



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Câmpus de São José do Rio Preto

Drielly Alves de Carvalho

**Um Estudo Sobre o Problema do Carteiro Rural: Aplicações na  
Colheita da Cana-de-Açúcar**

São José do Rio Preto  
2022

Drielly Alves de Carvalho

## **Um Estudo Sobre o Problema do Carteiro Rural: Aplicações na Colheita da Cana-de-Açúcar**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto  
2022

C331e

Carvalho, Drielly Alves de

Um Estudo Sobre o Problema do Carteiro Rural: Aplicações na Colheita da Cana-de-Açúcar / Drielly Alves de Carvalho. -- São José do Rio Preto, 2022

98 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Silvio Alexandre de Araujo

1. Problema do Carteiro Rural. 2. Colheita da Cana-de-Açúcar. 3. Modelo Matemáticos. 4. Modelos Min-Max. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Drielly Alves de Carvalho

**Um Estudo Sobre o Problema do Carteiro Rural:  
Aplicações na Colheita da Cana-de-Açúcar**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

**Comissão Examinadora**

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto  
Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Edilaine Martins Soler  
UNESP – Câmpus Bauru

Dr<sup>a</sup>. Maria José Pinto  
IEAv – São José dos Campos

São José do Rio Preto  
25 de janeiro de 2022

Dedico este trabalho aos meus pais Nilton e  
Cristiane.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar todas as dificuldades e enfrentar todos os desafios.

Agradeço aos meus pais e à minha irmã, por todo carinho, apoio, compreensão e orgulho que sempre demonstraram.

Agradeço imensamente ao meu namorado Nicolas por todo companheirismo, paciência e carinho nos momentos mais difíceis. Agradeço por toda contribuição e ajuda no desenvolvimento da pesquisa, pelas discussões que sempre foram de grande valia e por compartilhar seus conhecimentos comigo.

Agradeço ao Eduardo por sempre estar disposto a ajudar, principalmente na parte computacional e pelas reuniões compartilhadas nesse último ano. Também agradeço as amizades feitas durante as disciplinas, principalmente à Linara que desde a primeira aula se mostrou muito prestativa e atenciosa para comigo, sua amizade foi muito importante para a conclusão desta etapa.

Agradeço ao meu orientador Silvio, pela disposição, paciência, confiança e por toda sua contribuição neste trabalho.

Agradeço a todos os professores, pelos conhecimentos e experiências compartilhadas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

# RESUMO

Dentre as principais atividades do agronegócio brasileiro, encontra-se a produção da cana-de-açúcar, sendo o Brasil o principal produtor mundial. A cadeia produtiva da cana se encontra em constante desenvolvimento, buscando sempre novas tecnologias e ferramentas que possam contribuir para um planejamento eficaz de toda a cadeia produtiva. O processo de colheita da cana-de-açúcar representa umas das etapas mais importantes e mais caras da cadeia produtiva, sendo de grande importância que ela seja planejada e realizada da melhor forma. Dentre as ferramentas disponíveis para auxiliar no processo de tomada de decisões, os problemas e modelos matemáticos de otimização têm se mostrado úteis para representar e resolver o problema da colheita. O Problema do Carteiro Rural (PCR) é um clássico problema da otimização combinatória e muito usado para representar problemas logísticos. O problema da colheita da cana pode ser representado pelo PCR, onde as arestas requeridas representam as linhas de cana-de-açúcar, e as demais arestas representam os espaços livres para a locomoção da colhedora. Além disso, o problema pode ser estendido para múltiplos carteiros (K-PCR). A partir do problema do carteiro rural são propostas 4 versões para o problema da colheita da cana: PCR clássico, K-PCR utilizando um modelo Min-Max, PCR e K-PCR com um problema de designação utilizando também um modelo Min-Max. Foram utilizadas instâncias da literatura para a validação dos modelos, os quais se mostraram eficientes para instâncias de até 50 vértices. Os modelos foram propostos com os objetivos de minimizar o tempo de colheita e gerar rotas equilibradas entre as máquinas disponíveis, sendo que ambos os objetivos foram alcançados na maior parte das instâncias.

**Palavras-chave:** Problema do Carteiro Rural. Colheita da Cana-de-Açúcar. Modelos Matemáticos. Modelos Min-Max.

# ABSTRACT

Brazil is the world's largest producer of sugarcane, which is the main activity of Brazilian agribusiness. The sugarcane production chain is in constant development, always looking for new technologies and tools that can contribute to an effective planning of the whole production chain. As the sugarcane harvesting process is one of the most important and expensive stage of the sugarcane production chain, it should be planned and carried out in the best way. Among the tools available to help the decision making process, mathematical optimization problems and models have proven to be useful to represent and solve the harvesting problem. The Rural Postman Problem (RPP) is a classic combinatorial optimization problem and is widely used to represent logistic problems. The sugarcane harvesting problem can be represented by the RPP, where the required edges represent the sugarcane plantations, and the other edges represent the free spaces for the harvester to move. Furthermore, the problem can be extended to Multiple Rural Postman (K-RPP). From the Rural Postman Problem, 4 mathematical models are proposed for the sugarcane harvesting problem: classic RPP, K-RPP with a min-max model, and the RPP and the K-RPP, both with a designation problem using a Min-Max model. Instances from the literature were used to validate the models, which proved to be efficient for instances up to 50 nodes. The models were proposed with the goals of minimizing the harvesting time and generating balanced routes among the available machines, and both goals were achieved in most instances.

**Keywords:** Rural Postman Problem. Sugarcane Harvest. Mathematical Models. Min-Max Models.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo 1 . . . . .	19
Figura 2 – Grafo $G_R$ . . . . .	19
Figura 3 – Solução para o exemplo 1 . . . . .	20
Figura 4 – Solução 2 . . . . .	23
Figura 5 – Exemplo 2 . . . . .	24
Figura 6 – Grafo $G_R$ . . . . .	25
Figura 7 – Solução para o exemplo 2 . . . . .	26
Figura 8 – Exemplo 3 . . . . .	32
Figura 9 – Solução para o exemplo 3 . . . . .	34
Figura 10 – Representação gráfica . . . . .	43
Figura 11 – Exemplo Versão 1 . . . . .	46
Figura 12 – Exemplo Versão 2 . . . . .	48
Figura 13 – Exemplo Versão 3 . . . . .	51
Figura 14 – Exemplo Versão 4 . . . . .	54
Figura 15 – Otimalidade . . . . .	57
Figura 16 – Comparação Modelos 1 e 2 - Soluções ótimas . . . . .	81
Figura 17 – Comparação Modelos 1 e 2 - Todas as Instâncias . . . . .	83
Figura 18 – Comparação Modelos 3 e 4 (3 ÁREAS) . . . . .	84
Figura 19 – Comparação Modelos 3 e 4 (4 ÁREAS) . . . . .	85
Figura 20 – Comparação Modelos 3 e 4 (5 ÁREAS) . . . . .	87

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Características . . . . .	55
Tabela 2 – Resultados Modelo 1 . . . . .	59
Tabela 3 – Resultados Modelo 2 . . . . .	61
Tabela 4 – Resultados PCR-3A-2M . . . . .	63
Tabela 5 – PCR-3A-2M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	64
Tabela 6 – Resultados PCR-4A-2M . . . . .	65
Tabela 7 – PCR-4A-2M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	66
Tabela 8 – Resultados PCR-4A-3M . . . . .	67
Tabela 9 – PCR-4A-3M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	67
Tabela 10 – PCR-4A-3M (MAQ3) . . . . .	68
Tabela 11 – Resultados PCR-5A-2M . . . . .	69
Tabela 12 – PCR-5A-2M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	69
Tabela 13 – Resultados PCR-5A-3M . . . . .	69
Tabela 14 – PCR-5A-3M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	70
Tabela 15 – PCR-5A-3M (MAQ3) . . . . .	70
Tabela 16 – Resultados PCR-5A-4M . . . . .	70
Tabela 17 – PCR-5A-4M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	71
Tabela 18 – PCR-5A-4M (MAQ3 e MAQ4) . . . . .	71
Tabela 19 – Resultados K-PCR-3A-2M . . . . .	72
Tabela 20 – K-PCR-3A-2M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	73
Tabela 21 – Resultados K-PCR-4A-2M . . . . .	74
Tabela 22 – K-PCR-4A-2M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	75
Tabela 23 – Resultados K-PCR-4A-3M . . . . .	76
Tabela 24 – K-PCR-4A-3M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	77
Tabela 25 – K-PCR-4A-3M (MAQ3) . . . . .	77
Tabela 26 – Resultados K-PCR-5A-2M . . . . .	78
Tabela 27 – K-PCR-5A-2M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	78
Tabela 28 – Resultados K-PCR-5A-3M . . . . .	79
Tabela 29 – K-PCR-5A-3M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	79
Tabela 30 – K-PCR-5A-3M (MAQ3) . . . . .	79
Tabela 31 – Resultados K-PCR-5A-4M . . . . .	80
Tabela 32 – K-PCR-5A-4M (MAQ1 e MAQ2) . . . . .	80
Tabela 33 – K-PCR-5A-4M (MAQ3 e MAQ4) . . . . .	80
Tabela 34 – Características-Instâncias Reais . . . . .	88
Tabela 35 – Resultados Modelos 1 e 2 . . . . .	89

Tabela 36 – Resultados Modelos 3 e 4 . . . . .	90
Tabela 37 – Áreas - Modelo 3 . . . . .	91
Tabela 38 – Áreas - Modelo 4 . . . . .	91

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>ROTEAMENTO EM ARCOS</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Problema do Carteiro Rural</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Problema dos K-Carteiros Rurais</b>	<b>27</b>
2.2.1	K-PCR e o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados	28
2.2.2	K-PCR e os Problemas Min-Max	30
<b>3</b>	<b>A COLHEITA DA CANA-DE-AÇÚCAR</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Mecanização</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Colheita</b>	<b>38</b>
<b>3.3</b>	<b>Recorte da Literatura</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>O PROBLEMA DO CARTEIRO RURAL APLICADO À COLHEITA DA CANA-DE-AÇÚCAR</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Versão 1</b>	<b>44</b>
4.1.1	Modelo Matemático 1	44
<b>4.2</b>	<b>Versão 2</b>	<b>46</b>
4.2.1	Modelo Matemático 2	46
<b>4.3</b>	<b>Versão 3</b>	<b>48</b>
4.3.1	Modelo Matemático 3	49
<b>4.4</b>	<b>Versão 4</b>	<b>52</b>
4.4.1	Modelo Matemático 4	52
<b>5</b>	<b>ESTUDO COMPUTACIONAL</b>	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Descrição dos Dados</b>	<b>55</b>
<b>5.2</b>	<b>Modelo 1</b>	<b>58</b>
<b>5.3</b>	<b>Modelo 2</b>	<b>60</b>
<b>5.4</b>	<b>Modelo 3</b>	<b>62</b>
5.4.1	PCR - 3 Áreas e 2 Máquinas	62
5.4.2	PCR - 4 Áreas e 2 Máquinas	65
5.4.3	PCR - 4 Áreas e 3 Máquinas	66
5.4.4	PCR - 5 Áreas e 2 Máquinas	68
5.4.5	PCR - 5 Áreas e 3 Máquinas	69
5.4.6	PCR - 5 Áreas e 4 Máquinas	70
<b>5.5</b>	<b>Modelo 4</b>	<b>71</b>

5.5.1	K-PCR - 3 Áreas e 2 Máquinas . . . . .	72
5.5.2	K-PCR - 4 Áreas e 2 Máquinas . . . . .	74
5.5.3	K-PCR - 4 Áreas e 3 Máquinas . . . . .	75
5.5.4	K-PCR - 5 Áreas e 2 Máquinas . . . . .	78
5.5.5	K-PCR - 5 Áreas e 3 Máquinas . . . . .	79
5.5.6	K-PCR - 5 Áreas e 4 Máquinas . . . . .	79
<b>5.6</b>	<b>Discussões Gerais . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>5.7</b>	<b>Testes Baseados em Instâncias Reais . . . . .</b>	<b>88</b>
5.7.1	Modelo 1 e Modelo 2 . . . . .	89
5.7.2	Modelo 3 e Modelo 4 . . . . .	90
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>92</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>94</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O agronegócio é um setor de grande importância para a economia do Brasil. Em 2020 o PIB do país totalizou R\$ 7,45 trilhões, sendo o PIB do agronegócio responsável por quase R\$ 2 trilhões. O PIB do agronegócio brasileiro cresceu 5,35% no primeiro trimestre de 2021, baseado nesse desempenho espera-se que o agronegócio corresponda a mais de 30% do PIB brasileiro em 2021 [1]. Dentre as principais atividades da agricultura brasileira se encontra a produção canavieira, onde o Brasil é considerado o maior produtor de açúcar do mundo [2].

Com o crescente aumento da demanda e da produção da cana, tem-se buscado investir em estudos a fim de melhorar a cadeia produtiva da cana, ou seja, determinar a melhor forma de plantar a matéria-prima, quais os tipos de cultura devem ser plantadas em cada área, além de determinar o melhor momento da colheita, e quais tecnologias e ferramentas são adequadas para cada momento. Todas estas questões têm sido amplamente estudadas por pesquisadores, matemáticos, engenheiros e agrônomos. As pesquisas têm demonstrado resultados satisfatórios tanto para os produtores, empresas e consumidores, quanto para o meio ambiente, uma vez que o cuidado com o meio ambiente é algo relevante nas pesquisas atuais [3].

A Pesquisa Operacional (PO) tem sido usada em muitas aplicações reais, dentre as quais a agricultura é uma área onde a PO tem se mostrado uma ferramenta importante para o desenvolvimento adequado de cadeias de suprimento. Com o desenvolvimento crescente da agricultura, é necessário que os produtores e toda a equipe de trabalho tomem boas decisões a respeito das atividades a serem desenvolvidas, desde a etapa do planejamento até a produção e entrega dos produtos finais. Com isso, as técnicas de PO, em especial, os modelos matemáticos de otimização são ferramentas úteis para auxiliar nas tomadas de decisões.

A aplicação de modelos matemáticos na agricultura ganhou força por volta de 1970, onde surgiram vários trabalhos acerca desse tema. Em 1988, Azevedo e Neves [4] publicaram uma revisão da literatura onde foram identificados 81 trabalhos a respeito da aplicação da programação linear em planejamento de fazendas e empresas agroindustriais brasileiras.

Em [5] os autores afirmaram que a programação linear mostrou-se uma poderosa ferramenta capaz de auxiliar de forma significativa no planejamento agrícola, utilizando de forma adequada os recursos disponíveis a fim de otimizar toda a cadeia produtiva e gerar grandes ganhos para a agroindústria brasileira.

Recentemente, Taskiner e Bilgen [6] apresentaram uma revisão bibliográfica com foco nos modelos de otimização relacionados com o planejamento da produção e colheita de culturas alimentares. Os artigos são classificados quanto à finalidade do problema, às

---

características dos modelos e, por fim, uma discussão quanto a abordagem dos modelos de otimização é apresentada.

