



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

COMPLEXIDADE NO ESPAÇO DOS PARÂMETROS NO MAPA
LOGÍSTICO

Evely Geise da Silva

Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos

Rio Claro (SP)

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Evely Geise da Silva

COMPLEXIDADE NO ESPAÇO DOS PARÂMETROS NO MAPA
LOGÍSTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharela e Licenciada em Física.

Rio Claro (SP)

2024

D229c da Silva, Evely Geise
Complexidade no Espaço dos Parâmetros no Mapa Logístico /
Evely Geise da Silva. -- Rio Claro, 2024
48 p. : tabs., mapas

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado e licenciatura -
Física) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Rene Orlando Medrano Torricos

1. Espaço de Parâmetros. 2. Curvas extremas. 3. Órbitas
superestáveis. 4. Periodicidade. 5. Caos. I. Título.

Evely Geise da Silva

COMPLEXIDADE NO ESPAÇO DOS PARÂMETROS NO MAPA LOGÍSTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharela e Licenciada em Física.

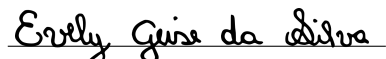
Comissão Examinadora

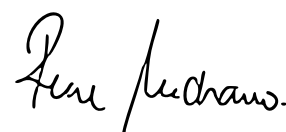
Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos

Dra. Célia Mayumi Kuwana

Prof. Dr. André Luis Prando Livorati

Rio Claro, 14 de novembro de 2024.


Assinatura da(o) aluna(o)


Assinatura da(o) orientadora(o)

Dedico este trabalho a minha mãe que sempre contribuiu para o meu crescimento, com seu amor e cuidado.

AGRADECIMENTOS

Segundo Heráclito, "Ninguém pode entrar duas vezes no mesmo rio, pois quando nele se entra novamente, não se encontram as mesmas águas, e o próprio ser já se modificou". Seguindo essa linha de pensamento, acredito que cada indivíduo constrói sua identidade a partir das experiências adquiridas ao longo da vida. Embora eu dedique estas palavras às pessoas que têm maior presença em minha vida atualmente, reconheço que muitas outras também contribuíram para a construção do meu atual "universo" de conquistas.

Com base nisso, gostaria de expressar minha gratidão à minha mãe, Neide, ao meu pai, Assis, e ao meu padrasto, Lucas, que foram pilares essenciais em momentos de crise, tanto emocionais quanto financeiras. Agradeço também aos meus amigos leais — Polyana, Rita, Gustavo e Victória — por me oferecerem confiança e por compartilharmos momentos de alegria que nos afastavam da rotina e nos davam força para seguir em frente.

Não poderia deixar de agradecer ao meu orientador, Prof. Rene, que me guiou ao longo deste percurso com toda sua compreensão, cuidado e paciência. Por fim, expresso minha gratidão ao Grupo de Investigação em Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear, que me ajudou a direcionar a linha de pesquisa com a qual pretendo trabalhar no futuro. Agradeço ao IGCE e aos professores que, desde o ensino fundamental, médio até a academia, tiveram um impacto significativo na minha formação, sendo fontes de inspiração e motivação ao longo do meu percurso.

*"É a incerteza que nos fascina.
Tudo é maravilhoso entre brumas."*
Oscar Wilde

RESUMO

O estudo da ordem no espaço dos parâmetros de mapas caóticos impulsiona o entendimento da configuração de uma série de diferentes conjuntos de periodicidade. Atualmente, embora a complexa estrutura de um conjunto contínuo de periodicidade no espaço de parâmetros seja bem descrita pela teoria de bifurcações, há limitadas explicações sobre a organização de domínios de periodicidade observados em regiões caóticas. Como o cenário das regiões periódicas é completamente diferente de um sistema dinâmico para outro e sua organização no espaço dos parâmetros é um problema em aberto, o principal foco deste trabalho é estudar os conceitos de órbitas, curvas extremas e superestáveis, a fim de descrever globalmente a complexa organização das estruturas de periodicidade no espaço de parâmetros. Para isso, realizamos simulações numéricas, mapas de retorno e diagramas de bifurcação e Lyapunov no mapa logístico periodicamente perturbado. Ao analisar estes recursos é possível examinar as estruturas de periodicidade no espaço dos parâmetros, assim como seus pontos de equilíbrio. Além disso, podemos identificar as curvas extremas e superestáveis ao longo das quais as cascatas de periodicidade se alinham. As curvas extremas e superestáveis estão intimamente relacionadas, e o cruzamento delas indica a presença dos *shrimp-like*, que compõem as cascatas de periodicidade. Essas cascatas de periodicidade descrevem a forma dos domínios de periodicidade, cercados por caos. Com base nisso, sugerimos que a ordem e complexidade dessas estruturas no espaço dos parâmetros podem ser explicadas a partir da interação das curvas extremas e superestáveis.

Palavras-chave: Espaço de Parâmetros; Curvas extremas; Órbitas superestáveis; Periodicidade; Caos.

ABSTRACT

Analyzing the parameter space order in chaotic mappings improves the understanding of the configuration in a series of different sets of periodicity. Although the complexity of a continuous set of periodic structure in the parameter space can be well described by bifurcation theory, there are limited explanations regarding the organization of the domains of periodicity observed in chaotic regions. The scenario of periodic regions is completely different from one dynamic system to another and, being its organization in the parameter spaces an open problem, the focus of this project is studying the concept of extreme orbits and curves, and superstable orbits and curves to describe the complex global organization of periodicity structures in the parameter space. We did that through the analysis of the logistic map periodically perturbed, in conjunction with numerical simulations, return maps, and bifurcation and Lyapunov diagrams carried out throughout the project. By analyzing these resources it is possible to examine the periodicity structure of the parameter spaces, as well as their equilibrium points. In addition, we can identify the extreme and superstable curves along which the periodic cascades align. The extreme and superstable curves are closely related, and the crossing of them indicates the presence of the Shrimp-like, which make up the periodic cascades. These periodicity cascades describe the form of the domains of periodicity, surrounded by chaos. Based on this, we suggest that the order and complexity of these structures in the parameter space can be explained from the interaction of extreme and superstable curves.

Keywords: Parameter space; Extreme curves; Superstable orbits; Periodicity; Chaos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Evolução de um sistema dinâmico discreto cujo estado muda durante os instantes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.	11
Figura 2 – Função que define o mapa logístico.	17
Figura 3 – Mapa logístico: ponto fixo para $R = 1,75$.	20
Figura 4 – Mapa logístico: ciclo limite atrativo de período 2 para $R = 3,27$.	21
Figura 5 – Mapa logístico: ciclo limite atrativo de período 4 para $R = 3,48$.	22
Figura 6 – Mapa logístico: comportamento caótico para $R = 3,90$.	22
Figura 7 – Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico.	25
Figura 8 – Diagrama de Bifurcação ampliado do Mapa Logístico.	25
Figura 9 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado $R = BABA$.	29
Figura 10 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado ampliado $R = BABA$.	30
Figura 11 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado $R = BBABABA$.	31
Figura 12 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado ampliado $R = BBABABA$.	32
Figura 13 – Trajetória percorrida por x_0 no espaço.	33
Figura 14 – Diagrama representando o cálculo do expoente de Lyapunov, onde $\ln f'(x_i) $ indica a contribuição local da derivada da função f em cada ponto x_i para medir a evolução da distância entre duas trajetórias próximas.	34
Figura 15 – Diagrama de Lyapunov na sequência $R = BABA$.	36
Figura 16 – Diagrama de Lyapunov ampliado na sequência $R = BABA$.	37
Figura 17 – Diagrama de Lyapunov na sequência $R = BBABABA$.	38
Figura 18 – Diagrama de Lyapunov ampliado na sequência $R = BBABABA$.	39
Figura 19 – As curvas superestáveis de período 2 são representadas por linhas brancas e curvas extremas por linhas verde ($F^{(0)}$) e azul ($F^{(1)}$), destacando estruturas como shrimps e Línguas de Arnold.	42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Organização do trabalho	13
2	DEFINIÇÃO DE CAOS	14
2.1	Sensibilidade às Condições Iniciais	14
2.2	Bifurcações	14
2.3	Atratores	15
2.4	Fractais e Dimensão Fractal	15
3	MAPA LOGÍSTICO	16
3.1	Contexto histórico do Mapa Logístico	16
3.2	Pontos fixos	18
3.2.1	Tipos de Bifurcação no Mapa Logístico	23
3.2.1.1	Bifurcação Transcrítica	23
3.2.1.2	Bifurcação de Duplicação de Período	23
3.2.1.3	Janelas de Periodicidade e Bifurcações Intermitentes	23
3.3	Análise de Bifurcação no mapa logístico	24
4	MAPA LOGÍSTICO PERIODICAMENTE PERTURBADO	27
4.1	Espaço de Parâmetros	27
4.2	Análise de isoperiodicidade	28
4.3	Expoente de Lyapunov	33
4.3.1	Análise do Expoente de Lyapunov	35
5	CURVAS EXTREMAS E SUPERESTÁVEIS	40
5.1	Fundamentos Teóricos de Curvas Extremas e Superestáveis	40
5.2	Aplicação das Curvas Extremas e Superestáveis no Mapa Logístico	40
5.2.1	Organização de Cascatas de Periodicidade	41
5.2.2	Contribuições para a Análise no Espaço dos Parâmetros	42
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

Um sistema é considerado dinâmico quando certas grandezas que caracterizam suas componentes variam ao longo do tempo [1], especialmente se o sistema em estudo possui dependência sensível às condições iniciais. Assim, determinar teoricamente sua evolução temporal é essencial não apenas para explicar o comportamento de sistemas existentes, mas também para prever possíveis falhas. Esse tipo de análise é particularmente importante em diferentes áreas, como na engenharia, meteorologia e até na economia, onde o comportamento dinâmico dos sistemas pode impactar diretamente fenômenos práticos.

A complexidade no espaço dos parâmetros do mapa logístico também é um tema interessante em teoria do caos e sistemas dinâmicos. Pequenas variações nesses parâmetros podem alterar drasticamente o comportamento de um sistema, levando-o de uma evolução previsível para um estado caótico, levantando questões relevantes sobre a estabilidade e o controle de sistemas reais. Entre elas estão: o desenvolvimento de estratégias para evitar estados caóticos indesejados, a delimitação das condições que asseguram a estabilidade, e a modelagem de sistemas reais a partir de dinâmicas descritas pelo mapa. Além da, transição entre caos e ordem, bem como a imprevisibilidade inerente desses sistemas, demandam o aprimoramento de ferramentas analíticas e computacionais para aprofundar a compreensão de fenômenos aplicáveis.

Para atingir esses objetivos, é necessário um entendimento profundo de algumas variáveis e das regras que governam as mudanças em sistemas dinâmicos. Neste contexto, utilizamos o mapa logístico, um modelo clássico [2] unidimensional usado para representar sistemas dinâmicos discretos. O mapa logístico é constituído por um espaço de fases, caracterizado pelo conjunto de todos os estados acessíveis do sistema. A evolução do sistema, partindo de um estado inicial e percorrendo diferentes pontos deste espaço de fases, forma o que é denominado de órbita que é ilustrado na Fig. 1. Neste trabalho, exploraremos a complexidade dentro do espaço dos parâmetros do mapa logístico, detalhando como variações nesses parâmetros podem influenciar o comportamento dinâmico do sistema.

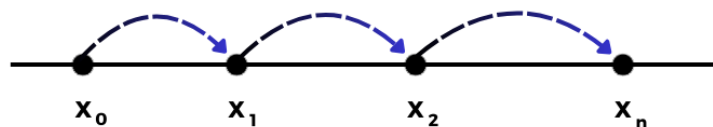


Figura 1 – Evolução de um sistema dinâmico discreto cujo estado muda durante os instantes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Após o artigo seminal de Arnold [3], que discutiu a organização das línguas de Arnold imersas em domínios de quasiperiodicidade, o interesse e a compreensão das janelas de periodicidade cercadas por regiões caóticas em planos de parâmetros aumentaram significativamente. Isso impulsionou o entendimento da configuração de uma série de diferentes conjuntos de periodicidade.

A complexa estrutura de conjuntos contínuos de periodicidade no espaço de parâmetros é bem descrita pela teoria da bifurcação [4]. No entanto, essa teoria falha em explicar o cenário coletivo, pois existem sequências infinitas de estruturas complexas espalhadas pelo espaço de parâmetros, conhecidas como cascatas de periodicidade ou, simplesmente, cascatas [1], que representam a repetição de padrões periódicos à medida que o sistema se aproxima de uma transição para o caos, indicando a forma como as regiões periódicas se organizam em um sistema dinâmico, cercadas por regiões caóticas, ao longo das curvas extremas, que agem como guias para essas organizações. Em regiões de quasiperiodicidade, onde o sistema é invertível, a organização dessas cascatas pode ser compreendida pela teoria dos números [1]. Contudo, há poucas explicações sobre a organização de domínios de periodicidade em regiões caóticas. Enquanto discussões sobre cascatas de adição de período podem ser encontradas em [5], Lorenz, em seu último artigo [6], discutiu uma organização local dessas estruturas no mapa de Hénon. No entanto, a organização das regiões periódicas varia significativamente de um sistema dinâmico para outro, tornando a compreensão dessa organização no espaço de parâmetros um problema em aberto.

