque surface un nombre positif fini ou infini que l'on appellera son aire et satisfaisant aux conditions suivantes:

1. *Il existe des surfaces planes ayant une aire finie.*

2. *Deux surfaces égales ont même aire.*

3. *Une surface somme de plusieurs autres a pour aire la somme des aires des surfaces composantes.*

4. *L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite.*

Les trois premières conditions suffisent, nous l'avons vu, quand on ne considère que des domaines plans. Le problème n'est possible que pour les domaines limités par des courbes quarrables.

Remarquons d'ailleurs qu'il importe peu de modifier ainsi la troisième condition du problème:

3 bis. *Une surface somme de deux autres a pour aire la somme des aires de ces deux autres.*

Les conditions 1, 2, 3 bis suffisent en effet pour les domaines quarrables. Soit maintenant un domaine non quarrable, il est limite de domaines quarrables dont les aires tendent vers la mesure des points du domaine[71]; avec Mr. JORDAN nous appellerons ce nombre *l'aire intérieure* du domaine non quarrable. La condition 4 montre que l'on doit appeler aire l'aire intérieure, mais alors la condition 3 bis n'est pas remplie[72].

Le problème des aires ainsi posé n'est donc possible que pour les domaines quarrables. Il est bien entendu que cela ne veut pas dire que le problème des aires est impossible pour tout autre famille de domaines que celle des domaines quarrables. Il est bien évident par exemple que le problème des aires est possible pour toute famille comprenant un nombre fini de domaines déterminés en grandeur et en position, que ces domaines soient quarrables ou non. Nous voulons dire seulement que le problème n'est pas possible pour l'ensemble de tous les domaines, mais qu'il est possible pour les domaines quarrables.

[73] On démontrera facilement que, si l'on pose le problème avec les conditions 1, 2, 3, 4, il n'existe aucune famille de domaines formée des domaines quarrables et d'autres domaines, pour laquelle le problème des aires soit possible; au contraire il existe de telles familles si l'on pose le problème avec les conditions 1, 2, 3 bis, 4 et que l'on ne considère que les domaines plans.

[71] Rappelons que nous avons appelé domaine l'ensemble des points *intérieurs à la frontière*.

[72] De même il importait peu dans la 3e. condition du problème de la mesure des courbes de parler d'une courbe somme de deux autres ou d'une courbe somme de plusieurs autres.

Retenons seulement que le problème des aires n'est possible dans le plan que pour certaines familles de domaines, dans l'espace il ne sera donc aussi possible que pour certaines familles de surfaces.

58. Nous dirons qu'une surface S, correspondant au domaine D du plan (u, v), est fermée si à tous les points de la frontière de D correspond le même point pour S.

Nous dirons qu'un arc de courbe a $\alpha\beta$ est intérieur à une surface fermée S s'il est impossible de tracer une courbe rencontrant $\alpha\beta$, ayant une branche infinie et ne rencontrant par S.

Nous dirons qu'un arc $\alpha\beta$ est quarrable s'il est possible de trouver une suite de surfaces polyédrales fermées $S_1, S_2, \ldots$ contenant $\alpha\beta$, dont les aires, sommes des aires des faces, tendent vers zéro et qui ont pour surface limite une surface dont l'ensemble des points est identique à l'ensemble des points de $\alpha\beta$.

Une courbe fermée sera dite quarrable si chacun de ses arcs est quarrable. Nous ne résoudrons le problème des aires que pour les surfaces limitées par des courbes quarrables[73].

Pour donner un exemple étendu de courbes quarrables montrons que toute courbe rectifiable est quarrable. Soit C une courbe rectifiable de longueur l, partageons-la en arcs de longueur a.

Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta\ldots$ ces arcs. Considérons les cylindres de révolution dont les axes sont les cordes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta\ldots$ et dont les rayons sont égaux à a. Nous limiterons le cylindre $\alpha\beta$ aux deux parallèles dont les plans passent par α et β et de même pour les autres cylindres.

Deux cylindres consécutifs,$\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ par exemple, seront reliés par l'un, convenablement choisi, des deux fuseaux que les parallèles limites de ces deux cylindres détachent sur la sphère de rayon a et de centre β. Nous terminerons les cylindres extrêmes par des demi-sphères.

[74] L'ensemble de ces surfaces est une surface fermée contenant C. La somme des aires de ces cylindres et sphères, le mot aire ayant le sens qu'on lui attribue en géométrie élémentaire, est au plus égale à

$$\frac{l}{a} 4\pi a^2 + 2\pi a \Sigma \text{long } \alpha\beta \leqslant 4\pi a l + 2\pi a l.$$

En remplaçant les cylindres par des prismes inscrits et les sphères par des polyèdres convexes inscrits on a une surface polyédrale fermée contenant C et d'aire au plus égale à $6\pi a l$; quand a diminue ces surfaces tendent vers C qui est quarrable.

Nous verrons plus loin que toute courbe quarrable dans le plan est quarrable dans l'espace.

59. Soit une courbe fermée C, *nous appellerons aire minima de* C *la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers* C.

Soient trois courbes fermées formées des arcs (α, β) pour la première, (β, γ) pour la seconde, (α, γ) pour la troisième. Supposons β quarrable; on peut l'enfermer dans des surfaces polyédrales fermées $B_1, B_2 \ldots$ dont les aires tendent vers zéro et dont les points tendent vers ceux de β. Soient $A_1, A_2 \ldots$ des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers (α, β) et dont les aires tendent vers l'aire minima de (α, β). Soient de même les surfaces $C_1, C_2 \ldots$

[73] Dans une note des Comptes Rendus de Novembre 1899 je me suis occupé de la définition de l'aire d'une classe particulière de surfaces, les surfaces rectifiables. J'ai pu alors adopter une autre définition des courbes quarrables.

relatives à (β, γ).

Si i est assez grand et j assez petit, A_i et C_i, rencontrent B_j suivant des courbes.

Supposons A_i définie à l'aide de fonctions des variables u, v; le point (u, v) étant dans un certain domaine D indépendant de i; soit b la partie de frontière de D qui correspond à β. Les points de A_i intérieurs à B_j correspondent à un certain ensemble de points du plan (u, v) lequel contient un domaine dont la frontière comprend b. Supposons ce domaine d_{ij} pris le plus grand possible et soit b_{ij} la partie de sa frontière qui ne fait pas partie de celle de D.

La courbe β_{ij} de A_i qui correspond à b_{ij} est sur b_j; si i et j augmentent simultanément β_{ij} tend vers β[74].

Nous définirons de même la courbe β'_{ij} relative à B_j, C_i. Sur B_j on [75] peut joindre les extrémités de β_{ij} et β'_{ij} qui tendent vers l'extrémité m de β par une ligne polygonale m_{ij} dont tous les points tendent vers m, de même soit n_{ij} une courbe de B_j joignant les extrémités de β_{ij} et β'_{ij} qui tendent vers l'extrémité n de β.

Soient A'_{ij} la portion de A_i correspondant à $D - d_{ij}$ et C'_{ij} la portion analogue de C_i. La surface formée de A'_{ij}, C'_{ij} et de l'une des deux surfaces limitées sur B_j par β_{ij}, β'_{ij}, m_{ij}, n_{ij} a sa frontière qui tend vers (α, γ) et l'une de ses courbes qui tend vers β. Son aire tend vers une quantité au plus égale à la somme des aires minima de (α, β) et (β, γ); il est d'ailleurs évident que la limite ne peut être inférieure à cette somme, donc elle lui est égale.

C'est cette propriété qui nous servira dans la suite. Remarquons qu'elle suffit pour prouver que toute courbe plane non quarrable dans le plan n'est pas quarrable dans l'espace.

60. Considérons une courbe rectifiable fermée C de longueur l et soit une suite de polygones inscrits $P_1, P_2 \ldots$ que l'on obtient en divisant C en arcs égaux de longueurs $a_1, a_2 \ldots$ tendant vers zéro. Soit A l'un des sommets de P_i, la surface que nous avons attachée, au §58, à la courbe C considérée comme ouverte et d'extrémités A, A et à P_i, moins les deux demi-sphères qui la terminent, constitue ce que nous appellerons une surface annulaire. En remplaçant les cylindres et fuseaux qui la composent par des polyèdres nous avons une surface annulaire polyédrale S_i.

Considérons sur S_i un contour fermé formé, sur les prismes, de parallèles aux arêtes des prismes, sur les polyèdres qui remplacent les fuseaux, de lignes polygonales inscrites dans des grands cercles de ces fuseaux, soit Γ_i; la longueur de Γ_i est évidemment inférieure à

$$l + 2\pi a_i \frac{l}{a_i} = (2\pi + 1)l.$$

Considérons l'ensemble E des polygones comprenant: 1. les trapèzes dont les bases sont les axes des cylindres et les parallèles aux génératrices faisant partie de Γ_i; 2. les triangles que l'on obtient en joignant chaque sommet m de P_i aux sommets de Γ_i situés sur la sphère de

[74] Pour ne pas être entraîne à de trop longs développements, nous admettons ces propriétés

rayon a_i et de centre m. La somme des aires de ces polygones est au plus

$$\frac{(2\pi+1)l+l}{2}a_i = (\pi+1)a_i l.$$

[76] Ceci posé, nous avons vu au paragraphe précédent que l'on peut considérer l'aire minima de C comme la limite la plus petite des aires de surfaces polyédrales A_i dont les frontières C_i, portées par les surfaces S_i tendent vers C.

Considérons la surface formée de l'ensemble E, de l'un des ensembles de polygones de S_i dont les frontières sont les côtés de C_i et de Γ_i, et de la surface A_i[75]; son aire diffère de celle de A_i de moins de $(\pi+1)a_i l$ augmentée de la somme des aires des polygones qui forment S_i. Donc l'aire minima de C est la limite des aires minima des contours P_i, et l'aire minima de P_i est la limite inférieure des aires des surfaces polyédrales dont P_i est la frontière. On sait donc trouver l'aire minima de P_i par une suite dénombrable d'opérations, donc l'aire minima de C peut être obtenue à l'aide d'une infinité dénombrable d'opérations. Mais il faut bien remarquer que ce n'est pas une suite dénombrable d'opérations; en d'autres termes l'aire minima d'une courbe rectifiable n'est pas définie à la façon de la somme d'une série mais à la façon de la somme d'une série dont les termes sont des séries.

Les polygones P_i sont des polygones particuliers inscrits dans C, on peut remplacer cette suite de polygones par une suite quelconque de polygones inscrits dans C et tendant vers C. En effet, soient deux polygones P et Q de longueurs inférieures à l qui se correspondent point par point, les points homologues étant distants de moins de ε; en raisonnant sur P et Q comme sur Γ_i et P_i, on voit que les aires minima de P et Q diffèrent de moins de l_ε.

61. La plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent vers une surface donnée S est ce que nous appellerons l'*aire intérieure* de S.

D'après la condition 4 du problème des aires ce nombre doit être l'aire de S. Avant de rechercher s'il vérifie la condition 3 de ce problème, nous allons étudier les surfaces dont l'aire intérieure est finie. Ces surfaces sont les *surfaces quarrables*, elles correspondent aux courbes rectifiables.

Soit a l'aire intérieure de S. Supposons que l'ensemble des projections des points de S sur le plan des xy contienne un domaine. Soit un rectangle $ABCD$ de côtés parallèles à ox et oy et contenu dans ce domaine.

Soit une série de surfaces polyédrales $S_1, S_2 \dots$ qui tendent vers S et dont les aires $a_1, a_2 \dots$ tendent vers a. L'ensemble des projections des points de S_i sur le plan des xy contient un rectangle $A_iB_iC_iD_i$ de côtés parallèles [77] à ox et oy. On peut supposer que A_i, B_i, C_i, D_i tendent vers A, B, C, D, quand i augment indéfiniment.

Soit $l_i(y)$ la somme des longueurs des lignes polygonales sections de S_i par $y = y_i$, $l_i(y)$ sera indéterminée si dans le plan d'ordonnée y se trouve une face de S_i, nous ne nous occuperons pas des valeurs de y pour lesquelles cela a lieu. Soit l_i la limite inférieure de $l_i(y)$

[75] Nous admettons ici que tous ces polygones forment bien une surface.

quand y varie de y_i ordonnée de A_iB_i à y', ordonnée de D_iC_i. On a évidemment

$$a_i \geqslant l_i(y'_i - y_i).$$

Or a_i tend vers a, $y'_i - y_i$ tend vers la longueur du côté BC, donc la plus grande des limites vers laquelle tend l_i est au plus $\dfrac{a}{\text{long } BC}$ quantité finie. D'ailleurs $l_i(y)$ étant continue la valeur l_i est atteinte pour une valeur α_i de y.

La section de S_i par le plan $y = \alpha_i$ se compose d'un nombre fini de lignes polygonales qui décomposent S_i en un nombre fini de morceaux.

Supposons choisis sur S deux points M et N se projetant sur le plan des xy de part et d'autre de la bande comprise entre les droites indéfinies AB et CD, et soient M_i et N_i des points de S_i qui tendent respectivement vers M et N. Les projections de M_i et N_i sont, dès que i est assez grand, de part et d'autre de la bande comprise entre les droites indéfinies A_iB_i et C_iD_i; M_i et N_i appartiennent alors à deux morceaux différents de S_i; désignons par L_i l'une des lignes composant la section de S_i par $y = \alpha_i$ et choisie de façon que M_i et N_i soient sur S_i de part et d'autre de L_i. L_i est de longueur au plus égale à l_i.

Nous verrons, §95 et §96, que certaines des L_i ont une courbe limite L dont la longueur au plus égale à $\dfrac{a}{\text{long } BC}$.

L est d'ailleurs une courbe plane située dans le plan $y = \alpha$, étant la limite des nombres α_i correspondant aux courbes L_i considérées. De plus L divise S en deux morceaux, l'un contenant M, l'autre contenant N.

Donc *toute surface quarrable peut être divisée en deux morceaux par une courbe rectifiable*, on peut de plus supposer que cette courbe est dans un plan parallèle à un plan P donné. Mais la démonstration précédente suppose qu'il existe un plan perpendiculaire à P sur lequel l'ensemble des projections des points de S contient un domaine. Les seules surfaces pour lesquelles cela n'a pas lieu sont celles qui sont sommes de surfaces portées par [78] des plans parallèles à P et de surfaces dont l'ensemble des point est aussi l'ensemble des points d'une courbe dont la projection ne remplit aucun domaine. Des raisonnements longs mais simples, analogues à ceux que vous venons d'employer, permettent de montrer que le théorème précédent s'applique aussi à ces surfaces, donc *toute surface quarrable peut être décomposée à l'aide de courbes rectifiables en um nombre fini de surfaces dont les aires intérieures sont aussi petites que l'on veut.*

62. Considérons une surface quarrable S et soit une suite de divisions de S en un nombre fini de surfaces à l'aide de courbes quarrables. De telles divisions existent toujours d'après ce qui précède; de plus on peut supposer que, dans la i-iéme division D_i, le maximum de la distance de deux points d'un même morceau soit ε_i, ε_i tendant vers zéro avec $1/i$. Soient A, B, $C\ldots$ les n morceaux qui proviennent de la division D_i; a, b, $c\ldots$ les contours de ces morceaux. Soient α, β, $\gamma\ldots$ des surfaces polyédrales dont les aires diffèrent de moins de ε/n des aires minima de a, b, $c\ldots$ et dont les frontières diffèrent de moins de ε_i de ces frontières. On peut enfermer A dans un cube de côté ε_i et nous pouvons supposer que α est tout entière

dans ce cube.

Ceci posé, le raisonnement du § 59 nous montre qu'il est possible de construire une surface polyédrale S_i dont l'aire soit aussi voisine que l'on veut de la somme des aires des α, β, ..., c'est-à-dire dont l'aire soit plus petite que la somme des aires minima des a, b... augmentée de ε ou du moins aussi voisine que l'on veut de cette somme.

Si l'on fait correspondre point à point α et A les points correspondants sont distants au plus de $\varepsilon_i\sqrt{3}$, donc on peut supposer que S_i et S se correspondent point à point, le maximum de la distance de deux points homologues étant aussi voisin que l'on veut de $\varepsilon_i\sqrt{3}$.

Les surfaces S_i ont donc pour limite S et par suite la plus petite limite de leurs aires est au moins égale à l'aire intérieure de S.

Attachons à chaque division D_i le nombre m_i, somme des aires minima des contours a, b.... L'aire intérieure de S est au plus égale à la plus petite limite des nombres m_i.

