

Rosemeire Bressan

**Propriedades e Aplicações dos
Polinômios Ortogonais de Szegö**



1910000867



**PROPRIEDADES E APLICAÇÕES DOS
POLINÔMIOS ORTOGONAIS
DE SZEGÖ**

ROSEMEIRE BRESSAN

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-038

Propriedades e Aplicações dos Polinômios Ortogonais de Szegö

Rosemeire Bressan

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.



867/99

São José do Rio Preto, Fevereiro 1999

for xeroxado



À minha mãe, Idalina,
dedico.



“ A sabedoria que instrui justifica o seu nome,
não se manifesta a muitos; mas naqueles
que a conhecem, persevera, até (tê-los
levado) à presença de Deus.”

Eclo 6; 23.



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga,
pela orientação deste trabalho.

À Prof. Dra. ELiana Xavier L. de Andrade,
pela atenção e correção deste trabalho.

A todos os professores e funcionários,
que de alguma forma contribuíram
para a realização deste trabalho.

A todos os amigos e colegas
do curso de mestrado,
pelo companheirismo.

À FAPESP, pelo auxílio
financeiro.

A Deus.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os polinômios ortogonais definidos no plano complexo. De maneira especial, consideramos os polinômios conhecidos como polinômios de Szegő, definidos no círculo unitário. Como exemplo, temos os polinômios definidos sobre arcos no círculo unitário. Finalmente, utilizamos as propriedades dos polinômios de Szegő para analisar a positividade das fórmulas de quadratura no intervalo $[-1, 1]$.

Abstract

The objective of this work is to study the orthogonal polynomials defined on sets in the complex plan. Especially, we consider those polynomials, which are called Szegő polynomials, defined on the unit circle. As examples, we consider polynomials defined over arcs in the unit circle. Finally, we use the properties of the Szegő polynomials to analyse the positiveness of quadrature rules on the interval $[-1, 1]$.

Índice

1	Introdução	9
2	Preliminares	11
2.1	Polinômios Ortogonais	11
2.2	Relação de Recorrência para polinômios ortogonais reais	13
2.3	Quadratura Gaussiana	15
3	Polinômios ortogonais no plano complexo	19
3.1	Resultados preliminares	19
3.2	Propriedades extremas	22
3.3	Propriedades dos zeros	27
3.4	Polinômios ortogonais no círculo unitário	30
3.4.1	Matrizes de Toeplitz	30
3.4.2	Relação de Recorrência	32
3.4.3	Relação com os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$	33



3.5	Polinômios ortogonais definidos sobre dois arcos	37
3.5.1	Exemplos	40
3.6	Polinômios ortogonais definidos sobre um arco	53
3.6.1	Exemplos	55
4	Transformação de Moebius	68
4.1	Transformação de Moebius: teoria algébrica	68
4.1.1	Transformação de Moebius especial	71
4.2	A esfera de Riemann	72
4.2.1	Círculos generalizados	74
4.2.2	A Métrica Cordal	75
4.2.3	Movimentos rígidos da esfera de Riemann	76
4.3	Transformação de Moebius: simetria	78
4.3.1	O teorema da aplicação para discos	80
5	Combinações Lineares de Polinômios Ortogonais que geram Fórmulas de Quadratura Positivas	82
5.1	Alguns resultados preliminares	83
5.2	Principais resultados	87
	Referências	92



Capítulo 1

Introdução

Seja $\nu(\theta)$ uma função limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em $(0, 2\pi)$. Chamamos $\nu(\theta)$ uma medida positiva no círculo unitário. Seja o produto escalar definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(z) \overline{g(z)} d\nu(\theta), \quad z = e^{i\theta}.$$

Consideremos a sequência de polinômios $\{\varphi_n(z)\}$, onde $\varphi_n(z)$ é de grau n tal que

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

com $\delta_{n,m}$ o delta de Kronecher. Seguindo Jones, Njåstad e Thron [6] chamamos esses polinômios de *polinômios de Szegő* pois foram considerados por ele em uma série de artigos começando em 1918(veja [19]) e em seu livro [18].

O exemplo mais simples de polinômios de Szegő é obtido quando tomamos $\nu(\theta) = \theta$ e, neste caso, obtemos $\varphi_n(z) = z^n$.

A relação entre os polinômios de Szegő e as frações contínuas conhecidas por frações de Perron-Carathéodory (ou PC-fração) foi explorada em [6]. Em [4], [5], [7]-[12], esses polinômios são utilizados no estudo de filtros digitais e análises de frequências. Nosso interesse nesses polinômios foi despertado com os trabalhos [14] e [15], onde o autor aplica esses polinômios para estudar a positividade dos pesos de certas fórmulas de quadratura no intervalo $[-1, 1]$.



Neste trabalho, constituído de 5 capítulos, fizemos um estudo sobre recentes trabalhos de pesquisa sobre polinômios ortogonais definidos no plano complexo, especialmente os de Szegő definidos no círculo unitário, e os polinômios ortogonais definidos no intervalo $[-1, 1]$. No capítulo 2, damos uma breve introdução sobre os polinômios ortogonais definidos em um conjunto da reta real. Como aplicação desses polinômios, consideramos a fórmula de quadratura Gaussiana. Como a maioria das informações sobre polinômios ortogonais dadas nesse capítulo é bem conhecida e o objetivo de nosso trabalho está concentrado nos polinômios ortogonais no plano complexo, muitos dos resultados apresentados não foram demonstrados. Entretanto, todos podem ser encontrados nos textos de Szegő [18] e Chihara [2].

No capítulo 3 - Polinômios ortogonais no plano complexo, apresentamos os resultados obtidos principalmente no artigo Van Assche [20]. Consideramos principalmente a relação entre os polinômios ortogonais de Szegő e os polinômios ortogonais definidos no intervalo $[-1, 1]$. Usando alguns resultados considerados recentemente em Berti e Sri Ranga [1], obtemos informações sobre os polinômios de Szegő definidos em termos de medidas cujos pontos de aumento estão concentrados em arcos.

No capítulo 4, damos algumas informações sobre um tipo especial de transformação. São as conhecidas *transformações de Moebius* ou transformações lineares fracionais. O motivo pelo qual estudamos essas transformações surgiu da necessidade de entender alguns resultados considerados no capítulo 5, onde as propriedades dos polinômios de Szegő são usadas para estudar a positividade de certas fórmulas de quadratura em $[-1, 1]$. Os resultados desse último capítulo foram extraídos do artigo [14] de Peherstorfer. As informações sobre as transformações de Moebius foram obtidas principalmente do livro [13] de Henrici.



Capítulo 2

Preliminares

Introdução

Apresentamos neste capítulo, definições e propriedades dos polinômios ortogonais na reta real. Citamos a relação de recorrência de três termos, a identidade de Christoffel-Darboux e a Quadratura Gaussiana. Nesta fórmula de quadratura, utilizamos os zeros destes polinômios como sendo os nós da fórmula e assim, obtemos grau de precisão $2n - 1$. Além disso, esses conceitos serão usados nos próximos capítulos.

2.1 Polinômios Ortogonais

Seja μ uma medida positiva de Borel na reta real, isto é, $\mu(x)$ é uma função real limitada, não-decrescente com infinitos pontos de aumento em $(-\infty, \infty)$ tal que, os momentos definidos por

$$m_n = \int x^n d\mu(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1.1)$$

existem e são finitos. O conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \mu(x + \varepsilon) - \mu(x - \varepsilon) > 0, \text{ para todo } \varepsilon > 0\}$$



é chamado o suporte de μ . Denotemos o suporte de μ por $supp(\mu)$.

Por exemplo, se o suporte de μ é um intervalo $(a, b) \subseteq (-\infty, \infty)$ e $\mu \in C^1(a, b)$, então $w(x) = \mu'(x)$ que é uma função não-negativa e não identicamente nula em (a, b) é chamada de função peso.

Definimos os polinômios ortogonais em relação à medida μ por:

DEFINIÇÃO 2.1.1 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios com $P_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \dots$, $\gamma_n \neq 0$. Essa sequência será chamada de uma sequência de polinômios ortogonais se:*

$$\int P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \nu_n > 0, & \text{se } n = m \end{cases}$$

Além disso, a sequência é única se os polinômios $P_n(x)$ são mônicos, isto é, $\gamma_n = 1$ ou, então, se impusermos que γ_n é positivo e $\nu_n = 1$, $n \geq 1$. Nesse caso, a sequência será chamada de sequência de polinômios ortonormais e denotaremos por $\{p_n(x)\}$.

A relação citada na definição acima é equivalente a

$$\int x^m P_n(x)d\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ \nu_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

A demonstração desta equivalência pode ser encontrada em Chihara [2].

DEFINIÇÃO 2.1.2 *A matriz H_n , denominada Matriz de Hankel, é definida por*

$$H_n = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n} \end{pmatrix}.$$



Os polinômios ortonormais podem, então, ser dados por

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(H)} \Delta_n^{(H)}}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix},$$

onde $\Delta_n^{(H)} = \det H_n$ é o determinante de H_n . O coeficiente do termo de maior grau deste polinômio é dado pela razão

$$\gamma_n = \sqrt{\Delta_{n-1}^{(H)} / \Delta_n^{(H)}}.$$

2.2 Relação de Recorrência para polinômios ortogonais reais

A representação dos polinômios ortogonais em função da matriz de Hankel não é muito útil no manuseio desses polinômios. Damos, no próximo teorema, a relação de recorrência de três termos para os polinômios ortogonais reais. Essa relação fornece diversos meios para estudar estes polinômios

TEOREMA 2.2.1 *Os polinômios ortonormais $p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \dots$ na reta real satisfazem à relação*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad (2.2.2)$$

com condições iniciais $p_0(x) = 1$ e $p_{-1}(x) = 0$, onde

$$a_n = \int xp_{n-1}(x)p_n(x)d\mu(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0, \quad (2.2.3)$$

$$b_n = \int xp_{n-1}^2(x)d\mu(x) = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}. \quad (2.2.4)$$



Os polinômios ortogonais mônicos $\hat{p}_n(x) = p_n(x)/\gamma_n$, satisfazem à relação

$$\hat{p}_{n+1}(x) = (x - b_n)\hat{p}_n(x) - a_n^2\hat{p}_{n-1}(x), \quad (2.2.5)$$

com condições iniciais $\hat{p}_0(x) = 1$ e $\hat{p}_{-1}(x) = 0$.

Demonstração: Consideramos o polinômio $xp_n(x)$ de grau $n+1$. Expressando-o como uma combinação linear dos primeiros $n+2$ polinômios ortonormais obtemos

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{k,n} p_k(x).$$

Utilizando a propriedade de ortogonalidade temos

$$c_{k,n} = \int xp_n(x)p_k(x)d\mu(x).$$

Além disso, se $k+1 < n$, a integral acima é nula novamente pela ortogonalidade. Assim,

$$xp_n(x) = c_{n-1,n}p_{n-1}(x) + c_{n,n}p_n(x) + c_{n+1,n}p_{n+1}(x).$$

Chamando $c_{n-1,n} = a_n$, $c_{n,n} = b_n$ e como $c_{n+1,n} = c_{n,n+1}$, obtemos (2.2.2). Comparando os coeficientes de x^{n+1} em ambos os lados de (2.2.2) encontramos $\gamma_n = a_{n+1}\gamma_{n+1}$ de onde segue que $a_n = \gamma_{n-1}/\gamma_n$. Comparando os coeficientes de x^n obtemos $\delta_n = a_{n+1}\delta_{n+1} + b_n\gamma_n$ ou seja,

$$b_n = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}.$$

A relação de recorrência para os polinômios ortogonais mônicos é obtida substituindo-se $p_n(x)$ por $\gamma_n\hat{p}_n(x)$. ■

Da relação de recorrência, obtemos algumas outras equações úteis. Multiplicando-se ambos os lados da relação (2.2.2) por $p_n(y)$ obtemos

$$xp_n(x)p_n(y) = a_{n+1}p_{n+1}(x)p_n(y) + b_np_n(x)p_n(y) + a_np_{n-1}(x)p_n(y).$$

Trocando x por y na equação acima, temos que

$$yp_n(x)p_n(y) = a_{n+1}p_{n+1}(y)p_n(x) + b_np_n(x)p_n(y) + a_np_{n-1}(y)p_n(x).$$

Então, subtraindo-se as duas equações,

$$(x - y)p_n(x)p_n(y) = a_{n+1}[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)] - a_n[p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)].$$

Fazendo $n = 0, 1, \dots, m$ na equação acima e somando

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k(x)p_k(y) = a_m \frac{p_m(x)p_{m-1}(y) - p_{m-1}(x)p_m(y)}{x - y}. \quad (2.2.6)$$

Esta fórmula é conhecida como *Identidade de Christoffel-Darboux*. Quando y tende a x , obtemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = a_n (p'_n(x)p_{n-1}(x) - p'_{n-1}(x)p_n(x)). \quad (2.2.7)$$

Uma consequência do resultado (2.2.7) é que os zeros do polinômio ortogonal de grau n , $P_n(x)$, tem a propriedade de intercalar-se com os zeros do polinômio ortogonal de grau $n - 1$:

TEOREMA 2.2.2 *Sejam $x_{1,n} \leq x_{2,n} \leq \dots \leq x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$. Então, $x_{j,n} < x_{j,n-1} < x_{j+1,n}$, $1 \leq j \leq n - 1$, $n = 2, \dots$.*

Para uma prova desse teorema, ver Chihara [2]. Como consequência deste, podemos ver que os zeros de $P_n(x)$ so reais e distintos.

2.3 Quadratura Gaussiana

Fórmulas de quadratura interpolatória são aquelas que aproximam o valor de uma integral definida através de uma combinação linear de valores da função, isto é, são fórmulas do tipo

$$\int f(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \beta_{j,n} f(x_{j,n}) + R_n(f),$$

onde $R_n(f)$ é o erro cometido na aproximação da integral. Os pesos $\beta_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, são dados por

$$\beta_{j,n} = \frac{1}{\pi'_n(x_{j,n})} \int \frac{t_n(x)}{x - x_{j,n}} d\mu(x), \quad j = 1, \dots, n,$$

onde $\pi_n(x) = (x - x_{1,n}) \dots (x - x_{n,n})$ é um polinômio de grau n .

Os nós $x_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, e os n coeficientes de quadratura $\beta_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, ou seja, os pesos, são escolhidos tal que a fórmula de quadratura é exata para uma ampla classe de funções f .

Sejam $I(f) = \int f(x) d\mu(x)$ e $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \beta_{j,n} f(x_{j,n})$. Dizemos que o grau de precisão da regra de quadratura é k se ela é exata, para todo polinômio de grau $\leq k$, isto é, $I(q) = I_n(q)$ para $q(x) \in \mathbb{P}_k$ (espaço dos polinômios de grau k) e existe um polinômio de grau $k+1$ para o qual ela não é exata. Se fixarmos os n pontos $x_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, então as equações

$$\sum_{j=1}^n \beta_{j,n} x_{j,n}^k = m_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

obtidas tomando $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, formam um sistema de n equações lineares com n incógnitas $\beta_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, onde m_k são os momentos dados por (2.1.1). A matriz do sistema é a *matriz de Vandermonde*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{n,n} \\ x_{1,n}^2 & x_{2,n}^2 & \dots & x_{n,n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,n}^{n-1} & x_{2,n}^{n-1} & \dots & x_{n,n}^{n-1} \end{pmatrix},$$

que é não-singular quando todos os nós, $x_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, são distintos. Assim, para toda escolha de n nós distintos, temos um único conjunto de coeficientes de quadratura, $\beta_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, tal que a correspondente regra de quadratura tem grau de precisão no mínimo $n-1$.

Entretanto, se escolhermos os nós como sendo os zeros do polinômio ortogonal de grau n relativamente à $d\mu(x)$, essa precisão é muito maior. Vejamos:

TEOREMA 2.3.1 (Quadratura de Gauss-Jacobi-Christoffel) *Se escolhermos os nós da fórmula de quadratura como sendo os zeros $x_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, dos polinômios ortogonais $P_n(x)$, relativamente à medida μ e se denotarmos os correspondentes coeficientes de quadratura por $\lambda_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, então, para todo polinômio $\pi_{2n-1}(x)$ de grau menor ou igual a*



$2n - 1$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \pi_{2n-1}(x_{j,n}) = \int \pi_{2n-1}(x) d\mu(x).$$

Os coeficientes de quadratura $\lambda_{j,n}$ são positivos e são dados por

$$\lambda_{j,n} = \frac{1}{a_n p_{n-1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n})} = \frac{-1}{a_{n+1} p_{n+1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n})}$$

ou

$$\lambda_{j,n} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x_{j,n}) \right)^{-1}. \quad (2.3.8)$$

Demonstração: Seja $L_n(x)$ o polinômio de interpolação de $\pi_{2n-1}(x)$ sobre os nós $x_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$. Então,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \pi_{2n-1}(x_{j,n}) - \int \pi_{2n-1}(x) d\mu(x) = \int [L_n(x) - \pi_{2n-1}(x)] d\mu(x).$$

Como $[L_n(x) - \pi_{2n-1}(x)]$ é um polinômio de grau no máximo $2n - 1$ que se anula nos nós $x_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, temos

$$L_n(x) - \pi_{2n-1}(x) = P_n(x) r_{n-1}(x),$$

onde, $r_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau no máximo $n - 1$. Se $P_n(x)$ é o polinômio ortonormal de grau n para a medida μ , então, pela propriedade de ortogonalidade temos

$$\int [L_n(x) - \pi_{2n-1}(x)] d\mu(x) = 0,$$

mostrando que o grau de precisão é no mínimo $2n - 1$. Se $\pi_{2n}(x)$ é um polinômio de grau $2n$ e $L_n(x)$ é seu polinômio de interpolação, então,

$$L_n(x) - \pi_{2n}(x) = p_n(x) r_n(x),$$

onde $r_n(x)$ é um polinômio de grau n e a integral pode ser diferente de zero. Assim, mostramos que o grau de precisão é exatamente $2n - 1$. Os correspondentes coeficientes da quadratura são

$$\lambda_{j,n} = \int l_{j,n}(x) d\mu(x), \quad j = 1, \dots, n.$$



Observemos que

$$\int l_{j,n}^2(x) d\mu(x) - \int l_{j,n}(x) d\mu(x) = \frac{1}{p'_n(x_{j,n})} \int p_n(x) \frac{l_{j,n}(x) - 1}{x - x_{j,n}} d\mu(x) = 0$$

pois, $(l_{j,n}(x) - 1)/(x - x_{j,n})$ é um polinômio de grau $n - 2$. Daí,

$$\lambda_{j,n} = \int l_{j,n}^2(x) d\mu(x),$$

mostrando que esses coeficientes são positivos. Consideremos a fórmula de Cristoffel-Darboux com $y = x_{j,n}$. Então,

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) p_k(x_{j,n}) = a_n \frac{p_n(x) p_{n-1}(x_{j,n})}{x - x_{j,n}}$$

e

$$\begin{aligned} \int l_{j,n}(x) d\mu(x) &= \frac{1}{p'_n(x_{j,n}) p_{n-1}(x_{j,n})} \int \frac{p_{n-1}(x_{j,n}) p_n(x)}{x - x_{j,n}} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{a_n p'_n(x_{j,n}) p_{n-1}(x_{j,n})} \int \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) p_k(x_{j,n}) d\mu(x). \end{aligned}$$

Por ortogonalidade, temos

$$\int p_k(x) p_k(x_{j,n}) d\mu(x) = \delta_{k,0},$$

obtendo a primeira expressão para $\lambda_{j,n}$. Analogamente, usando a fórmula de Christoffel-Darboux para $n = n + 1$, obtemos a segunda expressão. Substituindo $x = x_{j,n}$ na equação (2.2.7) obtemos facilmente (2.3.8). ■



Capítulo 3

Polinômios ortogonais no plano complexo

Introdução

Neste capítulo, definimos os polinômios ortogonais no plano complexo. Damos uma atenção especial às propriedades extremas, localização dos zeros e relação de recorrência destes polinômios. Como um caso especial, apresentamos os polinômios ortogonais definidos sobre arcos.

3.1 Resultados preliminares

Seja μ uma medida positiva de Borel definida sobre um conjunto no plano complexo que chamamos de suporte de μ . Consideremos o espaço de Hilbert $L_2(\mu)$ de funções ϕ para o qual

$$\|\phi(z)\|^2 = \int |\phi(z)|^2 d\mu(z) < \infty,$$

e o produto interno definido por

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi(z) \overline{\psi(z)} d\mu(z), \quad \phi, \psi \in L_2(\mu). \quad (3.1.1)$$



Seja $\phi_0(z), \phi_1(z), \dots$ um sistema de funções linearmente independentes em $L_2(\mu)$. Podemos transformar esse sistema em um outro, $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$, de funções linearmente independentes onde cada $\varphi_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$, é uma combinação linear das $n+1$ funções $\phi_r(z)$, $r = 0, 1, \dots, n$ e

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = 0, \quad m \neq n.$$

Assim, obtemos uma sequência de funções ortogonais entre si com relação à medida μ . Se a integral acima for igual a 1 quando $m = n$, temos um sistema de funções ortonormais. Podemos obter uma expressão para $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$, em termos das funções originais $\phi_k(x)$, $k = 0, \dots, n$, e da matriz de Gram associada dada por

$$G_n = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Esta matriz é sempre hermitiana e positiva definida. Denotemos o determinante dessa matriz por

$$\Delta_n^{(G)} = \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix} \quad (3.1.3)$$

Logo, $\Delta_n^{(G)}$ é real e positivo.