Recentemente, um estudo sobre órbitas extremas, trajetórias que conectam diferentes pontos máximos ou mínimos em mapas multimodais unidimensionais, mostrou como esse conceito permite a determinação de curvas no plano dos parâmetros, chamadas de curvas extremas, ao longo das quais as cascatas de periodicidade estão alinhadas [7]. As órbitas extremas estão intimamente relacionadas com as órbitas de altíssima estabilidade na estrutura de periodicidade, conhecidas como órbitas superestáveis, cujos parâmetros formam o esqueleto dessa estrutura.

O principal objetivo deste trabalho é descrever a complexidade da organização das estruturas de periodicidade no espaço dos parâmetros, especialmente no contexto do mapa logístico periodicamente perturbado. Analisamos analítica e numericamente o espaço dos parâmetros obtido a partir desse mapa, que é essencial devido aos seus padrões de bifurcações similares quando o parâmetro de controle é variado [1]. O mapa logístico é descrito pela equação:

$$x_{n+1} = x_n R(1 - x_n) \quad (1.1)$$

onde a variável dinâmica no tempo n é x_n , e R é o parâmetro de controle que irá obedecer a uma sequência de valores pré-definidas A e B , no plano dos parâmetros $B \times A$, essa

sequência correspondera a perturbação inserida no sistema. Ademais, este trabalho investiga o conceito de órbitas e curvas extremas no contexto do mapa logístico, demonstrando como essas curvas revelam a organização das estruturas periódicas no espaço dos parâmetros [8]. A complexidade do mapa torna-se evidente à medida que o parâmetro de controle é variado, contribuindo para a compreensão da distribuição dos conjuntos de periodicidade.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O método de pesquisa inicialmente implementado consistiu em estudos dirigidos individuais e encontros semanais com o orientador. Durante esses encontros, foram abordados tópicos teóricos sobre sistemas dinâmicos, órbitas, análise gráfica, pontos fixos e periódicos, bifurcações, o mapa logístico e a transição para o caos. Além disso, foram realizadas análises de estabilidade do mapa da Eq. (1.1), complementadas por simulações numéricas e construção de diagramas de bifurcação. Também conduzimos um estudo analítico e numérico do mapa descrito pela Eq. (1.1), seguido pelo desenvolvimento de algoritmos numéricos para o cálculo do expoente de Lyapunov no espaço dos parâmetros. Por fim, investigamos numericamente a estabilidade das órbitas superestáveis e das curvas extremas nos espaços de fase e de parâmetros.

Com base nisso, nos próximos capítulos discutiremos algumas propriedades do mapa logístico tais como ponto fixo, bifurcações, análise de estabilidade e a caracterização do conceito de caos e regularidade do sistema por meio do cálculo do expoente de Lyapunov.

2 DEFINIÇÃO DE CAOS

Algumas definições de caos o relacionam à existência de um conjunto não numerável de infinitas órbitas periódicas instáveis, à divergência exponencial de órbitas vizinhas e à presença de um atrator com estrutura fractal [1,3]. O caos em sistemas dinâmicos exemplifica a imprevisibilidade dentro um intervalo de parâmetros [9], demonstrando que mesmo sistemas simples podem gerar comportamentos altamente complexos e não lineares. Em outras palavras, o caos manifesta-se por meio de propriedades como bifurcações, atratores estranhos e dimensões fractais [4,10].

2.1 SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS

A sensibilidade às condições iniciais refere-se ao comportamento em que pequenas variações nas condições iniciais levam a resultados drasticamente diferentes ao longo do tempo [1], tornando o sistema imprevisível em longo prazo, mesmo que ele seja governado por leis determinísticas. Essa imprevisibilidade surge de uma complexa interação de não linearidades, bifurcações e da estrutura intrínseca do espaço de fases do sistema [8].

No Cap. 4.3 veremos sobre o expoente de Lyapunov que é uma ferramenta fundamental para quantificar essa sensibilidade, medindo a taxa de divergência das trajetórias. Em sistemas caóticos, pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é positivo, indicando que as distâncias entre trajetórias inicialmente próximas aumentam exponencialmente com o tempo. Esse comportamento de afastamento rápido é um indicador-chave do caos e da imprevisibilidade em sistemas dinâmicos.

2.2 BIFURCAÇÕES

As bifurcações são mudanças qualitativas no comportamento de um sistema dinâmico [1] que ocorrem à medida que um ou mais parâmetros do sistema são alterados. Existem diversos tipos de bifurcações, como as bifurcações de duplicação de período, onde uma órbita periódica se torna caótica à medida que os ciclos duplicam, e as bifurcações tangentes, em que em geral leva o sistema passa de um estado ordenado para um caótico.

Os diagramas de bifurcação são ferramentas gráficas essenciais para visualizar como o comportamento do sistema muda conforme um parâmetro varia. Eles são valiosos para representar a complexidade da dinâmica em sistemas não lineares e para prever a transição entre comportamentos periódicos e caóticos.

2.3 ATRATORES

Em sistemas dinâmicos caóticos, os atratores desempenham um papel central. Um atrator é o conjunto de estados aos quais o sistema tende a convergir ao longo do tempo, e ele pode ter diferentes formas: pontos fixos, ciclos limites e atratores estranhos (ou caóticos). Um atrator estranho é característico de sistemas caóticos e possui uma estrutura complexa, não periódica, que exhibe sensibilidade às condições iniciais.

Atratores estranhos são conhecidos por terem uma dimensão fractal [1], o que significa que eles exibem uma estrutura detalhada em múltiplas escalas. Em vez de preencherem completamente o espaço de fases, os atratores estranhos ocupam uma "região compacta" do espaço, com propriedades de autossimilaridade, onde padrões semelhantes se repetem em diferentes escalas. Esse tipo de estrutura contribui para a natureza imprevisível do sistema, mesmo sendo determinado por leis matemáticas. Exemplos clássicos incluem o atrator de Lorenz, associado à convecção atmosférica, e o atrator de Rössler, que modela sistemas dinâmicos simplificados, além de sistemas discretos como o atrator de Hénon e atratores em circuitos eletrônicos, como o de Chua. Esse tipo de estrutura contribui para a natureza imprevisível do sistema, mesmo sendo determinado por leis matemáticas.

2.4 FRACTAIS E DIMENSÃO FRACTAL

Os fractais são estruturas geométricas complexas que têm uma dimensão fracionária, conhecida como dimensão fractal, que é maior que sua dimensão topológica e representa o grau de complexidade do sistema. Em sistemas dinâmicos caóticos, os fractais surgem naturalmente nas representações dos atratores estranhos, onde a dimensão fractal fornece uma medida quantitativa da complexidade.

A dimensão fractal revela como as trajetórias de um sistema caótico se "enredam" ao longo do tempo, ocupando uma fração não inteira do espaço de fases e tornando a estrutura dos atratores complexa e altamente organizada. Isso pode ser visto em diagramas de bifurcação e em representações gráficas dos atratores estranhos, onde a estrutura fractal é evidente. Fractais são fundamentais para descrever a geometria do caos, demonstrando que, mesmo em sistemas não lineares aparentemente desordenados, existe uma forma de organização subjacente.

Dessa forma, os conceitos de bifurcações, atratores e fractais permitem uma compreensão mais profunda da natureza do caos em sistemas dinâmicos, ilustrando como a ordem e a imprevisibilidade coexistem em sistemas governados por regras matemáticas.

3 MAPA LOGÍSTICO

3.1 CONTEXTO HISTÓRICO DO MAPA LOGÍSTICO

O *mapa logístico* tem suas raízes na ecologia e na teoria do caos, sendo amplamente utilizado para modelar o crescimento populacional de espécies. Inicialmente proposto por Thomas Robert Malthus, em 1798. O matemático elaborou um modelo, conhecido como modelo Malthusiano, no qual sustentava que a população cresceria a tal ponto que seria inviável produzir alimentos suficientes para sustentar toda a população do planeta. Esse modelo é caracterizado por sua natureza não linear, onde o tamanho total da população depende exclusivamente das taxas de natalidade (A), das taxas de mortalidade (B) e do número de indivíduos (N) [8]. A equação matemática que descreve esse modelo é expressa como:

$$\frac{dN}{dt} = (A - B) N \quad (3.1)$$

Em 1845, foi apresentada uma nova proposta de modelo não linear, no qual a mortalidade é proporcional ao quadrado do número de indivíduos. Essa abordagem foi desenvolvida pelo matemático belga Pierre François Verhulst. A equação diferencial que representa esse modelo pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2 \quad (3.2)$$

Já por volta de 1976, o ecólogo britânico Robert McCredie May reformulou esse modelo descrevendo-a como uma equação de diferenças de primeira ordem, apropriada para populações com gerações sucessivas não sobrepostas. Esse modelo discreto é derivado da versão contínua e permite uma análise mais detalhada das variações populacionais ao longo do tempo. O mapeamento proposto por Robert May descreve o crescimento de uma determinada espécie, levando em conta que diversas condições podem impactar esse crescimento. O estudo sugere que, à medida que uma população aumenta, seus recursos alimentares podem se esgotar, resultando na morte de alguns indivíduos, o que, por sua vez, limita o crescimento populacional da espécie [11].

O modelo de equação de diferenças resultante é dado por

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) \quad (3.3)$$

Essa equação corresponde ao modelo do mapa logístico, que é um modelo discreto não linear. Essa equação estabelece que a variável x_{n+1} é determinada a partir do

valor de x_n , e sua evolução é influenciada pelo parâmetro de controle R . O valor máximo que x_n pode atingir é 1, à medida que x_n se aproxima desse limite, x_{n+1} tende a se tornar muito pequeno. Por outro lado, quando x_n se aproxima de 0, x_{n+1} torna-se proporcional ao parâmetro R .

Este mapa é amplamente estudado devido à sua complexidade e à rica variedade de comportamentos dinâmicos que exhibe [1, 9, 12, 13]. A evolução do mapa dependerá do valor que o parâmetro de controle R irá assumir. Podendo o sistema convergir para um único ponto fixo ou uma bifurcação de dobramento de período, possibilitando que o sistema comece a exibir comportamento periódico. À medida que R aumenta, ocorre uma sequência de bifurcações de período, resultando em comportamentos periódicos de períodos cada vez maiores, até que o sistema se torne caótico.

A partir da Eq. (3.3), obtivemos a Fig. 2, que nos mostra graficamente o mapa logístico. A função consiste em uma parábola, com concavidade voltada para baixo, caracterizada por seu máximo localizado em $x_n = \frac{1}{2}$.

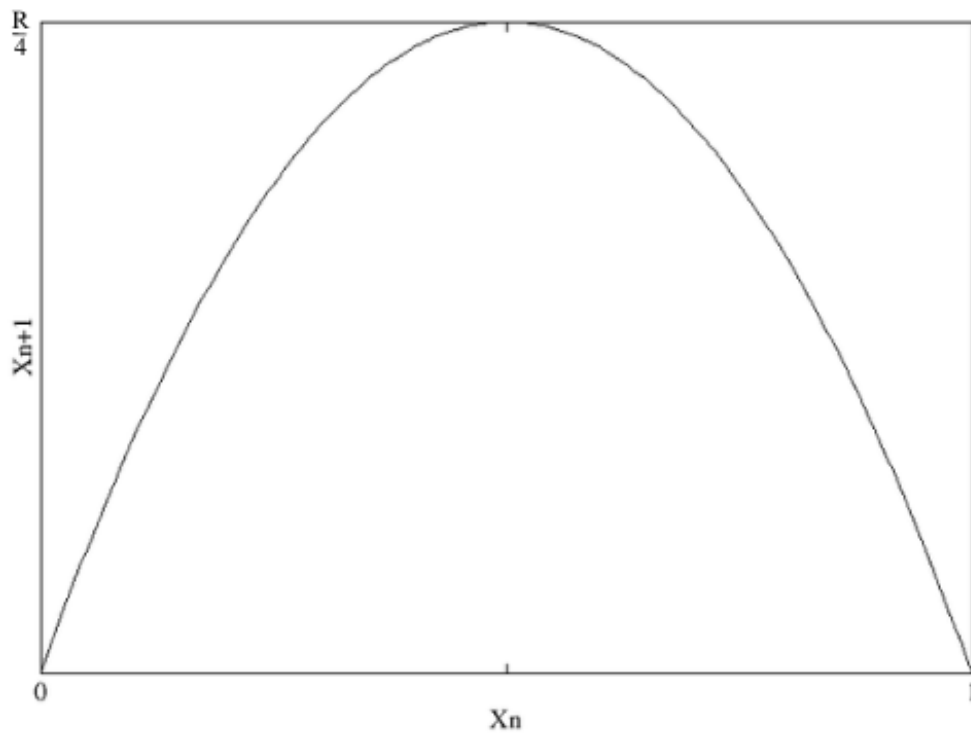


Figura 2 – Função que define o mapa logístico.

