





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/03

Derivação no super-espço das equações efetivas da supercorda tipo II

Daniel Luiz Nedel

Orientador

Nathan Jacob Berkovits

23000003663



Março de 2003

Agradecimentos

- Gostaria de agradecer a Fapesp pelo apoio financeiro;
- A minha família, em especial a minha irmã, minha mãe, meu cunhado e meus sobrinhos, pelo respeito e carinho;
- Aos professores José Helayel e Maria Cristina, por terem me iluminado em um momento de completa escuridão. Sem suas palavras e apoio nada disto estaria aqui;
- A Ceci, por todo seu carinho e dedicação. Jamais a esquecerei.
- Aos amigos irmãos: Cristiano, Maurizio, Leonardo, Gadelha, Luiz Carlos, por serem uns “malacos”;
- Ao Randall e ao professor Pimentel, pela amizade e aprendizado;
- Ao grupo de cordas do IFT, em particular ao Luciano e ao Brenno, pelas inúmeras discussões e ao Nathan por ter sido meu orientador;
- Por fim, gostaria de tentar o impossível. Como agradecer a melhor amiga, a companheira inseparável, a pessoa que guiou-me até aqui? Meras palavras são incapazes de realizar tal missão. Mesmo incapaz de transcender o discurso e inventar palavras e construções, serei eternamente grato a Dáfni Z. Marchioro

Dedico este trabalho a alguém que considero a esfinge da
bondade, da sabedoria, da beleza e da força, meu eterno
exemplo: minha mãe.

Resumo

Nesta tese, são derivadas as equações de movimento efetivas da supercorda tipo *II*, assim como os vínculos da supergravidade tipo *II*. Os resultados são obtidos acoplando a supercorda tipo *II*, descrita no formalismo híbrido desenvolvido por Berkovits, ao super-espaco curvo $N = 2$ e exigindo invariância superconforme $N = (2, 2)$ perturbativamente na folha de mundo. Todos os cálculos são realizados diretamente no super-espaco $N = 2$, como consequência imediata do formalismo utilizado. A análise no nível de árvore mostra que os vínculos derivados quebram a invariância conforme e $SU(2)$. O dilaton, que não acopla classicamente, será o campo compensador e as simetrias da folha de mundo exigem que este seja representado por multiplete vetorial e um multiplete hipertensorial. Em particular, mostramos que a supercorda seleciona um gauge particular, onde a matéria é fixa e não o compensador. As equações de movimento para o compensador são derivadas no nível de árvore e confirmadas extendendo a análise em 1 loop.

Palavras Chaves: Supercordas; Modelo Sigma; Supergravidade.

Áreas do conhecimento: Supercordas, Teoria Quântica de Campos.

Abstract

In this thesis, the effective equations of motion of type *II* superstring has been derived, as well as the type *II* supergravity constraints. The results are obtained by coupling type *II* superstring (described in Berkovits' formalism) to $N = 2$ curved superspace and imposing perturbatively $N = (2, 2)$ superconformal invariance on the worldsheet. The computations are carried out in $N = 2$ superspace, as an immediate consequence of the utilized formalism. The analysis at tree level shows that the derived constraints break conformal invariance and $SU(2)$. The dilaton, that doesn't couple classically, will be the compensator field, and the worldsheet symmetries require that it is represented by a vector and a hypertensorial multiplet. In particular, we show that superstring selects a particular gauge where the matter is fixed, not the compensator. The compensator's equations of motion are derived at tree level and confirmed extending the analysis to one loop.

Índice

Agradecimentos	i
1 Introdução	2
2 O Formalismo Híbrido.	6
2.1 Formulação RNS.	6
2.1.1 Operador BRST	8
2.2 Supercorda RNS em 4 dimensões.	11
2.2.1 O Formalismo híbrido	12
2.2.2 Redefinição dos campos.	15
2.2.3 Teoria $N=2$ torcida.	17
2.2.4 Operadores de vértice.	23
3 Modelo sigma para supercorda tipo II	28
3.1 Supergravidade no super-espço.	28
3.1.1 Compensadores.	34
3.2 Termo clássico.	37
3.3 O termo de Fradkin-Tseytlin.	39
4 Modelo Sigma II no Nível de Árvore.	45
4.0.1 Teoria de perturbação em α'	45
4.0.2 Expansão em campo de fundo covariante.	47
4.1 Resultados obtidos no nível de árvore.	56
5 Modelo sigma tipo II em 1 loop	70
5.1 Prescrição em 1 loop.	70
5.2 Resultados em 1 loop.	74
5.2.1 Setor do Dilaton	91
5.3 Contratermos.	96
5.4 Equações de movimento.	97

6 Conclusões.	106
A Convenções de Definições.	110
B Identidades de Bianchi.	113
Referências.	117

Introdução

A relatividade geral é uma teoria da gravitação que descreve a interação entre a matéria e a geometria do espaço-tempo. Ela foi desenvolvida por Albert Einstein no início do século XX e é a base da cosmologia moderna. A teoria prevê que a presença de massa e energia curva o espaço-tempo, e esta curvatura afeta o movimento dos corpos e a propagação da luz. A relatividade geral também prevê a existência de ondas gravitacionais, que são perturbações na curvatura do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz.

Um dos aspectos mais importantes da relatividade geral é a sua capacidade de descrever a evolução do universo em larga escala. A teoria prevê que o universo está em expansão, o que foi confirmado por observações de galáxias distantes. Além disso, a relatividade geral também prevê a existência de buracos negros, que são regiões do espaço-tempo onde a gravidade é tão forte que nada pode escapar. A teoria também prevê a existência de ondas gravitacionais, que foram recentemente detectadas por observatórios como o LIGO. A relatividade geral é uma teoria muito bem testada e é considerada uma das teorias mais bem-sucedidas da física moderna.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma revisão da relatividade geral, com ênfase na sua formulação matemática e nas suas aplicações cosmológicas. O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos as convenções de notação e as definições básicas; no capítulo 2, discutimos as identidades de Bianchi e as equações de campo de Einstein; no capítulo 3, apresentamos a solução de Schwarzschild e a solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker; no capítulo 4, discutimos a existência de buracos negros e ondas gravitacionais; e no capítulo 5, apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras da relatividade geral.

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos 20 anos a teoria de cordas vem sendo considerada a teoria mais promissora para resolver um dos maiores problemas da física de nosso século. As diferenças práticas e ontológicas entre os dois grandes pilares da física moderna, relatividade geral e mecânica quântica, tornam a tarefa de tratar as interações fundamentais de uma forma unificada não apenas um desafio enorme para a física teórica, mas também um grande passo para uma compreensão mais profunda da natureza e das leis que a descreve.

Embora a teoria de cordas pareça ser uma boa candidata para uma visão unificada e simples da natureza, a mesma ainda está longe de ser bem entendida. Mais longe ainda estamos de ter uma teoria completa, diferente dos moldes que a teoria de cordas prediz. Dentro deste quadro, existem dois caminhos bem distintos a serem seguidos pelos físicos que se aventuram em teoria de cordas. Embora as escalas de energia envolvidas na teoria estão completamente fora de qualquer alusão experimental, é possível tentar fazer contato com o modelo padrão através de compactificações específicas. Esta é uma área bastante frutífera dentro da arena de pesquisa definida pela teoria de cordas. Dentro desta mesma linha, é lícito salientar os recentes avanços na cosmologia experimental e como este novo cenário pode ser extremamente útil para testes envolvendo modelos cosmológicos inspirados em cordas. Indo em uma direção ortogonal, como salientado no começo deste parágrafo, a teoria de cordas ainda está longe de ser bem entendida. Existe um vácuo teórico muito grande a ser preenchido e conexões a serem feitas. Em particular, temos uma série de problemas que situam-se dentro da esfera de compreensão da teoria por ela mesma. A proposta desta tese situa-se exatamente entre estes problemas.

Dentre os grandes avanços alcançados para a compreensão da teoria de cordas, destacam-se as dualidades. Em física, uma determinada situação pode admitir mais de uma descrição. Este parece ser o caso das diferentes teorias de cordas, que são duas umas das outras. Outro exemplo de dualidade em teoria de cordas é a chamada

simetria de espelho, onde a compactificação envolvendo duas topologias distintas fornece o mesmo espectro físico. Estas dualidades, embora devam ser propriedades da teoria como um todo, são melhor estudadas olhando apenas o espectro não massivo da mesma. Em particular, a ação para os campos não massivos representa a ação efetiva em baixa energia para a teoria de cordas, onde subentende-se que integramos os campos massivos. A estrutura exata das ações efetivas para a teoria de cordas torna-se então fundamental para a compreensão da teoria como um todo.

Uma das diversas formas de obter ações efetivas para teoria de cordas é analisando o modelo sigma bidimensional que descreve a teoria quando acoplada a campos de fundo não massivos. Através da consistência quântica deste modelo, temos equações de movimento para o “background” e com isto uma ação para estes. Esta será a ação efetiva para a teoria de cordas. Esta consistência quântica, para últimos fins, é de fato um cálculo de função beta. Quando acoplada ao espaço plano, do ponto de vista bidimensional, a corda é representada por uma teoria conforme livre. Quando acoplamos ao espaço curvo, representado pelos campos não massivos, temos uma teoria de campos interagente. Portanto podemos ter anomalias e um cálculo de função beta se faz necessário para garantir a simetria conforme ao nível quântico.

Para a supercorda, a ação efetiva é alguma teoria de supergravidade. Um dos grandes problemas para efetuar tal cálculo é construir um modelo sigma com supersimetria manifesta no espaço-tempo; sem tal descrição não poderíamos obter qual a teoria de supergravidade fora da camada de massa que a teoria de supercorda seleciona. Em particular, dentro da proposta desta tese, um modelo sigma para a supercorda tipo II com supersimetria manifesta também ajudaria a entender melhor os campos de Ramond, visto que na formulação RNS estes são bem mais complicados que os campos oriundos do setor Neveu-Schwarz. Por isto, seu papel na ação efetiva é bem menos entendido. O fato supracitado torna claro um dos grandes problemas para efetuar o cálculo realizado nesta tese na formulação RNS. A falta de supersimetria manifesta torna impossível uma descrição do modelo sigma no super-espaço, onde os campos de Ramond e Neveu-Schwarz devem aparecer na mesma forma. Por outro lado, na supercorda de Green-Schwarz temos supersimetria manifesta, mas a simetria Kappa torna a quantização covariante do modelo sigma extremamente difícil. Do ponto de vista bidimensional, a formulação Green-Schwarz resulta em uma teoria de campos onde o limite de teoria livre, quando definimos os propagadores, é extremamente obscuro. Sendo assim, qualquer tentativa de se fazer teoria de perturbação usual neste modelo esbarra em um problema praticamente intratável.

Uma descrição supersimétrica para o modelo sigma da supercorda foi obtida por Berkovits e Siegel na referência [1]. Para a supercorda heterótica compactificada

em 4 dimensões este modelo sigma contém uma teoria $N = (2, 0)$ na folha mundo e para a supercorda tipo *II* uma teoria $N = (2, 2)$ na folha mundo. Devido à supersimetria, os operadores de vértice nesta descrição não distinguem campos de Ramond e campos de Neveu- Schwarz. Com isto podemos obter informação de ambos os setores. De posse deste formalismo, Jan de Boer e Kostas Skenderis derivaram pela primeira vez a ação efetiva para a supercorda heterótica, diretamente no super-espço [2].

O modelo sigma é construído em termos de potenciais como o vierbein E_A^M , um tensor antisimétrico B_{AB} que representa a matéria e campos quirais e "twist " quirais. Como usual em supergravidade, os potenciais têm mais graus de liberdade que o necessário para construir a teoria. De fato, os potenciais devem estar sujeitos a vínculos. Mostraremos que verificando a consistência da álgebra $N = (2, 2)$ para a supercorda tipo II perturbativamente em α' , no nível de árvore obtemos os vínculos relativos ao conteúdo físico da supergravidade $N = 2$ conforme acoplada a um multipletto hipertensorial. Os resultados mostram que o modelo sigma seleciona um gauge particular, onde parte da matéria é fixa e parte é transferida para o multipletto de supergravidade. Estes resultados são derivados com o auxílio de identidades de Bianchi. Ainda no nível de árvore, derivamos equações de movimento para o dilaton, que será o compensador. O mesmo é descrito por campos quirais e "twist " quirais, como exigido pelas simetrias da folha mundo. Embora o dilaton não acople classicamente na ação e, portanto, espera-se obter informação do mesmo somente em 1 loop, uma redefinição de campos tornou possível a contribuição deste já no nível clássico. Em seguida a análise é estendida a 1 loop. Neste caso, mostramos que as equações de movimento derivadas no nível de árvore são consistentes. Também será mostrado que em 1 loop o método usado torna necessário redefinir as correntes com contratermos, de forma a obter a álgebra correta. Todos estes cálculos são na realidade uma extensão do método desenvolvido por de Boer e Skenderis para a supercorda heterótica.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: nos primeiros dois capítulos serão discutidos os elementos básicos do formalismo usado, assim como os elementos básicos de supergravidade usados ao longo da tese. Em particular, no segundo capítulo será mostrada a relação do formalismo híbrido utilizado com a formulação RNS e no terceiro, o acoplamento da supercorda tipo II descrita neste formalismo com o super-espço curvo.

No quarto capítulo começa a contribuição original desta tese. Através de uma expansão em campo de fundo covariante no super-espço, a ação e os geradores são decompostos em campos clássicos e quânticos. Os vértices na ação serão descritos por objetos geométricos do super-espço curvo e os OPE's das correntes receberão

correções destes. Com este método são calculados os OPE's da álgebra $N = (2, 2)$ no nível de árvore. Os termos que diferem da álgebra usual serão os vínculos da supergravidade $N = 2$ e as equações de movimento. Tal método é mais trabalhoso que o cálculo normal de uma função beta, mas é necessário, visto que o anulamento da função beta garante apenas parte da álgebra $N = (2, 2)$.

No quinto capítulo a análise é feita em 1 loop. Como já mencionado a análise em 1 loop confirma os resultados derivados no nível de árvore. De fato, todas as equações derivadas em 1 loop são anuladas pelas equações derivadas no nível de árvore. Também são discutidos os contratermos necessários para a validade do método e ao final os resultados são comparados com os obtidos para a supercorda heterótica.

No último capítulo as conclusões e as perspectivas futuras são descritas. Os apêndices contêm a notação utilizada e resoluções de identidades de Bianchi, úteis para mostrar a equivalência entre equações de movimento derivadas dos OPE's envolvendo correntes diferentes.

Capítulo 2

O Formalismo Híbrido.

Neste primeiro capítulo será feita uma revisão do formalismo híbrido. Embora esta descrição tenha sido obtida primeiramente através de uma “covariantização” do formalismo de Green-Schwarz [3], a mesma também pode ser entendida como uma “supersimetrização” do formalismo RNS(Ramond, Neveu, Schwarz)[4]. Seguindo este último, será descrito como este formalismo pode ser visto como uma redefinição das variáveis RNS. Como consequência, teremos uma teoria superconforme crítica $N = 2$ torcida na folha de mundo. Para compactificação a quatro dimensões esta teoria terá supersimetria manifesta. Por último, será discutido como construir os operadores de vértice para os estados não massivos e independentes da compactificação. Estes serão fundamentais para a construção do modelo sigma do próximo capítulo.

Este primeiro capítulo seguirá praticamente as referências [5] e [6]. Em particular a última referência é uma revisão completa do formalismo que será aqui apresentado, tratando com mais detalhes todas as suas possíveis aplicações.

2.1 Formulação RNS.

A formulação RNS para a supercorda consiste de uma teoria superconforme crítica com $c = 15$ na folha de mundo[5]. A dimensão crítica do espaço tempo é 10 e a representação mais simples e mais usada pode ser lida na ação:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\alpha'} \int d^2z \left(\frac{1}{2} \partial x^m \bar{\partial} x_m + i \Psi^m \bar{\partial} \Psi_m + i \hat{\Psi}^m \partial \hat{\Psi}_m \right) \\ m &= 0 \dots 9 \end{aligned} \quad (2.1)$$

sendo que o conjunto de campos da folha de mundo consiste de 10 escalares x^a e 10 férmions de duas componentes, $\Psi^m, \hat{\Psi}^m$. Os campos fermiônicos $\Psi^m, \hat{\Psi}^m$ se movem respectivamente para a esquerda e direita e do ponto de vista 10-dimensional formam

uma representação vetorial do $SO(8)$. Apenas para não carregar a notação, será descrito, por enquanto, o setor esquerdo. Quando for discutida a supercorda tipo II voltaremos à análise completa com os dois setores. Podemos escrever os geradores da teoria superconforme $N = 1$ na forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \partial x^m \partial x_m + \frac{1}{2} \Psi^m \partial \Psi_m \\ G &= \Psi^m \partial x_m. \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo T o tensor energia momento e G o gerador de supersimetria na folha de mundo. De posse dos OPE's de campo livre

$$x^m(z) x^n(w) = g^{mn} \ln |z - w|^2 \quad (2.3)$$

$$\Psi^m(z) \Psi^n(w) = \frac{g^{mn}}{(z - w)}, \quad (2.4)$$

podemos escrever a álgebra superconforme $N = 1$, $c = 15$:

$$\begin{aligned} T(z) T(w) &= \frac{c/2}{(z - w)^4} + \frac{2T(w)}{(z - w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z - w)} \\ T(z) G(w) &= \frac{\frac{3}{2}G(w)}{(z - w)^2} + \frac{\partial G(w)}{(z - w)} \\ G(z) G(w) &= i \frac{\frac{2}{3}c}{(z - w)^3} + \frac{2iT(w)}{(z - w)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lembramos que neste texto será usado o sinal de igual para os OPE's.

Fazendo uma analogia com a corda bosônica, a mesma é uma teoria conforme bidimensional crítica com $c=26$. Para fixar as simetrias locais usamos um sistema de fantasmas (b, c) com pesos conformes 2 e -1, respectivamente, e $c = -26$, o que garante a nilpotência do operador BRST. Para o caso da teoria superconforme $N = 1$, $c = 15$, usamos o par (b, c) em conjunto com o par de fantasmas bosônicos (β, γ) . Estes últimos possuem pesos conforme $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, respectivamente, e $c = 11$. Desta forma temos um conjunto de fantasmas fixando as simetrias bosônicas e fermiônicas e com a carga central necessária para cancelar a anomalia $c = 15$. Usando estes fantasmas pode-se quantizar a teoria covariantemente, mas sem supersimetria manifesta no espaço-tempo. Para obter um espectro com supersimetria manifesta a partir da ação RNS é necessário fazer a projeção GSO (Gliozzi, Sherk, Olive)[7].

Em geral, para construir os geradores de supersimetria e estados oriundos do setor Ramond, o sistema de fantasmas (β, γ) deve ser fermionizado. Para que se obtenha os OPE's corretos a fermionização é dada na forma:

$$\beta = -i\partial\xi e^{-\phi}, \quad \gamma = i\eta e^{\phi}, \quad (2.6)$$

com os seguintes OPE 's:

$$\begin{aligned} b(z) c(w) &= \frac{1}{(z-w)}, & \xi(z) \eta(w) &= \frac{1}{(z-w)} \\ \phi(z) \phi(w) &= -\ln(z-w). \end{aligned} \quad (2.7)$$

A fermionização (2.6) traz uma consequência imediata. Os campos (β, γ) não dependem do modo zero de ξ . Desta forma, o procedimento de fermionização não é inversível no espaço de Hilbert total dos campos $(\beta, \gamma, \xi, \eta)$. Estes problemas podem ser contornados restringindo o espaço de Hilbert para o espaço de Hilbert “pequeno”, definido como o espaço de campos que não dependem do modo zero de ξ . Tendo em mente os OPE's (2.7), pode-se definir o espaço de Hilbert pequeno como o espaço de estados Φ satisfazendo a relação:

$$\left[\oint dz \eta, \Phi \right] = 0. \quad (2.8)$$

Por outro lado o espaço de Hilbert grande pode ser definido como o espaço de Hilbert de estados que contém o modo zero ξ .

2.1.1 Operador BRST

Os estados físicos devem estar na cohomologia do operador BRST. Na formulação RNS o operador BRST tem a forma:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint dz \left[c \left(T + ib\partial c + \frac{1}{2} \partial\phi\partial\phi + \partial^2\phi + i\eta\partial\xi \right) + i\eta e^{\phi} G + ib\eta\partial\eta e^{2\phi} \right] \quad (2.9)$$

Os estados são descritos pelos operadores de vértice da teoria. As condições de contorno dos férmions Ψ^a definem se os operadores de vértice representam férmions no espaço tempo (condições de contorno do tipo Ramond), ou bósons no espaço-tempo (condições de contorno Neveu-Schwarz). Os setores Ramond e Neveu - Schwarz estão relacionados pelo campo de “spin”, que é um operador que troca as condições de contorno dos campos. Desta forma, este campo também está relacionado com o operador de supersimetria. No entanto, não existe uma operação de supersimetria no espaço-tempo que leve um campo do setor Ramond a um campo do setor Neveu-Schwarz fora da camada de massa.

Se V é um operador de vértice físico, então deve estar na cohomologia BRST:

$$\begin{aligned} \{Q, V\} &= 0 \\ V &\neq \{Q, \Lambda\} \\ \Lambda &\in H_p, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde H_p identifica que estamos no espaço de Hilbert pequeno. Estados escritos na forma $V = \{Q, \Lambda\}$ são espúrios. Se Λ for definido no espaço de Hilbert grande, a cohomologia BRST é trivial:

$$\{Q, V\} = 0 \rightarrow V = [Q, i\xi\partial\xi e^{-2\phi}\Lambda]. \tag{2.11}$$

O operador V é obtido tendo em mente os OPE's (2.7) e a forma do operador BRST dada em (2.9). Este estado não é espúrio porque ξ não faz parte da álgebra irreduzível de (β, γ) . Mais uma vez, é lícito lembrar que o operador de vértice descrito em (2.11) pode descrever vértices fermiônicos ou bosônicos, dependendo das condições de contorno de Ψ^m . Os operadores de vértice fermiônicos podem ser escritos em termos dos campos de spin e são muito mais complicados que os operadores bosônicos. Desta forma, a contribuição dos campos oriundos do setor Ramond na construção de modelos sigma no formalismo RNS torna-se complicada e a contribuição destes campos em um cálculo de função beta é bem menos entendida que os campos do setor Neveu-Schwarz. De fato, a contribuição dos campos do setor Ramond para um cálculo de função beta somente foi levada em conta na referência [2], onde foi usado o formalismo híbrido que será descrito na próxima seção.

Os operadores de vértice no formalismo RNS serão sempre escritos na forma (2.11). No entanto, as características bosônicas do sistema (β, γ) , que permitem manipulações como (2.11) e que são extremamente úteis quando calculamos amplitudes de espalhamento, também originam um problema imediato. Cada estado físico terá um número infinito de operadores de vértice na cohomologia BRST. Este fato pode ser facilmente visto definindo o “picture” como o auto-estado do operador :

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint dz (i\xi\eta - \partial\phi), \tag{2.12}$$

que atua nos operadores de vértice da seguinte forma:

$$[P, V] = ipV.$$

Percebemos que para os operadores de vértice escritos como $V = Fe^{q\phi}$ o “picture” está associando o número de modos zero de ξ, η e a carga q .

Podemos mostrar que, para operadores de vértice na cohomologia BRST em um dado “picture”, existe uma torre infinita de operadores em “pictures” diferentes. Para isto, definimos o operador que aumenta o “picture”

$$Z = \{Q, \xi\} = ie^\phi \Psi_m \partial x^m + ib \partial \eta e^{2\phi} + i \partial (b \eta e^{2\phi}) + ic \partial \xi, \quad (2.13)$$

e seu inverso, o operador que diminui o “picture”

$$Y = ic \partial \xi e^{-2\phi}. \quad (2.14)$$

sendo

$$\begin{aligned} [P, Z^n V] &= i(p+n)V \\ [P, Y^n V] &= i(p-n)V. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como $[Q, Z] = 0, [Q, V] = 0$ implica que

$$[Q, ZV] = 0 \quad (2.16)$$

Da mesma forma, se $ZV = \{Q, \Lambda\}$, temos que $V = \{Q, YV\}$. Assim, se V está na cohomologia BRST, YV também estará. Para qualquer número positivo n , podemos construir infinitos operadores na forma $Z^n V$ e $Y^n V$, todos na cohomologia BRST e associados ao operador de vértice físico V .

A resultado acima é consequência imediata da degenerescência do vácuo do sistema (β, γ) . Existe um número infinito de vácuos equivalentes, identificados pelo picture correspondente. Este fato não é exclusivo para o sistema bosônico, mas no caso fermiônico a estatística de Fermi permite preencher o “mar” de estados equivalentes e escolher um único vácuo [5]. Podemos interpretar o cálculo de amplitudes de espalhamento usando os operadores de vértice em diferentes “pictures”, como calcular amplitudes em diferentes vácuos equivalentes. O truque de mover-se do espaço de Hilbert pequeno para o grande interpola entre estes diferentes vácuos. Aqui é lícito lembrar que o “picture” somente é bem definido na camada de massa. Sendo assim, no cálculo de amplitudes envolvendo estados fora da camada de massa, os mesmos dependerão da posição do operador que muda o “picture” e não é possível ter uma imagem como a citada acima. Por último, a teoria ainda contém uma corrente de fantasma, definida aqui como

$$J_g = \frac{i}{2\pi} \oint dz (bc + \xi \eta), \quad (2.17)$$

onde percebemos que a corrente de fantasma comuta com o operador que muda o “picture”. Desta forma, V tem o mesmo número de fantasma que $Z^n V$. A corrente

de fantasma usualmente é escrita como $J_g = \frac{i}{2\pi} \oint dz (bc + \partial\phi)$, que coincide com (2.17) para $p = 0$. A definição (2.17) para a corrente será extremamente útil nos cálculos que seguirão.

A ambigüidade em relação ao “picture ” pode ser removida fixando um valor para o mesmo. Em geral, fixa-se o “picture ” -1 para os operadores no setor Neveu Schwarz e $-\frac{1}{2}$ para o setor Ramond. No entanto, o operador de supersimetria, escrito na base de helicidade como [8]:

$$\begin{aligned} q_a &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 \pm \sigma_4)} \\ \Psi^9 \pm \Psi^0 &= e^{\pm i\sigma_0} \\ \Psi^j \pm i\Psi^{j+4} &= e^{\pm i\sigma_j} \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (2.18)$$

carrega “picture ”. Assim, escolhendo um “picture” particular, estamos quebrando a supersimetria manifesta no espaço-tempo, o que não é estranho pois a ação (2.1) não possui supersimetria manifesta. Verificando as combinações possíveis, temos 32 componentes em q_a . Apenas metade sobrevive a projeção GSO, sobrando as 16 supersimetrias da supercorda aberta em 10 dimensões.

Finalizando, os operadores de vértice além de estarem na cohomologia BRST e ter um “picture ” fixo, devem ter número de fantasma 1, serem fermiônicos e sobreviverem à projeção GSO, para que o espectro seja supersimétrico.

2.2 Supercorda RNS em 4 dimensões.

Na seção anterior, a supercorda foi representada por uma teoria superconforme $N = 1, c = 15$. Após fazer a projeção GSO, esta representação contém 16 supersimetrias. Esta é a representação com maior número de supersimetrias para a supercorda, mas é possível encontrar representação com um número menor de supersimetrias.

Em particular, podemos compactificar 6 dimensões e ter uma supercorda em 4 dimensões. Esta representação contém uma teoria $N = 1, c = 6$, tendo 4 bósons na folha de mundo, 4 espinores na folha de mundo e uma teoria superconforme $N = 2, c = 9$ na variedade compactificada. Na referência [9] mostra-se que qualquer representação da teoria superconforme $N = 2, c = 9$ garante a supersimetria em 4 dimensões.

A ação para esta representação pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\alpha'} \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial x^m \bar{\partial} x_m + i\Psi^m \bar{\partial} \Psi_m + i\hat{\Psi}^m \partial \hat{\Psi}_m \right) + S_c \\ m &= 0 \dots 3 \\ S_c &\rightarrow N = 2, c = 9. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A ação S_c representa a ação para as variáveis compactificadas. Os geradores da teoria (setor esquerdo) podem ser escritos na forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \partial x^m \partial x_m + \frac{i}{2} \Psi^m \partial \Psi_m + T_c \\ G &= \Psi^m \partial x_m + \overline{G}_c + G_c, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde S_c é escolhida para que o conjunto de geradores $(\overline{G}_c, G_c, T_c, J_c)$ satisfaça a álgebra $N = 2$ com $c = 9$:

$$\begin{aligned} T_c(z) T_c(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T_c(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_c(w)}{(z-w)} \\ G_c(z) \overline{G}_c(w) &= \frac{\frac{2}{3}c}{(z-w)^3} + \frac{2J_c(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T_c(w) + \partial J_c(w)}{(z-w)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Na expressão acima J_c é a corrente $U(1)$ frente a qual G_c e $\overline{G}_c$ tem cargas opostas. O OPE completo da álgebra $N=2$ será descrito posteriormente.

Pode-se construir um operador BRST com um conjunto de fantasma $N = 1$ e definir operadores de vértice físicos. O operador de supersimetria tem agora 4 componentes, identificando as 4 supersimetrias em 4 dimensões. O mesmo divide-se em uma parte quiral q_α , e uma parte antiquiral $q_{\dot{\alpha}}$:

$$q_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm (\sigma_0 + \sigma_1) + H_c)} \quad (2.22)$$

$$q_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm (\sigma_0 - \sigma_1) - H_c)} \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi^3 \pm \Psi^0 &= e^{\pm i\sigma_0} \\ \Psi^1 \pm i\Psi^2 &= e^{\pm i\sigma_j} \quad \partial H_c = j_c. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2.1 O Formalismo híbrido

Os operadores de supersimetria (2.18) carregam “picture”. Assim, quando atuam em um dado operador de vértice mudam o “picture” do mesmo. Como a equivalência entre os diferentes “pictures” só é bem definida na camada de massa, para termos supersimetria fora da camada de massa deveríamos levar em conta todos os “pictures”, o que é impossível na formulação RNS, pelo menos em primeira quantização. De posse dos operadores de supersimetria (2.18), usando os OPE’s podemos calcular a álgebra

$$\{q_a, q_b\} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{-\phi} \Psi_m \Gamma_{ab}^m, \quad (2.25)$$

que claramente difere da álgebra de supersimetria

$$\{q_a, q_b\} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \partial x_m \Gamma_{ab}^m, \quad (2.26)$$

onde o momento da corda é definido como $\frac{1}{2\pi i} \oint dz \partial x_m$.

Contando o “picture” de cada lado das equações acima, verificamos que q_a carrega “picture” $-\frac{1}{2}$. Então, era de se esperar que do lado esquerdo de (2.25) obteríamos um objeto com “picture” -1 , e não “picture” zero como o momento $\frac{1}{2\pi i} \oint dz \partial x_m$. Aumentando o “picture” do lado direito de (2.25) com o operador Z obtemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dz Z e^{-\phi} \Psi_m \Gamma_{ab}^m = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \partial x_m \Gamma_{ab}^m. \quad (2.27)$$

A conclusão parcial destes resultados é que a inserção do operador Z na equação (2.25) torna a supersimetria manifesta. No entanto, como mencionado anteriormente, só existe a equivalência entre “pictures” diferentes na camada de massa. Desta forma, a manipulação acima não permitiria supersimetria manifesta fora da camada de massa.

A contagem do “picture” sugere que para obter a álgebra correta devemos mudar os operadores de supersimetria. Precisamos de um operador com “picture” $+\frac{1}{2}$ para anticomutar com q_a . A sugestão óbvia é:

$$\begin{aligned} \bar{q}_a &= Z q_a = \frac{1}{2\pi} \oint dz \left[b \eta e^{\frac{i}{2}(-3i\phi \pm \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 \pm \sigma_4)} \right] \\ &+ i : \left(e^{\phi} \Psi_c \partial x^c e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 \pm \sigma_4)} \right) : . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pode-se verificar que q_a e $\bar{q}_a$ satisfazem a álgebra de supersimetria usual

$$\{q_a, \bar{q}_a\} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \partial x_m \Gamma_{ab}^m. \quad (2.29)$$

Embora tenhamos dois geradores que satisfazem a álgebra de supersimetria, a teoria agora contém o dobro de geradores que a teoria original. Para compactificações a 4 dimensões é possível manter a parte quiral de q_a e a parte antiquiral de $\bar{q}_a$, sem quebrar a covariância de Lorentz [4]:

$$\begin{aligned}
q_\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{\frac{i}{2}(\phi \pm (\sigma_0 + \sigma_1) + H_c)} \\
\bar{q}_{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2\pi} \oint dz \left[b\eta e^{\frac{i}{2}(-3i\phi \pm (\sigma_0 - \sigma_1) - H_c)} \right] \\
+i &: \left(e^\phi \Psi_\mu \partial x^\mu + e^\phi \bar{G}_c + e^\phi G_c e^{\frac{i}{2}(\phi \pm \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 \pm \sigma_4)} \right) : .
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Estes operadores fecham a álgebra de supersimetria em 4 dimensões

$$\{q_\alpha, \bar{q}_{\dot{\alpha}}\} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \partial x_m \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \tag{2.31}$$

Para ter a supersimetria em 10 dimensões foi desenvolvido um outro formalismo baseado em espinores puros [10].

O Problema da hermiticidade.

A álgebra (2.31) é de fato a álgebra correta para a supersimetria em 4 dimensões. No entanto, $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ não é conjugado hermitiano de q_α , usando a definição usual de conjugação. Na formulação RNS os campos fundamentais são hermitianos ou anti-hermitianos. A relação complicada entre $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ e q_α sugere que devemos redefinir as relações de hermiticidade.

A redefinição da hermiticidade deve ser feita de forma a preservar todos os OPE's e implicar $(q_\alpha)^\dagger = \bar{q}_{\dot{\alpha}}$. Este problema foi solucionado na referência [11]. Definindo o operador

$$R = \frac{1}{2\pi} \oint dz c \xi e^{-\phi} \left(\Psi^m \partial x_m + \bar{G}_c + G_c \right), \tag{2.32}$$

podemos escrever

$$\bar{q}_{\dot{\alpha}} = e^R \frac{1}{2\pi} \oint dz \left[b\eta e^{\frac{i}{2}(-3i\phi \pm (\sigma_0 - \sigma_1) - H)} \right] e^{-R} \tag{2.33}$$

A identidade acima pode ser provada expandindo as exponenciais e calculando as integrais até a ordem relevante, tendo em mente os OPE's. Em primeira ordem obtém-se o primeiro termo de $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ em (2.30); a expansão pára em segunda ordem onde temos o primeiro comutador, gerando o segundo termo de $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ em (2.30).

A hermiticidade é definida agindo nos campos fundamentais, da forma:

$$\begin{aligned}
(x_m)^\dagger &= e^R x_m e^{-R} & (\Psi_m)^\dagger &= e^R \Psi_m e^{-R} \\
(b)^\dagger &= e^R (ib\eta \partial \eta e^{2\phi}) e^{-R}
\end{aligned}$$

Embora o problema de hermiticidade pareça ter sido resolvido, analisando o conjugado hermitiano de T :

$$(T)^\dagger = T + \partial (bc + \xi\eta), \quad (2.34)$$

percebe-se claramente que o peso conforme de um campo pode ser diferente do peso de seu conjugado hermitiano.

2.2.2 Redefinição dos campos.

A teoria até agora contém uma álgebra de supersimetria que fecha fora da camada de massa e uma redefinição da hermiticidade extremamente complicada. Ainda falta uma ação, para isto é possível fazer uma redefinição dos campos da folha de mundo, permitindo escrever uma ação com supersimetria manifesta e ao mesmo tempo ter uma redefinição mais natural para a hermiticidade, [12] .

Queremos achar um novo conjunto de coordenadas fermiônicas $\theta^\beta, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}$, tais que:

$$\{q_\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha^\beta \quad \{\bar{q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad (2.35)$$

e que formem um par canônico com outras variáveis p_α e $p_{\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} p_\alpha(z) \theta^\beta(w) &= \frac{\delta_a^\beta}{z-w} \\ p_{\dot{\alpha}}(z) \bar{\theta}^{\dot{\beta}}(w) &= \frac{\delta_a^{\dot{\beta}}}{z-w} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Além destas variáveis a ação deve conter os campos bosônicos x^m . Estes não devem ter nenhum OPE com os campos acima. De posse das definições de q_α e $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ podemos encontrar coordenadas fermiônicas que satisfazem (2.35) e posteriormente encontrar $p_\alpha, p_{\dot{\alpha}}$ e x^m . Os resultados são:

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm (\sigma_0 + \sigma_1) - H_c)} \\ \bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= c\xi e^{\frac{i}{2}(3i \pm (\sigma_0 - \sigma_1) + H)} \\ p_\alpha &= e^U e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm (\sigma_0 + \sigma_1) + H)} e^{-U} \\ p_{\dot{\alpha}} &= e^U \left(b\eta e^{\frac{i}{2}(i\phi \pm (\sigma_0 + \sigma_1) + H)} \right) e^{-U} \\ x_{novo}^m &\rightarrow x_{RNS}^m + \frac{i}{2} \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde

$$U = \frac{1}{2\pi} \oint dz c \xi e^{-\phi} \left(\frac{1}{2} \Psi_m \partial x^m + \bar{G}_c \right) \quad (2.38)$$

Como em todas as redefinições foram usados os geradores da álgebra $N = 2$, $c = 9$, os campos da mesma devem ser redefinidos para que não tenham singularidades com o conjunto de campos que definirão a teoria em 4 dimensões. Cada campo da teoria superconforme $N = 2$, $c = 9$ é redefinido da seguinte forma:

$$F_c^{nova} = e^U \left(i\eta e^\phi \right)^n F_c^{antigo} e^{-U} \quad (2.39)$$

Reconstruindo os geradores com os campos redefinidos da forma acima, pode-se mostrar que a nova teoria ainda é uma teoria superconforme $N = 2$, $c = 9$ com as condições de hermiticidade apropriadas.

A nova teoria deve conter o mesmo conteúdo físico da teoria antiga. Além da teoria superconforme $N = 2$, $c = 9$ que permanece inalterada, a formulação RNS original continha cinco bósons (x^m, ϕ) e mais oito férmions $(\Psi^m, b, c, \eta, \xi)$. Partindo da álgebra (2.31), com a definição de q_α e $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ temos até agora quatro bósons (x^m) e oito férmions $(\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, p_\alpha, \bar{p}_{\dot{\alpha}})$. Devemos construir um bóson a mais que seja quiral como ϕ , e que não tenha nenhum OPE com os outros campos. Este bóson será definido como ρ da seguinte forma:

$$\partial\rho = -3i\partial\phi + cb + 2\xi\eta - J_c^{RNS} \quad (2.40)$$

A ação para os campos pode ser agora escrita como:

$$S = \frac{1}{\alpha'} \int d^2z \frac{1}{2} \partial x^m \bar{\partial} x_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + p_{\dot{\alpha}} \bar{\partial} \theta^{\dot{\alpha}} + \hat{p}_\alpha \partial \hat{\theta}^\alpha + \hat{p}_{\dot{\alpha}} \partial \hat{\theta}^{\dot{\alpha}} - \frac{\alpha'}{2} \bar{\partial} \rho (\partial \rho + a_z) + \frac{\alpha'}{2} \partial \hat{\rho} (\partial \hat{\rho} + \hat{a}_z) + S_c, \quad (2.41)$$

onde escrevemos os dois setores da teoria, sendo $\hat{p}_\alpha$ e $\hat{\theta}^\alpha$ férmions que se movem para a direita. Antes de definir os OPE's de campo livre da teoria é necessário discorrer um pouco a respeito do campo ρ . O fator α' a frente do mesmo é devido à dimensão. No próximo capítulo esta independência em α' (visto o termo $\frac{1}{\alpha'}$) relacionará ρ com o termo de Fradkin-Tseytlin. O termo a_z é um campo de gauge $U(1)$ em duas dimensões. Devemos lembrar que $e^{i\rho}$ tem carga multiplicativa $U(1)$ e não ρ . A transformação sob o grupo $U(1)$ na ação é então da forma $\rho \rightarrow \rho + \text{constante}$, de forma que temos apenas um parâmetro. O termo a_z pode ser entendido como um multiplicador de Lagrange, impondo o vínculo $\bar{\partial}\rho = 0$, tornando ρ um bóson quiral. O mesmo raciocínio pode ser feito para $\hat{\rho}$, sendo este um campo antiquiral. Por fim, os campos ρ obedecem o seguinte OPE

$$\partial\rho(z)\partial\rho(w)=\frac{1}{(z-w)^2} \quad (2.42)$$

sendo que os mesmos não podem ser fermionizados:

$$e^{i\rho}e^{i\rho}=\frac{e^{2i\rho}}{z-w}, \quad e^{i\rho}e^{-i\rho}=z-w. \quad (2.43)$$

Este é o mesmo comportamento do campo ϕ do formalismo RNS.

Os demais campos da teoria obedecem os seguintes OPE's de campo livre:

$$\partial x_{\alpha\dot{\alpha}}\partial x_{\beta\dot{\beta}}=\frac{-\alpha'C_{\alpha\beta}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}{(z-w)^2}, \quad (2.44)$$

$$p_{\alpha}(z)\theta^{\beta}(w)=\frac{\alpha'\delta^{\beta}_{\alpha}}{(z-w)}, \quad p_{\dot{\alpha}}(z)\theta^{\dot{\beta}}(w)=\frac{\alpha'\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}}{(z-w)} \quad (2.45)$$

$$\hat{p}_{\alpha}(z)\hat{\theta}^{\beta}(w)=\frac{\alpha'\delta^{\beta}_{\alpha}}{(\bar{z}-\bar{w})}, \quad \hat{p}_{\dot{\alpha}}(z)\hat{\theta}^{\dot{\beta}}(w)=\frac{\alpha'\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}}{(\bar{z}-\bar{w})} \quad (2.46)$$

onde (detalhes no apêndice) foi escrito um vetor em quatro dimensões como um bi-espinor usando matrizes de Pauli ($x_m \rightarrow x_{\alpha\dot{\alpha}}$). A ação descrita com estes campos tem supersimetria manifesta em quatro dimensões. No entanto a hermiticidade ainda não é natural. Este fato resultará em uma nova representação para a supercorda e será descrito a seguir.

2.2.3 Teoria N=2 torcida.

A teoria conforme $N = 1$ foi descrita anteriormente com uma redefinição dos campos, permitindo escrever uma ação com supersimetria manifesta em quatro dimensões. As condições de hermiticidade permitem que campos tenham peso conforme diferente de seu conjugado hermitiano, o que soa bastante estranho. Este fato deixará de existir se percebermos que não temos mais uma teoria $N = 1$ e sim uma teoria $N = 2$ torcida. Para mostrar isto, começaremos calculando $(Q)^{\dagger}$. O operador $BRST$ pode ser escrito na forma:

$$Q=\frac{1}{2\pi}\oint d^2ze^R\left(ib\eta\partial\eta e^{2\phi}\right)e^{-R}=\frac{1}{2\pi}\oint d^2zJ_{BRST} \quad (2.47)$$

tornando fácil perceber que $(Q)^{\dagger}=\frac{1}{2\pi}\oint dz b$. As condições de hermiticidade, até então estranhas, soam de forma natural se identificarmos J_{BRST} e b como geradores fermiônicos de uma teoria torcida $N = 2$, $c = 6$: G e $\overline{G}$. Os OPE's são dados por:

$$\begin{aligned}
G(z) \overline{G}(w) &= \frac{4}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w)}{(z-w)} \\
T(z) T(w) &= \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Na estrutura torcida $T \rightarrow T + \frac{1}{2} \partial J$, alterando o peso conforme dos campos.

Antes de escrevermos os geradores usando os campos redefinidos anteriormente, será útil definir os seguintes campos:

$$\begin{aligned}
d_\alpha &= p_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \bar{\theta}^2 \partial \theta_\alpha - \frac{1}{4} \theta_\alpha \partial (\bar{\theta})^2 \\
d_{\dot{\alpha}} &= p_{\dot{\alpha}} + i\bar{\theta}^\alpha \partial x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \theta^2 \partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{4} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial (\bar{\theta})^2 \\
\Pi_a &\rightarrow \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} = \partial x_{\alpha\dot{\alpha}} - \theta_\alpha \partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + i \partial \theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Estes campos têm a vantagem de anticomutarem e comutarem com os operadores de supersimetria em 4 dimensões:

$$\begin{aligned}
q_\alpha &= \oint \frac{dz}{2\pi} \left(p_\alpha - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \theta_\alpha \partial (\bar{\theta})^2 \right) \\
q_{\dot{\alpha}} &= \oint \frac{dz}{2\pi} \left(p_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \partial x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial (\theta)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Será mostrado a seguir que todos os geradores e a ação podem ser escritos em termos dos campos (2.49), tornando explícito que a teoria tem supersimetria manifesta. Estes campos também tornarão mais fácil acoplar a teoria ao super-espaço curvo. Os campos d_α e $d_{\dot{\alpha}}$ satisfazem os seguintes OPE's

$$\begin{aligned}
d_\alpha(z) d_\beta(w) &= \text{regular} \\
d_{\dot{\alpha}}(z) d_{\dot{\beta}}(w) &= \text{regular} \\
d_\alpha(z) d_{\dot{\beta}}(w) &= \frac{2i\alpha' \Pi_{\alpha\dot{\beta}}(w)}{(z-w)} \\
d_\alpha(z) \Pi_{\beta\dot{\beta}}(w) &= \frac{2i\alpha' C_{\alpha\beta} \partial \bar{\theta}_{\dot{\beta}}}{(z-w)} \\
d_{\dot{\alpha}}(z) \Pi_{\beta\dot{\beta}}(w) &= \frac{2i\alpha' C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \partial \theta_\beta}{(z-w)} \\
d^2 d_{\dot{\alpha}} &= \frac{8(\alpha')^2 \partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(w)}{(z-w)^2} + \frac{4\alpha' i d^\alpha \Pi_{\alpha\dot{\alpha}}(w)}{(z-w)} \\
\bar{d}^2 d_\alpha &= \frac{8(\alpha')^2 \partial \theta_\alpha(w)}{(z-w)^2} + \frac{4\alpha' i d^{\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}}(w)}{(z-w)}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

De posse destes, podemos escrever os geradores satisfazendo em termos dos novos campos:

$$T = \left(-\frac{1}{2} \Pi^{\alpha\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} - d_{\alpha} \partial \theta^{\alpha} - d_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \frac{\alpha'}{2} \partial \rho \partial \rho + \partial^2 \rho \right) + T_c + \frac{1}{2} \partial J_c \quad (2.52)$$

$$G = J_{BRST} = \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}} \exp(i\rho) d^{\alpha} d_{\alpha} + G_c \quad (2.53)$$

$$\bar{G} = b = \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}} \exp(-i\rho) d^{\dot{\alpha}} d_{\dot{\alpha}} + \bar{G}_c \quad (2.54)$$

$$J = bc + \eta\zeta = -i\partial\rho + J_c \quad (2.55)$$

Os geradores $(T_c, J_c, G_c, \bar{G}_c)$ que dependem das coordenadas compactificadas comutam com todos os campos que dependem das coordenadas em quatro dimensões. Desta forma podemos afirmar que: 1. uma supercorda crítica $N=1$ pode ser “vista” como uma supercorda crítica $N=2$ torcendo o setor de fantasmas da teoria. Após este “embedding”, uma redefinição dos campos permite fazer a supercorda RNS ter supersimetria manifesta no espaço-tempo para compactificações a quatro dimensões; 2. a teoria divide-se em uma teoria torcida $N = 2$ com $c = -3$ para os geradores que dependem das coordenadas em quatro dimensões, e uma teoria $N = 2$, $c = 9$ para os geradores que dependem da compactificação. Neste ponto existem dois caminhos a seguir: o primeiro, que é extremamente útil para calcular amplitudes de espalhamento, seria perceber que a teoria torcida é de fato uma representação da corda topológica [13]. Na referência [13] é mostrado como amplitudes de espalhamento podem ser calculadas descrevendo esta teoria como uma teoria topológica $N=4$. Uma discussão detalhada deste método foge completamente do escopo desta tese.