TEOREMA 3.1.1 *As funções $\varphi_n(z)$ definidas por*

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \cdots & \phi_n(z) \end{vmatrix} \quad (3.1.4)$$

são ortonormais relativamente ao produto interno (3.1.1).

Demonstração: Primeiramente provemos a ortogonalidade. A linearidade implica que é suficiente mostrar que $\langle \varphi_n, \phi_k \rangle = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, pois $\varphi_m(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \phi_i(x)$. Calculando $\langle \varphi_n, \phi_k \rangle$ encontramos

$$\langle \varphi_n, \phi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_k \rangle & \langle \phi_1, \phi_k \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_k \rangle \end{vmatrix}.$$

Assim, para $k = 0, 1, \dots, n-1$, duas linhas do determinante são idênticas e, portanto, $\langle \varphi_n, \phi_k \rangle = 0$. Como

$$\langle \varphi_n, \phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{vmatrix}, \phi_n \rangle,$$

resolvendo esse determinante pela última linha obtemos também que,

$$\langle \varphi_n, \phi_n \rangle = \sqrt{\frac{\Delta_n^{(G)}}{\Delta_{n-1}^{(G)}}}.$$

Expandindo (3.1.4) pela última linha podemos escrever $\varphi_n(z) = \phi_n(z) \sqrt{\frac{\Delta_n^{(G)}}{\Delta_{n-1}^{(G)}}} + \psi_{n-1}(z)$, onde $\psi_{n-1}(z)$ é uma combinação linear das n primeiras funções $\phi_0(z), \dots, \phi_{n-1}(z)$. Portanto, verificamos que $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1$, concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

Estamos interessados no sistema de monômios $1, z, z^2, \dots$ e, a partir desta base no espaço linear de polinômios, obter um sistema de polinômios ortogonais em relação a uma medida μ dada. O sistema de polinômios ortonormais é único se impusermos que o coeficiente do termo de maior grau é positivo. Temos, assim, um sistema único de polinômios $\varphi_n(z)$ tal que

$$\int \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geq 0,$$

com $\varphi_n(z) = k_n z^n + \dots$ e $k_n > 0$.



3.2 Propriedades extremas

Seja $f \in L_2(u)$. Então, a expansão formal

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k(z)$$

é dada por

$$f(z) = \sum_{k=0}^n f_k \varphi_k(z).$$

Multiplicando-se ambos os lados da expansão acima por $\varphi_n(z)$ e integrando com relação a μ , encontramos uma expressão simples para os coeficientes:

$$f_n = \int f(z) \overline{\varphi_n(z)} d\mu(z) = \langle f, \varphi_n \rangle, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2.5)$$

A expansão é chamada de *série de Fourier* e os coeficientes f_k são conhecidos como os *coeficientes de Fourier*. Usando a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*, encontramos:

$$|f_n| \leq \left(\int |f(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \left(\int |\varphi_n(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} = \|f\|, \quad (3.2.6)$$

de maneira que todos os *coeficientes de Fourier* são finitos. Assim, a soma parcial desta série tem a seguinte propriedade extrema:

TEOREMA 3.2.1 *Seja $f \in L_2(\mu)$. Então, a integral*

$$\int |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z)$$

atinge seu mínimo entre todos os polinômios $q_n(z)$ de grau no máximo n quando $q_n(z)$ é a n -ésima soma parcial, $f_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k \varphi_k(z)$, da série de Fourier. O mínimo é

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |f_k|^2. \quad (3.2.7)$$

Demonstração: Temos que

$$\int |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z) = \int |f(z)|^2 d\mu(z) + \int |q_n(z)|^2 d\mu(z) - 2\Re \int f(z) \overline{q_n(z)} d\mu(z).$$



Se escrevermos $q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z)$, então

$$\begin{aligned} \int |q_n(z)|^2 d\mu(z) &= \int \left| \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z) \right|^2 d\mu(z) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_k \overline{a_j} \langle \varphi_k(z), \varphi_j(z) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \end{aligned}$$

e

$$\int f(z) \overline{q_n(z)} d\mu(z) = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \langle f, \varphi_k(z) \rangle = \sum_{k=0}^n f_k \overline{a_k}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z) &= \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n |a_k|^2 - 2\Re \sum_{k=0}^n f_k \overline{a_k} \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |f_k|^2 + \sum_{k=0}^n |a_k - f_k|^2. \end{aligned}$$

Essa expressão é mínima quando $a_k = f_k$. Assim, $q_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k \varphi_k(z)$, que é a n -ésima soma parcial da série de Fourier para f e o mínimo da integral acima é:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |f_k|^2.$$

Como consequência disto, temos a desigualdade

$$\sum_{k=0}^n |f_k|^2 \leq \|f\|^2$$

e, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos a desigualdade de Bessel

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

A soma parcial para a expansão de Fourier também pode ser dada como

$$f_n(z) = \int K_n(z, \xi) f(\xi) d\mu(\xi),$$

onde $K_n(z, \xi)$, denominado de *núcleo*, é dado por

$$K_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}.$$



Se $f(z)$ é um polinômio de grau no máximo n , a soma parcial $f_n(z)$ coincide com $f(z)$. Então, para todo polinômio $q_n(z)$ de grau no máximo n

$$q_n(z) = \int K_n(z, \xi) q_n(\xi) d\mu(\xi).$$

Por esta razão, chamamos $K_n(z, \xi)$ de *núcleo reprodutivo*. É fácil ver isto substituindo $q_n(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(\xi)$ na equação acima.

TEOREMA 3.2.2 *Suponha que o suporte de μ contém no mínimo n pontos. O mínimo de*

$$\|q_n\| = \left(\int |q_n(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

quando variamos $q_n(z)$ entre todos os polinômios mônicos de grau n , é atingido quando $q_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{k_n}$. O mínimo é $\frac{1}{k_n}$.

Demonstração: Vamos escrever o polinômio $q_n(z) = \hat{\varphi}_n(z) + r_{n-1}(z)$ onde $\hat{\varphi}_n(z) = \varphi_n(z)/k_n$ é um polinômio ortogonal mônico de grau n e r_{n-1} é o polinômio de grau no máximo $n-1$. Então, temos:

$$\begin{aligned} \int |q_n(z)|^2 d\mu(z) &= \int |\hat{\varphi}_n(z)|^2 d\mu(z) \\ &\quad + \int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) + 2\Re \int \hat{\varphi}_n(z) \overline{r_{n-1}(z)} d\mu(z). \end{aligned}$$

Pela propriedade de ortogonalidade, o último termo é nulo. Assim,

$$\int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \int |\hat{\varphi}_n(z)|^2 d\mu(z) + \int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z)$$

e essa expressão é mínima se

$$\int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) = 0.$$

A integral acima é zero se, e somente se, $r_{n-1}(z) = 0$ pois $r_{n-1}(z)$ tem no máximo $n-1$ zeros e μ tem no mínimo n pontos em seu suporte. Logo, o mínimo é obtido quando $q_n(z) = \hat{\varphi}_n(z)$. Como $\hat{\varphi}_n(z) = \varphi_n(z)/k_n$ obtemos que o mínimo é igual a $\frac{1}{k_n}$. ■



TEOREMA 3.2.3 *O mínimo da integral*

$$\int |q_n(z)|^2 d\mu(z),$$

obtido entre todos os polinômios $q_n(z)$ de grau no máximo n para os quais $q_n(\xi) = 1$, é atingido para o polinômio

$$\frac{\sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}}{\sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2} = \frac{K_n(z, \xi)}{K_n(\xi, \xi)}$$

e vale $[K_n(\xi, \xi)]^{-1}$.

Demonstração: Expressando-se o polinômio $q_n(z)$ como uma série de Fourier utilizando os primeiros $n + 1$ polinômios ortogonais $\varphi_k(z)$, $k = 0, \dots, n$, obtemos

$$q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z).$$

Logo,

$$\int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \sum_{k=0}^n |a_k|^2.$$

Como $q_n(\xi) = 1$,

$$\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(\xi) = 1,$$

e então, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2 \right) \geq 1, \quad (3.2.8)$$

de maneira que

$$\int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \geq \frac{1}{\sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2}.$$

Obteremos o mínimo quando ocorrer a igualdade na equação (3.2.8). Isto acontece para $a_k = C \overline{\varphi_k(\xi)}$, onde C é uma constante. Assim,

$$q_n(z) = C \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(\xi)} \varphi_k(z)$$

e

$$q_n(\xi) = C \sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2 = 1.$$

Daí, $C = 1 / \sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2$ e $q_n(z) = K_n(z, \xi) / K_n(\xi, \xi)$ é o polinômio que minimiza, sendo o mínimo dado por $1 / K_n(\xi, \xi)$. ■



TEOREMA 3.2.4 *Seja $\xi \in \mathcal{C}$ fixo. Então, o máximo de $|q_n(\xi)|^2$, entre todos os polinômios $q_n(z)$ de grau no máximo n com norma unitária, é atingido para*

$$q_n(z) = e^{i\theta} \frac{K_n(z, \xi)}{\sqrt{K_n(\xi, \xi)}}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

e este valor máximo é $K_n(\xi, \xi)$.

Demonstração: Seja $\xi \in \mathcal{C}$ fixo. O problema apresentado no teorema consiste em encontrar

$$\sup \left\{ |q_n(\xi)|^2 : q_n \in \mathcal{P}_n \text{ e } \int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = 1 \right\}. \quad (3.2.9)$$

Sem perda de generalidade, assumimos a equivalência do problema acima com o seguinte problema:

$$\sup \left\{ |q_n(\xi)|^2 : q_n \in \mathcal{P}_n, \int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = 1 \text{ e } q_n(\xi) \neq 0 \right\}. \quad (3.2.10)$$

De fato, para $q_{n,0}(z) = 1/m_0$ temos que $q_{n,0} \in \mathcal{P}_n$, $\int q_{n,0}(z) d\mu(z) = \frac{1}{m_0} \int d\mu(z) = 1$ e $|q_{n,0}(\xi)| = 1/m_0 > 0$, onde m_0 é o momento dado por (2.1.1). Assim, o supremo em (3.2.9) é estritamente positivo e será atingido para um polinômio tal que $q_n(\xi) \neq 0$.

Consideremos o polinômio $\tilde{q}_n(z) = q_n(z)/q_n(\xi)$. Temos, então:

$$\tilde{q}_n(\xi) = 1 \quad \text{e} \quad \int |\tilde{q}_n(z)|^2 d\mu(z) = \frac{1}{|q_n(\xi)|^2}.$$

Logo, o máximo de $|q_n(\xi)|^2$, obtido entre todos os polinômios $q_n(z)$ de grau máximo n com $\|q_n\| = 1$, corresponde ao mínimo de $\|\tilde{q}_n\|$ obtido entre todos os polinômios $\tilde{q}_n(z)$ de grau máximo n para o qual $\tilde{q}_n(\xi) = 1$. Sabemos que este mínimo é atingido para

$$\tilde{q}_n(z) = K_n(z, \xi)/K_n(\xi, \xi),$$

cujo mínimo é igual a $1/K_n(\xi, \xi)$. Assim, o máximo de $|q_n(\xi)|^2$ é $K_n(\xi, \xi)$ e é atingido para $q_n(z) = \tilde{q}_n(z)q_n(\xi)$. Além disso, esse máximo também é atingido para qualquer polinômio $e^{i\theta}\tilde{q}_n(z)q_n(\xi)$ com $|e^{i\theta}| = 1$. Então,

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\tilde{q}_n(z)q_n(\xi) &= \frac{K_n(z, \xi)}{K_n(\xi, \xi)} e^{i\theta} \sqrt{K_n(\xi, \xi)} \\ &= e^{i\theta} \frac{K_n(z, \xi)}{\sqrt{K_n(\xi, \xi)}}. \end{aligned}$$

■

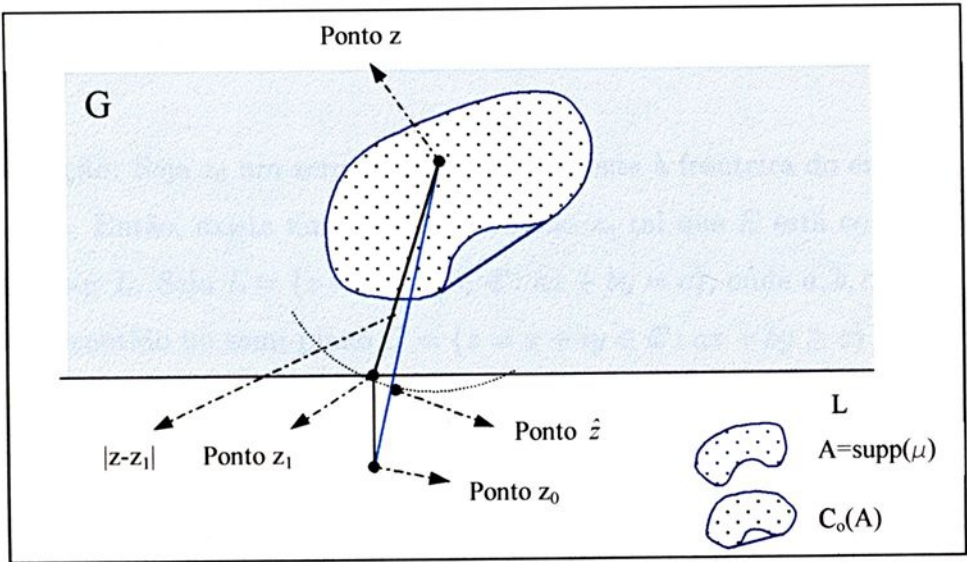
3.3 Propriedades dos zeros

O *envoltório convexo*, $C_o(A)$, de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é definido como sendo o menor conjunto convexo que contém A . Sabemos que um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ é convexo se, para cada par de pontos $x, y \in G$, o segmento de reta que liga x e y é um subconjunto de G . Se A é um conjunto fechado então $C_o(A)$ é a intersecção de todos os semi-planos fechados que contém A .

Vejamos agora o teorema de Fejér, que nos dá um interessante resultado.

TEOREMA 3.3.1 (Fejér) Se $\varphi_n(z)$ é um polinômio ortogonal de grau n com relação à medida μ , então todos os seus zeros pertencem a $C_o(\text{supp}(\mu))$.

Demonstração: Seja $z_0 \notin C_o(\text{supp}(\mu))$ um zero de $\varphi_n(z)$. Escrevemos $\hat{\varphi}_n(z) = (z - z_0)p_{n-1}(z)$, onde $p_{n-1}(z)$ é um polinômio mônico de grau $n - 1$. Desde que $z_0 \notin C_o(\text{supp}(\mu))$, existe um semi-plano fechado G tal que, $\text{supp}(\mu) \subset G$ e $z_0 \notin G$.



A fronteira deste semi-plano é uma reta L que separa $\text{supp}(\mu)$ e z_0 . Seja $z_1 \in L$ o ponto mais próximo a z_0 . Então, para todo $z \in \text{supp}(\mu)$,

$$|z - z_0| = |z - z_1| + |\hat{z} - z_0|,$$

onde $\hat{z}$ é a intersecção da reta que liga z e z_0 com o círculo de centro z e raio $|z - z_1|$. Temos, então:

$$|z - z_0| > |z - z_1|, \quad \forall z \in \text{supp}(\mu).$$

Assim,

$$\int |(z - z_1)p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) < \int |(z - z_0)p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) = \int |\hat{\varphi}_n(z)|^2 d\mu(z).$$

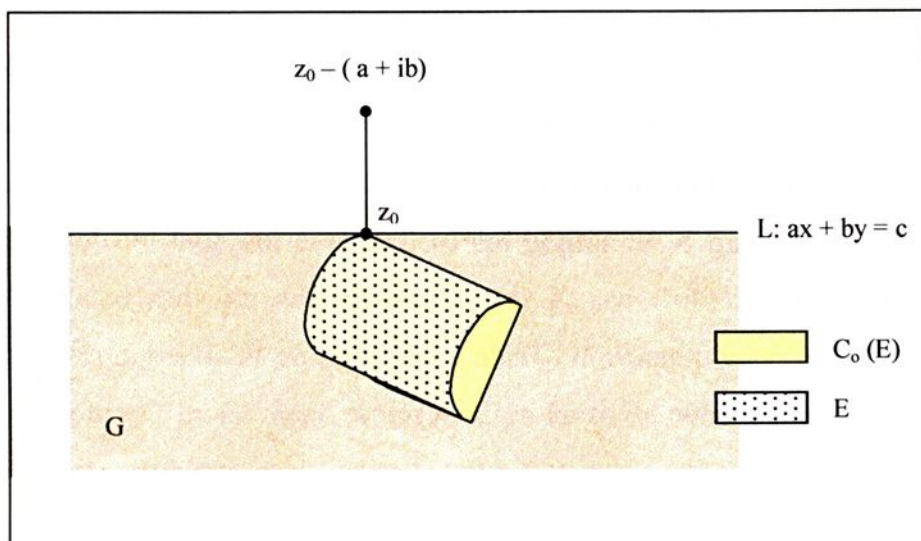
Do teorema 3.2.2, este resultado é uma contradição. Assim, concluímos que todos os zeros estão em $C_o(\text{supp}(\mu))$. ■

Outro teorema interessante, devido a Saff[16], nos diz o seguinte:

TEOREMA 3.3.2 *Se $C_o(\text{supp}(\mu))$ não é um segmento de reta e $\text{supp}(\mu)$ é um conjunto infinito, então os zeros do polinômio ortogonal relativamente à medida μ não estão na fronteira de envoltório convexo do $\text{supp}(\mu)$.*

Demonstração: Seja z_0 um zero de $\varphi_n(z)$ pertencente à fronteira do envoltório convexo de $E = \text{supp}(\mu)$. Então, existe uma reta L contendo z_0 tal que E está contido no semi-plano G , limitado por L . Seja $L = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : ax + by = c\}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vamos supor que E esteja contido no semi-plano $G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : ax + by \geq c\}$.





Como $z_0 = x_0 + iy_0 \in L$, temos $ax_0 + by_0 = c$. Assim $z_0 - (a + ib) \in \{z = x + iy \in \mathbb{C} : ax + by < c\}$ (semi-plano complementar). Como z_0 é um zero de $\varphi_n(z)$, temos

$$\hat{\varphi}_n(z) = (z - z_0)p_{n-1}(z),$$

onde $p_{n-1}(z)$ é um polinômio mônico de grau $n - 1$. Consideremos os polinômios mônicos

$$q_n(z) = [z - z_0 + t(a + ib)]p_{n-1}(z),$$

com $t \in \mathbb{R}$. Pelo teorema 3.2.2, temos que,

$$I(t) = \int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \int [(x - x_0 + ta)^2 + (y - y_0 + tb)^2] |p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z)$$

é mínima quando $t = 0$. Como

$$I'(t) = 2 \int [(x - x_0 + ta)a + (y - y_0 + tb)b] |p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z),$$

isso quer dizer que

$$I'(0) = 2 \int [(x - x_0)a + (y - y_0)b] |p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) = 0.$$

Mas, $ax_0 + by_0 = c$ e para todo $z = x + iy \in E$, $ax + by \geq c$. Daí, temos:

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = (ax + by) - (ax_0 + by_0) \geq 0.$$

Concluimos que $(ax + by - c)|p_{n-1}|^2 = 0$ para quase todo μ . Assim, o suporte de μ deve ser um subconjunto de $L \cup Z_n$, onde Z_n contém os zeros de $p_{n-1}(z)$. Consideremos as duas possibilidades: todos os pontos de E estão em L ou pelo menos um ponto de E está em Z_n (o restante estaria em L). Para a primeira possibilidade o envoltório convexo de E seria um segmento de reta (contradiz a hipótese). Para a segunda, o envoltório convexo será um polígono com um lado em L e vértices em pontos de E que estão em Z_n . Repetindo o argumento inicial com um dos vértices z_1 em Z_n , concluimos que existirá somente um número finito de pontos de E no semi-plano aberto limitado por uma reta L' que passa por z_1 . Mas isto implicaria que E contém um número finito de pontos, o que contradiz o fato de E ser um conjunto infinito. ■

3.4 Polinômios ortogonais no círculo unitário

3.4.1 Matrizes de Toeplitz

Seja ν uma medida positiva de Borel em $[0, 2\pi]$. Então, esta medida induz uma medida, que também denotaremos por ν , no círculo unitário $C = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ dada por

$$\int_C f(z) d\nu(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\nu(\theta).$$

Sejam

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{i(k)\theta} d\nu(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

os momentos trigonométricos da medida ν . Observe que

$$\langle z^k, z^l \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\nu(\theta) = c_{k-l}.$$

Então, a matriz de Gram $(\langle z_k, z_l \rangle)_{k,l=0}^n$ é dada por

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \dots & c_0 \end{pmatrix},$$



com valores constantes ao longo da diagonal. Essa matriz hermitiana é conhecida como *Matriz de Toeplitz*. Denotemos por Δ_n o determinante dessa matriz. Os polinômios ortonormais são então,

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix},$$

que são também chamados de *Polinômios de Szegő*. O coeficiente do termo de maior grau, k_n , é dado pela razão de dois determinantes de Toeplitz, ou seja,

$$k_n = \sqrt{\Delta_{n-1}/\Delta_n}.$$

Denotemos o polinômio ortogonal mônico no círculo unitário por $\Phi_n(z) = \varphi_n(z)/k_n$. Quando a medida ν é simétrica, os momentos trigonométricos são todos reais e dados por

$$c_k = 2 \int_0^\pi \cos k\theta d\nu(\theta).$$

Dado qualquer polinômio $q_n(z)$ de grau n , o polinômio recíproco é dado por $q_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} z^{n-k} = z^n \overline{q_n}(1/z)$, onde $\overline{q_n}(z)$ é o polinômio $q_n(z)$ com os coeficientes conjugados complexos. Consideremos $*$ como sendo uma operação que depende de n e é uma involução pois $[q_n^*(z)]^* = q_n(z)$. No círculo unitário, como $z = e^{i\theta}$, temos $q_n^*(z) = z^n \overline{q_n(z)}$ e $|q_n^*(z)|^2 = |q_n(z)|^2$.