3.2 PONTOS FIXOS

Um sistema dinâmico que descreve um fenômeno físico real depende de um ou mais valores do parâmetro R . Como consequência, o comportamento dinâmico do sistema pode mudar significativamente à medida que o valor desses parâmetros é alterado [11]. A dinâmica de um sistema normalmente tende a se estabilizar em um ponto específico ou a divergir dele após várias iterações [9, 14]. Esses pontos são conhecidos como *pontos fixos* de um sistema dinâmico discreto. Nossa análise começa explorando a convergência para esses pontos fixos durante as bifurcações, assim como o comportamento nas regiões ao redor desses pontos que são cruciais para entender como pequenas variações no parâmetro de controle podem causar mudanças drásticas no comportamento do sistema. Para encontrar os pontos fixos x^* , é necessário resolver a seguinte equação:

Considerando o mapa Logístico

$$x_{n+1} = f(x_n, R) = x_n R(1 - x_n) \quad (3.4)$$

$$x^* = f(x^*) \quad (3.5)$$

Os pontos fixos são representados por duas soluções:

$$x_1^* = 0 \quad (3.6)$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{R} \quad (3.7)$$

Para analisar a estabilidade do próximo ponto fixo é feito um processo semelhante ao anterior. Além disso, para $R = 1$, o mapa logístico apresenta uma bifurcação transcítica (quando dois pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico trocam suas estabilidades à medida que um parâmetro do sistema é alterado). Fazendo a mesma análise para a segunda iterada do mapa de período 2, temos:

$$x_{n+2} = R x_{n+1}(1 - x_{n+1}), \quad (3.8)$$

Expandindo a expressão, temos:

$$x_{n+2} = R x_n(1 - x_n) - R [R x_n(1 - x_n)]^2. \quad (3.9)$$

Aplicando a definição de ponto fixo na Equação (3.9), obtemos:

$$x = R^2 x - R^2 x^2 - R^3 x^2 + 2R^3 x^3 - R^3 x^4. \quad (3.10)$$

Resolvendo a Equação (3.10), encontramos as seguintes raízes: $x = 0$, $x = 1 - \frac{1}{R}$ as duas novas raízes resultam em:

$$x = \frac{R + 1 \pm \sqrt{(R + 3)(R + 1)}}{2R}. \quad (3.11)$$

Teoricamente, não é prático analisar a estabilidade de novos pontos fixos desta mesma maneira devido à complexidade envolvida, já que a análise faz-se muito trabalhosa e, por vezes, impossível. Assim, é mais vantajoso realizar um estudo numérico a partir desse ponto, especialmente para as próximas iteradas do mapa.

Com base nisso, dada uma condição inicial, torna-se possível estudar a estabilidade dos pontos fixos analisando se as iterações sucessivas se aproximam ou se afastam do ponto fixo. Isso é feito observando o comportamento das sucessivas iterações a partir de um ponto inicial x_n próximo a x^* . Dessa forma, é possível classificar x^* como *assintoticamente estável* ou *instável* [1]. A classificação dependerá da sequência de pontos $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$. Se essa sequência convergir para x^* , o ponto fixo será considerado *assintoticamente estável* e, caso a sequência divergir, o ponto fixo será classificado como *instável*.

Como os valores de R determinam a estabilidade dos pontos de equilíbrio [13, 14], os pontos de equilíbrio são encontrados resolvendo (3.4). As figuras a seguir são compostas pela curva constituída pelo mapa logístico em conjunto reta identidade que serve como uma representação visual da equação de iteração do mapa para a qual, dado o valor x_{n+1} é calculado a partir do seu valor x_n .

- Ponto fixo Assintoticamente Estável: O ponto de equilíbrio se torna assintoticamente estável quando $R < 3$

A Fig. 3 mostra que para valores do parâmetro de controle como $R = 1,75$, o sistema converge para um ponto fixo. Isso ilustra o comportamento estável que o mapa logístico pode exibir em determinadas condições, antes de ocorrerem bifurcações que levarão a estados mais complexos.

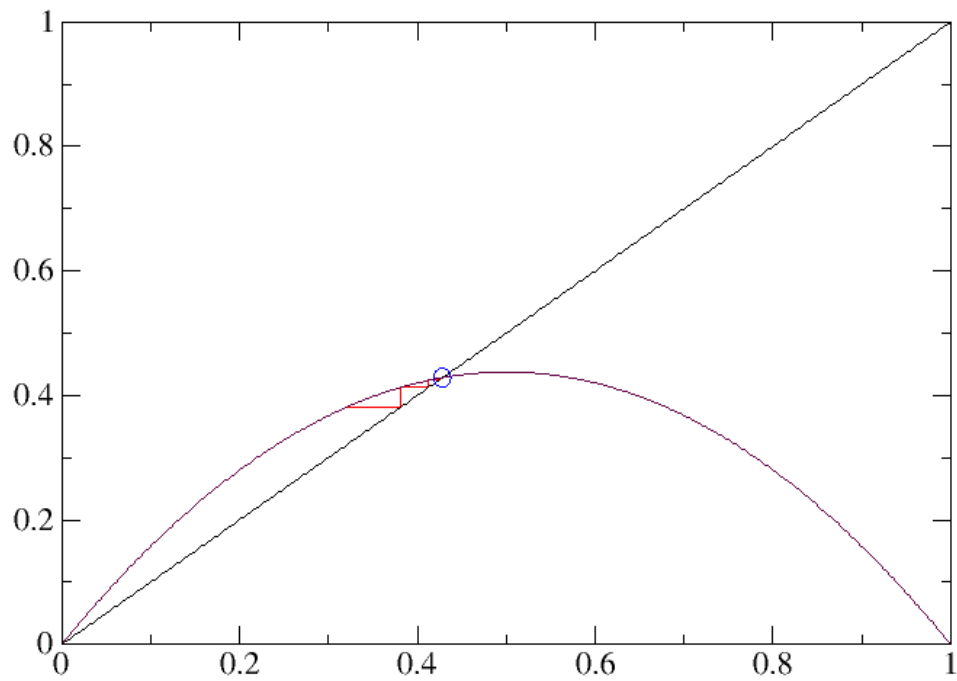


Figura 3 – Mapa logístico: ponto fixo para $R = 1,75$.

- Ponto Fixo Estável: Um ponto de equilíbrio é estável quando $3 < R < 3,57$. Nesse intervalo, o sistema pode apresentar comportamento caótico em certos casos, mas ainda assim terá pontos de equilíbrio que são estáveis.

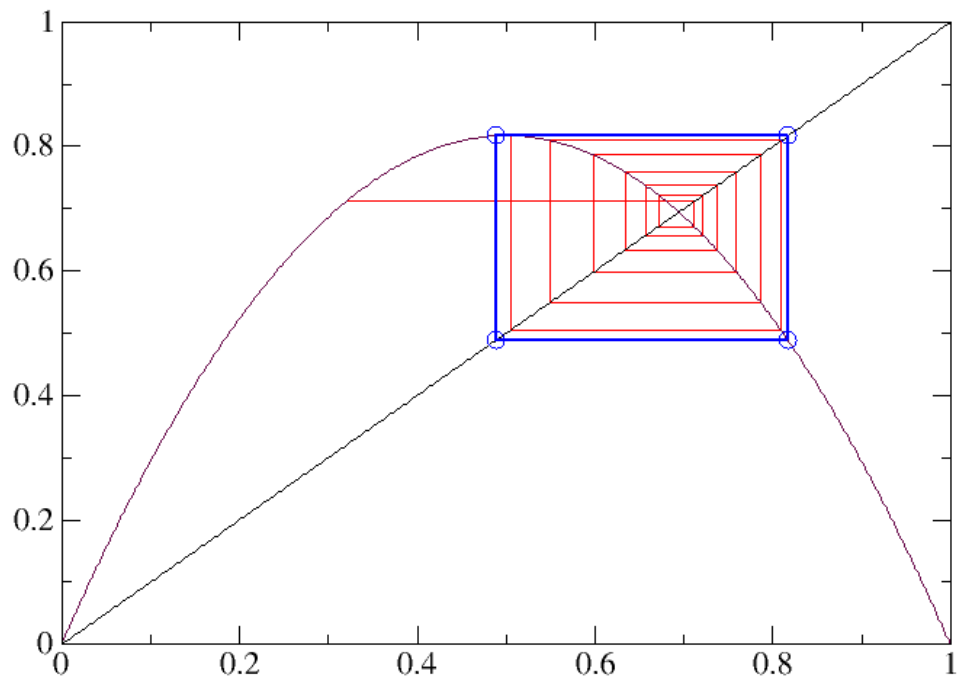


Figura 4 – Mapa logístico: ciclo limite atrativo de período 2 para $R = 3,27$.

- Ponto Fixo Instável: Quando $R > 3,57$, o ponto de equilíbrio se torna instável. Em $R = 4$, o sistema é completamente caótico, e os pontos de equilíbrio perdem a estabilidade.

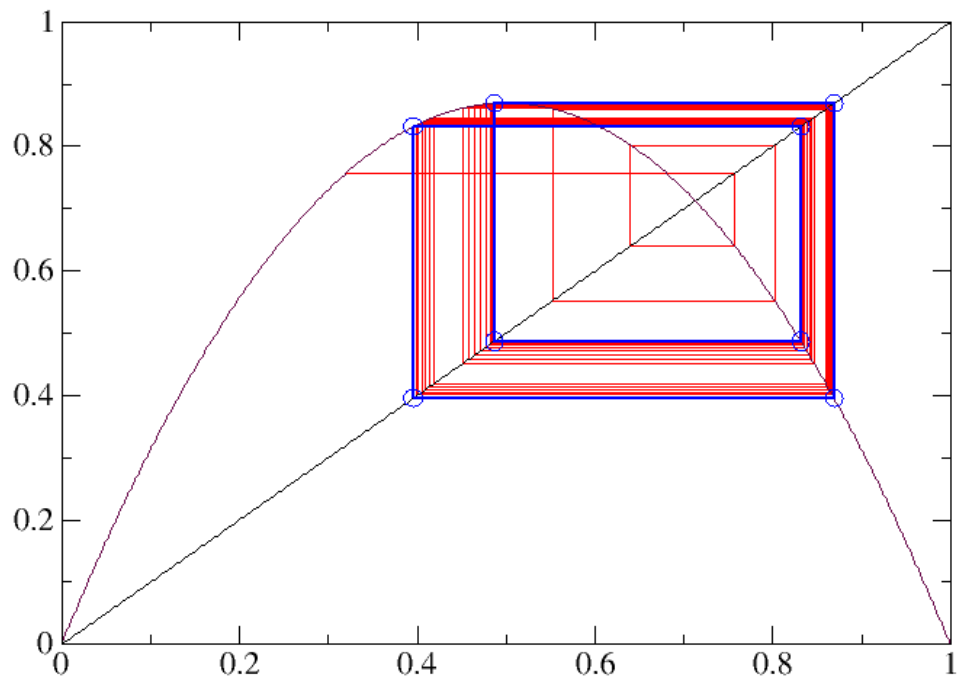


Figura 5 – Mapa logístico: ciclo limite atrativo de período 4 para $R = 3,48$.