Considérons une suite de surfaces polyédrales Σ_p tendant vers S et dont les aires tendent vers l'aire intérieure de S. Traçons sur elles des courbes qui tendent vers a, b, c.... On divise ainsi Σ_p en n morceaux qui tendent respectivement vers A, B, ... et dont la somme des aires tend vers une limite [79] supérieure à la somme des aires minima de a, b.... Donc, quel que soit i, m_i est inférieur à l'aire intérieure de S.

Donc *quelle que soit la suite de divisions* D_i, *les nombres* m_i *correspondants ont une limite: l'aire intérieure de* S.

De cette définition de l'aire intérieure résulte que si l'on divise une surface S en deux surfaces S_1, S_2 par une courbe quarrable, l'aire intérieure de S est la somme des aires intérieures de S_1 et S_2. Donc *si l'on pose le problème des aires avec les conditions 1, 2, 3 bis, 4 il est possible et d'une seule manière pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, l'aire d'une surface étant son aire intérieure.*

63. Nous dirons qu'une courbe C tracée sur une surface S est quarrable sur cette surface s'il est possible de l'enfermer dans des morceaux de S dont la somme des aires est aussi petite que l'on veut; le mot aire ayant le sens qui vient d'être indiqué.

Supposons tracée sur S une courbe C fermée qui partage S en deux morceaux. L'un d'eux est intérieur à C. Dans ce morceau nous pouvons tracer des courbes quarrables C_i divisant S en deux morceaux et tendant vers C; C_i limite sur S une surface S_i, il est évident que l'aire de S_i tend vers l'aire intérieure du morceau Σ limité par C. Au contraire si l'on considère des courbes C_i tendant vers C, mais extérieures à Σ, il se peut que les aires des surfaces S_i que limitent les C_i ne tendent pas vers l'aire intérieure de celle limitée par C. Un raisonnement tout-à-fait identique à celui qu'emploie Mr. JORDAN pour le cas où S est un plan (Cours d'Analyse, 2e. édition, §36) montre que les aires des S_i tendent vers une limite déterminée, *l'aire extérieure de* Σ *sur* S.

Dans le cas où C est quarrable sur la surface et dans ce cas seulement ces deux aires (intérieure et extérieure) sont égales.

On voit qu'une courbe de S quarrable dans l'espace est quarrable sur S. Ceci revient à dire que si l'on considère sur S une famille de courbes quarrables dans l'espace $C(\gamma)$ variant d'une façon continue avec γ, la courbe $C(\gamma)$ limitant sur S une surface $S(\gamma)$, l'aire de $S(\gamma)$ est une fonction continue de γ.

64. Nous pouvons maintenant démontrer que l'aire d'une surface satisfait à la condition 3 du problème des aires. Soit une surface S divisée par des courbes en morceaux S_1, $S_2 \ldots$. Nous pouvons remplacer chaque surface S_i par une surface S'_i qui la comprend de façon que la différence des aires entre S'_i et S_i soit inférieure à un nombre choisi arbitrairement ε.

[80] Pour démontrer que la somme des aires des S_i, qui n'est pas supérieure à l'aire de S, ne lui est pas inférieure, il suffit donc de démontrer qu'il en est de même de la somme des aires des S'_i. Chaque point de S étant intérieur à l'un des S_i cela serait évident si les S'_i étaient en nombre fini, à cause de ce qui précède. Or, en reprenant le raisonnement que Mr. BOREL emploie à la page 42 de ses Leçons sur la théorie des fonctions et qui nous a déjà été utile, on voit qu'il suffit de choisir convenablement un nombre fini de surfaces S'_i pour que tout point de S soit intérieur à l'une d'elles.

Le problème des aires posé avec les conditions 1, 2, 3, 4 est donc possible et d'une seule manière pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, l'aire d'une surface étant son aire intérieure.

On verrait aussi que dans la définition de l'aire intérieure à l'aide des divisions D_i du §62, il est inutile que ces divisions ne fassent intervenir qu'un nombre fini de morceaux.

Remarquons que cette définition de l'aire intérieure d'une surface est analogue à la définition de la longueur d'une courbe comme limite des périmètres des polygones inscrits. Un polygone inscrit définit en effet une division de la courbe à laquelle nous faisons correspondre une division de la surface à l'aide de courbes quarrables. A la longueur d'un côté ab d'un polygone, c'est-à-dire à la limite inférieure des longueurs des courbes qui joignent les deux points de division consécutifs a, b, nous faisons correspondre la limite inférieure des aires des surfaces limitées par C l'un des contours quarrables qui intervient dans la division de la surface.

L'analogie se poursuit plus loin encore, car il est possible de démontrer qu'étant donnée une courbe fermée C il existe une surface limitée à C et ayant pour aire intérieure l'aire minima de C[76]. Ces surfaces correspondent aux côtés des polygones inscrits.

65. En géométrie élémentaire on définit les aires des surfaces cylindriques, des surfaces coniques et des surfaces convexes; il nous est facile de légitimer ces définitions.

Soient un cylindre limité à deux sections droites et A, B deux de ses génératrices, elles découpent sur la surface un morceau D. La projection sur le plan de A et B d'une surface polyédrale qui tend vers D couvre un domaine qui tend au moins vers le rectangle limité par A, B; donc l'aire dé cette surface polyédrale tend au moins vers l'aire de ce rectangle. De là [81] résulte que l'aire d'un cylindre est au moins celle de tout prisme inscrit. Mais si les faces d'un tel prisme tendent vers zéro le prisme tend vers le cylindre et par suite son aire tend au moins vers celle du cylindre, donc exactement vers cette aire.

La même démonstration s'applique au cône. On voit que les cylindres de directrices planes

[76] Voir chapitre VI.

rectifiables et que les cônes de directrices sphériques rectifiables sont seuls quarrables.

Soit une surface S fermée convexe, c'est-à-dire ne rencontrant aucune droite en plus de deux points; et soient S_1, $S_2 \ldots$ des surfaces polyédrales fermées tendant vers S et dont les aires tendent vers l'aire intérieure de S[77].

Soit O un point intérieur à S. Prenons par rapport à O les homothétiques S_1', $S_2' \ldots$ de S_1, $S_2 \ldots$ les rapports étant tels que S_i' n'ait aucun point intérieur à S. Il suffit pour cela que le rapport relatif à S_i soit $\dfrac{R}{R-\varepsilon_i}$, si deux points correspondants de S et S_i' sont distants d'au plus ε_i et si R est le minimum de la distance de O aux points de S, et puisque ε_i tend vers zéro avec $1/i$ l'aire de S est la limite des aires des S_i'.

Ceci posé considérons un polyèdre convexe P inscrit dans S; tous les points de P étant intérieurs à S et par suite à S_i' l'aire de P est inférieure à celle de S', c'est-à-dire au plus égale à celle de S. Si donc nous considérons une suite de polyèdres convexes inscrits dans S et tendant vers S on voit, d'une part que la plus petite limite des aires de ces polyèdres n'est pas inférieure à l'aire de S, d'autre part que la plus grande limite ne lui est pas supérieure, c'est-à-dire que *l'aire de* S *est la limite des aires des polyèdres convexes inscrits tendant vers* S.

Si l'on ne considère qu'un morceau de S limité par une courbe quarrable le même résultat est vrai, comme il résulte de la démonstration précédente. Remarquons d'ailleurs que toute section plane de S étant convexe est rectifiable et par suite quarrable.

[82] On voit aussi que si une surface convexe S enveloppe une surface convexe S' l'aire de S est supérieure à celle de S'; de là résulte que l'aire de S' est finie si celle de S est finie et comme on peut prendre pour S un cube, toute surface convexe est quarrable. De plus son aire peut être définie comme la limite supérieure de celles des polyèdres convexes inscrits.

Les exemples de ce paragraphe montrent que l'on pourrait en géométrie élémentaire définir d'une manière générale l'aire d'une surface S comme la plus petite limite des aires des surfaces qui tendent vers S.

66. Pour les surfaces simples que nous venons d'examiner l'aire se calcule par une suite dénombrable d'opérations. Dans le cas général, pour calculer l'aire de la surface par les procédés précédemment indiqués, il faut d'abord diviser la surface en morceaux aussi petits que l'on veut par des courbes quarrables. Nous savons obtenir une telle division si la surface est donnée comme limite de surfaces polyédrales dont les aires n'augmentent pas indéfiniment.

Supposons la surface S donnée par:

$$x = f(u,v), \qquad y = \varphi(u,v), \qquad z = \psi(u,v);$$

[77] Puisque nous avons défini une surface fermée comme ayant tous ses points frontières confondus en un point A, nous pouvons seulement affirmer que les frontières des S_i, tendent vers A, et non pas que les S_i sont fermées. Mais en coupant S_i par une sphère Σ_i de centre A, ce qui détermine autour de la frontière de S_i une courbe C_i et en ferment la portion de S_i extérieure à Σ_i par l'une des portions limitées par C_i sur Σ_i on remplace S_i par une surface fermée, laquelle est polyédrale si l'on emploie à la place de Σ_i un polyèdre convenable inscrit dans Σ_i.

u, v décrivant un domaine D. Coupons cette surface par $x = \lambda$, ce qui donne sur S un nombre fini ou infini de courbes. Soient sur S deux points M, N que nous supposons de part et d'autre de $x = \lambda$; nous appellerons $C(\lambda)$ l'une des courbes sections de S par $x = \lambda$, qui sépare S en deux morceaux, l'un contenant M, l'autre N. A $C(\lambda)$ correspond dans le plan $(u, v)\gamma(\lambda)$. Soit D_1 une partie de D balayée par $\gamma(\lambda)$.

Inscrivons dans $\gamma(\lambda)$ un polygone de côtés égaux à l_1 et soient $P(\lambda, l_1)$ le polygone correspondant inscrit dans $C(\lambda)$ et $l(\lambda, l_1)$ sa longueur. $l(\lambda, l_1)$ est une fonction continue de λ, on peut donc la définir par une infinité dénombrable de valeurs, celles qui correspondent aux valeurs rationnelles de λ; et par suite trouver son minimum $m(l_1)$ et la valeur λ_1, pour laquelle il est atteint.

Soient $l_1, l_2, \ldots$ tendant vers zéro, les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ correspondantes ont une valeur limite λ_0; $C(\lambda_0)$ a pour longueur la limite de $m(l_1)$, $m(l_2)\ldots$ et c'est la courbe de plus petite longueur parmi les $C(\lambda)$. Donc si $m(l_1)$, $m(l_2)\ldots$ augmentent indéfiniment S n'est pas quarrable; sinon on sait diviser S en deux morceaux par une courbe quarrable.

On peut donc par une infinité dénombrable d'opérations savoir si une surface est quarrable et, si elle l'est, trouver son aire.

[83] 67. Démontrons que toute courbe quarrable sur une surface $z = f(x, y)$ est quarrable dans l'espace. Soit Γ une courbe quarrable sur la surface considérée S; enfermons-la dans un morceau D de S limité par une courbe rectifiable C, soit l la longueur de C. Faisons subir à D les translations $\frac{\varepsilon}{l}$, parallèles d'une part à oz, d'autre part à zo. Les nouvelles positions de D et l'ensemble des positions occupées par C constitue une surface fermée dont l'aire est deux fois celle de D augmentée de ε. Cette aire peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut; et puisqu'une surface fermée peut être remplacée par une surface polyédrale voisine, l'aire étant changée aussi peu qu'on le veut, Γ est quarrable dans l'espace.

Cette propriété s'applique en particulier au plan, ainsi que nous l'avions annoncé; mais elle n'est pas générale, c'est-à-dire qu'une courbe non quarrable dans l'espace peut être quarrable sur une surface.

Considérons en effet une courbe plane fermée non quarrable C et une circonférence Γ intérieure à C. C n'est pas quarrable dans l'espace et cependant C est quarrable sur la surface quarrable formée d'une part de la surface limitée par C sur le plan, d'autre part de la couronne limitée sur le plan par C et Γ.

68. Nous considérons les surfaces:

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

ayant en tout point un plan tangent et telles que f, φ, ψ aient des dérivées partielles du premier ordre continues.

Isolons sur la surface un morceau qui, par rapport à des axes convenables, ait pour équation $z = f(x, y)$, le plan tangent n'étant jamais parallèle à oz.

Soit D le domaine projection sur oxy du morceau considéré Σ; soit M le maximum de la valeur absolue des dérivées du premier ordre. Divisons D en carrés de côtés parallèles à ox et

oy; supposons tous ces carrés de côté a et soit n le nombre de ceux de ces carrés qui sont intérieurs à D (nous négligerons ceux qui ne sont pas intérieurs à D).

Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ l'un de ces carrés, C la courbe qui lui correspond sur Σ, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ le parallélogramme qui se projette sur $\alpha\beta\gamma\delta$ et qui est dans le plan tangent en un point (ξ, η, ζ) du morceau de Σ limité par C.

La différence entre l'aire de ce parallélogramme et l'aire minima de C est au plus l'aire de la partie du prisme projetant C limitée par cette courbe [84] et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Si nous désignons par ε le maximum de la variation des dérivées partielles dans l'un quelconque des n carrés, cette aire est au plus $2a^2\varepsilon \cdot 4$.

L'aire de $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ est

$$\sqrt{\overline{f'_x(\xi,\eta)}^2 + \overline{f'_y(\xi,\eta)}^2 + 1} \cdot a^2.$$

L'aire intérieure de Σ, ou plutôt de la partie de Σ qui se projette à l'intérieur des carrés considérés, est égale à

$$A = a^2\Sigma\sqrt{f'^2_\xi + f'^2_\eta + 1}$$

à moins de $8a^2\eta\varepsilon$ près. Or A tend, quando a tend vers zéro, vers l'intégrale

$$\int\int \overline{f'^2_x + f'^2_y + 1} dxdy$$

étendue au domaine D; $a^2\eta$ est inférieur à l'aire de D, ε tend vers zéro avec a, donc l'aire est donnée par l'intégrale

$$\int\int \overline{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy.$$

Il suffit d'un changement de variables pour retomber sur la formule connue:

$$\int\int \sqrt{\overline{D\frac{(f,\varphi)}{(u,v)}}^2 + \overline{D\frac{(\varphi,\psi)}{(u,v)}}^2 + \overline{D\frac{(\psi,f)}{(u,v)}}^2}\, dudv.$$

Nous avons en même temps retrouvé la définition qu'emploie Mr. Hermite.

69. Il serait intéressant de savoir si, dans tous les cas où l'intégrale précédente existe, elle représente l'aire et dans quels cas cette intégrale existe.

Les méthodes du §50 avec lesquelles nous avons fait dans le cas des courbes l'étude analogue, permettraient peut-être, bien que des difficultés nouvelles se présentent, d'examiner le cas où il existe en tout point un plan tangent. Mais il faudrait encore étudier le cas où les dérivées partielles de x, y, z existent sans que le plan tangent existe.

J'indiquerai seulement le résultat suivant dont la démonstration est fort simple. Si les dérivées de x, y, z, considérées comme fonctions de u ou de v, sont toutes inférieures en valeur absolue à un nombre M l'intégrale précédente donne une limite supérieure de l'aire.

[85] 70. Dans le chapitre III nous avons appris à former des fonctions qui définissent la courbe rectifiable la plus générale; nous ne résoudrons pas le problème analogue relatif

aux surfaces quarrables[78], nous allons montrer seulement que l'on peut définir une famille intéressante et fort étendue de surfaces quarrables qui jouit de propriétés analogues à celles de la famille des courbes rectifiables: c'est la famille des *surfaces rectifiables*.

Nous dirons qu'une surface S

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

définie pour un certain domaine D du plan (u, v), est rectifiable si, à toute courbe rectifiable de D correspond une courbe rectifiable de S.

Signalons d'abord une différence entre les courbes et les surfaces rectifiables. Dire qu'une courbe est rectifiable c'est donner une propriété de l'ensemble de ses points; dire qu'une surface est rectifiable c'est donner une propriété de l'ensemble de ses points et une propriété de la représentation particulière qui définit la surface. En d'autres termes, une surface rectifiable peut cesser de l'être si l'on change de représentation paramétrique. Par exemple, la demi-sphère

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

n'est pas rectifiable, et la demi-sphère

$$x = R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \qquad y = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = R \cos \theta$$

l'est.