TEOREMA 3.4.1 Se $K_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}$ é o núcleo reprodutivo para os polinômios ortogonais $\varphi_n(z)$ no círculo unitário, então

$$K_n(z, 0) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(0)} = k_n \varphi_n^*(z) \quad (3.4.11)$$

e

$$n \geq 1$$

$$K_n(0, 0) = \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = k_n^2. \quad (3.4.12)$$

Demonstração: Se $q_n(z)$ é um polinômio mônico de grau n , então $q_n^*(z)$ é um polinômio de grau no máximo n com $q_n^*(0) = 1$. O mínimo $1/k_n^2$ (ver teorema 3.2.2) de

$$\int_c |q_n(z)|^2 d\nu(z),$$



tomado entre todos os polinômios mônicos de grau n , é igual ao mínimo $1/K_n(0,0)$ (ver teorema 3.2.3) de

$$\int_c |q_n^*(z)|^2 d\nu(z),$$

para todos os polinômios $q_n^*(z)$ de grau no máximo n para os quais $q_n^*(0) = 1$. Então, $k_n^2 = K_n(0,0)$. Temos, também, que $q_n(z) = \varphi_n(z)/k_n$ e $q_n^*(z) = K_n(z,0)/K_n(0,0)$. Logo, $K_n(z,0) = k_n \varphi_n^*(z)$. ■

Considerando $\Phi_n(z)$ o polinômio ortogonal mônico de grau n no círculo unitário, temos $|\Phi_n(0)| = \prod_{j=1}^n |z_{j,n}|$, onde $z_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$ são os zeros de $\Phi_n(z)$, o que mostra pelo teorema 3.3.1 que $|\Phi_n(0)| \leq 1$. A desigualdade é estrita devido a (3.4.12), pois temos

$$k_n^2 - k_{n-1}^2 = |\varphi_n(0)|^2 = k_n^2 |\Phi_n(0)|^2$$

Portanto,

$$\left(\frac{k_{n-1}}{k_n}\right)^2 = 1 - |\Phi_n(0)|^2, \quad (3.4.13)$$

de maneira que $|\Phi_n(0)| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Este resultado também segue do teorema 3.3.2.

Daremos a seguir, algumas propriedades sobre os polinômios de Szegő.

3.4.2 Relação de Recorrência

Os polinômios ortogonais reais satisfazem a uma relação de recorrência de três termos que, em geral, não é válida para os polinômios ortogonais no plano complexo. Porém, existe uma fórmula de recorrência que é válida para os polinômios ortogonais no círculo unitário. Na verdade, esses polinômios satisfazem a um sistema de duas relações de recorrência.

TEOREMA 3.4.2 *Sejam $\varphi_n(z)$ polinômios ortonormais no círculo unitário. Então*

$$k_{n-1} z \varphi_{n-1}(z) = k_n \varphi_n(z) - \varphi_n(0) \varphi_n^*(z), \quad n \geq 1 \quad (3.4.14)$$

$$k_{n-1} \varphi_n(z) = k_n z \varphi_{n-1}(z) + \varphi_n(0) \varphi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1. \quad (3.4.15)$$

Para os polinômios ortogonais mônicos $\Phi_n(z)$ temos:

$$\frac{k_{n-1}^2}{k_n^2} z \Phi_{n-1}(z) = \Phi_n(z) - \Phi_n(0) \Phi_n^*(z), \quad (3.4.16)$$

$$\Phi_n(z) = z \Phi_{n-1}(z) + \Phi_n(0) \Phi_{n-1}^*(z). \quad (3.4.17)$$

Demonstração: Temos, do teorema 3.4.1, que $K_n(z, 0) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(0)} = k_n \varphi_n^*(z)$. Então,

$$k_n \varphi_n^*(z) - k_{n-1} \varphi_{n-1}^*(z) = \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(0)}. \quad (3.4.18)$$

Aplicando a operação $*$ à equação acima, encontramos:

$$k_{n-1} z \varphi_{n-1}(z) = k_n \varphi_n(z) - \varphi_n(0) \varphi_n^*(z),$$

que corresponde à equação (3.4.14). Multiplicando-se (3.4.14) por k_n e (3.4.18) por $\varphi_n(0)$ e subtraindo-as, eliminamos $\varphi_n^*(z)$ obtendo

$$k_n^2 \varphi_n(z) - k_n k_{n-1} z \varphi_{n-1}(z) - k_{n-1} \varphi_n(0) \varphi_{n-1}^*(z) = |\varphi_n(0)|^2 \varphi_n(z).$$

Substituindo $k_n^2 = k_{n-1}^2 + |\varphi_n(0)|^2$, chegamos à equação (3.4.15). A demonstração para os polinômios mônicos segue substituindo-se $\varphi_n(z) = k_n \Phi_n(z)$, completando assim a prova do teorema. ■

Eliminando-se $\Phi_n(z)$ de (3.4.16) e (3.4.17) encontramos, também, que

$$\Phi_n^*(z) = \overline{\Phi_n(0)} z \Phi_{n-1}(z) + \Phi_{n-1}^*(z). \quad (3.4.19)$$

Os polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário são determinados pela sequência $\Phi_n(0)$, $n \geq 0$, que são denominados *coeficientes de reflexão*.

3.4.3 Relação com os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$

Suponhamos que μ seja uma medida positiva definida em $[-1, 1]$. Então, existe uma sequência de polinômios ortonormais reais $p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \dots$, $\gamma_n > 0$, tais que

$$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) d\mu(x) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geq 0.$$



A partir de μ podemos definir uma medida ν em $[0, 2\pi]$ por

$$d\nu(\theta) = (1/2)|d\mu(\cos\theta)|.$$

Se $d\mu(x) = w(x)dx$ então $d\nu(\theta) = (1/2)w(\cos\theta)|\sin\theta|d\theta$. Logo, esta medida em $[0, 2\pi]$ induz uma medida ν no círculo unitário e existe uma sequência de polinômios ortonormais

$$\varphi_n(z) = k_n z^n + \dots, \quad k_n > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

tais que

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\nu(z) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geq 0.$$

Os correspondentes polinômios mônicos são

$$\hat{p}_n(x) = p_n(x)/\gamma_n, \quad \Phi_n(z) = \varphi_n(z)/k_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Vejamos, agora, uma relação entre os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ e os definidos no círculo unitário.

TEOREMA 3.4.3 (*Szegö*) *Os polinômios ortogonais no círculo unitário $\varphi_n(z)$ relativamente à medida ν , têm coeficientes reais. Se $x = (z + z^{-1})/2$, tal que $x = \cos\theta$ corresponde a $z = e^{i\theta}$, então*

$$p_n(x) = \frac{k_{2n}}{\sqrt{2[1 + \Phi_{2n}(0)]}} \left(z^{-n} \Phi_{2n}(z) + z^n \Phi_{2n}(1/z) \right), \quad n \geq 0. \quad (3.4.20)$$

Demonstração: Os coeficientes dos polinômios ortogonais são reais pelo fato de $d\nu(\theta) = d\nu(-\theta)$, ou seja, a medida é simétrica e consequentemente os momentos c_k , são reais. Consideremos os polinômios de Chebyshev de primeira espécie $T_n(x) = \cos n\theta$, $n = 0, 1, \dots$, onde $x = \cos\theta$. Se $x = (z + z^{-1})/2$, então

$$T_n(x) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Primeiramente, mostraremos que $(z^{-n} \Phi_{2n}(z) + z^n \Phi_{2n}(1/z))$ é um polinômio de grau n em x . Se $\Phi_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k z^k$, então

$$(z^{-n} \Phi_{2n}(z) + z^n \Phi_{2n}(1/z)) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k (z^{k-n} + z^{n-k}) = 2 \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k T_{|n-k|}(x),$$



pois $(z^{k-n} + z^{n-k}) = 2T_{n-k}(x)$ para $k = 0, 1, \dots, n$ e $(z^{k-n} + z^{n-k}) = 2T_{k-n}(x)$ para $k = n+1, \dots, 2n$. Logo, é fácil ver que o polinômio obtido é de grau n .

Ainda, considerando $k = 0$ e $k = 2n$, obtemos que o coeficiente do termo de maior grau será $2^n(\alpha_0 + \alpha_{2n})$. Assim, o coeficiente de maior grau de $(z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z))$ é $2^n[1 + \Phi_{2n}(0)]$ já que $\alpha_0 = \Phi_{2n}(0)$ e $\alpha_{2n} = 1$.

Vamos mostrar que este polinômio é ortogonal em $L_2(\mu)$ a todo $T_k(x)$ com $k < n$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)] T_k(x) d\mu(x) \\ &= \int_0^\pi [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)] \left(\frac{z^k + z^{-k}}{2}\right) d\mu(\cos\theta) \\ &= \int_0^\pi [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)] z^k \left|\frac{1}{2}d\mu(\cos\theta)\right| \\ &\quad + \int_0^\pi [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)] z^{-k} \frac{1}{2}d\mu(\cos\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)] z^k d\nu(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} z^{n-k}\overline{\Phi_{2n}(z)} d\nu(\theta) + \int_0^{2\pi} z^{n+k}\overline{\Phi_{2n}(z)} d\nu(\theta) \\ &= 0 \text{ para } 0 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Quando $k = n$ temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)] T_n(x) d\mu(x) &= \int_0^{2\pi} z^0\Phi_{2n}(z) d\nu(\theta) + \int_0^{2\pi} z^{2n}\overline{\Phi_{2n}(z)} d\nu(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} z^{2n}\overline{\Phi_{2n}(z)} d\nu(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(z)|^2 d\nu(\theta) \\ &= 1/k_{2n}^2. \end{aligned}$$

De

$$(z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)) = 2(1 + \Phi_{2n}(0))T_n(x) + q_{n-1}(x)$$

temos que $\|(z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z))\| = k_{2n}^{-1}\sqrt{2[1 + \Phi_{2n}(0)]}$. Assim, segue a fórmula (3.4.20) para $n > 0$. Para $n = 0$ temos $\hat{p}_0(x) = 1$, provando assim o teorema. ■

De (3.4.20) podemos obter uma relação entre os coeficientes dos polinômios definidos em $[-1, 1]$ e os coeficientes de reflexão $\Phi_n(0)$, $n \geq 1$.



TEOREMA 3.4.4 *Os coeficientes da relação de recorrência (veja teorema 2.2.1) para os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ e os coeficientes de reflexão $\Phi_n(0)$ estão relacionados por*

$$2a_n = \sqrt{[1 - \Phi_{2n}(0)][1 - \Phi_{2n-1}^2(0)][1 + \Phi_{2n-2}(0)]}, \quad (3.4.21)$$

$$2b_n = \Phi_{2n-1}(0)[1 - \Phi_{2n}(0)] - \Phi_{2n+1}(0)[1 + \Phi_{2n}(0)]. \quad (3.4.22)$$

Por outro lado, se $R_n(x) = \hat{p}_{n+1}(x)/\hat{p}_n(x)$, então

$$\Phi_{2n}(0) = R_n(1) - R_n(-1) - 1, \quad \Phi_{2n+1}(0) = \frac{R_n(1) + R_n(-1)}{R_n(1) - R_n(-1)}. \quad (3.4.23)$$

Demonstração: Utilizando-se o coeficiente de x^n em (3.4.20) obtemos

$$\gamma_n = 2^{n-1/2} k_{2n} \sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)}. \text{ Então,}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = 2 \frac{k_{2n}}{k_{2n-2}} \frac{\sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)}}{\sqrt{1 + \Phi_{2n-2}(0)}}.$$

Como $\left(\frac{k_n}{k_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{1 - \Phi_n^2(0)}$, temos $\left(\frac{k_{2n}}{k_{2n-2}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Phi_{2n}^2(0))}\sqrt{(1 - \Phi_{2n-2}^2(0))}}$ e, consequentemente, o resultado (3.4.21). A fórmula (3.4.22) segue do coeficiente de x^{n-1} em (3.4.20).

Se $x = 1$ temos

$$1 = \frac{z + z^{-1}}{2}. \text{ Logo, } z = 1.$$

Se $x = -1$ então $z = -1$. Assim, encontramos de (3.4.20)

$$p_n(1) = \frac{\sqrt{2}k_{2n}\Phi_{2n}(1)}{\sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)}} \quad \text{e} \quad p_n(-1) = (-1)^n \frac{\sqrt{2}k_{2n}\Phi_{2n}(-1)}{\sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)}}.$$

Da relação de recorrência (3.4.16) encontramos

$$\Phi_{n+1}(1) = \left(\frac{k_n}{k_{n+1}}\right)^2 \Phi_n(1) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}(1).$$

Resolvendo esta equação para $\Phi_{n+1}(1)$ e usando (3.4.13) obtemos

$$\Phi_{n+1}(1) = [1 + \Phi_{n+1}(0)]\Phi_n(1).$$

Fazendo o mesmo para $z = -1$ temos

$$\Phi_{n+1}(-1) = -[1 - (-1)^n \Phi_{n+1}(0)]\Phi_n(-1).$$



Como $R_n(1) = \hat{p}_{n+1}(1)/\hat{p}_n(1)$, obtemos:

$$R_n(1) = a_{n+1} \frac{p_{n+1}(1)}{p_n(1)} = a_{n+1} \frac{k_{2n+2}}{k_{2n}} \frac{\sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)}}{\sqrt{1 + \Phi_{2n+2}(0)}} \frac{\Phi_{2n+2}(1)}{\Phi_{2n}(1)}$$

ou, ainda,

$$2R_n(1) = [1 + \Phi_{2n}(0)][1 + \Phi_{2n+1}(0)].$$

Similarmente encontramos

$$R_n(-1) = a_{n+1} \frac{p_{n+1}(-1)}{p_n(-1)} = -a_{n+1} \frac{k_{2n+2}}{k_{2n}} \frac{\sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)}}{\sqrt{1 + \Phi_{2n+2}(0)}} \frac{\Phi_{2n+2}(-1)}{\Phi_{2n}(-1)}$$

ou

$$-2R_n(-1) = [1 + \Phi_{2n}(0)][1 - \Phi_{2n+1}(0)].$$

Obtemos agora, facilmente, as equações (3.4.23). ■

3.5 Polinômios ortogonais definidos sobre dois arcos

Consideremos os polinômios ortogonais mônicos $\{\hat{p}_n(x)\}$ que satisfazem à relação de recorrência

$$\hat{p}_{n+1}(x) = (x - b_{n+1})\hat{p}_n(x) - a_{n+1}^2 \hat{p}_{n-1}(x),$$

com condições iniciais dadas por:

$$a_2^2 = w\alpha_0^2, \quad a_{2n+1}^2 = \alpha_1^2, \quad a_{2n+2}^2 = \alpha_0^2, \quad b_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Vamos também considerar que $\alpha_0 > \alpha_1$ e $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. Foi mostrado em [1] que, se $w \in [1 - \alpha_0/\alpha_1, 1 + \alpha_0/\alpha_1]$, a medida $d\mu(w, x)$ associada a esses polinômios tem seu suporte em $B = [-1, -a] \cup [a, 1]$ e satisfaz

$$\mu'(w, x) = \frac{1}{2\pi A(w)} \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-a^2}}{|x|(1+q(w)x^2)},$$

em B , onde $a = (\alpha_0 - \alpha_1)$, $q(w) = \frac{1-w}{wA(w)}$ e $A(w) = (w-1)\alpha_0^2 + \alpha_1^2$.

A medida correspondente no círculo unitário pode, então, ser dada por

$$\nu'(w, \theta) = \frac{1}{2} \mu'(w, \cos\theta) |\sin\theta| = \frac{1}{4\pi A(w)} \frac{\sin^2\theta \sqrt{\cos^2\theta - a^2}}{|\cos\theta| \{1 + q(w)\cos^2\theta\}},$$



que é definida nos arcos $-\theta_a < \theta < \theta_a$ e $\pi - \theta_a < \theta < \pi + \theta_a$, onde $\theta_a = \arccos(a)$.

Como $\hat{p}_n(-x) = (-1)^n \hat{p}_n(x)$ temos $R_n(-1) = -R_n(1)$ e daí,

$$\Phi_{2n}(0) = 2R_n(1) - 1 \quad \text{e} \quad \Phi_{2n+1}(0) = 0.$$

De $\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) + \Phi_n(0)\Phi_{n-1}^*(z)$ obtemos $\Phi_{2n+1}(z) = z\Phi_{2n}(z)$. Substituindo esta relação em $(1 - |\Phi_n(0)|^2)z\Phi_{n-1}(z) = \Phi_n(z) - \Phi_n(0)\Phi_n^*(z)$ obtemos uma outra relação para $\Phi_{2n}(z)$ em função de $\Phi_{2n-2}(z)$ e $\Phi_{2n-2}^*(z)$, ou seja:

$$\Phi_{2n}(z) = z^2\Phi_{2n-2}(z) + \Phi_{2n}(0)\Phi_{2n-2}^*(z).$$

Podemos também calcular uma relação para os coeficientes de $\Phi_{2n}(z)$. Notemos que $\Phi_{2n}(z)$ não possui os coeficientes ímpares. Assim, comparando os coeficientes da equação acima, obtemos uma relação a partir da qual podemos calcular $\Phi_{2n}(z)$ utilizando os coeficientes de $\Phi_{2n-2}(z)$. Isto é, se $\Phi_{2n}(z) = \sum_{r=0}^n a_r^{(2n)} z^{2r}$, então

$$\begin{aligned} a_0^{(2n)} &= 2R_n(1) - 1, \\ a_{2n}^{(2n)} &= 1, \\ a_{2s}^{(2n)} &= a_{2s-2}^{(2n-2)} + a_0^{(2n)} a_{2n-2-2s}^{(2n-2)}, \quad s = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Temos, então, um algoritmo para calcular os coeficientes de $\Phi_{2n}(z)$ e, conseqüentemente, o polinômio. Precisamos, agora, calcular $R_n(1)$. Sejam as relações de recorrências

$$\hat{p}_{2n-1}(x) = x\hat{p}_{2n-2}(x) - \alpha_1^2 \hat{p}_{2n-3}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.5.24)$$

e

$$\hat{p}_{2n}(x) = x\hat{p}_{2n-1}(x) - \alpha_0^2 \hat{p}_{2n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (3.5.25)$$

com condições iniciais

$$\hat{p}_0(x) = 1, \quad \hat{p}_1(x) = x \quad \text{e} \quad \hat{p}_2(x) = x^2 - w\alpha_0^2.$$

Colocando $\hat{p}_0(x) = w$, a relação de recorrência (3.5.25) valerá também para $n \geq 1$. De (3.5.24) e (3.5.25) obtemos a equação de diferenças:

$$\hat{p}_{2n}(x) = \{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)\} \hat{p}_{2n-2}(x) - \alpha_0^2 \alpha_1^2 \hat{p}_{2n-4}(x), \quad n \geq 2$$

com condições iniciais $\hat{p}_0(x) = w$ e $\hat{p}_2(x) = x^2 - w\alpha_0^2$. Considerando uma solução do tipo U^n para $\hat{p}_{2n}(x)$ obtemos

$$U(x) = \frac{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \pm \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 - a^2)}}{2}.$$

Então, a solução geral para $\hat{p}_{2n}(x)$ é

$$\begin{aligned} \hat{p}_{2n}(x) = & c_1 \left\{ \frac{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 - a^2)}}{2} \right\}^n \\ & + c_2 \left\{ \frac{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) - \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 - a^2)}}{2} \right\}^n. \end{aligned}$$

Quando $x = 1$ temos:

$$\hat{p}_{2n}(1) = c_1 \left\{ \frac{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{2} \right\}^n + nc_2 \left\{ \frac{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{2} \right\}^n.$$

Como $\hat{p}_0(1) = w$ e $\hat{p}_2(1) = 1 - w\alpha_0^2$, da equação acima obtemos os valores

$$c_1 = w$$

$$c_2 = \frac{2 - w(1 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2)}{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}.$$

Como $R_{2n}(1) = \frac{\hat{p}_{2n+1}(1)}{\hat{p}_{2n}(1)}$, precisamos ainda obter uma expressão para o polinômio $\hat{p}_{2n+1}(x)$. Vejamos.