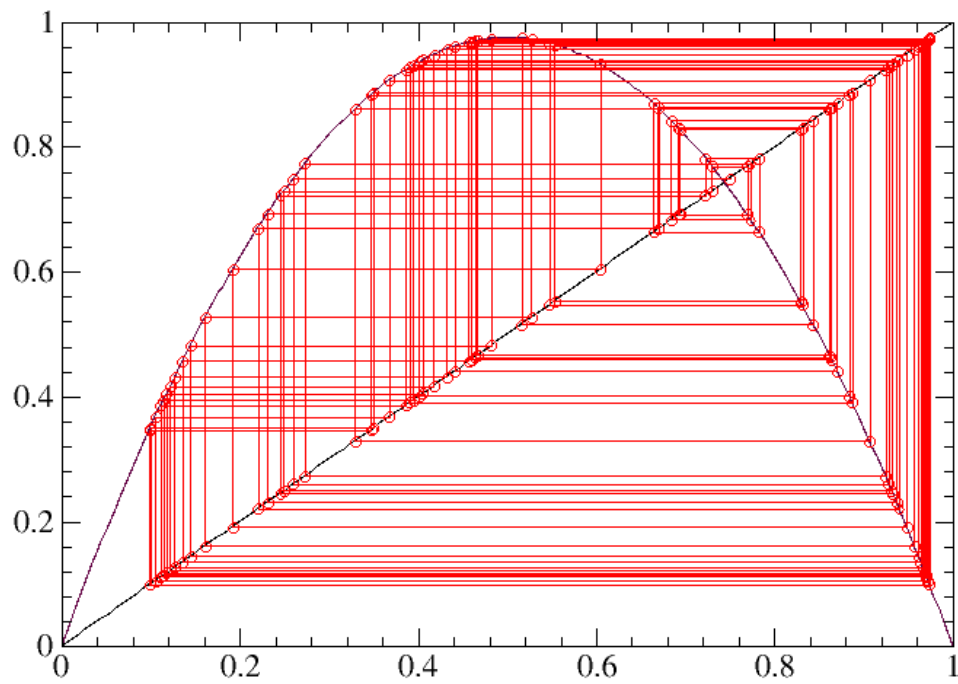


Figura 6 – Mapa logístico: comportamento caótico para $R = 3,90$

3.2.1 Tipos de Bifurcação no Mapa Logístico

No contexto do mapa logístico, ocorrem principalmente dois tipos de bifurcações: bifurcação transcritical e bifurcação de duplicação de período, cada uma com características distintas no comportamento dinâmico do sistema [8,9].

3.2.1.1 Bifurcação Transcritical

A bifurcação transcritical ocorre no mapa logístico quando o parâmetro de controle R atinge o valor 1. Neste ponto, há uma mudança de estabilidade nos pontos fixos: o ponto fixo $x = 0$, que é estável para $R \in (0, 1)$, torna-se instável para $R > 1$, enquanto o ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{R}$ que era instável e se torna estável para $R \in (1, 3)$. A transição neste tipo de bifurcação é caracterizada pela troca de estabilidade entre esses pontos fixos, resultando em uma mudança qualitativa no comportamento do sistema [10,11]. Esse tipo de bifurcação é relativamente simples e não envolve oscilações, apenas uma alteração no ponto de equilíbrio.

3.2.1.2 Bifurcação de Duplicação de Período

Conforme R assume um valor maior que 3, o sistema passa por uma série de bifurcações de duplicação de período. O processo de rota de duplicação de período para o caos ocorre em pontos específicos onde o sistema alterna entre novos comportamentos de oscilação. Para valores de R_n entre aproximadamente 3 e 3,57 o sistema dobra o número de pontos em sua órbita estável. Ou seja, o sistema oscila inicialmente entre dois valores, depois quatro, oito, e assim por diante, dobrando o número de valores em cada etapa [7].

Essas duplicações de período continuam até que o sistema entre em um regime caótico para valores de R próximos a 3,57. Esse comportamento é caracterizado pela sensibilidade extrema a pequenas variações nas condições iniciais, onde o sistema se torna imprevisível e caótico. A sequência de duplicações de período ocorre em intervalos de R que diminuem de forma geométrica, tendendo para a constante de Feigenbaum, $\delta \approx 4,669$. Esse fenômeno é uma característica universal de sistemas dinâmicos que transitam para o caos através da duplicação de períodos [7].

3.2.1.3 Janelas de Periodicidade e Bifurcações Intermitentes

Mesmo na região caótica, o mapa logístico exibe janelas de periodicidade onde o sistema retorna temporariamente a um comportamento periódico para valores específicos de R . Nessas janelas, ocorrem bifurcações intermitentes que restauram temporariamente um comportamento ordenado antes de retornar ao caos à medida que R continua aumentando [12]. Esse fenômeno exemplifica a complexidade e a estrutura fractal do sistema, onde diferentes regiões de R contêm sub-regiões periódicas imersas no caos [7].

A análise dessas bifurcações fornece uma compreensão mais profunda da transição para o caos no mapa logístico e destaca a importância da constante de Feigenbaum e do conceito de rota de duplicação de período como preditores de comportamento caótico em sistemas dinâmicos não lineares. Essas transições são observáveis no diagrama de bifurcação nas Figs. 7 e 8, que visualiza a progressão de estados estáveis para caóticos conforme R é alterado.

3.3 ANÁLISE DE BIFURCAÇÃO NO MAPA LOGÍSTICO

O termo bifurcação refere-se a uma mudança qualitativa no comportamento de um sistema dinâmico quando um ou mais parâmetros são alterados [1,4,10]. Para conjuntos específicos desses parâmetros, o sistema pode experimentar uma transição em sua dinâmica, resultando em novas estruturas de solução ou comportamento. Esses valores críticos de parâmetro são conhecidos como bifurcações [15,16].

Em sistemas não-lineares, conforme um parâmetro é ajustado, o sistema pode transitar de um estado de equilíbrio estável para um comportamento oscilatório ou de uma solução periódica para um comportamento periódico ou caótico [5]. Essa transição brusca em resposta a pequenas variações de parâmetro caracteriza uma bifurcação [7].

O estudo das bifurcações é amplamente aplicado em modelos matemáticos, especialmente na análise de sistemas como o mapa logístico, onde pequenas alterações no parâmetro de crescimento podem gerar transições entre dinâmicas periódicas e caóticas [8,1]. Um exemplo paradigmático é a rota para o caos via sequência de bifurcações de dobramento de período, o conhecido cenário de Feigenbaum.

Número de duplicação de período	R_n	$R_n - R_{n-1}$	$\delta = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}$
2	3	—	—
4	3,449499...	0,449499...	—
8	3,544090...	0,094591...	4,752027...
16	3,564407...	0,020313...	4,656673...
32	3,568759...	0,00093219...	4,667509...
∞	3,569692...	0,00019964...	4,669354...

Tabela 1 – Valores críticos para bifurcações de duplicação de período 2, 8, 16, 32,..., ocorrem a medida que R aumenta [9,15].

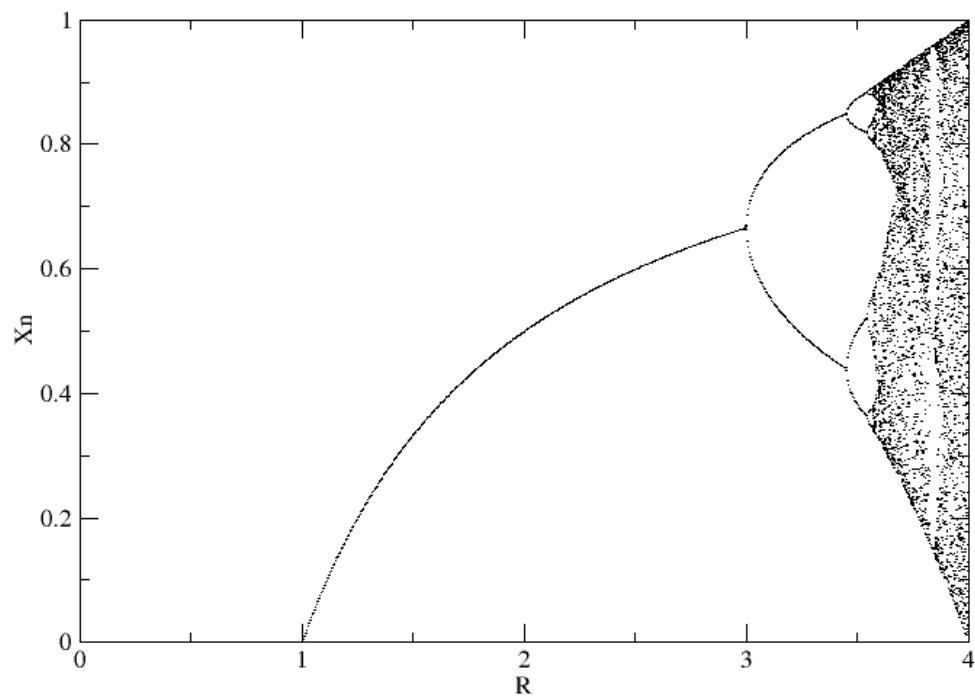


Figura 7 – Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico.

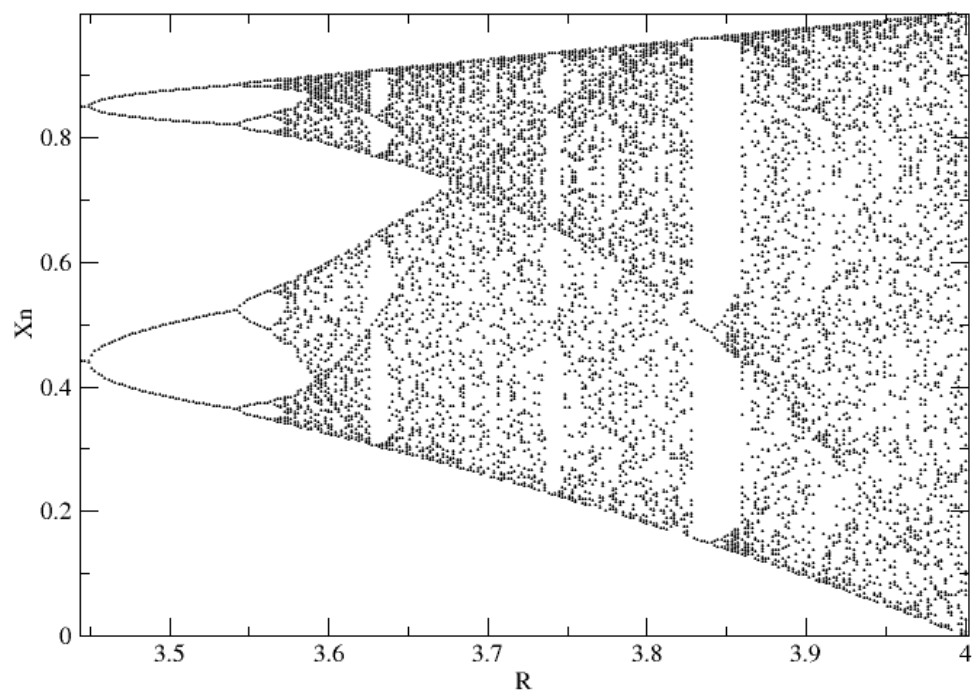


Figura 8 – Diagrama de Bifurcação ampliado do Mapa Logístico.

Na Tabela 1, R_n é o valor do parâmetro de controle do mapa logístico da n -ésima bifurcação de dobramento de período [19]. A primeira bifurcação ocorre para $R = 3$, a segunda para $R = 3,4494999\dots$, e assim por diante. A sequência R_n parece convergir para R_∞ , um valor limite à medida que n aumenta, segundo a lei de escala δ . Essa lei descreve o comportamento das bifurcações sucessivas, em que o quociente $\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}$ tende a uma constante universal conhecida como número de Feigenbaum, aproximadamente igual a 4,669354...

O delta de Feigenbaum é uma constante que descreve a relação entre os intervalos de bifurcação em sistemas dinâmicos caóticos, particularmente no contexto da dinâmica do mapa logístico [7]. Essa constante aparece ao se observar as sucessivas bifurcações que ocorrem quando o parâmetro de um sistema dinâmico é alterado, conduzindo o sistema de um comportamento periódico para um estado caótico. A propriedade fundamental do delta de Feigenbaum é que ele é universal, ou seja, aparece em uma variedade de sistemas dinâmicos que exibem bifurcações, independentemente da forma exata do sistema, desde que o comportamento caótico seja gerado por bifurcações periódicas.

Feigenbaum demonstrou que, à medida que o sistema se aproxima da bifurcação para o caos, a razão entre as distâncias sucessivas entre os pontos de duplicação de período tende ao valor do delta, um fenômeno que foi observado em várias funções matemáticas, como o mapa logístico e o mapeamento de uma equação de diferença não linear. Este comportamento dinâmico, descrito pela constante de Feigenbaum, é crucial para a compreensão de como sistemas aparentemente simples podem exibir complexidade e comportamento caótico [7,20]. A descoberta de Feigenbaum nos anos 1970 se tornou um dos pilares da teoria do caos, com implicações significativas em áreas como física, biologia e economia, onde sistemas dinâmicos são frequentemente modelados.

4 MAPA LOGÍSTICO PERIODICAMENTE PERTURBADO

O mapa logístico periodicamente perturbado é uma extensão do modelo logístico clássico, que introduz uma variação periódica no parâmetro de controle R . Enquanto o mapa logístico clássico é descrito pela equação:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n), \quad (4.1)$$

onde x_n representa a variável dinâmica e R é o parâmetro de controle, no caso do mapa periodicamente perturbado, o parâmetro R alterna periodicamente entre dois valores distintos, A e B . Essa alternância é definida de acordo com a paridade de n , de forma que:

$$R_n = \begin{cases} B, & \text{se } n \text{ é par,} \\ A, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, a equação do mapa logístico periodicamente perturbado pode ser expressa como:

$$x_{n+1} = \begin{cases} Bx_n(1 - x_n), & \text{se } n \text{ é par,} \\ Ax_n(1 - x_n), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (4.3)$$

A introdução da perturbação periódica no parâmetro de controle modifica a dinâmica do sistema, alterando o comportamento das órbitas e a organização das estruturas periódicas e caóticas no espaço dos parâmetros. Esse tipo de perturbação pode gerar novas órbitas periódicas e modificar as regiões de estabilidade do sistema, revelando padrões mais complexos do que os observados no mapa logístico clássico.

