

Flávia Souza Maciel      Silveira

Um Invariante Cohomológico para  
Pares de Grupos

1910001189



# Um Invariante Cohomológico para Pares de Grupos

Flávia Souza Machado da Silveira

Orientadora:  
Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos  
requisitos para a obtenção do Título de Mestre  
em Ciências Matemáticas - Área de Concentração:  
Matemática.



4.1.189/03

São José do Rio Preto - SP

Fevereiro - 2003

“Comece por fazer o que é necessário,  
depois o que é possível e  
de repente estará a fazer o impossível.”

*São Francisco de Assis*





# Agradecimento

Aos meus pais,  
Jeronimo e Ivani  
*dedico.*

# Agradecimentos

Na certeza de que existem mais pessoas que merecem agradecimentos do que costumamos reconhecer, deixo aqui meus agradecimentos a estas pessoas. Em especial, agradeço:

A Deus, por tudo.

À Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, sem a qual este trabalho não se realizaria, por sua amizade, por toda dedicação dispensada durante sua orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para solucionar todas as minhas dúvidas.

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pela disponibilidade com que participou de algumas discussões importantes para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, que através de seu trabalho como tutora do PET, incentivou e despertou em mim o gosto pela aprendizagem científica.

Aos demais professores do Departamento de Matemática, pela formação acadêmica e estímulo.

A todos os meus colegas da Pós-Graduação, em especial às amigas Andréia, Tatiana Miguel e Tatiana, pelo apoio e convívio durante os dois anos desta caminhada que agora se completa.

À amiga Karine, que mesmo de longe, sempre compartilhou comigo as alegrias e dificuldades de mais uma etapa vencida.

Aos meus pais, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por todo amor e incentivo que sempre me deram em tudo que busquei realizar.

Aos meus irmãos Leandro e Daniela, pelos momentos de alegria e descontração.

À minha querida avó Dorestina, por toda preocupação que sempre teve comigo e, sobretudo por suas orações.

Ao meu noivo Gilson, pelo carinho, pela força e pelo apoio que sempre me proporcionou.

Ao Márcio, pela parte ilustrativa deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.



# Resumo

Neste trabalho estudamos várias propriedades do núcleo da aplicação restrição  $res_{S,M}^G : H^1(G, M) \rightarrow H^1(S, M)$ . Dentre elas, sua invariância nos pares  $((G, S), M)$  e suas relações com cohomologia relativa, com derivações e com levantamentos de extensões cindidas (de grupos). Em particular, estudamos o invariante para pares de grupos  $\tilde{E}(G, S)$ , definido usando o núcleo da aplicação  $res_{S, \mathcal{F}_S G}^G$ , suas relações com ends de grupos, principalmente com o end de par de grupos  $\tilde{e}(G, S)$ , e com a teoria de dualidade.

**Palavras-chave:** (co)homologia de grupos, dualidade, grupo das derivações, extensões de grupos, ends de grupos e de pares de grupos.

# Abstract

In this work we study several properties of the kernel of the restriction map  $res_{S,M}^G : H^1(G, M) \rightarrow H^1(S, M)$ . Among them, its invariance on pairs  $((G, S), M)$  and its relations with relative cohomology, derivations and splittings of split extensions (of groups). In particular, we study the invariant for group pairs  $\tilde{E}(G, S)$ , defined by the use of the kernel of the map  $res_{S, \mathcal{F}_S G}^G$ , its relations with ends of groups, specially with the end of pairs of groups  $\tilde{e}(G, S)$ , and the duality theory.

**Keywords:** (co)homology of groups, duality, group of the derivations, extensions of groups, ends of groups and of pairs of groups.

# Conteúdo

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introdução                                                                      | vii       |
| <b>1 Preliminares</b>                                                           | <b>1</b>  |
| 1.1 $RG$ -módulos . . . . .                                                     | 1         |
| 1.2 (Co)invariantes . . . . .                                                   | 4         |
| 1.3 Restrição e (Co)extensão de Escalares . . . . .                             | 7         |
| 1.4 Módulos (Co)induzidos . . . . .                                             | 9         |
| 1.5 Resoluções Projetivas e Livres de $R$ sobre $RG$ . . . . .                  | 15        |
| <b>2 (Co)homologia de Grupos</b>                                                | <b>23</b> |
| 2.1 (Co)homologia Absoluta de Grupos . . . . .                                  | 23        |
| 2.2 Aplicações Induzidas em (Co)homologia . . . . .                             | 29        |
| 2.3 Lema de Shapiro . . . . .                                                   | 32        |
| 2.4 Aplicação Restrição . . . . .                                               | 34        |
| 2.5 (Co)homologia Relativa de Grupos . . . . .                                  | 37        |
| 2.6 Interpretação Topológica . . . . .                                          | 41        |
| 2.7 Grupos e Pares de Dualidade . . . . .                                       | 53        |
| <b>3 Cohomologia de Grupos, Derivações e Levantamentos de Extensões</b>         | <b>58</b> |
| 3.1 Cohomologia de Grupos e Derivações . . . . .                                | 58        |
| 3.2 Extensões Cindidas e Cohomologia de Grupos . . . . .                        | 67        |
| <b>4 O Invariante <math>\tilde{E}(G, S)</math></b>                              | <b>77</b> |
| 4.1 $e(G)$ , $e(G, S)$ , $\tilde{e}(G, S)$ , $E(G, S, M)$ e $E(G, S)$ . . . . . | 78        |
| 4.2 O Invariante $\tilde{E}(G, S)$ . . . . .                                    | 83        |
| <b>Bibliografia</b>                                                             | <b>96</b> |



# Introdução

Neste trabalho um par de grupos será entendido como um par  $(G, S)$  onde  $G$  é um grupo e  $S$  é um subgrupo de  $G$ ,  $R$  indicará o anel  $\mathbb{Z}$  ou o corpo  $\mathbb{Z}_2$  e a teoria de (co)homologia (cohomologia e homologia) de grupos desempenhará um papel fundamental.

Dados um par de grupos  $(G, S)$  e um  $RG$ -módulo  $M$  podemos definir uma aplicação, bastante natural, entre os grupos de cohomologia de  $G$  e de  $S$  com coeficientes em  $M$ , denominada aplicação restrição:

$$(res_{S,M}^G)^* : H^*(G, M) \rightarrow H^*(S, M).$$

que será denotada (em todo nível), simplesmente, por  $res_{S,M}^G$ .

Esta aplicação tem propriedades muito interessantes .

O objetivo principal deste trabalho é explorar o núcleo " $Ker(res_{S,M}^G)$ " da aplicação  $res_{S,M}^G : H^1(G, M) \rightarrow H^1(S, M)$  sob vários aspectos. Dentre eles, sua invariância nos pares  $((G, S), M)$  e suas relações com  $H^1(G, S, M)$  (cohomologia relativa), com derivações e com levantamentos de extensões cindidas (de grupos). Em especial, considerando o  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo particular  $M = \mathcal{F}_S G := \{B \subset G \mid B \subset F.S \text{ para algum subconjunto finito } F \text{ de } G\}$ , destacamos o estudo do invariante para pares de grupos  $\tilde{E}(G, S) := 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res_{S, \mathcal{F}_S G}^G)$ ; suas relações com ends de grupos, principalmente com o end de par de grupos  $\tilde{e}(G, S)$ , e com a teoria de dualidade, uma vez que o mesmo nos dá, como vimos, uma condição necessária para  $(G, S)$  ser um par de dualidade.

Assim, no capítulo 1, apresentamos alguns pré-requisitos que são fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, como por exemplo, resoluções projetivas e livres, e os módulos (co)induzidos (incluindo a fórmula de Mackey).

No capítulo 2, introduzimos os conceitos de (co)homologia absoluta e relativa de grupos, incluindo alguns exemplos; as aplicações induzidas em (co)homologia; o lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia do grupo  $G$  com a (co)homologia de um subgrupo  $S$  de  $G$  e que é útil em várias situações; a aplicação restrição, anteriormente citada e algumas de suas importantes propriedades que são utilizadas principalmente no capítulo 4. Interpretamos topologicamente (co)homologia absoluta e relativa de grupos e observamos que se  $G$  é um grupo, que está munido de uma estrutura de  $CW$ -complexo, em geral, a (co)homologia do grupo  $G$  é diferente

da (co)homologia do *espaço*  $G$  (mesmo quando  $G$  é conexo). Além disso, apresentamos na última seção um breve estudo de grupos e pares de dualidade.

Os principais capítulos do trabalho são os capítulos 3 e 4.

No capítulo 3, vimos as relações de  $H^1(G, M)$ ,  $H^1(G, S, M)$  e  $\text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G)$  com o grupo das derivações de  $G$  em  $M$ ,  $\text{Der}(G, M) = \{d : G \rightarrow M \mid d(gg') = d(g) + g \cdot d(g'), \forall g, g' \in G\}$ , e seus subgrupos:  $P(G, M) = \{d_m \in \text{Der}(G, M), m \in M \mid d_m(g) = g \cdot m - m, \forall g \in G\}$ ,  $\text{Der}(G, S, M) = \{d \in \text{Der}(G, M) \mid d|_S = 0\}$  e  $P(G, S, M) = \{d_m \in P(G, M) \mid d_{m|_S} = 0\}$ . Mais precisamente, temos os seguintes isomorfismos (de grupos):

$$\begin{aligned} H^1(G, M) &\simeq \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)}, \\ H^1(G, S, M) &\simeq \text{Der}(G, S, M), \\ \text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G) &\simeq \frac{\text{Der}(G, S, M)}{P(G, S, M)}. \end{aligned}$$

Apresentamos alguns exemplos e observamos que, em geral,  $H^1(G, M) \neq H^1(G, \{1\}, M)$ .

Na última seção desse capítulo, verificamos que existe somente uma extensão cindida de  $G$  por  $M$  (a menos de equivalência) *associada a ação dada* de  $G$  sobre  $M$ , a saber, a extensão

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \longrightarrow 1 \quad (*)$$

onde  $M \rtimes G$  é o produto semi-direto de  $G$  por  $M$  relativo a ação dada, e  $i'$  e  $\pi'$  são as aplicações inclusão e projeção canônica. Denotando por  $\mathcal{L}(G, M)$  o conjunto das classes de  $M$ -conjugação de levantamentos  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  da extensão  $(*)$ , mostramos que *os elementos de  $\mathcal{L}(G, M)$  estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $H^1(G, M)$* . Também provamos que se  $\mathcal{L}(G, S, M)$  indica o conjunto das classes de  $M$ -conjugação de levantamentos  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  da extensão  $(*)$  que satisfazem  $l|_S = (0, id_S)$ , então existe uma *bijeção entre  $\mathcal{L}(G, S, M)$  e  $\frac{H^1(G, S, M)}{P(G, S, M)}$* , que é uma generalização do resultado anterior no sentido que tomando  $S = \{1\}$  os dois coincidem. Como consequência, temos que *os elementos de  $\mathcal{L}(G, S, M)$  estão em correspondência biunívoca com os elementos do  $\text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G)$* . Vários exemplos foram analisados.

No último capítulo, estudamos o invariante  $\tilde{E}(G, S)$ . Inicialmente exploramos algumas propriedades do  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo  $\mathcal{F}_S G$ , recordamos os conceitos de ends de grupos e de pares de grupos:  $e(G)$ ,  $e(G, S)$  e  $\tilde{e}(G, S)$ , citamos alguns dos principais resultados destes ends e apresentamos os invariantes (ends)  $E(G, S, M)$  e  $E(G, S)$  (definidos por Andrade e Fanti [1]). Em seguida, nos dedicamos ao estudo de  $\tilde{E}(G, S)$ , provamos que ele é um invariante para pares de grupos  $(G, S)$  e que o mesmo está bastante relacionado com os invariantes ends (já citados) e, em especial, com o end de pares de grupos  $\tilde{e}(G, S)$  (definido por Kropholler e Roller [16]); temos por exemplo, que “ $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) < \infty$ ” se, e somente se, a aplicação  $\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G$  é nula ou equivalentemente,  $\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) = H^1(G, \mathcal{F}_S G)$ . Relacionamos, também, este invariante com  $\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G)$ . Apresentamos ainda algumas propriedades de  $\tilde{E}(G, S)$ , dentre elas uma



propriedade interessante para pares de dualidade, a saber: “ Se  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par então  $\tilde{E}(G, S) = 1$ ”. Mostramos através de exemplos que esta propriedade não é válida para  $\tilde{e}(G, S)$  e exibimos assim um par  $(G, S)$  tal que  $\tilde{E}(G, S) \neq \tilde{e}(G, S)$ .

Finalmente, observamos que em função da interpretação topológica dos grupos de (co)homologia (dada no capítulo 2), em particular de  $H^1(G, M)$  e  $H^1(G, S, M)$ , podemos obter também uma interpretação topológica para  $\mathcal{L}(G, M)$  e  $Ker(res_{S, M}^G)$ , e conseqüentemente, para  $\mathcal{L}(G, S, M)$  e  $\tilde{E}(G, S)$ .

# Preliminares

## 1.1 Notação

Seja  $G$  um grupo finito e  $S$  um subgrupo de  $G$ . Denotamos por  $|G|$  o número de elementos de  $G$  e por  $|S|$  o número de elementos de  $S$ .

Seja  $M$  um  $G$ -módulo abeliano. Denotamos por  $M^G$  o submódulo de  $M$  formado pelos elementos fixos por  $G$ . Se  $M$  é um  $S$ -módulo abeliano, denotamos por  $M^S$  o submódulo de  $M$  formado pelos elementos fixos por  $S$ .

Seja  $\chi$  um caráter de  $G$ . Denotamos por  $\chi^G$  o caráter de  $G$  definido por  $\chi^G(g) = \chi(g)$  para todo  $g \in G$ .

$$\begin{aligned} \chi^G(g) &= \chi(g) \\ \chi^G(g) &= \chi(g) \end{aligned}$$

Seja  $\chi$  um caráter de  $G$ . Denotamos por  $\chi^G$  o caráter de  $G$  definido por  $\chi^G(g) = \chi(g)$  para todo  $g \in G$ .

## 1.1.2 Exemplos

(i) Se  $G = \{1\}$ , então  $\chi^G = \chi$  para todo  $\chi$ .

$$\chi^G(g) = \chi(g) \text{ para todo } g \in G.$$

(ii) Se  $G = \mathbb{Z}_2$ , então  $\chi^G = \chi$  para todo  $\chi$ .





# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 $RG$ -módulos

Em todo texto denotaremos por  $R$  o anel dos inteiros  $\mathbb{Z}$  ou o corpo  $\mathbb{Z}_2$  e por  $1_R$  sua unidade.

**1.1.1 Definição:** *Seja  $G$  um grupo denotado multiplicativamente, com elemento neutro 1. Seja  $RG$  (ou  $R[G]$ ) o  $R$ -módulo livre gerado pelos elementos de  $G$ . Assim, um elemento de  $RG$  é expresso unicamente na forma  $\sum_{g \in G} r_g g$ , com  $r_g \in R$  e  $r_g = 0$  para quase todo  $g$  em  $G$  (isto é, exceto para um número finito de elementos  $g$  em  $G$ ).*

*Em  $RG$  as operações de adição e multiplicação são dadas por:*

$$\left( \sum_{g \in G} r_g g \right) + \left( \sum_{g \in G} s_g g \right) = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g$$

$$\left( \sum_{g \in G} r_g g \right) \cdot \left( \sum_{h \in G} s_h h \right) = \sum_{g, h \in G} (r_g s_h) (gh).$$

*Tais operações fazem de  $RG$  um anel com unidade  $1_{RG} = 1_R 1$ , chamado anel grupo de  $G$  sobre  $R$ . Em geral, o elemento  $1_{RG} \in RG$  será denotado por  $g$ .*

#### 1.1.2 Exemplos:

(1) *Se  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  então  $RG$  pode ser identificado com o anel dos polinômios de Laurent:*

$$R[t, t^{-1}] := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i t^i \mid r_i \in R \text{ e } r_i = 0 \text{ para quase todo } i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(2) *Se  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$  então  $t^n = 1$  e  $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$  é uma  $R$ -base de  $RG$ . Portanto  $RG = \{r_0 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1} \mid r_i \in R, i = 0, \dots, n-1\}$ .*

### 1.1.3 Observações:

(1) Se  $G$  é um grupo e  $R = \mathbb{Z}_2$  então  $x \in \mathbb{Z}_2 G$  é da forma  $x = 1g_1 + \dots + 1g_k \equiv g_1 + \dots + g_k$  com  $1 \in \mathbb{Z}_2$  e  $g_i \in G$ .

(2) Para qualquer grupo  $G$  podemos definir o homomorfismo de anéis  $\varepsilon : RG \rightarrow R$  tal que  $\varepsilon(g) = 1$  para todo  $g \in G$  e estender por linearidade. Este homomorfismo é denominado aplicação aumentação. Note que  $\varepsilon$  é sobrejetor.

**1.1.4 Definição:** Sejam  $G$  um grupo denotado multiplicativamente com elemento neutro  $1$  e  $M$  um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de  $G$  sobre  $M$  (ou uma  $G$ -ação sobre  $M$ ) é uma função:

$$\begin{aligned}\mu : G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto \mu(g, m) \stackrel{\text{not.}}{=} g \cdot m\end{aligned}$$

satisfazendo:

(a)  $1 \cdot m = m$ ,  $\forall m \in M$ ;

(b)  $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 \cdot (g_2 \cdot m)$ ,  $\forall g_1, g_2 \in G$  e  $\forall m \in M$ ;

Se na definição acima  $M$  tiver uma estrutura de grupo (aditivo), para que esta estrutura seja preservada pela  $G$ -ação, além das condições (a) e (b) exige-se a seguinte condição:

$$(c) \quad g \cdot (m_1 + m_2) = g \cdot m_1 + g \cdot m_2, \quad \forall g \in G \text{ e } \forall m_1, m_2 \in M.$$

### 1.1.5 Observações:

(1) Equivalentemente, uma  $G$ -ação (à esquerda) sobre  $M$  é um homomorfismo

$$\begin{aligned}\mu : G &\rightarrow \text{Bij}(M) \\ g &\mapsto \mu(g) = \mu_g; \quad \mu_g(m) := g \cdot m,\end{aligned}$$

onde  $\text{Bij}(M)$  é o grupo das bijeções de  $M$  em  $M$ . Neste caso, dizemos também que  $M$  é um  $G$ -conjunto.

No caso em que  $M$  é um grupo (aditivo), uma  $G$ -ação sobre  $M$  é um homomorfismo:  $\mu : G \rightarrow \text{Aut}(M)$ , onde  $\text{Aut}(M)$  é o grupo dos automorfismos de  $M$ , pois pela condição (c),  $\mu_g : M \rightarrow M$  é um homomorfismo.

Agora, se  $M$  é um espaço topológico, exige-se em geral que a aplicação  $\mu_g : M \rightarrow M$  seja contínua para todo  $g \in G$  (ao invés de homomorfismo). E assim,  $\mu : G \rightarrow \text{Homeo}(M)$ .

(2) Analogamente, define-se  $G$ -ação à direita sobre  $M$ . Pode-se verificar que a partir de uma  $G$ -ação à esquerda sobre  $M$  obtemos uma  $G$ -ação à direita sobre  $M$  da seguinte forma:

$$m * g := g^{-1} \cdot m.$$

**1.1.6 Definição:** Dizemos que a ação de  $G$  em  $M$  é livre se a seguinte condição for verdadeira:  $g \cdot m = m$ , para algum  $m \in M$  se, e somente se,  $g = 1$ .



**1.1.7 Definição:** Dizemos que a  $G$ -ação sobre  $M$  é trivial se para todo  $m \in M$  e todo  $g \in G$ ,  $g \cdot m = m$ .

**1.1.8 Definição:** Seja  $m \in M$ . A  $G$ -órbita de  $m$ , denotada por  $G(m)$ , é o seguinte subconjunto de  $M$ :

$$G(m) := \{g \cdot m \mid g \in G\}.$$

**1.1.9 Proposição:** Seja  $G$  um grupo e  $M$  um conjunto não vazio. Então,  $M$  é um  $RG$ -módulo (à esquerda) se, e somente se,  $M$  é um  $R$ -módulo (à esquerda) munido de uma ação (à esquerda) de  $G$  sobre o grupo aditivo  $(M, +)$ .

**Demonstração:** Se  $M$  é um  $RG$ -módulo então  $M$  é um  $R$ -módulo considerando:

$$rm := (r1)m$$

e pode-se definir uma  $G$ -ação por:

$$g \cdot m := (1_R g)m.$$

Reciprocamente, se  $M$  é um  $R$ -módulo e existe uma ação de  $G$  sobre  $M$  então podemos dar a  $M$  uma estrutura de  $RG$ -módulo da seguinte maneira:

$$(\sum r_g g)m := \sum r_g (g \cdot m). \quad \blacksquare$$

**1.1.10 Corolário:**  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo se, e somente se,  $M$  é um grupo abeliano munido de uma  $G$ -ação.

**1.1.11 Corolário:**  $M$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo se, e somente se,  $M$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -módulo (equivalentemente, grupo abeliano em que todo elemento tem ordem 2) munido de uma  $G$ -ação.

Segue dos corolários acima que **todo  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo**, mas a recíproca não é verdadeira.

**1.1.12 Observação:** Todo  $R$ -módulo  $M$  pode ser visto como um  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação trivial. Em particular,  $M = R$  será, em geral, considerado um  $RG$ -módulo trivial e assim

$$(\sum r_g g)r := \sum r_g (g \cdot r) = \sum r_g r = \epsilon(\sum r_g g)r.$$

Quando  $R = \mathbb{Z}_2$  esta é a única estrutura de  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo possível, pois  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2) = \{\text{id}\}$ .

Considerando  $X$  um  $G$ -conjunto e  $RX$  o  $R$ -módulo livre gerado pelos elementos de  $X$ , podemos estender a ação de  $G$  sobre  $X$  a uma ação de  $G$  sobre  $RX$  da seguinte maneira:

$$g \cdot (\sum r_x x) := \sum r_x (g \cdot x),$$

com  $g \in G$ ,  $r_x \in R$  e  $x \in X$ .

Assim, temos o seguinte resultado:



**1.1.13 Proposição:** *Sejam  $X$  um  $G$ -conjunto livre e  $E$  um conjunto de representantes para as  $G$ -órbitas em  $X$ . Então  $RX$  é um  $RG$ -módulo livre com base  $E$ .*

**Demonstração:** Seja  $E = \{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  um conjunto de representantes para as  $G$ -órbitas em  $X$ . Então  $X = \bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)$  e assim

$$RX = R \left( \bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda) \right) = \bigoplus_{x_\lambda \in E} R(G(x_\lambda)).$$

sendo que a última igualdade é verdadeira por [6] (p.13).

Agora, como a  $G$ -ação é livre temos, para cada  $x_\lambda$ , que a aplicação

$$\begin{aligned} f_\lambda: G &\rightarrow G(x_\lambda) \\ g &\mapsto f_\lambda(g) = g \cdot x_\lambda \end{aligned}$$

é uma bijeção. Daí,  $R(G(x_\lambda)) \simeq RG$ .

$$\text{Logo, } RX = \bigoplus_{x_\lambda \in E} (RG)_{x_\lambda}. \quad \blacksquare$$

**1.1.14 Corolário:** *Se  $S$  é um subgrupo de  $G$  então  $RG$  é um  $RS$ -módulo livre com base num conjunto  $E$  de representantes para as  $S$ -órbitas em  $G$  (que são as classes laterais à esquerda de  $S$  em  $G$ ), isto é,  $RG = \bigoplus_{g \in E} g(RS)$ .*

**Demonstração:** Temos que  $G$  é um  $S$ -conjunto com a ação dada pela multiplicação dos elementos de  $S$  por elementos de  $G$  (isto é,  $s \cdot g := sg$ ) e esta ação é livre (pois:  $s \cdot g = g \Leftrightarrow s = 1$ ). Portanto, o resultado segue da proposição anterior. ■

## 1.2 (Co)invariantes

Sejam  $G$  um grupo e  $M$  um  $RG$ -módulo (à esquerda).

**1.2.1 Definição:** *O grupo de coinvariantes de  $M$ , denotado por  $M_G$ , é dado por:*

$$M_G = M / \langle g \cdot m - m \mid g \in G \text{ e } m \in M \rangle$$

onde  $\langle g \cdot m - m \mid g \in G \text{ e } m \in M \rangle$  é o submódulo de  $M$  gerado pelos elementos  $g \cdot m - m$ , com  $g \in G$  e  $m \in M$ .

**1.2.2 Observações:**

(1) *Se a ação de  $G$  em  $M$  é trivial então  $M_G = M$ .*

(2) *Seja  $I = \langle g \cdot m - m \mid g \in G \text{ e } m \in M \rangle$ . Se  $\bar{m} := m + I \in M_G$  e  $g \in G$ , definindo  $g \cdot \bar{m} := \overline{g \cdot m} = \bar{m}$  segue que  $G$  atua trivialmente em  $M_G$  tornando-o um  $RG$ -módulo trivial. O nome coinvariantes vem do fato de  $M_G$  ser o maior quociente de  $M$  no qual  $G$  atua trivialmente.*

**1.2.3 Proposição:** Se  $R$  é visto como  $RG$ -módulo trivial (à direita) então

$$R \otimes_{RG} M \simeq M_G$$

como grupos (e como  $RG$ -módulos triviais).

**Demonstração:** Seja  $\phi : M_G \rightarrow R \otimes_{RG} M$  definida por  $\phi(\overline{m}) = 1_R \otimes m, \forall \overline{m} \in M_G$ . É fácil ver que  $\phi$  está bem definida e é homomorfismo de grupos.

Vamos definir uma inversa para  $\phi$ . Consideremos  $M_G$  como  $RG$ -módulo trivial e seja  $f : R \times M \rightarrow M_G$  definida por  $f(r, m) = r\overline{m}$ . Temos que  $f$  é biaditiva. E ainda, para todo  $x = \sum r_g g \in RG, r \in R$  e  $m \in M$ , como a  $G$ -ação em  $M_G$  é trivial e  $\overline{xm} = \varepsilon(x)\overline{m}$  segue que  $f(rx, m) = f(r\varepsilon(x), m) = (r\varepsilon(x))\overline{m} = r(\varepsilon(x)\overline{m}) = r(\overline{xm}) = f(r, xm)$ .

Assim, considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \xrightarrow{f} & M_G \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ R \otimes_{RG} M & & \end{array}$$

e usando a Propriedade Universal do Produto Tensorial ([17], teor.1.1, p.138) temos que existe um único homomorfismo  $\psi$  de grupos abelianos (que comuta o diagrama)

$$\begin{aligned} \psi : R \otimes_{RG} M &\rightarrow M_G \\ r \otimes m &\mapsto \psi(r \otimes m) = f(r, m) = r\overline{m} \end{aligned}$$

Além disso,  $\psi$  é inversa de  $\phi$ , e considerando  $R \otimes_{RG} M$  como  $RG$ -módulo trivial segue que  $R \otimes_{RG} M \simeq M_G$  (como  $RG$ -módulos triviais). ■

**1.2.4 Corolário:** Se  $L$  é um  $RG$ -módulo livre com base  $\{e_i\}_{i \in I}$  então  $L_G$  é um  $R$ -módulo livre com base  $\{\overline{e_i}\}_{i \in I}$ .

**Demonstração:** Basta usar a caracterização de  $L_G$  dada na proposição anterior e o fato que  $L$  é livre com base  $\{e_i\}_{i \in I}$ . ■

**1.2.5 Observação:** Em vista da proposição 1.2.3, se  $M$  é um  $RG$ -módulo podemos identificar, quando for conveniente,  $M_G$  com  $R \otimes_{RG} M$ .

Recordemos que o produto tensorial  $M \otimes_A N$  é definido quando  $M$  é um  $A$ -módulo à direita e  $N$  é um  $A$ -módulo à esquerda ([17], V.I, p.138). Todo  $RG$ -módulo à esquerda  $M$  pode ser considerado como um  $RG$ -módulo à direita definindo:  $m * g := g^{-1} \cdot m, g \in G$  e  $m \in M$ . Assim, faz sentido considerar o produto tensorial de dois  $RG$ -módulos à esquerda.

**Ação diagonal no  $\otimes_R$ :** Se  $M$  e  $N$  são  $RG$ -módulos (à esquerda) podemos definir uma  $G$ -ação sobre  $M \otimes_R N$  (a qual é induzida da ação de  $G$  sobre  $M$  e  $N$ ) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G \times M \otimes_R N &\rightarrow M \otimes_R N \\ (g, m \otimes n) &\mapsto g \cdot (m \otimes n) := g \cdot m \otimes g \cdot n \end{aligned}$$

Com esta  $G$ -ação,  $M \otimes_R N$  torna-se um  $RG$ -módulo e temos o seguinte resultado:



**1.2.6 Proposição:**  $(M \otimes_R N)_G = M \otimes_{RG} N$ .

**Demonstração:** Definindo em  $M \otimes_R N$  a relação  $\sim$ :  $g^{-1} \cdot m \otimes n = m \otimes g \cdot n$  vemos que  $M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}$  ([17], V.I, p.138).

Como todo elemento  $m \in M$  é da forma  $g \cdot m'$  com  $m' \in M$ , a relação anterior pode, também, ser dada por:  $m' \otimes n = g \cdot m' \otimes g \cdot n$ .

Por outro lado, considerando em  $M \otimes_R N$  a  $G$ -ação diagonal segue que

$$(M \otimes_R N)_G = M \otimes_R N / \langle (g \cdot m \otimes g \cdot n) - (m \otimes n) \mid g \in G \text{ e } m \otimes n \in M \otimes_R N \rangle.$$

Isto significa que estamos identificando em  $M \otimes_R N$  os elementos da forma  $g \cdot m \otimes g \cdot n$  com  $m \otimes n$ . Logo

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N. \quad \blacksquare$$

**1.2.7 Corolário:**  $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$ .

**Demonstração:** Como  $R$  é um anel comutativo, por [17] (V.2, p.142),  $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$ . Logo,  $M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G \simeq N \otimes_{RG} M$ . ■

**1.2.8 Observação:** Podíamos obter  $M_G \simeq R \otimes_{RG} M$  como consequência da proposição 1.2.6. Além disso, segue do corolário anterior que  $M_G \simeq R \otimes_{RG} M \simeq M \otimes_{RG} R$ .

**1.2.9 Definição:** O grupo de invariantes de  $M$ , denotado por  $M^G$ , é dado por:

$$M^G = \{m \in M \mid g \cdot m = m, \quad \forall g \in G\}.$$

**1.2.10 Observações:**

(1) Se a ação de  $G$  em  $M$  é trivial então  $M^G = M$ .

(2) É claro que a  $G$ -ação sobre  $M$  induz a  $G$ -ação trivial sobre  $M^G$  e assim  $M^G$  é um  $RG$ -módulo trivial. Temos que  $M^G$  é o maior submódulo de  $M$  no qual  $G$  atua trivialmente.

Sejam  $M$  e  $N$   $RG$ -módulos. Considerando  $M$  e  $N$  como  $R$ -módulos podemos definir sobre  $\text{Hom}_R(M, N)$  uma  $G$ -ação (denominada ação diagonal) de modo a torná-lo um  $RG$ -módulo. Queremos analisar o grupo de invariantes deste  $RG$ -módulo.

**Ação diagonal no  $\text{Hom}_R$ :** a  $G$ -ação diagonal sobre  $\text{Hom}_R(M, N)$  (a qual é induzida da ação de  $G$  sobre  $M$  e  $N$ ) é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G \times \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f; \quad (g \cdot f)(m) = g \cdot f(g^{-1} \cdot m), \forall m \in M \end{aligned}$$

Note que, o uso de  $g^{-1}$  para definir a ação foi necessário devido a contravariância do funtor  $\text{Hom}$  na primeira variável.

**1.2.11 Proposição:**  $(\text{Hom}_R(M, N))^G = \text{Hom}_{RG}(M, N)$

**Demonstração:** Sejam  $g \in G$  e  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ . Temos

$$\begin{aligned} g \cdot f = f &\Leftrightarrow (g \cdot f)(m) = f(m), \forall m \in M \Leftrightarrow g \cdot f(g^{-1} \cdot m) = f(m), \forall m \in M \\ &\Leftrightarrow g \cdot f(m') = f(g \cdot m'), \forall m' \in M \quad (m' = g^{-1} \cdot m). \end{aligned}$$

Logo

$$(\text{Hom}_R(M, N))^G = \{f \in \text{Hom}_R(M, N) \mid g \cdot f(m) = f(g \cdot m)\} = \text{Hom}_{RG}(M, N). \quad \blacksquare$$

**1.2.12 Corolário:** Se  $R$  é visto como  $RG$ -módulo trivial (à esquerda) então

$$\text{Hom}_{RG}(R, M) \simeq M^G$$

como grupos (e como  $RG$ -módulos triviais).

## 1.3 Restrição e (Co)extensão de Escalares

Consideremos  $A_1, A_2$  anéis e  $\kappa : A_1 \rightarrow A_2$  um homomorfismo de anéis.

(1) Se  $M$  é um  $A_2$ -módulo (à esquerda) sempre podemos ver  $M$  como um  $A_1$ -módulo (à esquerda) definindo em  $M$  a  $A_1$ -multiplicação:

$$\begin{aligned} A_1 \times M &\rightarrow M \\ (a_1, m) &\mapsto a_1 m := \kappa(a_1) m \end{aligned}$$

Neste caso,  $M$  é dito ser um  $A_1$ -módulo por **restrição de escalares (via  $\kappa$ )**.

(2) Agora, se  $M$  é um  $A_1$ -módulo (à esquerda) vamos obter dois  $A_2$ -módulos (à esquerda), bastante relacionados com  $M$ , da seguinte maneira:

• O  $A_2$ -módulo  $\text{Hom}_{A_1}(A_2, M)$

Por restrição de escalares podemos ver  $A_2$  como um  $A_1$ -módulo (à esquerda)

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 &\rightarrow A_2 \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 := \kappa(a_1) a_2 \quad (\text{multiplicação do anel}) \end{aligned}$$

e assim faz sentido considerar  $\text{Hom}_{A_1}(A_2, M)$ .

Pode-se mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} A_2 \times \text{Hom}_{A_1}(A_2, M) &\rightarrow \text{Hom}_{A_1}(A_2, M) \\ (a_2, f) &\mapsto a_2 f ; \quad (a_2 f)(a'_2) := f(a'_2 a_2) \end{aligned}$$

está bem definida e é uma  $A_2$ -multiplicação. Assim,  $\text{Hom}_{A_1}(A_2, M)$  é um  $A_2$ -módulo, denominado  **$A_2$ -módulo obtido de  $M$  por coextensão de escalares de  $A_1$  para  $A_2$  (via  $\kappa$ )**.

• O  $A_2$ -módulo  $A_2 \otimes_{A_1} M$

Agora, consideremos a construção dual que usa  $\otimes$  no lugar de  $\text{Hom}$ .

Usando a restrição de escalares vamos ver  $A_2$  como um  $A_1$ -módulo (à direita)

$$\begin{aligned} A_2 \times A_1 &\rightarrow A_2 \\ (a_2, a_1) &\mapsto a_2 a_1 := a_2 \kappa(a_1) \quad (\text{multiplicação do anel}) \end{aligned}$$

e daí podemos considerar o produto tensorial  $A_2 \otimes_{A_1} M$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} A_2 \times (A_2 \otimes_{A_1} M) &\rightarrow A_2 \otimes_{A_1} M \\ (a_2, a'_2 \otimes m) &\mapsto a_2(a'_2 \otimes m) := a_2 a'_2 \otimes m \end{aligned}$$

está bem definida e é uma  $A_2$ -multiplicação. Logo,  $A_2 \otimes_{A_1} M$  é um  $A_2$ -módulo, denominado  **$A_2$ -módulo obtido de  $M$  por extensão de escalares de  $A_1$  para  $A_2$  (via  $\kappa$ )**.

Finalizando esta seção enunciaremos, para facilitar futuras referências, três resultados que podem ser encontrados em [6] (III.3, p.63-64).

**1.3.1 Lema:** Se  $M$  é um  $A_1$ -módulo então existe uma aplicação natural de  $A_1$ -módulos:

(i)  $\pi : \text{Hom}_{A_1}(A_2, M) \rightarrow M$  definida por  $\pi(f) := f(1_{A_2})$ ,  $\forall f \in \text{Hom}_{A_1}(A_2, M)$ , onde  $\text{Hom}_{A_1}(A_2, M)$  é visto inicialmente como um  $A_2$ -módulo por coextensão e depois como um  $A_1$ -módulo por restrição de escalares;

(ii)  $i : M \rightarrow A_2 \otimes_{A_1} M$  definida por  $i(m) := 1 \otimes m$ ,  $\forall m \in M$ , onde  $A_2 \otimes_{A_1} M$  é visto inicialmente como um  $A_2$ -módulo por extensão e depois como um  $A_1$ -módulo por restrição de escalares.

**1.3.2 Lema:** Sejam  $\kappa : A_1 \rightarrow A_2$  um homomorfismo de anéis,  $N$  um  $A_2$ -módulo (à esquerda) e  $M$  um  $A_1$ -módulo (à esquerda).

(i) Se  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação de  $A_1$ -módulos então existe uma única aplicação de  $A_2$ -módulos  $p : N \rightarrow \text{Hom}_{A_1}(A_2, M)$  tal que  $\pi \circ p = f$  (com  $\pi$  a aplicação dada no lema anterior).

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{A_1}(A_2, M) & \\ & \downarrow \pi & \\ N & \xrightarrow{f} & M \\ & \nearrow p & \end{array}$$

(ii) Se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação de  $A_1$ -módulos então existe uma única aplicação de  $A_2$ -módulos  $q : A_2 \otimes_{A_1} M \rightarrow N$  tal que  $q \circ i = f$  (com  $i$  a aplicação dada no lema anterior).

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & A_2 \otimes_{A_1} M \\ \downarrow f & \nearrow q & \\ N & & \end{array}$$



**1.3.3 Proposição:** Se  $\kappa : A_1 \rightarrow A_2$  é um homomorfismo de anéis,  $N$  é um  $A_2$ -módulo (à esquerda) e  $M$  é um  $A_1$ -módulo (à esquerda) então

(i)  $\text{Hom}_{A_1}(N, M) \simeq \text{Hom}_{A_2}(N, \text{Hom}_{A_1}(A_2, M))$  como grupos;

(ii)  $\text{Hom}_{A_1}(M, N) \simeq \text{Hom}_{A_2}(A_2 \otimes_{A_1} M, N)$  como grupos.

## 1.4 Módulos (Co)induzidos

Sejam  $G$  um grupo e  $S$  um subgrupo de  $G$ . Vamos aplicar a construção da seção anterior para o homomorfismo de anéis  $\tilde{\alpha} : RS \rightarrow RG$  induzido da inclusão  $\alpha : S \rightarrow G$  (ou seja,  $A_1 = RS$  e  $A_2 = RG$  com  $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ ). Todos os resultados da seção anterior se aplicam neste caso particular.