O outro caminho, o qual será seguido aqui, é esquecer que esta teoria veio de uma teoria $N = 1$, distorcer a álgebra redefinindo $T \rightarrow T - \frac{1}{2} \partial J$ e tratar a mesma como uma supercorda crítica $N = 2$. É importante lembrar que 6 é a carga central necessária para termos uma supercorda $N = 2$ crítica. Como não estamos interessados em estados que dependam da compactificação, podemos nos ater apenas à teoria $N = 2$, $c = -3$. A partir de agora não serão feitos mais comentários a respeito da compactificação e trataremos apenas a teoria em 4 dimensões. Mais uma vez, deve-se salientar que isto somente é possível porque os geradores da teoria em quatro dimensões desacoplam totalmente da teoria em 6 dimensões.

Levando em conta também o setor direito, para a supercorda tipo II teremos os férmions dos dois setores com a mesma quiralidade no espaço-tempo. Além dos operadores de supersimetria descritos em (2.50), temos os seguintes geradores:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_\alpha &= \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} \left(\hat{p}_\alpha - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial} x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \hat{\theta}_\alpha \bar{\partial} \left(\bar{\theta}^2 \right) \right) \\
\hat{q}_{\dot{\alpha}} &= \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} \left(\hat{p}_{\dot{\alpha}} - i\bar{\theta}^\alpha \bar{\partial} x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial \left(\bar{\theta} \right)^2 \right),
\end{aligned} \tag{2.56}$$

descritos em termos dos férmions que se movem para a direita. O setor direito é totalmente desacoplado do setor esquerdo. Da mesma forma que antes, podemos definir campos que anticomutam e comutam com estes geradores:

$$\begin{aligned}
\hat{d}_\alpha &= \hat{p}_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial} x_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \bar{\theta}^2 \bar{\partial} \hat{\theta}_\alpha - \frac{1}{4} \hat{\theta}_\alpha \bar{\partial} \left(\bar{\theta} \right)^2 \\
\bar{\Pi}_{\alpha\dot{\alpha}} &= \bar{\partial} x_{\alpha\dot{\alpha}} - \hat{\theta}_\alpha \bar{\partial} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + i \bar{\partial} \hat{\theta}_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

e de posse destes, podemos construir os geradores anti-holomórficos $N = 2$:

$$\begin{aligned}
\hat{G} &= \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}} e^{i\hat{\rho}} \hat{d}^\alpha \hat{d}_\alpha \\
\bar{\hat{G}} &= \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}} e^{-i\hat{\rho}} \hat{d}^{\dot{\alpha}} \hat{d}_{\dot{\alpha}} \\
\hat{T} &= T = \left(-\frac{1}{2} \bar{\Pi}^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Pi}_{\alpha\dot{\alpha}} - \hat{d}_\alpha \bar{\partial} \hat{\theta}^\alpha - \hat{d}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \frac{\alpha'}{2} \bar{\partial} \hat{\rho} \bar{\partial} \hat{\rho} \right)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Resumindo, para a supercorda tipo II teremos dois conjuntos de operadores independentes, holomórficos e anti-holomórficos, tendo assim duas teorias $N = 2$, $c = -3$. Costuma-se usar a notação $N = (2, 2)$, $c = -3$; esta será usada a partir de agora nesta tese. A supercorda tipo II descrita neste formalismo terá supersimetria manifesta $N = 2$ em quatro dimensões, tendo como geradores $N = 2$ os campos $(q_\alpha, q_{\dot{\alpha}}, \hat{q}_\alpha, \hat{q}_{\dot{\alpha}})$, definidos em (2.50), (2.56).

O próximo passo será reescrever a ação (2.41) de uma forma que tornará mais direta a generalização para o super-espaço curvo $N=2$. Usando o supervierbein E_M^A para transformar índices do super-espaço curvo em índices do super-espaço tangente (detalhes da notação no apêndice), o campo Π^a pode ser escrito da forma:

$$\Pi^A = E_M^A \partial Z^M, \quad \bar{\Pi}^A = E_M^A \bar{\partial} Z^M \tag{2.59}$$

sendo que os índices M e A rotulam respectivamente o super-espaço $N = 2$ curvo e plano:

$$\begin{aligned}
M &= (m, \mu_j, \dot{\mu}_j), \\
A &= (a, \alpha_j, \dot{\alpha}_j), \quad j = \pm,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Fazendo contato com a notação anterior, temos

$$\theta^{\alpha+} = \theta^\alpha, \quad \theta^{\alpha-} = \hat{\theta}^\alpha \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \quad (2.61)$$

$$\theta^{\dot{\alpha}+} = \hat{\theta}^{\dot{\alpha}} \quad (2.62)$$

Desta forma Z^A são coordenadas no super-espaço plano $N = 2$ que é dado por: $Z^A \rightarrow (x^a, \theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}, \hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^{\dot{\alpha}})$. Os índices $j = \pm$ são levantados e abaixados usando o tensor anti-simétrico ε_{ij} , desta forma $A_- = A^+$. No próximo capítulo este será identificado como um índice do $SU(2)$.

No super-espaço plano, as únicas componentes diferentes de zero do supervierbein são escritas como:

$$E_m^a = \delta_m^a \quad E_{\mu_j}^a \rightarrow E_{\mu_j}^{\alpha\dot{\alpha}} = i\delta_\mu^\alpha \bar{\theta}_j^{\dot{\alpha}}, \quad (2.63)$$

Com esta definição, percebe-se claramente que a expressão (2.59) coincide com as definições (2.49) e (2.57). Podemos então escrever a ação para a supercorda tipo II acoplada ao super espaço plano $N=2$:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{\alpha'} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \Pi^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Pi}_{\alpha\dot{\alpha}} + d_\alpha \bar{\Pi}^{\alpha+} + d_{\dot{\alpha}} \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}-} + \hat{d}_\alpha \Pi^{\alpha-} \right. \\ & + \hat{d}_{\dot{\alpha}} \Pi^{\dot{\alpha}+} + \frac{1}{2} \bar{\Pi}^A \Pi^B B_{AB} - \frac{\alpha'}{2} \bar{\partial} \rho (\bar{\partial} \rho + a_z) \\ & \left. \frac{\alpha'}{2} \partial \hat{\rho} (\partial \hat{\rho} + \hat{a}_z) \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

sendo que no espaço plano o supercampo B_{AB} tem as únicas componentes diferentes de zero dadas por:

$$\begin{aligned} B_{a\alpha_j} &= iC_{\alpha\beta} \theta_{\alpha j} & B_{\alpha+\beta-} &= \theta_\alpha \hat{\theta}_\beta \\ B_{\alpha+\dot{\beta}+} &= \theta_\alpha \hat{\theta}_{\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Podemos definir um “field strength”* a B_{AB} , definido por $H_{MNP} = \frac{1}{4} \partial_M B_{NP}$. Usando o “vierbein” para transformar os índices do super-espaço plano em índices do super-espaço curvo, temos :

$$H_{ABC} = \frac{1}{4} \nabla_{[A} B_{BA)} - \frac{1}{4} T_{[AB}^D B_{|D|C)} \quad (2.66)$$

* A partir de agora não serão mais colocadas entre chaves, palavras identificando termos técnicos em inglês

onde a derivada covariante ∇_A e a torção $T_{AB}{}^D$ são definidas no apêndice. No super-espaço plano as únicas componentes diferentes de zero de $T_{AB}{}^D$ e H_{ABC} são dadas por

$$\begin{aligned} H_{\alpha+\dot{\beta}-}{}^c &= -i\delta_a^\lambda \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}}, & H_{\alpha-\dot{\beta}+}{}^c &= -i\delta_a^\lambda \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}}, \\ T_{\alpha+\dot{\beta}-}{}^c &= -2i\delta_a^\lambda \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}}, & T_{\alpha-\dot{\beta}+}{}^c &= 2i\delta_a^\lambda \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Devemos notar que os campos que se movem para direita $\hat{d}_\alpha$ e $\hat{d}_{\dot{\alpha}}$, carregam índice $-$ e $+$, dada a definição (2.57). Da mesma forma d_α e $d_{\dot{\alpha}}$ carregam respectivamente índice $-$ e $+$. No próximo capítulo veremos que o modelo sigma terá de fato uma simetria $U(1) \times U(1)$, tendo o setor direito carga frente a um $U(1)$ e o setor esquerdo carga frente ao outro.

A ação descrita anteriormente é a mesma descrita em (2.41), mas agora está explicitamente acoplada ao super-espaço plano $N = 2$. A ação contém uma teoria $N = (2, 2)$, $c = -3$ na folha de mundo, tendo uma álgebra anti-holomórfica e uma álgebra holomórfica dada por

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \\ T(z)G(w) &= \frac{\frac{3}{2}G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{(z-w)}, \\ T(z)\overline{G}(w) &= \frac{\frac{3}{2}\overline{G}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \overline{G}(w)}{(z-w)}, \\ J(z)G(w) &= \frac{G(w)}{(z-w)}, \\ J(z)\overline{G}(w) &= \frac{\overline{G}(w)}{(z-w)}, \\ J(z)J(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^2}, \\ G(z)\overline{G}(w) &= \frac{\frac{2}{3}c}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) + \partial J(w)}{(z-w)}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$T = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} \Pi^{\alpha\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} - d_\alpha \partial \theta^\alpha - d_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \frac{\alpha'}{2} \partial \rho \partial \rho \right) \quad (2.69)$$

$$G = \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}} \exp(i\rho) d^\alpha d_\alpha \quad (2.70)$$

$$\overline{G} = b = \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}} \exp(-i\rho) d^{\dot{\alpha}} d_{\dot{\alpha}} \quad (2.71)$$

$$J = -i\partial\rho. \quad (2.72)$$

Os geradores (2.58) geram o setor anti-holomórfico da estrutura $N = (2, 2)$

$$\begin{aligned} \hat{T}(z) \hat{T}(w) &= \frac{c/2}{(\bar{z} - \bar{w})^4} + \frac{2\hat{T}(w)}{(\bar{z} - \bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}\hat{T}(w)}{(\bar{z} - \bar{w})}, \\ \hat{T}(z) \hat{G}(w) &= \frac{\frac{3}{2}\hat{G}(w)}{(\bar{z} - \bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}\hat{G}(w)}{(\bar{z} - \bar{w})} \dots \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde os pontos significam os demais termos da álgebra. O próximo passo é descrever os operadores de vértice. Devido à supersimetria manifesta no espaço-tempo, este não deve fazer distinção entre os setores Ramond e Neveu-Schwarz, sendo escrito diretamente em termos de supercampos no super-espaço. Da mesma forma, não precisamos nos preocupar com a projeção GSO.

2.2.4 Operadores de vértice.

Como mencionado anteriormente, podemos esquecer que esta teoria veio de uma teoria crítica $N = 1$, e tratar a mesma como uma teoria crítica $N = 2$. Sendo assim, os operadores de vértice serão os operadores de vértice físicos de uma teoria crítica $N=2$. No entanto, é necessário mostrar que a definição da cohomologia BRST coincide. Isto foi feito nas referências [14] e [15]. Podemos mostrar que um operador de vértice físico escrito no formalismo híbrido transforma-se em um operador de vértice físico no formalismo RNS.

Dado um operador de vértice físico $V_{n=2}$ descrito neste formalismo, construído apenas com campos de matéria, então $\int d^2z V_{n=2}$ é invariante sob os geradores $N = 2$. Restringindo a análise aos geradores anti-holomórficos, temos que $[G, \int d^2z V_{n=2}] = 0$ implica em $[Q_{BRST}, \int d^2z V_{RNS}] = 0$, quando lemos esta definição em termos das variáveis RNS. Da mesma forma, $[J, \int d^2z V_{n=2}] = 0$ implica em $[cb + \eta\xi, \int d^2z V_{RNS}] = 0$. Com isto pode-se concluir que em $\int d^2z V_{RNS}$ o campo ζ apenas aparece na combinação $c\xi$. Por último, $[\bar{G}, W_{n=2}] = [b, W_{RNS}] = 0$ implica que c não aparece em $\int d^2z V_{RNS}$ e portanto o modo zero de ξ não aparece. Assim concluímos que V_{RNS} é um operador de vértice físico. A mesma análise é feita para o setor anti-holomórfico.

No formalismo RNS tínhamos um conjunto infinito de operadores de vértice para cada estado físico, cada um em um “picture” diferente. A fixação do “picture” tornava impossível a supersimetria manifesta. Como este formalismo foi construído como uma redefinição dos campos RNS, o “picture” também deve estar presente. No entanto, escrevendo o operador que conta o “picture” em termos das novas variáveis, temos:

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint \left(i\partial\rho - \frac{1}{2}p_\alpha\theta^\alpha + \frac{1}{2}p_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \right), \quad (2.74)$$

onde escrevemos apenas o setor esquerdo. A análise é completamente análoga para o setor direito, visto que são independentes. Devido ao modo zero dos campos θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, este operador claramente não comuta com o operador de supersimetria (2.50). Portanto a fixação do picture também quebraria a supersimetria manifesta. No entanto, se usarmos a carga relativa à corrente $i\partial\rho$ para selecionar um único "picture", a supersimetria é preservada, visto que $\frac{1}{2\pi} \oint i\partial\rho$ comuta com o operador de supersimetria. Na referência [16] é mostrado que é possível restringir todos os campos que independem da compactificação para ter carga ρ zero, selecionando um único operador de vértice para cada estado, de uma forma que preserva manifesta a supersimetria em quatro dimensões.

Da mesma forma que a estrutura da teoria $N = 1$ determina a forma dos operadores de vértice, a estrutura $N = 2$ determinará os operadores de vértice físicos. Por exemplo, para o caso bosônico, os operadores de vértice físicos (2.11) podem ser escritos de forma alternativa como $V(0) = [G, W(0)]$, sendo W um campo primário com peso conforme $\frac{1}{2}$ e V com peso conforme 1 [17]. Os operadores de vértice físicos para a teoria crítica $N = 2$ são construídos com um campo bosônico primário $N = 2$ ϕ , com peso conforme e carga $U(1)$ zero. Isto significa que ϕ não tem pólos duplos com os geradores $T, G, \bar{G}$ e não tem pólos simples com a corrente J . Na forma integrada, o operador de vértice físico para a supercorda aberta (onde temos apenas um setor) é escrito como:

$$V = \int d^2z \{ \bar{G}, [G, \Phi] \}. \quad (2.75)$$

Vamos nos ater aos campos não massivos que não dependem da compactificação. Para a supercorda tipo II devemos levar em conta os geradores anti-holomórficos de forma análoga aos operadores $T, G, \bar{G}$. O campo Φ deve representar os estados físicos não massivos da teoria. Como a teoria tem supersimetria manifesta, ϕ será um supercampo, tendo como componentes os estados físicos não massivos fermiônicos e bosônicos da supercorda em questão. Desta forma não existe diferença entre campos oriundos do setor Ramond e NS. Para a supercorda tipo II, os estados físicos não massivos são descritos por um supercampo real $U(x^\alpha, \theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}, \hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^{\dot{\alpha}})$ [18]. Um campo análogo ao campo U na corda bosônica fechada conteria o gráviton sem traço, representando a gravitação conforme. Em conjunto com este teríamos os campos não massivos de matéria, contendo o axion (tensor anti-simétrico de "rank" 2) e um escalar. O dilaton não acopla classicamente na ação e não fará parte de U . Para a supercorda tipo II o supercampo $U(x^\alpha, \theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}, \hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^{\dot{\alpha}})$ representará uma versão

supersimétrica $N = 2$ da corda bosônica fechada em quatro dimensões. Teremos um tensor simétrico sem traço, representando o graviton conforme, dois campos de Rarita-Schwinger sem traço, representando os gravitinos da supergravidade $N = 2$ conforme e campos de gauge $U(1)$ e $SU(2)$. Estes campos representam o setor relativo à supergravidade do espectro da supercorda tipo II. Somando-se a estes, temos ainda campos de matéria não massivos, representados por um campo anti-simétrico, um triplete do $SU(2)$ e dois férmions. No próximo capítulo o super campo U será expandido em componentes e estes campos serão descritos com mais detalhes. Por hora, é importante ter em mente que somente devido à supersimetria manifesta, os operadores de vértice são descritos por supercampos, tratando da mesma forma férmions e bósons.

O operador de vértice tipo II é escrito de forma análoga a (2.75) para a estrutura $N = (2, 2)$:

$$V = \int d^2z \{ \widehat{G}, [\widehat{G} \{ \overline{G}, [G, U] \}] \} \quad (2.76)$$

O supercampo U é um campo físico primário $N = (2, 2)$. As condições de campo físico podem ser mais facilmente visualizadas, calculando o OPE dos geradores $N = (2, 2)$ com U . Para o setor holomórfico, os OPE's de $T, G, \overline{G}$ com U tem a forma:

$$\begin{aligned} T(z) U(w) &= \frac{-\frac{1}{2} \alpha' \nabla^{\alpha\dot{\alpha}} \nabla_{\alpha\dot{\alpha}} U(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial U(w)}{(z-w)} \\ G(z) U(w) &= \frac{1}{i\sqrt{8\alpha'}} e^{i\rho} \left(\frac{-\frac{1}{2} \alpha' \nabla^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} U(w)}{(z-w)^2} + \frac{d^{\alpha} \nabla_{\alpha+} U(w)}{(z-w)} \right) \\ \overline{G}(z) U(w) &= \frac{1}{i\sqrt{8\alpha'}} e^{-i\rho} \left(\frac{-\frac{1}{2} \alpha' \nabla^{\dot{\alpha}-} \nabla_{\dot{\alpha}-} U(w)}{(z-w)^2} + \frac{d^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}-} U(w)}{(z-w)} \right), \end{aligned} \quad (2.77)$$

sendo que as derivadas covariantes fermiônicas são definidas no super-espaço plano como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} &= \nabla_{\alpha+} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, & \overline{\nabla}_{\alpha} &= \nabla_{\dot{\alpha}-} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{\alpha}}} + i \theta^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \\ \widehat{\nabla}_{\alpha} &= \nabla_{\alpha-} = \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}^{\alpha}} + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \bar{\hat{\theta}}^{\dot{\alpha}}, & \widehat{\overline{\nabla}}_{\dot{\alpha}} &= \nabla_{\dot{\alpha}+} = \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i \hat{\theta}^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \end{aligned}$$

Para o setor anti-holomórfico $(\widehat{T}, \widehat{G}, \widehat{\overline{G}})$ a análise é análoga, bastando fazer as seguintes substituições na expressão acima:

$$\begin{aligned} z, w, \partial &\rightarrow \bar{z}, \bar{w}, \bar{\partial} & \alpha_+, \dot{\alpha}_- &\rightarrow \alpha_-, \dot{\alpha}_+ \\ d_{\alpha}, d_{\dot{\alpha}} &\rightarrow \hat{d}_{\alpha}, \hat{d}_{\dot{\alpha}} & \rho &\rightarrow \hat{\rho} \end{aligned} \quad (2.78)$$

As condições para U ser um campo primário $N = (2, 2)$ com peso conforme zero então implicam que:

$$\begin{aligned}\nabla^{\alpha\dot{\alpha}}\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}U(w) &= 0 \\ \nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}U(w) &= \overline{\nabla}^{\dot{\alpha}}\overline{\nabla}_{\dot{\alpha}}U(w) = 0 \\ \widehat{\nabla}^{\alpha}\widehat{\nabla}_{\alpha}U(w) &= \widehat{\overline{\nabla}}^{\dot{\alpha}}\widehat{\overline{\nabla}}_{\dot{\alpha}}U(w) = 0\end{aligned}\tag{2.79}$$

Expandindo U em componentes, estas condições implicam nas condições usuais de polarização e nas equações de movimento. O operador de vértice (2.76) ainda está sujeito a uma invariância de gauge. Esta pode ser vista mais facilmente expandindo os comutadores em (2.76). Isto também será útil para construir o modelo sigma acoplado ao super-espaço curvo. Usando a notação $\nabla^{\alpha+}\nabla_{\alpha+} = \nabla^2$, $\nabla^{\dot{\alpha}-}\nabla_{\dot{\alpha}-} = \overline{\nabla}^2$, $\nabla^{\alpha-}\nabla_{\alpha-} = \widehat{\nabla}^2$ e $\nabla^{\dot{\alpha}+}\nabla_{\dot{\alpha}+} = \widehat{\overline{\nabla}}^2$, a equação (2.76) pode ser escrita como [1]:

$$\begin{aligned}V &= \int d^2z \{ \widehat{G}, [\widehat{G} \{ \overline{G}, [G, U] \}] \} = \\ &\int d^2z [(\widehat{d}^{\dot{\alpha}}\widehat{\nabla}^2\widehat{\nabla}_{\dot{\alpha}} - \widehat{d}^{\alpha}\widehat{\nabla}_{\alpha}\widehat{\nabla}^2 + \Pi^{\dot{\alpha}+}\widehat{\nabla}_{\dot{\alpha}} - \Pi^{\alpha-}\widehat{\nabla}_{\alpha} - \frac{i}{2}\Pi^{\alpha\dot{\alpha}} [\widehat{\nabla}_{\alpha}, \widehat{\nabla}_{\dot{\alpha}}]) \\ &\times (d^{\dot{\alpha}}\nabla^2) \nabla_{\dot{\alpha}} - d^{\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla^2 + \overline{\Pi}^{\dot{\alpha}-}\nabla_{\dot{\alpha}} - \overline{\Pi}^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \frac{i}{2}\overline{\Pi}^{\alpha\dot{\alpha}} [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\dot{\alpha}}])] U.\end{aligned}\tag{2.80}$$

Este operador de vértice é invariante frente à transformação de gauge:

$$\delta U = \nabla^2\Lambda + \overline{\nabla}^2\overline{\Lambda} + \widehat{\nabla}^2\Lambda + \widehat{\overline{\nabla}}^2\overline{\Lambda}.\tag{2.81}$$

Fixando esta invariância, as componentes restantes em U representam o conteúdo físico da supergravidade tipo II descrito anteriormente. O dilaton não estará representado em U e seu papel será descrito posteriormente.

Neste capítulo foi mostrado como é possível ter uma descrição da supercorda com supersimetria manifesta. A teoria $N = 1$ foi descrita em termos de uma teoria crítica $N = 2$. Embora na descrição de Green Schwarz a supersimetria no espaço tempo é manifesta, a simetria kapa impede a quantização covariante da teoria. A estrutura $N = 2$ não possui simetria kapa e a teoria pode ser quantizada covariantemente. Outra vantagem importante em relação à formulação de Green Schwarz é que para calcular uma função beta perturbativamente, o modelo sigma em questão deve ser uma teoria de campos livre em duas dimensões em algum limite, por exemplo $\alpha' \rightarrow 0$. Desta forma, podemos definir os propagadores da teoria e fazer teoria de perturbação usual. Para o modelo sigma descrito na formulação de Green-Schwarz este limite

não existe [19]. Embora tenha sido feito grande esforço para contornar tal problema [20], ainda não existe na literatura um procedimento consistente para calcular a função beta do modelo sigma, escrito em termos da formulação de Green-Schwarz. Como já mencionado, o único cálculo de função beta em um modelo sigma para supercorda, com supersimetria manifesta, foi feito por De Boer e Skenderis para a supercorda heterótica, usando o formalismo híbrido descrito aqui[2].

Capítulo 3

Modelo sigma para supercorda tipo II

Neste capítulo será escrito o modelo sigma para a supercorda tipo II acoplado ao super espaço curvo $N = 2$. Para isto será necessário acoplar o modelo sigma anterior (espaço plano) a um conjunto de campos de fundo, representando os estados não massivos da supercorda tipo II. Estes são representados pelos operadores de vértice.

O modelo sigma será dividido em duas partes. A primeira parte não conterá o dilaton, pois o mesmo não acopla classicamente como no caso da corda bosônica. A segunda parte será a versão supersimétrica do acoplamento do dilaton com a curvatura. Neste caso o dilaton acoplará com uma supercurvatura $N=(2,2)$. Como veremos, o dilaton não será um campo físico e sim um compensador. A forma deste compensador será limitada pelas simetrias da folha mundo.

3.1 Supergravidade no super-espaço.

Antes de descrever o modelo sigma acoplado ao super-espaço, será descrito de forma breve, alguns elementos da supergravidade no super-espaço. Os mesmos serão úteis para os cálculos que seguirão.

Para descrever a supergravidade no super espaço, podemos “supersimetrizar” a gravitação de Einstein, gerando uma supergravidade de Poincaré. Por outro lado podemos fazer o mesmo processo em relação à gravitação de Weyl, gerando supergravidade conforme. Existem diversas facilidades em estudar supergravidade conforme no super-espaço. Dentre elas, podemos destacar o fato da álgebra fechar sem a necessidade de campos auxiliares (caso $N = 1$, quatro dimensões). Somando-se a isto, o maior número de simetrias torna mais fácil descrever ações e diminui o número de graus de liberdade físicos. Este fato foi explorado em grande escala nos anos dourados da supergravidade, podendo ser estudado em artigos clássicos [?], publicados entre 1978 e 1984. Devido a isto, é conveniente estudar supergravidade de Poincaré, como um limite da supergravidade conforme. Isto pode ser feito fixando

as simetrias adicionais. De forma análoga, podemos fazer com que uma dada ação para supergravidade de Poincaré possua novas simetrias somando potências de supercampos compensadores, que transformam-se de forma a cancelar a transformação da ação original. No final, os campos compensadores podem ser fixos escolhendo um gauge apropriado.

A passagem da supergravidade conforme para Poincaré acontece de forma natural em supercordas. Neste caso, a teoria seleciona um gauge diferente do gauge usado em supergravidade, como será mostrado posteriormente.

O grupo de gauge da gravitação conforme permite, além da supersimetria usual, outra simetria local fermiônica. Esta está relacionada com os boosts conformes, da mesma forma que os geradores de supersimetria relacionam-se com os operadores de translação. O campo de gauge para esta simetria, assim como os campos referentes aos boosts conformes e dilatações, pode ser eliminado: por vínculos impostos às torções e curvaturas[21], ou por fixação de gauge [22] . Para o caso $N = 1$ em quatro dimensões, o multiplete da supergravidade conforme contém os campos de gauge referentes a transformações gerais de coordenadas, supersimetria local e uma transformação $U(1)$ local. O mesmo pode ser descrito pelo supercampo[22]:

$$H^m = \theta \sigma^c \theta e_c^m + i \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \Psi_\alpha^m - i \theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}^m - i \theta^2 \bar{\theta}^2 A^m, \quad (3.1)$$

onde identificamos o “vierbein” e_a^m , o gravitino Ψ_α^m e um campo de gauge $U(1)$, A^m . Nenhum destes campos são auxiliares. Na expressão (3.1) foi fixado o gauge de Wess-Zumino, eliminando os campos que seriam correspondentes aos campos de gauge dos boosts conforme, dilatações, e como discutido anteriormente, uma simetria fermiônica relacionando e_a^m e Ψ_α^m . A conexão de spin, que corresponde às transformações de Lorentz locais, também não aparece, pois não é independente do “vierbein”.

Embora a analogia não seja direta, o supercampo H^m pode ser pensado com um objeto análogo à métrica e o conjunto de transformações análogas às transformações gerais de coordenadas, são transformações holomórficas e anti-holomórficas no super espaço onde H^m é definido.

Fixando as simetrias, o conteúdo físico do multiplete da supergravidade conforme, ou multiplete de Weyl, possui 8 graus de liberdade bosônicos e 8 fermiônicos fora da camada de massa. Em contraste, a supergravidade de Poincaré possui 12+12 graus de liberdade. Será mostrado posteriormente que esta diferença pode ser dada por um campo compensador.

Para a supergravidade conforme $N = 2$, temos além das simetrias anteriores, uma simetria $SU(2)$. O multipletto de Weyl é dado pelos campos: $(e_a^m, \Psi_\alpha^i{}^m, A^m, A_m^{ij}, T_{mn}, \chi_\alpha^i, D)$ sendo que $i = (+, -)$ é o índice do $SU(2)$. Neste caso, além do “vierbein”, dos dois gravitinos $\Psi_\alpha^i{}^m$, do campo de gauge $U(1)$ e dos campos de gauge do $SU(2)$ (A_m^{ij}), temos os campos de matéria T_{mn}, D, χ_α^i , representando um tensor simétrico T_{mn} , um escalar D e os fermions χ_α^i . Como no caso $N = 1$, temos uma outra simetria fermiônica independente da supersimetria usual. O campo de gauge desta supersimetria, em conjunto com os campos de gauge referentes aos boosts conformes, transformações de Lorentz locais e dilatações não são independentes [23]. Neste caso, os vínculos relacionando estes campos afetam a algebra superconforme e é necessário somar os campos de matéria para-preservá-la[24]. Desta forma a teoria contém 24 graus de liberdade, enquanto que a supergravidade $N = 2$ de Poincaré mínima tem 40 graus de liberdade.

Supercampos como H^m são chamados pré-potenciais. Estes contêm somente os graus de liberdade físicos do multipletto que queremos descrever. Para a super-corda tipo II é possível reunir todos os estados do espectro não massivo no pré-potencial $U(x^a, \theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}, \hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^{\dot{\alpha}})$ descrito em (2.76). Após fixar a invariância (2.81), o pré-potencial $U(x^a, \theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}, \hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^{\dot{\alpha}})$ é expandido em componentes na forma [18],[1]:

$$\begin{aligned}
U = & \left(h_{mn} + b_{mn} + l^{+-} n_{mn} \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \hat{\theta}^\alpha \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} \\
& + \left(\hat{\chi}_{m\beta} + \xi^{\dot{\beta}} \sigma_{m\beta\dot{\beta}} \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \hat{\theta}^\beta \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + \left(\chi_{m\alpha} + \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \sigma_{m\alpha\dot{\alpha}} \right) \sigma_{\beta\dot{\beta}}^m \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \hat{\theta}^\beta \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} + cc + \\
& T_{mn} \left(\sigma_{\alpha\beta}^{mn} \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \hat{\theta}^\beta \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{mn} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left(\bar{\theta} \right)^2 \left(\hat{\theta} \right)^2 \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} \right) + \\
& \left(A_m^{++} + \partial_m l^{++} \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \left(\hat{\theta} \right)^2 \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \left(A_m^{--} + \partial_m l^{--} \right) \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} \hat{\theta}^\alpha \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + \\
& y \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \hat{\theta}^\beta \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + \bar{y} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left(\bar{\theta} \right)^2 \left(\hat{\theta} \right)^2 \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} + \\
& \left(A_m + A_m^{+-} \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left(\hat{\theta} \right)^2 \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + \left(A_m - A_m^{+-} \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \hat{\theta}^\alpha \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \\
& \Psi_\alpha \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \left(\hat{\theta} \right)^2 \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + \hat{\Psi}_\alpha \theta^\alpha \left(\bar{\theta} \right)^2 \hat{\theta}^\alpha \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2 + cc + \\
& D \left(\theta \right)^2 \left(\bar{\theta} \right)^2 \left(\hat{\theta} \right)^2 \left(\hat{\bar{\theta}} \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Na expressão acima cc significa complexo conjugado da linha em questão. As componentes de U representando o multipletto de supergravidade $N = 2$ são dadas pelo gráviton conforme h_{mn} , sendo h_{mn} sem traço, pelos gravitinos conforme $\chi_{m\alpha}$ e $\hat{\chi}_{m\alpha}$ (lembrando a notação anterior: $\Psi_\alpha^i \rightarrow (\Psi_\alpha^m, \hat{\Psi}_\alpha^m)$), pelos campos de gauge $U(1)$ e $SU(2)$, A_m e A_m^u . Temos ainda no multipletto de supergravidade os campos auxiliares: T_{mn} , D , Ψ_α e $\hat{\Psi}_\alpha$. Estes campos representam o multipletto de Weyl descrito anteriormente. Os estados não massivos de matéria do espectro da supercorda tipo II representam um multipletto tensorial, sendo l^{ij} um triplete do $SU(2)$, b_{mn} o axion (tensor antisimétrico), ζ^α e $\hat{\zeta}^\alpha$ são os dilatinos e y um escalar complexo. As condições de estado físico determinadas por (2.79), determinam as equações de movimento para estes campos. Lembramos que estas condições são obtidas usando os OPE's de campo livre, visto que o modelo sigma em (2.64) está acoplado ao super-espaço plano.

Além dos pré-potenciais, podemos descrever os campos físicos da supergravidade em termos de objetos geométricos do super-espaço curvo. Esta descrição é mais "intuitiva", ou, com uma analogia mais direta com a gravitação. Também é mais fácil para escrever ações. O supervierbein E_A^M , assim como as superconexões conterão os campos de gauge da supergravidade. Os respectivos field strengths dos campos de gauge são definidos pelos comutadores graduados (definidos no apêndice). Por exemplo, para o caso $N = 1$:

$$[\nabla_C, \nabla_A] = T_{CA}^B \nabla_B + R_{CAE}^D M_D^E + f_{CA} Y \quad (3.3)$$

sendo:

$$\nabla_A = E_A^M \partial_M + \omega_{AC}^D M_D^C + A_A Y \quad (3.4)$$

a derivada covariante, ω_{AC}^D a conexão de spin, A_A a conexão $U(1)$. Os geradores de Lorentz e $U(1)$ são, respectivamente; M_D^C e Y . As supertorções T_{CA}^B e supercurvaturas R_{CAE}^D , assim como a ação dos geradores são definidos no apêndice. Temos ainda a supercurvatura $U(1)$; f_{CA} . Para a supergravidade tipo II, veremos que o modelo sigma quebrará o $SU(2)$, deixando uma simetria residual $U(1)$, e teremos uma versão $U(1) \times U(1)$ desta álgebra.

Embora seja mais intuitivo descrever a supergravidade com objetos com uma interpretação geométrica clara, teremos mais graus de liberdade que o necessário para descrever os graus contidos nos pré-potenciais. Assim sendo, devemos impor vínculos nas curvaturas e torções, de forma a eliminar os graus de liberdade espúrios introduzidos. Este procedimento é análogo a impor o vínculo de torção zero, quando descrevemos a gravitação usando o "vierbein". No super-espaço, temos algumas

componentes da torção diferentes de zero já no espaço plano (supersimetria global). Desta forma, deve-se ter cuidado ao impor vínculos à torção, visto que não podemos colocar todas as componentes da torção igual zero, o que excluiria o super- espaço plano como solução.

Em geral, em supergravidade estes vínculos são impostos de forma ad hoc, porém sistematicamente [25].

Os vínculos podem ser separados em três grandes classes:

1. Vínculos que preservam a representação.

Estes vínculos são obtidos impondo que certas representações de supersimetria global têm extensões naturais para o caso local.

2. Vínculos convencionais.

Estes vínculos são obtidos redefinindo o vierbein e as conexões da teoria. Se ω_{AB}^C é uma conexão, podemos sempre fazer a redefinição $\omega_{AB}^C \rightarrow \omega_{AB}^C + K_{AB}^C$, onde K_{AB}^C tem as mesmas propriedades algébricas de ω_{AB}^C . Em geral, estes vínculos permitem escrever derivadas covariantes vetoriais em termos de espinoriais. Da mesma forma, permite escrever componentes vetoriais do vierbein em termos de espinoriais, preservando uma propriedade importante do espaço plano.

3. Vínculos conformes.

Como discutido anteriormente, para construir ações para a supergravidade de Poincaré no super-espaço é mais fácil introduzir campos compensadores que, para o caso $N = 2$, tornam a teoria invariante por escala, $U(1)$ e $SU(2)$. Os vínculos conformes surgem quando quebramos a invariância conforme.

A descrição em termos curvaturas e torções no super-espaço facilita enormemente a construção de ações e resolvendo os vínculos, podemos escrever a teoria em termos de objetos não vinculados. Os vínculos convencionais são arbitrários, pois a teoria não depende das conexões. Os vínculos do tipo 1 tornam possível o acoplamento com a matétia, no sentido em que podemos descrever a matéria pelos mesmos supercampos do espaço plano. Já os vínculos conformes, definem o tipo de supergravidade de Poincaré que obteremos a partir da supergravidade conforme.

Fixando os vínculos, podemos resolver identidades de Bianchi e escrever as torções e curvaturas em termos de componentes irreduzíveis, em relação ao $SL(2, C)$. Usando matrizes de pauli para converter vetores em bi-espinores, para o caso conforme $N = 1$, temos [26],[28]

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a T_a^{\dot{\alpha},\alpha} &\rightarrow T_{\alpha\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha},\alpha} = 4iR, \\ \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a F_a^{\dot{\alpha}} &\rightarrow F_{\alpha\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} = 2iW_\alpha \\ \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a T_{a\beta}^{\beta} &\rightarrow iT_{\alpha\dot{\alpha},\beta}^{\beta} = G_{\alpha\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a R^{\dot{\alpha}}_{a\beta\gamma} \rightarrow R^{\dot{\alpha}}_{\alpha\dot{\alpha},\beta\gamma}, \quad W_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{12} R^{\dot{\alpha}}_{(\alpha\dot{\alpha},\beta\gamma)}. \quad (3.5)$$

as vírgulas são usadas acima apenas para não confundir os índices, quando escrevemos vetores em termos de bi-espinores. As identidades de Bianchi também implicam as seguintes condições sobre os supercampos(3.5):

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\alpha}} R &= \nabla_{\dot{\alpha}} W_{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}} W_{\alpha\beta\gamma} = 0 \\ \nabla^{\alpha} W_{\alpha} + \nabla^{\dot{\alpha}} W_{\dot{\alpha}} &= 0, \quad \nabla^{\dot{\alpha}} G_{\alpha\dot{\alpha}} = \nabla_{\alpha} R + \frac{i}{3} W_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Com estas identidades temos o conteúdo físico irreduzível da supergravidade conforme $N = 1$, representando as curvaturas associadas ao gráviton, gravitino e campo de gauge $U(1)$.

Os campos de matéria do espectro não massivo da supercorda, podem ser representados por uma 3-forma H_{ABC} , definida em (2.66) [27]. Para a supercorda heterótica, o mesmo conterá o conteúdo físico de um super campo tensorial, representando o tensor anti-simétrico B_{ab} , um escalar l (traço da métrica) e o “dilatino” ζ^{α} .

O supercampo H_{ABC} também está sujeito às identidades de Bianchi. Para a supercorda heterótica podemos escrever H_{ABC} em termos de um supercampo linear $L[?]$, satisfazendo as identidades:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\dot{\alpha}b} &= iC_{\alpha\beta}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L \\ (\nabla^2 + R)L &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para o caso $N = 2$ o procedimento é análogo; podemos resolver identidades e Bianchi no super-espaço $N = 2$ e descrever a supergravidade em termos de field strengths irreduzíveis [25]:

$$\begin{aligned} T_{a\beta i}{}^{\dot{\gamma}j} &\rightarrow T_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\gamma}}{}^{ij} = iC_{\alpha\beta}M_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}^{ij} + iC_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}N_{\alpha\beta}^{ij} + iC_{\alpha\beta}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}S^{jk} \\ T_{a\beta i}{}^{\gamma j} &\rightarrow T_{\alpha\dot{\alpha},\beta\gamma}{}^i = -2iC_{\alpha\beta}G_{\beta\dot{\alpha}}^i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O supercampo $M_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}^{ij}$ é simétrico nos índices espinoriais e anti-simétrico nos índices do $SU(2)$. O supercampo $G_{\beta\dot{\alpha}}^i$ é hermitiano. O super campo $N_{\alpha\beta}^{ij}$ é simétrico em α, β e anti-simétrico em ij , enquanto que S^{jk} é simétrico. Estes campos representam o conteúdo físico da supergravidade $N = 2$ conforme em quatro dimensões, representando as curvaturas associadas ao gráviton, aos dois gravitinos e aos campos

de gauge $U(1)$ e $SU(2)$. Na supercorda tipo II mostraremos que o modelo sigma quebrará o $SU(2)$, de forma que teremos apenas uma simetria $U(1) \times U(1)$. Neste caso, não teremos uma estrutura como a descrita em (3.8), tendo o $SU(2)$ manifesto. De fato, os cálculos serão equivalentes a ter uma supergravidade com dois tipos de espinores: um relacionado com os férmions que se movem para a direita e outro com os férmions que se movem para a esquerda na folha mundo.

Campos de matéria, em particular os campos não massivos de matéria do espectro tipo II, também podem ser descritos no super-espaço por um supercampo tensorial H_{ABC} (“hypertensorial”) descrito em (2.66). Identidades de Bianchi relacionam estes supercampos com um multiplete linear L_{ij} , satisfazendo as identidades [25]:

$$\begin{aligned} H_{\alpha_i \beta_j}{}^c &= -i \delta_a^\lambda \delta_\beta^\lambda L_{ij} \\ \nabla_{\alpha(k} L_{ij)} &= \nabla_{\dot{\alpha}(k} L_{ij)} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

O supercampo linear contém $8 + 8$ componentes, representando os campos :

$$L_{ij} \rightarrow (l_{ij}, b_{ab}, \xi^{\alpha_i}, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}_i}, y) \quad (3.10)$$

onde l_{ij} é um tripleto do $SU(2)$, b_{ab} um campo anti-simétrico (vinculado, com 3 componentes) [23], ξ^{α_i} são férmions e y um campo auxiliar complexo.

Devemos notar que as componentes L_{--} e L_{++} satisfazem as condições de twist quiralidade e anti-twist quiralidade, definidas por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha_-} L_{--} &= \nabla_{\dot{\alpha}_-} L_{--} = 0 \\ \nabla_{\alpha_+} L_{++} &= \nabla_{\dot{\alpha}_+} L_{++} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tanto o supercampo linear L como o supercampo L_{ij} para o caso $N = 2$, podem ser usados como compensadores para supergravidade $N = 1$ e $N = 2$. Antes de discutir a aplicação destes campos como compensadores será feita uma revisão sobre este tópico.

3.1.1 Compensadores.

Compensadores são campos que tornam possível adicionar determinadas simetrias, as quais não estão presentes na teoria original. Este procedimento torna mais fácil a construção de ações no super-espaço. No caso da supergravidade de Poincaré $N = 2$, podemos fazer com que a teoria tenha invariância local por escala, $U(1)$ e $SU(2)$. No final podemos fixar um gauge e remover estas invariâncias e o compensador.

O caso mais simples do uso de um compensador é a teoria de Proca:

$$L_{proca} = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} m (A_\mu)^2. \quad (3.12)$$

Esta teoria não tem invariância de gauge $U(1)$. No entanto, redefinindo o campo vetorial:

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{m} \partial_\mu \phi \quad (3.13)$$

e substituindo em L_{proca} , a teoria tem agora a invariância de gauge

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \lambda \\ \delta \phi &= m \lambda. \end{aligned} \quad (3.14)$$

O campo ϕ é o compensador e pode ser removido escolhendo o gauge $\phi = 1$. Três pontos importantes devem ser destacados no procedimento acima: primeiramente, contando os graus de liberdade, é fácil ver que a diferença entre os graus de liberdade físicos da teoria de gauge, em relação à teoria de Proca, é justamente dada por um escalar. Em segundo lugar, o campo compensador aparece através de uma transformação de gauge particular de A_μ . Como consequência, se a teoria original tivesse tal invariância, o campo ϕ não apareceria. Por último, o termo cinético para o escalar ϕ terá um sinal negativo, identificando que este não é um campo físico.

Para a gravitação o procedimento é análogo. A ação de Einstein Hilbert, $\int d^4x e^{-1} R$, não possui invariância por escala:

$$\delta e_a^m = \lambda e_a^m \quad (3.15)$$

No entanto, podemos fazer uma transformação de escala particular em e_a^m com um campo ϕ , e levar a ação na forma [28]:

$$A \rightarrow \frac{1}{2} \int d^4x e^{-1} \phi (\square + R) \phi, \quad (3.16)$$

que agora possui invariância por transformação de escala. A transformação de $\phi \square \phi$ compensa a transformação de e^{-1} e R . Contando os graus de liberdade, o “vierbein” na teoria com transformação de escala possui 5 graus de liberdade, enquanto que na ação original possui 6. A diferença é justamente dada por ϕ . Como ϕ aparece na teoria através de uma transformação de escala, sua presença mostra que a teoria original não possui tal invariância. Alternativamente, podemos interpretar a ação(3.16) como gravitação conforme acoplada a um campo escalar, tendo então 6

graus de liberdade propagando. Esta interpretação será útil para entender o mesmo procedimento na supergravidade.

