



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Ilha Solteira

Giovana Aparecida Bertolucci

**A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA FORMAÇÃO INICIAL
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA:
CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS E A PRÁTICA DOCENTE**

Ilha Solteira

2020

Giovana Aparecida Bertolucci

**A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA FORMAÇÃO INICIAL
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA:
CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS E A PRÁTICA DOCENTE**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino e Processos Formativos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, da Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Ilha Solteira.

Orientador: Profº. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

Ilha Solteira
2020

B546c	Bertolucci, Giovana Aparecida A construção dos números reais na formação inicial do professor de matemática: : conhecimentos específicos e a prática docente / Giovana Aparecida Bertolucci. -- Ilha Solteira, 2020 169 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira Orientador: Inocêncio Fernandes Balieiro Filho 1. Construção dos números reais. 2. Formação inicial de professores. 3. Prática docente. 4. Conhecimento matemático. 5. Análise Real. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Giovana Aparecida Bertolucci

**A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA FORMAÇÃO INICIAL
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA:
CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS E A PRÁTICA DOCENTE**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino e Processos Formativos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, da Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
UNESP – Câmpus de Ilha Solteira
Orientador

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
UNESP – Câmpus de Bauru

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Ilha Solteira
3 de julho de 2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente e sempre a Deus, por me sustentar em todos os instantes.

Ao meu orientador, Inocêncio, por sempre acreditar neste trabalho, compreendendo minhas ideias e inquietações, estando sempre dedicado a clarificar minhas dúvidas, aprimorando sempre minha formação profissional e pessoal.

Ao meu grande amigo-irmão Alex, por todo aprendizado nesses tantos anos de amizade em que me ajudou a ser uma professora e, sobretudo, uma pessoa melhor, e por ter aceitado embarcar nessa jornada comigo – e em tantas outras que virão.

Aos meus pais, Aparecida e Bento, e ao meu noivo Derek, pelo carinho, apoio e compreensão. Especialmente à minha mãe, que sempre sonhou junto comigo.

Aos meus queridos professores de Matemática, especialmente a Thaís Machado, Marcos Cupaioli, Fernando Scannavino, Erminia Fanti, Sônia Poltroniere, Edivaldo dos Santos, Waldemar Bastos e Ricardo Scucuglia, grandes incentivadores da minha carreira como professora de Matemática, cujos conselhos e ensinamentos me trouxeram a este Programa de Mestrado.

Ao Ibilce e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, pelas oportunidades e por tantas contribuições em minha carreira.

À comissão examinadora deste trabalho, por toda atenção e contribuição a este projeto.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho e para minha formação. Muito obrigada.

RESUMO

A construção dos números reais deve ser tratada na formação inicial do professor de Matemática de forma que sejam abordadas de maneira rigorosa as ideias que se referem às estruturas que compõem o conjunto, porém contextualizadas em seu processo histórico de construção e tratadas de modo que permitam ao futuro professor compreender formal e amplamente conceitos trabalhados no Ensino Básico. Fundamentado nessa perspectiva, este trabalho teve como objetivo investigar como é feita a construção dos números reais, caso seja realizada, na disciplina Fundamentos de Análise (dentre outras denominações) em cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Públicas do estado de São Paulo e, com isso, estabelecer uma discussão que possa colaborar para a formação inicial de professores de Matemática. Com esse propósito, os planos de ensino para a disciplina de Análise dessas instituições foram analisados em uma abordagem qualitativa, por meio da metodologia de pesquisa documental. Também foram examinadas as obras das bibliografias básicas recomendadas nos planos de ensino por meio de pesquisa bibliográfica, a fim de verificar se as referências indicadas contemplam a construção dos números reais. A análise dos planos de ensino revelou que apenas quatro, dos 22 cursos de Licenciatura em Matemática investigados, realizam a construção dos números reais na disciplina Análise Real considerando a formação de professores e o ensino dos números reais na Matemática Escolar. Isso significa que aproximadamente 82% dos cursos investigados trazem uma abordagem insuficiente para essa construção ou não a realizam. É, portanto, necessário que os cursos de Licenciatura em Matemática considerem a formação docente e o ensino dos números reais em Análise Real, explicitando essa intencionalidade em seus planos de ensino, de modo que promova a compreensão dos licenciandos, fundamentando o conhecimento matemático desses futuros professores.

Palavras-chave: Construção dos números reais. Formação inicial de professores. Prática Docente. Conhecimento matemático. Análise Real.

ABSTRACT

The construction of real numbers must be treated in the initial formation of the mathematics teacher so that they are approached in a rigorous way as ideas that refer to the structures that make up the set, but contextualized in their historical construction process and treated so that in the future teacher formal understanding and concepts worked in Basic Education. Based on this perspective, this study aimed to investigate how the construction of real numbers is carried out, if it is carried out, in the discipline Fundamentals of Analysis (among other denominations) in undergraduate courses in Mathematics of Public Institutions in the State of São Paulo and, with this, to establish a discussion that can collaborate for the initial formation of teachers of Mathematics. With this purpose, the teaching plans for the Analysis discipline of these institutions were analysed in a qualitative approach, through the documentary research methodology. The works of the basic bibliographies recommended in the teaching plans were also examined by means of documentary research, in order to verify if the indicated references contemplate the construction of the real numbers. An analysis of the teaching plans revealed only four of the 22 Mathematics Degree courses investigated, performing a construction of real numbers in the discipline Real Analysis considering the training of teachers and the teaching of real numbers in basic school Mathematics. This means that approximately 82% of the courses investigated bring an insufficient approach to this construction or even fail to materialize. Therefore, it is necessary that the Mathematics degree courses consider the teacher training and the teaching of the real numbers in Real Analysis, explaining this intentionality in their teaching plans, in order to promote the understanding of the licensing, basing or learning the mathematician of these students.

Keywords: Construction of real numbers. Initial teacher training. Mathematical knowledge. Real analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Araraquara	82
Quadro 2 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Birigui	82
Quadro 3 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Bragança Paulista	82
Quadro 4 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Campos do Jordão	83
Quadro 5 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Caraguatatuba	83
Quadro 6 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Cubatão	83
Quadro 7 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Guarulhos	83
Quadro 8 – Bibliografia básica de “Análise Real” do IFSP Hortolândia	84
Quadro 9 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Itapetininga	84
Quadro 10 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP São José dos Campos	84
Quadro 11 – Bibliografia básica de “Tópicos de Análise Real” do IFSP São Paulo	85
Quadro 12 – Bibliografia básica de “Fundamentos de Análise” da UFABC Santo André	85
Quadro 13 – Bibliografia básica de “Análise Matemática para o Ensino” da UFSCar São Carlos	85
Quadro 14 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise” da UFSCar Sorocaba	85
Quadro 15 – Bibliografia de “Análise Real para a Licenciatura” da UNESP Bauru	85
Quadro 16 – Bibliografia básica de “Análise Real I” da UNESP Ilha Solteira	86
Quadro 17 – Bibliografia básica de “Análise Real I” da UNESP Presidente Prudente	86
Quadro 18 – Bibliografia básica de “Análise Matemática I” da UNESP Rio Claro	86
Quadro 19 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Matemática” da UNESP São José do Rio Preto	86
Quadro 20 – Bibliografia básica de “Análise na Reta” da UNESP São José do Rio Preto	87
Quadro 21 – Bibliografia básica de “Análise I” IFSP da UNICAMP	87
Quadro 22 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise” da UNICAMP	87
Quadro 23 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise” da USP São Paulo	87
Quadro 24 – Bibliografia básica de “Análise para Licenciatura” da USP São Carlos	88
Quadro 25 – Resumo das bibliografias básicas citadas nos planos de ensino	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EMR	Educação Matemática em Revista
ENADE	Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
PUC	Pontifícia Universidade Católica
RPM	Revista do Professor de Matemática
TEMA	Tendências de Matemática Aplicada e Computacional
UFABC	Universidade Federal do ABC
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
π	Número pi
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\sqrt{}$	Radical
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\in$	Pertence a
$\notin$	Não pertence a
$\leq$	Menor ou igual a
$\geq$	Maior ou igual a
$=$	Igual a
$\Rightarrow$	Implica em
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$\neq$	Diferente de
$ $	Valor absoluto de
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\cup$	União com
$ $	Tal que
$\cong$	Congruente a

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	A IMPORTÂNCIA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA	15
3	IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE REAL E DA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS PARA A DOCÊNCIA NO ENSINO BÁSICO	25
3.1	Importância da disciplina Análise Real para a formação de professores	27
3.2	Importância da construção do conjunto dos números reais para a formação de professores	41
3.3	Algumas abordagens da construção do conjunto dos números reais em Análise Matemática	54
4	A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – CONCRETIZAÇÃO DE UM PROJETO DE PESQUISA	75
4.1	Escolha dos cursos de Licenciatura em Matemática das Instituições Públicas do estado de São Paulo	75
4.2	Metodologia: estudo dos planos de ensino da disciplina Análise Real	76
5	RESULTADOS	81
5.1	Análise das bibliografias básicas indicadas pelos planos de ensino	82
5.2	Análise dos planos de ensino	105
5.3	Considerações: assimilando a análise dos planos de ensino	123
6	CONCLUSÕES	129
	REFERÊNCIAS	134
	ANEXO A – Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP Campos do Jordão	138
	ANEXO B – Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP Guarulhos	140
	ANEXO C - Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP Itapetininga	142
	ANEXO D – Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP São José dos Campos	145

ANEXO E – Plano de Ensino “Fundamentos de Análise” UFABC	148
ANEXO F – Plano de Ensino “Análise Matemática para o Ensino” UFSCar São Carlos	152
ANEXO G – Plano de Ensino “Introdução à Análise” UFSCar Sorocaba	154
ANEXO H – Plano de Ensino “Análise Real I” UNESP Ilha Solteira	158
ANEXO I – Plano de Ensino “Análise Real I” UNESP Presidente Prudente	161
ANEXO J – Plano de Ensino “Análise I” UNICAMP	163
ANEXO K – Plano de Ensino “Introdução à Análise” - UNICAMP	164
ANEXO L – Plano de Ensino “Introdução à Análise” USP São Paulo	166
ANEXO M – Plano de Ensino “Análise para Licenciatura” USP São Carlos	168

1 INTRODUÇÃO

Enquanto aluna do Ensino Fundamental, gostava de Matemática, mas não era a matéria que mais me atraía a atenção. Isso porque ela era sempre apresentada como um conjunto de regras para a realização de operações que às vezes tinha a função de resolver “probleminhas”. Em muitas das vezes em que perguntei, “Mas por que usamos esse procedimento? Por que não fazemos dessa outra forma, se dá o mesmo resultado?”, a resposta que recebia era algo semelhante a: “É a regra, é só praticar e decorar.” Esse tipo de “explicação” acabou me afastando dessa disciplina, de forma que só decorava as fórmulas e resolvia os exercícios, concentrando meus estudos, a partir do nono ano do Ensino Fundamental, em Física, já que nessa disciplina eu conseguia perceber as relações dos conteúdos com o mundo e conseguia compreender as fórmulas e seu uso, aplicando a Matemática que aprendi até então.

Felizmente, no segundo ano do Ensino Médio, comecei a estudar com um professor de geometria que, em suas aulas, justificava o uso das fórmulas, explicando como poderiam ser usadas na resolução de problemas e como aquele conteúdo estudado se relacionava com as profissões que os alunos queriam seguir, ao cotidiano e às outras disciplinas. Esse professor estimulou tanto minha aprendizagem em Matemática que, ao perceber que eu estava curiosa sobre a gênese dos conteúdos estudados, passava seus intervalos explicando os fundamentos dos conceitos que nós estudávamos na aula. Percebi que esse professor ficava muito feliz em recorrer às estruturas matemáticas para explicar aquelas ideias, que hoje percebo que foram demonstradas de acordo com os meus conhecimentos de aluna de Ensino Médio. Ao compreender, enfim, o sentido do “fazer matemático”, descobri que amava essa disciplina e decidi que seguiria a carreira docente para que, quem sabe um dia, poder inspirar em outras pessoas o questionamento e o gosto pela Matemática assim como meu professor fez com a nossa turma.

Terminei o Ensino Médio e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto. Nesse curso, tive a felicidade de cursar Análise na Reta, disciplina em que podíamos explorar estruturalmente todos as ideias que já conhecíamos sobre os

números reais e que havíamos explorados no Cálculo Diferencial e Integral. Estudar a Matemática a partir de suas estruturas em Análise na Reta me estimulou a aprofundar meus conhecimentos nessa área. No entanto, muitos alunos apresentaram dificuldades nessa disciplina.

Realizei então, durante os dois últimos anos e meio da graduação, estudos na Área de Sistemas Dinâmicos, por meio de Iniciação Científica. Esses estudos proporcionaram maior experiência com demonstrações de resultados, além de aumentar minha visão matemática em outros contextos (biológicos, econômicos...) e também ampliar minha experiência com Análise Real e Topologia. O que mais gostava nesse período de Iniciação Científica era de expor meus trabalhos, explicando o processo que levava àquelas conclusões. Ou seja, gostava de ensinar Matemática – o que se confirmou na realização dos estágios.

Atualmente, como professora de Matemática do Ensino Fundamental em uma das escolas em que realizei estágio na época da graduação, busco sempre tratar as dúvidas e os erros dos meus alunos de maneira construtiva, aplicando todos os conhecimentos construídos no decorrer deste curso de Mestrado. Proponho situações-problema que induzam os estudantes a compreenderem os próprios raciocínios, tomando essas dúvidas e erros como ponto de partida do trabalho realizado, sempre impregnado, especialmente, pelas Metodologias de Resolução de Problemas e História da Matemática.

Perguntas do tipo: “Professor, mas por que resolver assim?” e “Como eu uso isso na minha vida?” surgem com frequência em sala de aula de Matemática do Ensino Básico, muitas vezes obtendo respostas insatisfatórias, como “É a regra”, que nada acrescentam ao educando em seu saber matemático e como ser social. A possibilidade de fatos como esse ocorrerem em cursos de graduação em Licenciatura em Matemática é extremamente preocupante, pois prejudica a formação daquele que deve ser preparado para ensinar essa disciplina e suas relações com os diversos contextos. De fato, Shulman (1986, p. 9) considera que os professores não devem apenas definir verdades aceitas para os alunos, mas explicar porque essas afirmações são válidas, qual a sua importância e como se relacionam com outras afirmações e com os contextos maiores.

É dever, portanto, da formação inicial do professor construir com o licenciando habilidades que auxiliem sua prática docente, de modo que o futuro professor conheça a Matemática de modo amplo e rigoroso estruturalmente, para que tenha

um amplo conhecimento dos conteúdos capaz da disciplina que irá lecionar em suas dimensões teórica, pedagógica, didática e curricular, de maneira integralizada e contínua.

Com o propósito de contribuir para o aperfeiçoamento da formação inicial dos professores de Matemática, este trabalho tem como objetivo discutir a importância do desenvolvimento do conhecimento matemático nos cursos de Licenciatura em Matemática visando a prática profissional do futuro professor na Educação Básica. Mais especificamente, a pesquisa desenvolvida neste trabalho busca conhecer como os planos de ensino da disciplina Análise Real apresentam a construção do conjunto dos números reais, caso seja realizada, nos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas de Ensino Superior do estado de São Paulo.

Consideramos que a disciplina Análise Real tem a função de consolidar os conhecimentos desenvolvidos ao decorrer da graduação, principalmente no que se refere ao conjunto dos números reais – conjunto numérico amplamente estudado no decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, no qual o profissional formado pela Licenciatura em Matemática irá atuar. Desse modo, consideramos que as ideias trabalhadas nessa disciplina devem fundamentar, ampla e rigorosamente, o trabalho do professor.

Neste trabalho, consideramos como construção formal dos números reais, pelos métodos de Dedekind ou Cantor, por exemplo, uma construção em que cada uma das ideias é demonstrada formal e rigorosamente, generalizando os resultados até concluir que o conjunto, assim obtido, dos números reais pode ser descrito axiomáticamente como um corpo ordenado completo e qualquer corpo ordenado completo é necessariamente isomorfo ao corpo dos números reais, assim como feito por Spivak (1967) ou Rudin (1971). Abordagens axiomáticas consideram que existe um conjunto para o qual são válidas as propriedades básicas, explorando outras propriedades – por isso consideramos que, nesses casos, não é realizada a construção dos números reais, assim como em Lima (2013). Os números reais também podem ser parcialmente construídos, em abordagens formais que priorizam mostrar os procedimentos utilizados para fazer a construção, de forma resumida, como em Ávila (2001).

Também pode ser parcialmente construído de maneira informal, porém rigorosa, de modo que proporcione a compreensão das ideias relacionadas à expansão dos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, além de explorar

de várias maneiras o conjunto dos irracionais, trazendo as várias representações dos números reais, trabalhando suas propriedades – que justificam muitos algoritmos utilizados no Ensino Básico, e suas aplicações para a resolução de problemas, como em Paterlini (2012), que explora também o ensino desses conteúdos.

Consideramos essencial que seja realizada a construção do conjunto dos números reais e que a abordagem utilizada promova a compreensão do licenciando, de modo que ele consiga fundamentar o ensino dos números reais, em sua futura prática docente, com a finalidade de construir, com os alunos, uma aprendizagem significativa, em que os educandos possam compreender a Matemática e utilizá-la, adequadamente, na interpretação dos diversos contextos e na resolução dos problemas que deles decorrem, sendo capazes de interferir positivamente na construção da sociedade, rompendo com a ideia que há muito persiste de que a Matemática é difícil e apresenta pouca utilidade.

2 A IMPORTÂNCIA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A prática profissional do professor consiste em atividades de diversas naturezas, sendo cada uma delas complexas em suas várias dimensões.

O docente, além de conhecer muito bem os conteúdos que irá ensinar e as diversas metodologias que facilitam o ensino e estimulam a aprendizagem da disciplina que leciona (e suas relações com o mundo prático), deve, por exemplo, se preocupar com planejamentos diversos, estratégias de abordagem e recuperação, registros de ocorrências, organização da sala de aula (tempo, espaço ou material necessário para desenvolver certa atividade), avaliações internas e externas, correções e abordagem de erros ou dúvidas, também deve conhecer o contexto em que vivem seus alunos (para saber abordar determinado conceito e também para entender e saber lidar com o comportamento de cada um dos estudantes) e manter uma comunicação ativa com a família e comunidade dos educandos, dentre outras diversas atividades desenvolvidas pelo professor.

Existem diversas pesquisas que visam auxiliar o professor nessas tarefas. Por exemplo, Libâneo (2013) propõe um planejamento amplo para o trabalho realizado na escola, que parte da percepção das finalidades da educação escolar, propondo reflexões sobre a sociedade e os diversos contextos que influenciarão o processo ensino-aprendizagem, chegando a roteiros para elaboração do plano da escola e do plano de ensino do professor.

No caso específico do processo de ensino-aprendizagem de Matemática, o professor, ao elaborar seus planos de ensino, pode utilizar diferentes abordagens metodológicas. Polya (1995), por exemplo, traz a ideia da resolução de problemas para o ensino da Matemática, como uma abordagem que pretende desafiar o aluno por meio de estímulos que o levarão a desenvolver o raciocínio de forma autônoma, atraindo o estudante e proporcionando condições para que ele utilize a Matemática como instrumento em sua vida e nos diversos contextos que irá atuar.

Também visando promover o interesse e motivação dos alunos, Alves (2001) traz a utilização de jogos para o ensino e aprendizagem da Matemática, que também podem ser utilizados como instrumento de avaliação. Diversos autores, como os que foram citados, preocupam-se com o trabalho docente desde o planejamento à prática em sala de aula.

O uso da História da Matemática, da Modelagem Matemática, das Novas Tecnologias, entre outras, também podem contribuir como metodologias para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, e, dessa forma, também devem fazer parte das discussões para o planejamento das aulas.

A pesquisa desenvolvida para esta dissertação propõe uma reflexão sobre a importância da formação matemática para atuação docente. Em especial, como são abordados os conceitos matemáticos em cursos de Licenciatura com o propósito de preparar o graduando para os desafios que encontrará em sua prática profissional.

Dentre as diversas disciplinas presentes nos cursos de Licenciatura em Matemática, foi escolhida a Análise Real (dentre suas diversas denominações) para investigar como é realizada, caso seja feita, a construção dos números reais com vistas à formação docente, assunto que será tratado mais adiante.

Inicialmente, será abordada a importância do conhecimento amplo do conteúdo, em suas diversas dimensões, e do conhecimento sobre os processos de ensino e aprendizagem, a partir das ideias de Shulman (1986), para a prática docente.

Nesse sentido, Shulman (1986) se preocupa com a maneira que as noções dos professores sobre os conceitos influenciam as concepções dos alunos sobre os conteúdos desenvolvidos. Além disso, investiga como o professor desenvolve seu conhecimento acerca de determinado conceito e como realiza a sua reelaboração com o propósito de ensiná-lo. Para Shulman (1986), essas questões refletem como são elaboradas as explicações, representações (como analogias, exemplos, contraexemplos e demonstrações) e quais são as condições que o docente tem para esclarecer dúvidas dos alunos, ou seja, como ocorre a transição entre o conceito em si, o conhecimento do professor a respeito desse conceito e o conceito a ser ensinado. Desse modo, é possível determinar quais são os reflexos do domínio bem desenvolvido de conteúdos e habilidades pedagógicas na prática profissional do professor.

Ainda para Shulman (1986), é necessário que o professor tenha amplas habilidades para com o conteúdo a ser ensinado e também no que se refere aos processos de ensino. Para esclarecer essa ideia, divide os conhecimentos necessários ao professor em três categorias principais: conhecimento do conceito, conhecimento pedagógico do conceito e conhecimento curricular.

O conhecimento do conceito, como categoria de conhecimento necessária ao docente, vai além da ideia de domínio de fatos. De acordo com Shulman (1986), os professores devem conhecer a estrutura que torna válida determinado conceito na forma em que é proposto, sabendo justificar para seus alunos a validade de determinada proposição, qual sua importância na disciplina em estudo e sua relação com as demais disciplinas e a prática. Assim, o autor afirma que o docente deve entender o assunto que irá lecionar de forma ampla e estrutural, sabendo definir quais são tópicos centrais e periféricos e em quais situações são adequados os usos (ou não) de determinados conteúdos, sendo capazes de ir além de uma mera definição de verdades que devem ser aceitas e memorizadas pelos alunos.

Conhecer a dimensão pedagógica do conceito, segundo Shulman (1986), significa saber como ensinar determinada ideia, o que exige o domínio de diversas formas de representação de um assunto de modo que ele se torne compreensível para outras pessoas, como ilustrações, exemplos, contraexemplos e demonstrações. Para tanto, o citado autor esclarece que é necessário que o professor compreenda as concepções iniciais de cada aluno sobre determinado conteúdo, para que possa abordá-lo de forma que se torne compreensível e não dificulte a reorganização das ideias e a construção do conhecimento dos alunos.

Por fim, Shulman (1986) afirma que é necessário que o professor tenha conhecimento curricular, ou seja, saiba quais conteúdos serão trabalhados nos diferentes níveis de ensino e como serão os materiais didáticos utilizados, tendo condições de refletir sobre a adequação desses instrumentos. Além disso, o referido autor retoma a importância de saber relacionar o currículo que segue ao de outras disciplinas e reforça a necessidade de conhecer as concepções iniciais de seus alunos, ou seja, o que já aprenderam de fato e o que ainda irão aprender.

Portanto, é possível inferir que, para Shulman (1986), as disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática devem possibilitar ao futuro professor um conhecimento matemático amplo, de modo que ele seja capaz de questionar os conceitos aprendidos, fazer analogias, estabelecer exemplos e contraexemplos, compreender a lógica e a estrutura de exposição das ideias matemáticas, aprender a utilizar a lógica para entender, explicar e demonstrar resultados matemáticos válidos de maneira cuidadosa e rigorosa. Além disso, o curso deve preparar o graduando para identificar os conteúdos matemáticos desenvolvidos na Licenciatura

em diversos contextos (práticos e teóricos), sabendo utilizá-los em múltiplas situações e aplicá-los para resolver problemas variados.

Nesta perspectiva, também é possível entender que o futuro professor de Matemática deve concluir a graduação sabendo quais serão os conteúdos matemáticos desenvolvidos na sua prática profissional, ou seja, a Matemática estudada nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Ademais, é necessário que a formação inicial desse profissional contemple diversas metodologias educacionais e práticas que estimule o aluno a reformular os conceitos matemáticos estudados, representando-os de diversas maneiras, com o intuito de que tenha condições de mediar o conhecimento e lidar com dificuldades de seus futuros alunos de modo a estimulá-los a aprender e usar a Matemática.

Desse modo, em conformidade com Shulman (1986), é essencial refletir sobre a importância da formação de professores com amplo conhecimento dos conteúdos que irão lecionar e das maneiras mais efetivas de realizar esse trabalho.

Com o propósito de complementar essas ideias, Moreira e David (2007) também abordaram os conhecimentos necessários à formação do professor de Matemática atentando, sobretudo, às necessidades da prática profissional docente. Para tanto, destacaram as particularidades da Matemática Acadêmica (ou Científica) e da Matemática Escolar para poder compreender melhor a complexidade dos conhecimentos necessários ao trabalho do futuro professor.

A Matemática Acadêmica, segundo aqueles autores, tem como objetivo principal a busca por resultados pautados em definições formais e demonstrações rigorosas. Assim, para Moreira e David (2007), não cabe, portanto, a essa ciência preocupar-se com os diferentes significados das operações e ideias matemáticas envolvidas, mas sim com o rigor formal com que foram definidas ou demonstradas. Segundo esses autores, a ocorrência do erro na Matemática Científica revela que houve uma contradição do processo lógico estabelecido como válido. Dessa maneira, o trabalho realizado é pautado na busca de generalizações e de precisão para os resultados, os quais são fundamentados em processos lógico-dedutivos.

Já a Matemática Escolar, segundo Moreira e David (2007), engloba os conhecimentos que derivam da prática profissional do professor:

[...] a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 20)

Nesse sentido, consoante Moreira e David (2007), o futuro professor deve conhecer a Matemática trabalhada nos anos iniciais do Ensino Fundamental com o propósito de dar continuidade ao ensino nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, períodos nos quais irá atuar. Em vista disso, terá condições de retomar e expandir os conhecimentos trabalhados anteriormente, sem que haja interrupção no processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, aqueles autores consideram essencial que o professor conheça bem os conteúdos e a forma como os alunos o concebem, para saberem como tratar dúvidas e erros, além de conseguirem lidar com a tensão entre as concepções iniciais sobre determinado conceito (que podem estar inadequadas) e com os novos conhecimentos a serem desenvolvidos em torno dele. Para isso, Moreira e David (2007) destacam a importância da resolução de problemas nesses processos, já que, se propostos adequadamente, tendem a desafiar os saberes que os alunos já concretizaram, levando-os a um aprofundamento ou ao desejo de aprender novas ideias matemáticas. Desse modo, o professor pode identificar os diversos significados construídos pelos alunos, podendo guiá-los, em um processo dialético, para o aprendizado de conteúdos matemáticos vistos como abstratos, mas que podem ser utilizados de forma concreta.

Moreira e David (2007) ainda concebem o erro como indicador para o trabalho do professor. De fato, os erros explicitam as concepções inadequadas que já foram internalizadas pelos alunos e que devem ser abordadas pedagogicamente pelo docente para que sejam superadas, de modo que o aluno possa se tornar agente do seu próprio processo de aprendizagem, sabendo utilizar seus conhecimentos de forma correta e ampla.

Segundo aqueles autores, as definições de conceitos matemáticos para os alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ser realizadas para que eles consigam compreender e utilizar tais conceitos dentro e fora do contexto escolar, não necessariamente em uma abordagem estritamente formal. Do mesmo modo, as demonstrações devem ser apresentadas com a finalidade de validar as ideias matemáticas desenvolvidas e fortalecer a capacidade de argumentação dos alunos, e não somente comprovar rigorosamente a veracidade de certa afirmação.

Os autores ainda apontam para a necessidade de formar professores com uma concepção flexível e ampla do conhecimento matemático. Além de conhecer os

diversos significados das operações e ideias matemáticas trabalhadas, ressaltam que é necessário que o futuro professor saiba lidar com algoritmos, entendendo a lógica de funcionamento desses processos e sabendo justificar sua validade, considerando o contexto do processo de ensino e aprendizagem no contexto escolar.

[...] o conhecimento sobre os algoritmos formais ainda continua sendo parte da demanda da prática profissional docente na escola básica hoje e, conseqüentemente, essa questão se coloca, também, para o processo de formação na licenciatura. No entanto, ela quase nunca é discutida nesses cursos. (MOREIRA; DAVID, 2007, p.59)

Em síntese, Moreira e David (2007) consideram que o professor deve ser preparado para ser capaz de fundamentar o ensino nos saberes e vivências dos alunos, de modo que eles entendam os sentidos que a Matemática apresenta em diversos contextos, abstraindo deles os conceitos matemáticos. Para isso, é necessário que o conteúdo seja trabalhado, no curso de Licenciatura em Matemática, de forma que o futuro docente conheça as origens, funções e aplicações dos conceitos matemáticos que são trabalhados no ambiente escolar. Ainda aqueles autores destacam também que a prática docente exige que haja planejamento e também uma boa comunicação com os alunos, para que seja possível compreender seus raciocínios e lidar com suas dúvidas de uma forma construtiva, e não simplesmente corretiva.

Para os autores, é essencial que as diferenças entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar sejam evidenciadas para que os cursos de Licenciatura sejam aprimorados. Nesse sentido, Moreira e David (2007, p. 42) consideram necessário conhecer os saberes (que são discutidos na formação inicial) e os “não-saberes” (que são saberes essenciais à prática docente, mas que não são devidamente discutidos na formação inicial), de modo que estejam fundamentados na prática docente para que eles sejam trabalhados nos cursos de formação inicial de professores de Matemática com a finalidade de que o professor esteja preparado para a complexidade que o trabalho exige diariamente.

Em continuidade, Fiorentini e Oliveira (2013) propuseram uma discussão sobre como deve ser a Matemática trabalhada nos cursos de Licenciatura de modo que o futuro docente consiga fundamentar a sua futura prática profissional. Eles destacaram três das diversas ideias que influenciam a formação de professores de Matemática.

O primeiro ponto de vista a respeito do trabalho do educador matemático, destacado pelos autores, indica que o conhecimento matemático, de forma algorítmica, é suficiente para a formação do professor. Isso se traduz na ideia de que ensinar se aprende ensinando, de modo que seja secundária a preocupação com o caráter didático-pedagógico dos processos ensino e aprendizagem (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 920). Essa concepção, segundo os autores, terceiriza para a prática um dever dos cursos de formação inicial de professores, além de reduzir e deixar de explorar as diversas dimensões do conhecimento matemático que são necessárias ao ensino.

A segunda concepção considera que seja necessário enfatizar a Matemática Acadêmica em cursos de Licenciatura, destacando também a importância do trabalho com as metodologias de ensino, principalmente a didática, no clássico “modelo 3+1” (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 921). Nesse caso, a Matemática Científica passaria por uma adaptação, de forma didática, para ser trabalhada no Ensino Básico.

Em síntese, nessa concepção de prática pedagógica do educador matemático, só existe a Matemática (com letra maiúscula), aquela que vem dos matemáticos profissionais, mas que pode ser transposta/adaptada para o contexto de ensino e aprendizagem. Além disso, nessa perspectiva, o processo formativo enfatiza mais a dimensão técnica e didática (relações entre professor-aluno-conteúdo e métodos de ensino) do que a pedagógica (o sentido, a relevância e as consequências do que ensinamos). (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 921)

Mais uma vez são desconsiderados os vários significados matemáticos e as diferentes abordagens que são exigidas pelo trabalho do professor de Matemática e que não são essenciais para a Matemática Científica. Segundo Moreira e David (2007), esta abordagem desconsidera a prática profissional docente, que deveria ser o foco dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Já a terceira perspectiva considera as diversas atividades realizadas pelo professor, ressaltando a importância de conhecer e refletir sobre essas práticas e buscar, constantemente, uma reelaboração dessas ações de acordo com os diversos contextos e significados. Nessa concepção, são considerados os diversos significados da Matemática de acordo com os vários contextos nos quais essa área do conhecimento se apresenta, como concluem Fiorentini e Oliveira (2013, p. 922): “Ou seja, a matemática em ação do educador matemático está, sempre, situada em uma prática social concreta, na qual ganha sentido e forma/conteúdo próprios,

sendo reconhecida e validada no/pelo trabalho”. Por considerar as diversas áreas de atuação do professor, essa visão inclui uma reflexão sobre a complexidade dos aspectos conceituais, didáticos e pedagógicos no que se refere a todo processo de ensino e também de aprendizagem, desde a preparação de um problema a ser explorado, por exemplo, à maneira como deve ser conduzido o raciocínio de cada aluno em sua resolução, com o intento de estimulá-lo e não restringi-lo.

Assim, essa última concepção exige que o processo de formação matemática do professor esteja impregnado de investigações, uma vez que, além do conhecimento matemático e da aptidão para realizar demonstrações e resolver problemas, o docente deve ser preparado para saber justificar os procedimentos matemáticos. Além disso, deve conhecer outras maneiras de fundamentar e esclarecer tais técnicas ou processos e entender com quais ideias se relacionam e como se organiza a evolução de tais ferramentas. Assim, segundo os autores:

A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925)

Desse modo, segundo esses autores, ao aprender as disciplinas específicas da Matemática, o aluno da Licenciatura teria condições de, além de aprender os conceitos trabalhados, compreender as diversas maneiras como tais ideias se relacionam com a realidade do trabalho pedagógico docente, sabendo como tratar os conteúdos a serem ensinados e como utilizá-los nos diversos contextos da sua futura prática profissional.

Fiorentini e Oliveira (2013, p. 935) recomendam que sejam constituídos grupos colaborativos com formadores de professores, docentes da Educação Básica e licenciandos, com o intuito de discutir práticas de ensino escolar, promovendo assim aprendizagens sobre a complexidade do trabalho docente e dos saberes matemáticos nos vários contextos apresentados.

Os citados autores sugerem, portanto, que haja uma unificação entre as formações matemática, didático-pedagógica e prática profissional. Para isso, o conhecimento matemático desenvolvido nos cursos de Licenciatura deve ser tratado de forma abrangente, compreensiva e precisa, de modo que sejam explorados os

diversos sentidos que a Matemática apresenta nas diversas circunstâncias nas quais se aplica.

São importantes os conteúdos da matemática superior que compõem as disciplinas de formação matemática da licenciatura, pois amplia-se, assim a visão dos futuros professores acerca da matemática como campo de conhecimento. Mas, é necessário adotarmos posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p.935)

Nessa acepção, é possível inferir que os cursos de Licenciatura em Matemática, cujo objetivo principal é a formação docente, devem desenvolver conhecimentos que contemplem a teoria matemática em suas diversas dimensões de modo que prepare o licenciando para a vida profissional.

Ou seja, o curso deve proporcionar uma compreensão do currículo desenvolvido ao longo de todo o Ensino Básico, a fim de que o futuro professor compreenda as concepções iniciais de seus alunos, sabendo como dar continuidade ao processo de aprendizagem e abordar corretamente os novos conteúdos a serem aprendidos. Além disso, é essencial que o professor conheça a Matemática e as diversas formas que ela se concebe em cada etapa do processo de aprendizagem de seus alunos, sabendo trabalhá-la de forma que os educandos consigam enxergar e utilizar corretamente os conceitos desenvolvidos em sala de aula nos seus diversos contextos socioculturais e econômicos, de modo a compreender e interferir positivamente neles.

Para tanto, é necessário que os cursos de Licenciatura em Matemática desenvolvam no futuro docente a capacidade de tratar erros e ideias equivocadas de forma que estimule o aluno a aprender mais e que não gere a falsa impressão de que a Matemática é uma ciência hermética e inacessível. Também é necessário que a graduação prepare o professor para saber justificar as “regras” matemáticas, ou seja, as propriedades e algoritmos estudados nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com o intuito de que o aluno não apenas decore resultados e métodos, mas que consiga compreender os processos matemáticos, desenvolvendo sua capacidade de argumentação e raciocínio lógico.

Portanto, como consideram Fiorentini e Oliveira (2013, p. 924), a Matemática trabalhada nos cursos de Licenciatura, embora tenha inúmeros elementos em comum com a Matemática Científica, deve ser pautada na Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2007), uma vez que o professor deve conhecer as diferentes

representações, explanações diversas e aplicações nas mais variadas situações que envolvem o mundo prático e as outras ciências.

Nessa perspectiva, não significa que o conhecimento matemático específico trabalhado nas Licenciaturas deva ser tratado de forma rasa ou inferior aquele desenvolvido nos cursos de Bacharelado. Na verdade, é o exato oposto: o professor, além de conhecer as definições e demonstrações formais, deve ser capaz de representar e fundamentar sua argumentação de modo que os alunos compreendam e consigam construir as próprias justificativas, a partir da mediação docente, para entender a Matemática como útil e imprescindível na construção e desenvolvimento do mundo. Desse modo, como afirmam Fiorentini e Oliveira (2013):

O domínio desses conhecimentos certamente proporcionará condições para o professor explorar e desenvolver, em aula, uma matemática significativa, isto é, uma matemática que faça sentido aos alunos, ao seu desenvolvimento intelectual, sendo capaz de estabelecer interlocução/conexão entre a matemática mobilizada/produzida pelos alunos e aquela historicamente produzida pela humanidade. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 924)

A partir das reflexões sobre a importância de uma abordagem adequada para os conhecimentos matemáticos trabalhados na Licenciatura em Matemática, pensando na futura atuação do licenciando como docente dessa disciplina na Educação Básica, será discutida agora a importância da disciplina Análise Real para esse curso de graduação. Além disso, será estudada a importância da construção dos números reais, realizada em Análise Real, para a formação e atuação docente.

3 IMPORTÂNCIA DE ANÁLISE REAL E DA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS PARA A DOCÊNCIA NO ENSINO BÁSICO

O Conselho Nacional da Educação (CNE), junto à Câmara de Educação Superior (CES) estabeleceram as Diretrizes Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, por meio do Parecer CNE/CES 1.302/2001. O documento é claro quanto à formação que deve ser proporcionada pela Licenciatura: “formação de professores para a educação básica” (BRASIL, 2001, p.1) e quanto às características que devem ser desenvolvidas pelo profissional que se pretende formar:

- visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos
- visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania
- visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação de preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina. (BRASIL, 2001, p. 3)

Além disso, são estabelecidas as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelo Bacharel e pela Licenciado em Matemática, dentre eles a aptidão de expressar-se, escrita e oralmente, de maneira objetiva e clara, de trabalhar em equipe, de lidar criticamente com meios adequados para resolução de problemas, de relacionar a Matemática com outras áreas de conhecimentos e de prosseguimento dos estudos (BRASIL, 2001, p. 3-4).

O documento ainda especifica quais as habilidades e competências devem ser especificamente desenvolvidas pelo educador matemático, ou seja, pelo profissional formado pela Licenciatura:

- a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;
- b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
- c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;
- d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
- e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;

f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica.
(BRASIL, 2001, p. 4)

As aptidões que devem ser desenvolvidas pelos cursos de Licenciatura em Matemática brasileiros, apontadas pelo Parecer CNE/CSE 1.302/2001 reiteram a importância de desenvolver os conhecimentos necessários à docência já na formação inicial conforme apontados por Moreira e David (2007) e Fiorentini e Oliveira (2013). Além disso, é possível perceber claramente as três categorias principais de conhecimento definidas por Shulman (1986) nesse documento, uma vez que se fala do conhecimento matemático e de habilidades relacionadas ao tratamento pedagógico desse conhecimento e como objeto de ensino, além do desenvolvimento da capacidade crítica de lidar com currículos e desenvolvê-los com a intenção de promover o processo ensino-aprendizagem de maneira efetiva e significativa. O documento indica ainda que os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados por meio das concepções iniciais do licenciandos, com o intuito de que os alunos compreendam e desenvolvam uma aprendizagem significativa para sua prática profissional.