(1) Se  $M$  é um  $RG$ -módulo podemos ver  $M$  como um  $RS$ -módulo por restrição de escalares (via  $\tilde{\alpha}$ ). O  $RS$ -módulo  $M$  assim obtido é usualmente denotado por  $\text{Res}_S^G M$  ou simplesmente por  $M$  caso não haja confusão.

(2) Agora, a cada  $RS$ -módulo  $M$  associamos dois  $RG$ -módulos.

• O  $RG$ -módulo obtido de  $M$  por coextensão de escalares (que neste caso chamamos de coindução) é denotado por  $\text{Coind}_S^G M$ , ou seja,

$$\text{Coind}_S^G M = \text{Hom}_{RS}(RG, M)$$

e a  $G$ -ação é dada por

$$\begin{aligned} G \times \text{Coind}_S^G M &\rightarrow \text{Coind}_S^G M \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f ; \quad (g \cdot f)(g') = f(g'g) \end{aligned}$$

• O  $RG$ -módulo obtido de  $M$  por extensão de escalares (que neste caso chamamos de indução) é denotado por  $\text{Ind}_S^G M$ , isto é,

$$\text{Ind}_S^G M = RG \otimes_{RS} M$$

e a  $G$ -ação é dada por

$$\begin{aligned} G \times \text{Ind}_S^G M &\rightarrow \text{Ind}_S^G M \\ (g, g' \otimes m) &\mapsto g \cdot (g' \otimes m) = gg' \otimes m \end{aligned}$$

### 1.4.1 Definição: Os $RG$ -módulos

$$\text{Coind}_{\{1\}}^G M = \text{Hom}_R(RG, M) \quad e \quad \text{Ind}_{\{1\}}^G M = RG \otimes_R M$$

são chamados, respectivamente, módulos coinduzido e induzido.



**1.4.2 Observação:** Considerando  $M = N$  e  $f = id_M$  em 1.3.2 segue que:

$$\begin{aligned} \pi : Coind_S^G M &\rightarrow M && \text{é um RS-epimorfismo,} \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i : M &\rightarrow Ind_S^G M && \text{é um RS-monomorfismo.} \\ m &\mapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

**1.4.3 Proposição:** Sejam  $G$  um grupo,  $S$  um subgrupo de  $G$ ,  $M$  um RS-módulo e  $E$  um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de  $S$  em  $G$ . Então:

(i) O  $RG$ -módulo  $Coind_S^G M$  admite uma decomposição em produto direto, ou seja, existe uma família de sobrejeções  $\pi_g : Coind_S^G M \rightarrow gM$ ,  $g \in E$ , tal que a aplicação correspondente  $Coind_S^G M \rightarrow \prod_{g \in E} gM$  é um isomorfismo.

(ii) O  $RG$ -módulo  $Ind_S^G M$  contém  $M$  como um RS-submódulo e é a soma direta de transformados  $gM$ , sendo que  $g$  varia sobre  $E$ , isto é,  $Ind_S^G M = \bigoplus_{g \in E} gM$ ;

**Demonstração:** [6] (p.67 e 70). ■

Seja  $M$  um RS-módulo. Vamos exibir um  $RG$ -homomorfismo do  $Ind_S^G M$  no  $Coind_S^G M$  (que de fato será um monomorfismo).

Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 : M &\rightarrow Coind_S^G M \\ m &\mapsto \vartheta_0(m); \quad \vartheta_0(m)(g) = \begin{cases} g \cdot m & \text{se } g \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Temos que  $\vartheta_0$  é injetora, pois  $\vartheta_0(m)(1) = m$ ,  $\forall m \in M$  e daí  $m \neq m' \Rightarrow \vartheta_0(m) \neq \vartheta_0(m')$ .

Além disso, para quaisquer  $s \in S$ ,  $m \in M$  e  $g \in G$ ,

$$\vartheta_0(s \cdot m)(g) = \begin{cases} g \cdot (s \cdot m) = (gs) \cdot m & \text{se } g \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$(s \cdot \vartheta_0(m))(g) = \vartheta_0(m)(gs) = \begin{cases} (gs) \cdot m & \text{se } gs \in S (\Leftrightarrow g \in S) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim,  $\vartheta_0$  é um RS-monomorfismo.

Tomando  $N = Coind_S^G M$  e  $f = \vartheta_0$  em 1.3.2, temos que existe uma única aplicação de  $RG$ -módulos  $\vartheta : Ind_S^G M \rightarrow Coind_S^G M$  tal que  $\vartheta \circ i = \vartheta_0$ . (\*)

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & Ind_S^G M \\ \vartheta_0 \downarrow & \swarrow \vartheta & \\ N = Coind_S^G M & & \end{array}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\vartheta \circ i = \vartheta_0 &\Rightarrow (\vartheta \circ i)(m) = \vartheta_0(m) \Rightarrow \vartheta(1 \otimes m) = \vartheta_0(m) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vartheta(1 \otimes m)(g) = \vartheta_0(m)(g) = \begin{cases} g \cdot m & \text{se } g \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}\end{aligned}$$

e assim, se  $g' \in G$ , como  $\vartheta$  é aplicação de  $RG$ -módulos,  $\vartheta(g' \cdot (1 \otimes m)) = g' \cdot \vartheta(1 \otimes m)$ . Logo,  $\forall g \in G$ ,  $\vartheta(g' \otimes m)(g) = \vartheta(g' \cdot (1 \otimes m))(g) = (g' \cdot \vartheta(1 \otimes m))(g) = \vartheta(1 \otimes m)(gg')$ . Portanto a aplicação  $\vartheta : \text{Ind}_S^G M \rightarrow \text{Coind}_S^G M$  é dada nos geradores por

$$\vartheta(g' \otimes m)(g) = \begin{cases} (gg') \cdot m & \text{se } gg' \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

**1.4.4 Proposição:** *Seja  $M$  um  $RS$ -módulo. Então:*

- (i)  $\vartheta : \text{Ind}_S^G M \rightarrow \text{Coind}_S^G M$ , onde  $\vartheta$  é aplicação (\*) obtida anteriormente, é um  $RG$ -monomorfismo;
- (ii)  $\text{Ind}_S^G M \simeq \text{Coind}_S^G M$  como  $RG$ -módulos se  $[G : S] < \infty$ .

**Demonstração:** [6] (prop.III.5.9, p.70). ■

**1.4.5 Observações:**

(1) Sempre que for conveniente, consideraremos  $\text{Ind}_S^G M$  como um submódulo do  $\text{Coind}_S^G M$  (isto é possível pelo item (i) da proposição anterior). Em particular, podemos considerar (através da  $\vartheta$ ),  $\mathbb{Z}_2 G \simeq \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$  como um submódulo do  $\overline{\mathbb{Z}_2 G} \stackrel{\text{not.}}{=} \text{Coind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ . Neste caso,  $\vartheta$  é dada nos geradores por

$$\vartheta(g')(g) \equiv \vartheta(g' \otimes 1)(g) = \begin{cases} (gg') & \text{se } gg' \in \{1\} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } g = (g')^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(2) Se escrevermos  $\text{Ind}_S^G M$  e  $\text{Coind}_S^G M$ , respectivamente, como uma soma direta e produto direto,  $\vartheta$  pode ser identificada como a inclusão canônica da soma no produto. Se  $[G : S] < \infty$  (isto é, se  $E$  é finito) temos que a soma direta e o produto direto coincidem e assim obtemos que  $\text{Ind}_S^G M \simeq \text{Coind}_S^G M$ .

O resultado seguinte será usado no último capítulo.

**1.4.6 Lema:** *Sejam  $S, T$  subgrupos de um grupo  $G$  satisfazendo  $S \subset T \subset G$  e  $M$  um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo. Então:*

- (i) existe um  $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfismo natural:  $\text{Coind}_T^G \text{Coind}_S^T M \xrightarrow{\nu} \text{Coind}_S^G M$ ;
- (ii) existe um  $\mathbb{Z}_2 G$ -monomorfismo natural:  $\text{Ind}_T^G \text{Coind}_S^T M \xrightarrow{\vartheta} \text{Coind}_T^G \text{Coind}_S^T M$ .

**Demonstração:** (i) Tomando  $N = \mathbb{Z}_2 G$ ,  $A_1 = \mathbb{Z}_2 S$  e  $A_2 = \mathbb{Z}_2 T$  em 1.3.3 segue que

$$\text{Coind}_S^G M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2 S}(\mathbb{Z}_2 G, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2 T}(\mathbb{Z}_2 G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2 S}(\mathbb{Z}_2 T, M)) = \text{Coind}_T^G \text{Coind}_S^T M.$$



(ii) Basta considerar em 1.4.4,  $T$  no lugar de  $S$  e o  $\mathbb{Z}_2 T$ -módulo  $\text{Coind}_S^T M$  no lugar de  $M$ . ■

Antes de apresentarmos o próximo resultado, observemos que dado um subgrupo  $T$  de  $G$  e  $M$  um  $RG$ -módulo o somando  $gM$  do  $\text{Ind}_T^G M$  é fechado sob a ação de  $T^g =: gTg^{-1}$  (pois  $gtg^{-1} \cdot (g \otimes m) = gtg^{-1}g \otimes m = gt \otimes m = g \otimes tm$ , para todo  $t \in T$  e  $m \in M$ ). Assim,  $gM$  é um  $RT^g$ -módulo. Em particular, se  $T$  é normal em  $G$  então  $gM$  é um  $RT$ -módulo.

**1.4.7 Proposição:(Fórmula de Mackey)** *Sejam  $T, S$  subgrupos de  $G$  e  $E$  um conjunto de representantes para as classes duplas  $SgT$ . Então, para qualquer  $RT$ -módulo  $M$ , existe um  $RS$ -isomorfismo*

$$\text{Res}_S^G \text{Ind}_T^G M \simeq \bigoplus_{g \in E} \text{Ind}_{S \cap T^g}^S \text{Res}_{S \cap T^g}^{T^g} gM.$$

*Em particular, se  $T$  é normal em  $G$  então existe um  $RT$ -isomorfismo*

$$\text{Res}_T^G \text{Ind}_T^G M \simeq \bigoplus_{g \in G/T} gM.$$

**Demonstração:** [6] (prop.III.5.6(b), p.69). ■

**1.4.8 Proposição:** *Se  $M$  é um  $RS$ -módulo e  $N$  um  $RG$ -módulo então existe um  $RG$ -isomorfismo*

$$N \otimes_{RG} \text{Ind}_S^G M \simeq \text{Ind}_S^G (\text{Res}_S^G N \otimes_{RS} M)$$

*onde  $N \otimes_{RG} \text{Ind}_S^G M$  é visto como  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação diagonal e  $\text{Res}_S^G N \otimes_{RS} M$  é visto como  $RS$ -módulo com a  $S$ -ação diagonal.*

**Demonstração:** [10] (lema I.3.10, p.16). ■

**1.4.9 Proposição:** *Sejam  $G$  um grupo e  $S$  um subgrupo de  $G$  com  $[G : S] = \infty$  então, para qualquer  $RS$ -módulo  $M$ ,*

$$(\text{Ind}_S^G M)^G = 0$$

**Demonstração:** [10] (lema I.3.11, p.17). ■

Vamos denotar por  $R(G/S)$  o  $R$ -módulo livre gerado pelas classes laterais  $gS$ ,  $g \in G$ . Existe uma  $G$ -ação natural de  $G$  em  $R(G/S)$  induzida pela multiplicação à esquerda (isto é,  $g' \cdot (gS) := (g'g)S$ ). Assim, por 1.1.9,  $R(G/S)$  é um  $RG$ -módulo à esquerda.

Conseqüentemente, se  $M$  é um  $RG$ -módulo então, vimos na seção 1.2, que podemos dar a  $\text{Hom}_R(R(G/S), M)$  e  $R(G/S) \otimes_R M$  a estrutura de  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação diagonal.

Nessas condições, se considerarmos os  $RG$ -módulos  $\text{Coind}_S^G \text{Res}_S^G M$  e  $\text{Ind}_S^G \text{Res}_S^G M$  obtidos, respectivamente, por coindução e indução de escalares, temos:



**1.4.10 Proposição:** *Seja  $M$  um  $RG$ -módulo. Então existem  $RG$ -isomorfismos naturais:*

$$(i) \text{ Coind}_S^G \text{Res}_S^G M \simeq \text{Hom}_R(R(G/S), M);$$

$$(ii) \text{Ind}_S^G \text{Res}_S^G M \simeq R(G/S) \otimes_R M.$$

**Demonstração:** (i) Temos que

$$\begin{aligned} \xi : \text{Hom}_{RS}(RG, M) &\rightarrow \text{Hom}_R(R(G/S), M) \\ f &\mapsto \xi(f); \quad \xi(f)(gS) := g \cdot f(g^{-1}) \end{aligned}$$

é um  $RG$ -homomorfismo cujo homomorfismo inverso é dado por:

$$\begin{aligned} v : \text{Hom}_R(R(G/S), M) &\rightarrow \text{Hom}_{RS}(RG, M) \\ f &\mapsto v(f); \quad v(f)(g) := g \cdot f(g^{-1}S) \end{aligned}$$

(ii) Seja  $f : RG \times M \rightarrow R(G/S) \otimes_R M$  definida por  $f(g, m) = gS \otimes g \cdot m$ ,  $\forall g \in G$  e  $m \in M$ , e estendida por linearidade. Temos que  $f$  está bem definida, é biaditiva e  $f(gs, m) = f(g, s \cdot m)$ , para todo  $g \in G$ ,  $s \in S$  e  $m \in M$ . Assim, por [17] (teor.V.1.1, p.138) existe um único homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \phi : RG \otimes_{RS} M &\rightarrow R(G/S) \otimes_R M \\ (g \otimes m) &\mapsto \phi(g \otimes m) = f(g, m) = gS \otimes g \cdot m \end{aligned}$$

Agora, consideremos  $\tilde{f} : R(G/S) \times M \rightarrow RG \otimes_{RS} M$  dada por  $\tilde{f}(gS, m) = g \otimes g^{-1} \cdot m$ ,  $\forall gS \in G/S$  e  $m \in M$ , e estendida por linearidade. Temos que  $\tilde{f}$  está bem definida, é biaditiva e  $\tilde{f}((gS)r, m) = \tilde{f}(gS, rm)$ , para todo  $g \in G$ ,  $r \in R$  e  $m \in M$ . Assim, por [17] (teor.V.1.1, p.138) existe um único homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \psi : R(G/S) \otimes_R M &\rightarrow RG \otimes_{RS} M \\ (gS \otimes m) &\mapsto \psi(gS \otimes m) = \tilde{f}(gS, m) = g \otimes g^{-1} \cdot m \end{aligned}$$

Além disso,  $\phi$  e  $\psi$  são aplicações de  $RG$ -módulos e também  $\psi$  é inversa de  $\phi$ . ■

**1.4.11 Corolário:**  $\text{Ind}_S^G R \simeq R(G/S)$  como  $RG$ -módulos.

Seja  $G$  um grupo. Consideremos  $\mathcal{P}G = \{B \mid B \subseteq G\}$  o conjunto das partes de  $G$ . Temos que  $(\mathcal{P}G, +)$  é um grupo abeliano (em que todo elemento tem ordem 2) com a operação diferença simétrica, isto é,  $\forall B, C \in \mathcal{P}G$ ,

$$B + C := (B - C) \cup (C - B) = (B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)$$

Além disso, a função

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P}G &\rightarrow \mathcal{P}G \\ (g, B) &\mapsto g \cdot B := \{gb \mid b \in B\} \end{aligned}$$

é uma  $G$ -ação sobre  $\mathcal{P}G$ .

Assim, conforme 1.1.9,  $\mathcal{P}G$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo.

Considere  $FG = \{F \subset G \mid F \text{ é finito}\} \subset \mathcal{P}G$ . É fácil ver que  $FG$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de  $\mathcal{P}G$ .

**1.4.12 Proposição:** Sejam  $G$  um grupo e  $\mathcal{P}G$  o conjunto das partes de  $G$ . Então

$$\overline{\mathbb{Z}_2 G} = \text{Coind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 \simeq \mathcal{P}G.$$

como  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulos. Além disso, o " $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo"  $\mathbb{Z}_2 G \simeq \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$  de  $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$  é levado por este isomorfismo no  $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo  $FG$  de  $\mathcal{P}G$ .

**Demonstração:** Seja

$$\begin{aligned} \rho: \overline{\mathbb{Z}_2 G} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2) &\rightarrow \mathcal{P}G \\ f &\mapsto \rho(f) := B_f; \quad B_f = \{g \in G \mid f(g^{-1}) = 1\} \end{aligned}$$

Temos que:

(I)  $\rho$  está bem definida;

(II)  $\rho$  é homomorfismo de grupos;

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \rho(g' \cdot f) &= \{\tilde{g} \in G \mid (g' \cdot f)(\tilde{g}^{-1}) = 1\} = \{\tilde{g} \in G \mid f(\tilde{g}^{-1} g') = 1\} \\ &= \{\tilde{g} \in G \mid f((g')^{-1} \tilde{g})^{-1} = 1\} = \{g' g \in G \mid f(g^{-1}) = 1\} = g' \cdot \rho(f); \end{aligned}$$

(IV) Considerando

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{P}G &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2) \\ B &\mapsto \psi(B) := f_B; \quad f_B(g) := \begin{cases} 1 & \text{se } g^{-1} \in B \\ 0 & \text{se } g^{-1} \notin B, \end{cases} \end{aligned}$$

$\psi$  está bem definida e é uma inversa para  $\rho$ .

Assim,  $\rho$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfismo e portanto  $\overline{\mathbb{Z}_2 G} \simeq \mathcal{P}G$ .

Agora, vimos em 1.4.5(1) que  $\mathbb{Z}_2 G \simeq \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$  pode ser considerado como um  $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de  $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$  através do  $\mathbb{Z}_2 G$ -monomorfismo dado nos geradores por

$$\begin{aligned} \vartheta: \mathbb{Z}_2 G &\rightarrow \overline{\mathbb{Z}_2 G} \\ g' &\mapsto \vartheta(g'); \quad \vartheta(g')(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = (g')^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Como  $\vartheta$  é monomorfismo segue que  $\mathbb{Z}_2 G \simeq \vartheta(\mathbb{Z}_2 G)$ .

Mostremos que  $\rho(\vartheta(\mathbb{Z}_2 G)) = FG$ .

Seja  $B \in \rho(\vartheta(\mathbb{Z}_2 G))$ . Então  $B = \rho(\vartheta(x))$ ,  $x \in \mathbb{Z}_2 G$ . Agora,  $x \in \mathbb{Z}_2 G$  implica que  $x = 1g_1 + \dots + 1g_k$  com  $1 \in \mathbb{Z}_2$ ,  $g_i \in G$  e  $g_i \neq g_j$ . Daí

$$\vartheta(x) = 1\vartheta(g_1) + \dots + 1\vartheta(g_k) \quad \text{sendo que} \quad \vartheta(g_i)(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g_i^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo,  $B = \rho(\vartheta(x)) = \{g \in G \mid \vartheta(x)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \dots, g_k\}$ , ou seja,  $B \in FG$ .

Reciprocamente, seja  $B = \{g_1, \dots, g_k\} \in FG$ . Podemos tomar  $x = 1g_1 + \dots + 1g_k \in \mathbb{Z}_2 G$  e daí  $\vartheta(x) \in \vartheta(\mathbb{Z}_2 G)$ . Como

$$\rho(\vartheta(x)) = \{g \in G \mid \vartheta(x)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \dots, g_k\} = B$$

Assim,  $B \in \rho(\vartheta(\mathbb{Z}_2 G))$ .

Portanto, como  $\mathbb{Z}_2 G \simeq \vartheta(\mathbb{Z}_2 G)$  e  $\rho(\vartheta(\mathbb{Z}_2 G)) = FG$ , concluímos que  $\mathbb{Z}_2 G$  é levado por  $\rho$  em  $FG$ . ■



## 1.5 Resoluções Projetivas e Livres de $R$ sobre $RG$

Vamos definir, a seguir, Resoluções Livres e Projetivas de  $R$  sobre  $RG$  (o anel grupo de  $G$  sobre  $R$ ). Pode-se definir de forma mais geral Resoluções Livres e Projetivas de  $M$  sobre  $A$ , onde  $A$  é um anel com unidade e  $M$  é um  $A$ -módulo.

**1.5.1 Definição:** Uma resolução projetiva (respectivamente, livre) de  $R$  sobre  $RG$ , onde  $R$  será visto como  $RG$ -módulo trivial, é uma seqüência exata de  $RG$ -módulos:

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

com cada  $F_i$   $RG$ -projetivo (respectivamente,  $RG$ -livre). É usual denotar uma tal resolução por  $\varepsilon : F \rightarrow R$ .

### 1.5.2 Observações:

- (1) Dado um grupo  $G$  qualquer, sempre é possível construir uma resolução livre de  $R$  sobre  $RG$  (usando o fato que todo módulo é isomorfo ao quociente de um módulo livre). Para um grupo  $G$  arbitrário, apresentaremos abaixo uma resolução particular, bastante natural, denominada resolução padrão.
- (2) Toda resolução livre é projetiva, pois todo módulo livre é projetivo ([17], lema I.5.4, p.20).
- (3) Se existir um inteiro  $n$  tal que  $F_i = 0$ , para  $i > n$ , dizemos que a resolução tem comprimento no máximo  $n$ . Neste caso, escrevemos simplesmente

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

### 1.5.3 Exemplos:

#### (1) Resolução Padrão/ Resolução Bar:

Sejam  $G$  um grupo e  $F_n$  o  $R$ -módulo livre gerado por  $X_n$ , com  $X_n$  o conjunto das  $(n+1)$ -uplas  $(g_0, g_1, \dots, g_n)$  de elementos de  $G$ . Consideremos as seguintes aplicações definidas nos geradores por:

$$\begin{aligned} \partial_n : \quad F_n &\longrightarrow F_{n-1} \\ (g_0, \dots, g_n) &\mapsto \partial_n(g_0, \dots, g_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n) \\ \varepsilon : \quad F_0 &\longrightarrow R \\ (g_0) &\mapsto 1 \end{aligned}$$

e estendidas por linearidade.

Assim, temos o seguinte complexo:

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0 \quad (*)$$



A  $G$ -ação livre sobre  $F_n$  é obtida da  $G$ -ação livre sobre  $X_n$  (translação à esquerda, isto é,  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) := (gg_0, \dots, gg_n)$ ). Daí, por 1.1.13,  $F_n = RX_n$  é  $RG$ -módulo livre com base em um conjunto de representantes para as  $G$ -órbitas em  $X_n$ .

Agora, mostremos que o complexo  $(*)$  é exato. Consideremos  $F = (F_i)$  com  $F_{-1} = R$  e  $h_n : F_n \rightarrow F_{n+1}$  dada nos geradores por:

$$\begin{cases} h_n(g_0, \dots, g_n) = (1, g_0, \dots, g_n) & \text{se } n \geq 0 \\ h_n(1_R) = (1) & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

Aqui vamos considerar  $(*)$  como um complexo de  $R$ -módulos, pois  $h_n$  não é aplicação de  $RG$ -módulos.

Efetuando os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ h_{-1} &= id_{F_{-1}} \\ h_{-1} \circ \varepsilon + \partial_1 \circ h_0 &= id_{F_0} \\ h_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_n &= id_{F_n} \end{aligned}$$

ou seja,  $h$  é uma homotopia de cadeia entre  $id_F$  e a aplicação nula.

Logo, as aplicações induzidas na homologia coincidem, isto é,  $id_* : H_*(F) \rightarrow H_*(F)$  é a aplicação nula ([17], teor.II.2.1, p.40). Isto implica que, para todo  $n$ ,  $H_n(F) = 0$  e daí  $\text{Ker } \partial_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ . Portanto  $(*)$  é exato.

Como  $F_n$  é  $RG$ -módulo livre e o complexo  $(*)$  é exato segue que

$$\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $R$  sobre  $RG$ , denominada resolução padrão.

## Resolução Bar:

Consideremos, na resolução anterior, como representante da  $G$ -órbita de  $(g_0, g_1, \dots, g_n)$  o elemento  $g_0^{-1} \cdot (g_0, g_1, \dots, g_n) = (1, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_n) = (1, g'_1, g'_1g'_2, \dots, g'_1g'_2 \dots g'_n)$  tal que  $g'_n = g_{n-1}^{-1}g_n$ .

Vamos denotar um elemento  $(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$  de  $F_n$  por  $[g_1|g_2| \dots |g_n]$ . Esta notação é denominada notação bar.

Usando essa notação temos que  $F_n$  é o  $RG$ -módulo livre gerado pelos símbolos  $[g_1|g_2| \dots |g_n]$  e  $\partial_n([g_1|g_2| \dots |g_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i[g_1|g_2| \dots |g_n]$ , com

$$d_i([g_1|g_2| \dots |g_n]) = \begin{cases} g_1[g_2| \dots |g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1| \dots |g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}| \dots |g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1| \dots |g_{n-1}] & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Como  $F_0$  é gerado pela 1-upla  $(1)$  temos, na notação bar, que  $F_0$  é o  $RG$ -módulo livre gerado pelo símbolo  $[ ]$  ( $[ ] \equiv 1$ ) e assim  $F_0 \simeq RG$ .

Por exemplo, temos:

$$\begin{aligned}
 \partial_2([g_1|g_2]) &= d_0([g_1|g_2]) - d_1([g_1|g_2]) + d_2([g_1|g_2]) \\
 &= d_0(1, g_1, g_1g_2) - d_1(1, g_1, g_1g_2) + d_2(1, g_1, g_1g_2) \\
 &= g_1 \cdot (1, g_2) - (1, g_1g_2) + (1, g_1) \\
 &= g_1[g_2] - [g_1g_2] + [g_1], \\
 \partial_1([g_1]) &= d_0([g_1]) - d_1([g_1]) \\
 &= d_0(1, g_1) - d_1(1, g_1) \\
 &= g_1 \cdot (1) - (1) \\
 &= g_1[\ ] - [\ ].
 \end{aligned}$$

Quando usamos a notação bar, a Resolução Padrão é muitas vezes chamada Resolução Bar.

**(2) Resolução de  $R$  sobre  $RG$ , quando  $G$  é cíclico infinito:**

Seja  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Consideremos a seguinte seqüência

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

tal que  $\partial$  é a multiplicação por  $(t-1)$  e  $\varepsilon$  é a aplicação aumentação, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \partial \left( \sum_i r_i t^i \right) &= (t-1) \left( \sum_i r_i t^i \right) = \sum_i (r_i t^{i+1} - r_i t^i) = \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i \\
 \varepsilon \left( \sum_i r_i t^i \right) &= \sum_i r_i
 \end{aligned}$$

com  $r_i \in R$  e  $r_i = 0$  exceto para um número finito de  $i$ 's,  $i \in \mathbb{Z}$ .

Sabemos que  $RG$  é  $RG$ -módulo livre e temos que

(I)  $\partial$  é monomorfismo :

$$\sum_i r_i t^i \in \text{Ker } \partial \implies \partial \left( \sum_i r_i t^i \right) = 0 \implies \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i = 0 \implies r_i = r_j, \forall i, j.$$

Como  $r_i = 0$  exceto para um número finito de índices então  $r_i = 0, \forall i$ , e daí  $\sum_i r_i t^i = 0$ .

(II)  $\text{Im } \partial = \text{Ker } \varepsilon$  :

Temos que

$$(\varepsilon \circ \partial) \left( \sum_i r_i t^i \right) = \varepsilon \left( \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i \right) = \sum_i (r_{i-1} - r_i) = \sum_i r_{i-1} - \sum_i r_i = 0$$

e daí  $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } \varepsilon$ .

Agora, verifiquemos que  $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im } \partial$ .

Seja  $y = r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \dots + r_n t^{k+n} \in \text{Ker } \varepsilon$  tal que  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_0 \neq 0$  e  $r_n \neq 0$  (aqui podemos ter  $r_i = 0$  se  $1 \leq i \leq n-1$ ). Assim

$$\varepsilon(y) = 0 \implies r_0 + r_1 + \dots + r_n = 0 \implies r_n = -r_0 - r_1 - \dots - r_{n-1}.$$

Daí, existe  $x = (-r_0)t^k + (-r_0 - r_1)t^{k+1} + \dots + (-r_0 - r_1 - \dots - r_{n-1})t^{k+(n-1)} \in RG$  com  $\partial(x) = (t-1)x = y$ .

(III)  $\varepsilon$  é epimorfismo, pois  $\varepsilon$  é a aplicação aumentação.

De (I), (II) e (III) concluímos que a seqüência dada inicialmente é exata.

Logo

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $R$  sobre  $RG$ .

### (3) Resolução de $R$ sobre $RG$ , quando $G$ é cíclico finito:

Consideremos  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) e a seqüência

$$\dots \longrightarrow RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} \dots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

onde  $\varepsilon$  é a aplicação aumentação,  $t-1$  e  $N$  denotam, respectivamente, a multiplicação por  $t-1$  e  $1+t+\dots+t^{n-1}$ , isto é, se  $r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1}$  é um elemento de  $RG$ ,

$$\varepsilon(r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1}) = r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1},$$

$$(t-1)(r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1}) = (r_{n-1} - r_0)1 + (r_0 - r_1)t + \dots + (r_{n-2} - r_{n-1})t^{n-1},$$

$$N(r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1}) = (1+t+\dots+t^{n-1})(r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1})$$

Sabemos que  $RG$  é  $RG$ -módulo livre e temos que

(I)  $\varepsilon$  é epimorfismo, pois  $\varepsilon$  é a aplicação aumentação.

(II)  $\text{Im}(t-1) = \text{Ker } \varepsilon$ :

Seja  $y = r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1} \in \text{Ker } \varepsilon$  com  $r_i \in R$ , para  $0 \leq i \leq n-1$ , podendo serem nulos. Daí

$$\varepsilon(y) = 0 \implies r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1} = 0 \implies r_{n-1} = -r_0 - r_1 - \dots - r_{n-2}.$$

Assim, existe  $x = (-r_0)1 + (-r_0 - r_1)t + \dots + (-r_0 - r_1 - \dots - r_{n-2})t^{n-2} \in RG$  tal que  $(t-1)x = y$ .

Logo,  $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im}(t-1)$ .

Agora, seja  $y \in \text{Im}(t-1)$  então existe  $z = r'_0 1 + r'_1 t + \dots + r'_{n-1} t^{n-1} \in RG$  com  $y = (t-1)z$ .

Daí

$$y = (r'_{n-1} - r'_0)1 + (r'_0 - r'_1)t + \dots + (r'_{n-2} - r'_{n-1})t^{n-1} \implies \varepsilon(y) = 0 \implies y \in \text{Ker } \varepsilon.$$

Portanto,  $\text{Im}(t-1) \subset \text{Ker } \varepsilon$ .

(III)  $\text{Im } N = \text{Ker}(t-1)$ :

Claramente  $\text{Im } N \subset \text{Ker}(t-1)$ , pois  $(t-1)N = t^n - 1 = 0$ .

Agora,

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker}(t-1) &\implies y = r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1} \quad \text{e} \quad (t-1)y = 0 \implies \\ &\implies (r_{n-1} - r_0)1 + (r_0 - r_1)t + \dots + (r_{n-2} - r_{n-1})t^{n-1} = 0 \implies r_i = r_0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$



e assim,  $y = r_0 1 + r_0 t + \dots + r_0 t^{n-1} = r_0(1 + t + \dots + t^{n-1}) \in \text{Im } N$ .

Logo,  $\text{Ker } (t - 1) \subset \text{Im } N$ .

(IV)  $\text{Im } (t - 1) = \text{Ker } N$ :

A inclusão  $\text{Im } (t - 1) \subset \text{Ker } N$  segue do fato que  $N(t - 1) = t^n - 1 = 0$ .

Agora,

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker } N &\implies y = r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1} \quad e \quad N(y) = 0 \implies \\ &\implies (1 + t + \dots + t^{n-1})(r_0 1 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1}) = 0 \stackrel{t^n=1}{\implies} \\ &\implies (r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1})1 + \dots + (r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1})t^{n-1} = 0 \implies \\ &\implies r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1} = 0 \implies r_0 = -r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1} \end{aligned}$$

e daí  $y = (t - 1)(r_1 1 + r_2(1 + t) + \dots + r_{n-1}(1 + t + \dots + t^{n-2})) \in \text{Im } (t - 1)$ .

Logo,  $\text{Ker } N \subset \text{Im } (t - 1)$ .

De (I), (II), (III) e (IV) concluímos que a seqüência dada inicialmente é exata.

Portanto

$$\dots \longrightarrow RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} \dots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $R$  sobre  $RG$ .

**1.5.4 Lema:** Se  $\varepsilon : F \rightarrow R$  é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$  e  $S$  é um subgrupo de  $G$  então  $\varepsilon : F \rightarrow R$  também é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RS$ .

**Demonstração:** Seja

$$\dots \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$ .

Cada  $RG$ -módulo  $F_i$  pode ser visto como  $RS$ -módulo por restrição de escalares. Devemos mostrar que  $F_i$  é  $RS$ -projetivo.

Como cada  $F_i$  é um  $RG$ -módulo projetivo então, por [6] (prop.I.8.2, p.27),  $F_i$  é um somando direto de um  $RG$ -módulo livre. Assim,

$$F_i \oplus Q_i \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (RG)_\lambda.$$

Agora, pelo corolário 1.1.14, temos que  $RG$  é  $RS$ -módulo livre, ou seja,  $RG \simeq \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} (RS)_{\lambda'}$ .

Logo

$$F_i \oplus Q_i \simeq \bigoplus_{\lambda, \lambda'} (RS)_{\lambda, \lambda'}$$

e, novamente por [6] (prop.I.8.2, p.27), temos que  $F_i$  é um  $RS$ -módulo projetivo.

Portanto,  $\varepsilon : F \rightarrow R$  é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RS$ . ■

**1.5.5 Proposição:** Se  $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$  é uma resolução livre (projetiva) de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$  então  $\varepsilon' : F' = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$  é uma resolução livre (projetiva) de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $\mathbb{Z}_2G$ .

**Demonstração:** Por hipótese  $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$  é uma resolução livre (projetiva) de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ , ou seja, a sequência

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

é exata com  $F_i$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre (projetivo).

Notemos que  $F'_i = F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  é gerado pelos elementos da forma  $x_i \otimes 1$  com  $x_i \in F_i$  e  $1 \in \mathbb{Z}_2$ . Como  $(x_i \otimes 1) + (x_i \otimes 1) = x_i \otimes (1 + 1) = x_i \otimes 0 = 0$  segue que  $x_i \otimes 1$  tem ordem 2 e daí todo elemento de  $F'_i$  tem ordem 2. Além disso,  $F'_i = F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  é um grupo abeliano (pela própria definição de produto tensorial).

A  $G$ -ação sobre  $F_i$  e a  $G$ -ação trivial sobre  $\mathbb{Z}_2$  induzem uma  $G$ -ação sobre  $F'_i$  dada por:

$$g \cdot (x_i \otimes 1) := g \cdot x_i \otimes 1.$$

Logo,  $F'_i$  é um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo.

Se  $F_i$  é  $\mathbb{Z}G$ -livre então  $F_i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{Z}G)_{\lambda}$ . Tomando  $S = \{1\}$ , em 1.1.14, temos que  $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in G} g\mathbb{Z}\{1\}$ . Assim,

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \left( \bigoplus_{g \in G} g\mathbb{Z}\{1\} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \left( \bigoplus_{g \in G} g\mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \bigoplus_{g \in G} g(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \simeq \bigoplus_{g \in G} g\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2G.$$

Logo,  $F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{Z}G)_{\lambda} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2)_{\lambda} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{Z}_2G)_{\lambda}$ , ou seja,  $F' = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  é um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo livre.

Agora, se  $F_i$  é  $\mathbb{Z}G$ -projetivo segue, por [6] (prop.I.8.2, p.27), que  $F_i$  é um somando direto de um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre  $L_i$ , isto é,  $L_i = F_i \oplus Q_i$ . Daí,  $L_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = (F_i \oplus Q_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq (F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \oplus (Q_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2)$ . Como  $L_i$   $\mathbb{Z}G$ -livre então, pelo que vimos acima,  $L_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  é um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo livre. Assim,  $F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  é um somando direto de um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo livre e portanto (por [6], prop.I.8.2, p.27)  $F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  é um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo projetivo.

Falta mostrar que a sequência

$$\cdots \longrightarrow F'_n \xrightarrow{\partial'_n} F'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F'_1 \xrightarrow{\partial'_1} F'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \quad (1.2)$$

tal que  $F'_i = F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ ,  $\partial'_i = \partial_i \otimes id_{\mathbb{Z}_2}$  e  $\varepsilon' = \varepsilon \otimes id_{\mathbb{Z}_2}$ , é exata.

Observemos que se  $F_i$  é  $\mathbb{Z}G$ -livre (projetivo) então  $F_i$  é  $\mathbb{Z}$ -livre (projetivo).

Sabemos que  $\mathbb{Z}$  é  $\mathbb{Z}$ -livre. Como todo módulo livre é projetivo segue que  $\mathbb{Z}$  é  $\mathbb{Z}$ -projetivo e se  $F_i$  for  $\mathbb{Z}$ -livre então  $F_i$  é  $\mathbb{Z}$ -projetivo.



Assim, por [8] (lema 1.5, p.6), temos que a seqüência (1.1) é  $\mathbb{Z}$ -cindida, isto é, existem homomorfismos  $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow F_0$  e  $s_i : F_i \rightarrow F_{i+1}$ ,  $\forall i \geq 1$  tal que

$$\varepsilon \circ \eta = id_{\mathbb{Z}}, \quad \eta \circ \varepsilon + \partial_1 \circ s_0 = id_{F_0} \quad e \quad s_{i-1} \circ \partial_i + \partial_{i+1} s_i = id_{F_i}, \quad i \geq 1.$$

Considerando os homomorfismos

$$\eta' := \eta \otimes id_{\mathbb{Z}_2} : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow F_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \quad e \quad s'_i := s_i \otimes id_{\mathbb{Z}_2} : F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow F_{i+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$$

e usando o fato que  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$  temos que a seqüência (1.2) é  $\mathbb{Z}_2$ -cindida. Logo, por [8] (lema 1.4, p.6), (1.2) é exata.

Portanto  $\varepsilon' : F' \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é uma resolução livre (projetiva) de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $\mathbb{Z}_2 G$ . ■

O  $RG$ -módulo  $R$  pode admitir várias resoluções projetivas. No entanto tais resoluções são “únicas a menos de uma equivalência de homotopia” como mostra o resultado seguinte.