Quando construímos ações efetivas para a corda bosônica, também fazemos uso de um compensador: o dilaton. Analisando os operadores de vértice da corda bosônica, incluindo fantasmas e anti-fantasmas, temos o produto direto de dois campos vetoriais, dando um tensor sem traço (gráviton conforme), o traço deste tensor (escalar físico) e uma parte anti-simétrica (o axion). Os operadores de vértice para o dilaton, que é definido como o campo que acopla com a curvatura, é construído usando os fantasmas, este não será um campo físico. Resumindo, além dos campos tensoriais, temos dois escalares: um é um campo físico e o outro é um compensador para transformações de escala. Embora na gravitação usual o compensador é fixo por uma escolha de gauge, em teoria de cordas costuma-se usar outro gauge, onde a matéria é fixa e não o compensador. Por exemplo, separando o traço da métrica através de um reescalamento $g^{mn} \rightarrow l^2 g^{mn}$, a ação de baixa energia para a corda bosônica, sem levar em conta a contribuição do axion, é escrita da forma:

$$S = \int d^{26} \sqrt{-g} \left(\Phi^2 l^2 R + 25 \Phi^2 (\nabla l)^2 - (\Phi^{-1} \nabla \Phi^2 l)^2 \right) \quad (3.17)$$

sendo

$$\Phi = e^{-\phi}, \quad (3.18)$$

e ϕ o dilaton. Como comentado antes, esta teoria tem dois escalares e possui invariância por escala. Em geral, a invariância de escala é quebrada fixando Φ . No entanto, podemos fixar a invariância de escala fixando l . O gauge $l = 1$ é conhecido como gauge de corda. Analisando a teoria neste gauge, percebemos que Φ tem um termo cinético negativo, identificando o dilaton como o compensador.

Voltamos agora para a supergravidade. Queremos uma versão supersimétrica do procedimento usado na gravitação. Ou seja, queremos um supercampo que satisfaça as seguintes condições: seja uma representação da supergravidade conforme, de forma que possa ser fixado por uma escolha de gauge simples e, possua justamente a diferença do número dos graus de liberdade entre supergravidade de Poincaré e conforme. Não existe um único supercampo que satisfaça estas condições. Por este motivo, compensadores são de extrema importância para supergravidade. Para cada compensador, temos uma supergravidade de Poincaré fora da camada de massa diferente. Para o caso $N = 1$, existem três supercampos que podem ser acoplados à supergravidade conforme, um supercampo quiral, um supercampo linear e um supercampo complexo linear[28]. Os supercampos estão sujeitos a vínculos, como os dados em (3.7). Desta forma, a fixação de gauge está amarrada a vínculos sobre as curvaturas e torções. Por exemplo, usando o super campo quiral como compensador

("old minimal") e fixando o gauge $\Phi = 1$, através do vínculo $\nabla_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ temos $W_{\dot{\alpha}} = 0$. Identificando que quebramos a invariância por escala e $U(1)$. Usando o supercampo linear, teremos vínculos diferentes. Fixando $L = 1$, pela equação (3.7), temos $R = 0$. O raciocínio segue, resolvendo os vínculos em termos de objetos não vinculados (pré-potenciais) e assim tendo descrições diferentes para cada conjunto de vínculos e compensadores.

Para a supergravidade $N = 2$ a diferença entre Poincaré e conforme é de $16+16$ graus de liberdade. Neste caso usa-se dois supercampos como compensadores, cada um com $8+8$ graus de liberdade. Na referência [23] o multiplete de Weyl é acoplado a um supercampo vetorial, gerando uma representação mínima com $32+32$ graus de liberdade. Para completar os $8+8$ graus de liberdade restantes, existem 3 possibilidades como para o caso $N = 1$. Uma é dada por um supercampo linear L_{ij} como em (3.9). As outras duas são dadas por um supercampo escalar e um supercampo não linear.

Para a supercorda, temos matéria acoplada à supergravidade e não apenas compensadores. Como na corda bosônica a teoria faz naturalmente uso de compensadores, que é o dilaton. Como mostrado explicitamente por Jan de Boer e Kostas Skenderis usando o formalismo híbrido para a supercorda heterótica, a consistência do modelo sigma seleciona um gauge particular, onde a matéria é fixa e não o compensador. O mesmo acontece com a corda bosônica, quando fixamos l em (3.17). Mostraremos no próximo capítulo que o mesmo acontece para a supergravidade tipo II. Em particular, mostraremos neste capítulo que a supersimetria da folha mundo já seleciona o tipo de compensador que será o dilaton. Selecionando assim, o tipo de supergravidade $N = 2$ que teremos fora da camada de massa.

3.2 Termo clássico.

O modelo sigma acoplado ao espaço curvo é escrito tendo em mente a ação da supercorda tipo II e a forma dos operadores de vértice. Tendo em mente o fato que cordas é uma teoria de gravitação quântica, descrever a corda em um espaço tempo curvo, significa descrever uma corda propagando em um espaço onde temos estados coerentes de grávitons. Como grávitons são estados da corda, isto implica em descrever a corda em um estado coerente de cordas. Neste ponto não deveríamos ter apenas grávitons, mas todos os estados da corda. Como estamos interessados na ação de baixa energia, os estados massivos serão integrados e teremos apenas a contribuição dos estados não massivos da teoria.

Estados são descritos usando operadores de vértice; estes devem então estar presentes na ação, identificando os campos de fundo. De forma geral, pode-se mostrar

que podemos escrever ações em determinados espaços exponenciando os determinados operadores de vértice [29]. Por exemplo, com os operadores de vértice para os estados não massivos da corda bosônica fechada, temos a ação para este modelo sigma[29] :

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left\{ \left(g^{ab} G_{\mu\nu}(X) + \varepsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X) \right) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R\Phi(X) \right\}. \quad (3.19)$$

Onde $B_{\mu\nu}(X)$ é um tensor antissimétrico $\Phi(X)$ o dilaton, g^{ab} a métrica na folha mundo e $G_{\mu\nu}(X)$ a métrica no espaço-tempo. Neste modelo sigma percebemos claramente que o dilaton não acopla classicamente na ação. Expandindo a métrica em torno do espaço plano, recuperamos (em primeira ordem) os respectivos operadores de vértice para a corda bosônica fechada. Esta será a receita a ser seguida para escrever o modelo sigma para a supercorda tipo II.

Tendo em mente os operadores de vértice descritos em (2.80) e com base nos argumentos acima, o modelo sigma tipo II acoplado ao super-espaço curvo $N = 2$ divide-se em um termo de Fradkin-Tseytlin, que conterá o dilaton, e um termo da forma[1]:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{\alpha'} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \Pi^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Pi}_{\alpha\dot{\alpha}} + d_\alpha \bar{\Pi}^{\alpha+} + d_{\dot{\alpha}} \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}-} + \hat{d}_\alpha \Pi^{\alpha-} + \hat{d}_{\dot{\alpha}} \Pi^{\dot{\alpha}+} \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{\Pi}^A \bar{\Pi}^B B_{AB} + d_\alpha P^{\alpha\beta} \hat{d}_\beta + d_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} + d_\alpha Q^{\alpha\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} + d_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}\beta} \hat{d}_\beta \\ & \left. - \frac{\alpha'}{2} \bar{\partial}\rho(\bar{\partial}\rho + a_z) + \frac{\alpha'}{2} \partial\hat{\rho}(\partial\hat{\rho} + \hat{a}_z) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Onde, lembrando a definição do primeiro capítulo, temos $\Pi^A = E_M^A \partial Z^M$, $M = (m, \mu_j; \dot{\mu}_j)$, $A = (a, \alpha_j, \dot{\alpha}_j)$, $j = \pm$, são os índices do $SU(2)$. O supervierbein e o campo B_{AB} agora não estão sujeitos aos vínculos (2.63) e (2.65). Os campos $P^{\alpha\beta}, Q^{\alpha\dot{\beta}}$ estão relacionados com o pré-potencial U da forma:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta} &= \left[(\bar{\nabla})^2 \nabla^\alpha (\widehat{\bar{\nabla}})^2 \widehat{\nabla}^\beta \right] U \\ Q^{\alpha\dot{\beta}} &= \left[(\bar{\nabla})^2 \nabla^\alpha (\widehat{\bar{\nabla}})^2 \widehat{\nabla}^{\dot{\beta}} \right] U, \end{aligned}$$

onde percebe-se claramente que os mesmos satisfazem as condições de quiralidade e twist quiralidade.

A menos das redefinições $E_A^M \rightarrow E_A^M + F_A^B E_B^M$, este é o modelo sigma invariante por super-reparameterização $N = 2$ no espaço-tempo, transformações superconforme $N = (2, 2)$ na folha mundo e transformações de gauge ($\delta B_{AB} = \nabla_A \wedge_B - \nabla_B \wedge_A$)

mais geral que podemos construir, sem levar em conta as contribuições de campos oriundos da compactificação. O modelo sigma é construído em termos de potenciais E_A^M e B_{AB} . Como discutido anteriormente, em supergravidade os potenciais tem mais graus de liberdade que o necessário para construir a teoria. De fato, E_A^M e B_{AB} devem estar sujeitos a vínculos. Mostraremos que verificando a consistência da álgebra $N = (2, 2)$ perturbativamente em α' , no nível de árvore obtemos os vínculos relativos ao conteúdo físico da supergravidade $N = 2$ acoplada a um multipletto tensorial [30]. Estes resultados serão discutidos no próximo capítulo.

3.3 O termo de Fradkin-Tseytlin.

O termo de Fradkin-Tseytlin é uma generalização do acoplamento do dilaton no modelo sigma para a corda bosônica. O dilaton não faz parte do campo anti-simétrico B_{AB} porque não acopla classicamente na ação. Como discutido anteriormente, ele é um campo compensador para transformações conformes e $SU(2)$ no espaço-tempo. Isto sugere que no nível de árvore devemos obter vínculos que quebrem estas simetrias.

Antes de escrever explicitamente o termo de Fradkin-Tseytlin para a supercorda tipo II, por questões pedagógicas vamos definir as derivadas covariantes e curvaturas para a supergravidade $N = (2, 0)$ em duas dimensões. Em seguida, a análise será estendida para o caso $N = (2, 2)$.

Para uma folha de mundo $N = (2, 0)$, teremos duas coordenadas grassmanianas κ e $\bar{\kappa}$ e com isto uma simetria $U(1)$ relacionando estas duas. Além das curvaturas associadas às conexões de Lorentz, a folha de mundo terá curvaturas associadas à conexão $U(1)$, [31].

Como o termo envolvendo o dilaton na corda bosônica é de fato um termo topológico(característica de Euler), devido á curvatura $U(1)$ podemos esperar que para o caso $N = (2, 0)$ a variedade terá, além deste, outro invariante topológico (número de instanton), e teremos dois tipos de dilaton.

As derivadas covariantes e os geradores da supersimetria podem ser escritos da forma:

$$\begin{aligned} D &= \partial_\kappa - \bar{\kappa}\partial \\ \bar{D} &= \partial_{\bar{\kappa}} - \kappa\partial \\ Q &= \partial_\kappa - \bar{\kappa}\partial \\ \bar{Q} &= \partial_{\bar{\kappa}} - \kappa\partial, \end{aligned} \tag{3.21}$$

satisfazendo a álgebra:

$$\begin{aligned}\{D, \bar{D}\} &= -2\partial \\ \{Q, \bar{Q}\} &= 2\partial\end{aligned}\quad (3.22)$$

Como queremos identificar a ação de Q e $\bar{Q}$ definidos em (3.21) com $G = \oint \frac{d^2 z}{2\pi i} G$ e $\bar{G}$, pode-se escrever as componentes mais baixas de um supercampo como:

$$\Phi = \phi + \kappa [G, \phi] + \bar{\kappa} [\bar{G}, \phi] + \frac{1}{2} \kappa \bar{\kappa} ([G, [\bar{G}, \phi]] - [\bar{G}, [G, \phi]]) \quad (3.23)$$

onde está explícito que $Q\Phi = [G, \Phi]$. Dado o OPE de $\bar{G}$ com qualquer supercampo M ,

$$\bar{G}(z) M(w) = \frac{1}{i\sqrt{8\alpha'}} \left(\alpha' \frac{e^{-i\rho} \nabla^\dagger \nabla_\dagger M(w)}{(z-w)^2} + \frac{2e^{-i\rho} d^\dagger \nabla_\dagger M(z)}{(z-w)} \right), \quad (3.24)$$

um campo ϕ quiral no espaço-tempo obedece à relação $[\bar{G}, \phi] = 0$. Então

$$\Phi = \phi + \kappa [G, \phi] - \kappa \bar{\kappa} \partial \phi. \quad (3.25)$$

Este supercampo satisfaz $\bar{D}\Phi = 0$, sendo um supercampo quiral na folha de mundo. Da mesma forma para supercampos antiquirais:

$$\bar{\Phi} = \bar{\phi} + \bar{\kappa} [\bar{G}, \bar{\phi}] - \kappa \bar{\kappa} \partial \bar{\phi}. \quad (3.26)$$

Antes de escrevermos as curvaturas com as convenções descritas acima podemos expandir o supertensor energia momento para a teoria $N = (2, 0)$:

$$\Theta = J + \kappa G + \bar{\kappa} \bar{G} + 2\kappa \bar{\kappa} T \quad (3.27)$$

Para uma folha de mundo $N = (2, 0)$ curva, as derivadas são substituídas por derivadas covariantes:

$$\begin{aligned}D &\rightarrow \nabla_\kappa \\ \bar{D} &\rightarrow \nabla_{\bar{\kappa}} \\ \partial &\rightarrow \nabla_z.\end{aligned}\quad (3.28)$$

A álgebra tem a forma

$$\begin{aligned} [\nabla_{\bar{\kappa}}, \nabla_{\bar{\varepsilon}}] &\sim \Sigma (M + iY) \\ [\nabla_{\kappa}, \nabla_{\bar{\varepsilon}}] &\sim \bar{\Sigma} (M - iY), \end{aligned} \quad (3.29)$$

sendo M o gerador das transformações de Lorentz e Y o gerador das transformações $U(1)$, as quais κ e $\bar{\kappa}$ tem pesos $\pm 1/2$. As supercurvaturas quirais e antiquirais são expandidas da forma:

$$\begin{aligned} \Sigma_c &\sim \chi + \kappa (R + iF) - \kappa \bar{\kappa} \partial \chi. \\ \bar{\Sigma}_c &\sim \bar{\chi} + \bar{\kappa} (R + iF) - \kappa \bar{\kappa} \partial \bar{\chi} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sendo R e F respectivamente a curvatura da folha de mundo e o tensor field strength $U(1)$. A componente χ é o field strength do gravitino. Se, e somente se, Φ , $\bar{\Phi}$ são supercampos quirais e antiquirais na folha de mundo, podemos escrever um termo de Fradkin-Tseytlin preservando a supersimetria $N = (2, 0)$ da forma

$$\begin{aligned} &\int d^2z \left(\int d\kappa \varepsilon^{-1} \Phi \Sigma + \int d\bar{\kappa} \bar{\varepsilon}^{-1} \bar{\Phi} \bar{\Sigma} \right) \\ &= \int d^2z e^{-1} \left[(\phi + \bar{\phi}) r + i(\phi - \bar{\phi}) f + [G, \phi] \chi + [\bar{G}, \bar{\phi}] \bar{\chi} \right] \\ &= \int d^2z e^{-1} \left[(\phi + \bar{\phi}) r + i(\phi - \bar{\phi}) f + \frac{2}{i\sqrt{8\alpha'}} (e^{i\rho} d^\alpha \nabla_\alpha \phi \chi + e^{-i\rho} d^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}} \bar{\phi} \bar{\chi}) \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

sendo ε a superdensidade quiral da folha de mundo. A partir da forma do termo de Fradkin-Tseytlin, percebemos claramente que a geometria da supervariiedade $N = 2$ requer dois tipos de dilaton. O termo $\phi + \bar{\phi}$ está acoplado com a curvatura da folha de mundo, enquanto que o termo $\phi - \bar{\phi}$ está acoplado com a curvatura $U(1)$. O campo $\phi - \bar{\phi}$ é um compensador para transformações $U(1)$ no espaço-tempo. Quando estamos no gauge superconforme,

$$\Sigma \rightarrow i\kappa \bar{\partial} a_z. \quad (3.32)$$

A extensão dos resultados acima para a folha de mundo $N = (2, 2)$ pode ser feita facilmente. Neste caso, além de κ e $\bar{\kappa}$ teremos mais $\hat{\kappa}$ e $\hat{\bar{\kappa}}$ e agora uma simetria $U(1) \times U(1)$. Como antes, a ação do operador de supersimetria no espaço-tempo será identificada com G e $\bar{G}$, tendo agora outro par de operadores de supersimetria no espaço tempo, identificados com $\hat{G}$ e $\hat{\bar{G}}$. Para a folha de mundo curva, a álgebra das derivadas covariantes ficará da forma:

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_{\bar{\kappa}}, \widehat{\nabla}_{\widehat{\kappa}} \right] &\sim \Sigma_c (M + iY) \\
\left[\nabla_{\kappa}, \nabla_{\widehat{\kappa}} \right] &\sim \bar{\Sigma}_c (M - iY), \\
\left[\nabla_{\bar{\kappa}}, \widehat{\nabla}_{\widehat{\kappa}} \right] &\sim \Sigma_{tc} (M + i\hat{Y}) \\
\left[\nabla_{\kappa}, \widehat{\nabla}_{\widehat{\kappa}} \right] &\sim \bar{\Sigma}_{tc} (M - i\hat{Y}).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Sendo que a curvatura $N = (2, 2)$ da folha de mundo é descrita por um supercampo quiral Σ_c e um supercampo twist quiral Σ_{tc} . Em termos de componentes, temos [31] :

$$\begin{aligned}
\Sigma_c &= b + \kappa (\chi + \Psi) + \widehat{\kappa} (\widehat{\chi} + \widehat{\Psi}) - \kappa \widehat{\kappa} (r + i (F + \widehat{F}) + d), \\
\Sigma_{tc} &= c + \kappa (\bar{\chi} - \bar{\Psi}) + \widehat{\kappa} (\widehat{\bar{\chi}} - \widehat{\bar{\Psi}}) - \kappa \widehat{\kappa} (r + i (F - \widehat{F}) - d),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

sendo F e $\widehat{F}$ as curvaturas $U(1)$, χ e $\widehat{\chi}$ field strengths dos gravitinos e os demais campos são auxiliares. Analogamente ao caso $N = (2, 0)$, podemos definir um campo quiral Φ_c e agora também um campo twist quiral Φ_{tc} :

$$\begin{aligned}
\Phi_{tc} &= \phi_{tc} + \widehat{\kappa} \left[\widehat{\bar{G}}, \phi_{tc} \right] + \kappa [G, \phi_{tc}] - \widehat{\kappa} \widehat{\kappa} \bar{\partial} \phi_{tc} - \kappa \bar{\kappa} \partial \phi_{tc} \\
&\quad + \widehat{\kappa} \kappa \widehat{\kappa} [\widehat{T}, \{G, \phi_{tc}\}] + \kappa \bar{\kappa} \widehat{\kappa} [T, \{\widehat{\bar{G}}, \phi_{tc}\}] + \kappa \bar{\kappa} \widehat{\kappa} \partial \bar{\partial} \phi_{tc},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

satisfazendo as relações (na folha de mundo plana) :

$$\begin{aligned}
\widehat{D} \Phi_{tc} &= (\partial_{\widehat{\kappa}} - \widehat{\kappa} \bar{\partial}) \Phi_{tc} = 0. \\
\bar{D} \Phi_{tc} &= (\partial_{\bar{\kappa}} - \kappa \partial) \Phi_{tc} = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

O campo ϕ_{tc} é twist quiral no espaço-tempo, satisfazendo

$$\begin{aligned}
[\widehat{G}, \phi_{tc}] &= 0. \\
[\bar{G}, \phi_{tc}] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Com os campos quirais e twist quirais podemos escrever um termo de Fradkin-Tseytlin preservando a supersimetria $N = (2, 2)$ da forma:

$$\begin{aligned}
& \int d^2 z \left(\int d\kappa d\widehat{\kappa} \varepsilon_c^{-1} \Phi_c \Sigma_c + \int d\bar{\kappa} d\widehat{\bar{\kappa}} \bar{\varepsilon}_c^{-1} \bar{\Phi}_c \bar{\Sigma} \right) \\
& + \int d^2 z \left(\int d\kappa d\widehat{\kappa} \varepsilon_{tc}^{-1} \Phi_{tc} \Sigma_{tc} + \int d\bar{\kappa} d\widehat{\bar{\kappa}} \bar{\varepsilon}_{tc}^{-1} \bar{\Phi}_{tc} \bar{\Sigma}_{tc} \right) \\
& = \int d^2 z e^{-1} \left[(\phi_c + \bar{\phi}_c + \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) r + i (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) f + i (\phi - \bar{\phi} - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) \hat{f} \right. \\
& + [G, \phi_c + \phi_{tc}] \hat{\chi} + [\bar{G}, \bar{\phi} + \bar{\phi}_{tc}] \hat{\bar{\chi}} + [\hat{G}, \phi_c + \bar{\phi}_{tc}] \chi + [\bar{\hat{G}}, \bar{\phi}_c + \bar{\phi}_{tc}] \bar{\chi} \left. \right] \\
& = \int d^2 z e^{-1} \left[(\phi_c + \bar{\phi}_c + \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) r + i (\phi - \bar{\phi} + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) f + i (\phi - \bar{\phi} - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) \hat{f} \right. \\
& + \frac{2}{i\sqrt{8\alpha'}} (e^{i\hat{\rho}} \hat{d}^\alpha \nabla_{\alpha-} (\phi_c + \bar{\phi}_c) \chi + e^{-i\hat{\rho}} \hat{d}^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}+} (\phi_c + \bar{\phi}_c) \bar{\chi} \\
& + e^{i\rho} d^\alpha \nabla_\alpha (\phi_c + \bar{\phi}_c) \hat{\chi} + e^{-i\rho} d^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}} (\phi_c + \bar{\phi}_c) \hat{\bar{\chi}}) + S_{aux}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

sendo que S_{aux} descreve acoplamento com campos auxiliares da folha de mundo. A variação da ação acima frente as transformações locais $N=(2,2)$ altera os geradores da teoria para:

$$\begin{aligned}
J & \rightarrow J + \partial\phi_c - \partial\bar{\phi}_c, \quad \hat{J} \rightarrow \hat{J} + \partial\phi_{tc} - \partial\bar{\phi}_{tc}, \\
G & \rightarrow G - \partial \left(\frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}} e^{i\rho} d^\alpha \nabla_{\alpha+} \right) \phi_c, \quad \hat{G} \rightarrow \hat{G} - \bar{\partial} \left(\frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}} e^{i\hat{\rho}} \hat{d}^\alpha \nabla_{\alpha-} \phi_{tc} \right) \\
\bar{G} & \rightarrow \bar{G} - \partial \left(\frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}} e^{-i\rho} d^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}-} \bar{\phi}_c \right), \quad \bar{\hat{G}} \rightarrow \bar{\hat{G}} - \bar{\partial} \left(\frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}} e^{-i\hat{\rho}} \hat{d}^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}-} \bar{\phi}_{tc} \right) \\
T & \rightarrow \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{1}{2} \Pi^{\alpha\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} - d_\alpha \Pi^\alpha - d_{\dot{\alpha}} \Pi^{\dot{\alpha}} \nabla_{\dot{\alpha}} + \frac{\alpha'}{2} \partial (\rho + i(\phi - \bar{\phi})) \partial (\rho + i(\phi - \bar{\phi})) \right] \\
& - \frac{1}{2} \partial^2 (\phi + \bar{\phi}). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

e de forma análoga para o conjunto anti-holomórfico. A modificação a mais no tensor energia momento (termo $\partial(\rho + i(\phi - \bar{\phi}))$ deve-se ao fato que agora $\rho + i(\phi - \bar{\phi})$ é um campo quiral (dada a definição de J) e não ρ .

Nesta tese vamos tratar a folha de mundo plana, de forma que o dilaton acopla da mesma forma que ρ . Isto equivale a escolher a supercurvatura da forma:

$$\Sigma_c = i\kappa\widehat{\kappa}\bar{\partial}a_z \tag{3.40}$$

e

$$\Sigma_{tc} = i\kappa\widehat{\kappa}\bar{\partial}a_z. \tag{3.41}$$

A única contribuição para a ação é escrita como:

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \int d^2 z \bar{\partial} (\phi_c - \bar{\phi}_c) a_z - \frac{1}{2} \int d^2 z \partial (\phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) \hat{a}_z. \tag{3.42}$$

Juntando à ação original o termo de Fradkin-Tseytlin, temos um termo da forma $\int d^2z \bar{\partial} (\rho + i (\phi_c - \bar{\phi}_c) a_z)$, que é invariante sob as transformações $U(1)$ do espaço-tempo, enquanto que o termo $\int d^2z \bar{\partial} \rho \partial \rho$ não é. Para fazer este termo invariante sob estas transformações, podemos redefinir o campo de gauge a_z :

$$a_z \rightarrow a_z + i\partial (\phi - \bar{\phi}), \quad (3.43)$$

introduzindo um termo quadrático em $\phi - \bar{\phi}$ na ação. Usando o mesmo raciocínio teremos uma simetria $U(1)$ independente para a parte anti-holomórfica. Temos então o modelo sigma com o termo de Fradkin-Tseytlin [1]:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{\alpha'} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \Pi^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Pi}_{\alpha\dot{\alpha}} + d_{\alpha} \bar{\Pi}^{\alpha+} + d_{\dot{\alpha}} \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}-} + \hat{d}_{\alpha} \Pi^{\alpha-} + \hat{d}_{\dot{\alpha}} \Pi^{\dot{\alpha}+} \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{\Pi}^A \Pi^B B_{AB} + d_{\alpha} P^{\alpha\beta} \hat{d}_{\beta} + d_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} + d_{\alpha} Q^{\alpha\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} + d_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}\beta} \hat{d}_{\beta} \\ & - \frac{\alpha'}{2} (\bar{\partial} \rho + i\bar{\partial} (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc})) (\partial \rho + i\partial (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) + a_z) \\ & \left. - \frac{\alpha'}{2} (\partial \hat{\rho} + i\partial (\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc})) (\bar{\partial} \hat{\rho} + i\bar{\partial} (\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) + \hat{a}_z) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

O sinal negativo no termo cinético em $\phi - \bar{\phi}$ identifica que este é um compensador. Além de ser invariante sob as transformações de Lorentz locais no espaço-tempo, a ação é invariante sob as seguintes transformações locais $U(1) \times U(1)$:

$$\begin{aligned} \delta \phi_c &= \frac{1}{2} (\lambda + \hat{\lambda}) & \delta \bar{\phi}_c &= -\frac{1}{2} (\lambda + \hat{\lambda}) \\ \delta \phi_{tc} &= \frac{1}{2} (\lambda - \hat{\lambda}) & \delta \bar{\phi}_{tc} &= -\frac{1}{2} (\lambda - \hat{\lambda}) \\ \delta \Pi^{\alpha+} &= -\frac{1}{2} \lambda \Pi^{\alpha+} & \delta \Pi^{\dot{\alpha}-} &= \frac{1}{2} \lambda \Pi^{\dot{\alpha}-} \\ \delta \Pi^{\alpha-} &= -\frac{1}{2} \hat{\lambda} \Pi^{\alpha-} & \delta \Pi^{\dot{\alpha}+} &= \frac{1}{2} \lambda \Pi^{\dot{\alpha}+} \\ \delta d_{\alpha} &= \frac{1}{2} \lambda d_{\alpha} & \delta d_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{2} \lambda d_{\dot{\alpha}} & \delta \rho &= -2i\lambda \\ \delta \hat{d}_{\alpha} &= \frac{1}{2} \hat{\lambda} d_{\alpha} & \delta \hat{d}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{2} \hat{\lambda} d_{\dot{\alpha}} & \delta \hat{\rho} &= -2i\lambda \end{aligned} \quad (3.45)$$

Antes de terminar este capítulo é lícito lembrar que a simetria $N = (2, 2)$ da folha de mundo determinou de forma única os supercampos ϕ_c e ϕ_{tc} . Somente se as relações (3.36) forem satisfeitas é possível escrever a ação (3.38). Com base na equação (3.37), concluímos que temos dois tipos de dilaton (compensador): um será um supercampo quiral e o outro um supercampo twist quiral. Desta forma, adiantando o papel do dilaton, as simetrias da folha de mundo já fixaram o tipo de compensador que terá a supergravidade oriunda da supercorda tipo II.

Capítulo 4

Modelo Sigma II no Nível de Árvore.

A álgebra $N = (2, 2)$ em (2.68) é obtida usando os OPE's de campo livre. Quando acoplamos o modelo sigma ao super espaço curvo, não temos mais uma teoria livre na folha de mundo. Os OPE's dos campos fundamentais usados para derivar (2.68) podem sofrer correções e podemos ter anomalias.

Neste capítulo será analisada a consistência da álgebra $N = (2, 2)$ no nível de árvore, fazendo teoria de perturbação em α' . Para isto, será usado o método de campo de fundo covariante, onde expandiremos a ação e os geradores em potências de campos quânticos e clássicos. A expansão será feita de forma a deixar manifesta as simetrias do espaço-tempo. De posse dos propagadores e vértices da teoria, calcularemos a álgebra $N = (2, 2)$.

O modelo sigma só será consistente se as torções estiverem sujeitas aos vínculos da supergravidade $N = 2$ acoplada a um supercampo tensorial [30]. Por sua vez, o supercampo tensorial será fixo, identificando que estamos no gauge de corda, onde a matéria é fixa e não os compensadores. Resolvendo parcialmente as identidades de Bianchi da supergravidade acoplada com a matéria será mostrado que as componentes restantes de H_{ABC} estarão no multipletto da supergravidade.

Impondo que as correntes G e $\hat{G}$ sejam respectivamente holomórficas e anti-holomórficas, serão derivadas as equações de movimento para o dilaton. As mesmas serão usadas para mostrar a consistência dos OPE's no nível de árvore.

4.0.1 Teoria de perturbação em α' .

Fazer teoria de perturbação em α' é análogo a fazer teoria de perturbação em teorias de campos usuais. Desta forma, α' conta o número de loops que está sendo levado em conta perturbativamente.

Para verificar a consistência quântica do modelo sigma será feita teoria de perturbação em α' até um loop. Para tal, os campos ρ e $\hat{\rho}$ trazem um problema imediato: o termo na ação envolvendo estes campos não tem um fator $\frac{1}{\alpha'}$. Sendo assim, em

uma dada ordem em α' , teremos a contribuição de um número arbitrário de loops envolvendo ρ . Este problema é facilmente resolvido fazendo as redefinições:

$$\begin{aligned}\rho &\rightarrow \rho - i(\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}), \\ \hat{\rho} &\rightarrow \hat{\rho} - i(\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}).\end{aligned}\quad (4.1)$$

Desta forma, os campos ρ e $\hat{\rho}$ desacoplam e os vínculos que os multiplicadores de Lagrange a_z e $\hat{a}_z$ impõe

$$\begin{aligned}\bar{\partial}(\rho + i(\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc})) &= 0, \\ \partial(\hat{\rho} + i(\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc})) &= 0,\end{aligned}\quad (4.2)$$

transformam os campos, respectivamente, em um bóson quiral e um antiquiral. Podemos então fazer teoria de perturbação em todos os outros campos da teoria e tratar ρ e $\hat{\rho}$ de forma exata. Após a redefinição (4.1), os geradores da álgebra $N = (2, 2)$ também mudarão e agora terão a forma

$$\begin{aligned}J &\rightarrow -i\partial\rho, \quad \hat{J} \rightarrow -i\bar{\partial}\hat{\rho} \\ G &\rightarrow \frac{1}{i\alpha'\sqrt{8\alpha'}}e^{i\rho}e^{\phi-\bar{\phi}}d^\alpha d_\alpha - \frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}}\partial(e^{i\rho}e^{\phi-\bar{\phi}}d^\alpha\nabla_{\alpha+}\phi) \\ \bar{G} &\rightarrow \frac{1}{i\alpha'\sqrt{8\alpha'}}e^{-i\rho}e^{\bar{\phi}-\phi}d^{\dot{\alpha}}d_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}}\bar{\partial}(e^{-i\rho}e^{\bar{\phi}-\phi}d^{\dot{\alpha}}\nabla_{\dot{\alpha}-}\bar{\phi}) \\ \hat{G} &\rightarrow \frac{1}{i\alpha'\sqrt{8\alpha'}}e^{i\hat{\rho}}e^{\hat{\phi}-\bar{\hat{\phi}}}\hat{d}^\alpha\hat{d}_\alpha - \frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}}\bar{\partial}(e^{i\hat{\rho}}e^{\hat{\phi}-\bar{\hat{\phi}}}\hat{d}^\alpha\nabla_{\alpha-}\phi) \\ \hat{\bar{G}} &\rightarrow \frac{1}{i\alpha'\sqrt{8\alpha'}}e^{-i\hat{\rho}}e^{\bar{\hat{\phi}}-\hat{\phi}}\hat{d}^{\dot{\alpha}}\hat{d}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}}\bar{\partial}(e^{-i\hat{\rho}}e^{\bar{\hat{\phi}}-\hat{\phi}}\hat{d}^{\dot{\alpha}}\nabla_{\dot{\alpha}+}\bar{\phi}) \\ T &\rightarrow \frac{1}{\alpha'}\left[-\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\dot{\alpha}}\Pi_{\alpha\dot{\alpha}} - d_\alpha\Pi^{\alpha+} - d_{\dot{\alpha}}\Pi^{\dot{\alpha}-} + \frac{\alpha'}{2}\partial\rho\partial\rho\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial^2(\phi + \bar{\phi}) \\ \hat{T} &\rightarrow \frac{1}{\alpha'}\left[-\frac{1}{2}\bar{\Pi}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\Pi}_{\alpha\dot{\alpha}} - \hat{d}_\alpha\bar{\Pi}^{\alpha-} - \hat{d}_{\dot{\alpha}}\bar{\Pi}^{\dot{\alpha}+} + \frac{\alpha'}{2}\bar{\partial}\hat{\rho}\bar{\partial}\hat{\rho}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{\partial}^2(\hat{\phi} + \bar{\hat{\phi}})\end{aligned}\quad (4.3)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}\phi - \bar{\phi} &= \phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc} \\ \hat{\phi} - \bar{\hat{\phi}} &= \phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Na próxima seção será descrito o método da expansão em campo de fundo covariante que usaremos. Os cálculos são idênticos aos desenvolvidos originalmente para a corda bosônica em [32]. Neste caso as equações de movimento são derivadas exigindo a nilpotência do operador BRST em um loop. Ou, de forma mais direta e tradicional, exigir que a função beta se anule em 1 loop. Isto é o mesmo que exigir que a álgebra de Virasoro seja preservada em 1 loop, verificando os valores esperados

$$\langle T(z) T(w) \rangle = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2\langle T(w) \rangle}{(z-w)^2} + \frac{\partial \langle T(w) \rangle}{(z-w)}. \quad (4.5)$$

Como o anulamento da função beta garante somente a parte bosônica da álgebra $N = (2, 2)$, somos impelidos a usar o método da referência [32] para todo o conjunto de geradores $N = (2, 2)$ da supercorda tipo II .

4.0.2 Expansão em campo de fundo covariante.

Quando usamos o método de campo de fundo para quantizar uma teoria de campos, os campos são decompostos em termos clássicos, satisfazendo as equações de movimento, e flutuações quânticas. No entanto, ao aplicar ao modelo sigma, esta expansão deve ser feita com cuidado, de forma a manter as simetrias locais no espaço alvo. A forma usual de obter uma expansão covariante é usar o método das coordenadas normais rimannianas.

Vamos usar um modelo sigma bosônico como exemplo. As simetrias do espaço alvo que devemos preservar são as transformações gerais de coordenadas.

Dado o modelo sigma:

$$S = \frac{1}{\alpha'} \int d^m x \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} G_{ij}(\phi(x)) \partial_a \phi^i \partial_b \phi^j, \quad (4.6)$$

sendo ϕ^i ($i = 1.., d$) coordenadas no espaço alvo M com métrica $G_{ij}(\phi(\sigma))$ e γ^{ab} a métrica de um espaço N com dimensão n . A função de partição será a soma sobre o espaço das funções $\hat{\phi} : N \rightarrow M$ com alguma medida $\int [d\hat{\phi}]$.

Podemos escrever o gerador funcional na forma :

$$\Omega[\bar{\phi}] = \int [d\pi^i] \exp \left(i^{-1} \left\{ S[\bar{\phi} + \pi] - S[\bar{\phi}] - \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \phi^i} \pi^i \right\} \right), \quad (4.7)$$

onde fizemos a expansão:

$$\phi^i = \bar{\phi}^i + \pi^i, \quad (4.8)$$

sendo $\bar{\phi}$ o campo de fundo clássico e π^i a flutuação quântica.

Podemos ver claramente que a expansão (4.7) é problemática; a série de potência em $\pi^i(x)$ é não covariante, pois este não é um vetor no espaço alvo. A definição (4.8) implica que $\pi^i(x)$ é a diferença entre dois pontos vizinhos da variedade alvo, não se transformando covariantemente por reparametrização. A teoria conterá vértices não covariantes, o que acarretará em valores esperados dependentes do sistema de coordenadas.

O funcional $\Omega[\bar{\phi}]$ só será manifestamente invariante por reparametrização do espaço alvo se as equações de movimento são satisfeitas $\left(\frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \phi^i} = 0\right)$. No entanto, $\Omega[\bar{\phi}]$ gera todos os diagramas de um loop com pernas externas amputadas, contendo divergências fora e dentro da camada de massa, no sentido que possui divergências proporcionais às equações de movimento. Manipulando as divergências ordem a ordem, é possível reescrever as quantidades renormalizadas em termos covariantes. Ou seja, embora os coeficientes da expansão não sejam tensores, é possível fazer manipulações, e para quantidades que estão na camada de massa, pode-se escrever os valores esperados em termos covariantes. No entanto, este método é extremamente tedioso, dificultando a quantização da teoria.

As dificuldades decorrentes da expansão (4.8) podem ser removidas, expressando $\pi^i(x)$ como uma série de potências de um novo campo $\zeta^i(x)$ [33]:

$$\pi^i(x) = \zeta^i(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} M_{j_1 \dots j_n}(\bar{\phi}^i) \zeta^{j_1} \dots \zeta^{j_n}, \quad (4.9)$$

sendo $M_{j_1 \dots j_n}(\bar{\phi}^i)$ funções arbitrárias. Podemos tratar $\zeta^i(x)$ como o campo quântico fundamental e fazer a expansão: $S(\phi) = S(\bar{\phi} + \pi(\zeta))$.

Se $M_{j_1 \dots j_n}(\bar{\phi}^i) = 0$, temos a expansão não covariante anterior. No entanto, é possível escolher as funções $M_{j_1 \dots j_n}(\bar{\phi}^i)$ de tal forma que ζ^i transforma-se como um vetor. Visto que $S(\phi + \pi)$ é um escalar, os coeficientes da série de potências em ζ^i serão covariantes, conduzindo a um procedimento diagramático covariante para calcular $\Omega[\bar{\phi}]$ e os valores esperados que estamos interessados.

Para definirmos o campo $\zeta^i(x)$ como um vetor, consideramos dois pontos sobre a variedade alvo: ϕ^i e $\phi^i + \pi^i$. Assumimos que os pontos são próximos o suficiente para que sejam ligados por uma única geodésica; esta pode ser parametrizada por $\lambda^i(t)$ e satisfaz a equação:

$$\ddot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\lambda}^j \dot{\lambda}^k = 0, \quad (4.10)$$

sendo t o parâmetro afim da curva e os pontos significam $\frac{d}{dt}$. A solução pode ser escolhida tal que:

$$\begin{aligned}\lambda^i(0) &= \bar{\phi}^i \\ \lambda^i(1) &= \bar{\phi}^i + \pi^i\end{aligned}\quad (4.11)$$

O vetor tangente à geodésica em $t = 0$ é definido justamente para ser:

$$\zeta^i = \dot{\lambda}^i(0).$$

É preciso sempre ter em mente a dependência implícita deste vetor com os campos originais $\phi^i(x)$ e $\pi^i(x)$. Para pequenas perturbações, a geodésica será única. Os campos podem ser relacionados da seguinte forma:

$$\lambda^i(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \lambda^i(t) \Big|_{t=0} \quad (4.12)$$

Diferenciando a equação (4.10), obtemos os coeficientes $M_{j_1 \dots j_n}$, comparando com a equação acima.

Como ζ^i transforma-se de forma contravariante sobre reparametrizações da variedade alvo, a expansão em potências ζ^i de qualquer objeto geométrico sobre a variedade será covariante. Por exemplo, um tensor covariante terá a expansão:

$$T_{k_1 \dots k_m}(\phi + \pi) = \sum \frac{1}{n!} (\partial_{\zeta_{i_1}} \dots \partial_{\zeta_{i_n}}) T_{k_1 \dots k_m} \zeta^{i_1} \dots \zeta^{i_n}. \quad (4.13)$$

Os coeficientes são tensores e podem então ser expressados em termos de derivadas covariantes de T e as curvaturas da variedade alvo. A forma mais simples de obter uma expressão covariantemente manifesta para os coeficientes desta expansão é usar um sistema coordenadas normal, onde anulamos a primeira derivada da métrica:

$$\Gamma_{jk}^i = 0. \quad (4.14)$$

Depois podemos generalizar para qualquer sistema de coordenadas.

Em um sistema de coordenadas normal podemos escrever todos os coeficientes da expansão em termos de objetos manifestamente covariantes; para isto basta escrever as derivadas ordinárias como a diferença entre derivadas covariantes e conexões, e então usar identidades do tipo

$$\partial_k \Gamma_{jl}^i = \frac{1}{3} (R_{jkl}^i + R_{ljk}^i), \quad (4.15)$$

que são válidas em um sistema de coordenadas normal.

Voltaremos agora ao caso de interesse desta tese, onde o espaço alvo é uma supervariiedade $N = 2$. As simetrias que queremos preservar na expansão são transformações locais de Lorentz e $U(1) \times U(1)$. O raciocínio é idêntico ao descrito

anteriormente: Z_0 será um ponto sobre a supervariiedade e y^M um vetor tangente em Z_0 . Neste caso $Z(t)$ será a geodésica satisfazendo

$$Z(0) = Z_0 \quad (4.16)$$

e

$$\left. \frac{d}{dt} Z \right|_{t=0} = y^M. \quad (4.17)$$

Como antes, y^M (vetor tangente) define as coordenadas de um vizinho de Z_0 associando a y^M o ponto

$$Z(Z_0; y^M) = Z(t)|_{t=1}.$$

A equação da geodésica pode ser escrita na forma:

$$\frac{dZ^M}{dt} \nabla_M \frac{dZ^N}{dt} = 0. \quad (4.18)$$

É importante notar que ∇_M está escrita em termos de índices do espaço curvo, e contem símbolos de Christoffel e não conexões de spin como a derivada covariante definida no apêndice. Em geral, a geodésica pode ser dada por $Z(t) = Z(Z_0; ty^M)$. Vamos definir $y^N(Z_0; y^M)$ o vetor tangente em $Z(Z_0; y^M)$, obtido pelo transporte paralelo do vetor tangente y^N em Z_0 até o ponto $Z(Z_0; y^M)$ ao longo da geodésica $Z(Z_0; ty^M)$. Isto implica em

$$y^N(Z_0; 0) = y^N.$$

Usando a condição de transporte paralelo, obtemos

$$\frac{dZ^P(Z_0; ty^M)}{dt} \nabla_P y^N(Z_0; ty^M) = 0. \quad (4.19)$$

Usando a equação (4.18), a equação acima pode ser resolvida para :

$$y^N(Z_0; ty^M) = \frac{d}{dt} Z^N(Z_0; ty^M), \quad (4.20)$$

que permite escrever:

$$y^M(Z_0; y^P) \nabla_M y^N(Z_0; y^P) = 0. \quad (4.21)$$

Esta equação será extremamente útil para os cálculos seguintes.

A expansão em campo de fundo pode ser feita como antes. Um tensor T pode ser expandido em potências do campo quântico y^N na forma:

$$T' = T(Z_0 + y) = \sum \frac{1}{n!} (\partial_{M_1} \dots \partial_{M_n}) T(Z_0) y^{M_n} \dots y^{M_1} \quad (4.22)$$

e podemos covariantizar os coeficientes usando um sistema de coordenadas normal no super-espço. No entanto, como estamos interessados em expandir quantidades escalares, existe um algoritmo melhor, desenvolvido em [34]. Primeiramente, escrevemos a equação (4.22) na forma:

$$T' = e^{y^M \partial_M} T. \quad (4.23)$$

Se $T = S$ é um escalar, podemos imediatamente covariantizar esta expressão

$$S' = e^{y^A \nabla_A} S, \quad (4.24)$$

onde convertamos os índices de espaço curvo por índices do espaço tangente através do vierbein. Se S é composto de diversos tensores, então a expansão acima implicará em uma expansão induzida para estes tensores da forma:

$$T' = e^{y^A \nabla_A} T e^{-y^A \nabla_A}, \quad (4.25)$$

que pode ser escrita em primeira ordem no campo y^A como

$$\Delta T = [y^A \nabla_A, T]. \quad (4.26)$$

A expansão em várias potências de y^A pode ser calculada aplicando o operador Δ iterativamente. É preciso salientar que este algoritmo é válido quando expandimos quantidades escalares. Em nosso caso precisamos expandir a ação e os geradores da álgebra superconforme. Estes são todos escalares por transformações de Lorentz e $U(1) \times U(1)$.

Antes de expandir a ação vamos determinar as expansões para $E_A^M, \omega_{AB}{}^\gamma, \Gamma_A$ e $\hat{\Gamma}_A$. Os resultados são

$$\begin{aligned} \Delta E_A^M &= [\nabla_A y^B - y^C T_{CA}^B] E_B^M \\ \Delta \omega_{AB}{}^\gamma &= [\nabla_A y^B - y^C T_{CA}^B] \omega_{B\beta}{}^\gamma + y^B R_{BA\beta}{}^\gamma \\ \Delta \Gamma_A &= [\nabla_A y^B - y^C T_{CA}^B] \Gamma_B + y^B F_{BA} \\ \Delta \hat{\Gamma}_A &= [\nabla_A y^B - y^C T_{CA}^B] \Gamma_B + y^B \hat{F}_{BA} \end{aligned} \quad (4.27)$$

As expansões acima foram calculadas usando a expansão para a derivada covariante:

$$\Delta \nabla_A = [y^B \nabla_B, \nabla_A] \quad (4.28)$$

e comparando os termos independentes.