No contexto da cana-de-açúcar, Teixeira *et al.* [7] apresentam uma revisão da literatura sobre modelos de otimização utilizados para representar alguma etapa da cadeia produtiva da cana-de-açúcar. Os autores ressaltam que a etapa de colheita é a mais explorada sobre o ponto de vista de trabalhos publicados.

De acordo com os desafios encontrados no planejamento da cadeia produtiva da cana-de-açúcar, muitos problemas clássicos da PO podem ser usados para representar determinada situação. Um problema clássico e bastante encontrado em algumas etapas da cadeia produtiva da cana e também em contextos agrícolas de forma geral é o Problema de Roteamento de Veículos (PRV).

Os PRVs consistem em determinar uma rota ótima para um determinado veículo de acordo com algumas características pré-estabelecidas. Os PRVs podem ser classificados em problemas de roteamento em nós, nos quais os clientes podem ser representados por nós em um grafo e, problemas de roteamento em arcos, nos quais o serviço é executado nas arestas e/ou arcos de um grafo [8].

Apesar de existirem muitos trabalhos que estudam, uma ou mais, etapa da produção canavieira, poucos trabalhos tratam, exclusivamente, do problema da colheita da cana-de-açúcar sob o ponto de vista de determinar a rota de custo mínimo para a colhedora.

Este trabalho tem como objetivo o estudo do Problema do Carteiro Rural (PCR) que é uma variação do PRV e, consiste em determinar uma rota de custo mínimo, que percorra um subconjunto de arestas, pelo menos uma vez. Também é estudado algumas variações do PCR, como a consideração de múltiplos carteiros. Será feita uma discussão sobre quando é necessário a utilização de múltiplos carteiros e quais as características desses problemas. O estudo feito sobre o PCR e suas variações é utilizado como base para a representação de 4 versões do problema da colheita da cana-de-açúcar. As versões estão relacionadas com a quantidade de máquinas utilizadas para realizar a colheita e a quantidade de áreas a serem colhidas. Em todas as versões, o objetivo é minimizar o tempo de colheita através do PCR e, quando consideradas múltiplas máquinas, busca-se obter um equilíbrio entre as rotas, associando um problema de designação ao PCR.

No Capítulo 2 é apresentado um estudo sobre o PCR e sua variação quanto ao número de veículos e, no Capítulo 3, o foco é a cana-de-açúcar no Brasil, o desenvolvimento da mecanização neste setor, e alguns detalhes sobre o processo de colheita deste produto. Além disso, é apresentado um recorte da literatura referente ao uso de modelos matemáticos e outras técnicas da PO no processo de colheita da cana-de-açúcar. No Capítulo 4, são apresentados quatro modelos matemáticos que representam quatro versões do problema da colheita da cana-de-açúcar e, no Capítulo 5, alguns resultados computacionais e discussões são apresentados. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 ROTEAMENTO EM ARCOS

O problema de roteamento em arcos surgiu por volta do século XVIII, com o conhecido problema das sete pontes de Königsberg. Os moradores da cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), viviam em quatro ilhas ligadas por sete pontes e queriam saber se era possível fazer um caminho que passasse por todas as pontes uma única vez e voltasse para o ponto de partida. O problema foi resolvido por Leonhard Euler que mostrou ser impossível realizar o caminho passando por cada ponte apenas uma vez [9].

Euler fez a representação gráfica do problema e estabeleceu a relação de paridade dos vértices para que o problema tivesse solução. Um grafo que possui todos os vértices com grau par é denominado de grafo Euleriano o qual possui um circuito Euleriano de custo mínimo, isto é, um caminho fechado que passe por todas as arestas exatamente uma vez.

Foi a partir do problema das pontes Königsberg e dos grafos Eulerianos que surgiu a importante área de estudos denominada Teoria de Grafos (veja [9] para definições de conceitos básicos sobre Teoria dos Grafos que serão usados neste capítulo). Apesar de ter mostrado que tal problema não havia solução, Euler só estava interessado em encontrar um caminho, independente das características, não importando se tal caminho era extenso, complicado, etc.

Problemas de roteamento têm atraído a atenção de muitos pesquisadores e profissionais devido aos desafios matemáticos que os envolvem, além das consequências econômicas que estes problemas podem causar. Os problemas de roteamento podem ser classificados em problemas de roteamento em nós e problemas de roteamento em arcos [8].

Os problemas de roteamento em nós tem como objetivo determinar uma rota que passe por todos os vértices de um grafo de acordo com as restrições estabelecidas. Na literatura, este problema é conhecido como o Problema do Caixeiro Viajante (PCV).

Os problemas de roteamento em arcos têm como objetivo determinar um rota que passe pelas arestas e/ou arcos de um grafo de acordo com as restrições estabelecidas, as quais são definidas de acordo com o problema estudado. Para fins de simplificação vamos nos referir às arestas e/ou arcos de um grafo apenas como arestas. Dentre os problemas de roteamento em arcos, são definidos 3 problemas clássicos: Problema do Carteiro Chinês, Problema do Carteiro Rural e o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados.

Além destes 3 principais problemas, algumas variações podem surgir ao considerar janelas de tempo, múltiplos veículos, múltiplos objetivos, diferentes custos associados às arestas de acordo com a direção em que é percorrida, e diversas outras variações que surgem ao se tratar de uma situação específica [10].

Neste trabalho será abordado o Problema do Carteiro Rural (PCR), o qual tem como objetivo cobrir um subconjunto de arestas do grafo, denominadas arestas requeridas,

minimizando a distância total percorrida. Dentre as muitas aplicações do PCR, a agricultura é uma área de grande potencial para a utilização do PCR, e será nossa área de interesse, principalmente o setor sucroenergético.

Desde sua aparição na literatura, o PCR tem chamado a atenção de pesquisadores devido à sua aplicação em problemas reais, tais como: varredura de ruas, remoção de neve, coleta de lixo, entrega de correios, rota de ônibus escolar, leitura de medidores, patrulhamento policial, etc [11]. Por ser um problema bastante estudado e de grande importância, novos modelos têm sido propostos para o PCR além de novos métodos de soluções como heurísticas e meta-heurísticas que alcançam bons resultados em problemas muito complexos, onde o custo computacional é muito alto.

## 2.1 Problema do Carteiro Rural

O Problema do Carteiro Rural (PCR) foi introduzido por Orloff [12] e consiste em determinar uma viagem de custo mínimo que atravessa cada uma das arestas do subconjunto de arestas requeridas de um grafo. O PCR pode ser classificado de acordo com o grafo, podendo ser não direcionado, direcionado e misto. Além das três classificações citadas também temos o PCR ventoso onde o custo relacionado a cada aresta é diferente de acordo com a direção em que ela é percorrida.

Formalmente, dado um grafo  $G = (V, A)$ , um custo  $c_{ij} \geq 0$  associado a cada aresta, um vértice  $v_1$  denominado depósito e um subconjunto de arestas requeridas  $A_R \subseteq A$ , o objetivo é encontrar um percurso de custo mínimo que percorra todas as arestas  $(i, j) \in A_R$  pelo menos uma vez. Se o subconjunto de arestas requeridas coincidir com o conjunto de todas as arestas do grafo, o PCR passa a ser considerado como o Problema do Carteiro Chinês (PCC).

Quanto à sua complexidade, Lenstra e Kan [13] mostraram que o PCR é NP-Difícil nas versões não direcionado e direcionado, e Frederickson [14] mostrou que o caso misto também é NP-Difícil.

A seguir, serão apresentados alguns modelos matemáticos relevantes para o PCR. O primeiro modelo matemático do PCR é atribuído a Christofides et al. [15] e será apresentado a seguir. Mas antes de apresentarmos o modelo matemático, vamos definir alguns conjuntos, parâmetros e variáveis para melhor compreensão do modelo.

### Conjuntos e Parâmetros

$V$  é o conjunto de vértices.

$A = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$  é o conjunto de arestas.

$A_R$  é o conjunto das arestas requeridas ( $A_R \subset A$ ).

$G_R = (V, A_R)$  é o grafo induzido pelas arestas requeridas.

$p$  é o número de componentes conexas de  $G_R$ .

$C_n$  são as componentes conexas de  $G_R$  ( $n = 1, \dots, p$ ).

$P$  é subconjunto do conjunto  $\{1, \dots, p\}$ .

$V_n$  conjunto de vértices de cada componente conexa  $n$  ( $n = 1, \dots, p$ ).

$S \subset V$  é um subconjunto de vértices.

$\delta(S) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \in V \setminus S\}$ .

$\delta(i) = \{(i, j) \in A \mid i \neq j\}$ .

$c_{ij}$  = Custo de atravessar a aresta  $(i, j)$ .

### Variáveis

$x_{ij}$  : Número de arestas adicionais que devem ser incluídas ao grafo  $G$  para torná-lo Euleriano.

$2z_i$  : representa o grau do vértice  $i$ .

A formulação do PCR de acordo com Christofides et al. [15] é dada por:

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A_R} c_{ij}(1 + x_{ij}) + \sum_{(i,j) \in A \setminus A_R} c_{ij}x_{ij} \quad (2.1)$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i) \cap A_R} (1 + x_{ij}) + \sum_{(i,j) \in \delta(i) \cap A \setminus A_R} x_{ij} = 2z_i, \quad i \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(S)} x_{ij} \geq 2, \quad S = \bigcup_{n \in P} V_n, P \subset \{1, \dots, p\}, P \neq \emptyset \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad (i, j) \in A \quad (2.4)$$

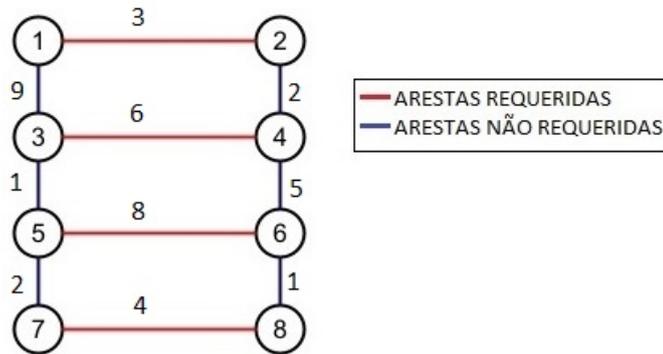
$$z_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in V \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.1) busca minimizar o custo da rota, o conjunto de restrições (2.2) está relacionado com a paridade dos vértices, enquanto que as restrições (2.3) garantem que a solução seja conexa. As restrições (2.4) e (2.5) representam o domínio das variáveis.

As restrições do problema fazem com que o grafo resultante seja Euleriano, possuindo então um Circuito Euleriano de custo mínimo, que pode ser encontrado usando algum dos diversos algoritmos encontrados na literatura, como o Algoritmo de Fleury e o Algoritmo de Hierholzer [16].

Para entendermos melhor a formulação proposta por Christofides et al. [15], considere o grafo apresentado na Figura 1:

Figura 1 – Exemplo 1

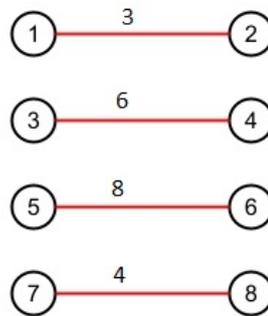


Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o grafo temos os seguintes conjuntos:

$$V = \{1, 2, \dots, 8\}, \quad A = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (7, 8)\}, \quad A_R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$$

O grafo induzido pelas arestas requeridas é representado pela Figura 2:

Figura 2 – Grafo  $G_R$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

$G_R$  é formado por quatro componentes conexas, sendo elas:

$$C_1 = \{(1, 2)\} \text{ e } V_1 = \{1, 2\} \quad C_2 = \{(3, 4)\} \text{ e } V_2 = \{3, 4\}$$

$$C_3 = \{(5, 6)\} \text{ e } V_3 = \{5, 6\} \quad C_4 = \{(7, 8)\} \text{ e } V_4 = \{7, 8\}$$

Definido os conjuntos, vamos analisar as restrições do modelo matemático. As restrições (2.2) são as restrições relacionadas com a paridade dos vértices do grafo  $G$ . Para exemplificar, considere  $i = 1$ . O primeiro somatório é referente às arestas  $(i, j)$  tal que  $(i, j) \in \delta(1) \cap A_R$ , neste caso, temos apenas a aresta (1, 2). O segundo somatório é referente às arestas  $(i, j)$  tal que  $(i, j) \in \delta(1) \cap A \setminus A_R$ , ou seja, a aresta (1, 3).

Sendo assim, a restrição (2.2) para  $i = 1$  fica:

$$(1 + x_{12}) + x_{13} = 2z_1$$

Neste caso, a aresta  $(1, 2)$  será duplicada ou a aresta  $(1, 3)$  será adicionada ao grafo e, desta forma, o vértice 1 sempre terá grau par, ou seja, a restrição faz com que a soma do número de arestas incidentes em um vértice  $i$  seja par e, conseqüentemente o vértice  $i$  tenha grau par.

As restrições (2.3) estão relacionadas com as componentes conexas do grafo  $G_R$ . Como definido,  $P$  é subconjunto do conjunto formado pelo número de componentes conexas do grafo induzido  $G_R$ .

Pelo exemplo, como  $p = 4$ ,  $P \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . Para  $P = \{1\}$ , por exemplo, temos:

$$S = \cup_{k \in \{1\}} V_k = V_1 = \{1, 2\} \text{ e } \delta(S) = \delta(\{1, 2\}) = \{(1, 3), (2, 4)\}.$$

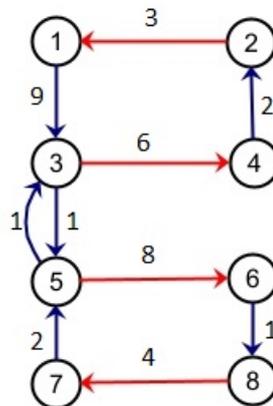
Logo a restrição (2.3), neste caso, é expressa por:

$$x_{13} + x_{24} \geq 2$$

As restrições (2.3) fazem com que, para qualquer componente conexa ou qualquer combinação entre as componentes conexas de  $G_R$ , sempre terá, no mínimo, duas arestas incidentes à essas componentes. Com essas restrições, o grafo resultante será Euleriano, logo possuirá um Circuito Euleriano de custo mínimo.

Uma possível solução para o exemplo é dada pelo grafo Euleriano representado pela Figura 3, em que o percurso é:  $(1, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 1)$  com custo 37. Observe que todas as restrições do modelo estão sendo satisfeitas pois, todos os vértices possuem grau par (restrições (2.2)) e, para cada componente conexa existem pelo menos duas arestas incidentes sobre elas (restrições (2.3)). Ressalta-se que esta é uma solução factível para o modelo que, não necessariamente, é a solução ótima.

Figura 3 – Solução para o exemplo 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Depois da formulação proposta por Christofides et al. [15], os autores Corberán e Sanchis [17] propuseram uma nova formulação para o PCR. As formulações são semelhantes, mas a formulação de Corberán e Sanchis [17] não é linear.