**1.5.6 Proposição: (Unicidade de Resoluções)** *Se  $\varepsilon : F \rightarrow R$  e  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  são resoluções projetivas de  $R$  sobre  $RG$  então existe uma aplicação de cadeia  $\tau : F \rightarrow F'$  preservando aumentação (isto é,  $\varepsilon' \circ \tau = \varepsilon$ ), única a menos de homotopia e  $\tau$  é uma equivalência de homotopia.*

**Demonstração:** Dadas as resoluções projetivas de  $R$  sobre  $RG$ ,  $\varepsilon : F \rightarrow R$  e  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$ , consideremos os complexos de cadeia aumentados com  $R$  na dimensão -1 e 0 (módulo nulo) nas dimensões menores que -1, e a família  $(\tau_i : F_i \rightarrow F'_i)_{i \leq -1}$ , com  $\tau_{-1} = id : R \rightarrow R$  e  $\tau_i = 0 : 0 \rightarrow 0$  para  $i < -1$ , ou seja,

$$\begin{array}{ccccccccccc} C : & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & & \downarrow id_R & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \\ C' : & \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & F'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & R & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Claramente  $\partial'_i \tau_i = \tau_{i-1} \partial_i$  para  $i \leq -1$  (pois  $\partial'_i = \partial_i = 0$  para  $i \leq -1$ ).

Além disso,  $F_i$  é projetivo para  $i > -1$  e  $H_i(C') = 0$  para  $i \geq -1$  (pois  $F' \rightarrow R$  é exata).

Assim, por [6] (lema I.7.4, p.22) temos que a família de aplicações acima se estende a uma aplicação de cadeia  $\tau : F \rightarrow F'$  e  $\tau$  é única a menos de homotopia. A aplicação  $\tau$  preserva aumentação, pois  $\varepsilon' \circ \tau_0 = id_R \circ \varepsilon = \varepsilon$ .

Vamos mostrar, agora, que  $\tau$  é uma equivalência de homotopia.

Por raciocínio análogo ao anterior, existe uma aplicação de cadeia  $\tau' : F' \rightarrow F$  preservando aumentação (ou seja,  $\varepsilon \circ \tau' = \varepsilon'$ ).



Assim, considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_0 & & \downarrow id_R & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \\
 \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & F'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & R & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \tau'_1 & & \downarrow \tau'_0 & & \downarrow id_R & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \\
 \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

temos que  $\tau' \circ \tau : F \rightarrow F$  estende  $id_R$ .

Mas  $id_F : F \rightarrow F$  também estende  $id_R$ .

Portanto, pela unicidade em [6] (lema I.7.4, p.22), temos que existe uma homotopia de cadeia  $h$  entre  $\tau' \circ \tau$  e  $id_F$ , isto é,  $\tau' \circ \tau \stackrel{h}{\sim} id_F$ .

Analogamente,  $\tau \circ \tau' \stackrel{h'}{\sim} id_{F'}$  e assim  $\tau$  é uma equivalência de homotopia. ■

O próximo resultado será utilizado posteriormente para garantir que os grupos de (co)homologia estão bem definidos. Para isto necessitaremos de alguns conceitos, dentre eles, o de funtores covariantes e contravariantes que podem ser encontrados em [17] (I.8, p.28 e 29).

**1.5.7 Proposição:** Se  $\varepsilon : F \rightarrow R$  e  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  são resoluções projetivas de  $R$  sobre  $RG$  e  $T$  é um funtor covariante (ou contravariante) aditivo (ou seja, que satisfaz  $T(\beta + \beta') = T(\beta) + T(\beta')$  com  $\beta, \beta'$  homomorfismos) então os complexos  $T(F)$  e  $T(F')$  são homotópicos.

**Demonstração:** Vimos, na demonstração da proposição anterior, que existem (e são únicas) aplicações de cadeias  $\tau : F \rightarrow F'$  e  $\tau' : F' \rightarrow F$ , ambas preservando aumentação. Além disso, temos que existem homotopias de cadeia  $h$  e  $h'$  tais que  $\tau' \circ \tau \stackrel{h}{\sim} id_F$  e  $\tau \circ \tau' \stackrel{h'}{\sim} id_{F'}$ , ou seja,  $\tau$  é uma equivalência de homotopia.

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{\partial_2} & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow id_{F_2} & \swarrow \tau'_2 \circ \tau_2 & \downarrow id_{F_1} & \swarrow \tau'_1 \circ \tau_1 & \downarrow id_{F_0} & \swarrow \tau'_0 \circ \tau_0 & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{\partial_2} & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Como  $\tau' \circ \tau \stackrel{h}{\sim} id_F$  segue que  $h \circ \partial + \partial \circ h = (\tau' \circ \tau) - id_F$ . Por hipótese,  $T$  é um funtor aditivo e assim  $T(h \circ \partial) + T(\partial \circ h) = T(\tau' \circ \tau) - T(id_F)$ .

Se  $T$  é covariante, temos que:  $T(h) \circ T(\partial) + T(\partial) \circ T(h) = T(\tau') \circ T(\tau) - id_{T(F)}$ , ou seja,  $T(h)$  é uma homotopia de cadeia entre  $T(\tau') \circ T(\tau)$  e  $id_{T(F)}$ .

E também, considerando  $\tau \circ \tau' \stackrel{h'}{\sim} id_{F'}$  temos que  $T(h')$  é uma homotopia de cadeia entre  $T(\tau) \circ T(\tau')$  e  $id_{T(F')}$ .

Portanto  $T(\tau)$  é uma equivalência de homotopia entre os complexos  $T(F)$  e  $T(F')$ .

Agora, se  $T$  é contravariante também obtém-se, de modo análogo, que  $T(\tau)$  é uma equivalência de homotopia entre  $T(F)$  e  $T(F')$ . ■

# Capítulo 2

## (Co)homologia de Grupos

### 2.1 (Co)homologia Absoluta de Grupos

Nosso objetivo agora, é apresentar o conceito de (co)homologia (cohomologia e homologia) de um grupo  $G$  com coeficientes em um  $RG$ -módulo  $M$ . Consideraremos apenas  $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$  (como suposto desde o início). Mas é interessante observar que podemos definir, de forma análoga, (co)homologia de um grupo  $G$  considerando qualquer anel comutativo com unidade.

**2.1.1 Definição:** Sejam  $\varepsilon : F \rightarrow R$  uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$  e  $M$  um  $RG$ -módulo (à esquerda). Consideremos os complexos de cocadeia e cadeia, respectivamente,

$$\text{Hom}_{RG}(F, M) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{RG}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_{RG}(F_2, M) \longrightarrow \cdots,$$

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \longrightarrow F_2 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_2} F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \longrightarrow 0,$$

com o operador cobordo dado por  $\delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}$ , para todo  $f \in \text{Hom}_{RG}(F_n, M)$  e o operador bordo dado por  $\bar{\partial}_n := \partial_n \otimes \text{id}$ . Os  $n$ -ésimos grupos de cohomologia e homologia de  $G$  (sobre  $R$ ) com coeficientes em  $M$  são, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , definidos, respectivamente, por:

$$H^n(G, M) := H^n(\text{Hom}_{RG}(F, M)) = \frac{\text{Ker } \delta^n}{\text{Im } \delta^{n-1}}$$

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{RG} M) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_n}{\text{Im } \bar{\partial}_{n+1}}.$$

#### 2.1.2 Observações:

(1) Como  $\text{Hom}_{RG}(-, M)$  e  $- \otimes_{RG} M$  são funtores aditivos segue pela proposição 1.5.7 que os grupos de (co)homologia independem da resolução projetiva escolhida.

(2)  $H^n(G, M) = 0$  e  $H_n(G, M) = 0$ ,  $\forall n < 0$ .

**2.1.3 Proposição:** Se  $M$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo então os grupos de (co)homologia de  $G$  (sobre  $\mathbb{Z}_2$ ) com  $M$  visto como  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo e os grupos de (co)homologia de  $G$  (sobre  $\mathbb{Z}$ ) com  $M$  visto como  $\mathbb{Z} G$ -módulo são naturalmente isomorfos.

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$  uma resolução projetiva de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ . Então, por 1.5.5,  $\varepsilon' = \varepsilon \otimes id : F' = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$  é uma resolução projetiva de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $\mathbb{Z}_2 G$ .

As aplicações

$$\begin{aligned} \psi : Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M) &\rightarrow Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(F', M) \\ f &\mapsto \psi(f) ; \quad \psi(f)(x \otimes 1) := f(x), 1 \in \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi : F \otimes_{\mathbb{Z}G} M &\rightarrow F' \otimes_{\mathbb{Z}_2 G} M \\ x \otimes m &\mapsto (x \otimes 1) \otimes m ; 1 \in \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

estão bem definidas e são isomorfismos.

Logo, usando a definição de (co)homologia de grupos (sobre  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z}_2$ ) e o fato que tal definição não depende da resolução projetiva escolhida, obtemos o resultado. ■

**2.1.4 Proposição:** Se  $M$  é um  $RG$ -módulo então

- (i)  $H^0(G, M) \simeq M^G$ ;
- (ii)  $H_0(G, M) \simeq M_G$ .

**Demonstração:** Seja  $\cdots \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$  uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$ .

(i) Como, por [14] (teor.I.8.7, p.72), o funtor  $Hom_{RG}(-, M)$  é exato à esquerda segue que a sequência

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Hom_{RG}(R, M) & \xrightarrow{\varepsilon^\#} & Hom_{RG}(F_0, M) & \xrightarrow{\delta^0} & Hom_{RG}(F_1, M) \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow \delta^{-1} & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

é exata à esquerda e daí  $\varepsilon^\#$  é monomorfismo e  $Im \varepsilon^\# = Ker \delta^0$ .

Assim

$$\begin{aligned} H^0(G, M) &:= \frac{Ker \delta^0}{Im \delta^{-1}} \simeq Ker \delta^0 = Im \varepsilon^\# \stackrel{teor.hom.}{\simeq} \\ &\simeq \frac{Hom_{RG}(R, M)}{Ker \varepsilon^\#} \stackrel{\varepsilon^\#: mon.}{\simeq} Hom_{RG}(R, M) \stackrel{1.2.12}{\simeq} M^G. \end{aligned}$$

Portanto  $H^0(G, M) \simeq M^G$ .

(ii) Agora, como, por [14] (teor.I.7.9, p.66), o funtor  $- \otimes_{RG} M$  é exato à direita temos que a sequência

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & F_1 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & F_0 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & R \otimes_{RG} M \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

é exata à direita. Assim,  $\bar{\varepsilon}$  é epimorfismo e  $Ker \bar{\varepsilon} = Im \bar{\partial}_1$ .



Daí

$$\begin{aligned} H_0(G, M) &:= \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_0}{\text{Im } \bar{\partial}_1} \simeq \frac{F_0 \otimes_{RG} M}{\text{Im } \bar{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{RG} M}{\text{Ker } \bar{\varepsilon}} \stackrel{\text{teor. hom.}}{\simeq} \\ &\simeq \text{Im } \bar{\varepsilon} \stackrel{\bar{\varepsilon}: \text{epim.}}{=} R \otimes_{RG} M \stackrel{1.2.3}{\simeq} M_G. \end{aligned}$$

Logo  $H_0(G, M) \simeq M_G$ . ■

**2.1.5 Corolário:** Se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial então

$$H^0(G, M) \simeq M \simeq H_0(G, M).$$

**2.1.6 Exemplos:(Cohomologia de Grupos)**

(1) Sejam  $G = \{1\}$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Temos que  $RG \equiv R$ ,  $\varepsilon = id_R$  e  $0 \rightarrow R \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$  é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$ .

Aplicando o funtor  $\text{Hom}_R(-, M)$ , obtemos o complexo  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow 0$ . Mas,  $\text{Hom}_R(R, M) \simeq M$  (via o isomorfismo  $f \mapsto f(1_R)$ ) e daí este complexo se reduz  $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ .

Logo

$$H^i(\{1\}, M) \simeq \begin{cases} M^{\{1\}} \simeq M & \text{se } i = 0 \quad (\text{por 2.1.4(i)}) \\ 0 & \text{se } i \geq 1 \end{cases}$$

(2) Sejam  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Vimos, em 1.5.3(2), que a seqüência

$$0 \rightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

com  $\varepsilon$  a aplicação aumentação e  $\partial$  a multiplicação por  $t - 1$ , é uma resolução livre (portanto, projetiva) de  $R$  sobre  $RG$ .

Aplicando o funtor  $\text{Hom}_{RG}(-, M)$ , temos:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^1=0} 0,$$

com  $\delta^0$  a multiplicação por  $t - 1$ , pois  $\delta^0(f)(x) = (f \circ \partial)(x) = f((t - 1)x) = (t - 1)f(x)$   $\forall f \in \text{Hom}_{RG}(RG, M)$  e  $\forall x \in RG$ .

Como  $\text{Hom}_{RG}(RG, M) \simeq M$  a seqüência anterior é equivalente a:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} M \xrightarrow{\delta^0=t-1} M \xrightarrow{\delta^1=0} 0$$

$$\text{Assim, } H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^1}{\text{Im } \delta^0} = \frac{M}{(t-1)M} \simeq M_G \text{ e } H^i(G, M) = 0 \text{ para } i \geq 2.$$

Logo,

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \quad (\text{por 2.1.4(i)}) \\ M_G & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

Calculemos os grupos de cohomologia de  $G \simeq \mathbb{Z}$  para alguns módulos particulares.

(a) Se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial então

$$H^0(G, M) = M = H^1(G, M) \quad e \quad H^i(G, M) = 0, \forall i \geq 2.$$

(b) Seja  $M = \mathbb{Z}G$  visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo com a  $G$ -ação natural:  $t^k \cdot (rt^{k'}) := rt^{k+k'}, \forall t^k, t^{k'} \in G$  e  $r \in \mathbb{Z}$ .

Então  $H^0(G, \mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}G)^G \simeq 0$  (pois  $t^k \cdot t^{k'} \neq t^{k'}$  se  $t^k \neq 1$ ).

Determinemos  $H^1(G, \mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}G)_G$ . Denotemos por  $I = \langle t^k \cdot z - z \mid t^k \in G, z \in \mathbb{Z}G \rangle$  e  $\bar{x} = x + I \in \mathbb{Z}G/I = (\mathbb{Z}G)_G$ .

Consideremos  $y = t^k \in \mathbb{Z}G$  com  $k > 0$ . Como  $t^k - 1 = (t - 1)(t^{k-1} + \dots + 1) \in I$  segue que  $\overline{t^k - 1} = \bar{0}$  e assim  $\bar{y} = \bar{t^k} = \bar{1}$  em  $(\mathbb{Z}G)_G$ .

Agora, se  $y = t^{-k} \in \mathbb{Z}G$  com  $k > 0$ , também  $\overline{t^{-k}} = \bar{1}$  (pois  $t^{-k} = (1 - t^k)t^{-k} + 1$  e  $1 - t^{-k} = \bar{0}$ ).

Assim,  $\forall x \in \mathbb{Z}G, x = r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \dots + r_n t^{k+n}$ , com  $k \in \mathbb{Z}, n \geq 0$  e  $r_i \in \mathbb{Z}$ , temos  $\bar{x} = \overline{(r_0 + r_1 + \dots + r_n)} = r\bar{1}$  onde  $r = (r_0 + r_1 + \dots + r_n) \in \mathbb{Z}$ . Daí  $H^1(G, \mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}$ .

Logo

$$H^i(G, \mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \mathbb{Z} & i = 1 \\ 0 & i \geq 2 \end{cases}$$

(c) Se  $M = \mathbb{Z}_2 G$  é visto como  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação:  $t^k \cdot (1t^{k'}) := 1t^{k+k'}, 1 \in \mathbb{Z}_2$  e  $\forall t^k, t^{k'} \in G$  então, como no caso anterior,  $H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) \simeq \langle 1 + I \rangle$ . Mas, agora, temos que  $\langle 1 + I \rangle = \{0 + I, 1 + I\} \simeq \mathbb{Z}_2$ .

Assim,

$$H^i(G, \mathbb{Z}_2 G) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2 G)^G \simeq 0 & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & i = 1 \\ 0 & i \geq 2 \end{cases}$$

(3) Sejam  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Vimos em 1.5.3(3) que a sequência

$$\dots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

tal que  $\varepsilon$  é a aplicação aumentação, e  $t - 1$  e  $N$  denotam, respectivamente, a multiplicação por  $t - 1$  e  $1 + t + \dots + t^{n-1}$ , é uma resolução livre (portanto, projetiva) de  $R$  sobre  $RG$ .

Aplicando o funtor  $\text{Hom}_{RG}(-, M)$ , temos:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

sendo que  $\delta^n(f)(x) := (f \circ \partial_{n+1})(x)$  com  $\partial_{n+1} = t - 1$  se  $n$  é par e  $\partial_{n+1} = N$  se  $n$  é ímpar.

Como  $\text{Hom}_{RG}(RG, M) \simeq M$  segue que a sequência acima é equivalente a:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

onde  $\delta^{2k} = t - 1$  e  $\delta^{2k+1} = N$ ,  $k \geq 0$ .

Portanto

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \quad (\text{por 2.1.4(i)}) \\ \frac{\text{Ker} N}{\text{Im}(t-1)} = \frac{\text{Ker} N}{(t-1)M} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} = \frac{M^G}{N.M} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

Calculemos os grupos de cohomologia de  $G \simeq \mathbb{Z}_n$  para alguns casos particulares.

(a) Se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial então  $(t-1)m = tm - m = 0$  e  $(1+t+\dots+t^{n-1})m = m + tm + \dots + t^{n-1}m = n.m$ ,  $\forall m \in M$ , ou seja,  $t-1$  é o homomorfismo nulo e  $N$  é a multiplicação por  $n$ . Assim

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M & \text{se } i = 0 \\ \text{Ker } n & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{M}{n.M} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

Em particular, para  $M = \mathbb{Z}$  (visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial) obtemos

$$H^i(G, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

Agora, quando  $M = \mathbb{Z}_2$  (visto como  $RG$ -módulo trivial) temos dois casos:

- Se  $n = |G|$  é par então  $H^i(G, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$  para todo  $i$ ;
- Se  $n = |G|$  é ímpar segue que  $H^0(G, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $H^i(G, \mathbb{Z}_2) \simeq 0$  para  $i \geq 1$ .

(b) Se  $G = \{1, t\} \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $M = \mathbb{Z}$  é visto como  $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_2)$ -módulo com a  $G$ -ação:  $1 \cdot r := r$  e  $t \cdot r := -r$ ,  $\forall r \in \mathbb{Z}$ , temos que  $(t-1) \cdot r = t \cdot r - 1 \cdot r = -r - r = -2r$  e  $(1+t) \cdot r = r - r = 0$ , para todo  $r \in \mathbb{Z}$ . Daí  $\text{Ker} N = \text{Ker}(1+t) = \mathbb{Z}$ ,  $\text{Im}(t-1) = (t-1)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ ,  $\text{Ker}(t-1) = 0$  e  $\text{Im } N = \text{Im}(1+t) = (1+t)\mathbb{Z} = 0$ . Logo

$$H^i(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2} = \{0\} & \text{se } i = 0 \\ \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2 & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$



### 2.1.7 Exemplos:(Homologia de Grupos)

(1) Sejam  $G = \{1\}$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Temos que  $RG \equiv R$  e  $0 \rightarrow R \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow 0$  é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$ .

Aplicando o funtor  $- \otimes_R M$  obtemos  $0 \rightarrow R \otimes_R M \rightarrow 0$ . Mas,  $R \otimes_R M \simeq M$  e daí este complexo se reduz  $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ .

Logo

$$H_i(\{1\}, M) \simeq \begin{cases} M_{\{1\}} \simeq M & \text{se } i = 0 \quad (\text{por 2.1.4(ii)}) \\ 0 & \text{se } i \geq 1 \end{cases}$$

(2) Sejam  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Vimos, em 1.5.3(2), que a seqüência

$$0 \rightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow 0$$

com  $\epsilon$  a aplicação aumentação e  $\partial$  a multiplicação por  $t - 1$ , é uma resolução livre (portanto, projetiva) de  $R$  sobre  $RG$ .

Aplicando o funtor  $- \otimes_{RG} M$ , obtemos:

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}_2=0} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_0=0} 0,$$

Temos que

$$\begin{array}{ccccccc} M & \simeq & RG \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\bar{\partial}} & RG \otimes_{RG} M & \simeq & M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m & \mapsto & (t-1) \otimes m & \mapsto & (t-1)m \end{array}$$

Daí a seqüência anterior é equivalente a:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\partial} M \rightarrow 0$$

Assim,

$$H_1(G, M) = \frac{\text{Ker } \partial}{0} \simeq \text{Ker } \partial = \{m \in M \mid (t-1) \cdot m = 0\} = M^G.$$

Logo

$$H_i(G, M) \simeq \begin{cases} M_G & \text{se } i = 0 \quad (\text{por 2.1.4(ii)}) \\ M^G & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

(3) Sejam  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Vimos em 1.5.3(3) que a seqüência

$$\dots \rightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow 0$$

tal que  $\epsilon$  é a aplicação aumentação, e  $t-1$  e  $N$  denotam, respectivamente, a multiplicação por  $t-1$  e  $1+t+\dots+t^{n-1}$ , é uma resolução livre (portanto, projetiva) de  $R$  sobre  $RG$ .

Aplicando o funtor  $- \otimes_{RG} M$ , temos:

$$\cdots \longrightarrow RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{t-1}} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{N}} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{t-1}} RG \otimes_{RG} M \longrightarrow 0$$

Como  $RG \otimes_{RG} M \simeq M$  segue que a seqüência acima é equivalente a:

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \longrightarrow 0$$

Portanto

$$H_i(G, M) \simeq \begin{cases} M_G & \text{se } i = 0 \text{ (por 2.1.4(ii))} \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} = \frac{M^G}{N \cdot M} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im } (t-1)} = \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

Em particular, se  $M = \mathbb{Z}$  (visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial) temos que

$$H_i(G, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

O seguinte resultado será utilizado posteriormente.

**2.1.8 Proposição:** Se  $G$  é um grupo e  $(M_i)_{i \in I}$  uma família de  $RG$ -módulos então

$$(i) \ H^0(G, \bigoplus_{i \in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} H^0(G, M_i);$$

$$(ii) \text{ Se } G \text{ é finitamente gerado então } H^1(G, \bigoplus_{i \in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} H^1(G, M_i).$$

**Demonstração:** São casos particulares de um resultado bem mais geral apresentado em [3], prop.2.4 (obtidos considerando em [3]: exerc. da p.23, obs.(1) da p.19, prop.2.1, e o fato que a soma direta é um limite direto de somas diretas finitas). ■

## 2.2 Aplicações Induzidas em (Co)homologia

Vamos considerar pares  $(G', M')$  e  $(G'', M'')$  com  $G', G''$  grupos,  $M'$  um  $RG'$ -módulo e  $M''$  um  $RG''$ -módulo.

Uma aplicação de  $(G', M')$  em  $(G'', M'')$  é um par  $(\beta, \varphi)$  satisfazendo:

(i)  $\beta : G' \rightarrow G''$  um homomorfismo de grupos;

(ii)  $\varphi : M'' \rightarrow M'$  um homomorfismo de grupos abelianos tal que  $\varphi(\beta(g') \cdot m'') = g' \cdot \varphi(m'')$ ,  $\forall g' \in G'$  e  $\forall m'' \in M''$ , isto é,  $\varphi$  é uma aplicação de  $RG'$ -módulos considerando  $M''$  como  $RG'$ -módulo por restrição de escalares via  $\beta$ :  $g' * m'' = \beta(g') \cdot m''$ ,  $\forall m'' \in M''$ .

Se  $\beta$  e  $\varphi$  são isomorfismos dizemos que  $(G', M')$  e  $(G'', M'')$  são **isomorfos** e denotamos  $(G', M') \simeq (G'', M'')$ .

Dada uma aplicação  $(\beta, \varphi) : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$ , consideremos  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  uma resolução de  $R$  sobre  $RG'$  e  $\varepsilon'' : F'' \rightarrow R$  uma resolução de  $R$  sobre  $RG''$ .

Temos que  $\varepsilon'' : F'' \rightarrow R$  também é uma resolução de  $R$  sobre  $RG'$  (via  $\beta$ ), pois cada  $F''_n$  é um  $RG'$ -módulo com a  $G'$ -ação:

$$\begin{aligned} * : G' \times F''_n &\rightarrow F''_n \\ (g', y) &\mapsto g' * y := \beta(g') \cdot y \quad (\text{ação de } G'' \text{ em } F'') \end{aligned}$$

Daí, por 1.5.6, existe uma aplicação de cadeias  $\tau : F' \rightarrow F''$ , única a menos de homotopia. Temos que,  $\tau(g' \cdot x) = g' * \tau(x)$ ,  $\forall g' \in G'$  e  $\forall x \in F'$  (pois  $\tau$  é aplicação de  $RG'$ -módulos).

Assim, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\tau, \varphi) : \text{Hom}_{RG''}(F'', M'') &\rightarrow \text{Hom}_{RG'}(F', M') \\ f &\mapsto \varphi \circ f \circ \tau \end{aligned}$$

a qual é uma aplicação de cadeia e induz uma aplicação bem definida

$$\begin{aligned} (\beta, \varphi)^* : H^*(G'', M'') &\rightarrow H^*(G', M') \\ [f] &\mapsto [\varphi \circ f \circ \tau] \end{aligned}$$

Em particular, considerando  $G' = G'' = G$ ,  $\beta = id_G : G \rightarrow G$  e  $\varphi : M'' = N \rightarrow M' = M$  obtemos

$$\begin{aligned} (id_G, \varphi)^* : H^*(G, N) &\rightarrow H^*(G, M) \\ [f] &\mapsto [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

Por simplicidade de notação estamos usando o mesmo símbolo para representar classes diferentes.

A aplicação induzida em cohomologia  $(\beta, \varphi)^*$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se  $\beta = id_{G'} : G' \rightarrow G'$  e  $\varphi = id_{M'} : M' \rightarrow M'$  então  $(\beta, \varphi)^* = id_{H^*(G', M')}$ ;
- (ii) Dadas as aplicações  $(\beta, \varphi) : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$  e  $(\beta', \varphi') : (G'', M'') \rightarrow (G''', M''')$ ,  $(\beta, \varphi)^* \circ (\beta', \varphi')^* = (\beta' \circ \beta, \varphi \circ \varphi')^* \stackrel{\text{not}}{=} ((\beta', \varphi') \circ (\beta, \varphi))^*$ .

### Notações Especiais:

- (1)  $(\beta, id_{M'})^* = \beta^*$ , se  $\beta : G' \rightarrow G''$ ;
- (2)  $(id_G, \varphi)^* = H^*(G, \varphi)$  ou simplesmente por  $\varphi^*$  (quando não houver confusão), se  $\varphi : M'' \rightarrow M'$ .

**2.2.1 Proposição:** Se  $(G', M') \simeq (G'', M'')$  então  $H^*(G', M') \simeq H^*(G'', M'')$ .

**Demonstração:** Por hipótese,  $(G', M') \simeq (G'', M'')$ , ou seja, existem isomorfismos  $\beta : G' \rightarrow G''$  e  $\varphi : M'' \rightarrow M'$ . Daí, sejam  $\beta^{-1} : G'' \rightarrow G'$  e  $\varphi^{-1} : M' \rightarrow M''$  as inversas de  $\beta$  e  $\varphi$ , respectivamente. Consideremos  $(\beta, \varphi)^* : H^*(G'', M'') \rightarrow H^*(G', M')$ .





Como

$$(\beta, \varphi)^* \circ (\beta^{-1}, \varphi^{-1})^* = (\beta^{-1} \circ \beta, \varphi \circ \varphi^{-1})^* = (id_{G'}, id_{M'})^* = id_{H^*(G', M')}$$

e

$$(\beta^{-1}, \varphi^{-1})^* \circ (\beta, \varphi)^* = (\beta \circ \beta^{-1}, \varphi^{-1} \circ \varphi)^* = (id_{G''}, id_{M''})^* = id_{H^*(G'', M'')}.$$

segue que  $(\beta^{-1}, \varphi^{-1})^*$  é uma inversa de  $(\beta, \varphi)^*$ .

Logo,  $H^*(G', M') \simeq H^*(G'', M'')$ . ■

**2.2.2 Corolário:** Se  $M \simeq N$  como  $RG$ -módulos então  $H^*(G, M) \simeq H^*(G, N)$ .

**2.2.3 Proposição:** Seja  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\varphi'} M \xrightarrow{\varphi''} M'' \rightarrow 0$  uma seqüência exata de  $RG$ -módulos. Então,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  existe uma aplicação natural  $\delta^n : H^n(G, M'') \rightarrow H^{n+1}(G, M')$  tal que a seqüência

$$0 \longrightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{(\varphi')^0} H^0(G, M) \xrightarrow{(\varphi'')^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M') \xrightarrow{(\varphi')^1} H^1(G, M) \longrightarrow \dots$$

é exata com as aplicações  $(\varphi')^n$  e  $(\varphi'')^n$  as induzidas em cohomologia, ou seja,  $(\varphi')^n = H^n(G, \varphi')$  e  $(\varphi'')^n = H^n(G, \varphi'')$ .

**Demonstração:** [6] (prop.III.6.1, p.71). ■

Analogamente, consideremos  $(G', M)$  e  $(G'', M'')$  pares dados como anteriormente. Mas agora, uma aplicação  $(\beta, \varphi) : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$  é tal que:

(i)  $\beta : G' \rightarrow G''$  é um homomorfismo de grupos;

(ii)  $\varphi : M' \rightarrow M''$  é um homomorfismo de grupos abelianos com  $\varphi(g' \cdot m') = \beta(g') \cdot \varphi(m')$ ,  $\forall g' \in G'$  e  $\forall m' \in M'$ , ou seja,  $\varphi$  é uma aplicação de  $RG'$ -módulos considerando  $M''$  como  $RG'$ -módulo por restrição de escalares via  $\beta$ :  $g' * m'' = \beta(g') \cdot m''$ ,  $\forall m'' \in M''$ .

Se  $\beta$  e  $\varphi$  são isomorfismos dizemos que  $(G', M')$  e  $(G'', M'')$  são **isomorfos** e denotamos por  $(G', M') \simeq (G'', M'')$ .

Dada a uma aplicação  $(\beta, \varphi) : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$ , sejam  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  e  $\varepsilon'' : F'' \rightarrow R$  resoluções projetivas de  $R$  sobre  $RG'$  e  $RG''$ , respectivamente. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, existe uma aplicação de cadeia  $\tau : F' \rightarrow F''$ , única a menos de homotopia. Temos que,  $\tau(g' \cdot x) = g' * \tau(x)$ ,  $\forall g' \in G'$  e  $\forall x \in F'$  (pois  $\tau$  é aplicação de  $RG'$ -módulos).

A aplicação

$$\begin{aligned} \tau \otimes \varphi : F' \otimes_{RG'} M' &\rightarrow F'' \otimes_{RG''} M'' \\ x \otimes m' &\mapsto \tau(x) \otimes \varphi(m') \end{aligned}$$

é uma aplicação de cadeia e induz uma aplicação bem definida

$$\begin{aligned} (\beta, \varphi)_* : H_*(G', M') &\rightarrow H_*(G'', M'') \\ [x \otimes m'] &\mapsto [(\tau \otimes \varphi)(x \otimes m')] = [\tau(x) \otimes \varphi(m')] \end{aligned}$$

Em particular, considerando  $G' = G'' = G$ ,  $\beta = id_G : G \rightarrow G$  e  $\varphi : M' = M \rightarrow M'' = N$  obtemos

$$\begin{aligned} (id_G, \varphi)_* : H_*(G, M) &\rightarrow H_*(G, N) \\ [x \otimes m] &\mapsto [x \otimes \varphi(m)] \end{aligned}$$

A aplicação induzida em homologia  $(\beta, \varphi)_*$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se  $\beta = id_{G'}$  e  $\varphi = id_{M'}$  então  $(\beta, \varphi)_* = id_{H_*(G', M')}$ ;
- (ii) Dadas as aplicações  $(\beta, \varphi) : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$  e  $(\beta', \varphi') : (G'', M'') \rightarrow (G''', M''')$ ,  $(\beta', \varphi')_* \circ (\beta, \varphi)_* = (\beta' \circ \beta, \varphi' \circ \varphi)_* \stackrel{not}{=} ((\beta', \varphi') \circ (\beta, \varphi))_*$ .

### Notações Especiais:

- (1)  $(\beta, id_{M'})_* = \beta_*$  se  $\beta : G' \rightarrow G''$ ;
- (2)  $(id_G, \varphi)_* = H_*(G, \varphi)$  ou simplesmente por  $\varphi_*$  (quando não houver confusão), se  $\varphi : M' \rightarrow M''$ .

**2.2.4 Proposição:** Se  $(G', M') \simeq (G'', M'')$  então  $H_*(G', M') \simeq H_*(G'', M'')$ .

**Demonstração:** Por hipótese,  $(G', M') \simeq (G'', M'')$ , ou seja, existem isomorfismos  $\beta : G' \rightarrow G''$  e  $\varphi : M' \rightarrow M''$ . Assim, sejam  $\beta^{-1} : G'' \rightarrow G'$  e  $\varphi^{-1} : M'' \rightarrow M'$  as inversas de  $\beta$  e  $\varphi$ , respectivamente. Consideremos  $(\beta, \varphi)_* : H_*(G', M') \rightarrow H_*(G'', M'')$ .

Como

$$(\beta^{-1}, \varphi^{-1})_* \circ (\beta, \varphi)_* = (\beta^{-1} \circ \beta, \varphi^{-1} \circ \varphi)_* = (id_{G'}, id_{M'})_* = id_{H_*(G', M')}$$

e

$$(\beta, \varphi)_* \circ (\beta^{-1}, \varphi^{-1})_* = (\beta \circ \beta^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1})_* = (id_{G''}, id_{M''})_* = id_{H_*(G'', M'')}.$$

segue que  $(\beta^{-1}, \varphi^{-1})_*$  é uma inversa de  $(\beta, \varphi)_*$ .

Portanto,  $H_*(G', M') \simeq H_*(G'', M'')$ . ■

**2.2.5 Corolário:** Se  $M \simeq N$  como  $RG$ -módulos então  $H_*(G, M) \simeq H_*(G, N)$ .

**2.2.6 Observação:** É válido um resultado análogo ao 2.2.3 para grupos de homologia ([6], prop.III.6.1, p.71).

## 2.3 Lema de Shapiro

Na seção 1.4, vimos que se  $S$  é um subgrupo de um grupo  $G$  e  $M$  é um  $RS$ -módulo,  $Ind_S^G M$  e  $Coind_S^G M$  são  $RG$ -módulos. Considerando tais  $RG$ -módulos, temos o seguinte resultado que relaciona a (co)homologia de um grupo e de seu subgrupo.



**2.3.1 Proposição: (Lema de Shapiro)** *Sejam  $G$  um grupo,  $S$  um subgrupo de  $G$  e  $M$  um  $RS$ -módulo. Consideremos a inclusão  $\alpha : S \rightarrow G$ ,  $\pi : \text{Coind}_S^G M \rightarrow M$  dada por  $\pi(f) = f(1)$ ,  $\forall f \in \text{Coind}_S^G M$ , e  $i : M \rightarrow \text{Ind}_S^G M$  definida por  $i(m) = 1 \otimes m$ ,  $\forall m \in M$ . Então as aplicações induzidas*

$$(\alpha, \pi)^* : H^*(G, \text{Coind}_S^G M) \rightarrow H^*(S, M) \quad e \quad (\alpha, i)_* : H_*(S, M) \rightarrow H_*(G, \text{Ind}_S^G M)$$

*são isomorfismos.*

**Demonstração:** Provaremos aqui que  $(\alpha, \pi)^*$  é um isomorfismo. Por um raciocínio similar prova-se que  $(\alpha, i)_*$  é também um isomorfismo.

Sejam  $\varepsilon : F \rightarrow R$  e  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  resoluções projetivas de  $R$  sobre  $RS$  e  $RG$ , respectivamente. Por 1.5.4,  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  também é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RS$  e como os grupos de cohomologia independem da resolução, podemos tomar  $F = F'$  e, conseqüentemente, a aplicação de cadeia  $\tau : F \rightarrow F'$  como sendo a identidade (isto é,  $\tau = id_F$ ).

Temos, por definição, que

$$\begin{aligned} (\alpha, \pi)^* : H^*(G, \text{Coind}_S^G M) &\rightarrow H^*(S, M) \\ [f] &\mapsto [\pi \circ f \circ id_F] = [\pi \circ f] \end{aligned}$$

onde  $f \in \text{Hom}_{RG}(F, \text{Coind}_S^G M)$  e  $(\pi \circ f) \in \text{Hom}_{RS}(F, M)$ .

Agora,

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}_{RG}(F, \text{Coind}_S^G M) &\rightarrow \text{Hom}_{RS}(F, M) \\ f &\mapsto \phi(f) = \pi \circ f \end{aligned}$$

está bem definida e é um isomorfismo, pois

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{RS}(F, M) &\rightarrow \text{Hom}_{RG}(F, \text{Coind}_S^G M) \\ h &\mapsto \psi(h); \quad \psi(h)(x)(g) := h(g \cdot x), \quad \forall x \in F \text{ e } \forall g \in G \end{aligned}$$

está bem definida e é inversa de  $\phi$ .

Assim, também  $(\alpha, \pi)^*$  é um isomorfismo, visto que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : H^*(S, M) &\rightarrow H^*(G, \text{Coind}_S^G M) \\ [h] &\mapsto [\psi(h)] \end{aligned}$$

é inversa para  $(\alpha, \pi)^*$ . ■

### 2.3.2 Exemplos:

(1) Consideremos  $G$  um grupo e  $\mathcal{P}G$  o conjunto das partes de  $G$ . Vimos, em 1.4.12, que  $\mathcal{P}G \simeq \text{Coind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ . Logo,

$$H^i(G, \mathcal{P}G) \stackrel{2.2.2}{\simeq} H^i(G, \text{Coind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^i(\{1\}, \mathbb{Z}_2) \stackrel{2.1.6(1)}{\simeq} \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \geq 1 \end{cases}$$

(2) Sejam  $G$  um grupo e  $S$  um subgrupo de  $G$  com  $[G : S] < \infty$ . Do fato que  $[G : S] < \infty$  segue que  $R(G/S) \simeq \text{Ind}_S^G R \simeq \text{Coind}_S^G R$  e  $RG \simeq \text{Ind}_S^G RS \simeq \text{Coind}_S^G RS$ . Assim, usando o Lema de Shapiro, temos que  $H^*(S, R) \simeq H^*(G, R(G/S))$  e  $H^*(S, RS) \simeq H^*(G, RG)$ .



**2.3.3 Proposição: (Lema de Shapiro - outra versão)** *Sejam  $G$  um grupo,  $S$  um subgrupo de  $G$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Então:*

- (i)  $H^*(S, \text{Res}_S^G M) \simeq H^*(G, \text{Hom}_R(R(G/S), M));$
- (ii)  $H_*(S, \text{Res}_S^G M) \simeq H_*(G, R(G/S) \otimes_R M).$

**Demonstração:** É consequência do resultado anterior e da proposição 1.4.10. ■

## 2.4 Aplicação Restrição

Sejam  $G$  um grupo,  $S$  um subgrupo de  $G$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Vimos na seção 1.4, que  $M$  pode ser visto como um  $RS$ -módulo por restrição de escalares o qual denotamos por  $\text{Res}_S^G M$  (ou simplesmente por  $M$  quando não houver confusão).

