

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS - CAMPUS BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE
MATERIAIS

**ESTUDO DE FILMES SUPERCONDUTORES
DE ESPESSURA FINITA EM FORMA DE SQUID**

Fábio Rogeri

Orientador:

Edson Sardella

**BAURU
2013**

Fábio Rogeri

ESTUDO DE FILMES SUPERCONDUTORES
DE ESPESSURA FINITA EM FORMA DE SQUID

Dissertação apresentada ao programa de
Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia
de Materiais da Universidade Estadual
Paulista como parte dos pré-requisitos
para a obtenção do título de Mestre.

BAURU
2013

Rogeri, Fábio.

Estudo de Filmes Supercondutores de Espessura Finita em Forma de SQUID / Fábio Rogeri, 2013.

80 páginas.

Orientador: Edson Sardella

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2013.

1. Supercondutores Mesoscópicos. 2. SQUID. 3. Equações TDGL. 4. Variáveis de Ligação. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Estudo de Filmes Supercondutores de Espessura Finita em Forma de SQUID.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado DE FABIO ROGERI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, DO(A) FACULDADE DE CIÊNCIAS DE BAURU.

Aos 08 dias do mês de março do ano de 2013, às 14:00 horas, no(a) Sala 1 da Pós-graduação da Faculdade de Ciências, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. EDSON SARDELLA do(a) Departamento de Física / Faculdade de Ciências de Bauru, Prof. Dr. ALEXYS BRUNO ALFONSO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, Prof. Dr. CLAUDIO ANTONIO CARDOSO do(a) Departamento de Física / Universidade Federal de São Carlos, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de FABIO ROGERI, intitulado "ESTUDO DE SUPERCONDUTORES DE ESPESSURA FINITA EM FORMA DE SQUID". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. EDSON SARDELLA



Prof. Dr. ALEXYS BRUNO ALFONSO



Prof. Dr. CLAUDIO ANTONIO CARDOSO



Dedicatória

À minha esposa, Caroline Etane Bolla Rogeri, pelo amor, pela paciência e pelo incentivo dedicado a todo instante.

À minha família, por entenderem a demanda de tempo necessária para a conclusão do presente trabalho e a minha finada mãe que certamente está comigo a cada passo de minha vida.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edson Sardella, pela paciência, pelo tempo despendido e por acreditar em meu potencial, desde os tempos de graduação até o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de trabalho, por sempre estarem dispostos a atender meus pedidos quanto aos horários necessários para cursar as disciplinas deste programa de pós-graduação, bem como no tocante ao tempo de estudo.

Resumo

O interesse no estudo das propriedades de supercondutores com dimensões mesoscópicas tem sido cada vez maior nas últimas décadas. Em nosso trabalho, fazemos um estudo das propriedades eletromagnéticas de um filme supercondutor em forma de SQUID com espessura finita. Para tanto, foi desenvolvido um código computacional, em três dimensões, levando em conta o efeito de desmagnetização nas bordas do supercondutor, baseando-se na *teoria de Ginzburg-Landau*, com utilização do método de variáveis de ligação. Foi feita ainda uma comparação dos resultados obtidos com os resultados alcançados com a utilização da *teoria de London*.

Palavras chave: supercondutores mesoscópicos, SQUID, equações TDGL, variáveis de ligação.

Abstract

The interest in the study of the superconducting properties with mesoscopic dimensions has grown in the last decades. In the present work, we made a study of the electromagnetic properties of superconducting film designed like a SQUID with finite thickness. For this, it was developed a computing code in 3D taking into account the effect of demagnetization at the edge of the superconductor, based in the Ginzburg-Landau theory and using the link variable method. It was made a comparison of the present results with those obtained by using *London theory*.

Key words: mesoscopic superconducting, SQUID, TDGL equations, link variables.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Estrutura do trabalho	9
1.2	Breve Histórico	10
2	Teorias Fenomenológicas	17
2.1	Introdução	17
2.2	Teoria de London	17
2.3	Uma Aplicação da Teoria de London	20
2.4	A Teoria de Ginzburg-Landau - GL	22
2.5	Condições de Contorno	25
2.6	Equações de Ginzburg-Landau Dependentes do Tempo - TDGL	25
2.7	Comprimentos Característicos	26
2.7.1	O Comprimento de Coerência	27
2.7.2	Comprimento de Penetração de London	29
2.7.3	O Parâmetro de Ginzburg-Landau	30
2.8	Classificação dos Supercondutores	30
2.9	A Quantização de fluxo magnético	34
2.10	Estrutura de um vórtice	35
2.11	Vórtices em Supercondutores Macroscópicos	36
3	Discretização das Equações TDGL em 3D	39
3.1	Introdução	39
3.2	As Equações TDGL em Unidades Reduzidas	39
3.3	Campos Auxiliares	43
3.3.1	A Malha de Discretização	44
3.3.2	As Variáveis de Ligação e o Campo Magnético Local	46
3.4	Discretização das Equações TDGL	48
3.4.1	Condições de Contorno	52
3.5	Variáveis Discretas	55
4	Filmes Supercondutores de Espessura Finita em Forma de SQUID	57
4.1	Introdução	57
4.1.1	Supercondutores Mesoscópicos e Efeitos de Desmagnetização	57
4.1.2	SQUID	60
4.2	Resultados e Discussões	62
5	Conclusões	71

Capítulo 1

Introdução

1.1 Estrutura do trabalho

O presente trabalho desenvolver-se-á em cinco capítulos. No primeiro Capítulo um breve histórico da supercondutividade será apresentado, desde a sua descoberta no início do século XX, com a descrição inicial das teorias que foram desenvolvidas ao longo deste século, até as mais recentes descobertas sobre o tema. No Capítulo 2, são abordadas as teorias fenomenológicas que descrevem a supercondutividade e são o foco de estudo deste trabalho. No Capítulo 3, é apresentado o método de solução numérica das equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo. Assim, construiremos um modelo matemático capaz reproduzir as principais propriedades estruturais e magnéticas da rede de vórtices de um supercondutor na presença de um campo magnético aplicado em *três dimensões*. No Capítulo 4, este modelo será empregado para um supercondutor em forma de geometria SQUID (*superconducting quantum interference device*). Os resultados obtidos são então apresentados e discutidos. Um estudo comparativo com resultados anteriores é realizado. Por fim, no Capítulo 5, são discutidas as conclusões e perspectivas sobre o trabalho desenvolvido.

1.2 Breve Histórico

O fenômeno da supercondutividade foi descoberto pelo físico holandês H. Kamerlingh Onnes [1], em Leiden, em 1911, ao realizar medidas de resistência elétrica em uma amostra de mercúrio sólido a temperaturas próximas ao zero absoluto. Para tanto, Onnes fez uso de sua técnica, desenvolvida três anos antes, liquefazendo Hélio em seu laboratório, o que possibilitava alcançar tal nível de resfriamento. Onnes notou que a resistência elétrica da amostra caía abruptamente a níveis muito próximos de zero, quando a temperatura, ao ser reduzida, chegava ao marco de 4.2 K (ver Figura 1.1). Essa temperatura foi denominada de temperatura crítica, T_c . Abaixo de T_c , a amostra apresentava-se em um estado de resistência elétrica praticamente nula, este chamado mais tarde de estado supercondutor, no qual a corrente elétrica fluía através da amostra sem qualquer dissipação de energia; acima dela, no entanto, voltava ao estado normal. Esta foi a primeira assinatura da supercondutividade. Por seu trabalho, Onnes recebeu o prêmio Nobel de Física em 1913.

A partir desse marco histórico na Física, o estudo desta nova classificação de materiais evidenciou uma segunda característica específica, ou melhor dizendo, a segunda assinatura da supercondutividade: além da temperatura crítica, essa propriedade somente era mantida abaixo de um campo magnético aplicado crítico, H_c , bem como abaixo de uma densidade de corrente crítica, J_c . Estes valores eram específicos para cada material. Algumas limitações para sua aplicação eram, então, observadas, conforme pode ser visualizado da Figura 1.2.

A terceira assinatura da supercondutividade viria a ser publicada em 1933, por Walther Meissner e Robert Ochsenfeld [3]. Quando aplicado um campo magnético externo H_c em um supercondutor submetido a uma temperatura abaixo de T_c , os pesquisadores observaram que a amostra comportava-se como um ma-



Figura 1.1: À esquerda, o gráfico de resistência por temperatura elaborado por Onnes [1]. À direita, uma extração de suas anotações, na qual ele escreve: “Kwik nagenoeg nul”, ou seja “Mercúrio é praticamente zero”

material diamagnético perfeito, independente do histórico magnético, ou seja, independente de aplicar campo magnético primeiro e depois reduzir a temperatura ou ainda reduzir a temperatura primeiro e posteriormente aplicar campo magnético. Em ambos os casos, o supercondutor comportava-se da mesma forma. Tal propriedade não era esperada considerando um condutor perfeito hipotético, pois neste caso, o efeito somente seria observado no caso do campo magnético ser aplicado após a redução da temperatura abaixo de T_c (ver Figura 1.3). Ao efeito de expulsão do campo magnético, ou seja, o diamagnetismo do supercondutor, deu-se o nome de *efeito Meissner*.

Há ainda uma quarta assinatura que evidencia a supercondutividade. Assim como ocorre uma queda abrupta no valor da resistividade em T_c , há uma descontinuidade no valor do calor específico nessa mesma temperatura, quando o campo magnético externo aplicado é nulo.

Dois anos mais tarde, surgia uma teoria fenomenológica, proposta pelos irmãos F. e H. London [4], a qual ficou conhecida como *teoria de London*. Consi-

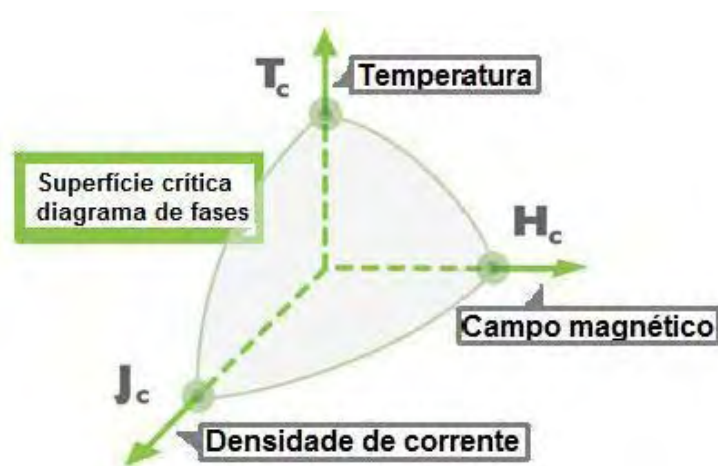


Figura 1.2: Limitações da utilização dos supercondutores. Reproduzido de [2].

derando o modelo simples de dois fluidos, a teoria descrevia a supercondutividade dentro de um material supercondutor através da inclusão de uma equação que relacionava corrente elétrica e campo magnético, associada às já conhecidas equações de Maxwell. A teoria de London descrevia ainda o efeito Meissner, provando a existência de um comprimento característico λ , conhecido como *comprimento de penetração* de London, este entendido como sendo a espessura de penetração superficial do campo magnético aplicado paralelamente à superfície do supercondutor. Essa penetração ocorria com decaimento exponencial. Assim, o diamagnetismo perfeito ocorria além da espessura λ . Muito embora a teoria conseguisse descrever o fenômeno, através de uma visão puramente clássica, um grande avanço para a época, a mesma não era capaz de explicá-lo microscopicamente.

Outra teoria fenomenológica foi desenvolvida em 1950 por V. Ginzburg e L. Landau [5], denominada de *teoria de Ginzburg - Landau*. A teoria, desenvolvida para temperaturas próximas a T_c , introduziu uma função de onda complexa $\psi(\mathbf{r})$, conhecida como parâmetro de ordem, bem como o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ para a

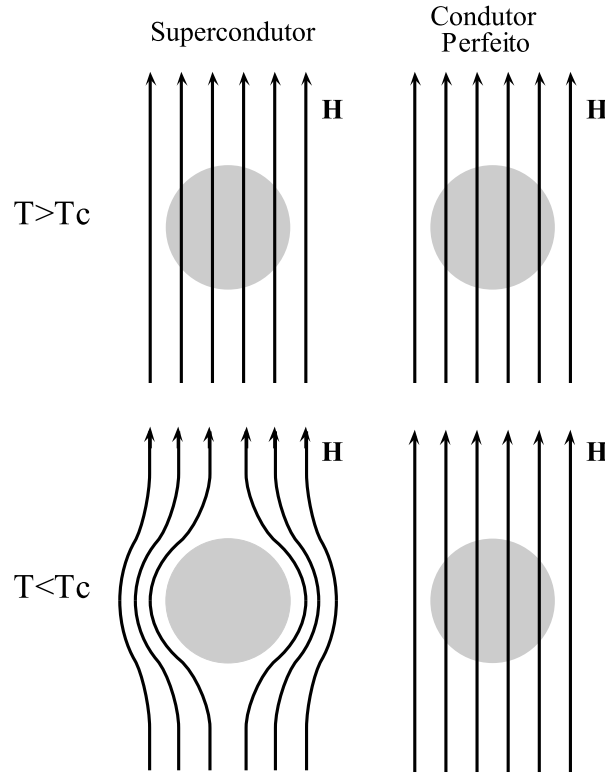


Figura 1.3: Aplicação de campo magnético externo H , com consequente redução da temperatura T : diferença de comportamento entre supercondutor e condutor perfeito.

descrição da energia do supercondutor. Por sua natureza complexa, o valor de $\psi(\mathbf{r})$ não possuía significado físico, no entanto, $|\psi|^2$ representava a densidade de elétrons supercondutores. O campo magnético local relacionava-se com o potencial vetor através de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Duas equações foram criadas para a descrição da supercondutividade. A primeira descrevia a variação espacial do parâmetro de ordem; a segunda era utilizada para a descrição do campo magnético local. Além de conseguir prever a existência do comprimento de penetração λ , a teoria incluiu um novo comprimento fundamental, ξ , este conhecido como *comprimento de coerência*, na escala de variação de $\psi(\mathbf{r})$. Ambos variam com a temperatura, entretanto o *parâmetro de Ginzburg - Landau* $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ é independente de T .

Novamente, apesar de descrever o fenômeno, esta teoria ainda não explicava por que o material tornava-se supercondutor.

Ainda nos anos 50, Alexei A. Abrikosov, um estudante de Landau, iniciou um estudo das equações de Ginzburg - Landau na condição em que o comprimento de penetração de London era maior do que o comprimento de coerência, $\lambda > \xi$. Abrikosov previu a formação de um arranjo regular de *vórtices*, pequenos rodinhos de corrente elétrica, com $\psi = 0$ no centro, onde a supercondutividade era totalmente suprimida e o campo magnético local é máximo. Notadamente, havia, pois, um novo estado de supercondutividade, denominado como estado misto, no qual havia penetração de fluxo magnético: o estado supercondutor e normal coexistiam no mesmo material.

Neste contexto, introduziu-se a ideia de dois campos magnéticos críticos: o campo crítico inferior, $H_{c1}(T)$ e o campo crítico superior, $H_{c2}(T)$. Abaixo de $H_{c1}(T)$, o estado Meissner era observado. Entre $H_{c1}(T)$ e $H_{c2}(T)$, ocorria o estado misto. Para valores acima de $H_{c2}(T)$, o material retornava ao estado normal. Tais supercondutores foram classificados como supercondutores do tipo II, sendo os supercondutores do tipo I aqueles em que a mudança do estado Meissner para o estado normal dava-se de forma abrupta.

Inicialmente, por um equívoco de cálculo, Abrikosov estimou que a rede de vórtices possuía simetria quadrada para campo próximos de H_{c2} . No entanto, para campos próximos de H_{c1} previa uma rede triangular. Ele então suspeitou que pudesse haver uma transição de fase estrutural da rede de vórtices. Posteriormente foi mostrado que a rede triangular possuía menor energia e era, portanto, mais estável para os todos os campos magnéticos aplicados. Esta rede ficou conhecida como *rede de Abrikosov*. Seus resultados foram publicados em 1957 [6] e confirmados posteriormente através de experimentos envolvendo de-

coração magnética [7].

A teoria de Ginzburg - Landau, então, era capaz de descrever os dois tipos de supercondutor a partir do valor de κ : tipo I para $\kappa < 1/\sqrt{2}$ e tipo II no caso de $\kappa > 1/\sqrt{2}$.

Em 2003, A. Abrikosov e V. Ginzburg receberam o prêmio Nobel por suas significativas contribuições à comunidade científica no estudo da supercondutividade.

Finalmente, na mesma década, em 1957, John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer propuseram uma teoria quântica capaz de explicar a supercondutividade em nível microscópico a baixas temperaturas. A teoria foi intitulada *teoria BCS* [8] em homenagem aos desenvolvedores. A teoria é baseada na interação elétron - fônon, ou seja, a interação eletrônica com as vibrações da rede cristalina, cujo resultado é uma atração entre pares de elétrons. Cada par de elétrons forma um *par de Cooper* [9] e estes pares, quando submetidos a um campo elétrico, movimentam-se de maneira altamente ordenada, sem sofrer espalhamentos pela rede que dariam origem à resistência à corrente elétrica e consequentemente ao aumento de temperatura. Os autores foram agraciados com o prêmio Nobel em 1972 pelo trabalho desenvolvido.

A unificação da teoria BCS e a teoria de Ginzburg-Landau, na condição de temperaturas próximas a T_c , ocorreu em 1959 com a publicação de L. P. Gorkov [10]. Gorkov demonstrou que, nesse limite, a teoria de Ginzburg-Landau surge naturalmente da teoria BCS. O parâmetro $|\psi|^2$ representava, então, a densidade de pares de Cooper.