Os conjuntos dos dois modelos matemáticos são praticamente os mesmos e, duas novas definições denominadas *R-par* e *R-ímpar* presentes no modelo de Corberán e Sanchis [17] serão descritas a seguir.

Dado  $S \subset V$  chamamos  $S$  de *R-par* se um número par de arestas requeridas for incidente em  $S$ . De maneira análoga, chamamos  $S$  de *R-ímpar* se um número ímpar de arestas requeridas for incidente em  $S$ .

*R-par* são os conjuntos de vértices  $S \subset V$  tal que existe um número par de arestas requeridas incidentes em  $S$ .

*R-ímpar* são os conjuntos de vértices  $S \subset V$  tal que existe um número ímpar de arestas requeridas incidentes em  $S$ .

O modelo para o PCR de acordo com Corberán e Sanchis [17] é:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (2.6)$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} x_{ij} = 0 \pmod{2}, \quad \text{se } i \in V \text{ é } R\text{-par} \quad (2.7)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} x_{ij} = 1 \pmod{2}, \quad \text{se } i \in V \text{ é } R\text{-ímpar} \quad (2.8)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(S)} x_{ij} \geq 2, \quad S = \bigcup_{n \in P} V_n, P \subset \{1, \dots, p\}, P \neq \emptyset \quad (2.9)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad (i, j) \in A \quad (2.10)$$

Como no modelo anterior, a ideia é obter um grafo Euleriano e, assim, conseguir um circuito de custo mínimo. A principal diferença entre as duas formulações está nas restrições (2.7) e (2.8) que, além disso, tornam a formulação não-linear.

Observe que  $S = \{i\}$  são os subconjuntos unitários de  $V$ , então as restrições (2.7) e (2.8) separam os vértices em dois grupos: se o vértice  $i$  tiver um número par de arestas requeridas incidentes a ele (será *R-par*) e irá satisfazer a restrição (2.7) e se tiver um número ímpar de arestas requeridas incidentes a ele (será *R-ímpar*) e irá satisfazer a restrição (2.8).

A função objetivo (2.6) minimiza o custo da rota. As restrições (2.7) implicam que o número de arestas incidentes em um vértice *R-par*, que devem ser adicionadas ao grafo  $G$ , é par. De maneira análoga, as restrições (2.8) implicam que o número de arestas incidentes em um vértice *R-ímpar*, que devem ser adicionadas ao grafo  $G$ , é ímpar.

A notação mod 2 significa o resto da divisão por 2. Nas restrições (2.7) temos  $0 \bmod 2$  pois a soma será par consequentemente a divisão por 2 resulta em resto 0. Nas restrições (2.8) temos  $1 \bmod 2$  pois a soma será ímpar e, consequentemente, a divisão por 2 resulta em resto 1.

As restrições (2.9) são as restrições que garantem que a solução seja conexa, e correspondem às restrições 2.3 de Christofides *et al.* [15].

Vamos considerar o mesmo exemplo representado pela Figura 1, para entendermos melhor o modelo.

Analisando as restrições (2.7) e (2.8) do modelo de acordo com a Figura 1, temos que todos os vértices do grafo são *R-ímpar*, pois possuem apenas uma aresta requerida incidente em cada um deles.

Considerando o vértice  $i = 4$ , temos que

$$\delta(4) = \{(4, 2), (4, 3), (4, 6)\}$$

Note que de todas as arestas incidentes no vértice 4, apenas a aresta (4, 3) é requerida o que, de fato, o torna um vértice *R-ímpar*.

Com isso, a restrição (2.8) fica:

$$x_{42} + x_{43} + x_{46} = 1 \bmod 2$$

Logo, a soma do número de vezes que as arestas (4, 2), (4, 3) e (4, 6) serão adicionadas ao grafo  $G$  será ímpar que, junto com a aresta requerida, tornarão o vértice 4 um vértice de grau par.

Lembre-se que se um vértice for *R-par* ele irá satisfazer apenas a restrição (2.7). As restrições (2.7) e (2.8) nunca serão satisfeitas, simultaneamente, pelo mesmo vértice.

Como comentado, as restrições (2.9) são iguais às restrições (2.3), apresentada no modelo anterior, mas vamos considerar um outro subconjunto para exemplificar.

Temos que  $P \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , então considere  $P = \{1, 3\}$ , daí

$$S = \cup_{k \in \{1,3\}} V_k = V_1 \cup V_3 = \{1, 2, 5, 6\};$$

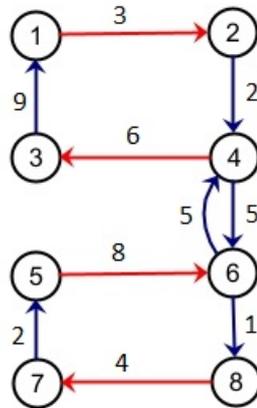
$$\delta(S) = \delta(\{1, 2, 5, 6\}) = \{(1, 3), (2, 4), (5, 3), (6, 4), (5, 7), (6, 8)\}.$$

Logo a restrição (2.9), neste caso, é

$$x_{13} + x_{24} + x_{53} + x_{64} + x_{57} + x_{68} \geq 2$$

Uma solução para o exemplo, que satisfaz todas as restrições do modelo, é apresentada na Figura 4, em que o percurso é: (1, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 6), (6, 4), (4, 3), (3, 1) com custo 45. Novamente, temos que todas as restrições do modelo estão sendo satisfeitas, logo temos que esta é uma solução factível para o modelo que, não necessariamente, é a solução ótima.

Figura 4 – Solução 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que os objetivos dos dois modelos propostos são os mesmos: tornar o grafo Euleriano e então obter um Circuito Euleriano de custo mínimo. A importância da teoria de grafos para a resolução do problema é evidente, independente do modelo utilizado e, com isto, a condição estabelecida por Euler é a essência dos modelos, a qual diz que um grafo possui um Circuito Euleriano se, e somente se, todos os vértices tiverem grau par.

Além dos dois modelos apresentados, de acordo com Corberán, Plana e Sanchis [18] todos os problemas de roteamento em arcos podem ser vistos como um caso particular do problema geral de roteamento ventoso (PGRV). No PGRV temos os conjuntos de vértices ( $V$ ) e arestas ( $A$ ) e também os conjuntos de vértices requeridos ( $V_R$ ) e arestas requeridas ( $A_R$ ). Além disso, como se trata do caso ventoso,  $c_{ij} \neq c_{ji}$ .

Uma formulação do PGRV é apresentada em [18] e pode ser estendida para todos os casos particulares, inclusive o PCR estudado neste trabalho.

Considerando o PCR, temos que o conjunto de vértices requeridos  $V_R = \emptyset$  e os custos de atravessar as arestas  $(i, j)$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ .

O modelo matemático para o PCR, obtido através do modelo para o PGRV proposto em [18], será apresentado a seguir, juntamente com os conjuntos, parâmetros e variáveis. Como a maioria dos conjuntos são iguais aos dos modelos anteriores e já foram apresentados, apresentaremos somente os novos conjuntos, parâmetros e variáveis.

### Conjuntos e Parâmetros

$S \subset V$  é um subconjunto de vértices.

$i \in V$  é *R-par* se for incidente em um número par de arestas requeridas.

$S \subset V$  é *R-par* se contém um número par de vértices *R-ímpar*

$i \in V$  é *R-ímpar* se for incidente em um número ímpar de arestas requeridas.

$S \subset V$  é *R-ímpar* se contém um número ímpar de vértices *R-ímpar*

$\delta(i) = \{(i, j) \in A \mid i \neq j\}$ .

$(S_1, S_2) = \{(i, j) \in A \mid i \in S_1, j \in S_2\}$   
 $c_{ij}$  : Custo de atravessar a aresta  $(i, j)$ .

### Variáveis

$x_{ij}, x_{ji}$  : Número de vezes que a aresta  $(i, j)$  será percorrida de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

Defina:

$$x(S_1 : S_2) = \sum_{i \in S_1, j \in S_2} x_{ij}$$

O modelo para o PCR obtido a partir do PGRV apresentado por Corberán, Plana e Sanchis [18] é:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}x_{ij} + c_{ji}x_{ji}) \quad (2.11)$$

**Sujeito a:**

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1, \quad \forall (i, j) \in A_R \quad (2.12)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} (x_{ij} - x_{ji}) = 0, \quad \forall i \in V \quad (2.13)$$

$$x(S : V \setminus S) \geq 1, \quad \forall S = \bigcup_{n \in P} V_n, P \subset \{1, \dots, p\} \quad (2.14)$$

$$x_{ij}, x_{ji} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.15)$$

A função objetivo (2.11) minimiza o custo da rota. As restrições (2.12) garantem que cada aresta requerida seja percorrida pelo menos uma vez, as restrições (2.13) implicam na continuidade da rota e as restrições (2.14) fazem com que a solução seja conexa. As restrições (2.15) representam o domínio das variáveis.

Para entendermos o modelo, considere o grafo a seguir representado pela Figura 5:

Figura 5 – Exemplo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

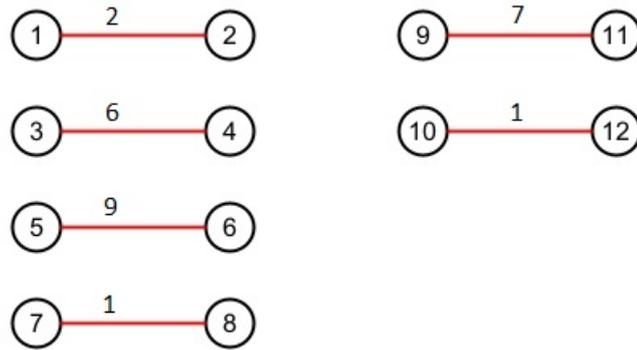
De acordo com o grafo, temos os conjuntos:

$$V = \{1, 2, 3, \dots, 12\}; \quad A = \{(1, 2), (2, 9), (9, 11), \dots, (7, 8)\};$$

$$A_R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 11), (10, 12)\}.$$

O grafo  $G_R$  induzido pelas arestas requeridas é apresentado na Figura 6:

Figura 6 – Grafo  $G_R$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que  $G_R$  não é conexo e possui 6 componentes conexas, sendo elas:

$$C_1 = \{(1, 2)\} \text{ e } V_1 = \{1, 2\} \quad C_2 = \{(3, 4)\} \text{ e } V_2 = \{3, 4\}$$

$$C_3 = \{(5, 6)\} \text{ e } V_3 = \{5, 6\} \quad C_4 = \{(7, 8)\} \text{ e } V_4 = \{7, 8\}$$

$$C_5 = \{(9, 11)\} \text{ e } V_5 = \{9, 11\} \quad C_6 = \{(10, 12)\} \text{ e } V_6 = \{10, 12\}$$

Perceba que todos os vértices  $i = \{1, 2, \dots, 12\}$  são *R-ímpar* pois são incidentes em apenas uma aresta requerida. No entanto, existem subconjuntos  $S \subset V$  que são *R-ímpar* e subconjuntos  $S \subset V$  que são *R-par*.

Considere  $S_1 = \{9, 10, 11, 12\}$  temos que  $S_1$  possui 4 vértices *R-ímpar*, logo  $S_1$  é *R-par*. Por outro lado, considere  $S_2 = \{3, 4, 6\}$  temos que  $S_2$  possui 3 vértices *R-ímpar*, logo  $S_2$  é *R-ímpar*.

Considere os subconjuntos  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $S_2 = \{9, 10\}$ . A partir de  $S$  e  $S_2$  temos os seguintes conjuntos:

$$\delta(S) = \{(2, 9), (4, 10), (3, 5), (4, 6)\}$$

$$A(S) = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (2, 4)\}$$

$$(S, S_2) = \{(2, 9), (4, 10)\}$$

$$x(S : S_2) = \sum_{i \in S, j \in S_2} x_{ij} = x_{29} + x_{4,10}$$

Se restringirmos os mesmos conjuntos apenas às arestas requeridas, temos:

$$\delta_R(S) = \emptyset; \quad A_R(S) = \{(1, 2), (3, 4)\}; \quad (S, S_2)_R = \emptyset.$$

Considerando o exemplo, vamos analisar as restrições do modelo. As primeiras restrições (2.12) garantem que todas as arestas requeridas do grafo devem ser percorridas pelo menos uma vez, então temos:

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{21} &\geq 1; & x_{34} + x_{43} &\geq 1; \\ x_{56} + x_{65} &\geq 1; & x_{78} + x_{87} &\geq 1; \\ x_{9,11} + x_{11,9} &\geq 1; & x_{10,12} + x_{12,10} &\geq 1. \end{aligned}$$

As restrições (2.13) são restrições que garantem a continuidade da rota, isto é, deve existir sempre uma aresta chegando e partindo de todos os vértices.

Para  $i = 4$  e  $i = 5$ , temos:

$$\begin{aligned} i = 4 : (x_{42} - x_{24}) + (x_{43} - x_{34}) + (x_{46} - x_{64}) + (x_{4,10} - x_{10,4}) &= 0 \\ i = 5 : (x_{53} - x_{35}) + (x_{56} - x_{65}) + (x_{57} - x_{75}) &= 0 \end{aligned}$$

Por último, temos as restrições (2.14) cuja finalidade é garantir que a rota no grafo seja conexa. Perceba que essas restrições estão relacionadas com as componentes conexas de  $G_R$  e são semelhantes às restrições de conectividade da rota dos modelos propostos em [15] e [17].

Seja  $P \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  um subconjunto do conjunto das componentes conexas. Tome  $P = \{2, 3, 6\}$ , daí

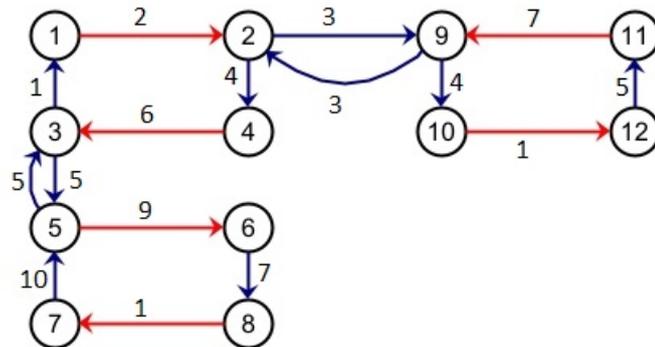
$$\begin{aligned} S &= \cup_{k \in \{2,3,6\}} V_k = V_2 \cup V_3 \cup V_6 = \{3, 4, 5, 6, 10, 12\}. \\ \delta(S) &= \delta(\{3, 4, 5, 6, 10, 12\}) = \{(3, 1), (4, 2), (5, 7), (6, 8), (10, 9), (12, 11)\}. \end{aligned}$$

Pelas restrições (2.14) temos que  $x(S : V \setminus S) \geq 1$ , isto é, são as arestas tais que  $i \in S$  e  $j \in V \setminus S$  (arestas  $(i, j) \in \delta(S)$ ). Portanto, para  $P = \{2, 3, 6\}$ , temos:

$$x_{31} + x_{42} + x_{57} + x_{68} + x_{10,9} + x_{12,11} \geq 1$$

A solução ótima do PCR é mostrada na Figura 7:

Figura 7 – Solução para o exemplo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cujo circuito é: (1, 2), (2, 9), (9, 10), (10, 12), (12, 11), (11, 9), (9, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1) com custo 74.