Consideremos  $\varepsilon : F \rightarrow R$  e  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  resoluções projetivas de  $R$  sobre  $RS$  e  $RG$ , respectivamente.

Neste caso, se na seção 2.2 tomarmos  $G' = S$ ,  $G'' = G$ ,  $M' = \text{Res}_S^G M$  e  $M'' = M$ , e considerarmos a inclusão  $\alpha : S \rightarrow G$  obtemos a seguinte aplicação induzida:

$$\begin{aligned} \text{res}_{S,M}^G \stackrel{\text{not}}{=} (\alpha, id_M)^* : H^*(G, M) &\rightarrow H^*(S, M) = H^*(S, \text{Res}_S^G M) \\ [f] &\mapsto [id \circ f \circ \tau] \end{aligned}$$

Por 1.5.4,  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  também é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RS$  e como os grupos de cohomologia independem da resolução, podemos tomar  $F = F'$  e conseqüentemente  $\tau : F \rightarrow F'$  como sendo a identidade. Assim

$$\text{res}_{S,M}^G([f]) = [id \circ f \circ \tau] = [f]$$

com  $f$  vista no primeiro membro como aplicação de  $RG$ -módulos e no segundo como aplicação de  $RS$ -módulos.

A aplicação  $\text{res}_{S,M}^G$  definida acima é denominada **aplicação restrição**. Esta aplicação será denotada em algumas situações por  $\text{res}_S^G$ .

Agora, vamos apresentar algumas propriedades do núcleo da aplicação restrição. Mas, antes façamos algumas considerações.

Um **par de grupos**  $(G, S)$  significará, sempre, um par onde  $G$  é um grupo e  $S$  é um subgrupo de  $G$ .

Consideremos pares  $((G, S), M)$  onde  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo, e aplicações de pares  $(\beta, \varphi) : ((G, S), M) \rightarrow ((L, H), N)$  satisfazendo:

- (i)  $\beta : G \rightarrow L$  um homomorfismo de grupos tal que  $\beta(S) \subset H$ ;
- (ii)  $\varphi : N \rightarrow M$  um homomorfismo de grupos abelianos tal que  $\varphi(\beta(g) \cdot n) = g \cdot \varphi(n)$ , ou seja,  $\varphi$  é um homomorfismo de  $RG$ -módulos com  $N$  visto como  $RG$ -módulo via  $\beta$ .

Se  $\beta, \varphi$  são isomorfismos e  $\beta(S) = H$  então os pares  $((G, S), M)$  e  $((L, H), N)$  são ditos **isomorfos**.



**2.4.1 Observação:** Se considerarmos pares  $((G, S), M)$ , onde  $S$  é o subgrupo trivial, podemos ver o conceito anterior como uma extensão do apresentado para pares  $(G', M')$  (ver página 29).

O resultado seguinte nos diz que  $\text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$  é um invariante para os pares  $((G, S), M)$ .

**2.4.2 Proposição:** Se  $((G, S), M)$  e  $((L, H), N)$  são isomorfos então

$$\text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) \simeq \text{Ker}(\text{res}_{H,N}^L).$$

**Demonstração:** Por hipótese,  $((G, S), M)$  e  $((L, H), N)$  são isomorfos. Daí, existe um isomorfismo de grupos  $\beta : G \rightarrow L$  tal que  $\beta(S) = H$  e um isomorfismo de grupos abelianos  $\varphi : N \rightarrow M$  com  $\varphi(\beta(g) \cdot n) = g \cdot \varphi(n)$ ,  $\forall g \in G$  e  $\forall n \in N$ . Consideremos  $\varepsilon' : F' \rightarrow R$  uma resolução de  $R$  sobre  $RG$  (que também é uma resolução de  $R$  sobre  $RS$ ) e  $\varepsilon'' : F'' \rightarrow R$  uma resolução de  $R$  sobre  $RL$  (que também é uma resolução de  $R$  sobre  $RH$ ). Temos que existe uma aplicação de cadeia  $\tau : F' \rightarrow F''$ , única a menos de homotopia. Vamos denotar por  $\beta'$  o isomorfismo restrição  $\beta|_S : S \rightarrow H$ . Assim,  $\forall [f] \in H^*(L, N)$ ,

$$\begin{aligned} (\text{res}_{S,M}^G \circ (\beta, \varphi)^*)([f]) &= \text{res}_{S,M}^G([\varphi \circ f \circ \tau]) = [\varphi \circ f \circ \tau] \quad \text{e} \\ ((\beta', \varphi)^* \circ \text{res}_{H,N}^L)([f]) &= (\beta', \varphi)^*([f]) = [\varphi \circ f \circ \tau] \end{aligned}$$

Daí, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, M) & \xrightarrow{\text{res}_{S,M}^G} & H^*(S, M) \\ (\beta, \varphi)^* \uparrow & & \uparrow (\beta', \varphi)^* \\ H^*(L, N) & \xrightarrow{\text{res}_{H,N}^L} & H^*(H, N) \end{array}$$

é comutativo.

Como

$$\begin{aligned} [f] \in \text{Ker}(\text{res}_{H,N}^L) &\implies \text{res}_{H,N}^L([f]) = 0 \implies (\beta', \varphi)^*(\text{res}_{H,N}^L([f])) = 0 \implies \\ &\implies \text{res}_{S,M}^G((\beta, \varphi)^*([f])) = 0 \implies (\beta, \varphi)^*([f]) \in \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) \end{aligned}$$

segue que  $(\beta, \varphi)^*(\text{Ker}(\text{res}_{H,N}^L)) \subset \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$  e daí temos bem definido o seguinte homomorfismo:

$$(\beta, \varphi)_*^* : \text{Ker}(\text{res}_{H,N}^L) \rightarrow \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$$

Verifiquemos que  $(\beta, \varphi)_*^*$  é isomorfismo. As aplicações  $(\beta, \varphi)^*$  e  $(\beta', \varphi)^*$  são isomorfismos, pois são induzidas de isomorfismos. Assim,  $(\beta, \varphi)_*^*$  é monomorfismo. E ainda, dado  $[\tilde{f}] \in \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) \subset H^*(G, M)$  existe (do fato que  $(\beta, \varphi)^*$  é epimorfismo)  $[f] \in H^*(L, N)$  tal que  $(\beta, \varphi)^*([f]) = [\tilde{f}]$ . Como  $(\beta', \varphi)^*(\text{res}_{H,N}^L([f])) = \text{res}_{S,M}^G((\beta, \varphi)^*([f])) = \text{res}_{S,M}^G([\tilde{f}]) = 0$  e  $(\beta', \varphi)^*$  é monomorfismo temos que  $[f] \in \text{Ker}(\text{res}_{H,N}^L)$  e portanto  $(\beta, \varphi)_*^*$  é epimorfismo.

Logo  $\text{Ker}(\text{res}_{H,N}^L) \simeq \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$ . ■



**2.4.3 Proposição:** Se  $G$  é um grupo,  $S$  e  $T$  subgrupos de  $G$  com  $S \leq T \leq G$  e  $M$  um  $RG$ -módulo então

$$\text{Ker}(\text{res}_T^G) \subset \text{Ker}(\text{res}_S^G).$$

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{array}{ccccc} H^*(G, M) & \xrightarrow{\text{res}_T^G} & H^*(T, M) & \xrightarrow{\text{res}_S^T} & H^*(S, M) \\ & \searrow \text{res}_S^G & & & \end{array}$$

e  $\text{res}_S^G = \text{res}_S^T \circ \text{res}_T^G$ . Daí, o resultado segue. ■

**2.4.4 Proposição:** Sejam  $M, N$   $RG$ -módulos e  $\varphi : N \rightarrow M$  um  $RG$ -homomorfismo. Consideremos o homomorfismo induzido  $(\text{id}_G, \varphi)^* : H^*(G, N) \rightarrow H^*(G, M)$ . Então

$$(\text{id}_G, \varphi)^*(\text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G)) \subset \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G).$$

Em particular, se  $(\text{id}_G, \varphi)^*$  é monomorfismo então

$$(\text{id}_G, \varphi)_!^* : \text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G) \rightarrow \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$$

é monomorfismo.

**Demonstração:** Consideremos o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, M) & \xrightarrow{\text{res}_{S,M}^G} & H^*(S, M) \\ (\text{id}_G, \varphi)^* \uparrow & & \uparrow (\text{id}_S, \varphi)^* \\ H^*(G, N) & \xrightarrow{\text{res}_{S,N}^G} & H^*(S, N) \end{array}$$

Como tal diagrama é comutativo segue que  $(\text{id}_G, \varphi)^*(\text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G)) \subset \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$  e conseqüentemente o homomorfismo

$$(\text{id}_G, \varphi)_!^* : \text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G) \rightarrow \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G)$$

está bem definido.

Agora, se  $(\text{id}_G, \varphi)^*$  é monomorfismo segue, claramente, que  $(\text{id}_G, \varphi)_!^*$  também é monomorfismo. ■

Considerando  $G$  um grupo,  $S$  e  $T$  subgrupos de  $G$  com  $S \leq T \leq G$  e  $M$  um  $RG$ -módulo podemos definir uma aplicação  $\chi : \text{Ind}_S^G M \rightarrow \text{Ind}_T^G(\text{Ind}_S^T M)$  dada nos geradores por  $\chi(g \otimes m) = g \otimes 1 \otimes m$  e estendida por linearidade. É fácil, verificar que, de fato,  $\chi$  é um  $RG$ -isomorfismo.

Sejam  $\vartheta : \text{Ind}_T^G(\text{Ind}_S^T M) \rightarrow \text{Coind}_T^G(\text{Ind}_S^T M)$  o  $RG$ -monomorfismo dado em 1.4.4(i) e  $\pi : \text{Coind}_S^G N \rightarrow N$  o  $RS$ -epimorfismo dado em 1.4.2 para  $N = \text{Ind}_S^T M$ . Podemos então considerar o  $RT$ -homomorfismo composto

$$\psi = \pi \circ \vartheta \circ \chi : \text{Ind}_S^G M \rightarrow \text{Ind}_S^T M.$$



**2.4.5 Proposição:** Nas condições anteriores, se  $\alpha : T \rightarrow G$  é a inclusão e a aplicação  $(id_G, \vartheta)^* : H^*(G, Ind_T^G(Ind_S^T M)) \rightarrow H^*(G, Coind_T^G(Ind_S^T M))$  é monomorfismo então

$$(\alpha, \psi)^* : H^*(G, Ind_S^G M) \rightarrow H^*(T, Ind_S^T M)$$

é também um monomorfismo e induz uma aplicação bem definida

$$(\alpha, \psi)_!^* : Ker(res_{S, Ind_S^G M}^G) \rightarrow Ker(res_{S, Ind_S^T M}^T)$$

que também é um monomorfismo.

**Demonstração:** Temos as seguintes aplicações

$$Ind_S^G M \xrightarrow{\chi} Ind_T^G Ind_S^T M \xrightarrow{\vartheta} Coind_T^G Ind_S^T M \xrightarrow{\pi} Ind_S^T M$$

Consideremos os homomorfismos induzidos

$$H^*(G, Ind_S^G M) \xrightarrow{(id_G, \chi)^*} H^*(G, Ind_T^G Ind_S^T M) \xrightarrow{(id_G, \vartheta)^*} H^*(G, Coind_T^G Ind_S^T M) \xrightarrow{(\alpha, \pi)^*} H^*(T, Ind_S^T M)$$

Assim, o homomorfismo  $(\alpha, \psi)^* : H^*(G, Ind_S^G M) \rightarrow H^*(T, Ind_S^T M)$  é a composição dos homomorfismos acima, ou seja,  $(\alpha, \psi)^* = (\alpha, \pi)^* \circ (id_G, \vartheta)^* \circ (id_G, \chi)^*$ .

Como  $(\alpha, \pi)^*$  é isomorfismo (pois é o isomorfismo de Shapiro),  $(id_G, \vartheta)^*$  é monomorfismo (por hipótese) e  $(id_G, \chi)^*$  é isomorfismo (pois  $\chi$  é isomorfismo) segue que  $(\alpha, \psi)^*$  é um monomorfismo.

Da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, Ind_S^G M) & \xrightarrow{res_S^G} & H^*(S, Ind_S^G M) \\ (\alpha, \psi)^* \downarrow & & \downarrow (id_S, \psi)^* \\ H^*(T, Ind_S^T M) & \xrightarrow{res_S^T} & H^*(S, Ind_S^T M) \end{array}$$

temos que  $(\alpha, \psi)^*(Ker(res_{S, Ind_S^G M}^G)) \subset Ker(res_{S, Ind_S^T M}^T)$  e daí a aplicação

$$(\alpha, \psi)_!^* : Ker(res_{S, Ind_S^G M}^G) \rightarrow Ker(res_{S, Ind_S^T M}^T)$$

está bem definida.

Logo, como  $(\alpha, \psi)^*$  é monomorfismo,  $(\alpha, \psi)_!^*$  também é monomorfismo. ■

## 2.5 (Co)homologia Relativa de Grupos

Consideremos  $(G, S)$  um par de grupos e  $R(G/S)$  o  $R$ -módulo livre gerado pelas classes  $gS$ , no qual  $G$  atua por multiplicação à esquerda.

Seja  $\varepsilon : R(G/S) \rightarrow R$  a aplicação aumentação, que aplica todo gerador  $gS$  em 1 e denotemos seu núcleo por  $\Delta$ .

**2.5.1 Definição:** Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo. Os  $n$ -ésimos grupos de (co)homologia relativa para  $(G, S)$  com coeficientes em  $M$  são, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , definidos por:

$$H^n(G, S, M) := H^{n-1}(G, \text{Hom}_R(\Delta, M))$$

$$H_n(G, S, M) := H_{n-1}(G, \Delta \otimes_R M)$$

com  $\text{Hom}_R(\Delta, M)$  e  $\Delta \otimes_R M$  vistos como  $RG$ -módulos com a  $G$ -ação diagonal.

### 2.5.2 Observações:

(1) Embora estejamos considerando apenas  $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ , pode-se definir (co)homologia relativa tomando qualquer anel comutativo com unidade.

(2) Segue da definição, que para  $n \leq 0$ :  $H^n(G, S, M) = 0$  e  $H_n(G, S, M) = 0$ .

(3) Pode-se definir, mais geralmente, (co)homologia relativa para um par de grupos  $(G, S)$  com  $G$  um grupo e  $S = \{S_i \mid i \in I\}$  uma família não vazia de subgrupos (não necessariamente distintos) de  $G$  ([5], p.279). Neste caso, considera-se  $R(G/S) = \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} \text{Ind}_{S_i}^G R$  e  $\Delta = \text{Ker } \varepsilon$  sendo que  $\varepsilon : R(G/S) \rightarrow R$  é a aplicação aumentação que aplica todo gerador  $gS_i$  em 1. ??

(4) Se os pares  $((G, S), M)$  e  $((L, H), N)$  são isomorfos (conforme p.34) pode-se mostrar que  $H^*(G, S, M) \simeq H^*(L, H, N)$  e  $H_*(G, S, M) \simeq H_*(L, H, N)$  (para maiores detalhes ver [2], p.279).

**2.5.3 Proposição:** Seja  $(G, S)$  um par de grupos. Se  $M$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo (e portanto também um  $\mathbb{Z}G$ -módulo) então os grupos de (co)homologia relativa definidos considerando-se  $R = \mathbb{Z}_2$  (isto é,  $M$  como um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo) são isomorfos aos grupos de (co)homologia relativa quando considera-se  $R = \mathbb{Z}$  (ou seja,  $M$  como um  $\mathbb{Z}G$ -módulo).

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e  $\varepsilon' : \mathbb{Z}(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}$  as aplicações aumentação e denotemos seus núcleos, respectivamente, por  $\Delta$  e  $\Delta'$ .

Usando a ação diagonal temos que  $M_1 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo e  $M_2 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta', M)$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Além disso, como  $M$  é  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo,  $M_2 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta', M)$  é também um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo.

Mostremos que  $M_1$  e  $M_2$  são  $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfos. Primeiramente, notemos que  $\text{Hom}_R(R, M)$  e  $\text{Hom}_R(R(G/S), M)$  são  $RG$ -módulos com a ação diagonal. E ainda, como  $M$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo segue que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M)$  e  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/S), M)$  são  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulos.

Consideremos a sequência exata de  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulos

$$0 \longrightarrow \Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \quad (*)$$

com  $i$  a inclusão.

Aplicando o funtor  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(-, M)$  na sequência acima obtemos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) \xrightarrow{\varepsilon^\#} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S), M) \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$



Como  $\mathbb{Z}_2$  é  $\mathbb{Z}_2$ -projetivo (pois  $\mathbb{Z}_2$  é  $\mathbb{Z}_2$ -livre) segue, por [6] (prop.I.8.2, p.27), que a sequência (\*) cinde. Daí, por [14] (teor. I.8.8, p.74), a sequência (2.1) também é exata.

$$0 \longrightarrow \Delta' \xrightarrow{i'} \mathbb{Z}(G/S) \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{(\epsilon')^\#} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/S), M) \xrightarrow{(i')^\#} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta', M) \longrightarrow 0 \quad (2.2)$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) \xrightarrow{\varepsilon^\#} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S), M) \xrightarrow{i^\#} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \downarrow \chi & & \\
0 \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) & \xrightarrow[(\varepsilon')^\#]{} & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/S), M) & \xrightarrow[(i')^\#]{} & Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta, M) & \longrightarrow 0
\end{array} \quad (2.2)$$

Temos que o quadrado (I) é comutativo,  $\psi$  e  $\phi$  são isomorfismos (pois as aplicações dadas nos geradores por:  $\psi' : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)$  tal que  $\psi'(f')(\bar{1}) := f'(1)$  e  $\phi' : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/S), M) \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S), M)$  com  $\phi'(h')(\bar{1}gS) := h'(gS)$  e estendidas por linearidade são inversas de  $\psi$  e  $\phi$ , respectivamente ).

Mas,  $H^n(G, M_2) \simeq H^n(G, M_2)$  com  $M_2$  também visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo (por 2.1.3).

Usando um raciocínio análogo, prova-se que  $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M \simeq \Delta' \otimes_{\mathbb{Z}} M$  e daí tem-se o isomorfismo para os grupos de homologia relativa. ■

**2.5.4 Proposição:** *Se  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo então temos a seguinte seqüência exata longa:*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(G, M) &\xrightarrow{\text{res}_{S, M}^G} H^0(S, M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, S, M) \xrightarrow{J} H^1(G, M) \xrightarrow{\text{res}_{S, M}^G} H^1(S, M) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow H^n(G, M) &\xrightarrow{\text{res}_{S, M}^G} H^n(S, M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G, S, M) \xrightarrow{J} H^{n+1}(G, M) \xrightarrow{\text{res}_{S, M}^G} \dots \end{aligned}$$

39



**Demonstração:** Seja  $\varepsilon : F \rightarrow R$  uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$  então, por 1.5.4,  $\varepsilon : F \rightarrow R$  também é uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RS$ .

Consideremos a seqüência exata de  $RG$ -módulos

$$0 \longrightarrow \Delta \xrightarrow{i} R(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

com  $i$  e  $\varepsilon$ , respectivamente, as aplicações inclusão e aumentação, e  $\Delta = \text{Ker } \varepsilon$ . Como  $R$  é  $R$ -projetivo segue, por [6] (prop.I.8.2, p.27), que a seqüência acima cinde. Daí, por [14] (teor. I.8.8, p.74), a seqüência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\varepsilon^\#} \text{Hom}_R(R(G/S), M) \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(\Delta, M) \longrightarrow 0$$

tal que  $\varepsilon^\#(f) = f \circ \varepsilon$ ,  $\forall f \in \text{Hom}_R(R, M)$  e  $i^\#(h) = h \circ i$ ,  $\forall h \in \text{Hom}_R(R(G/S), M)$ , também é uma seqüência exata de  $RG$ -módulos (com a ação diagonal).

Assim, por 2.2.3, temos a seguinte seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^n(G, \text{Hom}_R(R, M)) &\xrightarrow{\varepsilon^*} H^n(G, \text{Hom}_R(R(G/S), M)) \xrightarrow{i^*} H^n(G, \text{Hom}_R(\Delta, M)) \xrightarrow{\chi} \\ &\xrightarrow{\chi} H^{n+1}(G, \text{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^{n+1}(G, \text{Hom}_R(R(G/S), M)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

tal que  $\varepsilon^* = H^*(G, \varepsilon^\#)$  e  $i^* = H^*(G, i^\#)$ , ou seja,  $\varepsilon^*([\bar{f}]) = [\varepsilon^\# \circ \bar{f}]$  e  $i^*([\bar{h}]) = [i^\# \circ \bar{h}]$ .

Como  $\psi : M \rightarrow \text{Hom}_R(R, M)$  dado por  $\psi(m)(1) = m$  e estendido por linearidade é um isomorfismo segue que  $H^*(G, M) \xrightarrow{\psi^*} H^*(G, \text{Hom}_R(R, M))$  com  $\psi^* = H^*(G, \psi)$ , isto é,  $\psi^*([f]) = [\psi \circ f]$ ,  $\forall [f] \in H^*(G, M)$ .

Vamos mostrar que  $H^*(G, \text{Hom}_R(R(G/S), M)) \simeq H^*(S, M)$  através de um isomorfismo que denotaremos por  $\phi^*$  e daí lembrando que,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $H^n(G, S, M) := H^{n+1}(G, \text{Hom}_R(\Delta, M))$  obtemos a seguinte seqüência exata

$$\cdots \longrightarrow H^n(G, M) \xrightarrow{\phi^* \circ \varepsilon^* \circ \psi^*} H^n(S, M) \xrightarrow{i^* \circ (\phi^*)^{-1}} H^{n+1}(G, S, M) \xrightarrow{(\psi^*)^{-1} \circ \chi} H^{n+1}(G, M) \longrightarrow \cdots$$

Daí, considerando  $\delta = i^* \circ (\phi^*)^{-1}$  e  $J = (\psi^*)^{-1} \circ \chi$ , basta mostrar que  $\text{res}_{S, M}^G = \phi^* \circ \varepsilon^* \circ \psi^*$  para obter a proposição.

Na demonstração de 1.4.10, vimos que  $v : \text{Hom}_R(R(G/S), M) \rightarrow \text{Coind}_S^G M$  definido por  $v(\bar{h})(g) = g \cdot \bar{h}(g^{-1}S)$  é um isomorfismo e daí

$$\begin{aligned} v^* = H^*(G, v) : H^*(G, \text{Hom}_R(R(G/S), M)) &\rightarrow H^*(G, \text{Coind}_S^G M) \\ [\bar{h}] &\mapsto v^*([\bar{h}]) = [v \circ \bar{h}] \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Consideremos o isomorfismo de Shapiro

$$\begin{aligned} (\alpha, \pi)^* : H^*(G, \text{Coind}_S^G M) &\rightarrow H^*(S, M) \\ [h] &\mapsto [\pi \circ h] \end{aligned}$$

com  $\alpha : S \rightarrow G$  a inclusão e  $\pi : \text{Coind}_S^G M \rightarrow M$  o  $RS$ -epimorfismo dado em 1.4.2. Assim, tomando

$$\begin{aligned} \phi^* := (\alpha, \pi)^* \circ v^* : H^*(G, \text{Hom}_R(R(G/S), M)) &\rightarrow H^*(S, M) \\ [\bar{h}] &\mapsto [\pi \circ v \circ \bar{h}] \end{aligned}$$

temos o isomorfismo desejado.

Seja  $[f] \in H^*(G, M)$ . Então

$$(\phi^* \circ \varepsilon^* \circ \psi^*)([f]) = (\phi^* \circ \varepsilon^*)([\psi \circ f]) = \phi^*([\varepsilon^\# \circ \psi \circ f]) = [\pi \circ v \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f]$$

Agora,  $\forall x \in F_*$ ,

$$\begin{aligned} (\pi \circ v \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f)(x) &= (\pi \circ v)(\varepsilon^\#(\psi(f(x)))) = (\pi \circ v)(\psi(f(x)) \circ \varepsilon) = \pi(v(\psi(f(x)) \circ \varepsilon)) = \\ &= v(\psi(f(x)) \circ \varepsilon)(1) = (\psi(f(x)) \circ \varepsilon)(1S) = \psi(f(x))(\varepsilon(1S)) = \psi(f(x))(1) = f(x) \end{aligned}$$

ou seja,  $\pi \circ v \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f = f$ . Daí,  $(\phi^* \circ \varepsilon^* \circ \psi^*)([f]) = [\pi \circ v \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f] = [f] = res_{S,M}^G([f])$ .

Logo,  $\phi^* \circ \varepsilon^* \circ \psi^* = res_{S,M}^G$  e portanto temos a seqüência desejada. ■

**2.5.5 Observação:** É válido para grupos de homologia um resultado análogo ao anteriormente apresentado.

**2.5.6 Corolário:** Se  $G$  é um grupo e  $M$  um  $RG$ -módulo então:

- (i)  $H^i(G, \{1\}, M) \simeq H^i(G, M)$ , para todo  $i \geq 2$ ;
- (ii)  $H^i(G, G, M) \simeq 0$ , para todo  $i \geq 1$ .

**2.5.7 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo então

$$Ker(res_{S,M}^G) \simeq \frac{H^1(G, S, M)}{H^0(S, M)/H^0(G, M)}.$$

## 2.6 Interpretação Topológica

Primeiramente, recordamos alguns conceitos e apresentamos certos resultados sobre CW-complexos e pares de Eilenberg-MacLane.

**2.6.1 Definição:** Dado um espaço  $X$  de Hausdorff, dizemos que  $X$  admite uma estrutura de CW-complexo se existir uma seqüência ascendente de fechados  $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \dots$  que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $X^0$  tem a topologia discreta;
- (ii) Para cada  $n > 0$ ,  $X^n$  é obtido de  $X^{n-1}$  por adjunção de  $n$ -células (caso exista), isto é,  $X^n - X^{n-1}$  é uma união disjunta de subconjuntos abertos (em  $X^n$ )  $e_\lambda^n$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , (chamados  $n$ -células abertas) onde cada  $e_\lambda^n$  é "colada" a  $X^{n-1}$  por meio de uma aplicação chamada aplicação característica. Isto significa que para cada  $\lambda$  existe uma aplicação contínua  $f_\lambda : \overline{U^n} \rightarrow \overline{e_\lambda^n}$  tal que  $f_\lambda$  aplica  $U^n$  homeomorficamente sobre  $e_\lambda^n$  e  $f_\lambda(\overline{U^n} - U^n) \subset X^{n-1}$ , onde  $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ . Além disto,  $A \subset X^n$  é fechado se, e somente se,  $A \cap X^{n-1}$  e  $f_\lambda^{-1}(A)$  são fechados para todo  $\lambda \in \Lambda$ ;
- (iii)  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ ;
- (iv) O espaço  $X$  e os subespaços  $X^n$  têm a topologia fraca, isto é, um subconjunto  $A$  de  $X$  (ou de  $X^n$ ) é fechado se, e somente se,  $A \cap \overline{e^n}$  é fechado para todas as  $n$ -células  $e^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

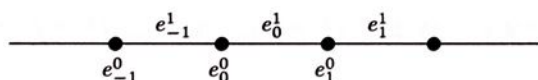


(5) O subconjunto  $X^n$  (da definição anterior) é chamado **n-esqueleto**. Os pontos de  $X^0$  são chamados vértices ou 0-células. Um CW-complexo é dito finito se a sua coleção de células é finita e infinito, caso contrário. Se  $X = X^n$  para algum inteiro  $n$  (onde  $X^n$  necessariamente foi obtido por adjunção de pelo menos 1  $n$ -célula) dizemos que o CW-complexo tem dimensão finita  $n$ .

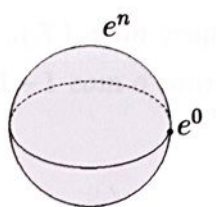
Um subconjunto  $A$  de um CW-complexo é chamado um **subcomplexo** se  $A$  é uma união de células de  $X$  e para toda célula  $e^n$ ,  $e^n \subset A$  implicar em  $\bar{e}^n \subset A$ .

### 2.6.2 Exemplos:

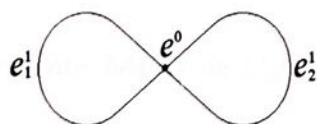
(1) Seja  $X = \mathbb{R}$ . Podemos dar a  $\mathbb{R}$  uma estrutura natural de CW-complexo onde as 0-células e 1-células são dadas, respectivamente, por  $e_n^0 = \{n\}$  e  $e_n^1 = (n, n+1)$  com  $n \in \mathbb{Z}$ .



(2) Seja  $X = S^n$  ( $n$ -esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre  $S^n$  pode ser dada com apenas duas células: uma 0-célula e uma  $n$ -célula, como mostra a figura:

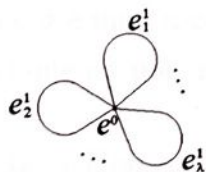


(3) Consideremos  $X$  a figura oito. Podemos dar a  $X$  uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional com uma única 0-célula e duas 1-células.



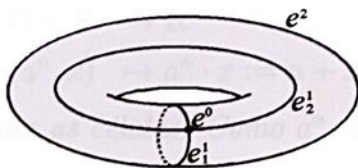
(4) Mais geralmente, consideremos  $X = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda^1$ , o bouquet de círculos indexado por um conjunto  $\Lambda$ . Podemos dar a  $X$  uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional com uma única 0-célula e uma 1-célula para cada elemento de  $\Lambda$ , ou seja,  $X = e^0 \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda^1)$ .

Representação do bouquet no caso em que  $\Lambda = \mathbb{N}^*$ :





(5) Podemos dar a  $T^2$  (toro) uma estrutura de CW-Complexo 2-dimensional com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula.



(6) A soma conexa de  $n$ -toros:  $T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2$  ( $n$ -vezes) tem uma estrutura de CW-complexo 2-dimensional com uma única 0-célula,  $2n$  1-células e uma única 2-célula.

Sejam  $X$  um CW-complexo,  $C_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$  (o  $n$ -ésimo grupo de homologia singular relativa) e  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  o homomorfismo composto:

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

onde o primeiro homomorfismo é o operador bordo do par  $(X^n, X^{n-1})$  e  $j_{n-1}$  é o homomorfismo induzido da inclusão.

Verifica-se que  $\partial^2 = 0$  e assim obtemos um complexo de cadeia  $C(X) = \{C_n(X), \partial_n\}$ , o qual é chamado **complexo de cadeia celular** de  $X$ .

**2.6.3 Proposição:** Para cada  $n \geq 0$ ,  $C_n(X)$  é um grupo abeliano livre (ou seja, um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre) cuja base está em correspondência 1-1 com o conjunto  $\{e_\lambda^n \mid \lambda \in \Lambda\}$  de todas as  $n$ -células de  $X$ .

**Demonstração:** [19] (teor.2.1, p.78). ■

#### 2.6.4 Observações:

- (1) É também usual denotar uma  $n$ -célula por  $\sigma^n$  ou simplesmente por  $\sigma$  quando a dimensão estiver clara no contexto.
- (2) Às vezes representa-se um elemento básico de  $C_n(X)$  simplesmente pela  $n$ -célula que o corresponde.

**2.6.5 Definição:** Um  $G$ -complexo é um CW-complexo  $X$  munido de uma ação de  $G$  em  $X$  que permuta as células (isto é, se  $\Lambda$  representa o conjunto das células de  $X$  então  $g \cdot \Lambda = \Lambda$ ,  $\forall g \in G$ ).

Quando a ação de  $G$  em  $X$  permuta livremente as células dizemos que  $X$  é um  $G$ -complexo livre.

Note que, se  $X$  é um  $G$ -complexo e  $\sigma$  é uma  $n$ -célula então  $g \cdot \sigma$  é também uma  $n$ -célula (isto é, uma célula de mesma dimensão que  $\sigma$ ) pois a ação de  $G$  em  $X$  é um homomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \mu : G &\rightarrow \text{Homeo}(X, X) \\ g &\mapsto \mu_g : X \rightarrow X \end{aligned}$$

**2.6.6 Exemplo:** Sejam  $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $X = \mathbb{R}$  (com a estrutura de CW-complexo dada em 2.6.2(1)). Temos que

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a^n, x) &\mapsto a^n \cdot x := n + x \end{aligned}$$

é uma  $G$ -ação sobre  $X$  que permuta as células. Como  $a^n \cdot x = n + x = x \Leftrightarrow n = 0 \Leftrightarrow a^n = 1$  segue que a  $G$ -ação é livre.

Logo,  $X$  é um  $G$ -complexo livre.

**2.6.7 Proposição:** Se  $X$  é um  $G$ -complexo livre contrátil então o complexo de cadeia celular aumentado de  $X$ :

$$\dots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

onde  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  é dada por  $\varepsilon(\sigma^0) = 1$  para toda 0-célula  $\sigma^0$  de  $X$  e estendida por linearidade, é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ .

**Demonstração:** Sejam  $X$  um  $G$ -complexo livre contrátil e

$$X_n = \{\sigma \mid \sigma \text{ é célula de dimensão } n \text{ de } X\}.$$

Como  $X$  é um CW-complexo, por 2.6.3, para cada  $n \geq 0$ ,  $C_n(X)$  é um grupo abeliano livre com base em correspondência 1 – 1 com os elementos de  $X_n$ . Assim  $C_n(X)$  pode ser identificado com  $\mathbb{Z}X_n$ .

Por hipótese,  $G$  permuta livremente as células de  $X$ . Daí,  $X_n$  é um  $G$ -conjunto livre. Assim por 1.1.13 temos que  $\mathbb{Z}X_n$  e portanto  $C_n(X)$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre (com base num conjunto  $E$  de representantes para as  $G$ -órbitas em  $X_n$ ).

Agora, como  $X$  é contrátil,

$$H_i(X) \simeq H_i(\text{ponto}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, como  $H_i(X) = \text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}$ , segue que  $\text{Ker } \partial_i = \text{Im } \partial_{i+1}$ , para  $i > 0$ .

Resta mostrar que  $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ .

Pelo teorema do homomorfismo,  $C_0(X)/\text{Ker } \varepsilon \simeq \text{Im } \varepsilon = \mathbb{Z}$  (pois  $\varepsilon$  é sobrejetora). Por outro lado,  $C_0(X)/\text{Im } \partial_1 = H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ . Assim,  $C_0(X)/\text{Ker } \varepsilon \simeq C_0(X)/\text{Im } \partial_1$  e como  $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \varepsilon$  temos que  $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ .

Logo, a sequência

$$\dots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é exata e portanto uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ . ■



**2.6.8 Exemplo:** Sejam  $X = \mathbb{R}$  e  $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Vimos em 2.6.6 que  $X$  é um  $G$ -complexo livre. E ainda,  $X$  é contrátil. Assim, pela proposição anterior,

$$\dots \rightarrow C_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_n} \dots \rightarrow C_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ .

Agora, como  $\mathbb{R}$  não possui células de dimensão maior que 1 temos que  $C_n(\mathbb{R}) = 0, \forall n > 1$ . Além disso, existe uma única  $G$ -órbita de 0-células (representada por  $e^0$ ) e uma única  $G$ -órbita de 1-células (representada por  $e^1$ ). Daí,  $C_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}G$  e  $C_0(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}G$ .

Logo a resolução acima é equivalente a

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

onde  $\partial_1$  é a multiplicação por  $a - 1$  (compare com a resolução dada em 1.5.3(2)).

Da teoria de espaços de recobrimento, podemos obter muitos exemplos de  $G$ -complexos livres. Por isto recordaremos alguns resultados sobre espaços de recobrimento.

Sejam  $X$  um  $CW$ -complexo conexo,  $(\tilde{X}, p)$  um recobrimento de  $X$  e  $G$  o grupo das transformações de recobrimento. Como  $X$  é um  $CW$ -complexo então  $\tilde{X}$  também é um  $CW$ -complexo onde as  $n$ -células  $\tilde{\sigma}^n$  de  $\tilde{X}$  são as componentes conexas de  $p^{-1}(\sigma^n)$  com  $\sigma^n$  as  $n$ -células de  $X$  ([24], p.251). Além disso,  $G$  permuta as células de  $\tilde{X}$ .

Agora,  $G$  atua livremente em  $\tilde{X}$ , pois  $g \cdot \tilde{x} = \tilde{x}$  se, e somente se,  $g = 1$  ([18], corol.6.2, p.159). Consequentemente,  $G$  atua livremente nas células de  $\tilde{X}$ .

Assim  $\tilde{X}$  é um  $G$ -complexo livre.

Agora, se  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é um recobrimento regular (isto é,  $p_*(\pi_1(\tilde{X})) \triangleleft \pi_1(X)$ ) então temos que  $G \simeq \pi_1(X)/p_*(\pi_1(\tilde{X}))$  ([18], p.163). Em particular, se  $\tilde{X}$  for recobrimento universal de  $X$ ,  $G \simeq \pi_1(X)$ . Então, tendo em vista a proposição 2.6.7, é natural considerarmos  $X$  como segue:

**2.6.9 Definição:** Dizemos que  $X$  é um complexo de Eilenberg-MacLane do tipo  $(G, 1)$  (ou um  $K(G, 1)$ -complexo) se  $X$  é um  $CW$ -complexo satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $X$  é conexo;
- (ii)  $\pi_1(X) \simeq G$ ;
- (iii) o recobrimento universal  $\tilde{X}$  de  $X$  é contrátil.

#### 2.6.10 Observações:

- (1) Dado um grupo  $G$ , sempre existe um  $K(G, 1)$ -complexo ([6], teor.VIII.7.1, p.205).
- (2) Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por:

$$(iii)' H_i(\tilde{X}) = 0 \text{ para } i \geq 2 \quad \text{ou} \quad (iii)'' \pi_i(X) = 0 \text{ para } i \geq 2.$$

- (3) Se  $X$  é um  $K(G, 1)$  então o recobrimento universal  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é um recobrimento regular cujo grupo das transformações de recobrimento  $\mathcal{D}(X) \simeq \pi_1(X) \simeq G$ .



### 2.6.11 Exemplos:

(1) Sejam  $X = S^1$  e  $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Como  $X$  é um CW-complexo conexo,  $\pi_1(X) = G$  e o recobrimento universal de  $X$  é  $\tilde{X} = \mathbb{R}$ , que é contrátil, segue que  $X$  é um  $K(G, 1)$ -complexo. Mais geralmente, se  $X = S^1 \times \dots \times S^1$  (toro  $n$ -dimensional) o recobrimento universal de  $X$  é  $\mathbb{R}^n$  e  $X$  é um  $K(G, 1)$  onde  $G = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  (grupo abeliano livre de posto  $n$ ).