Em 1985, George Bednorz e Alex Müller [11] descobriram a ocorrência de supercondutividade em materiais cerâmicos, com $T_c > 35$ K. Surgia assim uma nova classificação destes materiais: os supercondutores HTS (High Temperature

Superconductor). Atualmente, é sabido que existem cerâmicas supercondutoras com $T_c > 150$ K, em certas condições físicas. A figura 1.4 indica a evolução cronológica do descobrimento destes materiais. No ano seguinte, ambos foram agraciados com o premio Nobel por esta descoberta. A teoria BCS, no entanto, não consegue explicar o fenômeno para essa classe de materiais. Dessa forma, há ainda uma lacuna teórica que explique a supercondutividade em altas temperaturas.

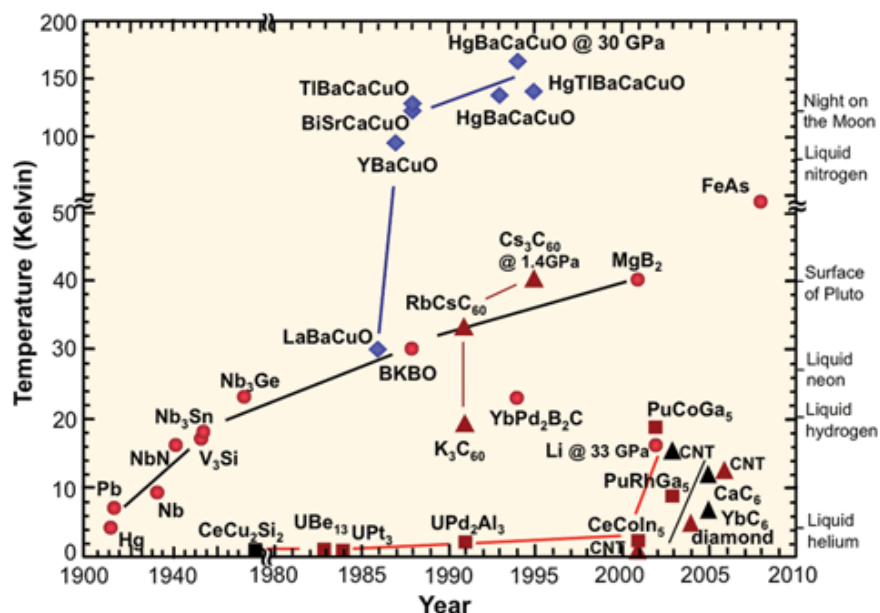


Figura 1.4: Cronologia do descobrimento de materiais supercondutores e suas temperaturas críticas. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Superconductivity>. Acesso em 12/04/11.

Capítulo 2

Teorias Fenomenológicas

2.1 Introdução

A revisão teórica feita neste capítulo foi baseada predominantemente nos livros de Tinkham [12], Ketterson e Song [13] e Parks [14].

2.2 Teoria de London

Na tentativa de descrever a supercondutividade, os irmãos London propuseram um modelo fenomenológico de natureza clássica. A teoria baseia-se no modelo de Drude - Lorentz para descrição da movimentação dos elétrons em um metal e na utilização da primeira lei de Newton. Assim, a equação 2.1 relaciona a velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$, de um elétron de massa m e carga elétrica e , submetido a um campo elétrico $\mathbf{E}$:

$$m \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} . \quad (2.1)$$

A variável τ é conhecida como o tempo de livre caminho médio e representa o tempo entre duas colisões sucessivas de um elétron [15]. Entretanto, para um condutor perfeito $\tau \rightarrow \infty$. Assim, temos que:

$$m \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} \quad (2.2)$$

Sabe-se ainda que a densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}$ pode ser calculada como:

$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v} \quad (2.3)$$

onde n é o número de elétrons. Combinando algebricamente ambas as equações, obtemos:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}, \quad (2.4)$$

conhecida como a Primeira Equação de London. Contudo, a Lei de Ampère estabelece a relação entre a indução magnética $\mathbf{B}$, conhecida também como campo magnético local induzido no supercondutor, e a densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}$ através da equação:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \quad (2.5)$$

Derivando ambos os lados de (2.5) em relação ao tempo e utilizando (2.4), obtemos a seguinte relação para o campo magnético local:

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{4\pi ne^2}{mc}\mathbf{E}. \quad (2.6)$$

A Lei de Faraday, por sua vez, relaciona o campo elétrico e a indução magnética através de:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (2.6) e usando (2.7), obtemos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi ne^2}{mc^2} \mathbf{B} . \quad (2.8)$$

Introduzimos aqui, o primeiro comprimento fundamental da supercondutividade, λ , conhecido como comprimento de penetração de London, onde:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi ne^2}{mc^2} . \quad (2.9)$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação (2.8) na seguinte forma:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = 0 , \quad (2.10)$$

a qual é conhecida como a Segunda Equação de London, capaz de descrever a penetração superficial de campo magnético em um supercondutor. Na passagem da equação (2.8) para (2.10) foi considerado o estado de Meissner onde não há a presença de vórtices. Do contrário, o lado direito da equação (2.10) seria uma constante não nula [ver equação (2.58)].

Outra forma apresentada pelos irmãos London, para obter a equação (2.10), baseou-se na análise do ponto de vista energético do problema. Considerou-se aqui o modelo de dois fluidos eletrônicos: o primeiro seria um fluido normal com viscosidade finita; o segundo, o superfluido, não apresentava qualquer resistência ao movimento dos elétrons. Os elétrons presentes nos superfluidos foram denominados como superelétrons. A energia livre do material, F , então, correspondia ao somatório da energia do fluido normal, F_n , da energia cinética associada à movimentação do superfluido F_{kin} , bem como da energia do campo magnético F_{mag} :

$$F = F_n + F_{kin} + F_{mag} , \quad (2.11)$$

$$F_{\text{mag}} = \frac{1}{8\pi} \int B^2(\mathbf{r}) d^3r , \quad (2.12)$$

e

$$F_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) v^2 d^3r , \quad (2.13)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ representa a densidade de massa do superfluido e é dada por $\rho = nm$; n agora é a densidade de superelétrons.

Utilizando a Lei de Ampère (2.5), a equação (2.13) pode ser reescrita como:

$$F_{\text{kin}} = \frac{1}{8\pi} \int \lambda^2 (\nabla \times \mathbf{B})^2 d^3r , \quad (2.14)$$

Tratando $\mathbf{B}$ variacionalmente e minimizando a energia livre total do sistema, obtemos exatamente a mesma Segunda Equação de London (2.10).

2.3 Uma Aplicação da Teoria de London

Um problema físico bastante estudado na bibliografia para aplicação da Teoria de London será apresentado nesta seção. Considera-se um supercondutor semi-infinito. Como referencial, adotamos que para $x > 0$, temos o supercondutor, e para $x < 0$, temos vácuo. Um campo magnético externo H é aplicado paralelamente ao plano yz , de modo que no supercondutor $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x))$, ou seja, o campo magnético local varia somente na dimensão x . No vácuo, o campo magnético refere-se ao campo aplicado $\mathbf{B} = (0, 0, H)$. Neste contexto, o problema torna-se unidimensional, e usando $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$, e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ [16], a segunda equação de London simplifica-se para:

$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} B_z = 0 , \quad (2.15)$$

A solução desta equação pode ser facilmente obtida. Temos que:

$$\mathbf{B}(x) = H e^{-x/\lambda} \hat{k}. \quad (2.16)$$

Observa-se, pois, que a penetração de campo magnético superficial no supercondutor possui decaimento exponencial com relação ao comprimento de penetração λ , ou seja, o campo magnético local decai significativamente a uma distância equivalente a λ (ver figura 2.1).

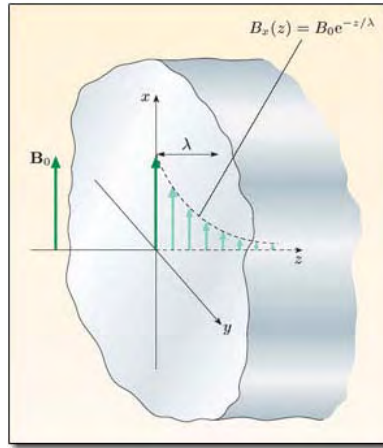


Figura 2.1: Decaimento do campo magnético local, com relação ao comprimento de penetração λ , no interior de um supercondutor. Reproduzido de [17].

Podemos ainda determinar a densidade de corrente elétrica induzida utilizando a Lei de Ampère.

$$\mathbf{J}(x) = -\frac{c}{4\pi\lambda} H e^{-x/\lambda} \hat{j}. \quad (2.17)$$

Vemos então que a densidade corrente é paralela ao plano yz e perpendicular ao campo magnético aplicado. É essa corrente elétrica que impede a penetração de fluxo magnético no supercondutor e, por esse motivo, é denominada corrente de blindagem.

Fica evidente, portanto, que as equações de London são capazes de descrever o efeito Meissner, além da forma de penetração de campo magnético superficial no supercondutor.

2.4 A Teoria de Ginzburg-Landau - GL

Em 1937, V. Ginzburg e L. Landau propuseram uma teoria cuja ideia central era a introdução do parâmetro de ordem, $\psi(\mathbf{r})$, que anular-se-ia na fase normal e seria diferente de zero na fase supercondutora, além da introdução do potencial vetor $\mathbf{A}$. Dada a natureza complexa do parâmetro de ordem ψ , este não possuía significado físico por si só; no entanto, $|\psi|^2$ representava a densidade de pares de elétrons supercondutores, agora não mais necessariamente homogênea como previa a teoria de London. O potencial vetor, por sua vez, relaciona-se com o campo magnético através de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Outra condição básica da teoria é o fato de que próximo à transição de fase, $\psi(r)$ varia suavemente, de maneira que a energia livre F pode ser expandida em potências pares de $|\psi(\mathbf{r})|$:

$$F = F_0 + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4, \quad (2.18)$$

onde F_0 é a energia do estado normal para o qual $|\psi| = 0$.

Um estudo do sinal de β evidencia que o mesmo deve ser positivo; caso contrário o mínimo de energia só ocorreria em $|\psi| = \infty$, sugerindo uma divergência. Em relação ao sinal de α , duas situações são possíveis: se $\alpha > 0$, o mínimo de energia ocorre em $|\psi| = 0$, correspondente ao estado normal; no caso de $\alpha < 0$, o mínimo de energia ocorre quando:

$$|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 \equiv -\frac{\alpha}{\beta}, \quad (2.19)$$

sendo $|\psi_\infty|$ o parâmetro de ordem numa região do interior de um supercondutor que esteja significativamente distante da superfície.

Temos, pois, que o sinal de α identifica o estado supercondutor em $\alpha < 0$ e o estado normal para $\alpha > 0$. Assim, $\alpha(T)$ muda de sinal em $T = T_c$. Incorporamos tais considerações físicas em $\alpha(T)$, definindo:

$$\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c). \quad (2.20)$$

onde α_0 é uma constante positiva, característica de cada material.

A minimização de energia, então, ocorre em:

$$\begin{aligned} |\psi| &= 0, & \text{para } T > T_c, \\ |\psi| &= \left[\frac{\alpha_0(T_c - T)}{\beta} \right]^{1/2}, & \text{para } T \leq T_c. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para descrever situações em que o estado supercondutor possui inhomogeneidades, isto é, variações locais do parâmetro de ordem, é interessante escrever F em termos da densidade de energia livre $\mathcal{F}_C$:

$$F = F_0 + \int \mathcal{F}_C[\psi(\mathbf{r})] d^3r, \quad (2.22)$$

onde

$$\mathcal{F}_C = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4. \quad (2.23)$$

Aqui, F representa a energia livre total. A equação (2.22), no entanto, não leva em conta a variação espacial do parâmetro de ordem próximo à superfície do supercondutor. Para isso, Ginzburg e Landau introduziram um termo do "gradiente de energia":

$$\mathcal{F}_G = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \psi \right|^2. \quad (2.24)$$

Posteriormente à proposição de Ginzburg-Landau, esse termo foi associado à energia cinética dos pares de Cooper e contemplava a inserção de termos da Mecânica Quântica: $m^* = 2m$ e $e^* = 2e$.

Por fim, há ainda de ser considerada a contribuição do campo magnético para o cálculo da densidade de energia livre:

$$\mathcal{F}_B = \frac{1}{8\pi} B^2(\mathbf{r}) . \quad (2.25)$$

Somando todas as contribuições, a densidade de energia livre total do estado supercondutor, segundo a teoria de Ginzburg-Landau, é dada por:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right]^2 + \frac{B^2(\mathbf{r})}{8\pi} . \quad (2.26)$$

Minimizando a densidade de energia livre total $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\psi, \mathbf{A})$ em relação a ψ e $\mathbf{A}$, obtemos as duas equações de Ginzburg-Landau:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right]^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0 , \quad (2.27)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{e^*}{2m^*} \left\{ \bar{\psi} \left[-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right] \psi + \psi \left[+i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right] \bar{\psi} \right\} , \quad (2.28)$$

onde $\bar{\psi}$ é o complexo conjugado de ψ . A segunda equação nada mais é do que a lei de Ampère:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s , \quad (2.29)$$

onde $\mathbf{J}_s$ é a densidade de corrente elétrica supercondutora definida por:

$$\mathbf{J}_s = \frac{-i\hbar e^*}{2m^*} [\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}] - \frac{(e^*)^2}{m^* c} |\psi|^2 \mathbf{A} . \quad (2.30)$$

2.5 Condições de Contorno

Em amostras supercondutoras finitas, o parâmetro de ordem obedece a seguinte condição de contorno para uma interface supercondutor/vácuo:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left[-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right] \psi = 0, \quad (2.31)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor normal à superfície supercondutora. Essa condição assegura que as correntes estão restritas ao interior do supercondutor.

A condição de contorno para o potencial vetor $\mathbf{A}$ é aquela em que o campo magnético local $\mathbf{B}$ muito distante da interface supercondutor/vácuo é igual ao campo magnético aplicado $\mathbf{H}$. Estas duas condições de contorno produzem uma solução única das equações (2.27) e (2.28).

2.6 Equações de Ginzburg-Landau Dependentes do Tempo - TDGL

Em 1959, foi comprovado por Gor'kov [10] que, para temperaturas próximas a T_c , a teoria de Ginzburg-Landau emergia naturalmente da teoria BCS. O mesmo pesquisador, em 1968, publicou um trabalho em que introduzia nas equações de Ginzburg-Landau a dependência temporal do parâmetro de ordem e do potencial vetor. [18]. Essas novas equações traziam a possibilidade de estudar a dinâmica dos supercondutores ao longo do tempo. As novas equações são dadas por:

$$\frac{\hbar}{2m^*D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie^*}{\hbar} \phi \right) \psi = -\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi, \quad (2.32)$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.33)$$

onde a corrente supercondutora é:

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^*}{m^*} \text{Re} \left[\bar{\psi} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right]. \quad (2.34)$$

Acrescenta-se aqui o significado de três novas variáveis: D representa o coeficiente de difusão, σ a condutividade elétrica e, por fim, ϕ é o potencial escalar, o qual está associado a uma corrente de transporte.

Em princípio, as equações de Ginzburg-Landau somente poderiam ser aplicadas em casos que envolvessem o limite de temperatura próximo de T_c , pois é nesse limite que elas foram derivadas da teoria microscópica BCS. No entanto, vários trabalhos indicam a possibilidade de sua aplicação para amplos intervalos de temperatura abaixo de T_c . de Gennes mostrou que as equações de Ginzburg-Landau podem ser utilizadas para temperaturas abaixo de T_c , no caso da aplicação de campos magnéticos fortes [19]. Em estudos de supercondutores mesoscópicos, o uso das equações de GL tem alcançado resultados bastante satisfatórios [20, 21].

2.7 Comprimentos Característicos

São dois os comprimentos fundamentais da teoria de Ginzburg-Landau: $\xi(T)$ e $\lambda(T)$. O primeiro, conhecido como comprimento de coerência representa a distância ao longo da qual a variação de $\psi(\mathbf{r})$ é significativa. O segundo, conhecido como comprimento de penetração de London, representa a espessura de penetração do campo magnético, a partir da superfície, em um supercondutor. No que segue, mostraremos estas duas propriedades intrínsecas das equações de Ginzburg-Landau.

2.7.1 O Comprimento de Coerência

Consideremos o caso simples de um supercondutor na ausência de campo magnético aplicado, porém, introduzimos uma inomogeneidade no parâmetro de ordem próxima aos contornos deste. Considerando somente um supercondutor em $x > 0$, cuja fronteira situa-se exatamente no plano yz , na ausência de campo magnético, isto é, $\mathbf{A} = 0$, a primeira equação de Ginzburg-Landau resume-se a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0. \quad (2.35)$$

Na equação acima consideramos ψ real, pois não estamos levando em conta a presença de vórtices. Portanto, podemos considerar a fase do parâmetro de ordem nula.

Para garantir o sinal negativo de α , e conseqüentemente o estado supercondutor, escrevemos $\alpha = -|\alpha|$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} - |\alpha|\psi + \beta\psi^3 = 0. \quad (2.36)$$

Introduzindo a mudança de variável:

$$\psi^2 = \frac{|\alpha|}{\beta} f^2, \quad (2.37)$$

obtemos:

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0, \quad (2.38)$$

onde o coeficiente ξ^2 tem unidades de quadrado de comprimento e é definido por:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}, \quad (2.39)$$

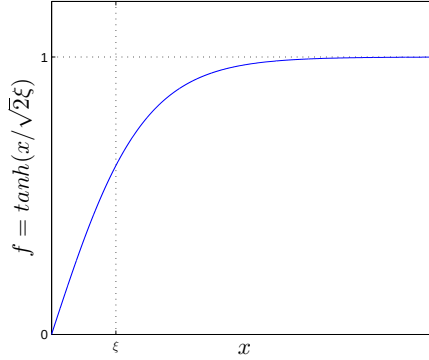


Figura 2.2: Comportamento da função f .

o qual é conhecido como comprimento de coerência.