Como visto, existem semelhanças nos modelos matemáticos proposto para o PCR e é possível perceber que, com o decorrer do tempo, as características do problema ficaram mais explícitas no modelo matemático. Esse fator auxilia tanto na compreensão matemática do problema como também na implementação do modelo por meio de pacotes de otimização.

Na próxima seção será apresentada uma extensão do PCR relacionada com múltiplos carteiros no problema. Para que essa extensão seja válida algumas características precisam ser consideradas no problema, a fim de se obter soluções coerentes.

## 2.2 Problema dos K-Carteiros Rurais

O Problema dos K-Carteiros Rurais (K-PCR) é uma extensão do PCR, onde é considerado um conjunto de carteiros disponíveis para percorrer as arestas requeridas do grafo. Foi introduzido por Easton e Burdick [19], onde os autores estudam o problema de cobertura de fronteira com multi-robôs e, a partir da análise do grafo do problema, definem o problema NP-Difícil denominado Problema dos K-Carteiros Rurais.

Formalmente, dado um grafo  $G = (V, A)$ , temos um custo  $c_a \geq 0$  para cada aresta  $a \in A$ , um subconjunto  $A_R \subseteq A$  de arestas requeridas, um vértice  $v_1$  referente ao depósito, e um número fixo  $K \geq 2$  de carteiros. O objetivo é encontrar  $K$  passeios começando e terminando no depósito e atravessando em conjunto cada aresta  $a \in A_R$  pelo menos uma vez [20].

Apesar de serem os responsáveis por introduzirem o K-PCR, Easton e Burdick [19] não apresentaram um modelo matemático para o problema. Observe que mesmo o K-PCR sendo uma extensão do PCR, houve um longo período de tempo entre as definições do PCR, apresentado em 1974 [12], e o K-PCR, definido apenas em 2005 [19].

Analisando os trabalhos encontrados na literatura que usam a nomenclatura Problema dos K-Carteiros Rurais (K-PCR), podemos atribuir a definição tardia do K-PCR ao fato do problema ser definido e estudado apenas sob duas características específicas. A primeira característica está relacionada com a capacidade dos múltiplos carteiros (veículos). O K-PCR definido sobre essa condição de capacidade é definido na literatura como o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados (PRAC).

A segunda característica é referente ao tipo de função objetivo do problema, neste caso, trata-se de uma função Mínimo-Máximo, cuja finalidade é fazer com que cada aresta requerida seja atendida o quanto antes e que as rotas dos carteiros sejam equilibradas. Na literatura, esse problema é definido como Problema Min-Max dos K-Carteiros Rurais (MM K-PCR).

O PRAC e o MM K-PCR serão apresentados com mais detalhes nas próximas seções para entendermos melhor essa variação do K-PCR.

### 2.2.1 K-PCR e o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados

Primeiramente, vamos considerar que exista uma capacidade para cada veículo do K-PCR. Como já citado, na literatura este é o Problema de Roteamento em Arcos Capacitado (PRAC).

O PRAC foi introduzido em 1981 por Golden e Wong [21], e tem como objetivo determinar um conjunto de rotas que atendam as arestas requeridas uma única vez com o custo mínimo. Neste problema é associado dois custos para cada aresta, um custo de serviço e um custo de passagem, onde os custos de serviços estão relacionados apenas com as arestas requeridas e os custos de passagens relacionados com todas as arestas do grafo.

No PRAC, os veículos possuem capacidade limitada, sendo assim, as arestas requeridas são divididas entre os veículos de forma que todas elas sejam atendidas e a capacidade de cada veículo seja respeitada. Basicamente o custo de serviço pode ser visto como uma demanda, assim os veículos devem atender as demandas respeitando suas capacidades.

É importante se atentar ao fato de que o conjunto de arestas que possuem demanda, ou seja, o conjunto de arestas requeridas pode ser composto por todas as arestas do grafo, ou apenas por um subconjunto de arestas. Vale ressaltar que todas as arestas possuem um custo de passagem, isto é, o custo de percorrê-las sem que nenhum serviço seja feito. Dessa forma, quando um veículo apenas percorre uma aresta sua capacidade não é afetada.

Se tiver uma demanda associada para todas as arestas do grafo o problema pode ser visto como o Problema do Carteiro Chinês Capacitado (PCCC). Se apenas um subconjunto de arestas tiver demanda, temos o Problema do Carteiro Rural com capacidade (PCRC).

Quanto a sua complexidade computacional, o PRAC pode ser visto como uma generalização do problema do carteiro rural e do problema do carteiro chinês capacitado onde ambos são NP-Difíceis [22], sendo assim, segue que o PRAC também é NP-Difícil.

Em [11] os autores afirmam que o PCR pode ser visto como um caso particular do PRAC se considerarmos, a capacidade do veículo como sendo a cardinalidade do conjunto de arestas requeridas, a demanda de cada aresta requerida igual a 1 e igual a 0 para as arestas não requeridas, além de um custo de travessia para todas as arestas.

Note que, se a demanda de cada aresta requerida for igual a 1 e tivermos um veículo com capacidade igual a cardinalidade do conjunto de arestas requeridas, apenas um veículo será necessário para resolver o problema. Porém, caso a capacidade seja menor que a cardinalidade do conjunto de arestas requeridas, será necessário mais de um veículo, uma vez que a capacidade de cada veículo deve ser respeitada e ao mesmo tempo todas as arestas requeridas devem ser atendidas.

O primeiro modelo matemático para o PRAC também foi proposto por Golden e Wong [21] juntamente com testes computacionais e estratégias de soluções para o problema. Para mais detalhes consulte [21].

O PRAC também pode ser estendido para as versões direcionado, misto e ventoso,

além disso, existem diversas variações do problema como por exemplo, PRAC com janelas de tempo, PRAC periódico, PRAC com dependência, etc. Em situações reais o PRAC é muito usado em problemas como coleta de lixo, remoção de neve, e problemas agrícolas [20].

Apesar de Eiselt et al. [11] afirmarem que o PRAC é um dos problemas mais importantes da classe dos problemas de roteamento em arcos, Golden e Wong [21] afirmam que o PRAC é pouco estudado se comparado com o problema de roteamento em nós capacitados (PRNC). Entretanto, nos últimos anos o PRAC tem recebido mais atenção devido a sua aplicabilidade em situações reais, de maneira geral percebe-se que a atenção e os estudos relacionados com os problemas de roteamento em arcos cresceu bastante nos últimos anos [8].

Recentemente o PRAC tem sido encontrado em muitos trabalhos relacionados a robótica, onde os veículos do problema normalmente são veículos aéreos não tripulados. Agarwal e Akella [23] estudam o problema de cobertura de linha por veículos aéreos não tripulados. Essas linhas possuem características lineares e podem ser modeladas como segmentos de uma dimensão, como linhas de energia e redes rodoviárias por exemplo, e os robôs possuem uma capacidade relacionada com a duração de sua bateria.

Os autores formulam o problema como um PRAC através de um modelo de programação linear inteira mista cujo objetivo é minimizar o custo de viagem de cada robô. Além do modelo de programação linear inteira mista os autores apresentam duas heurísticas eficientes computacionalmente quando considerados problemas assimétricos e de grande porte. O problema é muito relevante pelo fato dos robôs serem muito eficientes ao cobrirem regiões pós desastre, que normalmente tem o acesso terrestre limitado.

Ainda no contexto dos veículos aéreos não tripulados, Campbell et al. [24] estudam o problema denominado LC K-DRPP, que basicamente é o problema do carteiro rural com  $k$  veículos, onde os  $k$  veículos são representados por drones e além disso, os autores consideram uma restrição de comprimento sobre a rota de cada drone devido a capacidade da bateria.

Um diferencial neste problema é que os drones podem entrar nas arestas por qualquer ponto e não apenas pelos vértices extremos. Apesar de novo, o problema tem aplicações em diversos contextos como, monitoramento de tráfego, inspeção de ferrovias ou linhas de transmissão de energia. Além disso, o estudo envolvendo veículos não tripulados cresceu consideravelmente nos últimos anos devido a alta tecnologia envolvida.

No contexto de coleta de resíduos, Tirkolaee et al. [25] estudam o PRAC periódico, considerando frotas heterogêneas, tempo de trabalho dos motoristas e a demanda incerta. O objetivo é minimizar a distância percorrida e o número de veículos utilizados em um determinado período. Devido a complexidade do problema os autores apresentam um algoritmo híbrido que apresentou resultados satisfatórios em instâncias maiores.

Também no trabalho de Batista [26] é estudado o PRAC periódico, porém o modelo

proposto possui algumas características específicas como por exemplo, a permissão de atrasos em alguns atendimentos se necessários, e também não é necessário voltar ao depósito no final do dia. O modelo proposto alcançou bons resultados em diferentes grafos e as soluções obtidas mostraram poucos atrasos em relação aos atendimentos.

No contexto agrícola, Khajepour et al. [27] estudaram um problema relacionado com o caminho de colheita em um campo agrícola. O problema é formulado como um problema de roteamento em arco capacitado, é considerado um conjunto de veículos homogêneos e assim busca-se determinar a melhor rota para a colheita do campo respeitando a capacidade da frota.

No livro *Arc Routing: Problems, Methods, and Applications* [20] é apresentado um estudo em quatro capítulos sobre o PRAC, são apresentados modelos matemáticos, heurísticas, variações do problema, dentre outras coisas que podem ser exploradas sobre o problema.

### 2.2.2 K-PCR e os Problemas Min-Max

Ao considerar o K-PCR com o objetivo de minimizar a distância total percorrida sem considerar a capacidade dos veículos, pode-se obter soluções pouco interessantes pois, as rotas dos veículos podem ser desequilibradas no sentido de que alguns veículos podem ter rotas muito curtas enquanto que outros podem ter rotas muito extensas [20].

Para evitar este desequilíbrio, os modelos min-max são uma alternativa para se obter o equilíbrio entre as rotas pois, o objetivo dos modelos é minimizar o custo da maior rota. Como sabemos, o custo da rota pode estar relacionado com diferentes grandezas como distância, tempo, quantidade de combustível, etc.

Em [20] é apresentado alguns problemas de roteamento em arcos com objetivo min-max, dentre eles o Problema Min-Max dos K-Carteiros Chineses (MM K-PCC), Problema Min-Max dos K-Carteiros Rurais (MM K-PCR) e o Problema Min-Max dos K-Carteiros Rurais Ventoso (MM K-PCR<sub>V</sub>).

Frederickson et al. [28] e Ahr [29] propuseram o Problema Min-Max dos K-Carteiros Chineses (MM K-PCC), onde ao invés de minimizar a soma dos custos dos passeios de cada um dos carteiros, o objetivo é minimizar o custo do maior passeio.

Este tipo de função objetivo min-max (MM) é preferível quando o objetivo é atender cada aresta o quanto antes e busca-se o equilíbrio entre as rotas. Com o MM K-PCR, as soluções tendem a ser mais justas, no sentido de que o conjunto de arestas requeridas será distribuído de maneira mais equilibrada entre os carteiros disponíveis.

Existem diversos modelos matemáticos para o MM K-PCR, cada um deles com algumas características específicas. Um dos principais modelos para o problema é proposto por Benavent et al. [30] e trata-se do Min-Max Problema dos K-Carteiros Rurais Ventoso (MM K-PCR<sub>V</sub>). A seguir vamos apresentar os conjuntos, parâmetros, variáveis e o modelo matemático proposto por Benavent et al. [30].

### Conjuntos e Parâmetros

$V$  é o conjunto de vértices.

$A = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$  é o conjunto de arestas.

$A_R$  é o conjunto das arestas requeridas ( $A_R \subset A$ ).

$K$  é o conjunto de veículos.

$S \subset V$  é um subconjunto de vértices.

$\delta(S) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \in V \setminus S\}$ .

$\delta(i) = \{(i, j) \in A \mid i \neq j\}$ .

$A(S) = \{(i, j) \in A \mid i, j \in S\}$ .

$(S_1, S_2) = \{(i, j) \in A \mid i \in S_1, j \in S_2\}$ .

$\delta_R(S), A_R(S), (S_1, S_2)_R$  são definidos da mesma forma que os anteriores, porém, restritos as arestas requeridas.

$c_{ij}, c_{ji}$  = Custo de atravessar a aresta  $(i, j)$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

### Variáveis

$x_{ij}^k, x_{ji}^k$  : Número de vezes que a aresta  $(i, j)$  será percorrida pela máquina  $k$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

$y_{ij}^k : \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ for atendida pela máquina } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$z$  : Variável auxiliar.

Seja  $F \subset A$  defina

$$x^k(F) = \sum_{(i,j) \in F} (x_{ij}^k + x_{ji}^k)$$

O modelo matemático proposto por Benavent et al. [30] para o MM K-PCRV é:

$$\text{Min } z \tag{2.16}$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}x_{ij}^k + c_{ji}x_{ji}^k) \leq z \quad \forall k \in K \tag{2.17}$$

$$\sum_{k \in K} y_{ij}^k = 1, \quad \forall (i, j) \in A_R \tag{2.18}$$

$$x_{ij}^k + x_{ji}^k \geq y_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K \tag{2.19}$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} (x_{ij} - x_{ji}) = 0, \quad \forall i \in V, \forall k \in K \tag{2.20}$$

$$x^k(\delta(S)) \geq 2y_{ij}^k, \quad \forall S \subset V \setminus \{1\}, \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K \tag{2.21}$$

$$x_{ij}^k, x_{ji}^k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \tag{2.22}$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K \tag{2.23}$$

Este modelo Min-Max tem como objetivo minimizar o custo da rota máxima entre todos os veículos. As restrições (2.17) minimizam os custos das rotas, as restrições (2.18) garantem que cada aresta requerida seja atendida pelo menos uma vez e por um único veículo, as restrições (2.19) fazem com que cada veículo percorra a aresta requerida para qual foi designado. As restrições (2.20) garantem a continuidade das rotas e, as restrições (2.21), fazem com que as rotas sejam conexas e conectadas com o depósito, o qual é representado pelo vértice 1. Por fim, as restrições (2.22) e (2.23) expressam o domínio das variáveis.