(2) Sejam  $X = T^2 \# \dots \# T^2$  ( $n$  cópias) e  $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$  onde  $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ . Temos que  $X$  é um CW-complexo conexo e  $\pi_1(X) \simeq G$  (por [18], ex.IV.5.3, p.131). Seja  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento universal de  $X$ . Como  $X$  não possui célula de dimensão maior que 2 e  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  é um homeomorfismo local então  $H_i(\tilde{X}) = 0$  para  $i > 2$ . Agora, como  $G$  é infinito temos que  $\tilde{X}$  é não compacto (pois se  $\tilde{X}$  fosse compacto e  $G$  infinito, como as fibras estão em correspondência 1-1 com  $G$  elas teriam um ponto de acumulação, o que nos dá uma contradição já que as fibras são subconjuntos discretos). Daí, por ([11], cor.22.25, p.121), temos que  $H_2(\tilde{X}) = 0$ . Logo,  $H_i(\tilde{X}) = 0$  para  $i \geq 2$  e portanto  $X$  é um  $K(G, 1)$ .

Em particular, o toro  $T^2$  é um  $K(G, 1)$ .

Analogamente, se considerarmos  $X$  uma superfície fechada não orientável de genus  $k$  com  $k \geq 2$  (isto é,  $X$  é a soma conexa de  $k$  planos projetivos) e  $G = \langle c_1, \dots, c_k \mid \prod_{i=1}^k c_i^2 \rangle$  temos que  $X$  é um  $K(G, 1)$ .

(3) Sejam  $X = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} S^1_\lambda$  e  $G = F(\Lambda)$  (o grupo livre gerado por  $\Lambda$ ) e  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento universal de  $X$ . Temos que  $X$  é um CW-complexo conexo e  $\pi_1(X) = G$  (por [18], p.126). Como  $X$  não possui células de dimensão maior que 1 segue, do fato que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  é homeomorfismo local, que  $H_i(\tilde{X}) = 0$  para  $i > 1$ . Assim,  $X$  é um  $K(G, 1)$ .

**2.6.12 Proposição:** Se  $X$  é um  $K(G, 1)$  então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal  $\tilde{X}$  de  $X$ :

$$\dots \rightarrow C_2(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ .

**Demonstração:** Como  $X$  é um  $K(G, 1)$  então  $\tilde{X}$  é um  $G$ -complexo livre contrátil. Logo, por 2.6.7, temos que o complexo de cadeia celular aumentado de  $\tilde{X}$  é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ . ■

**2.6.13 Corolário:** Se  $G$  tem torção, então não existe um  $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita. Em particular, se  $X$  é um  $K(G, 1)$ -complexo então  $X$  não pode ser variedade.

**Demonstração:** Seja  $t$  um elemento de torção de  $G$ . Consideremos  $S = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ .

Suponhamos que exista  $X$  um  $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita  $m$ . Assim, o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal  $\tilde{X}$

$$0 \rightarrow C_m(\tilde{X}) \rightarrow C_{m-1}(\tilde{X}) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(\tilde{X}) \rightarrow C_0(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (*)$$

é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ .

Agora, por 1.5.4, (\*) também é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}S$ . Daí,  $H^i(S, \mathbb{Z}) = 0$ ,  $\forall i > m$ . Mas, por 2.1.6(3),  $H^i(S, \mathbb{Z}) \neq 0$  para todo  $i$  par, o que nos dá uma contradição.

Finalmente, se um  $K(G, 1)$ -complexo fosse uma variedade de dimensão  $m$  então ele seria um complexo de dimensão finita, o que nos daria um absurdo. Portanto, um  $K(G, 1)$ -complexo não pode ser variedade. ■

**2.6.14 Corolário:** Se  $X$  um  $K(G, 1)$ -complexo,  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento universal de  $X$  e  $C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2)$  o  $\mathbb{Z}_2$ -módulo livre gerado pelas  $n$ -células de  $\tilde{X}$  então

$$\dots \rightarrow C_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $\mathbb{Z}_2 G$ .

**Demonstração:** Basta usar o resultado anterior, as proposições 1.5.5 e 2.6.3, e observar que  $C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2)$ . ■

**2.6.15 Observação:** Como para todo grupo  $G$  sempre existe um  $K(G, 1)$ -complexo, os resultados anteriores nos fornecem exemplos de resoluções livres de  $R$  sobre  $RG$  ( $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ ) para todo grupo  $G$ .

**2.6.16 Definição:** Dizemos que um par de grupos  $(G, \mathcal{S})$ , onde  $G$  é um grupo e  $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$  é uma família não vazia de subgrupos de  $G$  (não necessariamente distintos), é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane  $(X, Y) = K(G, \mathcal{S}, 1)$  se:

- (i)  $X$  é um  $K(G, 1)$ -complexo;
- (ii)  $Y$  é um subcomplexo cujas componentes  $Y_i$ ,  $i \in I$ , são  $K(S_i, 1)$ -complexos, isto significa que  $\pi_1(Y_i) \rightarrow \pi_1(X)$  induzida pela inclusão  $Y_i \subset X$  é injetiva e aplica  $\pi_1(Y_i)$  sobre  $S_i \subset G$  (depois de uma conveniente escolha de caminhos conectando pontos bases).

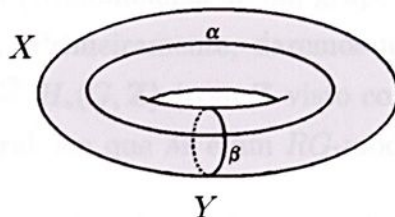
Nosso interesse é no caso em que  $(G, \mathcal{S}) = (G, \{S\}) \stackrel{not.}{=} (G, S)$ , isto é, quando considera-se a família unitária.

### 2.6.17 Exemplos:

(1) Sejam  $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  e  $S = \langle b \rangle$ . Considere  $X$  o toro  $T^2$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  laços em  $X$  e  $Y$  (o laço representado por  $\beta$ ) homeomorfo a  $S^1$ , como mostrados na figura:

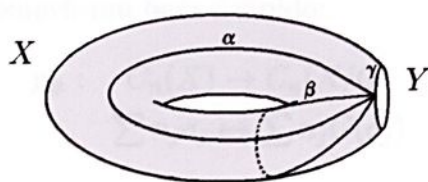






Tomando  $a = [\alpha]$  e  $b = [\beta]$  vemos que  $(G, S)$  é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane  $(X, Y)$ , pois  $T^2$  é um complexo  $K(G, 1)$  e  $S^1$  é um  $K(\langle b \rangle, 1)$ -subcomplexo de  $T^2$ .

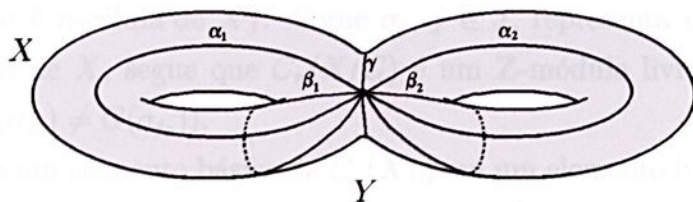
(2) Sejam  $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  e  $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Temos que  $(G, S)$  é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane  $(X, Y)$  onde  $X = T^2 - D^2$  (isto é, o toro  $T^2$  do qual um disco aberto  $D^2$  foi removido) e  $Y = \partial X$  homeomorfo a  $S^1$ , como na figura:



Pois  $X$  é um CW-complexo conexo e como  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia que a figura oito,  $H_i(\tilde{X}) = 0$  para  $i \geq 2$ , onde  $\tilde{X}$  é o recobrimento universal de  $X$ . Assim,  $X$  é um  $K(\langle a \rangle * \langle b \rangle, 1)$  com  $a = [\alpha]$  e  $b = [\beta]$ . Além disso,  $Y$  é um  $K(\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle, 1)$ -subcomplexo, visto que  $i_*(\pi_1(Y)) = i_*\langle [\gamma] \rangle = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle$  e  $Y$  é um CW-complexo conexo com recobrimento universal contrátil.

Mais geralmente, se tomarmos  $G = \pi_1(X)$ , onde  $X$  é qualquer superfície fechada orientada diferente de  $S^2$  da qual um disco aberto  $D^2$  foi removido, e  $S = \pi_1(\partial X)$  temos que o par  $(G = \pi_1(X), S = \pi_1(\partial X))$  é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane  $(X, \partial X)$ .

(3) Sejam  $G = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid \prod_{i=1}^2 [a_i, b_i] = 1 \rangle$  e  $S = \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Temos que  $(G, S)$  é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane  $(X, Y)$  onde  $X = T^2 \# T^2$  e  $Y = S^1$ .



De fato, vimos que  $X = T^2 \# T^2$  é um  $K(G, 1)$  e temos que  $i_*(\pi_1(Y)) = i_*\langle [\gamma] \rangle = \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle = S$ . Portanto  $Y$  é um  $K(S, 1)$ . Daí,  $(X, Y)$  é um par  $K(G, S, 1)$ .



Agora, vamos relacionar a (co)homologia de um grupo  $G$  com a de um espaço topológico especial, a saber, um  $K(G, 1)$ . Primeiramente, daremos uma interpretação topológica para  $H^*(G) \stackrel{\text{not.}}{=} H^*(G, \mathbb{Z})$  e  $H_*(G) \stackrel{\text{not.}}{=} H_*(G, \mathbb{Z})$  (com  $\mathbb{Z}$  visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial), e a seguir consideraremos o caso, mais geral, em que  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial.

**2.6.18 Lema:** *Seja  $X$  um  $G$ -complexo livre e  $Y$  o complexo de órbitas  $X/G$ . Então*

$$C_*(Y) \simeq C_*(X)_G.$$

**Demonstração:** Considere a projeção de recobrimento

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \end{aligned}$$

Temos induzido um homomorfismo bem definido:

$$\begin{aligned} p_\# : C_n(X) &\rightarrow C_n(X/G) \\ \sum n_j \sigma_j &\mapsto \sum n_j G(\sigma_j) \end{aligned}$$

onde  $\sigma_j$  são  $n$ -células de  $X$ .

Agora, se  $g \in G$  e  $\sigma$  é  $n$ -célula então  $p_\#(g \cdot \sigma - \sigma) = p_\#(g \cdot \sigma) - p_\#(\sigma) = G(g \cdot \sigma) - G(\sigma) = G(\sigma) - G(\sigma) = 0$  e conseqüentemente  $I = \langle g \cdot \alpha - \alpha \mid g \in G, \alpha \in C_n(X) \rangle \subset \text{Ker } p_\#$ .

Assim, a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : C_n(X)_G = C_n(X)/I &\rightarrow C_n(X/G) \\ \bar{\alpha} = \overline{\sum n_j \sigma_j} &\mapsto \phi(\bar{\alpha}) := p_\#(\alpha) = \sum n_j G(\sigma_j) \end{aligned}$$

está bem definida.

Vimos que  $C_n(X)$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base  $\{\sigma_j\}_{j \in J}$  onde  $\sigma_j$  representa um elemento de cada  $G$ -órbita de  $n$ -células de  $X$ . Então, por 1.2.4, temos que  $C_n(X)_G$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base  $\{\bar{\sigma}_j\}_{j \in J}$ .

Por outro lado,  $C_n(X/G)$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado pelas  $n$ -células em  $X/G$ , ou seja, gerado por  $\{G(\sigma) \mid \sigma \text{ é } n\text{-célula de } X\}$ . Como  $\sigma_j, j \in J$ , representa um elemento para cada  $G$ -órbita de  $n$ -células de  $X$ , segue que  $C_n(X/G)$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base  $\{G(\sigma_j)\}_{j \in J}$  (pois  $\sigma_{j_1} \neq \sigma_{j_2} \Leftrightarrow G(\sigma_{j_1}) \neq G(\sigma_{j_2})$ ).

Agora,  $\phi$  aplica um elemento básico de  $C_n(X)_G$  em um elemento básico de  $C_n(X/G)$ , pois  $\phi(\bar{\sigma}_j) := G(\sigma_j)$ . Logo,  $\phi$  é isomorfismo. ■

**2.6.19 Proposição:** *Se  $G$  é um grupo e  $X$  é um  $K(G, 1)$ -complexo então*

- (i)  $H^*(G) \simeq H^*(X)$ ;
- (ii)  $H_*(G) \simeq H_*(X)$ .

**Demonstração:** Por hipótese,  $X$  é um  $K(G, 1)$ -complexo e daí, pela proposição 2.6.12, o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal  $\tilde{X}$  de  $X$ :

$$\dots \rightarrow C_2(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ .

Além disso,  $\tilde{X}$  é um  $G$ -complexo livre e o complexo de órbitas é dado por  $\tilde{X}/G$ . Por [18] (p.165),  $X$  é homeomorfo a  $\tilde{X}/G$ .

(i) Como os grupos de cohomologia independem da resolução podemos considerar a resolução acima para calcular  $H^*(G) \stackrel{\text{not.}}{=} H^*(G, \mathbb{Z})$ . Assim,  $H^*(G) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}))$ .

Agora,  $H^*(X) \simeq H^*(\tilde{X}/G)$  (pois  $X \approx \tilde{X}/G$ ). Mas,  $H^*(\tilde{X}/G) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X}/G), \mathbb{Z}))$ . Assim, é suficiente mostrarmos que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X}/G), \mathbb{Z})$ .

Temos que

$$\begin{aligned} C_*(\tilde{X}/G) &\simeq C_*(\tilde{X})_G && \text{(lema 2.6.18)} \\ &\simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\tilde{X}) && \text{(por 1.2.3)} \end{aligned}$$

Daí,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X}/G), \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}) \stackrel{1.3.3}{\simeq} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z})$ .

Logo,  $H^*(X) \simeq H^*(G)$ .

(ii) Como  $C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \stackrel{1.2.7}{\simeq} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\tilde{X}) \stackrel{1.2.3}{\simeq} C_*(\tilde{X})_G$  segue que

$$H_*(G) \stackrel{\text{not.}}{=} H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \simeq H_*(C_*(\tilde{X})_G).$$

Por 2.6.18,  $C_*(\tilde{X})_G \simeq C_*(X)$  e por [19](teor.4.2, p.85),  $H_*(C_*(X)) \simeq H_*(X)$ .

Logo,  $H_*(G) \simeq H_*(C_*(\tilde{X})_G) \simeq H_*(C_*(X)) \simeq H_*(X)$  ■

## 2.6.20 Exemplos:

(1) Sejam  $\Lambda$  um conjunto,  $G = F(\Lambda)$  o grupo livre gerado por  $\Lambda$  e  $X = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} S^1_\lambda$ .

Vimos que  $X$  é um  $K(F(\Lambda), 1)$ . Logo,

$$H_i(F(\Lambda)) \simeq H_i(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

(2) Sejam  $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$ , onde  $n$  é um inteiro positivo e  $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ , e  $X = T^2 \# \dots \# T^2$ .

Vimos que  $X$  é um  $K(G, 1)$ . Daí,

$$H_i(G) \simeq H_i(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{(2n)} & \text{se } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i > 2 \end{cases}$$





**2.6.21 Observação:** Considere o grupo multiplicativo  $G = S^1 = \{e^{2\pi i x} \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Neste caso,  $S^1$  tem também uma estrutura de CW-complexo (com uma 0-célula e uma 1-célula). Considerando  $S^1$  com as duas estruturas (de espaço e de grupo) temos:

- como espaço:  $H_1(S^1) = \pi_1(S^1)_{ab} \simeq \mathbb{Z} \simeq H^1(S^1)$ ;
- como grupo:  $H_1(S^1) \simeq H_1(K(S^1, 1)) \simeq \pi_1(K(S^1, 1))_{ab} \simeq (S^1)_{ab} = S^1$  e (do corolário 3.1.4 do próximo capítulo)  $H^1(S^1) = \text{Hom}(S^1, \mathbb{Z}) = 0$ .

Isto nos mostra que em geral a (co)homologia do “grupo”  $G$  é diferente da (co)homologia do “espaço”  $G$ .

**2.6.22 Proposição:** Se  $X$  é um  $K(G, 1)$ -complexo e  $M$  um  $RG$ -módulo trivial então

(i)  $H^*(G, M) \simeq H^*(X, M)$ ;

(ii)  $H_*(G, M) \simeq H_*(X, M)$ .

**Demonstração:** Como todo  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo trivial  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial, considerando a proposição 2.1.3, é suficiente mostrarmos para o caso em que  $R = \mathbb{Z}$ .

Se  $X$  é um  $K(G, 1)$  então, por 2.6.12,

$$\dots \rightarrow C_2(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

com  $\tilde{X}$  o recobrimento universal de  $X$ , é uma resolução livre de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ .

(i) Por hipótese,  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial e daí  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(\tilde{X}), M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X})_G, M)$  (por [6], p.60). Assim,

$$\begin{aligned} H^*(G, M) &\simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X})_G, M)) \\ &\simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X), M)) \quad (\text{por 2.6.18 e o fato que } X \approx \tilde{X}/G) \\ &\simeq H^*(X, M) \quad (\text{por [27], teor.2.18, p.62}). \end{aligned}$$

ou seja,  $H^*(G, M) \simeq H^*(X, M)$ .

(ii) Como  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial temos (por [6], p.60) que  $C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq C_*(\tilde{X})_G \otimes_{\mathbb{Z}} M$ . Logo,

$$\begin{aligned} H_*(G, M) &\simeq H_*(C_*(\tilde{X})_G \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ &\simeq H_*(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M) \quad (\text{por 2.6.18 e o fato que } X \approx \tilde{X}/G) \\ &\simeq H_*(X, M) \quad (\text{por [27], teor.2.19, p.62}) \end{aligned}$$

isto é,  $H_*(G, M) \simeq H_*(X, M)$ . ■

**2.6.23 Observação:** De fato, vale um resultado mais geral (ver [12], teor.10.7.14c): Se  $G$  é um grupo,  $X$  um  $K(G, 1)$ -complexo e  $M$  um  $RG$ -módulo então  $H^*(G, M) \simeq H^*(X, \mathcal{M})$  e  $H_*(G, M) \simeq H_*(X, \mathcal{M})$ , onde  $\mathcal{M}$  é o sistema de coeficientes locais sobre  $X$  associado ao  $RG$ -módulo  $M$ .





**2.6.24 Exemplo:** Seja  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  o grupo cíclico infinito.

Vimos no exemplo 2.1.6(2) que:

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \\ M_G & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

e em 2.6.11 que  $X = S^1$  é um  $K(G, 1)$ . Assim, se  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial, pela proposição anterior

$$H^i(X, M) \simeq H^i(G, M) = \begin{cases} M & \text{se } i = 0 \\ M & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

Em particular, considerando  $M = R$  com a  $G$ -ação trivial, temos:

$$H^i(X, R) \simeq H^i(G, R) \simeq \begin{cases} R & \text{se } i = 0 \\ R & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

O resultado a seguir foi demonstrado por Bieri e Eckmann em [5] para (co)homologia relativa de grupos definida sobre  $\mathbb{Z}$ , mas por 2.5.3 o resultado segue também para (co)homologia relativa definida sobre  $\mathbb{Z}_2$ .

**2.6.25 Teorema:** Sejam  $(G, \mathcal{S})$  um par de grupos, com  $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$  uma família não vazia de subgrupos (não necessariamente distintos) de  $G$ , realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane  $(X, Y) = K(G, \mathcal{S}, 1)$  e  $M$  um  $RG$ -módulo. Então as seqüências exatas longas para o par  $(G, \mathcal{S})$  e para o par  $(X, Y)$ , esta última tomada com coeficientes locais, são isomorfas. Mais precisamente, temos os seguintes diagramas comutativos (a menos de sinal)

$$\cdots \longrightarrow H^k(G, \mathcal{S}, M) \longrightarrow H^k(G, M) \longrightarrow H^k(\mathcal{S}, M) \longrightarrow H^{k+1}(G, \mathcal{S}, M) \longrightarrow \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^k(X, Y, M) & \longrightarrow & H^k(X, M) & \longrightarrow & H^k(Y, M) \longrightarrow H^{k+1}(X, Y, M) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

e

$$\cdots \longrightarrow H_k(G, \mathcal{S}, M) \longrightarrow H_k(G, M) \longrightarrow H_k(\mathcal{S}, M) \longrightarrow H_{k+1}(G, \mathcal{S}, M) \longrightarrow \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_k(X, Y, M) & \longrightarrow & H_k(X, M) & \longrightarrow & H_k(Y, M) \longrightarrow H_{k+1}(X, Y, M) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

onde as aplicações verticais são isomorfismos.

**Demonstração:** [5] (teor.1.3, p.284). ■

**2.6.26 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo então

$$\text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) \simeq \frac{H^1(X, Y, \mathcal{M})}{H^0(Y, \mathcal{M})/H^0(X, \mathcal{M})}$$

onde  $\mathcal{M}$  é o sistema de coeficientes locais sobre  $X$  associado ao  $RG$ -módulo  $M$ .

**2.6.27 Observação:** Segue da proposição anterior que se  $M$  é um  $RG$ -módulo, para todos os exemplos de pares de Eilenberg-MacLane  $(X, Y) = K(G, S, 1)$  dados em 2.6.17, tem-se,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$H^k(G, S, M) \simeq H^k(X, Y, \mathcal{M}) \quad e \quad H_k(G, S, M) \simeq H_k(X, Y, \mathcal{M}).$$

Em particular, se  $M$  é  $RG$ -módulo trivial então

$$H^k(G, S, M) \simeq H^k(X, Y, M) \quad e \quad H_k(G, S, M) \simeq H_k(X, Y, M).$$

## 2.7 Grupos e Pares de Dualidade

Nesta seção faremos um breve estudo da teoria de grupos e pares de dualidade. Como sempre  $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ , mas  $R$  poderia ser qualquer anel comutativo com unidade.

**2.7.1 Definição:** Um grupo  $G$  é denominado grupo de dualidade de dimensão  $n$  sobre  $R$  (ou um  $D^n$ -grupo sobre  $R$ ) se existe um  $RG$ -módulo (à direita)  $C$ , chamado módulo dualizante de  $G$ , tal que, para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e todo  $RG$ -módulo  $M$ ,

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_R M),$$

onde  $C \otimes_R M$  é visto como  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação diagonal.

Se  $C \simeq R$  como grupos abelianos dizemos que  $G$  é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão  $n$  sobre  $R$  (ou um  $PD^n$ -grupo sobre  $R$ ). Além disto, se a ação de  $G$  em  $C$  é trivial dizemos que  $G$  é orientável. Caso contrário,  $G$  é dito ser não orientável.

Note que todo grupo de dualidade de Poincaré sobre  $\mathbb{Z}_2$  é orientável, pois a única  $G$ -ação em  $\mathbb{Z}_2$  é a trivial.

**2.7.2 Exemplo:** Seja  $G \simeq \mathbb{Z}$  o grupo cíclico infinito. Vimos, em 2.1.6(2) e 2.1.7(2), que se  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo temos os isomorfismos naturais

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \\ M_G & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases} \quad e \quad H_i(G, M) \simeq \begin{cases} M_G & \text{se } i = 0 \\ M^G & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

Assim, existe um isomorfismo natural:

$$H^k(G, M) \simeq H_{1-k}(G, \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{1-k}(G, M)$$

para todo inteiro  $k$  e todo  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $M$ .

Logo,  $G$  é um  $PD^1$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}$ .



O próximo resultado nos mostra que a classe de grupos de dualidade sobre  $\mathbb{Z}_2$  é mais ampla do que a de grupos de dualidade sobre  $\mathbb{Z}$ .

**2.7.3 Proposição:** *Se  $G$  é um  $D^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}$  com módulo dualizante  $C$  então  $G$  é um  $D^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}_2$  com módulo dualizante  $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ . Em particular, se  $G$  é um  $PD^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}$  então  $G$  é um  $PD^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}_2$ .*

**Demonstração:** Por hipótese  $G$  é um  $D^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}$  com módulo dualizante  $C$ . Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo. Temos:

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq C \otimes_{\mathbb{Z}} (M \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) \simeq C \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) \simeq (C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} M = C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M$$

e este isomorfismo preserva  $G$ -ação. Logo, obtemos o isomorfismo natural:

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G, C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) \quad \blacksquare$$

Recordemos que uma variedade  $Y$  é *fechada* se ela é compacta sem bordo e é *asférica* se ela é conexa por caminhos e os grupos de homotopia  $\pi_i(Y) = 0$ ,  $\forall i \geq 2$ , isto é,  $Y$  tem o mesmo tipo de homotopia que um  $K(\pi_1(Y), 1)$ .

**2.7.4 Teorema:** *Se  $G$  é o grupo fundamental de uma  $n$ -variedade asférica fechada  $Y$  então  $G$  é um  $PD^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}$  ( $G$  é orientável  $\Leftrightarrow Y$  é orientável).*

**Demonstração:** [9] (V.1.1) e [6] (ex.1, p.222). ■

**2.7.5 Corolário:** *Se  $G$  é o grupo fundamental de uma variedade asférica fechada  $Y$  então  $G$  é um  $PD^n$ -grupo sobre  $\mathbb{Z}_2$ .*

### 2.7.6 Exemplos:

(1)  $S^1$  é uma variedade asférica fechada 1-dimensional e  $G = \pi_1(S^1)$  é o grupo cíclico infinito. Assim, podemos concluir (novamente) que  $\mathbb{Z}$  é um  $PD^1$ -grupo sobre  $R$ .

(2) Toda superfície fechada  $F$  diferente de  $S^2$  e do plano projetivo  $P^2$  é asférica e conseqüentemente  $G = \pi_1(F)$  é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 2 sobre  $R$ .

(3)  $G = \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  ( $n \geq 2$ ) é um  $PD^n$ -grupo sobre  $R$ , pois  $G \simeq \pi_1(X)$  onde  $X$  é a variedade asférica fechada  $S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$  vezes).

Se  $G$  é um  $D^n$ -grupo sobre  $R$  com módulo dualizante  $C$  mostraremos a seguir que o inteiro  $n$  e o módulo  $C$  são determinados a partir de  $G$ . Antes introduziremos o conceito de dimensão cohomológica.



**2.7.7 Definição:** A dimensão cohomológica de  $G$  sobre  $R$ , denotada por  $cd_R G$ , é definida por

$$\begin{aligned} cd_R G &= \inf\{n \mid H^k(G, -) = 0 \text{ para } k > n, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \sup\{n \mid H^n(G, M) \neq 0 \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}. \end{aligned}$$

Se não existir tal inteiro, nós consideramos  $cd_R G = \infty$ .

### 2.7.8 Observações:

- (1) Note que  $cd_R G \geq 0$ , pois existe  $M = R$  ( $R$  visto como  $RG$ -módulo trivial) tal que  $H^0(G, R) \simeq R \neq 0$ .
- (2) Se existe uma resolução projetiva de  $R$  sobre  $RG$  de comprimento finito então  $cd_R G \leq n$ .

**2.7.9 Proposição:** Se  $G$  é um grupo de dualidade de dimensão  $n$  sobre  $R$  com módulo dualizante  $C$  então:

- (i)  $C \neq 0$ ;  
(ii)  $C \simeq H^n(G, RG)$ ;  
(iii)  $n = cd_R G$ .

**Demonstração:** (i) Tomando  $k = 0$  e  $M = R$  no isomorfismo de dualidade segue que  $H^0(G, R) \simeq H_n(G, C)$ .

Agora,  $H^0(G, R) \simeq R^G = R$  (pois  $R$  é visto como  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação trivial). Assim  $H_n(G, C) \simeq R \neq 0$ . Logo,  $C \neq 0$ .

(ii) Usando  $k = n$  e  $M = RG$  no isomorfismo de dualidade,  $H^n(G, RG) \simeq H_0(G, C \otimes_R RG)$ .

Mas,

$$\begin{aligned} H_0(G, C \otimes_R RG) &\simeq (C \otimes_R RG)_G \stackrel{1.2.3}{\simeq} R \otimes_{RG} (C \otimes_R RG) \stackrel{1.2.7}{\simeq} \\ &\simeq (C \otimes_R RG) \otimes_{RG} R \simeq C \otimes_R (RG \otimes_{RG} R) \simeq C \otimes_R R \simeq C. \end{aligned}$$

Logo,  $H^n(G, RG) \simeq C$ .

(iii) Por (i) e (ii) segue que  $H^n(G, RG) \neq 0$ . Logo,  $n \leq cd_R G$ . Por outro lado, temos que  $H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_R M) = 0$  se  $k > n$  (pois  $n - k < 0$ ). Daí,  $cd_R G \leq n$ . ■

Em dimensões baixas podemos determinar quais são exatamente os grupos de dualidade sobre  $R$ .

**2.7.10 Proposição:** Se  $G$  é um grupo então:

- (i)  $G$  é  $D^0$ -grupo sobre  $R$  se, e somente se, a ordem de  $G$  é finita e invertível em  $R$ ;  
(ii)  $G$  é um  $D^1$ -grupo sobre  $R$  se, e somente se,  $G$  é finitamente gerado e  $cd_R G = 1$ .

**Demonstração:** [3] (III.9.17). ■



**2.7.11 Proposição:** *Todo grupo de dualidade sobre  $R$  é finitamente gerado.*

**Demonstração:** Segue de Teorema 9.2 e proposição 2.1 de [3]. ■

Vejamos agora o conceito de par de dualidade ([5]).

**2.7.12 Definição:** *Um par de grupos  $(G, S)$  é chamado um par de dualidade de dimensão  $n$  sobre  $R$  (ou um  $D^n$ -par sobre  $R$ ) se existe um  $RG$ -módulo (à direita)  $C$ , chamado módulo dualizante de  $(G, S)$ , tal que*

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, S, C \otimes_R M)$$

$$H^k(G, S, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_R M)$$

para todo  $RG$ -módulo  $M$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Se  $C \simeq R$  como grupos abelianos, o par de dualidade  $(G, S)$  é chamado um par de dualidade de Poincaré (ou  $PD^n$ -par sobre  $R$ ). Nesse caso os isomorfismos acima são equivalentes.

**2.7.13 Proposição:** *Se  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par sobre  $R$  com módulo dualizante  $C$  então*

(i)  $C \neq 0$ ;

(ii)  $C \simeq H^n(G, S, RG)$ .

**Demonstração:** (i) Tomando  $k = 0$  e  $M = R$  com a  $G$ -ação trivial na definição anterior,

$$H^0(G, R) \simeq H_n(G, S, C \otimes_R R) \simeq H_n(G, S, C).$$

Como  $H^0(G, R) \simeq R^G = R$ , segue que  $H_n(G, S, C) \simeq R$ .

Logo,  $C \neq 0$  (pois se  $C = 0$ ,  $H_n(G, S, 0) = H_{n-1}(G, \Delta \otimes 0) \simeq 0$ ).

(ii) Usando  $k = n$  e  $M = RG$  temos que

$$H^n(G, S, RG) \simeq H_0(G, C \otimes_R RG) \simeq (C \otimes_R RG) \otimes_{RG} R \simeq C \otimes_R (RG \otimes_{RG} R) \simeq C \otimes_R R \simeq C.$$

Portanto,  $C$  é determinado pelo par  $(G, S)$ . ■

Temos para pares de dualidade um resultado similar ao dado em 2.7.3.

**2.7.14 Proposição:** *Se  $(G, S)$  é  $D^n$ -par sobre  $\mathbb{Z}$  então  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par sobre  $\mathbb{Z}_2$ .*

**Demonstração:** Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo. Como  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par sobre  $\mathbb{Z}$ , então existe um  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $C$  tal que:

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, S, C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \quad \text{e} \quad H^k(G, S, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}} M)$$



Considere o  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo  $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ . Vimos na demonstração de 2.7.3 que  $C \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M$ .

Usando este fato concluímos que

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, S, C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G, S, C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M)$$

$$H^k(G, S, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G, C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M). \quad \blacksquare$$

**2.7.15 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par (sobre  $R$ ) com módulo dualizante  $C$  então

- (i)  $G$  é um  $D^{n-1}$ -grupo (sobre  $R$ ) com módulo dualizante  $\Delta \otimes_R C$  (com a  $G$ -ação diagonal);
- (ii)  $S$  é um  $D^{n-1}$ -grupo (sobre  $R$ ) com módulo dualizante  $\text{Res}_S^G C$ .

**Demonstração:** [5] (teor.4.2, p.300). ■

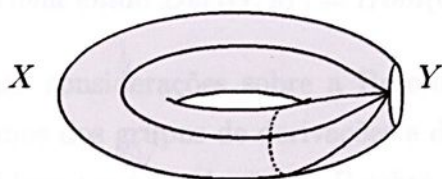
**2.7.16 Teorema:** Se  $(G, S)$  é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane  $(X, Y)$  com  $X$  uma variedade de dimensão  $n$ , compacta, orientável e com bordo  $Y$  conexo então  $(G, S)$  é um  $PD^n$ -par sobre  $\mathbb{Z}$  (e portanto também sobre  $\mathbb{Z}_2$ ).

**Demonstração:** [5] (teor.6.3). ■

**2.7.17 Exemplo:** Consideremos  $G = \pi_1(X)$ , onde  $X$  é uma superfície fechada orientada diferente de  $S^2$  da qual um disco aberto  $D^2$  foi removido, e  $S = \pi_1(\partial X)$ .

Vimos em 2.6.17(2) que o par  $(G = \pi_1(X), S = \pi_1(\partial X))$  é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane  $(X, \partial X)$ . Como  $X$  é uma variedade de dimensão 2, compacta, orientável e com bordo  $\partial X = D^2$  conexo segue, pelo teorema anterior, que  $(G, S)$  é um  $PD^2$ -par sobre  $R$ .

Em particular, se  $X = T^2 - D^2$  (isto é, o toro  $T^2$  do qual um disco aberto  $D^2$  foi removido) temos que  $Y = \partial X \approx S^1$ ,  $G = \pi_1(X) = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  e  $S = \pi_1(\partial X) = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Assim, o par  $(G, S) = (\langle a \rangle * \langle b \rangle, \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle)$  é um  $PD^2$ -par sobre  $R$ .



**2.7.18 Observação:** Pode-se definir par de dualidade para  $(G, S)$ , onde  $G$  é um grupo e  $S = \{S_i \mid i \in I\}$  uma família não vazia de subgrupos (não necessariamente distintos) de  $G$  e há uma generalização do teorema anterior onde  $Y = \partial X$  não é necessariamente conexo ([5]).



## Capítulo 3

# Cohomologia de Grupos, Derivações e Levantamentos de Extensões

### 3.1 Cohomologia de Grupos e Derivações

**3.1.1 Definição:** *Sejam  $G$  um grupo e  $M$  um  $RG$ -módulo. O grupo das derivações de  $G$  em  $M$  é definido por*

$$Der(G, M) = \{d : G \rightarrow M \mid d(gg') = d(g) + g \cdot d(g'), \forall g, g' \in G\}$$

*e o subgrupo das derivações principais, por*

$$P(G, M) = \{d_m \in Der(G, M), m \in M \mid d_m(g) = g \cdot m - m, \forall g \in G\}.$$

#### 3.1.2 Observações:

(1) *Se  $d \in Der(G, M)$  então  $d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) + 1 \cdot d(1) = d(1) + d(1)$ , o que implica em  $d(1) = 0$ .*

(2) *Se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial então  $Der(G, M) = Hom(G, M)$  e  $P(G, M) = 0$ .*

Faremos a seguir algumas considerações sobre a Resolução Bar e daremos uma interpretação de  $H^1(G, M)$  em termos dos grupos de derivações e derivações principais.

Dado um grupo  $G$ , consideremos a resolução de  $R$  sobre  $RG$

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

como sendo a Resolução Bar (dada em 1.5.3(1)). Assim, cada  $F_n$  é o  $R$ -módulo livre gerado pelos símbolos  $[g_1 \mid \dots \mid g_n]$  e

$$\partial_n([g_1 \mid \dots \mid g_n]) = g_1[g_2 \mid \dots \mid g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 \mid \dots \mid g_i g_{i+1} \mid \dots \mid g_n] + \dots + (-1)^n [g_1 \mid \dots \mid g_{n-1}].$$

Denotemos por  $C^*(G, M)$  o complexo  $\text{Hom}_{RG}(F, M)$  e daí  $C^n(G, M) = \text{Hom}_{RG}(F_n, M)$ . Logo, um elemento  $f \in C^n(G, M)$  é um homomorfismo

$$\begin{aligned} f : F_n &\rightarrow M \\ [g_1 | \dots | g_n] &\mapsto f([g_1 | \dots | g_n]) \end{aligned}$$

Identificando  $[g_1 | \dots | g_n]$  com  $(g_1, \dots, g_n)$ , podemos ver  $f : G^n = G \times \dots \times G \rightarrow M$  como uma função de  $n$  variáveis. Por convenção,  $G^0$  é um conjunto com um elemento (por exemplo  $[]$ , o símbolo usado quando introduzimos a resolução padrão) de modo que  $C^0(G, M) \simeq M$ .

Assim, o operador cobordo  $\delta^{n-1} : C^{n-1}(G, M) \rightarrow C^n(G, M)$  é dado por:

$$\begin{aligned} (\delta^{n-1}(f))(g_1, \dots, g_n) &:= f(\partial_n(g_1, \dots, g_n)) \\ &= g_1 f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

Por exemplo, para  $n = 1$  temos

$$\delta^0(f)(g_1) = f(\partial_1(g_1)) = g_1 f([]) - f([])$$

e para  $n = 2$

$$\delta^1(f)(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1).$$

**3.1.3 Proposição:** Se  $G$  é um grupo e  $M$  um  $RG$ -módulo então

$$H^1(G, M) \simeq \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)}.$$

**Demonstração:** Consideremos o complexo:

$$C^*(G, M) : 0 \rightarrow C^0(G, M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta^1} C^2(G, M) \rightarrow \dots$$

definido anteriormente. Por definição,  $H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^1}{\text{Im } \delta^0}$ .

Temos:

(I)  $\text{Ker } \delta^1 = \text{Der}(G, M)$ :

Seja  $f \in C^1(G, M)$ . Então  $f : G \rightarrow M$  e  $\delta^1(f) : G^2 \rightarrow M$  com

$$\delta^1(f)(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1).$$

Assim

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker } \delta^1 &\iff \delta^1(f) = 0 \iff \delta^1(f)(g_1, g_2) = 0, \forall g_1, g_2 \in G \iff \\ &\iff f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1 f(g_2), \forall g_1, g_2 \in G \iff f \in \text{Der}(G, M). \end{aligned}$$

(II)  $\text{Im } \delta^0 = P(G, M)$ :

Se  $d \in \text{Im } \delta^0$  então existe  $f : G^0 \rightarrow M$  tal que  $\delta^0(f) = d$ . Assim, para todo  $g \in G$ ,

$$d(g) = \delta^0(f)(g) = g f([]) - f([]).$$

Como  $f([ ]) \in M$  segue que  $f([ ]) = m \in M$ . Daí  $d(g) = gm - m$ , ou seja,  $d \in P(G, M)$ .