Multiplicando a equação (2.38) por f' , e integrando o resultado e em seguida derivando em relação a x , obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{-\xi^2 (f')^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \right] = 0. \quad (2.40)$$

Lembrando que a geometria que estamos usando é a de um supercondutor semi-infinito, temos então que as condições de contorno são dadas por $f^2 = 1$ para $x \rightarrow \infty$, uma vez que nesse limite praticamente temos somente o estado supercondutor, além de $f' = 0$. Dentro deste contexto, chegamos a:

$$\xi^2 (f')^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2)^2, \quad (2.41)$$

cujas soluções se resume a:

$$f = \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right). \quad (2.42)$$

A figura 2.2 ilustra o comportamento desta função. Podemos ver facilmente que o parâmetro de ordem varia na superfície do supercondutor ao longo da distância x até tornar-se praticamente constante.

Incluindo na equação (2.39) a variação da temperatura no valor de α , ou seja, adotando $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$, ou ainda, $\alpha(T) = -\alpha_0 T_c [1 - (T/T_c)]$, verificamos explicitamente a dependência do comprimento de coerência em relação à temperatura:

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha_0 T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = \xi(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}. \quad (2.43)$$

2.7.2 Comprimento de Penetração de London

Consideremos agora o caso de campo magnético fraco, onde temos penetração apenas superficial conforme descrito na seção 2.3. Se esta condição for satisfeita, a função ψ mantém-se praticamente constante (isto é, a concentração de elétrons supercondutores $n = |\psi|^2 = |\alpha|/\beta$ é constante em todo o espaço) e a equação (2.30) torna-se:

$$\mathbf{J} = -\frac{(e^*)^2}{m^*c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.44)$$

Substituindo esta equação na lei de Ampère (2.29), vem que:

$$\frac{m^*c^2\beta}{4\pi(e^*)^2|\alpha|} \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{A} = 0. \quad (2.45)$$

Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação acima obtemos a equação de London:

$$\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} = 0, \quad (2.46)$$

onde agora o comprimento de penetração de London depende da temperatura e é dado por:

$$\lambda^2 = \frac{m^*c^2\beta}{4\pi(e^*)^2|\alpha|}. \quad (2.47)$$

Assim, para campos fracos, a teoria de Ginzburg-Landau se reduz à teoria de London. No regime de campos aplicados fortes, a função ψ , em geral, não é mais

constante em todo o espaço, ao contrário, depende das coordenadas espaciais e da intensidade do campo aplicado.

A dependência da temperatura novamente se dá através de α . Assim, o comprimento de penetração de London, λ , assume a forma:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^* c^2 \beta}{4\pi (e^*)^2 \alpha_0 T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = \lambda(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}. \quad (2.48)$$

2.7.3 O Parâmetro de Ginzburg-Landau

Apesar de ξ e λ dependerem explicitamente da temperatura, o parâmetro de Ginzburg-Landau, κ , que é definido como sendo a razão entre os comprimentos fundamentais, não dependerá:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} = \frac{m^* c}{e^* \hbar} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}. \quad (2.49)$$

Como veremos na próxima seção, este parâmetro é de fundamental importância na classificação dos supercondutores.

2.8 Classificação dos Supercondutores

No capítulo 1, vimos que existem dois tipos de supercondutores: tipo I e tipo II. Nos supercondutores do tipo I, a transição do estado supercondutor para o estado normal ocorre de forma abrupta, quando o campo magnético aplicado chega ao seu valor crítico $H_c(T)$. Nos supercondutores do tipo II, por sua vez, a medida que o campo magnético aplicado aumenta, ocorre uma primeira transição no valor do campo crítico inferior, $H_{c1}(T)$, quando o supercondutor passa do estado Meissner para o estado misto. No estado misto, ocorre a penetração quantizada de fluxo magnético, os vórtices, até que o campo aplicado alcance

o valor do campo crítico superior, $H_{c2}(T)$, no qual a supercondutividade é destruída. Há ainda um terceiro campo crítico $H_{c3}(T)$, que ocorre em uma fina camada de largura λ próxima à superfície do supercondutor. Neste intervalo de campo, $H_{c2}(T) < H < H_{c3}(T)$, permanecem correntes supercondutoras na superfície da amostra, ainda que a rede de vórtices tenha sido destruída no interior do supercondutor (ver figura 2.3).

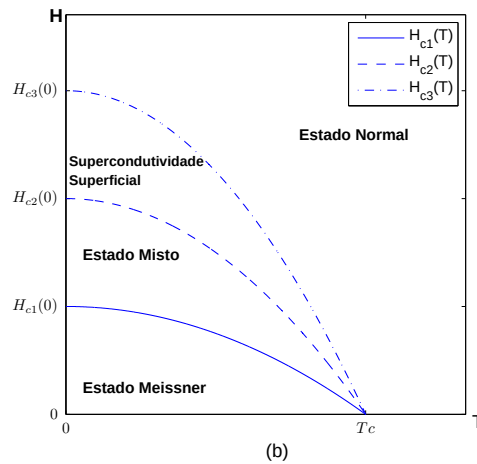
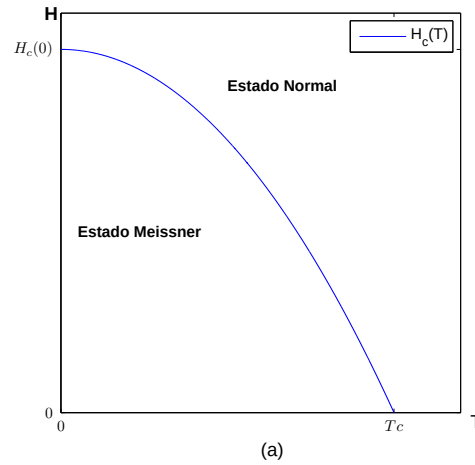


Figura 2.3: Diagrama de fase H-T para supercondutores do tipo I (a) e tipo II (b).

Outra maneira de distinguir estes dois tipos de supercondutores é fazendo uma análise da magnetização, M , definida por $M = (\bar{B} - H)/4\pi$, onde $\bar{B}$ é uma

média espacial do campo magnético local $\mathbf{B}$. Nos supercondutores do tipo I, abaixo de $H_c(T)$, há a expulsão total do campo magnético e, portanto, $\mathbf{B} = 0$, fornecendo assim $-4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H}$. Para valores acima de $H_c(T)$, a supercondutividade é destruída e $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, resultando em $\mathbf{M} = 0$. No caso dos supercondutores do tipo II, entre $H_{c1}(T)$ e $H_{c2}(T)$, ocorre a penetração parcial de fluxo magnético. A magnetização, assim, decresce de forma suave até anular-se em $H = H_{c2}(T)$. Podemos visualizar esse cenário na figura 2.4.

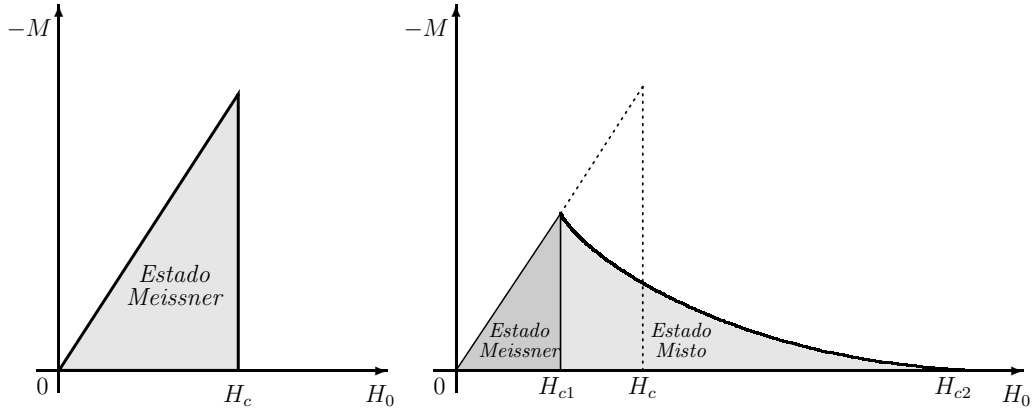


Figura 2.4: Representação da magnetização para um supercondutor do tipo I (esquerda) e para supercondutor do tipo II (direita).

Outra consideração importante é feita analisando a energia superficial, γ . Há um aumento na energia do supercondutor para realizar a expulsão do campo magnético. Nos supercondutores do tipo II, isso sugere o aparecimento de regiões normais na superfície da amostra, de maneira que a energia seja minimizada, o que leva a valores negativos da energia superficial. Assim, $\gamma > 0$ para os supercondutores do tipo I e $\gamma < 0$ para os supercondutores do tipo II. A energia superficial pode ser calculada em termos dos comprimentos fundamentais através de: [12]

$$\gamma \simeq \frac{|\alpha|^2}{2\beta}(\xi - \lambda) . \quad (2.50)$$

A análise da equação (2.50) nos leva a conclusão de que:

- Supercondutores do tipo I, $\xi > \lambda$,
- Supercondutores do tipo II, $\xi < \lambda$.

A figura 2.5 ilustra esse panorama.

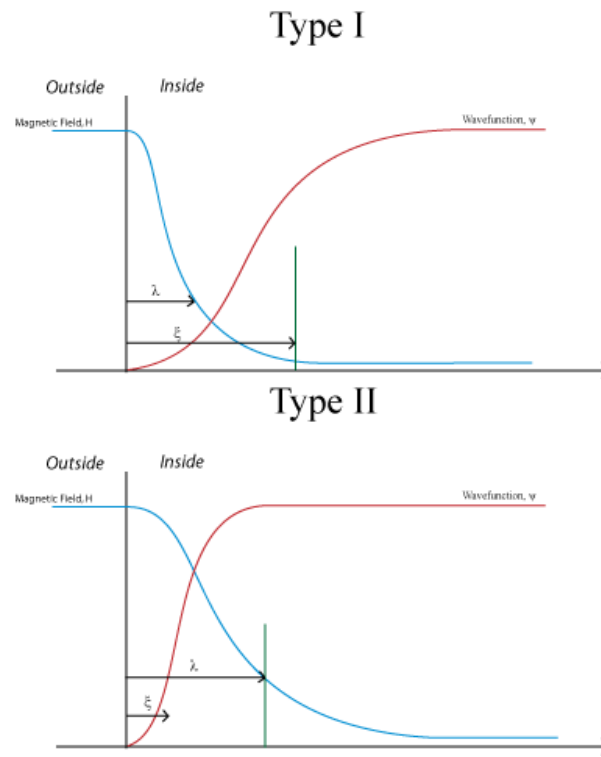


Figura 2.5: Distribuição espacial do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético local numa interface normal-supercondutor, para um supercondutor do tipo I e do tipo II, respectivamente. Reproduzido de [17].

Podemos ainda relacionar a energia superficial com o parâmetro de Ginzburg-Landau, κ . Cálculos exatos nos levam à seguinte expressão para γ :

$$\gamma = \frac{|\alpha|^2}{2\beta} \left(\frac{1}{\kappa} - \sqrt{2} \right), \quad (2.51)$$

o que nos conduz à classificação exata dos supercondutores:

- tipo I, $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$,

- tipo II, $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.9 A Quantização de fluxo magnético

A condição de quantização de fluxo magnético pode ser facilmente obtida por meio da segunda equação de Ginzburg-Landau (2.30) se introduzirmos a magnitude $|\psi|$ e a fase ϕ do parâmetro de ordem. Temos que [14]:

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^* \hbar}{m^*} |\psi|^2 \nabla \phi - \frac{(e^*)^2}{m^* c} \mathbf{A} |\psi|^2, \quad (2.52)$$

a qual também podemos escrever como:

$$\mathbf{A} = \frac{\hbar c}{e^*} \nabla \phi - \frac{m^* c \mathbf{J}_s}{(e^*)^2 |\psi|^2}. \quad (2.53)$$

Integrando a equação acima em um caminho fechado C , o qual limita um superfície bilateral S , pelo teorema de Stokes, temos que:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar c}{e^*} \oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} - \frac{m^* c}{(e^*)^2} \oint_C \frac{\mathbf{J}_s}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \Phi. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Uma vez que o módulo do parâmetro de ordem é uma função unívoca (em inglês, *single-valued*), a fase então deve mudar de múltiplos de 2π a cada volta no contorno fechado C . Assim:

$$\oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n, \quad (2.56)$$

e, conseqüentemente:

$$\Phi + \frac{m^*c}{(e^*)^2} \int_C \frac{\mathbf{J}_s}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{r} = n\Phi_0, \quad (2.57)$$

onde $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ representa um quantum de fluxo. Esta equação expressa a condição de que o fluxo penetrado e a integral de linha envolvendo a densidade corrente é quantizada.

2.10 Estrutura de um vórtice

Em supercondutores do tipo II, para $H > H_{c1}(T)$, o campo magnético penetra em forma de vórtices. Um vórtice tem uma região normal em seu interior (núcleo, em inglês, *core*) de raio equivalente ao comprimento de coerência $\xi(T)$. Ao redor do núcleo a densidade de corrente é máxima e decai a zero a uma distância pouco maior que $\lambda(T)$. No centro da região normal o campo magnético local $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, que possui direção perpendicular à densidade de corrente, é máximo e praticamente anula-se para distâncias acima de $\lambda(T)$. Para supercondutores de espessura muito maior do que $\lambda(T)$ o vórtice tem a forma de um cilindro de raio $\lambda(T)$ (ver figura 2.6).

Consideraremos a situação na qual um vórtice e seus vizinhos mais próximos estão separados por uma distância muito maior que $\lambda(T)$. Desta forma, cada vórtice pode ser tratado isoladamente. No limite em que $\kappa = \lambda(T)/\xi(T) \ll 1$, $|\psi|$ pode ser considerado como uma constante, exceto o centro do núcleo. Portanto, para o domínio $r > \xi(T)$, as correntes podem ser calculadas usando a equação de London. Porém, agora iremos fazer uma adaptação nesta equação de tal modo a satisfazer a condição de quantização do fluxo (2.57). Temos que:

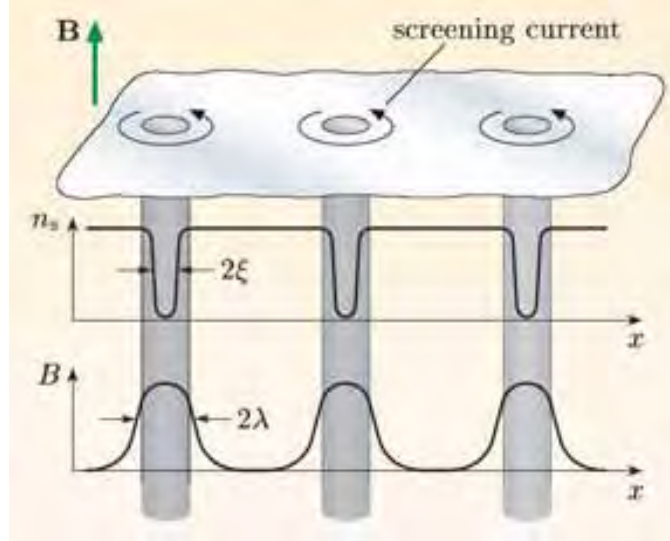


Figura 2.6: Estrutura de um vórtice, indicando o perfil da densidade de pares de superelétrons (n_s), do campo magnético local (B), além dos comprimentos fundamentais. Reproduzido de [22].

$$-\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{B} + \mathbf{B} = k\Phi_0 \delta(\mathbf{r}). \quad (2.58)$$

Esta equação pode ser resolvida exatamente e a solução nos fornece a distribuição do campo magnético local para distâncias $r > \xi(T)$. Temos que:

$$\mathbf{B} = k \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \quad (2.59)$$

onde $K_0(x)$ é função de Bessel modificada de ordem zero. $K_0(r/\lambda)$ decai exponencialmente na forma $\sqrt{\pi\lambda/2r}e^{-r/\lambda}$, para $r \gg \lambda$; para $r \ll \lambda$ diverge logicamente na forma $\ln(\lambda/r)$. A divergência logarítmica é apenas um artifício da simplificação que usamos em que $|\psi|$ é considerada constante em todo espaço.

2.11 Vórtices em Supercondutores Macroscópicos

A nucleação de vórtices em supercondutores do tipo II foi primeiramente previsto por Abrikosov [6] em 1957. Sua previsão era baseada na solução das equações de

Ginzburg-Landau para um supercondutor infinito usando condições periódicas de contorno. Ele mostrou que a penetração de fluxo magnético dava-se de forma quantizada, e o fluxo total penetrado era dado por $\Phi = n\Phi_0$.¹ Abrikosov interpretou corretamente sua solução como um arranjo periódico de vórtices a qual é hoje conhecida como rede de vórtices de Abrikosov (ver figura 2.7).

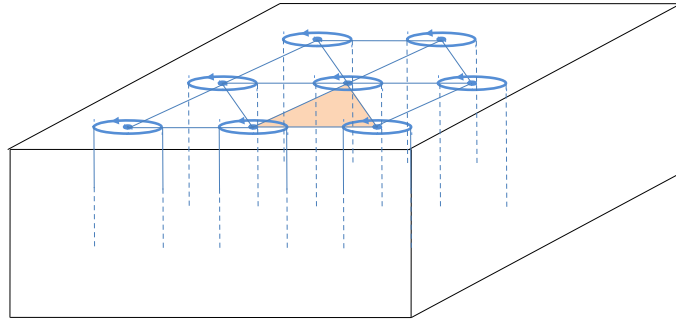


Figura 2.7: Rede de vórtices de Abrikosov.

A previsão teórica de Abrikosov foi confirmada mais tarde com a utilização de experimentos de decoração magnética [7] (ver figura 2.8).