Il est d'abord évident que pour qu'une surface soit rectifiable il faut et il suffit que ses projections le soient; qu'il s'agisse de projections sur des plans ou sur des droites. Nous pouvons donc raisonner sur la surface

$$x = f(u, v), \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Soient a, b deux points du plan (u, v), A et B les points de la surface qui leur correspondent. Nous allons démontrer que le rapport

$$\frac{\text{distance } AB}{\text{distance } ab} = r(a, b)$$

[86] est limité. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait trouver une suite a_1, b_1; a_2, b_2; ... telle que les rapports correspondants augmentent indéfiniment; on pourrait même supposer que les points a_i d'une part, b_i d'autre part ont des points limites a et b. a et b sont confondus, sans quoi $r(a, b)$ serait infini, ce qui est impossible. Choisissons une série convergente à terme

78 Cependant, une surface quarrable étant limite de surfaces dont les aires n'augmentent pas indéfiniment, il est facile d'indiquer un procédé régulier permettant d'obtenir toute surface quarrable par une suite dénombrable d'opérations. Mais un tel procédé n'est pas comparable pour la simplicité à celui qui fournit les courbes rectifiables.

positifs décroissants, soit

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots$$

Soient a_{α_i}, b_{β_i} deux points dont les distances à a sont inférieures à ε_i et tels que $r(a_{\alpha_i}, b_{\beta_i})$ est supérieur à $\dfrac{1}{\varepsilon_i}$. Considérons la courbe obtenue en allant de a à a_{α_1} en ligne droite, de a_{α_1} à b_{β_1} de b_{β_1} à a_{α_1} et ainsi de suite assez de fois pour que le chemin parcouru sur $a_{\alpha_1}b_{\beta_1}$ soit compris entre ε_1 et $2\varepsilon_1$ on arrivera ainsi soit en α_1 soit en β_1 on parcourt la droite qui joint ce point à a, puis on va de a à a_{α_2} et l'on parcourt sur $a_{\alpha_2}b_{\beta_2}$ une longueur comprise entre ε_2 et $2\varepsilon_2$, et l'on va de a_{α_2} ou b_{β_2} à a et ainsi de suite. La courbe du plan (u, v) ainsi parcourue est de longueur au plus

$$4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots).$$

La courbe de la surface ainsi parcourue est de longueur au moins

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{1}{\varepsilon_2} + \dots$$

donc de longueur infinie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi $r(a, b)$ est limité, cette condition est évidemment suffisante; on peut l'exprimer ainsi: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit donnée sous forme rectifiable est que* $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ *considérées comme fonctions de seule variable* u *ou de la seule variable* v *aient des nombres dérivés bornés.*

Occupons-nous de la surface projection sur ox. Les courbes

$$u = f_1(t), \qquad v = \varphi_1(t),$$

f_1 et φ_1 étant croissantes, qui joignent u_0, v_0 à u, v ont une longueur au plus égale à $u - u_0 + v - v_0$ (nous supposons que u_0, v_0 sont les plus petites valeurs de u et v et que u_0, v_0 définit un point de la surface; il est facile de se débarrasser de cette hypothèse); les courbes correspondantes de la surface ont donc des longueurs [87] au plus égales à

$$M\sqrt{2}(u + v - u_0 - v_0)$$

si les nombres dérivés de f sont inférieures à M.

Soit $V(u, v)$ le maximum de ces longueurs, c'est une fonction croissante de u et de v dont les nombres dérivés sont inférieurs à M.

D'ailleurs si

$$u_1 > u_2, \qquad v_1 > v_2,$$

on a:

$$V(u_1, v_1) - V(u_2, v_2) \geqslant |f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)|,$$

donc

$$\begin{aligned} n(u,v) &= \frac{1}{2}[V(u,v) - f(u,v)] \\ p(u,v) &= \frac{1}{2}[V(u,v) + f(u,v)] \end{aligned}$$

sont des fonctions croissantes de u et v et $f(u,v)$ *est la différence de deux fonctions croissantes dont les nombres dérivés sont inférieures à* M.

Si nous avions recherché la condition pour qu'a toute courbe rectifiable $t = \chi(\theta)$ de l'axe des t corresponde sur la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

une courbe rectifiable

$$x = f[\chi(\theta)], \qquad y = \varphi[\chi(\theta)], \qquad z = \psi[\chi(\theta)],$$

nous aurions aussi trouvé que f, φ, ψ sont des différences de fonctions croissantes à nombres dérivés bornés.

71. Montrons que les surfaces rectifiables sont quarrables. Divisons le domaine D du plan (u,v) en carrés. Soit a le côté de l'un d'eux, la courbe qui correspond à son périmètre a une longueur au plus égale à $4Ma$. L'aire minima de cette courbe C est au plus l'aire du cône dont le sommet est sur C et dont C est la directrice. Or on obtient cette aire comme limite des aires analogues relatives aux polygones inscrits dans C et tendant vers C; l'aire minima de C est donc au plus égale à celle que limite dans le plan une courbe de longueur $4Ma$ c'est à-dire au plus l'aire $\dfrac{4M^2a^2}{\pi}$ du cercle de circonférence $4Ma$.

[88] L'aire de la surface est donc au plus celle du domaine D multipliée par $\dfrac{4M^2}{\pi}$.

Une surface rectifiante est donc quarrable et le rapport de l'aire d'un morceau de surface à l'aire de la partie correspondante du plan (u,v) *est borné*.

72. L'ensemble des surfaces rectifiables est fort étendu; il comprend par exemple toutes les surfaces analytiques, tous les cylindres et cônes développables[79], toutes les surfaces convexes, à condition de choisir convenablement la représentation paramétrique. Mais il existe des surfaces quarrables qui ne sont pas rectifiables, quelle que soit la représentation paramétrique choisie.

Considérons en effet dans le plan des zx une courbe $z = f(x)$, passant par l'origine, définie pour $0 < x < 1$ et telle que, s étant l'arc, on ait:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Cette courbe n'est pas rectifiable, mais tout arc de cette courbe ne comprenant pas

[79] Chapitre V

l'origine l'est; c'est-à-dire que le cylindre $z = f(x)$ n'est pas quarrable mais que tout morceau ne rencontrant pas l'axe des y l'est.

Considérons la partie de cylindre qui est située entre les plans $x = 0$, $x = y$; elle est quarrable et d'aire:

$$\int_0^1 x ds = \int_0^1 dx = 1$$

La surface comprenant ce morceau de cylindre et symétrique par rapport aux plans $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = -y$ est donc quarrable; mais il ne passe aucune courbe rectifiable de cette surface par l'origine, donc elle ne peut être mise sous forme rectifiable.

CHAPITRE 5

Surfaces applicables sur le plan

[89] 73. Nous nous servirons de la propriété suivante:

Si dans tout intervalle les fonctions (f, f_1); (φ, φ_1); (ψ, ψ_1) ont les mêmes variations totales finies les deux courbes (f, φ, ψ) et (f_1, ψ_1, φ_1) ont la même longueur.

En effet, soit une division de l'intervalle de variation de t

$$t_0, t_1, \dots t_n.$$

La longueur de la première courbe a pour valeur approchée

$$\Sigma\sqrt{\Sigma f(t_{i+1}) - f(t_i)^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}.$$

Soit $\nu[f(t)]$ la variation totale de f entre t_0 et t.

La somme précédente diffère de

$$\Sigma\sqrt{\overline{\nu[f(t_{i+1}) - f(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]}^2}.$$

de moins de

$$\Sigma S_{f,\varphi,\psi}\overline{\nu[f(t_{i+1}) - f(t_i)] - |f(t_{i+1}) - f(t_i)|} = S\overline{\nu[f(t_n)] - \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|}.$$

Donc la longueur peut être définie comme la limite de

$$\Sigma\sqrt{\overline{\nu[f(t_{i+1}) - f(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]}^2 + \overline{\nu[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]}^2}.$$

et cette somme est la même pour les deux courbes.

74. Considérons une courbe rectifiable quelconque C, $x = f(t)$, portée par l'axe des x, effectuons la transformation ponctuelle $X = \varphi(x)$, φ étant continue. A la courbe C correspond la courbe Γ, $X = \varphi[f(t)]$. Proposons-nous de rechercher quelle doit être la fonction $\varphi(x)$ pour que C et Γ aient toujours la même longueur.

Si la fonction $f(t)$ se réduit à t, Γ a pour équation $X = \varphi(t)$, ce qui montre que $\varphi(x)$ doit avoir entre t_0 et t_1, une variation totale égale à $t_1 - t_0$. [90] Supposons cette condition remplie et prenons pour C une courbe rectifiable quelconque. Inscrivons dans cette courbe un polygone, soit ε la longueur maximum des côtés de ce polygone. Si les sommets de ce polygone correspondent aux nombres t_i, sa longueur est:

$$l(C) = \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

et celle du polygone correspondant de Γ

$$l(\Gamma) = \sum |\varphi[f(t_{i+1}] - \varphi[f(t_i)]|.$$

Or quand ε tend vers zéro la plus petite des limites de cette somme est égale à la variation totale de φ entre $f(t_0)$ et $f(t_n)$ c'est-à-dire à $|f(t_n) - f(t_0)|$. La longueur de Γ est donc supérieure à la corde qui joint les extrémités de C.

Divisons C en arcs partiels, le même raisonnement montre que la longueur de Γ est supérieure à celle du polygone formé par les cordes des arcs partiels considérés. Donc la longueur de Γ n'est pas inférieure à celle de C.

D'ailleurs la longueur de Γ est la limite de la somme $l(\Gamma)$ et d'après ce que nous avons supposé on a:

$$|\varphi[f(t_{i+1})] - \varphi[f(t_i)]| \leqslant |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

c'est-à-dire que $l(\Gamma)$ est inférieure à $l(C)$.

Donc C et Γ ont la même longueur.

Pour trouver toutes les transformations ponctuelles de l'axe des x qui ne changent pas les longueurs des courbes portées par cet axe, il suffit donc de trouver toutes les fonctions $\varphi(x)$ dont la variation totale dans un intervalle quelconque est égale à la variation de x dans cet intervalle. Pour cela, prenons une fonction continue à variation limitée $f(t)$, c'est-à-dire la différence de deux fonctions continues croissantes. Soit $\nu(t)$ la fonction qui représente la variation totale de f entre t_0 et t, affectée du signe $+$ ou $-$ suivant que t est supérieur ou inférieur à t_0. L'équation $x = \nu(t)$ peut être résolue par rapport à t puisque $\nu(t)$ est une fonction croissante, soit $t = \psi(x)$. La fonction $f[\psi(x)]$ est la plus générale répondant à la question.

75. Soient trois fonctions F, Φ, Ψ dont les variations totales, sont dans tout intervalle égales à la longueur de l'intervalle.

La transformation ponctuelle

$$X = F(x), \qquad Y = \Phi(x), \qquad Z = \Psi(x)$$

fait correspondre à toute courbe C une courbe Γ de même longueur. En [91] effet, si C est définie par $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, Γ est définie par $F[f(t)]$, $\Phi[\varphi(t)]$, $\Psi[\psi(t)]$; et les deux fonctions telles, que $f(t)$, $F[f(t)]$, ont, dans tout intervalle, la meme variation totale et il en est de même pour $\varphi(t)$, $\Phi[\varphi(t)]$; $\psi(t)$, $\Psi[\psi(t)]$.

La transformation dont il s'agit fait correspondre à chaque point de l'espace (x, y, z) un seul point de l'espace (X, Y, Z). Mais à un point de cet espace peut correspondre un ensemble de points de (x, y, z) ayant la puissance du continu. Si la transformation était biunivoque, ce serait une symétrie plus un déplacement ou un déplacement.

Remarquons encore qu'à toute courbe de l'espace (x, y, z) correspond une courbe de l'espace (X, Y, Z) mais que la réciproque n'est pas vraie.

76. Soit une surface S, appliquons lui la transformation ponctuelle du paragraphe précédent; on trouve une surface Σ. A toute courbe tracée sur S correspond une ligne de même longueur tracée sur Σ; à toute courbe de Σ correspond une courbe de S car, se donner une courbe sur S ou sur Σ, c'est se donner une courbe dans le domaine plan (u, v) qui sert à définir S.

Entre les points de S *et de* Σ *on peut établir une correspondance biunivoque telle qu'à toute courbe rectifiable tracée sur l'une des surfaces corresponde sur l'autre une courbe de même longueur.*

Deux surfaces qui jouissent de cette propriété sont dites *applicables l'une sur l'autre*. Cette définition n'est intéressante que si par tout point des surfaces considérées passent plusieurs courbes rectifiables. Elle aurait peu d'intérêt s'il s'agissait de cylindres à section droite non rectifiable, car sur de tels cylindres les génératrices sont les seules courbes rectifiables.

La définition précédente n'aurait plus aucun sens s'il s'agissait de surfaces de la forme

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

f et φ étant à variation non bornée, de telles surfaces ne contenant en général aucun arc de courbe rectifiable.

77. Il est, au contraire, très intéressant de savoir si deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre. On sait que, pour une surface analytique

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

la longueur d'un arc correspondant à des fonctions u, v ayant des dérivées [92] continues a pour différentielle

$$\begin{aligned} ds^2 &= S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} \cdot du^2 + 2S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right)} \cdot du dv + S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \cdot dv^2 \\ &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \end{aligned}$$

Pour que deux surfaces analytiques soient applicables l'une sur l'autre, les points (u, v) des deux surfaces se correspondant, il faut que pour les deux surfaces les quantités E, F, G soient les mêmes.

Montrons que ces conditions sont suffisantes; cela est évident pour les courbes analytiques et pour celles qui sont composées d'un nombre fini d'arcs analytiques.

Soit maintenant un arc rectifiable quelconque sur une surface analytique S. Considérons un ligne polygonale P inscrite dans cette courbe. Aux sommets de P correspondent dans le plan (u, v) des points que nous considérons comme les sommets d'un polygone π du plan des (u, v); soit Π la courbe de S qui correspond à π. Nous allons démontrer que, lorsque les côtés de P sont assez petits, la différence des longueurs entre P et Π est aussi petite qu'on le veut.

Soit AB un côté de P, ab le côté correspondant de π. Evaluons le rapport $\mathrm{long}\cdot AB$: $\mathrm{long}\cdot ab$. Si les coordonnées de a et b sont (u, v); $(u + t\cos\theta, v + t\,\mathrm{sen}\,\theta)$ ce rapport est:

$$\left(\frac{AB}{ab}\right)^2 = r^2(u, v, \theta, t) = \frac{1}{t^2} S[f(u + t\cos\theta, v + t\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(u, v)]^2.$$

Cette fonction n'est définie que pour $t \neq 0$, nous poserons

$$r^2(u, v, \theta, 0) = E\cos^2\theta + 2F\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + G\,\mathrm{sen}^2\,\theta.$$

La fonction r^2 ainsi définie est continue par rapport à l'ensemble $u, v, \theta, 0$. Cela est évident si $t \neq 0$; montrons qu'il en est encore ainsi pour le point $u_0, v_0, \theta_0, 0$. Si cela n'était pas il serait possible de trouver une suite de valeurs u_i, v_i, θ_i, t_i tendant vers $u_0, v_0, \theta_0, 0$ les valeurs correspondantes $r^2(u_i, v_i, \theta_i, t_i)$ ne tendant pas vers $r^2(u_0, v_0, \theta_0, 0)$. Dans une telle suite aussi loin que l'on aille, on trouvera des valeurs de t_i différents de zéro, car $r(u, v, \theta, 0)$ est continue par rapport à l'ensemble u, v, θ. On peut donc supprimer tous les groupes u_i, v_i, θ_i, t_i pour lesquels t_i est nul, ou, ce qui revient au même, supposer tous les t_i différents de zéro. Nous avons à chercher [93] la limite de

$$\frac{1}{t_i^2} S[f(u_i + t_i\cos\theta_i, v_i + t_i\,\mathrm{sen}\,\theta_i) - f(u_i, v_i)]^2.$$

Ceci s'écrit

$$S[f'_u(u_i + \eta'_i t_i\cos\theta_i, \eta_i + \eta'_i t_i\,\mathrm{sen}\,\theta_i)\cos\theta_i +$$

$$+ f'_v(u_i + \eta'_i t_i\cos\theta_i, \eta_i + \eta'_i t_i\,\mathrm{sen}\,\theta_i)\,\mathrm{sen}\,\theta_i]^2.$$

Les nombres η'_i correspondant à f, n''_i à φ, n'''_i à ψ étant compris entre zéro et un.