Reciprocamente, se  $d \in P(G, M)$  então  $d(g) = g \cdot m - m$  para algum  $m \in M$ . Seja  $f : G^0 \rightarrow M$  tal que  $f([ ]) := m$ . Logo  $d(g) = \delta^0(f)(g)$  e portanto  $d = \delta^0(f) \in \text{Im } \delta^0$ .

De (I) e (II) concluímos que  $H^1(G, M) = \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)}$ . ■

**3.1.4 Corolário:** Se  $G$  é um grupo e  $M$  um  $RG$ -módulo trivial então  $H^1(G, M) \simeq \text{Hom}(G, M)$ .

**Demonstração:** Segue da proposição anterior e da observação 3.1.2(2). ■

### 3.1.5 Exemplos:

(1) Seja  $G$  um grupo e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial. Considerando alguns exemplos específicos temos:

(a)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}_3$  :

Os homomorfismos de  $G$  em  $\mathbb{Z}_3$  são dados por:

$$f_0(t^k) = \bar{0}, \quad f_1(t^k) = \bar{k}, \quad f_2(t^k) = \bar{2k}.$$

$\forall t^k \in G$ . Daí  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_3$ . Logo

$$H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_3.$$

(b)  $G = \mathbb{Z}_n$  e  $M = \mathbb{Z}$  :

O único homomorfismo de  $\mathbb{Z}_n$  em  $\mathbb{Z}$  é o homomorfismo nulo e daí

$$H^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \simeq 0.$$

(c)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$  e  $M = \mathbb{Z}_2$  :

Temos que os homomorfismos de  $G$  em  $\mathbb{Z}_2$  são dados por:

$$f_0(t^k) = \bar{0}, \quad f_1(t^k) = \bar{k}.$$

$\forall t^k \in G$ . Assim

$$H^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

(2) Seja  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Considere  $M = RG$  ( $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ ) visto como um  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação natural:  $t^k \cdot (rt^{k'}) := rt^{k+k'}$ , para quaisquer  $t^k, t^{k'} \in G$  e  $r \in R$ .

Vamos mostrar, usando derivações, que  $H^1(G, RG) \simeq R$  (compare com o exemplo 2.1.6(2)

(b) e (c)).

(a) Suponhamos que  $M = \mathbb{Z}G$ .

Se  $d$  é um elemento do  $\text{Der}(G, \mathbb{Z}G)$ , usando o princípio de indução finita (sobre  $k \in \mathbb{Z}$ ), temos que

$$d(t^0) = d(1) = 0, \quad d(t^k) = \sum_{j=0}^{k-1} t^j d(t) \quad e \quad d(t^{-k}) = \sum_{j=1}^k (-t^{-j}) d(t), \quad \forall k > 0. \quad (*)$$



ou seja,  $d$  depende somente de  $d(t)$ . Daí, todo elemento  $x \in \mathbb{Z}G$  dá origem a uma derivação  $d$  em  $\text{Der}(G, \mathbb{Z}G)$ , pois basta tomarmos  $d(t) = x$  e estender de modo geral usando (\*). Assim,

$$\text{Der}(G, \mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}G.$$

Em particular, para cada  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $d^r(t) := r1$  dá origem a uma derivação e temos  $\{d^r \mid r \in \mathbb{Z}\} = \langle d^1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $\langle d^1 \rangle \subset \text{Der}(G, \mathbb{Z}G)$ .

Observemos que  $d^r$  não é principal e  $P(G, \mathbb{Z}G) \simeq \langle t - 1 \rangle$ .

Mostremos que: “ $\forall d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z}G)$ ,  $\exists d_m \in P(G, \mathbb{Z}G)$  e  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $d - d_m = d^r$ ”, pois isto implica que  $d + P(G, \mathbb{Z}G) = d^r + P(G, \mathbb{Z}G)$  e daí, concluímos que

$$\frac{\text{Der}(G, \mathbb{Z}G)}{P(G, \mathbb{Z}G)} \simeq \{d^r + P(G, \mathbb{Z}G) \mid r \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}.$$

Para isso, vamos precisar da seguinte afirmação:

Afirmação: Se  $d(t) = t^k - 1$  ou  $d(t) = t^{-k} - 1$ , com  $k > 0$ , então  $d \in P(G, \mathbb{Z}G)$ .

De fato:

•  $d(t) = t^k - 1 = (t - 1)(t^{k-1} + \dots + t + 1) = (t - 1)\tilde{m} = d_{\tilde{m}}(t)$ , isto é,  $d = d_{\tilde{m}} \in P(G, \mathbb{Z}G)$ ;

•• para  $d(t) = t^{-k} - 1$ , temos

$$t^{-k} - t^k = (t - 1)(-t^{-k} - t^{-k+1} - \dots - t^0 - t - \dots - t^{k-1}) = (t - 1)\hat{m} = d_{\hat{m}}(t) \in P(G, \mathbb{Z}G).$$

Por outro lado,

$$t^{-k} - t^k = (t^{-k} - 1) - (t^k - 1) \stackrel{\bullet}{=} (t^{-k} - 1) - d_{\tilde{m}}(t) = d(t) - d_{\tilde{m}}(t)$$

Assim,

$$d_{\hat{m}}(t) = d(t) - d_{\tilde{m}}(t) \implies d(t) = d_{\hat{m}}(t) + d_{\tilde{m}}(t) \implies d \in P(G, \mathbb{Z}G).$$

Agora,  $\forall d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z}G)$  temos

$$\begin{aligned} d(t) = x &= r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \dots + r_n t^{k+n} \\ &= r_0(t^k - 1) + r_1(t^{k+1} - 1) + \dots + r_n(t^{k+n} - 1) + \underbrace{r_0 1 + r_1 1 + \dots + r_n 1}_{r1} \\ &= d_m(t) + d^r(t) \end{aligned}$$

isto é, existe  $m \in \mathbb{Z}G$  e  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $d - d_m = d^r$ .

Logo,

$$H^1(G, \mathbb{Z}G) \simeq \frac{\text{Der}(G, \mathbb{Z}G)}{P(G, \mathbb{Z}G)} \simeq \mathbb{Z}.$$

(b) Tomemos agora  $M = \mathbb{Z}_2 G$ :

Seja  $d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z}_2 G)$ . Analogamente, ao item (a) temos que:

•  $d$  depende somente de  $d(t)$ .

• todo  $y \in \mathbb{Z}_2 G$  dá origem a uma derivação  $d$  em  $\text{Der}(G, \mathbb{Z}_2 G)$ . Daí,  $\text{Der}(G, \mathbb{Z}_2 G) \simeq \mathbb{Z}_2 G$ .

- se  $d(t) = t^k - 1$  ou  $d(t) = t^{-k} - 1$ , com  $k > 0$ , então  $d \in P(G, \mathbb{Z}_2G)$ .

Consideremos um elemento qualquer  $d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z}_2G)$ . Temos

$$d(t) = t^{k_1} + t^{k_2} + \dots + t^{k_n} \in \mathbb{Z}_2G$$

Se  $n$  é par então  $d \in P(G, \mathbb{Z}_2G)$ , pois  $d(t) = (t^{k_1} - 1) + (t^{k_2} - 1) + \dots + (t^{k_n} - 1)$ . Daí  $d + P(G, \mathbb{Z}_2G) = 0 + P(G, \mathbb{Z}_2G)$ .

Agora, se  $n$  é ímpar temos

$$d(t) = (t^{k_1} - 1) + (t^{k_2} - 1) + \dots + (t^{k_n} - 1) + 1 \implies d + P(G, \mathbb{Z}_2G) = 1 + P(G, \mathbb{Z}_2G).$$

Assim, obtemos

$$H^1(G, \mathbb{Z}_2G) \simeq \frac{\text{Der}(G, \mathbb{Z}_2G)}{P(G, \mathbb{Z}_2G)} \simeq \{0 + P(G, \mathbb{Z}_2G), 1 + P(G, \mathbb{Z}_2G)\} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

(3) Sejam  $G = \{1, t\} \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $M = \mathbb{Z}$  visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo com a  $G$ -ação dada por:  $1 \cdot r := r$  e  $t \cdot r := -r$ ,  $\forall r \in \mathbb{Z}$ .

Se  $d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z})$  então  $d$  depende somente de  $d(t)$ , pois  $d(t^k) = d(1) = 0$  para  $k$  par, e  $d(t^k) = d(t)$  para  $k$  ímpar.

Cada  $r \in \mathbb{Z}$ , dá origem a uma derivação  $d^r : G \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$d^r(t^k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ é par} \\ r & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

para todo  $t^k \in G$ .

Por indução temos que  $d^r = rd^1$  e daí  $\text{Der}(G, \mathbb{Z}) = \langle d^1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$ .

Assim, se  $r = 2m$  então  $d^r = d_{-m} \in P(G, \mathbb{Z})$ , pois

$$d^r(t) = r = 2m \quad \text{e} \quad d_{-m}(t) = t \cdot (-m) - (-m) = m + m = 2m.$$

Agora, se  $r = -2m$  segue que  $d^r = d_m \in P(G, \mathbb{Z})$ , pois

$$d^r(t) = r = -2m \quad \text{e} \quad d_m(t) = t \cdot m - m = -m - m = -2m.$$

Logo,  $P(G, \mathbb{Z}) = \langle d^0 \rangle \simeq 2\mathbb{Z}$ .

Portanto

$$H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\text{Der}(G, \mathbb{Z})}{P(G, \mathbb{Z})} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

o que confere com o obtido em 2.1.6(3)(b).

**3.1.6 Definição:** Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo. Definimos os grupos abelianos  $\text{Der}(G, S, M)$  e  $P(G, S, M)$ , respectivamente, por:

$$\text{Der}(G, S, M) := \{d \in \text{Der}(G, M) \mid d|_S = 0\}$$

$$P(G, S, M) := \{d_m \in P(G, M) \mid d_m|_S = 0\}.$$



**3.1.7 Observação:** Temos que  $Der(G, S, M) \subset Der(G, M)$  e  $P(G, S, M) \subset P(G, M)$ . Tomando  $S = \{1\}$  obtemos, claramente, que  $Der(G, \{1\}, M) = Der(G, M)$  e  $P(G, \{1\}, M) = P(G, M)$ . Agora, se  $S = G$  então  $Der(G, G, M) = 0 = P(G, G, M)$ .

Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo, nosso objetivo agora é mostrar que  $H^1(G, S, M) \simeq Der(G, S, M)$ . Antes, porém, faremos algumas considerações e provaremos dois lemas.

Vimos que  $Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M) := Coind_S^G M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo com a  $G$ -ação dada por  $g \cdot f(g') := f(g'g)$ , para todo  $g, g' \in G$ . Consideremos o  $\mathbb{Z}G$ -monomorfismo (composto)  $\gamma$ :

$$M \xrightarrow{\phi} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{j} Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)$$

$\gamma$

onde  $j$  é a inclusão e  $\phi$  é o isomorfismo dado por  $\phi(m)(g) = g \cdot m, \forall g \in G$  e  $m \in M$ .

Tomando

$$\Gamma(M) := Coker \gamma = \frac{Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)}{Im \gamma},$$

observamos que  $\Gamma(M)$  é  $\mathbb{Z}G$ -módulo com a ação induzida da ação do  $Coind_S^G M$ , isto é,  $g \cdot (f + Im \gamma) := (g \cdot f) + Im \gamma$ , onde  $g \cdot f(g') := f(g'g)$  para todo  $g, g' \in G$  e  $f \in Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)$ . Temos então os seguintes resultados:

**3.1.8 Lema:**  $\Gamma(M)^G \simeq Der(G, S, M)$  como grupos abelianos.

**Demonstração:** Podemos fazer as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M) &\equiv \{f : G \rightarrow M \mid f(sg) = sf(g), \forall s \in S, g \in G\} \stackrel{not.}{=} U_S; \\ Im \gamma &= Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \equiv \{f : G \rightarrow M \mid f(g_1g_2) = g_1f(g_2), \forall g_1, g_2 \in G\} \\ &= \{f : G \rightarrow M \mid f(g) = gf(1), \forall g \in G\} \stackrel{not.}{=} U, \end{aligned}$$

pois a aplicação

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M) &\rightarrow U_S \\ \tilde{f} &\mapsto f; \quad f(g) := \tilde{f}(1g) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos (abelianos) que leva  $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)$  em  $U$ . Além disso, podemos definir uma  $G$ -ação em  $U_S$  por considerar, como em  $Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)$ ,  $(g \cdot f)(g_1) := f(g_1g)$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(M)^G &:= \{(f + Im \gamma) \in \Gamma(M) \mid g \cdot (f + Im \gamma) = f + Im \gamma, \forall g \in G\} \\ &= \{(f + Im \gamma) \in \Gamma(M) \mid g \cdot f - f \in Im \gamma, \forall g \in G\} \end{aligned}$$

Seja  $f \in Hom_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)$  tal que  $(f + Im \gamma) \in \Gamma(M)^G$ . Então  $g \cdot f - f \in Im \gamma, \forall g \in G$ . Assim  $(g \cdot f - f)(g_1g_2) = g_1[(g \cdot f - f)(g_2)] = g_1[f(g_2g) - f(g_2)] = g_1f(g_2g) - g_1f(g_2)$ , para todo  $g, g_1, g_2 \in G$ .



Por outro lado,  $(g \cdot f - f)(g_1 g_2) = (g \cdot f)(g_1 g_2) - f(g_1 g_2) = f(g_1 g_2 g) - f(g_1 g_2)$ , para quaisquer  $g, g_1, g_2 \in G$ .

Logo,  $\forall g, g_1, g_2 \in G$ ,  $f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1 g_2 g) - g_1 f(g_2 g)$  e daí, tomando  $g = (g_2)^{-1}$  nesta igualdade, temos

$$f(g_1 g_2) = g_1(f(g_2)) + f(g_1) - g_1 f(1).$$

Definimos  $f_c \in \text{Im } \gamma$  por  $f_c(g) = g f(1)$ . Então claramente  $(f - f_c) + \text{Im } \gamma = f + \text{Im } \gamma$  e facilmente verifica-se que  $(f - f_c)(g_1 g_2) = (f - f_c)(g_1) + g_1[(f - f_c)(g_2)]$  e  $(f - f_c)|_S = 0$ , isto é,  $f - f_c \in \text{Der}(G, S, M)$ . Além disso, quando  $f \in \text{Im } \gamma$  temos que  $f = f_c$ .

Daí, considerando

$$\begin{aligned} \phi: \quad \Gamma(M)^G &\rightarrow \text{Der}(G, S, M) \\ f + \text{Im } \gamma &\mapsto f - f_c \end{aligned}$$

pode-se mostrar que  $\phi$  está bem definido e é um isomorfismo. ■

**3.1.9 Lema:** *Sejam  $(G, S)$  um par de grupos,  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo e  $\Delta$  o núcleo da aplicação aumentação  $\varepsilon: \mathbb{Z}(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Então*

$$\Gamma(M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, M)$$

como  $\mathbb{Z}G$ -módulos à esquerda.

**Demonstração:** Temos que a seqüência de  $\mathbb{Z}G$ -módulos:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{j} \text{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{p} \Gamma(M) \rightarrow 0,$$

com  $j$  a inclusão e  $p$  a projeção canônica, é exata.

Consideremos a seqüência de  $\mathbb{Z}G$ -módulos

$$0 \rightarrow \Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

com  $i$  e  $\varepsilon$ , respectivamente, as aplicações inclusão e aumentação. Como  $\mathbb{Z}$  é  $\mathbb{Z}$ -projetivo segue, por [6] (prop.I.8.2, p.27), que a seqüência anterior cinde. Daí, por [14] (teor.I.8.8, p.74), a seqüência  $\mathbb{Z}G$ -módulos (com a  $G$ -ação diagonal)

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{(\varepsilon)^{\#}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/S), M) \xrightarrow{(i)^{\#}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, M) \rightarrow 0$$

também é exata.

Agora, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \xrightarrow{j} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M) & \xrightarrow{p} & \Gamma(M) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \downarrow \chi \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) & \xrightarrow{\varepsilon^{\#}} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/S), M) & \xrightarrow{i^{\#}} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, M) \rightarrow 0 \end{array}$$

com  $\psi(f')(1) := f'(11_G), \forall f' \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M), \phi(\bar{f})(gS) := g\bar{f}(g^{-1}), \forall \bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)$  e  $\chi(f + \text{Im } \gamma) := (i^\# \circ \phi)(f), \forall f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}G, M)$ .

Temos, por 1.4.10, que  $\psi$  e  $\phi$  são  $\mathbb{Z}G$ -isomorfismos.

Além disso, os quadrados (I) e (II) são comutativos.

Logo, pelo Lema dos Cinco ([17], lema I.3.3, p.14), temos que  $\chi$  é um  $\mathbb{Z}G$ -isomorfismo. ■

**3.1.10 Teorema:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo então

$$H^1(G, S, M) \simeq \text{Der}(G, S, M).$$

**Demonstração:** Vimos, em 3.1.8, que  $\text{Der}(G, S, M) \simeq \Gamma(M)^G$ . Agora, por 2.1.4, temos que  $H^0(G, \Gamma(M)) \simeq \Gamma(M)^G$ . Como, por 3.1.9,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, M) \simeq \Gamma(M)$  (como  $\mathbb{Z}G$ -módulos) segue que  $H^0(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, M)) \simeq H^0(G, \Gamma(M))$ . Logo,

$$H^1(G, S, M) := H^0(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, M)) \simeq H^0(G, \Gamma(M)) \simeq (\Gamma(M))^G \simeq \text{Der}(G, S, M). \quad \blacksquare$$

**3.1.11 Corolário:** Se  $G$  é um grupo e  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo então:

(i)  $H^1(G, G, M) = 0;$

(ii)  $\frac{H^1(G, \{1\}, M)}{P(G, M)} \simeq H^1(G, M).$

**3.1.12 Observação:** Em geral,  $H^1(G, \{1\}, M) \neq H^1(G, M)$ . Uma situação em que ocorre a igualdade é quando  $M$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial pois neste caso  $P(G, M) = 0$ .

**3.1.13 Exemplos:**

Usando o teorema anterior, vamos calcular  $H^1(G, S, M)$  considerando nos exemplos dados em 3.1.5 alguns subgrupos particulares  $S$  de  $G$ .

(1)  $M$  visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial:

(a)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}_3$  :

Se  $S = \langle t^3 \rangle \simeq 3\mathbb{Z}$  segue que toda derivação  $d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z}_3) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}_3)$  é tal que  $d|_S = 0$  e daí

$$H^1(\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_3.$$

Agora, tomando  $S = \langle t^2 \rangle \simeq 2\mathbb{Z}$  temos que  $(f_0)|_S = \bar{0}$  e  $f_1(t^2) = \bar{2} \neq \bar{0}$ . Assim,

$$H^1(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) = 0.$$

(b)  $G = \mathbb{Z}_n$  e  $M = \mathbb{Z}$  :

Para qualquer subgrupo  $S$  de  $\mathbb{Z}_n$  temos

$$H^1(\mathbb{Z}_n, S, \mathbb{Z}) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}_n, S, \mathbb{Z}) = 0$$

pois  $\text{Der}(\mathbb{Z}_n, S, \mathbb{Z}) \subset \text{Der}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ .



(c)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$  e  $M = \mathbb{Z}_2$ :

Se  $S = \langle t^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$  então toda derivação  $d \in \text{Der}(G, \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)$  é tal que  $d|_S = 0$ . Assim,  $H^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ .

(2) Analisando o exemplo (2) temos, nos dois casos ( $M = RG$ ,  $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ ), que para qualquer subgrupo  $S$  de  $G \simeq \mathbb{Z}$  com  $S \neq \{1\}$ ,  $H^1(G, S, M) = 0$ . Agora,  $H^1(G, \{1\}, RG) \simeq \text{Der}(G, \{1\}, RG) = \text{Der}(G, RG) \simeq RG$ . Assim, temos que  $H^1(G, \{1\}, M) \neq H^1(G, M)$  (pois como vimos  $H^1(G, M) \simeq R$ ).

(3) Analisando o exemplo (3) temos que os únicos subgrupos de  $G \simeq \mathbb{Z}_2$  são os triviais. Daí,  $H^1(G, \{1\}, M) \simeq \text{Der}(G, \{1\}, M) = \text{Der}(G, M) \simeq \mathbb{Z}$  e  $H^1(G, G, M) = 0$ . Neste caso, também temos  $H^1(G, \{1\}, M) \neq H^1(G, M) \simeq \mathbb{Z}_2$ .

**3.1.14 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo então temos o seguinte isomorfismo de  $R$ -módulos:

$$\text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) \simeq \frac{\text{Der}(G, S, M)}{P(G, S, M)}.$$

**Demonstração:** Por 3.1.3,

$$H^1(G, M) \simeq \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)} \quad \text{e} \quad H^1(S, M) \simeq \frac{\text{Der}(S, M)}{P(S, M)}.$$

Assim, podemos ver a aplicação restrição, dada por

$$\begin{aligned} \text{res}_{S,M}^G : \quad H^1(G, M) &\rightarrow H^1(S, M) \\ d + P(G, M) &\mapsto d|_S + P(S, M) \end{aligned}$$

com  $d \in \text{Der}(G, M)$ .

Daí,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) &= \{d + P(G, M) \mid d|_S \in P(S, M)\} \\ &= \{d + P(G, M) \mid d|_S = d_m, \text{ para algum } m \in M\} \end{aligned}$$

e temos bem definida a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \chi : \quad \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) &\rightarrow \frac{\text{Der}(G, S, M)}{P(G, S, M)} \\ d + P(G, M) &\mapsto (d - \tilde{d}_m) + P(G, S, M) \end{aligned}$$

onde  $m$  é tal que  $d|_S = d_m \in P(S, M)$  e  $\tilde{d}_m \in P(G, M)$  é a extensão natural (em  $G$ ) de  $d_m$  (isto é,  $\tilde{d}_m(g) = g \cdot m - m$ ,  $\forall g \in G$ ).

Claramente  $\chi$  é um homomorfismo e temos que

(I)  $\chi$  é injetora:

$$\begin{aligned} d + P(G, M) \in \text{Ker } \chi &\Rightarrow \chi(d + P(G, M)) = 0 \Rightarrow d - \tilde{d}_m \in P(G, S, M) \Rightarrow \\ &\Rightarrow d - \tilde{d}_m \in P(G, M) \xrightarrow{\tilde{d}_m \in P(G, M)} d \in P(G, M) \Rightarrow d + P(G, M) = 0. \end{aligned}$$





(II)  $\chi$  é sobrejetora:

Seja  $d + P(G, S, M) \in \text{Der}(G, S, M)/P(G, S, M)$ . Então  $d \in \text{Der}(G, M)$  e  $d|_S = 0 = d_0$  (em  $P(S, M)$ ). Assim, existe  $d + P(G, M)$  tal que

$$\chi(d + P(G, M)) = (d - \tilde{d}_0) + P(G, S, M) = d + P(G, S, M).$$

Logo  $\chi$  é um isomorfismo de grupos abelianos e conseqüentemente um  $R$ -isomorfismo. ■

**3.1.15 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos e  $M$  um  $RG$ -módulo trivial então

$$\text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G) \simeq \text{Der}(G, S, M) \simeq H^1(G, S, M).$$

**3.1.16 Observação:** Seja  $G$  é um grupo e  $M$  um  $RG$ -módulo. Então

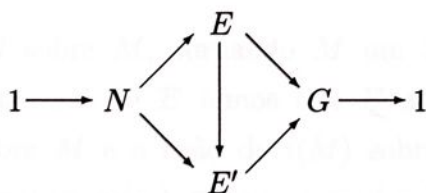
- (i)  $\text{Ker}(\text{res}_{\{1\}, M}^G) \simeq H^1(G, M) \simeq \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)}$  e em particular, se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial segue que  $\text{Ker}(\text{res}_{\{1\}, M}^G) \simeq \text{Hom}(G, M)$ .  
(ii)  $\text{Ker}(\text{res}_{G, M}^G) \simeq 0$ .

## 3.2 Extensões Cindidas e Cohomologia de Grupos

**3.2.1 Definição:** Uma extensão de um grupo  $G$  por um grupo  $N$  é uma seqüência exata de grupos

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

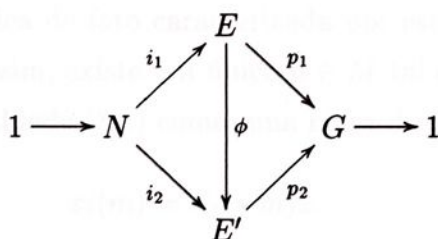
**3.2.2 Definição:** Sejam  $1 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$  e  $1 \longrightarrow N \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 1$  duas extensões de  $G$  por  $N$ . Dizemos que tais extensões são equivalentes se existe um homomorfismo  $\phi : E \rightarrow E'$  que torna o diagrama:



comutativo.

**3.2.3 Proposição:** A aplicação  $\phi$  da definição anterior é necessariamente um isomorfismo.

**Demonstração:** Sejam  $1 \longrightarrow N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{p_1} G \longrightarrow 1$  e  $1 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} E' \xrightarrow{p_2} G \longrightarrow 1$  extensões equivalentes de  $G$  por  $N$ . Daí, existe um homomorfismo  $\phi : E \rightarrow E'$  tal que o diagrama



é comutativo, ou seja,  $\phi \circ i_1 = i_2$  e  $p_2 \circ \phi = p_1$ .

Como  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{p_1} G \rightarrow 1$  e  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i_2} E' \xrightarrow{p_2} G \rightarrow 1$  são seqüências exatas segue que  $\text{Im } i_1 = \text{Ker } p_1$  e  $\text{Im } i_2 = \text{Ker } p_2$ .

Temos que:

(I)  $\phi$  é monomorfismo:

Seja  $x \in E$  tal que  $\phi(x) = 1$ . Então

$$\phi(x) = 1 \Rightarrow p_2(\phi(x)) = 1 \Rightarrow p_1(x) = 1 \Rightarrow x \in \text{Ker } p_1 = \text{Im } i_1 \Rightarrow x = i_1(n), \quad n \in N.$$

Assim,  $1 = \phi(x) = \phi(i_1(n)) = i_2(n)$ .

Como  $i_2(n) = 1$  e  $i_2$  é monomorfismo segue que  $n = 1$ . Logo,  $x = i_1(n) = i_1(1) = 1$ .

Portanto,  $\text{Ker } \phi = \{1\}$ .

(II)  $\phi$  é epimorfismo:

Seja  $y \in E'$ . Então  $p_2(y) \in G$  e como  $p_1$  é epimorfismo segue que existe  $\tilde{x} \in E$  tal que  $p_1(\tilde{x}) = p_2(y)$ .

Consideremos  $z = y(\phi(\tilde{x}))^{-1} \in E'$ . Daí

$$p_2(z) = p_2(y)p_2(\phi(\tilde{x}))^{-1} = p_2(y)(p_1(\tilde{x}))^{-1} = 1 \Rightarrow z \in \text{Ker } p_2 = \text{Im } i_2 \Rightarrow z = i_2(n), \quad n \in N.$$

Seja  $x = i_1(n)\tilde{x} \in E$ . Logo  $\phi(x) = \phi(i_1(n))\phi(\tilde{x}) = i_2(n)\phi(\tilde{x}) = z\phi(\tilde{x}) = y$ . ■

Vamos considerar o caso em que  $N$  é um grupo abeliano, denotado aditivamente e representado por  $M$ . Uma consequência interessante é que, neste caso, uma extensão

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

dá origem a uma ação de  $G$  sobre  $M$ , tornando  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo, da seguinte forma: como  $i(M)$  é um subgrupo normal de  $E$  temos que  $E$  atua sobre  $i(M)$  por conjugação, conseqüentemente  $E$  atua sobre  $M$  e a ação de  $i(M)$  sobre  $M$  é trivial (pois  $\forall x \in E$  e  $m \in M \equiv i(M)$ ,  $x \cdot m \equiv x \cdot i(m) := xi(m)x^{-1}$ , e se  $x = i(m_1)$ , como  $M$  é abeliano, segue que  $x \cdot m = i(m_1)i(m)i(m_1)^{-1} = i(m_1mm_1^{-1}) = i(m) \equiv m$ ). Assim existe uma ação induzida de  $G$  sobre  $M$  da seguinte maneira: se  $g = \pi(x) \in G$  então  $g * m := n$ , sendo que  $n \in M$  é tal que  $i(n) = xi(m)x^{-1}$ , ou seja, a ação de  $G$  sobre  $M$  é caracterizada por

$$i(g * m) = xi(m)x^{-1}. \quad (3.1)$$

Notemos que esta ação fica de fato caracterizada por esta igualdade, pois  $i$  é injetora e  $xi(m)x^{-1} \in \text{Ker } \pi = \text{Im } i$ . Assim, existe um único  $n \in M$  tal que  $i(n) = xi(m)x^{-1}$ . Às vezes, é conveniente reescrever a igualdade (3.1) como uma regra de comutação

$$xi(m) = i(g * m)x. \quad (3.2)$$



A partir de agora, fixemos um grupo abeliano  $M$  com uma  $G$ -ação (ou equivalentemente, um  $\mathbb{Z}G$ -módulo), e seja

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (3.3)$$

uma extensão cuja ação induzida de  $G$  sobre  $M$  coincide com a ação de  $G$  sobre  $M$  inicialmente dada.

**3.2.4 Definição:** Dizemos que (3.3) *cinde* ou é *cindida* se existe um homomorfismo  $l : G \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ l = id_G$ . Um tal homomorfismo será chamado um *levantamento da extensão*.

**3.2.5 Definição:** Sejam  $l_1$  e  $l_2$  dois levantamentos de uma extensão (cindida). Dizemos que  $l_1$  e  $l_2$  são  *$M$ -conjugados* se existe um elemento  $m \in M$  tal que  $l_1(g) = i(m)l_2(g)i(m)^{-1}$ , para todo  $g \in G$ .

**3.2.6 Observação:** A definição acima dá origem a uma relação de equivalência e portanto podemos falar em *classes de equivalência*  $[l]$ . E ainda, se  $E$  for abeliano,  $l_1$  e  $l_2$  são  *$M$ -conjugados* se, e somente se,  $l_1 = l_2$ . Daí,  $[l_1] = \{l_1\}$ , ou seja, as classes de  *$M$ -conjugação* são *unitárias*.

**3.2.7 Definição:** Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo e considere a seguinte operação sobre  $M \times G$ :

$$(m, g) \star (n, h) := (m + g \cdot n, gh).$$

É fácil ver que  $M \times G$  com a operação definida acima é um grupo com elemento neutro  $(0, 1_G)$  e o elemento inverso de  $(m, g)$  é  $(-g^{-1} \cdot m, g^{-1})$ . Este grupo é denominado o *produto semi-direto* de  $M$  por  $G$  e denotado por  $M \rtimes G$ .

**3.2.8 Observação:** No caso em que  $G$  atua trivialmente em  $M$ ,  $M \rtimes G = M \times G$  com a operação de produto direto usual.

**3.2.9 Exemplo:** Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo e  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \longrightarrow 1$  uma extensão, com  $i'(m) = (m, 1)$  e  $\pi'(m, g) = g$ , para todo  $m \in M$  e  $g \in G$  (aplicações inclusão e projeção canônica). Podemos verificar que a ação induzida de  $G$  sobre  $M$  por esta extensão coincide com a ação de  $G$  sobre  $M$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo e esta extensão *cinde*, pois  $l(g) = (0, g)$  é um *levantamento* (chamado *levantamento trivial*). Além disso,

$$\begin{aligned} [l] &= \{l_1 : G \rightarrow M \rtimes G \mid l_1(g) = i'(m)l(g)i'(m)^{-1}, \text{ para algum } m \in M \text{ e todo } g \in G\} \\ &= \{l_1 : G \rightarrow M \rtimes G \mid l_1(g) = (m - g \cdot m, g), \text{ para algum } m \in M \text{ e todo } g \in G\}. \end{aligned}$$



**3.2.10 Proposição:** As seguintes condições sobre a extensão (3.3) são equivalentes:

(i) (3.3) cinde;

(ii) (3.3) é equivalente a extensão

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \longrightarrow 1, \quad (3.4)$$

com  $M \rtimes G$  o produto semi-direto de  $G$  por  $M$  relativo a ação dada, e  $i'$  e  $\pi'$  são as aplicações inclusão e projeção canônica.

**Demonstração:** Suponhamos que (3.3) cinde. Então existe um homomorfismo  $l : G \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ l = id_G$ .

Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : M \rtimes G &\rightarrow E \\ (m, g) &\mapsto \phi(m, g) := i(m)l(g) \end{aligned}$$

Temos:

(I)  $\phi$  é homomorfismo:

Sejam  $m, n \in M$  e  $g, h \in G$ . Tomando  $x = l(g)$  na regra de comutação (3.2) segue que  $l(g)i(n) = i(g \cdot n)l(g)$ . Daí

$$\begin{aligned} \phi((m, g) \star (n, h)) &= \phi(m + g \cdot n, gh) = i(m + g \cdot n)l(gh) = i(m)i(g \cdot n)l(g)l(h) \\ &= i(m)l(g)i(n)l(h) = \phi(m, g)\phi(n, h). \end{aligned}$$

(II)  $\pi \circ \phi = \pi'$ :

Sejam  $m \in M$  e  $g \in G$ . Então, como  $\pi(i(m)) = 1$  e  $\pi \circ l = id_G$ , temos

$$(\pi \circ \phi)(m, g) = \pi(i(m)l(g)) = \pi(i(m))\pi(l(g)) = g = \pi'(m, g).$$

(III)  $\phi \circ i' = i$ :

Seja  $m \in M$ . Assim

$$(\phi \circ i')(m) = \phi(i'(m)) = \phi(m, 1) = i(m)l(1) = i(m).$$

De (I), (II) e (III) temos que (3.3) é equivalente a extensão  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \rightarrow 1$ .

Reciprocamente, suponhamos que existe um homomorfismo  $\phi : M \rtimes G \rightarrow E$  que comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & M \rtimes G & & \\ & \nearrow i' & \downarrow \phi & \searrow \pi' & \\ 1 \longrightarrow M & & & & G \longrightarrow 1 \\ & \searrow i & \uparrow \pi & & \\ & & E & & \end{array}$$

Definindo  $l : G \rightarrow E$  por  $l(g) = \phi(0, g)$ , para todo  $g \in G$ , temos que  $l$  é homomorfismo e  $\pi \circ l = id_G$ , ou seja,  $l$  é um levantamento da extensão (3.3). Logo (3.3) cinde. ■

**3.2.11 Observação:** A proposição anterior nos diz que existe somente uma extensão cindida de  $G$  por  $M$  (a menos de equivalência) associada a ação dada de  $G$  sobre  $M$ , a saber, a extensão dada no exemplo anterior. Queremos classificar (a menos de conjugação) os levantamentos possíveis de uma extensão cindida.

Por simplicidade, denotaremos por  $\mathcal{L}(G, M)$  o conjunto das classes de  $M$ -conjugação de levantamentos  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  da extensão (3.4).

**3.2.12 Teorema:** Se  $G$  é um grupo e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo então as classes de  $M$ -conjugação dos levantamentos da extensão cindida  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \rightarrow 1$  estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $H^1(G, M)$ .

**Demonstração:** Sabemos por 3.1.3 que  $H^1(G, M) \simeq \frac{Der(G, M)}{P(G, M)}$ . Assim é suficiente definirmos uma bijeção entre  $\mathcal{L}(G, M)$  e  $\frac{Der(G, M)}{P(G, M)}$ .

Uma função  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  tal que  $\pi \circ l = id_G$  tem a forma  $l(g) = (d(g), g)$  com  $d : G \rightarrow M$  uma função. Temos que

$$\begin{aligned} l \text{ é homomorfismo} &\iff l(gh) = l(g) \star l(h) &\iff (d(gh), gh) = (d(g) + g \cdot d(h), gh) \\ &\iff d(gh) = d(g) + g \cdot d(h) &\iff d \in Der(G, M) \end{aligned}$$

E ainda, dados dois levantamentos  $l_1(g) = (d_1(g), g)$  e  $l_2(g) = (d_2(g), g)$  temos que

$$\begin{aligned} l_1 \text{ e } l_2 \text{ são } M\text{-conjugados} &\iff l_1(g) = i'(m)l_2(g)i'(m)^{-1}, \text{ para algum } m \in M \text{ e todo } g \in G \iff \\ &\iff (d_1(g), g) = (m + d_2(g) - g \cdot m, g) \iff d_2(g) - d_1(g) = g \cdot m - m = d_m(g) \iff d_2 - d_1 \in P(G, M). \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} \frac{Der(G, M)}{P(G, M)} &\rightarrow \mathcal{L}(G, M) \\ d + P(G, M) &\mapsto [l] \end{aligned}$$

com  $l(g) := (d(g), g)$ , está bem definida e é uma bijeção. ■

### 3.2.13 Observações:

(1) Se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial então existe uma bijeção entre  $\mathcal{L}(G, M)$  e  $Hom(G, M)$ . Mais precisamente, temos que  $\mathcal{L}(G, M) = Hom(G, M) \times \{id_G\}$ .

(2) Como um levantamento  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  da extensão (cindida) é um homomorfismo, quando  $G$  é finitamente gerado, definindo  $l$  nos geradores (obedecendo a condição de que  $\pi \circ l = id$ ) e usando a definição da operação do grupo  $M \rtimes G$ , obtemos  $l(g)$  para todo  $g \in G$ .



### 3.2.14 Exemplos:

(1) Sejam  $G$  um grupo e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial. Vejamos, a seguir, alguns casos específicos.

(a)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}_3$  :

Temos que  $H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_3$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3)$  possui exatamente três classes de  $\mathbb{Z}_3$ -conjugação de levantamentos. Os levantamentos representantes destas classes (unitárias, pois  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$  é abeliano) são:

$$\begin{aligned} l_0(t^k) &= (k\bar{0}, t^k) = (\bar{0}, t^k), \\ l_1(t^k) &= (k\bar{1}, t^k) = (\bar{k}, t^k), \\ l_2(t^k) &= (k\bar{2}, t^k) = (\bar{2k}, t^k). \end{aligned}$$

para todo  $t^k \in G$ .

(b)  $G = \mathbb{Z}_n$  e  $M = \mathbb{Z}$  :

Temos que  $H^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \simeq 0$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$  possui apenas a classe do levantamento trivial. E ainda, esta classe é unitária, pois  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$  é abeliano.

(c)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$  e  $M = \mathbb{Z}_2$  :

Temos que  $H^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2)$  tem exatamente duas classes (unitárias, pois  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  é abeliano) de  $\mathbb{Z}_2$ -conjugação de levantamentos, os quais são dados por:

$$\begin{aligned} l_0(t^k) &= (k\bar{0}, t^k) = (\bar{0}, t^k), \\ l_1(t^k) &= (k\bar{1}, t^k) = (\bar{k}, t^k), \end{aligned}$$

para todo  $t^k \in G$ .

(d)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}G$  :

Temos que  $H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}G$  e para cada  $x \in \mathbb{Z}G$ ,

$$l_x(t^k) = (kx, t^k), \quad \forall t^k \in G$$

é um representante de uma classe (unitária) de  $\mathcal{L}(G, \mathbb{Z}G)$ .