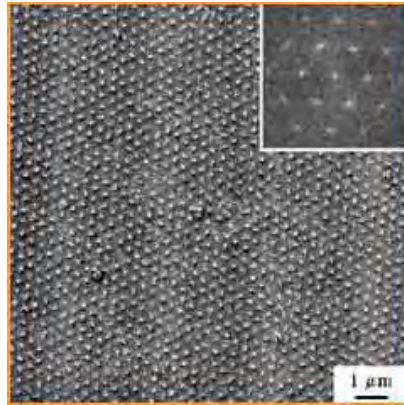


Figura 2.8: Rede de triangular de vórtices em um cristal de MgB_2 [23].

Em supercondutores de dimensões reduzidas, comparáveis ao comprimento de coerência $\xi(T)$, esta rede tem uma forma significativamente diferente da rede

¹É possível encontrar um caminho fechado C na condição de quantização do fluxo (2.57) de tal modo que $\mathbf{J}_s = 0$.

de vórtices de Abrikosov. Além disso, a forma da superfície do supercondutor tem uma forte influência neste arranjo (ver por exemplo [24] e [25]).

Capítulo 3

Discretização das Equações TDGL em 3D

3.1 Introdução

A utilização de computadores com grande capacidade de processamento tem sido muito útil na simulação de situações físicas reais. Na supercondutividade, essa é uma importante ferramenta no estudo da dinâmica de vórtices.

As equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL) não apresentam soluções analíticas e por isso são resolvidas numericamente. Na referência [26], os autores fazem uso da técnica de variáveis de ligação para desenvolver um algoritmo que resolve numericamente as equações TDGL em 3D ; em [27] é aplicada esta mesma técnica em problemas 2D, porém com maior clareza no emprego das condições de contorno, além de também ser estendido o algoritmo para supercondutores com defeitos. O aplicação das variáveis de ligação também foi utilizada para geometrias circulares em 2D [28, 29].

3.2 As Equações TDGL em Unidades Reduzidas

Denotemos por $\mathcal{D}_{SC}$ a região supercondutora. As simulações numéricas serão consideradas em uma região maior $\mathcal{D}$ contendo o domínio supercondutor. Deno-

temos por $\partial\mathcal{D}_{SC}$ a interface separando os dois meios e por $\partial\mathcal{D}$ a superfície mais externa. Consideraremos ambas as superfícies bi-dimensionais, de tal modo que ambos os domínios são dois paralelepípedos retos um contido no outro e com origens coincidentes, exatamente em seus centros (ver figura 3.1).

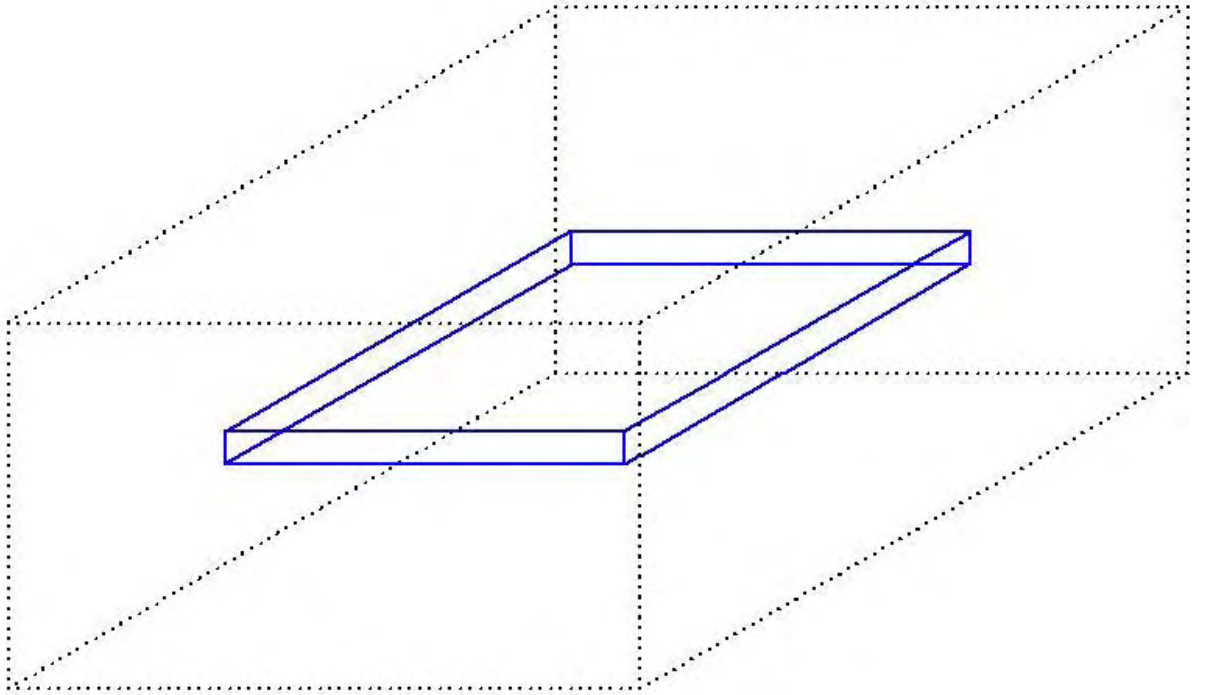


Figura 3.1: Ilustração da região supercondutora $\mathcal{D}_{SC}$, delimitada em azul no centro da figura, e da região normal $\mathcal{D}$, delimitada pelas linhas pontilhadas pretas.

Conforme vimos na seção 2.6, as equações TDGL podem ser descritas por:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie^*}{\hbar} \phi \right) \psi = -\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi, \quad (3.1)$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s - \nabla \times \mathbf{B}, & \text{em } \mathcal{D}_{SC}, \\ -\nabla \times \mathbf{B}, & \text{em } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{SC}, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde a corrente supercondutora é:

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^*}{m^*} \text{Re} \left[\bar{\psi} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right]. \quad (3.3)$$

A equação (3.2) também pode ser escrita na forma da lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s$ e $\mathbf{E}$ é o campo elétrico definido por $\mathbf{E} = -(1/c)\partial \mathbf{A}/\partial t - \nabla \phi$. Temos, pois, que a densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}$ pode ser descrita como a somatória de duas contribuições: a densidade de corrente elétrica supercondutora, $\mathbf{J}_s$, e a densidade de corrente elétrica normal, $\mathbf{J}_N = \sigma \mathbf{E}$, que satisfaz a lei de Ohm.

As condições de contorno que empregamos é a de densidade de corrente perpendicular supercondutora nula nas faces do paralelepípedo interno:

$$\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{em } \partial \mathcal{D}_{SC}, \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal a $\partial \mathcal{D}_{SC}$ apontando para o exterior da superfície.

Nas faces externas suporemos que o campo magnético local $\mathbf{B}$ é igual ao campo aplicado $\mathbf{H}$.¹

Sob o ponto de de vista computacional, convém trabalhar com as equações na forma adimensional fazendo-se uso das assim denominadas unidades reduzidas. Tal fato justifica-se pela redução do número de constantes nas equações restando apenas a temperatura e o parâmetro de Ginzburg-Landau o qual depende do tipo de material. Para tanto, utilizamos as seguintes mudanças de variáveis:

¹Rigorosamente, isto seria válido para um superfície $\partial \mathcal{D}$ no limite $r \rightarrow \infty$. Do ponto de vista numérico, implementaremos esta condição de contorno tomando-se $\partial \mathcal{D}_{SC}$ e $\partial \mathcal{D}$ tão distantes quanto possível até quando os resultados não se alteram significativamente.

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_0 \tilde{\psi} , \\
T &= T_c \tilde{T} , \\
t &= t_0 \tilde{t} , \\
\nabla &= \frac{1}{\xi(0)} \tilde{\nabla} , \\
\mathbf{B} &= H_{c2}(0) \tilde{\mathbf{B}} , \\
\mathbf{A} &= H_{c2}(0) \xi(0) \tilde{\mathbf{A}} , \\
\Phi &= \frac{H_{c2}(0) D}{c} \tilde{\Phi} ,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $t_0 = \xi(0)^2/D$ e $\psi_0^2 = -\alpha/\beta = (\alpha_0/\beta)T_c(1 - T/T_c)$.

Substituindo estas equações em (3.1) e (3.2), as equações TDGL podem ser reescritas na forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\phi\psi = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2\psi + (1 - T)\psi(1 - |\psi|^2) , \tag{3.7}$$

$$\beta \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \begin{cases} \mathbf{J}_s - \kappa^2 \nabla \times \mathbf{B} , & \text{em } \mathcal{D}_{SC} , \\ -\kappa^2 \nabla \times \mathbf{B} , & \text{em } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{SC} , \end{cases} \tag{3.8}$$

onde $\beta = 4\pi\sigma D\lambda^2(0)/c^2\xi^2(0)$, e agora a densidade de corrente supercondutora é dada por:

$$\mathbf{J}_s = (1 - T)\text{Re}[\bar{\psi}(-i\nabla - \mathbf{A})\psi] . \tag{3.9}$$

Nas equações acima, omitimos os til's nas equações, estando assim subentendido que todas as quantidades encontram-se em unidades reduzidas.

As equações (3.7) e (3.8) são invariantes de calibre, isto é, as equações permanecem inalteradas sob as transformações $\psi' = \psi e^{i\chi}$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$, $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$, onde χ é uma função arbitrária. No que segue, assumiremos o calibre $\phi' = 0$

para todo instante de tempo t . Omitindo os apóstrofos, as equações TDGL então tomam a forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T)\psi(1 - |\psi|^2) , \quad (3.10)$$

$$\beta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s - \kappa^2 \nabla \times \mathbf{B} . \quad (3.11)$$

3.3 Campos Auxiliares

Agora, introduziremos a definição de campos auxiliares para as três dimensões:

$$\mathcal{U}^x(x, y, z, t) = \exp \left(-i \int_{x_0}^x A_x(\xi, y, z, t) d\xi \right) , \quad (3.12)$$

$$\mathcal{U}^y(x, y, z, t) = \exp \left(-i \int_{y_0}^y A_y(x, \eta, z, t) d\eta \right) , \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}^z(x, y, z, t) = \exp \left(-i \int_{z_0}^z A_z(x, y, \zeta, t) d\zeta \right) , \quad (3.14)$$

onde (x_0, y_0, z_0) é um ponto arbitrário. Isto permitirá escrever a primeira das equações TDGL em uma forma que se assemelha a uma equação de difusão de calor. Este procedimento, não só garante a invariância de calibre [26, 30] ao discretizarmos as equações TDGL, como também é importante para garantir a estabilidade do método de Euler explícito que usaremos na integração temporal. Portanto, considerando os campos auxiliares, a primeira das equações TDGL (3.10) pode ser reescrita como [26]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \bar{\mathcal{U}}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{U}_x \psi) + \bar{\mathcal{U}}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mathcal{U}_y \psi) + \bar{\mathcal{U}}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mathcal{U}_z \psi) + (1 - T)\psi(1 - |\psi|^2) . \quad (3.15)$$

A segunda equação (3.11) mantém-se inalterada, exceto pelo fato de que agora a densidade de corrente supercondutora (3.9) é escrita como:

$$J_{s\mu} = (1 - T) \text{Im} \left[\bar{\mathcal{U}}_\mu \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial \mu} (\mathcal{U}_\mu \psi) \right] , \quad (3.16)$$

onde $\mu = x, y, z$ e Im indica a parte imaginária da variável complexa.

3.3.1 A Malha de Discretização

Consideremos o domínio $\mathcal{D}$ dado por um paralelepípedo reto de dimensões $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ e o domínio supercondutor de dimensões $a \times b \times c$. Um método muito utilizado para obtenção de soluções numéricas das equações TDGL é o das diferenças finitas. Nele, consideramos uma malha em forma de paralelepípedo reto, com $N_x \times N_y \times N_z$ células unitárias de dimensões $a_x \times a_y \times a_z$, de tal modo que $\mathcal{A} = N_x a_x$, $\mathcal{B} = N_y a_y$, e $\mathcal{C} = N_z a_z$. Assim, temos uma malha de $(N_x + 1) \times (N_y + 1) \times (N_z + 1)$ pontos, de maneira que as simulações computacionais serão desenvolvidas em uma caixa composta de células unitárias dadas por:

$$\mathcal{D}_{i,j,k} = \{ \mathbf{r} = (x, y, z) : x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}, z_k < z < z_{k+1} \} , \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} x_i &= a_x(i - 1), \quad 1 \leq i \leq N_x + 1 , \\ y_j &= a_y(j - 1), \quad 1 \leq j \leq N_y + 1 , \\ z_k &= a_z(k - 1), \quad 1 \leq k \leq N_z + 1 . \end{aligned} \quad (3.18)$$

A figura 3.2 ilustra a malha de discretização utilizada para a discretização das equações TDGL.

A região supercondutora encontra-se em um paralelepípedo reto de dimensões menores:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{SC} = \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z) : x_{jx_1} + \frac{a_x}{2} < x < x_{jx_2} - \frac{a_x}{2}, \right. \\ y_{jy_1} + \frac{a_y}{2} < y < y_{jy_2} - \frac{a_y}{2}, \\ \left. z_{jz_1} + \frac{a_z}{2} < z < z_{jz_2} - \frac{a_z}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde:

$$\begin{aligned} jx_1 &= \frac{\mathcal{A} - a}{2a_x} + 1, \\ jx_2 &= \frac{\mathcal{A} + a}{2a_x} + 1, \\ jy_1 &= \frac{\mathcal{B} - b}{2a_y} + 1, \\ jy_2 &= \frac{\mathcal{B} + b}{2a_y} + 1, \\ jz_1 &= \frac{\mathcal{C} - c}{2a_z} + 1, \\ jz_2 &= \frac{\mathcal{C} + c}{2a_z} + 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

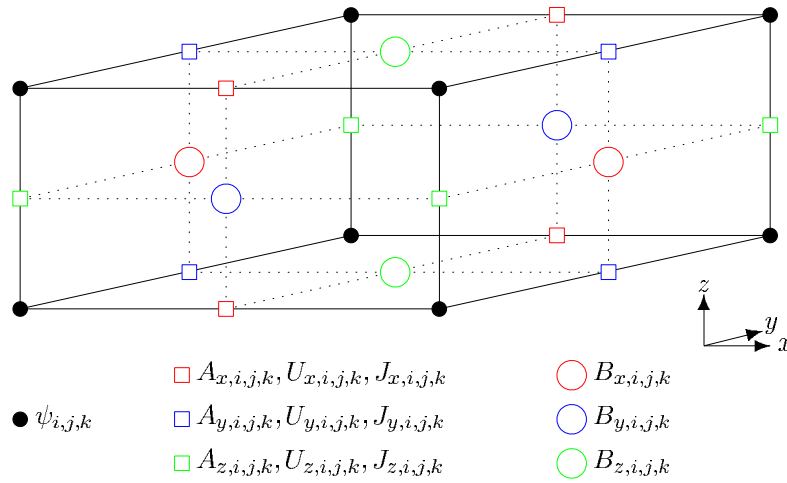


Figura 3.2: Célula unitária da malha de discretização.

3.3.2 As Variáveis de Ligação e o Campo Magnético Local

Ao passarmos do espaço de variáveis contínuas para as variáveis discretas, há a necessidade de transformarmos as equações TDGL em suas discretas equivalentes. Tão melhores serão os resultados, quanto menores as dimensões de a_x , a_y e a_z . Porém, antes de desenvolvermos o algoritmo que resolve as equações TDGL no espaço discreto, precisamos de algumas definições preliminares que serão úteis no processo de discretização.

As variáveis de ligação são definidas por dois pontos adjacentes na malha de discretização. Para a direção x , adotamos como base inicial os pontos arbitrários (x_i, y_j, z_k) e (x_{i+1}, y_j, z_k) :

$$\begin{aligned} U_{x,i,j,k} &= \mathcal{U}_x(x_{i+1}, y_j, z_k) \bar{\mathcal{U}}_x(x_i, y_j, z_k) \\ &= \exp \left(-i \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(\xi, y_j, z_k) d\xi \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analogamente para as direções y e z :

$$\begin{aligned} U_{y,i,j,k} &= \mathcal{U}_y(x_i, y_{j+1}, z_k) \bar{\mathcal{U}}_y(x_i, y_j, z_k) \\ &= \exp \left(-i \int_{y_j}^{y_{j+1}} A_y(x_i, \eta, z_k) d\eta \right); \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} U_{z,i,j,k} &= \mathcal{U}_z(x_i, y_j, z_{k+1}) \bar{\mathcal{U}}_z(x_i, y_j, z_k) \\ &= \exp \left(-i \int_{z_k}^{z_{k+1}} A_z(x_i, y_j, \zeta) d\zeta \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

respectivamente.

Para o cálculo das integrais acima, usaremos a regra do ponto médio, a qual é uma aproximação de segunda ordem.² Assim, as variáveis de ligação também

²Isto significa dizer que, por exemplo, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(\xi, y_j, z_k) d\xi = A_{x,i,j,k} a_x + \mathcal{O}(a_x^2)$.

podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 U_{x,i,j,k} &= \exp(-iA_{x,i,j,k}a_x) , \\
 U_{y,i,j,k} &= \exp(-iA_{y,i,j,k}a_y) , \\
 U_{z,i,j,k} &= \exp(-iA_{z,i,j,k}a_z) ,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_{x,i,j,k} &= A_x\left(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j, z_k\right) , \\
 A_{y,i,j,k} &= A_y\left(x_i, y_j + \frac{a_y}{2}, z_k\right) , \\
 A_{z,i,j,k} &= A_z\left(x_i, y_j, z_k + \frac{a_z}{2}\right) .
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Veremos agora que há uma relação direta entre os valores do campo magnético nos centros das faces das células unitárias e as variáveis de ligação. O campo magnético é calculado no centro de cada face da célula unitária. Esta escolha tem uma relação direta com a invariância de calibre no espaço discreto. Inicialmente, consideremos uma face da célula unitária no plano xy . Para um domínio $\mathcal{D}_{z,i,j,k} = (x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}, z = z_k)$, limitado por um contorno fechado $\partial\mathcal{D}_{z,i,j,k}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \exp\left(-i \int_{\mathcal{D}_{z,i,j,k}} B_z dx dy\right) &= \exp\left(-i \oint_{\partial\mathcal{D}_{z,i,j,k}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right) \\
 &= U_{x,i,j,k} U_{y,i+1,j,k} \bar{U}_{x,i,j+1,k} \bar{U}_{y,i,j,k} \\
 &\equiv L_{z,i,j,k} ,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde, na passagem da primeira para a segunda igualdade usamos o teorema de Stokes.