Considere o grafo representado pela Figura 8:

Figura 8 – Exemplo 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que nessa formulação não é necessário os conjuntos relacionados ao grafo induzido e às componentes conexas. Serão necessários apenas subconjuntos relacionados ao conjunto de vértices, arestas e arestas requeridas. Pelo grafo, temos:

$$V = \{1, 2, 3, \dots, 12\}; \quad A = \{(1, 2), (2, 9), (9, 11), \dots, (7, 8)\};$$

$$A_R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 11), (10, 12)\}.$$

Quanto as restrições do modelo, as restrições (2.17) apenas forçam que o custo da rota de cada veículo seja menor ou igual ao custo da rota máxima entre todos os veículos. Então considerando 2 veículos temos:

$$k = 1 : c_{12}x_{12}^1 + c_{21}x_{21}^1 + c_{13}x_{13}^1 + c_{31}x_{31}^1 + c_{24}x_{24}^1 + c_{42}x_{42}^1 + \dots + c_{11,12}x_{11,12}^1 + c_{12,11}x_{12,11}^1 \leq z$$

$$k = 2 : c_{12}x_{12}^2 + c_{21}x_{21}^2 + c_{13}x_{13}^2 + c_{31}x_{31}^2 + c_{24}x_{24}^2 + c_{42}x_{42}^2 + \dots + c_{11,12}x_{11,12}^2 + c_{12,11}x_{12,11}^2 \leq z$$

Note que esta restrição está relacionada com todas as arestas do grafo, e cada aresta  $(i, j)$  está relacionada com 2 variáveis  $x_{ij}$  e  $x_{ji}$ .

As restrições (2.18) fazem com que todas as arestas requeridas sejam atendidas exatamente uma vez e por apenas um veículo. Considerando  $K = 2$  temos:

$$\begin{aligned}
y_{12}^1 + y_{12}^2 &= 1; & y_{34}^1 + y_{34}^2 &= 1; \\
y_{56}^1 + y_{56}^2 &= 1; & y_{78}^1 + y_{78}^2 &= 1; \\
y_{9,11}^1 + y_{9,11}^2 &= 1; & y_{10,12}^1 + y_{10,12}^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Perceba que estas restrições estão relacionadas com as arestas requeridas e não com as suas respectivas variáveis associadas.

As restrições (2.19) são uma complementação das restrições anteriores, pois se uma aresta requerida é atendida pelo veículo  $k$  então o veículo deve percorrê-la. Considerando novamente  $K = 2$ , temos:

$$\begin{aligned}
k = 1 : & x_{12}^1 + x_{21}^1 \geq y_{12}^1; & x_{34}^1 + x_{43}^1 \geq y_{34}^1; & x_{56}^1 + x_{65}^1 \geq y_{56}^1; & x_{78}^1 + x_{87}^1 \geq \\
& y_{78}^1; & x_{9,11}^1 + x_{11,9}^1 \geq y_{9,11}^1; & x_{10,12}^1 + x_{12,10}^1 \geq y_{10,12}^1 \\
k = 2 : & x_{12}^2 + x_{21}^2 \geq y_{12}^2; & x_{34}^2 + x_{43}^2 \geq y_{34}^2; & x_{56}^2 + x_{65}^2 \geq y_{56}^2; & x_{78}^2 + x_{87}^2 \geq \\
& y_{78}^2; & x_{9,11}^2 + x_{11,9}^2 \geq y_{9,11}^2; & x_{10,12}^2 + x_{12,10}^2 \geq y_{10,12}^2
\end{aligned}$$

As restrições (2.20) são restrições de continuidade, ou seja, deve existir sempre uma aresta chegando e partindo de todos os vértices. Considere  $i = 6$ ,  $i = 7$ , e  $K = 2$ .

$$\begin{aligned}
\text{Para } i = 6 \text{ e } k = 1 : & (x_{64}^1 - x_{46}^1) + (x_{65}^1 - x_{56}^1) + (x_{68}^1 - x_{86}^1) = 0 \\
\text{Para } i = 6 \text{ e } k = 2 : & (x_{64}^2 - x_{46}^2) + (x_{65}^2 - x_{56}^2) + (x_{68}^2 - x_{86}^2) = 0 \\
\text{Para } i = 7 \text{ e } k = 1 : & (x_{75}^1 - x_{57}^1) + (x_{78}^1 - x_{87}^1) = 0 \\
\text{Para } i = 7 \text{ e } k = 2 : & (x_{75}^2 - x_{57}^2) + (x_{78}^2 - x_{87}^2) = 0
\end{aligned}$$

E assim será para todos os vértices do grafo e todos os veículos.

As restrições (2.21) são para que a rota de cada veículo seja conectada, como o vértice 1 é o depósito, todas as rotas devem começar e terminar no vértice 1.

Primeiramente, considere os subconjuntos:

$$\begin{aligned}
S &= \{3, 4, 5, 6, 10, 12\}; \\
\delta(S) &= \{(3, 1), (4, 2), (5, 7), (6, 8), (10, 9), (12, 11)\}; \\
A_R(S) &= \{(3, 4), (5, 6), (10, 12)\}.
\end{aligned}$$

Considerando também  $K = 2$  temos:

$$k = 1 :$$

$$\begin{cases}
x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2y_{34}^1 \\
x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2y_{56}^1 \\
x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2y_{10,12}^1
\end{cases}$$

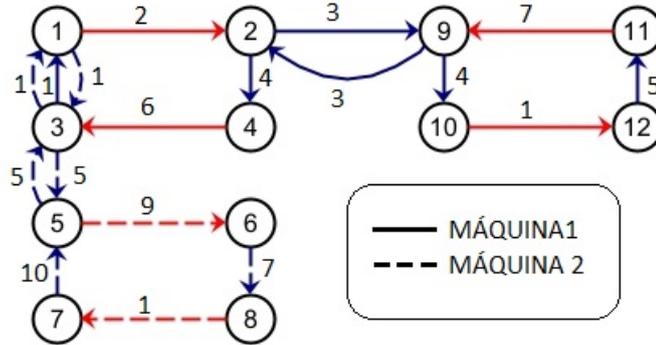
$$k = 2 :$$

$$\begin{cases}
x_{31}^2 + x_{13}^2 + x_{42}^2 + x_{24}^2 + x_{57}^2 + x_{75}^2 + x_{68}^2 + x_{86}^2 + x_{10,9}^2 + x_{9,10}^2 + x_{12,11}^2 + x_{11,12}^2 \geq 2y_{34}^2 \\
x_{31}^2 + x_{13}^2 + x_{42}^2 + x_{24}^2 + x_{57}^2 + x_{75}^2 + x_{68}^2 + x_{86}^2 + x_{10,9}^2 + x_{9,10}^2 + x_{12,11}^2 + x_{11,12}^2 \geq 2y_{56}^2 \\
x_{31}^2 + x_{13}^2 + x_{42}^2 + x_{24}^2 + x_{57}^2 + x_{75}^2 + x_{68}^2 + x_{86}^2 + x_{10,9}^2 + x_{9,10}^2 + x_{12,11}^2 + x_{11,12}^2 \geq 2y_{10,12}^2
\end{cases}$$

Observe que o lado direito da desigualdade sempre vai ser 2 ou 0 pois a variável  $y_{ij}^k$  é binária.

Considerando  $K = 2$ , a solução para o Exemplo 3 é mostrada na Figura 9:

Figura 9 – Solução para o exemplo 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

A rota da máquina 1 é:  $(1, 2), (2, 9), (9, 10), (10, 12), (12, 11), (11, 9), (9, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)$  com custo 36, e a rota da máquina 2 é:  $(1, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1)$  com custo 39. Como se trata de um modelo min-max, o valor da função objetivo é 39, que é o custo da maior rota.

Analisando este modelo e o modelo PGRP apresentado na Seção 2.1, percebemos uma semelhança entre as restrições que evitam sub-rotas desconexas na solução de ambos os modelos. As restrições (2.14) estão escritas em relação às componentes conexas, enquanto que as restrições (2.21) estão escritas em relação aos subconjuntos de  $V$ .

Perceba que considerando apenas um veículo, as restrições (2.21) apresentadas anteriormente serão:

$$\begin{cases} x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2y_{34}^1 \\ x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2y_{56}^1 \\ x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2y_{10,12}^1 \end{cases}$$

Como existe apenas um veículo, todas as variáveis  $y_a^1$  assumirão valor 1 e, consequentemente, as restrições serão:

$$\begin{cases} x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2 \\ x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2 \\ x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2 \end{cases}$$

Como todas as 3 restrições são iguais quando consideramos apenas 1 veículo, as restrições (2.21) se reduzem em:

$$x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2$$

Note que as restrições (2.21) e (2.14) possuem o mesmo objetivo, porém, estão escritas de formas diferentes.

As restrições (2.14) estão em termos de aresta, neste caso, considera-se que a aresta  $(i, j) = (j, i)$ , ou seja, o mesmo “objeto” pode ser representado de duas formas diferentes e, por esse motivo, as restrições são expressas como maiores ou iguais a 1.

$$x_{31} + x_{42} + x_{57} + x_{68} + x_{10,9} + x_{12,11} \geq 1$$

As restrições (2.21) estão em termos de direção da aresta, neste caso, considera-se que cada aresta  $(i, j)$  está associada a duas variáveis:  $x_{ij}$  e  $x_{ji}$  e por isso, as restrições são maiores ou iguais a 2.

$$x_{31}^1 + x_{13}^1 + x_{42}^1 + x_{24}^1 + x_{57}^1 + x_{75}^1 + x_{68}^1 + x_{86}^1 + x_{10,9}^1 + x_{9,10}^1 + x_{12,11}^1 + x_{11,12}^1 \geq 2$$

Podemos concluir que, se considerarmos apenas 1 veículo, ambos os modelos são equivalentes, ou seja, geram a mesma solução para o exemplo.

Ainda no trabalho de Benavent et al. [30], além da formulação PLI para o problema, são propostas algumas desigualdades válidas e um algoritmo branch-and-cut para resolver um conjunto de instâncias, as quais são disponibilizadas pelos autores.

O trabalho de Willemse e Joubert [31] também é um dos principais trabalhos relacionado ao MM K-PCR, sendo proposto um algoritmo heurístico para resolver um problema de patrulhamento de segurança na África do Sul. Os autores apresentam um modelo de programação linear inteira bem parecido com o modelo de Benavent et al. [30].

Se considerarmos o MM K-PCR relacionado ao tempo, o custo de cada aresta será relacionado com o tempo de percorrê-la, os modelos min-max são de grande relevância. Neste caso, os carteiros percorrem suas rotas simultaneamente, ou seja, eles partem do depósito ao mesmo tempo, percorrem as suas rotas e voltam para o depósito. Sendo assim, o tempo total do percurso é considerado como o tempo da maior rota e não a soma do tempo de todas as rotas.

Em [32] os autores também estudam o problema MM K-PCR aplicado ao patrulhamento policial em Londres, porém, os autores também consideram múltiplos depósitos no problema e é proposto um algoritmo baseado em busca tabu para resolver o problema.

Em [33] os autores abordam o problema de cobertura ambiental com k-robôs. Eles modelam o problema como um K-PCR e apresentam um algoritmo melhorado a partir da primeira heurística proposta por Easton e Burdick para o K-PCR em [19]. A primeira melhoria está relacionada com a fase de agrupamento e, a segunda, com a fase de roterização. As duas melhorias buscam minimizar o comprimento máximo, através de uma melhor divisão das rotas entre os robôs.

No artigo [34] os autores estudam o K-PCR em um grafo misto com hierarquia. Os autores utilizam uma função objetivo min-max pois, em vez de minimizar o tempo geral das rotas, é minimizado a última rota para cada classe hierárquica.

Em [35], os autores estudam o problema dos K-PCR na versão ponderada e, no contexto da remoção de neve. O problema leva em consideração duas questões: a primeira, diz respeito à alocação das arestas entre os veículos, isto é, qual veículo vai ser responsável por cada aresta. A segunda questão, diz respeito às rotas dos veículos, ou seja, qual a melhor rota que o veículo deve percorrer de tal forma que atenda todos as arestas que lhe foram atribuídas. No primeiro momento é feita a alocação das arestas entre os robôs e, depois, é determinada uma rota para cada um deles. A partir das rotas encontradas, busca-se uma melhoria nessas rotas por meio de busca local e meta-heurísticas.

## 3 A COLHEITA DA CANA-DE-AÇÚCAR

A produção de cana no Brasil é uma atividade de grande valor para o país. A cana-de-açúcar entrou no Brasil por volta de 1532 e, desde então, se tornou um produto de grande valia para o país e, com isto, desde a época colonial até os dias atuais, a cana possui relevância na economia nacional [36].

Atualmente, o Brasil é o principal produtor de cana-de-açúcar do mundo, a estimativa é que sejam colhidos 592 milhões de toneladas na safra 2021/2022. A concentração de produção de cana-de-açúcar acontece em duas principais regiões: região norte-nordeste e região centro-sul. Na região norte-nordeste a mecanização na agricultura aconteceu de forma mais lenta se comparada com a região centro-sul, o que refletiu na produtividade agrícola das duas regiões [2].

Grandes alterações na cadeia produtiva da cana afetam diretamente o desenvolvimento de algumas regiões, como é o caso da região centro-sul onde se encontram os cinco maiores estados produtores: São Paulo, Minas Gerais, Goiás, Paraná e Mato Grosso do Sul [37]. Na safra atual 2020/2021, a região Centro-Sul deverá ser responsável por 92% do total de açúcar produzido [2].

Nos últimos anos, tem aumentado consideravelmente a diversidade de produtos gerados pela cadeia produtiva da cana-de-açúcar. Além do açúcar, etanol e cachaça, a energia elétrica e o etanol de segunda geração tem se destacado no país. Além disso, existe atualmente, uma maior variedade no tipo de espécies de cana que podem ser plantadas [38].

Ao longo dos anos diversas mudanças também ocorreram no setor sucroenergético, como o formato dos campos, as variedades de espécies de cana-de-açúcar, os processos de cultivo, a fim de satisfazer as necessidades que foram surgindo ao longo do tempo. Uma das mudanças que ocasionou maior impacto em toda a cadeia de produção da cana foi a mecanização. Atualmente, a maior parte do trabalho manual já foi substituído por máquinas agrícolas, resultando em melhorias significativas para o setor, entretanto, algumas consequências consideradas negativas também ocorreram, as quais serão apresentadas na próxima seção [39].

### 3.1 Mecanização

No Brasil, a mecanização agrícola teve início por volta de 1959. Em relação à cana-de-açúcar acredita-se que por volta dos anos 40 já eram utilizadas ferramentas mecanizadas para a colheita da cana-de-açúcar, entretanto, apenas entre os anos 60 e 80 que houve um aumento expressivo no uso de maquinários para a realização da colheita [40].

Hoje em dia a maior parte das atividades relacionadas à cana-de-açúcar são mecanizadas, sendo a mecanização considerada uma grande evolução não só para o setor sucroenergético como também para toda a agricultura no geral. Entretanto, vale ressaltar que a mecanização trouxe algumas consequências para o setor as quais devem ser analisadas com cuidado para que se tenha controle sobre a situação. [41].

A compactação do solo é uma das principais consequências negativas da mecanização agrícola pois, com ela, o rendimento da plantação sofre uma queda devido à diminuição no crescimento de novas plantações [42]. Tal fator ocorre devido ao tráfego pesado e a falta de sistematização das áreas, ocasionando assim danificação nas áreas plantadas [43]. Uma maneira de controlar essa compactação é delimitar o espaço onde vai ocorrer o tráfego das máquinas, dessa forma, a máquina não irá passar por áreas onde existem plantações e, conseqüentemente, não irá afetar o desenvolvimento de novas plantações naquele pedaço de terra [44].