4.1 ESPAÇO DE PARÂMETROS

O espaço de parâmetros em sistemas dinâmicos representa a configuração dos valores que controlam o comportamento do sistema, determinando se ele exibirá dinâmica periódica, caótica ou outras formas de comportamento. No contexto de sistemas como o mapa logístico, o espaço de parâmetros é essencial para entender como pequenas variações em um ou mais parâmetros podem levar a transições abruptas de estabilidade, como bifurcações e caminhos para o caos. Esse espaço é organizado de forma complexa e frequentemente apresenta uma estrutura fractal, com regiões de estabilidade (isoperiódicas) rodeadas por zonas caóticas. Essas regiões isoperiódicas correspondem a valores específicos

dos parâmetros onde o sistema mantém uma periodicidade constante, enquanto as fronteiras entre elas refletem mudanças drásticas no comportamento, onde ocorrem bifurcações. Analisar o espaço de parâmetros permite prever a estabilidade do sistema em diferentes condições, sendo fundamental para o controle de sistemas dinâmicos em áreas onde a manutenção de uma certa estabilidade é crucial.

4.2 ANÁLISE DE ISOPERIODICIDADE

A análise de isoperiodicidade do mapa logístico explora o comportamento dos pontos de órbitas periódicas com o mesmo período, ou seja, regiões do espaço dos parâmetros onde o sistema exibe uma periodicidade constante. No mapa logístico, o estudo de isoperiodicidade permite identificar faixas de valores de parâmetro onde o comportamento do sistema é estável e previsível, contrastando com as regiões caóticas.

A análise dos diagramas das Figs. 9, 10, 11 e 12 mostram o comportamento de periodicidade no espaço dos parâmetros de um sistema dinâmico, a partir do mapa logístico periodicamente perturbado, i.e., a cada iteração do mapa, o parâmetro R assume uma sequência de valores A e B que se repete periodicamente durante a evolução do sistema. Esses diagramas, também conhecidos como diagramas de isoperiodicidade, indicam onde ocorrem órbitas de diferentes períodos para determinados valores dos parâmetros. As regiões coloridas representam janelas periódicas, enquanto as áreas escuras representam comportamentos mais complexos, podendo ser incluídos comportamentos caóticos.

Na Fig. 9, o espaço dos parâmetros A e B é explorado onde R assume os valores alternadamente $BABA$. Observa-se uma grande região de baixa periodicidade (cores frias, como azul claro), intercalada por regiões menores de períodos mais altos (cores quentes, como vermelho e rosa). O formato das estruturas lembra ramificações que emergem do centro da figura, o que é característico de sistemas com transições de período para caos. Essa configuração indica como a variação de R afeta a estabilidade do sistema.

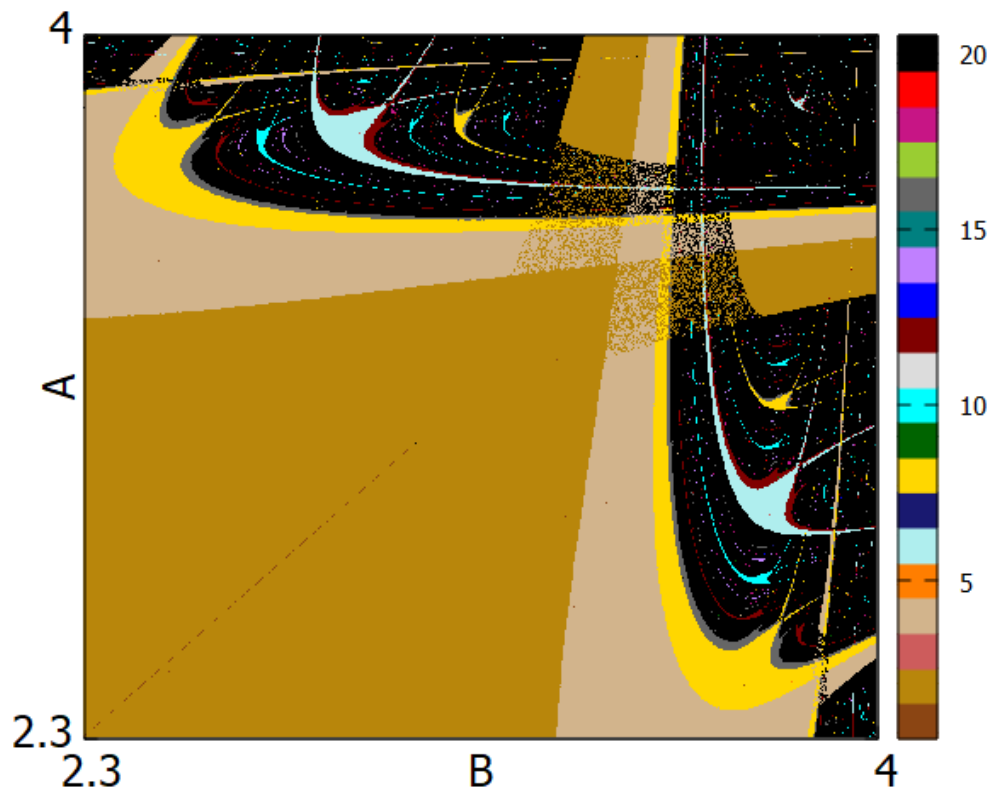


Figura 9 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado $R = BABA$.

Na Fig. 10, o espaço dos parâmetros A e B é novamente examinado, mas em uma região bastante pequena e detalhada, focando nas interações entre as regiões de comportamento periódico (regiões coloridas) e zonas caóticas (áreas escuras). As estruturas aparentes lembram os chamados *shrimps* de estabilidade cercados por caóticos, mostrando como pequenas variações em A e B podem levar o sistema a diferentes estados de periodicidade.

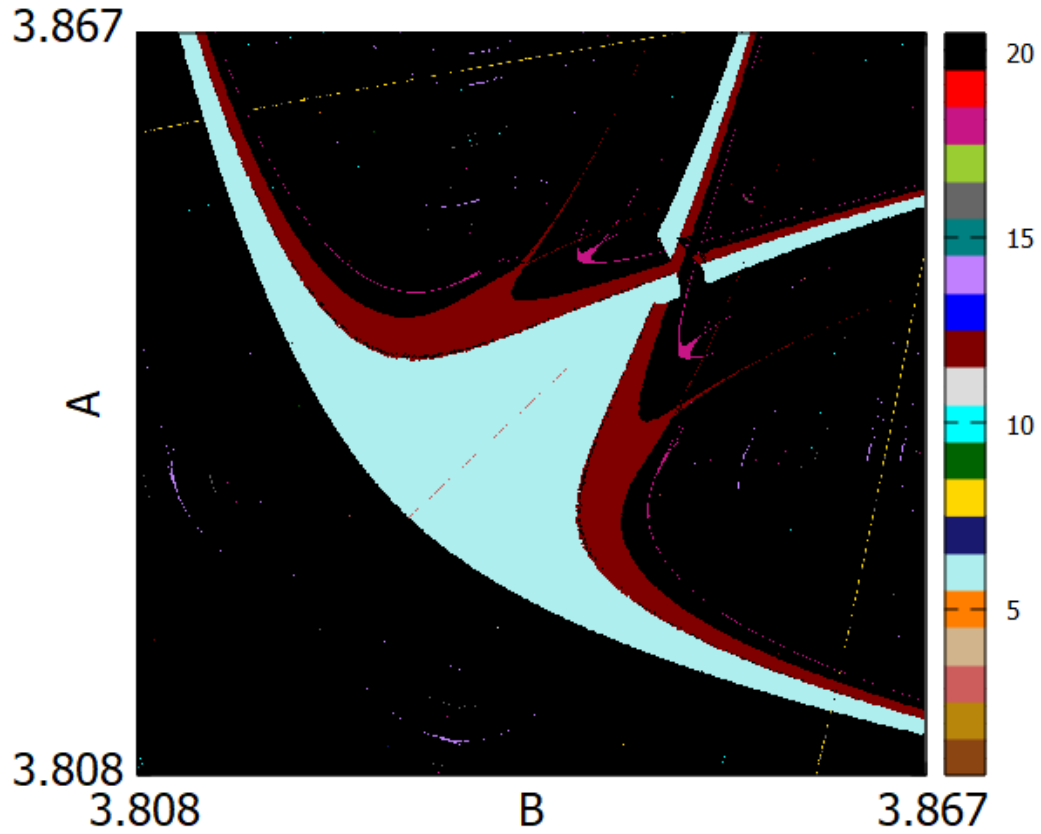


Figura 10 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado ampliado $R = BABA$.

Na Fig. 11, as cores indicam diferentes períodos, conforme a legenda à direita. Nela, R assume a sequência periódica $BBABABA$. Observa-se uma estrutura rica e fractal com regiões de alta periodicidade (áreas coloridas) entremeadas por regiões caóticas (áreas escuras). A complexidade desse padrão sugere a existência de múltiplas bifurcações, onde pequenas variações nos parâmetros A e B resultam em mudanças abruptas no período das órbitas.

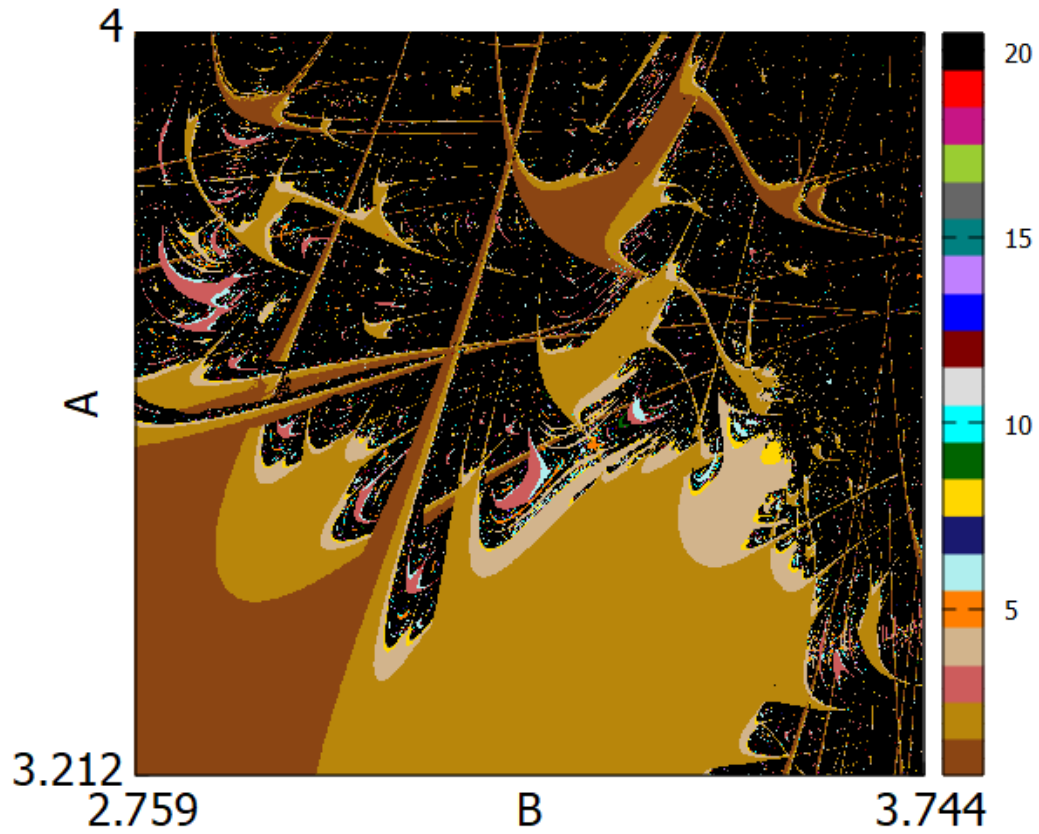


Figura 11 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado $R = BBABABA$.

A Fig. 12 também representa o espaço dos parâmetros, mas em uma faixa mais restrita, o que permite visualizar detalhes adicionais nas regiões isoperiódicas. Aqui, as janelas de periodicidade são mais bem definidas, com áreas largas de estabilidade que se alternam com linhas e faixas finas de caos, sugerindo uma sequência de bifurcações de períodos sucessivos.