Valendo-se da regra do ponto médio para integral dupla, a qual é de segunda ordem, reescrevemos a equação acima como:

$$\begin{aligned} \exp \left(-i \int_{\mathcal{D}_{z,i,j,k}} B_z dx dy \right) &= \exp (-i B_{z,i,j,k} a_x a_y) \\ &= 1 - i B_{z,i,j,k} a_x a_y , \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $B_{z,i,j,k} = B_z(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j + \frac{a_y}{2}, z_k)$. Assim:

$$B_{z,i,j,k} = -\frac{1}{a_x a_y} \text{Im}(L_{z,i,j,k}) . \quad (3.28)$$

Analogamente, temos que:

$$\begin{aligned} B_{x,i,j,k} &= B_x(x_i, y_j + \frac{a_y}{2}, z_k + \frac{a_z}{2}) = -\frac{1}{a_y a_z} \text{Im}(L_{x,i,j,k}) \\ B_{y,i,j,k} &= B_y(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j, z_k + \frac{a_z}{2}) = -\frac{1}{a_z a_x} \text{Im}(L_{y,i,j,k}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde:

$$\begin{aligned} L_{x,i,j,k} &\equiv U_{y,i,j,k} U_{z,i,j+1,k} \bar{U}_{y,i,j,k+1} \bar{U}_{z,i,j,k} , \\ L_{y,i,j,k} &\equiv U_{z,i,j,k} U_{x,i,j,k+1} \bar{U}_{z,i+1,j,k} \bar{U}_{x,i,j,k} . \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.4 Discretização das Equações TDGL

A partir das definições das seções anteriores e utilizando a aproximação de segunda ordem para a derivada segunda na forma [31]:

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} , \quad (3.31)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{U}_x \psi) \Big|_{(x_i, y_j, z_k)} &= \frac{U_{x,i,j,k} \psi_{i+1,j,k} - 2\psi_{i,j,k} + \bar{U}_{x,i-1,j,k} \psi_{i-1,j,k}}{a_x^2} , \\
 \bar{U}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mathcal{U}_y \psi) \Big|_{(x_i, y_j, z_k)} &= \frac{U_{y,i,j,k} \psi_{i,j+1,k} - 2\psi_{i,j,k} + \bar{U}_{y,i,j-1,k} \psi_{i,j-1,k}}{a_y^2} , \\
 \bar{U}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mathcal{U}_z \psi) \Big|_{(x_i, y_j, z_k)} &= \frac{U_{z,i,j,k+1} \psi_{i,j,k+1} - 2\psi_{i,j,k} + \bar{U}_{z,i,j,k-1} \psi_{i,j,k-1}}{a_z^2} , \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

onde usamos as definições (3.21-3.24)

Fazendo-se uso destes resultados, a equação (3.15) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_{i,j,k}}{\partial t} &= \frac{U_{x,i,j,k} \psi_{i+1,j,k} - 2\psi_{i,j,k} + \bar{U}_{x,i-1,j,k} \psi_{i-1,j,k}}{a_x^2} \\
 &+ \frac{U_{y,i,j,k} \psi_{i,j+1,k} - 2\psi_{i,j,k} + \bar{U}_{y,i,j-1,k} \psi_{i,j-1,k}}{a_y^2} \\
 &+ \frac{U_{z,i,j,k+1} \psi_{i,j,k+1} - 2\psi_{i,j,k} + \bar{U}_{z,i,j,k-1} \psi_{i,j,k-1}}{a_z^2} \\
 &+ (1 - T) \psi_{i,j,k} (1 - |\psi_{i,j,k}|^2) . \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Para prosseguir, precisamos discretizar a variável temporal. Temos $\{t_n = (n - 1)\Delta t, n = 1, 2, \dots\}$. Finalizando o processo de discretização, aplicaremos a aproximação de primeira ordem para a integral temporal [31]:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt = f_n \Delta t , \quad f_n = f(t_n) . \quad (3.34)$$

Para tanto, consideramos o parâmetro de ordem no instante $t = t_n$, como sendo $\psi_{i,j,k}^n = \psi_{i,j,k}(t_n)$ e analogamente para as outras variáveis. Consequentemente, da equação (3.33) obtemos a relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k}^{n+1} = & \psi_{i,j,k}^n + \Delta t \left[\frac{U_{x,i,j,k}^n \psi_{i+1,j,k}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \bar{U}_{x,i-1,j,k}^n \psi_{i-1,j,k}^n}{a_x^2} \right. \\
& + \frac{U_{y,i,j+1,k}^n \psi_{i,j+1,k}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \bar{U}_{y,i,j-1,k}^n \psi_{i,j-1,k}^n}{a_y^2} \\
& + \frac{U_{z,i,j,k+1}^n \psi_{i,j,k+1}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \bar{U}_{z,i,j,k-1}^n \psi_{i,j,k-1}^n}{a_z^2} \\
& \left. + (1-T)\psi_{i,j,k}^n(1 - |\psi_{i,j,k}^n|^2) \right], \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Assim, podemos observar que as variáveis no instante de tempo t_{n+1} estão relacionadas com as variáveis no instante de tempo t_n de forma explícita. Este método é conhecido como método de Euler explícito. A relação de recorrência acima é válida para o domínio $jx_1 + 1 \leq i \leq jx_2 - 1$, $jy_1 + 1 \leq j \leq jy_2 - 1$ e $jz_1 + 1 \leq k \leq jz_2 - 1$. Nas faces, determinamos $\psi_{i,j,k}$ usando as condições de contorno (ver próxima seção).

Passamos agora ao processo de discretização da segunda equação TDGL (3.11). Utilizando-se a aproximação de primeira ordem para a derivada primeira:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x/2) - f(x - \Delta x/2)}{\Delta x}, \quad (3.36)$$

podemos reescrever as equações (3.16), como:

$$\begin{aligned}
J_{sx,i,j,k} &= J_{sx}\left(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j, z_k\right) \\
&= (1-T) \operatorname{Im} \left[\bar{\mathcal{U}}_x \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U}_x \psi) \right] \Big|_{(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j, z_k)} \\
&= \frac{1-T}{a_x} \operatorname{Im} \left[\bar{\psi}_{i,j,k} U_{x,i,j,k} \psi_{i+1,j,k} \right], \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{sy,i,j,k} &= J_{sy}\left(x_i, y_j + \frac{a_y}{2}, z_k\right) \\
 &= (1 - T) \operatorname{Im} \left[\bar{\mathcal{U}}_y \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{U}_y \psi) \right] \Big|_{(x_i, y_j + \frac{a_y}{2}, z_k)} \\
 &= \frac{1 - T}{a_y} \operatorname{Im} [\bar{\psi}_{i,j,k} U_{y,i,j,k} \psi_{i,j+1,k}] , \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{sz,i,j,k} &= J_{sz}\left(x_i, y_j, z_k + \frac{a_z}{2}\right) \\
 &= (1 - T) \operatorname{Im} \left[\bar{\mathcal{U}}_z \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{U}_z \psi) \right] \Big|_{(x_i, y_j, z_k + \frac{a_z}{2})} \\
 &= \frac{1 - T}{a_z} \operatorname{Im} [\bar{\psi}_{i,j,k} U_{z,i,j,k} \psi_{i,j,k+1}] , \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

onde novamente usamos as definições (3.21-3.24).

Lembrando que:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\
 &+ \mathbf{j} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\
 &+ \mathbf{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

e usando a aproximação (3.36) podemos reescrever a equação (3.11), componente por componente, na forma:

$$\beta \frac{\partial}{\partial t} A_{x,i,j,k} = J_{sx,i,j,k} - \frac{\kappa^2}{a_y} [B_{z,i,j,k} - B_{z,i,j-1,k}] + \frac{\kappa^2}{a_z} [B_{y,i,j,k} - B_{y,i,j,k-1}] , \tag{3.41}$$

$$\beta \frac{\partial}{\partial t} A_{y,i,j,k} = J_{sy,i,j,k} - \frac{\kappa^2}{a_z} [B_{x,i,j,k} - B_{x,i,j,k-1}] + \frac{\kappa^2}{a_x} [B_{z,i,j,k} - B_{z,i-1,j,k}] , \tag{3.42}$$

$$\beta \frac{\partial}{\partial t} A_{z,i,j,k} = J_{sz,i,j,k} - \frac{\kappa^2}{a_x} [B_{y,i,j,k} - B_{y,i-1,j,k}] + \frac{\kappa^2}{a_x} [B_{x,i,j,k} - B_{x,i,j-1,k}]. \quad (3.43)$$

Novamente, usando o método de Euler explícito, das equações acima obtemos as seguintes relações de recorrência para a segunda equação TDGL:

$$A_{x,i,j,k}^{n+1} = A_{x,i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\beta} \left\{ J_{sx,i,j,k}^n - \frac{\kappa^2}{a_y} [B_{z,i,j,k}^n - B_{z,i,j-1,k}^n] + \frac{\kappa^2}{a_z} [B_{y,i,j,k}^n - B_{y,i,j,k-1}^n] \right\}, \quad (3.44)$$

com $1 \leq i \leq N_x$, $2 \leq j \leq N_y$ e $2 \leq k \leq N_z$.

$$A_{y,i,j,k}^{n+1} = A_{y,i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\beta} \left\{ J_{sy,i,j,k}^n - \frac{\kappa^2}{a_z} [B_{x,i,j,k}^n - B_{x,i,j,k-1}^n] + \frac{\kappa^2}{a_x} [B_{z,i,j,k}^n - B_{z,i-1,j,k}^n] \right\}, \quad (3.45)$$

com $2 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y$ e $2 \leq k \leq N_z$.

$$A_{z,i,j,k}^{n+1} = A_{z,i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\beta} \left\{ J_{sz,i,j,k}^n - \frac{\kappa^2}{a_x} [B_{y,i,j,k}^n - B_{y,i-1,j,k}^n] + \frac{\kappa^2}{a_z} [B_{x,i,j,k}^n - B_{x,i,j-1,k}^n] \right\}, \quad (3.46)$$

com $2 \leq i \leq N_x$, $2 \leq j \leq N_y$ e $1 \leq k \leq N_z$.

Nos pontos da malha pertencentes ao domínio $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{SC}$, omitimos as componentes da densidade de corrente supercondutora nas três equações acima. No ponto da interface $\partial\mathcal{D}$ usamos as condições de contorno (ver próxima seção).

3.4.1 Condições de Contorno

Determinaremos os valores de ψ em $\partial\mathcal{D}_{SC}$ usando a condição de contorno (3.5). Para tanto, faremos uso das equações (3.37-3.39). Considerando, por exemplo, a face esquerda do supercondutor, temos que $J_{sx,jx1,j,k} = 0$. Para que essa condição ocorra, contudo, é necessário que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{U}_x \psi)|_{(jx_1 + \frac{ax}{2}, j, k)} = 0. \quad (3.47)$$

Utilizando a aproximação da equação (3.36) e o resultado da equação (3.47), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{U}_{x,jx_1+1,j,k} \psi_{jx_1+1,j,k} - \mathcal{U}_{x,jx_1,j,k} \psi_{jx_1,j,k}}{ax} &= 0 \\ \mathcal{U}_{x,jx_1,j,k} \psi_{jx_1,j,k} &= \mathcal{U}_{x,jx_1+1,j,k} \psi_{jx_1+1,j,k} \\ \psi_{jx_1,j,k} &= \mathcal{U}_{x,jx_1,j,k} \psi_{jx_1+1,j,k} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Igualmente ocorre para as demais faces. Temos, pois, que as condições de contorno aplicadas às faces do supercondutor são:

$$\begin{aligned} \psi_{jx_1,j,k}^{n+1} &= U_{x,jx_1,j,k}^{n+1} \psi_{jx_1+1,j,k}^{n+1}, \quad \text{face esquerda da malha}, \\ \psi_{jx_2,j,k}^{n+1} &= \bar{U}_{x,jx_2-1,j,k}^{n+1} \psi_{jx_2-1,j,k}^{n+1}, \quad \text{face direita da malha}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

com $jy_1 + 1 \leq j \leq jy_2 - 1$ e $jz_1 + 1 \leq k \leq jz_2 - 1$,

$$\begin{aligned} \psi_{i,jy_1,k}^{n+1} &= U_{y,i,jy_1,k}^{n+1} \psi_{i,jy_1+1,k}^{n+1}, \quad \text{face anterior da malha}, \\ \psi_{i,jy_2,k}^{n+1} &= \bar{U}_{y,i,jy_2-1,k}^{n+1} \psi_{i,jy_2-1,k}^{n+1}, \quad \text{face posterior da malha}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

com $jx_1 + 1 \leq i \leq jx_2 - 1$ e $jz_1 + 1 \leq k \leq jz_2 - 1$,

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,z_1}^{n+1} &= U_{z,i,j,z_1}^{n+1} \psi_{i,j,z_1+1}^{n+1}, \quad \text{face inferior da malha}, \\ \psi_{i,j,z_2}^{n+1} &= \bar{U}_{z,i,j,z_2-1}^{n+1} \psi_{i,j,z_2-1}^{n+1}, \quad \text{face superior da malha}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

com $jx_1 + 1 \leq i \leq jx_2 - 1$ e $jy_1 + 1 \leq j \leq jy_2 - 1$.

Nota-se, então que, agora temos todos os valores de $\psi_{i,j,k}$ no interior da amostra, calculados através da relação de recorrência (3.35) e calculados na superfície $\partial\mathcal{D}_{SC}$ por meio das equações (3.49-3.51). Faltam, pois, as arestas da amostra supercondutora. Tais pontos, no entanto, não são utilizados na relação de recorrência e, por este motivo, fazemos uma aproximação calculando as médias aritméticas dos dois pontos mais próximos adjacentes nas faces. Igualmente, fazemos uma aproximação para os vértices da amostra, tomando, no entanto, os três pontos mais próximos nas faces.

Feita a atualização de $\psi_{i,j,k}^{n+1}$, é possível atualizar os valores do potencial vetor, valendo-se das relações de recorrência (3.44-3.46). Atualiza-se, então, os valores das variáveis de ligação através das equações (3.24).

O campo magnético é atualizado através das equações 3.28 e 3.29. Nas fronteiras da malha, o campo magnético local é igualado ao campo magnético aplicado, mantendo a continuidade do campo. Em nossas simulações, utilizaremos o campo aplicado somente na direção z , de forma que $B_{z,i,j,k}^{n+1} = H$, $B_{x,i,j,k}^{n+1} = B_{y,i,j,k}^{n+1} = 0$ para todo (i, j, k) em $\partial\mathcal{D}$.

O critério de convergência para a utilização do método de diferenças finitas é dado por [27]:

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\delta^2}{4}, \frac{\beta \delta^2}{4\kappa^2} \right\}, \quad (3.52)$$

onde

$$\delta^2 = \frac{2}{\frac{1}{a_x^2} + \frac{1}{a_y^2} + \frac{1}{a_z^2}}. \quad (3.53)$$

3.5 Variáveis Discretas

Nesta seção apresentamos um sumário de todas as variáveis discretas e os respectivos pontos da malha onde elas serão calculadas. Estes pontos encontram-se especificados na figura 3.2.