Atualmente, mudanças em relação às máquinas e ao tráfego agrícola estão ocorrendo. Tem-se dado preferência por máquinas com pneus de alta flutuação como forma de diminuição do dano causando ao solo [45]. Além disso, tem se optado por estabelecer um padrão no *layout* das áreas plantadas os quais facilitam o tráfego das máquinas sem que as mesmas danifiquem a plantação.

Outra questão extremamente importante em relação à mecanização da cadeia produtiva da cana é o aumento dos custos envolvidos nas operações de produção. Esse fator fez com que aumentassem os estudos sobre o planejamento da cadeia produtiva da cana, pois é necessário que haja um melhor aproveitamento dos recursos e evite gastos desnecessários [46]. Existem na literatura diversos trabalhos que tratam do planejamento da produção da cana-de-açúcar. Esse planejamento produz um aumento considerável nos lucros dos agricultores, além de contribuir para uma melhor qualidade do produto final [47].

Apesar da mecanização ser decisiva na diminuição da produtividade e no grande aumento dos custos relacionados à produção, houve boas contribuições para os produtores e para o meio ambiente. A redução da queimada nos campos agrícolas é um avanço de grande valor ambiental, melhorando a qualidade do meio ambiente e também a saúde humana. Além disso, é notável a melhoria na condição de trabalho para os operários da área sucroenergética [36].

## 3.2 Colheita

Estudos publicados apontam que a colheita é a principal responsável pelo custo operacional de produção, representando 25% dos custos operacionais [48]. Diante disso, a Pesquisa Operacional se tornou uma grande ferramenta de auxílio para tomada de decisões referentes à colheita da cana. Dentre os estudos relacionados à cana-de-açúcar e a PO, a maior parte se concentra no processo da colheita com o objetivo de minimizar os gastos

do processo. Quando o processo de colheita é bem planejado e executado, os impactos econômicos, em particular a redução dos custos, têm se mostrado bastante atraentes.

A colheita mecanizada exige um melhor planejamento quanto a sua execução devido ao alto custo. Dessa forma, os produtores e os gerentes das grandes indústrias utilizam de ferramentas matemáticas para o planejamento e execução da colheita mecanizada da cana para que o processo ocorra da melhor maneira possível [40].

Tanto na colheita mecanizada quanto na colheita manual, após o corte a cana-de-açúcar deve ser rapidamente levada para o processamento porque depois de 24 horas começa a perda de qualidade. A integração logística da colheita, transbordo e transporte deve estar em constante harmonia, com o objetivo de otimizar o tempo entre corte e moagem. Portanto, pesquisadores em várias partes do mundo investigam formas econômicas de administrar o processo de colheita da cana-de-açúcar e muitos desses pesquisadores utilizam de metodologias matemáticas e computacionais para otimizar este processo [40].

### 3.3 Recorte da Literatura

A literatura sobre a cana-de-açúcar é muito ampla e de grande relevância para os produtores sucroenergéticos. É possível encontrar trabalhos que vão desde o estudo do campo agrícola, relacionados com a parte de planejamento das atividades, até trabalhos que apresentam estudos operacionais da cadeia produtiva.

As questões relacionadas com a mecanização dos processos no campo impulsionaram os estudos relacionados a essa mudança. Em [49], os autores apresentam uma breve revisão bibliográfica a respeito das áreas em que a colheita mecanizada é adotada. São abordadas questões quanto à declividade do solo, o espaço entre cada linha de plantação da cana, o *layout* dos talhões, dentre outras questões. Os autores concluem que todas estas questões devem ser consideradas para que o sistema de colheita mecanizada seja eficiente.

A mecanização trouxe desafios para diversos processos do setor agrícola, sendo necessárias adaptações e melhorias no desenvolvimento das atividades, para que o processo ocorra da melhor maneira possível. Em [50] os autores realizam um estudo com o objetivo de integrar homem, máquina e meio ambiente a fim de obter uma melhor eficiência na produção.

As técnicas da PO têm se mostrado muito eficazes e importantes quando relacionadas com a cana-de-açúcar ou com agricultura em geral. Tais técnicas incluem modelos matemáticos, algoritmos, heurísticas, dentre outras ferramentas da área. Tudo isso pode ser empregado em vários momentos da cadeia produtiva da cana, indo desde a escolha das variedades a serem cultivadas até a entrega dos produtos aos consumidores.

O processo de produção da cana é amplo e complexo, podendo ser explorado sob diversas vertentes e, desta forma, alguns pesquisadores estudam processos específicos da produção, enquanto outros tratam do problema como um todo. Paiva e Morabito [51]

---

propõem um modelo de programação linear inteira mista para o planejamento integrado da produção de usinas de açúcar e álcool. O sistema de produção compreende desde a etapa de plantação até o estoque dos produtos finais. Foi realizado um estudo de caso referente à uma usina de Alagoas e o modelo se mostrou bastante adequado para o planejamento da produção de empresas do setor sucroenergético.

Como já citado, o processo de colheita é de alto custo para o produtor, sendo responsável pela maior parte de todo o custo da produção. Devido a isso, o interesse em estudar o processo de colheita recebeu muita atenção nos últimos anos, resultando em uma gama de trabalhos publicados e muitos resultados satisfatórios.

Em 2008, Salassi e Barker [52] realizaram um estudo sobre o custo de operação relacionado ao transporte da cana após a colheita para a usina. Foi proposto um modelo de programação matemática capaz de estabelecer uma boa sintonia entre colheita e entrega, com o objetivo de minimizar o tempo de espera dos caminhões nas usinas.

Em 2009, Jena e Aragão [53] apresentaram um estudo cujo objetivo era maximizar o lucro total da colheita determinando o melhor momento para colher, com base no teor de açúcar presente na cana. Para isso, os autores propuseram um modelo de programação linear inteira relacionado ao problema de empacotamento junto com restrições de fluxo em rede. Também foram propostas desigualdades válidas a fim de fortalecer o modelo matemático. Os dados utilizados foram fornecidos por um produtor de cana-de-açúcar do Brasil.

O artigo [54] apresenta um modelo de programação linear inteira baseado no problema de fluxo em redes de custo mínimo e algumas restrições adicionais relacionadas à safra. O objetivo é obter um melhor aproveitamento das máquinas agrícolas no processo de colheita, através de uma boa interação entre as máquinas colhedoras e os caminhões que recebem os grãos, além de uma rota otimizada para a colhedora. Quando essa interação entre máquina e caminhão ocorre de maneira eficiente, o tempo improdutivo das máquinas tende a diminuir, gerando economias para o processo de colheita. O modelo se mostrou eficiente, conseguindo resolver na otimalidade problemas relacionados a campos de tamanho médio.

No trabalho de Oksanen e Visala [55] são propostos dois algoritmos relacionados à cobertura de campos por máquinas agrícolas. O objetivo é determinar a rota ótima que cubra todo o campo. Os dois algoritmos possuem estratégias diferentes, em um deles o objetivo é dividir o campo todo em subcampos menores para facilitar o planejamento da rota. O outro algoritmo considera o estado atual da máquina para determinar a próxima faixa a ser colhida. Apesar de nenhum dos algoritmos encontrar a solução ótima do problema, eles mostraram um caminho para pesquisas futuras relacionadas à cobertura de campo em contextos agrícolas.

Scarpari e Beauclair [56] utilizaram a programação linear através do sistema de modelagem *General Algebraic Modeling System (GAMS)* para desenvolver um planejamento ótimo do cultivo da cana-de-açúcar, visando maximizar os lucros e otimizar a colheita.

---

Em 2012, Stray et al. [57] propuseram um sistema de apoio a tomada de decisões relacionado à programação da colheita de cana-de-açúcar na África do Sul. O sistema busca sequenciar os campos de uma operação de colheita ao longo de uma temporada, baseado no problema do caixeiro viajante. Os autores ficaram satisfeitos com os resultados obtidos através do sistema proposto, mas deixam claro que os problemas relacionados à colheita da cana-de-açúcar ainda podem ser bastante explorados.

Em [58] os autores apresentam um modelo multiobjetivo com os objetivos de minimizar a distância percorrida pela colhedora e maximizar a produtividade da cana-de-açúcar. Foi utilizado um algoritmo genético, baseado em enxame de partículas para resolver o problema. Apesar dos objetivos serem conflitantes, os resultados mostraram que é possível fazer escolhas equilibradas entre os dois objetivos.

No trabalho de Conesa [59] é estudado o planejamento da rota agrícola, considerando simultaneamente distância percorrida e tempo de realização da tarefa, além de uma frota heterogênea de veículos. A abordagem proposta foi validada em exemplos ilustrativos e comparadas com métodos de planejamento da literatura, obtendo melhorias nas soluções existentes.

Rosa [48] apresentou um modelo desenvolvido em *Excel* como uma ferramenta de apoio para tomada de decisões relacionadas ao sistema de colheita mecanizada da cana-de-açúcar. O autor considera como sistema de colheita, um conjunto de atividades que vai desde o corte da cana-de-açúcar no campo até o transporte para a usina. Para validação do modelo utilizou-se dados de um condomínio agrícola e o modelo se mostrou eficaz quanto à representatividade do sistema de colheita mecanizada da cana-de-açúcar.

Santoro *et al.* [43] propõem um modelo matemático para o Problema de Planejamento de Rota para Colheita Mecanizada. O modelo matemático é baseado no problema do carteiro rural e tem como objetivo minimizar o tempo de manobra da colhedora. Os autores consideram como tempo de manobra o tempo em que a máquina colhedora está no campo mas não está colhendo a cana, basicamente seria o tempo que a máquina leva para passar de uma linha de plantação para a outra em cada talhão. O modelo foi testado em instâncias reais e apresentou resultados satisfatórios para o problema.

O trabalho [60] apresenta um estudo sobre alocação e ordenação de rotas de várias máquinas em campos agrícolas. O problema foi formulado como um problema de roteamento de veículos com o objetivo de minimizar o tempo de conclusão do campo agrícola total. Os autores usam uma heurística baseada no algoritmo de *Clarke-Wright* e uma meta-heurística baseada em busca tabu, para resolver o problema. Apesar do maior tempo computacional a meta-heurística obteve resultados de melhor qualidade.

Em [44] é proposto um método para minimizar a distância percorrida pelas máquinas ao realizar as manobras nas cabeceiras dos talhões. Ao minimizar a distância ocorre uma diminuição no consumo de combustível e diminui a compactação do solo. O método é baseado no problema do caixeiro viajante e, devido a sua complexidade, os autores utilizam

duas meta-heurísticas baseadas em enxame de partículas e colônia de formigas. Com base na comparação entre o método proposto e os métodos já existentes na literatura, os resultados foram satisfatórios, podendo o método ser aplicado em campos de diversos tamanhos.

Em [61] é estudado o problema de roteamento para veículos autônomos em um campo agrícola. Os campos são representados por meio de um grafo e a melhor rota para os veículos é obtida através do problema do carteiro rural.

O trabalho [62] apresenta uma revisão sobre as abordagens modernas para a otimização de movimentos de máquinas agrícolas com aplicações na produção de cana-de-açúcar. Os trabalhos apresentados na revisão apresentam abordagens para o problema sob diferentes aspectos, alguns levando em consideração o *layout* do campo, outros do planejamento da rota.

Schmidt [46] apresenta um estudo sobre as estratégias operacionais e financeiras que devem ser adotadas nas operações da colheita da cana-de-açúcar a fim de se obter o máximo rendimento econômico.

Além das referências citadas, em [47] é apresentada uma revisão bibliográfica sobre modelos matemáticos aplicados ao processo de colheita da cana-de-açúcar. A revisão abrange os trabalhos relevantes de 1977 a 2017.

De forma mais geral, Teixeira *et al.* [7] apresentam uma revisão bibliográfica atual de trabalhos que usam modelos matemáticos para representar uma ou mais etapas da cadeia produtiva da cana-de-açúcar.

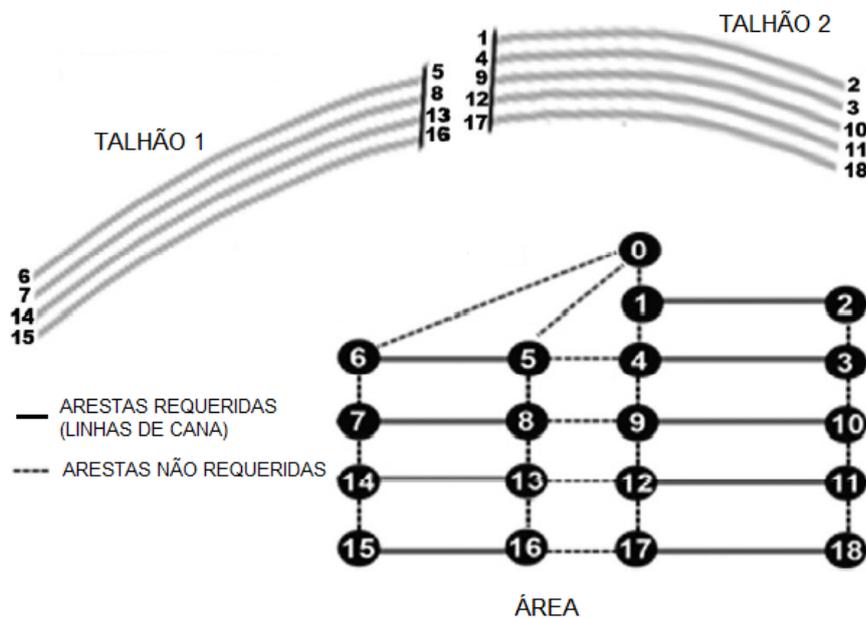
Apesar dos inúmeros trabalhos que tratam de problemas relacionados a produção de cana-de-açúcar e, mesmo a colheita sendo a etapa mais estudada, ainda existe um número pequeno de trabalhos que estudam a minimização da rota da colhedora. Este trabalho, trata exclusivamente desta questão, preenchendo uma lacuna na literatura e abrindo novas oportunidades para trabalhos futuros.

## 4 O PROBLEMA DO CARTEIRO RURAL APLICADO À COLHEITA DA CANA-DE-AÇÚCAR

Este capítulo tem como objetivo modelar o processo de colheita da cana-de-açúcar como um PCR. Como já visto, o processo de colheita é um dos mais caros de toda a produção sucroenergética, dessa forma apresentamos quatro cenários de colheita e buscamos analisar os impactos que diferentes estratégias podem causar neste processo.

A plantação de cana-de-açúcar é feita em talhões, que podem variar de tamanho e formato, e são compostos pelas linhas de cana (arestas requeridas). Entre os talhões existem as estradas (arestas não requeridas) por onde os maquinários e caminhões circulam sem prejudicar a plantação, a Figura 10 ilustra como é uma plantação de cana, a partir de um grafo. Vamos definir como área um conjunto de talhões e, como campo, um conjunto de áreas.

Figura 10 – Representação gráfica



Fonte: Adaptado de [43].