Utilizando as equações (3.5.24) e (3.5.25) para $\hat{p}_{2n}(x)$ e $\hat{p}_{2n+1}(x)$ obtemos a equação de diferenças

$$\hat{p}_{2n+1}(x) = \{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)\}\hat{p}_{2n-1}(x) - \alpha_0^2\alpha_1^2\hat{p}_{2n-3}(x), \quad n \geq 2,$$

com condições iniciais

$$\hat{p}_1(x) = x \quad \text{e} \quad \hat{p}_3(x) = x^3 - (w\alpha_0^2 + \alpha_1^2)x.$$

Procedendo da mesma maneira que para $\hat{p}_{2n}(x)$, obtemos

$$U(x) = \frac{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \pm \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 - a^2)}}{2}.$$

A solução geral para $\hat{p}_{2n+1}(x)$ é igual à de $\hat{p}_{2n}(x)$. Quando $x = 1$

$$\hat{p}_{2n+1}(1) = \tilde{c}_1 \left\{ \frac{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{2} \right\}^n + n\tilde{c}_2 \left\{ \frac{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{2} \right\}^{n-1}.$$

De $\hat{p}_1(1) = 1$ e $\hat{p}_3(1) = 1 - (w\alpha_0^2 + \alpha_1^2)$ e da equação acima, encontramos:

$$\tilde{c}_1 = 1$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{2 - 2(w\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)} - 1.$$

Daí,

$$R_{2n}(1) = \frac{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + n(2 - 2(w\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) - n(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2))}{w(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) + n(2 - w(1 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2))}$$

e

$$R_{2n+1}(1) = \frac{w(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) + (n + 1)(2 - w(1 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2))}{(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) + n(2 - 2(w\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) + n(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2))} \left\{ \frac{(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2))}{2} \right\}.$$

3.5.1 Exemplos

Com o auxílio do Software Mathematica, implementamos um programa que calcula os polinômios ortogonais definidos sobre dois arcos e os seus respectivos zeros. Daremos, a seguir, esses polinômios e a localização dos zeros no círculo unitário.

Pelas equações acima, vemos que $R_{2n}(1)$ e $R_{2n+1}(1)$ são escritos em função de α_0, α_1 e w . Assim, as condições iniciais para este primeiro exemplo são:

$w = 1$	$\alpha_0 = 0.95$	$\alpha_1 = 0.05$
---------	-------------------	-------------------

Os polinômios $\Phi_n(z)$ estão definidos nos arcos $-\theta_{0.9} < \theta < \theta_{0.9}$ e $\pi - \theta_{0.9} < \theta < \pi + \theta_{0.9}$, onde $\theta_{0.9} = \arccos(0.9) \approx 0.451$. De acordo com os teoremas 3.3.1 e 3.3.2, os zeros de $\Phi_n(z)$ estão localizados dentro da região $W_a \equiv \{z : |z| < 1, |\Im m(z)| < \sqrt{1 - a^2}\}$. Para o nosso exemplo

temos $W_{0.9} \equiv \{z : |z| < 1, |\Im m(z)| < 0.46\}$. Veremos isso gerando os polinômios e os zeros para alguns valores de n .

$n = 10$	$-0.9542307692 + 4.107182101z^2 - 7.679801063z^4$ $+ 7.746304460z^6 - 4.217566420z^8 + z^{10}$
Zeros	$\{-0.9915495466\}, \{-0.9915495466\}$ $\{-0.9655340514 - 0.2320218780i\}, \{-0.9655340514 + 0.2320218780i\}$ $\{+0.9655340514 - 0.2320218780i\}, \{+0.9655340514 + 0.2320218780i\}$ $\{-0.9321602657 - 0.3607584440i\}, \{-0.9321602657 + 0.3607584440i\}$ $\{+0.9321602657 - 0.3607584440i\}, \{+0.9321602657 + 0.3607584440i\}$



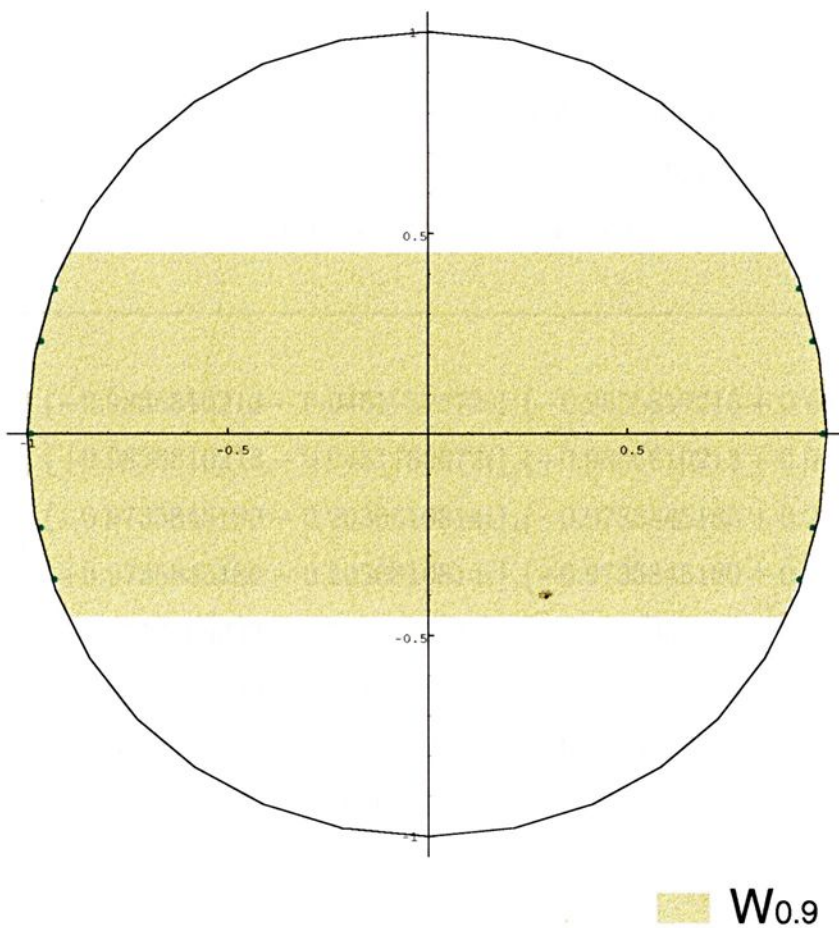


Figura 3.1: Zeros do polinômio de grau 10

$n = 16$	$0.9119496855 - 6.401813696z^2 + 20.49895120z^4$ $-39.05152335z^6 + 48.3744349z^8 - 39.89714518z^{10}$ $+21.40847778z^{12} - 6.843041945z^{14} + z^{16}$
Zeros	$\{-0.9836810213 - 0.0451750672i\}, \{-0.9836810213 + 0.0451750672i\}$ $\{+0.9836810213 - 0.0451750672i\}, \{+0.9836810213 + 0.0451750672i\}$ $\{-0.9735845180 - 0.2036610814i\}, \{-0.9735845180 + 0.2036610814i\}$ $\{+0.9735845180 - 0.2036610814i\}, \{+0.9735845180 + 0.2036610814i\}$ $\{-0.9512365343 - 0.3011728533i\}, \{-0.9512365343 + 0.3011728533i\}$ $\{+0.9512365343 - 0.3011728533i\}, \{+0.9512365343 + 0.3011728533i\}$ $\{-0.9314719822 - 0.3636502167i\}, \{-0.9314719822 + 0.3636502167i\}$ $\{+0.9314719822 - 0.3636502167i\}, \{+0.9314719822 + 0.3636502167i\}$



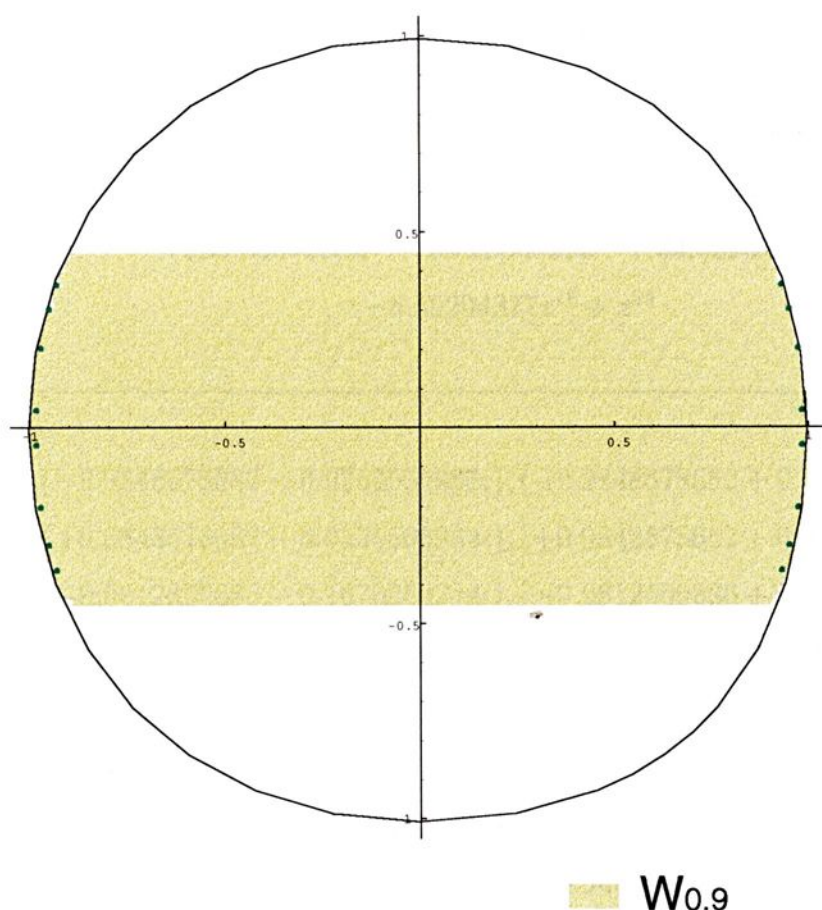


Figura 3.2: Zeros do polinômio de grau 16

$n = 20$	$ \begin{aligned} &0.9095477386 - 7.980722523z^2 + 32.54568063z^4 \\ &-81.1493049z^6 + 136.9126075z^8 - 163.2675839z^{10} \\ &+139.3605639z^{12} - 84.1000389z^{14} + 34.36131627z^{16} \\ &-8.59204377z^{18} + z^{20} \end{aligned} $
Zeros	$ \begin{aligned} &\{-0.9848578682 - 0.0255506933i\}, \{-0.9848578682 + 0.0255506933i\} \\ &\{+0.9848578682 - 0.0255506933i\}, \{+0.9848578682 + 0.0255506933i\} \\ &\{-0.9812609886 - 0.1670288244i\}, \{-0.9812609886 + 0.1670288244i\} \\ &\{+0.9812609886 - 0.1670288244i\}, \{+0.9812609886 + 0.1670288244i\} \\ &\{-0.9635784580 - 0.2559911331i\}, \{-0.9635784580 + 0.2559911331i\} \\ &\{+0.9635784580 - 0.2559911331i\}, \{+0.9635784580 + 0.2559911331i\} \\ &\{-0.9464589878 - 0.3193155569i\}, \{-0.9464589878 + 0.3193155569i\} \\ &\{+0.9464589878 - 0.3193155569i\}, \{+0.9464589878 + 0.3193155569i\} \\ &\{-0.9313833386 - 0.3639971084i\}, \{-0.9313833386 + 0.3639971084i\} \\ &\{+0.9313833386 - 0.3639971084i\}, \{+0.9313833386 + 0.3639971084i\} \end{aligned} $



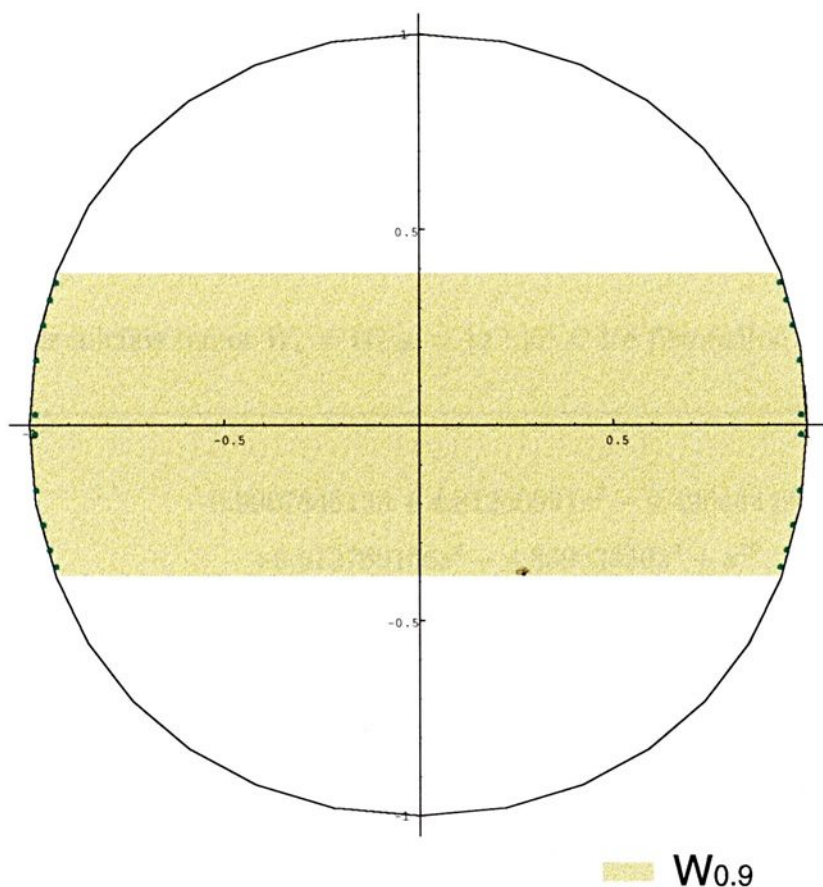


Figura 3.3: Zeros do polinômio de grau 20

Observemos que os zeros de Φ_{10} , Φ_{16} e Φ_{20} estão localizados dentro da região $W_{0.9}$. Como $\Phi_{2n+1} = z\Phi_{2n}$, verificamos que os zeros de Φ_{11} , Φ_{17} e Φ_{21} também estão localizados dentro de $W_{0.9}$.

Neste próximo exemplo colocamos α_0 mais próximo de 1 e observamos que a região onde os zeros se encontram, W_a , diminuiu consideravelmente.

$w = 1$	$\alpha_0 = 0.99$	$\alpha_1 = 0.01$
---------	-------------------	-------------------

Para estes valores iniciais temos $W_a = W_{0.98} = \{z : |z| < 1 \text{ e } |\Im m(z)| < 0.19\}$

$n = 10$	$-0.9907846153 + 4.81250991z^2 - 9.49644449z^4$ $+ 9.513769166z^6 - 4.83903350z^8 + z^{10}$
Zeros	$\{-0.9982634350\}, \{+0.9982634350\}$ $\{-0.9930801067 - 0.1052343497i\}, \{-0.9930801067 + 0.1052343497i\}$ $\{+0.9930801067 - 0.1052343497i\}, \{+0.9930801067 + 0.1052343497i\}$ $\{-0.9863945320 - 0.1638785957i\}, \{-0.9863945320 + 0.1638785957i\}$ $\{+0.9863945320 - 0.1638785957i\}, \{+0.9863945320 + 0.1638785957i\}$



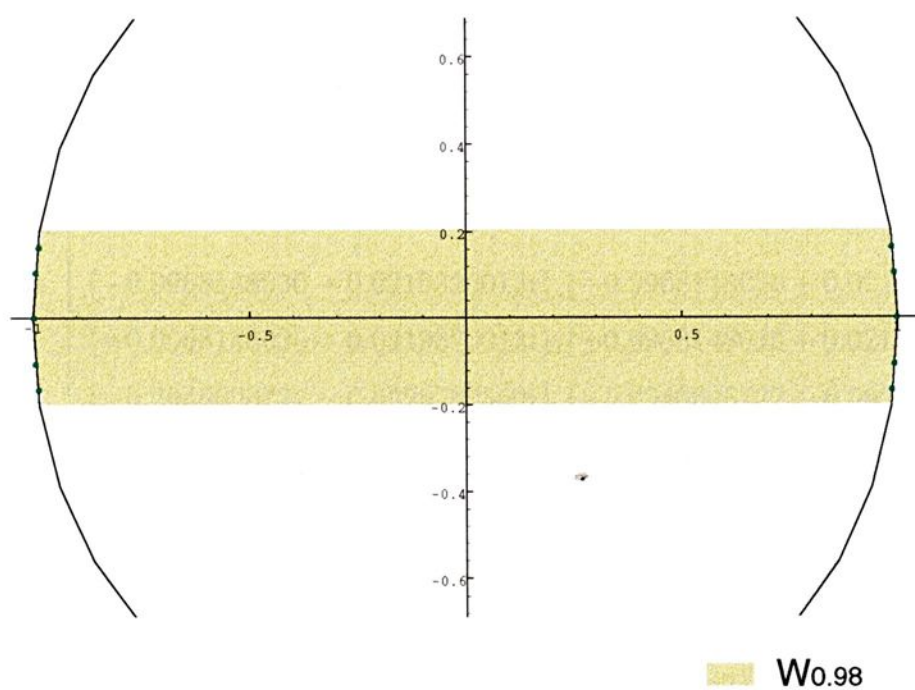


Figura 3.4: Zeros do polinômio de grau 10

$n = 16$	$0.9824780976 - 7.660958184z^2 + 26.34480478z^4$ $-52.18163367z^6 + 65.11131192z^8 - 52.40954969z^{10}$ $+26.57607509z^{12} - 7.762527806z^{14} + z^{16}$
Zeros	$\{-0.9968148030 - 0.0219320013i\}, \{-0.9968148030 + 0.0219320013i\}$ $\{+0.9968148030 - 0.0219320013i\}, \{+0.9968148030 + 0.0219320013i\}$ $\{-0.9946606727 - 0.0925760560i\}, \{-0.9946606727 + 0.0925760560i\}$ $\{+0.9946606727 - 0.0925760560i\}, \{+0.9946606727 + 0.0925760560i\}$ $\{-0.9902095130 - 0.1365495879i\}, \{-0.9902095130 + 0.1365495879i\}$ $\{+0.9902095130 - 0.1365495879i\}, \{+0.9902095130 + 0.1365495879i\}$ $\{-0.9862647179 - 0.1651107120i\}, \{-0.9862647179 + 0.1651107120i\}$ $\{+0.9862647179 - 0.1651107120i\}, \{+0.9862647179 + 0.1651107120i\}$



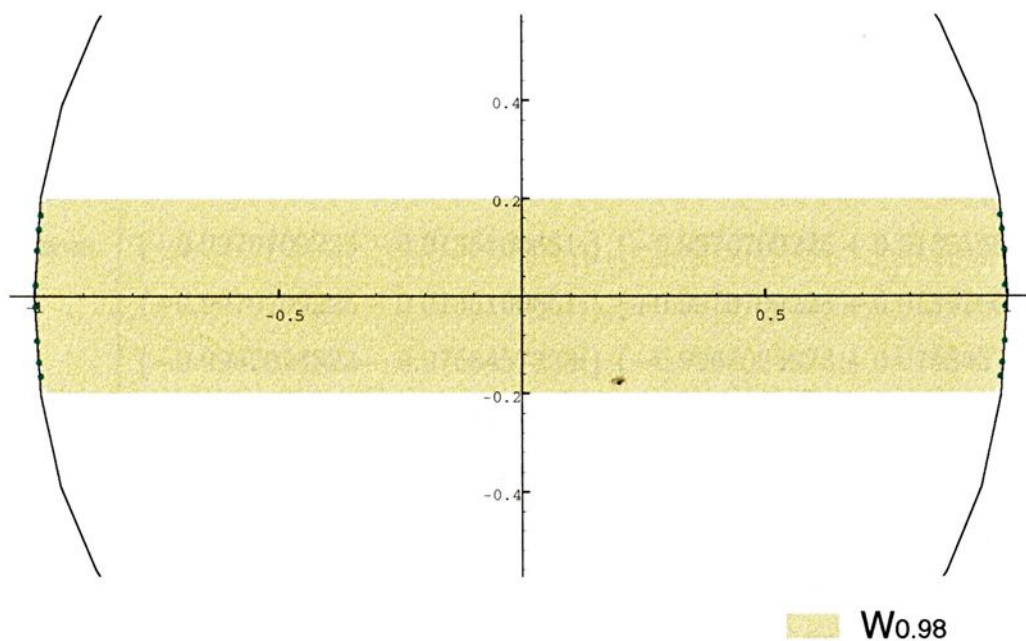


Figura 3.5: Zeros do polinômio de grau 16



$n = 20$	$ \begin{aligned} &0.9819819 - 9.571735741z^2 + 42.24299438z^4 \\ &-111.1532403z^6 + 193.1055350z^8 - 231.4411416z^{10} \\ &+193.7999569z^{12} - 111.9553875z^{14} + 42.70232481z^{16} \\ &-9.711287920z^{18} + z^{20} \end{aligned} $
Zeros	$ \begin{aligned} &\{-0.9970709225 - 0.0135160661i\}, \{-0.9970709225 + 0.0135160661i\} \\ &\{+0.9970709225 - 0.0135160661i\}, \{+0.9970709225 + 0.0135160661i\} \\ &\{-0.9962024823 - 0.0758457333i\}, \{-0.9962024823 + 0.0758457333i\} \\ &\{+0.9962024823 - 0.0758457333i\}, \{+0.9962024823 + 0.0758457333i\} \\ &\{-0.9926592203 - 0.1160903789i\}, \{-0.9926592203 + 0.1160903789i\} \\ &\{+0.9926592203 - 0.1160903789i\}, \{+0.9926592203 + 0.1160903789i\} \\ &\{-0.9892706602 - 0.1446435388i\}, \{-0.9892706602 + 0.1446435388i\} \\ &\{+0.9892706602 - 0.1446435388i\}, \{+0.9892706602 + 0.1446435388i\} \\ &\{-0.9862490022 - 0.1652504837i\}, \{-0.9862490022 + 0.1652504837i\} \\ &\{+0.9862490022 - 0.1652504837i\}, \{+0.9862490022 + 0.1652504837i\} \end{aligned} $



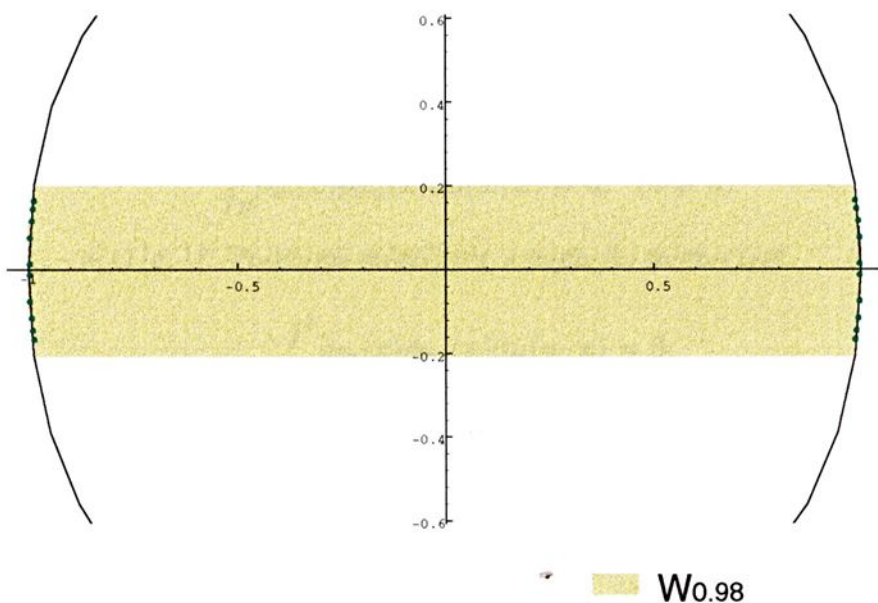


Figura 3.6: Zeros do polinômio de grau 20

Novamente verificamos que os zeros dos polinômios Φ_{10} , Φ_{11} , Φ_{16} , Φ_{17} , Φ_{20} e Φ_{21} estão localizados dentro da região $W_{0.98}$.