- $\psi_{i,j,k}$, com $jx_1 \leq i \leq jx_2$, $jy_1 \leq j \leq jy_2$ e $jz_1 \leq k \leq jz_2$, é calculado nos vértices da malha e o valor de $\psi_{i,j,k}$ representa o parâmetro de ordem na posição (x_i, y_j, z_k) ;
- $U_{i,j,k}^x$ e $A_{x,i,j,k}$: calculados no ponto médio entre dois pontos consecutivos na direção x , com $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y + 1$ e $1 \leq k \leq N_z + 1$;
- $U_{i,j,k}^y$ e $A_{y,i,j,k}$: calculados no ponto médio entre dois pontos consecutivos na direção y , com $1 \leq i \leq N_x + 1$, $1 \leq j \leq N_y$ e $1 \leq k \leq N_z + 1$.
- $U_{i,j,k}^z$ e $A_{z,i,j,k}$: calculados no ponto médio entre dois pontos consecutivos na direção z , com $1 \leq i \leq N_x + 1$, $1 \leq j \leq N_y + 1$ e $1 \leq k \leq N_z$.
- $J_{sx,i,j,k}$, com $jx_1 \leq i \leq jx_2 - 1$, $jy_1 \leq j \leq jy_2$ e $jz_1 \leq j \leq jz_2$, calculados nos pontos médios entre dois vértices consecutivos ao longo da direção x ;
- $J_{sy,i,j,k}$, com $jx_1 \leq i \leq jx_2$, $jy_1 \leq j \leq jy_2 - 1$ e $jz_1 \leq j \leq jz_2$, calculados nos pontos médios entre dois vértices consecutivos ao longo da direção y ;
- $J_{sz,i,j,k}$, com $jx_1 \leq i \leq jx_2$, $jy_1 \leq j \leq jy_2$ e $jz_1 \leq j \leq jz_2 - 1$, calculados nos pontos médios entre dois vértices consecutivos ao longo da direção z ;
- $B_{z,i,j,k}$, com $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y$ e $1 \leq k \leq N_z + 1$, associados aos centros das faces das células unitárias no plano xy ;
- $B_{y,i,j,k}$, com $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y + 1$ e $1 \leq k \leq N_z$, associados aos centros das faces das células unitárias no plano xz ;

- $B_{x,i,j,k}$, com $1 \leq i \leq N_x + 1$, $1 \leq j \leq N_y$ e $1 \leq k \leq N_z$, associados aos centros das faces das células unitárias no plano yz ;

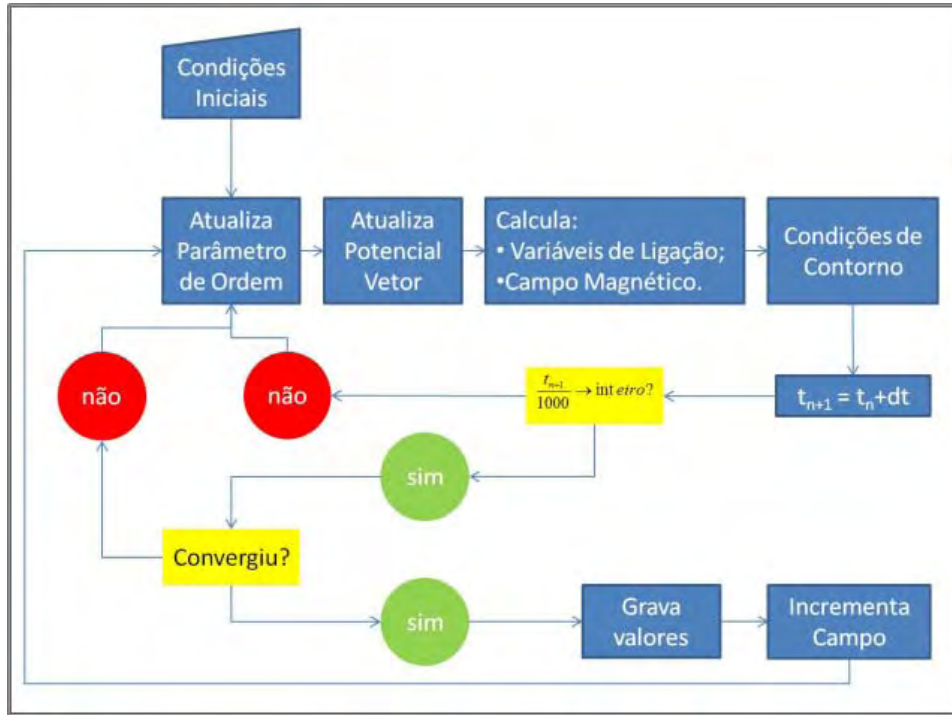


Figura 3.3: Diagrama da sequência do algoritmo.

A figura 3.3 ilustra a sequência de cálculo do modelo desenvolvido. São dois laços de iterações principais: um laço com incremento de campo magnético e um laço com incremento temporal. A convergência é testada a cada 1000 (mil) incrementos temporais. O critério de convergência considerado representava variações inferiores a 10^{-5} para o módulo do parâmetro de ordem e para o campo magnético local. Havendo convergência, os resultados são gravados e o valor de campo magnético aplicado é incrementado para uma nova sequência de cálculos.

No próximo capítulo, iremos aplicar este método de solução numérica das equações TDGL para um supercondutor em forma de SQUID.

Capítulo 4

Filmes Supercondutores de Espessura Finita em Forma de SQUID

4.1 Introdução

4.1.1 Supercondutores Mesoscópicos e Efeitos de Desmagnetização

Nas últimas décadas, com o surgimento de modernas técnicas para fabricação de dispositivos supercondutores com dimensões reduzidas, o interesse no estudo de geometrias confinadas tem aumentado significativamente, seja em nível experimental ou sob o ponto de vista teórico, haja vista que as propriedades magnéticas e estruturais da rede de vórtices apresentam alterações bastante significativas em relação aos supercondutores de dimensões macroscópicas [32].

Consideramos supercondutores mesoscópicos, aqueles com dimensões da ordem do comprimento de coerência ξ . Diversos trabalhos têm sido publicados no estudo destes supercondutores, especialmente em filmes finos, onde a espessura do supercondutor tem dimensões muito inferiores a ξ [33–35], ou ainda para casos em cilindros de seção reta mesoscópica e espessura infinita [24, 32].

O denominado efeito de desmagnetização, contudo, surge em amostras reais

pelo fato de suas dimensões serem finitas em todas as direções [36]. Logo, o método numérico apresentado no Capítulo 3 permite que este efeito seja detectado nas simulações, uma vez que a espessura do supercondutor, agora, tem dimensão finita e determinada.

O campo externo aplicado induz correntes de blindagem no interior do material supercondutor. Estas, por sua vez, geram um campo magnético fora do supercondutor, denominado *stray field*, que incrementa o valor do campo magnético local próximo às suas faces [37]. A referência [38] apresenta um estudo desse comportamento para supercondutores do tipo II no estado Meissner. O resultado desse incremento é um aumento no campo magnético aplicado ao supercondutor, que interfere certamente na distribuição do parâmetro de ordem no interior do supercondutor.

Utilizando o método apresentado no Capítulo 3, foi realizada uma simulação para um supercondutor mesoscópico de dimensões $12 \times 12 \times 1$. A caixa de simulação foi fixada em $19 \times 19 \times 11$ ¹.

A malha de cálculo foi definida com $a_x = a_y = a_z = 0.1$. Verificamos, durante os testes do modelo, que esta divisão era suficiente para descrever as variações do parâmetro de ordem.

A temperatura utilizada foi $T=0$ e o parâmetro de Ginzburg-Landau foi fixado em $\kappa \simeq 0.78$.

O valor do campo magnético aplicado iniciou-se com $H = 0$ e foi sofrendo incrementos de $dH = 0.001$. O incremento temporal foi de $dt = 0.99dt_{max}$, onde dt_{max} é o limite de convergência do método.

A figura 4.1 ilustra o perfil do campo magnético local em unidades do campo

¹As dimensões da caixa de simulação foram definidas, após testes realizados, como sendo as menores possíveis visando reduzir o custo computacional, todavia, de maneira que os resultados não se alterassem significativamente.

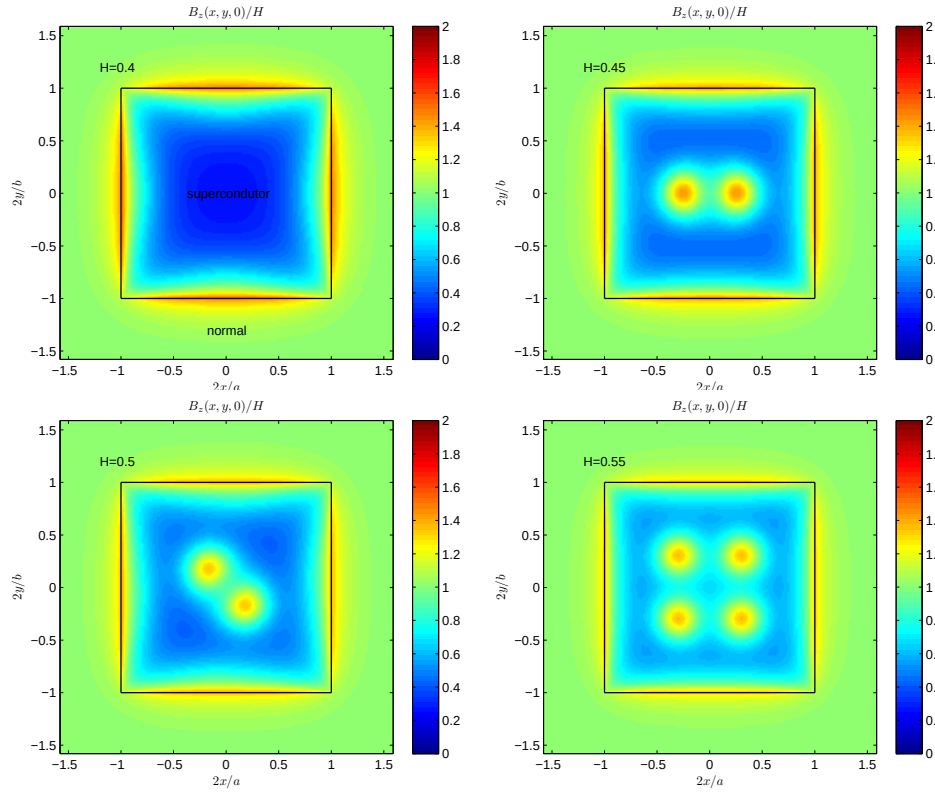


Figura 4.1: Intensidade do campo magnético local em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, y, 0)/H$, para $H = 0.4$, $H = 0.45$, $H = 0.5$ e $H = 0.55$.

magnético aplicado, $B_z(x, y, 0)/H$, para $H = 0.4$, $H = 0.45$, $H = 0.5$ e $H = 0.55$. A análise dos resultados ilustra uma rede de vórtices que acompanha a geometria do supercondutor mesoscópico. Observa-se ainda que para $H = 0.45$ e $H = 0.5$, existem dois estados degenerados e a escolha aleatória do método por um deles é justificada pela existência de tênues flutuações numéricas que podem aparecer durante os cálculos.

O mesmo cenário é visualizado na figura 4.2, onde é avaliado o perfil do campo magnético local em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, 0, 0)/H$, para os mesmos valores de campo aplicado. Nota-se que o valor do campo magnético local B_z é maior nas bordas do supercondutor. Porém, seu valor supera o campo magnético aplicado em aproximadamente $1.5H$, em função do método

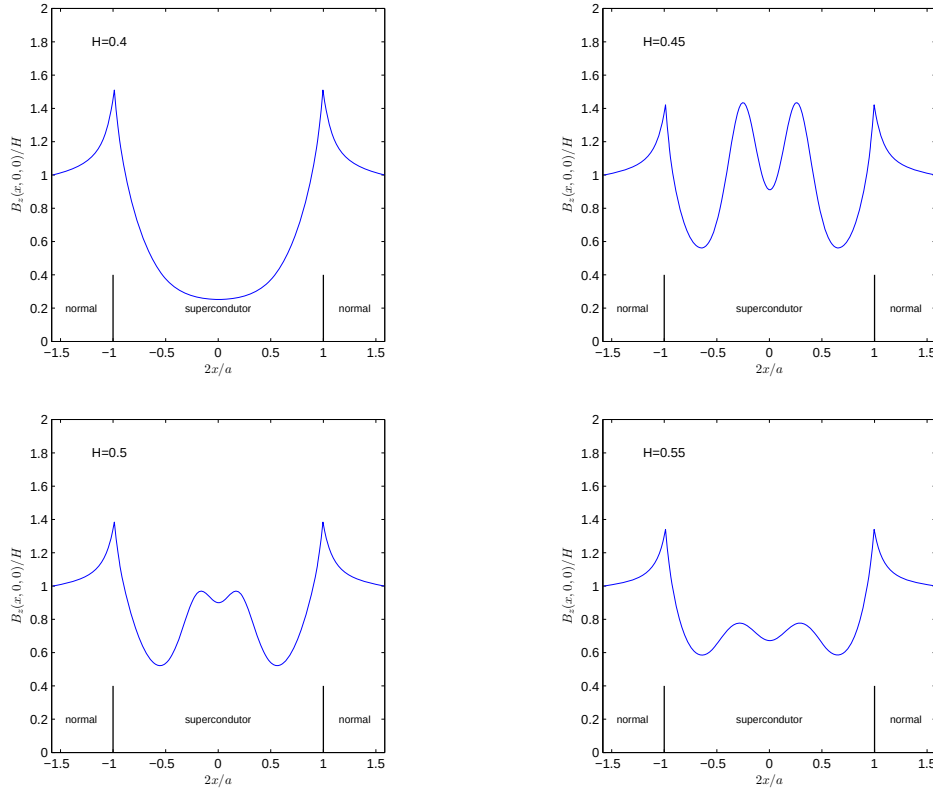


Figura 4.2: Perfil do campo magnético local, $B_z(x, 0, 0)/H$, para $H = 0.4$, $H = 0.45$, $H = 0.5$ e $H = 0.55$.

considerar o efeito de desmagnetização.

4.1.2 SQUID

Um SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) é um magnetômetro de alta sensibilidade utilizado para medir campos magnéticos extremamente baixos. Seu funcionamento baseia-se na conversão da variação de fluxo magnético em tensão elétrica através de duas *junções Josephson* [39].

Uma de suas principais aplicações comerciais ocorre em sistemas de medição de propriedades magnéticas; no campo da medicina é utilizado em técnicas de magnetencefalografia e magnetocardiografia, além de equipamentos de imageamento por ressonância magnética [40, 41].

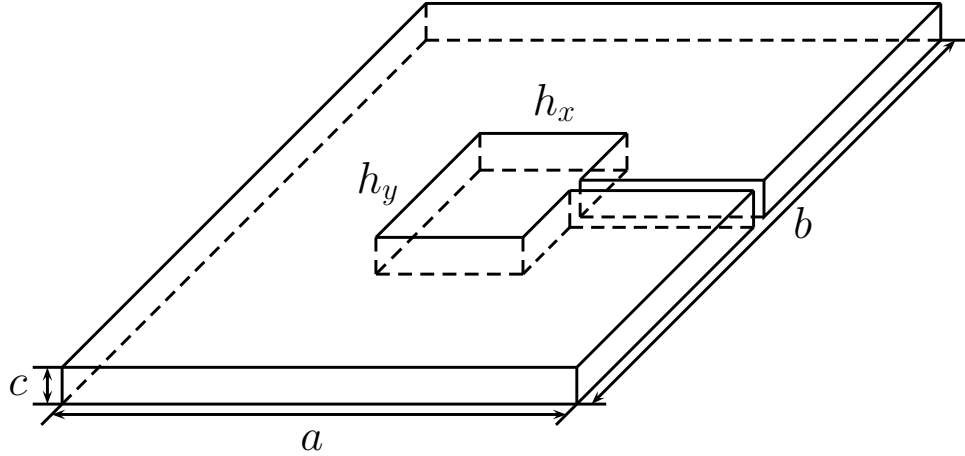


Figura 4.3: Ilustração da geometria do supercondutor em forma de um SQUID.

O foco deste trabalho, contudo, não é estudar as aplicações de um SQUID, mas sim algumas propriedades físicas desta forma geométrica, baseando-se no modelo proposto por Brandt [34], agora, porém, adaptado para três dimensões. Além disto, a abordagem que faremos do problema consiste em usar a teoria de Ginzburg-Landau ao invés da teoria de London como feito por Brandt e Clem.

Um SQUID possui a forma visualizada na figura 4.3, sendo um paralelepípedo reto de largura a , comprimento b e espessura c , medidas estas referenciadas no plano cartesiano através das coordenadas x, y, z , respectivamente. É dotado ainda de uma descontinuidade transfixante, ou seja, um furo, paralelamente ao eixo z e centralizado no plano xy , bem como de uma fenda, também paralela à direção z , a qual inicia-se nesta descontinuidade e estende-se até a borda do paralelepípedo. A fenda também desenvolve-se paralelamente ao eixo x , centralizada em relação à direção y . A figura 4.3 ilustra a geometria SQUID.

Conforme foi estudado no capítulo 3, as equações TDGL são resolvidas em um paralelepípedo reto de dimensões $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, no qual está inserido um supercondutor com igual formato, porém de dimensões $a \times b \times c$. No entanto, exclui-se do domínio supercondutor a região da fenda e do furo transfixante, região esta

que denominaremos de $\mathcal{D}_{hole+slit}$. Esta particularidade da geometria SQUID exige algumas adaptações no método numérico desenvolvido no capítulo 3. Denominaremos por h_x e h_y as dimensões do furo nas direções x e y , respectivamente.

Os limites do furo serão dados então por:

$$\begin{aligned} h_W &= \frac{\mathcal{A} - h_x}{2a_x} + 1, \\ h_E &= \frac{\mathcal{A} + h_x}{2a_x} + 1, \\ h_S &= \frac{\mathcal{B} - h_y}{2a_y} + 1, \\ h_N &= \frac{\mathcal{B} + h_y}{2a_y} + 1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde h_W é o limite à esquerda; h_E à direita; h_S é o limite inferior e h_N é o limite superior, considerando o plano xy .

Dessa forma, o domínio supercondutor será diminuído da seguinte região:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{hole+slit} &= \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z) : x_{h_W} - \frac{a_x}{2} < x < x_{h_E} + \frac{a_x}{2}, \right. \\ &\quad y_{h_S} - \frac{a_y}{2} < y < y_{h_N} + \frac{a_y}{2}, \\ &\quad \left. z_{jz_1} - \frac{a_z}{2} < z < z_{jz_2} + \frac{a_z}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z) : x_{h_E} + \frac{a_x}{2} < x < x_{jx_2} - \frac{a_x}{2}, \right. \\ &\quad y_{\frac{N_y}{2}} - \frac{a_y}{2} < y < y_{\frac{N_y}{2}+1} + \frac{a_y}{2}, \\ &\quad \left. z_{jz_1} - \frac{a_z}{2} < z < z_{jz_2} + \frac{a_z}{2} \right\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nessa região, o parâmetro de ordem e as correntes supercondutoras são nulos.

4.2 Resultados e Discussões

A referência [34] estuda o comportamento do perfil do campo magnético local em um SQUID, baseando-se na teoria de London. Como resultado desse es-

tudo, conclui-se que o perfil do campo magnético ao longo da fenda e do furo, $B_z(x, 0, 0)/H$ dependeria tão somente do comprimento de penetração de London $2\Lambda(T)/a$ (em unidades de $a/2$), onde $\Lambda(T) = \lambda^2(T)/c$.

Em nosso trabalho, contudo, o estudo foi baseado nas equações TDGL aplicadas em 3D. Foram consideradas as seguintes unidades $2\Lambda(T)/a = \kappa^2/ac(1 - T)$, sendo $\lambda(T) = \lambda(0)/\sqrt{1 - T}$.