Les dérivées premières sont continues par rapport à l'ensemble u, v donc la limite est

$$S[f'_u(u_0, v_0)\cos\theta_0 + f'_v(u_0, v_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0]^2 = r^2(u_0, v_0, \theta_0, 0).$$

La fonction $r^2(u, v, \theta, t)$ étant continue, on peut trouver une valeur η telle que, pour

$$|u_1 - u_2| < \eta, \qquad |v_1 - v_2| < \eta, \qquad |t_1 - t_2| < \eta,$$

on ait:

$$|r(u_1, v_1, \theta, t_1) - r(u_2, v_2, \theta, t_2)| < \varepsilon.$$

Supposons tous les côtés de π de longueur inférieure à η et soit $A\alpha B$ l'arc de Π correspondant au côté ab de π. Evaluons la longueur de cet arc.

Pour cela inscrivons un polygone Q dans l'arc, un côté MN de ce polygone correspond à un segment mn porté par le côté ab et l'on a, en conservant les notations précédentes

$$\left| \frac{\text{long } MN}{\text{long } mn} - r(u, v, \theta, 0) \right| < \varepsilon.$$

Donc

$$|\text{long } A\alpha B - \text{long } ab \cdot r(u, v, \theta, 0)| < \text{long } ab \cdot \varepsilon.$$

Mais on a aussi

$$|\text{long } AB - \text{long } ab \cdot r(u, v, \theta, 0)| < \text{long } ab \cdot \varepsilon.$$

Et par suite

$$\text{long } A\alpha B - \text{long } AB < 2\text{long } ab \cdot \varepsilon.$$

On en déduit:

$$\text{long } \Pi - \text{long } P < 2\text{long } \pi \cdot \varepsilon.$$

[94] La longueur de π tend vers la longueur de la courbe c du plan des (u, v) qui correspond à la courbe considéré C de l'espace. Montrons que c est rectifiable si la surface dont il s'agit n'a pas de point singulier. On sait qu'on appelle ainsi ceux pour lesquels les trois déterminants fonctionnels tels que $\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ sont nuls. (Il s'agit là soit de points singuliers de la surface, soit de poins singuliers de la représentation paramétrique en u, v).

Les dérivées premières de f, φ, ψ ne s'annulent donc pas en même temps et par suite $r^2(u, v, \theta, 0)$ est toujours supérieur à un nombre fixe positif. Si l'on choisit π assez petit il en est de même, pour $0 < t < \pi$, de $r^2(u, v, \theta, t)$ que nous supposerons supérieur à $M^2 > 0$.

Donc on a:

$$\frac{\text{long } ab}{\text{long } AB} < \frac{1}{M}(M > 0)$$

e par suite

$$\frac{\text{long } c}{\text{long } C} < \frac{1}{M}$$

et puisque C est rectifiable c l'est.

La différence long π − long P tend donc vers zéro quand P tend vers C et l'on peut dire que: sur une portion de surface analytique, ne contenant aucun point singulier la longueur d'une courbe C est la limite inférieure des longueurs des courbes de la surface dont C est la limite.

Nous avons déjà vu que si deux surfaces analytiques S et Σ ont le même ds^2, à toute courbe analytique, ou composée d'un nombre fini d'arcs analytiques de l'une correspond une courbe de même longueur sur l'autre. La courbe que nous avons désignée par Π est composée d'un nombre fini d'arcs analytiques, la définition de la longueur que nous venons de trouver prouve donc qu'à toute courbe rectifiable de S correspond une courbe de même longueur sur Σ et inversement.

Nous avons retrouvé le résultat classique pour que deux surfaces analytiques soient applicables l'une sur l'autre, les points de ces deux surfaces correspondant aux mêmes valeurs de u, v étant homologues: il est nécessaire et suffisant qu'elles aient même ds^2[80].

[95] 78. Demandons-nous maintenant si toutes les surfaces applicables sur une surface analytique sont analytiques.

Par exemple toutes les surfaces applicables sur lé plan sont-elles analytiques? – Soit C le cône

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

On sait, d'après la théorie classique, qu'il est applicable sur le plan. Effectuons la transformation ponctuelle

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \Psi(z),$$

Ψ ayant entre z_0 et z, une variation totale égale $|z_0 - z_1|$. A C correspond une surface Γ applicable sur C; Γ est de révolution et n'est ni un cône, ni un cylindre, c'est une surface non analytique. Si en particulier nous prenons pour la fonction Ψ l'une de celles qui ont été définies au chapitre III et qui ont des maxima et des minima dans tout intervalle[81] la surface Γ *est une surface de révolution applicable sur le plan et ne contenant aucun segment de droite*[82].

79. Des exemples analogues à celui qui précède peuvent être obtenus par des procédés différents. Occupons-nous toujours des surfaces applicables sur le plan.

La théorie classique montre que les développables analytiques sont applicables sur le plan. Soit S une telle développable, G l'une de ses génératrices, G partage S en deux morceaux S_1, S_2.

Faisons glisser S_2 le long de G, puis faisons tourner S_2 autour de G. Après cette double opération géométrique on obtient une nouvelle surface Σ qui est applicable sur le plan ou plus exactement dont un morceau comprenant un segment de G, plus ou moins grand suivant la grandeur de la translation de S_2, est applicable sur le plan.

La même opération répétée un nombre infini de fois pour une infinité dénombrable de génératrices formant un ensemble partout dense sur la surface donnera, si les translations et les rotations sont convenablement choisies, une surface réglée applicable sur le plan et ne contenant aucun morceau de développable.

[96] Prenons maintenant une développable analytique S et soit C une courbe analytique tracée sur S. Réalisons la correspondance entre S et le plan, soit c la transformée de C. Soient A un point quelconque de C, P le plan tangent en A à S, Q le plan osculateur en A à C, et soit P′ le symétrique de P par rapport à Q.

Les plans P′ ainsi définis enveloppent une développable S' dont on peut réaliser l'application sur le plan de façon qu'à C corresponde c. Si C n'est pas géodésique S et S' sont deux surfaces

[80] On pourrait étendre ce résultat à des cas plus généraux, en ne supposant pas les surfaces analytiques. Mais ce qui précède suffit pour légitimer les applications que l'on fait de la méthode classique.

[81] C'est-à-dire que $f(x)$ étant la fonction définie au §48 nous posons $\Psi(x) = f(x)$.

[82] D'une façon plus précise la méridienne de Γ ne contient aucun segment de droite, mais de plus Γ ne peut contenir un morceau de surface gauche de révolution donc Γ ne contient pas le droite.

différentes.

c partage le plan en deux régions A_1, A_2; C partage s en deux régions S_1, S_2 correspondant respectivement à A_1 et A_2; de même sur S' nous avons les deux régions S'_1, S'_2.

Soit S la surface $S_1+S'_2$; c'est une surface non développable applicable sur le plan[83].

Pour bien définir Σ, c'est-à-dire pour distinguer entre $S_1 + S'_2$ et $S_2 + S'_1$ nous prenons arbitrairement un point M sur S, ce point M fixera celle des régions que nous désignons par S_1. Dans toutes les opérations ultérieures ce point M restera fixe.

Σ peut être définie comme la surface applicable sur le plan, formée de deux morceaux de développables analytiques dont la frontière commune est la ligne correspondante à c, et qui autour de M est confondue avec S; ce que nous rappellerons par la notation $\Sigma(S, c, M)$.

$c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ étant n courbes analytiques planes ne se rencontrant pas, nous désignerons par $\Sigma(S, c_1, c_2, \ldots c_n, M)$ la surface applicable sur le plan, formée de morceaux de développables analytiques dont les lignes singulières – c'est-à-dire les frontières communes à deux morceaux analytiques – sont les courbes qui correspondent à $c_1, c_2, \ldots c_n$ et qui est confondue avec S autour du point M.

Soient maintenant $c_1, c'_1; c_2, c'_2; \ldots$ des courbes analytiques planes ne se rencontrant pas.

Considérons les surfaces

$$S, \Sigma(S, c_1, c'_1, M), \sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, M) \ldots,$$

si les courbes c_i, c'_i sont convenablement choisies, ces surfaces auront une surface limite applicable sur le plan.

Pour obtenir l'exemple du paragraphe précédent il faut choisir pour [97] surface S le cône

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad z > 0,$$

pour courbes c_i, c'_i celles qui correspondent aux parallèles de ce cône passant par les points A_i, B_i (notations du paragraphe 48) situés sur la génératrice

$$y = 0, \qquad z = x$$

et pour point M, l'origine O.

Désignons par $\Sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots O)$ la surface ainsi obtenue.

80. On peut passer de cette surface à son développement par une déformation continue. Pour le voir, considérons le développement du cône S supposé fendu le long de la génératrice $y = 0$, $z = x$. Ce développement est un secteur que nous supposons placé dans le plan des xy du côté des y positifs, la génératrice $y = 0$, $z = x$ ayant pour transformée la partie positive de l'axe des x, et la portion du cône voisine de cette génératrice et située du côté des y positifs ayant pour transformée la portion du plan des xy voisine de l'axe des x. Soit $S(0)$ ce secteur,

[83] Ou du moins dont un morceau comprenant un arc de C est applicable sur le plan.

c'est sur lui que sont tracées les circonférences c_i, c'_i. Désignons par $S(t)$ le cône

$$z^2 = t^2(x^2 + y^2), \qquad z > 0,$$

ou plus exactement la portion do cône applicable sur $S(0)$ limitée par la génératrice $y = 0$, $z = tx$ et qui, dans le voisinage de cette génératrice, est du côté des y positifs.

$S(1)$ est le cône considéré précédemment S.

Si t représente le temps, par une déformation continue conservant les longueurs, on passe de la surface $S(0)$ (à l'origine des temps), au cône S (au temps 1). On passe de même de la surface $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, c_2, c'2 \ldots c_n, c'_n, 0]$ à la surface $\Sigma[S, c_1, c'_1, c_2, c'_2 \ldots c_n, c'_n, 0]$ par l'intermédiaire des surfaces $\Sigma[S(t), c_1, c'_1 \ldots c_n, c'_n, 0]$.

Ces surfaces ont, t restant fixe, une surface limite $\Sigma[S(t), c_1, c'_1, \ldots 0]$. La transformation ponctuelle

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \Psi_t(z)$$

qui permet de passer de cette surface de révolution, supposée entière, au cône $S(t)$, supposé entier est définie par une fonction $\Psi_t(z)$ qui admet entre z_0 et z_1, une variation totale égale à $(z_0 - z_1)$[84]. Donc cette surface est applicable sur $S(0)$.

[98] Comme les surfaces $S(0)$, $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, \ldots c_n, c'_n, 0]$, $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, \ldots 0]$ sont identiques, on voit que l'on passe par une déformation continue du secteur plan à la surface de révolution $\Sigma(S, c_1, c'_1, \ldots, 0)$.

Il est facile de réaliser des modèles des surfaces de révolution applicables sur le plan que nous venons d'obtenir.

On sait, à l'aide d'une feuille de papier, réaliser le modèle d'un cône de révolution par une déformation image de la déformation du cône $S(t)$. De même on peut réaliser une déformation du papier, image de la déformation de la surface $\Sigma[S(t), c_1, 0]$, ce qui donne un modèle de la surface $\Sigma[S, c_1, 0]$ laquelle est formée de deux morceaux de cônes de révolution.

D'une manière générale on sait former un modèle de $\Sigma[S, c, c'_1, \ldots c'_n, 0]$ par la déformation d'une feuille de papier; donc par ce procédé on réalise, avec telle approximation que l'on veut, l'image de $\Sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots, 0)$.

Si l'on admet que l'on peut réaliser par déformation du papier l'image de toute développable analytique, les images de toutes les surfaces définies au §79 s'obtiendront par le même procédé.

La déformation d'une feuille de papier nous permet donc d'obtenir des images des surfaces non analytiques applicables sur le plan aussi parfaites que celles que l'on obtient par le même procédé pour représenter les surfaces analytiques. En ce sens, on peut dire que, pour prévoir l'existence de surfaces non analytiques applicables sur le plan, il suffisait de remarquer combien la forme des surfaces physiquement applicables sur le plan diffère de celle des surfaces développables.

Notons encore que le procédé en apparence le plus simple, celui qui s'est le premier présenté

[84] On le verrait en reprenant les raisonnements du paragraphe 48.

à l'esprit, permettant de faire correspondre un problème géométrique au problème physique de la déformation des surfaces, conduit à la considération de fonctions continues n'ayant pas de dérivées.

81. Les résultats précédents sont en contradiction avec les énoncés classiques relatifs à l'application et à la déformation des surfaces. Nous avons, par exemple, trouvé des surfaces applicables sur le plan et non développables.

La contradiction n'est qu'apparente. Les énoncés classiques sont en effet obtenus à l'aide de raisonnements qui supposent implicitement ou explicitement l'existence et la continuité de toutes les dérivées que l'on est conduit à considérer. Le nombre de ces dérivées varie d'une question à l'autre, dans quelques raisonnements on suppose même que les fonctions dont on s'occupe sont analytiques, de sorte que les énoncés classiques ne sont démontrés que pour certains ensembles de surfaces qui varient suivant la nature de la question. D'une [99] manière générale, les démonstrations sont valables pour l'ensemble des surfaces analytiques et, le plus souvent, les surfaces analytiques s'appliquent les raisonnements employés.

Prenons par exemple ce théorème: Toutes les surfaces applicables sur le plan sont développables.

La démonstration qu'en a donnée Ossian Bonnet[85] *s'applique à toutes les surfaces ayant des rayons de courbure principaux variant d'une façon continue.* En effet Ossian Bonnet démontre que si x, y, z sont les coordonnées d'un point de la surface, α, β celles du point correspondant du plan, on doit avoir

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}}{\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta}}$$

et de là il conclut que les trois fonctions $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial\alpha}$ sont fonctions de l'une d'entre elles, et la théorie ordinaire du déterminant fonctionnel suppose la continuité des dérivées qui interviennent dans le jacobien.

Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$, ... doivent donc exister et être continues pour que le raisonnement d'O. Bonnet ait un sens, ce qui revient à supposer que la surface jouit de la propriété géométrique indiquée.

Les surfaces construites au paragraphe 78 nous montrent que non seulement l'énoncé du théorème d' Ossian Bonnet n'est légitimé que pour certaines surfaces mais encore qu'il n'est exact que si l'on fait certaines restrictions sur la nature des surfaces considérées.

82. Comme autre exemple prenons la réciproque du théorème d'Ossian Bonnet:

Toute surface développable est applicable sur le plan.

On la démontre ordinairement en supposant que l'on appelle surface développable la surface formée par les tangentes à une courbe gauche ayant des plans osculateurs variant

---

[85] *Annali di Matematica*, 2. Série, Tome VII. Cette démonstration est reproduite avec les mêmes notations dans le Tomé I des *Leçons sur le théorie des Surfaces* de Mr. Darboux et dans les *Traités d'Analyse* de MM.rs Jordan et Picard

d'une façon continue, car on met le ds^2 de la [100] surface sous la forme

$$ds_1^2 = \left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right) e^{i\int \frac{ds}{R}} \cdot \left(ds + dl - il\frac{ds}{R}\right) e^{-i\int \frac{ds}{R}}$$

(notations du traité d'Analyse de Mr.PICARD), R désignant le rayon de courbure de la courbe gauche.

On donne couramment au mot surface développable deux significations distinctes. On appelle ainsi:

1. Une surface décomposable en cônes, cylindres et surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche.

2. La surface enveloppe d'un plan dépendant d'un paramètre. – C'est cette définition qui sert dans le théorème d'OSSIAN BONNET.

Soit

$$ux + vy + wz + p = 0$$

ce plan. – L'enveloppe est définie par cette équation et

$$u'x + v'y + w'z + p' = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport au paramètre t dont dépend le plan. C'est-à-dire que l'on obtient l'équation de la surface en résolvant par rapport à t cette seconde équation et en portant dans la première. D'après la théorie des équations implicites cela suppose l'existence et la continuité de u'', v'', w'', p''; mais il n'en résulte pas que la surface soit développable au sens 1.

Supposons en effet que φ'' soit continue, le plan

$$z = tx + t^2y + \varphi(t) \tag{1}$$

a un enveloppe. Les génératrices donnés par (1) et

$$o = x + 2ty + \varphi'(t) \tag{2}$$

varient d'un façon continue. Si donc la courbe donnée par (1), (2) et

$$o = 2y + \varphi''(t)$$

était tangente aux génératrices elle serait rectifiable. Or on peut prendre $\varphi''(t)$ à variation non bornée, donc la surface (1), (2) est développable au sens 2 sans l'être au sens 1. Il est d'ailleurs évident que toute surface développable au sens 1 ne l'est pas nécessairement au sens 2.