O problema de colheita da cana-de-açúcar consiste em determinar a melhor rota para a(s) colhedora(s), de tal forma que o tempo de colheita seja minimizado. As quatro versões abordadas são as seguintes:

- **Versão 1:** Minimizar o tempo de colheita de uma área com uma máquina;
- **Versão 2:** Minimizar o tempo de colheita de uma área com múltiplas máquinas;
- **Versão 3:** Minimizar o tempo de colheita de múltiplas áreas com uma máquina por área;
- **Versão 4:** Minimizar o tempo de colheita de múltiplas áreas com múltiplas máquinas por área.

Percebe-se que nas versões 3 e 4, além do problema de roteamento onde estamos interessados em colher a(s) área(s) no menor tempo possível, também temos um problema de designação que consiste em determinar qual máquina irá colher qual área ou quais máquinas irão colher quais áreas.

A seguir é apresentado cada uma das versões do problema de forma individual, seguido do modelo matemático e de um exemplo ilustrativo.

## 4.1 Versão 1

A versão 1 do problema consiste em determinar uma rota de custo mínimo em uma única área com apenas uma máquina, sendo o custo representado pelo tempo de colheita. O problema é formulado como um PCR, pois como existe plantação de cana apenas em algumas linhas da área a ser colhida, não é necessário percorrer todas as arestas do grafo, apenas o subconjunto de arestas requeridas.

### 4.1.1 Modelo Matemático 1

O modelo proposto para a representação da versão 1 do problema foi adaptado de [30], as adaptações estão relacionadas com a quantidade de veículos e à função objetivo. Considera-se apenas uma máquina de capacidade ilimitada, que sai de um depósito representado pelo vértice 1, percorre todas as arestas requeridas e volta para o depósito no menor tempo possível.

A seguir é descrito os conjuntos, parâmetros, variáveis e o modelo matemático.

#### Conjuntos e Parâmetros

$V$ : conjunto de vértices.

$A = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$ : conjunto de arestas.

$A_R$ : conjunto das arestas requeridas ( $A_R \subset A$ ).

$S \subset V$ : subconjunto de vértices.

$\delta(S) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \in V \setminus S\}$ .

$\delta(i) = \{(i, j) \in A \mid i \neq j\}$ .

$$A(S) = \{(i, j) \in A \mid i, j \in S\}$$

$\delta_R(S), A_R(S)$  são definidos da mesma forma que os anteriores, porém restritos às arestas requeridas.

$c_{ij}, c_{ji}$  = Tempo de percorrer a aresta  $(i, j)$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

### Variáveis

$x_{ij}, x_{ji}$  : Número de vezes que a aresta  $(i, j)$  é percorrida de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

Seja  $F \subseteq A$  defina

$$x(F) = \sum_{(i,j) \in F} (x_{ij} + x_{ji})$$

### Modelo 1

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}x_{ij} + c_{ji}x_{ji}) \quad (4.1)$$

**Sujeito a:**

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1, \quad \forall (i, j) \in A_R \quad (4.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} (x_{ij} - x_{ji}) = 0, \quad \forall i \in V \quad (4.3)$$

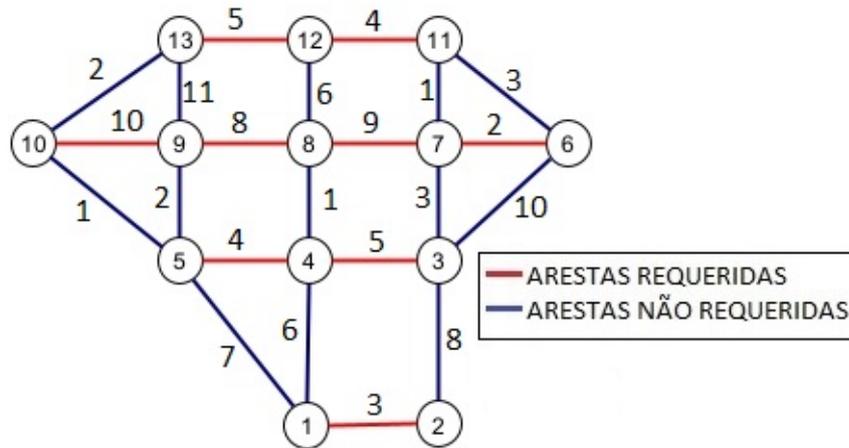
$$x(\delta(S)) \geq 2, \quad \forall S \subset V \setminus \{1\}, \forall (i, j) \in A_R(S) \quad (4.4)$$

$$x_{ij}, x_{ji} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.5)$$

No modelo 1, a função objetivo (4.1) tem como objetivo minimizar o tempo de colheita. As restrições (4.2) garantem que cada aresta requerida seja percorrida pelo menos uma vez, as restrições (4.3) garantem a continuidade da rota, as restrições (4.4) garantem que não exista sub-rotas desconexas da solução e, por fim, as restrições (4.5) correspondem ao domínio das variáveis.

Considere o exemplo, mostrado na Figura 11:

Figura 11 – Exemplo Versão 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

A solução ótima para o exemplo tem custo 72 e a rota é: (1, 5), (5, 10), (10, 13), (13, 12), (12, 11), (11, 7), (7, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1).

Observe que de todas as arestas requeridas (arestas em vermelho) foram percorridas exatamente uma vez, sendo que apenas a aresta (7, 6) foi percorrida duas vezes, de 7 para 6 e de 6 para 7.

## 4.2 Versão 2

A versão 2 do problema é uma variação da versão 1 mas, neste caso, considera-se mais de uma máquina disponível para percorrer a área e, dessa forma, ele é formulado como um Problema dos K-Carteiros Rurais (K-PCR). O modelo utilizado para representar esta versão foi proposto por Benavent et al. [30].

### 4.2.1 Modelo Matemático 2

Como discutido na Seção 2.2.2 o modelo Min-Max representa melhor o problema estudado pois queremos minimizar o tempo de colheita. Dessa forma, considera-se um conjunto de máquinas homogêneas de capacidade ilimitada, onde todas as máquinas partem de um mesmo depósito representado pelo vértice 1 e, ao final do percurso, devem retornar para o depósito. O objetivo é minimizar o tempo da maior rota.

Os conjuntos utilizados no Modelo 2 são os mesmos apresentados no Modelo 1, acrescido de um conjunto  $K$  que representa o conjunto de máquinas e, conseqüentemente, é adicionado um novo índice ( $k \in K$ ) nas variáveis, de acordo com a descrição a seguir.

### Variáveis

$x_{ijk}, x_{jik}$  : Número de vezes que a aresta  $(i, j)$  é percorrida pela máquina  $k$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

$$y_{ijk} : \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ é atendida pela máquina } k, k = 1, \dots, K; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$v$  : Variável auxiliar.

Seja  $F \subseteq A$  defina

$$x_k(F) = \sum_{(i,j) \in F} (x_{ijk} + x_{jik})$$

### Modelo 2

$$\text{Min } v \tag{4.6}$$

Sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}x_{ij}^k + c_{ji}x_{ji}^k) \leq v, \quad \forall k \in K \tag{4.7}$$

$$\sum_{k \in K} y_{ijk} = 1, \quad \forall (i, j) \in A_R \tag{4.8}$$

$$x_{ijk} + x_{jik} \geq y_{ijk}, \quad \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K \tag{4.9}$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} (x_{ijk} - x_{jik}) = 0, \quad \forall i \in V, \forall k \in K \tag{4.10}$$

$$x_k(\delta(S)) \geq 2y_{ijk}, \quad \forall S \subset V \setminus \{1\}, \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K \tag{4.11}$$

$$x_{ijk}, x_{jik} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \tag{4.12}$$

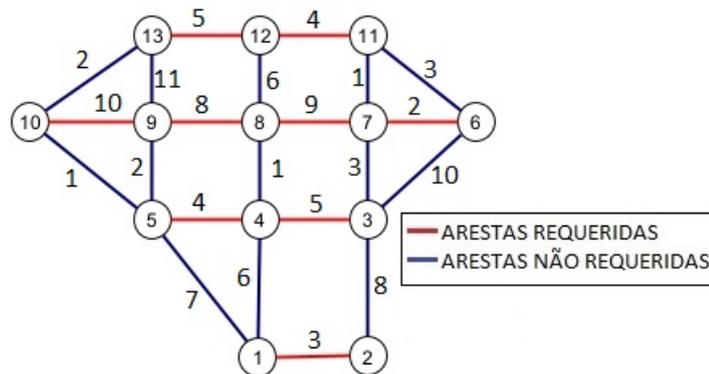
$$y_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K \tag{4.13}$$

$$v \in \mathbb{R} \tag{4.14}$$

No modelo 2, a função objetivo (4.6) minimiza o tempo máximo de colheita. As restrições (4.7) garantem que o tempo de colheita seja menor ou igual ao tempo de colheita máximo, as restrições (4.8) garantem que cada aresta requerida seja atendida uma vez e apenas por uma máquina, as restrições (4.9) garantem que se uma máquina atende uma aresta requerida então ela deve percorrer essa aresta. Observe que as restrições (4.8) e (4.9) garantem que cada aresta requerida seja atendida somente uma vez e por um único veículo, porém, estas arestas ainda podem ser percorridas mais de uma vez e por mais de um veículo. As restrições (4.10) garantem a continuidade da rota, as restrições (4.11) garantem a não existência de sub-rotas desconexas na solução e, por fim, as restrições (4.12), (4.13) e (4.14) expressam o domínio das variáveis.

Considere o mesmo exemplo do modelo anterior representado pela Figura 12:

Figura 12 – Exemplo Versão 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando  $K = 2$  o valor ótimo para o exemplo é 43 e as máquinas possuem as seguintes rotas:

- **Máquina 1:**  $(1, 5), (5, 10), (10, 9), (9, 8), (8, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$  com custo 43 e 4 arestas requeridas atendidas (arestas em vermelho).
- **Máquina 2:**  $(1, 4), (4, 8), (8, 7), (7, 6), (6, 7), (7, 11), (11, 12), (12, 13), (13, 10), (10, 5), (5, 4), (4, 1)$  com custo 43 e 5 arestas requeridas atendidas (arestas em vermelho).

Observe que, como já dito, as arestas requeridas são utilizadas para a colheita exatamente uma vez, porém, elas podem ser percorridas mais de uma vez, isso acontece com a aresta  $(6, 7)$  na rota da máquina 2.

Além dessa questão, podemos observar como o tempo de colheita diminuiu ao considerarmos 2 máquinas, o valor da função objetivo teve uma redução de 40,27% comparado ao valor ótimo obtido na versão 1, e obteve-se o equilíbrio entre as rotas de cada máquina.

### 4.3 Versão 3

A versão 3 do problema trata-se de um problema de roteamento junto com um problema de designação. Considera-se um conjunto  $L$  de áreas a serem percorridas e um conjunto  $K$  de máquinas disponíveis para atender todas as áreas. Cada máquina é designada para uma ou mais áreas e, em cada área, é determinada a melhor rota para a máquina através de um problema do carteiro rural (PCR).

O objetivo é minimizar o tempo de atendimento do conjunto de áreas, dessa forma, a designação é feita com o objetivo de distribuir da melhor forma as áreas entre as máquinas.

Como condições do problema temos que as máquinas devem sair e voltar para o depósito após o fim do percurso em uma área, ou seja, se uma máquina for designada para mais de uma área, ao terminar de percorrer a primeira área ela deve retornar ao depósito e, em

seguida, ir para a próxima área. Além disso, temos também a condição de que cada área seja percorrida apenas por uma máquina.

### 4.3.1 Modelo Matemático 3

Também é proposto um modelo Min-Max adaptado de [30] pois as máquinas podem percorrer as áreas em paralelo. Todas as máquinas partem do mesmo depósito representado pelo vértice 1 e, ao terminar de percorrer a área para a qual foi designada, deve retornar ao depósito. Assim sendo, o objetivo é minimizar o tempo da maior rota.

A seguir, descrevemos os conjuntos, parâmetros, variáveis e o modelo matemático.

#### Conjuntos e Parâmetros

$L$  é o conjunto de áreas.

$V^l$  é o conjunto de vértices da área  $l$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

$A^l = \{(i, j) \mid i, j \in V^l\}$  é o conjunto de arestas da área  $l$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

$A_R^l$  é o conjunto das arestas requeridas da área  $l$  ( $A_R^l \subset A^l$ ),  $l = 1, \dots, L$ .

$K$  é o conjunto de máquinas.

$S^l \subset V^l$  é um subconjunto de vértices,  $l = 1, \dots, L$ .

$\delta^l(S) = \{(i, j) \in A^l \mid i \in S^l, j \in V^l \setminus S^l\}$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

$\delta^l(i) = \{(i, j) \in A^l \mid i \neq j\}$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

$A^l(S) = \{(i, j) \in A^l \mid i, j \in S^l\}$ .

$(S_1^l, S_2^l) = \{(i, j) \in A^l \mid i \in S_1^l, j \in S_2^l\}$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

$\delta_R^l(S)$ ,  $A_R^l(S)$ ,  $(S_1^l, S_2^l)_R$  são definidos da mesma forma que os anteriores, porém restritos às arestas requeridas.

$c_{ij}, c_{ji}$  = Tempo de percorrer a aresta  $(i, j)$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente.

$B$  : Número suficientemente grande.

#### Variáveis

$x_{ijk}^l, x_{jik}^l$  : Número de vezes que a aresta  $(i, j)$  é percorrida pela máquina  $k$  de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$ , respectivamente, na área  $l$ .

$y_{ijk}^l : \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ da área } l \text{ é atendida pela máquina } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$z_k^l : \begin{cases} 1, & \text{se a máquina } k \text{ for designada para a área } l; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$v$  : Variável auxiliar.