O Parecer CNE/CSE 1.302/2001 é claro quando se trata de direcionar a formação de bacharéis e licenciados no âmbito de suas formações específicas. Para a Licenciatura, é necessário que sejam trabalhados conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica.

Consta que devem ser desenvolvidos conhecimentos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise Real, conteúdos de áreas com proximidade à Matemática que fornecem problemas para aplicação de suas teorias e conteúdos da Educação, História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (BRASIL, 2001, p.6).

Em especial, Análise Real (Fundamentos de Análise, Análise Matemática, Análise, dentre outras denominações) é uma disciplina conhecida pela abordagem formal e rigorosa de conceitos relacionados ao conjunto dos números reais que são estudados ao longo da formação na Licenciatura, como conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, com objetivo de consolidar e formalizar os conhecimentos construídos até então.

Desse modo, a função dessa disciplina é evidente quando se trata do curso de Bacharelado em Matemática, sendo propostas outras disciplinas relacionadas,

como Topologia, por exemplo (BRASIL, 2001, p. 5), com abordagens ainda mais aprofundadas. No entanto, muito se questiona a finalidade do curso de Análise em Licenciaturas, embora a Diretriz dos cursos exija que devem ser incluídos conteúdos presentes na Educação Básica que pertencem à área de Análise (BRASIL, 2001, p. 6), argumentando-se que a disciplina não contribui para a prática docente, não respondendo às questões que surgem no decorrer da profissão por ser estritamente formal e voltada à Matemática Acadêmica.

Para entender tais questionamentos e compreender a importância da Análise Real para a formação inicial e prática docente, serão considerados os estudos e as reflexões de Reis (2001), Moreira, Cury e Vianna (2005), Martines (2012) e Bolognezi (2006), que trouxeram importantes contribuições sobre o tema.

3.1 Importância da disciplina Análise Real para a formação de professores

Reis (2001) concebe a Análise como fundamental na formação de professores, embora acredite que o trabalho realizado no ensino desta disciplina seja mais direcionado ao desenvolvimento do conhecimento do conteúdo. O autor considera que é necessário refletir sobre o rigor adequado às disciplinas de Análise Real e Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de que seja privilegiada a compreensão dos licenciandos, trabalho que deve ser realizado a partir de seus conhecimentos iniciais e que deve estar direcionado à formação profissional proposta pela Licenciatura em Matemática.

Para Reis (2001), é necessário formar professores que possuam um pensamento flexível em relação à Matemática o qual deve estar adequadamente fundamentado, com o propósito de desenvolver a compreensão dos conceitos de modo que o futuro professor saiba utilizá-lo de forma adequada na resolução de problemas ou que saiba aplicá-lo corretamente, utilizando acertadamente os procedimentos relacionados a ele.

Desta maneira, para Reis (2001), o conhecimento dos conteúdos é importante para formação de professores, porém não é suficiente, prezando também pelo trabalho com a multiplicidade desses conhecimentos em suas especificidades e nas relações pedagógicas e curriculares que estabelecem com o Ensino Básico.

Assim, na busca pela compreensão de como se estabelece a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real,

necessários para uma compreensão significativa dos conceitos trabalhados nessas disciplinas, Reis (2001) realizou entrevistas semiestruturadas com quatro professores-pesquisadores que se destacam como autores de livros didáticos.

No caso de Análise Real, os depoentes consideram que é uma disciplina essencial na formação do professor. As justificativas apresentadas foram a familiarização do futuro professor com o método dedutivo, além do desenvolvimento da autonomia (não tornando o professor dependente do livro didático) e segurança em relação aos conceitos que serão ensinados – mesmo que, segundo um entrevistado, o professor não utilize diretamente o conteúdo como trabalhado na graduação em sua prática profissional na sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Também foi apresentada a ideia de que Análise Real é uma disciplina importante, mas que deve ser “dosada” para o curso de Licenciatura em Matemática.

Essas ideias, segundo Reis (2001), não contribuem efetivamente para repensar a formação docente. É possível concluir que os depoentes prezam pelo rigor no tratamento da disciplina, e que embora considerem que Análise Real seja essencial para a formação docente, não especificam como essa disciplina deve ser trabalhada na Licenciatura.

Para o autor, o rigor não deve ser transposto quando se trata de ensino, uma vez que é necessário que os conceitos sejam compreensíveis e significativos para os licenciandos, o que não significa menosprezar o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos para o futuro professor, mas promover uma compreensão ampla e abrangente:

Essa adequação, entretanto, não deve ser entendida como afrouxar, facilitar ou atenuar o curso de Análise. Ao contrário, significa proporcionar uma outra abordagem, igualmente profunda, só que sob uma outra concepção de conhecimento. Uma abordagem que permita uma exploração múltipla e flexível (envolvendo aspectos formais e não-formais) dos conceitos e ideias matemáticas, e não sob um enfoque teórico único, por melhor que esse seja. (REIS, 2001, p. 197)

Assim, Reis (2001) conclui que o rigor e a intuição devem ser trabalhados de forma concomitante no ensino de Análise Real, com o propósito de que seja realizado um trabalho contínuo e efetivo no sentido da aprendizagem. Dessa forma, é necessário partir dos conhecimentos iniciais dos licenciandos para então proporcionar um tratamento analítico, aprimorando o conhecimento matemático do

futuro professor, o que significa, segundo o autor, incluir o rigor em complementação da intuição, adequando-se a ela.

Moreira, Cury e Vianna (2005) também tiveram a preocupação de entender a função de Análise Real para a formação e prática do professor de Matemática, uma vez que consideram que a disciplina traz uma introdução do que é imprescindível para o trabalho do matemático, o que nem sempre é suficiente para o trabalho docente nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Para isso, foram consultados 80 matemáticos de 16 instituições universitárias, e 31 responderam à pesquisa, representando 14 dessas instituições. Segundo os autores, os matemáticos têm influência nos currículos das Licenciaturas em Matemática, representando também parte do corpo docente desses cursos, por isso a importância de serem consideradas suas opiniões acerca do papel que a Análise Real representa na formação de professores, quais os tópicos que devem ser trabalhados nessa disciplina e como devem ser abordados, indicando também uma bibliografia adequada, e se a disciplina deve ser obrigatória ou não, justificando essa escolha.

Dentre os resultados obtidos pelos autores, convém destacar que: apenas dois dos 31 matemáticos entrevistados (6,5%) indicaram a construção do conjunto dos números reais como tópico a ser ensinado na Licenciatura em Matemática. Outro dado importante é que os livros mais recomendados foram “Análise I”, do professor Djairo Guedes de Figueiredo (58,1%), “Análise Real – volume 1” do professor Elon Lages Lima (1929 – 2017) e “Introdução à Análise Matemática”, do professor Geraldo Severo de Souza Ávila (1933 – 2010). Além disso, cabe destacar que 29 entrevistados (93,5%) opinaram pela obrigatoriedade da disciplina e dois não responderam, embora em outra pergunta um deles tenha indicado que a disciplina não deveria ser obrigatória. Vale ressaltar também que um dos depoentes que considerou a obrigatoriedade de Análise para Licenciatura expressou falta de convicção quanto a essa ideia em outro momento da entrevista.

A partir desses e dos demais resultados, Moreira, Cury e Vianna (2005) classificaram as respostas em três categorias principais por meio da metodologia de análise de conteúdo e teceram relevantes considerações sobre essas respostas categorizadas, baseando-se em estudos e pesquisas sobre a formação de professores, sempre remetendo à questão da prática docente no Ensino Básico.

A primeira categoria de respostas aponta para a obrigatoriedade da disciplina para cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que, segundo essa perspectiva, a Análise Real proporciona uma maior compreensão do significado da Matemática, desenvolvendo o “pensamento matemático” e o raciocínio lógico, trazendo maturidade intelectual ao aluno. Além disso, argumenta-se que são trabalhados métodos, técnicas e valores da Matemática, o que promove introdução do futuro docente à “cultura matemática” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 21), além de desenvolver a habilidade de enunciar e demonstrar teoremas.

Os autores atentam para o fato de que é necessário considerar as particularidades do trabalho docente no Ensino Básico, já que se trata de um curso de formação de professores. As justificativas oferecidas nessa categoria de respostas indicam uma formação na disciplina Análise Real que proporcione a concepção da Matemática assentada naquela que fundamenta o trabalho dos matemáticos. No entanto, os autores alertam que nem sempre a Matemática Científica responde às questões apresentadas na Matemática Escolar, revelando-se muitas vezes inadequada por não valorizar aspectos cognitivos e didático-pedagógicos, cuja consideração é de extrema necessidade no Ensino Básico. Dessa forma, os autores reiteram a necessidade de privilegiar a formação matemática do futuro professor:

Assim, em particular, ao se estruturar o processo de formação na licenciatura, não se pode perder de vista que as visões dos professores da escola a respeito da matemática – com suas propriedades, impropriedades e insuficiências – se estabilizam, de fato, é no interior da “cultura escolar”, com todas as suas limitações, suas questões práticas e teóricas específicas, seus valores e seus diferentes condicionantes internos e externos. (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 34)

A segunda categoria de respostas se assemelha à primeira, sugerindo que o curso de Análise Real potencializa a compreensão dos conteúdos trabalhados na Matemática Escolar, o que traz maior segurança ao futuro professor, uma vez que é desenvolvida uma “visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p.35). Argumenta-se que, a partir dessa perspectiva, o docente tem condições de conceber e tratar a Matemática com base em seus diversos e amplos sentidos, não a reduzindo a um conjunto de fórmulas e regras.

Além de considerar válidos também para essa categoria os comentários realizados para primeira categoria de respostas, os autores questionam de que

maneira o rigor científico pode explicar a Matemática Escolar tornando seguro o trabalho do professor e como auxiliaria no processo ensino-aprendizagem do ponto de vista do contexto da prática pedagógica no Ensino Básico. Ademais, contestam até que ponto um estudo “aprofundado” da Matemática considerada elementar contribui para a formação do futuro docente, auxiliando-o a conceber a Matemática além de suas regras e fórmulas:

Não seria possível pensar em uma organização e sistematização do conhecimento matemático orientada para a prática pedagógica na educação escolar básica, ou seja, referenciada nas questões da prática do professor da escola e não necessariamente nas da prática do matemático? (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 37)

Portanto, é possível concluir que ambas as categorias de respostas, embora mencionem e expressem preocupação, de certa forma, com a prática docente, não pautam em suas fundamentações o trabalho do professor como foco da formação proporcionada pela disciplina Análise Real. Ou seja, parece haver, nas respostas, uma separação entre Matemática Científica e Escolar na qual a primeira se sobressai sobre a segunda, como se a Matemática estudada pelos matemáticos fosse suficiente para fundamentar aquela que é trabalhada na Educação Básica, e isso ocorre mesmo quando consideram os objetivos do curso de Licenciatura em Matemática.

Já a terceira categoria de respostas se refere ao curso de Análise Real como um momento para o licenciando entender a Matemática como instrumento de compreensão de diversos fenômenos naturais, considerando sua aplicação em diversas ciências. Moreira, Cury e Vianna (2005) consideram essencial que o futuro professor tenha consolidada a visão da Matemática como instrumento de ação e compreensão dos diversos acontecimentos do mundo prático, porém ressaltam que as bibliografias recomendadas pelos depoentes para o curso de Análise Real não abrangem esse tipo de abordagem, entendendo que seria mais coerente que esse trabalho fosse realizado em outra disciplina, como Cálculo Diferencial e Integral e Física, por exemplo.

Ainda sobre a relevância da disciplina Análise Real para a formação docente, foram obtidas respostas que não se encaixavam nas três categorias principais comentadas pelos autores. Uma delas recomenda o curso de Análise Real apenas quando é realizado um bom curso de Cálculo Diferencial e Integral, com a finalidade de proporcionar compreensão das operações realizadas nesta última disciplina. Os

autores ressaltam que nem sempre é necessário rigor para que haja um bom entendimento, o que já pode ser proporcionado pela própria disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Outras duas respostas se assemelham no sentido de considerarem que a Análise Real deve ser obrigatória, mas que se deve diminuir o rigor, privilegiando a compreensão e uma aprendizagem significativa para os alunos. No entanto, para os autores essa abordagem já pode ser realizada no curso de Cálculo Diferencial e Integral.

Moreira, Cury e Vianna (2005) entendem que a apresentação lógico-formal-dedutiva fundamentada estritamente nas estruturas dos conceitos matemáticos não responde as questões que surgem no decorrer da prática docente. Argumentam que, quando é realizado um trabalho dessa forma em disciplinas como Análise Real, a articulação necessária acaba ocorrendo em disciplinas integradoras (remetendo ao ultrapassado modelo “3+1” de formação na Licenciatura em Matemática) ou no decorrer da prática profissional do professor, o que nem sempre se dá de maneira efetiva.

Para os autores:

Não se trata, nesse caso, de uma concepção que implique necessariamente “baixar o nível” da formação matemática na licenciatura, como frequentemente é alegado. Trata-se exatamente de superar essa visão dicotomizada das relações entre formação matemática “sólida” e as demandas de conhecimento da prática docente escolar. Trata-se de trabalhar a formação matemática do futuro professor, no sentido de promover a elaboração de uma síntese que seja, ao mesmo tempo, provisória – pois será seguramente reelaborada a partir da experiência – e complementar ao processo de formação que se desenvolve na prática, para que a reelaboração não tenda a negar essa síntese e sim a estendê-la e aprofundá-la. (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 40).

Os autores sugerem uma reorganização da formação na Licenciatura, para que a formação matemática do futuro professor se realize em consonância com a Matemática que é desenvolvida nas escolas.

Martines (2012) contribui de forma relevante ao buscar compreender a importância da disciplina Análise Real em cursos de Licenciatura a partir de entrevistas com coordenadores de quatro desses cursos em instituições de ensino superior públicas do estado de São Paulo e professores daquela disciplina nessas instituições.

A autora questiona as consequências de uma abordagem estritamente formal em Análise Real, uma vez que questões importantes como a da construção do

conjunto dos números reais e uma reflexão sobre a prática do ensino de Matemática no Ensino Básico não são consideradas. Ainda ressalta que a realização dessa construção, quando abordada de forma coerente com a formação de professores, fundamenta os diversos algoritmos utilizados didaticamente no processo ensino-aprendizagem na escola, além de consolidar o conhecimento do professor sobre os números reais – reflexão ampla que não ocorre quando realizada a clássica abordagem axiomática de que $\mathbb{R}$ é corpo ordenado completo, interessante ao trabalho do matemático profissional. A autora é muito sensata ao afirmar que:

Certamente, nenhuma formação é completa, entretanto, entende-se que se a matemática escolar, com suas especificidades fosse reconhecida no processo de formação, os futuros professores teriam a oportunidade de discutir situações concretas associadas à docência em nível básico. (MARTINES, 2012, p. 17)

Os dados obtidos pelas entrevistas realizadas pela autora foram interpretados por meio de análise textual em uma abordagem qualitativa. Primeiramente, são abordados temas pertinentes ao ministrar a disciplina: se deve ser lecionada para Licenciatura e Bacharelado de forma concomitante, quais livros se destacam como referencial teórico, qual o lugar dos números reais na disciplina, quais as dificuldades dos alunos em relação à Análise Real e que tipo de formação deve ser proporcionada pela Licenciatura. Em seguida, a autora explora os resultados obtidos nas três categorias de respostas fornecidas para a questão da incumbência da Análise Real para a formação docente.

Os depoentes concordam que a disciplina deve ser ministrada separadamente para Licenciatura e Bacharel, indicando que se diferencia pela quantidade e aprofundamento de conteúdo ou pelo direcionamento à Matemática Acadêmica ou à formação docente. Martines (2012) considera essencial que a Análise Real seja lecionada de maneira diferente para ambos os cursos tendo em vista que as atuações profissionais do professor de Matemática e do matemático são diferentes. No entanto, Martines (2001, p. 68) destaca que não se trata de reduzir os conteúdos, mas “estabelecer vínculos entre a disciplina e as questões da formação do professor”.

Os principais livros citados foram os de autoria dos professores Elon Lages Lima, Geraldo Severo de Souza Ávila e Roberto R. Paterlini. Para os entrevistados, os livros do professor Elon Lages Lima são considerados difíceis para os alunos por conta do entendimento das demonstrações e realização dos exercícios. Já os livros

do professor Geraldo Ávila são vistos como adequados, por serem adaptados à Licenciatura em Matemática, fazendo um trabalho mais intuitivo e contextualizado por meio de notas históricas. O livro do professor Roberto R. Paterlini também foi considerado adequado, já que foi feito para a Licenciatura, trabalhando a Análise Real a partir dos conteúdos que são ensinados na Matemática Escolar: é feita a construção dos números reais, e os temas são abordados mediante a resolução de problemas, prática e investigação matemática, sendo considerado também o contexto histórico do desenvolvimento matemático desses conceitos.

O estudo dos números reais foi considerado pelos depoentes como essencial para a formação do professor, posto que está presente nos currículos da Educação Básica, devendo, portanto, estar muito bem fundamentado. Martines (2012), assim como Moreira e David (2007), considera insuficiente postular a existência do conjunto dos números reais, sendo necessária uma abordagem que explique as ampliações dos conjuntos e seus significados, esclarecendo, em especial, o significado de número irracional:

Nesta pesquisa, concorda-se com a relevância do conjunto dos números reais para formação do professor, mas ressalta-se que a forma como o conjunto dos números reais é abordada na licenciatura pode ser determinante para a prática docente; pois, uma das abordagens mais comum desse conjunto, como um corpo ordenado completo, pouco contribui para uma prática docente que preze pela negociação de significados e pelo domínio de conceitos matemáticos numa forma flexível e multifacetada. (MARTINES, 2001, p. 74)

Os entrevistados afirmaram que Análise Real é uma disciplina considerada difícil pelos alunos de graduação, destacando os conceitos de limite e infinito, construção dos números reais e números irracionais, reconhecimento dos conteúdos trabalhados no Ensino Básico e dificuldades culturais, como impasses ao realizar demonstrações ou argumentações mais rigorosas. A autora ressalta a questão da articulação, sendo necessário trabalhar os conceitos matemáticos tendo como base a Matemática Escolar:

Ao discorrer sobre esse assunto, entende-se que, enquanto a prática docente for desvinculada de disciplinas específicas, que em geral preferem manter seu caráter internalista, muitos alunos permanecerão com a sensação de algumas disciplinas da graduação não têm relação com a sua prática. (MARTINES, 2012, p. 97)

Cabe aqui destacar que a opinião dos professores quanto à articulação remete a três aspectos principais: que faz parte do trabalho, porém que às vezes

não é possível estabelecer essa articulação; que é função das disciplinas pedagógicas; e que depende de o professor da disciplina realizar ou não. Para a autora, essa articulação já é realizada quando a formação matemática proporcionada na Licenciatura se fundamenta nos saberes associados ao ensino de Matemática.

Os depoentes apontaram ainda que a disciplina não é considerada útil por alguns alunos por conta do excesso de formalismo e rigor e pela falta de um trabalho que envolva o conhecimento pedagógico dos conteúdos desenvolvidos em Análise Real. Nesse sentido, a autora destaca a importância de valorizar a compreensão efetiva dos diversos significados dos conceitos para a prática docente.

A formação na Licenciatura em Matemática, para os depoentes, deve ir além do domínio dos conceitos matemáticos trabalhados na Educação Básica, fundamentando o aluno em disciplinas mais avançadas, como Álgebra Linear, Estruturas Algébricas e Análise Real, com o pressuposto de que a formação matemática do professor não esteja limitada ao que ele vai utilizar em sua futura prática profissional. Assim, consideram necessário o desenvolvimento de conhecimentos superiores aos conhecimentos práticos, de modo que o licenciando não se torne “técnico em ensino”, mas um docente que compreenda profunda e estruturalmente os conteúdos, possibilitando uma reelaboração coerente com vistas ao ensino dos conteúdos presentes na Educação Básica. Destacam também que é necessário desenvolver nos alunos de graduação a habilidade de “aprender a aprender”.

Nesse sentido, Martines (2012) ressalta que olhar para as questões que surgem através da prática docente no ensino de conteúdos matemáticos aos licenciandos não significa baixar o nível da formação matemática na Licenciatura, porém trabalhar a partir da prática profissional do docente da disciplina e não do matemático acadêmico. Em outras palavras, é imprescindível construir os conhecimentos necessários para o ensino da Matemática durante a graduação, o que não significa ensinar ao futuro docente apenas os conteúdos que os alunos aprendem no Ensino Básico.

As indicações quanto à função exercida pela disciplina Análise Real na formação de professores foram divididas em três categorias, das quais a primeira e a segunda categorias se assemelham com as duas primeiras categorias de respostas encontradas por Moreira, Cury e Vianna (2005).

A primeira categoria de respostas indica que a disciplina alicerça e assegura o conhecimento do futuro professor em temas nos quais seu trabalho no Ensino Básico é fundamentado, embora não seja diretamente aplicável nesse nível de ensino, sendo necessárias adequações para o emprego desses conhecimentos. No entanto, as repostas dessa categoria apontam que há relação mais direta com a Matemática Escolar quando se trata do estudo dos conjuntos numéricos. Nesse sentido, a autora complementa questionando se a formação proposta nesse tipo de concepção propõe uma formação matemática ampla ou se os conteúdos são tratados de maneira estritamente formal e generalizado:

Por que não considerar a disciplina de Análise como um espaço para discutir os modos como o futuro professor vai abordar os conteúdos matemáticos com seus alunos? Por que não mostrar o fio – que muitas vezes parece tênue – que existe entre a Análise e a prática docente? Principalmente, no que diz respeito aos números reais, conteúdo considerado essencialmente importante para a formação do professor. (MARTINES, 2012, p. 86)

A disciplina Análise Real tem, para a segunda categoria de respostas, a incumbência de consolidar e formalizar os conhecimentos desenvolvidos durante a graduação, proporcionando “cultura e bagagem matemática” ao licenciando, o que significa aproximar o aluno dos métodos utilizados na Matemática Científica, como realização de demonstrações rigorosas e aperfeiçoamento da articulação de raciocínios. Martines (2012) comenta que essa categoria se relaciona com a primeira, mas possuindo um caráter ainda mais intrínseco com a Matemática, no sentido de unificar ideias trabalhadas anteriormente. A autora ressalta, nesse sentido, a importância de privilegiar a formação matemática do professor do Ensino Básico, o que exige que se reconheça as particularidades da docência nesse nível de ensino e não somente os métodos utilizados no trabalho com a Matemática Acadêmica.

Já a terceira categoria de respostas se difere das primeiras no sentido de considerar que a Análise Real fundamenta a construção do conjunto dos números reais e proporciona o estudo de conteúdos relacionados a esse conjunto numérico, tema amplamente trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, sendo, portanto, essencial que seja bem estruturado. Nesse sentido, Martines (2012) comenta que é necessário atentar à abordagem que é realizada, uma vez que tratar $\mathbb{R}$ como corpo ordenado completo, de forma essencialmente

axiomática, é interessante à Matemática Acadêmica, mas não auxilia a proporcionar uma compreensão ampla desse conjunto como futuro objeto de ensino:

[...] tal ponto de vista não coaduna com a prática de um professor da escola básica, que provavelmente causaria espanto ao dizer aos seus alunos que números podem ser quaisquer objetos, que pouco importa sua natureza, mas sim as relações que se pode estabelecer entre eles. (MARTINES, 2012, p. 89-90)

Para Martines (2012), uma abordagem estritamente formal desconsidera as necessidades reais do professor do Ensino Básico. Mesmo quando se trata de Análise Real, considerada muitas vezes como de caráter técnico-formal, não se deve, para autora, perder de vista o objetivo do curso de formação.

[...] sem dúvida considera-se a importância de alguns conteúdos dessa disciplina para a formação do professor como: números reais, infinito, limite, séries, sequências, continuidade e funções. Porém, a abordagem desses conteúdos não deveria ser apenas fundamentar o conhecimento do professor, mas dar condições para que o mesmo possa discuti-lo com seus alunos. Entende-se que pouco adianta o professor saber do que fala, se não conseguir falar disso com seus alunos, é por isso que se considera que uma das tarefas mais importantes do curso de formação seja ajudar o futuro professor a encontrar maneiras de comunicar-se com seus alunos sobre questões mais sutis ou avançadas da matemática. (MARTINES, 2012, p. 106)

Assim, a autora conclui que, levando em conta a prática docente, é possível propor um trabalho na disciplina cuja abordagem dos conteúdos seja sim formal, porém que privilegie a intuição e a compreensão dos alunos, promovendo ainda discussões sobre os conhecimentos matemáticos desenvolvidos em Análise Real que deverão ser articulados tendo como foco seu ensino – a autora observa ainda que, embora perceba que é um trabalho individual, de cada professor da disciplina, terá reflexos na formação e, especialmente, na prática profissional do futuro professor nesse sentido.

Bolognezi (2006) investigou a importância da disciplina Análise Real para a formação de professores, voltando o estudo à atuação no Ensino Médio. A autora propôs questionários abertos a onze alunos de Licenciatura, dois alunos que cursavam Licenciatura e Bacharelado, um aluno de Bacharelado e dois alunos ouvintes de um curso de graduação do estado do Paraná. Também foram consultados quatro professores da disciplina de Análise Real desse curso (comum a Bacharel e Licenciatura) e seis professores do Ensino Médio da rede pública, totalizando 28 depoentes. Os questionários foram analisados por estudo comparativo, em uma abordagem qualitativa, mostrando especialmente as

concepções de alunos de Licenciatura em Matemática e professores de Matemática do Ensino Médio acerca do tema.

A maioria dos licenciandos afirmou apresentar dificuldades na compreensão dos conteúdos e na utilidade da disciplina Análise Real em sua futura prática docente. Os professores do curso atribuíram as dificuldades dos graduandos na disciplina a um despreparo anterior. Já os alunos do curso de Bacharelado consideram que Análise Real é uma disciplina essencial para o trabalho de pesquisa que irão desenvolver em suas práticas profissionais. Os professores do Ensino Médio indicaram não conceber a disciplina Análise Real como primordial às suas aulas, por não demonstrar o caráter pedagógico dos conceitos trabalhados e pelo excesso de rigor, que não é aplicável às suas práticas.

A autora considera que a disciplina deve ser ministrada separadamente para os cursos de Licenciatura e Bacharelado, de modo que a formação profissional seja direcionada às respectivas áreas de atuação. Para Bolognezi (2006), o conhecimento sólido trabalhado em Análise Real deve situar-se no processo ensino-aprendizagem, voltando-se à formação de professores. Além disso, a autora considera que os objetivos da disciplina devem ser explicitados, com a finalidade de que os alunos criem expectativas adequadas, e que o ensino em Análise Real deve ser claro e agradável aos licenciandos.

Os resultados obtidos pela autora apontam para uma abordagem extremamente rigorosa no curso analisado, adequada ao Bacharelado, porém imprópria para a Licenciatura em Matemática, realizada de forma acelerada, na qual os alunos são expectadores. Perante esse cenário, a autora conclui que a disciplina pouco ou nada contribui na formação para a docência no Ensino Médio, sugerindo a necessidade de reestruturação curricular do curso de graduação, de modo a promover uma formação que atenda às necessidades da prática profissional do professor.

Foram consideradas, nesta seção, pesquisas que se assemelham por terem como objetivo central desvelar a função exercida pela disciplina Análise Real para a formação de professores de Matemática que atuarão no Ensino Básico, ou seja, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Essas pesquisas, porém, diferenciam-se sobretudo pelo público ao qual foram direcionadas as questões acerca do tema.

A pesquisa de Reis (2001) questionou professores-pesquisadores que se evidenciam como autores de livros didáticos. Já os estudos de Moreira, Cury e Vianna (2005) contaram com entrevistas de professores-pesquisadores das principais instituições universitárias ou de pesquisa do país com base na influência que esses profissionais exercem sobre os currículos e também por, muitas vezes, fazerem parte do corpo docente de Licenciaturas em Matemática. E, ainda, Martines (2012) ouviu professores de Análise e coordenadores de cursos de formação de professores de Matemática de instituições de ensino superior públicas do interior de São Paulo. Por fim, consideramos os resultados da investigação de Bolognezi (2006), cujo público alvo foi especialmente licenciandos do curso de Matemática de uma universidade do estado Paraná e professores de Matemática do Ensino Médio.

Em comum, os autores traçaram conclusões referentes às abordagens propostas na disciplina Análise Real. É possível concluir que uma abordagem dos conteúdos com excesso de formalismo e rigor não favorece a formação para docência, uma vez que não proporciona compreensão múltipla e abrangente dos conteúdos que serão ensinados na prática docente do futuro professor. Nesse sentido, isso dificulta a síntese e a representação necessárias para o ensino de conteúdos do Ensino Básico, seguindo as ideias de Shulman (1986), prejudicando o conhecimento do conceito e seu aspecto pedagógico, uma vez que dificulta a percepção desses conteúdos como objeto de trabalho da Matemática Escolar.

Uma abordagem coerente, portanto, segundo a concepção de Reis (2001), valoriza as intuições dos alunos, ou seja, suas percepções iniciais sobre os conceitos estudados e as ideias que constroem ao longo do ensino. Nesse processo, segundo o autor, insere-se o rigor necessário para uma boa fundamentação matemática dos conceitos estudados, promovendo com os alunos uma compreensão ampla e bem fundamentada da Análise Real.

Seguindo essa ideia, a Análise Real teria sim o papel de consolidar e formalizar conhecimentos desenvolvidos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, identificado por Moreira, Cury e Vianna (2005) e Martines (2012), porém sem deixar de proporcionar um conhecimento matemático amplo acerca do currículo que fundamenta o trabalho do professor, suprimindo dificuldades apontadas por Bolognezi (2006) e Martines (2012).

Neste trabalho, considera-se que a disciplina Análise Real tem a importante responsabilidade de promover e concretizar conhecimentos trabalhados

anteriormente no curso de Licenciatura em Matemática, com ênfase nos conjuntos numéricos, que é um assunto trabalhado em diversos aspectos em todo Ensino Básico. Não se deve perder de vista, portanto, a percepção dos conceitos estudados como objeto de ensino da futura prática profissional do professor.

Assim, concorda-se com a posição de Moreira e David (2007) e de Moreira, Cury e Vianna (2005), que afirmam que é necessário atentar às diferenças entre Matemática Científica e Matemática Escolar, valorizando a segunda quando se trata de um curso de Licenciatura em Matemática, no qual o objetivo primordial é formar profissionais que atuem na Educação Básica. Com efeito, isso se confirma pelas particularidades apontadas nas Diretrizes para os cursos de Bacharel e Licenciatura em Matemática (Parecer CNE/CES 1.302/2001).

É imprescindível destacar que isso não significa reduzir a formação matemática do futuro professor, como também ressaltam esses autores. O que se propõe como função da disciplina Análise Matemática para Licenciaturas, na verdade, é o contrário: aperfeiçoar o conhecimento matemático do futuro professor, de modo que possa desenvolver uma flexibilidade de pensamento que proporcione uma síntese bem elaborada e fundamentada a respeito, especialmente, do conjunto dos números reais, facilitando, assim, sua reelaboração para o ensino de acordo com as inúmeras situações-problemas propostas pelos currículos do Ensino Básico com os quais irão trabalhar e pelos múltiplos condicionantes de aprendizagem com os quais irão se deparar durante sua atuação profissional.

Essa perspectiva exige um trabalho docente que proporcione avançar muito além de conceber o conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, em uma abordagem puramente axiomática, seguindo um trabalho essencialmente formalista, como destaca Martines (2012). Trata-se de fundamentar o conhecimento de tais conteúdos a partir do currículo e do trabalho da Matemática Escolar, de modo que o licenciando consiga assimilar e reformular tais conhecimentos com base nos desafios que encontrará em sua prática profissional.

Com base nas concepções de Reis (2001) e Martines (2012), será abordada, na próxima seção, a importância da construção do conjunto dos números reais, realizada na disciplina Análise Real, para a formação do professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com base nas necessidades apontadas por pesquisas que investigam as dificuldades acerca desse conjunto numérico.

3.2 Importância da construção do conjunto dos números reais para a formação de professores

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) consiste na referência nacional para elaboração dos currículos do Ensino Básico, que busca garantir um conjunto comum de aprendizagens a todos os alunos. Esse documento contém diretrizes curriculares para a Educação Infantil e para o Ensino Fundamental (anos iniciais e finais), trazendo também competências e habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio, porém colocadas de forma menos específica em comparação aos outros níveis de ensino.

Em consonância com as ideias de Moreira e David (2007), considera-se essencial que o professor conheça a Matemática trabalhada nos anos iniciais do Ensino Fundamental a fim de atuar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio de maneira contínua, construindo os conhecimentos matemáticos com os alunos com referência nas concepções iniciais dos educandos sobre eles. Seguindo essa noção de trabalho, reitera-se que o professor adquire condições de conhecer as dificuldades dos alunos sobre o conteúdo, podendo interferir em ideias internalizadas de forma equivocada, aprofundando o conhecimento matemático de modo que desafie os estudantes, estimulando sua aprendizagem e também o uso da Matemática em seus cotidianos e como forma de interpretação e ação no mundo prático.

Com o intuito de desenvolver habilidades de aprendizagem matemáticas no Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 268-275) propõe cinco unidades temáticas interrelacionadas para o ensino de Matemática. Essas cinco unidades são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A primeira unidade temática, Números, foi definida como ponto central de estudo nesta pesquisa por fundamentar o estudo das demais unidades temáticas, as quais ampliam e aprofundam o pensamento numérico desenvolvido.

No que se refere à unidade temática Números, espera-se que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental desenvolvam a habilidade de resolver problemas com números naturais e racionais (com representação decimal finita), de modo que compreendam os “significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados” (BRASIL, 2018, p. 268). Além disso, espera-se que os

estudantes desenvolvam maneiras diversas para a realização de cálculos, de modo que transcendam o uso de algoritmos e calculadoras, recorrendo também a estimativas e cálculo mental.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 268-269) também considera essencial que os educandos desse nível de ensino sejam capazes de ler, escrever e ordenar números naturais e racionais a partir da compreensão do sistema de numeração decimal, em especial, do valor posicional dos algarismos. Para aprofundar a noção de número natural, a BNCC propõe atividades de medição com o propósito de que os educandos percebam a necessidade de ampliação desse conjunto numérico, proporcionando uma introdução ao estudo dos números racionais e suas representações decimal e fracionária.

Já para os anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos:

resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. (BRASIL, 2018, p. 269)

Além disso, essa unidade temática define que devem ser realizados trabalhos que promovam a educação financeira, favorecendo a interpretação matemática em dimensões culturais e sócio-políticas, além da compreensão de questões de consumo, trabalho e dinheiro (BRASIL, 2018, p. 269). Isso, segundo o documento, proporciona contextos de aplicação da Matemática que auxiliam no desenvolvimento de aspectos pessoais e sociais dos educandos.

Para o Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018, p.527) propõe as mesmas unidades temáticas, que devem ser aprofundadas e consolidadas nesse nível de ensino de modo que os estudantes desenvolvam uma concepção matemática integrada e diretamente aplicável. Propõe-se estimular a capacidade de reflexão e de abstração, visando o uso autônomo e adequado da Matemática na resolução de problemas diversos, a partir de atividades investigativas e de modelagem, estimulando as habilidades de raciocínio, representação, comunicação e argumentação.

O documento relaciona as unidades temáticas diretamente na apresentação dos conteúdos (BRASIL, 2018, p. 543-546) a serem desenvolvidos no Ensino Médio. Dentre eles, constam, por exemplo, a interpretação de contextos diversos por meio dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos no Ensino Fundamental com o uso de ferramentas eletrônicas e outros recursos, além de modelagem de problemas que envolvam equações polinomiais de primeiro e segundo grau e suas representações algébricas e geométricas. Além disso, é proposto o trabalho com progressões aritmética e geométrica e funções dentro dos mais variados contextos e utilizando diferentes ferramentas.

Esse documento permite, em síntese, concluir que ao adentrar nos anos finais do Ensino Fundamental, no sexto ano, espera-se que o aluno já tenha internalizado os conteúdos referentes ao conjunto dos números naturais, além de ter uma noção introdutória a respeito dos números racionais. No decorrer do sexto ano, aprofunda-se o trabalho com esses conjuntos numéricos, explorando outras operações, conceitos e algoritmos. No sétimo ano, além de ser ampliado o estudo dos números naturais, é feito um estudo aprofundado dos números inteiros, o que proporciona um estudo mais amplo dos números racionais, que será abordado com ênfase ainda maior no oitavo ano. No nono ano são trabalhados os números irracionais, permitindo agora um estudo mais aprofundado do conjunto dos números reais, que será consolidado ao longo do Ensino Médio.

A partir das considerações acima realizadas sobre a BNCC (BRASIL, 2018), no que se refere à unidade temática Números, é possível inferir que todo o trabalho realizado pelo professor de Matemática envolve as definições e propriedades dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, revelando assim a relevância do estudo do conjunto dos números reais nos cursos de Licenciatura em Matemática.

De fato, é de extrema importância que os cursos de formação de professores de Matemática desenvolvam nos graduandos uma concepção ampla e estrutural a respeito do conjunto dos números reais, de modo que o concebam como objeto de ensino, desenvolvendo a capacidade de justificar, representar e relacionar os números reais, suas propriedades e aplicações, a partir de um processo ensino-aprendizagem significativo para os licenciandos.

Com efeito, isso reitera a importância de ser realizado um trabalho na disciplina de Análise Real que esteja voltado à formação de professores. Afinal, cabe

a essa disciplina formalizar os conhecimentos desenvolvidos anteriormente, em especial, no que se refere ao conjunto dos números reais, em uma abordagem coerente, como considerada por Reis (2001) e Martines (2012), que proporcione formação nas três categorias de conhecimento estabelecidas por Shulman (1986).

Para compreender melhor as necessidades formativas dos professores de Matemática no que se refere especialmente aos conhecimentos sobre os números reais, foram considerados os estudos realizados por Corbo (2012), Penteado (2004) e Iglioni e Silva (1999).

Com o propósito de investigar os conhecimentos necessários aos professores de Matemática para o ensino de conteúdos relacionados ao conjunto dos números reais, com ênfase nos irracionais, Corbo (2012) realizou um estudo com 23 professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de escolas públicas estaduais da cidade de São Paulo. Com base em questionários abertos, na primeira fase da pesquisa, a autora obteve dados que permitiram conhecer a perspectiva dos professores quanto aos conceitos matemáticos específicos e conhecimentos pedagógicos (sobretudo referindo-se à abordagem dos números reais) dos docentes investigados, além de conhecer as dúvidas que seus alunos apresentavam e como os professores interpretavam essas dificuldades.

Corbo (2012) observou que os professores não tinham bem consolidados os conhecimentos das definições, representações e classificação dos números como racionais, irracionais e reais. Segundo a autora, isso “compromete qualquer abordagem, ainda que introdutória, que pretenda discutir a ampliação dos campos numéricos, em uma classe de alunos da Educação Básica” (2012, p. 155).

A respeito do ensino dos números irracionais, no tocante às abordagens utilizadas pelos depoentes, foram mencionadas atividades que seriam interessantes caso fossem exploradas da maneira correta, com objetivo bem delineado. Por exemplo, foram indicadas atividades de medição, mas sem alusão a como seriam caracterizados os números irracionais, como por aproximação ou introduzindo as noções de comensurabilidade e incomensurabilidade de grandezas. Outras respostas chegaram a apontar uma possível representação de números irracionais na forma fracionária. Alguns professores recomendaram atividades que envolvessem cálculos aproximados de raízes, outros o uso de calculadora, alguns indicaram a História da Matemática para a compreensão da necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, porém esses grupos não revelaram as

estratégias que usariam para que os alunos compreendessem os resultados como números irracionais. Apenas um dos professores sugeriu uma exploração da ideia de densidade, sendo que nenhum dos entrevistados sugeriu uma abordagem geométrica.

Quanto às possíveis dúvidas apresentadas pelos estudantes em relação aos números irracionais ou a incomensurabilidade, dez docentes indicaram a dificuldade de abstração, como de imaginar grandezas incomensuráveis ou de compreender a noção de infinito. Outros dez professores mencionaram que muitos alunos apresentam dúvidas quanto à definição dos conjuntos numéricos. Além disso, foi apontada a dificuldade de localização na reta numérica. Corbo (2012) observa que as dificuldades dos alunos estão relacionadas às abordagens mencionadas anteriormente por esses professores, que foram insuficientes, o que revela uma necessidade de aprendizagem, por parte dos docentes, dos conceitos de incomensurabilidade de grandezas e localização de números racionais e irracionais na reta numérica.