3.6 Polinômios ortogonais definidos sobre um arco

Nesta seção, apresentaremos os polinômios ortogonais definidos sobre um arco no círculo unitário. O procedimento é análogo ao que fizemos para os polinômios da seção anterior.

Sejam $\hat{p}_{2n}(x)$ e $\hat{p}_{2m}(x)$, os polinômios ortogonais mônicos definidos na seção anterior satisfazendo

$$\int_B \hat{p}_{2n}(x) \hat{p}_{2m}(x) d\mu(w, x) = 0, \quad m \neq n,$$

onde $B = [-1, -a] \cup [a, 1]$. Podemos substituir a equação acima por

$$\int_a^1 \hat{p}_{2n}(x) \hat{p}_{2m}(x) d\mu(w, x) = 0.$$

Esses polinômios satisfazem à relação

$$\hat{p}_{2n}(x) = \{x^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)\} \hat{p}_{2n-2}(x) - \alpha_0^2 \alpha_1^2 \hat{p}_{2n-4}(x), \quad n \geq 2,$$

com condições iniciais

$$\hat{p}_0(x) = w, \quad \hat{p}_2(x) = x^2 - w\alpha_0^2.$$

Substituindo $x = \sqrt{y}$ e colocando $\hat{p}_{2n}(\sqrt{y}) = Q_n(y)$, obtemos

$$\int_{a^2}^1 Q_n(y) Q_m(y) d\mu(w, \sqrt{y}) = 0$$

e

$$Q_n(y) = \{y - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)\} Q_{n-1}(y) - \alpha_0^2 \alpha_1^2 Q_{n-2}(y), \quad n \geq 2,$$

com condições iniciais

$$Q_0(y) = w, \quad Q_1(y) = y - w\alpha_0^2.$$

Aqui, $\mu'(w, \sqrt{y}) = \text{const} \frac{\sqrt{1-y}\sqrt{y-a^2}}{y^{1/2}(1+q(w)y)}$. Então, os polinômios $\Phi_n(z)$ são definidos em relação à medida $\tilde{\nu}(w, \theta)$, onde

$$\tilde{\nu}(w, \theta) = \text{const} \frac{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{\cos\theta-a^2}}{\{\cos\theta\}^{1/2} \{1+q(w)\cos\theta\}} \sin\theta,$$

definida no arco $-\theta_{a^2} < \theta < \theta_{a^2}$, com $\theta_{a^2} = \arccos(a^2)$. Substituindo $Q_n(y)$ por U^n na relação de recorrência acima, obtemos

$$U(y) = \frac{y - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \pm \sqrt{(y-1)(y-a^2)}}{2}.$$

Como

$$U(1) = \frac{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{2},$$

a solução geral para $Q_n(1)$, é dada por

$$Q_n(1) = (c_1^{(1)} + nc_2^{(1)}) \left\{ \frac{y - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{2} \right\}^n.$$

Como conhecemos os valores de $Q_0(1)$ e $Q_1(1)$, obtemos:

$$c_1^{(1)} = w$$

$$c_2^{(1)} = \frac{2 - w(1 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2)}{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}.$$

Como

$$U(-1) = \frac{-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \pm \sqrt{2(1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2)}}{2},$$

a solução geral para $Q_n(-1)$, é dada por

$$Q_n(-1) = c_1^{(-1)} \left\{ \frac{-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + \sqrt{2(1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2)}}{2} \right\}^n + c_2^{(-1)} \left\{ \frac{-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) - \sqrt{2(1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2)}}{2} \right\}^n, \quad n \geq 0.$$

De $Q_0(-1)$ e $Q_1(-1)$ obtemos os valores para $c_1^{(-1)}$ e $c_2^{(-1)}$ ou seja,

$$c_1^{(-1)} = w - c_2^{(-1)}$$

$$c_2^{(-1)} = \frac{2 + w[-1 + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]}}{2\sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]}}.$$

A partir de $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$, $c_1^{(-1)}$ e $c_2^{(-1)}$, calculamos $R_n(1)$ e $R_n(-1)$ onde $R_n(1) = Q_{n+1}(1)/Q_n(1)$ e $R_n(-1) = Q_{n+1}(-1)/Q_n(-1)$. Assim,

$$R_n(1) = \frac{w(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) + (n+1)(2 - w(1 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2))}{(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)) + n(2 - w(1 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2))} \left\{ \frac{(1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2))}{2} \right\}. \quad (3.6.26)$$

e

$$\begin{aligned} R_n(-1) = & \left\{ - \left[-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right]^{(n+1)} \right. \\ & \left[2 + \left(-2 + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right) w \right] \\ & + \left(-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) - \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right)^{(n+1)} \\ & \left. \left[2 + \left(-1 + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right) w \right] \right\} / \quad (3.6.27) \\ & \left\{ 2 \left[- \left(-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right)^n \right. \right. \\ & \left(2 + \left(-2 + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right) w \right) \\ & + \left(-1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) - \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right)^n \\ & \left. \left. \left(2 + \left(-1 + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) + \sqrt{2[1 + (\alpha_0 - \alpha_1)^2]} \right) w \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Para calcularmos os polinômios definidos sobre um arco utilizamos a seguinte relação de recorrência, obtida das equações (3.4.16) e (3.4.17),

$$\Phi_{2n+1}(z) = \Phi_{2n}(z) \left\{ \frac{\Phi_{2n+1}(0)}{\Phi_{2n}(0)} + z \right\} - \left\{ \frac{\Phi_{2n+1}(0)}{\Phi_{2n}(0)} - \Phi_{2n}(0)\Phi_{2n+1}(0) \right\} z\Phi_{2n-1}(z), \quad n \geq 1$$

e

$$\Phi_{2n}(z) = \Phi_{2n-1}(z) \left\{ \frac{\Phi_{2n}(0)}{\Phi_{2n-1}(0)} + z \right\} - \left\{ \frac{\Phi_{2n}(0)}{\Phi_{2n-1}(0)} - \Phi_{2n-1}(0)\Phi_{2n}(0) \right\} z\Phi_{2n-2}(z), \quad n \geq 1.$$

Os zeros de $\Phi_n(z)$ estão localizados na região $\tilde{W}_a$ onde $\tilde{W}_a = \{z : |z| < 1 \text{ e } \Re e(z) > a\}$.

Verifiquemos esses resultados com alguns exemplos.

3.6.1 Exemplos

Consideremos as seguintes condições iniciais:

$w = 1$	$\alpha_0 = 0.95$	$\alpha_1 = 0.05$
---------	-------------------	-------------------

Para essas condições iniciais temos:

$n = 10$	$0.9592980727 - 8.7151827547z + 36.4697304511z^2$ $-92.4892481483z^3 + 157.3366751104z^4 - 187.5401525003z^5$ $+158.6150180563z^6 - 94.0030893219z^7 + 37.3736668251z^8$ $-9.0066683137z^9 + z^{10}$
Zeros	$\{0.8220805218 - 0.5683669751i\}, \{0.8220805218 + 0.5683669751i\}$ $\{0.8551615767 - 0.5142665746i\}, \{0.8551615767 + 0.5142665746i\}$ $\{0.9005192823 - 0.4250971935i\}, \{0.9005192823 + 0.4250971935i\}$ $\{0.9460552844 - 0.3043026681i\}, \{0.9460552844 + 0.3043026681i\}$ $\{0.9795174914 - 0.1591813558i\}, \{0.9795174914 + 0.1591813558i\}$



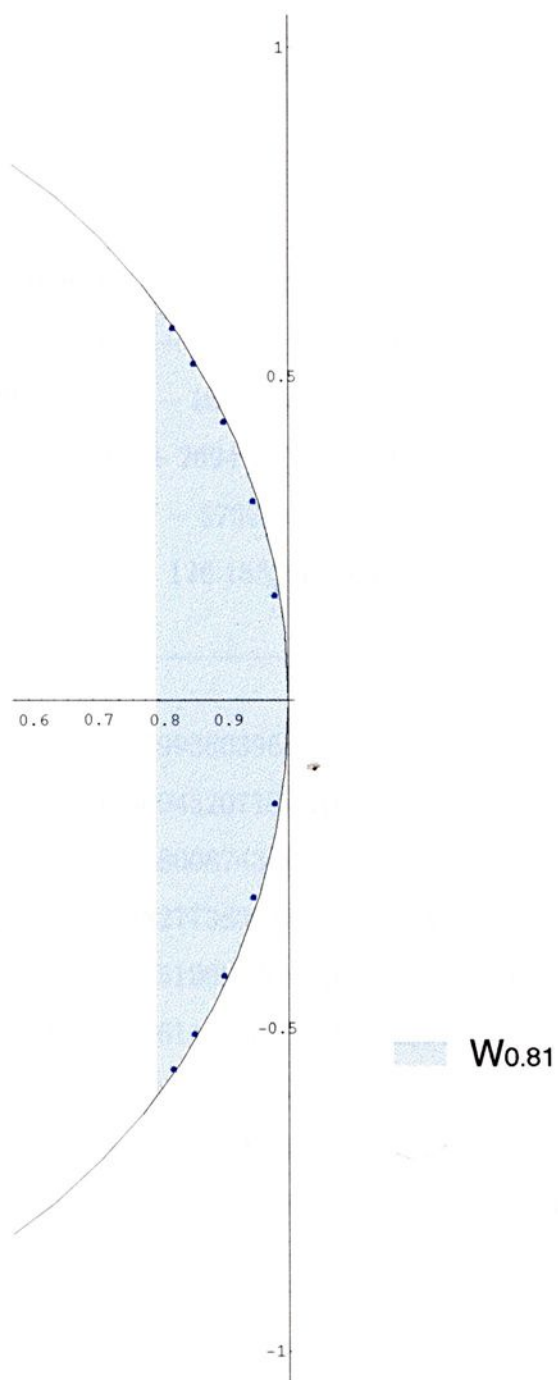


Figura 3.7: Zeros do polinômio de grau 10

$n = 18$	$ \begin{aligned} &0.9560887488 - 15.6114462855z + 121.8688820123z^2 \\ &-604.1968276143z^3 + 2131.4180747640z^4 - 5680.5402783821z^5 \\ &+11852.0980145193z^6 - 19792.5754067263z^7 + 26817.0911488952z^8 \\ &-29699.0834406549z^9 + 26947.7691837564z^{10} - 19986.1225039806z^{11} \\ &+12026.6448534046z^{12} - 5792.6055039000z^{13} + 2184.2600858681z^{14} \\ &-622.2808563293z^{15} + 126.1533909004z^{16} - 16.2434589898z^{17} + z^{18} \end{aligned} $
Zeros	$ \begin{aligned} &\{0.8145066043 - 0.5799360396i\}, \{0.8145066043 + 0.5799360396i\} \\ &\{0.8275925181 - 0.5604520710i\}, \{0.8275925181 + 0.5604520710i\} \\ &\{0.8479950398 - 0.5280087437i\}, \{0.8479950398 + 0.5280087437i\} \\ &\{0.8737378600 - 0.4827736204i\}, \{0.8737378600 + 0.4827736204i\} \\ &\{0.9023157485 - 0.4251909136i\}, \{0.9023157485 + 0.4251909136i\} \\ &\{0.9309347070 - 0.3561194401i\}, \{0.9309347070 + 0.3561194401i\} \\ &\{0.9567856397 - 0.2769324773i\}, \{0.9567856397 + 0.2769324773i\} \\ &\{0.9773243772 - 0.1895563213i\}, \{0.9773243772 + 0.1895563213i\} \\ &\{0.9905369999 - 0.0964656870i\}, \{0.9905369999 + 0.0964656870i\} \end{aligned} $



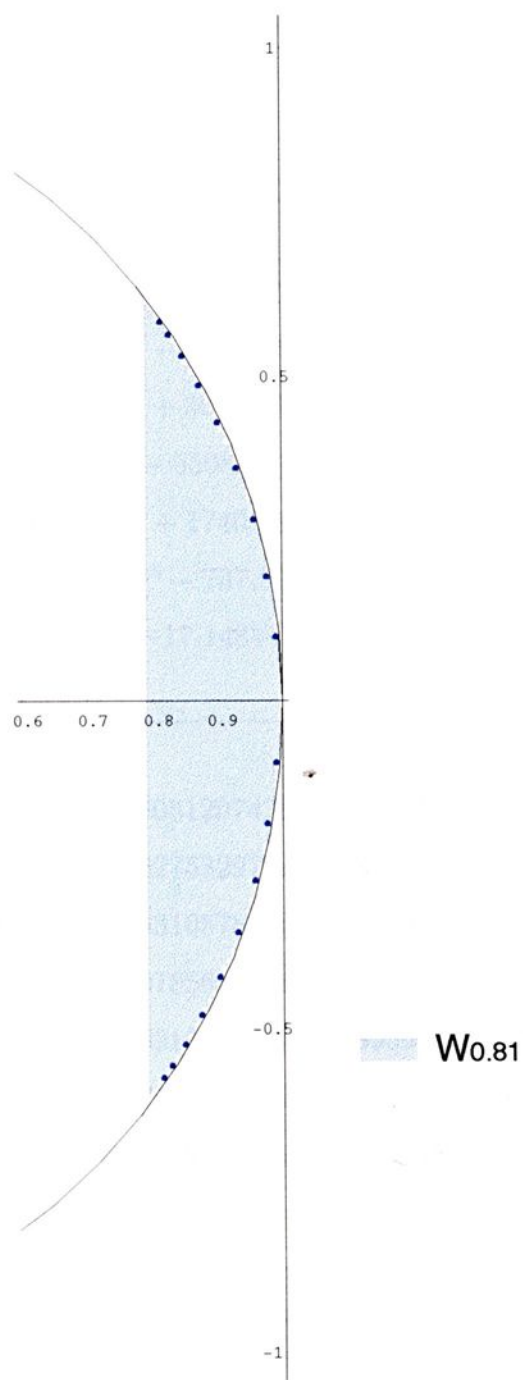


Figura 3.8: Zeros do polinômio de grau 18

$n = 19$	$ \begin{aligned} & -0.9465526608 + 16.3313780777z - 135.0222741223z^2 \\ & + 710.8904823907z^3 - 2671.7140239648z^4 + 7614.4242279565z^5 \\ & - 17064.3929659302z^6 + 30770.0154515008z^7 - 45300.0580326133z^8 \\ & + 54928.8376055893z^9 - 55082.8724249244z^{10} + 45682.4841008245z^{11} \\ & - 31204.7574167323z^{12} + 17403.5753691901z^{13} - 7810.1049540332z^{14} \\ & + 2756.1642007467z^{15} - 737.6361708776z^{16} + 140.9304469222z^{17} \\ & - 17.1484473391z^{18} + z^{19} \end{aligned} $
Zeros	$ \begin{aligned} & \{0.8141164527 - 0.5805120747i\}, \{0.8141164527 + 0.5805120747i\} \\ & \{0.8261058369 - 0.5627532970i\}, \{0.8261058369 + 0.5627532970i\} \\ & \{0.8449176702 - 0.5331657891i\}, \{0.8449176702 + 0.5331657891i\} \\ & \{0.8688980280 - 0.4918566221i\}, \{0.8688980280 + 0.4918566221i\} \\ & \{0.8959296506 - 0.4391319760i\}, \{0.8959296506 + 0.4391319760i\} \\ & \{0.9236156079 - 0.3755968658i\}, \{0.9236156079 + 0.3755968658i\} \\ & \{0.9494915650 - 0.3022086344i\}, \{0.9494915650 + 0.3022086344i\} \\ & \{0.9712475836 - 0.2202003882i\}, \{0.9712475836 + 0.2202003882i\} \\ & \{0.9869405654 - 0.1304284569i\}, \{0.9869405654 + 0.1304284569i\} \\ & \{0.9859214176\} \end{aligned} $



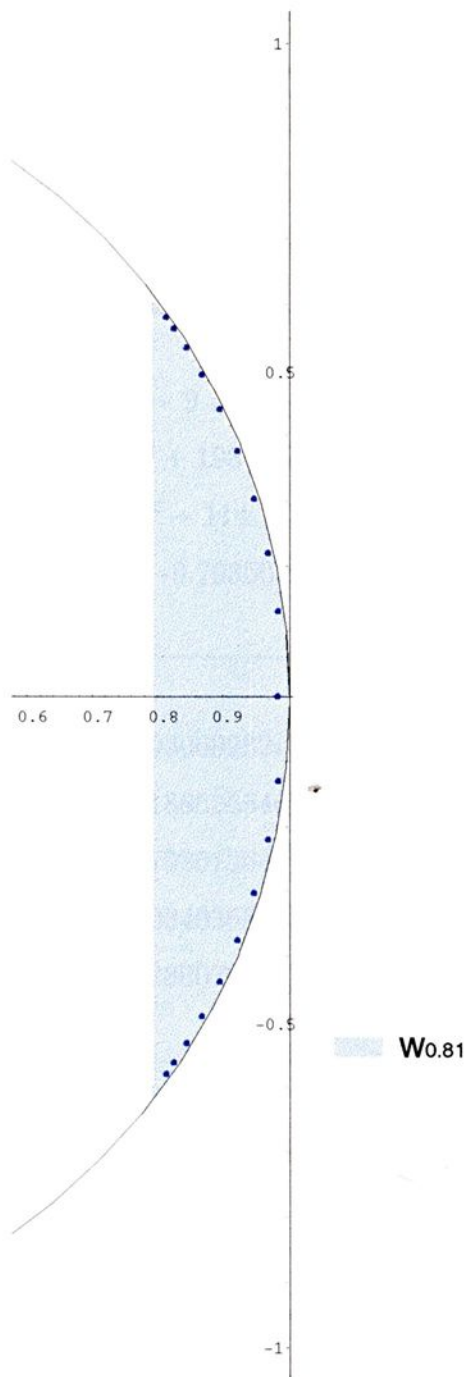


Figura 3.9: Zeros do polinômio de grau 19

Para este exemplo, temos os mesmos valores utilizados na seção anterior.