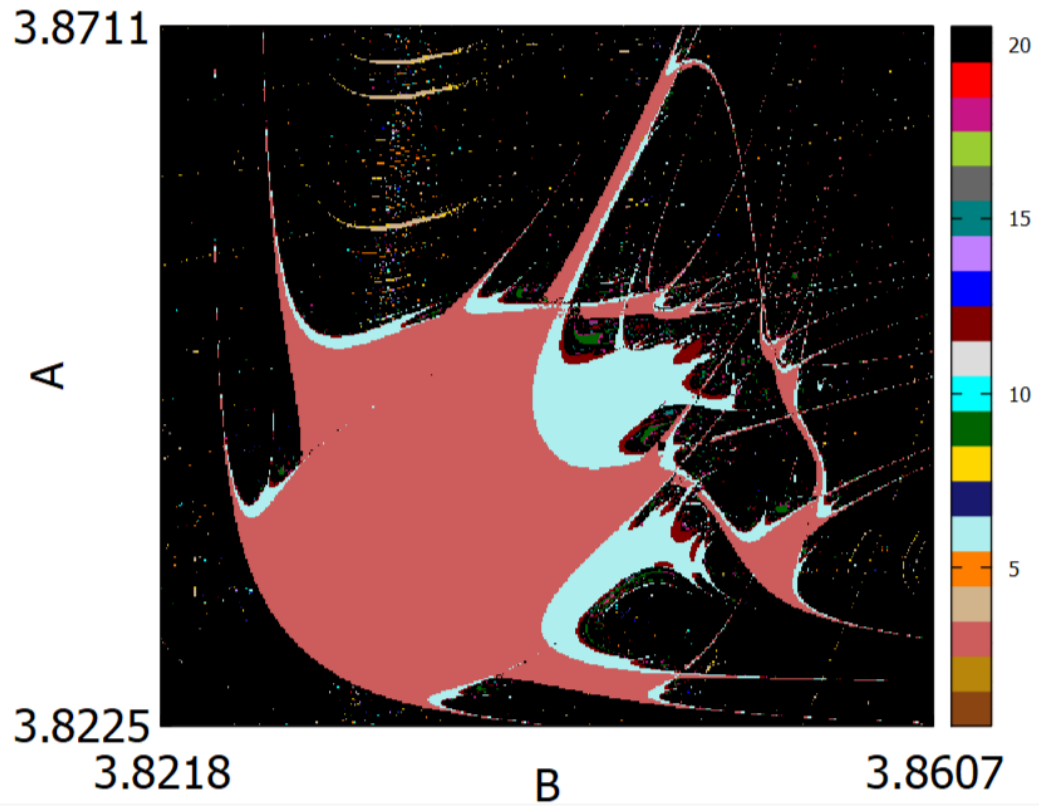


Figura 12 – Diagrama de isoperiodicidade: mapa logístico periodicamente perturbado ampliado $R = BBABABA$.

Esses diagramas de isoperiodicidade revelam a organização fractal do espaço dos parâmetros de sistemas dinâmicos complexos. Cada figura destaca como certos parâmetros influenciam a estabilidade e a transição entre comportamentos periódicos e caóticos, o que é crucial para entender as dinâmicas do mapa logístico e outros sistemas não-lineares. A análise de diagramas como esses ajuda a identificar regiões de estabilidade para aplicações práticas, como controle de sistemas caóticos, além de fornecer uma estrutura visual rica e intrincada das bifurcações e da organização dos períodos.

4.3 EXPOENTE DE LYAPUNOV

O expoente de Lyapunov é uma ferramenta utilizada para medir a taxa de crescimento ou decaimento das diferenças entre trajetórias próximas em um sistema dinâmico [12,14,21], possibilitando a determinação de caos nos sistemas dinâmicos [14]. Em termos simples, ele nos descreve o quão sensível um sistema é às condições iniciais (x_0). Quando pequenos desvios nas condições iniciais crescem exponencialmente ao longo do tempo, o sistema exibe comportamento caótico. O expoente de Lyapunov é o número que quantifica essa taxa de crescimento.

Para obter o expoente de Lyapunov, consideramos o esquema abaixo, com uma condição inicial x_0 e outra a uma distância di muito próxima de x_0 . A medida que o tempo evolui essa trajetória se deforma, fazendo com que di tenha variado exponencialmente no tempo. Para o mapeamento unidimensional devemos considerar o seguinte esquema:

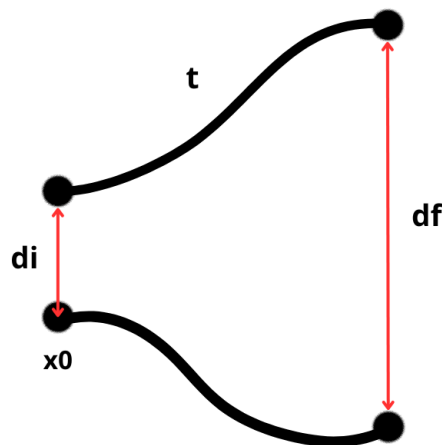


Figura 13 – Trajetória percorrida por x_0 no espaço.

de maneira que a relação entre di e o valor correspondente no instante t , dado por df corresponde a:

$$df = di e^{\lambda t} \quad (4.4)$$

Ao isolar λ , temos:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df}{di} \right|. \quad (4.5)$$

Como desejamos que di seja o menor possível,

$$\lambda = \lim_{di \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df}{di} \right| \quad (4.6)$$

expandindo (4.6):

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \lim_{di \rightarrow 0} \left| \frac{f^n |x_0 + di| - f^n(x_0)}{di} \right| \quad (4.7)$$

Com isso, a definição do expoente de Lyapunov é dada pela média dessa medida no tempo, assim:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |(f^n)'(x_n)|, \quad (4.8)$$

Expandindo a equação (4.4)

$$(f^n)'(x_n) = [f(f(f...f(x_0)...))] \quad (4.9)$$

$$(f^n)'(x_n) = f'(x_0)' f'(x_1)' f'(x_2)' ... f'(x_{n-1})' \quad (4.10)$$

onde f é a função que define o mapa. Logo, λ pode ser calculado a partir da seguinte equação:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| \quad (4.11)$$

A Eq.(4.7) define o expoente de Lyapunov característico para mapeamentos unidimensionais. Ao analisar os sinais, podemos concluir que a divergência exponencial é caracterizada por um expoente de Lyapunov positivo $\lambda > 0$, enquanto a convergência está associada a um expoente negativo $\lambda < 0$. Um caso especial é o de $\lambda = 0$, que indica a presença de um ponto de bifurcação.

A imagem a seguir ilustra como o $\ln |f'(x)|$ da Eq. (4.7) é calculado ao longo de uma trajetória. A partir de uma sequência de pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$, em um dinâmico, o expoente de Lyapunov mede a taxa média de divergência entre duas trajetórias infinitesimalmente próximas em um sistema dinâmico, sendo um indicador de caos.

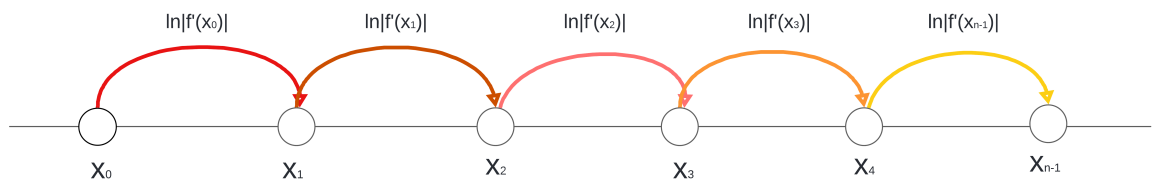


Figura 14 – Diagrama representando o cálculo do expoente de Lyapunov, onde $\ln |f'(x_i)|$ indica a contribuição local da derivada da função f em cada ponto x_i para medir a evolução da distância entre duas trajetórias próximas.

A função $f(x_i)$ descreve a dinâmica do sistema e sua derivada $f'(x_i)$ em cada ponto x_i quantifica como pequenas perturbações se ampliam ou se reduzem localmente. O termo $\ln |f'(x_i)|$ corresponde à contribuição local de x_i para o cálculo do expoente de Lyapunov, que mede a sensibilidade às condições iniciais. Se $|f'(x_i)| > 1$, as trajetórias próximas divergem, enquanto $|f'(x_i)| < 1$ indica convergência. O expoente de Lyapunov total é calculado pela média dessas contribuições ao longo de várias iterações, representada pelo somatório $\sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$, dividido pelo número de iterações n . O valor final do expoente de Lyapunov, λ , é obtido no limite $n \rightarrow \infty$, indicando se o sistema é caótico ($\lambda > 0$) periódico ($\lambda < 0$), ou se está sofrendo uma bifurcação ($\lambda = 0$). Vale ressaltar que um comportamento quase-periódico também apresenta $\lambda = 0$. No entanto, tal estado não se manifesta no mapa logístico.

4.3.1 Análise do Expoente de Lyapunov

Para que o expoente de Lyapunov meça a divergência exponencial dos atratores é necessário derivar o mapa logístico periodicamente perturbado com a sequência BA , a partir da equação (3.4). Consideramos $R = B$, se n é par e $R = A$, se n é ímpar. Logo, para n par, temos:

$$x_{n+1} = x_n B(1 - x_n) \quad (4.12)$$

Para n ímpar.

$$x_{n+2} = x_n A(1 - x_n) \quad (4.13)$$

Substituindo (4.8) e (4.9) em (3.4).

$$f(x) = A[Bx_n(1 - x_n)][1 - Bx_n(1 - x_n)] \quad (4.14)$$

A partir da equação (4.10) temos a representação do mapa logístico periodicamente perturbado. Derivando essa expressão, temos:

$$f'(x) = A\{[B(1 - 2x_n)][1 - Bx_n(1 - x_n)] + [Bx_n(1 - x_n)(B + 2x_n)]\} \quad (4.15)$$

Resultando em:

$$f'(x) = AB(1 - 2x_n)[1 - 2Bx_n(1 + x_n^2)] \quad (4.16)$$

Por fim, substituindo a equação (4.12) em (4.7) obtemos o expoente de Lyapunov para o mapa logístico periodicamente perturbado:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |AB(1 - 2x_n)[1 - 2Bx_n(1 + x_n^2)]| \quad (4.17)$$

A partir desses resultados, obtivemos as Figs. 15, 16, 17 e 18, denominadas Diagramas de Lyapunov, nas quais foram utilizadas uma sequência de valores A e B pré-definidos para inserir perturbações no espaço de parâmetros do sistema.

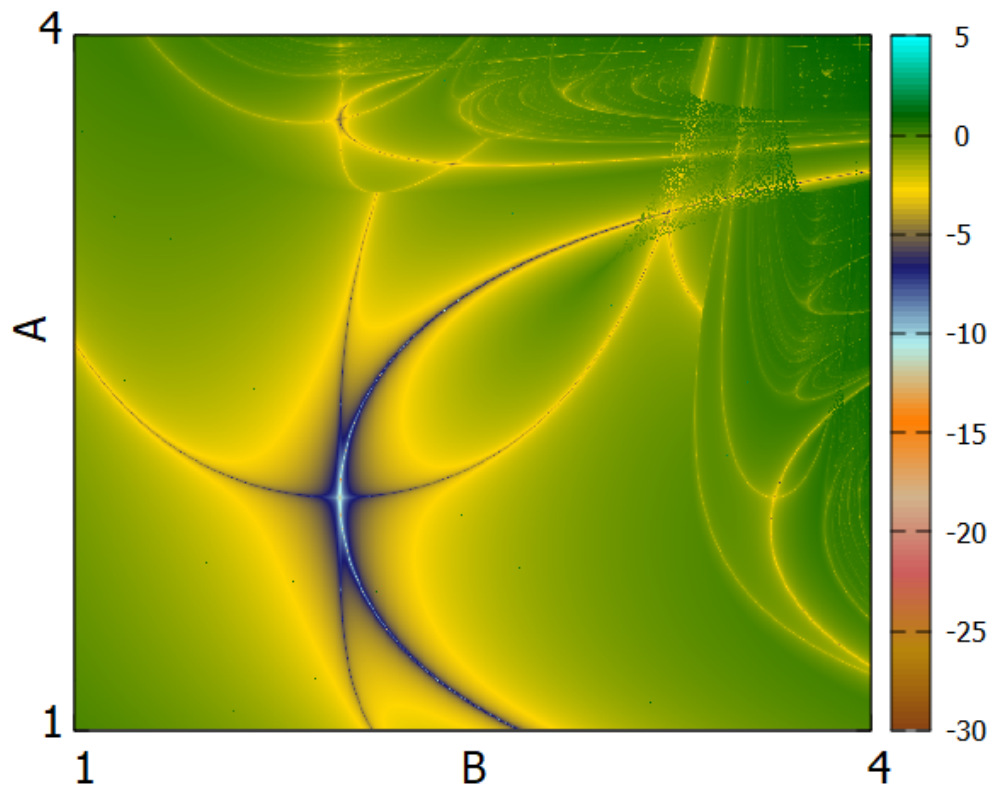


Figura 15 – Diagrama de Lyapunov na sequência $R = BABA$.