Os professores também foram consultados a respeito da importância do estudo do conjunto dos números irracionais no Ensino Fundamental. Os depoentes consideraram ser importante uma introdução a esse trabalho, porém de forma reduzida, sendo suficientes exemplificações ou aproximações racionais para que os alunos pudessem notar as diferenças existentes com o conjunto dos números racionais, de modo que um estudo mais aprofundado dos números irracionais fosse realizado no Ensino Médio.

A autora questionou os docentes sobre abordagens geométricas de números irracionais, se consideravam uma estratégia importante e como deveria ser realizada, o que acabou revelando limitações e um afastamento da Geometria no que se refere ao estudo desse conjunto numérico. A maioria das respostas mostra uma falta de compreensão dessas abordagens, embora três professores tenham indicado a realização de experimentos de medição que permitissem a introdução do número Pi (π) e apenas um tenha explicitado a construção de segmentos irracionais como aplicação do Teorema de Pitágoras. Além disso, alguns professores mencionaram a determinação da diagonal do quadrado, no entanto não deram ideia de como prosseguir o ensino a partir dessa atividade. Outros ainda se referiram à localização de números irracionais na reta numérica e um deles sugeriu o diagrama de Lull-Leibniz-Euler-Venn como única abordagem para o estudo desses números.

Para verificar os conhecimentos curriculares relacionados aos números reais, a autora propôs a discussão de uma questão que constava no material dos professores, cuja finalidade era iniciar uma discussão sobre números irracionais do ponto de vista geométrico, questionando se era sempre possível representar a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer por um número racional. Em relação a essa indagação, oito professores não avaliaram a relevância dessa questão, dois não conseguiram tornar perceptível a noção de número irracional por meio da atividade, outros oito professores responderam, de maneira vaga, ser uma questão interessante, e três docentes argumentaram ser uma questão interessante para iniciar um estudo mais aprofundado. De modo geral, a autora verifica mais uma vez a falta de conhecimento de conceitos importantes relacionados ao conjunto dos números irracionais, especialmente no que se refere à incomensurabilidade.

Quando questionados diretamente a respeito da incomensurabilidade de grandezas e seu ensino, os depoentes confirmaram, em sua maioria, a ausência de domínio desse conhecimento. Para a autora, a falta de uma noção geométrica dos números irracionais leva a respostas vagas quando se trata da importância desse estudo, limitando o ensino e a aprendizagem dos alunos.

Isto é, mesmo que se opte por uma abordagem apenas inicial que leve em conta o nível de compreensão dos alunos, é o domínio que o professor tem a respeito desse assunto que permitirá a transformação desse conhecimento em conhecimento a ser ensinado – acessível, compreensível aos alunos. (CORBO, 2012, p. 177)

Portanto, é possível inferir que as noções acerca do conjunto dos números reais que foram inadequadamente concretizadas pelos professores geram reformulações equivocadas a respeito dos conceitos a serem ensinados, o que reduz as possibilidades de diferentes abordagens no ensino, podendo consolidar nos alunos visões equivocadas a respeito de um conteúdo tão importante, que fundamenta o estudo da Matemática no Ensino Básico.

No que se refere à exploração realizada nas salas de aula desses docentes da ideia de densidade do conjunto dos números racionais em relação ao conjunto dos números reais, apenas sete indicaram conhecimento de abordagens possíveis, doze revelaram conhecimentos inconsistentes, dois professores não responderam e dois disseram que não sabiam como responder a esse questionamento. Corbo (2012) propôs ainda uma atividade com afirmações equivocadas de alunos para que os professores analisassem. Os erros dos estudantes derivavam, segundo a autora,

da falta de conhecimento da densidade do conjunto dos números racionais em relação ao conjunto dos números reais, de modo que os alunos indicaram a ideia de sucessor nesse conjunto numérico. Os comentários da maioria dos professores demonstraram falta de consistência no conhecimento de que não se aplica a noção de sucessor quando se trata do conjunto dos números racionais, além de dúvidas quanto à comparação e representação de elementos desse conjunto e, novamente, quanto à noção de densidade dos racionais em relação ao conjunto dos números reais. Além disso, a autora concluiu que a maioria dos professores não percebeu que os alunos transferiram seus conhecimentos sobre os números naturais (operações e relação de ordem) diretamente para os racionais (operações, relação de ordem, ordem incompleta e densidade).

Também foram propostas afirmações incorretas a respeito da racionalidade ou irracionalidade de um número a fim de que os professores reconhecessem e demonstrassem suas concepções sobre as definições acerca desses conjuntos numéricos. Os argumentos dos professores demonstraram novamente dúvidas quanto a essas definições, e alguns chegaram a considerar algumas das afirmações corretas, o que leva a autora destacar que nenhum dos professores do grupo estudado justificou de maneira correta suas convicções.

A autora propôs ainda uma atividade semelhante a anterior, na qual os professores deveriam classificar como corretas ou não, justificando, respostas sobre a localização exata de $\sqrt{13}$ na reta numérica. Apenas um professor respondeu de forma coerente, afirmando ser possível realizar essa localização por meio da construção de um segmento de reta, indicando também uma localização aproximada, segundo a autora, em uma justificativa correta do ponto de vista prático.

A partir de uma profunda análise desses resultados, a autora concluiu que grande parte dos professores trazia concepções equivocadas acerca de definições, propriedades e representações dos conjuntos numéricos e não dominava conhecimentos geométricos relativos ao conjunto dos números reais. Corbo (2012) deduziu ser necessária uma intervenção, que foi realizada na próxima fase do estudo, que agisse no sentido de concretizar os conhecimentos dos professores sobre os números reais, para então trabalhar a dimensão pedagógica desse conceito de modo que contribuísse para seu ensino.

Ou seja, não teria sentido oferecer alternativas e possibilidades diferenciadas de abordagens do conjunto dos números irracionais, a fim de que os professores selecionassem a abordagem melhor, uma vez que não

havia domínio do conteúdo específico. Seria antes necessária uma intervenção que proporcionasse a esse grupo de professores uma oportunidade de construir ou reformular parte de suas concepções a respeito dos números racionais e irracionais. (CORBO, 2012, p. 196)

Penteado (2004) buscou conhecer as concepções sobre os números reais, por meio de intervenção, aplicação e análise de sequência de ensino, de professores do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo, centrando-se na ideia de densidade dos números racionais e irracionais no conjunto dos números reais.

Os professores investigados souberam, em sua maioria, classificar números dados em racionais ou irracionais, mesmo que muitos tenham recorrido à representação decimal para isso, questionando se haveria ou não período. Cabe ressaltar uma observação feita sobre o zero, sugerindo que fosse um elemento pertencente à interseção dos conjuntos dos números racionais e irracionais. Também é pertinente destacar que alguns professores classificaram um número racional expresso na forma fracionária como irracional porque, ao representar seu valor decimal por meio de divisão, não tiveram certeza se a parte decimal do número era ou não periódica por conta de sua representação infinita. Quando questionados a respeito de uma justificativa para a classificação indicada, nenhum dos professores soube definir os números racionais de maneira precisa.

Percebeu-se nas respostas de questões que remetiam à propriedade da densidade dos números reais dificuldades relacionadas à representação decimal e fracionária de números racionais, além de revelarem novamente falhas quanto à definição de números racionais e irracionais. Também foram identificadas dúvidas com respeito às noções de limite, na representação de $0,99999\dots$ como 1. Ainda explorando a ideia de densidade em intervalos, muitos professores revelaram certa noção dessa propriedade dos reais, embora a falta de conhecimento concreto tenha levado a respostas ou justificativas inconsistentes.

A discussão das definições e exemplos pelos próprios grupos de professores possibilitou a formalização de ideias, que guiaram a pesquisadora para a elaboração de uma nova atividade, baseando-se nos resultados apresentados. A autora elaborou afirmações que moviam diretamente os conhecimentos sobre a propriedade de densidade do conjunto dos números reais com a intenção de que os professores classificassem tais assertivas como verdadeiras ou falsas, justificando

suas escolhas. Penteado (2004) percebeu grande dificuldade, por parte dos professores, em formalizar raciocínios nas justificativas (quando foram realizadas), além de reiteradas dúvidas em relação às definições e quanto à propriedade de densidade dos números reais. Também foi possível notar dificuldades relacionadas à ampliação de conjuntos e validade de propriedades.

Superadas as dificuldades por meio de discussão entre os grupos de professores, foi proposta uma nova atividade com cálculo de médias entre números racionais e localização dos resultados na reta numérica. Os docentes conseguiram perceber, através da investigação, a densidade dos números racionais no conjunto dos racionais.

Já para a compreensão da densidade dos irracionais no conjunto dos números irracionais, foram propostas questões que trabalhavam com a representação decimal desses números, por meio de uma atividade inspirada no processo de diagonal de Cantor. Os professores manifestaram dificuldades na compreensão dos enunciados, na relação de ordem, na localização de números irracionais na reta numérica (incomensurabilidade de segmentos), na escrita matemática e na noção de infinito, o que se justifica pela falta de familiaridade com um trabalho mais aprofundado e reflexivo com esse conjunto numérico.

É interessante observar a maneira como foi realizada a mediação por Penteado (2004), no sentido de estimular e suscitar discussões construtivas, que colaboraram, ao longo da investigação, para um aprimoramento do conhecimento do conteúdo desses professores. No processo também foram levantadas questões a respeito do ensino, como reformulações úteis para o entendimento, porém matematicamente incorretas e que acabam sendo internalizadas pelos próprios professores. Na verdade, isso possibilitou, em termos gerais, a construção de um caminho para superação de convicções incorretas, possibilitando um trabalho matemático melhor fundamentado, dando condições para que os professores ampliassem seus conhecimentos de forma autônoma.

Igliori e Silva (1999) realizaram um estudo comparativo com 36 alunos ingressantes do curso de Ciências da Computação e 14 alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) para conhecer as concepções sobre números reais dos estudantes de cursos de Ciências Exatas da Instituição.

Por meio de um questionário composto de nove perguntas, os autores pretendiam conhecer quais as concepções iniciais a respeito do conjunto dos números reais dos alunos ingressantes que foram internalizadas de maneira inadequada e quais ideias permaneciam inexatas mesmo após um estudo sistematizado desse conjunto numérico tratado na disciplina Análise Real, no caso dos alunos concluintes, já que os autores consideram que “A complexidade da elaboração do conceito de número real se expressa fortemente quando o aluno toma os primeiros contatos com o campo da Análise” (IGLIORI; SILVA, 1999, p. 2).

A representação decimal infinita de números reais confundiu alunos ingressantes e concluintes quanto à classificação como racional ou irracional. Além disso, os estudantes confundiram números com suas aproximações (dificuldade apresentada principalmente por alunos concluintes), classificando, por exemplo, o número racional 3,1416 como irracional, por tê-lo confundido com o número π .

Ainda no que se refere à irracionalidade do número π , dentre os alunos ingressantes, 14 classificaram como número racional, ao passo que 11 afirmaram que esse número não pertence a $\mathbb{Q}$ e 11 não souberam justificar, mas responderam corretamente. Já entre os alunos concluintes da Licenciatura em Matemática, dois alunos afirmaram que π é um número racional, ao passo que 5 justificaram que o número não pertence a $\mathbb{Q}$ e 11 responderam que é um número irracional, porém não souberam justificar.

Os alunos ingressantes revelaram ter uma noção insuficiente a respeito da densidade dos números reais. Quanto à ideia de ordem no conjunto dos números reais, 16 alunos ingressantes erraram ao comparar números reais, ao passo que apenas um identificou o número 2,0 como 1,999 Já entre os alunos concluintes, apenas dois erraram ao comparar elementos de $\mathbb{R}$, mas nenhum conseguiu identificar os números mencionados como iguais. É interessante destacar também que um dos alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática considerou um intervalo do conjunto dos números reais como finito.

Igliori e Silva (1999) concluíram que, no geral, as dificuldades apresentadas se referiam à diferenciação de números racionais e irracionais, especialmente no tocante à representação decimal desses números, além de dúvidas quanto às ideias de sucessor e antecessor, dificuldades de compreensão da completude e infinitude do conjunto dos números reais, da densidade desse conjunto e de comparação de conjuntos infinitos.

Apesar de considerarem ter havido progresso na compreensão de ideias relacionadas ao conjunto dos números reais quando compararam as respostas dos alunos ingressantes e dos concluintes, os autores afirmaram que, mesmo após um curso introdutório de Análise Real, os graduandos ainda apresentavam ideias equivocadas sobre esse conjunto numérico. Afirmam que a disciplina Análise Real na instituição pesquisada é tratada de maneira tradicional, na qual o conjunto dos números reais é trabalhado de maneira axiomática (IGLIORI; SILVA, 1999, p. 18).

Em vista disso, os autores consideram essencial que sejam consideradas as ideias iniciais e transitórias dos alunos acerca dos números reais, além das concepções que persistem mesmo após um estudo mais elaborado desse conjunto numérico, para que haja melhoria no ensino desse conteúdo.

Os resultados obtidos por Iglori e Silva (1999) permitem concluir que muitos alunos chegam ao Ensino Superior, em cursos de Ciências Exatas, com concepções equivocadas sobre os números reais, que não são superadas e reelaboradas ao decorrer dos cursos, levando-os a concluir a graduação sem terem superado essas dificuldades, carregando essas dúvidas no exercício da profissão e podendo gerar tais dificuldades em outros sujeitos, como no caso dos formandos em Licenciatura em Matemática. Isso é confirmado pelas investigações e intervenções realizadas por Corbo (2012) e Penteado (2004), que revelaram que professores de Matemática que já atuam no Ensino Básico podem ainda apresentar dúvidas simples em relação aos números reais, as quais apresentam efeitos diretos no ensino desses conceitos, prejudicando os educandos no sentido de promover a concretização de concepções equivocadas.

Com efeito, essa situação pode ocasionar um “círculo vicioso”, como concluem Broetto e Santos-Wagner (2019) em seu estudo sobre o ensino de números irracionais: o professor conclui a graduação sem uma formação matemática apropriada e que possibilite um ensino adequado de conhecimentos matemáticos aos alunos e esses alunos chegam à universidade sem noções matemáticas satisfatórias que possibilitem aprofundar seus conhecimentos, o que leva a uma repetição do ciclo.

Pela BNCC (BRASIL, 2018), os conjuntos numéricos permeiam todo o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, servindo como base para aprofundamento nos demais eixos temáticos. No entanto, questiona-se: como aprofundar um conceito

que não está bem fundamentado e que ainda gera dúvidas? E como lidar com essas dúvidas, se os próprios professores também a cultivam?

Nesse sentido, reitera-se que é imprescindível que o professor conclua o curso de Licenciatura com as três categorias de conhecimento delineadas por Shulman (1986) muito bem desenvolvidas. Como pondera Martines (2012, p. 17), é complexo afirmar que a Licenciatura em Matemática deva preparar o graduando para todas as questões com as quais o futuro docente irá se deparar. No entanto, os estudos realizados por Corbo (2012) e Penteado (2004) mostram professores que se formaram sem ter convicção acerca dos conhecimentos curriculares com os quais iriam trabalhar.

Percebe-se que os estudos de Corbo (2012), Penteado (2004) e Igliori e Silva (1999) revelaram dificuldades nas definições de números racionais e irracionais, com expansões de conjuntos, com a representação de números reais na reta numérica, relação de ordem no conjunto dos números reais e representações diversas desses números. Além disso, ficou clara a dúvida em relação ao conceito de densidade dos números racionais e irracionais no conjunto dos números reais, além de evidenciada a dificuldade de interpretações diversas, como no entendimento dos enunciados, na reformulação e registro do próprio raciocínio e na interpretação das concepções dos alunos.

Nessa perspectiva, isso indica que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, pautados no conhecimento curricular, não foram bem desenvolvidos na formação inicial desses professores quando se trata dos conjuntos numéricos. Os resultados encontrados por Corbo (2012) confirmam essa afirmação quando analisadas as possíveis abordagens indicadas pelos docentes investigados, mostrando que eles até tinham certa noção, porém não conseguiam estabelecer objetivos claros com as propostas sugeridas, revelando, além de lacunas na compreensão dos conceitos, dificuldades também de reelaboração pedagógica dos conteúdos a serem ensinados. Corbo (2012) e Penteado (2004) realizaram intervenções interessantes à formação continuada desses professores, que indicaram êxito quanto à superação de dúvidas e conceitos internalizados erroneamente.

Por isso, é necessário que se discuta as várias representações dos números reais e suas propriedades tendo em vista os diversos significados dessas ideias e suas relações com outros conceitos matemáticos, além da relação com o mundo

prático no curso de Licenciatura em Matemática. Ademais, é necessária uma profunda compreensão dos conceitos de modo que possam ser reelaborados como objetos de ensino, e é imprescindível que esse trabalho seja realizado na formação inicial do professor. Segundo Cunha (2014), ocorre muitas vezes que:

As dificuldades de ensino dos professores são relacionadas normalmente às de aprendizagem dos alunos. Elas são tratadas isoladamente, por cada professor, do seu jeito, conforme aparecem, apresentadas pelos alunos, ou conforme a necessidade sentida pelo professor em meio a uma aula que faz uso de um conhecimento correlato aos números naturais. (CUNHA, 2014, p. 100)

Assim, reitera-se que este trabalho considera que as dificuldades não devem seguir com os licenciandos após estarem formados e atuando como docentes. Essas dúvidas devem ser trabalhadas de maneira ampla e estrutural já no curso de Licenciatura em Matemática, especialmente na disciplina de Análise Real, considerando seu papel de consolidar e formalizar os conhecimentos dos licenciandos no que se refere, sobretudo, aos números reais. Ainda, insiste-se também na necessidade de considerar a prática docente, incluindo, segundo Reis (2001), o rigor de acordo com as intuições (iniciais e transitórias) dos licenciandos, formalizando os conceitos de modo que propicie a compreensão dos vários significados das operações e propriedades, de maneira multifacetada, segundo Martines (2012).

Nesse sentido, considera-se essencial que seja realizada a construção dos números reais na disciplina Análise Real, de modo que suscite a compreensão dos sistemas numéricos e dos conceitos relacionados a eles. Assim, não basta que seja realizada uma abordagem puramente formal, de modo que as ideias sejam trabalhadas de forma generalizada – essa abordagem é interessante ao Bacharel, uma vez que importa a caracterização, e não a natureza dos elementos. A construção dos números reais deve auxiliar o futuro professor na compreensão das operações utilizadas como algoritmos no Ensino Básico, conhecendo seus significados a fim de utilizá-los na resolução de problemas e sabendo justificar sua validade, além de ajudar a entender as ideias de densidade dos números reais, comensurabilidade e incomensurabilidade, por exemplo, de modo que consigam explorar essas noções em sua futura prática profissional. Moreira e David (2005) afirmam que:

[...] o futuro professor deve, antes de tudo, conhecer como os algoritmos funcionam, a lógica operacional deles, as possíveis dificuldades dos alunos

na sua utilização etc. Assim, o conhecimento sobre os algoritmos formais ainda continua sendo parte da demanda da prática profissional docente na escola básica hoje e, portanto, essa questão se coloca também para o processo de formação na licenciatura. (MOREIRA; DAVID, 2005, p.58)

Nesse sentido, a construção do conjunto dos números reais na disciplina Análise Real seria uma forma de evitar os resultados obtidos pelas pesquisas de Corbo (2012) e Penteado (2004), uma vez que trabalharia, na formação inicial, conceitos relevantes à prática docente, considerando a unidade temática Números evitando que dúvidas como as encontradas permaneçam ao longo da graduação, assim como percebido na investigação de Igliori e Silva (1999), sobretudo quando tais conteúdos forem ensinados no Ensino Básico.

A próxima seção dedica-se a entender algumas abordagens da construção do conjunto dos números reais que podem ser realizadas na disciplina Análise Real, ponderando a importância de um trabalho que fundamente a formação de futuros professores de Matemática.

3.3 Algumas abordagens da construção do conjunto dos números reais em Análise Matemática

Inicialmente, será apresentada de maneira simples e sintética a ideia da construção dos números reais realizada por Dedekind no século XIX, conforme a apresentação de Rudin (1971, p. 3-11), de modo que seja possível analisar a importância dessa abordagem para a formação docente. Essa demonstração é construída utilizando conceitos de sequência e argumentos lógicos estudados na disciplina Análise Real, por isso a importância da construção dos números reais, na maneira como apresentada, ser realizada nesse componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática.

Essa construção já supõe conhecido o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, iniciando com a definição matemática de corte de números racionais:

- 1.4. Definição. Diz-se que um conjunto α de números racionais é um corte se:
- (I) α contém pelo menos um racional, mas não todos os racionais;
 - (II) de $p \in \alpha$ e $q < p$ (q racional), resulta $q \in \alpha$;
 - (III) em α não existe racional máximo. (RUDIN, 1971, p. 3-4)

É possível concluir que um corte contém pelo menos um número racional, mas não coincide com conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, e que os elementos

racionais do corte são menores do que os números racionais que não pertencem a ele.

Em seguida, Rudin (1971, p. 4) traz a demonstração do seguinte resultado: “1.5. Teorema. Se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.” O autor faz a demonstração por absurdo. De fato, dado $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, se supormos que $p \geq q$, pelo segundo item da definição anterior, tem-se que $q \in \alpha$, o que contraria a hipótese inicial.

A demonstração do próximo teorema segue diretamente da definição de corte de números racionais. Rudin (1971) enuncia e demonstra o resultado da seguinte maneira:

1.6. Teorema. Seja r um número racional e α o conjunto constituído de todos os racionais p tais que $p < r$. Então α é um corte e r é o número superior mínimo de α .
 Demonstração: É claro que α satisfaz as condições (I) e (II) da Def. 1.4. Quanto a (III), basta observar que qualquer que seja $p \in \alpha$ $p < \frac{p+r}{2} < r$, e, portanto, $\frac{p+r}{2} \in \alpha$. Sendo $r < r$ absurdo, vemos que $r \notin \alpha$. Como de $p < r$ resulta $p \in \alpha$, r é o número superior mínimo de α . (RUDIN, 1971, p.4)

Em seguida, Rudin (1971, p.4) define o corte do teorema anterior como “corte racional” e indica a relação estabelecida entre o corte α e o racional r por $\alpha = r^*$. Define também a igualdade de cortes: $\alpha = \beta$ se dado $p \in \alpha \Rightarrow p \in \beta$ e dado $q \in \beta \Rightarrow q \in \alpha$ como uma identidade.

A partir disso, Rudin (1971, p.4) define a relação de ordem para os cortes, em que $\alpha < \beta$ se existe p racional de modo que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Define corte positivo “ $\alpha > 0^*$ ” e corte não negativo “ $\alpha \geq 0^*$ ” e, analogamente, traz a definição de quando um corte é negativo ou não positivo.

O autor demonstra, utilizando novamente o método por redução ao absurdo, que, dados dois cortes α e β , tem-se $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$. De fato, por definição, $\alpha = \beta$ exclui as desigualdades. Para mostrar que as desigualdades não podem ocorrer de maneira simultânea, basta supor que ocorrem. Nesse caso, de $\alpha < \beta$ decorre que existe um racional $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Além disso, de $\beta < \alpha$, existe um racional $q \in \alpha$ tal que $q \notin \beta$. De $p \in \beta$ e $q \notin \beta$, tem-se $p < q$. E de $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$, tem-se $q < p$, o que é um absurdo, uma vez que p e q são racionais e $p < q$ simultaneamente a $q < p$ é impossível nesse conjunto.

Rudin (1971, p. 5) também apresenta o seguinte teorema: “1.11. Teorema. Sejam α , β e γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$ ”. A demonstração é realizada utilizando uma relação lógica muito interessante e simples, seguindo as definições.

Ora, se $\alpha < \beta$, então existe um racional $p \in \beta$ com $p \notin \alpha$. Do mesmo modo, se $\beta < \gamma$, existe um racional $q \in \gamma$ com $q \notin \beta$. Como $p \in \beta$ e $q \notin \beta$, temos $p < q$. Além disso, como $p \notin \alpha$ e $p < q$, tem-se $q \notin \alpha$. Assim, tem-se um racional $q \in \gamma$ com $q \notin \alpha$, que, por definição, significa que $\alpha < \gamma$.

Com efeito, isso permite concluir que o conjunto de cortes racionais é um conjunto ordenado. Em seguida, Rudin (1971) demonstra, utilizando-se da definição de corte que, sendo α e β cortes, também é um corte o conjunto $\gamma = \{r \in \mathbb{Q}; r = p + q, p \in \alpha \text{ e } q \in \beta\}$, definindo γ como a soma dos cortes α e β . Demonstra que são válidas as propriedades comutativa e associativa para a soma de cortes e também a existência do elemento neutro, que é o corte 0^* , para essa operação entre cortes. Além disso, tem-se:

1.15. Teorema. Seja α um corte e $r > 0$ um racional dado. Existem racionais p, q tais que $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q não é o número superior mínimo de α e $q - p = r$.

Demonstração: Consideremos um racional $s \in \alpha$. Para $n = 0, 1, 2, \dots$ seja $s_n = s + nr$. Então existe um único inteiro m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \notin \alpha$. Se s_{m+1} não for o número superior mínimo de α , consideremos $p = s_m$, $q = s_{m+1}$. Se s_{m+1} for o número superior mínimo de α , consideremos $p = s_m + \frac{r}{2}$, $q = s_{m+1} + \frac{r}{2}$ (RUDIN, 1971, p. 7).

Rudin (1971) continua demonstrando alguns resultados importantes para a construção do conjunto dos números reais. Demonstra que, dado um corte α , existe um único corte β de modo que $\alpha + \beta = 0^*$, definindo o β como $-\alpha$.

Além disso, o autor mostra que dados os cortes α, β e γ , com $\beta < \gamma$, tem-se $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$, e quando $\beta = 0^*$, quando $\alpha > 0^*$ e $\gamma > 0^*$, tem-se $\alpha + \gamma > 0^*$ (Rudin, 1971, p. 8). Também demonstrou que, dados os cortes α e β , existe um único corte γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$, sendo γ definido com $\beta - \alpha$, sendo possível utilizar a notação $\beta - \alpha$ para $\beta - (+\alpha)$.

Em seguida, o autor traz resultados que permitem definir as operações de multiplicação e divisão entre cortes. Não traz as demonstrações, uma vez que seguem de maneira análoga às realizadas para a adição (e subtração) de cortes, considerando cada caso específico.

Assim, dados os cortes $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, o conjunto $\gamma = \{r \in \mathbb{Q}; r = pq, p \in \alpha, p \geq 0, q \in \beta, q \geq 0\}$ é um corte definido como o produto $\alpha\beta$. Rudin (1971, p. 9) também define o valor absoluto de um corte α como o corte $|\alpha|$, que equivale a α se

$\alpha \geq 0^*$ ou equivale a $-\alpha$ se $\alpha < 0^*$. Disso decorre que $|\alpha| \geq 0^*$ para todo α e $|\alpha| = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$. Assim, Rudin (1971) define a multiplicação de cortes:

1.25. Definição. Sejam α, β cortes. Definimos

$$\alpha\beta \begin{cases} -(|\alpha||\beta|) \text{ se } \alpha < 0^*, \beta \geq 0^*, \\ -(|\alpha||\beta|) \text{ se } \alpha \geq 0^*, \beta < 0^*, \\ |\alpha||\beta| \text{ se } \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

(RUDIN, 1971, p. 9).

A partir dessa definição é possível demonstrar as propriedades comutativa e associativa para a multiplicação de cortes, assim como a distributiva em relação à adição, os elementos neutro (1^*) e simétrico (0^*), e que, dados os cortes $0^* < \alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\alpha\gamma < \beta\gamma$. Nesse momento, é possível demonstrar que a divisão de cortes é um corte, ou seja, dado um corte $\alpha \neq 0^*$, para cada corte β existe e é único o corte $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ tal que $\alpha\gamma = \beta$ (Rudin, 1971, p. 9).

Para finalizar o estudo de cortes, Rudin (1971, p.10) demonstra mais três teoremas. O primeiro afirma que, dados p e q racionais, vale que $p^* + q^* = (p + q)^*$, $p^*q^* = (pq)^*$ e que $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$.

Em seguida, mostra que, dados cortes α e β , com $\alpha < \beta$, existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$, ou seja, entre dois cortes quaisquer, existe um corte racional. De fato, de $\alpha < \beta$, tem-se que existe um racional p com $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Seja r um número racional tal que $r > p$ e $r \in \beta$. Como $r \in \beta$ e $r \notin r^*$, tem-se que $r^* < \beta$. Pelo mesmo motivo, conclui-se que $r^* > \alpha$, já que $p \in r^*$ e $p \notin \alpha$. Assim, $\alpha < r^* < \beta$.

Por fim, demonstra que para qualquer corte α , $p \in \alpha \Leftrightarrow p^* < \alpha$, ou seja, cada corte α equivale ao conjunto dos números racionais p tais que $p < \alpha$. De fato, dado um racional p , tem-se $p \notin p^*$. Assim, se supormos $p \in \alpha$, como $p \notin p^*$, segue que $p^* < \alpha$. Agora, mostremos que a recíproca é válida. De $p^* < \alpha$, tem-se que existe um racional $q \in \alpha$ com $q \notin p^*$. Desse modo, $q \geq p$ e como $q \in \alpha$ e $p \notin p^*$, segue que $p \in \alpha$.

Após realizar o estudo dos cortes de números racionais, é possível afirmar que valem para o conjunto dos cortes as mesmas leis da aritmética que valem para os racionais, ou seja, o conjunto de todos os cortes racionais é um corpo ordenado. Assim, tem-se um isomorfismo entre o conjunto dos cortes racionais e o conjunto dos números racionais, o que permite, por Rudin (1971, p. 11) identificar um número racional r como r^* (corte determinado pelo número racional r).

Assim, define-se número racional:

1.31. Definição. Cortes serão chamados, daqui por diante, números reais. Cortes racionais serão identificados com números racionais (e chamados números racionais) Todos os demais cortes serão chamados números irracionais. (RUDIN, 1971, p. 11)

Dessa forma, o conjunto dos números racionais é um subconjunto do conjunto dos números reais. O autor, também, demonstra o Teorema de Dedekind:

1.32. Teorema (Dedekind). Sejam A e B conjuntos de números reais tais que:

- (a) todo número real está em A ou em B ;
- (b) nenhum número real está simultaneamente em A e em B ;
- (c) nem A nem B é vazio;
- (d) se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, temos $\alpha < \beta$.

Então existe um, e somente um, número real γ , tal que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$, e $\gamma \leq \beta$, para todo $\beta \in B$. (RUDIN, 1971, p. 11)

Além disso, enuncia um corolário do Teorema de Dedekind, o qual afirma que ou A tem um número máximo ou B tem um número mínimo. Isso permite, segundo Rudin (1971), preencher as lacunas encontradas no conjunto dos números racionais, isso faz com que o Teorema de Dedekind seja por vezes conhecido como “teorema do complemento dos números reais” (RUDIN, 1971, p. 12). Logo, após a demonstração do Teorema de Dedekind, é estabelecida a definição de cota superior (e, analogamente, de cota inferior) de um conjunto: dado E um conjunto de números reais, se existe y tal que $x \leq y$ para todo $x \in E$, então E é limitado superiormente e y é chamado cota superior de E . Em seguida, o autor, define supremo (e, analogamente, ínfimo) de um conjunto: se E é um conjunto limitado superiormente, y é uma cota superior de E e dado $x < y$, x não é cota superior de E , tem-se que y é o supremo de E .

O autor também demonstra que, sendo E um conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente, existe um supremo de E . Com esse resultado, tem-se os números irracionais. De fato, foi mostrado que todo corte racional possui um elemento de separação. Assim, tem-se o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais como os cortes racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais formado pelas separações entre esses cortes, o que resulta justamente na construção dos números reais ($\mathbb{R}$). Com isso, é possível demonstrar que qualquer corpo ordenado completo é isomorfo ao corpo ordenado e completo dos reais e, sendo único, portanto, a menos dos isomorfismos.

Por fim, Rudin (1971, p. 14) demonstra a existência de raízes n -ésimas de números reais positivos “1.37. Teorema. Para cada $x > 0$ real, e cada $n > 0$, inteiro,

existe um único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$, o que conhecemos nos Ensinos Fundamental e Médio como $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$. O autor, também, mostra a relação entre números reais e expressões decimais e define o conjunto dos números reais ampliado.

Nessa abordagem da construção dos números reais, supõe-se conhecido o conjunto dos números racionais, procedendo de maneira formal e rigorosa na construção das estruturas até chegar a uma definição para os números irracionais, consolidando a construção dos reais. Nota-se que os conceitos são tratados de maneira abstrata, a fim de caracterizar esse conjunto, voltando atenções maiores às suas estruturas. É interessante destacar o raciocínio exigido para realizar as demonstrações, de forma construtiva ou por absurdo, exigindo do leitor apuramento e cuidado na realização do procedimento, realizado de maneira muito bem articulada para elaboração das provas.

No entanto, a forma abstrata, embora interessante por garantir a validade e consistência dos resultados, não é suficiente para contribuir para a formação do professor que irá atuar na Educação Básica. De fato, a maneira como são tratados os números reais nessa construção não contribui diretamente para o trabalho do professor. É claro que essa abordagem permite que sejam compreendidas as noções de ordem, as operações, suas propriedades e, por exemplo, estabelecer a ideia de densidade dos racionais e irracionais. Todavia, o modo como são tratados os números reais, como cortes ou a separação entre eles, não consiste propriamente em um objeto de ensino do futuro professor do Ensino Básico.

Logicamente, a maneira como é explorado o conjunto dos números reais nessa construção é muito mais interessante do que apenas postular sua existência como corpo ordenado completo, ou seja, que satisfaça os axiomas de corpo, os axiomas de corpo ordenado e o axioma da completude, porém não são privilegiadas discussões acerca dos significados que podem suscitar uma compreensão mais ampla para o futuro docente.

Em relação a esse questionamento, Moreira e David (2007, p. 80-83) comentam que os professores devem conceber os números reais como números de fato, e não de maneira postulacional como propõe essa “construção” do conjunto dos reais. Além disso, afirmam que é necessário que os docentes compreendam as expansões dos conjuntos numéricos e o significado de número irracional, tendo

condições discutir e explorar esses conceitos com seus alunos. No que se refere a abordagens puramente formais, os autores consideram que:

Nesse sentido, a apresentação usual dos reais nesses cursos, em que se valoriza enfaticamente a ideia de estrutura abstrata, em que os números e as operações têm seus significados dados pela estrutura e esta, por sua vez, é constituída através de axiomas, configura, ao nosso ver, uma forma de conhecer os reais que se desconecta das questões escolares referentes ao trabalho com esse conjunto numérico. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 81)

Os autores ressaltam, ainda, que não se deve perder de vista o conhecimento pedagógico sobre os números reais, principalmente na questão dos números irracionais, de modo que os futuros professores consigam lidar com um tratamento, muitas vezes, insuficiente desse conjunto numérico na Matemática Escolar. Por isso, Moreira e David (2007) destacam ainda a importância da discussão da incomensurabilidade na abordagem dos números irracionais:

O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos no trabalho com a ideia de incomensurabilidade e sua vinculação com o significado dos números irracionais pode ser essencial no desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção, adaptação ou mesmo a construção e a implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema “números reais”. (MOREIRA; DAVID 2007, p. 83-84)

Considerando especificamente a questão dos números irracionais, Broetto e Santos-Wagner (2019) argumentam que a forma como se apresenta o tratamento desse conjunto numérico no Ensino Básico não é suficiente para que os alunos consigam alcançar uma compreensão apropriada. Ocorre que muitos desses alunos ingressam no Ensino Superior, em cursos de Licenciatura em Matemática, ainda sem um entendimento adequado, o que não é superado por esses cursos de graduação por conta do excesso de formalismo empregado em construções como a aquela apresentada anteriormente ou pela simples abordagem axiomática dos reais como corpo ordenado completo.

Os autores ressaltam ainda que um tratamento essencialmente formalista dos números reais pode não dar condições para que os professores ensinem os conceitos relacionados e propriedades presentes nesse conjunto numérico no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, sendo necessário incorporar a Matemática Escolar na formação matemática do futuro docente. Isso é importante, segundo Broetto e Santos-Wagner (2019, p. 742), para que os futuros professores, ao se depararem com a insuficiência de conhecimentos para o ensino nos números reais, não repitam o ensino que tiveram quando cursaram o Ensino Básico (que pode ter

sido superficial) ou tenham como único recurso o livro didático, consolidando um “círculo vicioso”.

É certo que se espera para o futuro professor uma formação mais elaborada, com conhecimentos mais amplos e mais profundos, de modo que possa reformular suas concepções matemáticas com vistas ao ensino, assim como aponta Martines (2012). Broetto e Santos-Wagner (2019) compreendem essa visão, destacando que antes é necessário que o futuro professor compreenda de fato o que irá ensinar.

Em um estudo de caso realizado em uma universidade de Presidente Prudente, no estado de São Paulo, com análise documental e entrevistas com professores do curso de Licenciatura em Matemática, Cunha (2014) conclui que há uma tendência a privilegiar a Matemática Acadêmica, desconsiderando a Matemática que é trabalhada nas escolas. O autor considera essencial que os licenciandos trabalhem conceitos como incomensurabilidade e mensuração, além de compreender profundamente o conjunto dos números irracionais e as propriedades válidas para o conjunto dos reais a partir da ampliação dos conjuntos numéricos.

Assim, Cunha (2014) afirma que, embora o tratamento axiomático seja uma forma de compreender os significados dos números reais, essa abordagem não se aproxima do trabalho do professor, uma vez que:

Na matemática escolar, o conjunto dos números reais é construído para solucionar problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais. De modo formal e não sistematizado, o estudo das propriedades e das relações envolvendo os números se realizou ao longo da história, envolvendo necessidades e operações de ordem prática e num tempo em que os números eram pensados em termos geométricos. Um estudo das produções históricas relacionadas à reta real permite refletir sobre a lógica da construção dos números reais. (CUNHA, 2014, p. 40)

O autor situa os números reais como corpo ordenado completo de acordo com os conceitos matemáticos que são trabalhados no Ensino Básico, ressaltando a necessidade de promover a compreensão dos significados desse conjunto numérico na Licenciatura, de modo que os futuros docentes sejam capazes de explicar as finalidades dos números irracionais e noções de infinito, por exemplo, que consistem em grandes dificuldades dos alunos do Ensino Básico.

Neste trabalho, acredita-se que a Licenciatura em Matemática deva preparar o graduando para ser professor dessa disciplina. Assim como observa Martines (2012), não é possível preparar o futuro docente para todos os desafios que ele encontrará na prática, já que cada aluno e cada contexto, por exemplo, pode trazer

um desafio diferente para o futuro professor. No entanto, é necessário que a graduação forme professores que conheçam muito bem a Matemática, desde os conteúdos em si, as formas como se apresentam no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, até maneiras de reformular esse conhecimento do professor para que se construa como conhecimento do aluno, como explicitado por Shulman (1986).

Desse modo, consoante Martines (2012), o conhecimento matemático do professor não é exatamente o mesmo que será ensinado aos alunos. Nesse sentido, o licenciando deve compreender de maneira estrutural e abrangente os diversos significados dos conceitos matemáticos. Para que esse conhecimento seja bem fundamentado, este trabalho considera, conforme Reis (2001), que o rigor matemático deve ser inserido no ensino dos conteúdos de acordo com a compreensão do aluno, com a finalidade de que essa compreensão seja privilegiada, de modo que os graduandos não enxerguem o trabalho desses conceitos como excessivamente formalista, mas entendam-no como um trabalho consistente que possibilita a assimilação da Matemática e a percepção dela como objeto de ensino.

Nesse sentido, Paterlini (2012) propõe uma abordagem dos números reais em Análise Matemática que possibilita uma compreensão da Matemática trabalhada no Ensino Básico por intermédio da Matemática do Ensino Superior, trabalhada nos cursos de Licenciatura.