Usando a equação (4.21) temos que $\Delta y^A = 0$. Lembrando a definição de Π^A e definindo o operador $\nabla = \Pi^A \nabla_A$, com a ação dos geradores definida no apêndice, temos

$$\Delta \Pi^A = \nabla y^A - \Pi^B y^C T_{CB}{}^A, \quad (4.29)$$

$$\Delta (\nabla y^A) = -Y^D \Pi^B y^C R_{CBD}{}^A - \omega(A) y^A \Pi^B y^C F_{CB} - \hat{\omega}(A) y^A \Pi^B y^C \hat{F}_{CB}. \quad (4.30)$$

A ação contém também os campos da folha de mundo d_α , ρ , $\hat{d}_\alpha$ e $\hat{\rho}$. Devemos lembrar que tratamos estes de forma independente de $Z_A = (x_a, \theta_{\alpha i}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i})$. Como ρ e $\hat{\rho}$ são escalares de Lorentz e, após a redefinição (4.1), tem carga $U(1) \times U(1)$ zero, temos $\Delta \rho = 0$. Já os campos d_α e $\hat{d}_\alpha$ tem, em primeira ordem, a seguinte expansão:

$$\begin{aligned} \Delta d_\alpha &= y^A \left(\omega_{A\alpha}{}^\gamma + \frac{1}{2} \Gamma_A \delta_{\alpha+}{}^{\gamma+} \right) d_\gamma \\ \Delta \hat{d}_\alpha &= y^A \left(\omega_{A\alpha}{}^\gamma + \frac{1}{2} \hat{\Gamma}_A \delta_{\beta-}{}^{\gamma-} \right) \hat{d}_\gamma. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Onde foi usado o fato que os campos d_α e $\hat{d}_\alpha$ são independentes do espaço-tempo. Podemos obter a expansão em ordens mais altas aplicando o operador Δ iterativamente. Os objetos não covariantes como as conexões que aparecem nestas expansões devem ser cancelados no final. Na referência [32] todas dependências parciais das conexões são levadas até o final dos cálculos, onde as mesmas cancelam-se mutuamente. Neste cálculo vamos supor que não temos anomalias de Lorentz e portanto as conexões serão canceladas no final.

Usando a liberdade na definição de y^A , pode-se escolher as expansões manifestamente covariantes para d_α e $\hat{d}_\alpha$:

$$\begin{aligned} d_\alpha &\rightarrow d_\alpha + D_\alpha, \\ \hat{d}_\alpha &\rightarrow \hat{d}_\alpha + \hat{D}_\alpha \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo D_α e $\hat{D}_\alpha$ campos de fundo. Como na referência [2], esta expansão pode ser modificada no final. As definições para as expansões de d_α e $\hat{d}_\alpha$ podem ser feitas de forma arbitrária, sem afetar a super-reparametrização do espaço alvo, pois os mesmos são independentes de Z_A . O mesmo não acontece com os campos Π^B .

Faremos agora a expansão para a ação usando a notação:

$$\begin{aligned} A^{\hat{\alpha}} &= (A^{\alpha-}, A^{\dot{\alpha}+}) \\ A^{\tilde{\alpha}} &= (A^{\alpha+}, A^{\dot{\alpha}-}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

e identificando S^n como a parte da ação envolvendo n campos quânticos. Como estamos interessados em resultados em 1 loop, necessitaremos expandir a ação até ordem 3 nos campos quânticos. Lembramos que os campos de fundo envolvidos na expansão, assim com os objetos geométricos inerentes a mesma, estão fixos em uma determinada coordenada. Sendo assim, os mesmos não carregarão momento. Este fato é fundamental para o cálculo dos diagramas que seguirão. Temos com apenas 1 campos quântico não fornecerão nenhuma contribuição.

Os resultados são:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2} \nabla y^a \bar{\nabla} y^a + d_\alpha \bar{\nabla} y^{\alpha+} + d_{\dot{\alpha}} \bar{\nabla} y^{\dot{\alpha}-} + \hat{d}_\alpha \nabla y^{\alpha-} + \hat{d}_{\dot{\alpha}} \nabla y^{\dot{\alpha}+} \\ &\quad \frac{1}{2} \bar{\nabla} y^a y^C (\Pi^B T_{BC}{}^a) + \frac{1}{2} \nabla y^a y^C (\bar{\Pi}^B T_{BC}{}^a) - \frac{1}{4} \bar{\nabla} y^C y^B (\Pi^a T_{BC}{}^a + 2\Pi^A H_{ABC}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\nabla} y^C y^B (T_{BC}{}^{\hat{a}} D_{\hat{a}}) + \frac{1}{2} \nabla y^C y^B (T_{BC}{}^{\hat{a}} \hat{D}_{\hat{a}}) + d_{\dot{\alpha}} y^C (\bar{\Pi}^B T_{BC}{}^{\dot{\alpha}}) \\ &\quad + \hat{d}_{\dot{\alpha}} y^C (\Pi^B T_{BC}{}^{\dot{\alpha}}) - \frac{1}{4} \nabla y^C y^B (\bar{\Pi}^a T_{BC}{}^a - 2\bar{\Pi}^A H_{ABC}) \\ &\quad + \frac{1}{4} y^B y^C [(\bar{\Pi}^D \bar{\Pi}^a - \bar{\Pi}^D \bar{\Pi}^a) T_{DCB}{}^a - 2\bar{\Pi}^D T_{DCB}{}^{\hat{a}} D_{\hat{a}} - 2\Pi^D T_{DCB}{}^{\hat{a}} \hat{D}_{\hat{a}} \\ &\quad + \bar{\Pi}^D ((-1)^{E(D+B)+CD} T_C{}^{Ea} T_{DB}{}^a + H_{DCB}{}^E) \Pi_E] \\ &\quad + d_\alpha P^{\alpha\beta} \hat{d}_\beta + d_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + d_\alpha Q^{\alpha\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + d_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} \\ &\quad + d_\alpha y^A \nabla_A P^{\alpha\beta} \widehat{D}_\beta + d_{\dot{\alpha}} y^A \nabla_A P^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} + d_\alpha y^A \nabla_A Q^{\alpha\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} + d_{\dot{\alpha}} y^A \nabla_A \bar{Q}^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \\ &\quad D_\alpha y^A \nabla_A P^{\alpha\beta} \hat{d}_\beta + D_{\dot{\alpha}} y^A \nabla_A P^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + D_\alpha y^A \nabla_A Q^{\alpha\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + D_{\dot{\alpha}} y^A \nabla_A \bar{Q}^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} \\ &\quad + D_\alpha y^A y^B \nabla_B \nabla_A P^{\alpha\beta} \widehat{D}_\beta + D_{\dot{\alpha}} y^A y^B \nabla_B \nabla_A P^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} + D_\alpha y^A y^B \nabla_B \nabla_A Q^{\alpha\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \\ &\quad + D_{\dot{\alpha}} y^A y^B \nabla_B \nabla_A \bar{Q}^{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
S^3 = & -\frac{1}{4} (\bar{\nabla} y^a \nabla y^B y^C + \nabla y^a \bar{\nabla} y^B y^C) T_{CB}^a \\
& + \frac{1}{3} \bar{\nabla} y^A \nabla y^B y^C H_{CBA} + \frac{1}{2} d_{\hat{\alpha}} y^B \bar{\nabla} y^C T_{BC}^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2} \hat{d}_{\hat{\alpha}} y^B \nabla y^C T_{BC}^{\hat{\alpha}} \\
& + \frac{1}{4} (\bar{\nabla} y^a \nabla y^B y^C \Pi^D + \nabla y^a y^B y^C \bar{\Pi}^D) T_{DCB}^a + \frac{1}{2} d_{\hat{\alpha}} y^B y^C \Pi^D T_{DCB}^{\hat{\alpha}} \\
& + y^B y^C \nabla y^D \left[\frac{1}{12} \bar{\Pi}^a (T_{DCB}^a + (-1)^{CD} \nabla_C T_{DB}^a) \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{6} T_{DC}^E H_{EB}^A - \frac{1}{4} T_{DC}^a T_B^{Aa} - \frac{1}{3} H_{DCB}^A \right) \bar{\Pi}_A \right] \\
& + y^B y^C \bar{\nabla} y^D \left[\frac{1}{12} \Pi^a (T_{DCB}^a + (-1)^{CD} \nabla_C T_{DB}^a) \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{6} T_{DC}^E H_{EB}^A - \frac{1}{4} T_{DC}^a T_B^{Aa} + \frac{1}{3} H_{DCB}^A \right) \Pi_A \right] \\
& - \frac{1}{6} y^B y^C \bar{\nabla} y^D [T_{DCB}^{\hat{\alpha}} + (-1)^{CD} \nabla_C T_{DB}^{\hat{\alpha}}] D_{\hat{\alpha}} \\
& - \frac{1}{6} y^B y^C \nabla y^D [T_{DCB}^{\hat{\alpha}} + (-1)^{CD} \nabla_C T_{DB}^{\hat{\alpha}}] \widehat{D}_{\hat{\alpha}} \\
& + d_{\alpha} y^A \nabla_A P^{\alpha\beta} \hat{d}_{\beta} + d_{\hat{\alpha}} y^A \nabla_A P^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + d_{\alpha} y^A \nabla_A Q^{\alpha\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + d_{\hat{\alpha}} y^A \nabla_A \bar{Q}^{\hat{\alpha}\beta} \hat{d}_{\beta} \\
& + d_{\hat{\alpha}} y^A \nabla_A \bar{Q}^{\hat{\alpha}\beta} \hat{d}_{\beta} \\
& + \frac{1}{2} [d_{\alpha} y^A y^B \nabla_B \nabla_A P^{\alpha\beta} \widehat{D}_{\beta} + d_{\hat{\alpha}} y^A y^B \nabla_B \nabla_A P^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} + d_{\alpha} y^A y^B \nabla_B \nabla_A Q^{\alpha\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \\
& + d_{\hat{\alpha}} y^A y^B \nabla_B \nabla_A \bar{Q}^{\hat{\alpha}\beta} \widehat{D}_{\beta}] \\
& + \frac{1}{2} [D_{\alpha} y^A y^B \nabla_B \nabla_A P^{\alpha\beta} \hat{d}_{\beta} + D_{\hat{\alpha}} y^A y^B \nabla_B \nabla_A P^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + D_{\alpha} y^A y^B \nabla_B \nabla_A Q^{\alpha\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} \\
& + D_{\hat{\alpha}} y^A y^B \nabla_B \nabla_A \bar{Q}^{\hat{\alpha}\beta} \hat{d}_{\beta}] \\
& + \frac{1}{6} [D_{\alpha} y^C y^A y^B \nabla_B \nabla_A \nabla_C P^{\alpha\beta} \widehat{D}_{\beta} + D_{\hat{\alpha}} y^C y^A y^B \nabla_B \nabla_A \nabla_C P^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \\
& + D_{\alpha} y^C y^A y^B \nabla_B \nabla_A \nabla_C Q^{\alpha\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \\
& + D_{\hat{\alpha}} y^C y^A y^B \nabla_B \nabla_A \nabla_C \bar{Q}^{\hat{\alpha}\beta} \widehat{D}_{\beta}] , \tag{4.35}
\end{aligned}$$

sendo

$$T_{DCB}^A = R_{DCB}^A + \omega(A) F_{DC} \delta_B^A + \hat{\omega}(A) \widehat{F}_{DC} \delta_B^A + T_{DC}^E T_{EB}^A + (-1)^{CD} \nabla_C T_{DB}^A \tag{4.36}$$

$$H_{DCB}^A = \nabla_C H_{DBA} (-1)^{CD} - T_{CA}^E H_{EDB} (-1)^{A(B+D)+CD} + T_{DC}^E H_{EBA} \tag{4.37}$$

Na ação temos campos clássicos $\Pi^A, D_{\alpha}, \widehat{D}_{\alpha}$ e os campos quânticos $d_{\alpha}, \hat{d}_{\alpha}, y^A$. Os vértices são os objetos geométricos T_{DCB}^A, H_{DCB}^A e os supercampos quirais e twist quirais.

A partir de S^2 temos os propagadores da teoria:

$$\langle y^a(z) y^b(w) \rangle = \alpha' \delta^{ab} G(z, w) = \alpha' \delta^{ab} \ln |z - w|^2 \quad (4.38)$$

$$\langle d_\alpha(z) y^{\beta+}(w) \rangle = \frac{\alpha' \delta_\alpha^\beta}{(z - w)} = \alpha' \delta_\alpha^\beta \partial G(z, w) \quad (4.39)$$

$$\langle \hat{d}_\alpha(z) y^{\beta-}(w) \rangle = \frac{\alpha' \delta_\alpha^\beta}{(\bar{z} - \bar{w})} = \alpha' \delta_\alpha^\beta \bar{\partial} G(z, w) \quad (4.40)$$

lembrando que d_α e $\hat{d}_\alpha$ carregam respectivamente índices $+$ e $-$. Os geradores também devem ser expandidos. A parte dos geradores que não é derivada do termo de Fradkin-Tseytlin pode ser expandida na forma:

$$\begin{aligned} T = & -\nabla y^a \Pi_a - D_{\hat{\alpha}} \nabla y^{\hat{\alpha}} - d_{\hat{\alpha}} \Pi^{\hat{\alpha}} - y^C \Pi^B (T_{BC}{}^a \Pi_a - T_{BC}{}^{\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}}) \\ & - \frac{1}{2} \nabla y^a \nabla y_a - d_{\hat{\alpha}} \nabla y^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2} \nabla y^B y^C \Pi^a T_{BCa} - \nabla y^a y^C \Pi^B T_{BCa} \\ & - \frac{1}{2} \nabla y^B y^C T_{CB}{}^{\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}} - d_{\hat{\alpha}} y^B \Pi^C T_{CB}{}^{\hat{\alpha}} \\ & - y^B y^C \Pi^D [T_{DCB}{}^a \Pi_a - T_{DCB}{}^{\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}} - (-1)^{E(D+B)+CD} T_C{}^{Ea} T_{DB}{}^a \Pi_E + (4.41)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = & e^{i\rho} e^{\phi - \bar{\phi}} (d + D)^2 \left[1 + y^A \nabla_A (\phi - \bar{\phi}) + \frac{1}{2} y^A y^B \nabla_B \nabla_A (\phi - \bar{\phi}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (y^A \nabla_A (\phi - \bar{\phi}))^2 + \dots \right] \quad (4.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G} = & e^{-i\rho} e^{\bar{\phi} - \phi} (d + D)^2 \left[1 + y^A \nabla_A (\bar{\phi} - \phi) + \frac{1}{2} y^A y^B \nabla_B \nabla_A (\bar{\phi} - \phi) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (y^A \nabla_A (\bar{\phi} - \phi))^2 \right] \quad (4.43) \end{aligned}$$

Nos geradores acima, os pontos significam termos em ordens maiores nos campos quânticos, estes não contribuirão em 1 loop. Para os geradores anti-holomórficos a expansão é idêntica:

$$\hat{T} = -\bar{\nabla} y^a \bar{\Pi}^a - \widehat{D}_{\hat{\alpha}} \bar{\nabla} y^{\hat{\alpha}} + \dots \quad (4.44)$$

$$\hat{G} = e^{i\hat{\rho}} e^{\hat{\phi} - \bar{\hat{\phi}}} (\hat{d} + \widehat{D})^2 (\dots) \quad (4.45)$$

Os termos dos geradores que são oriundos do termo de Fradkin-Tseytlin são expandidos de forma análoga:

$$\begin{aligned}
G_{dil} &= -\frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}} \partial(e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} d^\alpha \nabla_{\alpha+} \phi + e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} D^\alpha y^A \nabla_A \nabla_{\alpha+} \phi + \\
&\quad e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} D^\alpha \nabla_{\alpha+} \phi y^A \nabla_A (\phi - \bar{\phi})) \\
\bar{G}_{dil} &= -\frac{1}{i\sqrt{2\alpha'}} \partial(e^{-i\rho} e^{\bar{\phi}-\phi} d^\alpha \nabla_{\alpha+} \phi + e^{-i\rho} e^{\bar{\phi}-\phi} D^\alpha y^A \nabla_A \nabla_{\alpha-} \bar{\phi} + \\
&\quad + e^{-i\rho} e^{\bar{\phi}-\phi} D^\alpha \nabla_{\alpha-} \bar{\phi} y^A \nabla_A (\bar{\phi} - \phi)) \\
T_{dil} &= -\frac{1}{2} \partial^2 (y^A \nabla_A (\bar{\phi} - \phi))
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Os termos anti-holomórficos são expandidos da mesma forma. Devido às ordens em α' dos geradores acima, estes somente contribuirão em 1 loop.

A expansão em campo de fundo covariante tem uma particularidade. A ação original depende somente de vierbeins, enquanto que a ação expandida depende também de torções e conexões. Como consequência teremos uma nova simetria na ação e nos geradores, dada por

$$\begin{aligned}
\delta\omega_{AB}{}^C &= Y_{AB}{}^C \\
\delta\Gamma_A &= X_A \\
\delta\widehat{\Gamma}_A &= \widehat{X}_A \\
\delta T_{AB}{}^C &= Y_{[AB]}{}^C + \omega(C) X_{[A} \delta_{B]}{}^C + \widehat{\omega}(C) \widehat{X}_{[A} \delta_{B]}{}^C \\
\delta y^A &= \frac{1}{2} y^B y^C (Y_{CB}{}^A + \omega(A) X_C \delta_B{}^A + \widehat{\omega}(A) \widehat{X}_C \delta_B{}^A) + O(y^3) \\
\delta d_\alpha &= \left(y^M Y_{M\alpha}{}^\beta + \frac{1}{2} y^A X_A \delta_\alpha{}^\beta \right) (d_\beta + D_\beta) + O(y^2) \\
\delta \widehat{d}_\alpha &= \left(y^M Y_{M\alpha}{}^\beta + \frac{1}{2} y^A \widehat{X}_A \delta_\alpha{}^\beta \right) (\widehat{d}_\beta + \widehat{D}_\beta) + O(y^2).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

sendo X_A um vetor covariante arbitrário. O tensor $Y_{CB}{}^A$ tem as mesmas simetrias que a conexão de spin. Esta simetria será usada para fixar determinados vínculos convencionais da teoria.

4.1 Resultados obtidos no nível de árvore.

Vamos examinar as condições para obtermos a álgebra (2.5) no nível de árvore, usando a ação e os geradores definidos pela expansão em campo de fundo covariante. Como discutido anteriormente, usaremos resultados exatos para ρ e $\widehat{\rho}$ [30].

No nível de árvore não teremos pólos com ordem maior que dois. Ao calcular os OPE's diagramaticamente, contrações duplas somente aparecerão em 1 loop.

Examinando as ordens em α' de (2.5) e levando em conta o OPE de ρ com ρ , no nível de árvore só precisaremos verificar

$$\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \\
T(z)e^{\phi-\phi}d^2(w) &= \frac{2e^{\phi-\phi}d^2(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial(e^{\phi-\phi}d^2(w))}{(z-w)} \\
T(z)e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\bar{d}^2(w) &= \frac{2e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\bar{d}^2(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial(e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\bar{d}^2(w))}{(z-w)} \\
e^{\phi-\phi}d^2(z)e^{\phi-\phi}d^2(w) &= O((z-w)^1) \\
e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\bar{d}^2(z)e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\bar{d}^2(w) &= O((z-w)^1) \\
e^{\phi-\phi}d^2(z)e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\bar{G}(w) &= O((z-w)^{-1})
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Na equação acima T significa a parte de T independente de ρ . Os mesmos OPE's devem ser verificados para a parte anti-holomórfica:

$$\begin{aligned}
\hat{T}(z)\hat{T}(w) &= \frac{2\hat{T}(w)}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}\hat{T}(w)}{(\bar{z}-\bar{w})} \\
\hat{T}(z)e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{d}^2(w) &= \frac{2e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{d}^2(w)}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}(e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{d}^2(w))}{(\bar{z}-\bar{w})} \\
\hat{T}(z)e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{\bar{d}}^2(w) &= \frac{2e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{\bar{d}}^2(w)}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}(e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{\bar{d}}^2(w))}{(\bar{z}-\bar{w})} \\
e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{d}^2(z)e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{d}^2(w) &= O((\bar{z}-\bar{w})^1) \\
e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{\bar{d}}^2(z)e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{\bar{d}}^2(w) &= O((\bar{z}-\bar{w})^1) \\
\hat{G}(z)e^{\bar{\phi}-\bar{\phi}}\hat{\bar{G}}(w) &= O((\bar{z}-\bar{w})^{-1})
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Também devemos verificar se os OPE's entre os geradores holomórficos e anti-holomórficos são regulares.

Além dos OPE's descritos acima, os geradores da teoria devem ser holomórficos

$$\bar{\partial}T = \bar{\partial}(e^{\phi-\bar{\phi}}d^2) = \bar{\partial}(e^{\bar{\phi}-\phi}\bar{d}^2) = 0 \tag{4.50}$$

e correspondentemente anti-holomórficos:

$$\partial\hat{T} = \partial(e^{\hat{\phi}-\bar{\phi}}\hat{d}^2) = \partial(e^{\hat{\phi}-\hat{\phi}}\hat{\bar{d}}^2) = 0. \tag{4.51}$$

O tensor energia-momento holomórfico é a corrente de Noether associada à simetria

$$\begin{aligned}\Pi^A &\rightarrow \Pi^A \partial \varepsilon + \partial \Pi^A \varepsilon, & \bar{\Pi}^A &\rightarrow \bar{\Pi}^A \bar{\partial} \varepsilon + \varepsilon \bar{\Pi}^A \\ d^\alpha &\rightarrow d^\alpha \partial \varepsilon + \partial d^\alpha \varepsilon, & d^{\dot{\alpha}} &\rightarrow d^{\dot{\alpha}} \partial \varepsilon + \partial d^{\dot{\alpha}} \varepsilon,\end{aligned}\quad (4.52)$$

que implica imediatamente que $\bar{\partial} T = 0$. Escrevendo o gerador como $\oint \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) T(z)$, podemos verificar que os primeiros três OPE's em (4.48) são satisfeitos, comparando suas expansões com as transformações acima. O mesmo raciocínio pode ser aplicado à parte anti-holomórfica e temos $\partial \bar{T} = 0$.

Vamos agora verificar a holomorficidade de $e^{\phi - \bar{\phi}} d^2$ e $e^{\bar{\phi} - \phi} \bar{d}^2$ e a anti-holomorficidade de $e^{\hat{\phi} - \bar{\hat{\phi}}} \hat{d}^2$ e $e^{\hat{\phi} - \hat{\phi}} \hat{\bar{d}}$. Para isto precisaremos das equações de movimento da ação (3.44); estas podem ser obtidas facilmente aplicando o operador Δ definido anteriormente. As equações terão a forma

$$\nabla \bar{\Pi}_a + \bar{\nabla} \Pi_a - \Pi^C T_{Ca}{}^b \bar{\Pi}_b - \bar{\Pi}^C T_{Ca}{}^b \Pi_b + 2\bar{\Pi}^C T_{Ca}{}^{\tilde{\alpha}} d_{\tilde{\alpha}} + 2\Pi^C T_{Ca}{}^{\hat{\alpha}} \hat{d}_{\hat{\alpha}} + 2\Pi^C \bar{\Pi}^B H_{BCa} = 0 \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^{\alpha+} + P^{\alpha\beta} \hat{d}_{\hat{\beta}} + Q^{\alpha\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} &= 0 \\ \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}-} + P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\alpha}\beta} \hat{d}_{\beta} &= 0 \\ \Pi^{\alpha-} - d_{\beta} P^{\beta\alpha} - d_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}\alpha} &= 0 \\ \Pi^{\dot{\alpha}+} - d_{\dot{\beta}} P^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} - d_{\beta} Q^{\beta\dot{\alpha}} &= 0\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} d_{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2} \left(\Pi^C T_{C\hat{\alpha}}{}^b \bar{\Pi}_b + \bar{\Pi}^C T_{C\hat{\alpha}}{}^b \Pi_b \right) - \bar{\Pi}^C \left(T_{C\hat{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} d_{\dot{\beta}} \right) - \Pi^C \left(T_{C\hat{\alpha}}{}^{\beta} \hat{d}_{\beta} \right) - \\ \Pi^C \bar{\Pi}^B H_{BC\hat{\alpha}} + d_{\beta} \left(\nabla_{\hat{\alpha}} P^{\beta\gamma} \hat{d}_{\gamma} + \nabla_{\hat{\alpha}} Q^{\beta\dot{\gamma}} \hat{d}_{\dot{\gamma}} \right) \\ + d_{\dot{\beta}} \left(\nabla_{\hat{\alpha}} P^{\dot{\beta}\gamma} \hat{d}_{\gamma} + \nabla_{\hat{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\beta}\gamma} \hat{d}_{\gamma} \right) = 0\end{aligned}\quad (4.55)$$

Para obter a equação para $\hat{d}_{\hat{\alpha}}$, basta fazer a substituição: $\bar{\nabla} \rightarrow \nabla, \alpha_+ \rightarrow \alpha_-$.

Lembrando que $\bar{\nabla} = \bar{\Pi}^A \nabla_A$, temos

$$\bar{\partial} \left(e^{\phi - \bar{\phi}} d^2 \right) = \bar{\nabla} \left(e^{\phi - \bar{\phi}} d^2 \right) = 0. \quad (4.56)$$

Podemos substituir $\bar{\nabla} d_{\hat{\alpha}}$ da equação acima e verificar que tipo de vínculos T_{ABC} , H_{ABC} e os campos quirais e twist quirais devem satisfazer para G ser holomórfico. Tendo em mente a equação

$$2 \left(\bar{\nabla} d_{\alpha} \right) d^{\alpha} + d^2 \bar{\nabla} \left(\phi - \bar{\phi} \right) = 0, \quad (4.57)$$

verificamos a consistência da mesma, observando os termos independentes nos campos $(\Pi^{\beta+}, \Pi^{\beta-}, d_\alpha, \hat{d}_\alpha, ..)$. Para isto, é necessário também usar as equações (4.54). Os resultados são:

$$T_{\beta+\alpha+c} - 2H_{\beta+\alpha+c} = 0. \quad (4.58)$$

$$T_{\dot{\beta}-\alpha+c} - 2H_{c\dot{\beta}-\alpha+} = 0. \quad (4.59)$$

$$T_{\dot{\beta}+\alpha+c} - 2H_{\dot{\beta}+c\alpha+} = 0. \quad (4.60)$$

$$T_{\dot{\beta}+\alpha+c} + 2H_{c\dot{\beta}+\alpha+} = 0. \quad (4.61)$$

$$T_{a\bar{\beta}c} + T_{ac\bar{\beta}} = H_{a\bar{\beta}c} = 0. \quad (4.62)$$

$$Q^{\dot{\beta}\lambda} \left(\frac{1}{2} T_{\lambda-\alpha+c} - H_{\lambda-\alpha+c} \right) - T_{c\alpha+}{}^{\dot{\beta}-} + P^{\dot{\beta}\lambda} \left(\frac{1}{2} T_{\dot{\lambda}+\alpha+c} - H_{\dot{\lambda}+\alpha+c} \right) = 0. \quad (4.63)$$

$$T_{c\alpha+}{}^{\beta-} + P^{\lambda\beta} \left(\frac{1}{2} T_{\lambda-\alpha+c} - H_{\lambda-\alpha+c} \right) + Q^{\lambda\dot{\beta}} \left(\frac{1}{2} T_{\dot{\lambda}-\alpha+c} - H_{\dot{\lambda}-c\alpha+} \right) = 0 \quad (4.64)$$

$$T_{c\alpha+}{}^{\dot{\beta}+} + Q^{\lambda\dot{\beta}} \left(\frac{1}{2} T_{\lambda+\alpha+c} - H_{\lambda+\alpha+c} \right) - P^{\lambda\dot{\beta}} \left(\frac{1}{2} T_{\dot{\lambda}-\alpha+c} - H_{\dot{\lambda}-c\alpha+} \right) = 0 \quad (4.65)$$

Temos ainda um termo que multiplica $\hat{d}_\gamma d_{\dot{\beta}}$ na equação (4.57). Este termo envolverá apenas $\nabla_{\alpha+} \bar{Q}^{\dot{\beta}\lambda}$ e componentes espinoriais de T_{ABC} , H_{ABC} ; estas serão todas zero, como mostraremos a seguir.

Nas equações acima fica claro que os campos quirais e twist quirais não são independentes e estão relacionados com as torções. Desta forma as componentes destes supercampos devem estar no multipletto de supergravidade. Da mesma forma percebemos também que parte de H_{ABC} deve estar no multipletto de supergravidade.

Além destes vínculos, temos as equações envolvendo o dilaton:

$$\begin{aligned} \nabla_\beta P^{\beta\gamma-} &+ P^{\beta\gamma-} T_{\beta\alpha}{}^\alpha + Q^{\dot{\beta}\gamma} T_{\dot{\beta}\alpha}{}^\alpha + P^{\alpha\beta-} T_{\alpha\beta-}{}^{\gamma-} \\ &= P^{\beta\gamma-} \nabla_\beta (\phi - \bar{\phi}) + Q^{\dot{\beta}\gamma} \nabla_{\dot{\beta}} (\phi - \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
T_{\gamma-}{}^{\alpha} + \nabla_{\gamma-} (\phi - \bar{\phi}) &= 0 \\
T_{\gamma-}{}^{\dot{\alpha}} - \nabla_{\gamma-} (\phi - \bar{\phi}) &= 0 \\
T_{a\alpha}{}^{\alpha} + \nabla_a (\phi - \bar{\phi}) &= 0 \\
T_{a\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}} - \nabla_a (\phi - \bar{\phi}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Para obter os vínculos relativos às condições de holomorphicidade de $\bar{G}$ e de antiholomorphicidade de $\hat{G}$ e $\widehat{\bar{G}}$, basta reescrever o conjunto de equações anteriores, de 4.58 a 4.65 fazendo as respectivas substituições:

$$\begin{aligned}
\alpha_+ &\rightarrow \dot{\alpha}_- \\
\alpha_+ &\rightarrow \alpha_- \\
\alpha_+ &\rightarrow \dot{\alpha}_+.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Teremos também equações análogas envolvendo o dilaton, verificando $\partial\hat{G} = 0$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\beta-} P^{\gamma\beta-} &= P^{\gamma\beta-} T_{\beta-\alpha-}{}^{\alpha-} - Q^{\gamma\dot{\beta}+} T_{\dot{\beta}+\alpha-}{}^{\alpha-} - P^{\alpha\beta-} T_{\alpha\beta-}{}^{\gamma} \\
&= -P^{\gamma\beta-} \nabla_{\beta-} (\hat{\phi} - \widehat{\bar{\phi}}) - Q^{\gamma\dot{\beta}+} \nabla_{\dot{\beta}+} (\hat{\phi} - \widehat{\bar{\phi}})
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
T_{\gamma\alpha-}{}^{\alpha-} + \nabla_{\gamma} (\hat{\phi} - \widehat{\bar{\phi}}) &= 0 \\
T_{\gamma\dot{\alpha}+}{}^{\dot{\alpha}+} - \nabla_{\gamma} (\hat{\phi} - \widehat{\bar{\phi}}) &= 0 \\
T_{a\alpha-}{}^{\alpha-} + \nabla_a (\hat{\phi} - \widehat{\bar{\phi}}) &= 0 \\
T_{a\dot{\alpha}+}{}^{\dot{\alpha}+} - \nabla_a (\hat{\phi} - \widehat{\bar{\phi}}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.70}$$

As implicações destas equações serão discutidas no capítulo seguinte, onde as mesmas serão verificadas em 1 loop.

Vamos agora verificar os OPE's envolvendo G com $\bar{G}$. Devido á ordem dos pólos que queremos verificar, diagramas com mais de 2 campos de fundo externos não serão relevantes para o último OPE de (4.48). O único diagrama que poderia contribuir, corresponderia ao valor esperado

$$D_{\alpha}(z) \langle d^{\alpha}(z) d^{\dot{\beta}}(w) \rangle D_{\dot{\beta}}(w). \tag{4.71}$$

No entanto como não temos um propagador de $d^{\alpha}(z)$ a $d^{\dot{\beta}}(w)$, o valor esperado acima é nulo e o diagrama não contribui. O mesmo raciocínio vale para a parte

anti-holomórfica $\left(\widehat{G}(z)\widehat{\overline{G}}(w)\right)$. Com isto, o último OPE de (4.48) e analogamente o último OPE de (4.49) tem a forma desejada.

Resta analisar os OPE's de d^2 com $\overline{d}^2$ e $\widehat{d}^2$ com $\widehat{\overline{d}}^2$ e os termos cruzados que devem ser regulares. Vamos começar analisando estes últimos. Como agora estamos interessados em uma ordem $O\left((z-w)^0\right)$, levaremos em conta diagramas com até 4 campos de fundo.

Primeiramente vamos calcular diagramas com 3 campos de fundo. Estes já serão necessários para derivar parte dos vínculos da supergravidade. Em seguida será mostrado como diagramas com 4 campos de fundo serão anulados pelas equações de movimento derivadas anteriormente. O restante dos vínculos serão fixados usando a simetria “shift”.

Com os geradores expandidos, calcularemos a seguir os seguintes valores esperados:

$$D_\alpha(z)\left\langle d^\alpha(z)\widehat{d}^\beta(w)\right\rangle\widehat{D}_\beta(w) \quad (4.72)$$

$$D_\alpha(z)\left\langle d^\alpha(z)y^A(w)\right\rangle\widehat{D}^2(w)\nabla_A\left(\widehat{\phi}-\widehat{\overline{\phi}}\right) \quad (4.73)$$

$$D^2(z)\left\langle y^A(z)\widehat{d}^\alpha(z)(w)\right\rangle\widehat{D}_\alpha\nabla_A\left(\phi-\overline{\phi}\right) \quad (4.74)$$

$$D^2(z)\left\langle y^A(z)y^B(w)\right\rangle\widehat{D}^2(w)\nabla_A\left(\phi-\overline{\phi}\right)\nabla_B\left(\widehat{\phi}-\widehat{\overline{\phi}}\right), \quad (4.75)$$

correspondente à expansão de $\left\langle G(z)\widehat{G}(w)\right\rangle$.

Os vértices da ação que contribuirão para este cálculo envolverão dois campos quânticos pois, como mencionado anteriormente, contrações duplas somente contribuíram em 1 loop.

O diagrama (52) contribuirá para o valor esperado (4.72) contraindo d_α e $\widehat{d}_\alpha$ de (4.72) com $y_\beta, y_{\beta-}$ oriundos da ação. No nível de árvore, os OPE's poderão ser resolvidos diretamente no espaço de coordenadas. Usando a definição para a função delta em duas dimensões:

$$\partial\frac{1}{\overline{u}-\overline{w}}=\overline{\partial}\frac{1}{u-w}=\delta^2(u,w), \quad (4.76)$$

os diagramas correspondendo a (4.72) são facilmente resolvidos. A contribuição de cada vértice e a respectiva integral são dados por:

$$\text{vértice: } \frac{1}{2}\partial y^{\alpha+}y^{\beta-}\left(\overline{\Pi}^AT_{\alpha+\beta-}{}^a-2\overline{\Pi}^AH_{A\alpha+\beta-}+2\left(T_{\alpha+\beta-}{}^{\hat{a}}\widehat{D}_{\hat{a}}\right)\right):$$

$$\int d^2u\frac{1}{z-u}\partial\frac{1}{\overline{u}-\overline{w}}=\frac{1}{z-w} \quad (4.77)$$

$$\text{vértice: } \frac{1}{2}\overline{\partial}y^{\alpha+}y^{\beta-}\left(\Pi^aT_{\alpha+\beta-}{}^a+2\Pi^AH_{A\alpha+\beta-}+2\left(T_{\alpha+\beta-}{}^{\hat{a}}D_{\hat{a}}\right)\right):$$

$$\int d^2u \frac{1}{z-u} \bar{\partial} \frac{1}{\bar{u}-\bar{w}} = \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \quad (4.78)$$

Com estes resultados temos facilmente a contribuição do diagrama (52) para o valor esperado (4.72) :

$$\begin{aligned} D_\alpha(z) \langle d^\alpha(z) \hat{d}^\beta(w) \rangle \widehat{D}_\beta(w) &= \frac{1}{(z-w)} D^\alpha \widehat{D}^\gamma \bar{\theta}_{\gamma-\alpha+} \\ &+ \frac{\bar{z}-\bar{w}}{(z-w)} (\bar{\partial} D^\alpha D^\gamma \bar{\theta}_{\gamma\alpha}) \\ &+ \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})} D^\alpha \widehat{D}^\gamma \theta_{\gamma-\alpha+} \\ &+ \frac{z-w}{(\bar{z}-\bar{w})} \partial D^\alpha \widehat{D}^\gamma \theta_{\gamma-\alpha+} \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{\gamma-\alpha+} &= \frac{1}{2} \bar{\Pi}^a T_{\gamma-\alpha+}{}^a - \bar{\Pi}^A H_{A\gamma-\alpha+} - T_{\gamma-\alpha+}{}^{\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}} \\ \theta_{\gamma-\alpha+} &= \frac{1}{2} \Pi^a T_{\gamma-\alpha+}{}^a - T_{\gamma-\alpha+}{}^{\hat{\beta}} D_{\hat{\beta}} + \Pi^A H_{A\gamma-\alpha+}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

A contribuição em ordem 3 nos campos clássicos é facilmente calculada para os valores esperados (4.73) e (4.74) :

$$\begin{aligned} D_\alpha(z) \langle d^\alpha(z) y^A(w) \rangle \widehat{D}^2(w) \nabla_A (\hat{\phi} - \bar{\hat{\phi}}) &= \frac{1}{(z-w)} D^\alpha \widehat{D}^2 \nabla_\alpha (\hat{\phi} - \bar{\hat{\phi}}) \\ &+ \frac{\bar{z}-\bar{w}}{(z-w)} \bar{\partial} D^\alpha \widehat{D}^2 \nabla_\alpha (\hat{\phi} - \bar{\hat{\phi}}) \\ D^2(z) \langle y^A(z) \hat{d}^\alpha(z) \rangle \widehat{D}_\alpha \nabla_A (\phi - \bar{\phi}) &= \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})} D^2 \widehat{D}^{\alpha-} \nabla_{\alpha-} (\phi - \bar{\phi}) \\ &+ \frac{z-w}{(\bar{z}-\bar{w})} D^2 \widehat{D}^{\alpha-} \nabla_{\alpha-} (\phi - \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Anulando os termos independentes nos campos clássicos, em conjunto com os resultados anteriores, temos os vínculos para as torções

$$T_{\gamma-\alpha+}{}^c = T_{\gamma-\alpha+}{}^{\dot{\gamma}-} = T_{\gamma-\alpha+}{}^{\dot{\gamma}+} = H_{\gamma-\alpha a} = H_{\gamma-\alpha+}{}^{\dot{\gamma}-} = H_{\gamma-\alpha+}{}^{\dot{\gamma}+} = 0, \quad (4.82)$$

e as seguintes equações envolvendo o dilaton:

$$\begin{aligned}
T_{\gamma-\alpha+}{}^{\alpha+} + \nabla_{\gamma-} (\phi - \bar{\phi}) &= 0 \\
T_{\alpha+\gamma-}{}^{\gamma-} + \nabla_{\alpha+} (\hat{\phi} - \hat{\bar{\phi}}) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

As equações acima já foram derivadas anteriormente da condição $\partial G = 0$ e $\bar{\partial} \hat{G} = 0$.

Usando as definições dadas no apêndice para as derivadas covariantes atuando em $(\phi - \bar{\phi})$ e $(\hat{\phi} - \hat{\bar{\phi}})$, os resultados derivados até agora não violam a simetria (4.47). Antes de fazer os mesmos cálculos em 1 loop, a simetria (4.47) será fixada; no entanto é importante garantir que os OPE's não violam a mesma. Os campos X_A , $\hat{X}_A$ e $Y_{CB}{}^A$ têm as mesmas propriedades algébricas que as conexões, sendo assim redefinições das mesmas. Desta forma, a não dependência dos mesmos nas equações derivadas garante que o procedimento não depende das conexões.

Podemos estender a análise até 3 campos clássicos para os outros OPE's. Para $G(z)G(w)$ os vértices serão os mesmos com $\theta_{\gamma-\alpha+} \rightarrow \frac{1}{2}\theta_{\gamma+\alpha+}$. Neste caso teremos integrais do tipo:

$$\int d^2u \frac{1}{z-u} \partial \frac{1}{u-w} = \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^2} \tag{4.84}$$

O resultado acima é obtido substituindo:

$$\frac{1}{z-w} = \bar{\partial}_z \left(\frac{\bar{z} - \bar{w}}{z-w} \right) \tag{4.85}$$

e fazendo integração por partes. O resultado total fica:

$$\begin{aligned}
\langle d^2(z) d^2(w) \rangle &= \frac{(\bar{z} - \bar{w})^2}{(z-w)^2} \bar{\partial} D^\alpha D^\gamma \bar{\Theta}_{\gamma+\alpha+} \\
&+ \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)} \left(\partial D^\alpha D^\gamma \bar{\Theta}_{\gamma+\alpha+} + \bar{\partial} D^\alpha D^\gamma \Theta_{\gamma+\alpha+} \right) \\
&+ \bar{\partial} D^\alpha D^\gamma \Theta_{\gamma+\alpha+}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\Theta_{\gamma+\alpha+} &= \frac{1}{4} \Pi^a T_{\gamma+\alpha+}{}^a - \frac{1}{2} T_{\gamma+\alpha+}{}^{\hat{\beta}} D_{\hat{\beta}} - \frac{1}{2} \Pi^A H_{A\gamma+\alpha+} - \frac{1}{2} D_\gamma \nabla_{\alpha+} (\phi - \bar{\phi}) \\
\bar{\Theta}_{\gamma+\alpha+} &= \frac{1}{4} \bar{\Pi}^a T_{\gamma+\alpha+}{}^a - \frac{1}{2} \bar{\Pi}^A H_{A\gamma+\alpha+} - \frac{1}{2} T_{\gamma+\alpha+}{}^{\hat{\beta}} \widehat{D}_{\hat{\beta}}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Estes resultados violam os OPEs (4.48) e os termos devem se anular independentemente, levando aos vínculos:

$$T_{\gamma+\alpha+}{}^a = T_{\gamma+\alpha+}{}^{\dot{\gamma}_i} = H_{\gamma+\alpha+a} = H_{\gamma+\alpha+\dot{\gamma}_i} = H_{\gamma+\alpha+\gamma_i} = 0 \tag{4.88}$$

$$T_{\gamma+\alpha+}{}^{\alpha+} + 2\nabla_{\gamma}(\phi - \bar{\phi}) = 0 \quad (4.89)$$

Antes de discutir com mais detalhes os vínculos até agora derivados, percebemos que a equação (4.89) viola claramente a simetria (4.47). Como discutido anteriormente, os OPE's deveriam preservar as mesmas, pois a teoria não deve depender das conexões. A simetria (4.47) também será útil para derivar determinados vínculos convencionais da supergravidade.

Podemos mostrar que os OPE's não violam a simetria "shift", mas que a equação (4.89) revela uma possível ambiguidade na contribuição de $\phi - \bar{\phi}$ nos cálculos no nível de árvore. As equações (4.89) e (??) podem ser eliminadas somando na ação um termo da forma:

$$\int d^2z (\bar{\nabla}D_{\gamma} + \dots) y^{\alpha+}y^{\beta+}S_{\beta+\alpha+}{}^{\gamma+}$$

sendo $(\bar{\nabla}D_{\gamma} + \dots)$ a equação de movimento (4.55), substituindo d_{γ} por D_{γ} . Como D_{γ} é um campo clássico, o termo somado à ação é sempre nulo. Fazendo integração por partes em $\bar{\nabla}$, temos uma série de vértices com dois campos de fundo que não contribuirão, e um termo com um campo de fundo da forma:

$$\int d^2z (-2D_{\gamma}\bar{\partial}y^{\alpha+}y^{\beta+}S_{\beta+\alpha+}{}^{\gamma+}) \quad (4.90)$$

Escolhendo $S_{\beta+\alpha+}{}^{\gamma+}$ é possível anular (4.89). Desta forma todos os resultados são "shift" invariantes. Para ser consistente devemos levar em conta os vértices oriundos de (4.90) nos cálculos em um loop. Felizmente, após fixar todos os vínculos, os mesmos não contribuirão em nenhum diagrama relevante para o cálculo.

Para os demais OPE's, os cálculos são idênticos, bastando fazer as seguintes substituições, em relação á (4.82) e (4.88) :

$$OPE : \hat{G}(z)\hat{G}(w)$$

$$\gamma_+ \rightarrow \gamma_- \quad (4.91)$$

$$\alpha_+ \rightarrow \alpha_-$$

$$OPE : \hat{\hat{G}}(z)\hat{\hat{G}}(w)$$

$$\gamma_+ \rightarrow \dot{\gamma}_+ \quad (4.92)$$

$$\alpha_+ \rightarrow \dot{\alpha}_+$$

$$OPE : \overline{G}(z)\overline{G}(w)$$

$$\begin{aligned}\gamma_+ &\rightarrow \dot{\gamma}_- \\ \alpha_+ &\rightarrow \dot{\alpha}_-\end{aligned}\tag{4.93}$$

O próximo passo será mostrar que os diagramas com 4 campos clássicos são anulados pelo conjunto de vínculos derivados até agora e pela equações de movimento envolvendo dilaton. Tendo em mente que o cálculo é um tanto quanto tedioso, e somando-se a isto que o mesmo não fornecerá nenhum resultado novo, não serão discutidos em detalhes os cálculos de todos os diagramas envolvidos.