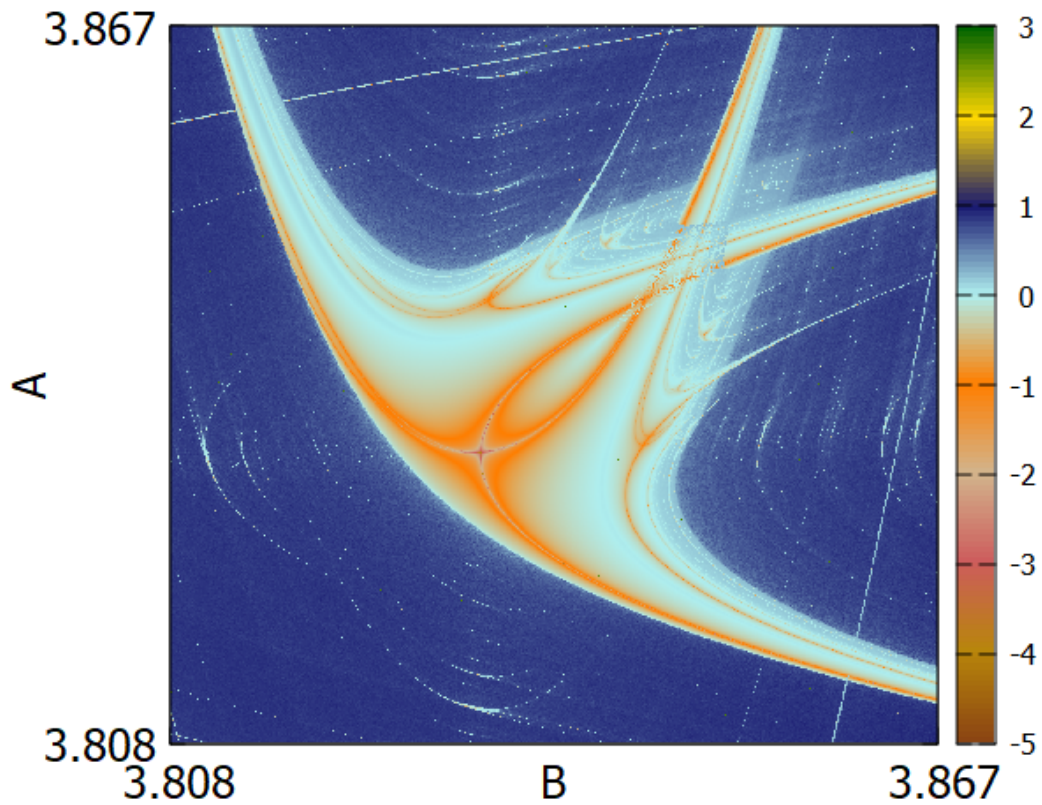


Figura 16 – Diagrama de Lyapunov ampliado na sequência $R = BABA$.

As Figuras analisam as dinâmicas de um sistema em função de dois parâmetros, representados nos eixos rotulados como A e B , ambos variando entre 1 e 4 representando o parâmetros do sistema dinâmico. As cores nas figuras indicam os valores do expoente de Lyapunov em diferentes regiões do espaço de parâmetros, fornecendo informações sobre a estabilidade do sistema.

Tal que, a barra de cores indica o valor de λ identificando estabilidade ou periodicidade, se $\lambda < 0$, e indica comportamentos caóticos, se $\lambda > 0$. As Figuras também apresentam padrões de bifurcações, que mostram as transições entre regimes dinâmicos estáveis e caóticos conforme os parâmetros são ajustados.

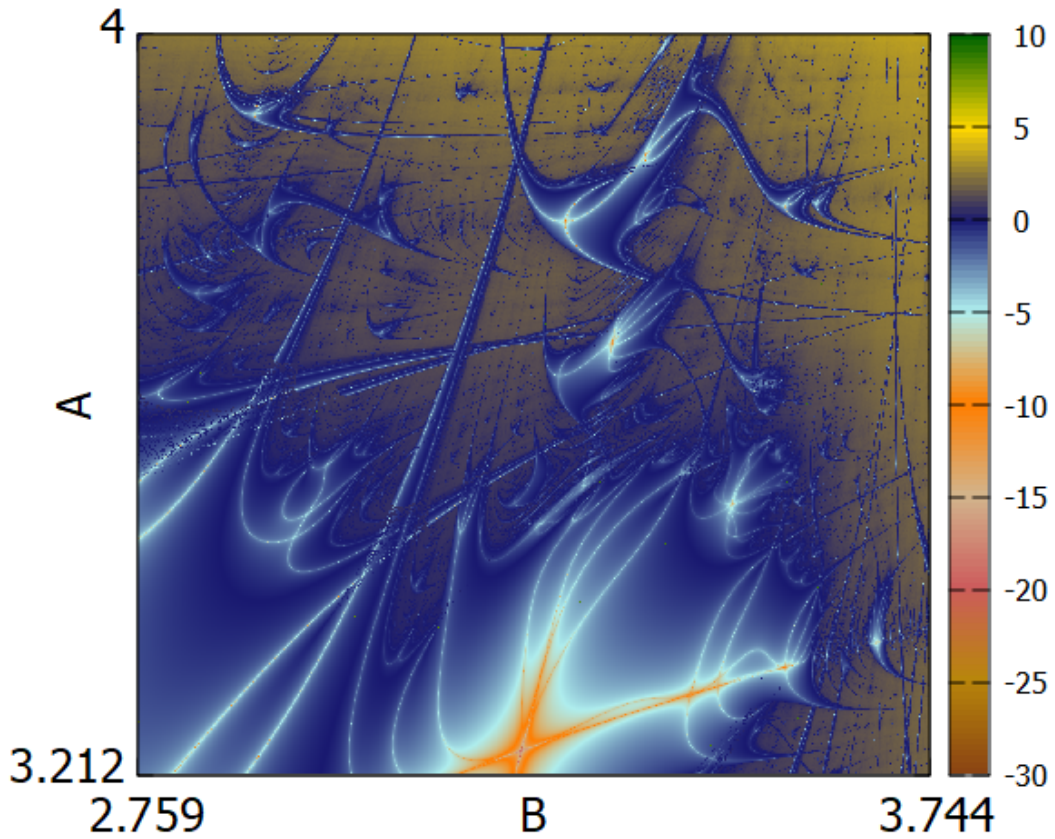


Figura 17 – Diagrama de Lyapunov na sequência $R = BBABABA$.

Para as Figs. 15 e 16 foram empregados valores para sequência de perturbação de $R = BABA$. Na Fig. 15 é possível visualizar a distribuição dos conjuntos de periodicidade. Algumas dessas estruturas periódicas são chamadas de *shrimp-like*, pintadas de azul e amarelo rodeada por caos, representado pela cor verde.

Já se analisarmos a Fig. 16, percebemos que ela é uma representação ampliada da Figura anterior, no qual conseguimos visualizar com precisão o *shrimp-like*, mostrando que a estrutura é composta por estabilidade nas regiões alaranjadas e periódicas nas regiões azul claro e assim como na Fig. 15 é rodeada por caos.

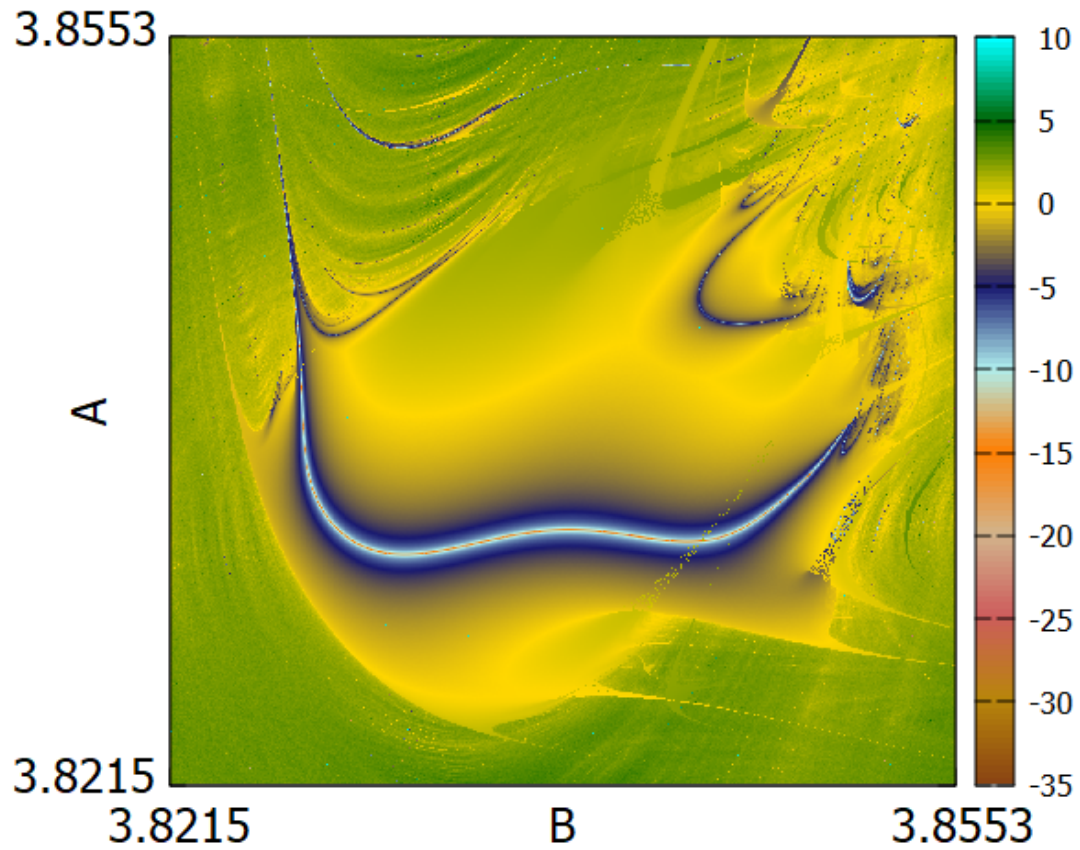


Figura 18 – Diagrama de Lyapunov ampliado na sequência $R = BBABABA$.

Nas Figs. 17,18 foi utilizado a sequência de perturbação $R = BBABABA$. Na Fig. 17, torna-se perceptível a deformação das estruturas de periodicidade, resultado de uma perturbação maior ao espaço dos parâmetros. A partir dela visualizamos o quão complexa é a distribuição dos conjuntos de periodicidade. Já na Fig. 18 visualizamos a ampliação da figura anterior, constituída por uma estrutura de periodicidade central, que quando comparada à Fig. 16, possui um alto grau de deformação.

5 CURVAS EXTREMAS E SUPERESTÁVEIS

O estudo de curvas extremas e superestáveis é importante para a análise da complexidade e organização estrutural de sistemas dinâmicos. No contexto de sistemas unidimensionais, como o mapa logístico, essas curvas podem ser utilizadas para identificar regiões de periodicidade e entender a distribuição das janelas periódicas no espaço de parâmetros. Para isso, foram exploradas as definições e aplicações das curvas extremas e superestáveis no mapa logístico, investigando suas implicações na organização do espaço de parâmetros e nas transições entre comportamento periódico e caótico.

5.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE CURVAS EXTREMAS E SUPERESTÁVEIS

Considerando um mapeamento unidimensional $x_{n+1} = F(x_n)$ que dependa de um ou mais parâmetros, uma órbita de período k é definida como superestável se a derivada da função composta $F^{(k)}(x_n)$ em relação a x_n for igual a zero:

$$\frac{d}{dx_n} F^{(k)}(x_n) = 0, \quad (5.1)$$

onde:

$$\frac{d}{dx_n} F^{(k)}(x_n) = \prod_{t=0}^{k-1} F' (F^{(t)}(x_n)) , \quad (5.2)$$

e $F^{(0)}(x_n) = x_n$. Assim, uma órbita superestável de período k contém pelo menos uma solução da equação:

$$F'(x_n) = 0. \quad (5.3)$$

Essas soluções correspondem a pontos críticos do mapeamento, importantes por formarem as órbitas extremas, que representam trajetórias conectando pontos de máximo e mínimo locais do mapa após k iterações. A cada cruzamento de curvas extremas associadas a diferentes períodos, uma nova estrutura periódica de período $k_1 + k_2$ é formada [6].

5.2 APLICAÇÃO DAS CURVAS EXTREMAS E SUPERESTÁVEIS NO MAPA LOGÍSTICO

No mapa logístico, definido pela iteração da equação (3.4), observa-se que as curvas extremas organizam o espaço de parâmetros em estruturas periódicas complexas, como as *shrims*. Essas regiões de periodicidade surgem quando duas curvas superestáveis associadas a diferentes pontos críticos se interceptam.