(2) Consideremos  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = RG$  visto como  $RG$ -módulo com a  $G$ -ação natural:  $t^k \cdot (rt^{k'}) := rt^{k+k'}$ , para quaisquer  $t^k, t^{k'} \in G$  e  $r \in R$ .

(a) Se  $M = \mathbb{Z}G$  então as classes de  $\mathbb{Z}G$ -conjugação dos levantamentos da extensão  $0 \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $H^1(G, \mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}$ . Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , obtemos um representante dessas classes, a saber, o levantamento  $l_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}G \rtimes \mathbb{Z}$  definido por:

$$l_n(t^k) = \begin{cases} (0_{\mathbb{Z}G}, 1) & \text{se } k = 0 \\ (n1 + nt + \dots + nt^{k-1}, t^k) & \text{se } k > 0 \\ (-nt^{-1} - nt^{-2} - \dots - nt^k, t^k) & \text{se } k < 0, \end{cases}$$

para todo  $t^k \in G$ .





Note que, para  $G \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}G$ , se consideramos  $M$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial então  $\mathcal{L}(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{Z}G$  (exemplo anterior (1)(d)). Mas, se  $M$  é visto como  $\mathbb{Z}G$ -módulo com a ação natural vimos acima que  $\mathcal{L}(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{Z}$ . Isto nos mostra que se  $G$  é um grupo e  $M$  tem duas estruturas distintas de  $\mathbb{Z}G$ -módulo, que indicaremos por  $M$  e  $\widetilde{M}$ , então podemos ter  $\mathcal{L}(G, M)$  muito distinto de  $\mathcal{L}(G, \widetilde{M})$ .

(b) Agora, tomemos  $M = \mathbb{Z}_2G$ . Temos que  $H^1(G, \mathbb{Z}_2G) \simeq \mathbb{Z}_2$  e que a extensão cindida  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2G \rightarrow \mathbb{Z}_2G \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  tem exatamente duas classes de  $\mathbb{Z}_2G$ -conjugação de levantamentos. Os levantamentos representantes para essas classes são dados, para todo  $t^k \in G$ , por:

$$l_0(t^k) = (0_{\mathbb{Z}_2G}, t^k)$$

$$l_1(t^k) = \begin{cases} (0_{\mathbb{Z}_2G}, 1) & \text{se } k = 0 \\ (\bar{1}1 + \bar{1}t + \dots + \bar{1}t^{k-1}, t^k) & \text{se } k > 0 \\ (\bar{1}t^{-1} + \bar{1}t^{-2} + \dots + \bar{1}t^k, t^k) & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

(3) Consideremos  $G = \{1, t\} \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $M = \mathbb{Z}$  visto como  $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_2)$ -módulo com a  $\mathbb{Z}_2$ -ação dada da seguinte forma:  $1 \cdot r = r$  e  $t \cdot r = -r$ , para todo  $r \in \mathbb{Z}$ . Temos que  $H^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$  e a extensão  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$  tem duas classes de  $\mathbb{Z}$ -conjugação de levantamentos. Os levantamentos representantes dessas classes são dados, para todo  $t^k \in G$ , por:

$$l_0(t^k) = (0, t^k)$$

$$l_1(t^k) = \begin{cases} (0, t^k) = (0, 1) & \text{se } k \text{ é par} \\ (1, t^k) = (1, t) & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Denotemos por  $\mathcal{L}(G, S, M)$  o conjunto das classes de  $M$ -conjugação de levantamentos  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  da extensão (3.4) tais que  $l|_S = (0, id_S)$ . Assim,  $\mathcal{L}(G, S, M) \subset \mathcal{L}(G, M)$  e temos o seguinte resultado, que é uma generalização do teorema 3.2.12 no sentido que tomando  $S = \{1\}$  os dois teoremas coincidem.

**3.2.15 Teorema:** Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então existe uma bijeção entre  $\mathcal{L}(G, S, M)$  e  $\frac{H^1(G, S, M)}{P(G, S, M)}$ .

**Demonstração:** Como, por 3.1.10,  $H^1(G, S, M) \simeq Der(G, S, M)$  basta mostrarmos que existe uma aplicação bijetora entre  $\mathcal{L}(G, S, M)$  e  $\frac{Der(G, S, M)}{P(G, S, M)}$ .

Seja  $l : G \rightarrow M \rtimes G$  um levantamento. Assim,  $l(g) = (d(g), g)$  com  $d \in Der(G, M)$ . Se  $l|_S = (0, id_S)$  então  $d \in Der(G, S, M)$ .

Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}(G, S, M) &\rightarrow \frac{Der(G, S, M)}{P(G, S, M)} \\ [l] &\mapsto d + P(G, S, M) \end{aligned}$$



Verifiquemos que  $\psi$  está bem definida.

Sejam  $l_1 = (d_1(g), g)$  e  $l_2 = (d_2(g), g)$  dois levantamentos tais que  $[l_1] = [l_2]$ , ou seja,  $l_1$  e  $l_2$  são  $M$ -conjugados. Então  $d_2 - d_1 \in P(G, M)$ . Mas, como  $d_1, d_2 \in \text{Der}(G, S, M)$  temos que  $d_2 - d_1 \in P(G, S, M)$ . Portanto,  $\psi([l_1]) = \psi([l_2])$ .

Agora, consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : \frac{\text{Der}(G, S, M)}{P(G, S, M)} &\rightarrow \mathcal{L}(G, S, M) \\ d + P(G, S, M) &\mapsto [l] \end{aligned}$$

tal que  $l(g) := (d(g), g)$ .

Temos que  $\phi$  está bem definida, pois:

$$d_1 + P(G, S, M) = d_2 + P(G, S, M) \implies d_2 - d_1 \in P(G, S, M).$$

Em particular,  $d_2 - d_1 \in P(G, M)$  e daí  $l_1(g) = (d_1(g), g)$  e  $l_2(g) = (d_2(g), g)$  são  $M$ -conjugados. Logo  $[l_1] = [l_2]$  em  $\mathcal{L}(G, S, M)$ .

Além disso,  $\phi$  é a inversa de  $\psi$ . ■

**3.2.16 Corolário:** Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então os elementos de  $\mathcal{L}(G, S, M)$  estão em correspondência biunívoca com os elementos do  $\text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G)$ .

### 3.2.17 Observação:

(1) Se  $M$  é um  $RG$ -módulo trivial então  $\mathcal{L}(G, S, M) = \text{Hom}_S(G, M) \times \{id_G\}$ , sendo que  $\text{Hom}_S(G, M) = \{f : G \rightarrow M \mid f \text{ é homomorfismo e } f|_S = 0\}$ .

(2) Se, no teorema anterior,  $S = G$  então  $\mathcal{L}(G, G, M)$  possui somente a classe do levantamento trivial e  $\frac{H^1(G, G, M)}{P(G, G, M)} \simeq \frac{\text{Der}(G, G, M)}{P(G, G, M)} = 0$ .

**3.2.18 Proposição:** Sejam  $G$  um grupo e  $S$  um subgrupo normal de  $G$ . Então

$$\frac{H^1(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))} \simeq H^1(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

**Demonstração:** A idéia é mostrar que

$$\begin{aligned} \psi : \frac{\text{Der}(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))} &\rightarrow \frac{\text{Der}(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))} \\ f + P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S)) &\mapsto \tilde{f} + P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S)) ; \quad \tilde{f}(gS) := f(g) \end{aligned}$$

está bem definida e é um isomorfismo. Para maiores detalhes ver [2] (prop.4.1, p.284). ■

**3.2.19 Corolário:** Se  $G$  é um grupo e  $S$  é um subgrupo normal de  $G$  então existe uma bijeção entre  $\mathcal{L}(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$  e  $\mathcal{L}((G/S), \mathbb{Z}_2(G/S))$ .



### 3.2.20 Exemplos:

(1) Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $M$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.

(a)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}_3$  :

Se  $S = \langle t^3 \rangle \simeq 3\mathbb{Z}$  então  $\text{Ker}(\text{res}_{3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3}^{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq H^1(\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_3$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) = \mathcal{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3)$ , pois

$$\begin{aligned} l_0(t^{3k}) &= (\bar{0}, t^{3k}) \\ l_1(t^{3k}) &= (\overline{3k}, t^{3k}) = (\bar{0}, t^{3k}) \\ l_2(t^{3k}) &= (\overline{2(3k)}, t^{3k}) = (\bar{0}, t^{3k}). \end{aligned}$$

Agora, se  $S = \langle t^2 \rangle \simeq 2\mathbb{Z}$  segue que  $\text{Ker}(\text{res}_{2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3}^{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \simeq H^1(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) = 0$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3)$  tem somente o levantamento  $l_0(t^{2k}) = (\bar{0}, t^{2k})$ , pois  $l_1(t^2) = (\bar{2}, t^2) \neq (\bar{0}, t^2)$  e  $l_2(t^2) = (\overline{2(2)}, t^2) \neq (\bar{0}, t^2)$ . Assim,  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) \neq \mathcal{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3)$ .

(b)  $G = \mathbb{Z}_n$  e  $M = \mathbb{Z}$  :

Para qualquer  $S$  subgrupo de  $G$  temos que  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n, S, \mathbb{Z}) = \mathcal{L}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$  que possui somente a classe do levantamento trivial e  $\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}_n}) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}_n, S, \mathbb{Z}) \simeq H^1(\mathbb{Z}_n, S, \mathbb{Z}) = 0$ .

(c)  $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$  e  $M = \mathbb{Z}_2$  :

Tomando  $S = \langle t^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$  temos  $\text{Ker}(\text{res}_{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}_4}) \simeq \text{Der}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq H^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathcal{L}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2)$ , pois

$$\begin{aligned} l_0(t^{2k}) &= (\bar{0}, t^{2k}) \\ l_1(t^{2k}) &= (\overline{2k}, t^{2k}) = (\bar{0}, t^{2k}). \end{aligned}$$

(2) Consideremos o exemplo (2) dado anteriormente em 3.2.14 nos dois casos ( $M = RG$ ,  $R = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ ).

Para qualquer subgrupo  $S$  de  $G \simeq \mathbb{Z}$  com  $S \neq \{1\}$ , podemos concluir, analisando os levantamentos, que  $\mathcal{L}(G, S, M)$  possui somente a classe do levantamento trivial e temos que  $\text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G) \simeq \frac{\text{Der}(G, S, M)}{P(G, S, M)} \simeq \frac{H^1(G, S, M)}{P(G, S, M)} = 0$ . Assim,  $\mathcal{L}(G, S, M) \neq \mathcal{L}(G, M)$  se  $S \neq \{1\}$ .

Agora,  $\text{Ker}(\text{res}_{\{1\}, M}^G) \simeq H^1(G, M) \simeq R$  e  $\mathcal{L}(G, \{1\}, M) = \mathcal{L}(G, M)$ .

(3) Considerando o exemplo (3) dado em 3.2.14, temos que os únicos subgrupos de  $G \simeq \mathbb{Z}_2$  são os triviais.

Assim,  $\text{Ker}(\text{res}_{\{1\}, \mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}_2}) \simeq H^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_2, \{1\}, \mathbb{Z}) = \mathcal{L}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$ . E ainda,  $\text{Ker}(\text{res}_{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}_2}) \simeq 0$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$ .



(4) Sejam  $G = \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $S = \langle b \rangle \simeq \{1\} \oplus \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}_2(G/S) \simeq \mathbb{Z}_2(\mathbb{Z})$  visto como  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo com  $G$  atuando (naturalmente) por multiplicação à esquerda.

Temos que  $\text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) \simeq \frac{H^1(G, S, M)}{P(G, S, M)} \stackrel{3.2.18}{\simeq} H^1((G/S), M) \simeq H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2(\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{Z}_2$  e os dois representantes das classes de levantamentos pertencentes a  $\mathcal{L}(G, S, M)$  são dados nos geradores por:

$$l_0(a) = (0, a) \quad \text{e} \quad l_0(b) = (0, b),$$

$$l_1(a) = (1.1S, a) \quad \text{e} \quad l_1(b) = (0, b).$$

Note que  $\mathcal{L}(G, S, M) \neq \mathcal{L}(G, M)$ , pois  $\mathcal{L}(G, M)$  tem 4 classes de levantamentos, as duas anteriores e  $[l_2]$ ,  $[l_3]$  onde  $l_2$  e  $l_3$  são dados nos geradores por:

$$l_2(a) = (0, a) \quad \text{e} \quad l_2(b) = (1.1S, b),$$

$$l_3(a) = (1.1S, a) \quad \text{e} \quad l_3(b) = (1.1S, b).$$

## Capítulo 4

# O Invariante $\tilde{E}(G, S)$

O objetivo principal deste capítulo é o estudo do invariante  $\tilde{E}(G, S)$  (para pares de grupos  $(G, S)$  onde  $G$  é um grupo e  $S$  um subgrupo de  $G$ ). Este invariante está relacionado com o conceito de ends de grupos e de pares de grupos.

O conceito de ends de grupos (mais precisamente, número de ends de um grupo) teve sua origem na teoria de ends de espaços topológicos devida a Freudenthal (em 1931) e Hopf (em 1943)[13]. De fato o número de ends,  $e(G)$ , de um grupo finitamente gerado  $G$ , foi inicialmente definido (por Hopf) como sendo o número de ends de um espaço conveniente.

Specker (em 1950) estendeu a definição de  $e(G)$  para grupos arbitrários, apresentando uma definição puramente algébrica.

Posteriormente, Houghton (em 1974) e Scott (em 1977)[25], de forma independente, apresentaram uma definição do número de ends,  $e(G, S)$ , de um par de grupos  $(G, S)$  onde  $G$  é um grupo e  $S$  é um subgrupo de  $G$ .

Em [16](1989), Kropholler e Roller introduziram um outro invariante,  $\tilde{e}(G, S)$ , bastante relacionado com o end de Houghton e Scott. A definição de  $\tilde{e}(G, S)$ , está diretamente ligada ao  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo  $\mathcal{F}_S G := \{B \subset G \mid B \subset F.S \text{ para algum subconjunto finito } F \text{ de } G\}$  e como veremos com o invariante  $\tilde{E}(G, S)$ .

Em [2], baseados na teoria de cohomologia relativa de grupos, Andrade e Fanti definiram um invariante “end” generalizado  $E(G, \mathcal{S}, M)$  para um grupo  $G$ ,  $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$  uma família não vazia de subgrupos de  $G$  com  $[G : S_i] = \infty$  para todo  $i \in I$  e  $M$  um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo qualquer. Este invariante é definido a partir do núcleo da aplicação restrição. Quando a família é unitária, isto é,  $\mathcal{S} = \{S\}$  com  $S$  um subgrupo de  $G$ , este invariante é dado por  $1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G)$  onde  $\text{res}_{S, M}^G : H^1(G, M) \rightarrow H^1(S, M)$ . Em especial, exploraram em [2] o invariante  $E(G, S) := E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ . O invariante  $\tilde{E}(G, S)$  (objeto de estudo deste capítulo) é de fato o invariante obtido quando se considera a família unitária e o  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo particular  $M = \mathcal{F}_S G$  ([10]).



## 4.1 $e(G)$ , $e(G, S)$ , $\tilde{e}(G, S)$ , $E(G, S, M)$ e $E(G, S)$

Nesta seção coletamos alguns resultados sobre os “ends” anteriormente citados. Inicialmente faremos alguns preliminares que são importantes não apenas para tais “ends” mas também para o invariante  $\tilde{E}(G, S)$ .

Sejam  $(G, S)$  um par de grupos e  $\mathcal{P}G = \{B \mid B \subset G\}$  o  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo já definido anteriormente (ver página 13). Consideremos os seguintes  $\mathbb{Z}_2G$ -submódulos de  $\mathcal{P}G$ :

$$FG := \{F \subset G \mid F \text{ é finito}\},$$

$$QG := \{A \subset G \mid A + g \cdot A \in FG, \forall g \in G\}$$

$$\mathcal{F}_S G := \{B \subset G \mid B \subset F.S \text{ para algum subconjunto finito } F \text{ de } G\}$$

$$\mathcal{A}_S G := \{A \subset G \mid A + g \cdot A \in \mathcal{F}_S G, \forall g \in G\}.$$

onde “+” denota a operação diferença simétrica em  $\mathcal{P}G$  e  $g \cdot A = \{ga \mid a \in A\}$ .

Observemos que  $FG = \mathcal{F}_{\{1\}} G \subset \mathcal{F}_S G$  e  $QG = \mathcal{A}_{\{1\}} G \subset \mathcal{A}_S G$ .

Denotemos por  $\overline{B} = B + \mathcal{F}_S G \in \mathcal{P}G/\mathcal{F}_S G$  e notemos que  $\mathcal{P}G/\mathcal{F}_S G$  é um  $\mathbb{Z}_2G$ -módulo com a  $G$ -ação induzida, isto é,  $g \cdot \overline{B} = \overline{g \cdot B}$ .

Veamos algumas propriedades dos  $\mathbb{Z}_2G$ -submódulos definidos acima.

**4.1.1 Propriedades:** Sejam  $G$  um grupo,  $S$  e  $T$  subgrupos de  $G$  com  $S \leq T \leq G$ . Então:

(i)  $\mathcal{F}_S G \subset \mathcal{A}_S G$ ;

(ii)  $S \text{ finito} \implies \mathcal{F}_S G = FG$ ;

(iii)  $[G : S] < \infty \implies \mathcal{F}_S G = \mathcal{P}G$ ;

(iv)  $[T : S] < \infty \implies \mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_T G$ ;

(v)  $\left(\frac{\mathcal{P}G}{\mathcal{F}_S G}\right)^G = \frac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G}$  e em particular  $\frac{QG}{FG} = \frac{\mathcal{A}_{\{1\}} G}{\mathcal{F}_{\{1\}} G} = \left(\frac{\mathcal{P}G}{FG}\right)^G$ .

**Demonstração:** (i) Seja  $B \in \mathcal{F}_S G$ . Então  $B \subset F.S$  para algum subconjunto finito  $F$  de  $G$  e daí  $g \cdot B \subset F'.S$ , onde  $F' = g \cdot F$  que é finito. Logo,  $B + g \cdot B \subset (F \cup F').S \in \mathcal{F}_S G$  e portanto  $B \in \mathcal{A}_S G$ .

(ii) Se  $B \in \mathcal{F}_S G$  temos que  $B \subset F.S$  para algum subconjunto finito  $F$  de  $G$ . Como, por hipótese,  $S$  é finito segue que  $B$  é finito, ou seja,  $B \in FG$ . Logo,  $\mathcal{F}_S G \subset FG$  e como  $FG \subset \mathcal{F}_S G$  obtemos que  $\mathcal{F}_S G = FG$ .

(iii) Por definição,  $\mathcal{F}_S G \subset \mathcal{P}G$ . Agora, como  $[G : S] < \infty$  segue que  $G/S$  tem um número finito de classes laterais disjuntas  $g_1 S, \dots, g_k S \in G/S$ . Assim,  $G = g_1 S \cup \dots \cup g_k S$  e daí todo  $B \in \mathcal{P}G$  é tal que  $B \subset F.S$ , para  $F = \{g_1, \dots, g_k\}$ . Logo,  $B \in \mathcal{F}_S G$  e portanto  $\mathcal{P}G \subset \mathcal{F}_S G$ .

(iv) Como

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{F}_S G &\implies B \subset F.S, \text{ para algum finito } F \subset G \xrightarrow{S \leq T} \\ &\implies B \subset F.T, \text{ para algum finito } F \subset G \implies B \in \mathcal{F}_T G, \end{aligned}$$

segue que  $\mathcal{F}_S G \subset \mathcal{F}_T G$ .

Agora, seja  $B \in \mathcal{F}_T G$ . Então  $B \subset F'.T$  para algum subconjunto finito  $F'$  de  $G$ . Como  $[T : S] < \infty$ ,  $T = (t_1 S \cup \dots \cup t_k S) \subset F''.S$  com  $F'' = \{t_1, \dots, t_k\}$ .

Assim,  $B \subset F'.T \subset F'.(F''.S) \subset F.S$  com  $F = F'.F''$  (finito) e daí  $B \in \mathcal{F}_S G$ . Logo,  $\mathcal{F}_T G \subset \mathcal{F}_S G$ .

(v) Temos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathcal{P}G}{\mathcal{F}_S G} \right)^G &= \left\{ \overline{B} \in \frac{\mathcal{P}G}{\mathcal{F}_S G} \mid g \cdot \overline{B} = \overline{B}, \forall g \in G \right\} \\ &= \left\{ \overline{B} \in \frac{\mathcal{P}G}{\mathcal{F}_S G} \mid \overline{g \cdot B} = \overline{B}, \forall g \in G \right\} \\ &= \left\{ \overline{B} \in \frac{\mathcal{P}G}{\mathcal{F}_S G} \mid B + g \cdot B \in \mathcal{F}_S G, \forall g \in G \right\} \\ &= \frac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G} \end{aligned}$$

■

O resultado seguinte nos mostra que  $\mathcal{F}_S G$  é um módulo induzido, o que nos será útil em várias situações.

**4.1.2 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos então

$$\mathcal{F}_S G \simeq \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}$$

como  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulos.

**Demonstração:** Recordemos que

$$\text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} := \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S} = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \text{Coind}_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2)$$

Consideremos as seguintes aplicações:

$$\text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} = \text{Ind}_S^G \text{Coind}_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\vartheta} \text{Coind}_S^G \text{Coind}_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\nu} \text{Coind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 = \overline{\mathbb{Z}_2 G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}G$$

com  $\vartheta$  e  $\nu$  as  $\mathbb{Z}_2 G$ -aplicações dadas em 1.4.6 e  $\rho$  o  $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfismo dado em 1.4.12, ou seja,

$$\vartheta(g' \otimes \tilde{f})(g) = \begin{cases} (gg') \cdot \tilde{f} & \text{se } gg' \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}, \forall g' \otimes \tilde{f} \in \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}, \forall g \in G; \nu(f')(g) = f'(g)(1),$$

$1 \in \mathbb{Z}_2 S, \forall g \in G, \forall f' \in \text{Coind}_S^G \text{Coind}_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2$ , e  $\rho(f) = \{g \in G \mid f(g^{-1}) = 1\}, \forall f \in \overline{\mathbb{Z}_2 G}$ .

Como  $\vartheta$  é monomorfismo e  $\nu$  é isomorfismo temos que  $\text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S}$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de  $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$  e  $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfo (via  $\rho$ ) ao  $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo  $\rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S}))$  de  $\mathcal{P}G$ , ou seja,  $\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S} \simeq \rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S}))$ .

Assim, para concluir a proposição, basta mostrar que  $\rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S})) = \mathcal{F}_S G$ . Essa igualdade segue dos seguintes fatos:

(I)  $B \in \mathcal{F}_S G \iff B = g_0 S_0 \cup \dots \cup g_k S_k$ , com  $g_i \in G, S_i \subset S$  e  $k \in \mathbb{N}$ .



(II) Da mesma maneira que temos o  $\mathbb{Z}_2G$ -isomorfismo  $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2G} \rightarrow \mathcal{P}G$ , também podemos definir o  $\mathbb{Z}_2S$ -isomorfismo  $\bar{\rho} : \overline{\mathbb{Z}_2S} \rightarrow \mathcal{P}S$ . Considerando a aplicação injetora

$$j : \overline{\mathbb{Z}_2S} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}_2G}$$

$$\tilde{f} \mapsto f ; \quad f(g) = \begin{cases} \tilde{f}(g) & \text{se } g \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

obtemos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Z}_2S} & \xrightarrow{j} & \overline{\mathbb{Z}_2G} \\ \bar{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathcal{P}S & \hookrightarrow & \mathcal{P}G \end{array}$$

(III) Se  $g_0 \otimes \tilde{f}_0$  é um elemento básico de  $\mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2S} \overline{\mathbb{Z}_2S}$  então,  $\forall g \in G$ ,

$$(\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) = \begin{cases} [(g^{-1}g_0) \cdot \tilde{f}_0](1) = \tilde{f}_0(g^{-1}g_0) & \text{se } g^{-1}g_0 \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \rho((\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)) &= \{g \in G \mid (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid g^{-1}g_0 \in S \text{ e } \tilde{f}_0(g^{-1}g_0) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid g^{-1}g_0 \in S \text{ e } \tilde{f}_0((g_0^{-1}g)^{-1}) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid g_0^{-1}g \in \bar{\rho}(\tilde{f}_0)\} \\ &= \{g \in G \mid g_0^{-1}g = s \in \bar{\rho}(\tilde{f}_0)\} \\ &= \{g_0s \mid s \in \bar{\rho}(\tilde{f}_0)\} \end{aligned}$$

ou seja,  $\rho((\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)) = g_0S_0 \in \mathcal{F}_SG$  com  $S_0 = \bar{\rho}(\tilde{f}_0) \subset S$ .

Agora, se  $x = g_0 \otimes \tilde{f}_0 + g_1 \otimes \tilde{f}_1 \in \mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2S} \overline{\mathbb{Z}_2S}$  então

$$\begin{aligned} \rho(\nu \circ \vartheta)(x) &= \{g \in G \mid (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0 + g_1 \otimes \tilde{f}_1)(g^{-1}) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) + (\nu \circ \vartheta)(g_1 \otimes \tilde{f}_1)(g^{-1}) = 1\} \\ &= \left\{ g \in G \mid \begin{array}{l} (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) = 1 \text{ ou (exclusivo)} \\ (\nu \circ \vartheta)(g_1 \otimes \tilde{f}_1)(g^{-1}) = 1 \end{array} \right\} \\ &= g_0S_0 \cup g_1S_1 \in \mathcal{F}_SG \end{aligned}$$

com  $S_i = \bar{\rho}(\tilde{f}_i) \subset S$  para  $i = 0, 1$ .

Mais geralmente, se  $x = g_0 \otimes \tilde{f}_0 + g_1 \otimes \tilde{f}_1 + \dots + g_k \otimes \tilde{f}_k \in \mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2S} \overline{\mathbb{Z}_2S}$  então  $\rho(\nu \circ \vartheta)(x) = g_0S_0 \cup \dots \cup g_kS_k \in \mathcal{F}_SG$  com  $S_i = \bar{\rho}(\tilde{f}_i) \subset S$  para  $i = 0, \dots, k$ .

(IV) Se  $B = g_0S_0 \cup \dots \cup g_kS_k \in \mathcal{F}_SG$  é fácil ver que

$$B = \rho(\nu \circ \vartheta) (g_0 \otimes (\bar{\rho})^{-1}(S_0) + \dots + g_k \otimes (\bar{\rho})^{-1}(S_k)) \in \rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2S} \overline{\mathbb{Z}_2S})). \quad \blacksquare$$

**4.1.3 Observação:** Como  $\overline{\mathbb{Z}_2S} \simeq \mathcal{P}S$  (por 1.4.12) obtemos da proposição anterior que  $\mathcal{F}_SG \simeq \text{Ind}_S^G \mathcal{P}S$ .

Agora, recordaremos as definições e enunciaremos (sem demonstração) alguns resultados dos ends  $e(G)$ ,  $e(G, S)$  e  $\tilde{e}(G, S)$ . Para maiores detalhes e resultados adicionais ver [8], [4], [26], [25] e [16].

Temos que  $\mathcal{P}G/FG$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial e  $QG/FG$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -subespaço de  $\mathcal{P}G/FG$ .

**4.1.4 Definição:**(algébrica) Dado um grupo  $G$ , o número de ends de  $G$ , denotado por  $e(G)$ , é definido por:

$$e(G) := \dim_{\mathbb{Z}_2} \left( \frac{QG}{FG} \right).$$

**4.1.5 Observação:** Por 4.1.1(v) segue que  $e(G) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \left( \frac{\mathcal{P}G}{FG} \right)^G = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^0 \left( G, \frac{\mathcal{P}G}{FG} \right).$

**4.1.6 Proposição:** (i) Se  $G$  é um grupo infinito então  $e(G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$ .

(ii) Se  $S$  é um subgrupo de  $G$  com  $[G : S] < \infty$  então  $e(G) = e(S)$ .

(iii) Se  $S$  é um subgrupo finito e normal de  $G$  então  $e(G) = e(G/S)$ .

(iv) Se  $G$  é finitamente gerado então  $e(G) = 0, 1, 2$  ou  $\infty$ .

(v) Se  $G$  é um grupo finitamente gerado então as seguintes condições são equivalentes:

- $e(G) = 2$ ;
- $G$  tem um subgrupo cíclico infinito de índice finito;
- $G$  tem um subgrupo normal  $K$  tal que  $G/K$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  ou a  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ;
- $G = F *_F$  com  $F$  finito ou  $G = A *_F B$  com  $F$  finito e  $[A : F] = [B : F] = 2$ .

(vi) Se  $G$  é um  $D^n$ -grupo com  $n \geq 2$  então  $e(G) = 1$ .

**Demonstração:** [26] e [4]. ■

#### 4.1.7 Exemplos:

(1)  $e(G) = 0 \Leftrightarrow G$  é finito.

(2)  $e(\mathbb{Z}) = 2$  e  $e(\mathbb{Z}^n) = 1$  para  $n \geq 2$ .

(3)  $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n) = 2$ .

(4)  $e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = 2$ .

(5)  $e(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \infty$  ([8], ex.2, p.19).

**4.1.8 Definição:** Seja  $(G, S)$  um par de grupos. O end  $e(G, S)$  é definido por

$$e(G, S) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \left( \frac{\mathcal{P}(G/S)}{F(G/S)} \right)^G.$$

**4.1.9 Proposição:** (i)  $e(G, \{1\}) = e(G)$ .

(ii)  $e(G, S) = 0$  se, e somente se,  $[G : S] < \infty$ .

(iii) Se  $S$  e  $T$  são subgrupos de  $G$  com  $S \leq T \leq G$  e  $[G : T] < \infty$  então  $e(G, S) = e(T, S)$ .

(iv) Se  $S$  é um subgrupo normal em  $G$  então  $e(G, S) = e(G/S)$ .



**Demonstração:** [25]. ■

#### 4.1.10 Exemplos:

- (1)  $e(\mathbb{Z}, k\mathbb{Z}) = 0$ .
- (2)  $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 2$ .
- (3)  $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 1$ .
- (4)  $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ .
- (5)  $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) = 2$ .

**4.1.11 Definição:** Seja  $(G, S)$  um par de grupos. O end  $\tilde{e}(G, S)$  é definido por

$$\tilde{e}(G, S) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \left( \frac{\mathcal{P}G}{\mathcal{F}_S G} \right)^G.$$

**4.1.12 Proposição:** (i) Se  $[G : S] = \infty$  então  $\tilde{e}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathcal{F}_S G)$ .

(ii)  $\tilde{e}(G, \{1\}) = e(G)$  e mais geralmente,  $\tilde{e}(G, S) = e(G)$  se  $S$  é um subgrupo finito de  $G$ .

(iii)  $\tilde{e}(G, S) = 0$  se, e somente se,  $[G : S] < \infty$ .

(iv) Se  $S$  e  $T$  são subgrupos de  $G$  com  $S \leq T \leq G$  e  $[G : T] = \infty$  então  $\tilde{e}(G, S) \leq \tilde{e}(G, T)$ .

(v) Se  $S$  e  $T$  são subgrupos de  $G$  com  $S \leq T \leq G$  e  $[G : T] < \infty$  então  $\tilde{e}(G, S) = \tilde{e}(T, S)$ .

(vi) Se  $S$  é um subgrupo finitamente gerado e normal em  $G$  então  $\tilde{e}(G, S) = e(G/S)$ .

(vii) Se  $G$  é um  $PD^n$ -grupo e  $S$  um  $D^{n-1}$ -subgrupo então  $\tilde{e}(G, S) = \infty$  ou  $S$  é um  $PD^{n-1}$ -grupo, neste caso  $\tilde{e}(G, S) = 2$ .

(viii)  $e(G, S) \leq \tilde{e}(G, S)$ .

**Demonstração:** [16]. ■

Agora, vejamos os invariantes  $E(G, S, M)$  e  $E(G, S)$ . Para mais detalhes ver [1].

**4.1.13 Definição:** Seja  $(G, S)$  um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  e  $M$  um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo.

Define-se  $E(G, S, M)$  por

$$E(G, S, M) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G)$$

onde  $\text{res}_{S, M}^G : H^1(G, M) \rightarrow H^1(S, M)$  é a aplicação restrição definida no capítulo 2 (seção 4).

**4.1.14 Proposição:**  $E(G, S, M)$  é um invariante para pares  $((G, S), M)$ .

**Demonstração:** Vimos em 2.4.2 que se  $((G, S), M) \simeq ((L, H), N)$  então  $\text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G) \simeq \text{Ker}(\text{res}_{H, N}^L)$ . Conseqüentemente,  $E(G, S, M) = E(L, H, N)$ . ■

**4.1.15 Observação:** Por 2.5.7 e 2.1.4 temos que

$$\begin{aligned} E(G, S, M) &:= 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, M}^G) \\ &= 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G, S, M)}{H^0(S, M)/H^0(G, M)} \\ &= 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G, S, M)}{M^S/M^G}. \end{aligned}$$

**4.1.16 Definição:** Seja  $(G, S)$  um par de grupos com  $[G : S] = \infty$ . Define-se  $E(G, S)$  por

$$E(G, S) := E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S)) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathbb{Z}_2(G/S)}^G)$$

onde  $\text{res}_{S, \mathbb{Z}_2(G/S)}^G : H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}_2(G/S))$  é a aplicação restrição.

**4.1.17 Proposição:**  $E(G, S)$  é um invariante para pares  $(G, S)$ , isto é, se  $(G, S)$  e  $(L, H)$  são pares de grupos e existe  $\beta : G \rightarrow L$  um isomorfismo de grupos com  $\beta(S) = H$  então

$$E(G, S) = E(L, H).$$

**Demonstração:** Basta ver que nas hipóteses acima,  $((G, S), \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq ((L, H), \mathbb{Z}_2(L/H))$  e daí o resultado segue da proposição 4.1.14. ■

**4.1.18 Observação:** Visto que  $\mathbb{Z}_2(G/S) \simeq \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2$  (por 1.4.11) segue da proposição 4.1.14 que  $E(G, S) = E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S)) = E(G, S, \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2)$ .

**4.1.19 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  então  $E(G, S) \leq e(G, S)$ . Em particular, se  $S$  é normal em  $G$  então  $e(G, S) = E(G, S)$ .

**Demonstração:** [1] (teor.3.1, p.13). ■

## 4.2 O Invariante $\tilde{E}(G, S)$

**4.2.1 Definição:** Sejam  $(G, S)$  um par de grupos com  $[G : S] = \infty$ . Define-se  $\tilde{E}(G, S)$  por

$$\tilde{E}(G, S) := E(G, S, \mathcal{F}_S G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G)$$

onde  $\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G : H^1(G, \mathcal{F}_S G) \rightarrow H^1(S, \mathcal{F}_S G)$  é a aplicação restrição.

**4.2.2 Proposição:**  $\tilde{E}(G, S)$  é um invariante para pares de grupos  $(G, S)$ , ou seja, se  $(G, S)$  e  $(L, H)$  são pares de grupos com  $[G : S] = \infty$  e  $[L : H] = \infty$ , e existe  $\beta : G \rightarrow L$  um isomorfismo de grupos tal que  $\beta(S) = H$  então

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{E}(L, H).$$



**Demonstração:** Basta mostrar que existe um isomorfismo de grupos abelianos  $\varphi : \mathcal{F}_H L \rightarrow \mathcal{F}_S G$  tal que  $\varphi(\beta(g)B) = g \cdot \varphi(B)$ ,  $\forall g \in G$  e  $B \in \mathcal{F}_H L$ , pois isto implica que  $((G, S), \mathcal{F}_S G) \simeq ((L, H), \mathcal{F}_H L)$ . Daí,  $\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) \simeq \text{Ker}(\text{res}_{H, \mathcal{F}_H L}^L)$  (por 2.4.2) e então

$$\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{H, \mathcal{F}_H L}^L) = \tilde{E}(L, H).$$

Temos que o isomorfismo  $\beta_l : S \rightarrow H$  induz um isomorfismo  $(\beta_l)^\# : \overline{\mathbb{Z}_2 H} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}_2 S}$  com  $(\beta_l)^\#(f)$  dado nos geradores por  $(\beta_l)^\#(f)(s) = f(\beta(s))$ ,  $\forall f \in \overline{\mathbb{Z}_2 H}$  e  $\forall s \in S$ .

Agora, consideremos a aplicação  $\varphi : \mathbb{Z}_2 L \otimes_{\mathbb{Z}_2 H} \overline{\mathbb{Z}_2 H} \rightarrow \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \overline{\mathbb{Z}_2 S}$  definida nos geradores por  $\varphi(l \otimes f) = \beta^{-1}(l) \otimes (\beta_l)^\#(f)$ . Temos que  $\varphi$  é um isomorfismo de grupos e  $\forall g \in G, \forall l \in L$  e  $\forall f \in \overline{\mathbb{Z}_2 H}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\beta(g) \cdot (l \otimes f)) &= \varphi(\beta(g)l \otimes f) = \beta^{-1}(\beta(g)l) \otimes (\beta_l)^\#(f) \\ &= g\beta^{-1}(l) \otimes (\beta_l)^\#(f) = g \cdot (\beta^{-1}(l) \otimes (\beta_l)^\#(f)) \\ &= g \cdot \varphi(l \otimes f) \end{aligned}$$

Logo, usando 4.1.2 segue o resultado. ■

De acordo com a proposição 3.1.14, para  $M = \mathcal{F}_S G$ ,

$$\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) \simeq \frac{\text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)}.$$

e daí se  $[G : S] = \infty$  então

$$\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)} = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)}.$$

**4.2.3 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  então

- (i)  $\tilde{E}(G, S) = k < \infty$  se, e somente se, o número de elementos de  $\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G)$  é  $2^{k-1}$ ;
- (ii)  $\tilde{E}(G, S) = \infty$  se, e somente se,  $\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G)$  tem infinitos elementos.

**Demonstração:** Vimos em 3.2.15 que existe uma bijeção entre  $\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G)$  e  $\frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)}$ .

Assim,

- (i)  $\tilde{E}(G, S) = k \iff \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)} = k - 1 \iff \#\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G) = 2^{k-1}$ .
- (ii)  $\tilde{E}(G, S) = \infty \iff \#\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G) = \infty$ . ■

**4.2.4 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  então  $\tilde{E}(G, S) = 1$  se, e somente se,  $\#\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G) = 1$ .

**4.2.5 Lema:** A aplicação

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{A}_S G &\rightarrow \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G) \\ A &\mapsto \eta(A); \quad \eta(A)(g) := A + g \cdot A, \quad \forall g \in G \end{aligned}$$

é sobrejetora.



**Demonstração:** Observemos que  $\text{Im } \eta = P(G, \mathcal{A}_S G)$ , pois como  $\mathcal{P}G$  é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo,  $\eta(A)(g) = A + g \cdot A = g \cdot A - A = d_A(g)$ .