Exceto a última figura deste capítulo, consideraremos sempre $T = 0$. Isto se justifica pelo fato que as equações TDGL para $T = 0$ têm a mesma forma que para aquelas em que os comprimentos estão em unidades de $\xi(T)$ e campos em unidades de $H_{c2}(T)$. Isto facilita a comparação com os resultados da referências [34] e [37].

As dimensões do furo foram fixadas em $h_x = h_y = 0.2a$ em todos os casos; esta escolha foi feita com o objetivo de melhor comparar os presentes resultados com aqueles obtidos na referência [34]. A fenda, por sua vez, possuía largura a_y .

A malha de cálculo foi definida com $a_x = a_y = a_z = 0.1$ para todos os casos.

A figura 4.4 mostra o perfil de campo magnético ao longo da direção x para diversos valores de H . A simulação foi feita considerando um supercondutor de dimensões $12 \times 12 \times 1$, inserido em uma caixa de dimensões $19 \times 19 \times 11$, com o parâmetro de Ginzburg-Landau $\kappa = 0.774596669^2$, correspondendo a $2\Lambda(0)/a = 0.1$

Os resultados das simulações evidenciam que $B_z(x, 0, 0)/H$, o perfil de campo magnético, não varia significativamente no estado Meissner ($H = 0.1$; $H = 0.3$). No estado misto, contudo, o perfil de campo magnético no interior do supercondutor se altera significativamente, devido à penetração de vórtices. Ao longo da fenda e do furo, com o aumento do campo magnético aplicado, há uma tendência

²Os valores de κ apresentam-se com nove casas decimais de tal modo que o valor de $2\Lambda(0)/a$ seja exato.

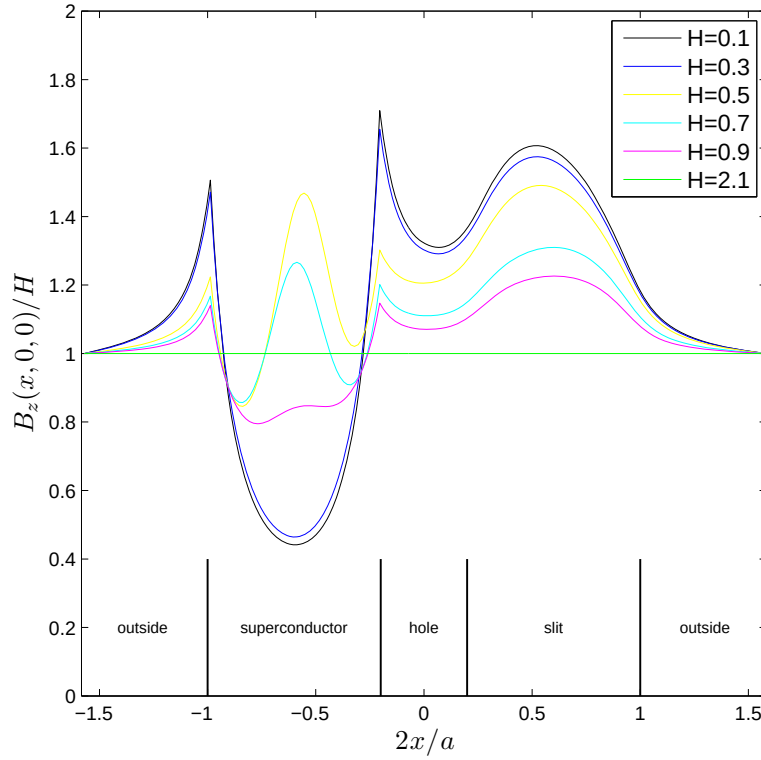


Figura 4.4: Intensidade do campo magnético local na direção z em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, 0, 0)/H$, para um SQUID de dimensões $12 \times 12 \times 1$, com $\kappa = 0.774596669$.

de redução do valor do campo magnético local, tendo em vista o enfraquecimento das supercorrentes de blindagem que geram um campo magnético fora do supercondutor.

Fazendo uma análise qualitativa, notamos que os resultados apontados em [34], utilizando a teoria de London, equivalem aos perfis de campo magnético locais obtidos através da teoria de Ginzburg-Landau no estado Meissner. A diferença quantitativa ocorre no pico de campo magnético através da fenda: utilizando a teoria de Ginzburg-Landau, obtivemos uma máximo de aproximadamente $1.6H$, ao passo que valendo-se da teoria de London, Brandt obteve um valor máximo da ordem de $2.6H$. Em ambos os cenários considerou-se $2\Lambda(0)/a =$

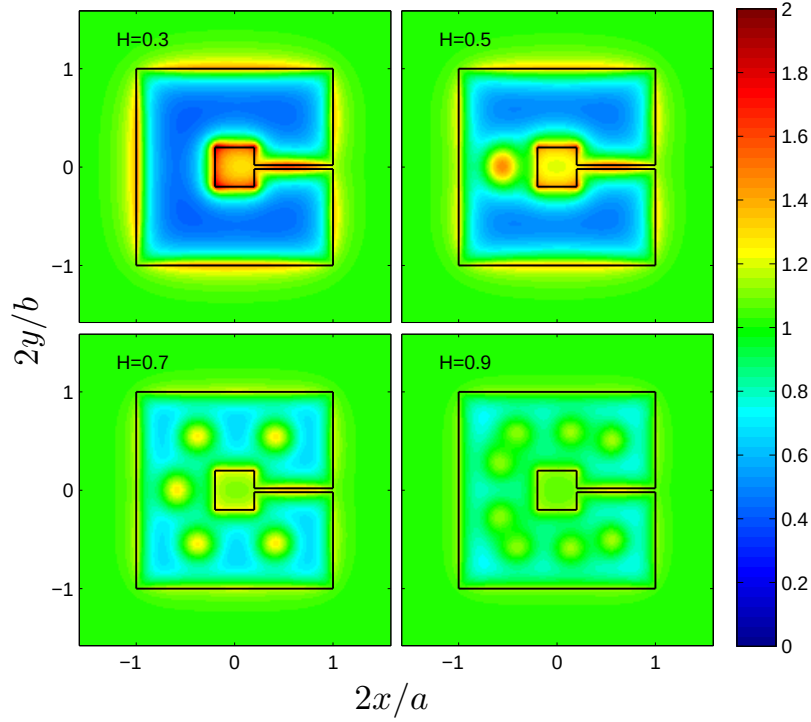


Figura 4.5: Intensidade do campo magnético local no plano $z = 0$ para $H = 0.3$, $H = 0.5$, $H = 0.7$ e $H = 0.9$, em um SQUID de dimensões $12 \times 12 \times 1$ com $\kappa = 0.774596669$.

0.1.

A notável diferença ocorre possivelmente devido à diferença entre os valores do parâmetro de Ginzburg-Landau κ . A teoria de London é válida para altos valores de κ , ao passo que em nossas simulações, utilizamos $\kappa < 1$. Além disso, temos que a teoria de London desconsidera variações locais do parâmetro de ordem.

As figuras 4.5 e 4.6 mostram a distribuição do campo magnético local e do módulo do parâmetro de ordem, respectivamente, no plano $z = 0$, para vários valores de H . Na figura 4.6, as supercorrentes também encontram-se indicadas. As intensidades das referidas quantidades estão indicadas pelas barras de cores. Para $H = 0.3$ o supercondutor ainda se encontra no estado de Meissner. Para

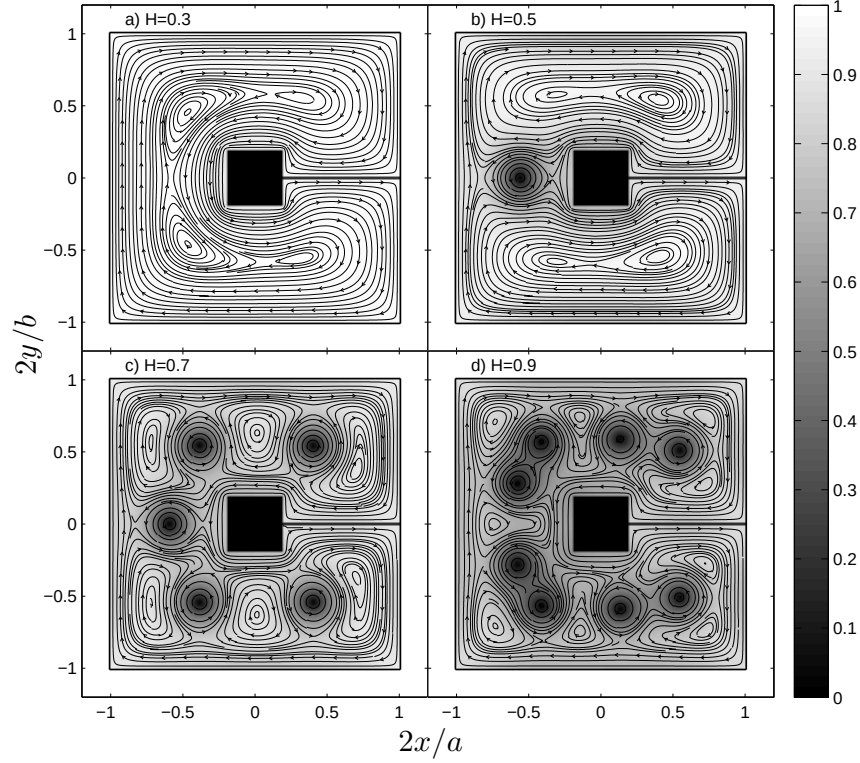


Figura 4.6: Módulo do parâmetro de ordem no plano $z = 0$ para os mesmos parâmetros usados na figura 4.5.

$H \geq 0.5$ o sistema já está no estado misto. Durante as simulações notamos que os vórtices penetram através do lado esquerdo do SQUID, mas não ao longo da fenda. Isto deve-se ao fato de que as correntes de blindagem neste lado é menor que ao longo das outras faces do SQUID. Tanto é que o efeito de desmagnetização é mais intenso na fenda. Os primeiros vórtices que nucleiam no SQUID são distribuídos ao redor do furo. Quando este número satura, os demais se distribuem ao redor do furo e da fenda conforme pode ser visto nas figuras 4.5 e 4.6. Nestas figuras temos o seguinte cenário: para $H = 0.5$ temos $N = 1$ vórtice no supercondutor e 2 no furo; para $H = 0.7$ temos $N = 5$ vórtices no supercondutor e 2 no furo; para $H = 0.9$ temos $N = 8$ vórtices no supercondutor e 3 no furo.

Nas referências [34, 35], Brandt mostra que com o decréscimo de $2\Lambda(T)/a$, o

campo magnético local, nas regiões do furo e da fenda, aumenta significativamente. Na figura 4.7, fazemos a comparação para valores de $2\Lambda(0)/a = 0.1$ e $2\Lambda(0)/a = 0.075$, variando-se as dimensões do SQUID. Nota-se também um aumento do campo magnético local nas mesmas regiões com a diminuição desse parâmetro, entretanto, não tão acentuado quanto previsto na teoria de London.

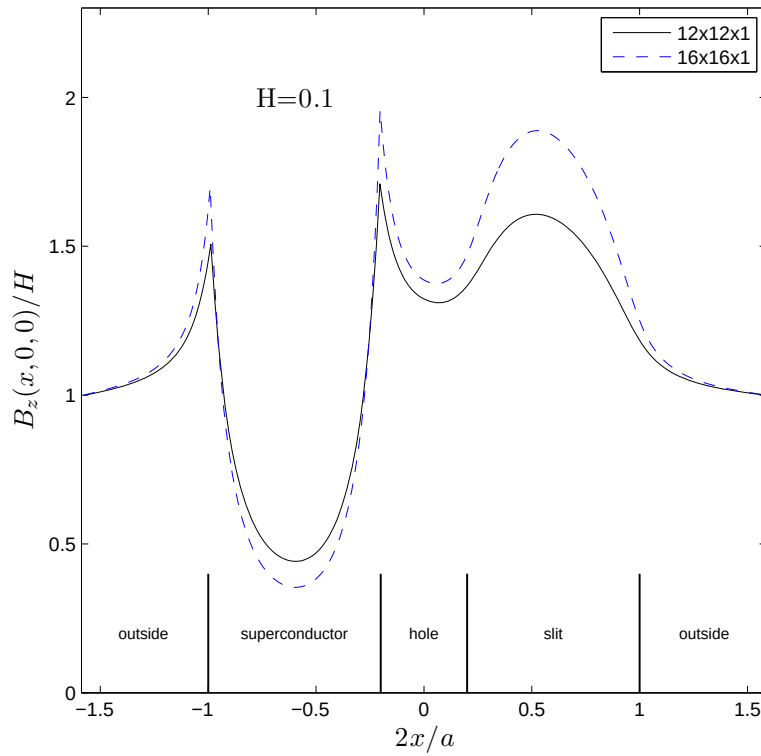


Figura 4.7: Intensidade do campo magnético local na direção z em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, 0, 0)/H$, para $H = 0.1$, com variação da largura e comprimento do SQUID, mantendo-se a espessura c fixa, sendo $\kappa = 0.774596669$. Os parâmetros foram escolhidos de tal modo que para o SQUID menor $2\Lambda(0)/a = 0.1$ e para o maior $2\Lambda(0)/a = 0.075$

O próximo passo do estudo concentrou-se em avaliar o perfil do campo magnético local, através da variação dos parâmetros a , c e κ , de maneira que o parâmetro $2\Lambda(T)/a = \kappa^2/ac(1 - T)$ mantivesse-se fixo. A razão para este estudo é a que segue. Usando a teoria de London, é possível simplificar o tratamento

matemático do problema para a situação de um filme fino fazendo uma média espacial das equações ao longo da direção z . Como consequência, o problema 3D pode ser mapeado em termos de um problema 2D substituindo o comprimento de penetração $\lambda(T)$ pelo comprimento de penetração efetivo $\Lambda(T)$. Porém, sem perder informações da natureza tri-dimensional da situação física. Ao final deste processo, as novas equações dependem unicamente do parâmetro $\Lambda(T)$, mas não das dimensões do filme, nem mesmo de κ , que é intrínseco à teoria de London. Desta forma, investigamos se o perfil de campo obedece a esta lei de escala.

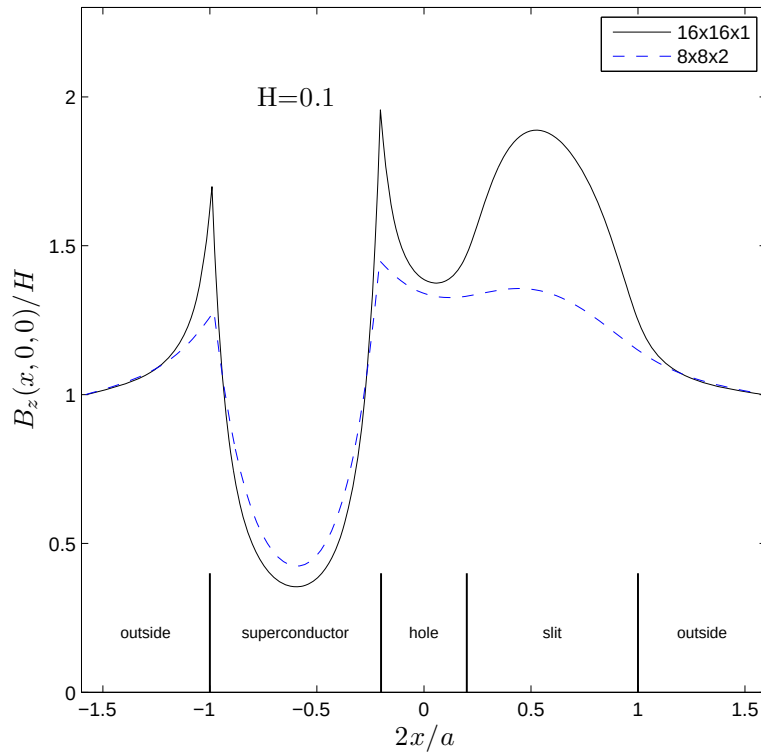


Figura 4.8: Intensidade do campo magnético local na direção z em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, 0, 0)/H$, para $H = 0.1$, com $\kappa = 0.774596669$, com variações das dimensões do SQUID de forma que a $2\Lambda(T)/a = 0.075$.

A figura 4.8 ilustra a alteração do perfil de campo magnético através da variação dos parâmetros a e c mantendo-se o mesmo valor de κ . Com podemos

ver, dentro do defeito transfixado, os perfis de campo são levemente diferentes, mas ao longo da fenda há uma diferença significativa entre ambos. Na figura 4.9, por sua vez, mostramos o mesmo perfil através da variação dos parâmetros c e κ , mantendo-se a largura do SQUID fixa. Neste caso, as diferenças são mais pronunciadas ao longo da fenda, porém não tão significativas como no caso anterior.

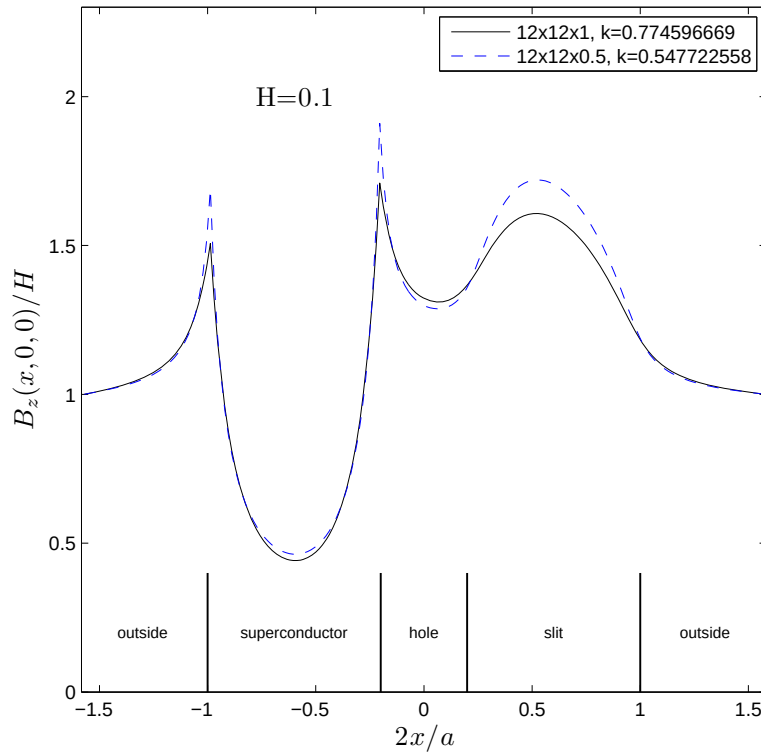


Figura 4.9: Intensidade do campo magnético local na direção z em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, 0, 0)/H$, para $H = 0.1$, com variações da espessura do SQUID e do parâmetro de Ginzburg-Landau, κ , de modo que $2\Lambda(T)/a = 0.1$.