L'énoncé de la réciproque du théorème d'OSSIAN BONNET suppose donc que le mot développable ait le sens restreint donné au commencement de ce paragraphe.

[101] Pour obtenir un résultat un peu plus général nous allons rechercher dans quels cas on peut appliquer sur le plan un cylindre, un cône, une surface formée des tangentes à une courbe gauche.

83. Pour qu'un cylindre soit applicable sur le plan il faut qu'entre deux quelconques de ses points on puisse tracer une courbe rectifiable. Si les deux points choisis ne sont pas sur une même génératrice la projection de cette courbe, sur le plan de la section droite du cylindre, ne se réduit pas à un point et par suite est une courbe portée par la courbe section droite; c'est-à-dire que si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

est la section droite la projection considérée a des équations qui s'obtiennent en remplaçant dans ces formules t par une fonction continue d'un paramètre.

La projection étant rectifiable, la section droite l'est aussi[86].

Pour qu'un cylindre soit applicable sur le plan il est donc nécessaire que sa section droite soit rectifiable; cela est aussi suffisant. En effet prenons sur la section droite une origine O, et faisons correspondre à tout point a de cette section droite le point A de l'axe des x tel que OA soit égal à la longueur de l'arc Oa de section droite. Faisons correspondre de plus à toute génératrice une parallèle à l'axe des y (les axes sont rectangulaires) les longueurs portées par les génératrices étant conservées. Cette correspondance réalise l'application.

Soient en effet c une courbe du cylindre, C la courbe correspondante du plan, a et b deux points de c, A et B les points correspondants de C, a_1 et b_1 les points de la section droite appartenant aux mêmes génératrices que a et b, A_1 et B_1 les points correspondants du plan. On a évidemment

$$\overline{A_1B_1} > \overline{a_1b_1}$$

et par suite $\overline{AB} > \overline{ab}$.

Les deux trapèzes rectangles aa_1b_1b, AA_1B_1B ont mêmes bases, donc la différence entre les hypoténuses est inférieure à celle des hauteurs,

$$\overline{AB} - \overline{ab} > \overline{A_1B_1} - \overline{a_1b_1}.$$

[102] D'où, si l'on divise c en arcs tels que ab

$$\Sigma\overline{AB} - \Sigma\overline{ab} = \Sigma(\overline{AB} - \overline{ab}) > \Sigma(\overline{A_1B_1} - \overline{a_1b_1}) = \Sigma\overline{A_1B_1} - \Sigma\overline{a_1b_1}.$$

Les deux premières sommes tendent vers les longueurs de C et c, les deux dernières vers les longueurs des projections de C et c sur l'axe des x d'une part, sur la section droite d'autre part. Ces deux dernières sommes sont égales, donc C et c ont la même longueur.

84. Résolvons le même problème pour les cônes. Soit un cône ayant pour sommet l'origine, s'il est applicable sur le plan il contient des courbes rectifiables non portées par les génératrices.

[86] C'est de là que résulte une propriété qui nous a déjà servi: sur un cylindre dont la section droite n'est pas rectifiable, les seules courbes rectifiables sont portées par les génératrices.

Soit

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

une de ce courbes. La courbe rectifiable

$$x = \frac{f(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \qquad z = \frac{\psi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}$$

est portée par une directrice sphérique du cône. On appelle ainsi pour le cône dont les génératrices ont les cosinus directeurs

$$\alpha = f_1(t), \qquad \beta = \varphi_1(t), \qquad \gamma = \psi_1(t)$$

les courbes

$$x = kf_1(t), \qquad y = k\varphi_1(t), \qquad z = k\psi_1(t),$$

k étant indépendant de t.

Dans un cône applicable sur le plan la directrice sphérique est donc rectifiable. Et réciproquement tout cône à directrice sphérique rectifiable est applicable sur le plan comme on le voit en faisant correspondre à la directrice sphérique un arc de cercle de rayon égal à celui de la directrice sphérique et aux génératrices des rayons de cet arc.

Dans cette application si la directrice sphérique a une longueur supérieure à la circonférence qui porte sa transformée, à un point du plan correspondront plusieurs points du cône; mais autour de chaque point du cône, le sommet excepté, on peut trouver un fragment du cône pour lequel la transformation précédente réalise une correspondance biunivoque avec un certain domaine du plan; cette correspondance conserve les longueurs comme le montre un raisonnement analogue à celui du précédent paragraphe. On dit d'un tel cône qu'il est applicable sur le plan sans rechercher si après l'application un point du plan correspond ou non à un seul point du cône.

[103] On peut encore dire que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône ou un cylindre soit applicable sur le plan est qu'il existe sur la surface une courbe rectifiable rencontrant toutes les génératrices, et ne passant pas par le sommet s'il s'agit d'un cône.*

Remarquons que, puisqu'il existe des fonctions dérivables à variation non bornée, il existe des courbes ayant des tangentes en tout point et qui ne sont pas rectifiables, *donc des cônes et des cylindres ayant des plans tangents suivant chaque génératrice et qui ne sont pas applicables sur le plan.*

85. Considérons une surface réglée et supposons qu'on puisse, sur cette surface, tracer deux courbes rectifiables ne se rencontrant pas et rencontrant chacune une fois chacune des génératrices; soient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $x(\theta)$, $y(\theta)$, $z(\theta)$ ces deux courbes. A chaque point t de la première courbe faisons correspondre le point θ de la seconde situé sur la même génératrice, alors θ est une fonction continue toujours croissante ou décroissante de t. En remplaçant θ par sa valeur en fonction de t la seconde courbe devient $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$.

La courbe

$$x = x(t) - x_1(t), \qquad y = y(t) - y_1(t), \qquad z = z(t) - z_1(t)$$

rencontre toutes les génératrices du cône directeur de la surface dont le sommet est l'origine, cette courbe étant rectifiable, le cône est applicable sur le plan.

Ceci posé nous allons démontrer que *pour que la surface formée par les tangentes à une courbe gauche soit applicable sur le plan il est nécessaire et suffisant que son cône directeur soit applicable sur le plan.* Dans cet énoncé nous appelons surface applicable sur le plan une surface à tout point de laquelle on peut faire correspondre un point du plan, cette correspondance conservant les longueurs; à un point du plan correspond un nombre fini ou infini de points de la surface.

D'après ce qui précède la condition est nécessaire; pour montrer qu'elle est suffisante, effectuons d'abord l'application du cône directeur sur le plan. Nous allons maintenant faire correspondre à la courbe gauche donnée Γ une courbe plane γ, les arcs correspondants ayant la même longueur, la tangente en tout point a de γ étant parallèle au développement de celle des génératrices du cône directeur qui est parallèle à la tangente à Γ au point A homologue de a[87].

[104] Pour construire γ, divisons Γ à l'aide des points A_i correspondant aux valeurs t_i du paramètre, et portons sur les génératrices Oa'_i correspondantes du développement du cône directeur des longueurs $Oa'_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$; $s(t)$ représentant la longueur de l'arc $(0, t)$ de Γ.

Soit OM_i le vecteur somme de $Oa'_1, Oa'_2 \dots Oa'_i$. Considérons le polygone $OM_1M_2M_3\dots$, si nous supposons $t_0 = 0$ la longueur $OM_1M_2\dots M_i$ comptée sur ce polygone est égale à $s(t_i)$. Faisons correspondre ce polygone à Γ de façon que les longueurs soient conservées; alors M_i correspond à A_i.

Supposons que l'on augmente indéfiniment le nombre des t_i de façon que le maximum de $t_i - t_{i-1}$ tende vers zéro et montrons que ces polygones ont une limite, il suffira de démontrer que les points correspondant aux valeurs choisies t_i tendent uniformément vers des points limites.

Soient M_i et N_{α_i} deux sommets correspondants des deux polygones considérés. On a:

$$\begin{aligned} \text{long } M_iN_{\alpha_i} &\leqslant |\text{long } OM_i - \text{long } ON_{\alpha_i}| \\ &\leqslant \sum_1^i |\text{long } M_iM_{i-1} - \text{long } N_{\alpha_i}N_{\alpha_{i-1}}|. \end{aligned}$$

La longueur M_iM_{i-1} est celle du segment Oa'_i; celle de $N_{\alpha_i}N_{\alpha_{i-1}}$ est celle de la résultante

[87] Cette propriété du développement de l'arête de rebroussement doit être considérée comme la généralisation du théorème classique: la courbure de l'arête de rebroussement est conservée.

des segments

$$Ob'_{\alpha_{i-1}+1}, Ob'_{\alpha_{i-1}+2} \dots Ob'_{\alpha_i}.$$

La somme des longueurs de ces segments est Oa'_i, et ils font entre eux des angles inférieures à ε, si ε est le maximum des angles $a'_iOa'_{i-1}$ donc

$$0 \leqslant \text{long } M_iM_{i-1} - \text{long } N_{\alpha_i}N_{\alpha_{i-1}} \leqslant \varepsilon[s(t_i) - s(t_{i-1})].$$

Ainsi si l'on s'occupe de l'arc $(0, t)$ de Γ, quels que soient les nouveaux points choisis sur Γ entre les A_i, la distance entre deux points correspondants des polygones est inférieure à $\varepsilon s(t)$.

Or ε tend vers zéro avec le maximum de $t_i - t_{i-1}$. Les polygones ont donc une courbe limite γ.

[105] Prenons pour axe des x dans le plan la génératrice Oa'_0 du développement du cône directeur; si l'intervalle $(0, t)$ est assez petit[88] l'angle des génératrices $Oa'_1, Oa'_2 \dots$ avec l'axe des x est inférieur à un droit et par suite les polygones dont γ est la limite ont des équations de la forme

$$y = f_1(x), y = f_2(x) \dots$$

Supposons que ces équations représentent, non les polygones tels que $0A_1A_2 \dots$ mais les courbes que l'on obtient en raccordant les côtés consécutifs $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} par des arcs de cercles. Nous supposerons ces arcs choisis assez petits pour que les longueurs des courbes tendent vers la longueur commune des polygones, c'est-à-dire vers celle de Γ. Les fonctions $f_i(x)$ ont des dérivées continues. De plus, quand i augmente, la dérivée $f'_i(x_0)$ tend vers le coefficient angulaire de la génératrice du développement du cône directeur qui correspond au point $x = x_0$ de γ, soit $\varphi(x_0)$.

Les fonctions bornées dans leur ensemble $f'_i(x)$ tendent vers $\varphi(x)$, donc on a:

$$\lim \int_0^x f'_i(x)dx = \lim f_i(x) = \int_0^x \varphi(x)dx.$$

Donc γ a pour équation:

$$y = \int_0^x \varphi(x)dx,$$

et comme $\varphi(x)$ est une fonction continue

$$y'_x = \varphi(x)$$

et les tangentes à γ sont bien parallèles aux génératrices correspondantes du développement du cône directeur.

[88] Cette restriction est sans importance, il suffit en effet de démontrer que, autour de chaque génératrice, on peut trouver un morceau applicable sur le plan pour qu'il en soit de même pour toute la surface.

De plus

$$\lim \int_0^x \sqrt{1+\overline{f_i'(x)}^2}dx = \int_0^x \sqrt{1+\varphi^2(x)}dx$$

donc γ a même longueur que Γ.

[106] 86. Nous allons maintenant définir la correspondance entre le plan et la surface. A tout point de Γ correspond un point de γ comme il a été dit. A un point A de la surface situé sur la génératrice passant par le point A_1 de Γ correspond un point a situé sur la tangente à γ au point a_1 homologue de A_1 et tel que $a_1 a = A_1 A$, ces deux segments étant dirigés par rapport à γ et Γ, dans des sens correspondants.

Désignons par A' le point du cône directeur situé sur la génératrice parallèle à $A_1 A$ et tel que

$$\overline{A_1 A} = \overline{OA'}$$

et par a' le développement de A'. Alors on a

$$\overline{a_1 a} = \overline{Oa'}.$$

Soient C une courbe rectifiable de la surface, c, C', c' les lieux des points a, A', a' correspondant aux points A de C. On a les égalités segmentaires, si A et B sont sur C,

$$\overline{AB} = \overline{A_1 B_1} + \overline{A'B'},$$

$$\overline{ab} = \overline{a_1 b_1} + \overline{a'b'},$$

donc

$$|\text{long } AB - \text{long } ab| \leqslant |\text{long } A_1B_1 - \text{long } a_1b_1| + |\text{long } A'B' - \text{long } a'b'|.$$

Supposons que C ne rencontre qu'une seule fois chaque génératrice. Alors C' est rectifiable, § 85, et l'on a:

$$|\text{long } AB - \text{long } ab| \leqslant |\text{long arc } A_1B_1 \text{ de } \Gamma - A_1B_1| +$$

$$+ |\text{long arc } a_1b_1 \text{ de } \gamma - a_1b_1| + |\text{long arc } A'B' \text{ de } C' - A'B'| +$$

$$+ |\text{long arc } a'b' \text{ de } c' - a'b'|.$$

Si donc on considère un polygone P inscrit dans C et les polygones p, P', p', P_1, p_1 correspondants on a:

$$|\text{long } P - \text{long } p| \leqslant (\text{long } \Gamma - \text{long } P_1) + (\text{long } \gamma - \text{long } p_1) +$$

$$+ (\text{long } C' - \text{long } P') + (\text{long } c' - \text{long } p').$$

Donc C et c ont même longueur. Ce résultat s'étend immédiatement aux courbes qui rencontrent un nombre fini de fois les génératrices. Pour les autres, qui sont limites de courbes ne rencontrant les génératrices qu'un nombre fini de fois, nous pouvons affirmer que la longueur de la courbe de [107] la surface est au moins égale à la longueur de la courbe correspondante du plan.

Mais la portion considérée de γ est convexe, les tangentes aux deux extrémités font un angle inférieur à un droit; donc, si l'on ne considère que l'une des nappes de la surface (limitée par Γ), la correspondance avec le plan est univoque.

Soit, dans la portion du plan correspondante, un segment ab considérons-le comme la courbe c. On voit immédiatement que c est rectifiable, donc c' l'est et par suite aussi C. De là résulte que l'on a:

$$AB \leqslant ab.$$

Ceci posé, soit une courbe rectifiable quelconque C, inscrivons dans cette courbe une ligne polygonale P d'un nombre fini ou infini de côtés, en ayant soin que tous les points de rencontre de C et de Γ soient des sommets (ou limites de sommets) de ce polygone, p étant le polygone correspondant on a:

$$\text{long } p \geqslant \text{long } P,$$

d'ou

$$\text{long } c \geqslant \text{long } C.$$

En rapprochant ce résultat du précédent on a:

$$\text{long } c = \text{long } C$$

et la surface est applicable sur le plan.

Nous savons donc construire la courbe gauche la plus générale dont les tangentes forment une surface applicable sur le plan; il suffit en effet de se donner le cône directeur applicable sur le plan, ce que nous savons faire, et la fonction continue positive croissante $s(t)$ et d'en déduire Γ par une construction analogue à celle qui a donné γ.

87. Dans les paragraphes précédents on a appelé surface applicable sur le plan une surface S qui correspond à une surface Σ portée par le plan, la correspondance ponctuelle entre S et Σ étant biunivoque et conservant les longueurs.

S étant donnée, Σ n'est pas déterminée. En effet si S est un cône on peut prendre pour Σ un secteur. Soit G l'un de ses rayons qui partage Σ en Σ_1 et Σ_2 et soit Σ_2' le symétrique de Σ_2, par rapport à G; on peut prendre pour Σ, $\Sigma_1 + \Sigma_2'$.

[108] Les surfaces Σ que nous venons de définir relativement aux cônes et aux surfaces formées des tangentes à une courbe sont telles qu'autour de chacun de leurs points (ceux qui correspondent au sommet du cône, et aux points de l'arête de rebroussement exceptés) on puisse trouver un morceau de Σ ne recouvrant qu'une fois le plan. Soit Σ_1 un tel morceau, S_1 le morceau correspondant de S; entre S_1 et Σ_1, la correspondance ponctuelle est biunivoque et Σ_1 est un domaine plan.

C'est la surface Σ ainsi définie, qui est unique puisque deux de ces surfaces seraient composées de morceaux égaux disposés pareillement, que l'on appelle le développement de S.