Como exemplo será analisado o OPE $\langle G(z) \hat{G}(w) \rangle$. Vamos começar mostrando que os termos envolvendo o produto $\Pi^a \Pi^d D_\alpha \hat{D}_\beta$ são cancelados pelos vínculos derivados anteriormente. O diagrama (59) envolverá o vértice:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{(\Pi^d \bar{\Pi}^a + \Pi^a \bar{\Pi}^d)}{4} y^{\alpha+} y^{\beta-} T_{d[\beta-\alpha]a} \\ &\quad + \frac{\Pi^a \bar{\Pi}^d}{2} y^{\alpha+} y^{\beta-} H_{d[\beta-\alpha]a}\end{aligned}\tag{4.94}$$

Antes de mostrar a contribuição deste vértice ao diagrama supracitado, pode-se mostrar que $T_{\beta_i da} = 0$. Para isto, basta usar os vínculos derivados anteriormente em conjunto com a identidade de Bianchi

$$R_{(\dot{\alpha}_i \beta_j \gamma_k]d} = \nabla_{(\dot{\alpha}_i} T_{\beta_j \gamma_k]d} - T_{(\dot{\alpha}_i \beta_j} {}^E T_{E \gamma_k]d}.\tag{4.95}$$

Com as definições (4.36), (4.37) e somando-se o resultado acima aos vínculos já derivados, a contribuição do vértice (4.94) para o diagrama (59) é:

$$\begin{aligned}I(59)_P &= -2\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \left(T_{d\beta-}{}^{\dot{\rho}-} T_{\dot{\rho}-\alpha+a} - T_{a\alpha+}{}^{\dot{\rho}+} T_{\dot{\rho}+\beta-d} \right) \hat{D}^\beta \int d^2u \frac{1}{z-u} \frac{1}{\bar{u}-\bar{w}} \\ &= -2\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \left(T_{d\beta-}{}^{\dot{\rho}-} T_{\dot{\rho}-\alpha+a} - T_{a\alpha+}{}^{\dot{\rho}+} T_{\dot{\rho}+\beta-d} \right) \hat{D}^\beta \ln |z-w|^2\end{aligned}\tag{4.96}$$

Onde a notação $I(A)_P$ significa a contribuição do vértice A ao produto P .

Passamos agora à contribuição do diagrama (55). Neste caso, temos duas contribuições. Uma usando os vértices $\hat{d}_\alpha y^{\alpha+} (\Pi^b T_{b\alpha+}{}^{\alpha-})$ e $-\partial y^{\dot{\beta}+} y^{\gamma-} \bar{\Pi}^a T_{\gamma-\dot{\beta}+}{}^a$. A outra contribuição é dada pelos vértices $d_{\tilde{\alpha}} y^{\beta-} (\bar{\Pi}^a T_{a\beta-}{}^{\tilde{\alpha}})$ e $\bar{\partial} y^{\alpha} y^{\dot{\beta}-} \Pi^a T_{\dot{\beta}-\alpha}{}^a$. O resultado total é dado por:

$$\begin{aligned}
I(55)_P &= 4\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \left(T_{d\beta-}^{\dot{\rho}-} T_{\dot{\rho}-\alpha+a} - T_{a\alpha+}^{\dot{\rho}+} T_{\dot{\rho}+\beta-d} \right) \widehat{D}^\beta \int d^2 u \int d^2 v \frac{1}{z-u} \delta^2(u-v) \frac{1}{\bar{v}-\bar{w}} \\
&= 4\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \left(T_{d\beta-}^{\dot{\rho}-} T_{\dot{\rho}-\alpha+a} - T_{a\alpha+}^{\dot{\rho}+} T_{\dot{\rho}+\beta-d} \right) \widehat{D}^\beta \ln |z-w|^2
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Por último, temos a contribuição do diagrama(120). Este envolve os vértices $\bar{\partial} y^\alpha y^{\dot{\beta}-} \Pi^a T_{\dot{\beta}-\alpha}^a, -\partial y^{\dot{\beta}+} y^{\gamma-} \bar{\Pi}^a T_{\gamma-\dot{\beta}+}^a$ e um vértice sem campos externos: $d_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}}$. O resultado é:

$$\begin{aligned}
I(120)_P &= 4\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \left(T_{\dot{\rho}-\alpha+a} P^{\dot{\rho}\dot{\beta}} T_{\dot{\beta}+\beta-d} \right) \widehat{D}^\beta \ln |z-w|^2 \\
&= -4\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \left(T_{d\beta-}^{\dot{\rho}-} T_{\dot{\rho}-\alpha+a} \right) \widehat{D}^\beta \ln |z-w|^2
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Na equação acima foi usado o vínculo (4.65) em conjunto com (4.60) com α_- no lugar de α_+ .

Usando a identidade:

$$T_{d\beta-}^{\dot{\rho}-} T_{\dot{\rho}-\alpha+a} = -T_{a\alpha+}^{\dot{\rho}+} T_{\dot{\rho}+\beta-d}, \tag{4.99}$$

que pode ser derivada facilmente usando vínculos como (4.65), percebemos claramente que todas as contribuições envolvendo $\Pi^a \bar{\Pi}^d D^\alpha \widehat{D}^\beta$ cancelam-se.

Termos envolvendo os valores esperados (4.73) e (4.74) são cancelados usando as equações de movimento. Como antes, vamos nos ater apenas a um caso particular. Por exemplo, termos envolvendo $D^2 \bar{\Pi}^a \widehat{D}^\beta$. Vamos calcular a contribuição dos diagramas (53), (55) e (120). O diagrama (53), tem a contribuição:

$$I(53)_P = 2D^2 \bar{\Pi}^a \widehat{D}^\beta \left(T_{a\beta-}^\alpha \nabla_\alpha (\phi - \bar{\phi}) + T_{a\beta-}^{\dot{\alpha}-} \nabla_{\dot{\alpha}-} (\phi - \bar{\phi}) \right) \ln |z-w|^2, \tag{4.100}$$

onde foi usado o vértice $d_{\dot{\alpha}} y^{\beta-} (\bar{\Pi}^a T_{a\beta-}^{\dot{\alpha}})$. O diagrama (55) contribui usando os vértices $D_\alpha y^\gamma \nabla_\gamma Q^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}}$ e $(\hat{d}_{\dot{\alpha}} y^{\alpha+} \Pi^{\dot{\beta}+} T_{\dot{\beta}+\alpha+}^{\dot{\alpha}+})$ com $-\partial y^{\dot{\beta}+} y^{\alpha-} \bar{\Pi}^a T_{\dot{\beta}+\alpha-}^a$. O resultado é:

$$I(55)_P = 2D^2 \bar{\Pi}^a \widehat{D}^\beta T_{\dot{\beta}+\beta-}^a \left(\nabla_\alpha Q^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + Q^{\alpha\dot{\gamma}} T_{\dot{\gamma}+\alpha+}^{\dot{\beta}+} \right) \ln |z-w|^2. \tag{4.101}$$

O diagrama (120) tem duas contribuições: usando os vértices $\bar{\partial} y^\alpha y^A (T_{A\alpha}^\gamma D_\gamma)$ e $d_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}} + d_\alpha Q^{\alpha\dot{\beta}} \hat{d}_{\dot{\beta}}$ com $-\partial y^{\dot{\beta}+} y^{\gamma-} \bar{\Pi}^a T_{\gamma-\dot{\beta}+}^a$ temos o resultado:

$$I(120)_P = 2D^2 \bar{\Pi}^a \widehat{D}^\beta T_{\dot{\beta}+\beta-}^a \left(P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{\dot{\alpha}\alpha}^\alpha + Q^{\gamma\dot{\beta}} T_{\gamma\alpha}^\alpha \right) \ln |z-w|^2 \quad (4.102)$$

Usando em (4.100) os vínculos que relacionam $P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ e $Q^{\gamma\dot{\beta}}$ com as torções, a soma de $I(F)$, $I(H)$ e $I(G)$ reproduz exatamente a equação (4.66) para $Q^{\alpha\dot{\beta}}$. Os demais diagramas que contribuiriam para o produto de campos analisados produzem as mesmas equações, no entanto o resultado é mais fácil de ser analisado fixando a simetria “shift”. Ao estender estes cálculos ao nível de 1 loop, todos os diagramas relevantes serão avaliados. Após todos estes cálculos, vamos analisar os vínculos encontrados.

Observando os vínculos obtidos, percebemos claramente que podemos escrever:

$$T_{\gamma i \dot{\alpha} j}^a = \varepsilon_{ij} S_{\gamma \dot{\alpha}}^a \quad (4.103)$$

Em um loop devemos obter $S_{\gamma \dot{\alpha}}^a = -2i\delta_a^\lambda \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}} \nabla_{\gamma \dot{\alpha}}^\lambda$ para que o anticomutador

$$\{\nabla_{\alpha i}, \nabla_{\dot{\beta} j}\} = -2i\varepsilon_{ij} \nabla_{\alpha \dot{\beta}} \quad (4.104)$$

seja satisfeito, mantendo o resultado do espaço plano. Escolhendo $S_{\gamma \dot{\alpha}}^a$ desta forma, temos, pela equação (4.59) :

$$H_{c\alpha i \dot{\beta} j} = -i\delta_{ij} C_{\alpha\lambda} C_{\dot{\beta}\dot{\lambda}} \quad (4.105)$$

De posse deste resultado, podemos separar os vínculos em três categorias:

1. Vínculos conformes: $H_{\alpha i \dot{\beta} j}^c$

$$\begin{aligned} H_{\alpha i \dot{\beta} j}^c &= -i\delta_{ij} \delta_\alpha^\lambda \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}} \\ T_{c\alpha+}^{\gamma-} &= -T_{\alpha+\dot{\alpha}-c} \bar{Q}^{\dot{\alpha}\gamma}, T_{c\alpha-}^{\gamma+} = T_{\alpha-\dot{\alpha}+c} Q^{\gamma\dot{\alpha}} \\ T_{c\alpha+}^{\dot{\gamma}+} &= T_{\alpha+\dot{\alpha}-c} P^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}, T_{c\alpha-}^{\dot{\gamma}-} = T_{\alpha-\dot{\alpha}+c} P^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} \\ T_{c\alpha+}^{\dot{\gamma}-} &= T_{c\alpha-}^{\dot{\gamma}+} = 0 \end{aligned} \quad (4.106)$$

Estes vínculos quebram a invariância de escala e $SU(2)$, preservando $U(1)$. Resolvendo identidades de Bianchi, mostraremos que:

$$T_{abc} + 2H_{abc} = 0 \quad (4.107)$$

As demais componentes de H_{ABC} são zero. Comparando o resultado acima com (3.9), percebemos que os vínculos fixam $L_{ij} = \delta_{ij}$, identificando que estamos no gauge de corda, onde o multipletto hipertensorial é fixado e não o compensador como usual.

A relação (4.107) mostra que todas as componentes físicas da supergraviade e da matéria N=2 estarão no vierbein; em particular o escalar físico será o determinante do vierbein e não o que chamamos de dilaton. Isto deve ser confirmado em 1 loop.

2. Vínculos que preservam a representação:

$$\begin{aligned} T_{\alpha_k \dot{\beta}_+}^{\dot{\gamma}_-} &= T_{\alpha_j \beta_k}^c = 0 \\ T_{\alpha_k \beta_+}^{\dot{\gamma}_-} &= T_{\alpha_k \dot{\beta}_-}^{\dot{\gamma}_+} = 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Estes vínculos tornam possível a definição de campos quirais e twist quirais.

3. Vínculos convencionais:

$$\begin{aligned} T_{\alpha_i \dot{\beta}_j}^c &= -2i\varepsilon_{ij}\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\lambda \\ T_{\alpha_i(bc)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Em geral, os vínculos convencionais são definidos de forma arbitrária, pois estão relacionados com redefinições das conexões e do vierbein. Para completar o conjunto de vínculos necessários para que possamos obter, junto com identidades de Bianchi, o conteúdo físico da teoria, precisamos de mais vínculos convencionais para poder escrever derivadas covariantes vetoriais em termos de espinoriais, e determinar superconexões em termos de supervierbeins. Lembrando que os parâmetros da simetria “shift” são tensores com as mesmas propriedades algébricas das conexões, podemos usar a simetria shift para anular algumas componentes da torção. Por exemplo, o tensor $Y_{\dot{\alpha}_i \beta_+}^{\gamma_+}$ pode remover a parte simétrica da torção $(T_{\dot{\alpha}_i(\beta_+}^{\gamma_+)})$, enquanto que $X_{\dot{\alpha}_i}$ a parte anti-simétrica $(T_{\dot{\alpha}_i[\beta_+}^{\gamma_+]})$. O tensor $Y_{\alpha_+ \beta_+}^{\gamma_+}$ pode remover completamente a componente $T_{\alpha_+ \beta_+}^{\gamma_+}$ e de forma análoga $Y_{a \beta_+}^{\gamma_+}$ remove a parte $T_{a(\beta_+}^{\gamma_+)}$. Da mesma forma, podemos usar $\widehat{X}_A$ e $Y_{A \beta_-}^{\gamma_-}$ para fixar correspondentemente $T_{\dot{\alpha}_i[\beta_-}^{\gamma_-}]$, $T_{\alpha_- \beta_-}^{\gamma_-}$, etc. Para finalizar, podemos usar X_a e $\widehat{X}_a$ para fixar $T_{a \beta_+}^{\beta_+} - T_{a \dot{\beta}_-}^{\dot{\beta}_-}$ e $T_{a \beta_-}^{\beta_-} - T_{a \dot{\beta}_+}^{\dot{\beta}_+}$. Somando-se aos vínculos derivados dos OPE's e das condições de holomorphicidade e anti-holomorphicidade, temos mais os vínculos convencionais:

$$\begin{aligned} T_{\alpha_+ \beta_+}^{\gamma_+} &= T_{\dot{\alpha}_i \beta_+}^{\gamma_+} = T_{\alpha_i \dot{\beta}_-}^{\dot{\gamma}_-} = T_{a(\beta_+}^{\gamma_+)} = T_{a(\dot{\beta}_+}^{\dot{\gamma}_+)} = T_{a \beta_+}^{\beta_+} - T_{a \dot{\beta}_-}^{\dot{\beta}_-} = 0 \\ T_{\alpha_- \beta_-}^{\gamma_-} &= T_{\dot{\alpha}_i \beta_-}^{\gamma_-} = T_{\alpha_i \dot{\beta}_+}^{\dot{\gamma}_+} = T_{a(\beta_-}^{\gamma_-)} = T_{a(\dot{\beta}_+}^{\dot{\gamma}_+)} = T_{a \beta_-}^{\beta_-} - T_{a \dot{\beta}_+}^{\dot{\beta}_+} = 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Este resultado finaliza a análise no nível de árvore. Os vínculos derivados devem reduzir os graus de liberdade do vierbein e das conexões, para que os mesmos possuam

os mesmos graus de liberdade do multiplete de supergravidade em U . A análise ainda mostra que o modelo sigma seleciona um gauge particular, fixando a matéria de forma a quebrar o $SU(2)$ e a invariância de escala. Em particular, as componentes de H_{ABC} , que não são fixas, estão relacionadas com a torção pela equação (4.107). Desta forma, concluímos que dos $32+32$ graus de liberdade iniciais em U , apenas $24+24$ são independentes. Faltam então $16+16$ graus de liberdade para termos o conteúdo físico da supergravidade tipo II. Estes devem estar nos campos ϕ_c e ϕ_{tc} , que farão o papel do compensador. No próximo capítulo será feita a análise em 1 loop e discutidas as equações de movimento derivadas.

Capítulo 5

Modelo sigma tipo II em 1 loop

Neste capítulo será analisada a consistência da álgebra $N = (2, 2)$ em 1 loop. Existem três motivos básicos que nos impelem a transportar os cálculos anteriores ao nível de 1 loop. Primeiramente, é interessante verificar se os vínculos derivados anteriormente não sofrem correções em 1 loop. Fundamental, seria verificar que os mesmos não sofrem nenhuma correção quântica. Em segundo lugar existe uma certa arbitrariedade, dada por (4.89) na informação oriunda do dilaton no nível de árvore. Isto pode refletir o fato que o dilaton não acopla classicamente com a ação e a princípio não deveríamos obter informação do mesmo no nível de árvore. Indo na mesma direção, analisando as ordens em α' nos OPE's (2.77), as equações de movimento aparecem em ordem α' , visto que esta é a ordem que teremos contrações duplas. Em nossa análise perturbativa diagramática, contrações duplas significam 1 loop, portanto deveríamos esperar derivar as equações de movimento em 1 loop.

De fato, apesar das constatações anteriores, mostaremos no final deste capítulo que as equações de movimento derivadas no nível de árvore são as equações de movimento procuradas. As mesmas serão derivadas nos OPE's de T, G e $\overline{G}$ em 1 loop. A parte referente aos geradores derivados do termo de Fradkin-Tseytlin, contribuirá com diagramas no nível de árvore, dada a ordem em α' à frente dos mesmos. A análise para os geradores anti-holomórficos $\hat{T}, \hat{G}$ e $\overline{\hat{G}}$ é idêntica.

5.1 Prescrição em 1 loop.

A idéia básica é estender a expansão em campo de fundo covariante de forma a levar em conta não apenas contrações simples envolvendo os campos quânticos, mas também contrações duplas e triplas de campos envolvendo a ação e os geradores. Para cada OPE envolvendo os geradores expandidos, teremos uma série de valores esperados, tendo um procedimento diagramático para calcular os mesmos. Como já mencionado, não levaremos em conta termos envolvendo as conexões, pois as

mesmas devem ser canceladas no final. Desta forma, temos o termo cinético na ação envolvendo os campos quânticos

$$S_{cinetico} = \frac{1}{\alpha'} \int d^2 z \left(\frac{1}{2} \partial y^a \bar{\partial} y_a + d_{\bar{\alpha}} \bar{\partial} y^{\bar{\alpha}} + \hat{d}_{\hat{\alpha}} \partial y^{\hat{\alpha}} \right).$$

Como queremos verificar os OPEs, devemos obter resultados no espaço de coordenadas. A partir da ação acima, temos os propagadores:

$$\begin{aligned} \langle y^a(z) y^b(w) \rangle &= \alpha' G(z, w) = \alpha' \ln |z - w|^2 \\ \langle d_{\alpha}(p) y^{\beta+}(l) \rangle &= \frac{\alpha' \delta_{\alpha}^{\beta}}{(z - w)} = -\alpha' \delta_{\alpha}^{\beta} \partial_z G(z, w) \\ \langle \hat{d}_{\alpha}(p) y^{\beta-}(l) \rangle &= \frac{\alpha' \delta_{\alpha}^{\beta}}{(\bar{z} - \bar{w})} = -\alpha' \delta_{\alpha}^{\beta} \partial_{\bar{z}} G(z, w) \end{aligned}$$

onde a função de Green $G(z, w)$ em duas dimensões pode ser escrita como:

$$G(z, w) = \int d^2 k \frac{e^{ik(z-w) + i\bar{k}(\bar{z}-\bar{w})}}{|k|^2}, \quad (5.1)$$

assim como $d^2 z$ é definido no plano complexo como $\frac{dx dy}{\pi}$, a medida $d^2 k$ é escrita como $\frac{dk_x dk_y}{\pi}$.

A idéia básica do cálculo consiste em realizar um procedimento diagramático para calcular valores esperados de campos compostos no espaço de coordenadas [35]. No entanto, existe uma série de complicações e ambigüidades quando tratamos integrais de Feynman no espaço de coordenadas em duas dimensões. Como exemplo, discutiremos a seguinte integral[2]:

$$\int d^2 u d^2 v \frac{1}{z - u} \frac{1}{u - v} \delta^2(u - v) \delta^2(u - w), \quad (5.2)$$

a mesma apareceria no cálculo do diagrama (9), que será feito em detalhes na próxima seção. Se primeiro resolvermos a integral em u , obtemos:

$$\int d^2 v \frac{1}{z - w} \frac{1}{w - v} \delta^2(v - w) = -\frac{1}{2} \frac{1}{z - w} \int d^2 v \bar{\partial} \frac{1}{(v - w)^2} = 0, \quad (5.3)$$

por outro lado, fazendo primeiro em v , obtemos:

$$\int d^2 u \frac{1}{z - u} \bar{\partial}_u \frac{1}{(u - w)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(z - w)^2} \quad (5.4)$$

Esta ambigüidade reflete o fato que deveríamos regularizar as integrais. Embora existe na literatura um procedimento consistente para regularizar tais integrais no espaço de coordenadas[36], [35], usaremos aqui um método mais simples.

Todo o procedimento diagramático será realizado no espaço de momentos e será usada uma prescrição para a regularização dimensional. Os termos cinéticos serão mantidos em $2-\varepsilon$ dimensões, mas as interações serão tratadas em duas dimensões. Este procedimento parece não acarretar em nenhum problema em 1 loop e já foi usado extensivamente na literatura,[37],[32]. Existe uma série de propostas de regularizações na literatura, envolvendo modelo sigma em duas dimensões, onde são discutidas a regularização analítica, exponencial e Pauli-Villars [38],[39],[40]. Em particular, na referência [41] é discutido a regularizaçãodimensional aqui utilizada até dois loops no modelo de WZW (Wess-Zumino-Witten), onde é mostrado que o procedimento adotado não tem problemas até esta ordem. Para finalizar a prescrição, o campo d_α será visto como um campo vetorial com uma única componente z , e da mesma forma o campo $\hat{d}_\alpha$ será visto como um campo vetorial com componente $\bar{z}$.

De posse das funções de Green, os propagadores no espaço de momentos são escritos da seguinte forma

$$\langle y^a(p) y^b(l) \rangle = \alpha' \delta(p+l) \frac{1}{|p|^2} \quad (5.5)$$

$$\langle d_\alpha(p) y^{\beta+}(l) \rangle = \alpha' \delta(p+l) \frac{-ip}{|p|^2} \quad (5.6)$$

$$\langle \hat{d}_\alpha(p) y^{\beta-}(l) \rangle = \alpha' \delta(p+l) \frac{-i\bar{p}}{|p|^2} \quad (5.7)$$

Lembrando que na prescrição utilizada, os campos d_α e $y^{\beta+}$ são vistos como vetores com uma única compente z no plano complexo. Sendo assim, o p no denominador em (5.6) é de fato a componete z , p_z . Enquanto que $\bar{p}$ em (5.7) é a componente $p_{\bar{z}}$. Usaremos sempre p e $\bar{p}$, para não carregar a notação. Seguindo as referências [41], [32], [2], as integrais em $d = 2 - 2\varepsilon$ dimensões ficam da forma

$$\begin{aligned} & \Gamma(1+\varepsilon) \mu^{-2\varepsilon} \int d^d p \frac{p^a \bar{p}^b}{[|P|^2]^\alpha [P-K]^\beta} = \\ & k^{a+1-\alpha-\beta} \bar{k}^{b+1-\alpha-\beta} \left| \frac{K^2}{\mu^2} \right|^{-\varepsilon} \sum_{i=0}^{i=a} \binom{a}{i} \left[\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta+b+i-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon-\alpha-\beta+i+b)} \right. \\ & \left. \times \Gamma(\alpha+\beta-1-i+\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon-\beta+i) \right] \end{aligned}$$

Onde colocamos $\Gamma(1+\varepsilon)$ na frente de cada loop para eliminar termos como a constante de Euler, os mesmos são eliminados usando o esquema MS(minimal subtraction) de renormalização. De forma que este procedimento, também identificado na literatura como “G Esquem”[41], é uma versão do esquema MS. Como usual

em regularização dimensional, o parâmetro μ é colocado para manter as dimensões originais dos campos, quando fazemos a continuação analítica para $2-2\varepsilon$ dimensões.

Após fazer os cálculos no espaço dos momentos, devemos fazer a transformada de Fourier para o espaço de coordenadas, a fim de comparar o resultado com os OPE's. Temos por exemplo relações do tipo:

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{\bar{k}} &\longleftrightarrow -\frac{1}{(z-w)^2} & \frac{\bar{k}}{k} &\longleftrightarrow -\frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \\
 \left(\frac{k}{\bar{k}}\right)^2 &\longleftrightarrow -\frac{2(\bar{z}-\bar{w})}{(z-w)^3} & \left(\frac{\bar{k}}{k}\right)^2 &\longleftrightarrow -\frac{2(z-w)}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \\
 \frac{P}{\varepsilon\bar{P}} + \frac{P}{\bar{P}} \left(1 - \log \frac{|P|^2}{\mu^2}\right) &\longleftrightarrow \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \\
 \frac{\bar{P}}{\varepsilon P} + \frac{\bar{P}}{P} \left(1 - \log \frac{|P|^2}{\mu^2}\right) &\longleftrightarrow \frac{G(z,w)}{(\bar{z}-\bar{w})^2}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Os primeiros termos da expansão acima são derivados fazendo a transformada de Fourier. Os dois últimos são derivados comparando os resultados com $\langle y(z) y(w) \rangle \langle \partial y(z) \partial y(w) \rangle$. Após realizar os cálculos no espaço dos momentos e voltar para o espaço de posições, os termos holomórficos da álgebra envolvendo T, G e $\bar{G}$ que diferem da álgebra $N=2$ esperada serão cancelados via contratermos nos geradores. As equações de movimento serão lidas dos termos anti-holomórficos de T, G e $\bar{G}$ e holomórficos de $\hat{T}, \hat{G}$ e $\hat{\bar{G}}$.

Aqui é lícito lembrar o problema infravermelho em duas dimensões. O problema começa na teoria livre, visto que o propagador não é bem definido [42],[43]. De fato, temos uma ambiguidade da forma:

$$\Delta(P) = \frac{1}{|P|^2} + c\delta^2(P) \tag{5.9}$$

A constante c simboliza a divergência infravermelha da teoria livre e no final, ao somar todos os diagramas a mesma é cancelada. Na verdade poderíamos ter no lado direito de (5.8) qualquer termo finito proporcional a $\frac{P}{\bar{P}}$ e $\frac{\bar{P}}{P}$ visto que todas as divergências serão canceladas no final, refletindo o fato que estamos calculando valores esperados de correntes conservadas. No entanto, como estamos usando regularização dimensional, deveríamos esperar anomalias na álgebra conforme vindas da própria regularização. Estas serão identificadas pelos contratermos que serão necessários para manter a álgebra correta. Na referência [32] a constante c é conduzida em todos os passos e é mostrado que a mesma desacopla nos calculos finais. Aqui não será feita a substituição(5.9) e todas as divergências serão contidas nos dois últimos termos de (5.8).

Na análise em 1 loop serão levados em conta diagramas com até dois campos de fundo, que é o número de campos que cada gerador possui e que deve aparecer na álgebra $N = (2, 2)$, quando calculada exatamente. Lembrando que o operador ∂ pode ser escrito como $\Pi^A \nabla_A$, não será feita expansão em série de Taylor quando tivermos já dois campos de fundo. Outro fator importante é que, como na referência [2], não será levado em conta nos valores esperados expansões dos termos envolvendo $e^{\phi-\bar{\phi}}$ e $e^{\hat{\phi}-\bar{\hat{\phi}}}$ em G e $\hat{G}$. Isto implica que toda a informação do dilaton será devida aos geradores derivados a partir do termo de Fradkin-Tseytlin. Embora não será demonstrado aqui, as contribuições das expansões de $e^{\phi-\bar{\phi}}$ e $e^{\hat{\phi}-\bar{\hat{\phi}}}$ podem ser removidas sistematicamente ou por ambigüidades como as discutidas em (4.89); ou por redefinições das correntes através de contratermos, ou ainda por redefinição da expansão dos campos d_a e $\hat{d}_\alpha$ e, por fim, estes termos podem também ser eliminados pelas equações de movimento derivadas anteriormente. Isto ficará claro ao final. De qualquer forma, a justificativa para tal procedimento no momento não pode ser provada “*a priori*”, mas pode ser justificada “*a posteriori*”, com os resultados corretos que serão encontrados. Um entendimento melhor a respeito da liberdade da expansão para os campos d_a e $\hat{d}_\alpha$ e a relação dos mesmos com a expansão de $e^{\phi-\bar{\phi}}$ e $e^{\hat{\phi}-\bar{\hat{\phi}}}$, pode talvez ser alcançado se conseguirmos derivar identidades de Slavnov Taylor envolvendo os campos de fundo, como na referência [44].

5.2 Resultados em 1 loop.

Como os cálculos em 1 loop são extremamente tediosos, será mostrado aqui em detalhes o cálculo de um diagrama. Em seguida será apenas listado os resultados dos demais. Os diagramas relevantes no cálculo dos OPE's estão listados ao final da tese. Os mesmos contêm campos de fundo (clássicos), propagadores envolvendo os campos quânticos e vértices oriundos da ação e dos geradores. A legenda da figura contendo os diagramas contém a devida explicação para os mesmos. Somando-se a isto, os diagramas poderão conter inserções de termos envolvendo dois campos quânticos da forma $d_a P^{a\beta} \hat{d}_\beta + d_a Q^{a\hat{\beta}} \hat{d}_{\hat{\beta}} + \dots$. Estes diagramas têm a mesma topologia que o diagramas sem inserções, mas produzem resultados diferentes.

Vamos calcular todos os passos da contribuição de I_9 para o OPE $\langle T(z) T(w) \rangle$. Neste caso temos os seguintes valores esperados, aos quais este diagrama contribui em $\langle T(z) T(w) \rangle$:

$$\left\langle d_{\tilde{\alpha}} \Pi^{\tilde{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b + d^{\tilde{\alpha}} \partial y_{\tilde{\alpha}} \right) \right\rangle \quad (5.10)$$

$$\left\langle \Pi^a \partial y_a \left(\frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b + d^{\tilde{\alpha}} \partial y_{\tilde{\alpha}} \right) \right\rangle \quad (5.11)$$

$$\left\langle D_{\tilde{\alpha}} \partial y^{\tilde{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b + d^{\tilde{\alpha}} \partial y_{\tilde{\alpha}} \right) \right\rangle \quad (5.12)$$

Tendo em mente a topologia do diagrama, originalmente teremos na ação a contribuição de um vértice com 3 campos quânticos e outro com dois campos quânticos e 1 clássico. Em conjunto com estes, temos ainda a possibilidade de contrair os mesmos com os vértices do tipo $d_a P^{a\beta} \hat{d}_{\beta}$, gerando os diagramas 84, 85 e 86. Começando como o valor esperado $\langle \Pi^{\alpha}(z) d_{\alpha}(z) \frac{1}{2} \partial y^b(w) \partial y_b(w) \rangle$. Os vértices da ação que contribuirão para o mesmo terão a forma

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{4} \left(\bar{\partial} y^a \partial y^B y^C T_{BCa} + \partial y^a \bar{\partial} y^B y^C T_{BCa} \right) + \frac{1}{3} \bar{\partial} y^A \partial y^B y^C H_{CBA} \\ V_2 &= d_{\dot{\beta}} y^a \nabla_a P^{\dot{\beta}\gamma} \widehat{D}_{\gamma} + d_{\dot{\beta}} y^a \nabla_a Q^{\beta\gamma} \widehat{D}_{\gamma} + d_{\dot{\beta}} y^a \bar{\Pi}^D T_{Da}{}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Vamos começar pela contribuição do diagrama sem inserções. No primeiro vértice em (5.13), os índices assumiram valores no super-espço, de forma que possamos fazer as contrações com os campos quânticos em questão. Os vínculos derivados no nível de árvore limitarão a forma destes vértices. Usando as propriedades do tensor H_{CBA} , o termo envolvendo o mesmo em V_1 assumirá a forma:

$$\begin{aligned} V_1(H_{ABC}) &= \frac{1}{3} (\bar{\partial} y^a \partial y^{\dot{\beta}-} y^{\alpha} + \bar{\partial} y^a \partial y^{\alpha+} y^{\dot{\beta}-} - \bar{\partial} y^{\dot{\beta}-} \partial y^a y^{\alpha} \\ &\quad - \bar{\partial} y^{\alpha+} \partial y^a y^{\dot{\beta}-} + \bar{\partial} y^{\dot{\beta}-} \partial y^{\alpha} y^a + \bar{\partial} y^{\alpha+} \partial y^{\dot{\beta}-} y^a) H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes na ação, temos

$$V_1(H_{ABC}) = \frac{1}{3} \left(\bar{\partial} y^a \partial y^{\dot{\beta}-} y^{\lambda+} - \partial y^a \bar{\partial} y^{\dot{\beta}-} y^{\lambda+} \right) 3H_{\lambda+\dot{\beta}-a}.$$

Fazemos as mesmas manipulações com o termo envolvendo a torção e usando os vínculos derivados no nível de árvore, o vértice V_1 pode ser escrito como

$$V_1 = - \left[-\frac{1}{2} \bar{\partial} y^a \partial y^{\dot{\beta}} y^{\lambda} + \frac{3}{2} \partial y^a \bar{\partial} y^{\dot{\beta}-} y^{\lambda} + \frac{1}{2} \bar{\partial} y^a \partial y^{\lambda} y^{\dot{\beta}-} + \frac{1}{2} \partial y^a \bar{\partial} y^{\lambda} y^{\dot{\beta}-} \right] H_{\lambda+\dot{\beta}-a} \quad (5.14)$$

O próximo passo é fazer todas as contrações possíveis envolvendo os campos oriundos de $T(z)$ e $T(w)$ e os vértices V_1 e V_2 . Tendo o cuidado com os devidos sinais nas contrações fermiônicas, os OPE's têm a forma

$$\frac{1}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}{}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) y^\alpha} \underbrace{\bar{\partial} y^a \partial y^b(w)} \overbrace{\partial y^{\dot{b}} d_{\dot{a}}} y^c \partial y_b(w) \quad (5.15)$$

$$\frac{3}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}{}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) y^\alpha} \underbrace{\partial y^a \partial y^b(w)} \overbrace{\bar{\partial} y^{\dot{b}} d_{\dot{a}}} y^c \partial y_b(w) \quad (5.16)$$

$$-\frac{1}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}{}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) \partial y^\alpha} \underbrace{\bar{\partial} y^a \partial y^b(w)} \overbrace{y^{\dot{b}} d_{\dot{a}}} y^c \partial y_b(w) \quad (5.17)$$

$$-\frac{1}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}{}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) \bar{\partial} y^\alpha} \underbrace{\partial y^a \partial y^b(w)} \overbrace{y^{\dot{b}} d_{\dot{a}}} y^c \partial y_b(w) \quad (5.18)$$

Escrevendo no espaço dos momentos, cada OPE terá a contribuicao.

OPE (5.15)

$$\Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \left(\frac{-ik}{|k|^2} \right) \int d^{2-2\epsilon} p \frac{p^2}{|p|^2} \frac{-ip}{|p|^2} \frac{|k-p|^2}{|k-p|^2} = 0. \quad (5.19)$$

OPE (5.16)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \left(\frac{-ik}{|k|^2} \right) \int d^{2-2\epsilon} p \frac{p\bar{p}}{|p|^2} \frac{-ip}{|p|^2} \frac{(k-p)^2}{|k-p|^2} \\ &= -\frac{3}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \frac{k^2}{\bar{k}^2} \left(\frac{1}{2} \right) \left| \frac{K^2}{\mu^2} \right|^{-\epsilon} = -\frac{3}{2} i \left(\Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

O OPE(5.17) será nulo como o OPE (5.15).

OPE (5.18)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \left(\frac{-|k|^2}{|k|^2} \right) \int d^{2-2\epsilon} p \frac{-ip}{|p|^2} \frac{-ip}{|p|^2} \frac{(k-p)^2}{|k-p|^2} \\ &= -\frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \frac{k^2}{\bar{k}^2} \left(\frac{1}{2} \right) \left| \frac{K^2}{\mu^2} \right|^{-\epsilon} = -\frac{1}{2} i \left(\Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Somando todas as contrações, o resultado fica:

$$\begin{aligned}
& \left\langle -d_\alpha(z) \Pi^\alpha(z) \frac{1}{2} \partial y^a(w) \partial y_a(w) \right\rangle \\
&= -2i\Pi^\lambda \left(\bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}}^{\dot{\lambda}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} P^{\dot{\lambda}\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} Q^{\dot{\lambda}\beta} \widehat{D}_\beta \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z - w)^3}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

onde foi levado em conta a contribuição de V_2 .

Estendendo o procedimento para o segundo OPE de(5.10), teremos as contrações:

$$-\frac{1}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) y^\alpha} \underbrace{\partial y^a y^c}_{\partial y^a y^c} \overbrace{\partial y^{\dot{\beta}} d_{\dot{\beta}}(w)} \underbrace{d_{\dot{a}} \partial y^{\dot{\beta}}(w)} \quad (5.23)$$

$$-\frac{3}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) y^\alpha} \underbrace{\partial y^a y^c}_{\partial y^a y^c} \overbrace{\partial y^{\dot{\beta}} d_{\dot{\beta}}(w)} \underbrace{d_{\dot{a}} \partial y^{\dot{\beta}}(w)} \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) \partial y^\alpha} \underbrace{\partial y^a y^c}_{\partial y^a y^c} \overbrace{y^{\dot{\beta}} d_{\dot{\beta}}(w)} \underbrace{d_{\dot{a}} \partial y^{\dot{\beta}}(w)} \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{2} \left(H_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^\alpha(z) \bar{\Pi}^B T_{Bc}^{\dot{a}} \right) \overbrace{d_\alpha(z) \partial y^\alpha} \underbrace{\partial y^a y^c}_{\partial y^a y^c} \overbrace{y^{\dot{\beta}} d_{\dot{\beta}}(w)} \underbrace{d_{\dot{a}} \partial y^{\dot{\beta}}(w)} \quad (5.26)$$

Mais uma vez, escrevendo no espaço dos momentos:

OPE(5.23)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}}^{\dot{\lambda}} \left(\frac{-ik}{|k|^2} \right) \int d^{2-2\epsilon} p \frac{i\bar{p}}{|p|^2} \frac{-p^2}{|p|^2} \frac{(k-p)^2}{|k-p|^2} \\
&= -\frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}}^{\dot{\lambda}} \frac{k^2}{\bar{k}^2} \left(\frac{1}{2} \right) \left| \frac{K^2}{\mu^2} \right|^{-\epsilon} = -\frac{1}{2} i \left(\Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}}^{\dot{\lambda}} \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z - w)^3} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

O OPE 5.24 será nulo.

OPE (5.25)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \left(\frac{-k^2}{|k|^2} \right) \int d^{2-2\epsilon} p \frac{i\bar{p}}{|p|^2} \frac{-p^2}{|p|^2} \frac{i(p-k)}{|k-p|^2} \\ &= \frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \frac{k^2}{\bar{k}^2} \left| \frac{k^2}{\mu^2} \right|^{-\epsilon} = i \left(\Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \end{aligned} \quad (5.28)$$

OPE (5.26)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \left(\frac{-|k|^2}{|k|^2} \right) \int d^{2-2\epsilon} p \frac{ip}{|p|^2} \frac{-p^2}{|p|^2} \frac{i(p-k)}{|k-p|^2} \\ &= -\frac{1}{2} i \Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \frac{k^2}{\bar{k}^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left| \frac{K^2}{\mu^2} \right|^{-\epsilon} = \frac{1}{2} i \left(\Pi^\lambda \bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Somando todas as contrações, temos o resultado

$$\langle -\Pi^\alpha(z) d_\alpha(z) d_{\dot{\beta}}(w) \partial y^{\dot{\beta}}(w) \rangle \quad (5.30)$$

$$= i \Pi^\lambda \left(\bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} P^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} Q^{\lambda\beta} \widehat{D}_\beta \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \quad (5.31)$$

O cálculo envolvendo o valor esperado $\langle \Pi^\alpha d_\alpha \left(\frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b + d^\alpha \partial y_\alpha \right) \rangle$ é completamente análogo.

Passamos agora ao valor esperado (5.11). Os vértices envolvendo o cálculo de $\langle \Pi^a \partial y_a \frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b \rangle$ terão a forma

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{3} \bar{\partial} y^a \partial y^b y^c H_{abc} \\ V_4 &= \frac{1}{2} \partial y^a y^b T_{ab}{}^{\hat{\gamma}} \widehat{D}_{\hat{\gamma}} + \frac{1}{2} \bar{\partial} y^a y^b T_{ab}{}^{\gamma} D_{\gamma}. \end{aligned}$$

As contrações envolvendo o primeiro termo de V_4 resultarão em um termo anti-holomórfico, enquanto que as contrações envolvendo o segundo termo gerarão um termo holomórfico. Cada um destes termos gerará 12 contrações diferentes. Como antes, escrevemos todas as contrações no espaço de momentos e em seguida retornamos ao espaço de coordenadas. Por exemplo a primeira contração pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{6} \Pi^d H_{abc} T_{ef}{}^{\gamma} D_{\gamma} \overbrace{\partial y_d(z) \bar{\partial} y^a} \underbrace{y^c \partial y^b \partial y_g(w)} \overbrace{y^e \bar{\partial} y^e} y^f \partial y^g(w)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \Pi^a H_{cba} T_{bc}{}^\gamma D_\gamma \frac{k \bar{k}}{|k|^2} \int d^2 p \frac{-i \bar{p} - i p}{|p|^2} \frac{(p-k)^2}{|p-k|^2} \\
&= \frac{1}{6} \Pi^a H_{cba} T_{cb}{}^\gamma D_\gamma \frac{k}{\bar{k}} \left| \frac{k^2}{\mu^2} \right|^{-\varepsilon} \left(-2 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\
&= -\Pi^a H_{cba} T_{cb}{}^\gamma D_\gamma \left(\frac{1}{(z-w)^2} + \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right) \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento com o vértice anti-holomorfo, a soma de todas as contrações resulta em

$$\begin{aligned}
&\left\langle \Pi^a \partial y_a \frac{1}{2} \partial y^b \partial y_a \right\rangle \\
&= \Pi^a H_{bca} T_{ca}{}^{\bar{\gamma}} D_{\bar{\gamma}} \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \\
&\quad + \Pi^d H_{dbc} \left(\Pi^a H_{abc} - \frac{1}{2} T_{bc}{}^{\bar{a}} D_{\bar{a}} \right) \left(2 \frac{G(z, w)}{(z-w)} - \frac{3}{(z-w)^2} \right) \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Calcularemos agora o valor esperado $\langle \Pi^a \partial y_a d_\alpha \partial y^\alpha \rangle$. Neste caso os termos oriundos de S^3 serão dados pelos vértices:

$$V_5 = \frac{1}{2} \hat{d}_\gamma T_{a\alpha+}{}^{\gamma-} (\partial y^a y^{\alpha+} - y^a \partial y^{\alpha+}) + \frac{1}{2} d_\alpha T_{a\gamma-}{}^{\alpha+} (\bar{\partial} y^a y^{\gamma-} - y^a \bar{\partial} y^{\gamma-}), \quad (5.34)$$

enquanto que os vértices envolvendo dois campos quânticos serão dados por

$$V_6 = d_\alpha y^{\gamma-} \left(\bar{\Pi}^b T_{b\gamma-}{}^{\alpha+} + \nabla_{\gamma-} P^{\alpha\beta} \widehat{D}_\beta \right) + \hat{d}_\gamma y^{\alpha+} \Pi^c T_{c\alpha+}{}^{\gamma-}. \quad (5.35)$$

A contribuição anti-holomórfica é dada pelas contrações :

$$\begin{aligned}
&- \underbrace{\partial y_a(z) y^b}_{\widehat{d}_\gamma y^{\beta-}} \underbrace{\widehat{d}_\gamma y^{\beta-}}_{\partial y^{\alpha+} d_\lambda(w)} \underbrace{d_\alpha \partial y^\lambda(w)}_{\Pi^a T_{\alpha+a}{}^{\gamma-}} \left(\bar{\Pi}^b T_{b\beta-}{}^{\alpha+} + \nabla_{\beta-} P^{\alpha\rho} \widehat{D}_\rho \right) \\
&+ \underbrace{\partial y_a(z) \partial y^b}_{\widehat{d}_\gamma y^{\beta-}} \underbrace{\widehat{d}_\gamma y^{\beta-}}_{y^{\alpha+} d_\lambda(w)} \underbrace{d_\alpha \partial y^\lambda(w)}_{\Pi^a T_{\alpha+a}{}^{\gamma-}} \left(\bar{\Pi}^b T_{b\beta-}{}^{\alpha+} + \nabla_{\beta-} P^{\alpha\rho} \widehat{D}_\rho \right) \\
&= \frac{3}{2} \Pi^a T_{a\alpha+}{}^{\gamma-} \left(\bar{\Pi}^b T_{b\gamma-}{}^{\alpha+} + \nabla_{\gamma-} P^{\alpha\rho} \widehat{D}_\rho \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3}
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para as contrações holomórficas, temos o resultado:

$$\begin{aligned}
\langle \Pi^a \partial y_a d_\alpha \partial y^\alpha \rangle &= \frac{3}{2} \Pi^a T_{a\alpha+}{}^{\gamma-} \left(\bar{\Pi}^b T_{b\gamma-}{}^{\alpha+} + \nabla_{\gamma-} P^{\alpha\rho} \widehat{D}_\rho \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \\
&\quad - \Pi^a \Pi^b T_{a\gamma-}{}^{\alpha+} T_{b\alpha-}{}^{\gamma-} \left(\frac{19}{6(z-w)^2} + \frac{G(z, w)}{(z-w)} \right)
\end{aligned}$$

Na expressão acima devemos levar em conta também os índices com ponto, gerando contrações como $\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}$. Quando escrevermos a expressão final para o valor esperado, estes termos serão levados em conta. O cálculo de $\langle \Pi^a \partial y_a d_\alpha \partial y^\alpha \rangle$ é análogo. No valor esperado acima temos também contribuições do diagrama 84 inserindo o termo com dois campos quânticos $d_\alpha P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \widehat{d}_{\dot{\beta}}$ e fazendo contrações com os vértices (5.14) e $d_\alpha y^{\dot{\gamma}+} (\overline{\Pi}^b T_{b\dot{\gamma}+}{}^\alpha)$. Como antes, teremos várias contrações possíveis, será escrito apenas uma:

$$\begin{aligned} & - \widehat{\partial y^a \partial y^a} \underbrace{\partial y^{\dot{\beta}-} d_\alpha}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \widehat{d_\beta y^{\dot{\gamma}+}} \widehat{d_\gamma \partial y^\alpha} \underbrace{y^\lambda d_\alpha}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \frac{1}{2} \Pi^a \overline{\Pi}^b P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\gamma}+}{}^{\gamma+} H_{a\dot{\beta}-\lambda} \\ & = \frac{1}{2} \Pi^a \overline{\Pi}^b P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}+}{}^{\gamma+} H_{a\dot{\alpha}-\gamma+} \int d^2 p \frac{p^4 \bar{p} (p-k)}{[|p|^2]^2 |p-k|^2} \\ & = \Pi^a \overline{\Pi}^b P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}+}{}^{\gamma+} H_{a\dot{\alpha}-\gamma+} \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \end{aligned}$$

Somando todas as contrações possíveis, temos

$$I_{84} = -4 \Pi^a \overline{\Pi}^b \left(P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}+}{}^{\gamma+} T_{a\dot{\alpha}-\gamma+} + P^{\alpha\beta} T_{b\dot{\beta}-}{}^{\gamma+} T_{a\dot{\alpha}-\gamma+} \right) \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3}$$

No resultado acima foi levado em conta também o OPE $\langle \Pi^a \partial y_a d_\alpha \partial y^\alpha \rangle$.