O autor apresenta os números naturais por meio de abordagem histórica, iniciando pela necessidade humana de contar, introduzindo as ideias de sucessor e antecessor de números naturais, comentando os diferentes sistemas de numeração.

Em seguida, Paterlini (2012) define, de maneira intuitiva, a adição de números naturais a e b da seguinte maneira: “tomamos o sucessor $a + 1$ de a , em seguida o sucessor de $a + 1$, e assim por diante, realizamos a ação ‘tomar o sucessor’ tantas vezes quantas são as unidades de b ” (2012, p. 5), mostrando também os significados das propriedades comutativa e associativa da adição. Além disso, define a subtração de números naturais como a operação inversa da adição, mostrando os diversos significados dessas operações, como acrescentar e completar (2012, p. 6).

O autor também define a ideia de ordem no conjunto dos números naturais:

Escrevemos $a = b$ para indicar que os números naturais têm a mesma quantidade de unidades. Neste caso, dizemos a igual a b .

Se a tem mais unidades do que b , escrevemos $b < a$, ou $a > b$, e dizemos b *menor do que* a , ou, respectivamente, a *maior do que* b . (PATERLINI, 2012, p.6).

É provado que vale a propriedade da transitividade: “De fato, se a tem menos unidades do que b e se este tem menos unidades do que c , então a tem menos unidades do que c ” (2012, p. 6-7) e enunciada a Lei da Tricotomia para os números naturais. O autor ainda observa que vale o princípio do menor número natural, ou seja, sendo A um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então “existe a em A tal que $a \leq b$ para todo b em A ” (2012, p. 7).

Observa-se que é válida a compatibilidade entre a ordem e a operação de adição, ou seja, dados a , b e c números naturais quaisquer, “se $a < b$ então $a + c < b + c$ ” (2012, p. 7), demonstrando essa ideia de maneira intuitiva, de modo parecido com o qual provou a propriedade da transitividade, demonstrando também que “se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$ ” (2012, p. 7). Desse resultado, demonstra que, dados números naturais a , b , c e d , “se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$ ” (2012, p. 7). O autor ainda enuncia as leis do cancelamento, que decorrem diretamente da Lei da Tricotomia, ou seja, sendo a , b e c números naturais, tem-se que se $a + c = b + c$, então $a = b$, e se $a + c < b + c$, então $a < b$ (2012, p. 7).

Em continuação, Paterlini (2012, p.7) define a multiplicação de números naturais como “potencialização” da adição, explorando seu significado em termos gerais da adição definindo o produto de um número natural n por um número natural a como “adicionar n parcelas iguais a a ”, além de propor a definição da seguinte maneira:

Formalmente, podemos definir a multiplicação por recorrência da seguinte maneira. Seja a um número natural qualquer. Então

$$\begin{cases} 1 \cdot a = a \\ n \cdot a = (n - 1) \cdot a + a \text{ para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(PATERLINI, 2012, p. 7)

A partir dessa definição, o autor utiliza ilustrações para mostrar usos da multiplicação para contagens, já dando a ideia da comutatividade dessa operação, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e da propriedade associativa da multiplicação, que são demonstradas de maneira intuitiva a partir de observações nas ilustrações. Além disso, demonstra que, dados números naturais a , b e n , “se $a < b$ então $an < bn$ ” ou “se $a \leq b$ então $an \leq bn$ ” (2012, p. 9) chamada

compatibilidade entre a ordem e a multiplicação utilizando as ideias que derivam da compatibilidade entre a ordem e a adição.

O autor define também a divisão de números naturais, comentando seu significado de repartir quantidades em grupos iguais, sabendo quantos são os grupos e quantos elementos terá cada grupo, definindo essa operação da seguinte maneira:

Dado um número natural a , suponhamos que a foi dividido em q grupos com b elementos cada um, e que restaram r elementos. Temos a equação fundamental da *divisão*:

$$a = bq + r$$

Se da divisão não existir resto, dizemos que o resto é zero e que a divisão é *exata*, e escrevemos

$$a = bq$$

(PATERLINI, 2012, p. 9)

Essa operação ainda é comentada com um exemplo, tendo seus significados explorados de maneira mais ampla, além de serem propostas duas formas diferentes para ser realizada. Essas duas maneiras dão uma noção matemática de como justificar o algoritmo da divisão “na chave”, muito utilizado no Ensino Básico.

Em seguida, o autor esclarece a ideia do zero e formaliza o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dos números naturais, dando a ideia qualitativa de “positividade” (2012, p. 11) desse conjunto, construindo, tomando-se por base dessa ideia, o conjunto dos números inteiros de forma contextualizada e de modo que amplia claramente o conjunto dos números naturais:

Em outros termos, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\dots - 3, -2, -1\}$. Conforme já mencionamos, para todo número natural $n \neq 0$ o número $-n$ é denominado *oposto* de n . Os elementos do conjunto $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ serão denominados *inteiros positivos*, e os do conjunto $\mathbb{Z}_- = \{\dots - 3, -2, -1\}$, *inteiros negativos*.

Obtivemos assim um novo conjunto de números que inclui os números naturais. Esperamos que esse novo conjunto tenha maiores possibilidades do que o antigo conjunto $\mathbb{N}$. (PATERLINI, 2012, p. 12)

O autor define as operações de adição e multiplicação no conjunto dos números inteiros, para demonstração das propriedades dessas operações ele sugere que podem ser realizadas de forma análoga como as que foram realizadas para o conjunto dos números naturais, propondo para o leitor a verificação de cada um dos itens, que incluem as “regras de sinais” estudadas no Ensino Básico. E, ainda, propõe que o leitor verifique a propriedade comutativa da adição e da multiplicação, associativa da adição e da multiplicação e distributiva. Em seguida, Paterlini (2012) estende o significado da relação de ordem em $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e define o

valor absoluto de um número, explicando seu significado como “Todo $n \in \mathbb{Z}$ e seu oposto $-n$ têm o mesmo valor quantitativo” (2012, p. 13), e demonstra as leis da compatibilidade e do cancelamento para o conjunto dos números inteiros.

O autor apresenta alguns resultados de Teoria dos Números que serão utilizados e trabalhados com maior profundidade ao decorrer do estudo no livro. Em continuação, ele apresenta os Axiomas de Peano, os quais fundamentam a construção de $\mathbb{N}$, Princípios de Indução e Indução Completa e Princípio do Menor Número Natural. Ademais, é mostrado o Algoritmo da Divisão, definido múltiplo, divisor, máximo divisor comum, números primos, paridade, dentre outros resultados. Ao final do capítulo, o autor apresenta problemas, temas para investigação e atividades direcionadas ao ensino dos conceitos trabalhados até o momento.

Por meio de uma contextualização histórica, que trata da necessidade humana de dividir quantidades, o autor introduz os números racionais:

Dados números inteiros positivos a e b , dividimos a unidade em b partes, e tomamos a dessas partes, ou, de forma equivalente, dividimos a em b partes iguais e tomamos uma parte. A mais difundida forma de representação dessa quantidade é $\frac{a}{b}$, ou a/b . (PATERLINI, 2012, p. 19)

Nessa definição, a é chamado numerador e b , denominador. Além disso, $a\frac{1}{b}$ quer dizer tomar a fração $\frac{1}{b}$ uma quantidade a de vezes, ou seja, $a\frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}$ (a vezes) (2012, p. 20), afirmação que é exemplificada geometricamente. Seguindo a abordagem geométrica, Paterlini (2012) define frações equivalentes e já introduz a comparação de números expressos na forma fracionária com mesmo denominador ou com denominadores diferentes, justificando procedimentos realizados no Ensino Básico, como simplificação de frações e verificação da igualdade de frações (“multiplicar em cruz”). Com esses raciocínios, é definida a relação de ordem no conjunto dos números racionais como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ (2012, p. 22). Além disso, o autor observa que $\frac{a}{1} = a$, ou seja, que todo número inteiro positivo também é um número racional, e que $\frac{a}{a} = 1$ e $\frac{0}{b} = 0$, com a e b inteiros positivos quaisquer. Assim, a partir desse momento, são definidas as operações de adição e subtração de números racionais e ampliado o conjunto de racionais formado até agora, considerando a/b sendo a um inteiro qualquer e b um inteiro positivo (lembrando que o autor definiu $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3 \dots\}$), expandindo novamente essa definição para

quaisquer a e b inteiros, com $b \neq 0$. Assim, tem-se o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ (2012, p. 23).

São definidas as operações de adição e subtração de números racionais e é mostrado que essas definições são compatíveis com o conjunto dos números inteiros, uma vez que é um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Além disso, é definida a multiplicação de números racionais (tendo como condição preservar a multiplicação de números inteiros, uma vez que esse conjunto é subconjunto dos números racionais):

Mais geralmente, se a/b e c/d são frações de inteiros positivos, entendemos que o produto $\frac{a}{b} \frac{c}{d}$ significa que primeiro dividimos a unidade em d partes iguais, e tomamos c dessas partes. Depois dividimos cada uma das d partes em b partes iguais, e tomamos a vezes as partes antes consideradas. Dessa forma a unidade é dividida em bd partes e são tomadas ac dessas partes. Portanto adotamos como definição de multiplicação

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (2.8)$$

definição esta válida quaisquer que sejam os números racionais a/b e c/d . (PATERLINI, 2012, p. 24)

Além disso, é definida algebricamente a operação de divisão de números racionais e demonstrada a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e enunciadas as seguintes propriedades, que são deixadas para verificação do leitor: associatividade e comutatividade da adição e da multiplicação, distributividade, transitividade da ordem, tricotomia, monotonicidade da adição e monotonicidade da multiplicação (2012, p. 24).

É demonstrado o seguinte resultado: “Teorema 2.1. Todo número racional tem uma única representação na forma a/b , sendo a e b inteiros relativamente primos e $b > 0$ ” (PATERLINI, 2012, p. 24), de forma construtiva, utilizando resultados anteriores de modo logicamente conciso:

Dado um racional a/b , sejam a_1 e b_1 inteiros tais que $a = \text{mdc}(a, b)a_1$ e $b = \text{mdc}(a, b)b_1$. Sabemos que a_1 e b_1 são relativamente primos (e também $-a_1$ e $-b_1$). Ainda

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{mdc}(a, b)a_1}{\text{mdc}(a, b)b_1} = \frac{-a_1}{-b_1}$$

sendo $b_1 > 0$ ou $-b_1 > 0$. Assim vemos que a/b tem uma representação na forma requerida.

Vejamos agora a unicidade. Suponhamos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ são representações como frações inteiras do mesmo número racional, como $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $\text{mdc}(c, d) = 1$ e $b > 0$ e $d > 0$. Temos $ad = bc$, do que segue que d divide

bc . Como $\text{mdc}(c, d) = 1$ vem que d divide b (Teorema 1.13, página 16). Novamente de $ad = bc$ segue que b divide ad , e como $\text{mdc}(a, b) = 1$ vem que b divide d . Daí $b = \pm d$, e como $b > 0$ e $d > 0$, concluímos que $b = d$. Introduzindo essa informação em $ad = bc$ segue $a = c$. Portanto a representação é única, e isto termina a demonstração do Teorema. (PATERLINI, 2012, p.24-25)

Essa representação é chamada representação irredutível, muito trabalhada no Ensino Básico, como resultado de “simplificações” de frações equivalentes.

Ainda, Paterlini (2012) trabalha a expansão decimal dos números racionais, isto é, a representação decimal desses números, além da fracionária vista anteriormente. O autor contextualiza a importância de conhecer esse tipo de representação e relaciona a representação fracionária com a decimal:

Notemos que, dada uma fração de inteiros a/b , com $b > 0$, podemos escrever $a = bz + s$, sendo z e s números inteiros e $0 \leq s < b$. Portanto

$$\frac{a}{b} = z + \frac{s}{b}$$

e toda fração ordinária é a soma de um inteiro e de uma fração ordinária ≥ 0 e < 1 . Por exemplo,

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$$

Com essa ideia podemos localizar facilmente o número a/b em um eixo numérico. Escrevendo $\frac{a}{b} = z + (s/b)$ com $0 \leq s < b$, para localizar a/b dividimos o intervalo $[z, z + 1]$ em b subintervalos iguais e tomamos s desses subintervalos a partir de z , na direção positiva. A extremidade de maior valor do último subintervalo corresponde ao número a/b . (PATERLINI, 2012, p. 25)

O exemplo citado é representado graficamente, levando a conclusão de que a maneira citada não é a mais simples de se expressar, motivando o seguinte teorema, que será demonstrado em outro capítulo:

Teorema 2.2. Todo número racional $r \in [0, 1)$ se escreve na forma

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots \quad (2.10)$$

sendo cada b_i um dos algarismos decimais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 para todo i . (PATERLINI, 2012, p. 27)

Paterlini (2012) explica esse resultado aplicando-o, e em seguida, denomina a representação de r acima como expansão decimal de r , mais utilizada como $r = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ (PATERLINI, 2012, p. 27). Além disso, o autor estende esse resultado para qualquer número racional r e exemplifica, lembrando o “algoritmo da divisão continuada” (PATERLINI, 2012, p. 27), conhecido no Ensino Básico como divisão na chave, definindo também a noção de expansão periódica e período de uma expansão ou número decimal.

O autor então mostra que ao dividir um número inteiro a por um número inteiro $b \neq 0$, a representação decimal será finita, quando a divisão termina, ou a representação decimal será periódica, quando a divisão continua infinitamente. Ou seja, os números racionais admitem apenas esses dois tipos de representação decimal: finita ou periódica.

De fato, ao dividir a por b , em cada etapa da divisão obtemos um resto ≥ 0 e $< b$. Se o resto for zero em algum momento, a divisão termina. Se o resto nunca for zero, então a divisão nunca termina, e em algum momento haverá repetição de um resto, pois temos $b - 1$ valores possíveis para os restos $\neq 0$. Assim, no máximo depois de $b - 1$ divisões haverá a repetição de um resto s já ocorrido anteriormente. A partir desse ponto os restos se repetem periodicamente, gerando, no quociente, um agrupamento de dígitos que se repetem periodicamente. O dígito do quociente que corresponde à primeira aparição do resto s é o primeiro dígito da primeira ocorrência do período. Os dígitos do quociente que correspondem aos restos obtidos antes da primeira aparição do resto s formam o pré-período. (PATERLINI, 2012, p. 28-29)

Essa é a demonstração do “Teorema 2.4. A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou periódica” (2012, p. 29). A partir de um exemplo, a soma $\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots$ é relacionada com a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, possibilitando transformar a representação periódica infinita de um número em uma fração de inteiros. Ainda utilizando de exemplificação, do mesmo modo é possível encontrar uma representação fracionária de números inteiros para uma expansão decimal finita. A conclusão dessas ideias é expressa no “Teorema 2.5. A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou periódica. Reciprocamente, toda expansão decimal finita ou periódica representa um número racional” (2012, p. 30).

Para finalizar o estudo dos números racionais, o autor traz a representação como frações contínuas, propondo resolução de Problemas e temas para investigação, com o intuito trabalhar atividades voltadas ao ensino dessas ideias no Ensino Básico.

Com o propósito de introduzir o estudo dos números irracionais, Paterlini (2012) realiza um trabalho detalhado com o número $\sqrt{2}$, denominado constante de Pitágoras, a partir de uma abordagem histórica abrangente e muito interessante. Em seguida, são apresentadas demonstrações da não racionalidade desse número: utilizando a paridade de números inteiros, dois métodos de descida, dois métodos geométricos, argumento de fração honesta (que é considerado uma boa abordagem para o Ensino Básico), através de aproximações e frações contínuas. Também são

propostos Problemas e temas para investigação, além de três atividades para o ensino, que abordam a história do símbolo $\sqrt{}$, denominado radical, e propõe reflexões sobre possíveis argumentos para o ensino desse conteúdo e sobre apresentar ou não a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, em quais momentos e com quais métodos isso seria adequado.

Novamente utilizando uma abordagem histórica, Paterlini (2012) aborda construções de modelos para os números reais. Em seguida, são desenvolvidas as noções de ordem, operações, continuidade e de infinito, como na demonstração do seguinte resultado: “Teorema 4.1. Se M e r são números racionais positivos, então existe um número inteiro positivo n tal que $nr > M$.” (2012, p. 59).

É explorada a ideia de divisão de segmentos, culminando na hipótese da comensurabilidade: “Dados segmentos quaisquer AB e CD , existem um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $CD = nTU$.” (2012, p. 61). Assim, são definidos então números comensuráveis, associados à ideia de segmentos comensuráveis. O autor demonstra o seguinte resultado: “Proposição 4.4. Dados segmentos AB e CD comensuráveis então existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.” (2012, p. 62), a partir da hipótese de comensurabilidade: “Como AB e CD são comensuráveis, existem um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB \cong mTU$ e $CD \cong nTU$. Portanto $nAB \cong n(mTU) \cong nmTU \cong m(nTU) \cong mCD$, o que implica $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.” (2012, p. 62). Em continuação dessa ideia, Paterlini (2012) demonstra corolários que levam à prova da recíproca da Proposição 4.4: “Proposição 4.8: Dados segmentos AB e CD , se existem números inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ então AB e CD são comensuráveis” (2012, p. 63), chegando a demonstração, pela hipótese da comensurabilidade, do Teorema da Proporcionalidade de Thales: “Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, intercepta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão” (2012, p. 63). É interessante notar que o autor traz diversas ilustrações para auxiliar a compreensão das demonstrações apresentadas, uma vez que utilizam argumentos geométricos.

A descoberta de segmentos não comensuráveis gerou inquietação quanto a esse modelo numérico, uma vez que a Geometria desenvolvida até então era inspirada na hipótese de que os segmentos da reta são comensuráveis. Segundo Paterlini (2012), a Teoria das Proporções de Eudoxo supriu tais questionamentos,

uma vez que possibilitou demonstrar resultados da Geometria que foram questionados após a descoberta da incomensurabilidade.

Definição 4.10. Dados segmentos AB , CD , EF e GH , dizemos que AB está para CD assim como EF está para GH se, dados inteiros positivos m e n quaisquer, temos:

(i) se $nAB \cong mCD$ então $nEF \cong mGH$,

e

(ii) se $nAB > mCD$ então $nEF > mGH$,

e

(iii) se $nAB < mCD$ então $nEF < mGH$.

Nessas condições escrevemos $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$. (PATERLINI, 2012, p. 66)

Essa definição, que pode ser interpretada como “todo número real x fica caracterizado pelo conjunto dos números racionais que são menores do que ele (ou, equivalentemente, x fica caracterizado pelos números racionais que são maiores do que ele)” (2012, p. 69) permite demonstrar o Teorema da Proporcionalidade de Thales (Teorema 4.9) para segmentos quaisquer e não apenas tendo como base segmentos comensuráveis.

Levando em consideração agora os números racionais e os que não são racionais, tem-se o conjunto dos números reais, cujo estudo mais aprofundado é proposto de maneira agora algébrica, com base na ideia da construção de $\mathbb{R}$ de Dedekind. Para isso, Paterlini (2012) apresenta a ideia dessa construção de forma concisa, exemplificando $\sqrt{2}$ como corte e trazendo um “dicionário de propriedades de $\mathbb{R}$ ” (2012, p. 74-75), de modo a proporcionar compreensão desse conjunto, cujo estudo até então foi direcionado às suas estruturas, com foco em sua construção em uma abordagem histórica. Essa investigação é ampliada pelo estudo de outros elementos de Análise Real, como sequências, por exemplo. O autor ainda dedica um capítulo ao estudo do número π e outro capítulo a um estudo mais aprofundado dos números irracionais. É interessante notar que são propostos problemas, temas para exploração e atividades direcionadas aos licenciandos e aos professores.

Portanto, essa perspectiva construtiva do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais aborda a ampliação de conjuntos numéricos, desde o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais até concluir o conjunto dos números reais, tratando de ideias importantes para a formação do futuro professor.

De fato, essa construção traz uma abordagem histórica para o conjunto dos números naturais, tratando ideias como a de sucessor de um número nesse conjunto, noção de ordem, operações e propriedades, além de noções muito

trabalhadas no Ensino Básico, como os conceitos de múltiplo e divisor, máximo divisor comum, números primos e paridade, também esclarecendo a ideia do número zero. É feita a ampliação para o conjunto dos números inteiros e suas propriedades e também realizada uma abordagem histórica do conjunto dos números racionais, com esclarecimento de operações entre frações e frações irredutíveis – ideias muito estudadas no Ensino Básico – e representação decimal de números racionais (como números decimais finitos ou dízimas periódicas). Para introduzir a ideia de número irracional, novamente por meio de abordagem histórica, é explorado o número $\sqrt{2}$, com diversos tipos de demonstração de sua irracionalidade. Desse modo, são trabalhadas as ideias de comensurabilidade e incomensurabilidade, situando essas ideias historicamente, abordando o Teorema de Thales e trazendo, de forma sintética, as propriedades do conjunto dos números reais.

Nota-se que a proposta de construção de $\mathbb{R}$ realizada por Paterlini (2012) traz definições e demonstrações rigorosas, mas não de maneira estritamente formal, de modo que o licenciando consiga compreender a ideia de algoritmos e ideias que são amplamente trabalhadas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, como a ideia da divisão, soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, “regras de sinais” e multiplicação “em cruz”, por exemplo.

O modo como são apresentadas as definições e realizadas as demonstrações pode evitar que ocorra a internalização de concepções equivocadas pelos licenciandos e, por consequência, compartilhadas com seus futuros alunos, como constatadas por Corbo (2012), Penteado (2004) e Iglioni e Silva (1999). A construção de $\mathbb{R}$ realizada por Paterlini (2012) trata, inclusive, de dificuldades de professores que já atuam no ensino e de futuros docentes, apontadas por aqueles autores, como, por exemplo, a definição dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, representação decimal e ideia de sucessor no conjunto dos números naturais e de densidade de conjuntos.

A construção do conjunto dos números reais realizada por Paterlini (2012) fundamenta-se na Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2007), promovendo discussões por meio de resolução de problemas, temas para investigação e atividades voltadas para licenciando e professores sobre o ensino das ideias relacionadas para aqueles conjuntos numéricos. É interessante ressaltar que a abordagem rigorosa, porém não estritamente formal, proporciona uma compreensão

estrutural e ao mesmo tempo ampla dos conceitos desenvolvidos. Um trabalho realizado dessa forma é apontado como essencial por Martines (2012), uma vez que articula a formação matemática do futuro professor com os saberes necessários para o ensino dessa disciplina nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Além disso, a forma como é concebido o conjunto dos números reais possibilita uma compreensão contextualizada desse conjunto e também a resolução de problemas proposta por Paterlini (2012) ao término de cada capítulo, como apontado por Cunha (2014, p.40), é essencial para o ensino de conceitos relacionados aos números reais no Ensino Básico. É possível depreender da construção de $\mathbb{R}$ realizada por Paterlini (2012) que esse conjunto se trata de um corpo ordenado completo, do modo como foi abordado por Cunha (2014), ou seja, de maneira significativa para explorar essas ideias no ensino de Matemática:

A estrutura dos números reais é construída em torno de um conjunto por meio de propriedades exigidas da operação de adição e da de multiplicação. Essas propriedades são as leis associativas, as leis comutativas, a lei distributiva e as leis da identidade que definem o “0” como elemento neutro da adição e o “1” como elemento neutro da multiplicação. Conjuntos que apresentam essas propriedades algébricas são chamados de corpos.

As propriedades de ordem permitem a comparação do “tamanho” de dois números quaisquer. A partir destas propriedades é possível inferir as regras para desigualdades. Um corpo munido de regras que permitam comparar o tamanho de dois de seus elementos é chamado de corpo ordenado.

A propriedade da completude diz que existem números reais suficientes para “completar” a reta. Esta propriedade é que permite que muitos dos teoremas do Cálculo funcionem, fundamental para o entendimento do conceito de limite. (CUNHA, 2014, p. 40-41)

O trabalho realizado por Paterlini (2012) com os números reais está em conformidade com as ideias de Cunha (2014) para o ensino desse conjunto no curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que trata de modo concreto e bem contextualizado a ampliação dos conjuntos numéricos, tratando de maneira detalhada a incomensurabilidade, proporcionando uma boa compreensão dos números irracionais.

Portanto, essa construção de $\mathbb{R}$ proporciona um conhecimento flexível, adequadamente fundamentado, de maneira rigorosa, porém não estritamente formal, de modo que o licenciando compreenda os conceitos e consiga utilizá-los adequadamente para a resolução de problemas, além de possibilitar uma discussão a respeito do ensino desses conceitos para os estudantes do Ensino Básico. Ainda,

segundo Reis (2001), essa abordagem é primordial a um curso de Licenciatura, uma vez que inclui um rigor compatível com o curso de Licenciatura em Matemática, trabalhando os conceitos de maneira significativa e compreensível para o futuro professor, o que não significa, segundo o autor, promover um ensino inferior ao realizado nos cursos de Bacharelado, todavia pensar a futura prática profissional do estudante que será formado.

Portanto, é possível abordar o conjunto dos números reais de maneira puramente axiomática, como um corpo ordenado completo, e construir esse conjunto em abordagens formais que sejam mais abstratas, como feito por Rudin (1971), ou embasada na construção histórica, privilegiando a compreensão das ideias abrangidas pelos números reais, como realizado por Paterlini (2012).

Considera-se, nesse trabalho, construções de $\mathbb{R}$ como realizada por Paterlini (2012) como adequadas para o ensino desse conceito na disciplina Análise Real de cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que trata as ideias de maneira rigorosa no que se refere às estruturas que compõem o conjunto, porém contextualizadas em seu processo histórico de construção e tratadas de modo que permita ao futuro professor compreender formal e amplamente conceitos trabalhados no Ensino Básico, porém sem um tratamento abstrato e estritamente formal dessas ideias. Além disso, Paterlini (2012) propõe uma abordagem que inclui a resolução de problemas e discussões sobre como ensinar os conceitos trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, propondo também que os licenciandos aprofundem seus conhecimentos por meio de temas para investigação.

Nessa perspectiva, os conceitos são tratados de maneira ampla e estrutural, de modo que possibilite ao futuro professor conhecer as justificativas das ideias trabalhadas e a importância do conteúdo para o ensino de Matemática, estimulando-os a refletir sobre como reelaborar ou abordar o conjunto dos números reais com a finalidade de auxiliar seus futuros alunos a construir seus conhecimentos sobre esse tema, proporcionando em sua formação as três categorias de conhecimentos necessárias ao professor delineadas por Shulman (1986). Por considerar o conceito e suas formas de representação, proporcionando compreensão das definições e demonstrações através de exemplos e ilustrações, com o intuito de se preocupar com a construção histórica e concreta desses conceitos, estimulando uma reflexão sobre os aspectos conceituais, didáticos e pedagógicos do conteúdo trabalhado,

essa abordagem da construção dos números reais está em conformidade com as ideias de Fiorentini e Oliveira (2013) para o ensino de conceitos matemáticos para o futuro professor.

4 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – CONCRETIZAÇÃO DE UM PROJETO DE PESQUISA

Observada a relevância da construção do conjunto dos números reais de modo coerente com a disciplina Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática, visando à formação para a docência no Ensino Básico, será agora apresentada a pesquisa realizada neste trabalho.

4.1 Escolha dos cursos de Licenciatura em Matemática das Instituições Públicas do estado de São Paulo

Segundo o Relatório Síntese de Área: Matemática (Bacharelado/Licenciatura), participaram do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes da Educação Superior (ENADE) do ano de 2017 alunos de 450 cursos de Licenciatura na Área de Matemática. O documento ainda indica que a maioria dos cursos pertencia a Instituições Públicas, totalizando 307 cursos, o equivalente a 68,2% dos cursos que fizeram o ENADE (BRASIL, 2017, p. 24).

Além disso, o Relatório indica que a região Sudeste teve maior participação de cursos de Licenciatura em Matemática no ENADE, com 159 cursos o que representa 35,3% do total (BRASIL, 2017, p. 24). Foram 4587 estudantes inscritos dessa região, o que representou 34,4% do total do país (BRASIL, 2017, p. 32).

Da região Sudeste, o estado de São Paulo foi o que teve maior representatividade no Exame, com um total de 82 cursos (BRASIL, 2017, p. 29), o equivalente a aproximadamente 51,6% do total de cursos do Sudeste e 18,2% da totalidade de cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil.

Desse modo, por ter uma ampla representatividade de cursos de Licenciatura em Matemática em uma das mais importantes avaliações de cursos superiores do Brasil, foi escolhido o estado de São Paulo como parâmetro para esta pesquisa investigativa.

Embora a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil pertença a Instituições Públicas, a região Sudeste apresenta 50,3% de cursos relativos às Instituições Privadas (BRASIL, 2017, p. 24). Isso indica que, aproximadamente, a metade dos cursos de Licenciatura em Matemática do Sudeste brasileiro pertence a instituições Públicas de Ensino Superior.

Neste trabalho, optamos pelas Instituições Públicas pelo fato de a maioria apresentarem, em seus endereços eletrônicos, os planos de ensino das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, o que possibilitou investigar, de maneira mais ágil e direta, o plano de ensino da disciplina Análise Real (dentre outras denominações) dessas instituições.

4.2 Metodologia: estudo dos planos de ensino da disciplina Análise Real

Dentre as várias indagações que motivaram este trabalho, as duas principais questões, que podem ser consideradas norteadoras da pesquisa realizada, são: É feita a construção dos números reais na disciplina Análise Real? O programa dessas disciplinas aponta a forma como essa construção é realizada?

Para a investigação e a interpretação dos dados obtidos foi utilizada a metodologia de pesquisa documental inserida em uma abordagem predominantemente qualitativa. Os documentos selecionados como fonte de dados para esta pesquisa foram os planos de ensino da disciplina Análise Real dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições públicas de Ensino Superior do estado de São Paulo.

Para Pimentel (2001), esse tipo de investigação exige que haja uma busca pelos documentos, que devem receber tratamento de acordo com o problema da pesquisa em questão, para então ser possível definir as categorias que devem ser analisadas. Esses materiais devem ser organizados e explorados, de modo que os dados sejam codificados e interpretados, com a finalidade conhecer as informações explícitas e desvendar as ideias implícitas contidas no contexto amplo em que se insere o documento investigado.

Segundo Castro, Tucunduva e Arns (2008, p. 61), o planejamento da atividade docente deve funcionar como um guia para a prática, que direciona o professor, de maneira autônoma, para realizar seus objetivos quanto à formação de seus alunos como cidadãos, revelando a importância desse ato. Para isso, as autoras ressaltam a importância de um conhecimento bem estruturado sobre o planejamento:

Conhecer as principais etapas do planejamento também foi de suma importância, pois através do conhecimento dessas etapas o professor poderá descrever com maior clareza seus objetivos, a forma com que irá aplicar o conteúdo, os conteúdos que serão ministrados e como fará o

diagnóstico dos resultados obtidos ao longo do processo. (CASTRO; TUCUNDUVA; ARNS, 2008, p. 61)

O plano de ensino da disciplina Análise Real deve expressar, portanto, os objetivos, conteúdos e metodologias que nortearão o trabalho docente ao ministrar a disciplina. Para Libâneo (2013), o plano de ensino deve apresentar um programa a ser seguido durante o curso de determinada disciplina, contendo “justificativa da disciplina em relação aos objetivos da escola; objetivos gerais; objetivos específicos; conteúdo (com a divisão temática de cada unidade); tempo provável e desenvolvimento metodológico (atividades do professor e dos alunos).” (LIBÂNEO, 2013, p. 257).

Tendo em vista a importância do planejamento e do plano de ensino para o ensino de Análise Matemática, consultamos os documentos com o objetivo de investigar se há indicações de como é feita a construção dos conjuntos dos números reais nessa disciplina, caso seja realizada. Para tanto, a pesquisa atenta aos conteúdos descritos nas ementas e aos objetivos expressos nesses documentos (dados explícitos), além de refletir sobre a bibliografia básica indicada nos planos de ensino (dados implícitos), com a finalidade de compreender amplamente os documentos analisados, tendo em vista as indagações que movem essa investigação. Desse modo, as informações contidas nos planos de ensino revelaram a necessidade de investigar também as bibliografias mencionadas nesses documentos. Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) explicitam os significados dessas metodologias de pesquisa e as diferenciam:

A pesquisa documental é muito próxima da pesquisa bibliográfica. O elemento diferenciador está na natureza das fontes: a pesquisa bibliográfica remete para as contribuições de diferentes autores sobre o tema, atentando para as fontes secundárias, enquanto a pesquisa documental recorre a materiais que ainda não receberam tratamento analítico, ou seja, as fontes primárias. (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009, p. 6)

Desse modo, a pesquisa realizada contou com planos de ensino como fonte de dados principais (fontes primárias de dados), que foram fornecidos pelas instituições em seus endereços eletrônicos (*websites*) ou, quando não estavam disponíveis, pedidos por *e-mail* a essas instituições. A pré-análise desses documentos revelou a necessidade de conhecer como era a construção do conjunto dos números reais nas bibliografias básicas indicadas nesses documentos (fontes secundárias de dados). Assim, é possível afirmar que foi utilizada, predominantemente, a metodologia de pesquisa documental com caráter qualitativo,

mas também foi realizada a pesquisa bibliográfica para refinar a exploração dos materiais coletados.

Segundo Godoy (1995), uma das vantagens da pesquisa documental é o fato de o pesquisador ter acesso a fontes de dados distantes, tanto fisicamente quanto historicamente. A autora destaca ainda que:

[...] os documentos constituem uma fonte não-reativa, as informações neles contidas permanecem as mesmas após longos períodos de tempo. Podem ser considerados uma fonte natural de informações à medida que, por terem origem num determinado contexto histórico, econômico e social, retratam e fornecem dados sobre esse mesmo contexto. Não há, portanto, o perigo de alteração no comportamento dos sujeitos sob investigação. (GODOY, 1995, p. 22)

O caráter predominantemente qualitativo se deve ao fato de que, segundo Godoy (1995, p. 24), ao realizar uma investigação de caráter documental, o pesquisador deve atentar-se aos dados explícitos, mas também ao conteúdo que não foi expresso diretamente, a fim de que compreenda de maneira concreta o sentido das informações presentes nos documentos.

Para realizar essa investigação, foram consultados os planos de ensino da disciplina Análise Real (dentre outras diversas denominações) dos cursos de Licenciatura em Matemática das seguintes instituições públicas de Ensino Superior paulistas:

- i. Instituto Federal de São Paulo (IFSP) das cidades de Araraquara, Birigui, Bragança Paulista, Campos do Jordão, Caraguatatuba, Cubatão, Guarulhos, Hortolândia, Itapetininga, São José dos Campos e São Paulo;
- ii. Universidade Federal do ABC (UFABC) de Santo André;
- iii. Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) das cidades de São Carlos e Sorocaba;
- iv. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) das cidades de Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto;
- v. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP);
- vi. Universidade de São Paulo (USP) das cidades de São Paulo e São Carlos.

É interessante observar que foi possível referenciar alguns planos de ensino, enquanto que, para outros, houve a necessidade de incluir nos Anexos deste

trabalho, principalmente nos casos em que não constava os planos de ensino de Análise Real nos *websites* das instituições e que foi necessário requisitar por *e-mail*.

É importante salientar que o curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Guaratinguetá não contempla mais a disciplina Análise Real. Segundo as informações recebidas por *e-mail*, a disciplina fazia parte da estrutura antiga do curso, vigente até o ano de 2014, retornando no ano de 2020 na nova reestruturação, que até a data da defesa deste trabalho não havia sido regularizada. Além disso, o curso de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática da USP de São Carlos não possuía, em sua grade curricular, disciplinas relacionadas à Análise Real.

Depois da obtenção dos planos de ensino da disciplina Fundamentos de Análise (dentre outras diversas denominações utilizadas) mediante os endereços eletrônicos (*websites*) das Instituições de Ensino Superior Públicas do estado de São Paulo ou pedidos por *e-mail* dessas instituições, foi realizada a análise dos conteúdos seguindo as fases de pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados (GODOY, 1995, p. 24) em uma perspectiva predominantemente qualitativa.

A pré-análise contou a organização dos documentos, que foram armazenados digitalmente em nuvem por meio dos serviços da plataforma *Google Drive*. Esses planos de ensino foram impressos e foi realizada uma primeira leitura, a qual permitiu formular hipóteses iniciais.

Em seguida, foi realizada a exploração desses materiais, o que levou a um levantamento bibliográfico dos referenciais indicados como bibliografia básica dos documentos investigados. Cabe aqui destacar uma das principais dificuldades dessa pesquisa: nem todos os livros indicados foram encontrados e, quando obtidos, nem sempre se tratava da mesma edição indicada pelos planos de ensino. No entanto, as indicações resumem-se em 23 referências, das quais foram analisadas 20, ou seja, aproximadamente 87% do total, o que forneceu uma boa quantidade de materiais para o levantamento dos dados implícitos.

Esse aperfeiçoamento possibilitou uma interpretação mais abrangente dos planos de ensino, que foram, na sequência, interpretados um a um, gerando os resultados e as conclusões deste trabalho. A próxima seção traz um detalhamento do levantamento e análise das bibliografias básicas indicadas nos planos de ensino e também uma exploração desses documentos com o objetivo de verificar se é feita

a construção dos números reais em Análise Real nos cursos investigados e como é realizada essa construção, tendo em vista a formação do futuro professor e sua atuação nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

5 RESULTADOS

A construção dos números reais pode ser realizada de maneira estritamente formal e abstrata, com resultados generalizados que são aplicáveis na busca por outros resultados e resolução de problemas dentro da lógica processual estabelecida, atendendo às necessidades do futuro matemático (profissional formado por cursos de Bacharelado em Matemática). Por outro lado, essa construção pode ser fundamentada no ensino de conteúdos relacionados ao conjunto dos números reais, ou seja, realizada com rigor matemático no que se refere às definições e demonstrações, porém não de modo estritamente formal, em uma abordagem que proporcione a compreensão ampla desses conceitos de maneira que possibilite seu ensino e a utilização na resolução de problemas práticos com os quais os estudantes do Ensino Básico podem se deparar em seu cotidiano, por exemplo, de modo que o futuro professor (profissional formado pelo curso de Licenciatura em Matemática) consiga justificar os resultados e lidar com as dúvidas e erros de seus alunos.

No caso em que a abordagem é feita de maneira estritamente axiomática, ou seja, o conjunto dos números reais é apresentado como corpo ordenado completo, consideramos que não é realizada a construção desse conjunto, mas que apenas são apresentadas suas propriedades de modo que seja possível continuar o trabalho de outros conteúdos na disciplina.

Em vista disso, foi realizada uma primeira leitura dos planos de ensino, que foram os dados principais dessa pesquisa. Esse primeiro contato com os documentos permitiu conhecer as ementas, objetivos e conteúdos tratados nos cursos de Análise Real das instituições pesquisadas. Em alguns planos de ensino, essa primeira leitura já permitiu inferir se a construção dos números reais era ou não realizada em cada um dos cursos de Licenciatura em Matemática, no entanto, antes de realizar afirmações do gênero, houve a preferência por investigar os dados implícitos contidos nesses documentos que, no caso, eram as bibliografias básicas. Isso se deve ao fato de que, segundo Libâneo (2013), os conteúdos são indicados pelos professores e têm a função de guiar a preparação das aulas. Esses conteúdos estão presentes nas referências bibliográficas, que também trazem as possíveis abordagens desses conceitos, cuja função é guiar os estudos dos alunos, de acordo com Libâneo (2013).

5.1 Análise das bibliografias básicas indicadas pelos planos de ensino

Os Quadros 1 a 24 trazem as bibliografias básicas indicadas pelos respectivos planos de ensino. Vale salientar que as referências foram indicadas nos quadros abaixo da mesma forma em que foram descritas em cada um dos planos de ensino.

Quadro 1 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Araraquara

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Araraquara
ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
FERREIRA, J. A construção dos números . 3. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 111 p. (Textos Universitários; 9)
LIMA, E. Curso de análise . 14 ^a . Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012, v. 1. Coleção Projeto Euclides.
LIMA, P. C. Fundamentos de Análise I [Formato eletrônico]. Belo Horizonte: CAED-UFG, 2013.
PATERLINI, R. R. A Aritmética dos Números Reais . [Formato eletrônico] São Carlos: UFSCar, 2012.