Por fim, é estudada a influência da temperatura no perfil de campo magnético local. Foram feitas simulações para dois valores distintos de temperatura, considerando três valores de campo magnético externo. Os resultados são ilustrados na figura 4.10. Verificamos que as variações do comportamento do perfil de campo magnético local é menos significativa com o incremento de tempera-

tura, uma vez que para temperaturas mais altas, a supercondutividade é atenuada mais rapidamente, fazendo com que as correntes supercondutoras diminuam e consequentemente o efeito de desmagnetização seja reduzido.

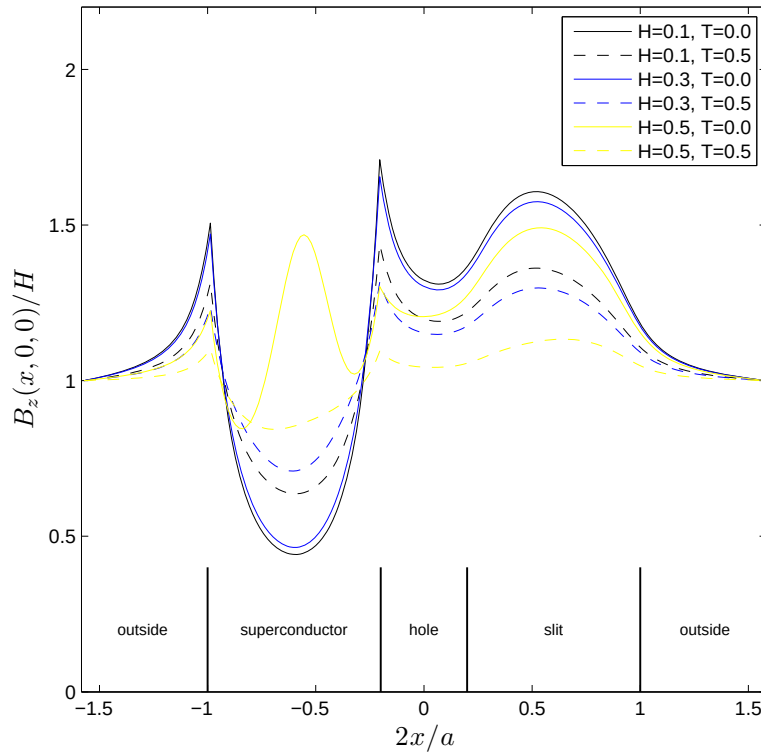


Figura 4.10: Intensidade do campo magnético local na direção z em unidades do campo magnético aplicado, $B_z(x, 0, 0)/H$, com variações da temperatura T e do campo magnético aplicado H , para um SQUID de dimensões $12 \times 12 \times 1$, com $\kappa = 0.774596669$.

Capítulo 5

Conclusões

No presente trabalho foi feita, inicialmente, uma revisão da literatura, especialmente quanto à abordagem das teorias fenomenológicas da supercondutividade: a teoria de London e a teoria de Ginzburg-Landau.

O desenvolvimento de nossas simulações, contudo, foi baseado na teoria de Ginzburg-Landau. Utilizando o método de variáveis de ligação [26], as equações TDGL foram discretizadas e generalizadas para aplicação em três dimensões. Essa nova abordagem garantiu que o efeito de desmagnetização não fosse ignorado. A modelagem do supercondutor, em três dimensões de ordem mesoscópica e em forma de paralelepípedo, foi construída através da implementação de um algoritmo proposto inicialmente em duas dimensões [24].

Através de uma alteração no algoritmo, foi possível criar um modelo que representasse, em três dimensões, o elemento supercondutor em forma de SQUID proposto por Brandt [34]. Foi feita, então, uma comparação entre os resultados encontrados por Brandt, que utilizou a teoria de London, e os resultados obtidos através da teoria de Ginzburg-Landau.

Notamos que há um superdimensionamento no valor do campo magnético local utilizando a teoria de London, quando comparada à teoria de Ginzburg-Landau. Isto decorre, possivelmente, pelo fato daquela ser aplicada para altos

valores de κ , ao passo que nesta, fizemos uso de $\kappa \simeq 1$. Soma-se isso ao fato de que a teoria de London não considera a variação espacial do parâmetro de ordem.

Em seu trabalho, Brandt mostrou que o perfil do campo magnético local dependia exclusivamente de um fator $2\Lambda(T)/a$ (em unidades de $a/2$), onde $\Lambda(T) = \lambda^2(T)/c$. Utilizando a teoria de Ginzburg-Landau e adotando $2\Lambda(T)/a = \kappa^2/ac(1-T)$, no entanto, concluímos que o perfil de campo magnético possuía considerável alteração com a mudança das dimensões do supercondutor a e c , bem como do parâmetro κ , mantendo-se a relação $2\Lambda(T)/a$ fixa.

Dessa forma, o desenvolvimento do presente trabalho traz a perspectiva quanto à criação de novas propostas de modelagem de supercondutores em três dimensões, baseando-se na teoria de Ginzburg-Landau, possibilitando o estudo das propriedades eletromagnéticas em diferentes geometrias e dimensões.

Adaptações do modelo ainda permitem a inclusão de defeito único ou uma rede de defeitos no supercondutor, defeitos estes que podem ser furos e fendas transfixantes ou até mesmo variabilidade da superfície do supercondutor com ressaltos ou saliências. Como por exemplo, podemos considerar um filme supercondutor dotado de uma rede de pilares do mesmo material (ver figura 5.1). Para este caso, o algoritmo já foi implementado e as simulações numéricas já foram iniciadas (ver figuras 5.2 e 5.3).

Há, por fim, a perspectiva de incluir uma *junção Josephson* na fenda do SQUID supercondutor e verificar a influência dessa modificação nas propriedades eletromagnéticas para esta geometria. Este estudo já foi iniciado e será objeto de futuro trabalho de doutoramento.

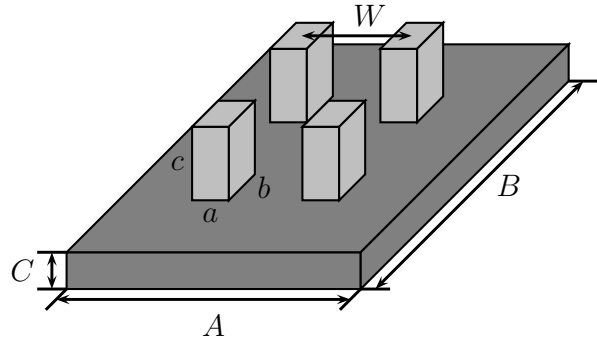


Figura 5.1: Ilustração de um filme supercondutor dotado de uma rede de pilares do mesmo material.

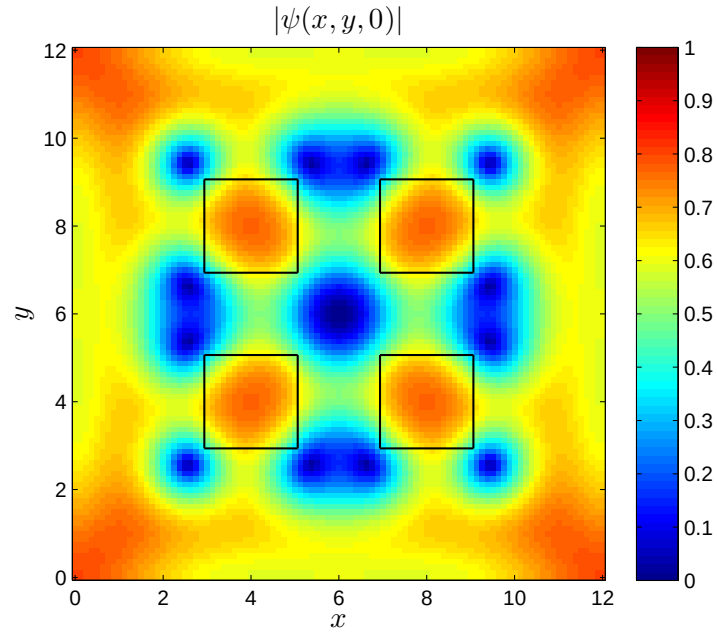


Figura 5.2: Módulo do parâmetro de ordem para um filme fino de dimensões $12 \times 12 \times 0.5$, para um campo magnético aplicado, $H = 1.0$. As linhas em preto ilustram as posições das quatro torres de dimensões $2 \times 2 \times 1$.

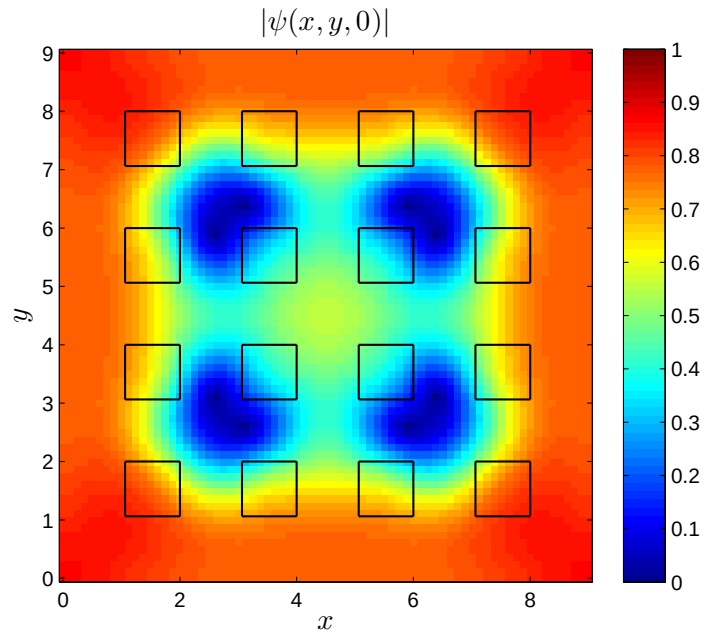


Figura 5.3: Módulo do parâmetro de ordem para um filme fino de dimensões $9 \times 9 \times 0.5$, para um campo magnético aplicado, $H = 1.0$. As linhas em preto ilustram as posições de uma rede de torres de dimensões $1 \times 1 \times 1$.

Referências Bibliográficas

- [1] Heike Kamerling Onnes. *Communications from the Physical Laboratory at University of Leiden*, 122B,124C, 1911.
- [2] HTS Triax Superconducting Cable. Superconductivity, 2009. Em <http://www.supercables.com/superconductivity.html>. Acesso em: 13/11/2012.
- [3] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer effekt bei eintritt der supra-leitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21:787, 1933.
- [4] F. London and H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71, 1935.
- [5] Vitaly L. Ginzburg and L. Landau. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 20:1064, 1950.
- [6] Alexei A. Abrikosov. Magnetic properties of superconductors of the second group. *Soviet Physics—Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 5:1174, 1957.
- [7] H. Trüble and U. Essmann. Direct demonstration of flux line movements in superconductors with current moving through them. *Physica Status Solidi*, 25:395, 1968.

- [8] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review*, 108(5):1175, 1957.
- [9] Leon N. Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, 104(4):1189, 1956.
- [10] L. P. Gorkov. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the of superconductivity. *Soviet Physics JETP-USSR*, 9:1364, 1959.
- [11] J. G. Bednorz and K. A. Muller. *Zeitschrift für Physik B*, 64:189, 1986.
- [12] M. Tinkhan. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill Book Co, second edition, 2004.
- [13] J. B. Ketterson. and S. N. Song. *Superconductivity*. Cambridge, University Press, 1999.
- [14] A. L. Fetter and P. C. Hohenberg. *Superconductivity*, volume 2. Marcel Dekker, 1969.
- [15] N. W. Ashcroft. and N. D. Mermin. *Física do Estado Sólido*. Cengage Learning, 2011.
- [16] E. Sardella. *Física-Matemática: Teoria e Aplicações*, volume 1. Cultura Acadêmica, 2008.
- [17] University of Cambridge. Superconductivity, 2012. Em <http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/superconductivity/index.php>. Acesso em: 14/11/2012.
- [18] L. P. Gorkov and G. M. Eliashberg. Generalization of Ginzburg-Landau equations for non-stationary problems in case of alloys with paramagnetic impurities. *Soviet Physics JETP-USSR*, 27:328, 1968.

- [19] P. G. de Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*. II. Addison-Wesley Publishing Co., Inc, d. pines edition, 1989.
- [20] P. S. Deo, V. A. Schweigert, and F. M. Peeters. Magnetization of Mesoscopic Superconducting Disks. *Physical Rev. Letters*, 79(23):4653–4656, 1997.
- [21] G. Stenuit, S. Michotte, J. Govaerts, and L. Piraux. Temperature dependence of penetration and coherence lengths in lead nanowires. *Supercond. Sci. Technol.*, 18:174, 2005.
- [22] The Open University. Superconductivity, 2012. Em <http://openlearn.open.ac.uk/mod/oucontent/view.php?id=398540§ion=4.3>. Acesso em: 14/11/2012.
- [23] L. Y. Vinnikov, J. Karpinski, S. M. Kazakov, J. Jun, J. Anderegg, S. L. Bud’ko, and P. C. Canfield. Vortex structure in MgB_2 single crystals observed by the Bitter decoration technique. *Physical Review B*, 67:092512, 2003.
- [24] E. Sardella, P. N. Lisboa-Filho, A. L. Malvezzi, and W. Ortiz. Temperature-dependent vortex motion in a square mesoscopic superconducting cylinder: Ginzburg-Landau calculations. *Physical Review B*, 74:014512, 2006.
- [25] B. J. Baelus and F. M. Peeters. Dependence of the vortex configuration on geometry of mesoscopic flat samples. *Physical Review B*, 65:104515, 2002.
- [26] W. D. Gropp, H. G. Kaper, G. K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo, and V. M. Vinokur. Numerical simulation of vortex dynamics in type-II superconductors. *Journal of Computational Physics*, 123:254, 1996.
- [27] G. C. Buscaglia., C. Bolech., and A. Lopez. *Connectivity*, volume m62. Springer, 2000.

- [28] E. Sardella, P. N. Lisboa-Filho, and A. L. Malvezzi. Vortices in a mesoscopic superconducting circular sector. *Phys. Rev. B*, 77:104508, Mar 2008.
- [29] E. Sardella and E. H. Brandt. Vortices in a mesoscopic superconducting disk of variable thickness. *Supercond. Sci. Technol.*, 23:025015, 2010.
- [30] T. Winiecki and C. S. Adams. A fast semi-implicit finite-difference method for the TDGL equations. *Journal of Computational Physics*, 179:127, 2002.
- [31] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations*, volume 22 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 1995.
- [32] R. Zadorosny, E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho, and W. A. Ortiz. Crossover between macroscopic and mesoscopic regimes of vortex interactions in type-ii superconductors. *Phys. Rev. B*, 85:214511, Jun 2012.
- [33] G. R. Berdiyorov, V. R. Misko, M. V. Milošević, W. Escoffier, I. V. Grigorieva, and F. M. Peeters. Pillars as antipinning centers in superconducting films. *Phys. Rev. B*, 77:024526, Jan 2008.
- [34] E. H. Brandt. Thin superconductors and SQUIDs in perpendicular magnetic field. *Physical Review B*, 72:024529, 2005.
- [35] E. H. Brandt. Supercurrents and vortices in SQUIDs and films of various shapes. *Physica C - Superconductivity and its Applications*, 460:327–330, 2007.
- [36] A. Sanchez and C. Navau. Influence of demagnetizing effects in superconducting cylinders. *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, 9(2):2195–2198, jun 1999.
- [37] E. H. Brandt. Vortices in superconductors: ideal lattice, pinning, and geometry effects. *Supercond. Sci. Technol.*, 22(3), MAR 2009.

- [38] C. Navau, C. A. Cardoso, O. F. de Lima, and F. M. Araujo-Moreira. Experimental and theoretical study of demagnetization fields in superconducting samples of orthorhombic shape. *J. Appl. Phys.*, 96:486, 2004.
- [39] D. Drung, C. Assmann, J. Beyer, A. Kirste, M. Peters, F. Ruede, and Th. Schurig. Highly sensitive and easy-to-use SQUID sensors. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 17(2, Part 1):699–704, 2007.
- [40] R. Kleiner, D. Koelle, F. Ludwig, and J. Clarke. Superconducting quantum interference devices: State of the art and application's. *Proceedings of the IEEE*, 92(10):1534–1548, 2004.
- [41] K. Sternickel and A. I. Braginski. Biomagnetism using SQUIDs: status and perspectives. *Supercond. Sci. Technol.*, 19(3, SI):S160–S171, 2006.

Artigo Submetido

Parte desta dissertação de mestrado está sendo considerada para publicação na revista *Superconductor Science and Technology*.

- Fábio Rogeri, Rafael Zadorosny, Paulo Noronha Lisboa-Filho, Edson Sardella, e Wilson Aires Ortiz, *Magnetic field profile of a mesoscopic SQUID-shaped superconducting film*.