Para terminar a exaustiva contribuição do diagrama (9) ao cálculo de $T(z) T(w)$, calcularemos os valores esperados (5.12). Começando pelo termo $\langle D^{\dot{\alpha}} d_{\dot{\alpha}} \frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b \rangle$. Teremos uma série de termos holomórficos e uma única contribuição anti-holomórfica. Começando pela última, temos a contribuição dos vértices $\frac{1}{2} d_\alpha y^a \partial y^b T_{bc}{}^\alpha$ com $\frac{1}{2} y^a \partial y^b T_{bc}{}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma$. Teremos duas contrações fornecendo resultados diferentes de zero:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\partial y^\lambda d_\alpha}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \underbrace{y^b \partial y_a}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \underbrace{\partial y^c \partial y^e}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \underbrace{y^d \partial y^a}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \frac{1}{4} D_\lambda T_{cb}{}^{\lambda+} T_{ed}{}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma \\ & + \underbrace{\partial y^\lambda d_\alpha}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \underbrace{y^b \partial y_a}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \underbrace{\partial y^c y^d}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \underbrace{\partial y^e \partial y^a}_{\widehat{d_\gamma y^{\dot{\beta}+}}} \frac{1}{4} D_\lambda T_{cb}{}^{\lambda+} T_{ed}{}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma \\ & = D_\lambda T_{cb}{}^{\lambda+} T_{ed}{}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \end{aligned}$$

A outra contribuição anti-holomórfica é dada pelos vértices $d_\alpha y^{\beta+} \nabla_{\beta+} P^{\alpha\gamma} \widehat{d}_\gamma$ e $d_\alpha y^{\gamma-} \overline{\Pi}^b T_{b\gamma-}{}^\alpha$. Escrevendo já no espaço de momentos o OPE terá a forma:

$$\begin{aligned} & -D_\lambda \overline{\Pi}^b T_{b\gamma-}{}^\alpha \nabla_{\alpha+} P^{\lambda\gamma} \int d^2 p \frac{\bar{p} p^2 (p-k)}{[|p|^2]^2 |p-k|^2} \\ & = 2 D_\lambda \overline{\Pi}^b T_{b\gamma-}{}^\alpha \nabla_{\alpha+} P^{\lambda\gamma} \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} \end{aligned}$$

Concentrando agora na contribuição holomórfica: temos 3 contribuições holomórficas:

1. vértice $\frac{1}{2}d_\gamma T_{\alpha-a}^\gamma (\bar{\partial}y^a y^{\alpha-} - y^a \bar{\partial}y^{\alpha-})$ com $\frac{1}{2}\hat{d}_\gamma y^a \Pi^B T_{Ba}^{\gamma-}$;
 2. vértice $\frac{1}{2}d_\gamma T_{\alpha-a}^\gamma (\partial y^a y^{\alpha-} - y^a \partial y^{\alpha-})$ com $D_\alpha y^a \nabla_a P^{\alpha\gamma} \hat{d}_\gamma$;
 3. vértice $d_\gamma y^a \bar{\partial}y^b T_{ba}^{\gamma+}$ com $y^a \bar{\partial}y^b (\Pi^c H_{cba} - \frac{1}{2}T_{bc}^{\gamma+} D_\gamma)$.
- Fazendo as contrações no espaço dos momentos e retornando ao espaço de coordenadas como anteriormente, temos o resultado:

$$\begin{aligned} \left\langle D^\alpha d_\alpha \frac{1}{2} \partial y^b \partial y_b \right\rangle &= \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z - w)^3} D_\lambda T_{cb}^{\lambda+} T_{ed}^{\gamma-} \hat{D}_\gamma \\ &+ D_\lambda T_{c\gamma-}^{\lambda+} \Pi^B T_B^{\alpha+} \left(-\frac{G(z, w)}{(z - w)^2} + \frac{1}{(z - w)^2} \right) \\ &+ D_\alpha \nabla^a P^{\beta\gamma-} T_{a\gamma-}^{\alpha+} D_\beta \left(-\frac{G(z, w)}{(z - w)^2} + \frac{1}{(z - w)^2} \right) \\ &+ T_{bc}^\alpha D_\alpha \left(\Pi^a H_{abc} - \frac{1}{2} T_{bc}^\alpha D_\alpha \right) \left(-\frac{G(z, w)}{(z - w)^2} + \frac{1}{(z - w)^2} \right) \end{aligned}$$

Por último, temos o valor esperado $\langle D^\beta \partial y_\beta d^\alpha \partial y_\alpha \rangle$. Teremos apenas uma contribuição anti-holomórfica que é dada pelos vértices $d_\alpha y^{\beta+} \nabla_{\beta+} P^{\alpha\gamma} \hat{d}_\gamma$ e $d_\alpha y^{\gamma-} \bar{\Pi}^b T_{b\gamma-}^\alpha$. Escrevendo já no espaço de momentos o OPE terá a forma:

$$\begin{aligned} \langle D^\beta \partial y_\beta d^\alpha \partial y_\alpha \rangle &= -D_\lambda \bar{\Pi}^b T_{b\gamma-}^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} P^{\lambda\gamma} \int d^2p \frac{\bar{p} p^2 (p - k)}{[|p|^2]^2 |p - k|^2} \\ &= 2D_\lambda \bar{\Pi}^b T_{b\gamma-}^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} P^{\lambda\gamma} \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z - w)^3} \end{aligned}$$

Com este resultado encerra-se o cálculo de I_9 no OPE de $T(z)T(w)$. O procedimento adotado, embora tedioso, serviu para mostrar todas as nuances dos cálculos em 1 loop. Embora os vínculos no nível de árvore limitam a forma dos vértices, existem muitas contribuições para cada valor esperado. O principal fator complicante nos cálculos é o fato de não termos um procedimento com supersimetria manifesta na folha de mundo. Desta forma, somos obrigados a abrir todos os índices dos tensores, aumentando enormemente o número de vértices e as contrações possíveis.

A partir de agora o procedimento adotado será mais pragmático. Apenas será listado o resultado dos OPE's já no espaço de coordenadas, e várias simplificações serão omitidas. Todos os passos mostrados anteriormente com detalhes são usados para calcular a contribuição de cada diagrama. Começando pelo OPE $\langle G(z) \bar{G}(w) \rangle$. Lembrando que o campo ρ é tratado de forma exata, para este OPE a contribuição dos mesmos é multiplicar todos os resultados por $(z - w)$. Definindo $\lambda = \frac{1}{i\alpha' \sqrt{8\alpha'}}$, listaremos os resultados, identificando por I_n a contribuição do diagrama n :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{(z-w)^2} (8\lambda^2 \alpha' \Pi^a \Pi_a) \\
I_{10} &= \frac{\lambda^2 \alpha'^2}{(z-w)} [2D_\alpha \bar{\Pi}^\alpha - 2D^\alpha T_\alpha^{\dot{\beta}-a} T_{a\dot{\beta}-}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma - 2D^\alpha T_\alpha^{\dot{\beta}-a} T_{a\dot{\beta}-}^{\dot{\gamma}+} \widehat{D}_{\dot{\gamma}} \\
&\quad + 16D_\beta \Pi^\beta + D^\alpha R_{\dot{\beta}\alpha}^{\dot{\beta}\gamma} D_{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} D^\alpha D^{\dot{\gamma}} F_{\dot{\gamma}\alpha}] \\
I_{10} &= \frac{1}{(z-w)} [2D_{\dot{\alpha}} \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}-} - 2D^{\dot{\alpha}} T_{\dot{\alpha}}^{\beta+a} T_{a\beta+}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma - 2D^{\dot{\alpha}} T_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}-a} T_{a\dot{\beta}-}^{\dot{\gamma}+} \widehat{D}_{\dot{\gamma}} \\
&\quad + 16\lambda^2 \alpha'^2 D_{\dot{\beta}} \Pi^{\dot{\beta}} + \lambda^2 \alpha'^2 D^{\dot{\alpha}} R_{\beta\dot{\alpha}}^{\beta\gamma} D_\gamma - \frac{1}{2} \lambda^2 D^\alpha D^{\dot{\beta}} F_{\dot{\beta}\alpha}]
\end{aligned}$$

Embora as contas tenham sido omitidas aqui, podemos verificar que os vínculos oriundos dos OPE's envolvendo $G(z) \bar{G}(w)$ são preservados em 1 loop. Levando em conta todos os diagramas contribuindo para $G(z) \bar{G}(w)$ teremos a contribuição dos diagramas (9), (10), (11), (14), (15) e (16). Todos estes geram ou termos anti-holomórficos proporcionais aos vínculos, ou termos envolvendo $G(z, w)$ que se cancelam entre si. Usando as equações de movimento para os campos de fundo, temos o resultado em 1 loop

$$\begin{aligned}
\langle G(z) \bar{G}(w) \rangle &= \frac{1}{(z-w)} [2T(w) + \lambda^2 \lambda^2 \alpha'^2 D^\alpha R_{\dot{\beta}\alpha}^{\dot{\beta}\gamma} D_{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} \lambda^2 D^\alpha D^{\dot{\gamma}} F_{\dot{\gamma}\alpha} \\
&\quad + \lambda^2 \alpha'^2 D^{\dot{\alpha}} R_{\beta\dot{\alpha}}^{\beta\gamma} D_\gamma - \frac{1}{2} \lambda^2 D^\alpha D^{\dot{\beta}} F_{\dot{\beta}\alpha}]
\end{aligned} \tag{5.36}$$

O primeiro termo da equação acima é justamente o termo correto que deveríamos obter para fechar a álgebra $N = (2, 2)$ nesta ordem em teoria de perturbação. O fator correto à frente de $T(w)$ advém da escolha do fator a frente dos vínculos ???. Podemos afirmar que os cálculos em 1 loop selecionaram o fator correto. O segundo termo em (5.36) será removido redefinindo a expansão para D^α . Passamos agora aos resultados envolvendo $\langle T(z) G(w) \rangle$. Todos os resultados que seguirão devem ser multiplicados pelo fator $\lambda \alpha' e^{i\rho} e^{\phi - \bar{\phi}}$.

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} [2\bar{\Pi}^d R_{d\beta}^{\beta\alpha} D_\alpha - \bar{\Pi}^d F_d^\gamma D_\gamma \\
&\quad + 2\bar{\Pi}^{\delta-} (R_{\delta\beta}^{\beta\alpha} D_\alpha - F_{\delta-}^\gamma D_\gamma) + cc \\
&\quad + 2D_\alpha (\nabla^\gamma + \nabla_{\gamma+} P^{\alpha\gamma} + P^{\delta\gamma} (R_{\delta+}^{\beta\alpha} - F_{\delta+}^{\alpha+})) \widehat{D}_\gamma + cc \\
&\quad + 2D_\alpha (\nabla^\gamma + \nabla_{\gamma+} Q^{\alpha\dot{\gamma}} + Q^{\delta\dot{\gamma}} (R_{\delta+}^{\beta\alpha} D_\alpha - F_{\delta+}^{\alpha+})) \widehat{D}_{\dot{\gamma}} + cc \\
I_7 &= \frac{1}{(z-w)^2} (-\Pi^D R_{D\beta}^{\beta\alpha} D_\alpha + \Pi^D F_D^\gamma D_\gamma - 8\Pi_{\dot{\alpha}} \Pi^{\dot{\alpha}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [2\Pi^{\dot{\alpha}}\bar{\Pi}_{\dot{\alpha}} - 2\Pi^{\dot{\alpha}-}T_{\dot{\alpha}-}^{\beta+a}T_{a\beta+}^{\gamma-}\widehat{D}_{\gamma} - 2\Pi^{\alpha}T_{\alpha}^{\dot{\beta}-a}T_{a\dot{\beta}-}^{\dot{\gamma}+}\widehat{D}_{\dot{\gamma}} + cc \\
&\quad - \bar{\Pi}^D (R_{d\beta}^{\beta\alpha} - F_D^{\alpha}) D_{\alpha} \\
&\quad - 2D_{\alpha}\nabla^{\gamma+}\nabla_{\gamma+}P^{\alpha\dot{\beta}}\widehat{D}_{\dot{\beta}} - 2D_{\alpha}\nabla^{\gamma+}\nabla_{\gamma+}Q^{\alpha\dot{\beta}}\widehat{D}_{\dot{\beta}} \\
&\quad + \frac{1}{(z - w)^2} \left(\frac{1}{2}\Pi^D R_{D\beta}^{\beta\alpha} D_{\alpha} - \frac{1}{2}\Pi^D R_{D\beta}^{\beta\alpha} D_{\alpha} - \frac{1}{4}\Pi^D F_D^{\gamma} D_{\gamma} + 8\Pi_{\dot{\alpha}}\Pi^{\dot{\alpha}} \right) \\
I_{14} &= \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [2i\bar{\Pi}^d T_{d,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} + 2i\bar{\Pi}^{\delta-} T_{\delta-,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} + 2i\bar{\Pi}^{\dot{\delta}+} T_{\dot{\delta}+,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} \\
&\quad - 2iD^{\alpha}\nabla_{\alpha\dot{\beta}} Q^{\dot{\beta}\gamma}\widehat{D}_{\gamma} - 2iD^{\alpha}\nabla_{\alpha\dot{\beta}} P^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\dot{\gamma}} \\
I_{15} &= \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [\bar{\Pi}^a \left(-\frac{1}{2}R_{\gamma}^b{}_{ba} - 3iT_{a,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} + R_{a\beta\gamma}^{\beta} + \frac{1}{2}F_{a\gamma} \right) D^{\gamma} \\
&\quad - 2i \left(\bar{\Pi}^{\delta-} T_{\delta-,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} + 2i\bar{\Pi}^{\dot{\delta}+} T_{\dot{\delta}+,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} \right) \\
&\quad + D^{\alpha} (\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]} P^{\beta\gamma}\widehat{D}_{\gamma} + \nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]} Q^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\dot{\gamma}}) \\
&\quad + D^{\alpha} (\nabla^a T_{a\alpha+}^{\gamma-}\widehat{D}_{\gamma} + \nabla^a T_{a\alpha+}^{\dot{\gamma}+}\widehat{D}_{\dot{\gamma}}) \\
&\quad \frac{1}{(z - w)^2} \left(\Pi_a \left(\frac{1}{4}R_{\gamma}^b{}_{ba} - \frac{i}{2}T_{a,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} \right) D^{\gamma} \right) \\
I_{18} &= \frac{1}{(z - w)^2} \left(3i\Pi^a T_{a,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} - \frac{3}{2}D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \right) - \frac{G(z, w)}{(z - w)^2} D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \\
I_{19} &= \frac{1}{(z - w)^2} \left(-\frac{13}{6}i\Pi^a T_{a,\gamma\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} D^{\gamma} - D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \right) + \frac{G(z, w)}{(z - w)^2} D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \\
I_{100} &= D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \left(\frac{1}{4(z - w)^2} + \frac{G(z, w)}{(z - w)^2} \right) \\
I_{104} &= -D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \frac{33}{40(z - w)^2} \\
I_{105} &= D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \left(\frac{17}{12(z - w)^2} - \frac{G(z, w)}{(z - w)^2} \right) \\
I_{107} &= -D_{\alpha}T_{c\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}T_c^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\beta} \frac{13}{3(z - w)^2}
\end{aligned}$$

Somando todos os termos e usando equações de movimento para os campos de fundo, temos:

$$\begin{aligned}
\langle T(z) G(w) \rangle &= \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [\bar{\Pi}^d \left(R_{d\beta}^{\beta\gamma} + \frac{1}{2}F_{d\gamma} + \frac{1}{2}R_{\gamma bd}^b + H_{b\gamma\dot{\beta}}T_d^{b\dot{\beta}} \right) D^{\gamma} \\
&\quad + \bar{\Pi}^{\delta-} \left(R_{\delta-\beta\gamma}^{\beta} + \frac{1}{2}F_{\delta-\gamma} \right) D^{\gamma} + \bar{\Pi}^{\dot{\delta}+} \left(R_{\dot{\delta}+\beta\gamma}^{\beta} + \frac{1}{2}F_{\dot{\delta}+\gamma} \right) D^{\gamma} \\
&\quad + D^{\alpha} (\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]} P^{\beta\gamma}\widehat{D}_{\gamma} + \nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]} Q^{\beta\dot{\gamma}}\widehat{D}_{\dot{\gamma}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_\alpha \left(P^{\delta\gamma} \left(R_{\delta+}{}^{\beta\alpha} - \frac{1}{2} F_{\delta+}{}^{\alpha+} \right) \widehat{D}_\gamma + Q^{\delta\dot{\gamma}} \left(R_{\delta+}{}^{\beta\alpha} - \frac{1}{2} F_{\delta+}{}^{\alpha+} \right) \widehat{D}_{\dot{\gamma}} \right) \\
& + \frac{1}{(z-w)^2} \left[\frac{33}{40} D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}} \tilde{\alpha} T_c^{\beta\hat{\gamma}} D_\beta + \Pi^\alpha \left(-\frac{1}{2} R_{\alpha\beta}{}^{\beta\gamma} + \frac{1}{4} F_\alpha{}^\gamma \right) D_\gamma \right. \\
& \left. - \Pi^a \left(\frac{1}{2} R_{a\beta}{}^{\beta\gamma} + \frac{1}{4} R^{\gamma b}{}_{ba} - \frac{1}{4} F_a{}^\gamma - \frac{2}{3} T_{b\dot{\beta}-\alpha+} T_a{}^{b\gamma} \right) D_\gamma \right]
\end{aligned}$$

Assim como no OPE envolvendo G e $\overline{G}$, todas as divergências são canceladas. Os termos anti-holomórficos estão relacionados com as anomalias geradas pela interação com o super-espaço curvo. Os mesmos estão relacionados com as equações de movimento que estamos procurando. Já os termos holomórficos serão cancelados redefinindo a expansão para D_γ e por contratermos nas correntes, como será discutido a seguir.

Passamos agora ao cálculo de $\langle T(z) T(w) \rangle$. Neste caso teremos um número muito maior de vértices e diagramas envolvidos. Os resultados são:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \left(\Pi^d H_{dcb} - \frac{1}{2} T_{cb}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right)^2 \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \right] \\
& - \frac{4i}{(z-w)^2} \left(\Pi^{\dot{\beta}} \Pi^D T_{D,\gamma\dot{\beta}}{}^\gamma + \Pi^\alpha \Pi^D T_{D,\gamma\dot{\beta}}{}^{\dot{\beta}} \right) \\
& + \frac{2}{(z-w)^2} \left(D_\alpha P^{\alpha\beta} T_{a\beta-}{}^{\alpha+} T_{\alpha+\beta-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + D_\alpha Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+}{}^{\alpha+} T_{\alpha+\beta-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + cc \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & -2 \left(\Pi^d H_{dcb} - \frac{1}{2} T_{cb}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right)^2 \left[\frac{2}{(z-w)^2} - \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \right] \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z-w)^2} + \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \right) \left(D_{\tilde{\alpha}} T_{a\gamma-}{}^{\tilde{\alpha}} \nabla^a P^{\beta\gamma} D_\beta + D_{\tilde{\alpha}} T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\tilde{\alpha}} \nabla^a Q^{\beta\dot{\gamma}} D_\beta + cc \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z-w)^2} + \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \right) \left(D_{\tilde{\alpha}} \Pi^{\tilde{\beta}} T_{b\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{a\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}} - D_{\tilde{\alpha}} \Pi^a T_{b\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{ab}{}^{\hat{\gamma}} \right) \\
& + \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \right) \left(D_\beta \Pi^b T_{b\gamma-}{}^{\alpha} \nabla_\alpha P^{\beta\gamma} T_{a\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}} + D_\beta \Pi^b T_{b\dot{\gamma}+}{}^{\alpha} \nabla_\alpha Q^{\beta\dot{\gamma}} + cc \right) \\
& - \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{G(z,w)}{(z-w)^2} \right) \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}
\end{aligned}$$

$$I_3 = I_2$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & \frac{(\bar{z}-\bar{w})}{(z-w)^3} \frac{1}{3} \left[\left(T_{ab}{}^{\gamma-} \widehat{D}_{\gamma-} \right)^2 + \left(T_{ab}{}^{\dot{\gamma}+} \widehat{D}_{\dot{\gamma}+} \right)^2 + \left(\nabla_\alpha P^{\alpha\beta} \widehat{D}_\beta \right)^2 \right. \\
& + \left(\nabla_\alpha Q^{\alpha\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} \right)^2 + \left(\nabla_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}\beta} \widehat{D}_\beta \right)^2 + \left(\nabla_{\dot{\alpha}} Q^{\dot{\alpha}\beta} \widehat{D}_\beta \right)^2 + \left(\nabla_\alpha Q^{\dot{\alpha}\beta} \widehat{D}_\beta \right)^2 - 6 \Pi^a H_{bca} T_{ca}{}^\gamma \widehat{D}_\gamma \Big] \\
& + \frac{2}{(z-w)^2} \left(\Pi^d H_{dcb} - \frac{1}{2} T_{cb}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = & \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [\bar{\Pi}^{\hat{\beta}} (\nabla^a T_{\hat{\beta}a}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}}) + \Pi^{\beta} (\nabla^a T_{\beta a}^{\hat{\alpha}} \widehat{D}_{\hat{\alpha}}) + 2\bar{\Pi}^{\tilde{\delta}} (T_{\tilde{\delta}\alpha}^{\hat{\gamma}} T_{\hat{\gamma}a}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}}) \\
& + \Pi^{\hat{\delta}} (T_{\hat{\delta}\alpha}^{\tilde{\gamma}} T_{\tilde{\gamma}a}^{\hat{\alpha}} \widehat{D}_{\hat{\alpha}}) - \Pi^a \bar{\Pi}^d \left(\frac{1}{2} R_d^b{}_{ba} + \frac{1}{2} R_a^b{}_{bd} + \nabla^c H_{acd} \right) \\
& - \frac{1}{2} \bar{\Pi}^d \left(\Pi^{\tilde{\beta}} R_{\tilde{\beta}}^b{}_{bd} + \Pi^{\hat{\beta}} R_{\hat{\beta}}^b{}_{bd} \right) - \frac{1}{2} \Pi^d \left(\bar{\Pi}^{\tilde{\beta}} R_{\tilde{\beta}}^b{}_{bd} + \bar{\Pi}^{\hat{\beta}} R_{\hat{\beta}}^b{}_{bd} \right) \\
& - \bar{\Pi}^d (T_{db}^{\beta+} H_{\beta+\dot{\beta}-b} \Pi^{\dot{\beta}-} + T_{db}^{\beta-} H_{\beta-\dot{\beta}+b} \Pi^{\dot{\beta}+}) + cc \\
& - \Pi^d (T_{db}^{\beta+} H_{\beta+\dot{\beta}-b} \bar{\Pi}^{\dot{\beta}-} + T_{db}^{\beta-} H_{\beta-\dot{\beta}+b} \bar{\Pi}^{\dot{\beta}+}) + cc \\
& + 2\Pi^d \left(\frac{1}{2} \nabla^a T_{da}^{\hat{\gamma}} - H_{dbc} T_{cb}^{\hat{\gamma}} + \frac{1}{2} T_{db}^{\tilde{\alpha}} T_{\tilde{\alpha}b}^{\hat{\gamma}} \right) \widehat{D}_{\hat{\gamma}} \\
& + 2\bar{\Pi}^d \left(\frac{1}{2} \nabla^a T_{da}^{\tilde{\alpha}} - H_{dbc} T_{cb}^{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{2} T_{db}^{\hat{\gamma}} T_{\hat{\gamma}b}^{\tilde{\alpha}} \right) D_{\tilde{\alpha}} \\
& - \bar{\Pi}^{\tilde{\delta}} \nabla^a T_{a\tilde{\delta}}^{\alpha+} D_{\alpha} - \bar{\Pi}^{\tilde{\delta}} \nabla^a T_{a\tilde{\delta}}^{\dot{\alpha}-} D_{\dot{\alpha}} - \Pi^{\tilde{\delta}} \nabla^a T_{a\tilde{\delta}}^{\gamma-} \widehat{D}_{\gamma} - \Pi^{\tilde{\delta}} \nabla^a T_{a\tilde{\delta}}^{\dot{\gamma}+} \widehat{D}_{\dot{\gamma}}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 = & \left(\Pi^d H_{dcb} - \frac{1}{2} T_{cb}^{\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}} \right)^2 \left[\frac{4}{(z - w)^2} - 6 \frac{G(z, w)}{(z - w)^2} \right] \\
& + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [4\Pi^b H_{bca} T^{ca\hat{\gamma}} \widehat{D}_{\hat{\gamma}} - 2D_{\tilde{\alpha}} T_{ca}^{\tilde{\alpha}} T^{ca\hat{\gamma}} \widehat{D}_{\hat{\gamma}} \\
& + 4D_{\alpha} (\nabla_{\gamma-} P^{\lambda\beta} \nabla_{\lambda+} P^{\alpha\gamma} + \nabla_{\dot{\gamma}+} Q^{\lambda\beta} \nabla_{\dot{\lambda}+} Q^{\alpha\dot{\gamma}}) \widehat{D}_{\beta} + cc \\
& - 4\bar{\Pi}^b (T_{b\gamma-}^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} P^{\lambda\gamma} + T_{b\dot{\gamma}+}^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} Q^{\lambda\dot{\gamma}}) D_{\lambda} + cc \\
& + 4\Pi^b (T_{b\gamma+}^{\alpha-} \nabla_{\alpha-} P^{\gamma\lambda} + T_{b\dot{\gamma}-}^{\alpha-} \nabla_{\alpha-} Q^{\dot{\gamma}\lambda}) \widehat{D}_{\lambda} + cc \\
& + 4\bar{\Pi}^b \Pi^a (T_{b\gamma-}^{\tilde{\alpha}} T_{a\tilde{\alpha}}^{\gamma-}) + cc \\
& - \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} \frac{1}{3} [(T_{ab}^{\gamma-} \widehat{D}_{\gamma-})^2 + (T_{ab}^{\dot{\gamma}+} \widehat{D}_{\dot{\gamma}+})^2 + (\nabla_{\alpha} P^{\alpha\beta} \widehat{D}_{\beta})^2 + cc \\
& + (\nabla_{\alpha} Q^{\alpha\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}})^2 + (\nabla_{\dot{\alpha}} Q^{\dot{\alpha}\beta} \widehat{D}_{\beta})^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 = & \frac{1}{(z - w)^2} [\Pi^d \Pi^a \left(\frac{1}{2} R_d^b{}_{ba} - 4H_{dbc} H_{bca} \right) + \frac{1}{2} \Pi^{\tilde{\delta}} \Pi^a R_{\tilde{\delta}}^b{}_{ba} \\
& + \frac{1}{2} \Pi^{\hat{\delta}} \left(\Pi^a \frac{1}{2} R_{\hat{\delta}}^b{}_{ba} + \frac{1}{2} \nabla^a T_{\hat{\delta}a}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right) + \Pi^d \left(\frac{1}{2} \nabla^a T_{\hat{\beta}a}^{\tilde{\alpha}} - H_{dbc} T_{cb}^{\tilde{\alpha}} \right) D_{\tilde{\alpha}} \\
& + \frac{1}{2} D_{\alpha} P^{\alpha\beta} \nabla^a T_{a\beta-}^{\tilde{\gamma}} D_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} D_{\alpha} Q^{\alpha\dot{\beta}} \nabla^a T_{a\dot{\beta}+}^{\gamma} D_{\gamma}]
\end{aligned}$$

$$I_8 = I_7$$

$$\begin{aligned}
I_9 = & \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [i\Pi^\lambda (\bar{\Pi}^B T_{B\lambda\dot{\lambda}}^{\dot{\lambda}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} P^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} Q^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc \\
& - \frac{3}{2}\Pi^a (\bar{\Pi}^b T_{a\tilde{\alpha}}^{\gamma-} T_{b\gamma-}^{\tilde{\alpha}} + T_{a\alpha+}^{\gamma-} \nabla_{\gamma-} P^{\alpha\rho} \widehat{D}_{\rho} + T_{a\alpha+}^{\dot{\gamma}+} \nabla_{\dot{\gamma}+} Q^{\alpha\dot{\rho}} \widehat{D}_{\dot{\rho}}) + cc] \\
& + \Pi^a H_{bca} T_{ca}^{\gamma} \widehat{D}_{\gamma} + 2D_{\lambda} \bar{\Pi}^b (T_{b\gamma-}^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} P^{\lambda\gamma} + T_{b\dot{\gamma}+}^{\alpha+} \nabla_{\alpha+} Q^{\lambda\dot{\gamma}}) + cc \\
& + D_{\tilde{\lambda}} T_{cb}^{\tilde{\lambda}} T_{ed}^{\gamma} \widehat{D}_{\gamma} + cc \\
& + \frac{2G(z, w)}{(z - w)^2} \left(\Pi^a H_{abc} - \frac{1}{2} T_{bc}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right)^2 \\
& + \frac{1}{(z - w)^2} \left(\Pi^a H_{abc} - \frac{1}{2} T_{bc}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right) \left(-3\Pi^a H_{abc} + \frac{1}{2} T_{bc}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right) \\
& + \frac{1}{(z - w)^2} \left(-\frac{1}{2} D_{\tilde{\alpha}} \Pi^{\tilde{\beta}} T_{c\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} + \frac{19}{6} \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}^{\hat{\gamma}} + \frac{11}{12} D_{\tilde{\alpha}} T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} \Pi^{\tilde{\beta}} T_{a\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} \right) \\
& + \frac{G(z, w)}{(z - w)^2} \left(D_{\tilde{\alpha}} T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} \Pi^{\tilde{\beta}} T_{a\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} - \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}^{\hat{\gamma}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} = & \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} \left[\frac{1}{2} \Pi^{\alpha+} (\nabla_{[\alpha+} \nabla_{\gamma+]} P^{\gamma\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\gamma+]} Q^{\gamma\lambda} \widehat{D}_{\lambda}) + cc \right. \\
& + \frac{1}{2} \Pi^{\dot{\alpha}-} (\nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\gamma]} P^{\gamma\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} + \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\gamma]} Q^{\gamma\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc \\
& \Pi^d \bar{\Pi}^a \left(\frac{1}{4} R_d^b{}_{ba} + \frac{3}{4} R_a^b{}_{bd} + \frac{1}{2} T_{b\tilde{\alpha}}^{\hat{\gamma}} T_{\gamma a}^{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{2} \nabla^c H_{acd} - \frac{1}{2} \nabla^{\tilde{\alpha}} T_{ad\tilde{\alpha}} \right) \\
& + \Pi^{\delta+} \bar{\Pi}^a \left(\frac{1}{4} R_{\delta}^b{}_{ba} + \frac{3i}{2} T_{ab}^{\dot{\beta}} \delta_{\dot{\beta}}^{\beta} + \frac{1}{2} R_a^{\beta}{}_{\delta\beta} - \frac{1}{4} F_{a\delta} \right) \\
& + \Pi^{\dot{\delta}} \bar{\Pi}^a \left(\frac{1}{4} R_{\dot{\delta}}^b{}_{ba} + \frac{3i}{2} T_{ab}^{\beta} \delta_{\beta}^{\dot{\beta}} + \frac{1}{2} R_a^{\dot{\beta}}{}_{\delta\dot{\beta}} - \frac{1}{4} F_{a\dot{\delta}} \right) \\
& + \Pi^{\tilde{\alpha}} \bar{\Pi}^{\delta+} \left(\frac{1}{2} R_{\alpha}^{\beta+}{}_{\delta+\beta+} - \frac{1}{4} F_{\delta\tilde{\alpha}} \right) + cc \\
& - i\Pi^{\lambda+} (\bar{\Pi}^{\beta-} T_{\beta-\lambda\dot{\lambda}}^{\dot{\lambda}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} P^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} + \nabla_{\lambda\dot{\lambda}} Q^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc \\
& - D_{\tilde{\alpha}} \bar{\Pi}^a (\nabla^c T_{ca}^{\tilde{\alpha}} + 2H_{abc} T_{cb\tilde{\alpha}} - T_{ac}^{\hat{\gamma}} T_{\gamma}^{\tilde{\alpha}\hat{\gamma}}) \\
& + D_{\tilde{\alpha}} \bar{\Pi}^{\beta+} (T_{\beta+c}^{\hat{\gamma}} T_{\gamma}^{\tilde{\alpha}\hat{\gamma}}) + D_{\alpha} (\nabla_a \nabla^a P^{a\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla_a \nabla^a Q^{a\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc \\
& - D_{\tilde{\alpha}} \bar{\Pi}^{\tilde{\beta}} \nabla^a T_{a\hat{\beta}}^{\tilde{\alpha}} \\
& + \frac{\Pi^d}{2} (\nabla_{(\gamma} \nabla_{a)} P^{\gamma\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \nabla_{(\gamma} \nabla_{a)} Q^{\gamma\lambda} \widehat{D}_{\lambda}) + cc \\
& - \frac{\Pi^d}{2} (T_{db}^{\tilde{\lambda}} T_{\lambda}^{\gamma-}{}^{b\gamma-} + 2\nabla_a T_d^{\alpha\gamma-}) \widehat{D}_{\gamma} + cc \\
& - \frac{3}{4} \Pi^d (P^{\alpha\gamma} \widehat{D}_{\gamma} R_{\alpha+}^b{}_{bd} + Q^{\alpha\dot{\gamma}} \widehat{D}_{\dot{\gamma}} R_{\alpha+}^b{}_{bd}) + cc \\
& - \frac{1}{2} \Pi^d (\bar{\Pi}^{\dot{\beta}-} T_{\dot{\beta}-\alpha}^c T_{cd}^{\alpha} - \bar{\Pi}^{\dot{\beta}+} H_{\dot{\beta}+\alpha-}^c T_{cd}^{\alpha-}) + cc]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(z-w)^2} [\Pi^d \Pi^a \left(-\frac{1}{8} R_d^b{}_{ba} + -\frac{3}{8} R_a^b{}_{bd} + H_{cbd} H^{cb}{}_a \right) \\
& - \Pi^d \Pi^a \left(+\frac{3}{8} R_\alpha^b{}_{bd} + \frac{1}{8} R_\alpha^b{}_{bd} \right) - \Pi^d \Pi^\alpha \left(\frac{3}{8} R_{\dot{\alpha}}^b{}_{bd} + \frac{1}{8} R_{\dot{\alpha}}^b{}_{bd} \right) \\
& \Pi^d D^{\tilde{\alpha}} \frac{1}{2} (H_{cbd} T^{cb}{}_{\tilde{\alpha}} + \nabla^c T_{ca\tilde{\alpha}})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} = & \left(\Pi^d H_{dcb} - \frac{1}{2} T_{cb}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right)^2 \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right] \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2(z-w)^2} + \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right) (D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_c^{\beta\hat{\gamma}} D_{\beta}) \\
& + \frac{1}{(z-w)^2} \left(3i \Pi^c T_c^{\beta\dot{\beta}}{}_{(\beta} \Pi_{\dot{\beta})} \right) \\
& - \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right) - \left(\frac{1}{4} \Pi^a T_{ab}{}^{\hat{\gamma}} T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right) \frac{1}{(z-w)^2}
\end{aligned}$$

$$I_{14} = I_9$$

$$I_{15} = I_{10}$$

$$I_{18} = I_{13}$$

$$\begin{aligned}
I_{19} = & \left(\Pi^d H_{dcb} - \frac{1}{2} T_{cb}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} \right)^2 \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right] \\
& + \left(\frac{1}{12(z-w)^2} + \frac{2G(z, w)}{(z-w)^2} \right) (\Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}) \\
& + \left(\frac{3}{(z-w)^2} + \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right) D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{bc}{}^{\hat{\gamma}} \Pi^b \\
& - \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} \right) (D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_c^{\beta\hat{\gamma}} D_{\tilde{\beta}}) \\
& + \frac{1}{(z-w)^2} \left(\frac{13i}{6} \Pi^c T_c^{\beta\dot{\beta}}{}_{(\beta} \Pi_{\dot{\beta})} \right)
\end{aligned}$$

$$I_{71} = D_{\alpha} \left(P^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta-}{}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+}{}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + cc \right) \frac{G(z, w)}{(z-w)^2}$$

$$+ \left(\frac{G(z, w)}{(z-w)^2} - \frac{2}{(z-w)^2} \right) \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}$$

$$I_{73} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} \left(2 \Pi^a T_{\alpha\dot{\beta}a} Q^{\dot{\beta}\gamma} (\nabla_{\gamma-} P^{\alpha\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \bar{\Pi}^d T_{d\gamma-}{}^{\alpha}) \right)$$

$$+ \left(2 \frac{G(z, w)}{(z-w)^2} + \frac{3}{(z-w)^2} \right) \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}$$

$$I_{74} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} \left(2 \Pi^a T_{\alpha\dot{\beta}a} Q^{\dot{\beta}\gamma} (\nabla_{\gamma-} P^{\alpha\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \bar{\Pi}^d T_{d\gamma-}{}^{\alpha}) \right)$$

$$I_{75} = I_{73}$$

$$I_{76} = I_{74}$$

$$\begin{aligned}
I_{78} + I_{79} = & \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [-2\Pi^a \bar{\Pi}^d P^{\alpha\beta} (T_{d\beta-}^{\dot{\alpha}-} T_{\dot{\alpha}-\alpha d} - T_{a\alpha+}^{\dot{\alpha}+} T_{\dot{\alpha}+\beta-d}) \\
& -2\Pi^a \bar{\Pi}^d Q^{\dot{\alpha}\beta} (T_{d\beta-}^{\alpha+} T_{\alpha+\dot{\alpha}-a} - T_{a\dot{\alpha}-}^{\dot{\alpha}+} T_{\dot{\alpha}+\beta-d}) \\
& -2\Pi^a \bar{\Pi}^d P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (T_{d\dot{\beta}+}^{\alpha+} T_{\alpha+\dot{\alpha}-a} - T_{a\dot{\alpha}-}^{\dot{\gamma}-} T_{\dot{\gamma}-\dot{\beta}+d}) \\
& -2\Pi^a \bar{\Pi}^d Q^{\alpha\dot{\beta}} (T_{d\dot{\beta}+}^{\dot{\gamma}-} T_{\dot{\gamma}-\alpha+a} - T_{a\alpha+}^{\dot{\gamma}-} T_{\dot{\gamma}-\dot{\beta}+d}) \\
& -2\bar{\Pi}^D P^{\alpha\beta} \left(R_{D\beta-\alpha+}^{\gamma+} + \frac{1}{2} F_{D\beta-} \delta_{\alpha+}^{\gamma+} \right) D_{\gamma} \\
& -2\bar{\Pi}^D P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(R_{D\dot{\beta}+\dot{\alpha}-}^{\dot{\gamma}-} + \frac{1}{2} F_{D\dot{\beta}+} \delta_{\dot{\alpha}-}^{\dot{\gamma}-} \right) D_{\dot{\gamma}} \\
& +2\Pi^D P^{\alpha\beta} \left(R_{D\alpha+\beta-}^{\gamma-} + \frac{1}{2} F_{D\alpha+} \delta_{\beta+}^{\gamma-} \right) \widehat{D}_{\gamma} \\
& -2\Pi^D P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(R_{D\dot{\alpha}-\dot{\beta}+}^{\dot{\gamma}+} + \frac{1}{2} F_{D\dot{\alpha}-} \delta_{\dot{\beta}+}^{\dot{\gamma}+} \right) \widehat{D}_{\dot{\gamma}} \\
& +2\Pi^{\dot{\delta}-} P^{\alpha\beta} (T_{\delta+\alpha+}^c T_{c\beta-}^{\tilde{\gamma}}) D_{\tilde{\gamma}} + 2\bar{\Pi}^{\delta+} P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (T_{\delta+\dot{\alpha}-}^c T_{c\dot{\beta}+}^{\tilde{\gamma}}) D_{\tilde{\gamma}} \\
& +2\Pi^{\dot{\delta}+} P^{\alpha\beta} (T_{\delta+\beta-}^c T_{c\alpha+}^{\hat{\gamma}}) \widehat{D}_{\gamma} + 2\Pi^d Q^{\alpha\dot{\beta}} (T_{d\dot{\beta}+}^c T_{c\alpha+}^{\hat{\gamma}} + \nabla_{\dot{\beta}+} T_{d\alpha+}^{\hat{\gamma}}) \widehat{D}_{\gamma} \\
& -2\bar{\Pi}^d Q^{\alpha\dot{\beta}} (T_{d\alpha+}^c T_{c\dot{\beta}+}^{\tilde{\gamma}} + \nabla_{\alpha+} T_{d\dot{\beta}+}^{\tilde{\gamma}}) D_{\tilde{\gamma}} + cc \\
& +2\Pi^d Q^{\alpha\dot{\beta}} (T_{d\dot{\beta}+}^c T_{c\alpha+}^{\hat{\gamma}} + \nabla_{\dot{\beta}+} T_{d\alpha+}^{\hat{\gamma}}) \widehat{D}_{\gamma} + cc \\
& +2D_{\gamma} (P^{\alpha\beta} \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\beta-]} P^{\gamma\lambda}) \widehat{D}_{\lambda} + 2D_{\dot{\gamma}} (P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\dot{\beta}+]} P^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}}) \widehat{D}_{\dot{\lambda}} \\
& +2D_{\gamma} (P^{\alpha\beta} \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\beta-]} Q^{\gamma\dot{\lambda}} + Q^{\alpha\dot{\beta}} \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\dot{\beta}+]} Q^{\gamma\dot{\lambda}}) \widehat{D}_{\dot{\lambda}} \\
& +2D_{\dot{\gamma}} (P^{\alpha\beta} \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\beta-]} Q^{\dot{\gamma}\lambda} + Q^{\alpha\dot{\beta}} \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\dot{\beta}+]} Q^{\dot{\gamma}\lambda}) \widehat{D}_{\lambda} \\
& +2D_{\gamma} (P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\dot{\beta}+]} Q^{\dot{\gamma}\lambda} + Q^{\dot{\alpha}\beta} \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\beta]} Q^{\dot{\gamma}\lambda}) \widehat{D}_{\lambda} \\
& +2D_{\dot{\gamma}} (P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\dot{\beta}+]} Q^{\gamma\dot{\lambda}} + Q^{\dot{\alpha}\beta} \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\beta]} Q^{\gamma\dot{\lambda}}) \widehat{D}_{\dot{\lambda}}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{80} + I_{81} = & \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [18\Pi^b (P^{\alpha\beta} T_{b\beta-} Q^{\dot{\gamma}\lambda} T_{\dot{\gamma}-\alpha b} \widehat{D}_{\lambda} + Q^{\alpha\beta} \nabla_{\beta+} P^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}} T_{\dot{\gamma}-\alpha b} \widehat{D}_{\dot{\lambda}}) + cc \\
& +18\Pi^a \bar{\Pi}^d (P^{\alpha\beta} T_{d\beta-}^{\dot{\alpha}-} T_{\dot{\alpha}-\alpha a} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{d\alpha+}^{\dot{\gamma}-} T_{\dot{\gamma}-\dot{\beta}+a}) + cc]
\end{aligned}$$

$$I_{82} = \frac{1}{(z-w)^2} [\Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}^{\hat{\gamma}} + D_\alpha (P^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}-}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + cc)]$$

$$I_{83} = I_{82}$$

$$I_{84} = \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} [-2\Pi^a \bar{\Pi}^b T_{\dot{\alpha}-\gamma+a} (P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}+}^{\gamma+} + Q^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}-}^{\gamma+}) + cc$$

$$- 2\Pi^a T_{\alpha+\dot{\lambda}-a} Q^{\alpha\dot{\beta}} (\nabla_{\dot{\beta}} P^{\dot{\lambda}\dot{\gamma}} \widehat{D}_{\dot{\gamma}} + \nabla_{\dot{\beta}} Q^{\dot{\lambda}\dot{\gamma}} \widehat{D}_{\dot{\gamma}}) + cc]$$

$$- \frac{2G(z, w)}{(z-w)^2} \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}^{\hat{\gamma}}]$$

$$I_{85} = \frac{1}{(z-w)^2} \left(\frac{11}{12} D_{\tilde{\alpha}} T_{a\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} \Pi^{\tilde{\beta}} T_{a\tilde{\beta}}^{\hat{\gamma}} \right)$$

$$I_{86} = \frac{\bar{z} - \bar{w}}{(z-w)^3} [-2\Pi^a \bar{\Pi}^b T_{\dot{\alpha}-\gamma+a} (P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}+}^{\gamma+} + Q^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}-}^{\gamma+}) + cc$$

$$- 2\Pi^a T_{\alpha+\dot{\lambda}-a} Q^{\alpha\dot{\beta}} (\nabla_{\dot{\beta}} P^{\dot{\lambda}\dot{\gamma}} \widehat{D}_{\dot{\gamma}} + \nabla_{\dot{\beta}} Q^{\dot{\lambda}\dot{\gamma}} \widehat{D}_{\dot{\gamma}}) + cc]$$

$$I_{87} = I_{85}$$

$$I_{88} = I_{84}$$

$$I_{90} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} [-\bar{\Pi}^{\delta+} D_\alpha (P^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} T_{\delta+\dot{\alpha}-}^b T_{b\dot{\beta}-}^{\alpha+} - (Q^{\alpha\dot{\beta}} F_{\delta+\dot{\beta}+} + Q^{\gamma\dot{\beta}} R_{\delta+\dot{\beta}+\gamma}^{\alpha})$$