Fonte: IFSP, 2020c.

Quadro 2 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Birigui

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Birigui
LIMA, Elon Lages. Análise real: função de uma variável . 11. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. v.1.
ÁVILA, Geraldo. Análise Matemática para Licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
SIMMONS, George Finlay. Cálculo com Geometria Analítica . Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGrawHill, 1988. v.2.

Fonte: IFSP, 2020d.

Quadro 3 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Bragança Paulista

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Bragança Paulista
ÁVILA, Geraldo. Análise matemática para a licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
ÁVILA, Geraldo. Introdução à análise matemática . 2. ed. rev. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.
TÁBOAS, Plácido Zoega. Cálculo em uma variável real . São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

Fonte: IFSP, 2020e.

Quadro 4 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Campos do Jordão

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Campos do Jordão
ÁVILA, Geraldo. Introdução à Análise Matemática . 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.
ÁVILA, Geraldo. Análise Matemática para a Licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.
VILLANUEVA, David Armando Zavaleta. Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo . 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

Fonte: ANEXO A.

Quadro 5 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Caraguatatuba

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Caraguatatuba
ÁVILA, Geraldo. Análise Matemática para Licenciatura . São Paulo: Edgard Blücher, 2011.
FIGUEIREDO, Djairo Guedes. Análise I . 2. ed. Rio Janeiro: LTC, 2011.
GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo . Rio de Janeiro: LTC, 2001. (Vol. 1)

Fonte: IFSP, 2020f.

Quadro 6 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Cubatão

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Cubatão
ÁVILA, G. Análise matemática para licenciatura . 3.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
BOURCHTEIN, A. ; BOURCHTEIN, L. Análise real: funções de uma variável real . São Paulo: Ciência Moderna, 2010.
LIMA, E. L. Análise real . vol.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
RPM : Revista do Professor de Matemática. SBM. ISSN: 0102-4981.

Fonte: IFSP, 2020.

Quadro 7 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Guarulhos

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Guarulhos
ÁVILA, Geraldo. Análise Matemática para Licenciatura . São Paulo: Edgard Blücher, 2008.
LIMA, Elon Lages. Análise real: função de uma variável . 9. ed.; v.1; Rio de Janeiro: IMPA, 2007 (Coleção Matemática Universitária)
SIMMONS, George F. Cálculo com Geometria Analítica . v.2. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Fonte: ANEXO B.

Quadro 8 – Bibliografia básica de “Análise Real” do IFSP Hortolândia

Bibliografia básica – Análise Real – IFSP Hortolândia
ÁVILA, Geraldo. Análise matemática para licenciatura . 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2019.
ÁVILA, Geraldo. Introdução à análise matemática . 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.
PANONCELLI, Diego Manoel. Análise Matemática . São Paulo: Pearson, 2017. Disponível em https://bv4.digitalpages.com.br/?page=1&section=0#/legacy/9788559723397 . Acesso em: 25 maio 2019.

Fonte: IFSP, 2020a.

Quadro 9 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP Itapetininga

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP Itapetininga
ÁVILA, Geraldo. Análise matemática para licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.
PANONCELLI, Diego Manoel. Análise Matemática . 1. ed. Editora InterSaberes, 2017.
FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise I . 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
Periódico: TEMA – TENDÊNCIAS DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL. São Carlos: SBMAC, 2000-2018. Quadrimestral.

Fonte: ANEXO C.

Quadro 10 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Real” do IFSP São José dos Campos

Bibliografia básica – Introdução à Análise Real – IFSP São José dos Campos
ÁVILA, G. Análise matemática para licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo . 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.
LIMA, E. L. Análise Real . 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1.
C. Q. D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática . Disponível em: < http://www2.fc.unesp.br/revistacqd >. Acesso em: 04 de junho de 2018.

Fonte: ANEXO D.

Quadro 11 – Bibliografia básica de “Tópicos de Análise Real” do IFSP São Paulo

Bibliografia básica – Tópicos de Análise Real – IFSP São Paulo
ÁVILA, Geraldo. Introdução à Análise Matemática : 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.
LIMA, Elon Lages. Curso de Análise . vol.1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA: 2017.
NIVEN, Ivan. Números: racionais e irracionais . 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Fonte: IFSP, 2020b.

Quadro 12 – Bibliografia básica de “Fundamentos de Análise” da UFABC Santo André

Bibliografia básica – Fundamentos de Análise – UFABC
ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura . 3ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
FIGUEIREDO, D. G. Análise I . 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
LIMA, E. L. Análise Real: funções de uma variável . 9.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

Fonte: ANEXO E.

Quadro 13 – Bibliografia básica de “Análise Matemática para o Ensino” da UFSCar São Carlos

Bibliografia básica – Análise Matemática para o Ensino – UFSCar São Carlos
ÁVILA, G. Análise matemática para licenciatura . 3. ed. São Paulo: Blücher, 2011.
ÁVILA, G. Introdução à análise matemática . São Paulo: Edgard Blücher, c.1993.
LIMA, E. L. Análise real, volume 1: funções de uma variável . 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Coleção Matemática Universitária).

Fonte: ANEXO F.

Quadro 14 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise” da UFSCar Sorocaba

Bibliografia básica – Introdução à Análise – UFSCar Sorocaba
ÁVILA, G. Análise Matemática para licenciatura , 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2006.
FIGUEIREDO, D. G. Análise 1 – 2 ed . Rio de Janeiro. LTC, 2011
LIMA, E. L. Análise Real , vol 1, 11ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária)

Fonte: ANEXO G.

Quadro 15 – Bibliografia de “Análise Real para a Licenciatura” da UNESP Bauru

Bibliografia básica – Análise Real para a Licenciatura – UNESP Bauru
AVILA, G. Análise matemática para licenciatura . 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Blücher, 2006. 3. reimpressão de 2011.
LIMA, E. L. Análise real . 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, c2013. v. 1.
LIMA, E. L. Curso de análise . 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, c2014. v. 1.

Fonte: UNESP, 2020.

Quadro 16 – Bibliografia básica de “Análise Real I” da UNESP Ilha Solteira

Bibliografia básica – Análise Real I – UNESP Ilha Solteira
LIMA, E. L. Análise Real volume 1: Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2016, 12ª edição.
LIMA, E. L. Curso de Análise volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2016, 14ª edição.
ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.
FIGUEIREDO, D. G. Análise I. Rio de Janeiro: LTC, 1996, 2ª edição.

Fonte: ANEXO H.

Quadro 17 – Bibliografia básica de “Análise Real I” da UNESP Presidente Prudente

Bibliografia básica – Análise Real I – UNESP Presidente Prudente
ÁVILA, G. <i>Introdução à análise matemática</i> . São Paulo, Edgard Blücher, 1992.
FIGUEIREDO, D. G. de. <i>Análise I</i> . 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
LIMA, E. L. <i>Análise Real</i> . v. 1. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
LIMA, E. L. <i>Um curso de análise</i> . v. 1, 11. ed. Rio de Janeiro, 2004.
RUDIN, W. <i>Princípios de análise matemática</i> . São Paulo: Ao livro técnico, 1971.

Fonte: ANEXO I.

Quadro 18 – Bibliografia básica de “Análise Matemática I” da UNESP Rio Claro

Bibliografia básica – Análise Matemática I – UNESP Rio Claro
ÁVILA, G. – Análise Matemática para Licenciatura – Editora Edgard Blucher Ltda, 2001,
LIMA, E. L. – Análise Real. Volume 1 – Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1989.
LIMA, E. L. – Curso de Análise – volume 1 – Projeto Euclides, IMPA, 1989, 6a. edição.
STROMBERG, K. R. – An Introduction to Classical Real Analysis. Wadsworth Inc. 1981.
BARTLE, R. G. – Elementos de Análise Real. Editora Campus, 1983.
RUDIN, W. – Principles of Mathematical Analysis, 3a. edição, 1971.
FIGUEIREDO, D. G. – Análise I – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1975.
ÁVILA, G. S. – Introdução à Análise, Editora Edgard Blucher, SP, 1993.

Fonte: UNESP, 2020b.

Quadro 19 – Bibliografia básica de “Introdução à Análise Matemática” da UNESP São José do Rio Preto

Bibliografia básica – Introdução à Análise Matemática – UNESP São José do Rio Preto
ÁVILA, G. S. S. <i>Análise Matemática para a Licenciatura</i> . São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.
FIGUEIREDO, D. G. <i>Análise I</i> , 2ª. Edição. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
LIMA, E. L. <i>Análise Real, Vol. 1. Funções de Uma Variável</i> , Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

Fonte: UNESP, 2020a.

Quadro 20 – Bibliografia básica de “Análise na Reta” da UNESP São José do Rio Preto

Bibliografia básica – Análise na Reta – UNESP São José do Rio Preto
ÁVILA, G. S. S. <i>Análise matemática para licenciatura</i> . São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.
FIGUEIREDO, D. G. <i>Análise I</i> , 2ª. Edição. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
LIMA, E. L. <i>Análise Real</i> . vol. 1. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

Fonte: UNESP, 2020a.

Quadro 21 – Bibliografia básica de “Análise I” IFSP da UNICAMP

Bibliografia básica – Análise I – UNICAMP
Elon Lages de Lima, <i>Análise Real</i> , Vol. 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro.
Djairo Guedes de Figueiredo, <i>Análise I</i> , Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.
W. Rudin, <i>Princípios de Análise Matemática</i> , Universidade de Brasília e Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.
Richard R. Goldberg, <i>Methods of Real Analysis</i> , Blaisdell, New York, 1963.

Fonte: ANEXO J.

Quadro 22 - Bibliografia básica de “Introdução à Análise” da UNICAMP

Bibliografia básica – Introdução à Análise – UNICAMP
Ávila, Geraldo: <i>Introdução à Análise Matemática</i> . 2ª ed. E. Blucher, 1999.
Spivak, Michael: <i>Calculus</i> . Fourth Edition. Publish or Perish, Inc. Houston, Texas, 2008.

Fonte: ANEXO K.

Quadro 23 - Bibliografia básica de “Introdução à Análise” da USP São Paulo

Bibliografia básica – Introdução à Análise – USP São Paulo
G. Ávila, <i>Análise Matemática para a Licenciatura</i> , 3a. edição, Edgard Blücher, 2009.
D. G. Figueiredo, <i>Análise I</i> , IMPA – Livros Técnicos e Científicos, 1975.
E. L. Lima, <i>Curso de Análise</i> , vol.1, IMPA, 1976-81.
A. J. White, <i>Análise Real: uma introdução</i> , Edgard Blücher, EDUSP, McGraw-Hill, São Paulo, 1975.
Rudin, W. <i>Princípios de Análise Matemática</i> , tradução de Eliana R. H. Brito, Ed. Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.
Spivak, B., <i>Calculus</i> , W. A. Benjamin Inc., Nova Iorque, 1967.
Artigos da RPM e da Educação Matemática em Revista – EMR – pertinentes aos temas estudados.

Fonte: ANEXO L.

Quadro 24 - Bibliografia básica de “Análise para Licenciatura” da USP São Carlos

Bibliografia básica – Análise para Licenciatura – USP São Carlos
ÁVILA, G., Análise Matemática para Licenciatura, Edgard Blucher, 2006.
MUNIZ NETO, A. C. Fundamentos de Cálculo – Coleção PROFMAT – Ed. Sociedade Brasileira de Matemática – 2015.

Fonte: ANEXO M.

Cabe ressaltar novamente a dificuldade para encontrar as mesmas edições das referências bibliográficas indicadas e mesmo os próprios livros, cujas buscas deram-se na *internet* e na biblioteca da UNESP, utilizando como ferramenta de busca o Catálogo Athena, além de consultas aos acervos pessoais.

É importante observar que, caso das indicações de artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM) – que foi citada em dois planos de ensino, de artigos da Educação Matemática em Revista (EMR) – citada em um plano de ensino, do Periódico Tendências de Matemática Aplicada e Computacional (TEMA) – citado em um plano de ensino, e da Revista Eletrônica Paulista de Matemática – citada em um plano de ensino, não foram indicados, especificamente, quais os artigos utilizados, o que inviabilizou a análise dessas referências.

O Quadro 25 abaixo traz, de maneira resumida, as edições que foram consultadas, assim como as que não foram encontradas, trazendo também o número de vezes em que foram indicadas nos planos de ensino investigados e, em síntese, se foi realizada a construção do conjunto dos números reais.

Quadro 25: Resumo das bibliografias básicas citadas nos planos de ensino

Referência consultada	Números de vezes que foi indicada nos planos de ensino	Realização da construção do conjunto dos números reais
ÁVILA, G. Análise Matemática para a Licenciatura. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.	20	Parcialmente realizada, isto é, o autor esboça um roteiro para a construção.
ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard	8	Parcialmente realizada, isto é, o autor esboça um roteiro para a construção.

Blucher, 1999.		
BARTLE, R. G. Elementos de Análise Real. Trad. Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro: Campus, 1983.	1	Não.
BOURCHTEIN, A.; BOURCHTEIN, L. Análise real: funções de uma variável real. São Paulo: Ciência Moderna, 2010.	1	O livro não foi encontrado.
FERREIRA, J. A Construção dos Números. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.	1	Parcialmente realizada, isto é, não demonstra todas as propriedades necessárias para a construção dos reais.
FIGUEIREDO, D. G. Análise I. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.	11	Não.
GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo (Vol. 1). Rio de Janeiro: LTC, 2001.	2	Não.
LIMA, E. L. Análise real, vol 1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.	14	Não.
LIMA, E. L. Curso de Análise. vol. 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.	7	Não.
LIMA, P. C. Fundamentos de Análise I [Formato eletrônico]. Belo Horizonte: CAED-UFMG,	1	Não.

2013.		
MUNIZ NETO, A. C. Fundamentos de Cálculo – Coleção PROFMAT – Ed. Sociedade Brasileira de Matemática – 2015.	1	O livro não foi encontrado.
NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. 1 ^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.	1	Não.
PANONCELI, D. M. Análise Matemática. São Paulo: Pearson, 2017.	2	O livro não foi encontrado.
PATERLINI, R. R. A Aritmética dos Números Reais. [Formato eletrônico] São Carlos: UFSCar, 2012.	1	Parcialmente realizada, isto é, não demonstra todas as propriedades necessárias para a construção dos números reais.
GOLDERG, R. R. Methods of Real Analysis. New York, 1963.	1	Não.
RUDIN, W. – Principles of Mathematical Analysis. 3 ^a ed. New York: McGraw- Hill, 1976.	1	Sim.
RUDIN, W. Princípios de Análise Matemática. São Paulo: Ao livro técnico, 1971.	3	Sim.
SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGrawHill,	2	Não.

1988.		
SPIVAK, B., Calculus. New York: W.A. Benjamin Inc., 1967.	2	Sim.
STROMBERG, K. R. – An Introduction to Classical Real Analysis. Belmont: Wadsworth Inc., 1981.	1	Não.
TÁBOAS, P. Z. Cálculo em uma variável real. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.	1	Não.
VILLANUEVA, D. A. Z. Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo. 1 ^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.	1	Parcialmente realizada, isto é, não demonstra todas as propriedades necessárias para a construção dos reais.
WHITE, A. J. Análise real: uma introdução. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, EDUSP, 1975.	1	Não.

Fonte: Elaborado pela autora.

Os cinco livros mais citados foram:

- i. Análise Matemática para a Licenciatura, do professor Geraldo Severo de Souza Ávila – citado 20 vezes nos planos de ensino;
- ii. Análise Real, volume 1, do professor Elon Lages Lima – citado 14 vezes nos planos de ensino;
- iii. Análise I, do professor Djairo Guedes de Figueiredo – citado 11 vezes nos planos de ensino;
- iv. Introdução à Análise Matemática, do professor Geraldo Severo de Souza Ávila – citado 8 vezes nos planos de ensino;

v. Curso de Análise, do professor Elon Lages Lima – citado 7 vezes.

Os outros livros foram citados uma, duas ou três vezes cada um. Os referenciais encontrados, indicados no Quadro 25, foram explorados com a intenção de verificar se era realizada ou não a construção do conjunto dos números reais e qual a abordagem utilizada por cada livro. Os resultados dessa investigação são apresentados de forma detalhada nos itens 1 a 23 a seguir.

1 – ÁVILA, G. Análise Matemática para a Licenciatura. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

O Capítulo 1 apresenta os números reais, trazendo as representações decimal e fracionária dos números racionais e também uma definição para os números irracionais, além de exemplos e de outras propriedades relacionadas aos números reais, abordadas brevemente. No que se refere à construção desse conjunto numérico, são apresentadas as construções realizadas por Dedekind e Cantor. Inicialmente, o livro mostra os princípios de Dedekind para realizar a construção a partir do conjunto dos números racionais, comentando as ideias de cortes de Dedekind, relação de ordem e operações no conjunto dos números reais, sem maiores detalhes (ÁVILA, 2001, p. 29 – 32), indicando os livros de Rudin e Spivak para um entendimento completo do leitor (ÁVILA, 2001, p. 31). A construção de Cantor é também esboçada, de modo que o leitor compreenda a ideia utilizada, mas também sem maiores detalhes (ÁVILA, 2001, p. 71 – 73).

2 – ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

O autor realiza uma abordagem histórica interessante sobre a construção do conjunto dos números reais, embora não realize essa construção no livro, trazendo as ideias de importantes matemáticos sobre o tema, como Eudoxo e Dedekind, destacando a ideia de Dedekind para a construção dos números reais (ÁVILA, 1999, p. 12-15) de modo que o leitor consiga compreender as noções utilizadas por Dedekind. Além disso, o autor indica os livros de Dedekind e Spivak para que o leitor possa encontrar a construção completa dos números reais por cortes.

3 – BARTLE, R. G. Elementos de Análise Real. Trad. Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

O autor menciona que é possível realizar a construção dos números reais a partir do conjunto dos números naturais, inteiros e racionais ou a partir do conjunto dos números racionais, no entanto não realiza essa construção, privilegiando a apresentação de uma lista de propriedades (propriedades algébricas, propriedades de ordem e a propriedade de completeza) relacionadas ao sistema de números reais (BARTLE, 1983, p. 38).

4 – BOURCHTEIN, A.; BOURCHTEIN, L. Análise Real: Funções de uma Variável Real. São Paulo: Ciência Moderna, 2010.

O livro não foi encontrado.

5 – FERREIRA, J. A Construção dos Números. 3ª ed. Rio de Janeiro: SMB, 2013.

O autor, no capítulo 2, começa com a construção dos números naturais mediante os axiomas de Peano, define recursivamente a operação de adição de dois números naturais, demonstra algumas propriedades da operação de adição e deixa outras proposições como exercício; tal procedimento é adotado em relação à operação de multiplicação; o mesmo segue para a relação de ordem em $\mathbb{N}$. No capítulo 3, constrói os números inteiros a partir da estrutura aritmética estabelecida para os números naturais por meio das noções de teoria de conjuntos e da relação de equivalência no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Em seguida, demonstra algumas propriedades da operação de adição e da subtração deixando outras proposições como exercício; essa prática é utilizada em relação à operação de multiplicação e para a relação de ordem em $\mathbb{Z}$. No capítulo 4, constrói os números racionais a partir da estrutura estabelecida para os números inteiros por meio da relação de equivalência no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Logo depois, define o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, define nesse conjunto as operações de adição e de multiplicação, demonstra algumas propriedades dessas operações e deixa outras proposições importantes como exercício, estabelece a relação de ordem e a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$, concebe $\mathbb{Q}$ como corpo ordenado. Por fim, o autor no capítulo 5, constrói os números reais a partir do conjunto dos números racionais com suas propriedades algébricas e aritméticas e elege como roteiro para sua apresentação desse assunto o modelo estabelecido por Rudin. Para isso, define corte de Dedekind, demonstra proposições

relacionadas com a cota superior e menor cota superior, demonstra que há cortes que não possuem cota superior mínima, ou seja, cortes que não são números racionais, define relação de ordem, demonstra que a adição de dois cortes é um corte, define a adição de cortes e não demonstra todas as propriedades de corte, define a subtração de cortes e não demonstra suas propriedades, demonstra a compatibilidade da relação de ordem com a adição, define valor absoluto, define multiplicação de cortes, e somente demonstra a propriedade da distributividade, define o conjunto de cortes como o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, demonstra a completude desse conjunto que diferencia $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Em última análise, no transcorrer do texto, o autor deixa algumas proposições relevantes para que o leitor as demonstre.

6 – FIGUEIREDO, D. G. Análise I. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Em primeiro lugar, o autor, elabora um roteiro sucinto para tratar do conjunto dos números racionais e dos números reais. Inicialmente, faz uso das seguintes notações: $\mathbb{N}$ – conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \dots$; $\mathbb{Z}$ – conjunto dos números inteiros $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$; $\mathbb{Q}$ – conjunto dos números racionais, isto é, dos números da forma p/q , onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$. E salienta que “não está no nosso programa fazer um estudo sistemático dos três conjuntos numéricos acima. Entretanto, devemos utilizar as propriedades desses conjuntos. Assim, faremos apenas alguns comentários rápidos”. Em seguida, evidencia que um corpo F é um conjunto de elementos $x, y, z, \dots$, onde se acham definidas as operações de adição (isto é, a cada par de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por $x + y$) e de multiplicação (isto é, a cada par de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por xy) satisfazendo as propriedades da adição (comutativa, associativa, existência de um zero e existência de inverso) e da multiplicação (comutativa, associativa, existência de uma unidade e existência de inverso). Comenta que é imediato verificar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é um corpo e que $\mathbb{Z}$ não é um corpo. Em seguida, ressalta que quando os números racionais são marcados sobre a reta, eles formam um subconjunto da reta que é denso e esclarece que dado um ponto qualquer da reta, poderemos obter racionais tão perto dele quanto se queira; basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade; assim, podemos pensar que os números racionais preenchem a

reta real. Entretanto, podemos encontrar números não racionais (por exemplo, raiz quadrada de 2) que pertencem à reta real. Para isso, felizmente, podemos obter um conjunto numérico mais amplo que os dos números racionais e cujos elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos da reta real. Em continuidade, define corpo ordenado, cota superior, cota inferior, supremo de um conjunto limitado superiormente e ínfimo de um conjunto limitado inferiormente. Por fim, define o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como sendo um corpo ordenado em que se verifica o axioma de Dedekind: todo conjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo. Portanto, não realiza a construção dos números reais de forma rigorosa. Nesse sentido, o autor fornece uma noção bem breve da ideia de corte de Dedekind, e sinaliza também a possibilidade de realizar a construção dos números reais utilizando sequências de Cauchy (FIGUEIREDO, 2008, p. 3 – 13).

7 – GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo (Vol. 1). Rio de Janeiro: LTC, 2001.

Inicialmente, o livro apresenta os números reais e suas propriedades, indicando, no Apêndice 6 (GUIDORIZZI, 2001, p. 538), uma definição com maior rigor para o conjunto. É definida a relação de ordem, são demonstradas as operações de adição e de multiplicação e suas propriedades, além de demonstrado o Teorema do Supremo (GUIDORIZZI, 2001, p. 540-552). No entanto, não é realizada a construção do conjunto dos números reais.

8 – LIMA, E. L. Análise real, vol 1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

O conjunto dos números reais é abordado, no segundo capítulo do livro, com o intuito de levar o leitor a concluir que se trata de um corpo ordenado e completo (que satisfaz tais propriedades), tendo condições de prosseguir os estudos dos capítulos subsequentes. Assim, o autor, assume que o conjunto dos números reais é um corpo com as operações de adição e multiplicação que cumprem certas condições, isto é, a adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, sua soma $x + y \in \mathbb{R}$, ao passo que a multiplicação faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, seu produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Em seguida, elenca os axiomas da: associatividade, comutatividade, elementos neutros, elementos inversos em relação às operações de adição e multiplicação e distributividade; diante do que foi exposto demonstra algumas propriedades. Em continuidade, assume que o conjunto dos

números reais é um corpo ordenado, isto é, que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ o qual satisfaz às condições: 1) a soma e o produto de números reais positivos são positivos; 2) dado $x \in \mathbb{R}$, ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$. O autor define ordem nesse conjunto e demonstra algumas propriedades (transitividade, tricotomia, monotonicidade da adição e da multiplicação) da relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$; essa relação de ordem permite definir valor absoluto. Por fim, define conjunto limitado superiormente, cota superior, limitado inferiormente, cota inferior, supremo, ínfimo e maior elemento; em seguida, declara que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ é completo, ou seja, que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$. Entretanto, o autor, não apresenta ou faz algum comentário sobre a construção dos números reais.

9 – LIMA, E. L. Curso de Análise. vol. 1. 14^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

Em virtude dos temas (funções definidas e com valores reais, limites, continuidade, derivadas e integrais dessas funções) subsequentes ao capítulo III, o autor, já na introdução do capítulo III, com o intuito de abordar os números reais, salienta que o fará listando os vários fatos elementares a respeito dos números reais, os quais serão admitidos como axiomas, ou seja, não é realizada a construção dos números reais. Para isso, o autor, apresenta por etapa os axiomas algébricos de corpo e de corpo ordenado para os números reais e que deixa para a etapa final a apresentação da existência do supremo, axioma não algébrico, que será importante para os assuntos posteriormente abordados. Entretanto, o autor adverte o leitor da possibilidade de se construir os números reais partindo dos números naturais, por meio de extensões sucessivas do conceito de número, chegando à construção dos números reais. Além disso, salienta que isso pode ser feito de várias maneiras e que a etapa crucial dessa construção é que passa dos números racionais para os números reais e que pode ser realizada pelo método dos cortes de Dedekind ou pelo processo de Cantor via sequências de Cauchy. O autor cita alguns livros (Dedekind, Landau, Cohen e Ehrlich) que tratam apenas das extensões do conceito de número e outros (Rudin e Jacy Monteiro) que dedicam capítulos sobre o assunto. Em seguida, o autor, define corpo como um conjunto K , munido de duas operações denominadas de adição e multiplicação que cumprem certas condições, isto é, a adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$, sua soma $x + y \in K$, ao

passo que a multiplicação faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$, seu produto $x \cdot y \in K$. Em seguida, elenca os axiomas de corpo da adição: associatividade, comutatividade, elemento neutro e simétrico; os axiomas da multiplicação: associatividade, comutatividade, elemento neutro e inverso multiplicativo; define nesse corpo a operação de divisão e seu resultado o quociente; define também o axioma da distributividade; expõem quatro exemplos de corpo. Em continuidade, define um corpo ordenado K , isto é, que existe um subconjunto $P \subset K$ o qual satisfaz às condições: 1) a soma e o produto de elementos positivos são positivos; 2) dado $x \in K$, ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$; expõem dois exemplos de corpo ordenado e um exemplo de corpo não ordenado. O autor define ordem nesse corpo ordenado e demonstra algumas propriedades (transitividade, tricotomia, monotonicidade da adição e da multiplicação) da relação de ordem $x < y$ em K ; nesse corpo K define valor absoluto e demonstra algumas relações envolvendo valor absoluto. Logo depois, define conjunto limitado superiormente, cota superior, limitado inferiormente, cota inferior, limitado, corpo ordenado arquimediano. Em seguida, define no corpo ordenado K supremo, ínfimo e exhibe três exemplos sobre esses conceitos. Nesta perspectiva, define um corpo ordenado completo K e adota, a partir dessas exposições precedentes, o axioma fundamental da Análise Matemática: existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, denominado o corpo dos números reais. Por fim, examina algumas propriedades dos números reais em razão de ser um corpo ordenado completo.

10 – LIMA, P. C. Fundamentos de Análise I [Formato eletrônico]. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

Um dos objetivos do livro (LIMA, p. 41) é que os alunos compreendam a construção dos números racionais a partir dos números inteiros, utilizando classes de equivalência. Nesse texto são exploradas as propriedades da soma, produto, relação de ordem e representação decimal dos números racionais. Os números irracionais são introduzidos através de exercícios e exemplos. O conjunto dos números reais, no entanto, é definido como corpo ordenado, sendo exploradas suas propriedades. No entanto, não é realizada a construção desse conjunto numérico.

11 – MUNIZ NETO, A. C. Fundamentos de Cálculo – Coleção PROFMAT – Ed. Sociedade Brasileira de Matemática – 2015.

O livro não foi encontrado.

12 – NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

O autor realiza uma abordagem muito interessante e completa dos números reais. Para isso, no capítulo 1, inicia tratando dos números naturais e inteiros, unicidade da decomposição em fatores primos, inteiros pares e ímpares, propriedade de fechamento e algumas observações sobre a natureza de uma demonstração. O autor, no capítulo 2, define número racional, discute sua representação na forma fracionária e discute, com vários exemplos, os conceitos envolvidos na definição apresentada; discorre sobre as representações decimais finitas e infinitas, demonstra que um número racional, na forma irredutível a/b , tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5, aborda sobre as diversas maneiras de enunciar e demonstrar proposições, disserta com cuidado sobre os números racionais, os que têm uma representação decimal finita e os que têm uma representação decimal infinita e explicita que toda fração decimal finita pode ser escrita na forma de uma dízima periódica. Em seguida, no capítulo 3, já inicia o estudo dos números reais; para isso, preliminarmente, discute a representação dos números racionais associados a pontos na reta real, identifica o número $\sqrt{2}$ como o comprimento da diagonal de um quadrado de lados unitários, estabelece que qualquer número real que não possa ser expresso como razão a/b de dois números inteiros, diz-se irracional, analisa as representações decimais finitas e infinitas na reta real, demonstra as irracionalidades de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, discute os termos comensurável e incomensurável. Em continuidade, no capítulo 4, ressalta que no decorrer desse capítulo e do próximo apresentará que os números reais podem ser categorizados não somente em racionais e irracionais, porém também em duas outras categorias. Uma categoria contém os denominados números algébricos, os quais são soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros, e outra contém todos os demais números, isto é, os denominados números transcendentos. E, ainda, antecipa que alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, porém todos os números transcendentos são irracionais. Logo após, demonstra de modo elegante o seguinte

teorema: seja α um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e α resultarão em números irracionais. Também $-\alpha$ e α^{-1} são irracionais. E, ainda, explicita que usando esse teorema podemos construir uma grande classe de números irracionais e com uma infinidade de números racionais utilizados em cada afirmação desse teorema podemos produzir uma infinidade de números irracionais e discute sobre as propriedades de fechamento dos números irracionais. Em seguida, no próximo subcapítulo, estuda as relações dos números irracionais com as equações polinomiais com uma gama de exemplos. Sem demora, no capítulo 5, investiga os valores irracionais das funções trigonométricas e valores irracionais dos logarítmicos decimais; aborda e classifica os números reais em algébricos (racionais e irracionais) e transcendentos (todos esses são números irracionais); e para terminar esse capítulo, o autor disserta sobre os três problemas clássicos da antiguidade, conhecidos sob os nomes de duplicação do cubo (construir um cubo de volume igual ao dobro do volume de um cubo dado), trissecção de um ângulo (descobrir um processo, utilizando régua sem escala e compasso, para dividir qualquer ângulo em três partes iguais) e quadratura do círculo (construir um quadrado cuja área seja igual à de um círculo dado ou, de modo equivalente, construir um círculo de área igual à um quadrado dado), que consistem em efetuar as construções, usando apenas régua sem escala e compasso. Logo depois, no capítulo 6, estuda a aproximação de números irracionais por números racionais; na aproximação por números inteiros demonstra que: para qualquer número irracional α , existe um único inteiro m , tal que $-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}$; na aproximação por números racionais demonstra que: sejam λ um número irracional qualquer e n um número inteiro positivo qualquer. Então existe um número racional de denominador n , digamos m/n , tal que $-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}$; e, ainda, demonstra quais seriam as melhores aproximações e as limitações das aproximações. Em continuidade, examina a existência de números transcendentos. Por fim, no apêndice A: demonstra que existem infinitos números primos; no apêndice B: demonstra o teorema fundamental da aritmética; e no apêndice C: estabelece a demonstração de Cantor da existência de números transcendentos.

Assim, embora o autor não realize uma construção formal dos números reais, é desenvolvido um trabalho interessante sobre os números racionais e irracionais

que certamente pode contribuir à formação e atuação do futuro professor de Matemática.

13 – PANONCELI, D. *Análise Matemática*. São Paulo: Pearson, 2017.

O livro não foi encontrado.

14 – PATERLINI, R. R. *A Aritmética dos Números Reais*. [Formato eletrônico] São Carlos: UFSCar, 2012.

É realizada uma abordagem muito interessante dos números reais para a formação do futuro professor, a partir de contextualização histórica, resolução de problemas, proposta de investigação e atividades voltadas a licenciando e a professores. O autor explora os números naturais, inteiros e racionais, com importantes ideias como sucesso e antecessor no conjunto dos naturais, números primos, múltiplos, máximo divisor comum, representação decimal e fracionária de números racionais, e frações equivalentes, por exemplo. Os números racionais são introduzidos por meio do exemplo $\sqrt{2}$, e o autor apresenta diversas formas de demonstrar a sua não-razionalidade. Em seguida, explorou as ideias de comensurabilidade e incomensurabilidade. O autor apresenta os modelos de Eudoxo e de Dedekind, dando ideia da construção dos números reais realizadas por esses matemáticos, seguindo de um resumo com as propriedades desse conjunto numérico. É possível inferir que o autor realiza uma construção dos números reais via cortes de Dedekind de maneira informal (enunciando as definições, proposições e teoremas sem demonstrá-los), porém com rigor matemático, embora não a faça de maneira formal.

15 – GOLDBERG, R. R. *Methods of Real Analysis*. New York: 1963.

O livro traz a representação decimal dos números reais (expansão decimal), demonstra que esse conjunto é não-enumerável e utiliza os números reais para diversos exemplos, porém não é realizada a construção desse conjunto numérico.

16 – RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3ª ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

O autor realiza a clássica construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind e obtém um corpo ordenado completo cujos elementos são coleções de números racionais (RUDIN, 1976, 17-21).

17 – RUDIN, W. Princípios de Análise Matemática. São Paulo: Ao livro técnico, 1971.

O autor realiza a clássica construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind e obtém um corpo ordenado completo cujos elementos são coleções de números racionais (RUDIN, 1971, p.3-11).

18 – SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGrawHill, 1988.

O livro desenvolve estudos centrados nas propriedades dos números reais no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica. Entretanto, o autor, indica por meio de exemplos numéricos os conjuntos (natural, inteiro, racional), expõem alguns exemplos de números irracionais e representa na reta real alguns números (naturais, inteiros, racionais e irracionais), salientando que o descrito acima é uma correspondência um a um (ou biunívoca) entre todos os números reais e todos os pontos da reta. E, ainda, nos tópicos adicionais, seção A.1, demonstra a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Desse modo, não é realizada a construção dos números reais.

19 – SPIVAK, M., Calculus. New York: W.A. Benjamin Inc., 1967.

O autor, no capítulo 27, inicialmente, salienta que os números naturais podem ser construídos, porém afirma que o procedimento é complicado e que isso se afasta dos objetivos propostos para o livro. Nesse sentido, o projeto estabelecido pelo autor considera que o conjunto dos números racionais está bem definido, que estão explícitas as operações de adição e multiplicação e as propriedades exploradas, discutidas e enunciadas no capítulo 1. Ao finalizar essas reflexões e as explicações sobre números referentes ao capítulo 1, o autor afirma que, no capítulo 2, as deficiências das propriedades enunciadas no capítulo 1 ficam claras, porém descobrir os procedimentos adequados para corrigir essas limitações não é uma tarefa fácil. No capítulo 2, o autor identifica o conjunto dos números naturais e indica que nesse conjunto não são válidas algumas das propriedades elencadas anteriormente no capítulo 1; e, ainda, identifica o conjunto dos números inteiros,

indicando que nesse conjunto somente não é válida a propriedade da existência de inverso para a multiplicação; e, por fim, identifica o conjunto dos números racionais, em que são válidas todas as doze propriedades elencadas no capítulo 1. Além disso, declara que existe um conjunto maior de números em que se aplicam aquelas propriedades – o conjunto de todos os números reais, assinalado por $\mathbb{R}$. Esse conjunto numérico inclui não apenas os números racionais, mas também outros números (os números irracionais) que podem ser representados por casas decimais infinitas; π e $\sqrt{2}$ são exemplos de números irracionais. Logo depois, demonstra a irracionalidade de $\sqrt{2}$. No início do capítulo 4, o autor, ao tratar sobre gráficos de funções, considera a reta como uma imagem dos números reais, isto é, associa a cada número real com um ponto nessa reta. No capítulo 7, o autor se dedica a três teoremas sobre funções contínuas e algumas de suas consequências e adverte que as demonstrações desses teoremas não serão apresentadas até o próximo capítulo, cujas razões serão explicadas até o final do sétimo capítulo. O autor destaca a incapacidade de demonstrar esses teoremas, já que as demonstrações dependem dos conceitos de conjunto limitado superiormente, cota superior, supremo, limitado inferiormente, cota inferior e ínfimo e supremo.

No capítulo 8, uma continuação do Capítulo 7, o autor estabelece a propriedade mais importante dos números reais, pois define em um conjunto A de números reais, na ordem apresentada, os conceitos de conjunto limitado superiormente, cota superior, supremo, limitado inferiormente, cota inferior e ínfimo. Logo depois de alguns esclarecimentos sobre esses conceitos apresentados, o autor apresenta a última propriedade que necessitamos para os números reais: P(13) (Propriedade do supremo). No capítulo 27, o autor apresenta a definição de corpo e apresenta outros exemplos de corpos, além daqueles já identificados, isto é, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Em seguida, define corpo ordenado e cita alguns exemplos de corpos não ordenados e, em especial, afirma que já foi visto que o corpo $\mathbb{C}$ não pode converter-se em um corpo ordenado. Em continuidade, retoma os conceitos de conjunto limitado superiormente, cota superior e supremo, que foram discutidos no capítulo 7, e faz a seguinte asserção: “ao considerar os corpos pode parecer ter-nos afastado muito do objetivo de construir os números reais. No entanto, estamos agora dotados de um meio inteligível para formular esse objetivo. Há duas questões que serão respondidas nos dois capítulos restantes: 1. Existe um corpo ordenado completo? 2.

Existe somente um corpo ordenado completo?” Para isso, o autor estabelece a seguinte definição – um número real é um conjunto α , de números racionais, com as quatro seguintes propriedades: (1) se x está em α e y é um número racional com $y < x$, então y está também em α ; (2) $\alpha \neq \emptyset$; (3) $\alpha \neq \mathbb{Q}$; (4) não existe o maior elemento em α ; em outras palavras, se x está em α , então existe algum y em α com $y > x$. Dessa forma, a construção dos números reais é feita por cortes de Dedekind. Em seguida, o autor demonstra propriedades dos números reais e, no capítulo 29, demonstra a unicidade dos números reais (como único corpo ordenado completo, a menos de um isomorfismo).

20 – STROMBERG, K. R. – An Introduction to Classical Real Analysis. Belmont: Wadsworth Inc., 1981.

Para versar sobre os números reais, o autor salienta que estabelecemos para esse conjunto os axiomas das propriedades definidoras de um corpo ordenado completo e assumiremos a existência desse objeto $\mathbb{R}$ denominado de conjunto dos números reais. Desse modo, todos os teoremas que demonstraremos sobre $\mathbb{R}$ serão fundamentados apenas nessa suposição. Em seguida, estabelece esses axiomas para $\mathbb{R}$ da seguinte forma: O sistema de números reais consiste em um conjunto $\mathbb{R}$, um subconjunto P de $\mathbb{R}$ e duas operações binárias $(x, y) \rightarrow x + y$ e $(x, y) \rightarrow xy = x \cdot y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, de modo que os seguintes axiomas estão satisfeitos.

Axioma I [lei comutativa] $x + y = y + x$ e $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Axioma II [lei associativa] $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Axioma III [lei distributiva] $x(y + z) = xy + xz$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Axioma IV [elemento identidade] Existem dois elementos distintos 0 e 1 em $\mathbb{R}$ tais que $0 + x = x$ e $1x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Axioma V [elementos inversos] Se $x \in \mathbb{R}$, então existe um único $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$, então existe um único $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1$.