88. Nous pouvons maintenant donner des exemples de *courbes gauches dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan.*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant une fonction dont la dérivée est continue mais à variation non bornée, nous donnent un tel exemple. On sait que l'on peut même supposer que $\varphi''(x)$ existe, donc il y a des *courbes gauches ayant en tout point un plan oscillateur, et dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan. Une telle surface admet des plans tangents; le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice; le plan tangent dépend donc d'un seul paramètre*

89. Nous terminerons en cherchant les surfaces de révolution applicables sur le plan.

Démontrons d'abord que, si un morceau de surface de révolution est applicable sur le plan, les méridiens correspondent à des droites parallèles ou concourantes. Il est évident que les méridiens étant des lignes de longueur minimum ou géodésiques ont pour transformées des géodésiques du plan, c'est-à-dire des droites.

Soient A, B deux points d'un méridien, a, b leurs correspondants dans le plan; A', B' deux points d'un autre méridien situés respectivement sur les parallèles de A et B, a', b' leurs homologues.

On a $ab = a'b'$ d'ailleurs les deux courbes de la surface qui correspondent aux deux droites ab, $a'b'$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan bissecteur des méridiens de A et de A'; elles sont égales et

$$ab' = a'b.$$

La figure $abb'a'$ est donc un trapèze isocèle.

[109] Soient A'', B'' les symétriques de A, B par rapport au plan méridien de A'; $a''b''b'a'$ est symétrique de $abb'a'$ par rapport à $b'a'$, donc les trois droites ab, $a'b'$, $a''b''$ ou bien concourent en un même point O qui est le centre de la circonférence passant respectivement par a, a', a'' et par b, b', b''; ou bien sont parallèles et a, a', a'' d'une part, b, b', b'' d'autre part sont en ligne droite, aa' et ab étant perpendiculaires.

Si l'on fixe la position d'un méridien par son angle θ avec le méridien de A et si A' correspond à θ_0, le raisonnement précédent montre que tous les points du méridien de A correspondant aux valeurs $\dfrac{m\theta_0}{2n}$, m et n étant entiers, ont leurs homologues sur la circonférence ou la droite $aa'a''$; ils forment un ensemble partout dense sur cette circonférence. Il en est de même pour les points du méridien de B. Les points des méridiens de A et B correspondant à la même valeur de θ sont sur le même rayon. Donc les méridiens ont pour homologues des droites parallèles ou concourantes et les parallèles correspondent aux trajectoires orthogonales de ces droites.

Supposons d'abord que les droites homologues des méridiens soient parallèles, alors les parallèles sont égaux, donc ont le même rayon et puisque les méridiens sont rectifiables, les seules surfaces de cette nature sont

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant à variation bornée.

Supposons maintenant les droites concourantes. Soient A, B, C trois points du même méridien, en conservant les notations précédentes on a:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{\text{arc } bb' - \text{arc } aa'}{\text{arc } cc' - \text{arc } bb'}$$

c'est-à-dire que si l'axe des z est l'axe de révolution, la méridienne est de la forme $z = f(x)$, et s étant son arc, on a:

$$\frac{\delta s}{\delta x} = \text{ constante}$$

quel que soit δx. La distance de deux points d'abscisses x_0 et x_1 étant au moins $|x_0 - x_1|$, la constante est au moins égale à 1, nous poserons

$$\delta s = \sqrt{1+K}\delta x.$$

Si K est nul, la surface est engendrée par l'axe des x tournant autour de l'axe des z, c'est le plan des xy.

[110] Supposons maintenant K positif. Une solution particulière du problème s'obtient en effectuant la transformation ponctuelle

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \psi(z)$$

(ψ ayant dans tout intervalle de longueur l une variation totale égale à l) sur le cône

$$z^2 = K^2(x^2+y^2);$$

nous allons démontrer que c'est la solution générale.

Soit en effet $z = f(x)$ une méridienne, si $\nu(x)$ est la variation totale de f entre x_0 et x, la surface de révolution dont $z = \nu(x)$ est lá méridienne est aussi applicable sur le plan. Nous allons démontrer que $\nu(x)$ est égale à $K(x - x_0)$.

Soient deux points (x_0, x_1) de la courbe $z = \nu(x)$, la longueur de l'arc de cette courbe compris entre ces deux points est supérieure à

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + \overline{\nu(x_1) - \nu(x_0)}^2};$$

cette quantité doit donc être inférieure à $K|x_1 - x_0|$ c'est-à-dire que l'on a:

$$0 < \frac{\nu(x_1) - \nu(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant K.$$

Ceci posé considérons un polygone inscrit dans $z = \nu(t)$ et le polygone Q inscrit dans $z = K(z - x_0)$ dont les sommets ont les mêmes abscisses, il est évident que

$$\text{comp } P \leqslant \text{comp } Q.$$

Des considérations de géométrie élémentaire montrent que, si R est le polygone inscrit dans $z = K(x - x_0) - \nu(x)$ dont les sommets ont mêmes abscisses que ceux de P et Q, on a:

$$\text{comp } Q - \text{comp } P \geqslant \text{comp } R - (x_1 - x_0)$$

si l'on occupe de l'intervalle $x_1 - x_0$.

Si l'on fait tendre vers zéro le maximum de la longueur des côtés de P, le second membre ne tend vers zéro que si $\nu(x) - K(x - x_0) = 0$, or le premier membre tend vers zéro, donc:

$$\nu(x) = K(x - x_0).$$

Les seules surfaces de révolution applicables sur le plan son celles que [111] *l'on obtient par la transformation du* §*78 appliquée aux surfaces de révolution analytiques applicables sur le plan, l'axe de révolution étant* $0z$.

90. Considérons une surface applicable sur le plan. Si l'on exprime les coordonnées d'un point de cette surface en fonction de celles du point correspondant du plan, on a la surface sous forme rectifiable, elle est donc quarrable. Nous allons démontrer que dans l'application sur le plan les aires sont conservées. Le raisonnement s'étendrait d'ailleurs aux surfaces applicables sur une surface analytique quelconque.

Soit une surface S applicable sur le plan (u, ν). Divisons le plan (u, ν) à l'aide de parallèles aux trois directions $w = 0$, $w = 60°$, $w = 120°$ en triangles équilatéraux. A un réseau de ces triangles correspond un polyèdre inscrit dans la surface S; chaque face de ce polyèdre étant d'aire inférieure au triangle correspondant du plan (u, ν), l'aire de S est au plus celle du domaine correspondant dans (u, ν).

Considérons maintenant une suite de surfaces S_i tendant vers S. Choisissons arbitrairement un nombre l et soit m_i le minimum de la longueur des courbes Γ_i de S_i qui correspondent à celles Γ joignant les couples de points du plan (u, ν) qui sont distants d'au moins l.

La plus petite limite des m_i quand $\frac{1}{l}$ tend vers zéro est au moins l. En effet si elle était inférieure à l on pourrait trouver une suite de courbes $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2} \dots$ dont les longueurs auraient une limite inférieure à l. Or cela est impossible car on démontrerait l'existence d'une courbe de longueur inférieure à l limite de certaines des courbes $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2} \dots$ c'est-à-dire d'une courbe correspondant à une courbe Γ du plan (u, ν).

Donc si i est supérieur à un certain nombre i_0 les courbes joignant des points des côtés opposés d'un carré de côté l du plan (u, v) ont pour homologues des courbes de la surface S_i de longueurs supérieures à $l - \varepsilon$.

Soient M et M_i les parties de S et S_i correspondant à ce carré. Nous pouvons sans augmenter la plus petite limite des aires des S_i, supposer que les surfaces S_i sont analytiques.

Divisons M_i par deux séries de courbes orthogonales C_p, C'_p homologues de courbes du plan (u, v) joignant des points des côtés opposés du carré. Soient $a_{j,k}$ la longueur de l'arc déterminé sur C_k par C'_j et C'_{j+1} et $a'_{k,j}$ la longueur de l'arc déterminé par C_j et C_{j+1}. L'aire de M_i est la limite de la somme

$$\sum_k \sum_j a_{kj} a'_{kj}$$

[112] quand le maximum de a_{kj} et a'_{kj} tend vers zéro. Or cette somme est évidemment supérieure à $(l - \varepsilon)^2$, donc la plus petite des aires des M_i est l^2.

Lorsqu'une surface est applicable sur un plan, les parties correspondantes du plan et de la surface ont donc même aire si elles sont quarrables et, si elles ne le sont pas, mêmes aires intérieure et extérieure.

Lorsque deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre, les longueur, les aires et les angles sont conservés; on voit que lorsqu'il s'agit de surfaces non analytiques les longueurs et les aires sont encore conservées, mais les angles ne le sont plus[89].

[89] Supposons réalisée l'image matérielle d'une surface. L'aire, au sens usuel du mot, d'une telle surface peut être mesurée par la masse de la matière qui la constitue. Dans une déformation de la surface cette masse ne change pas, aussi l'aire, au sens usuel du mot, ne changé pas. L'une des conditions que doit remplir l'aire, au sens mathématique, pour qu'on puisse l'assimiler à l'aire, au sens usuel du mot, et pour qu'on puisse considérer la déformation physique d'une surface comme l'image d'une déformation géométrique, est donc d'être inaltérée par les déformations géométriques qui conservent les longueurs.

CHAPITRE 6

Le problème de Plateau

91. Nous nous proposons dans ce chapitre de démontrer l'existence d'une surface S ayant pour frontière un contour C donné et pour aire intérieure l'aire minima de C. L'aire de toute autre surface ayant pour frontière C sera au moins égale à celle de S; en ce sens l'aire de S sera un minimum et la surface S pourra être dite *minima*. Dans le cas où l'on se limite à la considération des surfaces ayant tous les éléments que l'on considère ordinairement (plans tangents, rayons de courbure, etc.) ce problème a reçu le nom de *problème de* PLATEAU.

Il n'est pas démontré que le problème de PLATEAU ait une solution; nous allons voir que si l'on n'astreint la surface minima à aucune condition supplémentaire, l'existence de cette surface peut-être facilement démontrée. Les résultats que nous allons obtenir peuvent ainsi être considérés comme préparant l'étude de l'existence de la solution du problème de PLATEAU.

[113] Les raisonnements qui suivent s'appliquent à d'autres problèmes que celui de PLATEAU; pour énoncer ces problèmes nous allons d'abord définir certaines intégrales de courbe et de surface.

92. Considérons une courbe C dont les points dépendent d'une façon continue d'un paramètre t, une fonction de t sera dite attachée aux points de C. Supposons C rectifiable et $f(t)$ continue. Divisons C en un nombre fini d'arcs partiels de longueurs $l_1, l_2, \ldots$ et soient $f_1, f_2, \ldots$ des valeurs de f pour certains points de ces arcs partiels. La somme $\Sigma l_i f_i$ quand le maximum des l_i tend vers zéro, tend vers une limite déterminée[90] que nous représenterons par

$$\int_C f(t) ds.$$

Si $f(t) = 1$ l'intégrale représente la longueur.

Considérons une surface quarrable S dont les points dépendent d'une façon continue de (u, v) et une fonction continue $f(u, v)$ attachée aux points de cette surface. Divisons S en un nombre fini de morceaux quarrables d'aires $a_1, a_2, \ldots$ et soient $f_1, f_2, \ldots$ des valeurs de f pour certains points de ces morceaux quarrables. Quand le maximum du diamètre de ces morceaux et le maximum de a_i[91] tendent vers zéro la somme $\Sigma f_i a_i$ tend vers une limite déterminée

[90] Il suffit de reprendre le raisonnement classique relatif à l'existence de l'intégrale d'une fonction continué pour obtenir ce résultat.

[91] Il est facile de démontrer que cette seconde condition est une conséquence de la première.

que nous représenterons par

$$\iint_S f(u,v)da.$$

Si $f(u,v) = 1$ l'intégrale représente l'aire.

On aurait pu définir ces intégrales par le procédé suivant. Il est facile de faire correspondre à C un segment, les longueurs étant conservées; il est possible de démontrer qu'on peut établir entre les points de S et les points d'un plan une correspondance conservant les aires[92]. Ces correspondances établies, elles définissent sur la droite ou dans le plan une fonction F qui correspond à f; l'intégrale de F est égale à l'intégrale de courbe ou de surface que nous avons définie.

[114] L'un et l'autre procédé permettent d'indiquer dans quels cas on dira que f est sommable et par suite d'étendre la définition de l'intégrale au cas où f n'est pas continue; mais cela ne nous sera d'aucune utilité.

93. Considérons une famille de courbes rectifiables C et une famille de surfaces quarrables S. Et soit f une fonction définie dans l'ensemble des points de tous les C ou S, et jamais négative. Nous supposerons que f est continue dans cet ensemble. Les intégrales

$$\int_C f ds, \qquad \iint_S f da$$

ont alors un sens. Démontrons que si C (ou S) est la limite des courbes C_i (ou des surfaces S_i) prises dans la famille considérée, l'intégrale relative à C (ou S) est au plus égale à la plus petite des limites des intégrales relatives à C_i (ou S_i).

Divisons C (ou S) en un nombre fini de morceaux de longueurs (ou d'aires) $m_1, m_2, \dots$ et soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les valeurs minima de f dans les morceaux correspondants. A la division de C (ou S) correspond sur C_i (ou S_i) une division en morceaux de longueurs (ou d'aires) $m_1^i, m_2^i, \dots$; les valeurs minima de f dans les morceaux correspondants sont $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots$

Quand i augmente indéfiniment γ_j^i a pour limite γ_j et la plus petite des limites de m_j^i est au moins égale à m_j, donc la plus petite limite de $\Sigma_j m_j^i \gamma_j^i$ est au moins égale à $\Sigma_j m_j \gamma_j$.

Il suffit d'augmenter indéfiniment le nombre des morceaux de façon que le maximum de leurs diamètres tende vers zéro pour avoir la propriété énoncée.

En adoptant des dénominations dues à Mr. Baire on peut dire que l'intégrale considérée est partout égale à son minimum ou encore que, en tant que fonction de C (ou S), elle est semicontinue intérieurement.

Si la famille de courbes (ou surfaces) comprend toutes les surfaces rectifiables (ou toutes les surfaces quarrables) la valeur de l'intégrale pour C (ou S) est exactement la plus petite limite des intégrales relatives aux courbes (ou surfaces) dont C (ou S) est la limite[93]; puisqu'on

[92] Il se peut que cette correspondance ne soit pas univoque.

[93] Cette propriété aurait pu être prise comme définition de l'intégrale considérée. Cette méthode a l'avantage de suggérer des définitions des intégrales

$$\int f(x,y,x',y')dt$$

peut choisir les C_i (ou S_i) de manière que γ_j^i ait pour limite γ_j.

[115] 94. Supposons que les courbes C (ou que les surfaces S) soient toutes celles qui satisfassent à certaines conditions aux limites, – extrémités de C données, ou sur des courbes ou des surfaces données, – frontière de S donnée ou sur des surfaces données.

Nous supposerons de plus que C (ou S) est assujettie à rester dans une portion limitée Π de l'espace, ou que C se déplace sur une surface Σ n'ayant pas de nappe infinie. f étant une fonction continue dans Π ou sur Σ, nous nous proposons de chercher si la fonction

$$\varphi(C) = \int_C f ds \qquad \left(\text{ou } \varphi(S) = \int\int_S f da\right)$$

atteint son minimum.

Lorsque l'on cherche à démontrer qu'une fonction $f(E)$ de certains éléments E atteint son minimum, par la méthode qui sert pour les fonctions continues de points, on est conduit aux deux opérations suivantes:

I. Choisir une suite d'éléments $E_1, E_2, \ldots$ ayant un élément limite e, et tels que $f(E_1), f(E_2), \ldots$ tendent vers la limite inférieure $mf(E)$ de $f(E_i)$.

II. Démontrer que $f(e) = mf(E)$.

D'après ce que nous venons de dire si c (ou s) est la limite de C_i, (ou S_i) $\varphi(c)$[ou $\varphi(s)$] est au plus égale à la plus petite des limites des $\varphi(C_i)$ [ou $\varphi(S_i)$]; d'ailleurs $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] est au moins égale à $m\varphi(C)$ [ou $m\varphi(S)$], donc nous avons effectué l'opération II.

95. Pour effectuer l'opération I, nous emploierons une méthode que Mr. HILBERT a indiquée dans une note des *Nouvelles Annales* (Août 1900), note qu'il avait déjà présentée en septembre 1899 au congrès de Munich.

Ou bien on sait qu'il existe un élément e tel que $f(e) = mf(E)$ ou bien on sait qu'on peut trouver une suite d'éléments $E_1, E_2, \ldots$ tels que $f(E_1), f(E_2), \ldots$ aient pour limite $mf(E)$. Tout revient à choisir parmi les E_i une suite d'éléments ayant un élément limite.