$w = 1$	$\alpha_0 = 0.99$	$\alpha_1 = 0.01$
---------	-------------------	-------------------

$n = 10$	$0.9917032583 - 9.7286747468z + 43.1406776972z^2$ $-113.8705336582z^3 + 198.1209300697z^4 - 237.4172974402z^5$ $+198.4495691358z^6 - 114.2488691703z^7 + 43.3560971238z^8$ $-9.7936022508z^9 + z^{10}$
Zeros	$\{0.9629378380 - 0.2693069932i\}, \{0.9629378380 + 0.2693069932i\}$ $\{0.9698738710 - 0.2418852564i\}, \{0.9698738710 + 0.2418852564i\}$ $\{0.9793545873 - 0.1979807264i\}, \{0.9793545873 + 0.1979807264i\}$ $\{0.9888421186 - 0.1403403651i\}, \{0.9888421186 + 0.1403403651i\}$ $\{0.9957927104 - 0.0728007628i\}, \{0.9957927104 + 0.0728007628i\}$



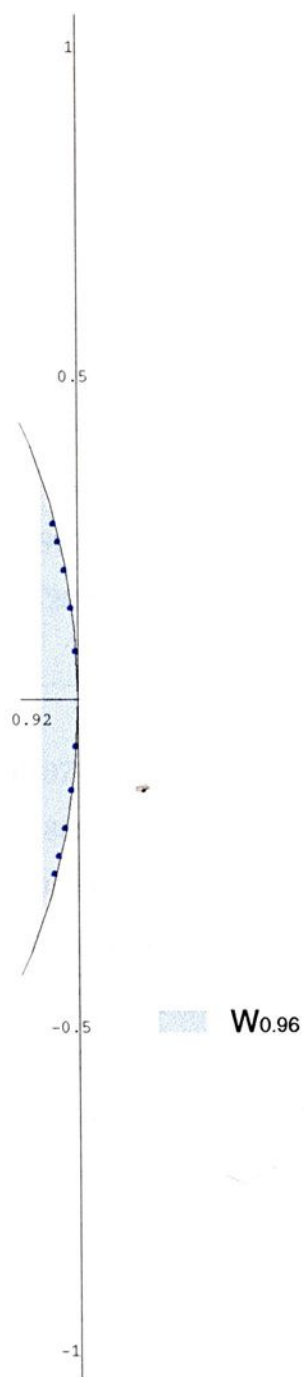


Figura 3.10: Zeros do polinômio de grau 10

$n = 18$	$ \begin{aligned} &0.9910414947 - 17.4942010213z + 146.1755103949z^2 \\ &-768.1799110786z^3 + 2845.1723809349z^4 - 7886.8402949604z^5 \\ &+16957.0949078231z^6 - 28914.0651622824z^7 + 39637.2376379272z^8 \\ &-44011.7624961905z^9 + 39676.6829451281z^{10} - 28971.6531024124z^{11} \\ &+17007.7965557566z^{12} - 7918.3124311204z^{13} + 2859.3797218532z^{14} \\ &-772.7885970971z^{15} + 147.2000353376z^{16} - 17.6345404872z^{17} + z^{18} \end{aligned} $
Zeros	$ \begin{aligned} &\{0.9613438703 - 0.2752610784i\}, \{0.9613438703 - 0.2752610784i\} \\ &\{0.9640833203 - 0.2652378651i\}, \{0.9640833203 - 0.2652378651i\} \\ &\{0.9683507955 - 0.2487616456i\}, \{0.9683507955 - 0.2487616456i\} \\ &\{0.9737292993 - 0.2261807497i\}, \{0.9737292993 - 0.2261807497i\} \\ &\{0.9796929264 - 0.1979895277i\}, \{0.9796929264 - 0.1979895277i\} \\ &\{0.9856581253 - 0.1648297303i\}, \{0.9856581253 - 0.1648297303i\} \\ &\{0.9910407592 - 0.1247862595i\}, \{0.9910407592 - 0.1247862595i\} \\ &\{0.9953134249 - 0.0868752499i\}, \{0.9953134249 - 0.0868752499i\} \\ &\{0.9980577220 - 0.0440261427i\}, \{0.9980577220 - 0.0440261427i\} \end{aligned} $



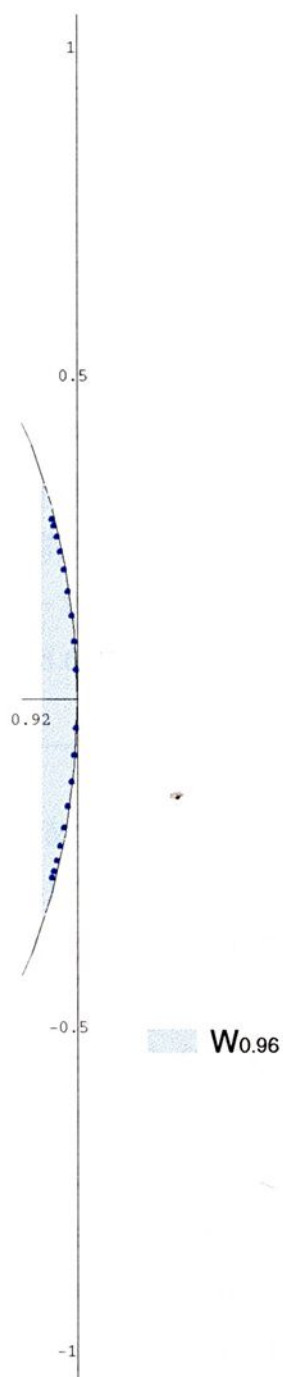


Figura 3.11: Zeros do polinômio de grau 18

$n = 19$	$ \begin{aligned} &0.9890600060 + 18.4326602150z - 163.083868857z^2 \\ &+ 910.5098048861z^3 - 3596.2780359660z^4 + 10676.8585216657z^5 \\ &- 24708.5716586521z^6 + 45611.7982994797z^7 - 68156.6854345366z^8 \\ &+ 83167.5117170187z^9 - 83215.3689926674z^{10} + 68274.4284083735z^{11} \\ &- 45743.2374938941z^{12} + 24808.3548653078z^{13} - 10732.3586433138z^{14} \\ &+ 3619.1557493231z^{15} - 917.3649482873z^{16} + 164.5028499049z^{17} \\ &- 18.6147399939z^{18} + z^{19} \end{aligned} $
Zeros	$ \begin{aligned} &\{0.9612618045 - 0.2755592825i\}, \{0.9612618045 + 0.2755592825i\} \\ &\{0.9637708281 - 0.2664177548i\}, \{0.9637708281 + 0.2664177548i\} \\ &\{0.9677046210 - 0.2513673069i\}, \{0.9677046210 + 0.2513673069i\} \\ &\{0.9727142637 - 0.2306886433i\}, \{0.9727142637 + 0.2306886433i\} \\ &\{0.9783551534 - 0.2047773656i\}, \{0.9783551534 + 0.2047773656i\} \\ &\{0.9841263329 - 0.1741402702i\}, \{0.9841263329 + 0.1741402702i\} \\ &\{0.9895149363 - 0.1393781431i\}, \{0.9895149363 + 0.1393781431i\} \\ &\{0.9940418613 - 0.1011251766i\}, \{0.9940418613 + 0.1011251766i\} \\ &\{0.9973049088 - 0.0597497247i\}, \{0.9973049088 + 0.0597497247i\} \\ &\{0.9971505727\} \end{aligned} $



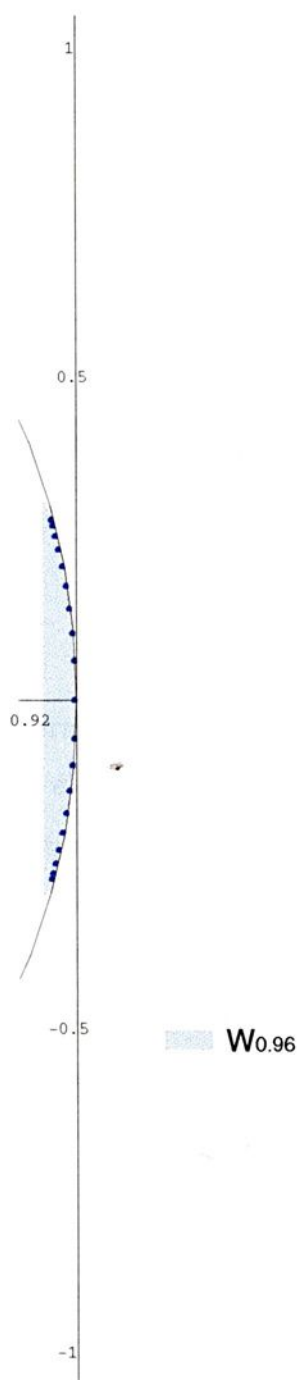


Figura 3.12: Zeros do polinômio de grau 19

Capítulo 4

Transformação de Moebius

Introdução

Neste capítulo, estudamos as transformações de Moebius ou transformações lineares fracionais. O estudo dessas transformações é utilizado em alguns resultados apresentados no capítulo 5. Utilizamos a *projeção estereográfica* para levarmos imagens de círculos e retas do plano complexo estendido para a *esfera de Riemann*. Apresentamos, também, o teorema da aplicação para discos, que consiste em determinar todas as transformações que levam um disco qualquer em um círculo unitário. Para o caso mais geral, temos que encontrar as transformações que levam círculo unitário nele mesmo.

4.1 Transformação de Moebius: teoria algébrica

Seja M a classe das matrizes não-singulares de ordem dois com elementos complexos. Definimos uma relação de equivalência em M da seguinte forma: M_1 e $M_2 \in M$ são



equivalentes se existe um número complexo s tal que $M_2 = sM_1$. Para qualquer matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em $\mathbf{M}$, com $ad - cb \neq 0$, associamos a função

$$t_M : z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.1.1)$$

definida para todo $z \neq -dc^{-1}$ se $c \neq 0$ e para todo z se $c = 0$. A função $t_M(z)$ é chamada *transformação de Moebius*. Se $c \neq 0$, definimos

$$t_M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. \quad (4.1.2)$$

Dessa maneira, estendemos o domínio da função $t_M(z)$. Por simetria, estendemos o domínio definindo $t_M(z)$ também para $z = \infty$. Se $c \neq 0$, o valor associado a $t_M(z)$ para $z = \infty$ será escolhido de maneira que $f : z \rightarrow t_M(z^{-1})$ seja contínua para $z = 0$. Se $z \neq 0$,

$$f(z) = t_M(z^{-1}) = \frac{a + bz}{c + dz}.$$

Claramente, $f(z)$ é contínua para $z = 0$ se colocarmos $f(0) = ac^{-1}$. Então, definimos

$$t_M(\infty) = \frac{a}{c}. \quad (4.1.3)$$

Se $c = 0$, definimos

$$t_M(\infty) = \infty. \quad (4.1.4)$$

Com essas convenções, $t_M(z)$ está definida no conjunto formado pelos números complexos mais o ∞ . Chamamos este conjunto de *plano complexo estendido*. Vale, então, o seguinte teorema.

TEOREMA 4.1.1 *Para toda matriz $M \in \mathbf{M}$, a função $t_M(z)$ define uma aplicação biunívoca do plano complexo estendido nele mesmo.*

Demonstração: Supondo que $t_M(z)$ é dada por (4.1.1), distinguiremos entre $c = 0$ e $c \neq 0$.

(a) Se $c = 0$, temos $d \neq 0$ (como M é não-singular) e

$$t_M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad (z \neq \infty).$$



Novamente, por M ser não-singular, $a \neq 0$. Então, se w é finito, $t_M(z) = w$ tem a única solução

$$z = \frac{dw - b}{a}. \quad (4.1.5)$$

Se $w = \infty$, por (4.1.4), $z = \infty$ é a solução.

(b) Se $c \neq 0$ e w é finito, encontramos que z deve satisfazer $az + b = (cz + d)w$ ou

$$z(a - cw) = -b + dw. \quad (4.1.6)$$

Esta equação tem uma única solução z para todo $w \neq a/c$. Pela equação (4.1.3), temos que $z = \infty$ é uma solução de $t_M(z) = w$ para $w = a/c$. Por (4.1.6), nenhum z finito pode satisfazer $t_M(z) = w$ para $w = a/c$. Então, $z = \infty$ é a única solução. Finalmente, se $w = \infty$, $z = -d/c$ é uma solução. Como $t_M(z)$ é finita para todo $z \neq -a/c$, $z = -a/c$ é a única solução. Assim, concluímos a demonstração do teorema. ■

Notemos que matrizes equivalentes representam a mesma transformação. A equação (4.1.6) mostra que, para $c \neq 0$ e $w \neq a/c$, a inversa de $t_M(z)$ é representada pela fórmula

$$z = t_M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad (4.1.7)$$

que é a transformação de Moebius associada à matriz

$$M^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Com as definições (4.1.2) e (4.1.3), a equação (4.1.7) é válida mesmo quando $w = a/c$ e $w = \infty$. Se $c = 0$, a equação é válida para todo w no plano complexo estendido. Então, temos

$$(t_M)^{-1} = t_{M^*},$$

onde M^* é dada por (4.1.8). Uma simples multiplicação mostra que

$$MM^* = (ad - bc)I,$$

onde I denota a matriz identidade. Então, M^* é equivalente a M^{-1} e, provamos que:



TEOREMA 4.1.2 *A inversa de uma transformação de Moebius é uma transformação de Moebius. Além disso, para qualquer $M \in \mathbf{M}$,*

$$(t_M)^{-1} = t_{M^{-1}}. \quad (4.1.9)$$

O teorema 4.1.2 é um caso especial do seguinte teorema:

TEOREMA 4.1.3 *(Composição da transformação de Moebius) Se $M_1, M_2 \in \mathbf{M}$, então*

$$t_{M_1} \circ t_{M_2}(z) = t_{M_1}(t_{M_2}(z)) = t_{M_1 M_2} \text{ para } M_1 M_2 \in \mathbf{M}.$$

4.1.1 Transformação de Moebius especial

As matrizes associadas às transformações de Moebius que representam translações ($z \rightarrow z + a$), rotações ($z \rightarrow bz$) e inversões ($z \rightarrow z^{-1}$) são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde a e b são números complexos e $b \neq 0$.

TEOREMA 4.1.4 *Toda transformação de Moebius pode ser representada como a composição de uma ou mais translação, rotação ou inversão.*

Demonstração: Consideremos a transformação de Moebius associada à matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema 4.1.3, é suficiente mostrar que a matriz M , ou uma matriz múltipla de M , pode ser escrita como um produto de matrizes associadas às transformações citadas no teorema.

Se $c = 0$, então temos $d \neq 0$ e a representação é

$$\frac{1}{d} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Se $c \neq 0$, a afirmação segue da identidade

$$\frac{1}{c} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{bc - ad}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c}.$$

■

4.2 A esfera de Riemann

Introduziremos a esfera de Riemann por ser o modelo ideal do plano complexo estendido no qual todos os seus pontos, incluindo o ponto ∞ , tem uma representação concreta. Para cada ponto do plano, atribuímos um ponto correspondente na esfera $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Seja $N = (0, 0, 1)$ o pólo norte da esfera. O ponto Z da esfera correspondente a $z = x + iy$ é o segundo ponto da interseção de S com a linha que passa através de $(x, y, 0)$ e através do pólo norte N de S (Ver Figura 4.1).

As coordenadas de Z são

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{2\Re z}{1 + |z|^2} = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \\ x_2 &= \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{2\Im z}{1 + |z|^2} = \frac{-i(z - \bar{z})}{z\bar{z} + 1}, \\ x_3 &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Assim, temos uma correspondência entre todos os pontos do plano estendido e todos os pontos de S exceto o pólo norte. O ponto do plano correspondente ao ponto $Z = (x_1, x_2, x_3) \neq N$ de S , é dado por

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Agora, completamos esta correspondência associando o polo norte $(0, 0, 1)$ ao ponto ∞ . O modelo esférico obtido pela *projeção estereográfica* é conhecido como a esfera do número de

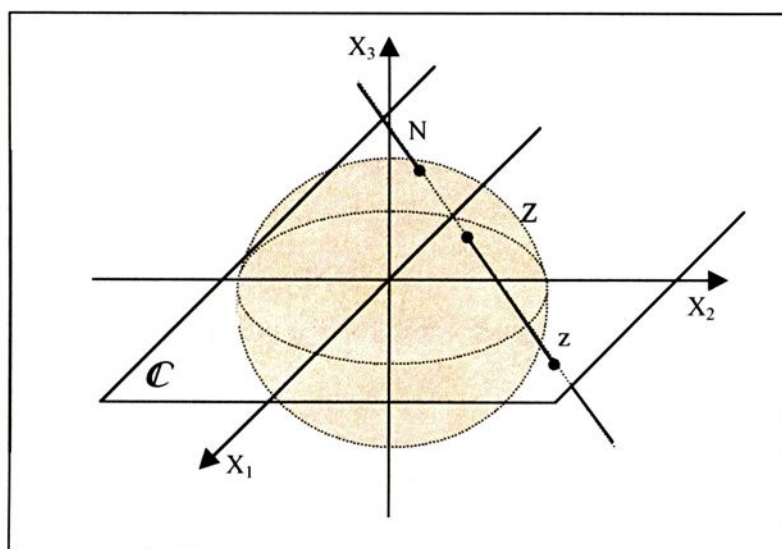


Figura 4.1: A esfera de Riemann

Rieman. Definimos essa projeção como sendo a aplicação $\pi : S - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva $Z = (x_1, x_2, x_3)$ pertencente à $S - \{N\}$ na intersecção do hiperplano $x_3 = 0$ com a reta que passa por Z e N .

Gostaríamos de determinar em S , imagens de retas e círculos sob a projeção estereográfica. No plano complexo estendido, é conveniente incluir o ponto ∞ em toda reta. Com esta convenção, temos que a imagem de toda reta é um círculo passando através do pólo norte. Vejamos o teorema:

TEOREMA 4.2.1 *A projeção estereográfica leva retas e círculos do plano complexo estendido em círculos na esfera de Riemann. Um círculo na esfera de Riemann é a imagem de uma reta no plano complexo se, e somente se, o círculo passa por N .*

Demonstração: Mostraremos que uma reta ou um círculo no plano de z é levado em um círculo, que passa ou não pelo pólo norte da esfera. Notemos que um círculo em S pode ser escrito como a interseção de S com um plano dado pela equação $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0$, onde $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ e $0 \leq \alpha_0 < 1$. Se um ponto $Z = (x_1, x_2, x_3)$ em S satisfaz esta equação onde Z é imagem de z , então, por (4.2.10)

$$\alpha_1(z + \bar{z}) - i\alpha_2(z - \bar{z}) + \alpha_3(z\bar{z} - 1) = \alpha_0(z\bar{z} + 1)$$

ou, se $z = x + iy$,

$$(\alpha_0 - \alpha_3)(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + \alpha_0 + \alpha_3 = 0. \quad (4.2.11)$$

Se $\delta = \alpha_0 - \alpha_3 \neq 0$, podemos escrever

$$\left(x - \frac{\alpha_1}{\delta}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha_2}{\delta}\right)^2 = \frac{1 - \alpha_0^2}{\delta^2} \quad (4.2.12)$$

que é a equação de um círculo. Se $\delta = 0$, podemos escrever (4.2.11) como

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_3, \quad (4.2.13)$$

que é a equação de uma reta. Por outro lado, verificamos que dada qualquer equação de um círculo ou de uma reta, existem quatro constantes a serem determinadas que satisfazem $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $0 \leq \alpha_0 < 1$, de modo que a equação do círculo é da forma de (4.2.12) e a equação da reta é da forma de (4.2.13), onde $\alpha_0 = \alpha_3$. ■

4.2.1 Círculos generalizados

Denominamos *círculo generalizado* no plano complexo estendido, qualquer curva que seja um círculo ou uma reta onde a última inclui o ponto ∞ . Perguntamos: Qual será a imagem de um círculo generalizado sob uma transformação de Moebius. A imagem de um círculo generalizado sob uma translação ou rotação é um círculo generalizado. Agora, queremos saber qual é a imagem desse círculo sob a inversão $z \rightarrow z' = 1/z$. Voltemos



à esfera de Riemann. Seja $Z = (x_1, x_2, x_3)$ o ponto correspondente a $z = x + iy$ e $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, correspondente a

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

De (4.2.10), temos que

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad \text{e} \quad x'_3 = -x_3.$$

Assim, na esfera de Riemann, a imagem de $1/z$ é obtida da imagem de z rotacionando a esfera 180° sobre o eixo x_1 . Esta interpretação geométrica também vale se $z = 0$ ou $z = \infty$.

Agora, seja Γ qualquer círculo generalizado e Γ' sua imagem no plano complexo estendido sobre a inversão $z \rightarrow 1/z$ e, denotemos por Γ_s e Γ'_s as imagens de Γ e Γ' na esfera de Riemann. Pelo teorema 4.2.1, sabemos que Γ_s é um círculo e que Γ'_s , a imagem de Γ_s sob um movimento rígido da esfera, é novamente um círculo. Novamente, pelo teorema 4.2.1, concluímos que Γ' é um círculo generalizado. Assim, mostramos que a imagem de um círculo generalizado sob qualquer translação, rotação ou inversão é um círculo generalizado. O mesmo é válido para composições arbitrárias de tais transformações. Como qualquer transformação de Moebius pode ser obtida dessa maneira, provamos o seguinte teorema:

TEOREMA 4.2.2 *Uma transformação de Moebius leva círculos generalizados em círculos generalizados.*

4.2.2 A Métrica Cordal

O plano complexo torna-se um espaço métrico quando a distância entre dois pontos, z e z' , é definida por

$$d(z, z') = |z - z'|.$$

Essa definição não pode ser usada no plano complexo estendido devido à distância de qualquer ponto finito do ponto ∞ ser indefinida. O plano complexo estendido pode ser um espaço métrico representado pela esfera de Riemann. Sejam z e z' dois pontos do plano complexo estendido, e sejam $Z = (x_1, x_2, x_3)$ e $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ suas imagens na esfera de Riemann.