Diante do exposto, o autor, demonstra dois teoremas. Logo após, destaca que os Axiomas I – V constituem a definição de um corpo. Em continuidade, enuncia os outros axiomas.

Axioma VI Os três conjuntos $\{0\}$, P e $-P = \{x \in \mathbb{R} : -x \in P\}$ são disjuntos aos pares e a sua união é $\mathbb{R}$.

Axioma VII Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $xy \in P$.

Logo depois, estabelece a seguinte definição: os elementos de P são chamados números positivos e os elementos de $-P$ são chamados números negativos. Para x, y em $\mathbb{R}$ escrevemos $x < y$ e $y > x$ para significar que $y - x \in P$. Também escrevemos $x \leq y$ e $y \leq x$ para significar que $y - x \in P$ ou $x = y$. Estabelecidas essas considerações, demonstra alguns teoremas relacionados aos assuntos tratados e, depois, define valor absoluto e demonstra algumas relações sobre esse tema. Em seguida, o autor observa que os primeiros sete axiomas definem a noção de um corpo ordenado e que existem muitos exemplos de corpos ordenados que podem ser construídos, por exemplo, os números racionais, os números algébricos reais e o corpo de funções racionais sobre um corpo ordenado; o que distingue o corpo real $\mathbb{R}$ de todos os outros corpos ordenados é o seguinte axioma da completude. Axioma VIII [completude Dedekind] Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, tais que (i) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, (ii) $A \cup B = \mathbb{R}$, (iii) $a \in A, b \in B$ implica $a < b$. Então existe exatamente um $x \in \mathbb{R}$ tal que (iv) $u \in \mathbb{R}, u < x$ implica $u \in A$ e (v) $v \in \mathbb{R}, x < v$ implica $v \in B$. E, observa que: o número x deve estar claramente em A ou B , porém não em ambos. Assim, $A = \{u \in \mathbb{R} : u < x\}$, $B = \mathbb{R} \setminus A$ ou $A = \{u \in \mathbb{R} : u < x\}$, $B = \mathbb{R} \setminus A$. Em continuidade, o autor afirma que assumimos a existência de um objeto $\mathbb{R}$ que satisfaz os oito axiomas acima referidos. O leitor que sentir alguma hesitação quanto a essa suposição pode demonstrar a existência [e unicidade] de $\mathbb{R}$ a partir de axiomas mais primitivos, como mencionado na introdução a este capítulo. Logo depois, define conjunto limitado superiormente, cota superior, limitado inferiormente, cota inferior, limitado, supremo e ínfimo. Por fim, demonstra (Princípio do Supremo) que: cada conjunto não vazio de números reais que é limitado superiormente tem um supremo em $\mathbb{R}$. E, além disso, demonstra (corolário do teorema anterior) que: cada conjunto não vazio de números reais que é limitado inferiormente tem um ínfimo em $\mathbb{R}$. Entretanto, o autor não realiza a construção dos números reais.

21 – TÁBOAS, P. Z. Cálculo em uma variável real. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

O livro não faz a construção dos números reais, revisando, no entanto, conceitos básicos desse conjunto com a finalidade seguir estudos mais avançados referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

22 – VILLANUEVA, D. A. Z. Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

O livro explora formalmente os conjuntos dos números reais, inteiros, racionais e irracionais, dando ideia de expansão de conjuntos e da construção do conjunto dos números reais baseando-se na ideia de cortes de Dedekind, realizando parcialmente essa construção em uma abordagem formal.

23 - WHITE, A. J. Análise real: uma introdução. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, EDUSP, 1975.

O livro ressalta a importância das demonstrações na Matemática, mas introduz os números reais e suas propriedades por meio de treze axiomas (adição, multiplicação, distributividade, ordem e completude), já que pretende explorar outras ideias relacionadas desse conjunto. Desse modo, não realiza a construção dos números reais.

Concluída a etapa de exploração das bibliografias básicas indicadas nos planos de ensino, foi possível aprimorar o entendimento desses documentos, levando a compreensão de como é feita a construção do conjunto dos números reais, caso seja realizada, na disciplina Análise Real dos cursos de Licenciatura em Matemática do estado de São Paulo.

5.2 Análise dos planos de ensino

Nesta seção será detalhada a análise de cada plano de ensino no que se refere à abordagem da construção do conjunto dos números reais, nos itens 1 a 24 a seguir, na disciplina Análise Real (dentre outras denominações encontradas) dos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas de Ensino Superior do estado de São Paulo, que culminou nas conclusões desta pesquisa.

1- IFSP Araraquara

É recomendado, no plano de ensino de Introdução à Análise Real que essa disciplina seja cursada no oitavo (último) semestre do curso. A ementa presente nesse documento indica que “o curso desenvolve o estudo formal do conjunto dos

números reais, desde a sua construção às principais propriedades dos seus subconjuntos quanto à enumerabilidade e às suas estruturas algébrica e topológica” (IFSP, 2020c). Assim, espera-se que a construção dos números reais seja realizada formal e rigorosamente. De fato, um dos objetivos desse documento é que os licenciandos compreendam a construção formal do conjunto dos números reais, constando no conteúdo programático a construção por Cortes de Dedekind. Além disso, espera-se que o futuro professor compreenda, de maneira rigorosa, os conteúdos relacionados a esse conjunto numérico tendo em vista seu ensino durante sua futura prática docente no Ensino Básico.

A bibliografia básica indicada nesse documento, descrita de modo detalhado no Quadro 1, traz as seguintes obras que foram analisadas com maiores detalhes em relação à construção do conjunto dos números reais na seção anterior. Das cinco referências apontadas, duas (ÁVILA, 2001; FERREIRA, 2013) realizam parcialmente a construção do conjunto dos números reais, oferecendo uma noção de como essa construção é realizada, por meio das ideias de Dedekind. Outras duas referências (LIMA, 2013; LIMA, 2017) não fazem essa construção, enquanto que uma delas (PATERLINI, 2012) realiza, também parcialmente, a construção de $\mathbb{R}$ de maneira informal, privilegiando a compreensão dos conceitos envolvidos e os conhecimentos necessários ao ensino dos números reais.

Sendo assim, predomina uma abordagem formal da construção do conjunto dos números reais nesse curso, embora haja indicações de que é feita uma contextualização (ÁVILA, 2001) e que haja esforço para que os licenciandos compreendam os conceitos estudados, tendo em vista sua futura prática profissional (PATERLINI, 2012) de modo que o licenciando realize uma “comparação” (IFSP, 2020c) entre os conceitos estudados no curso e o ensino que é realizado nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

2- IFSP Birigui

A disciplina Introdução à Análise Real deve ser cursada, segundo seu plano de ensino, no oitavo e último semestre do curso. Esse documento contém a ementa, que indica uma “abordagem axiomática dos conjuntos dos números Naturais, Racionais e Reais desenvolvidas por Peano, Cauchy e Weierstrass [...]” (IFSP, 2020d), apontando também um trabalho paralelo, nessa disciplina, com o ensino de Matemática. Além disso, espera-se que o discente, ao cursar essa disciplina,

aprofunde seus conhecimentos sobre o conjunto dos números reais e que articule os conhecimentos teóricos construídos em Introdução à Análise Real com a prática docente, de modo que facilite a “transmissão dos conteúdos associados ao Ensino Médio” (IFSP, 2020d).

A bibliografia básica contida nesse plano de ensino foi descrita com maiores detalhes no Quadro 2, sendo analisadas na seção anterior. Dos três livros indicados, dois (LIMA, 2013; SIMMONS, 1988) não realizam a construção do conjunto dos números reais, enquanto um deles (ÁVILA, 2001) constrói parcialmente esse conjunto, oferecendo uma noção da construção por cortes de Dedekind em uma contextualização histórica do desenvolvimento dessas ideias.

Desse modo, é possível afirmar que não é realizada a construção do conjunto dos números reais, que são abordados de maneira axiomática – mesmo que o plano de ensino da disciplina expresse preocupação com a prática docente.

3- IFSP Bragança Paulista

O plano de ensino indica que a disciplina Introdução à Análise Real deve ser cursada no oitavo (último) semestre do curso. A ementa contida nesse documento aponta para um tratamento axiomático do conjunto dos números reais, uma vez que são abordados “os fundamentos do sistema dos números reais, visto aqui como um corpo ordenado completo, e discute algumas implicações da propriedade da construção/apropriação de conceitos de análise real que são abordados na Educação Básica” (IFSP, 2020e). Além disso, a preocupação com o ensino dos conteúdos, relacionados aos conceitos desenvolvidos em Introdução à Análise Real, no Ensino Básico é expressa nos objetivos contidos nesse documentos, que também revela que o licenciando deve “conhecer a estrutura axiomática do sistema dos números reais e deduzir as consequências mais importantes dessa estrutura” (IFSP, 2020e).

O conteúdo programático também indica a abordagem axiomática, dando uma noção da construção do conjunto dos números reais: “primeiras ideias de como se construir um corpo ordenado completo [...]” (IFSP, 2020e), o que é confirmado pela bibliografia básica recomendada, que foi descrita no Quadro 3 e cuja análise dos livros se encontra na seção anterior. Dos três referenciais sugeridos, dois não realizam a construção desse conjunto numérico (ÁVILA, 1999; TÁBOAS, 2008), enquanto um (ÁVILA, 2001) realiza parcialmente, destacando as ideias de cortes de

Dedekind em uma abordagem contextualizada historicamente no que se refere ao desenvolvimento desse conhecimento.

Portanto, embora haja a preocupação com o ensino dos números reais no Ensino Básico expressa no plano de ensino, a abordagem desse conjunto é axiomática, não sendo realizada a construção desse conjunto na disciplina.

4- IFSP Campos do Jordão

É recomendado, pelo plano de ensino, que a disciplina Introdução à Análise Real seja cursada no oitavo semestre, que é o último do curso. De acordo com a ementa, são feitas ao longo da disciplina “diferentes construções dos números reais” (ANEXO A) em uma abordagem que ressalta os aspectos históricos do desenvolvimento das ideias matemáticas envolvidas, com o objetivo de desenvolver o pensamento matemático do licenciando de maneira que possa compreender a matemática como ferramenta útil para entender os fenômenos naturais. Constam, no conteúdo programático da disciplina, “números reais” (ANEXO A) e uma abordagem histórica da “Análise Matemática no século XIX” (ANEXO A), além da elucidação das relações entre a disciplina e a Matemática Escolar.

São recomendados três livros na bibliografia básica desse documento, que são especificados no Quadro 4 e examinados na seção anterior quanto à abordagem da construção do conjunto dos números reais. Um deles (ÁVILA, 1999) não realiza a construção do conjunto dos números reais. Já outro deles (ÁVILA, 2001) realiza essa construção parcialmente, em uma abordagem contextualizada historicamente, trazendo uma noção da construção realizada, principalmente, por Dedekind (são esboçadas, também, as noções necessárias para a construção realizada por Cantor), enquanto o outro (VILLANUEVA, 2014) também realiza parcialmente essa construção, em uma abordagem direta e formal, também baseado nas ideias de Dedekind.

As informações contidas nesse documento permitem afirmar que a construção do conjunto dos números reais é realizada de diferentes maneiras, embora a bibliografia básica indique uma construção parcial desse conjunto numérico. Cabe ressaltar a atenção que é proposta para a futura prática docente do licenciando, sendo clara a preocupação com a compreensão da Matemática trabalhada na disciplina como ferramenta útil (e não somente abstrata) para o ensino da Matemática Escolar.

5- IFSP Caraguatatuba

O plano de ensino da disciplina Introdução à Análise Real indica que seu curso deve ser realizado pelo licenciando no sétimo (penúltimo) semestre da Licenciatura em Matemática. É expressa, pela ementa, uma abordagem dos números reais e a formalização de conceitos estudados no Cálculo Diferencial e Integral. A disciplina pretende que o licenciando conheça a linguagem matemática para a realização de demonstrações, compreendo o processo lógico desses processos, além de assimilar “de maneira sólida” (IFSP, 2020f) a Matemática Escolar e “compreender os conjuntos numéricos, especialmente o conjunto dos números reais e suas propriedades” (IFSP, 2020f).

Como não houveram indicações sobre a construção do conjunto dos números reais, a consulta à bibliografia básica foi fundamental para compreender esse documento. As referências se encontram no Quadro 5 e foram analisadas na seção anterior. Foram apontados três referenciais, sendo que o primeiro (ÁVILA, 2001) realiza a construção parcial desse conjunto numérico, em uma abordagem histórica que pretende que o licenciando compreenda a construção formal do conjunto dos números reais pelas ideias de cortes de Dedekind. Os outros livros recomendados (FIGUEIREDO, 2008; GUIDORIZZI, 2001) realizam uma abordagem axiomática dos números reais, enfatizando o estudo de suas propriedades, não fazendo a construção desse conjunto numérico.

Isso permite concluir que são exploradas as propriedades do conjunto dos números reais e que a construção desse conjunto é parcialmente realizada de maneira formal, de modo que o licenciando compreenda formalmente (infere-se que também de modo abstrato) a Matemática Escolar.

6- IFSP Cubatão

A disciplina Introdução à Análise Real deve ser cursada, segundo seu plano de ensino, no oitavo e último semestre da Licenciatura em Matemática. É apontado um estudo detalhado do conjunto dos números reais na ementa presente neste documento, fazendo parte também do conteúdo programático da disciplina, o qual inclui também o tópico “introdução axiomática” (IFSP, 2020). Não foi possível depreender o modo como é feito a construção dos números reais por meio do conteúdo presente nesse documento, sendo essencial a análise da bibliografia

básica (presente no Quadro 6 e analisada com maiores detalhes na seção anterior) indicada nesse plano de ensino.

Foram feitas quatro indicações, sendo que uma delas se refere à Revista do Professor de Matemática (RPM). Não foi possível analisar esse documento, uma vez que não foram explicitadas as edições trabalhadas no curso. Porém, essa referência remete à uma preocupação com a futura prática docente do licenciando, que é explicitada pelos objetivos do plano de ensino como desenvolver no discente “alicerces básicos para ensinar os princípios fundamentais da Matemática” (IFSP, 2020). Ademais, um dos livros (BOURCHTEIN, A; BOURCHTEIN, L. 2010) não foi encontrado.

Quanto aos outros dois livros apontados, um (ÁVILA, 2001) realiza a construção parcial do conjunto dos números reais em uma abordagem formal, trazendo, em uma abordagem histórica, uma ideia da construção realizada por Dedekind, enquanto que o outro referencial indicado (LIMA, 2013) não apresenta a construção desse conjunto numérico.

Sendo assim, o documento investigado revela uma preocupação com o ensino dos números reais, embora indique abordagem axiomática de conceitos, realizando parcialmente a construção formal dos números reais.

7- IFSP Guarulhos

O plano de ensino de Introdução à Análise Real propõe que essa disciplina seja cursada no oitavo (último) semestre do curso. A ementa destaca uma abordagem formal para os conceitos estudados, de modo que o licenciando desenvolva habilidades relacionadas à lógica das demonstrações e compreenda os conteúdos da disciplina de acordo com seu desenvolvimento histórico, “relacionando-os, quando possível, com os conteúdos da Educação Básica” (ANEXO B).

Os objetivos expressos nesse documento apontam para uma formação que proporcione compreensão dos conceitos trabalhados para a resolução de problemas, de modo que o licenciando consiga aplicar os conteúdos em outros contextos e também entenda a “técnica de demonstração de Teoremas” (ANEXO B). O estudo dos números reais faz parte dos conteúdos programáticos apontados no plano de ensino dessa disciplina como “um corpo, ordenado e completo” (ANEXO B), o que pode indicar uma abordagem axiomática desse conjunto.

A bibliografia básica indica três referenciais, dos quais dois (LIMA, 2013; SIMMONS, 1988) não realizam a construção do conjunto dos números reais, enquanto um deles (ÁVILA, 2001) realiza essa construção parcialmente por meio da ideia de cortes de Dedekind, cuja noção é expressada em seu contexto histórico de desenvolvimento.

Portanto, o plano de ensino investigado revela preocupação com o ensino dos conteúdos estudados, embora indique abordagem axiomática dos números reais, como corpo ordenado completo, apontando, por meio de sua bibliografia básica, a construção parcial desse conjunto numérico em uma abordagem formal.

8- IFSP Hortolândia

É recomendado, pelo plano de ensino, que Análise Real seja cursada no oitavo, e último, semestre do curso. A ementa desse documento apresenta a realização da construção do conjunto dos números reais na disciplina, com a finalidade de que o discente compreenda criticamente as demonstrações realizadas, além de desenvolver a habilidade de “ensinar os princípios fundamentais da Matemática” (IFSP, 2020a). A bibliografia indicada por esse plano de ensino, especificada no Quadro 8 e analisada na seção anterior, indica três referências, das quais apenas uma (PANONCELI, 2017) não foi encontrada. A construção do conjunto dos números reais é parcialmente realizada em uma das referências (ÁVILA, 2001), que explica como foi realizada essa construção a partir, principalmente, das ideias de cortes de Dedekind em uma abordagem histórica no que se refere ao desenvolvimento desse conteúdo. A outra indicação (ÁVILA, 1999), embora não realize essa construção, menciona essa possibilidade de modo contextualizado historicamente.

Dessa forma, é expressa a preocupação com a formação docente no que se refere ao ensino de Matemática nessa disciplina, que traz a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal.

9- IFSP Itapetininga

A disciplina Introdução à Análise Real deve ser cursada, de acordo com seu plano de ensino, no oitavo (último) semestre do curso. Segundo a ementa contida nesse documento, a disciplina tem a finalidade de formalizar os estudos realizados em Cálculo Diferencial e Integral, de modo que o discente compreenda a lógica das

demonstrações e as definições de forma precisa. Os objetivos apontados pelo plano de ensino revelam que a disciplina deve desenvolver a habilidade de interpretar enunciados e demonstrar teoremas, além de desenvolver, no licenciando, “as principais noções sobre o processo ensino-aprendizagem relacionado a teoria do Cálculo Diferencial e Integral” (ANEXO C). Os números reais fazem parte do conteúdo programática da disciplina, que também contempla a aplicação da Análise Real em diversos contextos.

Os referenciais bibliográficos básicos indicados nesse documento foram especificados no Quadro 9 e detalhados, no que se refere à realização da construção do conjunto dos números reais, na seção anterior. Das quatro indicações, uma não foi encontrada (PANONCELI, 2017) e outra apontou periódicos de uma revista (TEMA – Tendências de Matemática Aplicada e Computacional), mas não especificou quais seriam utilizados na disciplina, o que impossibilitou a análise. Um dos referenciais (ÁVILA, 2001) realiza, parcialmente, a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal, de acordo, principalmente, com Dedekind. Já a outra indicação (FIGUEIREDO, 2008) não faz essa construção, embora assuma que possa ser realizada e a explique brevemente, tratando o conjunto dos números reais de modo essencialmente axiomático.

Sendo assim, é possível inferir que é realizada, parcialmente, a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal, e que o curso expressa preocupação com o ensino dos conteúdos desenvolvidos na disciplina para o Ensino Básico.

10- IFSP São José dos Campos

O plano de ensino de Introdução à Análise Real recomenda que a disciplina seja cursada no oitavo (último) semestre da formação em Licenciatura em Matemática. É evidenciado, na ementa contida nesse documento, um tratamento axiomático para o conjunto dos números reais: “neste componente, axiomatiza-se o conjunto dos números reais [...]” (ANEXO D). Os objetivos expressos nesse plano de ensino também apontam para um tratamento formal e rigoroso dos conceitos estudados na disciplina.

A bibliografia básica, retratada no Quadro 10 e analisada na seção anterior, aponta quatro referenciais, dos quais apenas um não foi explorado (C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática) por não especificar quais artigos são utilizados

na disciplina. Dois livros (LIMA, 2013; GUIDORIZZI, 2001) não fazem a construção do conjunto dos números reais, enquanto que apenas um (ÁVILA, 2001) realiza parcialmente essa construção em uma abordagem formal, explicando as ideias de cortes de Dedekind em uma abordagem contextualizada historicamente.

As informações contidas nesse documento permitem concluir que não é realizada a construção do conjunto dos números reais, sendo que esse conjunto é abordado de modo axiomático.

11- IFSP São Paulo

De acordo com o plano de ensino, a disciplina Tópicos de Análise Real deve ser cursada no sétimo semestre (penúltimo) do curso. É dado destaque, na ementa contida nesse documento, a um estudo mais aprofundado do conjunto dos números reais e de sua apresentação em livros do Ensino Básico. É um dos objetivos do curso “ampliar o conhecimento sobre os conjuntos numéricos dos naturais, racionais, irracionais e reais, por meio do rigor lógico-matemático” (IFSP, 2020b), além da discussão das definições utilizadas em livros didáticos para o Ensino Básico. O conteúdo programático apresenta os conjuntos numéricos por meio de ampliação, o que é confirmado pelas indicações feitas na bibliografia básica, que foram especificadas no Quadro 11 e cuja análise foi feita na seção anterior.

Nos três referenciais bibliográficos indicados (especificados no Quadro 11 e analisados na seção anterior), não é feita a construção do conjunto dos números reais. Porém, um deles (ÁVILA, 1999) faz referência a essa construção, contextualizando historicamente o desenvolvimento das ideias necessárias para realiza-la. O segundo livro apontado (LIMA, 2017) trata os números reais como um corpo ordenado completo, de modo axiomático. Já o terceiro (NIVEN, 2012), embora não realize a construção dos números reais, explora cada um dos conjuntos numéricos, dando a noção de ampliação que é trabalhada no Ensino Básico, em uma abordagem muito interessante para a formação do futuro professor.

Em vista disso, não é possível afirmar que é feita, na disciplina, a construção do conjunto dos números reais, embora esse conjunto seja amplamente explorado, sendo considerado constantemente o ensino desses conteúdos e como se apresentam na Matemática Escolar.

12- UFABC

O plano de ensino da disciplina Fundamentos de Análise tem como objetivos gerais a formação para a prática docente e a articulação dos conceitos matemáticos estudados com a Matemática Escolar. Além disso, o curso dessa disciplina pretende que o discente conheça “a linguagem matemática e a lógica formal dedutiva” (ANEXO E), tendo a habilidade de demonstrar teoremas. Faz parte dos objetivos específicos: “construir o conjunto dos números reais a partir da ampliação dos campos naturais, inteiros e racionais” (ANEXO E), além de “formalizar o conjunto dos reais [...]” (ANEXO E), constando também na ementa “construção dos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais” (ANEXO E) o que já permite inferir que é feita a construção do conjunto dos números reais nessa disciplina.

Dos três referenciais bibliográficos básicos, detalhados no Quadro 12 e explorados na seção anterior, apenas um (ÁVILA, 2001) faz parcialmente a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal e contextualizada historicamente, de acordo com a construção realizada, principalmente, por Dedekind. Os outros dois livros (FIGUEIREDO, 2008; LIMA, 2013) abordam os números reais como corpo ordenado completo, ou seja, de forma axiomática, sendo que apenas um deles (FIGUEIREDO, 2008) considera a possibilidade de realizar essa construção, brevemente considerando seu contexto histórico, oferecendo uma noção rápida das ideias utilizadas por Dedekind e por seqüências de Cauchy.

O plano de ensino da disciplina deixa clara a construção do conjunto dos números naturais e racionais, cortes de Dedekind e definição de um número real através de cortes, além da exploração desse conjunto e de conteúdos relacionados a ele. Também é realizado um esforço para que o licenciando conheça o modo como esse conteúdo se apresenta no Ensino Básico. Dessa forma, é realizada a construção do conjunto dos números reais nessa disciplina, que considera constantemente a futura prática docente.

13- UFSCar São Carlos

O plano de ensino da disciplina Análise Matemática para o Ensino é trazido pelos Projetos Pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática integral e noturno. Vale destacar que para ambos os períodos, é apontado o mesmo plano de ensino para essa disciplina, por isso foi considerado, neste trabalho, como uma unidade para a formação na Licenciatura em Matemática da UFSCar São Carlos. A

única diferença consiste no fato de que o plano de ensino para o período noturno recomenda que a disciplina seja cursada no oitavo (último) semestre do curso, devendo ser cursada no sétimo semestre quando se trata do período integral. No entanto, como os conteúdos dos planos de ensino são exatamente os mesmos para ambos os períodos, foi explorado apenas um (ANEXO F) para que não houvesse duas análises iguais neste trabalho.

Os objetivos gerais desse documento expressam que a formação nessa disciplina pretende que o licenciando aprofunde seus conhecimentos em relação aos números reais e compreenda como são apresentados os conceitos estudados em Análise Real na Matemática Escolar, especialmente no ensino desses conceitos. Já a ementa expressa claramente uma abordagem axiomática para o conjunto dos números naturais: “axiomatização dos números reais” (ANEXO F) e um estudo das propriedades desse conjunto.

Das três referências básicas indicadas (especificados no Quadro 13 e analisados na seção anterior), apenas uma (ÁVILA, 2001) realiza a construção parcial do conjunto dos números reais, em uma abordagem formal e contextualizada historicamente que utiliza, principalmente, cortes de Dedekind para essa construção. O segundo livro indicado (ÁVILA, 1999) não realiza essa construção, porém considera a possibilidade de ser realizada em um tratamento contextualizado historicamente. Já o terceiro referencial utiliza uma abordagem essencialmente axiomática dos números reais, como corpo ordenado completo.

De acordo com a abordagem indicada ementa do curso, é possível inferir que não é feita a construção do conjunto dos números reais nessa disciplina, embora haja um esforço para que o licenciando aprofunde seus conhecimentos sobre esse conjunto numérico e sobre como ensinar ideias relacionados a ele no Ensino Básico.

14- UFSCar Sorocaba

Os objetivos indicados no plano de ensino da disciplina Introdução à Análise expressam, claramente, a realização da construção do conjunto dos números reais: “compreender formalmente uma construção e as propriedades topológicas do conjunto dos números reais” (ANEXO G), sendo que o estudo desse conjunto também é apontado pela ementa desse documento. Essa construção também faz parte dos tópicos dessa disciplina, que também propõe um estudo das “propriedades elementares do conjunto dos números reais” (ANEXO G).

Os objetivos específicos dessa disciplina propõem uma “construção histórica dos inteiros, racionais e reais” (ANEXO G), que também expressa preocupação com o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, que serão estudadas. A bibliografia básica, detalhada no quadro 14 e analisada na seção anterior, traz três indicações, das quais duas (FIGUEIREDO, 2008; LIMA, 2013) abordam os números reais de modo axiomático, embora uma delas (FIGUEIREDO, 2008) mencione a construção aborde, brevemente, as ideias de cortes de Dedekind e sequências de Cauchy para sua realização. No entanto, um dos referenciais apontados (ÁVILA, 2001) realiza parcialmente essa construção, em uma abordagem formal que utiliza principalmente os cortes de Dedekind de modo contextualizado historicamente, de acordo com o desenvolvimento histórico dessas ideias.

Sendo assim, foi possível constatar que a construção do conjunto dos números reais é realizada, em Introdução à Análise Real, com uma abordagem formal, contextualizada historicamente.

15- UNESP Bauru

A disciplina Análise Real para a Licenciatura tem dentre seus objetivos que os licenciandos conheçam o formalismo matemático, sabendo como utilizar teoremas e demonstrar proposições, além de conseguirem “caracterizar o conjunto dos números reais como um corpo ordenado e completo [...]” (UNESP, 2020), o que revela um estudo formal desse conjunto.

Esse documento especifica os conteúdos que serão trabalhados na disciplina, dentre eles os números naturais, inteiros, racionais, estrutura de corpo ordenado completo e propriedades da ordem dos reais (UNESP, 2020), o que permite inferir que há um trabalho com a expansão dos conjuntos numéricos até um estudo mais aprofundado do conjunto dos números reais.

Os conteúdos explicitados nesse documento não permitiram concluir se é realizada a construção do conjunto dos números reais na disciplina, embora haja indicações de abordagem formal para esse conjunto numérico. Por isso, foi essencial consultar a bibliografia básica (mostrada no Quadro 15 e analisada na seção anterior) apontada nesse plano de ensino para concluir se é feita tal construção. Duas (LIMA, 2013; LIMA, 2017), das três indicações, não fazem a construção do conjunto dos números reais, porém uma delas (ÁVILA, 2001) a realize

parcialmente, em uma abordagem formal, por meio de cortes de Dedekind principalmente, esboçando também as ideias de Cantor para essa construção.

Assim, a análise desse documento permitiu concluir que a construção do conjunto dos números reais é realizada, parcialmente, em uma abordagem formal e que também há exploração dos números reais de acordo com a ampliação dos conjuntos numéricos.

16- UNESP Ilha Solteira

O plano de ensino da disciplina Análise Real I expressa, por meio de seus objetivos, que pretende que os licenciandos tenham “uma fundamentação teórica sólida de conceitos importantes em Matemática, tais como números reais [...]” (ANEXO H), de modo que eles saibam como utilizar a linguagem matemática, aplicando seus conhecimentos desenvolvidos na disciplina para a resolução de problemas. Os conteúdos a serem trabalhados na disciplina são especificados nesse documento, constando, entre eles, números naturais, extensão desse conjunto para os inteiros e racionais, incomensurabilidade e “construção do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais” (ANEXO H), além do estudo dos reais como um corpo ordenado completo.

Desse modo, o plano de ensino deixa claro que é realizada a construção formal do conjunto dos números reais. A bibliografia básica apontada por esse documento (especificada no Quadro 16 e analisada na seção anterior) traz quatro referenciais, dos quais três (LIMA, 2013; LIMA, 2017; FIGUEIREDO, 2008) não realizam essa construção, sendo que um deles (ÁVILA, 2001) faz parcialmente por cortes de Dedekind, em uma abordagem formal e historicamente contextualizada.

As informações contidas nesse documento permitem concluir que é realizada a construção do conjunto dos números reais nessa disciplina em uma abordagem formal, que trabalha também a necessidade de extensão dos conjuntos numéricos.

17- UNESP Presidente Prudente

Os objetivos da disciplina Análise Real I remetem a um conhecimento mais aprofundado e estrutural de conceitos estudados no Cálculo Diferencial e Integral, de modo que o licenciando aprimore seu raciocínio lógico e domine os conteúdos matemáticos para que tenha “facilidade na transmissão dos conteúdos associados no Ensino Médio” (ANEXO I). Os números reais fazem parte dos conteúdos

programáticos, devendo ser estudadas também suas propriedades de corpo, ordem e completude. É interessante destacar a preocupação da disciplina para com o ensino dos conceitos desenvolvidos em seu curso, propondo aos licenciandos que reflitam sobre o ensino e as aplicações práticas dos conteúdos trabalhados no Ensino Básico.

Como o documento não indica se é feita a construção do conjunto dos números reais, a consulta da bibliografia básica (descrita no Quadro 17 e analisada na seção anterior) foi fundamental nessa investigação. Das cinco referências apontadas, duas não realizam a construção (ÁVILA, 1999; FIGUEIREDO, 2008), embora cite a possibilidade de realizá-las em uma contextualização histórica. Outros dois livros citados (LIMA, 2013; LIMA 2017) também não realizam a construção, tratando os números reais de forma axiomática. No entanto, uma das referências bibliográficas (RUDIN, 1971) indicadas realiza a construção completa do conjunto dos números reais por meio de cortes de Dedekind, em uma abordagem formal.

Portanto, é possível afirmar que é feita, na disciplina, a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal, que também revela grande preocupação com a formação do professor no sentido do ensino dos conteúdos matemáticos trabalhados.

18- UNESP Rio Claro

A disciplina Análise Matemática I tem como objetivo, segundo seu plano de ensino, a “conceituação precisa e refinamento das ideias introduzidas no Cálculo Diferencial e Integral I” (UNESP, 2020b). Os números reais fazem parte dos conteúdos programáticos contidos no documento, cuja ementa traz o estudo do “corpo dos números reais” (UNESP, 2020b).

Por não haver mais detalhes que remetessem ao estudo dos números reais na disciplina, conhecer a bibliografia básica, que foi descrita no Quadro 18 e explorada na seção anterior, foi essencial para a análise desse plano. De fato, como o documento não continha informações explícitas que indicassem se é ou não realizada a construção do conjunto dos números reais, foi necessário o estudo da bibliografia com esse propósito de investigação, já que consiste em uma base para o estudo dos licenciandos.

Foram apontados oito referenciais. Desse total, quatro livros (LIMA, 2013; LIMA, 2017; STROMBERG, 1981; BARTLE, 1983) não realizam a construção do

conjunto dos números reais, direcionando o estudo às propriedades desse conjunto. Dois referenciais (ÁVILA, 1999; FIGUEIREDO, 2008) não realizam a construção, porém comentam que pode ser feita, dando uma noção das ideias (principalmente de Dedekind) utilizadas para tanto. Um desses livros (ÁVILA, 2001) faz parcialmente a construção do conjunto dos números reais por meio de cortes de Dedekind, em uma abordagem contextualizada historicamente. Outro referencial (RUDIN, 1971) realiza a construção do conjunto dos números reais completamente, em uma abordagem formal e de acordo com as ideias de Dedekind, mas o faz em um apêndice do livro, priorizando o estudo das propriedades desse conjunto.

Em vista disso, os referenciais bibliográficos básicos indicam a possibilidade de ser realizada a construção parcial do conjunto dos números reais em uma abordagem formal.

19- UNESP São José do Rio Preto

O curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de São José do Rio Preto apresenta duas disciplinas relacionadas à Análise Real: Introdução à Análise Matemática e Análise na Reta.

O plano de ensino da disciplina Introdução à Análise Matemática expressa o objetivo de que os alunos sejam capazes de compreender os números reais e saber utilizar suas propriedades, resolvendo problemas e relacionando os conhecimentos desenvolvidos com outras disciplinas. O estudo dos números naturais faz parte dos conteúdos programáticos, assim como os “números reais apresentados de forma axiomática: Corpos; Corpos ordenados; O Corpo dos números racionais; Axioma fundamental da análise matemática (Postulado de Dedekind) [...]” (UNESP, 2020a). Os números reais também são estudados de acordo com sua apresentação geométrica, com o estudo de segmentos comensuráveis e incommensuráveis e da reta real. O plano de ensino dessa disciplina já expressa uma abordagem axiomática para o estudo do conjunto dos números reais. Em sua bibliografia básica (que é descrita no Quadro 19 e analisada na seção anterior) foram indicados três livros, dos quais dois (FIGUEIREDO, 2008; LIMA, 2013) não realizam a construção do conjunto dos números reais, sendo que apenas um deles (ÁVILA, 2001) faz parcialmente essa construção, em uma abordagem formal e contextualizada historicamente, por meio de cortes de Dedekind.

A disciplina Análise na Reta, de acordo com seu plano de ensino, tem como objetivo que o licenciando compreenda “os principais resultados relacionados à topologia da reta real” (UNESP, 2020a), sendo capazes de resolver problemas, aplicar e relacionar os conteúdos estudados em outras disciplinas. O conteúdo programático dessa disciplina traz o estudo de noções de topologia na reta real, limites, continuidade, derivada e integral de Riemann de funções reais de uma variável real. A bibliografia básica, que foi especificada no Quadro 20, é a mesma que foi indicada para a disciplina Introdução à Análise Matemática.

Portanto, o conjunto dos números reais é abordado, segundo o plano de ensino das disciplinas Introdução à Análise Matemática e Análise na Reta, de maneira axiomática, como corpo ordenado completo, sendo que os estudos são direcionados às propriedades desse conjunto e as suas relações e aplicações.

20- UNICAMP

O curso de Licenciatura em Matemática da UNICAMP conta com duas disciplinas relacionadas à Análise Real: Análise I e Introdução à Análise.

A ementa contida no plano de ensino de Análise I revela o estudo dos números reais, que também é explicitado nos conteúdos programáticos da disciplina: “Números reais. Corpo, corpo ordenado, corpo ordenado completo, números reais.” (ANEXO J). Essas informações não permitem, porém, inferir sobre como é feita a construção do conjunto dos números reais, caso seja realizada. Portanto, a análise dos referenciais indicados na bibliografia básica do plano de ensino foi fundamental para a investigação desse documento. Foram indicados quatro livros (detalhados no Quadro 21), dos quais dois (LIMA, 2013; FIGUEIREDO, 2008) não fazem a construção, abordando os reais de modo axiomático e centrando o estudo em suas propriedades. Um dos referenciais (GOLDBERG, 1963), embora não faça a construção do conjunto dos números reais, explora de modo interessante esse conjunto. No entanto, um dos livros apontados (RUDIN, 1971) faz completamente essa construção, em uma abordagem formal, por meio de cortes de Dedekind. Isso permite inferir que é realizada, nessa disciplina, a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal.

O plano de ensino de Introdução à Análise traz, em sua ementa, o estudo dos números reais. Também é especificado no conteúdo programático da disciplina: “Fundamentos sobre os números reais: propriedades básicas; desigualdades;

indução finita; necessidade de completude dos números reais” (ANEXO K), o que não revela se é realizada ou não a construção do conjunto dos números reais. De acordo com os objetivos da disciplina, o licenciando deve desenvolver sua intuição acerca dos conceitos estudados, estudando com rigor esses conteúdos, de modo que consiga relacioná-los com conceitos estudados no Ensino Médio, também conhecendo o contexto histórico de seu desenvolvimento. No caso dessa disciplina, também foi essencial a consulta da bibliografia básica (descrita no Quadro 22) para a análise desse documento. Foram indicados apenas duas referências, sendo que um deles (ÁVILA, 1999) não realiza a construção do conjunto dos números reais, embora cite a possibilidade de realizar essa construção, em uma breve abordagem histórica. No entanto, o outro referencial (SPIVAK, 1967) apontado pela bibliografia básica realiza completamente a construção dos reais em uma abordagem formal, de acordo com os cortes de Dedekind.

Sendo assim, as disciplinas Análise I e Introdução à Análise realizam a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem predominantemente formal, sendo que Introdução à Análise demonstra certa preocupação com a formação docente para o ensino.

21- USP São Paulo

Dentre os objetivos descritos no plano de ensino da disciplina Introdução à Análise, consta “apresentar formalmente a noção de completude dos números reais e suas consequências” (ANEXO L). O programa resumido traz uma abordagem axiomática para o conjunto dos números reais, com demonstrações rigorosas de teoremas estudados no Cálculo Diferencial e Integral, além de ressaltar a importância de relacionar os conteúdos estudados com a prática docente no Ensino Básico.

Já o programa da disciplina traz, além de “axiomas de corpo ordenado completo” (ANEXO L), a “construção do conjunto dos números reais” (ANEXO L), propondo também a reflexão sobre a prática profissional do professor, relacionando a teoria com o ensino e com a vivência docente. Como o programa já esclareceu que é realizada a construção do conjunto dos números reais, a bibliografia básica (detalhada no Quadro 23) foi explorada com o objetivo de verificar como é a abordagem para essa construção.

Não foi possível explorar um dos referenciais, “Artigos da RPM e da Educação Matemática em Revista – ERM – pertinentes aos temas estudados”, já que não foram especificados quais os artigos seriam utilizados no decorrer da disciplina. Dos outros seis referenciais, três (FIGUEIREDO, 2008; LIMA, 2017; WHITE, 1975) se referem aos números reais de forma axiomática, centrando seus estudos nas propriedades desse conjunto. Um deles (ÁVILA, 2001) realiza parcialmente essa construção, em uma abordagem formal e contextualizada historicamente das ideias de cortes de Dedekind. Por fim, dois dos livros indicados (RUDIN, 1971; SPIVAK, 1967) realizam completamente a construção formal do conjunto dos números reais, por meio de cortes de Dedekind.

Desse modo, conclui-se que é feita, na disciplina Introdução à Análise, a construção formal do conjunto dos números reais, sendo que a disciplina expressa grande atenção quanto à formação do futuro professor no que se refere ao ensino dos conteúdos trabalhados de acordo com a Matemática Escolar.