Temos que  $\text{Der}(G, \mathcal{P}G)/P(G, \mathcal{P}G) \simeq H^1(G, \mathcal{P}G) \stackrel{2.3.2}{=} 0$  e  $\mathcal{F}_S G \subset \mathcal{P}G$  donde segue que  $\text{Der}(G, \mathcal{F}_S G) \subset \text{Der}(G, \mathcal{P}G) = P(G, \mathcal{P}G)$ .

Seja  $d \in \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G)$ . Então  $d \in P(G, \mathcal{P}G)$ , ou seja, existe  $B \in \mathcal{P}G$  tal que  $d(g) = d_B(g) = g \cdot B + B, \forall g \in G$ . E ainda,  $\forall g \in G, d(g) \in \mathcal{F}_S G$  (pois  $d \in \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G)$ ) e assim,  $g \cdot B + B \in \mathcal{F}_S G, \forall g \in G$ , isto é,  $B \in \mathcal{A}_S G$ . Logo,  $d \in P(G, \mathcal{A}_S G) = \text{Im } \eta$  e assim  $\eta$  é sobrejetora. ■

Vimos em 4.1.1(i) que  $\mathcal{F}_S G \subset \mathcal{A}_S G$ . Temos que  $\emptyset, G \in \mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S$ , e

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S &\Rightarrow A \in \mathcal{A}_S G \text{ e } A \in (\mathcal{P}G)^S \Rightarrow \eta(A) \in \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G) \text{ e } s \cdot A = A, \forall s \in S \\ &\Rightarrow \eta(A) \in \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G) \text{ e } \eta(A)(s) = A + s \cdot A = 0, \forall s \in S \\ &\Rightarrow \eta(A) \in \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G) \text{ e } \eta(A)|_S = 0 \Rightarrow \eta(A) \in \text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G). \end{aligned}$$

O seguinte resultado nos dará uma forma de *estender a definição* de  $\tilde{E}(G, S)$  de modo a abranger o caso em que  $[G : S] < \infty$ .

**4.2.6 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  então a sequência abaixo é exata

$$0 \longrightarrow \{\emptyset, G\} \xrightarrow{\chi} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S} \xrightarrow{\bar{\eta}} \frac{\text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)} \longrightarrow 0$$

onde  $\chi(C) := \bar{C} = C + (\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S), \forall C \in \{\emptyset, G\}$ , e  $\bar{\eta}(\bar{A}) := \eta(A) + P(G, S, \mathcal{F}_S G)$  com  $\eta$  a aplicação dada no lema anterior.

**Demonstração:** Temos que:

(I)  $\chi$  é monomorfismo:

Suponhamos que  $\chi(G) = 0$ . Daí,

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S &\Rightarrow G \in \mathcal{F}_S G \Rightarrow \\ &\Rightarrow G = g_0 S_0 \cup \dots \cup g_k S_k, \quad g_i \in G, S_i \subset S \text{ e } k \in \mathbb{N} \Rightarrow G \subset (g_0 S \cup \dots \cup g_k S). \end{aligned}$$

Assim,  $[G : S] < \infty$ , o que contradiz a hipótese.

(II)  $\text{Ker } \bar{\eta} = \text{Im } \chi$ :

Notemos que  $\text{Im } \chi = \{\bar{\emptyset}, \bar{G}\}$ .

Como

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\bar{\emptyset}) &= \eta(\emptyset) + P(G, S, \mathcal{F}_S G) & \text{com } \eta(\emptyset)(g) &= \emptyset + g \cdot \emptyset = \emptyset, \forall g \in G & \text{ e} \\ \bar{\eta}(\bar{G}) &= \eta(G) + P(G, S, \mathcal{F}_S G) & \text{com } \eta(G)(g) &= G + g \cdot G = G + G = \emptyset, \forall g \in G \end{aligned}$$

segue que  $\eta(\emptyset)$  e  $\eta(G)$  são aplicações nulas e daí  $\bar{\eta}(\bar{\emptyset}) = 0 = \bar{\eta}(\bar{G})$ . Logo,  $\text{Im } \chi \subset \text{Ker } \bar{\eta}$ .

Reciprocamente, seja  $\bar{A} \in \text{Ker } \bar{\eta}$ . Então  $\bar{A} \in \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}$  e  $\eta(A) \in P(G, S, \mathcal{F}_S G)$ .



Assim,  $A \in \mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S$  e existe  $B \in \mathcal{F}_S G$  tal que  $\eta(A)(g) = d_B(g)$ ,  $\forall g \in G$  e  $\eta(A)|_S = 0$ .

Daí

$$\begin{aligned}\eta(A)(g) &= d_B(g), \forall g \in G \Rightarrow A + g \cdot A = B + g \cdot B, \forall g \in G \Rightarrow \\ &\Rightarrow A + B = g \cdot (A + B), \forall g \in G \Rightarrow A + B \in (\mathcal{P}G)^G \Rightarrow \\ &\Rightarrow A + B \in \{\emptyset, G\} \Rightarrow A + B = \emptyset \quad \text{ou} \quad A + B = G.\end{aligned}$$

Se  $A + B = \emptyset$  então  $A = B \in \mathcal{F}_S G$ . E também, como  $A \in \mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S$  segue que  $A \in (\mathcal{P}G)^S$ . Assim,  $A = A + \emptyset \in \mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S$  o que implica em  $\bar{A} = \bar{\emptyset} = \chi(\emptyset) \in \text{Im } \chi$ .

Agora, se  $A + B = G$  então  $A + G = B \in \mathcal{F}_S G$ . Como  $A \in (\mathcal{P}G)^S$  e  $G \in (\mathcal{P}G)^S$ ,  $A + G \in (\mathcal{P}G)^S$ . Daí,  $A + G \in \mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S$  e temos  $\bar{A} = \bar{G} = \chi(G) \in \text{Im } \chi$ .

Logo,  $\text{Ker } \bar{\eta} \subset \text{Im } \chi$ .

(III)  $\bar{\eta}$  é epimorfismo:

Dado  $d + P(G, S, \mathcal{F}_S G)$  com  $d \in \text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G)$  segue que  $d|_S = 0$  e, em particular,  $d \in \text{Der}(G, \mathcal{F}_S G)$ . Daí, pelo lema 4.2.5, existe  $A \in \mathcal{A}_S G$  tal que  $\eta(A) = d$ . Assim,

$$\begin{aligned}\eta(A)|_S &= d|_S \Rightarrow \eta(A)|_S = 0 \Rightarrow \eta(A)(s) = \emptyset, \forall s \in S \Rightarrow \\ &\Rightarrow A + s \cdot A = \emptyset, \forall s \in S \Rightarrow s \cdot A = A, \forall s \in S \Rightarrow A \in (\mathcal{P}G)^S.\end{aligned}$$

Logo, existe  $A \in \mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S$  tal que

$$\bar{\eta}(\bar{A}) = \eta(A) + P(G, S, \mathcal{F}_S G) = d + P(G, S, \mathcal{F}_S G).$$

Portanto, de (I), (II) e (III) concluímos que a sequência dada é exata. ■

**4.2.7 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  então

$$\tilde{E}(G, S) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S} = \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{(\mathcal{A}_S G)^S}{(\mathcal{F}_S G)^S}$$

**Demonstração:** Pela proposição anterior temos que  $\chi$  é monomorfismo,  $\text{Im } \chi = \text{Ker } \bar{\eta}$  e  $\bar{\eta}$  é epimorfismo. Como  $\chi$  é monomorfismo,  $\text{Im } \chi \simeq \{\emptyset, G\} \simeq \mathbb{Z}_2$ . Assim, usando o Teorema do Núcleo e da Imagem para  $\mathbb{Z}_2$ -espaços vetoriais, segue que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S} &= \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker } \bar{\eta} + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Im } \bar{\eta} = \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Im } \chi + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Im } \bar{\eta} \\ &= \dim_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)} = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\text{Der}(G, S, \mathcal{F}_S G)}{P(G, S, \mathcal{F}_S G)} \\ &= \tilde{E}(G, S).\end{aligned}$$

**4.2.8 Observações:**

(1) Se  $[G : S] < \infty$  então de 4.1.1(iii) e (i) segue que  $\mathcal{P}G = \mathcal{F}_S G \subset \mathcal{A}_S G$ . Assim,  $\mathcal{A}_S G = \mathcal{P}G$  e

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S} = \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{P}G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{P}G \cap (\mathcal{P}G)^S} = 0.$$

Logo, se definirmos  $\tilde{E}(G, S) := \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}$ , para todo par de grupos  $(G, S)$ , obtemos que:

(a)  $\tilde{E}(G, S) = 0 \iff [G : S] < \infty$ .

(b)  $[G : S] = \infty \iff \tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G)$ .

(c)  $\tilde{E}(G, S)$  é um invariante para pares de grupos  $(G, S)$  (com  $[G : S]$  infinito ou não), isto é, se  $(G, S)$  e  $(L, H)$  são pares de grupos e existe  $\beta : G \rightarrow L$  um isomorfismo de grupos tal que  $\beta(S) = H$  então  $\tilde{E}(G, S) = \tilde{E}(L, H)$ .

(2) Se  $G$  é um grupo qualquer (finito ou infinito) então

$$\tilde{E}(G, \{1\}) = e(G).$$

**Demonstração:** Basta ver que  $\frac{\mathcal{A}_{\{1\}} G \cap (\mathcal{P}G)^{\{1\}}}{\mathcal{F}_{\{1\}} G \cap (\mathcal{P}G)^{\{1\}}} = \left( \frac{\mathcal{P}G}{FG} \right)^G$  e usar 4.1.5. ■

Vejamos algumas relações entre  $\tilde{E}(G, S)$  e  $\tilde{e}(G, S)$ .

**4.2.9 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos então

$$\tilde{E}(G, S) \leq \tilde{e}(G, S).$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $[G : S] < \infty$ . Daí, por 4.2.8 e 4.1.12(iii),

$$\tilde{E}(G, S) = 0 = \tilde{e}(G, S).$$

Agora, suponhamos que  $[G : S] = \infty$ . Assim, como  $\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) \subset H^1(G, \mathcal{F}_S G)$  e por 4.2.1 e 4.1.12(i) temos que

$$\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) \leq 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathcal{F}_S G) = \tilde{e}(G, S)$$

ou seja,  $\tilde{E}(G, S) \leq \tilde{e}(G, S)$ . ■

Analisaremos sob quais condições  $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S)$ , pois em geral eles não são iguais, isto é, podemos ter  $\tilde{E}(G, S) < \tilde{e}(G, S)$  (conforme veremos no final da seção), embora suas propriedades sejam semelhantes.

**4.2.10 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S]$  não necessariamente infinito então

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) \iff \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S} = \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G}.$$

**Demonstração:** Por 4.1.1(v) segue que a definição 4.1.11 é equivalente à  $\tilde{e}(G, S) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G}$ .

Vimos em 4.2.8 que  $\tilde{E}(G, S) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (\mathcal{P}G)^S}$ . Logo, o resultado segue. ■



**4.2.11 Proposição:** Seja  $(G, S)$  um par de grupos satisfazendo  $[G : S] = \infty$ . Se  $\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G : H^1(G, \mathcal{F}_S G) \rightarrow H^1(S, \mathcal{F}_S G)$  é a aplicação nula então  $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S)$ . Em particular, se  $H^1(S, \mathcal{F}_S G) = 0$  então isto ocorre. Se  $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) < \infty$  vale a recíproca deste fato.

**Demonstração:** Temos que:

$$\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G \text{ é nula} \Leftrightarrow \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) = H^1(G, \mathcal{F}_S G) \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathcal{F}_S G) \Leftrightarrow \tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S).$$

Agora, se  $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) < \infty$  então  $(*)$  é válida na direção contrária. ■

**4.2.12 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  e  $S$  é finitamente gerado e normal em  $G$  então

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) = e(G/S).$$

**Demonstração:** Por hipótese,  $S$  é normal em  $G$  e daí, por 1.4.7 (Fórmula de Mackey - caso particular), temos o  $\mathbb{Z}_2 S$ -isomorfismo  $\text{Ind}_S^G \mathcal{P}S \simeq \bigoplus_{g \in G/S} g\mathcal{P}S$ .

$$\text{Assim, } H^1(S, \mathcal{F}_S G) \simeq H^1(S, \text{Ind}_S^G \mathcal{P}S) \simeq H^1(S, \bigoplus_{g \in G/S} g\mathcal{P}S).$$

Mas, como  $S$  é finitamente gerado, por 2.1.8 temos que

$$H^1(S, \bigoplus_{g \in G/S} g\mathcal{P}S) \simeq \bigoplus_{g \in G/S} H^1(S, g\mathcal{P}S).$$

Agora, recordemos (ver comentário anterior à 1.4.7) que  $g\mathcal{P}S$  é um  $\mathbb{Z}_2 S$ -módulo com a  $S$ -ação definida por  $s * (gB) = gsg^{-1} \cdot (gB) = gsB$ ,  $\forall s \in S$  e  $B \in \mathcal{P}S$ . E ainda, que  $\mathcal{P}S$  é um  $\mathbb{Z}_2 S$ -módulo com a  $S$ -ação dada pela multiplicação à esquerda. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \chi : g\mathcal{P}S &\rightarrow \mathcal{P}S \\ gB &\mapsto B \end{aligned}$$

Temos que  $\chi(s * gB) = \chi(gsb) = sB = s\chi(gB)$ ,  $\chi$  é um homomorfismo de grupos e é bijetora e portanto  $\chi$  é um  $\mathbb{Z}_2 S$ -isomorfismo. Logo,  $\forall g \in G/S$ ,

$$H^1(S, g\mathcal{P}S) \simeq H^1(S, \mathcal{P}S) \stackrel{2.3.2}{=} 0$$

e portanto,  $H^1(S, \mathcal{F}_S G) = 0$ . Pela proposição anterior e 4.1.12(vi) segue o resultado. ■

**4.2.13 Corolário:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  e  $S$  é um subgrupo finito de  $G$  então

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) = e(G).$$

**Demonstração:** Como  $S$  é finito segue por 4.1.1(ii) que  $\mathcal{F}_S G = FG$ . Daí

$$\mathcal{F}_S G = FG \stackrel{1.4.12}{\simeq} \mathbb{Z}_2 G \simeq \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2.$$

Usando 1.4.7 (Fórmula de Mackey) para  $T = \{1\}$  obtemos o  $\mathbb{Z}_2 S$ -isomorfismo  $\text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 \simeq \bigoplus_{g \in G/S} \text{Ind}_{\{1\}}^S g \mathbb{Z}_2$ .

Assim,

$$\begin{aligned} H^1(S, \mathcal{F}_S G) &\simeq H^1(S, \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \simeq H^1(S, \bigoplus_{g \in G/S} \text{Ind}_{\{1\}}^S g \mathbb{Z}_2) \\ &\simeq H^1(S, \bigoplus_{g \in G/S} \text{Coind}_{\{1\}}^S g \mathbb{Z}_2) && (\text{por 1.4.4, pois } [S : \{1\}] < \infty) \\ &\simeq \bigoplus_{g \in G/S} H^1(S, \text{Coind}_{\{1\}}^S g \mathbb{Z}_2) && (2.1.8, \text{ pois } S \text{ é f.g.}) \\ &\simeq \bigoplus_{g \in G/S} H^1(\{1\}, g \mathbb{Z}_2) && (\text{por Lema de Shapiro: 2.3.1}) \\ &\simeq 0 && (\text{por 2.1.6(1)}) \end{aligned}$$

Logo por 4.2.11 e 4.1.12(ii) temos o resultado. ■

**4.2.14 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $G$  finitamente gerado e  $e(G) = 2$  então

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) = 2 \quad \text{ou} \quad \tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) = 0.$$

**Demonstração:** Primeiramente vamos provar a seguinte afirmação: “ Nas hipóteses acima temos que  $|S| < \infty$  ou  $[G : S] < \infty$  ”.

De fato, como  $G$  é finitamente gerado e  $e(G) = 2$  segue de 4.1.6(v) que existe  $T$  subgrupo de  $G$  tal que  $[G : T] < \infty$  e  $T \simeq \mathbb{Z}$ . As inclusões  $S \hookrightarrow G$  e  $S \cap T \hookrightarrow T$  induzem a seguinte aplicação injetora

$$\begin{array}{ccc} \frac{S}{S \cap T} & \rightarrow & \frac{G}{T} \\ s(S \cap T) & \mapsto & sT \end{array}$$

Daí,  $[S : S \cap T] \leq [G : T] < \infty$ .

Agora, como  $S \cap T$  é subgrupo de  $T \simeq \mathbb{Z}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} S \cap T = \{1\} \\ \text{ou} \\ S \cap T \simeq k\mathbb{Z}, k \neq 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} |S| = [S : S \cap T] < \infty \\ \text{ou} \\ [T : S \cap T] = k < \infty \end{array} \right.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} |S| < \infty \\ \text{ou} \\ [G : S] \leq [G : S \cap T] \leq [G : T][T : S \cap T] < \infty. \end{array} \right.$$



Se  $|S| < \infty$  segue, por 4.2.13, que

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) = e(G) = 2.$$

Agora, se  $[G : S] < \infty$  temos, por 4.2.8 e 4.1.12(iii),

$$\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S) = 0. \quad \blacksquare$$

#### 4.2.15 Exemplos:

(1) Seja  $G = \mathbb{Z}^n$  e  $S = \mathbb{Z}^{n-1}$ . Como  $[G : S] = \infty$ ,  $S$  é finitamente gerado e normal em  $G$  segue, por 4.2.12, que

$$\tilde{E}(G, S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z}) \stackrel{4.1.7}{=} 2.$$

(2) Consideremos  $G = \mathbb{Z}^n$  e  $S = \mathbb{Z}^k$  com  $0 \leq k \leq n-2$ . Temos que  $[G : S] = \infty$ ,  $S$  é finitamente gerado e normal em  $G$ . Daí, por 4.2.12,

$$\tilde{E}(G, S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z}^{n-k}) = 1$$

sendo que a última igualdade segue de  $n-k \geq 2$  e de 4.1.7.

(3) Seja  $G = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$  com  $\theta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$  dada por  $\theta(c)(a, b) = (a, 2ca + b)$ . A operação em  $G$  é definida por

$$((a, b), c) + ((a', b'), c') = ((a, b) + \theta(c)(a', b'), c + c') = ((a + a', b + b' + 2ca'), c + c').$$

(a)  $S = \{((a, b), 0) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  :

Temos que  $S$  é um subgrupo finitamente gerado (pois  $S \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ) e normal em  $G$ . E ainda,  $G/S \simeq \mathbb{Z}$  e daí  $[G : S] = \infty$ . Logo, por 4.2.12,

$$\tilde{E}(G, S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z}) \stackrel{4.1.7}{=} 2.$$

(b)  $S = \{((0, b), c) \mid b, c \in \mathbb{Z}\}$  :

Como  $[G : S] = \infty$ ,  $S$  é normal e finitamente gerado segue, por 4.2.12, que

$$\tilde{E}(G, S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z}) \stackrel{4.1.7}{=} 2.$$

(4) Considerando  $G = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_n$  ( $n \geq 2$ ) e  $S = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , temos que  $[G : S] = \infty$ ,  $S$  é finitamente gerado e normal. Logo, por 4.2.12,

$$\tilde{E}(G, S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n) = e(\mathbb{Z}) \stackrel{4.1.7}{=} 2.$$

(5) Seja  $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  e  $S = \mathbb{Z}_2$ . Como  $[G : S] = \infty$  e  $S$  é um subgrupo finito de  $G$  então, por 4.2.13,

$$\tilde{E}(G, S) = e(G) = e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \stackrel{4.1.7}{=} 2.$$

Nos resultados a seguir consideraremos  $G$  um grupo e  $S, T$  subgrupos de  $G$  satisfazendo  $S \leq T \leq G$ .

**4.2.16 Proposição:** Se  $[G : T] = \infty$  então:

- (i)  $E(G, T, \mathcal{F}_S G) \leq \tilde{E}(G, S) \leq E(G, S, \mathcal{F}_T G)$ ;
- (ii)  $E(G, T, \mathcal{F}_S G) \leq \tilde{E}(G, T) \leq E(G, S, \mathcal{F}_T G)$ .

**Demonstração:** Faremos apenas (i), pois (ii) prova-se de maneira análoga.

Como  $S \leq T \leq G$  e  $[G : T] = \infty$  segue que  $[G : S] = \infty$ .

Por 2.4.3,  $\text{Ker}(\text{res}_T^G) \subset \text{Ker}(\text{res}_S^G)$  e daí

$$E(G, T, \mathcal{F}_S G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_T^G) \leq 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_S^G) = \tilde{E}(G, S).$$

Para obter  $\tilde{E}(G, S) \leq E(G, S, \mathcal{F}_T G)$  devemos mostrar, primeiramente, que a inclusão  $j : \mathcal{F}_S G \rightarrow \mathcal{F}_T G$  induz um monomorfismo  $(\text{id}_G, j)^* : H^1(G, \mathcal{F}_S G) \rightarrow H^1(G, \mathcal{F}_T G)$ .

Consideremos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbb{Z}_2 T} \xrightarrow{p} Q = \frac{\overline{\mathbb{Z}_2 T}}{\text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}} \longrightarrow 0$$

onde  $p$  é a projeção canônica e  $\psi$  é a composta:  $\text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \xrightarrow{\vartheta} \text{Coind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \xrightarrow{\nu} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$  com  $\vartheta$  e  $\nu$  as aplicações dadas em 1.4.6.

Por 1.1.14 temos que  $\mathbb{Z}_2 G$  é  $\mathbb{Z}_2 T$ -livre e daí  $\mathbb{Z}_2 G$  também é  $\mathbb{Z}_2 T$ -projetivo. Assim, por [14] (p.82) e como  $\text{Ind}_T^G - = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} - \simeq - \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \mathbb{Z}_2 G$ , obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_T^G \text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \simeq \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} \longrightarrow \text{Ind}_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T} \longrightarrow \text{Ind}_T^G Q \longrightarrow 0$$

Daí, por 2.2.3, temos a seqüência exata longa em cohomologia:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \longrightarrow H^0(G, \text{Ind}_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T}) \longrightarrow H^0(G, \text{Ind}_T^G Q) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \xrightarrow{(\text{id}_G, j)^*} H^1(G, \text{Ind}_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Como  $[G : S] = \infty$  segue por 1.4.9 e 2.1.4(i) que os três primeiros termos da seqüência anterior são nulos e daí  $(\text{id}_G, j)^*$  é monomorfismo.

Logo, usando  $N = \mathcal{F}_S G$ ,  $M = \mathcal{F}_T G$  e  $\varphi = j$  em 2.4.4, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{E}(G, S) &= 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} (\text{id}_G, j)^*(\text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G)) \\ &\leq 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) = E(G, S, \mathcal{F}_T G). \end{aligned}$$

■

**4.2.17 Corolário:** Se  $[G : T] = \infty$  e  $[T : S] < \infty$  então

$$\tilde{E}(G, T) \leq \tilde{E}(G, S).$$



**Demonstração:** Por hipótese,  $[T : S] < \infty$ . Daí, por 4.1.1(iv),  $\mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_T G$ . Assim,  $\tilde{E}(G, T) = E(G, T, \mathcal{F}_T G) = E(G, T, \mathcal{F}_S G)$ . Pela proposição anterior,  $E(G, T, \mathcal{F}_S G) \leq \tilde{E}(G, S)$ . Logo,  $\tilde{E}(G, T) \leq \tilde{E}(G, S)$ . ■

**4.2.18 Proposição:** Se  $[G : S] = \infty$  e  $[G : T] < \infty$  então

$$\tilde{E}(G, S) \leq \tilde{E}(T, S).$$

**Demonstração:** Como  $[G : T] < \infty$ , tomando  $S = T$  e  $M = \text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}$  em 1.4.4(ii), segue que  $\text{Ind}_T^G (\text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \stackrel{\vartheta}{\simeq} \text{Coind}_T^G (\text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S})$ . Assim, a aplicação induzida

$$(id_G, \vartheta)^* : H^1(G, \text{Ind}_T^G (\text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S})) \rightarrow H^1(G, \text{Coind}_T^G (\text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}))$$

é um  $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfismo e daí, por 2.4.5,

$$\text{Ker}(\text{res}_{S, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}}^G) \simeq (\alpha, \psi)^* \left( \text{Ker}(\text{res}_{S, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}}^G) \right) \subset \text{Ker}(\text{res}_{S, \text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}}^T).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{E}(G, S) &= E(G, S, \mathcal{F}_S G) = E(G, S, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}}^G) = \\ &\leq 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}}^T) = E(T, S, \text{Ind}_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = E(T, S, \mathcal{F}_S T) = \tilde{E}(T, S). \end{aligned}$$

Portanto  $\tilde{E}(G, S) \leq \tilde{E}(T, S)$ . ■

**4.2.19 Proposição:** Se  $(G, S)$  é um par de grupos com  $[G : S] = \infty$  então

$$E(G, S) \leq \tilde{E}(G, S).$$

**Demonstração:** Consideremos a seqüência exata de  $\mathbb{Z}_2 S$ -módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \simeq \{\emptyset, S\} \longrightarrow \mathcal{P}S \longrightarrow Q = \frac{\mathcal{P}S}{\{\emptyset, S\}} \longrightarrow 0.$$

Por 1.1.14 temos que  $\mathbb{Z}_2 G$  é  $\mathbb{Z}_2 S$ -livre e daí  $\mathbb{Z}_2 G$  também é  $\mathbb{Z}_2 S$ -projetivo. Assim, por [14] (p.82) e como  $\text{Ind}_S^G - = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} - \simeq - \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 G$ , obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathcal{P}S \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} Q \longrightarrow 0.$$

Daí, por 2.2.3, temos a seqüência exata longa em cohomologia:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(G, \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^0(G, \text{Ind}_S^G \mathcal{P}S) \longrightarrow H^0(G, \text{Ind}_S^G Q) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(G, \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(id_G, \phi)^*} H^1(G, \text{Ind}_S^G \mathcal{P}S) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Como  $[G : S] = \infty$  segue por 1.4.9 e 2.1.4(i) que os três primeiros termos da seqüência anterior são nulos e daí  $(id_G, \phi)^*$  é monomorfismo.

Logo, considerando  $N = \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2$ ,  $M = \text{Ind}_S^G \mathcal{P}S$  e  $\varphi = \phi$  em 2.4.4, obtemos

$$\begin{aligned} E(G, S) &= E(G, S, \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S,N}^G) \\ &\leq 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S,M}^G) = E(G, S, \text{Ind}_S^G \mathcal{P}S) = \tilde{E}(G, S). \end{aligned}$$

O último resultado desta seção nos dá uma condição necessária para que um par de grupos  $(G, S)$  seja um  $D^n$ -par.

**4.2.20 Teorema:** *Seja  $(G, S)$  um par de grupos com  $[G : S] = \infty$ .*

(i) *Se  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par então  $\tilde{E}(G, S) = 1$ .*

(ii) *Se  $G$  é um  $D^n$ -grupo com módulo dualizante  $C$  e  $S$  é um  $D^{n-1}$ -subgrupo com módulo dualizante  $\text{Res}_S^G C$  então  $\tilde{E}(G, S) \leq 2$ .*

**Demonstração:** (i) Observemos que se  $(G, S)$  é um  $D^1$ -par então, por 2.7.15,  $G$  e  $S$  são  $D^0$ -grupos sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Assim, por 2.7.10,  $G$  e  $S$  são grupos finitos e daí  $[G : S] < \infty$ . Logo, nas hipóteses acima, temos necessariamente  $n > 1$ .

Considerando  $M = \mathcal{F}_S G$  em 2.5.4, obtemos a seqüência exata longa

$$0 \rightarrow H^0(G, \mathcal{F}_S G) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^0(S, \mathcal{F}_S G) \xrightarrow{\delta} H^1(G, S, \mathcal{F}_S G) \xrightarrow{J} H^1(G, \mathcal{F}_S G) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^1(S, \mathcal{F}_S G) \rightarrow \dots$$

Seja  $C$  o módulo dualizante do par  $(G, S)$ . Então

$$\begin{aligned} H^1(G, S, \mathcal{F}_S G) &\simeq H^1(G, S, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(por 4.1.2)} \\ &\simeq H_{n-1}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(por 2.7.12)} \\ &\simeq H_{n-1}(G, \text{Ind}_S^G (\text{Res}_S^G C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \overline{\mathbb{Z}_2 S})) && \text{(por 1.4.8)} \\ &\simeq H_{n-1}(S, \text{Res}_S^G C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(por Lema de Shapiro: 2.3.1)} \\ &\simeq H^0(S, \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(por 2.7.15(ii) e 2.7.1)} \\ &= H^0(S, \text{Coind}_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2) && \text{(pois } \overline{\mathbb{Z}_2 S} = \text{Coind}_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2) \\ &\simeq H^0(\{1\}, \mathbb{Z}_2) && \text{(por Lema de Shapiro: 2.3.1)} \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 && \text{(por 2.1.6(1))} \end{aligned}$$

Como  $[G : S] = \infty$  segue, por 1.4.9, que  $(\text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S})^G = 0$  e daí

$$H^0(G, \mathcal{F}_S G) \simeq H^0(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = (\text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S})^G = 0.$$

Isto implica que o homomorfismo  $\delta$  da seqüência acima é monomorfismo. Assim,  $H^0(S, \mathcal{F}_S G) \simeq \text{Im } \delta \subset H^1(G, S, \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ , isto é,  $H^0(S, \mathcal{F}_S G) \subset \mathbb{Z}_2$ . Por outro lado,  $H^0(S, \mathcal{F}_S G) \simeq (\mathcal{F}_S G)^S$ . Como  $S \in \mathcal{F}_S G$  e  $S, \emptyset \in (\mathcal{F}_S G)^S$  então  $(\mathcal{F}_S G)^S \supset \{\emptyset, S\} \simeq \mathbb{Z}_2$ . Logo,  $\mathbb{Z}_2 \subset (\mathcal{F}_S G)^S \simeq H^0(S, \mathcal{F}_S G) \subset \mathbb{Z}_2$  o que implica em  $H^0(S, \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ .

Assim,

$$\text{Ker}(\text{res}_S^G) \simeq \text{Im } J \simeq \frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{\text{Ker } J} \simeq \frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{\text{Im } \delta} \simeq \frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{H^0(S, \mathcal{F}_S G)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{Z}_2} \simeq 0.$$



Portanto,  $\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_S^G) = 1 + 0 = 1$ .

(ii) Por hipótese,  $G$  é  $D^n$ -par. Então  $H^1(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \simeq H_{n-1}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S})$ . Agora, no item (i) vimos que  $H_{n-1}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \simeq \mathbb{Z}_2$ . Assim,  $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = 1$ .

Como  $\text{Ker}(\text{res}_S^G)$  é um submódulo de  $H^1(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S})$ , segue que

$$\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_S^G) \leq 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = 2.$$

ou seja,  $\tilde{E}(G, S) \leq 2$ . ■

#### 4.2.21 Exemplos:

(1) Seja  $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

(a)  $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ :

Vimos em 2.7.17 que  $(G, S)$  é um  $PD^2$ -par. Assim, pela proposição anterior,  $\tilde{E}(G, S) = 1$ .

(b)  $T = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ :

Por [1] (ex.2.2(c), p.8), temos que  $E(G, T) = \infty$ . Agora, por 4.2.19,  $E(G, T) \leq \tilde{E}(G, T)$ .

Logo  $\tilde{E}(G, T) = \infty$ . Daí, concluímos que o par  $(G, T)$  não é um  $D^2$ -par, apesar de  $G$  e  $T$  serem  $D^1$ -grupos.

(2) Consideremos  $G = \langle a, b \mid a^2b^2 = 1 \rangle$  e  $S = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Temos que  $G = \pi_1(KB)$ , onde  $KB$  denota a garrafa de Klein, e daí  $G$  é um  $PD^2$ -grupo (por 2.7.6(2)). Como  $S$  é um  $PD^1$ -subgrupo segue pela proposição 4.2.20 que  $\tilde{E}(G, S) \leq 2$ .

(3) Se considerarmos  $X = M^2 - D^2$  com  $M^2$  qualquer superfície fechada orientada diferente de  $S^2$  então  $(G = \pi_1(X), S = \pi_1(\partial X))$  é um  $PD^2$ -par (por 2.7.17) e daí pela proposição 4.2.20,

$$\tilde{E}(G, S) = 1.$$

(4) Seja  $G$  o grupo dado no exemplo 4.2.15(3).

Consideremos o subgrupo  $S = \{((0, 0), c) \mid c \in \mathbb{Z}\}$ . Este subgrupo não é normal em  $G$ , pois para  $g = ((1, 1), 1) \in G$ ,  $g + S = \{((1, 1), 1 + c) \mid c \in \mathbb{Z}\} \neq \{((1, 1 + 2c), 1 + c) \mid c \in \mathbb{Z}\} = S + g$ .

Temos que  $G$  é um  $PD^3$ -grupo, pois  $G$  é o grupo fundamental de uma superfície de dimensão 3 (ver [21]). Além disso,

$$\begin{aligned} H^1(G, \mathcal{F}_S G) &\simeq H^1(G, \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(por 4.1.2 e 2.2.2)} \\ &\simeq H_2(G, C \otimes \text{Ind}_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(pois } G \text{ é } PD^3 \text{ - grupo)} \\ &\simeq H_2(G, \text{Ind}_S^G (\text{Res}_S^G C \otimes \overline{\mathbb{Z}_2 S})) && \text{(por 1.4.8)} \\ &\simeq H_2(S, \text{Res}_S^G C \otimes \overline{\mathbb{Z}_2 S}) && \text{(por Lema de Shapiro: 2.3.1)} \\ &\simeq 0 && \text{(pois } S \simeq \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Assim, como  $\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) \subset H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq 0$  segue que  $\text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) = \{0\}$  e portanto

$$\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Ker}(\text{res}_{S, \mathcal{F}_S G}^G) = 1 + 0 = 1.$$

#### 4.2.22 Observações:

(1) Vimos em 4.2.21(1) que para o  $PD^2$ -par  $(G = \langle a \rangle * \langle b \rangle, S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle)$ ,  $\tilde{E}(G, S) = 1$  e no entanto por 4.1.12(iii) e (i) temos que

$$\tilde{e}(G, S) \geq \tilde{e}(G, \{1\}) = e(G) = \infty$$

ou seja,  $\tilde{e}(G, S) = \infty$ . Analogamente,  $\tilde{e}(G, T) = \infty$  para  $T = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ .

Isto nos mostra que o resultado anterior não é válido para  $\tilde{e}(G, S)$  e que para este par  $(G, S)$ ,  $\tilde{E}(G, S) \neq \tilde{e}(G, S)$ .

Além disso, como  $\tilde{e}(G, H) = \infty$  para todo par  $(G, H)$  tal que  $e(G) = \infty$  e  $H$  é um subgrupo de  $G$  com  $[G : H] = \infty$ , concluímos que  $\tilde{e}(G, H)$  não nos dá nenhuma informação adicional para os subgrupos  $H$ , o que não ocorre com  $\tilde{E}(G, H)$  pois para  $G, S, T$  como no exemplo 4.2.21(1) temos  $\tilde{E}(G, S) = 1$  e  $\tilde{E}(G, T) = \infty$ .

(2) Desde que  $\tilde{E}(G, S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G, S, \mathcal{F}_S G)}{(\mathcal{F}_S G)^S / (\mathcal{F}_S G)^G}$  sempre que ocorrer  $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S)$  obtemos uma interpretação para  $\tilde{e}(G, S)$  em termos de cohomologia relativa. Além disso, se  $(X, Y)$  é um par Eilenberg-MacLane realizando  $(G, S)$  então obtemos também uma interpretação topológica (por 2.6.25).

(3) Se  $(G, S)$  é um  $D^n$ -par segue por 4.2.20 e 4.2.4 que  $\#\mathcal{L}(G, S, \mathcal{F}_S G) = 1$ , ou seja, a classe do levantamento trivial é a única classe de  $\mathcal{F}_S G$ -conjugação de levantamentos  $l : G \rightarrow \mathcal{F}_S G$  da extensão  $0 \rightarrow \mathcal{F}_S G \rightarrow \mathcal{F}_S G \rtimes G \rightarrow G \rightarrow 1$  tais que  $l|_S = (0, id_S)$ .



# Bibliografia

- [1] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A Relative Cohomological Invariant for Group Pairs*, Manuscripta Mathematica, v.83, p.1-18, 1994.
- [2] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; Daccach, J.A.; *On Relative Cohomology of Groups*, Rev. Mat. Estat., São Paulo, v.17, p.275-288, 1999.
- [3] Bieri, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.
- [4] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality*, Inventiones Math., v.20, p.103-124, 1973.
- [5] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Relative Homology and Poincaré Duality for Groups Pairs*, J. Pure Appl. Algebra, v.13, p.277-319, 1978.
- [6] Brown, K.S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, 1982.
- [7] Cioca, D.M.; *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 1997.
- [8] Cohen, D.F.; *Groups of Cohomological Dimension One*, Lectures Notes in Math. 245 Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [9] Dicks, W.; Dunwood, M.; *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1988.
- [10] Fanti, E.L.C.; *Invariantes Cohomológicos e Decomposição de Grupos*, Tese de Doutorado, ICMSC - USP, São Carlos, 1992.
- [11] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamin, Inc., 1966.
- [12] Hilton, P.J.; Wylie, S.; *Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge Univ., Press, 1960.
- [13] Hopf, H.; *Enden offener Räume und unendlicher Gruppen*, Comm. Math. Helv., v.16, p.81-100, 1943.



- [14] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.
- [15] Kropholler, P.; Roller, M. A.; *Splittings of Poincaré Duality Groups II*, J. London Math. Soc., v.2, p.410-420, 1988.
- [16] Kropholler, P.; Roller, M. A.; *Relative Ends and Duality Groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, v.61, p.197-210, 1989.
- [17] MacLane, S.; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [18] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1967.
- [19] Massey, W.S.; *Singular Homology Theory*, Springer Verlag, New York, 1980.
- [20] Papani, F.M.G.; *Cohomologia de Grupos, Dualidade e Aplicações ao Invariante Algébrico  $E(G, S, M)$* , Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 1997.
- [21] Raymond, F.; Scott, L.L.; *Failure of Nielsen's theorem in higher dimensions*, Arch. Math., 29(6), p.643 - 654, 1977.
- [22] Ribes, L.; *On Cohomology theory for Pairs of Groups*, Proc. A.M.S., v.21, p.230-234, 1969.
- [23] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.
- [24] Schubert, H.; *Topology*, MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.
- [25] Scott, G.P.; *Ends of Pairs of Groups*, J. Pure Appl. Algebra 11, p.179-198, 1977.
- [26] Scott, G.P.; Wall, C.T.C.; *Topological Methods in Group Theory*, London Math. Soc. Lect. Notes Series 36, Homological Group Theory, p.137-203, 1979 .
- [27] Whitehead, G.W.; *Elements of Homotopy Theory*, G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.