$$+ Q^{\alpha\dot{\beta}} (T_{\delta+\dot{\alpha}-}^b T_{b\dot{\beta}+}^{\dot{\alpha}-} - F_{\delta+\dot{\beta}+}) + cc]$$

$$- D_\alpha \bar{\Pi}^d (Q^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} (\nabla_{\dot{\gamma}-} T_{d\dot{\beta}-}^{\alpha+} - F_{\delta+\dot{\beta}-}) + Q^{\alpha\dot{\beta}} (\nabla_{\gamma+} T_{d\dot{\beta}+}^{\gamma+} - F_{d\dot{\beta}+})) + cc$$

$$- D_\alpha P^{\alpha\gamma} (\nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} P^{\beta\lambda} \widehat{D}_\lambda + \nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} Q^{\beta\lambda} \widehat{D}_\lambda) + cc$$

$$+ \frac{1}{2} \Pi^a P^{\alpha\beta} [R_{a\alpha+\beta-}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma + \frac{1}{2} F_{a\alpha} \widehat{D}_\beta - 2\nabla_{\beta-} T_{d\alpha+}^{\gamma-} \widehat{D}_\gamma] + cc$$

$$+ \frac{1}{2} \Pi^a Q^{\alpha\dot{\beta}} [R_{a\alpha+\dot{\beta}+}^{\dot{\gamma}+} \widehat{D}_\gamma + \frac{1}{2} F_{a\alpha} \widehat{D}_{\dot{\beta}} - 2\nabla_{\gamma+} T_{d\dot{\beta}+}^{\gamma+} \widehat{D}_\gamma] + cc$$

$$+ \frac{1}{2} \Pi^{\tilde{\alpha}} (R_{\tilde{\alpha}\gamma+\beta-}^{\rho-} \widehat{D}_\rho + \frac{1}{2} \widehat{F}_{\tilde{\alpha}\gamma+} \widehat{D}_\beta) P^{\gamma\beta} + \frac{1}{2} \Pi^{\tilde{\alpha}} (R_{\tilde{\alpha}\gamma+\dot{\beta}+}^{\dot{\rho}+} \widehat{D}_{\dot{\rho}} + \frac{1}{2} \widehat{F}_{\tilde{\alpha}\gamma+} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) Q^{\gamma\dot{\beta}} + cc]$$

$$I_{91} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} [+ \frac{1}{4} D_\alpha \bar{\Pi}^d (P^{\alpha\beta} T_{db}^{\dot{\gamma}+} T_{\dot{\gamma}+\beta-}^b + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{db}^{\gamma-} T_{\gamma-\dot{\beta}+}^b) + cc$$

$$- \frac{1}{4} D_\alpha \bar{\Pi}^d (P^{\alpha\beta} R_{b\dot{\beta}-bd} + Q^{\alpha\dot{\beta}} R_{b\dot{\beta}+bd}) + cc$$

$$- \frac{1}{2} D_\alpha \bar{\Pi}^d (P^{\alpha\beta} (\nabla_{\gamma+} T_{d\dot{\beta}-}^{\gamma+} - F_{\delta+\dot{\beta}-}) + Q^{\alpha\dot{\beta}} (\nabla_{\gamma+} T_{d\dot{\beta}+}^{\gamma+} - F_{d\dot{\beta}+})) + cc]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}D_\alpha \bar{\Pi}^{\delta+} \left(P^{\alpha\beta} T_{\delta+b}{}^{\dot{\gamma}+} T_{\dot{\gamma}+\beta-}{}^b + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{\delta+b}{}^{\gamma-} T_{\gamma-\dot{\beta}+}{}^b \right) + cc \\
& -\frac{1}{2}D_\alpha \bar{\Pi}^{\delta+} \left(P^{\alpha\beta} \left(T_{\delta+\dot{\alpha}-}{}^b T_{b\beta-}{}^{\dot{\alpha}-} - F_{\delta+\beta-} \right) + Q^{\alpha\dot{\beta}} \left(T_{\delta+\dot{\alpha}-}{}^b T_{b\dot{\beta}+}{}^{\dot{\alpha}-} - F_{\delta+\dot{\beta}+} \right) \right) + cc \\
& +\frac{1}{2}D_\alpha \left(P^{\alpha\beta} T_{b\beta-}{}^{\tilde{\lambda}} T_{\tilde{\lambda}}{}^{d\hat{\gamma}} \widehat{D}_\gamma + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{b\dot{\beta}+}{}^{\tilde{\lambda}} T_{\tilde{\lambda}}{}^{d\hat{\gamma}} \widehat{D}_\gamma \right) + cc \\
& -\frac{1}{2}D_\alpha P^{\alpha\gamma} \left(\nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} P^{\beta\lambda} \widehat{D}_\lambda + \nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} Q^{\beta\dot{\lambda}} \widehat{D}_{\dot{\lambda}} \right) + cc]
\end{aligned}$$

$$I_{92} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} \left[\frac{1}{2} D_\alpha \left(P^{\alpha\gamma} T_{\gamma-\dot{\gamma}+}{}^a T_{a\dot{\lambda}-}{}^{\lambda-} \widehat{D}_\lambda P^{\dot{\lambda}\dot{\gamma}} - \bar{\Pi}^{\delta+} T_{c\hat{\gamma}}{}^\lambda T_{c\delta+}{}^{\hat{\gamma}} \right) \right]$$

$$I_{93} = I_{90}$$

$$I_{94} = I_{91}$$

$$I_{95} = I_{92}$$

$$I_{96} = \frac{1}{2} \left(\frac{G(z, w)}{(z - w)^2} + \frac{1}{6(z - w)^2} \right) \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}$$

$$I_{97} = -\frac{3}{4(z - w)^2} D_\alpha \left(P^{\alpha\beta} T_{a\beta-}{}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+}{}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + cc \right)$$

$$I_{100} = I_{96}$$

$$I_{101} = I_{97}$$

$$I_{104} = \frac{1}{(z - w)^2} \left(\frac{33}{40} D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_c{}^{\tilde{\beta}\hat{\gamma}} \Pi_{\tilde{\beta}} \right) + \Pi^a \Pi^b T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} \left(\frac{-2G(z, w)}{(z - w)^2} - \frac{47}{12(z - w)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
I_{105} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{G(z, w)}{(z - w)^2} - \frac{17}{12(z - w)^2} \right) D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_c{}^{\tilde{\beta}\hat{\gamma}} \Pi_{\tilde{\beta}} + \frac{2}{3(z - w)^2} D_{\tilde{\alpha}} \Pi^b T_{ba}{}^{\hat{\gamma}} T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} \\
& + \left(\frac{G(z, w)}{(z - w)^2} + \frac{3}{2(z - w)^2} \right) D_{\tilde{\alpha}} \left(T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} \nabla^a P^{\beta\gamma} + D_\alpha T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\tilde{\alpha}} \nabla^a Q^{\beta\dot{\gamma}} \right) D_\beta + cc
\end{aligned}$$

$$I_{106} = I_{105}$$

$$I_{107} + I_{108} = \frac{1}{(z - w)^2} \left(\frac{13}{3} D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_c{}^{\tilde{\beta}\hat{\gamma}} \Pi_{\tilde{\beta}} \right)$$

Somando, e mais uma vez usando as equações de movimento para simplificar os resultados, temos:

$$\begin{aligned}
\langle T(z) T(w) \rangle = & \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [\Pi^{\delta+} \bar{\Pi}^a \left(R_a^{\beta}{}_{\delta+\beta} - \frac{1}{2} F_{a\delta} \right) + \Pi^{\delta+} \bar{\Pi}^{\hat{\gamma}} \left(R_{\hat{\gamma}}^{\beta}{}_{\delta+\beta} - \frac{1}{2} F_{\gamma-\delta} \right) \\
& + \Pi^{\dot{\delta}} \bar{\Pi}^a \left(R_a^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\delta}\dot{\beta}} + \frac{1}{2} F_{a\dot{\delta}} \right) + \Pi^{\dot{\delta}} \bar{\Pi}^{\hat{\gamma}} \left(R_{\hat{\gamma}}^{\beta}{}_{\delta+\beta} - \frac{1}{2} F_{\gamma-\delta} \right) \\
& + \Pi^{\delta+} \left[P^{\gamma\beta} \widehat{D}_{\beta} + Q^{\gamma\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} \right] \left(R_{\gamma}^{\beta}{}_{\delta+\beta} - \frac{1}{2} F_{\gamma\delta} \right) + cc \\
& + \Pi^{\alpha+} \left(\nabla_{[\alpha+} \nabla_{\gamma+]} P^{\gamma\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \nabla_{[\alpha+} \nabla_{\gamma+]} Q^{\gamma\dot{\lambda}} \widehat{D}_{\dot{\lambda}} - \nabla^a T_{a\alpha+}{}^{\gamma-} \widehat{D}_{\gamma} \right) + cc \\
& + \Pi^{\dot{\alpha}-} \left(\nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\gamma+]} P^{\gamma\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \nabla_{[\dot{\alpha}-} \nabla_{\gamma+]} Q^{\gamma\dot{\lambda}} \widehat{D}_{\dot{\lambda}} - \nabla^a T_{a\alpha+}{}^{\gamma-} \widehat{D}_{\gamma} \right) + cc \\
& + \bar{\Pi}^{\hat{\beta}} \nabla^a T_{a\hat{\beta}}{}^{\tilde{\alpha}} D_{\tilde{\alpha}} + \Pi^d \bar{\Pi}^a \left(R_d{}^b{}_{ba} - \nabla^{\tilde{\alpha}} T_{ad\tilde{\alpha}} - T_{a\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} T_{d\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} \right) \\
& - D_{\alpha} \bar{\Pi}^a \left(\nabla^c T_{ca}{}^{\alpha+} - 2 H_{abc} T_{cb}{}^{\alpha+} + T_{ab}{}^{\hat{\gamma}} T_{b\hat{\gamma}}{}^{\alpha+} + cc \right) \\
& - \Pi^a \widehat{D}_{\gamma} \left(\nabla^c T_{ca}{}^{\gamma-} - 2 H_{abc} T_{cb}{}^{\gamma-} + T_{ab}{}^{\hat{\gamma}} T_{b\hat{\gamma}}{}^{\alpha+} + \nabla_{(\alpha+} \nabla_a P^{\alpha\gamma} \right) + cc \\
& + 4 D_{\alpha} \left(\nabla_{\gamma-} P^{\lambda\beta} \nabla_{\lambda+} P^{\alpha\gamma} + \nabla_{\dot{\gamma}+} Q^{\lambda\beta} \nabla_{\dot{\lambda}+} Q^{\alpha\dot{\gamma}} \right) \widehat{D}_{\beta} + cc \\
& - D_{\alpha} P^{\alpha\gamma} \left(\nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} P^{\beta\lambda} \widehat{D}_{\lambda} + \nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} Q^{\beta\dot{\lambda}} \widehat{D}_{\dot{\lambda}} \right) \\
& + D_{\alpha} \left(\nabla_a \nabla^a P^{a\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla_a \nabla^a Q^{a\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} \right) + cc \\
& \frac{1}{(z - w)^2} \left[\frac{i}{6} \left(\Pi^c T_c{}^{\beta\dot{\beta}}{}_{(\beta} \Pi_{\dot{\beta})} \right) + \Pi^d \Pi^a \left(4 H_{cbd} H^{cb}{}_a - \frac{13}{3} T_{a\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} T_{b\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} \right) \right. \\
& + \Pi^b D_{\beta} \left(4 T_{a\hat{\gamma}}{}^{\beta} T_{ba}{}^{\hat{\gamma}} - \frac{8}{9} \left(T_{a\gamma-}{}^{\alpha} \nabla_{\alpha} P^{\beta\gamma} + T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\alpha} \nabla_{\alpha} Q^{\beta\dot{\gamma}} \right) \right) \\
& - \frac{5}{6} D_{\alpha} \left(P^{\alpha\beta} T_{a\beta-}{}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+}{}^{\alpha+} T_{a+\dot{\beta}-a} \Pi^{\dot{\beta}-} \right) + cc \\
& \left. + \frac{5}{2} \left(D_{\tilde{\alpha}} T_{a\gamma-}{}^{\tilde{\alpha}} \nabla^a P^{\beta\gamma} + D_{\tilde{\alpha}} T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\tilde{\alpha}} \nabla^a Q^{\beta\dot{\gamma}} \right) D_{\beta} + cc \right]
\end{aligned}$$

Como antes, todas as divergências cancelam-se entre si. Nas equações aqui derivadas, os resultados foram simplificados usando equações de movimento para os campos de fundo e identidades de Bianchi. Antes de discutirmos os contratermos que cancelarão os termos holomórficos e as equações de movimento que anularão os termos anti-holomórficos, calcularemos a contribuição do dilaton.

5.2.1 Setor do Dilaton

Passamos agora ao setor do dilaton. Desde que as correções oriundas do termo de Fradkin-Tseytlin carregam um termo extra em α' , a contribuição do dilaton terá somente diagramas no nível de árvore.

Começando com $\langle G(z) G(w) \rangle$. Nestes caso temos somente a contribuição dos diagramas (60) e (61) gerando o termo holomórfico:

$$I_{60} = I_{61} = \frac{1}{(z-w)^3} \left(4\lambda\alpha'^2 e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} D^2 \nabla^2 e^{\phi-\bar{\phi}} \right) \quad (5.37)$$

Diferentemente dos outros termos holomórficos, este termo é cancelado por um contra-termo de 1 loop na ação da forma $\Delta S \sim \int d^2 z \nabla^2 e^{\phi-\bar{\phi}} \Pi^\alpha \bar{\Pi}_\alpha$. Este contratermo não altera os demais resultados e o OPE acima não fornece nenhuma contribuição relevante aos resultados. Na próxima seção serão discutidos em mais detalhes os demais contratermos e sua implicações.

Continuando a análise do setor do dilaton, o valor esperado $\langle G(z) \bar{G}(w) \rangle$ não recebe nenhuma contribuição. Os OPE's envolvendo ρ tornam todos os diagramas relevantes regulares. A contribuição do dilaton para $\langle T(z) G(w) \rangle$ é listada abaixo, onde será suprimido o fator $\lambda\alpha'$

$$\begin{aligned} I_{61} &= \frac{1}{(z-w)^2} [-2e^{i\rho} D^\alpha ((\Pi^\alpha \nabla_\alpha (\nabla_\alpha e^{\phi-\bar{\phi}})) + \Pi^{\tilde{\alpha}} \nabla_{\tilde{\alpha}} (\nabla_\alpha e^{\phi-\bar{\phi}}))] \\ I_{62} &= \frac{1}{(z-w)^3} 2e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} \nabla_\alpha (\phi - \bar{\phi}) \\ &\quad + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} 2e^{i\rho} D^\alpha \bar{\partial} (\nabla_\alpha e^{\phi-\bar{\phi}}) \\ I_{63} &= \frac{1}{(z-w)^3} (-4e^{i\rho} D^\alpha (\nabla_\alpha e^{\phi-\bar{\phi}})) \\ &\quad + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} (-4e^{i\rho} \bar{\partial} D^\alpha (\nabla_\alpha e^{\phi-\bar{\phi}})) \\ &\quad - \frac{2}{(z-w)^2} \partial (e^{i\rho} D^\alpha \nabla_\alpha e^{\phi-\bar{\phi}}) \\ I_{65} &= \frac{4i}{(z-w)^2} \Pi^{\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} e^{i\rho} \nabla^\alpha e^{\phi-\bar{\phi}} \\ &\quad + \frac{1}{(z-w)} \Pi^{\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} \partial (e^{i\rho} \nabla^\alpha e^{\phi-\bar{\phi}}) \\ I_{66} &= \frac{1}{(z-w)^2} [2(\nabla_{\gamma-} (\phi + \bar{\phi}) \Pi^b T_{b\alpha+}{}^{\gamma-} + \nabla_{\dot{\gamma}+} (\phi + \bar{\phi}) \Pi^b T_{b\alpha+}{}^{\gamma-}) D^\alpha \\ &\quad + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} [-2\nabla_{\beta+} P^{\alpha\gamma} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \widehat{D}_\gamma + 2\nabla_{\beta+} Q^{\alpha\dot{\gamma}} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \widehat{D}_{\dot{\gamma}} + cc] D^\beta] \\ I_{67} &= \frac{1}{(z-w)^2} [-4i \Pi^{\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} e^{i\rho} \nabla^\alpha e^{\phi-\bar{\phi}} - (z-w) \Pi^{\dot{\alpha}} \Pi_{\alpha\dot{\alpha}} \partial (e^{i\rho} \nabla^\alpha e^{\phi-\bar{\phi}}) \\ &\quad + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z-w)^3} [-2\nabla_{\beta+} P^{\alpha\gamma} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \widehat{D}_\gamma - 2\nabla_{\beta+} Q^{\alpha\dot{\gamma}} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \widehat{D}_{\dot{\gamma}}] D^\beta + cc] \\ I_{69} &= \frac{1}{(z-w)^3} 2e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} D^\alpha \nabla_\alpha (\phi - \bar{\phi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Pi^a \Pi^{\dot{\beta}-} \nabla^c (\phi + \bar{\phi}) + \frac{1}{2} \Pi^b T_{bc} \bar{\alpha} D_{\bar{\alpha}} \nabla^c (\phi + \bar{\phi})] \\
& + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [D_{\tilde{\alpha}} \bar{\Pi}^b T_{cb} \tilde{\alpha} D_{\tilde{\alpha}} \nabla^c (\phi + \bar{\phi}) \\
& + D_{\tilde{\alpha}} \bar{\Pi}^{\hat{\beta}} T_{c\hat{\beta}} \tilde{\alpha} D_{\tilde{\alpha}} \nabla^c (\phi + \bar{\phi}) \\
& + \Pi^a \bar{\Pi}^b T_{ab} \bar{\alpha} \nabla_{\bar{\alpha}} (\phi + \bar{\phi}) + \Pi^a \bar{\Pi}^{\hat{\beta}} T_{a\hat{\beta}} \tilde{\alpha} \nabla_{\bar{\alpha}} (\phi + \bar{\phi}) \\
& + D_{\alpha} \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) (\nabla^a P^{\alpha\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla^a Q^{\alpha\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc \\
& + \Pi^a \nabla_{\gamma+} (\phi + \bar{\phi}) (\nabla_{\alpha} P^{\alpha\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla_{\alpha} Q^{\alpha\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}} + cc)
\end{aligned}$$

$$I_{129} = I_{130} = \frac{1}{(z - w)^2} [(P^{\alpha\gamma} \nabla_{\gamma-} (\phi + \bar{\phi}) + Q^{\alpha\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}+} (\phi + \bar{\phi})) T_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^a \Pi^{\dot{\beta}-} + cc]$$

$$\begin{aligned}
I_{132} = I_{135} = & \frac{1}{(z - w)^2} [(P^{\alpha\gamma} \nabla_{\gamma-} (\phi + \bar{\phi}) + Q^{\alpha\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}+} (\phi + \bar{\phi})) T_{\alpha+\dot{\beta}-a} \Pi^a \Pi^{\dot{\beta}-} + cc] \\
& + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [\nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \bar{\Pi}^a [P^{\alpha\beta} T_{a\beta-} \tilde{\lambda} D_{\tilde{\lambda}} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+} \tilde{\lambda} D_{\tilde{\lambda}}] + cc \\
& - D_{\lambda} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) P^{\alpha\gamma} [\nabla_{\gamma-} P^{\lambda\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla_{\gamma-} Q^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}] + cc]
\end{aligned}$$

$$I_{133} = I_{136} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \bar{\Pi}^a [-P^{\alpha\beta} T_{a\beta-} \tilde{\lambda} D_{\tilde{\lambda}} - Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+} \tilde{\lambda} D_{\tilde{\lambda}}] + cc$$

$$I_{134} = I_{138} = -I_{133}$$

O resultado fica:

$$\begin{aligned}
\langle T(z) T(w) \rangle_{dil} = & \frac{2T_{dil}}{(z - w)^2} \\
& + \frac{(\bar{z} - \bar{w})}{(z - w)^3} [2D_{\alpha} \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) (\nabla^a P^{\alpha\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla^a Q^{\alpha\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc \\
& - 2D_{\lambda} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) P^{\alpha\gamma} [\nabla_{\gamma-} P^{\lambda\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla_{\gamma-} Q^{\lambda\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}] + cc \\
& - 2\Pi^a \nabla_{\gamma+} (\phi + \bar{\phi}) ((\nabla_{\alpha} P^{\gamma\beta} \widehat{D}_{\beta} + \nabla_{\alpha} Q^{\gamma\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}) + cc) \\
& + \bar{\Pi}^b ([D_{\alpha} P^{\alpha\beta} + D_{\dot{\alpha}} Q^{\dot{\alpha}\beta}] \nabla_b \nabla_{\beta-} (\phi + \bar{\phi}) + 2D_{\alpha} T_{cb}{}^{\alpha} \nabla^c (\phi + \bar{\phi})) + cc \\
& + \bar{\Pi}^{\gamma-} ([D_{\alpha} P^{\alpha\beta} + D_{\dot{\alpha}} Q^{\dot{\alpha}\beta}] \nabla_{\gamma-} \nabla_{\beta-} (\phi + \bar{\phi}) + 2D_{\alpha} T_{c\gamma-}{}^{\alpha} \nabla^c (\phi + \bar{\phi})) + cc \\
& + 2\bar{\Pi}^a \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) [P^{\alpha\beta} T_{a\beta-} \tilde{\lambda} D_{\tilde{\lambda}} + Q^{\alpha\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+} \tilde{\lambda} D_{\tilde{\lambda}}] + cc \\
& - [P^{\gamma\beta} \widehat{D}_{\beta} + Q^{\alpha\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}] [D_{\alpha} P^{\alpha\beta} + D_{\dot{\alpha}} Q^{\dot{\alpha}\beta}] \nabla_{\gamma} \nabla_{\beta-} (\phi + \bar{\phi}) + cc \\
& - [P^{\gamma\beta} \widehat{D}_{\beta} + Q^{\gamma\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}] \Pi^{\alpha+} \nabla_{\gamma+} \nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) + cc \\
& - [P^{\gamma\beta} \widehat{D}_{\beta} + Q^{\gamma\dot{\beta}} \widehat{D}_{\dot{\beta}}] \Pi^a \nabla_{\gamma} \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) + cc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Pi^a \bar{\Pi}^{\gamma-} \left[2T_{a\gamma-} \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} (\phi + \bar{\phi}) + \nabla_{\gamma-} \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) \right] + cc \\
& + \Pi^a \bar{\Pi}^b \left[\nabla_b \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) + 2T_{ab} \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} (\phi + \bar{\phi}) \right] \\
& + \Pi^a \bar{\Pi}^b \left[\nabla_b \nabla_a (\phi - \bar{\phi}) \right]
\end{aligned}$$

O primeiro termo holomórfico é o termo esperado, informando que T_{dil} tem peso conforme 2. Os demais termos holomórficos são cancelados como antes. Comparando com o resultado em 1 loop, temos as equações de movimento

$$\begin{aligned}
R_a^{\beta+}{}_{\delta+\beta+} - \frac{1}{2} F_{a\delta} &= \nabla_a \nabla_{\delta+} (\phi - \bar{\phi}) \\
R_{\gamma-}^{\beta+}{}_{\delta+\beta+} - \frac{1}{2} F_{\gamma-\delta+} &= -\nabla_{\gamma-} \nabla_{\delta+} (\phi + \bar{\phi}) \\
\nabla^a T_{a\gamma-}{}^{\alpha+} &= -2T_{c\gamma-}{}^{\alpha+} \nabla^c (\phi + \bar{\phi}) - P^{\alpha\beta} \nabla_{\gamma-} \nabla_{\beta-} (\phi + \bar{\phi})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{\gamma\lambda} \left(R_{\gamma+}^{\beta+}{}_{\delta+\beta+} - \frac{1}{2} F_{\gamma+\delta+} \right) + \nabla_{[\delta+} \nabla_{\gamma+]} P^{\gamma\lambda} - \nabla^a T_{a\alpha+}{}^{\gamma-} &= 2\nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) \nabla_{\delta+} P^{\alpha\lambda} \\
&- P^{\gamma\lambda} \nabla_{\gamma+} \nabla_{\delta+} (\phi + \bar{\phi}) \\
R_d{}^b{}_{ba} - \nabla^{\tilde{\alpha}} T_{ad\tilde{\alpha}} - T_{a\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} T_{d\hat{\gamma}}{}^{\tilde{\alpha}} &= \nabla_b \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) + 2T_{ab} \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} (\phi + \bar{\phi})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^c T_{ca}{}^{\alpha+} - 2H_{abc} T_{cb}{}^{\alpha+} + T_{ab} \hat{\gamma} T_{b\hat{\gamma}}{}^{\alpha+} &= P^{\alpha\beta} \nabla_b \nabla_{\beta-} (\phi + \bar{\phi}) + T_{cb}{}^{\alpha} \nabla_b (\phi + \bar{\phi}) \\
&+ 2\nabla_{\delta+} (\phi + \bar{\phi}) [P^{\delta\beta} T_{a\beta-}{}^{\alpha+} + Q^{\delta\dot{\beta}} T_{a\dot{\beta}+}{}^{\alpha+}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^c T_{ca}{}^{\gamma-} - 2H_{abc} T_{cb}{}^{\gamma-} + \nabla_{(\alpha+} \nabla_{a)} P^{\alpha\gamma} + \nabla_{(\dot{\alpha}-} \nabla_{a)} Q^{\dot{\alpha}\gamma} &= P^{\beta\gamma} \nabla_{\beta+} \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) \\
&+ Q^{\dot{\beta}\gamma} \nabla_{\dot{\beta}-} \nabla_a (\phi + \bar{\phi}) \\
4\nabla_{\gamma-} P^{\lambda\beta} \nabla_{\lambda+} P^{\alpha\gamma} + \nabla_a \nabla^a P^{\alpha\beta} + \nabla_{[\beta+} \nabla_{\gamma-]} P^{\beta\lambda} &= 2\nabla_a (\phi + \bar{\phi}) \nabla^a P^{\alpha\beta} \\
&- 2\nabla_{\alpha+} (\phi + \bar{\phi}) P^{\alpha\gamma} \nabla_{\gamma-} P^{\lambda\beta}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Nas equações acima não foi escrito o conjugado hermitiano das mesmas. Após todos estes cálculos, existem dois caminhos distintos a seguir. O primeiro, situando-se no âmbito da física em 4 dimensões, consiste em analisar as equações de movimento e compará-las com as equações derivadas no nível de árvore. De fato, será mostrado

que as equações são as mesmas. Indo em outra direção, o processo perturbativo para calcular os OPE's gerou uma série de termos holomórficos que diferem da álgebra usual. Estes termos não estão relacionados com as equações de movimento, mas devem ser cancelados de uma forma sistemática para garantir a validade do método adotado. A próxima seção destinar-se-á a discutir a solução destes problemas.

5.3 Contratermos.

Como discutido anteriormente os termos holomórficos que diferem da álgebra usual devem ser cancelados. O procedimento para cancelar tais termos implica em redefinir as correntes através de contratermos de 1 loop, de forma que contrações com os mesmos no nível de árvore cancelam os termos indesejados em 1 loop. Os mesmos devem ser escolhidos de forma a não gerar novos termos anti-holomórficos.

Vamos começar a análise pelo tensor energia momento. Devemos ter em mente não apenas os resultados envolvendo o OPE $T(z)T(w)$, mas também $T(z)G(w)$. Redefinimos o tensor energia momento da forma:

$$T \longmapsto T + a\Pi^b\Pi^c K_{cb} + b\Pi^{\tilde{\alpha}}\Pi^b K_{\tilde{\alpha}b} + cd_{\tilde{\beta}}\Pi^{\tilde{\alpha}}K_{\alpha}^{\tilde{\beta}} + dd_{\tilde{\beta}}\Pi^{\hat{\gamma}}K_{\hat{\gamma}}^{\tilde{\beta}} + ed_{\tilde{\beta}}\Pi^a K_a^{\tilde{\beta}}, \quad (5.41)$$

onde, após fazer a expansão em campo de fundo covariante, as constantes a, b, c, d e e , assim como os tensores K_{AB} são ajustados para cancelar os termos holomórficos indesejados. Contraindo $T(z)$ com a parte oriunda do setor de contratermos, eliminamos completamente os termos holomórficos em $T(z)T(w)$ para :

$$\begin{aligned} a &= -2, & K_{ab} &= H_{acd}H_b^{cd} \\ b &= -\frac{1}{12}, & K_{\alpha+b} &= T_{a\tilde{\beta}-\alpha+}T_b^{a\tilde{\beta}-} \\ c &= -\frac{5}{12}, & K_{\dot{\alpha}-}^{\alpha+} &= T_{a\hat{\gamma}}^{\alpha}T_{a\dot{\alpha}-}^{\hat{\gamma}}, \\ d &= -\frac{5}{4}, & K_{\gamma-}^{\beta+} &= \nabla^a T_{a\gamma-}^{\beta+} \\ e &= -2, & K_a^{\beta+} &= T_{b\hat{\gamma}}^{\beta+}T_a^{b\hat{\gamma}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Na expressão acima não foram escritos os conjugados hermitianos. Embora estes termos cancelem totalmente os termos envolvendo o tensor energia-momento, a parte envolvendo $K_{\alpha+b}$ e K_{α}^{β} gerará novas contribuições em $T(z)G(w)$. Após a redefinição de $T(z)$, os termos em $T(z)G(w)$ que devem ser cancelados tem a forma:

$$\langle T(z)G(w) \rangle_{hol.} = \frac{1}{(z-w)^2} \lambda \alpha' e^{i\rho} e^{\phi-\bar{\phi}} \left[-\frac{1}{120} D_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_c^{\beta\hat{\gamma}} D_{\beta} + \Pi^{\alpha} \left(-\frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{\beta\gamma} + \frac{1}{4} F_{\alpha}^{\gamma} \right) D_{\gamma} \right]$$

$$- \Pi^a \left(\frac{1}{2} R_{a\beta}{}^{\beta\gamma} + \frac{1}{4} R^{\gamma b}{}_{ba} - \frac{1}{4} F_a{}^\gamma - \frac{3}{4} T_{b\dot{\beta}-\alpha+} T_a{}^{b\gamma} \right) D_\gamma]. \quad (5.43)$$

O Primeiro termo pode ser cancelado redefinindo G com um contra-termo, tal que

$$G \rightarrow G + \frac{\lambda (\alpha')^2}{120} e^{i\rho} e^{\phi - \bar{\phi}} d_{\tilde{\alpha}} T_{c\hat{\gamma}}^{\tilde{\alpha}} T_c^{\beta\hat{\gamma}} D_\beta \quad (5.44)$$

No entanto, assim como os termos em $G(z) \bar{G}(w)$, os demais termos não podem ser cancelados por um contratermo. Este impasse é resolvido lembrando que temos uma arbitrariedade na expansão para o campo d_α . Redefinindo a expansão do mesmo para

$$(d_\alpha + D_\alpha) \rightarrow (d_\alpha + D_\alpha) \left(1 + y^A y^B L_{AB} \right) \quad (5.45)$$

e expandindo novamente a ação, podemos restringir L_{AB} para:

$$\begin{aligned} L_{a\gamma} &= L_{\gamma a} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} R_{a\beta\gamma+}{}^\beta + \frac{1}{4} R_{\gamma+bb a} - \frac{1}{4} F_{a\gamma+} - \frac{3}{4} T_{b\dot{\beta}-\alpha+} T_{ab\gamma+} \right) \\ L_{\alpha+\dot{\alpha}-} &= \left(R_{\dot{\beta}\alpha}{}^{\dot{\beta}\gamma} - \frac{1}{2} F_{\dot{\gamma}\alpha} \right), \end{aligned} \quad (5.46)$$

o primeiro termo gerará vértices que contribuirão para o diagrama (10) avaliado em $T(z) G(w)$, cancelando os termos holomórficos em questão. Já o termo em $L_{\alpha+\dot{\alpha}-}$ dará uma contribuição ao diagrama (10) em $G(z) \bar{G}(w)$, cancelando os termos holomórficos deste OPE. Os demais termos da nova expansão não fornecem nenhuma outra contribuição. Desta forma o processo diagramático adotado parece não ter problemas. As divergências cancelam-se entre si e os termos holomórficos são cancelados por contratermos e redefinição do campo D_α , de forma a não alterar os demais resultados. O próximo passo é analisar as equações de movimento.

5.4 Equações de movimento.

Nesta seção serão analisadas as equações de movimento. Lembrando os resultados obtidos no nível de árvore, mostramos que dos $32 + 32$ graus de liberdade contidos no pré-potencial, apenas $24+24$ são independentes. Os restantes $16+16$ graus de liberdade devem estar no dilaton, que não acopla classicamente. Como consequência imediata, as equações aqui derivadas devem descrever $16+16$ graus de liberdade acoplados ao super espaço no string gauge. Estes graus de liberdade descrevem o campo compensador, visto que neste gauge a matéria é fixa.

Escrevendo as equações de movimento derivadas no nível de árvore com a simetria shift fixada, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\hat{\gamma}} (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) &= 0 \\
\nabla_a (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) &= 0 \\
\nabla_{\gamma} (\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) &= 0 \\
\nabla_a (\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Tínhamos ainda equações envolvendo os campos quirais e twist quirais $P^{a\beta}$ e $Q^{\alpha\beta}$. Estas equações refletem o mesmo conteúdo das equações acima. Vamos escrever apenas uma delas, visto que são equivalentes. Usando os vínculos derivados no nível de árvore, a equação (4.66) pode ser escrita, a menos de constantes multiplicativas, da forma:

$$\nabla_{\beta} T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\beta} = [\nabla_a, \nabla_{\dot{\gamma}+}] (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) + F_{a\dot{\gamma}+}. \tag{5.48}$$

Na equação acima foi usado o fato que o campo que tem carga multiplicativa $U(1)$ não é o dilaton, mas sim a exponencial do mesmo. Resolvendo identidades de Bianchi, temos que $\nabla_{\beta} T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\beta} = F_{a\dot{\gamma}+}$. Desta forma, esta equação é anulada pelas equações anteriores

Começando a análise das equações derivadas em 1 loop pelo OPE $T(z)G(w)$, a primeira equação em (5.39) é anulada trivialmente pelas equações (5.47). Para isto, basta usar identidades de Bianchi e mostrar que as componentes das curvaturas envolvidas na mesma anulam-se. A equação pode ser escrita como:

$$\nabla_{\alpha+} \nabla_{\delta-} (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) = 0 \tag{5.49}$$

A segunda equação em (5.39), mais uma vez com o auxílio de identidades de Bianchi, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha} \left[\left(T_{a\dot{\gamma}+}{}^{\tilde{\beta}} \nabla_{\tilde{\beta}} + F_{a\dot{\gamma}+} Y \right) (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) \right] &= 0 = \\
\nabla_{\alpha} \left([\nabla_a, \nabla_{\dot{\gamma}+}] (\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Desta forma, esta equação também é anulada pelas equações (5.47). Embora a derivada da equação seja uma condição mais forte que a própria, não existe evidência que esta equação tenha algum conteúdo físico. De fato, devemos esperar correções nas equações derivadas no nível de árvore somente em dois loops, sendo que em 1 loop obteremos no máximo derivadas das mesmas equações.

A última equação em (5.39) exige uma análise mais completa das identidades de Bianchi. No apêndice é demonstrado como esta equação é equivalente à primeira equação de $T(z)T(w)$, (5.40). A segunda equação em (5.40) é anulada trivialmente pelas equações (5.47) como no caso anterior. As demais equações envolvendo $T(z)T(w)$ são de ordem maior nas derivadas e devem ser derivadas das equações anteriores, analogamente à equação (5.50) e aos resultados da referência [2]. Este cálculo é extremamente tedioso e envolve a resolução completa de todas as identidades de Bianchi. O mesmo será deixado para um trabalho posterior. Por hora, vamos escrever a segunda equação de (5.47) com os resultados do apêndice. Lembrando que, como descrito no apêndice, vetores são tratados como bi-espinores ($\nabla_b \rightarrow \nabla_{\beta\dot{\beta}}$), a equação supracitada é escrita como

$$2\nabla_{\beta}H_{\dot{\beta}\alpha} = \nabla_{\beta\dot{\beta}}\nabla_{\alpha}(\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) \quad (5.51)$$

onde $H_{\dot{\beta}\alpha}$ é a componente irreduzível de H_{abc} e foi suprimido o índice “+” em α . Ainda utilizando-se dos resultados do apêndice, podemos escrever o lado esquerdo da equação acima como

$$2\nabla_{\beta}H_{\dot{\beta}\alpha} = [\nabla_{\beta\dot{\beta}}, \nabla_{\alpha}](\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}),$$

sendo que os termos envolvendo $T_{a\alpha+}\hat{\beta}\nabla_{\hat{\beta}}$ são cancelados usando as demais equações até aqui derivadas. Com este último resultado a equação (5.51) resume-se a

$$\nabla_{\alpha}\nabla_b(\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) = 0, \quad (5.52)$$

mostrando que a análise em 1 loop apenas fornece derivadas das equações obtidas no nível de árvore.

Por fim, será mostrado o conteúdo físico das equações (5.47). As equações envolvendo derivadas bosônicas e espinoriais não são independentes, visto que são relacionadas por anticomutadores. A análise do termo de Fradkin Tseytlin mostra que o dilaton é composto de campos quirais e anti-quirais $(\phi_c, \bar{\phi}_c)$ em conjunto com campos twist e anti-twist quirais $(\phi_{tc}, \bar{\phi}_{tc})$. Como as equações devem descrever $16 + 16$ graus de liberdade, vamos separar o dilaton em duas representações da álgebra de supersimetria $N = 2$ com $8 + 8$ componentes cada. Podemos associar os campos $(\phi_c, \bar{\phi}_c)$ com um field strength de um supercampo vetorial W e $\bar{W}$. Estes supercampos satisfazem as condições de realidade $\nabla^2 W = \widehat{\nabla}^2 \bar{W}$ e são expandidos em componentes da forma

$$W \rightarrow \phi_c = a + \theta^{\alpha}\zeta_{\alpha} + \hat{\theta}^{\alpha}\hat{\zeta}_{\alpha} + (\theta)^2 D_{++} + \theta^{\alpha}\hat{\theta}^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}D_{+-} + (\hat{\theta})^2 D_{--} + \theta^{\alpha}\hat{\theta}^{\alpha}F_{\alpha\beta}$$

$$+\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha (\hat{\theta})^2 \partial_m \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \hat{\theta}^\alpha (\theta)^2 \partial_m^{\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} + (\theta)^2 (\hat{\theta})^2 \partial^m \partial_m \bar{a}. \quad (5.53)$$

Na expansão acima temos $8 + 8$ componentes, onde $F_{\alpha\beta}$ é um field strength $U(1)$, ζ_α e $\hat{\zeta}_\alpha$ são espinores do $SU(2)$ e temos dois campos auxiliares, representados por um tripleto D_{ij} e um campo escalar complexo a .

Lembrando que as componentes L_{--} e L_{++} do multipletto linear L_{ij} discutido no capítulo 2 satisfazem as condições de twist e anti-twist quiralidade, podemos associar os campos $(\phi_{tc}, \bar{\phi}_{tc})$ a estes. Impondo as condições de realidade $\nabla^2 L_{--} = \widehat{\nabla}^2 L_{++}$, este supercampo pode ser expandido como:

$$\begin{aligned} L_{++} \rightarrow \phi_{tc} = l_{++} + \theta^\alpha \chi_\alpha + \hat{\theta}^{\dot{\alpha}} \chi_{\dot{\alpha}} + (\theta)^2 y + (\hat{\theta})^2 \bar{y} + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \hat{\theta}^{\dot{\alpha}} (\partial_m l_{+-} + \varepsilon_{mnpq} H^{npq}) \\ + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha (\hat{\theta})^2 \partial_m \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \hat{\theta}^{\dot{\alpha}} (\theta)^2 \partial_m \chi^\alpha + (\theta)^2 (\hat{\theta})^2 \partial_m \partial^m l_{--}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Onde temos $8 + 8$ componentes representadas por um tripleto l_{ij} , um field strength tensorial H^{npq} , pelos espinores do $SU(2)$ χ_α e $\hat{\chi}^\alpha$ e pelo escalar complexo y , este último é um campo auxiliar. De posse destas expansões, podemos escrever as equações de movimento para as componentes na forma

$$\phi_c + \bar{\phi}_c = \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}. \quad (5.55)$$

Podemos agora justificar as equações de movimento aqui derivadas. Escrevendo as equações (5.47) com as derivadas covariantes escritas no espaço plano, as mesmas são idênticas às equações de campo livre acima. Desta forma, podemos concluir que derivamos as equações acima acopladas ao super-espaço curvo, lembrando que estas são equações para o campo compensador e não para a matéria.

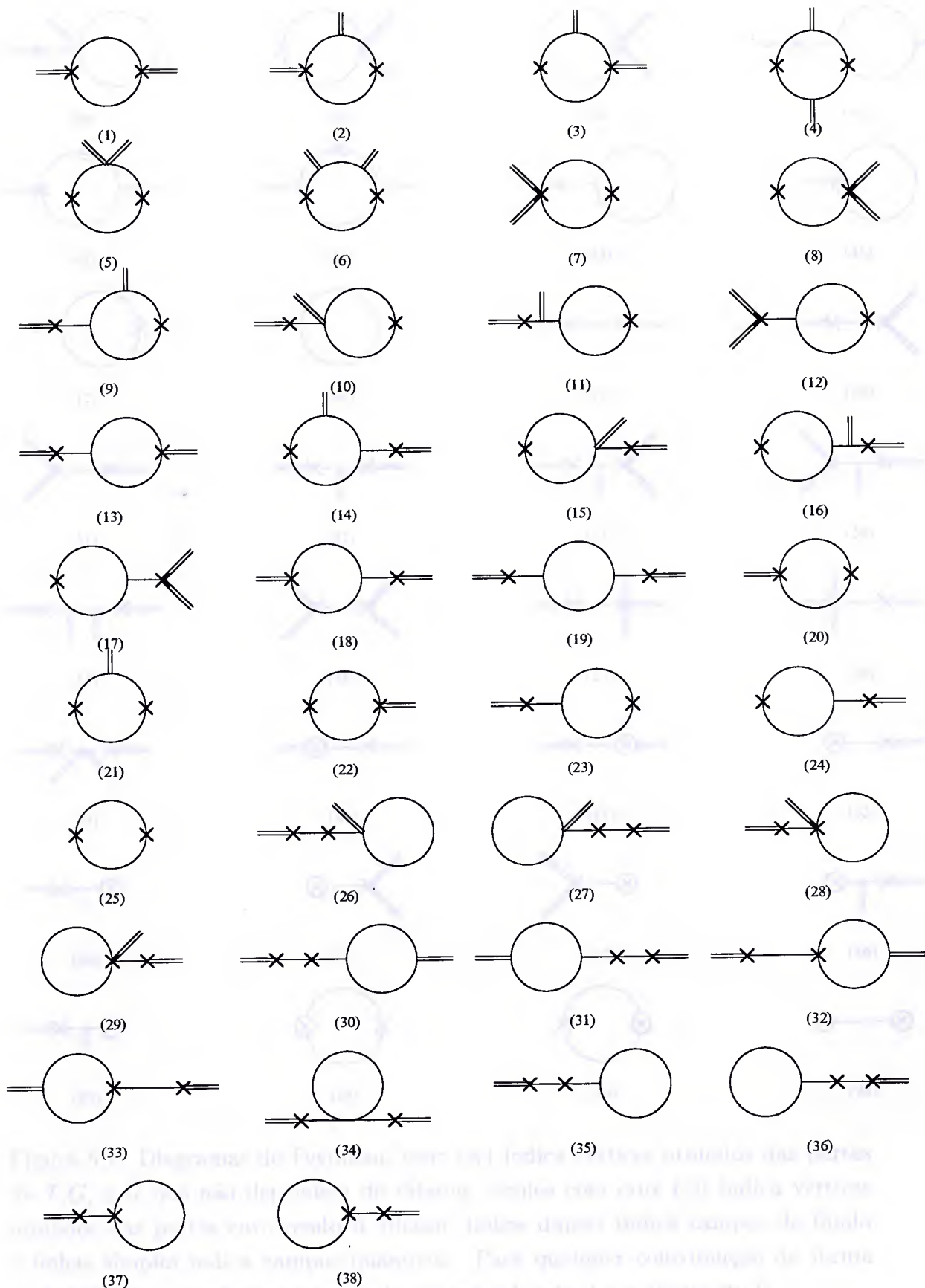
De posse das equações de movimento, é natural perguntar se é possível encontrar uma ação para as mesmas. No caso da corda Heterótica, no string gauge a ação efetiva em 1 loop é escrita no superespaço $N = 1$ como

$$S_{heterotica} = \int d^4 x d^4 \theta E^{-1} (\Phi \bar{\Phi}) \quad (5.56)$$

onde E é o determinante do supervierbein, e $(\Phi, \bar{\Phi})$ a exponencial do dilaton $(\phi_c, \bar{\phi}_c)$. Neste caso o dilaton é identificado com um supercampo quiral $N = 1$. É extremamente não trivial derivar as equações de movimento da ação acima no super-espaço, visto que os campos são vinculados. Na referência [2] as equações são derivadas e escritas como:

$$\nabla_b (\phi_c - \bar{\phi}_c) = 0. \quad (5.57)$$

A equação acima é extremamente sugestiva e demonstra que as equações aqui derivadas para o caso $N = 2$ no string gauge são de fato uma versão $U(1) \times U(1)$ destas. No entanto é extremamente difícil escrever uma ação para as mesmas no super-espço $N = 2$, devido a dimensão canônica dos campos. Para resolver problemas análogos a este, foi desenvolvido na literatura uma alternativa ao super-espço $N = 2$ discutido nesta tese, denominado super-espço harmônico [45]. Embora discussões envolvendo o super-espço harmônico estão completamente fora do escopo desta tese, o mesmo pode ser útil para escrevermos uma ação para as equações de movimento aqui derivadas.