22- USP São Carlos

A disciplina Análise para Licenciatura tem como objetivos, segundo seu plano de ensino, proporcionar um conhecimento histórico das estruturas do rigor matemático presentes em Análise Real, formalizando conteúdos estudados no Ensino Fundamental e Médio. O estudo dos números reais é especificado no programa resumido da disciplina, sendo detalhado no programa da seguinte maneira: “Números reais: grandezas incomensuráveis. Cortes de Dedekind e os números reais. Propriedades e números irracionais. Aplicação à sala de aula no Ensino Fundamental e Médio” (ANEXO M).

Isso indica que pode ser feita a construção do conjunto dos números reais por meio de cortes de Dedekind. Para confirmar essa suposição, foi explorada a bibliografia básica, indicada no Quadro 24 e detalhada na seção anterior. Foram duas indicações, sendo que uma delas (MUNIZ NETO, 2015) não foi encontrada. No entanto, o outro referencial (ÁVILA, 2001) realiza parcialmente essa construção, em uma abordagem formal e contextualizada historicamente, de acordo com cortes de Dedekind.

Portanto, é possível inferir que a construção formal do conjunto dos números reais é realizada parcialmente, sendo que esse conjunto é bem explorado, visando à formação para a docência.

5.3 Considerações: assimilando a análise dos planos de ensino

As explorações realizadas na seção anterior permitiram categorizar os dados, como segue nos itens 1 a 8 a seguir. É importante ressaltar que essa categorização desempenha apenas a função de resumo das investigações que foram realizadas na seção anterior, que são imprescindíveis para uma correta interpretação dos resultados.

1- O plano de ensino indica a construção formal do conjunto dos números reais, demonstrando preocupação com o ensino e a prática docente.

- i. IFSP Araraquara;
- ii. UFABC;
- iii. UNESP Presidente Prudente;
- iv. USP São Paulo;
- v. USP São Carlos;
- vi. UNICAMP (disciplina: Introdução à Análise Real).

2- O plano de ensino indica a construção formal do conjunto dos números reais, porém não dá muitas indicações quanto à prática docente e o ensino.

- i. UFSCar Sorocaba;
- ii. UNESP Ilha Solteira;
- iii. UNICAMP (disciplina: Análise I).

3- O plano de ensino aponta a realização diversas abordagens para a construção do conjunto dos números reais, demonstrando preocupação com o ensino e a prática docente.

- i. IFSP Campos do Jordão.

4- O plano de ensino mostra que é realizada parcialmente a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal, revelando também preocupação com o ensino e a prática docente.

- i. IFSP Cubatão;
- ii. IFSP Guarulhos;
- iii. IFSP Hortolândia;

iv. IFSP Itapetininga.

5- O plano de ensino aponta que a construção do conjunto dos números reais é realizada parcialmente, em uma abordagem formal. No entanto, há poucas indicações quanto à formação para a docência e o ensino.

- i. IFSP Caraguatatuba;
- ii. UNESP Bauru;
- iii. UNESP Rio Claro.

6- É realizada abordagem axiomática para os números reais, todavia o plano de ensino demonstra preocupação com a futura prática docente do licenciando e com o ensino.

- i. IFSP Birigui;
- ii. IFSP Bragança Paulista.

7- É realizada abordagem axiomática para os números reais, sendo que o plano de ensino traz poucas indicações quanto à formação para a docência e o ensino na Matemática Escolar.

- i. IFSP São José dos Campos;
- ii. UNESP São José do Rio Preto (disciplina: Introdução à Análise Matemática);
- iii. UNESP São José do Rio Preto (disciplina: Análise na Reta).

8- O plano de ensino mostra que não é realizada a construção do conjunto dos números reais, porém a disciplina explora amplamente esse conjunto, revelando grade preocupação com a formação do futuro professor e o ensino na Matemática Escolar.

- i. IFSP São Paulo;
- ii. UFSCar São Carlos.

É importante agora que sejam retomados os conhecimentos imprescindíveis à formação do futuro professor, segundo Shulman (1986), para aperfeiçoar a análise dos resultados: conhecimento do conceito, conhecimento pedagógico do conceito e conhecimento curricular.

As categorias 2, 5 e 7 incluem planos de ensino que demonstram pouca preocupação com as dimensões de conhecimento do conceito e conhecimento pedagógico do conceito. De fato, a categoria 2 engloba planos de ensino que indicam a construção formal do conjunto dos números reais, no entanto há poucas indicações quanto ao ensino dos conteúdos relacionados a essa construção na Educação Básica – o que parece ser mais adequado, segundo Moreira e David (2007) à formação do Bacharel em Matemática. O mesmo ocorre com a categoria 5, em que os planos de ensino não apontam como é realizada a articulação dos saberes desenvolvidos na disciplina (nesse caso, em relação aos números reais, que são parcialmente construídos) com a Matemática Escolar, ou como o conhecimento dos conteúdos trabalhados auxilia o ensino de Matemática na Educação Básica. Já os planos de ensino abrangidos pela categoria 7 demonstram uma abordagem axiomática para o conjunto dos números reais, não demonstrando nos documentos preocupação com a prática docente e o ensino da Matemática Escolar.

Abordagens como as indicadas pelos planos de ensino pertencentes às categorias 2, 5 e 7 deixam de explorar, formalizar e aprofundar estruturalmente conceitos e propriedades importantes do conjunto dos números reais, que são constantemente trabalhados no Ensino Básico, fundamentais para compreender algoritmos e enunciados, além de auxiliarem na resolução de problemas práticos com os quais os estudantes podem se deparar e apresentar dúvidas. Moreira e David (2007) consideram fundamental que o futuro professor conheça os conceitos matemáticos em diversos contextos, conhecendo também possíveis dificuldades na aprendizagem de tais conteúdos e como lidar com elas, sendo que a formação inicial deve preparar o futuro professor para a ação pedagógica de ensinar Matemática – o que pode não ocorrer em abordagens como indicadas pelos planos de ensino pertencentes às categorias 2, 5 e 7.

Fiorentini e Oliveira (2013) destacam que o professor deve conhecer os múltiplos sentidos e usos da Matemática, aprendendo a concebê-la em seus aspectos conceituais e didático-pedagógicos, sabendo, além de demonstrar resultados e resolver exercícios e problemas, justificar esses procedimentos para os alunos. No caso do conjunto dos números reais, é imprescindível, portanto, que seja feita uma construção desse conjunto, para que o licenciando conheça e saiba trabalhar com suas estruturas. É muito importante também que o futuro professor

conheça esse conjunto numérico, cujo estudo permeia todo o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, do ponto de vista a Matemática Escolar, ou seja, conhecendo como se apresentam os conteúdos relacionados aos números reais nesses níveis de ensino, quais as possíveis abordagens para o ensino desses conceitos e como lidar com possíveis dificuldades dos alunos, por exemplo.

Desse modo, segundo Fiorentini e Oliveira (2013), a Matemática que é trabalhada nos cursos de Licenciatura deve englobar os conceitos, os procedimentos necessários para comprová-los e compreendê-los e as possíveis abordagens para o ensino dessas ideias. As categorias de planos de ensino 1, 3, 4, 6 e 8 são as que mais se aproximam dessa concepção.

No entanto, as abordagens indicadas pelos planos de ensino que se enquadram nas categorias 6 e 8 não incluem a construção do conjunto dos números reais. De fato, na categoria 6 esse conjunto numérico é abordado de maneira axiomática. Várias propriedades, representações e algoritmos deixam de ser explorados quando os números reais são apenas tratados de modo axiomático, dimensões essas que podem ser importantes para o ensino de conteúdos relacionados e para o tratamento de dúvidas e concepções equivocadas dos alunos do Ensino Básico. Desse modo, a preocupação com ensino e a prática docente, demonstrada pelos planos de ensino que se incluem na categoria 6, deveria incluir também as várias dimensões que apresenta o trabalho com os números reais.

Os planos de ensino inseridos na categoria 8 não realizam a construção do conjunto dos números reais, porém demonstraram realizar um trabalho amplo com esse conjunto numérico, destacando a importância da compreensão e do ensino dos conceitos na futura prática docente do licenciando.

Para Moreira, Cury e Vianna (2005) um trabalho em Análise Real que considera apenas a Matemática em sua apresentação formal, lógico-dedutiva, não será suficiente para a formação do profissional que irá atuar no ensino de conteúdos relacionados aos que foram trabalhados na disciplina. Esses autores consideram primordial que a formação inicial do professor contemple também questões decorrentes da prática docente no Ensino Básico, do ensino da Matemática Escolar. Os planos de ensino que mais se aproximam dessa concepção são os que foram englobados pelas categorias 1, 3 e 4.

Os planos de ensino incluídos pela categoria 1 demonstram a realização da construção formal do conjunto dos números reais englobando uma formação

direcionada para o ensino dos números reais e suas propriedades, assim como os planos de ensino inseridos na categoria 3 e 4 (que realiza a construção parcial desse conjunto) – o que representa apenas dez dos vinte e quatro planos de ensino investigados.

É importante salientar que apenas a construção formal do conjunto dos números reais, em uma abordagem que não considere as intuições dos licenciandos, suas percepções iniciais e transitórias, de modo que não proporcione uma compreensão ampla das estruturas desse conjunto, não é suficiente para a formação do professor. De fato, segundo Reis (2001), é necessário que o futuro docente compreenda os conceitos para utilizá-los adequadamente na resolução de problemas, compreendendo também suas dimensões pedagógicas e curriculares, uma vez que, em sua prática profissional, irá trabalhar com o ensino de conteúdos fundamentados nesses conceitos.

É imprescindível que, ao realizar a construção do conjunto dos números reais, sejam trabalhadas noções de expansão de conjuntos, de modo que o licenciando consiga compreender a definição de cada um dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais e as propriedades que são válidas (ou não) em cada um deles. Ainda, segundo Cunha (2014), devem ser trabalhadas questões apresentadas no Ensino Básico, como densidade, infinitude, incomensurabilidade, compreensão das propriedades e operações, representações e funções no conjunto dos números reais, de modo que apenas a construção formal também não é suficiente – mais adequada, segundo Moreira e David (2007), à Matemática Acadêmica.

A análise detalhada de cada um dos planos de ensino permite afirmar que os cursos de Análise Real que mais se adequam no que se refere à realização da construção do conjunto dos números reais voltada ao curso de Licenciatura em Matemática (formação de professor para a Educação Básica) são os planos do IFSP Araraquara, da UFABC, da USP São Paulo e da USP São Carlos – o que representa quatro das 22 instituições investigadas, aproximadamente 18% dessas instituições.

Esse dado revela, sob nossa perspectiva, que os planos de ensino de aproximadamente 82% das instituições realizam uma abordagem insuficiente da construção dos números reais (ou não a realizam) para a formação do professor, de acordo com as ideias de Moreira e David (2007), Moreira, Cury e Vianna (2005), Fiorentini e Oliveira (2013) e Cunha (2014).

Assim, é de extrema necessidade que os cursos de Licenciatura em Matemática considerem a formação do professor e o ensino dos números reais na disciplina Análise Real, expressando de maneira clara essas ideias no plano de ensino da disciplina. Concordamos com as concepções de Reis (2001) e Martines (2012) de que é necessário considerar as necessidades do professor para o ensino de conteúdos relacionados aos números reais em Análise Real, construindo esse conjunto numérico de modo que permita ao licenciando refletir sobre seu ensino, sem perder de vista que o conhecimento do professor deve ser formalizado nessa disciplina, com rigor adequado, promovendo sua compreensão e fundamentando os conhecimentos necessários ao exercício da profissão docente.

6 CONCLUSÕES

Os estudos realizados para o desenvolvimento deste trabalho mostram que a formação inicial do professor de Matemática é uma área de extrema relevância, que exige muita reflexão sobre o desenvolvimento dos diversos tipos de conhecimentos necessários à docência, sobretudo no que se refere aos conhecimentos matemáticos.

Nessa perspectiva, Shulman (1986) atenta em como as concepções dos professores influenciam as concepções dos alunos, preocupando-se com a forma que os professores reelaboram seus conhecimentos com a finalidade de ensiná-los. Assim, destaca três categorias essenciais à formação do professor: conhecimento do conceito (estrutural, justificável, amplo e contextualizado), conhecimento pedagógico do conceito (como ensinar, promovendo a compreensão) e o conhecimento curricular (quais conteúdos serão trabalhados, tendo condições de refletir sobre os currículos, materiais utilizados e abordagens adequadas, além de relacionar com as outras disciplinas estudadas por seus alunos).

Ainda no que se refere aos conhecimentos matemáticos, Moreira e David (2007) ressaltam a importância de trabalhar, na Licenciatura em Matemática, a Matemática Escolar, de modo que o futuro professor saiba abordar os conteúdos de acordo com as vivências dos alunos, conheça as estruturas dos conceitos, suas aplicações e como se apresentam no contexto escolar, tendo a habilidade de mediar as concepções iniciais e transitórias dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa e sabendo como lidar com dúvidas e erros para estimular os educandos.

Nesse sentido, Fiorentini e Oliveira (2013) propõem que a formação matemática do professor, que possui inúmeros elementos em comum com a Matemática Científica, deve ser fundamentada na Matemática Escolar – o que não significa promover a aprendizagem de uma Matemática inferior à Acadêmica, muito pelo contrário. Além de o futuro professor conhecer a Matemática em sua apresentação formal, deve ser capaz de representar suas ideias de modo que seja capaz de explaná-las no ensino da Matemática Escolar, levando seus alunos a compreenderem a Matemática como um instrumento para a interpretação e ação no mundo e nos diferentes contextos aos quais pertencem.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) propõe como uma das unidades temáticas o estudo dos Números, que fundamenta o estudo das outras

unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A unidade temática Números promove, ao longo de todo Ensino Fundamental e Ensino Médio, o estudo dos números reais, de modo que os alunos sejam capazes de resolver problemas, compreendendo o significados de operações e procedimentos de cálculos, por exemplo, utilizando a Matemática como instrumento de reflexão e atuação em contextos econômicos, culturais e sócio-políticos. Em vista disso, é essencial que a formação inicial do professor de Matemática contemple o conjunto dos números reais de forma estrutural e abrangente, de modo que o licenciando o conceba como objeto de ensino significativo para seus futuros alunos.

Porém, estudos como os que foram realizados por Corbo (2012), Penteado (2004) e Igliori e Silva (1999) revelam necessidades formativas, quanto ao conjunto dos números reais, de professores de Matemática que já atuam no Ensino, além de ingressantes de cursos de exatas e formandos de Licenciatura em Matemática. Ocorre que muitos alunos chegam ao Ensino Superior com dificuldades relativas a esse conjunto numérico, que muitas vezes não são superadas nesses cursos. Esses alunos então concluem suas graduações e vão exercer suas profissões ainda com dúvidas, que podem gerar as mesmas dificuldades em outras pessoas – como no caso do licenciando que se forma sem uma concepção ampla, estrutural e multifacetada dos números reais. Isso gera um “círculo vicioso”, segundo Broetto e Santos-Wagner (2019), que só pode ser rompido com um trabalho abrangente com esse conjunto numérico desde a formação inicial dos professores de Matemática.

Assim, é fundamental que o licenciando conclua a graduação conhecendo as diversas representações, significados e operações com os números reais, sendo capaz de aplicar seus conhecimentos acerca desse conjunto na resolução de problemas. A construção do conjunto dos números reais, portanto, se mostra necessária à formação do professor de Matemática, uma vez que, quando realizada em abordagens coerentes, esclarece a definição de cada um dos conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e irracionais), operações, representações e aplicações, além de possibilitar a compreensão de vários procedimentos que são tratados como algoritmos na Matemática Escolar.

Nessa perspectiva, é essencial que a disciplina Análise Real realize essa construção em uma abordagem que auxilie o futuro professor a explorar noções relacionadas aos números reais, como de comensurabilidade, incommensurabilidade

e densidade, por exemplo, conhecendo a lógica dos algoritmos envolvidos e sabendo como justificar essas ideias para os alunos. De fato, de acordo com os estudos de Martines (2012) e Moreira, Cury e Vianna (2005), a disciplina Análise Real tem a função de consolidar e formalizar os saberes desenvolvidos ao longo da Licenciatura em Matemática, fundamentando-se no conjunto dos números reais. É necessário salientar, porém, que a disciplina deve consolidar e formalizar os conhecimentos tendo em vista que serão objetos de ensino do futuro professor, devendo fundamentar o trabalho da Matemática Escolar, de maneira rigorosa que valorize a compreensão dos licenciandos, segundo Reis (2001), de modo que prepare o futuro docente para ensinar Matemática na Educação Básica. Martines (2012) ressalta que é difícil que a formação inicial prepare os graduandos para todos os desafios que ocorrerão na prática profissional, no entanto a Licenciatura em Matemática deve proporcionar ao professor uma compreensão ampla e estrutural dessa disciplina para que tenha condições de reformular seus conhecimentos, conseguindo explaná-los para seus alunos.

Para compreender melhor o conhecimento desenvolvido na formação inicial do professor de Matemática com respeito aos números reais, este trabalho investigou como é indicada a realização da construção desse conjunto numérico nos planos de ensino de instituições públicas do estado de São Paulo. Este estado foi escolhido por concentrar aproximadamente metade dos cursos de Licenciatura do Sudeste, segundo o ENADE (BRASIL, 2017), região que expressou maior participação de alunos no exame. Foram escolhidas as Instituições Públicas do estado de São Paulo por conta de disponibilizarem, na maioria dos casos, acesso aos planos de ensino em seus endereços eletrônicos.

Assim, foram explorados 24 planos de ensino da disciplina Análise Real (dentre outras denominações) dos 22 cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Públicas de Ensino Superior de São Paulo. A investigação e a análise dos resultados seguiram a metodologia de pesquisa documental em abordagem qualitativa, sendo que para a compreensão dos dados implícitos dos planos de ensino foi utilizada a pesquisa bibliográfica – uma vez que essa etapa direcionou a pesquisa para a bibliografia básica indicada nos planos de ensino.

A partir da pesquisa documental, cada um dos planos de ensino foi explorado com a intenção de desvelar como era indicado o tratamento do conjunto dos números reais – se era realizada sua construção e em qual abordagem,

considerando ou não a formação para a docência. Foram delineadas oito categorias a partir dos conteúdos expressos pelos planos de ensino (e pelas bibliografias básicas apontadas), que trazem a realização da construção completa ou parcial do conjunto dos números reais em abordagem formal, além da abordagem axiomática ou da não realização dessa construção. As categorias também incluem a maneira como os planos de ensino expressam a preocupação com a formação do futuro professor e o ensino dos números reais na Educação Básica.

Em resumo, apenas quatro das vinte e duas Instituições investigadas expressam, nos planos de ensino da disciplina Análise Real, a construção do conjunto dos números reais em abordagens que permitam que o licenciando compreenda esse conjunto numérico estrutural e amplamente, como objeto de ensino em sua futura prática profissional.

Acreditamos que os resultados das análises dos planos de ensino de cada Instituição, juntamente com o estudo teórico que explicitou a importância de uma abordagem coerente para o ensino de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática, acrescentem ideias para a reflexão que é continuamente estabelecida sobre o aprimoramento desses cursos, com a intenção de aperfeiçoar a formação inicial do professor de Matemática – o que acreditamos que terá reflexos diretos no Ensino Básico.

De fato, os estudos realizados neste trabalho mostram que é necessário refletir constantemente sobre a formação inicial dos professores, pensando sempre em sua futura prática profissional. Assim, é necessário que a Matemática trabalhada nesses cursos embase o ensino de Matemática na Educação Básica – o que não significa atenuar a Matemática lecionada para as Licenciaturas, mas sim formalizar e aprofundar as ideias de modo que o futuro professor compreenda e consiga reformular adequadamente para proceder seu ensino. É importante que isso ocorra principalmente em Análise Real, que tem a função de consolidar e ampliar os conhecimentos relativos aos números reais – assunto trabalhado continuamente no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, campo de atuação profissional do futuro professor.

Esperamos, portanto, que haja uma reflexão para que ocorra a realização da construção do conjunto dos números reais na disciplina Análise Real, em uma abordagem que fundamente a compreensão dos licenciandos acerca desse conjunto numérico, suas propriedades e interrelações com o mundo prático e a resolução de

problemas, auxiliando a prática docente do futuro professor. Com efeito, esperamos que os professores conheçam os números reais em suas diversas dimensões, sabendo lidar com dificuldades e erros dos alunos de modo que os impulse na aprendizagem da Matemática, construindo com eles um saber significativo acerca dos números reais, de modo que possam utilizar os conceitos envolvidos para compreender e agir positivamente na sociedade, desmistificando a ideia de que a Matemática é difícil, incompreensível ou inútil – podendo, assim, propagar a beleza e a grandiosidade desta que é uma ferramenta que deve ser acessível a todos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino de matemática: Uma prática possível**. Campinas, SP: Papirus, 2001.
- ÁVILA, G. **Análise Matemática para a Licenciatura**. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.
- ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. 2ª ed. Edgard Blucher, 1999.
- BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**. Trad. Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro: Campus, 1983.
- BOLOGNEZI, R. A. L. **A disciplina de Análise Matemática na formação de professores de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação). Curitiba: PUC, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf> Acesso em: 8 abr. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parecer CNE/CES nº 1302/2001 – Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: 2001. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>> Acesso em: 8 jul. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Relatório Síntese de Área: Matemática (Bacharelado/Licenciatura)**. 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2017/Matematica.pdf> Acesso: 30 jul. 2019.
- BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. **O ensino de números irracionais na Educação Básica: um círculo vicioso está em curso?** Bolema, v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019.
- CASTRO, P. A. P. P.; TUCUNDUVA, C. C.; ARNS, E. M. **A importância do planejamento das aulas para a organização do trabalho do professor em sua prática docente**. Athena, v. 10, n. 10, p. 49-62, jan./jul. 2008.
- CORBO, O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: UNIBAN, 2012.
- CUNHA, C. L. **O ensino dos números reais na formação do professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Presidente Prudente, SP: UNOESTE, 2014.
- FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. **O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?** Bolema, v.27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais**. Revista de Administração de Empresas, v.35, n. 3, p. 20-29, mai./jun. 1995.

GOLDBERG, R. R. **Methods of Real Analysis**. New York: 1963.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – Cubatão, Novembro/2018**. Disponível em <https://cvt.ifsp.edu.br/images/Documentos/2018_PPC_Licenciatura_Matem%C3%A1tica_Atualizado_08_11_2018.pdf> Acesso em 3 jun. 2020.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – Hortolândia, Junho/2019**. Disponível em <http://hto.ifsp.edu.br/portal/images/IFSP/Cursos/Coord_Licenciatura_Matematica/PPC/parecer__ppc_atualizado.pdf> Acesso em 3 jun. 2020a.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – São Paulo, Maio/2018**. Disponível em: <https://novospo.spo.ifsp.edu.br/images/phocadownload/DOCUMENTOS_MENU_LATERAL_FIXO/GRADUACAO/LICENCIATURA_MATEMATICA/2018/SPO_Licenciatura_em_Matem%C3%A1tica_PPC_modelo_novo.pdf> Acesso em 3 jun. 2020b.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Matemática – Araraquara, Outubro/2017**. Disponível em: <https://www.arq.ifsp.edu.br/phocadownload/ccm/documentos/Projeto_Pedagogico_Ingressantes_partir_2017.pdf> Acesso 3 jun. 2020c.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Matemática – Birigui, Novembro/2017**. Disponível em: <<https://bri.ifsp.edu.br/portal2/phocadownload/MATEMATICA/2018/Anexo%20III.pdf>> Acesso 3 jun. 2020d.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Matemática – Bragança Paulista, Abril/2019**. Disponível em: <https://bra.ifsp.edu.br/phocadownload/LicenciaturaEmMatematica/PPC_Lic_Matematica_abr2019.pdf.pdf> Acesso 3 jun. 2020e.

IFSP. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Matemática – Caraguatatuba, Fevereiro/2017**. Disponível em: <https://www.ifspcaraguatatuba.edu.br/images/conteudo/Projeto_pedag%C3%B3gico_do_Curso_de_licenciatura_em_matem%C3%A1tica_2018.pdf> Acesso em 3 jun. 2020f.

- IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. **Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21. 1998. Anais... Caxambu, MG, 1999.
- LIBÂNEO, J. C. **Didática.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.
- LIMA, E. L. **Análise Real.** Vol. 1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise.** Vol. 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- LIMA, P. C. **Fundamentos de Análise I** [Formato eletrônico]. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em < http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/Fundamentos_de_Analise_I.pdf > Acesso em: 7 jun. 2020.
- MARTINES, P. T. **O papel da disciplina de Análise segundo professores e coordenadores.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP, 2012.
- MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Por que análise real na licenciatura?** Zetetiké, v. 13, n. 23, p. 11-42, 2005.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.** Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2007.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica.** Revista Brasileira de Educação. n. 28, p. 50-61, 2005.
- NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- PATERLINI, R. R. **Aritmética dos números reais.** São Carlos, SP: UFSCar, 2012. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_reais_02_07_2012.pdf> Acesso: 20 abr. 2020.
- PENTEADO, C. B. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2004.
- PIMENTEL, A. **O método da análise documental: seu uso numa pesquisa historiográfica.** Cadernos de Pesquisa, n. 114, p. 179-195, nov. 2001.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese (Doutorado em Educação). Campinas: UNICAMP, 2001.

RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. São Paulo: Ao livro técnico, 1971.

RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3ª ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

SÁ-SILVA, J. R; ALMEIDA, C. D; GUINDANI, J. F. **Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas**. Revista brasileira de História e Ciências Sociais, n. 1, jul. 2019.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: knowledge growth in teaching**. Educational Researcher, v.15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGrawHill, 1988.

SPIVAK, M. **Calculus**. New York: W.A. Benjamin Inc., 1967.

STROMBERG, K. R. **An Introduction to Classical Real Analysis**. Belmont: Wadsworth Inc., 1981.

TÁBOAS, P. Z. **Cálculo em uma variável real**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

UNESP. Faculdade de Ciências. **Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Licenciatura – Bauru, Agosto/2019**. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/graduacao/ppc_mat_atual_2019.pdf> Acesso 3 jun. 2020.

UNESP. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. **Programas das Disciplinas, Estágios, Trabalho de Graduação**. Disponível em: <<https://www.ibilce.unesp.br/Home/Graduacao450/LicenciaturaemMatematica/mat.-2019-reestr.-ppp-anexo-pe.pdf>> Acesso em 3 jun. 2020a.

UNESP. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. **Programa de Ensino de Disciplina**. Disponível em: <<https://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/ma5863-analise-matematica-i.pdf>> Acesso em 3 jun. 2020b.

VILLANUEVA, D. A. Z. **Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

WHITE, A. J. **Análise real: uma introdução**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, EDUSP, 1975.

ANEXO A – Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP Campos do Jordão

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO		CAMPUS <i>Campos do Jordão</i>	
1- IDENTIFICAÇÃO CURSO: Licenciatura em Matemática Componente Curricular: Introdução à Análise Real			
Semestre: 8º		Código: IARM8	
Nº aulas semanais: 4		Total de aulas: 80	Total de horas: 66,7h
Abordagem Metodológica: T () P () T/P (X)		Uso de laboratório ou outros ambientes além da sala de aula? () SIM (X) NÃO Qual(is)?	
2 - EMENTA: A disciplina aborda as diferentes construções dos números reais, bem como os principais conceitos e demonstrações do cálculo diferencial e integral com especial atenção aos aspectos históricos.			
3 - OBJETIVOS: Possibilitar ao licenciando um contato mais próximo com a cultura matemática específica e o desenvolvimento do “pensar matematicamente”; proporcionar uma compreensão sólida e um aprofundamento de alguns conceitos básicos da matemática escolar e do cálculo; desmistificar, com o auxílio da história, a matemática, e em particular a análise, como uma ciência essencialmente abstrata, um edifício de estruturas dadas à priori; desenvolver a percepção da matemática como um conjunto de conhecimentos que são úteis para uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza.			
4 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO: Análise matemática no século XIX; Números reais; Formalização dos principais conceitos e resultados do cálculo diferencial e integral; Noções de teoria da medida; As relações entre a análise matemática e a matemática escolar.			

5 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para a Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

VILLANUEVA, David Armando Zavaleta. **Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

6 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

BARONI, Rosa Lúcia; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2015. Disponível em: < http://www.culturaacademica.com.br/catalogo-detalle.asp?ctl_id=470>.

CAVALHEIRO, Albo Carlos. **Introdução à Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Providence, USA: AMS, 2003.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Analysis by its History**. New York: Springer, 2008.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, J. Francisco Porto da. **Números Racionais, Reais e Complexos**. 2. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2011.

ANEXO B – Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP Guarulhos

PLANO DE ENSINO 42. *Introdução à Análise Real*

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO		CÂMPUS <i>Guarulhos</i>	
1- IDENTIFICAÇÃO CURSO: Licenciatura em Matemática Componente Curricular: Introdução à Análise Real			
Semestre: 8º		Código: IANM8	
Nº aulas semanais: 4	Total de aulas: 76	Total de horas: 63.3	
Abordagem Metodológica: T (x) P () () T/P	Uso de laboratório ou outros ambientes além da sala de aula? () SIM (x) NÃO Qual(is)?		
2 - EMENTA: O componente curricular trata dos conceitos da Análise Real numa abordagem formal, destacando a lógica das demonstrações e evolução histórica dos conceitos, relacionando-os, quando possível, com os conteúdos da Educação Básica.			
3 - OBJETIVOS: Fornecer ao aluno condições para interpretar os conceitos fundamentais da Análise, desenvolver técnicas de demonstração de Teoremas e estimular o pensamento intuitivo na interpretação de conceitos e na resolução de problemas. Promover a articulação dos conteúdos matemáticos com diversas áreas do conhecimento e conhecer suas aplicações em contextos inter e transdisciplinares. Contribuir para a compreensão da ciência como atividade humana contextualizada e como elemento de interpretação e intervenção na sociedade.			
4 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO: I. O conjunto dos números reais: 1. Revisão de lógica; 2. Conjuntos finitos e infinitos; 3. Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis; 4. O conjunto dos números reais – um corpo, ordenado e completo; 5. Módulo de um número real. 6. Desigualdade Triangular;			

7. Máximo, mínimo, supremo e ínfimo de um conjunto.

II. Sequências Infinitas:

1. Sequências;
2. Limite de uma sequência e teoremas; Subsequências;
3. Sequências de Cauchy; Teorema de Bolzano-Weierstrass.

III. Séries Infinitas:

1. Definição e propriedades;
2. Teste da Comparação;
3. Teste da Raiz e da Razão;
4. Convergência Absoluta e Condicional.

IV. Limites e continuidade de Funções:

1. Limite de Função, definição e propriedades;
2. Limites Laterais;
3. Continuidade;
4. Teorema do valor intermediário.

V. Sequências e Séries de Funções:

1. Sequências de funções;
2. Convergência simples;
3. Convergência uniforme;
4. Séries de Potências.

5 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Análise real: função de uma variável**. 9. ed.; v.1; Rio de Janeiro: IMPA, 2007 (Coleção Matemática Universitária).

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. v.2. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

6 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

APOSTOL, Tom. M. **Análises matemático**. Espanha: Reverte, 1977.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática**. 3. ed. rev. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOURCHTEIN, Lioudmila; BOURCHTEIN, Andrei. **Análise real funções de uma variável real: limites, continuidade, diferenciabilidade**. Rio de Janeiro: Ciência moderna, 2010.

ANEXO C - Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP Itapetininga

*Curso de Licenciatura em Matemática, Câmpus ITP
IFSP- 2018*

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana: volume 9.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MAIO, Waldemar de. **Fundamentos de Matemática - Geometrias - Geometria Diferencial.** 1 ed. São Paulo: LTC, 2007.

PAVANI, Victor Vaz. **A geometria do taxista como ferramenta de consolidação de conteúdos.** Santo André, 2017. [xviii], 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)-Universidade Federal do ABC, Câmpus Santo André, Santo André, 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática.** São Paulo: Zahar, 2012

Periódicos: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: PUC-SP, 1999-2018. Quadrimestral.

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO	CAMPUS <i>Itapetininga</i>	
1- IDENTIFICAÇÃO CURSO: Licenciatura em Matemática Componente Curricular: Introdução à Análise Real		
Semestre: 8º Semestre	Código: IARM8	
Nº aulas semanais: 04	Total de aulas: 76	CH Presencial: 63,3 PCC: 0h
Abordagem Metodológica: T (X) P () () T/P	Uso de laboratório ou outros ambientes além da sala de aula? () SIM (X) NÃO Qual(is):	
2 - EMENTA: <i>O componente curricular aborda os aspectos teóricos do Cálculo Diferencial e Integral, com ênfase na conceituação precisa e no encadeamento lógico de proposições e teoremas e na análise das propriedades mais relevantes dos objetos estudados. As teorias envolvendo limites de seqüências e funções, séries, continuidade, derivadas e integrais constituem os temas essenciais do componente curricular.</i>		
3 - OBJETIVOS:		

Desenvolver a competência da interpretação dos enunciados e da prática em demonstrações dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral. Desenvolver as principais noções sobre o processo ensino-aprendizagem relacionado a teoria do Cálculo Diferencial e Integral.

4 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

1. Conjuntos

- 1.1. Noções sobre Conjuntos e suas Propriedades Gerais
- 1.2. Conjuntos Finitos e Infinitos
- 1.3. Números Reais
- 1.4. Conjuntos Enumeráveis e Não enumeráveis.

2. Corpos e Corpos Ordenados.

3. Sequências

- 3.1. Limite de Sequência
- 3.2. Sequências de Cauchy
- 3.3 Séries Numéricas.

4. Funções:

- 4.1. Limites e Continuidade de Funções
- 4.2. Funções Deriváveis
- 4.3. Funções integráveis
- 4.4. Teorema Fundamental do Cálculo
- 4.3. Sequências e Séries de Funções
- 4.4. Convergência Simples e Uniforme
- 4.5. Séries de Potências.

5. Análise Real básica e sua aplicação no cotidiano: ciências exatas, da natureza, meio ambiente, engenharia etc.

5 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

PANONCELLI, Diego Manoel. **Análise Matemática**. 1. ed. Editora InterSaberes, 2017.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

Periódico: TEMA – TENDÊNCIAS DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL. São Carlos:

SBMAC, 2000-2018. Quadrimestral.

6 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOUCHARA, Jacques. **Cálculo integral avançado**. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2016.

BOURCHTEIN, Lioudmila. **Análise real funções de uma variável real: limites, continuidade, diferenciabilidade**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. V. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**: volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

Periódico: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: PUC-SP, 1999-2018. Quadrimestral.

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO	CAMPUS <i>Itapetininga</i>	
1- IDENTIFICAÇÃO CURSO: Licenciatura em Matemática Componente Curricular: Práticas Pedagógicas Educacionais Inclusivas		
Semestre: 8º Semestre	Código: PEINC	
Nº aulas semanais: 02	Total de aulas: 38	CH Presencial: 31,7h PCC: 6,3h
Abordagem Metodológica: T () P () (X) T/P	Uso de laboratório ou outros ambientes além da sala de aula? (X) SIM () NÃO Qual(is): <i>Escola de Educação Básica.</i>	
2 - EMENTA: O componente curricular aborda o desenvolvimento histórico da educação especial no Brasil. À educação inclusiva para: deficientes visuais, auditivos, intelectuais, físicos e múltiplos; pessoas com síndrome de Down e outras síndromes; pessoas com altas habilidades; distúrbios de aprendizagem, TDAH e pessoas com transtornos globais de desenvolvimento. Identificação dos tipos de deficiências, suas causas, limitações e condutas pedagógicas para a pessoa deficiente		

ANEXO D – Plano de Ensino “Introdução à Análise Real” IFSP São José dos Campos

Curso de Licenciatura em Matemática, Câmpus São José dos Campos
IFSP- 2018

abordagens, possibilidades e limitações; Avaliação em Matemática: possibilidades e reflexões para a aprendizagem; Estudo de aplicações envolvendo a temática de Educação Ambiental; Regência no Ensino Fundamental II e Ensino Médio: prática, discussão e avaliação; Atividades e práticas de ensino relacionadas aos temas estudados nesta disciplina.
5 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. VALENTE, W. R. (Org.). Avaliação em matemática: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008. Educação Matemática Pesquisa. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/ Acesso em 07 de junho de 2018.
6 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR ANTUNES, C. (Coord.). Matemática e didática. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2010. BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012. KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997. LOPES, C. E.; MUNIZ, M. I. S. (Org.). O processo de avaliação nas aulas de matemática. Campinas, SP: Mercado de letras, 2010. LUCKESI, C. Avaliação da aprendizagem: componente do ato pedagógico. São Paulo: Cortez, 2011. Educação Matemática em Revista. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/index> Acesso em 07 de junho de 2018.

8º SEMESTRE

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO		CAMPUS São José dos Campos
1- IDENTIFICAÇÃO CURSO: Licenciatura em Matemática Componente Curricular: Introdução à Análise Real		
Semestre: 8º Semestre	Código: IARM8	

Nº aulas semanais: 4	Total de aulas: 76	CH Presencial: 63,3h PCC: --
Abordagem Metodológica: T (x) P () () T/P	Uso de laboratório ou outros ambientes além da sala de aula? () SIM (x) NÃO	
2 - EMENTA: Neste componente axiomatiza-se o conjunto dos números reais e revisita-se resultados do Cálculo Integral e Diferencial, a partir de uma abordagem mais rigorosa e formal.		
3 - OBJETIVOS: Compreender os conceitos básicos de Análise Matemática, estudando teoremas e propriedades, provomendo a construção desses resultados por meio do raciocínio dedutivo. Formalizar com rigor matemático resultados sobre limite, continuidade, diferenciabilidade e integração de funções de uma variável. Enfatizar o encadeamento lógico das proposições e análise das propriedades mais relevantes dos objetos estudados.		
4 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO: Números reais; Sequências infinitas; Noções de Topologia na reta; Limite e continuidade; O cálculo diferencial; Noções de teoria da integral.		
5 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA ÁVILA, G. Análise matemática para licenciatura . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo . 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1. LIMA, E. L. Análise real . 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1. C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática . Disponível em: < http://www2.fc.unesp.br/revistacqd >. Acesso em: 04 de junho de 2018.		
6 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR ÁVILA, G. Introdução à análise matemática . 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo . 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 4. FIGUEIREDO, D. G. Análise I . Rio de Janeiro: LTC, 1996. LIMA, E. L. Curso de análise . 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1. MOREIRA, C. N.; CABRAL, M. Curso de análise real . 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. Disponível em: < http://www.dma.im.ufrj.br/~mcabral/livros/livro-analise/curso-analise-real-a4.pdf >. Acesso em: 28 ago. 2018. Bolema: Boletim de Educação Matemática . Disponível em:		

<<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/>>. Acesso em 03 de junho de 2018.

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO		CAMPUS São José dos Campos	
1- IDENTIFICAÇÃO CURSO: Licenciatura em Matemática Componente Curricular: Geometrias Não Euclidianas			
Semestre: 8º Semestre		Código: GNEM8	
Nº aulas semanais: 4		Total de aulas: 76	CH Presencial: 63,3h PCC: --
Abordagem Metodológica: T (x) P () () T/P		Uso de laboratório ou outros ambientes além da sala de aula? (x) SIM () NÃO Laboratório de Informática.	
2 - EMENTA: Este componente curricular aborda o estudo do desenvolvimento histórico e axiomático das geometrias não euclidianas e de alguns de seus conceitos básicos.			
3 - OBJETIVOS: Compreender o desenvolvimento histórico, filosófico e axiomático das geometrias não euclidianas a partir das tentativas de prova do quinto postulado de Euclides e estudar os conceitos básicos das geometrias hiperbólicas.			
4 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO: Revisão da geometria euclidiana do ponto de vista axiomático; tentativas de prova do quinto postulado de Euclides; a possibilidade das geometrias não euclidianas; independência do quinto postulado; axiomas de Hilbert; modelos de geometrias hiperbólicas; implicações filosóficas.			
5 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA RODRIGUES, Z. G. M. E quando os ângulo não fecham em 180: geometrias não euclidianas. Curitiba: CRV, 2016. SHOKRANIAN, S. Geometria hiperbólica e teoria dos números. Brasília: UNB, 2004. SILVA, K. B. R. Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. Curitiba: CRV, 2011.			