Nous supposerons que E est une fonction de n variables, continue par rapport à l'ensemble $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ces variables, définie dans une portion D de l'espace $(x_1 x_2 \ldots x_n)$, et que l'on a toujours $|E| < P$. Alors E sera dite [116] la limite[94] de E_i si, quel que soit ε, on peut choisir i assez grand pour que l'on ait:

$$(p > 0) \qquad |E(x_1, x_2, \ldots, x_n) - E_{i,p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

pour tout point de D.

$$\int\int f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) dudv$$

dans le cas où les fonctions f sont continues et jamais négatives. Le cas où f est continue se ramène à celui-là par l'addition d'une constante. Avec ces définitions on peut faire fies applications plus étendues des remarques qui suivent.

[94] Nous supposons donc que la fonction E_i tend uniformément vers E. Le mot limite a été employé précédemment dans un sens différent, voir par exemple §23.

Mr. HILBERT remarque que si l'on a certains renseignements sur la variation de la fonction E_i il suffit de choisir parmi les E_i une suite d'éléments e_j tels que, à tout point d'un ensemble A partout dense dans D, corresponde une valeur de E_j qui a une limite quand j augmente indéfiniment, pour que les E_j aient une limite. Pour préciser, nous supposerons que l'ensemble des nombres dérivés des E_i considérées comme fonctions d'une seule, quelconque, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit borné.

Nous supposons donc que l'on ait, quels que soient $i, x_1, x_2, \ldots, x_n, h, p$

$$\left|\frac{E_i(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) - E_j(x_1, x_2, \ldots, x_p + h, x_{p+1}, \ldots, x_n)}{h}\right| < M, \qquad (1)$$

M étant fixe. Nous prenons pour A un ensemble dénombrable partout dense dans P; soient $P_1, P_2, \ldots$ les points de A. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ des nombres décroissant jusqu'à zéro.

Les différentes valeurs $E_i(P_1)$ étant toutes, en valeur absolue, inférieures à P ont au moins une valeur limite α. Nous appelons E_i^1 celles des E_i telles que:

$$|E_i(P_1) - \alpha_1| < \varepsilon_1$$

et nous appelons e_1 l'une d'elles.

Les valeurs $E_i^1(P_2)$ ont au moins une valeur limite α_2. Nous appelons E_i^2 celles des E_i^1 telles que

$$\left|E_i^1(P_2) - \alpha_2\right| < \varepsilon_2,$$

e_2 est l'une des E_i^2. Nous définissons de même $e_3, e_4, \ldots; \alpha_3, \alpha_4, \ldots$

Nous allons montrer qu'on peut définir une fonction e continue dans D par les égalités $e(P_i) = \alpha_i$.

Des égalités 1 on déduit

$$\left|\frac{E_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}}\right| <$$

$$< \frac{|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_n|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}} M.$$

[117] Le maximum du second membre est $\sqrt{n}M$, c'est donc aussi le maximum du premier. L'inégalité précédente s'écrit donc

$$\left|\frac{E_i(P) - E_i(Q)}{l(PQ)}\right| < \sqrt{n}M,$$

le symbole $l(PQ)$ représentant ce que l'on peut appeler la distance de P à Q.

Ceci posé, considérons tous les points de A distants d'un point M de D de moins de η, ils sont distants entre eux de moins de 2η, donc les α correspondants diffèrent de moins de $2\eta\sqrt{n}M$. Donc tous les α correspondant aux P_i tendant vers M ont une valeur limite $e(M)$

qui est fonction continue de M. De plus on a aussi:

$$\left|\frac{e(P)-e(Q)}{l(PQ)}\right| < \sqrt{n}M.$$

Désignons par l_i le maximum, quand M parcourt D, de la limite inférieure de $l(MP_1)$, $l(MP_2)$,..., $l(MP_i)$, l_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$. On a, j étant choisi inférieur à i, de façon que $l(MP_j)$ ne soit pas supérieure à l_i,

$$\begin{aligned}|e_i(M)-e(M)| &\leqslant |e_i(M)-e_i(P_j)|+|e_i(P_j)-e(P_j)|+|e(P_j)-e(M)|\\ &\leqslant l_i\sqrt{n}M+\varepsilon_i+l_i\sqrt{n}M,\end{aligned}$$

donc e est la limite de la suite $e_1, e_2, \ldots$

Nous avons supposé que E est une fonction; si E est un ensemble d'un nombre fini de fonctions dont les nombres dérivés sont bornés, la conclusion subsiste.

Il reste à voir si l'élément limite e ainsi défini fait bien partie des éléments E considérés[95].

96. Reprenons la fonction

$$\varphi(C)=\int_C f ds.$$

L'élément C est l'ensemble des trois fonctions qui représentent les coordonnées [118] des points de C. Supposons que l'on ait $f>k>0$, alors si $\varphi(C_i)$ tend vers $m\varphi(C)$ la longueur de C_i n'augmente pas indéfiniment. Soit L un nombre supérieur aux longueurs des C_i. Les coordonnées des points de ces courbes peuvent être exprimées par des fonctions d'un paramètre t variant entre 0 et L, dont les nombres dérivés sont inférieurs à 1. D'où l'existence d'un élément limite c, puisque nous supposons que C reste dans la portion finie Π de l'espace ou sur la surface Σ. c fait bien partie de la famille des courbes C.

Nous démontrons donc immédiatement l'existence du minimum dans un cas assez étendu[96].

97. Considérons la fonction

$$\varphi(S)=\int\int_S f da.$$

L'élément S est l'ensemble des trois fonctions qui représentent les coordonnées des points de S. Supposons que l'on ait trouvé une suite $S_1, S_2, \ldots$ telle que $\varphi(S_1), \varphi(S_2), \ldots$ tendent vers $m\varphi(S)$; supposons toutes les S_i exprimées à l'aide des coordonnées (u, v) des points d'un domaine D par des fonctions dont les nombres dérivés sont bornés, alors ce qui précède démontre l'existence d'un élément limite.

Nous obtiendrons un exemple où ces conditions sont réalisées en supposant $f=1$, les

95 Dans sa note des *Nouvelles Annales*, Mr. Hilbert n'a exposé sa méthode pour établir l'existence de l'élément limite que sur deux exemples particuliers. Il me semble bien que la méthode qui ressort de ces deux exemples est celle du §95. En tous cas les résultats de ce paragraphe suffisent à démontrer l'existence des éléments limites dans les deux exemples de Mr. Hilbert.

96 Pour $f=1$ on retrouve l'un des exemples que traite Mr. Hilbert.

surfaces S étant toutes celles qui ont une frontière donnée C satisfaisant aux conditions suivantes:

1. La projection de C sur le plan des (x, y) est convexe.

2. Tout plan qui contient trois points au moins de C fait avec le plan des xy un angle inférieur à $\alpha(\alpha < 90^o)$.

De la première condition résulte que c est rectifiable, donc le cylindre projetant C est applicable sur le plan. Dans cette application c devient $\omega\xi$, et l'une des génératrices $\omega\eta$; C devient C_1 d'équation:

$$\eta = \psi(\xi).$$

Toute sécante de C fait, d'après la condition 2, un angle moindre que α avec le plan des xy, donc a fortiori toute sécante de C_1 fait avec $\omega\xi$ un angle inférieur à α. ψ a donc des nombres dérivés inférieurs, en valeur absolue, à $\operatorname{tg}\alpha$; C_1 et C sont rectifiables.

[119] Nous avons trouvé précédemment que C étant rectifiable son aire minima est la limite de celles des polygones inscrits dans C et tendant vers C. Soit P_1, un polygone inscrit dans C, soit n le nombre de ses sommets. Désignons par S_p celui des polyèdres à faces triangulaires qui a P_1 pour frontière, $n + p$ sommets (sur P_1 ou non) et dont l'aire est la plus petite possible.

S_p existe et peut théoriquement être obtenu par des opérations algébriques car tous les polyèdres à $n+p$ sommets peuvent se ramener par des déplacements continus des p sommets variables à un nombre fini de types, et de tels déplacements font varier l'aire d'une façon continue.

S_p ne peut avoir aucun angle polyèdre convexe, ou plus généralement aucun angle polyèdre qu'un plan P puisse couper suivant un contour fermé. Soient en effet S le sommet d'un tel angle, Γ le contour formé par ceux des côtés, ne passant pas par S, des faces qui passent en S. Γ est tout entier d'un même côté de P, donc l'angle polyèdre obtenu en joignant les sommets de Γ à la projection s de S sur P a ses faces respectivement plus petites que celles de l'angle polyèdre considéré.

S_p ne peut être coupé par un plan P suivant une courbe fermée; en effet, cette courbe limiterait sur S_p une surface Σ, soit M un point de Σ, déplaçons le plan P parallèlement à lui-même du côté de M jusqu'à la position limite Π qu'il ne peut franchir sans cesser de rencontrer Σ. Tous les sommets de Σ qui sont dans Π sont des sommets d'angles polyèdres qui peuvent être coupés par un plan suivant un contour fermé[97], ce qui est impossible.

Considérons maintenant le plan P d'une face et montrons qu'il rencontre le contour P_1, en trois points au moins. Tout d'abord il est évident que P contient au moins deux points de P_1, sans quoi on pourrait couper la surface suivant une courbe fermée par un plan voisin de P. Supposons que P ne contienne que deux points de P_1, A et B. Soit γ le contour d'un

[97] Cela n'est pas absolument exact. Les sommets de Σ qui sont dans Π, sont seulement tels que chacun des angles polyèdres correspondants est tout entier d'un même côté d'un plan; mais en remarquant que la frontière de Σ n'a pas de point dans Π, on dé-montrerait l'existence d'angles polyèdres ayant le propriété indiquée.

groupe de faces contenues dans P. La section de la surface par P se compose de groupes de faces et d'une ligne brisée joignant A et B à tous ces groupes de faces. Il existe donc une ligne brisée tracée sur la surface et dans P, joignant A au contour γ, soit $A\alpha$ et une ligne analogue $B\beta$. Joignons α à β par une ligne l intérieure à γ et soient AM_1B, AM_2B les deux parties de P_1. Les [120] contours $AM_1\beta l\alpha A$, $AM_2\beta l\alpha A$ ne traversent pas le plan P il en est donc de même des portions de S_p limitées par ces contours. Or sur l'une des deux lignes brisées α, β, en lesquelles est divisé γ, on pourra trouver un sommet Q tel que les deux côtés qui aboutissent en Q forment un angle aigu. On voit sans difficulté qu'un plan voisin de P coupe l'angle polyèdre Q suivant une courbe fermée; ce qui est impossible.

Dans ce qui précède nous n'avons rien supposé sur le polygone P_1, il nous faut tenir compte maintenant du fait que, comme C, il vérifie les deux conditions énoncées au début de ce paragraphe.

La projection de S_p est alors le domaine du plan des xy limité par la projection p_1 de P_1, chaque point de ce domaine étant projection d'un seul point de S_p [98]. L'équation de S_p sera donc de la forme

$$z = f(x, y),$$

f ayant des nombres dérivés au plus égaux, en valeur absolue, à $\operatorname{tg}\alpha$ et étant définie dans le domaine limité par p_1.

Considérons l'une des surfaces S_p d'indice assez grand pour que son aire diffère de l'aire minima de P_1 de moins de ε_1. Ajoutons à S_p les triangles qui ont pour bases les côtés de P_1 et respectivement pour sommets les milieux des arcs que limitent sur C les bases correspondantes.

La nouvelle surface a un contour P_1' sur lequel nous opérons comme sur P_1, et ainsi de suite.

Nous sommes conduits à une surface S^1

$$z = f_1(x, y),$$

f_1 étant définie dans c, et ayant ses nombres dérivés inférieurs à $\operatorname{tg}\alpha$. Si a_1 est l'aire de la portion du plan comprise entre c et p_1, l'aire de S^1 diffère de l'aire minima de P_1 de moins de

$$\varepsilon_1 + \frac{a_1}{\cos\alpha}.$$

Choisissons une suite de polygones $P_1, P_2 \ldots$ inscrits dans C et tendant vers C et des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ décroissant jusqu'à zéro. A P_i on fait correspondre une surface $S^i[z = f_i(x, y)]$ dont l'aire diffère de l'aire minima [121] de P_i de moins de

$$\varepsilon_i + \frac{a_i}{\cos\alpha}.$$

[98] S'il en était autrement on pourrait en effet trouver un plan parallèle à oz qui couperait S_p suivant une courbe fermée.

La méthode de Mr. HILBERT appliquée aux fonctions $f_i(x, y)$ nous permet de trouver une surface S

$$z = f(x, y)$$

limite de certaines des surfaces S^i. ε_i et a_i tendant vers zéro, les aires des S_i tendent vers l'aire minima de C, qui est donc l'aire de S. Nous savons de plus que les nombres dérivés de f sont, en valeur absolue, au plus égaux à $\operatorname{tg} \alpha$.

Nous avons donc prouvé, dans un cas particulier, l'existence d'une solution pour le problème de PLATEAU généralisé que nous nous étions proposé.

98. L'exemple précédent nous montre que les raisonnements du §95 ne suffisent pas pour prouver immédiatement l'existence d'une surface rendant minimum la fonction $\varphi(S)$, tandis qu'ils suffisaient dans un cas étendu pour la fonction $\varphi(C)$. En traitant le cas particulier relatif à l'intégrale $\int\int_S da$ nous allons voir comment l'on peut dans certains cas démontrer l'existence de l'élément limite. Les raisonnements suivants s'appliqueront toutes les fois qu'on voudra démontrer l'existence d'une surface limitée par un contour donné C et rendant minimum $\varphi(S)$ si l'on sait:

1. qu'il existe une suite de surfaces $S_1, S_2 \ldots$ dont les aires sont bornées et telles que $\varphi(S_i)$ tende vers $m\varphi(S)$,

2. que la distance de deux points de S_i reste, quel que soit i, inférieure à un nombre fixe l, qui tend vers zéro avec le plus grand diamètre de C.

99. Soit C le contour donné. Soient $S_1, S_2 \ldots$ des surfaces polyédrales dont les aires tendent vers l'aire minima de C et dont les contours $P_1, P_2 \ldots$ tendent vers C; nous supposerons que ces contours n'ont aucun côté parallèle à l'un des plans coordonnés, et que les surfaces S_i n'ont aucune face parallèle aux plans coordonnés, ce qui est toujours légitime.

Divisons C à l'aide d'un nombre fini de points $A, B, C \ldots K$, en arcs tels que la projection sur ox d'un quelconque de ces arcs couvre un segment de longueur au plus égale à ε; soient $A_i, B_i \ldots K_i$ les points de division correspondants sur P_i.

[122] Coupons par un plan parallèle au plan des yz passant entre A et B, la section de S_i par ce plan se compose d'un certain nombre dé lignes brisées. Le minimum de la somme des longueurs de ces lignes reste, quel que soit i, inférieur à un nombre fixe Z, ce minimum est atteint pour une certaine abscisse x_i du plan sécant $P(x_i)$. Soit L_i celle (ou l'une de celles) des lignes brisées, qui composent la section $(S_i, P(x_i))$, qui joint un point situé entre A_i et B_i à un autre point de $P(x_i)$. Les abscisses et les longueurs des L_i forment un ensemble borné, donc il est possible de choisir une suite de surfaces S_i pour lesquelles les L_i aient une courbe limite L[99]. Cette courbe L est située dans un plan parallèle à yoz passant entre A et B et joint deux points de C.

On voit que l'on peut, parmi les S_i, choisir une suite $S_1^1, S_2^1 \ldots$ telle que certaines sections de ces surfaces par des plans parallèles à yoz aient des courbes limites. Ces courbes limites sont rectifiables, chacune d'elles joint deux points de C; il existe au moins une extrémité de

[99] C'est le raisonnement qui nous a déjà servi §61.

ces courbes entre A et B, au moins une entre B et C, etc.

Soient a, b deux extrémités consécutives sur C de deux courbes limites α, β; les plans de α et β, qu'on peut toujours supposer distincts, sont distants d'au plus 2ε. Soient c et d les deux autres extrémités de α et β, et soient a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i les éléments correspondant à a, b, c, d, α, β sur S_i^1. Le contour a_ib_i, β_i, d_ic_i, α_i limite sur S_i^1 une surface; d et c sont donc deux points consécutifs sur C sans quoi d_i et c_i ne seraient pas consécutifs sur S_i^1, non plus que a_i et b_i ce qui est impossible. Il en résulte que la projection de l'arc cd sur ox couvre un segment de longueur au plus égale à 2ε.