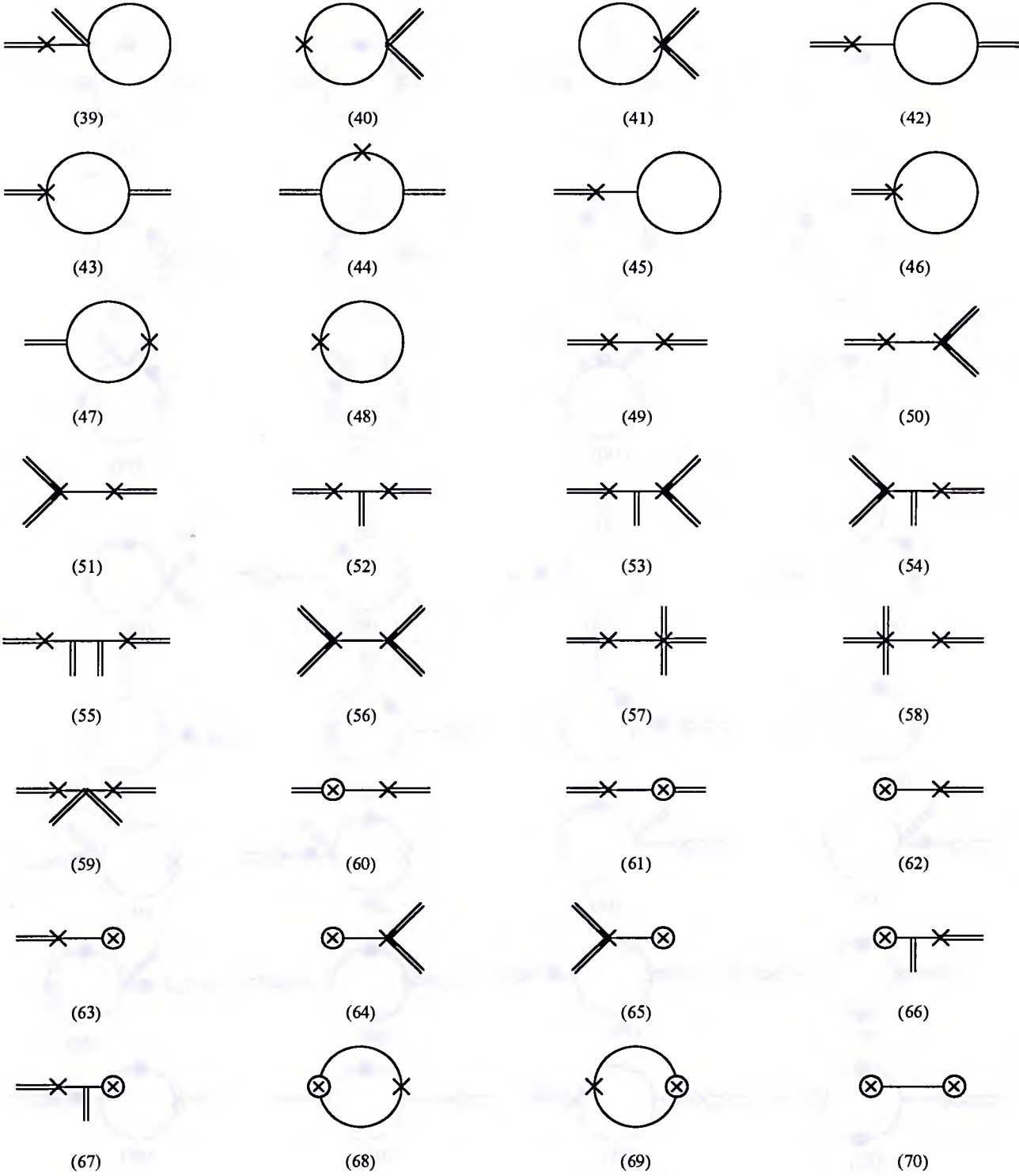
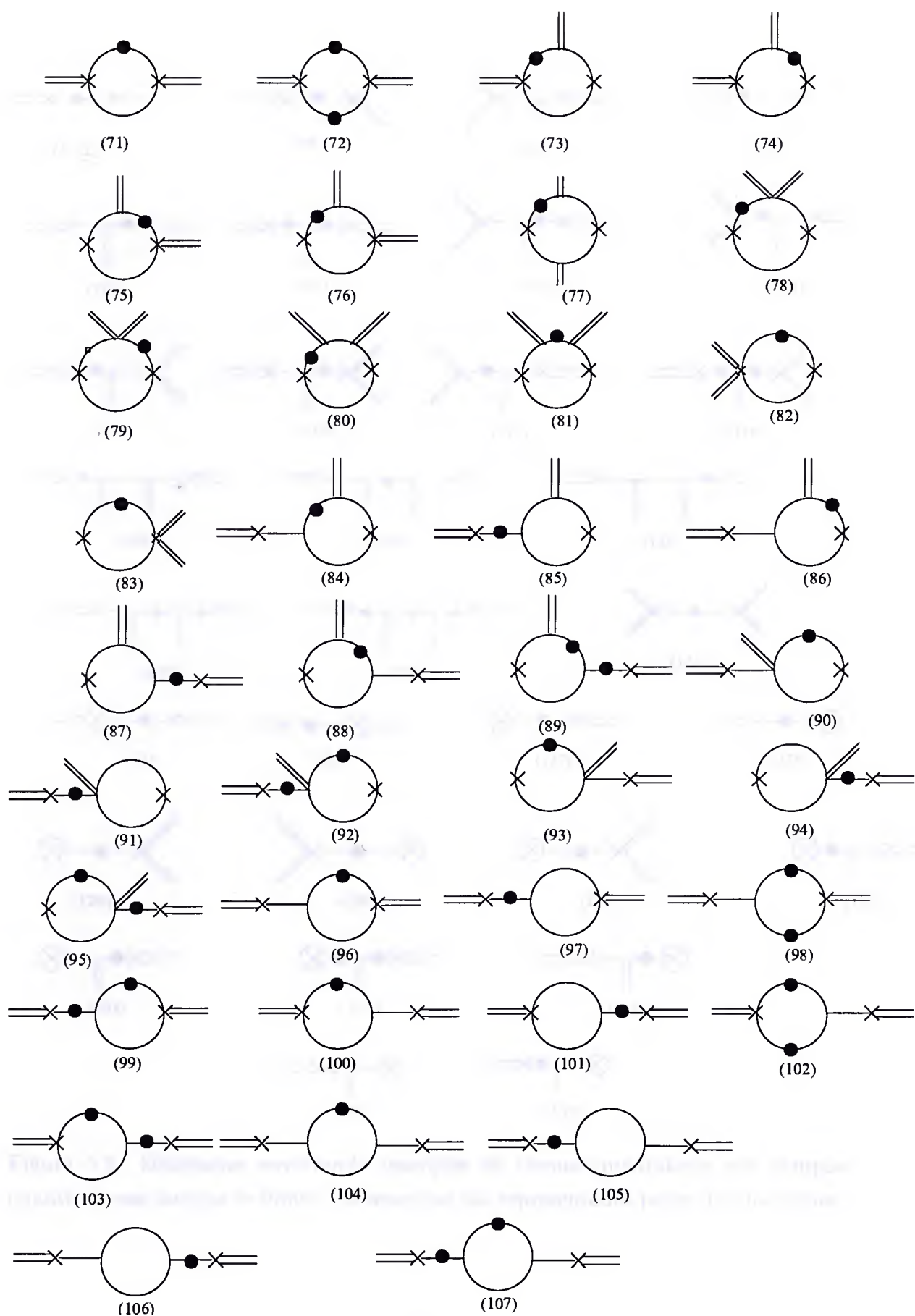


Figura 5.1: Diagramas de Feynman; cruz ($\times$) indica vértices oriundos das partes de T, G , e $\bar{G}$ que não dependem do dilaton; círculos com cruz ($\otimes$) indica vértices oriundos das partes envolvendo o dilaton; linhas duplas indica campos de fundo e linhas simples indica campos quânticos. Para qualquer contribuição da forma $\langle A(z)B(w) \rangle$, os vértices a esquerda são oriundos de A e a direita de B .



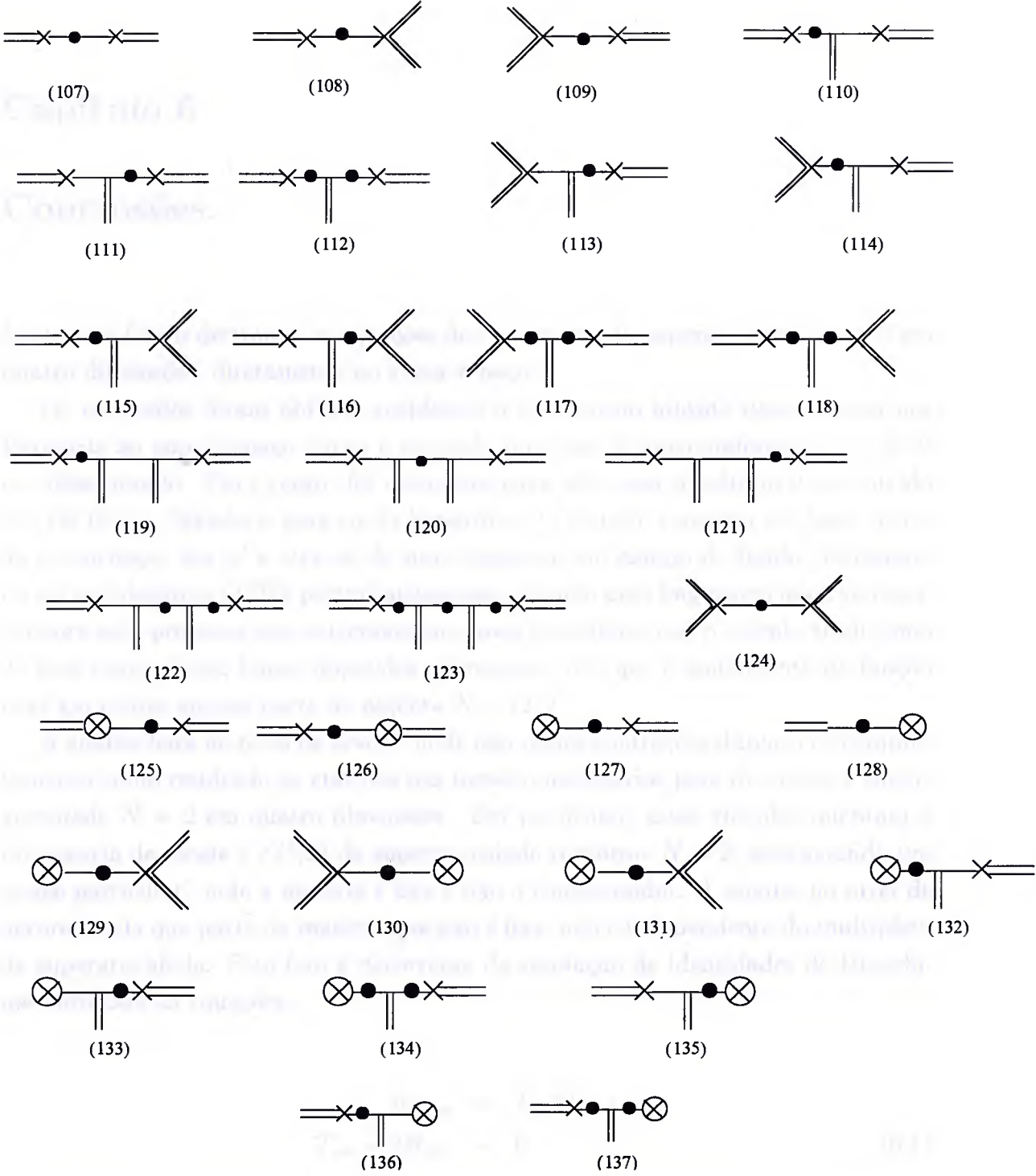


Figura 5.2: Diagramas envolvendo inserções de termos quadráticos nos campos quânticos sem campos de fundo. As inserções são representadas pelos círculos cheios.

Capítulo 6

Conclusões.

Nesta tese foram derivadas as equações de movimento da supergravidade tipo II em quatro dimensões, diretamente no super-espaço.

Os resultados foram obtidos acoplando o formalismo híbrido desenvolvido por Berkovits ao super-espaço curvo e exigindo invariância superconforme $N = (2, 2)$ na folha mundo. Para tanto, foi estendido para este caso o método desenvolvido por De Boer e Skenderis para corda heterótica. O método consistiu em fazer teoria de perturbação em α' e através de uma expansão em campo de fundo covariante, foram calculados os OPE's perturbativamente, usando uma linguagem diagramática. Embora este processo seja extremamente mais trabalhoso que o cálculo tradicional de uma função beta, fomos impelidos ao mesmo, visto que o anulamento da função beta garantiria apenas parte da álgebra $N = (2, 2)$.

A análise feita no nível de árvore, onde não temos contrações duplas nos campos, forneceu como resultado os vínculos nas torsões, necessários para descrever a supergravidade $N = 2$ em quatro dimensões. Em particular, estes vínculos quebram a invariância de escala e $SU(2)$ da supergravidade conforme $N = 2$, selecionando um gauge particular, onde a matéria é fixa e não o compensador. A análise no nível de árvore revela que parte da matéria que não é fixa, não é independente do multiplete de supergravidade. Este fato é decorrente da resolução de identidades de Bianchi, que fornecem as equações

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta cd} &= T_{\alpha\beta}{}^a H_{acd} \\ T_{abc} + 2H_{abc} &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Desta forma o dilaton, que fará o papel do compensador, conterà $16 + 16$ graus de liberdade.

Embora o dilaton não acople classicamente na ação, foi derivada informação do mesmo já no nível de árvore. Este fato é consequência direta da redefinição de

campos:

$$\begin{aligned}\rho &\rightarrow \rho - i(\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}), \\ \hat{\rho} &\rightarrow \hat{\rho} - i(\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Tal procedimento não é uma mera escolha, mas sim uma necessidade, visto que os campos ρ e $\hat{\rho}$ não carregam fatores de α' . Sendo assim, não saberíamos tratar os mesmos perturbativamente. Com esta redefinição, os campos ρ e $\hat{\rho}$ desacoplaram da teoria, podendo ser tratados como campos livres e os geradores receberam contribuição do dilaton já no nível de árvore.

As equações derivadas no nível de árvore são lidas nas condições de holomorphicidade de $G, \bar{G}$ e anti-holomorphicidade de $\hat{G}, \bar{\hat{G}}$. Para isto foram usadas equações de movimento, visto que todos os campos em questão estão na camada de massa. As mesmas equações aparecem exigindo que os OPE's entre os geradores holomórficos e anti-holomórficos sejam regulares. A consistência do termo de Fradkin Tseytlin exigiu que o dilaton seja descrito por supercampos quirais e twist quirais. As equações derivadas para os mesmos no nível de árvore são escritas na forma

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma_-}(\phi_c - \bar{\phi}_{tc}) &= 0 \\ \nabla_{\dot{\gamma}_+}(\bar{\phi}_c + \phi_{tc}) &= 0 \\ \nabla_{\dot{\gamma}_-}(\bar{\phi}_{tc} - \bar{\phi}_c) &= 0 \\ \nabla_{\gamma_+}(\phi_{tc} + \bar{\phi}_c) &= 0 \\ \nabla_a(\phi_c - \bar{\phi}_c + \phi_{tc} - \bar{\phi}_{tc}) &= 0 \\ \nabla_a(\phi_c - \bar{\phi}_c - \phi_{tc} + \bar{\phi}_{tc}) &= 0.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Como mostrado no último capítulo, estas equações descrevem os $16 + 16$ graus de liberdade contidos nos compensadores, acoplados à supergavidade $N = 2$, no string gauge.

Como as equações de movimento eram esperadas apenas em 1 loop, foi necessário conduzir a análise no nível de árvore para este caso, sendo que em 1 loop o número de vértices e diagramas envolvidos aumenta drasticamente. Existem duas análises distintas. Primeiramente, foram analisados os termos holomórficos gerados pelo método que diferem da álgebra usual. Estes termos foram removidos sistematicamente por uma escolha de contratermos nas correntes e por uma redefinição na expansão do campo d_α . Ainda foi mostrado que todas as divergências cancelam-se

mutuamente. A redefinição dos campos de fundo ainda carece de um entendimento melhor; talvez a mesma esteja relacionada com a simetria "shift".

Indo em outra direção, a análise dos termos anti-holomórficos revela as equações de movimento. Neste caso as equações foram derivadas dos OPE's de $T(z)T(w)$ e $T(z)G(w)$. Os OPE's envolvendo $G(z)\overline{G}(w)$ não contêm nenhuma equação de movimento e tem como resultado a estrutura correta de nível de árvore de T . Isto parece estar relacionado com os fatores de α' que aparecem nas definições destas correntes.

As equações derivadas nos OPE's de $T(z)T(w)$ e $T(z)G(w)$ não são independentes e podem ser sumarizadas na forma

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha+}\nabla_{\delta-}(\phi_c - \overline{\phi}_c + \phi_{tc} - \overline{\phi}_{tc}) &= 0 \\ \nabla_{\alpha}([\nabla_a, \nabla_{\dot{\gamma}+})(\phi_c - \overline{\phi}_c + \phi_{tc} - \overline{\phi}_{tc})) &= 0. \\ \nabla_{\alpha+}\nabla_a(\phi_c - \overline{\phi}_c + \phi_{tc} - \overline{\phi}_{tc}) &= 0\end{aligned}\tag{6.4}$$

Todas estas equações são de fato derivadas das equações anteriores. Embora as condições acima sejam mais fortes que (6.3), não existe evidência que estas devam ser levadas em conta. Concluimos que a análise em 1 loop revela apenas derivadas das equações de movimento procuradas. Estes resultados recobrem os resultados da corda heterótica,

$$\nabla_a(\phi_c - \overline{\phi}_c) = 0.\tag{6.5}$$

Esta equação pode ser derivada da ação:

$$S_{heterotica} = \int d^4x d^4\theta E^{-1}(\Phi\overline{\Phi}),\tag{6.6}$$

onde Φ é a exponencial do dilaton, que neste caso representa um multiplete quiral. No caso tipo II a dimensão canônica dos campos dificulta a construção de uma ação para as equações derivadas.

Existem diversas possíveis extensões deste trabalho. Dentro do âmbito da proposta inicial, o mesmo ainda está incompleto e ainda é necessário mostrar que as demais equações derivadas em (5.40) são derivadas das outras equações. Para tanto será necessária a resolução completa das identidades de Bianchi no super-espaço $N = 2$.

Na mesma linha, porém possibilitando um entendimento maior do método utilizado e das consequências do mesmo, seria interessante obter um melhor entendimento das redefinições para os campos de fundo e da origem dos contratermos. Isto

pode ser feito com o auxílio de identidades de Slavnov Taylor e sua possível ligação com a simetria "shift".

Embora fora assumido que a teoria é livre de anomalias de Lorentz e $U(1)$, a presença dos campos d_α e y_α requer uma análise mais detalhada. Como este formalismo pode ser visto como uma redefinição do formalismo RNS, o mecanismo de cancelamento de anomalias neste caso deve também proceder em nosso caso.[46].

Fugindo um pouco do escopo do trabalho, poderíamos tentar escrever uma ação para as equações derivadas. Provavelmente a mesma seria escrita no super-espaco harmônico, devido ao problema da dimensão dos campos. O plano de trabalho consistiria em escrever uma ação no gauge particular derivado na tese. A mesma conteria o dilaton acoplado ao supervierbein e teria as simetrias das equações aqui derivadas. Em seguida, de posse da resolução completa das identidades de Bianchi, poderíamos escrever os campos em termos de objetos não vinculados e variar a ação de forma a recuperar as equações.

Fugindo ainda mais do escopo da tese, todo o procedimento aqui adotado pode ser utilizado para derivar a contribuição dos campos que dependem da compactificação, o que seria interessante para discussões dentro de problemas envolvendo a simetria de espelho discutida na introdução. Da mesma forma, para o caso da corda aberta, campos de Yang Mills podem ser acoplados naturalmente e este procedimento poderia ser usado para derivar a ação de Born Infeld diretamente no super-espaco em quatro dimensões. Poderíamos também tentar estender o método para calcular correções não perturbativas de instantons, originários de configurações específicas envolvendo D-branas e a variedade compactificada[47].

Todo o maquinário aqui desenvolvido também é facilmente estendido para a supercorda em seis dimensões escrita neste formalismo e em dez dimensão escrita em termos de espinores puros. Em particular, o método seria útil para checar a consistência deste formalismo descrito em espacos anti de Sitter, que são de extrema importância para atuais desenvolvimentos envolvendo dualidades entre supercordas e teorias de Yang Mills [48].

Por último, poderíamos estender a análise aqui feita ao nível de dois loops, onde obteríamos correções para a supergravidade tipo II.

Apêndice A

Covenções de Definições.

Neste apêndice serão feitas as definições usadas ao longo da tese, seguindo basicamente a referência [26]. Os espinores de duas componentes são identificados pelo índices gregos α_i e $\dot{\alpha}_i$, sendo $i = \pm$. Os índices do começo do alfabeto, tanto grego como latino, rotularão índices do espaço tangente, enquanto que índices a partir da metade do alfabeto identificam o espaço curvo. Após quebrar o $SU(2)$, todos os resultados descritos no super-espaço terão uma simetria $U(1) \times U(1)$. Cada espinor terá um determinado peso em relação ao um dos geradores $U(1)$. Por exemplo, identificando Y e $\hat{Y}$ como os geradores $U(1)$, temos a ação destes dada por:

$$\begin{aligned} [Y, s^{\alpha+}] &= \omega(\alpha_+) s^{\alpha+} & [Y, s^{\alpha-}] &= 0 \\ [Y, s^{\dot{\alpha}-}] &= \omega(\dot{\alpha}_-) s^{\dot{\alpha}-} & [Y, s^{\dot{\alpha}+}] &= 0. \end{aligned}$$

Onde $\omega(A)$ é o peso $U(1)$ do índice A , identificado por $\omega(\alpha_+) = \frac{1}{2}$, $\omega(\dot{\alpha}_-) = -\frac{1}{2}$, $\omega(\alpha_-) = \omega(\alpha_+) = \omega(\dot{\alpha}_+) = 0$. Por outro lado, temos a ação de $\hat{Y}$ dada por

$$\begin{aligned} [\hat{Y}, s^{\alpha-}] &= \hat{\omega}(\alpha_-) s^{\alpha-} & [\hat{Y}, s^{\alpha+}] &= 0 \\ [\hat{Y}, s^{\dot{\alpha}+}] &= \hat{\omega}(\dot{\alpha}_+) s^{\dot{\alpha}+} & [\hat{Y}, s^{\dot{\alpha}-}] &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (A.1)$$

Da mesma forma que antes, $\hat{\omega}(\alpha_-) = \frac{1}{2}$ e $\hat{\omega}(\dot{\alpha}_+) = -\frac{1}{2}$.

Após quebrar o $SU(2)$ os índices $+$ e $-$ apenas refletem o fato que temos agora quatro tipo de spinors, identificados pela carga em relação ao grupo $U(1) \times U(1)$. No entanto devemos fazer uma escolha quando formos escrever um vetor como um bi-espinor, como ficará claro adiante Quando os índices estão contraídos usaremos a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \chi^{\alpha+} \chi_{\alpha+} + \chi^{\dot{\alpha}-} \chi_{\dot{\alpha}-} &= \chi^{\tilde{\alpha}} \chi_{\tilde{\alpha}} \\ \chi^{\alpha-} \chi_{\alpha-} + \chi^{\dot{\alpha}+} \chi_{\dot{\alpha}+} &= \chi^{\hat{\alpha}} \chi_{\hat{\alpha}} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Portanto

$$\chi^A \chi_A = \chi^a \chi_a + \chi^{\tilde{a}} \chi_{\tilde{a}} + \chi^{\hat{a}} \chi_{\hat{a}} \quad (\text{A.3})$$

Suprimindo os índices $+$, $-$, os índices espinoriais são levantados e abaixados pelo tensor antisimétrico $C_{\alpha\beta}$ da forma:

$$\chi^\alpha C_{\alpha\beta} = \chi_\beta; \quad C^{\alpha\beta} \chi_\beta = \chi^\alpha, \quad (\text{A.4})$$

da mesma forma para os índices com ponto. O tensoes $C_{\alpha\beta}$ tem as seguinte propriedade:

$$C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} = \delta_{[\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta]}^{\delta}, \quad (\text{A.5})$$

que será largamente usada ao longo da tese.

Índices vetoriais são descritos em termos de índices espinoriais através das matrizes de Pauli:

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a v_a = v_{\alpha\dot{\beta}} \quad (\text{A.6})$$

Na expressão acima não foi escrito os índices $+$ e $-$. Esta definição não depende da escolha do par de espinores, visto que o produto de ambos são neutros frente ao grupo $U(1) \times U(1)$. Ao longo da tese, quando necessário será usado o par $(\alpha_+, \dot{\alpha}_-)$ para escrever os vetores. Esta escolha é arbitrária e qualquer vetor descrito pela par $(\alpha_-, \dot{\alpha}_+)$ não é independente do mesmo vetor escrito pelo par anterior. Este fato pode ser expressado através dos vínculos das torsões. Podemos escrever

$$\begin{aligned} T_{a\alpha_i\dot{\beta}_j} &= \varepsilon_{ij} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a \\ v^a T_{a\alpha_i\dot{\beta}_j} &= \varepsilon_{ij} v_{\alpha\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ao longo da tese este vínculo na torsão será escrito como $T_{a\alpha_i\dot{\beta}_j} = \varepsilon_{ij} C_{\alpha\dot{\alpha}} C_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$, visto que já assumimos que o índice a é descrito por um bi-espinor. A conexão de spin $\omega_{Ac}{}^d$ não é irredutível em relação ao grupo de Lorentz local, sendo escrita da forma:

$$\omega_{Ab}{}^d = \omega_{A\beta_+}{}^{\delta_+} \delta_{\dot{\beta}_-}{}^{\dot{\delta}_-} + \omega_{A\dot{\beta}_-}{}^{\dot{\delta}_+} \delta_{\beta_+}{}^{\delta_+} \quad (\text{A.8})$$

onde está implícito que os vetores são escritos em termos do bi-espinor $(\beta_+, \dot{\beta}_-)$ e $(\delta_+, \dot{\delta}_-)$. As componentes diferentes de zero irredutíveis da conexão de spin, assumem os valores: $\omega_{A\beta_+}{}^{\gamma_+}, \omega_{A\beta_-}{}^{\gamma_-}$, mais os respectivos conjugados hermitianos.

As demais componentes são zero. Ao longa da tese o conjugado hermitiano será designado por cc e atua na forma

$$\begin{aligned}(\alpha_+)^{\dagger} &= (\dot{\alpha}_-) \\ (\alpha_-)^{\dagger} &= (\dot{\alpha}_+).\end{aligned}$$

Os dois últimos índices da conexão de spin assumem valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Atuando sobre um dado espinor, temos

$$[\omega_{A\beta_+}{}^{\delta_+} M_{\delta_+}{}^{\beta_+}, S_{\gamma_+}] = \omega_{A\gamma_+}{}^{\delta_+} S_{\delta_+}, \quad (A.9)$$

sendo $M_{\delta_+}{}^{\beta_+}$ geradores do grupo de Lorentz. Os geradores $M_a{}^b$ seguem a mesma decomposição dada em (A.8). A atuação é a mesma para os demais índices espinoriais. Para os índices vetoriais devemos usar a decomposição (A.8), lembrando que os mesmos são escritos em termos do bi-espinor $(\beta_+, \dot{\beta}_-)$.

De posse das definições da conexão de spin, a derivada covariante é escrita da forma

$$\begin{aligned}\nabla_A &= E_A{}^M \partial_M + \omega_{A\beta_+}{}^{\gamma_+} M_{\gamma_+}{}^{\beta_+} + \omega_{A\dot{\beta}_-}{}^{\dot{\gamma}_-} M_{\dot{\gamma}_-}{}^{\dot{\beta}_-} \\ &\quad + \omega_{A\beta_-}{}^{\gamma_-} M_{\gamma_-}{}^{\beta_-} + \omega_{A\dot{\beta}_+}{}^{\dot{\gamma}_+} M_{\dot{\gamma}_+}{}^{\dot{\beta}_+} + \Gamma_A Y + \hat{\Gamma}_A \hat{Y}\end{aligned} \quad (A.10)$$

onde Γ_A e $\hat{\Gamma}_A$ são as conexões $U(1)$ e $E_A{}^M$ o supervierbein, lembrando que M rotula índices no super-espaco curvo. As derivadas covariantes satisfazem a álgebra:

$$[\nabla_C, \nabla_A] = T_{CA}{}^B \nabla_B + R_{CAE}{}^D M_D{}^E + F_{CA} Y + \hat{F}_{CA} \hat{Y} \quad (A.11)$$

onde $\{ \}$ significa comutador ou anticomutador dependendo se os índices são bosônicos ou grassmannianos. Na expressão acima, temos as curvaturas $U(1)$ F_{AB} e $\hat{F}_{CA}$, e a curvatura para as conexão de spin, $R_{CAE}{}^D$. A torção é definida como:

$$T_{CA}{}^B = E_{[C}{}^M \partial_M E_{A]}{}^N E_N{}^B + \omega_{[CA]}{}^B + \omega(B) \Gamma_{[C} \delta_{A]}{}^B + \hat{\omega}(B) \hat{\Gamma}_{[C} \delta_{A]}{}^B. \quad (A.12)$$

Apêndice B

Identidades de Bianchi.

Neste apêndice vamos resolver parcialmente as identidades de Bianchi, a fim de mostrar a equivalência das equações de movimento derivadas. No procedimento adotado será apenas tratado um tipo de espinor e não será avaliado todo o super-espço. Teremos dois conjuntos de identidades de Bianchi, o primeiro deles é associada às derivadas covariantes da forma:

$$\Delta_{ABC}{}^D = R_{[ABC]}{}^D + w(D) F_{[AB} \delta_{C]}^D + \hat{w}(D) \hat{F}_{[AB} \delta_{C]}^D, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\Delta_{ABC}{}^D = \nabla_{[A} T_{BC]}{}^D - T_{[AB}{}^E T_{EC]}{}^D. \quad (\text{B.2})$$

O segundo conjunto de identidades de Bianchi está associado a 3-forma H_{ABC} :

$$\nabla_{[A} H_{BCD]} - T_{[AB}{}^E H_{EC D]} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Usualmente, para resolver as identidades de Bianchi todos os tensores são decompostos em representações irredutíveis do grupo de Lorentz, simetrizando a antisimetrizando os índices espinoriais. Os índices vetoriais são escritos como bi-espinores na forma $\alpha\dot{\alpha}$, onde serão suprimidas as matrizes de Pauli. Visto que somente será levado em conta um tipo de espinor, os índices $+$ $-$ serão suprimidos e teremos apenas um tipo de curvatura $U(1)$. Será tratado o par de espinores $\chi^{\alpha+}, \chi^{\dot{\alpha}-}$, ou seja, todos os espinores com ponto tem o índice $-$ e todos os espinore sem ponto tem o índice $+$. Lembramos que os índices somados (como E na equação acima) devem ser avaliados em todo o super-espço. Como exemplo, vamos expandir as componentes da curvatura $R_{\dot{\alpha}b\gamma\delta}$. Lembrando que o índice b é tratado como um bi-espinor $(\beta\dot{\beta})$, a expansão tem a forma:

$$R_{\dot{\alpha}b\gamma\delta} = r_{\dot{\alpha}\dot{\beta},\beta\gamma\delta} + C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} r_{\beta\gamma\delta} + C_{\beta(\gamma} r_{\delta)\dot{\alpha}\dot{\beta}} + C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} C_{\beta(\gamma} r_{\delta)}, \quad (\text{B.4})$$

onde $r_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\beta\gamma\delta}$ e $r_{\beta\gamma\delta}$ são simétricos em todos os índices.

As identidades de Bianchi são em geral resolvidas a partir das equações com dimensão mais baixa, onde vetores tem dimensão 1 e espinores tem dimensão $\frac{1}{2}$. A dimensão da equação será a diferença da dimensão do índice que está em cima em relação aos índices que estão em baixo. Antes de começar a resolução sistemática das identidades que estamos interessados, vamos escrever a equação (C.3) com os índices (A, B, C, D) da forma $(a, \dot{\beta}, \gamma, d)$. Usando os vínculos derivados no nível de árvore, a equação fica:

$$T_{da}{}^e H_{e\dot{\beta}\gamma} - T_{\dot{\beta}\gamma}{}^e H_{eda} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Resolvendo agora a identidade (C.2) com os índices $(\alpha, \dot{\beta}, c, d)$ temos

$$\begin{aligned} R_{\alpha\dot{\beta}cd} &= -4iH_{\alpha\dot{\beta},cd} \\ T_{abc} + 2H_{abc} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Na equação acima torna-se claro que as componentes diferentes de H_{ABC} estão no multipletto de supergravidade e não no multipletto de matéria. No lado direito da primeira equação foi usado a vírgula para não confundir os índices. Lembramos que o mesmo é de fato escrito como $-4i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a H_{acd}$.

Vamos começar resolvendo as identidades de Bianchi relacionadas à supergravidade. Para resolver as identidades de dimensão 1 expandimos as curvaturas na forma:

$$\begin{aligned} R_{\dot{\alpha}\beta\gamma\delta} &= r_{\dot{\alpha},\beta\gamma\delta} + C_{\beta(\gamma} r_{\delta)\dot{\alpha}} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= r_{\alpha\beta\gamma\delta} + (C_{\delta(\alpha} r_{\beta)\gamma} + \gamma \longleftrightarrow \delta) + C_{\alpha(\gamma} C_{\delta)\beta} r, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde $r_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $r_{\alpha\dot{\beta}\gamma\delta}$ são simétricos. O resultados para as equações $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \gamma, \delta)$, $(\dot{\alpha}, \beta, \gamma, \delta)$ e $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ têm a forma:

$$\begin{aligned} R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\gamma\delta} &= r_{\dot{\alpha},\dot{\beta}\gamma\delta} = r_{\alpha\beta\gamma\delta} = F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \\ F_{\dot{\alpha}\beta} &= -2r_{\beta\dot{\alpha}}, \quad F_{\alpha\beta} = 4r_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

As equações com dimensão $\frac{3}{2}$ são resolvidas usando a expansão (C.4) em conjunto com:

$$F_{\alpha\dot{\beta}} = C_{\alpha\dot{\beta}} f_{\dot{\beta}} + f_{\alpha\dot{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{f}_{\beta} + \bar{f}_{\dot{\alpha}\dot{\beta},\beta} \\
T_{ab}{}^{\gamma} &= C_{\alpha\beta}W_{\gamma,\dot{\alpha}\dot{\beta}} + C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(C_{\gamma(\alpha}W_{\beta)} + W_{\alpha\beta\gamma}) \\
R_{ab\gamma\delta} &= r_{\dot{\beta},\alpha\beta\gamma\delta} + (C_{\alpha\beta}r_{\gamma\delta\dot{\beta}} + perm.cicl.) - C_{\beta(\gamma}r'_{\delta)\alpha\dot{\beta}} - C_{\alpha(\gamma}C_{\delta)\beta}r'_{\dot{\beta}}. \quad (B.8)
\end{aligned}$$

Mais uma vez, todos os tensores representando as componentes irreduzíveis são simétricos. Na última expressão acima, temos entre parênteses a permutação cíclica em β, γ, δ . Resolvendo a identidade (C.2) para $(\dot{\alpha}, b, \gamma, \delta)$ e $(\alpha, b, \gamma, \delta)$, temos o resultado:

$$\begin{aligned}
r_{\dot{\beta},\alpha\beta\gamma\delta} &= 0, & r_{\delta\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= iW_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}\dot{\beta}} & r_{\alpha} &= iW_{\alpha} & r'_{\dot{\beta}} &= 3i\bar{W}_{\dot{\beta}} \\
\bar{f}_{\beta} &= 6iW_{\alpha} & \bar{f}_{\dot{\alpha}\dot{\beta},\beta} &= -2iW_{\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}} & \bar{f}_{\beta} &= 6iW_{\beta} \\
r'_{\delta\alpha\dot{\beta}} &= \frac{1}{6}f_{\alpha\beta,\dot{\beta}}, & f_{\dot{\beta}} &= 6i\bar{W}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \quad (B.9)$$

O termo envolvendo $f_{\dot{\beta}}$ foi calculado usando o conjugado hermitiano de $\bar{f}_{\beta}$. Da mesma forma, podemos relacionar $r'_{\delta\alpha\dot{\beta}}$ com o conjugado de $\bar{f}_{\dot{\alpha}\dot{\beta},\beta}$.

As relações de dimensão 2 envolvendo os índices (a, b, γ, δ) , relacionarão componentes das curvaturas e os supercampos quirais e twist quirais com derivadas das componentes das torsões. As mesmas não serão úteis para os nossos propósitos e portanto não será listado este resultado. Por fim, resolveremos as equações com coordenadas bosônicas nos dois últimos índices. Neste caso, as curvaturas estão relacionadas com as curvaturas com índices fermiônicos, pelas relações dadas no apêndice anterior. Por exemplo, para o caso (α, β, c, d) teremos:

$$R_{\alpha\beta cd} \rightarrow R_{\alpha\beta,\lambda\dot{\lambda},\delta\dot{\delta}} = R_{\alpha\beta\lambda\delta}C_{\dot{\lambda}\dot{\delta}} + R_{\alpha\beta\dot{\lambda}\dot{\delta}}C_{\lambda\delta} = 0 \quad (B.10)$$

Com este resultado concluímos que $R_{\alpha\beta\lambda\delta}$ e $R_{\alpha\beta\dot{\lambda}\dot{\delta}}$ são identicamente nulos. Para o caso $(\alpha, \dot{\beta}, c, d)$ já calculado em (C.6), devemos expandir o tensor H_{abc} e as curvaturas $R_{\dot{\alpha}\beta\lambda\delta}$ e $R_{\dot{\alpha}\beta\dot{\lambda}\dot{\delta}}$ na forma:

$$\begin{aligned}
H_{abc} &= C_{\gamma\alpha}C_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}H_{\dot{\alpha}\beta} - C_{\gamma\beta}C_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}H_{\dot{\beta}\alpha} = \frac{1}{2}(C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}C_{\gamma(\alpha}H_{\dot{\gamma}\beta)} - C_{\alpha\beta}C_{\dot{\gamma}(\dot{\alpha}}H_{\dot{\beta}\gamma)}), \\
R_{\dot{\alpha}\beta\lambda\delta} &= r_{\dot{\alpha},\beta\lambda\delta} + C_{\beta(\lambda}r_{\delta)\dot{\alpha}}, & R_{\dot{\alpha}\beta\delta\dot{\lambda}\dot{\delta}} &= \bar{r}_{\dot{\alpha},\beta\dot{\lambda}\dot{\delta}} + C_{\dot{\beta}(\dot{\lambda}}\bar{r}_{\dot{\delta})\alpha}.
\end{aligned} \quad (B.11)$$

a equação (C.6) tem então como resultado:

$$r_{\alpha\dot{\beta}} = -\bar{r}_{\dot{\beta}\alpha} = -2iH_{\dot{\beta}\alpha} \quad (B.12)$$

A equações para os índices (α, b, c, d) e $(\dot{\alpha}, b, c, d)$ relacionarão todas as componentes das curvaturas e de $T_{ab}{}^{\gamma}$ com derivadas de $H_{\dot{\beta}\alpha}$. Lembrando que $R_{\alpha\gamma\dot{\beta}\dot{\delta}}$ é o conjugado

hermitiano de $R_{a\dot{\gamma}\beta\delta}$, os resultados que que interessam para mostrar a equivalência entre as equações tem a forma

$$\begin{aligned} F_{a\beta} &= 2\nabla_\beta H_{\dot{\beta}\alpha} \\ R_{a\gamma\beta\delta} &= -\nabla_\alpha H_{\dot{\alpha}(\beta} C_{\delta)\gamma} \\ R_{a\gamma\dot{\beta}\dot{\delta}} &= 2iC_{\gamma\alpha}\overline{W}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\delta}} - \left[C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(-\frac{1}{2}\nabla_{(\gamma} H_{\delta)\dot{\alpha}} + \frac{1}{6}C_{\gamma\alpha}\nabla^\delta H_{\delta\dot{\delta}} \right) + \dot{\beta} \leftrightarrow \dot{\delta} \right] \\ T_{ab\dot{\gamma}} &= \frac{i}{2}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\nabla_{(\alpha} H_{\beta)\dot{\gamma}} + C_{\alpha\beta} \left[-\frac{i}{6}C_{\dot{\gamma}(\dot{\alpha}}\nabla^\delta H_{\delta\dot{\beta})} + W_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}} \right] \\ R_{\gamma b d a} &= -R_{\beta\dot{\beta},\gamma\delta\alpha}C_{\dot{\delta}\dot{\alpha}} - R_{\beta\dot{\beta},\gamma\dot{\delta}\dot{\alpha}}C_{\delta\alpha} \end{aligned}$$

Com estes resultados a equação de movimento:

$$R_a{}^\beta{}_{\delta\beta} - \frac{1}{2}F_{a\delta} = \nabla_a \nabla_\delta (\phi - \overline{\phi}), \quad (B.13)$$

pode ser escrita como:

$$2\nabla_\beta H_{\dot{\beta}\alpha} = \nabla_b \nabla_\alpha (\phi - \overline{\phi})$$

Da mesma forma, a última equação de(5.39) pode ser escrita como:

$$4\nabla_\beta H_{\dot{\beta}\alpha} = 2\nabla_b \nabla_\alpha (\phi - \overline{\phi}). \quad (B.14)$$

Mostrando a equivalência entre as equações de movimento derivadas em $\langle T(z) T(w) \rangle$ e em $\langle T(z) G(w) \rangle$.

Referências

- [1] N. Berkovits, W. Sigel, Nucl. Phys. B462 (1996) 213.
- [2] J. de Boer, K. Skenderis, Nucl.Phys. B481 (1996) 129.
- [3] N. Berkovits, Nucl. Phys. B379 (1992) 96.
- [4] N. Berkovits, Nucl. Phys. B431 (1994) 258.
- [5] D. Fridan, E. Martinec, S. Shenker, Nucl. Phys. B271 (1986) 93.
- [6] N. Berkovits. 'A New Description of the Superstring', hep-th/9604126.
- [7] F. Gliozzi, D. Olive, J. Sherk, Nucl. Phys. B122 (1977) 253.
- [8] S. Mandelstam, Phys. Lett. 46B (1973) 447.
- [9] D. Gepner, Phys. Lett. B199 (1987) 380.
- [10] N. Berkovits, JHEP 0108:026, 2001.
- [11] N. Berkovits, PRL 77 (1996), 2891.
- [12] N. Berkovits, Nucl. Phys. B420 (1994) 332.
- [13] N. Berkovits, C. Vafa, Nucl. Phys. B433 (1995) 123.
- [14] N. Berkovits, C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A9 (1994) 653.
- [15] N. Ohta, J. L Petersen, Phys. Lett. B325 (1994) 67.
- [16] N. Berkovits, Nucl. Phys. B450 (1995) 90.
- [17] M. Green, J. Schwarz, E. Witten. Superstring Theory, volume 1. Cambridge University Press 1987.
- [18] V. Rivelles, J.G Taylor, J. Phys. A15 (1982) 163.
- [19] E. Witten, Nucl. Phys. B266 (1986) 245.

- [20] S. Carlip, Nucl. Phys. B284 (1987) 365.
- [21] Micchio Kaku, SuperGravity, Proceedings of the Supergravity Workshop at Stony Brook, editado por P. Van Nieuwenhuizen e D.Z. Freedman, North-Holland Publishing Company, 1979.
- [22] I. Buchibinder, S. Kuzenko. Ideas an Methods of Supersymmetry and Supergravity. IOP, 1998.
- [23] B. De Wit, J. W Van Holten, Nucl. Phys. B184 (1981) 77,
B. de Wit, J. W Van Holten, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. B167(1980) 77.
- [24] M. Roo, J. W Van Holten, B. De Wit, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. B173(1980) 175.
- [25] P. Howe, Nucl. Phys. B199(1982) 309.
- [26] S. J. Gates. M.T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersimetry, Bemjamin/Cummings, Reading, 1983.
- [27] S. Gates, P. Majumdar, R. Oerter, E. van de Ven, Phys. Lett. B214 (1988) 26.
- [28] W. Sieguel. Phys. Lett. 211B (1988) 55.
- [29] J. Polchinski, String Theory Vol 1, Cambridge University, 1988.
- [30] D.L. Nedel, Proceedings do XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos 2001.
- [31] M. Grisaru, M. Wehlau, Int. J. Mod. Phys. A10 (1995) 753,
P. Howe, G. Papadopoulos, Class. Quantum Grav. 4 (1987) 11.
- [32] J. de Boer, M. B Halpern. 'Unified Enistein- Virasoro Master Equation in General Non Linear Sigma Model', hep-th/9606025.
- [33] L. Alvarez-Gaumé, D. Freedman.,Annals of Physics 134 (1981) 85.
- [34] J. Atichk, A. Dhar, Nuclear Physics B(284) 131.
- [35] J. Collins, Renormalization, Cambridge University 1984.
- [36] D. Z. Freedman, K. Johnson, L.I. Latorre, Nucl. Phys. B371 (1993) 329.
- [37] T. Banks, D. Nemeschanski, A. Sen, Nuclear Physics B277 (1986) 67.

- [38] G. Kallén and J. Toll, *J. Math. Phys.* 6 (1965) 299.
- [39] M. T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizen, *Int. J. Mod. Phys. A* 7 (1992) 5891.
- [40] A. Servrin, R. Siebelink, W. Troost, *Nucl. Phys. B* 413 (1994) 185.
- [41] B. de Wit, M.T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* 408 (1993) 299.
- [42] H. Balasin, W. Kummer, O. Piguet, M. Schweda, *Phys. Lett. B* 287 (1992) 138.
- [43] E. Abdalla, M. Cristina B. Abdalla, K. E. Rothe, *Non Perturbative methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, 2001.
- [44] S.P. Sorela, publicação interna, UCP-89/2, 1989.
- [45] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Class. Quantum Grav.* 1 (1984) 469.
- [46] M. Green, J.H. Schwarz, *Phys. Lett. B* 149 (1984) 117.
- [47] S. V. Ketov, *Nucl. Phys. B* 649 (2003) 365.
- [48] N. Berkovits, C. Vafa, E. Witten, *JHEP* 9903: 018, 1999.