ANEXO E – Plano de Ensino “Fundamentos de Análise” UFABC



Pró-Reitoria de Graduação

Plano de Ensino – 1º Quadrimestre de 2019

Caracterização da disciplina									
Código da disciplina:	MCTD023-18	Nome da disciplina:		Fundamentos de Análise					
Créditos (T-P-I):	(2 - 2 - 4)	Carga horária:	48 h/aula	Aula prática:		Câmpus:	SA		
Código da turma:	DAMCTD023-18SA	Turma:		Turno:	Diurno	Quadrimestre:	1	Ano:	2019
Docente(s) responsável(is):									

Alocação da turma						
	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
08:00 - 09:00		Ativ. Apoio		X		
09:00 - 10:00		Ativ. Apoio		X		
10:00 - 11:00		X				
11:00 - 12:00		X				

Planejamento da disciplina
Objetivos gerais
1) Promover a formação matemática do futuro professor nos temas relativos à Análise Real, buscando a sistematização dos conceitos por meio da lógica formal dedutiva. 2) Promover a articulação dos conhecimentos matemáticos e suas formulações conceituais com a prática docente na escola.
Objetivos específicos
1) Conhecer e utilizar adequadamente a linguagem matemática e a lógica formal dedutiva para demonstração de teoremas relativos a números reais, sequências, séries, bem como para sua aplicação. 2) Construir o conjunto dos números reais a partir da ampliação dos campos dos naturais, inteiros e racionais. 3) Formalizar o conjunto dos reais, sua estrutura algébrica e topologia na reta. 4) Formalizar o conceito de convergência de sequências e séries.
Ementa
Conjuntos infinitos, enumerabilidade, comensurabilidade. Construção dos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais. Topologia da reta. Sequências e séries de números reais. Aspectos cognitivos e didático-pedagógicos da formação do conceito de número real e das sequências e séries. Sistematização do conhecimento matemático orientada para a prática pedagógica na educação escolar básica.


Pró-Reitoria de Graduação
Plano de Ensino – 1º Quadrimestre de 2019

Conteúdo programático			
Aula	Conteúdo	Estratégias didáticas	Avaliação
12/02	Apresentação do Plano de Ensino. A disciplina Análise no curso de Licenciatura. O conhecimento Matemático do professor.	Apresentação de pesquisas sobre o Ensino de Análise. Discussão sobre o conhecimento matemático do professor e sobre os objetivos da disciplina.	
14/02	Noções de lógica, demonstração e prova formal.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
19/02	Construção do conjunto dos números naturais, Axiomas de Peano, demonstração por indução. Operações e propriedades.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
21/02	Construção do conjunto dos números racionais. Segmentos Comensuráveis.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
26/02	Ordenação em $\mathbb{Q}$. Operações. Enumerabilidade.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
28/02	Grandezas incomensuráveis. Crítica ao problema da medida. Cortes de Dedekind.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
07/03	Definição de número real (a partir dos cortes). Número relativo. Não enumerabilidade de $\mathbb{R}$.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
12/03	Cota superior/inferior. Supremo/ínfimo. Maior e menor elemento. $\mathbb{R}$ como corpo ordenado completo.	Aula expositiva dialogada.	Primeira Prova Individual (em 21/03)
14/03	Números reais na Educação Básica.	Debates sobre textos indicados para leitura. Discussão sobre situações de sala de aula. Definição de temas e preparação de Seminários (em grupo).	Trabalho Escrito
19/03	Resolução de exercícios.	Aula expositiva dialogada.	
21/03	Primeira Prova Individual		Primeira Prova Individual (em 21/03)
26/03	Sequências: conceito de convergência.	Atividade exploratória com uso do software GeoGebra	Trabalho (entrega 02/04)
28/03	Convergência de sequências (limite)	Atividade exploratória com uso do software GeoGebra.	Trabalho (entrega 02/04) Segunda prova individual (em 25/04)
02/04	Sequências limitadas, monótonas, subsequências.	Aula expositiva dialogada para formalização do conceito.	Segunda prova individual (em 25/04)


Pró-Reitoria de Graduação
Plano de Ensino – 1º Quadrimestre de 2019

04/04	Teoremas sobre convergência, propriedades dos limites, sequências que divergem para infinito.	Aula expositiva dialogada.	Segunda prova individual (em 25/04)
09/04	Sequências de Cauchy. Critério de Cauchy.	Aula expositiva dialogada.	Segunda prova individual (em 25/04)
11/04	Séries infinitas. Convergência	Atividade exploratória com uso do software GeoGebra.	Trabalho (entrega dia 16/04)
16/04	Convergência de Séries Critérios de Convergência de Séries.	Aula expositiva dialogada para formalização do conceito.	Segunda prova individual (em 25/04)
18/04	Critérios de Convergência de Séries	Aula expositiva dialogada.	Segunda prova individual (em 25/04)
23/04	Resolução de Exercícios	Aula expositiva dialogada	
25/04	Segunda Prova Individual		
27/04	Números Reais na Educação Básica	Finalização dos Seminários e Trabalhos Escritos (a distância)	
30/04	Números Reais na Educação Básica	Apresentação de Seminários por grupos de alunos. Discussões com os alunos da sala sobre os temas apresentados.	Trabalho Escrito. Avaliação da apresentação
02/05	Prova Substitutiva Vistas de avaliações		
Descrição dos instrumentos e critérios de avaliação qualitativa O conceito final do aluno será atribuído com base em provas individuais e trabalhos desenvolvidos em duplas e em grupos. Estão previstas duas provas escritas (no meio e no final do quadrimestre) e três trabalhos sendo dois deles relativos a atividades desenvolvidas com uso do software GeoGebra para exploração do conceito de convergência (de sequências e séries) e o outro relativo às relações dos conteúdos estudados de modo teórico com o seu ensino na Educação Básica, considerando as principais tendências da Educação Matemática. Os resultados das provas têm peso maior para composição do conceito final (80% para as provas escritas e 20% para os trabalhos). Está prevista, ao final do quadrimestre, a realização de uma prova substitutiva, para quem perdeu uma das provas individuais. Também está prevista uma avaliação de recuperação conforme a Resolução Consepe 182/2014. Esta será realizada no dia 04/06 em horário e sala a serem divulgados oportunamente.			
Referências bibliográficas básicas 1. ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura. 3ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. 2. FIGUEIREDO, D. G. Análise I. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.			



3. LIMA, E. L. *Análise real: funções de uma variável*. 9.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

Referências bibliográficas complementares

1. CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: GRADIVA, 1998.
 2. LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
 3. RIPOLI, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica - Volume 1 - Números Naturais**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
 4. RIPOLI, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica - Volume 2 - Números Inteiros**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
 5. MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Formação Matemática do Professor: Licenciatura e Prática Docente Escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
-

ANEXO F – Plano de Ensino “Análise Matemática para o Ensino” UFSCar São Carlos

8º SEMESTRE

08.235-0 Análise Matemática para o Ensino

Pré-Requisitos: 100.123-5 Cálculo A

Créditos: 4
4 T.

Objetivos Gerais: Aprofundar a compreensão dos conjuntos numéricos, especialmente dos números reais. Compreender as aplicações das sequências e séries à Matemática Elementar. Compreender a presença da Análise no ensino da Matemática Elementar. Apreender noções de Topologia da reta.

Ementa: Axiomatização dos números reais. Propriedades elementares dos números reais. Sequências e séries numéricas. Teorema da Sequência Monótona. Irracionalidade e aproximação de irracionais. Comprimento da circunferência. Os números irracionais e e π . Séries geométricas e aplicações à Matemática Elementar. Abertos, conexos e compactos da reta e funções contínuas. Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass.

Referências Básicas

- [1] ÁVILA, G. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2011.
- [2] ÁVILA, G. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, c1993.
- [3] LIMA, E. L. **Análise real, volume 1: funções de uma variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Coleção Matemática Universitária).

Referências Complementares

- [1] FERREIRA, J. **A construção dos números**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.
- [2] FIGUEIREDO, D. G. DE. **Números irracionais e transcendentos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de matemática, 2002.
- [3] CABRAL, M. A. P.; MOREIRA C. N. **Curso de Análise real**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. Disponível em: <<http://www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros/livro-analise/analise-livro.html>>. Acesso em: 18/05/17.
- [4] EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.
- [5] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [6] NIVEN, I. M. **Números: racionais e irracionais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

- [7] PATERLINI, R. R. **Aritmética dos números reais**. São Carlos, [s.n.], 2008. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/>>. Acesso em: 18/05/17.
- [8] RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1976.

(Novo Código) Estágio Supervisionado de Matemática na Educação Básica 2

Pré-Requisitos: 19.182-5 Estágio Supervisionado de Matemática na Educação Básica 1
Correquisito: 19.184-1 Metodologia e Prática do Ensino de Matemática na Educação Básica 2 **Créditos:** 8
8 E.

Objetivos Gerais: Realizar estágio supervisionado a partir de planejamento de aulas, tendo como referência o conteúdo e didática da Matemática. Proceder análise da documentação escolar que orienta a prática pedagógica dos professores e os materiais por eles utilizados em aulas. Proporcionar ao aluno condições de identificar as diferentes concepções de Matemática e de seu ensino e refletir sobre como essas concepções poderão interferir em sua futura prática docente. Realizar atividades relacionadas à temática: “planejamento de ensino”. Investigar e estudar diferentes projetos e planos de ensino, analisando sua viabilidade em sala de aula. Analisar, elaborar, implementar e avaliar planos de aula, em situações reais ou simuladas. Elaborar registros reflexivos das atividades desenvolvidas, dentre elas, a de regência, baseado no estudo teórico.

Ementa: Inserção supervisionada na rede de ensino (pública ou particular) para desenvolvimento de estágio: planejamento e implementação. Analisar a documentação escolar que orienta a prática pedagógica dos professores, bem como os materiais por eles utilizados para desenvolverem suas aulas. Reflexões sobre as diferentes concepções de matemática presentes nas salas de aula e sua relação com a vida cotidiana. Elaboração, implementação e avaliação de projetos de ensino e de planos de aula, em situações reais ou simuladas.

Referências Básicas

- [1] ALARCÃO, I. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva**. São Paulo: Cortez, 2003.
- [2] AQUINO, J. G. **Confrontos na sala de aula: uma leitura institucional da relação professor-aluno**. 2. ed. São Paulo: Summus, 1996. (Novas Buscas em Educação; 42).
- [3] AQUINO, J. G. (Org.). **Diferenças e preconceito na escola: alternativas teóricas e práticas**. São Paulo: Summus, 1998.

ANEXO G – Plano de Ensino “Introdução à Análise” UFSCar Sorocaba

06/01/2020

SIGA - UFSCar

Plano de Ensino

2019/2 - Presencial - Semestral - Regular - Campus Sorocaba

524263 - INTRODUÇÃO À ANÁLISE (MA)

Professor responsável																								
Equipe de apoio																								
Indicada:	ML-So - Matemática																							
Objetivos gerais:	Ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de: ☐ compreender formalmente uma construção e as propriedades topológicas do conjunto dos números reais. A partir disso, deverão ser capazes de formular rigorosamente os principais conceitos e resultados do Cálculo Diferencial e de Séries Numéricas.																							
Ementa:	Números reais. Sequências e séries numéricas. Topologia da reta. Limite, continuidade e derivada de funções reais de uma variável real.																							
Distribuição de horas:	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Total de horas</th> <th>T</th> <th>P</th> <th>PCC</th> <th>E</th> <th>Pesq.</th> <th>Est.</th> <th>Ead</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>60</td> <td>60</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>								Total de horas	T	P	PCC	E	Pesq.	Est.	Ead	60	60	0	0	0	0	0	0
Total de horas	T	P	PCC	E	Pesq.	Est.	Ead																	
60	60	0	0	0	0	0	0																	
Requisitos:	345989 OU 524050 OU 342238 OU 342670																							
Co_requisitos:																								
PESCD:																								
Duração dos Tópicos:	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Tópicos</th> <th>Horas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>								Tópicos	Horas														
	Tópicos	Horas																						

06/01/2020

SIGA - UFSCar

	Tópicos	Horas
1	1. Construção do conjunto dos números reais. Propriedades elementares do conjunto dos números reais. Irracionalidade e aproximação de irracionais.	12
2	2. Sequências numéricas; o teorema das seqüências monótonas.	8
3	3. Séries numéricas.	8
4	4. Topologia da reta.	12
5	5. Funções: limite e continuidade.	8
6	6. Introdução à derivada.	6
7	7. Realização de Provas	6
Objetivos Específicos:	Reconhecer o modelo dos conjuntos numéricos (construção histórica dos inteiros, racionais e reais). Reconhecer as propriedades das representações dos números racionais como fração ordinária, expansão posicional e fração contínua. Reconhecer e aplicar os conceitos de seqüências e séries convergentes na representação e aproximação de números irracionais. Estudar as construções das funções exponenciais e logarítmicas e suas propriedades e aplicações; a problemática do ensino dessas funções. Estudar o conceito de limite de funções e uma introdução ao conceito de derivada.	
Estratégia de Ensino:	Aulas expositivas. Exercícios visando aprofundar a compreensão dos temas abordados na disciplina. Atendimento aos alunos fora do horário de aula para acompanhamento da aprendizagem.	
Atividades dos alunos:	Frequência e pontualidade, bem como disciplinas nas aulas; estudo da teoria e resolução de listas de exercícios (em classe e extra-classe). Provas escritas e individuais.	
Atividades em EaD:		

06/01/2020

SIGA - UFSCar

Recursos a serem utilizados:	infra-estrutura da universidade
Procedimentos de avaliação do aluno:	Durante o período letivo serão realizadas, em sala de aula: (1) Atividades avaliativas distribuídas durante o período letivo contemplando os conteúdos ministrados nas aulas (exercícios e trabalhos individuais ou em grupo) que irão resultar em uma nota (T) de valor máximo 10 pontos. (2) Atividades avaliativas semanais distribuídas durante o período letivo contemplando os conteúdos ministrados nas aulas (exercícios e trabalhos individuais) que irão resultar em uma nota (TS) de valor máximo 10 pontos. (3) Duas avaliações escritas, individuais e sem consulta de valor máximo 10 pontos que irão resultar em três notas (Av1 e Av2). As datas da realização e conteúdo a ser avaliado em cada um dos momentos de avaliação serão definidos no início do período letivo. A divulgação dos resultados dos diferentes procedimentos de avaliação ocorrerá durante o período letivo de modo a propiciar ao estudante o acompanhamento de seu desempenho na disciplina. A Nota Final (NF) será dada por: $NF = TS \cdot 0,1 + T \cdot 0,1 + (Av1 + Av2) \cdot 0,4$. O estudante estará APROVADO caso a Nota Final (NF) seja maior ou igual a 6,0 e a frequência mínima de 75%. Sistema de Avaliação Complementar Ao estudante com Nota Final (NF) estritamente menor do que 6,0 e maior ou igual do que 5,0 e com pelo menos 75% de frequência será oferecida uma Avaliação Complementar a ser realizada nos primeiros 35 dias após o início das aulas do semestre posterior, constituída por uma avaliação escrita, individual e sem consulta de valor máximo 10 pontos (AC) contemplando todo conteúdo ministrado na disciplina. Após esta Avaliação Complementar, a Nota Final (NF) será então substituída obedecendo o seguinte critério: pela nota 6,0 no caso em que a Avaliação Complementar (AC) seja maior ou igual a 6,0. Caso a Avaliação Complementar (AC) seja menor que 6,0 o valor a ser substituído será o maior valor entre a Nota Final (NF) e a Avaliação Complementar (AC).

06/01/2020

SIGA - UFSCar

Bibliografia Básica:	ÁVILA, G. Análise Matemática para licenciatura, 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2006. FIGUEIREDO, D. G. Análise 1 - 2 ed. Rio de Janeiro. LTC, 2011 LIMA, E. L. Análise Real, vol 1, 11ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária) Obrigatório a indicação de 3 bibliografias básicas, as quais deverão estar disponíveis na biblioteca da UFSCAR Acesse a biblioteca UFSCAR
Bibliografia Complementar:	ARAGONA, J. - Números Reais. São Paulo: Livraria da Física. 2010. LIMA, E. L. Curso da análise, vol 1, 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Projeto Euclides) RUDIN, W. Princípios de Análise Matemática, Ed. UnB e Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971. ROYDEN H. L Real Analysis, 1988, 3 ed. Addison MacMillan MACIEL, A. B., LIMA, O. A. Introdução à Análise Real. Campina Grande: EDUEP, 2005.
Observações:	

ANEXO H – Plano de Ensino “Análise Real I” UNESP Ilha Solteira**Plano de Ensino****Curso**

773 - Licenciatura em Matemática

Ênfase**Identificação**

Disciplina

LM-31-T1 - ANÁLISE REAL I

Docente(s)
Unidade

Faculdade de Engenharia

Departamento

Departamento de Matemática

Créditos	Carga Horária	Seriação ideal
4	T:60	4

Pré - Requisito

LM-06-S - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Co - Requisito

Plano de Ensino

Objetivos

Fornecer ao estudante uma fundamentação teórica sólida de conceitos importantes em Matemática, tais como números reais, conjuntos, funções, conceitos topológicos, limites, derivadas, integrais e etc. Levar o estudante a desenvolver habilidades no uso da linguagem matemática e a desenvolver sua capacidade de aplicar as técnicas e resultados fundamentais da análise à resolução de problemas.

Conteúdo

1. Conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis.
 - 1.1. Números naturais.
 - 1.2. Conjuntos finitos.
 - 1.3. Conjuntos infinitos.
 - 1.4. Conjuntos enumeráveis.
 - 1.5. A necessidade de extensão dos naturais: números inteiros, números racionais.
 - 1.6. Insuficiência dos racionais: incomensuráveis.
2. Números reais.
 - 2.1. Construção do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.
 - 2.2. $\mathbb{R}$ é um corpo.
 - 2.3. $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.
 - 2.4. $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.
3. Sequências de números reais.
 - 3.1. Sequências.
 - 3.2. Limite de uma sequência.
 - 3.3. Subsequência.
 - 3.4. Limites e desigualdades.
 - 3.5. Operações com limites.
 - 3.6. Sequências de Cauchy.
4. Séries numéricas.
 - 4.1. Séries convergentes.
 - 4.2. Séries absolutamente convergentes.
 - 4.3. Testes de convergência.
5. Topologia da reta.
 - 5.1. Conjuntos abertos.
 - 5.2. Conjuntos fechados.
 - 5.3. Pontos de acumulação.
 - 5.4. Conjuntos compactos.

Metodologia

O Programa desta disciplina será desenvolvido através de aulas expositivas teóricas, aulas de exercícios, resolução de listas de exercícios e de consulta à biblioteca.

Bibliografia

Plano de Ensino

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

LIMA, E. L. Análise Real volume 1: Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2016, 12ª edição.

LIMA, E. L. Curso de Análise volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2016, 14ª edição.

ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

FIGUEIREDO, D. G. Análise I. Rio de Janeiro: LTC, 1996, 2ª edição.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

TAO, T. Analysis I. Springer: Texts and Readings in Mathematics, volume 37, 2015, 3ª Edition.

BARTLE, R.G.; SHERBERT D.R. Introduction to Real Analysis. New York, John Wiley & Sons, 2000.

COURANT, R.; JOHB, F. Introduction to Calculus and Analysis. New York, Interscience, 1965, v.1.

Critérios de avaliação da aprendizagem

Serão realizados seminários (S) e provas (P), cada qual com um peso de 50% na média final (MF). Será considerado aprovado aqueles estudantes que obtiverem média final maior do que ou igual a 5 (cinco).

Será oferecido um Exame Final (EF) ao estudante que não tenha alcançado a média 5 (cinco) ao final da avaliação realizada no decorrer do semestre e que não tenha sido reprovado por falta. Neste caso, a nota final do estudante será obtida pelo cálculo da média aritmética entre a média final (MF) e a nota do exame final (EF), que deverá ser igual ou maior do que 5 (cinco) para aprovação. O exame final abrangerá todo o conteúdo da disciplina. Sua realização não é obrigatória.

Ementa (Tópicos que caracterizam as unidades do programa de ensino)

Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis. Construção dos Números Reais. Sequências e Séries de Números Reais. Topologia da Reta.

Aprovação

Conselho Curso 18/12/2019

Cons. Departamental 29/11/2019

Congregação

ANEXO I – Plano de Ensino “Análise Real I” UNESP Presidente Prudente

UNIDADE UNIVERSITÁRIA : Faculdade de Ciências e Tecnologia					
CURSO: Matemática					
HABILITAÇÃO: Licenciatura					
OPÇÃO:					
DEPARTAMENTO RESPONSÁVEL: Matemática e Computação					
IDENTIFICAÇÃO					
CÓDIGO		DISCIPLINA OU ESTÁGIO			SERIAÇÃO IDEAL
		ANÁLISE REAL I			7º. SEM.
OBRIG/OPT/EST		PRÉ E CO-REQUISITO			ANUAL/SEM
Obrigatória		Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II (PRÉ)			SEM.
CRÉDITOS	CARGA HORÁRIA TOTAL	DISTRIBUIÇÃO DA CARGA HORÁRIA			
		TEÓRICA	PRÁTICA	TEO/PRAT	OUTRAS
4	60 h	60 h			
NÚMERO MÁXIMO DE ALUNOS POR TURMA					
AULAS TEÓRICAS		AULAS PRÁTICAS	AULAS TEÓRICO/PRÁTICAS		OUTRAS
OBJETIVOS (ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de:)					
- aprofundar os conhecimentos adquiridos nas disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I e II, colocando-os de forma a dar uma visão mais construtiva da teoria; - apresentar um bom domínio de conteúdos matemáticos, de modo a ter facilidade na transmissão dos conteúdos associados ao Ensino Médio; - elaborar argumentações matemáticas, interpretá-las e representá-las graficamente, com clareza, precisão e objetividade; - compreender sutilezas teóricas, estimular a capacidade de raciocínio, possibilitando assim, dar continuidade a estudos em nível de pós-graduação.					
CONTEÚDO PROGRAMÁTICO (título e discriminação das Unidades)					
1. Conjuntos Finitos e Infinitos Conjuntos finitos. Conjuntos infinitos. Conjuntos enumeráveis. 2. Números Reais Corpos. Corpos ordenados. O corpo ordenado completo dos números reais. 3. Seqüências e séries de números reais Seqüências. Limite de seqüência. Propriedades aritméticas dos limites. Subseqüências. Seqüências de Cauchy. Limites infinitos. Séries numéricas. Convergência. Convergência absoluta. Testes de convergência: comparação, razão, raiz, Dirichlet, Abel, Leibniz. 4. Funções Reais Motivação e definição de funções reais. Definição e propriedades do limite. Exemplos de limites. Limites laterais. Limites no infinito. Limites infinitos. Expressões indeterminadas. Funções Contínuas. Descontinuidades. Funções contínuas em intervalos. Continuidade uniforme. 5. Derivadas Motivação, definição e propriedades da derivada num ponto. Funções deriváveis num intervalo. Estudo da variação de Funções. Fórmula de Taylor. Série de Taylor. Funções analíticas.					

METODOLOGIA DO ENSINO		
As estratégias a serem utilizadas serão: - aulas expositivas e de resolução de exercícios e problemas; - desenvolvimento de atividades envolvendo o ensino dos conceitos abordados (reflexão sobre como estes conceitos podem ser ensinados e trabalhados) e aplicações práticas na vida cotidiana do aluno.		
BIBLIOGRAFIA BÁSICA		
ÁVILA, G. <i>Introdução à análise matemática</i>. São Paulo, Edgard Blücher, 1992. FIGUEIREDO, D. G. de. <i>Análise I</i>. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. LIMA, E. L. <i>Análise Real</i>. v. 1. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. LIMA, E. L. <i>Um curso de análise</i>. v.1, 11. ed. Rio de Janeiro, 2004. RUDIN, W. <i>Princípios de análise matemática</i>. São Paulo: Ao livro técnico, 1971.		
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR		
FOLLAND, G. <i>Real analysis</i>. Modern techniques and their applications. 2. ed. New York:Wiley,1999. LIMA, E. L. <i>Análise Real</i> v. 2, 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. LIMA, E. L. <i>Um curso de análise</i>. v. 2, 11. ed. Rio de Janeiro, 2014.		
CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM		
A avaliação deverá contemplar, no mínimo, uma avaliação escrita bimestral. A média final levará em conta as avaliações individuais e coletivas dos alunos e as demais atividades desenvolvidas na disciplina. Atendendo a RESOLUÇÃO UNESP 75/2016, que extingue o <i>Regime de Recuperação</i> e implanta o Processo de Recuperação, composto por ações pedagógicas, no qual serão propostas atividades extra sala durante o semestre letivo, objetivando minimizar as dificuldades de aprendizagem dos estudantes identificados com baixo rendimento; e a Realização do Exame Final, constituído por uma avaliação contendo todo o conteúdo programático, teórico e das atividades práticas, de modo que a nota final do aluno (A) será obtida pelo cálculo da média aritmética simples entre a nota do semestre/ ano (B) e a nota do exame final (C), que deverá ser igual ou maior que 5 (cinco) para aprovação, ou seja: $(B+C) \div 2 = A$; caso $A \geq 5$: "Aprovado"; caso $A < 5$: "Reprovado". Esta avaliação deverá ser aplicada no período especificado no calendário escolar da FCT/UNESP.		
EMENTA (Tópico que caracteriza as unidades dos programas de ensino)		
Definições e propriedades dos conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. Construção do corpo dos números reais. Estudo das sequências e séries de números reais. Estudo das funções reais a valores reais: limite, continuidade e derivada.		
HORÁRIO DE ATENDIMENTO AO ALUNO:		
APROVAÇÃO		
DEPARTAMENTO Aprovado no DMC em 14/12/2017	CONSELHO CURSO	CONGREGAÇÃO
ASSINATURA(S) DO(S) RESPONSÁVEL (EIS)		

ANEXO J – Plano de Ensino “Análise I” UNICAMP

MA502

Nível:

Graduação

Nome da disciplina:

Análise I

Número de Créditos:

6

Oferecimento:

Ambos os Períodos Letivos

Pré-requisito:

MA211 ou AA200

Ementa:

Conjuntos finitos e infinitos. Números reais. Sequências e séries numéricas. Funções contínuas. Funções deriváveis.

Conteúdo / Programa:

1. Conjuntos finitos e infinitos. Números naturais, conjuntos finitos, conjuntos infinitos, conjuntos enumeráveis.
2. Números reais. Corpo, corpo ordenado, corpo ordenado completo, números reais.
3. Sequências de números reais. Sequências e subsequências de números reais, limite de uma sequência, sequências convergentes, sequências divergentes, sequências limitadas, sequências monótonas, operações com sequências convergentes e divergentes, limite superior e limite inferior, sequências de Cauchy.
4. Séries de números reais. Séries convergentes, séries divergentes, séries com termos não negativos, séries alternadas, convergência condicional e convergência absoluta, rearranjo de séries, testes de convergência.
5. Algumas noções topológicas. Conjuntos abertos, conjuntos fechados, pontos de acumulação, conjuntos compactos.
6. Limites de funções. Definição, limites laterais, limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas.
7. Funções contínuas. Definição e propriedades, funções contínuas num intervalo, funções contínuas em conjuntos compactos, continuidade uniforme.
8. Funções deriváveis. A noção de derivada, operações com funções deriváveis, derivada e crescimento local, funções deriváveis num intervalo.
9. Fórmula de Taylor e aplicações da derivada. Funções convexas e côncavas, aproximações sucessivas e método de Newton.

Referência Bibliográfica:

1. Elon Lages Lima, Análise Real, Vol. 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro.
2. Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.
3. W. Rudin, Princípios de Análise Matemática, Universidade de Brasília e Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.
4. Richard R. Goldberg, Methods of Real Analysis, Blaisdell, New York, 1963.

ANEXO K – Plano de Ensino “Introdução à Análise” - UNICAMP

MA507

Nível:

Graduação

Nome da disciplina:

Introdução à Análise

Número de Créditos:

6

Oferecimento:

2º Período Letivo

Pré-requisito:

MA111

Ementa:

Os números reais. Sequências e séries, o número e é irracional; convergência de Cauchy; séries infinitas, testes da comparação, razão e integral; não-enumerabilidade dos números reais, Teorema de Bolzano-Weierstrass, divergência da série harmônica. Funções contínuas: limites, Teoremas de Bolzano, de Weierstrass e do Valor Intermediário, continuidade uniforme. Derivadas, extremos locais, o Teorema do Valor Médio, funções inversas. Integral. O Teorema Fundamental do Cálculo. Aplicações: funções trigonométricas, π é irracional, as funções logarítmica e exponencial, aproximação por polinômios.

Conteúdo / Programa:

1. Fundamentos sobre os números reais: propriedades básicas; desigualdades, indução finita; necessidade da completude dos números reais.
2. Sequências e séries: sequências monótonas; o número e e sua irracionalidade; Critério de convergência de Cauchy; propriedades e exemplos de séries infinitas, Testes da comparação, razão e integral; não-enumerabilidade dos números reais, Teorema de Bolzano-Weierstrass, origem das séries infinitas, divergência da série harmônica.
3. Funções: limites, funções contínuas, Teoremas de Bolzano, de Weierstrass e do Valor Intermediário, continuidade uniforme.
4. Derivadas: derivada e propriedades, extremos locais e o Teorema do Valor Médio, funções inversas.
5. Integral: definição através de somas superior e inferior, O Teorema Fundamental do Cálculo;
6. Aplicações: estudo analítico das funções trigonométricas, demonstração de que π é irracional, as funções logarítmica e exponencial, aproximação por polinômios.

Objetivo:

Esta disciplina visa desenvolver nos estudantes de Licenciatura em Matemática tanto a intuição em torno dos conceitos de Análise, quanto o rigor por trás de formulação de questões matemáticas relacionadas com números e funções reais através do conceito de limite. Especificamente, o curso tem principalmente dois objetivos: apresentar as demonstrações dos principais teoremas visto no curso de Cálculo I, como o Teorema de

Bolzano, de Weierstrass, do Valor Intermediário, do Valor Médio e o Teorema Fundamental do Cálculo e, além disso, fazer um estudo rigoroso sobre funções elementares, como as funções trigonométricas e as funções logarítmicas e exponenciais, formalizando alguns resultados e conceitos ensinados nos Ensino Médio. Espera-se também que se apresente aos alunos o contexto histórico dos temas estudados.

Referência Bibliográfica:

1. Ávila, Geraldo: Introdução à Análise Matemática. 2ª ed. E. Blucher, 1999.
2. Spivak, Michael: Calculus. Fourth Edition. Publish or Perish, Inc. Houston, Texas, 2008.
3. Observação

ANEXO L – Plano de Ensino “Introdução à Análise” USP São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística
Matemática
Disciplina: MAT0315 - Introdução à Análise Introduction to Analysis

Créditos Aula: 4

Créditos Trabalho: 1

Carga Horária Total: 90 h (Práticas como Componentes Curriculares = 30 h)

Tipo: Semestral

Ativação: 01/01/2018

Desativação:

Objetivos

Introduzir os conceitos básicos de análise real. Apresentar formalmente a noção de completude dos números reais e suas consequências. Desenvolver atividades de Prática como Componente Curricular. Desenvolver atividades de Prática como Componente Curricular.

Docente(s) Responsável(eis)



Programa Resumido

Abordagem axiomática dos números reais. Definição formal de limite e continuidade. Demonstrações rigorosas de alguns dos principais teoremas de Cálculo Diferencial e Integral. Desenvolvimento de atividades que propiciem ao aluno relacionar a teoria com a prática, isto é, fazer com que o estudante reflita sobre a prática profissional relacionando conteúdos estudados na disciplina com temas e ideias da Educação Básica.

Programa

Axiomas de corpo ordenado completo. Construção do conjunto dos números reais. Propriedade arquimediana. Propriedade dos intervalos encaixantes. Sequências de Cauchy. Limites de sequências de números reais. Séries numéricas: critérios de convergência. Expansão decimal. Noções de topologia da reta. Limite e continuidade de funções de uma variável real. Função exponencial. Potência de expoente real. Logaritmo. Teorema do Valor Intermediário. Teorema de Weierstrass. Teorema do Valor Médio. Integral de Riemann. Teorema Fundamental do Cálculo. Desenvolvimento de atividades que propiciem ao aluno momentos de reflexão sobre a prática profissional, buscando relações não só entre teoria e prática, mas também nuances de como conteúdos e competências estudados e/ou adquiridos na Universidade podem modificar a visão e consequentemente a vivência cotidiana de um professor da Educação Básica.

Avaliação

Método

Aulas teóricas e de exercícios.

Critério

O aluno deve ser aprovado tanto nas atividades relacionadas ao conteúdo matemático como nas atividades relacionadas à Prática como Componente Curricular. Neste caso, a média final é a média ponderada das duas notas obtidas anteriormente.

Norma de Recuperação

Cada docentes (ou equipe), deverá decidir qual o peso p onde $1 \leq p \leq 4$. A média final, será média ponderada da nota do semestre com a da recuperação com o peso acima.

Bibliografia

G. Ávila, Análise Matemática para Licenciatura, 3a. edição, Edgard Blücher, 2009; D.G. Figueiredo, Análise I, IMPA - Livros Técnicos e Científicos, 1975; E.L. Lima, Curso de Análise, vol.1, IMPA,

1976-81; A.J. White, *Análise real: uma introdução*, Edgard Blücher, EDUSP, McGraw-Hill, São Paulo, 1975; Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*, tradução de Eliana R. H. Brito, Ed. Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971; Spivak, B., *Calculus*, W.A. Benjamin Inc., Nova Iorque, 1967. Artigos da RPM e da Educação Matemática em Revista - EMR - pertinentes aos temas estudados.

ANEXO M – Plano de Ensino “Análise para Licenciatura” USP São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Matemática
Disciplina: SMA0347 - Análise para Licenciatura Mathematical Analysis for Teacher Education

Créditos Aula: 4

Créditos Trabalho: 2

Carga Horária Total: 120 h (Práticas como Componentes Curriculares = 60 h)

Tipo: Semestral

Ativação: 01/01/2020

Desativação:

Objetivos

Abordar a análise matemática e seus aspectos históricos proporcionando ao futuro professor conhecer como se estruturou o rigor na área de Matemática, particularmente no que diz respeito às contribuições para a Análise, e suas relações com a formalização de alguns resultados ensinados nos níveis Fundamental e Médio.

To approach the mathematical analysis and its historical aspects, giving the future teachers the possibility to learn how the rigor in the area of mathematics was structured, with a particular regard to the contributions to Analysis, and its relationships with the formalization of some results taught in Primary and Secondary levels.

Docente(s) Responsável(eis)



Programa Resumido

Números Reais. Sequências Infinitas. Séries Infinitas. Funções, Limites e Continuidade. O Cálculo Diferencial. Alguns aspectos da teoria de integral. Aspectos históricos sobre os temas abordados. A irracionalidade dos números π e “e”.

Real numbers. Infinite sequences. Infinite series. Functions, limits and continuity. The differential calculus. Points on the integral theory. Historical aspects of the topics covered. The irrationality of numbers π and “e”.

Programa

Números reais: grandezas incomensuráveis. Cortes de Dedekind e os números reais. Propriedades e números irracionais. Aplicação à sala de aula no Ensino Fundamental e Médio. Notas históricas: teoria de conjuntos, conjunto de Cantor, paradoxos, linguagem matemática, não-enumerabilidade dos números reais. Sequências e séries numéricas: Teoremas de convergência de sequências e exemplos. Critérios de convergência de séries. Teste da comparação, razão e integral. Notas históricas: Teorema de Bolzano-Weierstrass, origem das séries infinitas, divergência da série harmônica. A irracionalidade do número de Euler. Notas históricas: surgimento do número de Euler. Funções, limites e continuidade. Teorema do Valor Intermediário. Notas históricas: Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Weierstrass, Gauss. O cálculo diferencial: a derivada e a diferencial. Máximos e mínimos locais. Teorema do Valor Médio. Notas históricas: a origem do cálculo, Newton e Leibniz. Teoria da integral: Integrais por somas superiores e inferiores e a Integral de Riemann. Teorema Fundamental do Cálculo. Notas históricas: quadratura, Arquimedes e a área do círculo. A irracionalidade de π . As Práticas como Componentes Curriculares (PCC) compreendem as seguintes atividades - aulas com resoluções de problemas, que, além de trabalhar os conteúdos programáticos, ofereçam ao aluno uma reflexão de seu papel na educação básica. Organização de atividades envolvendo o ensino dos conteúdos no Ensino Médio. - Contextualizar os temas estudados do ponto de vista histórico, para que o estudante entenda os mecanismos que levaram à criação e estudos dos conceitos desenvolvidos em Análise (15h). - Fazer o levantamento e análise de livros didáticos que abordam os conteúdos da disciplina para saber em que período do Ensino Básico são ensinados e como são ensinados (15h). - Explicitar a estrutura de um dos componentes da disciplina e refletir sobre como foi sua aprendizagem (10h); - Elaborar atividades para alunos do ensino básico envolvendo conteúdos da disciplina (15h). - apresentar exemplos do cotidiano ou da natureza e curiosidades que envolvam sequências numéricas (5h).

Real numbers: incommensurable magnitudes. Dedekind's cuts and the real numbers. Applications to the teaching at High School. Historical notes: set theory, Cantor's set, paradoxes, mathematical language.

Non-enumerability of real numbers. Sequences and numerical series: sequences convergence theorems and examples. Criteria of series convergence. Comparison, reason and integral tests. Historical notes: Bolzano-Weierstrass' Theorem, origins of infinite series, divergence of the harmonic series. The irrationality of the Euler number. Historical notes: the rise of Euler number. Integrated projects. Functions, limits and continuity: definitions, properties. Lateral limits and monotonous functions. Continuous functions on closed intervals. Intermediate Value Theorem. Historical notes: Value Theorem Intermediate, extreme value theorem, Gauss. Differential calculus: the derivative and differential. Maximums and local minimums. Mean Value Theorem. Historical notes: the origin of the calculus, Newton and Leibniz. Theory of integral: Integrals by upper and lower sums and Integral Riemann. Fundamental Theorem of Calculus. Historical notes: squaring, Archimedes and the circle area. The irrationality of pi.

Avaliação

Método

Aulas expositivas, fixação através de exercícios com orientação do professor.

Critério

Avaliação por meio de provas escritas, trabalhos e seminários.

Norma de Recuperação

Número de provas: no mínimo uma (01) e no máximo duas (02) provas. Critério de aprovação: a nota final (MF) do aluno que realizou provas de recuperação dependerá da média do semestre (MS) e da média das provas de recuperação (MR), como segue: $MF=5$ se $5 \leq MR \leq 10$ - MS; $MF = (MS + MR) / 2$ se $MR > 10$ - $MSMF = MS$ se $MR < 5$.

Bibliografia

Livro Texto: ÁVILA, G., Análise Matemática para Licenciatura, Edgard Blucher, 2006. MUNIZ NETO, A. C. Fundamentos de Cálculo - Coleção PROFMAT-Ed. Sociedade Brasileira de Matemática-2015. Complementares: FIGUEIREDO, D. G., Análise I, LTC, Rio de Janeiro, 1996. Figueiredo, D. G., Números Irracionais e Transcendentes, Sociedade Brasileira de Matemática, Brasília-DF, 1985. GUIDORIZZI, H. L., Um Curso de Cálculo, vols. 1 e 4, LTC, Rio de Janeiro. LIMA, E.L., Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2002. BOYER, Carl B., História da Matemática, Edgard Blucher, São Paulo, 1974. Maor, E., 2008. E: A História de um Número, 5ª edição. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record. Montgomery, H., Niven, I. e Zuckerman, H., An Introduction to the Theory of Numbers. 5th ed., John Wiley & Sons, 1991. Niven, I., Números Racionais e Irracionais. 2nd Edition. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 1984. Niven, I., Números Racionais e Irracionais. 2nd Edition. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 1984. SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2012. 72 p.. Disponível em <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Acessado em 20/02/2019. Spivak, M., Calculus: Calculo Infinitesimal. Ed. Reverté. Espanha, 81, 1977. Spolaor, S. L. G., 2013. Números irracionais: pi e e. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). ICMC/USP. Livros didáticos do acervo do ICMC USP São Carlos, ensino fundamental e médio.