A distância euclidiana dessas imagens esféricas,

$$d(z, z') = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2}, \quad (4.2.14)$$

é a distância cordal entre os pontos z e z' . A métrica definida é a métrica cordal. Como (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) pertencem à esfera unitária temos,

$$d(z, z')^2 = 2 - 2(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3).$$

Se z e z' são finitos, encontramos, de (4.2.10),

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 = 1 - \frac{2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}.$$

Daí,

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{[(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)]^{1/2}}. \quad (4.2.15)$$

Se $z' = \infty$, encontramos analogamente

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}. \quad (4.2.16)$$

4.2.3 Movimentos rígidos da esfera de Riemann

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - cb \neq 0$$

uma matriz pertencente a $\mathbf{M}$, normalizada, tal que

$$ad - bc = 1. \quad (4.2.17)$$

Seja $t(z)$ a transformação de Moebius associada a M . Pela projeção estereográfica, $t(z)$ induz uma aplicação da esfera de Riemann nela mesma. Podemos encontrar condições para uma transformação de Moebius $t(z)$ induzir um movimento rígido na esfera de Riemann. Se dois pontos da esfera são *antipodais*, isto é, são diametralmente opostos, então, suas imagens serão novamente antipodais através de um movimento rígido. Se $(x_1, x_2, x_3) \in S$



é a imagem de z , então, seu ponto antipodal $(-x_1, -x_2, -x_3)$ é a imagem de $-1/\bar{z}$, como podemos verificar de (4.2.10). Assim, a transformação $t(z)$ levará pontos antipodais em pontos antipodais se, e somente se,

$$t\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\frac{1}{t(z)}$$

ou

$$\frac{a - b\bar{z}}{c - d\bar{z}} = \frac{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}{-\bar{a}\bar{z} - \bar{b}},$$

para todo z do plano complexo estendido. Isto significa que as matrizes

$$\begin{bmatrix} -b & a \\ -d & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \bar{c} & \bar{d} \\ -\bar{a} & -\bar{b} \end{bmatrix}$$

são proporcionais e isto vale se, e somente se,

$$c = -\lambda\bar{b} \quad \text{e} \quad d = \lambda\bar{a},$$

onde $|\lambda| = 1$. A condição de normalização (4.2.17) implica que $\lambda = 1$. Assim, a matriz deve ter a forma

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

onde $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Denotando por M^H a transposta conjugada de M , encontramos $MM^H = I$, o que implica que $M^{-1} = M^H$. Mostramos que M é *unitária* como uma condição necessária para a transformação $t(z)$ induzir um movimento rígido da esfera. Agora, mostraremos que esta condição é também suficiente. Sejam z e z' quaisquer dois pontos no plano complexo estendido e, seja $w = t(z)$ e $w' = t(z')$ onde

$$t : z \longrightarrow \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}},$$

$a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Se nenhum dos z, z', w, w' são infinitos, temos

$$w - w' = \frac{z - z'}{(\bar{a} - \bar{b}z)(\bar{a} - \bar{b}z')},$$

$$1 + w\bar{w} = \frac{1 + z\bar{z}}{(\bar{a} - \bar{b}z)(a - b\bar{z})},$$

$$1 + w' \bar{w}' = \frac{1 + z' \bar{z}'}{(\bar{a} - \bar{b}z')(a - b\bar{z}')},$$

e, de (4.2.15), segue que

$$d(w, w') = d(z, z').$$

Para $z' = \infty$, o resultado é similar. Assim, $t(z)$ preserva a distância cordal e provamos o seguinte teorema:

TEOREMA 4.2.3 *A transformação de Moebius $t_M(z)$ induz um movimento rígido da esfera de Riemann se, e somente se, M é múltipla de uma matriz unitária.*

4.3 Transformação de Moebius: simetria

Seja c um número complexo, $\rho > 0$ e denotemos por Γ_c o círculo com centro c e raio ρ cuja equação pode ser escrita

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = \rho^2. \quad (4.3.18)$$

Dois pontos finitos, z_1 e z_2 , são chamados simétricos com relação a Γ_c se, e somente se,

$$(z_1 - c)(\bar{z}_2 - \bar{c}) = \rho^2. \quad (4.3.19)$$

A cada $z_1 \neq c$ finito, corresponde exatamente um ponto z_2 , também finito, que é simétrico a z_1 com relação a Γ_c . Estendemos a definição de simetria para o plano complexo estendido chamando os pontos c e ∞ de simétricos em relação a Γ_c . Todo ponto de Γ_c é o simétrico dele mesmo em relação a Γ_c .

Estendamos a idéia de simetria para círculos generalizados. Primeiramente, formalizemos a definição de círculos generalizados.

LEMA 4.3.1 *Se a e b são números complexos, $a \neq b$, e μ é um número real positivo, a equação*

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu, \quad (4.3.20)$$

representa um círculo generalizado. Teremos uma reta se, e somente se, $\mu = 1$.



Demonstração: A equação (4.3.20) é válida se, e somente se,

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = \mu^2(z - b)(\bar{z} - \bar{b})$$

ou, se

$$z\bar{z}(1 - \mu^2) - (a - \mu^2b)\bar{z} - (\bar{a} - \mu^2\bar{b})z + (a\bar{a} - \mu^2b\bar{b}) = 0. \quad (4.3.21)$$

Se $\mu = 1$, temos a equação de uma reta e, se $\mu \neq 1$, a equação de um círculo. Escrevendo na forma de (4.3.18), obtemos que o círculo tem centro

$$c = \frac{a - \mu^2b}{1 - \mu^2} \quad (4.3.22)$$

e raio ρ , onde

$$\rho^2 = \frac{\mu^2(a - b)(\bar{a} - \bar{b})}{(1 - \mu^2)^2}. \quad (4.3.23)$$

■

TEOREMA 4.3.1 *Os pontos a e b são simétricos em relação ao círculo generalizado dado por (4.3.20).*

Demonstração: Se $\mu = 1$, a afirmação do teorema é óbvia pois b é a reflexão de a através da reta $(a - b)\bar{z} + (\bar{a} - \bar{b})z = a^2 - b^2$. Se $\mu \neq 1$, a equação (4.3.19) é satisfeita se c e ρ são dados por (4.3.22) e (4.3.23). ■

TEOREMA 4.3.2 *Sejam a e b dois pontos finitos e simétricos em relação ao círculo generalizado Γ . Seja $a \neq b$. Então, existe um número positivo μ tal que a equação de Γ é dada por (4.3.20).*

Demonstração: Se Γ é uma reta, sua equação é dada por (4.3.20) onde $\mu = 1$. Se Γ é um círculo, seja c o centro e ρ , o raio. Como a , b e c são três pontos distintos em uma reta onde c não está entre a e b , existe $\mu > 0$, $\mu \neq 1$ tal que (4.3.22) vale. Com esta escolha de μ , encontramos que

$$\rho^2 = (a - c)(\bar{a} - \bar{c}) = \frac{\mu^2}{(1 - \mu^2)^2}(a - b)(\bar{a} - \bar{b}).$$

Assim, a equação do círculo pode ser escrita na forma de (4.3.21), que é equivalente a (4.3.20). ■

Agora, vamos enunciar o principal resultado de simetria.

TEOREMA 4.3.3 *Sejam a e b dois pontos do plano complexo estendido que são simétricos em relação ao círculo generalizado Γ e, seja $t(z)$ uma transformação de Moebius. Então, os pontos $a' = t(a)$ e $b' = t(b)$ são simétricos em relação a Γ' que é a imagem de Γ sobre $t(z)$.*

Demonstração: Vamos considerar a inversão $z \rightarrow z^{-1}$. Se a e b coincidem, seus valores estão em Γ e não temos nada a demonstrar. Se a e b são finitos e distintos, a equação de Γ pode ser escrita por (4.3.20) onde $\mu > 0$ é uma constante. Consequentemente, a equação de Γ' é

$$\left| \frac{1 - aw}{1 - bw} \right| = \mu. \quad (4.3.24)$$

Se a e b são diferentes de zero, a equação acima pode ser escrita como

$$\left| \frac{w - a'}{w - b'} \right| = \mu \left| \frac{a'}{b'} \right|, \quad (4.3.25)$$

onde $a' = 1/a$ e $b' = 1/b$. Pelo teorema anterior, temos o resultado desejado para a transformação inversa $t(z) = 1/z$. Como o resultado é óbvio para a rotação e a translação, então é válido para qualquer transformação de Moebius. ■

4.3.1 O teorema da aplicação para discos

Seja D um disco e a um ponto em D . Queremos encontrar todas as transformações $t(z)$ que levam D para o disco unitário tal que $t(a) = 0$.

Solução: Seja Γ_c a fronteira de D . Se a é o centro de Γ_c , o problema pode ser resolvido utilizando-se uma transformação linear. Se a não é o centro, seja b o ponto simétrico a a com relação a Γ_c . A transformação

$$z \rightarrow \frac{z - a}{z - b}$$



leva a no zero, b no ∞ e Γ_c em um círculo (generalizado) Γ' , com a propriedade que 0 e ∞ são simétricos em relação a ele. Então, Γ' é um círculo sobre 0 . Queremos uma transformação de Moebius que leva Γ' no círculo unitário e deixa 0 fixo. Então, ∞ também permanece fixo. A única transformação que deixa 0 e ∞ fixos é $w \rightarrow cw$. Então, a transformação é da forma

$$t : z \rightarrow c \frac{z - a}{z - b}.$$

A constante $c \neq 0$ é determinada usando o fato de a imagem de Γ_c ser o círculo unitário. Temos que a imagem de um ponto de Γ_c tem módulo 1. Seja z_1 um ponto arbitrário de Γ_c . Então, $|t(z_1)| = 1$ é equivalente a

$$|c| = \left| \frac{z_1 - b}{z_1 - a} \right|.$$

Assim, D é levado em um disco unitário tal que $t(a) = 0$ se, e somente se,

$$t : z \rightarrow e^{i\alpha} \frac{z_1 - b}{z_1 - a} \frac{z - a}{z - b}, \quad (4.3.26)$$

onde z_1 é um ponto arbitrário na fronteira de D e α é um número real arbitrário.

Para o caso mais geral da transformação $t(z)$, de Moebius, que leva o disco unitário nele mesmo, temos: seja a , $0 < |a| < 1$, tal que $t(a) = 0$. Então, o ponto simétrico a a com relação a $|z| = 1$ é $(\bar{a})^{-1}$. Com $z_1 = 1$, a equação (4.3.26) é dada por

$$t(z) = e^{i\alpha} \frac{1 - \bar{a}^{-1}}{1 - a} \frac{z - a}{z - \bar{a}^{-1}},$$

que pode ser escrita como

$$t(z) = e^{i\alpha} \frac{1 - \bar{a}}{1 - a} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Como o fator $(1 - \bar{a})(1 - a)^{-1}$ tem módulo um, ele pode ser absorvido por $e^{i\alpha}$. A fórmula resultante para $t(z)$ também vale para $a = 0$. Assim, provamos:

TEOREMA 4.3.4 *A transformação $t(z)$ de Moebius leva disco unitário nele mesmo se, e somente se, a transformação é da seguinte forma:*

$$t : z \rightarrow e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

onde $|a| < 1$ e α é real.



Capítulo 5

Combinações Lineares de Polinômios Ortogonais que geram Fórmulas de Quadratura Positivas

Introdução

Neste capítulo, estaremos aplicando resultados conhecidos sobre os polinômios ortogonais no plano complexo para obter informações sobre a positividade de fórmulas de quadratura interpolatórias no intervalo $[-1, 1]$. Seja μ uma medida positiva em $[-1, 1]$. Consideramos a fórmula de quadratura

$$\int f(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n c_j f(x_j) + R_n(f) \quad (5.0.1)$$

onde $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$ e c_j , $j = 1, \dots, n$ são escolhidos tais que $R_n(f) = 0$ para $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1-m}$, $0 \leq m \leq n$. Assumimos que a fórmula de quadratura tem grau de precisão $2n - 1 - m$ e denotamos por $FQ(2n - 1 - m, n, \mu)$. No capítulo 2, vimos que se os c_j forem escolhidos tais que

$$c_j = \frac{1}{t'_n(x_j)} \int_{-1}^1 \frac{t_n(x)}{(x - x_j)} d\mu(x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$



onde $t_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, então a fórmula de quadratura conhecida como fórmula de quadratura interpolatória satisfaz $R_n(f) = 0$ para $f(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$. Neste caso, a fórmula de quadratura é uma $FQ(n-1, n, \mu)$.

Impondo restrições sobre os polinômios $t_n(x)$, ou melhor, sobre os nós de quadratura, melhoramos o grau de precisão da fórmula de quadratura. Se $t_n(x)$ é escolhido de modo a ser ortogonal a todos os polinômios de grau menor ou igual a $n-1$, então, como vimos no capítulo 2, obtemos a $FQ(2n-1, n, \mu)$ que é conhecida como *Quadratura Gaussiana* ou *fórmula de quadratura positiva*. Neste caso, a fórmula de quadratura que é única, tem pesos c_j , $j = 1, \dots, n$, positivos.

Se relaxarmos as condições sobre $t_n(x)$ impondo que ele seja ortogonal a todos os polinômios de grau menor ou igual a $n-1-m$, onde $0 \leq m \leq n$, então a fórmula de quadratura resultante é uma $FQ(2n-1-m, n, \mu)$. Notemos que se $t_n(x)$ é ortogonal a todos os polinômios de grau menor que $n-1-m$, podemos escrever

$$t_n(x) = \sum_{j=0}^m \mu_j p_{n-j}(x) \quad (5.0.2)$$

onde

$$\mu_j = \frac{\int_{-1}^1 t_n(x) p_{n-j}(x) d(x)}{\int_{-1}^1 p_{n-j}(x) p_{n-j}(x) d(x)} \in \mathbb{R}$$

e, quando $j = 0$, como já vimos, temos a fórmula de quadratura de Gauss. Uma fórmula de quadratura $FQ(2n-1-m, n, \mu)$, $m \geq 1$, não é única e seus pesos não são necessariamente positivos. A positividade dos pesos da fórmula de quadratura é uma importante característica quando consideramos a convergência dessas fórmulas.

Dizemos que uma $FQ(2n-1-m, n, \mu)$ é positiva quando seus pesos são positivos.

5.1 Alguns resultados preliminares

Nesta seção, colocamos alguns conceitos que serão usados posteriormente. Vejamos também alguns resultados dos polinômios ortogonais no círculo unitário $|z| = 1$. Sejam os



polinômios $\hat{p}_n(x) = x^n + \dots, n \in \mathbb{N}$, ortogonais em relação a $d\mu$ em $[-1, 1]$ satisfazendo a uma relação da forma

$$\hat{p}_n(x) = (x - b_n)\hat{p}_{n-1}(x) - a_n\hat{p}_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.1.3)$$

onde $\hat{p}_{-1} = 0, \hat{p}_0 = 1, b_n \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}$, e $a_n > 0$, para $n \geq 2$.

Seja $p_n^{(1)}(x), n \in \mathbb{N}_0$, o polinômio associado de grau n definido por

$$p_n^{(1)}(x) = \frac{1}{d_0} \int_{-1}^1 \frac{\hat{p}_{n+1}(x) - \hat{p}_{n+1}(t)}{x - t} d\mu(x) \quad (5.1.4)$$

onde $d_0 = \int_{-1}^1 d\mu(x)$. Podemos mostrar que $p_n^{(1)}(x)$ são os polinômios mônicos de grau n que satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$p_n^{(1)}(x) = (x - b_{n+1})p_{n-1}^{(1)}(x) - a_{n+1}p_{n-2}^{(1)}(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.1.5)$$

onde os a_n e os b_n são dados em (5.1.3).

TEOREMA 5.1.1 *Sejam $n, m \in \mathbb{N}_0, n \geq m$ e seja $\mu_j \in \mathbb{R}$ para $j = 0, \dots, m, \mu_0 \neq 0$. Então, $\sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x)$ gera uma fórmula de quadratura positiva $(2n - 1 - m, n, d\mu)$ se, e somente se, $\sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x)$ tem n zeros simples em $(-1, 1)$ e os zeros de $\sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x)$ e $\sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j-1}^{(1)}(x)$ intercalam-se.*

Demonstração: Sejam $t_n(x) = \sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x)$ e $t_{n-1}^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j-1}^{(1)}(x)$. Considerando a interpolação de $f(x)$ temos que

$$\int f(x) d\mu(x) = \sum \left(\int l_i(x) d\mu(t) \right) f(x_i) + R_n(x) = \sum c_i f(x_i) + R_n(x)$$

onde, pela equação (5.1.4), obtemos

$$c_i = \int l_i(x) d\mu(t) = \int \frac{t_n(x)}{(x - x_i)t'_n(x_i)} d\mu(x) = d_0 \frac{t_{n-1}^{(1)}(x_i)}{t'_n(x_i)}.$$

Portanto, os c_j são positivos para $j = 1, \dots, n$ se, e somente se, os zeros de $t_n(x)$ e $t_{n-1}^{(1)}(x)$ intercalam-se. ■

Denotemos por $\Phi_n(z) = z^n + \dots, n \in \mathbb{N}_0$, o polinômio ortogonal mônico no círculo unitário $C = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$, em relação à medida positiva

$$\nu(\theta) = \begin{cases} -\mu(\cos\theta), & \text{para } \theta \in [0, \pi] \\ \mu(\cos\theta), & \text{para } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

As relações entre $\Phi_n(z)$ e $\hat{p}_n(x)$ foram consideradas no capítulo 3. Vimos de (3.4.17) que os polinômios $\Phi_n(z)$ satisfazem a relação

$$\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) + \Phi_n(0)\Phi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1.$$

Seja $\Omega_n(z) = z^n + \dots$ definido pela relação de recorrência

$$\Omega_n(z) = z\Omega_{n-1}(z) - \Phi_n(0)\Omega_{n-1}^*(z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.1.6)$$

onde $\Omega_n(x)$ são chamados polinômios associados a $\Phi_n(z)$. Além disso, satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$\Phi_k(0)\Omega_{k+2}(w) = (\Phi_k(0)w + \Phi_{k+1}(0))\Omega_{k+1}(w) - \Phi_{k+1}(0)w(1 - |\Phi_k(0)|^2)\Omega_k(w),$$

onde $\Omega_0(w) = 1$, $\Omega_1(w) = w + \Phi_0(0)$ e $k = 0, 1, \dots, n-2$. Propriedades sobre esses polinômios, são encontradas em Geronimus [3]. Podem, também, ser definidos por

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{c_0} \int_{-1}^1 \frac{(z+w)\Phi_n(z) - \Phi_n(w)}{z-w} d\mu(w),$$

onde c_0 é o momento trigonométrico. Além disso, esses polinômios têm grau n e são mônicos.

Sabemos que os polinômios $\Phi_n(z)$, $n \geq 1$, têm todos os zeros dentro do círculo unitário $|z| < 1$. O mesmo é válido para $\Omega_n(z)$. Temos as seguintes relações entre os polinômios ortogonais mônicos em $[-1, 1]$, $\hat{p}_n(x)$, em relação a $d\mu$ e os polinômios $\Phi_n(z)$ e $\Omega_n(z)$:

$$\hat{p}_n(x) = 2^{-n+1} \Re\{z^{-n+1}\Phi_{2n-1}(z)\}, \quad (5.1.7)$$

$$\hat{p}_{n-1}^{(1)}(x) = 2^{-n+1} \Im\{z^{-n+1}\Omega_{2n-1}(z)\}/\sin\theta, \quad (5.1.8)$$

onde $x = 1/2(z + z^{-1})$, $z = e^{i\theta}$ e $\theta \in [0, \pi]$. A equação (5.1.7) é obtida de (3.4.20) usando (3.4.17).