Considerando uma órbita extrema de período k , as curvas extremas podem ser descritas como o conjunto de parâmetros R para os quais uma órbita k -extrema existe. Assim, as curvas extremas seguem a estrutura dos pontos de bifurcação do sistema e organizam janelas de periodicidade.

5.2.1 Organização de Cascatas de Periodicidade

As órbitas extremas também organizam cascatas de periodicidade no espaço de parâmetros [6]. Para ilustrar, considere as órbitas k_1 -extrema e k_2 -extrema que satisfazem:

$$x_i^* = F^{(k_1)}(x_j^*) \quad (5.4)$$

e:

$$x_j^* = F^{(k_2)}(x_i^*). \quad (5.5)$$

Nesses cruzamentos, uma órbita superestável de período $k_1 + k_2$ é formada, onde $x_i^* = F^{(k_1+k_2)}(x_i^*)$ e $x_j^* = F^{(k_1+k_2)}(x_j^*)$. Dessa forma, as cascatas de periodicidade são organizadas em torno das órbitas extremas, gerando janelas de periodicidade com períodos igual à soma das iterações das órbitas extremas.

A análise do espaço de parâmetros do mapa logístico revela que as curvas extremas criam uma estrutura hierárquica de periodicidade. As regiões onde curvas superestáveis se cruzam formam janelas de periodicidade que exibem comportamento ordenado e preditivo em meio ao caos. No espaço de parâmetros, essas janelas são organizadas em padrões que incluem *shrimps-like*, gerados pela interseção de curvas k -extremas com órbitas extremas de k iterações

Essas interseções entre curvas extremas no espaço de parâmetros destacam como o sistema transita entre regimes caóticos e periódicos ilustradas na Fig. 6. Além disso, o estudo das órbitas extremas oferece uma abordagem matemática para localizar precisamente essas regiões periódicas, mesmo para altos valores de k .

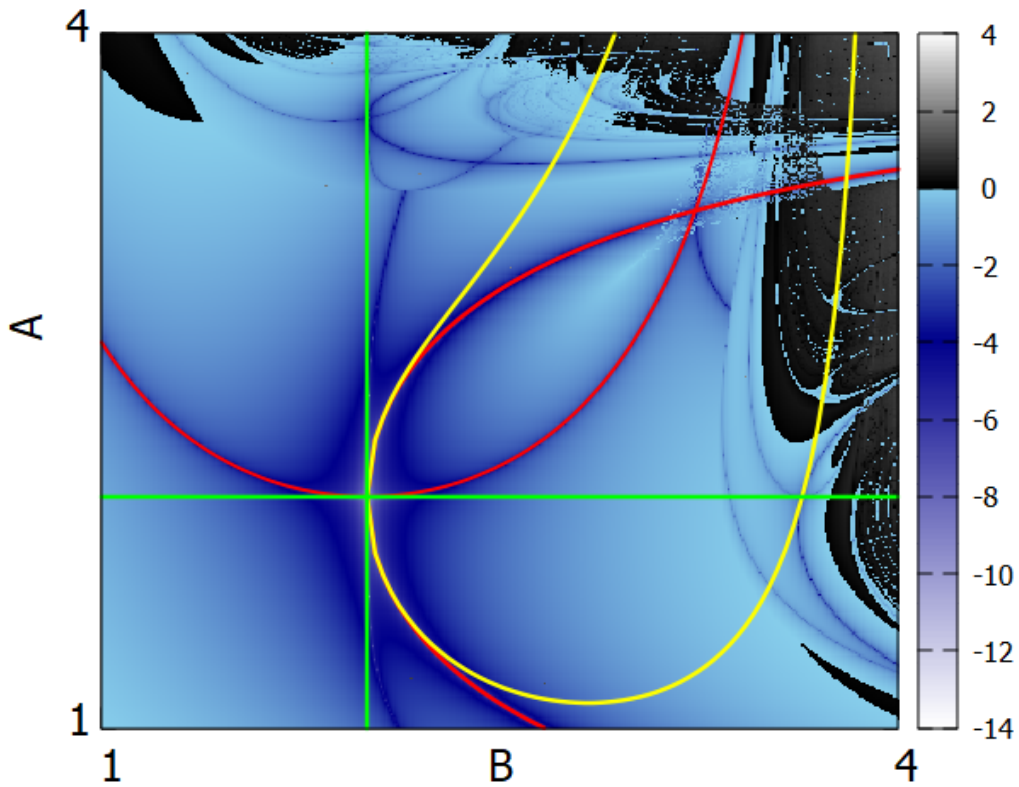


Figura 19 – As curvas superestáveis de período 2 são representadas por linhas brancas e curvas extremas por linhas verde ($F^{(0)}$) e azul ($F^{(1)}$), destacando estruturas como shrimps e Línguas de Arnold.

5.2.2 Contribuições para a Análise no Espaço dos Parâmetros

O estudo do mapa logístico periodicamente perturbado permite uma análise mais detalhada da organização das estruturas de periodicidade e caos no espaço dos parâmetros. A alternância periódica entre A e B resulta em um comportamento dinâmico mais complexo, influenciando a localização e a forma das janelas de periodicidade e das regiões caóticas. Assim, a investigação dessas estruturas contribui para um melhor entendimento da transição entre ordem e caos em sistemas dinâmicos não-lineares.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, o presente trabalho investigou a complexidade no espaço dos parâmetros do mapa logístico, contribuindo para o entendimento de como estruturas periódicas e caóticas se organizam e se inter-relacionam nesse sistema dinâmico. Através de uma abordagem sobre órbitas, curvas extremas e superestáveis, este estudo revelou a importância desses elementos para a caracterização e compreensão das regiões de estabilidade e periodicidade.

À vista disso, as análises matemática e numérica permitiram mapear o comportamento do mapa logístico e revelou a estrutura hierárquica dos padrões de periodicidade, conhecidos como cascatas de periodicidade, bem como as regiões complexas de periodicidade denominadas *shrimps*. Esses elementos estruturais surgem em pontos de interseção de curvas superestáveis, o que indica a formação de novas janelas de estabilidade dentro do caos, permitindo uma organização e controle preditivo desses comportamentos dinâmicos. A partir desses pontos, as curvas extremas e superestáveis funcionam como guias ou eixos de estabilidade, organizando o comportamento dinâmico e fornecendo uma visão detalhada sobre o alinhamento de janelas periódicas, que são regiões de comportamento regular em meio ao espaço caótico do sistema.

Um aspecto particularmente significativo deste trabalho foi o uso do expoente de Lyapunov para determinar a sensibilidade do sistema a variações nas condições iniciais. Utilizá-lo permitiu uma análise aprofundada das transições entre regimes dinâmicos e foi essencial para detectar pontos de transição onde o sistema passa de um estado estável para o caos. Os diagramas de Lyapunov mostraram de forma visual as regiões onde o sistema apresenta comportamento regular e onde ele é altamente sensível, reforçando a ideia de que o expoente é uma ferramenta vital para quantificar a estabilidade dos pontos no espaço de parâmetros.

Além das análises teóricas, este estudo oferece perspectivas práticas para a aplicação de conceitos de estabilidade e caos em áreas como física, biologia, engenharia e economia [1]. A organização das cascatas de periodicidade e das regiões estáveis oferece *insights* para o controle de sistemas complexos onde a previsibilidade e a estabilidade são essenciais. Por exemplo, em modelos de crescimento populacional, que serviram de base para o desenvolvimento do mapa logístico, entender como regiões de estabilidade e caos se alternam pode ser fundamental para a previsão e controle de variações populacionais. Em sistemas econômicos, onde fatores externos introduzem perturbações nos parâmetros de controle, compreender a dinâmica entre estabilidade e caos pode ser crucial para estratégias de estabilidade a longo prazo.

Ademais, este trabalho também abre caminho para futuras pesquisas que busquem explorar esses conceitos em modelos de mapeamento mais complexos ou em sistemas que apresentam mais de um parâmetro de controle. Estudos adicionais podem investigar como esses padrões estruturais de estabilidade se mantêm ou se modificam quando submetidos a perturbações maiores, trazendo uma visão mais abrangente da robustez das janelas de periodicidade.

Dessa forma, o uso de métodos numéricos para investigar a complexidade em sistemas dinâmicos abre possibilidades para a aplicação desses conhecimentos em situações práticas onde o controle da periodicidade e estabilidade é essencial. Em futuros estudos, seria interessante considerar a expansão dessa abordagem para modelos com perturbações e explorar como esses elementos estruturais se comportam em mapeamentos mais complexos. Dessa forma, este trabalho contribui não apenas para a compreensão teórica do mapa logístico, mas também para ampliar os conhecimentos sobre a aplicabilidade de conceitos de estabilidade e caos em contextos reais.

REFERÊNCIAS

1. MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. 4. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.
2. MAY, R. M *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*. Nature, v. 261, n. 5560, p. 459-467, 1976.
3. ARNOLD, V. I. *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*. Seriya Matematicheskaya, v. 25, n. 1, p. 21–86, 1961.
4. KUZNETSOV, Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3. ed. New York: Springer, 2004.
5. MEDEIROS, E. S; TORRICOS, R. O. M; CALDAS, I. L; SOUZA, S. L. T. *Torsion-adding and asymptotic winding number for periodic window sequences*. Physics Letters A, n.377, p. 628-631, 2013.
6. LORIENZ, E. N. *Compound windows of the Hénon map*. Physica D: Nonlinear Phenomena, v. 237, n. 13, p. 1689–1704, 2008.
7. COSTA, D. R; HANSEN, M; GUARISE, G; TORRICOS, R.O.M and LEONEL, E.D. *The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps*. Physics Letters A, n. 380, p. 1610- 1614, 2016
8. FEIGEINBAUM, M. J. *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. Journal of Statistical Physics, n.19, p. 25-52, 1978.
9. FERREIRA, H.S. *Dinâmica caótica em ecologia: avanços teóricos e metodológicos*. Neotropical Biology and Conservation, v. 4, n. 3, p. 125–132, 2009.
10. STROGATZ, S.H. *Nonlinear dynamics an Chaos*. 2. Ed. New York: Westview Press, 2015.
11. KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 2. ed. New York: Springer, 2004.
12. FERRARA, N.F; PRADO, C.P.C. *Caos: Uma introdução*. 1. ed. . São Paulo: Blucher, 1994.
13. DEVANEL, R.L. *A first curse in Chaotic Dynamical Systems*. 2. ed. New York: CRC Press, 2020.

14. LEONEL, Edson Denis. *Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares*. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019.
15. GLENDINNING, P. *Stability, Instability and Chaos*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
16. CIPOLLI, Valéria Guefes. *Sistemas dinâmicos - análise de estabilidade*. 2012. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.
17. MARKUS, M. *Chaos in Maps with Continuous and Discontinuous Maxima*. Computers in Physics, n.4, p. 481-493, 1990.
18. BRIGGS, K. *A precise calculation of the feigenbaum constants*. Mathematics of computation, p. 435–439, 1991.
19. GLEICK, J. *Caos: A Criação de uma Nova Ciência*. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 1988.
20. ZOU, Y; DONNER, R.V; DONGES, J.F; MARWAN, N and KURTHS, J. *Identifying complex periodic windows in continuous- time dynamical systems using recurrence-based methods*. Chaos, n. 20, p. 043130, 2010.
21. DEWDNEY, A. K. *Leaping into Lyapunov Space*. Scientific American, New York, p. 178-180, 1991.

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

1. NUSSE, H.E; YORKE, J.A. *Dynamics: numerical explorations*. 2. ed. New York: Springer, 1998.
2. PRIGOGINE, I. *As leis do caos*. São Paulo: UNESP, 2002.
3. HANIAS, M.P; AVGERINOS, Z; TOMBRAS, G.S. *Period doubling, feigenbaum constant and time series prediction in an experimental chaotic rld circuit*. *Chaos, Solitons & Fractals*, p. 1050–1059, 2009.
4. GALLAS, J. *Structure of the parameter space of the Hénon map*. *Physical Review Letters*, n. 70, p. 2714-2717, 1993.
5. LICHTENERG, A.J; LIEBERMAN, M.A. *Regular and chaotic Dynamics*. 2. ed. New York: Springer, 2010.
6. LAI, Y.C; TÉL, T. *Transient chaos*. New York: Springer, 2010.
7. FERREIRA, H. S. *Dinâmica caótica em ecologia: avanços teóricos e metodológicos*. *Neotropical Biology and Conservation*, v. 4, n. 3, p. 125–132, 2009.
8. POMEAU, Y; MANNEVILLE, P. *Intermittent transition to turbulence in dissipative systems*. *Communications in Mathematical Physics*, v. 74, n. 2, p. 189–197, 1980.