Le contour a_ib_i, β_i, d_ic_i, α_i est tout entier compris entre deux plans parallèles à yoz, P_i, Q_i, que nous prendrons aussi rapprochés que possible. Remplaçons la portion Σ de S_i^1 limitée par le contour considéré par ce que l'on obtient en remplaçant les parties de Σ non comprises entre P_i et Q_i par les parties de ces plans limitées par les courbes (P_i, Σ), (Q_i, Σ).

En faisant de même pour chacun des contours tels que a_ib_i, β_i, d_ic_i, α_i et chaque surface S_i^1 nous obtenons une nouvelle suite de surfaces[100] $S_1^{(1)}S_2^{(1)}\dots$ On peut dire que le contour C est la somme des contours $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}\dots$ tels [123] que ab, β, dc, α; chacun de ces contours est compris entre deux plans parallèles à yoz distants de moins de 2ε. Au contour $C_j^{(1)}$ correspond sur $S_i^{(1)}$ un contour qui limite une surface $S_{i,j}^{(1)}$.

En raisonnant sur chacune des surfaces $S_{i,j}^{(1)}$ comme sur S_i, et en faisant jouer au plan zox le rôle du plan zoy. On est conduit à la considération de contours rectifiables $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}\dots$ dont C est la somme; ces contours sont formés d'arcs des $C_i^{(1)}$ et de courbes situées dans des plans parallèles à zox, chacun d'eux est compris entre deux plans $x = const.$ distants de moins de 2ε et deux plans $y = const.$ distants de moins de 2ε. On est aussi conduit à des surfaces $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}\dots$ dont certaines courbes tendent vers $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}\dots$, les morceaux limités par ces courbes étant contenus dans les plus petits prismes quadrangulaires, de faces parallèles à zox et yoz, qui en contiennent les frontières.

Remplaçant enfin le plan zox par le plan xoy, on est conduit à des contours

$$C_{1,1}, C_{1,2}, \dots$$

rectifiables que l'on peut enfermer dans des cubes de côté 2ε, dont C est la somme et à une suite de surfaces

$$S_{1,1}, S_{1,2}, \dots$$

dont certaines courbes tendent vers ces contours; les morceaux ainsi limités sur ces surfaces étant enfermés dans les plus petits parallélépipèdes, de faces parallèles à xoy, yoz, zox, qui en contiennent les frontières.

En raisonnant sur les surfaces $S_{1,i}$ comme sur les surfaces S_i, et en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$

100 Cette opération introduit des faces parallèles aux plans coordonnés, mais cela sera sans importance pour la suite.

nous sommes conduits à la suite $S_{2,i}$; puis en remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{3}$ à la suite $S_{3,i}$ et ainsi de suite. Nous aurons aussi les contours $C_{2,i}, C_{3,i} \ldots$

Ceci posé, considérons un contour c fermé sans point multiple du plan (u, v); nous le faisons correspondre au contour C. Divisons le domaine limité par c en domaines partiels à l'aide de contours sans point double $c_{1,1}, c_{1,2} \ldots$ Nous supposons ces contours choisis de manière qu'il soit possible, pour i assez grand, de faire correspondre $S_{1,i}$ au domaine limité par c de façon que les contours de $S_{1,i}$ qui tendent vers $C_{1,1}C_{1,2} \ldots$ correspondent à $c_{1,1}, c_{1,2} \ldots$

Nous avons de la sorte une correspondance entre le réseau des contours $C_{1,1}C_{1,2} \ldots$ qui respecte la correspondance déjà établie entre C et c. Nous [124] traçons des contours $c_{2,1}, c_{2,2} \ldots$ que l'on peut faire correspondre à $C_{2,1}, C_{2,2} \ldots$ sans détruire les correspondances déjà établies, et ainsi de suite.

Montrons qu'il est possible de définir dans le domaine limité sur c, trois fonctions continues par rapport à l'ensemble (u, v):

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

par la condition qu'à tout point d'une courbe $c_{i,j}$ elles fassent correspondre le point homologue de $C_{i,j}$. f, φ, ψ sont actuellement définies pour l'ensemble E des points de $c_{i,j}$; il suffit donc de démontrer qu'à tous les points de E, suffisamment voisins d'un point choisi arbitrairement (u_0, v_0) correspondent des points distants entre eux de moins de η.

Choisissons n assez grand pour que $2\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$ soit inférieur à η. Le point (u_0, v_0) est à l'intérieur d'un contour $c_{n,i}$ ou sur plusieurs de ces contour $c_{n,i_1}, c_{n,i_2} \ldots, c_{n,i_p}$. A tous les points de E intérieurs à C_{n,i_1} ou sur C_{n,i_1}correspondent des points, soit intérieurs au plus petit parallélépipède de faces parallèles aux plans coordonnés et qui contient C_{n,i_1}, soit situé sur ce parallélépipède; donc des points qui diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$. Et comme tous les c_{n,i_α} ont au moins un point commun, à tous les points intérieurs à la somme des domaines qu'ils limitent correspondent des points distants de moins de η.

Les fonctions f, φ, ψ définissent une surface S limitée par C et sur laquelle sont tracés les contours rectifiables C_{ij}.

L'aire de cette surface est la limite, pour n infini, de la somme des aires minima des contours $C_{n,i}$. Cette somme est au plus égale à la plus petite limite des aires des surfaces $S_{n,i}$. Mais l'opération qui permet de passer de $S_1, S_2 \ldots$ à $S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots$ n'augmente pas la plus petite limite des aires; de même on n'augmente pas cette limite en passant des $S_{1,i}$ aux $S_{2,i}$, etc., donc l'aire de S est au plus égale à l'aire minima de C. D'ailleurs l'aire de S ne peut être inférieure à cette aire minima, *nous avons donc démontré l'existence d'une surface d'aire minima limitée par un contour quelconque donné.*

100. Il nous reste à nous demander si la solution obtenue est l'unique solution du problème.

La surface définie par

$$x = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\cos\omega, \quad y = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\omega, \quad z = 0,$$

[125] pour $1 \geqslant \rho \geqslant \frac{1}{2}$, et par

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} - \rho,$$

pour $\frac{1}{2} \geqslant \rho \geqslant 0$, est minima pour son contour qui est la circonférence de rayon 1 du plan des xy et cependant ce n'est pas une surface plane.

Cet exemple montre que, dans le cas des surfaces, si l'un des problèmes que nous faisons correspondre aux problèmes ordinaires du calcul des variations admet une solution, il en admet une infinité.

101. Nous avons déjà remarqué combien il était plus difficile de démontrer l'existence de l'élément limite pour $\varphi(S)$ que pour $\varphi(C)$; nous pouvons apercevoir maintenant une différence nouvelle. Tandis que, pour le cas de la courbe, la nature des conditions aux limites importait peu, dans le cas de la surface la difficulté du problème varie avec la nature de ces conditions.

Supposons en effet qu'il ne s'agisse plus de trouver la surface d'aire minima passant par un contour fixe donné, mais supposons qu'une partie de ce contour soit assujettie à rester sur une surface S. En reprenant les raisonnements précédents on est conduit aux fonctions

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

définies pour tous les points intérieurs à c et continues en (u, v) pour ces points; mais l'on ne sait rien pour les points de c. L'ensemble des points correspondant à ceux d'un domaine limité par c_1, intérieure à c, forme une surface; quand c_1, tend vers c l'aire de cette surface tend vers la valeur minima des aires des surfaces répondant à la question, mais nous ne savons pas si la courbe correspondant à c_1 a une limite.

102. Il serait intéressant de savoir quelles relations il y a entre les surfaces d'aire minima que nous avons trouvées et celles qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \tag{2}$$

Remarquons d'abord que si le problème de Plateau, tel qu'on le pose dans la théorie des surfaces, admet une solution, cette solution convient aussi au problème généralisé. En effet, par hypothèse il n'existe pas de surface, telle que p, q, r, s, t, existent et soient continues, passant par le contour donné et ayant une aire plus petite que la surface S solution du problème non généralisé; s'il existait une surface S_1, d'aire inférieure à celle de S, il [126] existerait une surface Σ_1 d'aire aussi voisine qu'on le veut de celle de S_1, passant par le contour donné, et telle qu'en tous ces points, sauf peut-être sur le contour, p, q, r, s, t existent et soient continues[101]. Il y a donc contradiction.

Il faudrait rechercher maintenant si, parmi les surfaces solutions du problème généralisé, ne se trouve pas une surface satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (2). La méthode qui paraît la plus naturelle consiste à démontrer successivement l'existence et la continuité de chacune des dérivées nécessaires à l'établissement de la formule (2). Les raisonnements qui suivent montrent que dans certains cas des considérations élémentaires permettent d'aborder cette question.

103. Nous supposons que le contour donné C satisfait aux conditions du paragraphe 97 et que, de plus, il est tel que S, une des surfaces d'aire minima construites comme il a été dit à ce paragraphe, ne soit rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points.

Ces conditions sont compatibles, puisqu'elles sont satisfaites quand S est une surface analytique et C un contour assez petit tracé sur cette surface.

On a vu que S est de la forme $z = f(x, y)$, les nombres dérivés de z étant inférieurs à un certain nombre M, quand on se déplace sur une courbe rectifiable quelconque du plan des xy, et que l'on considère z comme fonction de la longueur s parcourue sur cette courbe.

Coupons S par un plan quelconque P parallèle à oz, il existe une courbe section dont l'équation est $z = \varphi(s)$. Cette courbe admet en un point quelconque A deux demi-tangentes, c'est-à-dire que φ a des dérivées à droite et à gauche; s'il en était autrement, si par exemple il n'existait pas de dérivée à droite, la droite issue du point A, située dans P, et faisant avec le plan des xy un angle dont la tangente est $\dfrac{\Delta_d + \lambda_d}{2}$, ($\Lambda_d$ et λ_d étant les nombres dérivés à droite de φ sont inférieurs à M), rencontrerait la courbe section, et par suite S, en un nombre infini de points[102].

[127] 104. Soit a la projection de A sur le plan des xy. Traçons de a comme centre une circonférence Γ de rayon r, soit γ la courbe de S qui se projette en Γ, et soit γ_1 l'homothétique de γ, A étant le centre d'homothétie et le rapport étant tel que la projection de γ_1 soit la circonférence Γ_1 de rayon 1.

Soit $z = \psi(s)$ l'équation de γ_1, s étant l'arc de Γ_1. Si l'on fait tendre r vers zéro, s restant fixe, ψ tend vers une valeur limite $\chi(s)$, $z = \chi(s)$ définissant l'ensemble des points qui se projettent sur Γ_1 et sont situés sur les demi-tangentes précédemment trouvées. Mais $\psi(s)$ a ses nombres dérivés inférieurs à M, de là se déduit immédiatement que $\psi(s)$ tend uniformément vers $\chi(s)$; donc $\chi(s)$ est continue, les demi-tangentes forment un cône Λ.

Désignons par $\varepsilon(\rho)$ le maximum de $|\chi(s) - \psi(s)|$ quand r est inférieur ou égal à ρ, $\varepsilon(\rho)$

---

101 On pourra obtenir cette surface Σ_1 en modifiant celle d'un des polyèdres qui servent à définir l'aire de S_1.

102 C'est uniquement par cette conséquence qu'intervient dans le raisonnement la condition: S n'est rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points. Les demi-tangentes peuvent d'ailleurs exister sans que la condition précédente soit vérifiée. J'ai énoncé cette condition parce que j'avais cru démontrer qu'elle était remplie, lorsque le contour satisfait à certaines conditions, à l'aide de raisonnements élémentaires sur les polyèdres qui servent à définir S, §97. Je considère encore comme probable que, au moins pour des contours simples, de tels raisonnements conduiraient à la démonstration, bien que je ne sois parvenu dans aucun cas à cette démonstration.

tend vers zéro avec ρ.

Remarquons encore que $\chi(s)$ ayant ses nombres dérivés inférieurs à M, la courbe $z = \chi(s)$ est rectifiable; Λ est applicable sur le plan, donc quarrable.

Soit λ la courbe de Λ qui se projette sur Γ. Désignons par s et σ les aires des domaines S' et Λ' limités sur S et Λ par les courbes rectifiables γ et λ. Nous allons chercher une limite supérieure de la quantité $\frac{1}{r^2}|s-\sigma|$.

Soit η un nombre positif arbitrairement choisi; pourvu que l'on trace sur Λ assez de génératrices on partage Λ' en morceaux tels que la somme des aires minima des contours de ces morceaux diffère de l'aire Λ' de moins de $r^2\eta$. Alors en conservant les mêmes génératrices il en est de même quel que soit r.

Les cylindres qui projettent sur xy les contours qui divisent Λ' en morceaux, tracent sur S' des contours qui divisent cette surface en morceaux correspondants. L'aire de S' est exactement la somme des aires minima des contours de ces morceaux. Or les aires minima de deux contours correspondants diffèrent de moins de l'aire que limitent ces deux contours sur le cylindre parallèle à oz sur lequel ils sont tracés. Si donc lr est la somme des longueurs des bases, dans xoy, de ces cylindres on a:

$$|s-\sigma| < r^2\eta + lr \cdot r\varepsilon(r).$$

Dans cette formule l est indépendant de r, mais dépend de η, $\varepsilon(r)$ tend vers [128] zéro avec r; donc, à condition de prendre r assez petit, on a

$$\frac{|s-\sigma|}{r^2} < 2\eta$$

et cela quel que soit η.

r étant ainsi choisi, remplaçons S' par la surface Λ' et la bande que limitent γ et λ sur le cylindre parallèle à oz qui les contient. L'aire de cette nouvelle surface S'_1 est au plus $s + 2\eta r^2 + 2\pi r^2\varepsilon(r)$; donc si r est assez petit elle est inférieure à $s + 3\eta r^2$.

Ceci posé je dis que Λ est une surface minima. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer Λ' par une surface Λ'_1 limitée à γ et d'aire plus petite; soit $\sigma - K^2r^2$ son aire, K est indépendant de r. Par ce changement on remplace S'_1 par S'_2 dont l'aire est au plus $s + (3\eta - K^2)r^2$.

Mais puisque η peut être pris aussi petit que l'on veut, si K n'est pas nul S n'est pas une surface d'aire minima. Donc K est nul, Λ est une surface d'aire minima.

105. Il nous reste à rechercher quels sont les cônes Λ d'aire minima. Appliquons Λ sur le plan et traçons sur la surface ainsi développée une circonférence L_1, soit L cette courbe avant le développement. Si Λ n'est pas un plan[103] on peut trouver sur L deux points A, B tels que la distance AB ne soit pas égale à la distance des points correspondants A_1, B_1 de

[103] On sait que Λ est de la forme $z = f(x, y)$, on n'a donc pas à examiner le cas où Λ recouvrirait plusieurs fois un plan.

L_1. Considérons le cône Σ de sommet A et de directrice L. Soient a et a' deux points de L voisins de A, de part et d'autre de A; développons la portion de ce cône qui comprend AB et qui est limitée par Aa et Aa'. Soit A_2B_2 le développement de AB, sans faire varier A_2B_2 faisons tendre a et a' vers A, ce que nous obtenons ainsi peut être appelé le développement du cône Σ, ouvert suivant sa génératrice dé longueur nulle [104].

Soit L_2 le développement de L, l'aire limitée par L_2 dans le développement est l'aire que limite L sur Σ, or cette aire est plus petite que celle que limite L sur Λ, ou L_1 dans le plan, puisque L_2 n'est pas une circonférence.

[129] Donc Λ est un plan, *la surface S admet des plans tangents*.

La démonstration précédente suppose établi que, de toutes les courbes isopérimètres, la circonférence est celle qui enferme la plus grande aire et qu'il n'existe aucune courbe de même périmètre enfermant la même aire que la circonférence. Il existe plusieurs démonstrations rigoureuses de cette propriété; pour l'application précédente il est nécessaire, ce qui est facile, d'étendre ces démonstrations au cas où les courbes seraient tracées sur une surface de RIEMANN ayant des lignes de croisement issues de A_2, car nous n'avons pas démontré que C ne tournait pas autour de A_2.

[104] Ces précautions seraient inutiles si l'on démontrait que L a des tangentes. En s'appuyant sur la condition: S n'est rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points, on démontre que le long dé chaque génératrice de Λ existent deux demi-plans tangents. Or l'ensemble de ces deux demi-plans doit former une surface minima, donc Λ a des plans tangents, L a des tangentes.