No próximo teorema, colocaremos a relação entre os polinômios cosseno e seno dados, respectivamente, por $\Re\{z^{-l}h_n(z)\}$ e $\Im\{z^{-l}h_n(z)\}$. Vejamos:



TEOREMA 5.1.2 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Z}$ com $2|l| \leq n$. Suponhamos que o polinômio real $h_n(z) = z^n + \dots$ tem todos os zeros no círculo unitário $|z| < 1$. Então, $\Re\{z^{-l}h_n(z)\}$ (polinômio cosseno) e $\Im\{z^{-l}h_n(z)\}$ (polinômio seno), $z = e^{i\theta}$ e $\theta \in [0, \pi]$ têm $n - l$ zeros ϕ_j em $(0, \pi)$ e $n - l - 1$ zeros ψ_j em $(0, \pi)$, respectivamente, e, além disso, esses zeros intercalam-se.*

Demonstração: Seja $h_n(z) = \sum_{r=0}^n b_r z^r$, $b_r \in \mathbb{R}$. Então, para $z = e^{i\theta}$ temos $\Re(z^{-l}h_n(z)) = \sum_{r=0}^n b_r \cos(-l + r)\theta$ e

$$\Re(z^{-l}h_n(z)) = 0 \iff \sum_{r=0}^n b_r \cos(-l + r)\theta = - \sum_{r=0}^n b_r \cos(l - r)\theta. \quad (5.1.9)$$

Por outro lado (sempre vale)

$$\sum_{r=0}^n b_r \sin(-l + r)\theta = - \sum_{r=0}^n b_r \sin(l - r)\theta. \quad (5.1.10)$$

Multiplicando (5.1.10) por i e somando com (5.1.9) obtemos $\sum_{r=0}^n b_r z^r z^{-l} = - \overline{\sum_{r=0}^n b_r z^r z^{-l}}$.

Logo, substituindo $\sum_{r=0}^n b_r z^r$ e $\overline{\sum_{r=0}^n b_r z^r}$ por $q_n(z)$ e $\overline{h_n(z)}$, respectivamente, temos

$$z^{-2l} \frac{h_n(z)}{\overline{h_n(z)}} = -1. \quad (5.1.11)$$

A equação acima pode ser escrita como $z^{n-2l} \frac{h_n(z)}{h_n^*(z)} = -1$ e, substituindo o fato que

$$\arg\{z^{n-2l}\} + \arg\left\{\frac{h_n(z)}{h_n^*(z)}\right\} = \arg\left\{z^{n-2l} \frac{h_n(z)}{h_n^*(z)}\right\},$$

obtemos para $z = e^{i\theta}$

$$\Re(z^{-l}h_n(z)) = 0 \iff z^{-2l} \frac{h_n(z)}{\overline{h_n(z)}} = -1 \iff \arg\{z^{n-2l}\} + \arg\left\{\frac{h_n(z)}{h_n^*(z)}\right\} = (2k - 1)\pi.$$

Da mesma forma obtemos

$$\Im(z^{-l}h_n(z)) = 0 \iff z^{-2l} \frac{h_n(z)}{\overline{h_n(z)}} = 1 \iff \arg\{z^{n-2l}\} + \arg\left\{\frac{h_n(z)}{h_n^*(z)}\right\} = 2k\pi.$$

Sabemos que $\arg\{z^{n-2l}\}$ aumenta de 0 a $2(n - 2l)\pi$ quando θ varia de 0 a 2π . Usando o fato que $\frac{h_n(z)}{h_n^*(z)}$ é múltiplo de n transformações da forma dada no teorema 4.3.4, obtemos que $\arg\left\{\frac{h_n(z)}{h_n^*(z)}\right\}$ aumenta de 0 a $2n\pi$ quando θ varia de 0 a 2π . Assim, concluímos que $\Re(z^{-l}h_n(z))$ e $\Im(z^{-l}h_n(z))$ tem $2(n - l)$ zeros em $[0, 2\pi]$ ou seja, o polinômio cosseno tem $n - l$ zeros em $(0, \pi)$ e o polinômio seno tem $n - l - 1$ zeros em $(0, \pi)$. Além disso, os zeros intercalam-se. ■

5.2 Principais resultados

Definiremos, primeiramente, os polinômios $Q_{\nu,2n-1}(z)$ e, em seguida, citaremos algumas propriedades importantes desses polinômios.

DEFINIÇÃO 5.2.1 Para um dado $n \in \mathbb{N}$, sejam os polinômios $Q_{\nu,2n-1}(z) = z^\nu + \dots$, $\nu \in \{0, \dots, 2n-1\}$, definidos pela relação de recorrência

$$Q_{\nu,2n-1}(z) = zQ_{\nu-1,2n-1}(z) + \Phi_{2n-\nu}(0)Q_{\nu-1,2n-1}^*(z), \quad \nu = 1, \dots, 2n-1, \quad (5.2.12)$$

onde $Q_{0,2n-1} = 1$ e os parâmetros $\Phi_{2n-\nu}(0)$ são dados pela relação de recorrência (3.4.17).

TEOREMA 5.2.1 Seja $n \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $\prod_{k=0}^{\nu-1} (1 - |\Phi_{2n-k-1}(0)|) \leq |Q_{\nu,2n-1}^*(z)| \leq \prod_{k=0}^{\nu-1} (1 + |\Phi_{2n-k-1}(0)|)$ para $|z| \leq 1$ onde $\nu \in \{0, \dots, 2n-1\}$. Além disso, $Q_{\nu,2n-1}(z)$ tem todos os zeros em $|z| < 1$.

(b) Seja $\nu \in \{0, \dots, n-1\}$. Então, para $z = e^{i\theta}$, $x = \cos\theta$ e $\theta \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \hat{p}_n(x) &= 2^{-n+1} \Re \{ z^{-n+1} Q_{2\nu,2n-1}(z) \Phi_{2(n-\nu)-1}(z) \} \\ \hat{p}_{n-1}^{(1)}(x) &= 2^{-n+1} \Im \{ z^{-n+1} Q_{2\nu,2n-1}(z) \Omega_{2n-1}(z) \} / \sin\theta. \end{aligned}$$

Demonstração: (a): Seja $Q_{\nu,2n-1}^*(z) = z^\nu Q_{\nu,2n-1}(1/z)$. Então,

$$z^\nu Q_{\nu,2n-1}^*(1/z) = Q_{\nu,2n-1}(z). \quad (5.2.13)$$

Da equação acima e da relação (5.2.12) obtemos

$$Q_{\nu,2n-1}^*(z) = Q_{\nu-1,2n-1}^*(z) + \Phi_{2n-\nu}(0)zQ_{\nu-1,2n-1}(z). \quad (5.2.14)$$

Logo, aplicando a desigualdade triangular obtemos,

$$1 - |\Phi_{2n-\nu}(0)||z| \left| \frac{Q_{\nu-1,2n-1}(z)}{Q_{\nu-1,2n-1}^*(z)} \right| \leq \left| 1 + \Phi_{2n-\nu}(0)z \frac{Q_{\nu-1,2n-1}(z)}{Q_{\nu-1,2n-1}^*(z)} \right| \leq 1 + |\Phi_{2n-\nu}(0)||z| \left| \frac{Q_{\nu-1,2n-1}(z)}{Q_{\nu-1,2n-1}^*(z)} \right|.$$

Multiplicando a equação acima por $|Q_{\nu-1,2n-1}^*(z)|$ e, como $\left| \frac{Q_{\nu-1,2n-1}(z)}{Q_{\nu-1,2n-1}^*(z)} \right| \leq 1$, $|z| < 1$ (teorema 4.3.4),

$$|Q_{\nu-1,2n-1}^*(z)| \{1 - |\Phi_{2n-\nu}(0)|\} \leq |Q_{\nu,2n-1}^*(z)| \leq |Q_{\nu-1,2n-1}(z)| \{1 + |\Phi_{2n-\nu}(0)|\}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Para finalizar a demonstração de (a), basta provar por indução que

$$\prod_{k=1}^m \{1 - |\Phi_{2n-1-k}(0)|\} \leq |Q_{m,2n-1}^*(z)| \leq \prod_{k=1}^m \{1 + |\Phi_{2n-1-k}(0)|\}.$$

(b): Podemos escrever (3.4.17) como

$$\Phi_n^*(z) = \Phi_{n-1}^*(z) + z\Phi_n(0)\Phi_{n-1}(z), \quad (5.2.15)$$

Multiplicando-se (5.2.15) por $\Phi_n(0)$ e somando com (3.4.17), obtemos

$$\Phi_n(z) + \Phi_n(0)\Phi_n^*(z) = z\Phi_{n-1}(z) + z\Phi_{n-1}^2(0)\Phi_{n-1}(z). \quad (5.2.16)$$

Multiplicando-se (3.4.17) por $\Phi_n(0)$ e somando com (5.2.15) obtemos

$$\Phi_n^*(z) + \Phi_n(0)\Phi_n(z) = (1 + \Phi_{n-1}^2(0))\Phi_{n-1}^*(z). \quad (5.2.17)$$

Com a ajuda dessas relações de recorrência provamos, por indução, que

$$z\Phi_{2n-1}(z) + \Phi_{2n-1}^*(z) = zQ_{\nu,2n-1}(z)\Phi_{2n-1-\nu}(z) + Q_{\nu,2n-1}^*(z)\Phi_{2n-1-\nu}^*(z). \quad (5.2.18)$$

Seja a equação (5.2.13) e $\Phi_{2n-1}(z) = \sum_{r=0}^{2n-1} b_r z_r$. Então, substituindo $\Phi_{2n-1}(z)$ nas equações $z^{-n}(z\Phi_{2n-1} + \Phi_{2n-1}^*(z))$ e $2\Re\{z^{-n+1}\Phi_{2n-1}(z)\}$ e igualando os coeficientes dessas duas equações, obtemos que

$$z^{-n}\{z\Phi_{2n-1}(z) + \Phi_{2n-1}^*(z)\} = 2\Re\{z^{-n+1}\Phi_{2n-1}(z)\},$$

para $z = e^{i\theta}$, provando, assim, a primeira relação.

Analogamente, demonstra-se a segunda relação da parte (b). ■

TEOREMA 5.2.2 *Sejam $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \geq m$, $\mu_0, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ e $\mu_0 \neq 0$. Então, $\sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x)$ gera uma $FQ(2n-1-m, n, \mu)$ positiva se $\sum_{j=0}^m \tilde{\mu}_j z^j Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}(z)$, para $\tilde{\mu}_j = 2^j \mu_j$, tem todos os zeros no disco aberto $|z| < 1$.*



Demonstração: Sejam $t_n(x) = \sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x)$ e $t_{n-1}^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j-1}(x)$. Seja também,

$$q_{2m}(z) = \sum_{j=0}^m 2^j \mu_j z^j Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}(z).$$

Substituindo-se $q_{2m}(z)$ em $2^{-n+1} \Re\{z^{-m} q_{2m}(z) z^{-(n-m)+1} \Phi_{2(n-m)-1}(z)\}$ obtemos que,

$$\begin{aligned} & 2^{-n+1} \Re\{z^{-m} q_{2m}(z) z^{-(n-m)+1} \Phi_{2(n-m)-1}(z)\} \\ &= \sum_{j=0}^m \mu_j \Re\{2^{-n+j+1} z^{-n+1+j} Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}(z) \Phi_{2(n-m)-1}(z)\}. \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema 5.2.1, temos que

$$\hat{p}_{n-j}(x) = 2^{-n+1+j} \Re\{z^{-n+1+j} Q_{2\nu, 2(n-j)-1}(z) \Phi_{2(n-\nu-j)-1}(z)\}.$$

Fazendo $j + \nu = m$ na equação acima, obtemos que

$$\sum_{j=0}^m \mu_j 2^{-n+1+j} \Re\{z^{-n+1+j} Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}(z) \Phi_{2(n-m)-1}(z)\} = \sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}(x).$$

Logo, para $z = e^{i\theta}$, $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$,

$$t_n(x) = 2^{-n+1} \Re\{z^{-m} q_{2m}(z) z^{-(n-m)+1} \Phi_{2(n-m)-1}(z)\} \quad (5.2.19)$$

Da mesma forma,

$$t_{n-1}^{(1)}(x) = 2^{-n+1} \Im\{z^{-m} q_{2m}(z) z^{-(n-m)+1} \Omega_{2(n-m)-1}(z) / \sin\theta\},$$

onde

$$q_{2m}(z) = \sum_{j=0}^m 2^j \mu_j z^j Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}(z). \quad (5.2.20)$$

Suponhamos que $q_{2m}(z)$ tem todos os zeros em $|z| < 1$. Sendo isso válido para $\Phi_{2(n-m)-1}(z)$, pelo teorema 5.1.2 temos que $t_n(x)$ tem n zeros simples em $(-1, 1)$. Precisamos mostrar que os zeros de $t_n(x)$ e $t_{n-1}^{(1)}(x)$ intercalam-se. Seja a relação

$$\Re\{a\} \Re\{b\} + \Im\{a\} \Im\{b\} = \Re\{a\bar{b}\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \Re\{z^{-(n-1)} q_{2m}(z) \Phi_{2(n-m)-1}(z)\} \Re\{z^{-(n-1)} q_{2m}(z) \Omega_{2(n-m)-1}(z)\} \\ & + \Im\{z^{-(n-1)} q_{2m}(z) \Phi_{2(n-m)-1}(z)\} \Im\{z^{-(n-1)} q_{2m}(z) \Omega_{2(n-m)-1}(z)\} \\ &= |q_{2m}(z)|^2 |z^{-(n-1)}|^2 \Re\{\Phi_{2(n-m)-1}(z) \overline{\Omega_{2(n-m)-1}(z)}\} = c |q_{2m}(z)|^2 \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

pois

$$\begin{aligned} & \Phi_{2(n-m)-1}(z)\Omega_{2(n-m)-1}^*(z) + \Omega_{2(n-m)-1}(z)\Phi_{2(n-m)-1}^*(z) \\ &= z^{2(n-m)-1} \left\{ \Phi_{2(n-m)-1}(z)\Omega_{2(n-m)-1}(\bar{z}) + \Phi_{2(n-m)-1}(\bar{z})\Omega_{2(n-m)-1}(z) \right\} \\ &= 2\Re\{\Phi_{2(n-m)-1}(z)\overline{\Omega_{2(n-m)-1}(z)}\} = \tilde{c}. \end{aligned}$$

Logo, $\Re\{\Phi_{2(n-m)-1}(z)\overline{\Omega_{2(n-m)-1}(z)}\} = c$.

Pelo teorema 5.1.2 temos que os zeros de $t_n(x)$, $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$, e os zeros do polinômio $r_{n-1}(x) = \Im\{z^{-(n-1)}q_{2m}(z)\Phi_{2(n-m)-1}(z)\}/\sin\theta$, onde $x = 1/2(z + 1/z)$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, intercalam-se. Considerando a relação (5.2.21) para os zeros de $t_n(x)$, x_j , $1 \leq j \leq n$, obtemos

$$r_{n-1}(x_j)t_{n-1}^{(1)}(x_j) = \frac{2^{-n+1}}{\sin^2\theta_j} c |q_{2m}(z_j)|^2 > 0,$$

onde $\theta_j = \arccos(x_j)$ e $z_j = \cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j)$. Assim, verificamos a propriedade de intercalação entre $t_n(x)$ e $t_{n-1}^{(1)}(x)$, completando a prova do teorema. ■

Observação: Utilizando a equação (5.2.19), a condição suficiente do teorema acima é também necessária se $2m \leq n$.

COROLÁRIO 5.2.1 *Sejam $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, $\mu_0, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ e $\mu_0 \neq 0$. Sejam $A_0 = \mu_0$,*

$$A_j = 2^j |\mu_j| \frac{\prod_{k=0}^{2(m-j)-1} (1 + |\Phi_{2(n-j)-1-k}(0)|)}{\prod_{k=0}^{2m-1} (1 - |\Phi_{2n-1-k}(0)|)}, j = 1, \dots, m \quad (5.2.22)$$

e $j_\nu \in \{0, \dots, m\}$, $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_m$, os índices para os quais $A_{j_\nu} \neq 0$, $\nu = 1, \dots, m^$, e $A_j = 0$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j_0, \dots, j_m\}$. Então, cada uma das seguintes condições são suficientes para que $\sum_{j=0}^m \mu_j \hat{p}_{n-j}$ gere uma $FQ(2n-1-m, n, d\mu)$ positiva:*

$$(1) \sum_{\nu=1}^{m^*} A_{j_\nu} < A_0$$

$$(2) A_{j_\nu} \geq 2A_{j_{\nu+1}} \text{ para } \nu = 0, \dots, m^* - 2 \text{ e } A_{j_{m^*-1}} > A_{j_m}.$$

Demonstração: Notemos que a condição (2) implica na condição (1). De fato:

$$A_{j_0} \geq 2A_{j_1} = A_{j_1} + A_{j_1} \geq \dots \geq A_{j_1} + A_{j_2} + \dots + A_{j_{m^*-1}} + A_{j_{m^*-1}} > \sum_{\nu=1}^{m^*} A_{j_\nu}.$$

Agora, mostraremos que a condição (1) implica que

$$q_{2m}^*(z) = \sum_{j=0}^m \tilde{\mu}_j z^j Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}^*(z), \quad \tilde{\mu}_j = 2^j \mu_j,$$

tem todos os zeros em $|z| > 1$, que é equivalente a $\sum_{j=0}^m \tilde{\mu}_j z^j Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}^*(z)$ ter todos os zeros em $|z| < 1$ e assim, provamos o corolário. Provemos, por absurdo. Suponhamos que $q_{2m}^*(z)$ tem um zero ξ em $|z| \leq 1$. Pelo teorema 5.2.1 temos que $Q_{2m, 2n-1}^*(z)$ não tem zero em $|z| \leq 1$ e, então,

$$0 = q_{2m}^*(\xi) = \mu_0 Q_{2m, 2n-1}^*(\xi) + \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_j \xi^j Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}^*(\xi)$$

e

$$\begin{aligned} |\mu_0| &= \left| \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_j \xi^j \frac{Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}^*(\xi)}{Q_{2m, 2n-1}^*(\xi)} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_j |\xi^j| \left| \frac{Q_{2m-2j, 2(n-j)-1}^*(\xi)}{Q_{2m, 2n-1}^*(\xi)} \right| \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 5.2.1 ,

$$A_0 = |\mu_0| \leq |\xi|^j \sum_{j=1}^m 2^j \mu_j \frac{\prod_{k=0}^{2m-1-2j} (1 + |\Phi_2^{2(n-j)-1-k}(0)|)}{\prod_{k=0}^{2m-1} (1 - |\Phi_2^{2n-1-k}(0)|)} \leq \sum_{j=1}^m A_j,$$

o que contradiz a condição (1). ■



Referências

- [1] BERTI, A. C., SRI RANGA, A., *Companion orthogonal polynomials and twin periodic recurrence relations*, submetido.
- [2] CHIHARA, T. S., *An introduction to orthogonal polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [3] GERONIMUS, YA. L., *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, English transl., Amer. Math. Soc. 3, (1962), 1-78.
- [4] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., *Application of Szegő polynomials to digital signal processing*, Rocky Mountain J. Math. 21, (1991), 387-436.
- [5] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., SAFF, E. B., *Szegő polynomials associated with Wiener-Levinson filters*, J. Comp. And Appl. Math. 32, (1990), 387-406.
- [6] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., THRON, W. J., *Schur fractions, Perron-carathéodory fractions and Szegő polynomials, a survey*, in *Analytic Theory of Continued Fractions II*, W. J. Thron, ed. Lecture Notes in Math. 1199, Springer-Verlag, New York, (1986), 127-158.
- [7] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., THRON, W. J., WAADELAND, H. *Szegő polynomials applied to frequency analysis*, J. Comp. And Appl. Math. 46, (1993), 217-228.
- [8] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., WAADELAND, H., *Asymptotics for Szegő polynomials zeros*, Numerical Algorithm 3, (1992), 255-264.



- [9] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., WAADELAND, H., *An alternative way of using Szegő polynomials in frequency analysis* in Continued Fractions and Orthogonal Functions, S.C. Cooper & W. J. Thron, eds., Marcel Dekker Inc., New York, (1994), 141-152.
- [10] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., WAADELAND, H., *Asymptotics of zeros of orthogonal and para-orthogonal Szegő polynomials in frequency analysis* in Continued Fractions and Orthogonal Functions, S.C. Cooper & W. J. Thron, eds., Marcel Dekker Inc., New York (1994), 153-190.
- [11] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., WAADELAND, H., *Application of Szegő polynomials to frequency analysis*, SIAM J. Math. Anal. 25, (1994), 491-512.
- [12] JONES, W. B., SAFF, E. B., *Szegő polynomials and frequency analysis*, G. A. Anastassiou, ed., Marcel Dekker Inc., New York, (1992), 341-352. 1994, 141-152.
- [13] HENRICI, P., *Applied and computational complex analysis*, John Wiley 1, (1974).
- [14] PEHERSTORFER, F., *Linear Combinations of Orthogonal Polynomials generating Positive Quadrature Formulas*, Mathematics of Computation 55, (1990), 231-241.
- [15] PEHERSTORFER, F., *Characterization of positive quadrature formulas*, SIAM J. Math. Anal. 12, (1981), 935-942.
- [16] SAFF, E. B., *Orthogonal polynomials from a complex perspective, in Orthogonal Polynomials: Theory and Practice*, (P. Nevai, ed.), (1990), 363-393.
- [17] SOTTAS, G., WANNER, G., *The number of positive weights of a quadrature formula*, BIT 22, (1982), 339-352.
- [18] SZEGÖ, G., *Orthogonal polynomials*, Amer. Math Soc. Coll. Pub. 23, fourth ed., Providence, RI, (1975).
- [19] SZEGÖ, G., *Collected papers*, R. Askey ed., vol. 1, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, (1982).



- [20] VAN ASSCHE, W., *Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line*, Field Institute communications 14: Special Functions, q-series and related topics (M.E.H. Ismail et. al., eds.), Amer. Math. Soc., (1997), 211-245.