Seja  $F^l \subseteq A^l$  defina

$$x_k^l(F^l) = \sum_{(i,j) \in F^l} (x_{ijk}^l + x_{jik}^l)$$

### Modelo 3

$$\text{Min } v \quad (4.15)$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{k \in K} z_k^l = 1, \quad \forall l \in L \quad (4.16)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A^l} (c_{ij}^l x_{ijk}^l + c_{ji}^l x_{jik}^l) \leq v, \quad \forall k \in K \quad (4.17)$$

$$y_{ijk}^l = z_k^l, \quad \forall (i,j) \in A_R^l, \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.18)$$

$$x_{ijk}^l + x_{jik}^l \geq y_{ijk}^l, \quad \forall (i,j) \in A_R^l, \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$x_{ijk}^l + x_{jik}^l \leq B z_k^l, \quad \forall (i,j) \in A^l, \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.20)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^l(i)} (x_{ijk}^l - x_{jik}^l) = 0, \quad \forall i \in V^l, \forall l \in L, \forall k \in M \quad (4.21)$$

$$x_k^l(\delta(S^l)) \geq 2y_{ijk}^l, \quad \forall S^l \subset V^l \setminus \{1\}, \forall (i,j) \in A_R^l(S), \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.22)$$

$$x_{ij}^l, x_{ji}^l \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.23)$$

$$y_{ijk}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A_R, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.24)$$

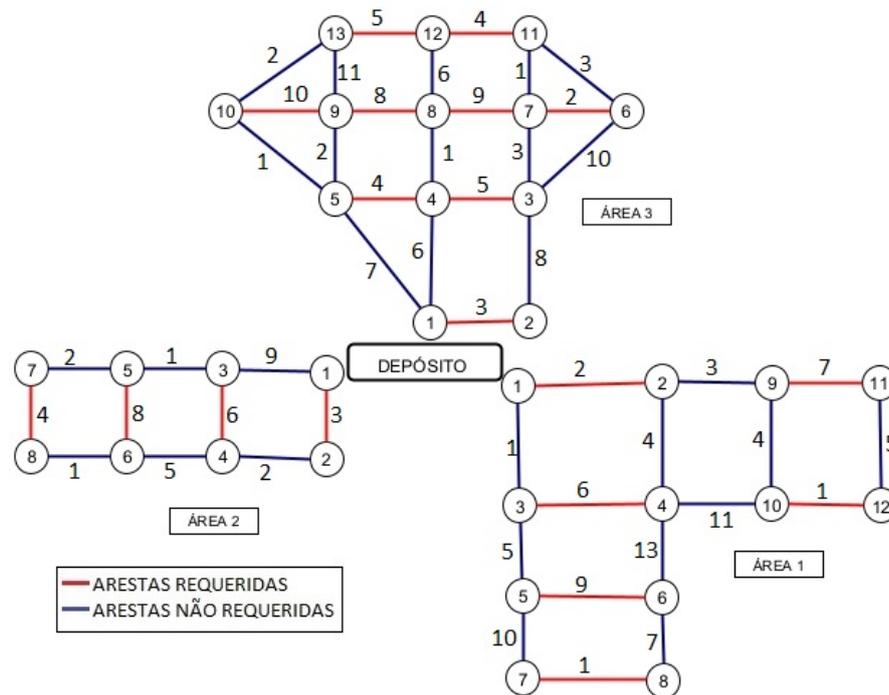
$$z_k^l \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.25)$$

$$v \in \mathbb{R} \quad (4.26)$$

No Modelo 3, a função objetivo (4.15) minimiza o tempo máximo de colher todo o conjunto de áreas. As restrições (4.16) garantem que toda área seja designada para uma única máquina, as restrições (4.17) garantem que o tempo de colheita de cada máquina em todas as áreas seja menor ou igual ao tempo máximo de colheita do conjunto de todas as áreas. As restrições (4.18) garantem que a máquina atenda as arestas requeridas de uma área somente se a máquina tiver sido designada para essa área. As restrições (4.19) garantem que se uma máquina atende uma aresta requerida em uma área então ela deve percorrer essa aresta nessa área, as restrições (4.20) garantem que as arestas de uma área serão percorridas por uma máquina somente se a máquina tiver sido designada para essa área. As restrições (4.21) garantem a continuidade da rota em cada uma das áreas, as restrições (4.22) são as restrições de conectividade que garantem que não existam sub-rotas desconexas da rota da máquina em cada uma das áreas. Por último, temos as restrições (4.23) - (4.26) que representam o domínio das variáveis.

Considere o exemplo mostrado na Figura 13 onde existem três áreas e considere 2 máquinas.

Figura 13 – Exemplo Versão 3



Fonte: Elaborado pelo autor

A solução ótima segundo o solver possui valor ótimo de 109 com a seguinte distribuição das áreas entre as máquinas:

- **Máquina 1:** Área 1 com a rota: (1, 2), (2, 9), (9, 10), (10, 12), (12, 11), (11, 9), (9, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1) com custo 78.
  - **Máquina 2:** Área 2 com a rota: (1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1) com custo 37.
- Área 3 com a rota: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 10), (10, 13), (13, 12), (12, 11), (11, 7), (7, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 5), (5, 1) com custo 72.

Temos que o valor total da rota da máquina 1 foi de 78 e da máquina 2 foi de 109 que corresponde à soma das rotas das duas áreas para as quais ela foi designada. As arestas em vermelho representam as arestas requeridas atendidas por cada máquina. Com isto, a máquina 1 utilizou para a colheita 6 arestas requeridas e a máquina 2 utilizou para a colheita 13 arestas.

Como é o valor da rota da máquina 2 que determinou o valor ótimo da função objetivo, a máquina 1 pode percorrer a área 1 de várias desde que o valor total da rota não ultrapasse 109, que é o valor ótimo do problema. Neste caso, por exemplo, a rota gerada na solução apresentada para a máquina 1 não representa a rota ótima para a área 1, caso a otimização

fosse feita considerando somente a máquina 1 e a área 1, a rota teria custo 73. Uma forma de se obter a solução ótima para cada área, é fazer uma reotimização utilizando o modelo 1 para cada máquina. Assim, cada máquina fará a rota ótima em cada área.

## 4.4 Versão 4

A versão 4 do problema é bem semelhante à versão 3, sendo também um problema de roteamento junto com um problema de designação. Considera-se um conjunto  $L$  de áreas a serem percorridas e um conjunto  $K$  de máquinas disponíveis para atender todas as áreas. Cada máquina é designada para uma ou mais áreas e, em cada área, é determinada a melhor rota para a máquina através de um problema do carteiro rural (PCR). A diferença entre esta versão e a versão 3 está no fato de que é permitido que uma área seja percorrida por uma ou duas máquinas.

Como no problema anterior, o objetivo é minimizar o tempo de atendimento do conjunto de áreas, dessa forma a designação é feita com o objetivo de distribuir da melhor forma as áreas entre as máquinas para que se evite máquinas paradas e que todas as áreas sejam atendidas no menor tempo possível. Além disso, as máquinas saem do depósito e, ao final do percurso de cada área, devem voltar ao depósito.

### 4.4.1 Modelo Matemático 4

Também é um modelo Min-Max adaptado de [30], pois as máquinas podem percorrer as áreas em paralelo, além de ser permitido que mais de uma máquina percorra uma mesma área. Todas as máquinas partem do mesmo depósito representado pelo vértice 1 e devem retornar a ele quando terminarem de percorrer cada área para a qual foi designada. Novamente, o objetivo é minimizar o tempo da maior rota. A diferença deste modelo para o modelo 3 está relacionada com o fato de ser permitido que mais de uma máquina seja designada para uma mesma área.

A apresentação dos conjuntos, parâmetros e variáveis serão omitidos pois são iguais aos descritos no Modelo 3. Como é permitido mais de uma máquina por área, vamos representar por  $N$  ( $N \leq K$ ) o número máximo permitido de máquinas por área.

#### Modelo 4

$$\text{Min } v \tag{4.27}$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{k \in K} z_k^l \geq 1, \quad \forall l \in L \quad (4.28)$$

$$\sum_{k \in K} z_k^l \leq N, \quad \forall l \in L \quad (4.29)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A^l} (c_{ij}^l x_{ijk}^l + c_{ji}^l x_{jik}^l) \leq v, \quad \forall k \in K \quad (4.30)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ijk}^l \geq 1, \quad (i, j) \in A_R, \forall l \in L \quad (4.31)$$

$$y_{ijk}^l \leq z_k^l, \quad \forall (i, j) \in A_R^l, \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.32)$$

$$x_{ijk}^l + x_{jik}^l \geq y_{ijk}^l, \quad \forall (i, j) \in A_R^l, \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.33)$$

$$x_{ijk}^l + x_{jik}^l \leq B z_k^l, \quad \forall (i, j) \in A^l, \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.34)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^l(i)} (x_{ijk}^l - x_{jik}^l) = 0, \quad \forall i \in V^l, \forall l \in L, \forall k \in M \quad (4.35)$$

$$x_k^l(\delta(S^l)) \geq 2y_{ijk}^l, \quad \forall S^l \subset V^l \setminus \{1\}, \forall (i, j) \in A_R^l(S), \forall l \in L, \forall k \in K \quad (4.36)$$

$$x_{ij}^l, x_{ji}^l \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.37)$$

$$y_{ijk}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A_R, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.38)$$

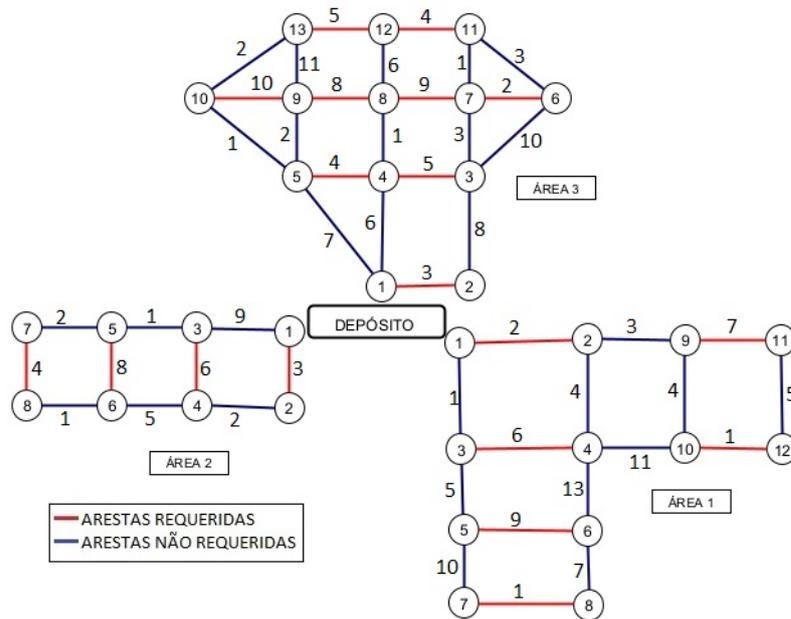
$$z_k^l \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.39)$$

$$v \in \mathbb{R} \quad (4.40)$$

No modelo 4, a função objetivo (4.27) minimiza o tempo máximo de colher todo o conjunto de áreas. As restrições (4.28) garantem que toda área seja designada para no mínimo uma máquina e, as restrições (4.29) garantem que toda área seja designada para, no máximo,  $N$  máquinas. As restrições (4.30) garantem que o tempo de colheita de cada máquina em cada área seja menor ou igual ao tempo máximo de colheita do conjunto de todas as áreas. As restrições (4.31) garantem que as arestas requeridas de uma área sejam atendidas por, no mínimo, uma máquina, as restrições (4.32) garantem que uma máquina atenda uma aresta requerida de uma área, somente se, a máquina tiver sido designada para essa área. As restrições (4.33) garantem que se uma máquina atende uma aresta requerida em uma área então ela deve percorrer essa aresta, as restrições (4.34) garantem que as arestas de uma área serão percorridas por uma máquina, somente se, a máquina tiver sido designada para essa área. As restrições (4.35) garantem a continuidade da rota de cada máquina em cada uma das áreas, as restrições (4.36) são as restrições de conectividade que garantem que não existam sub-rotas desconexas da rota de cada máquina em cada uma das áreas. Por último, temos as restrições (4.37) - (4.40) que representam o domínio das variáveis.

Considere o exemplo da Figura 14:

Figura 14 – Exemplo Versão 4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando, no máximo, 2 máquinas por área, a solução ótima obtida pelo solver obteve custo 98 e as máquinas foram designadas da seguinte forma:

- **Máquina 1:**

Área 1: (1, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1) com custo 39.

Área 2: (1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1) com custo 37.

Área 3: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1) com custo 22.

- **Máquina 2:**

Área 1: (1, 2), (2, 9), (9, 10), (10, 12), (12, 11), (11, 9), (9, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1) com custo 36.

Área 3: (1, 4), (4, 8), (8, 7), (7, 6), (6, 7), (7, 11), (11, 12), (12, 13), (13, 10), (10, 9), (9, 8), (8, 4), (4, 5), (5, 1) com custo 62.

As arestas em vermelho representam as arestas requeridas atendidas por cada máquina, a máquina 1 atendeu 8 arestas requeridas ao todo e a máquina 2 atendeu 11 arestas requeridas. Permitindo mais de uma máquina por área, o valor ótimo da função objetivo teve uma redução de 10,09%. Perceba que mesmo sendo permitido mais de uma máquina por área, a área 2 foi designada apenas para a máquina 1 e o custo da rota foi 37, igual ao custo obtido no modelo 3. Apesar de ter sido designada apenas para duas áreas, a máquina 2 obteve a rota de maior valor no total, definindo então o valor da função objetivo.

## 5 ESTUDO COMPUTACIONAL

Neste capítulo será apresentado o estudo computacional referente aos quatro modelos matemáticos descritos no Capítulo 4. Foram usadas algumas instâncias disponíveis na literatura, as quais foram adaptadas de acordo com os modelos.

Os modelos foram implementados na linguagem Python 3.8 [63] e o solver de otimização utilizado foi o Gurobi 9.1.1 [64]. Todos os testes foram realizados em uma máquina com processador Intel Core i7 de quarta geração e 3.6 GHz de CPU, memória RAM de 16 GB e sistema operacional Windows 10 Pro de 64 bits, onde cada teste foi limitado em 30 minutos de execução.

A seguir, apresentamos a descrição dos dados que foram utilizados nos testes, e uma discussão quanto à otimalidade de uma solução. Depois, apresentamos os resultados obtidos por cada modelo e algumas discussões gerais comparando os modelos propostos.

### 5.1 Descrição dos Dados

As instâncias usadas fazem parte do conjunto denominado MM K-WRPP (Problema Min-Max com K-carteiros Rurais Ventoso) disponíveis em [65]. Foram escolhidas 15 classes com características distintas. Na Tabela 1, temos cada uma das classes (CLASSE) e a referência de cada classe de acordo com a literatura (REF.LIT). Em seguida temos as características de cada uma, sendo elas: número de vértices ( $|V|$ ), número de arestas ( $|A|$ ), número de arestas requeridas ( $|A_R|$ ) e o número de componentes conexas do grafo induzido pelas arestas requeridas (C.C).

Tabela 1 – Características

CLASSE	REF.LIT	CARACTERÍSTICAS			
		$ V $	$ A $	$ A_R $	C.C
1	P01	11	13	7	4
2	P04	17	35	22	3
3	P05	20	35	16	5
4	P07	23	47	24	3
5	P10	12	20	10	4
6	P11	9	14	7	3
7	P12	7	18	5	3
8	P13	7	10	4	3
9	P15	23	37	19	8
10	P16	31	94	34	7
11	P17	19	44	17	5
12	P19	33	54	29	7
13	P21	49	110	67	6
14	P22	50	184	74	6
15	P24	41	125	55	7

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para cada uma das 15 classes consideramos 3 variações que se diferem apenas nos custos das arestas (as características do grafo são mantidas), totalizando 45 instâncias. As 3 variações são referentes as terminações 15, 18 e 110 de acordo com a literatura (Tabela 2). A partir dessas 45 instâncias formamos dois grupos para a realização dos testes, os quais serão descritos a seguir.

O grupo I é composto pelas 45 instâncias e foi utilizado para os testes dos modelos 1 e 2, em que se tem apenas uma área. Para o modelo 1, onde se considera apenas um veículo foram realizados 45 testes. Para o modelo 2, consideramos as variações referentes a 2, 3 e 4 veículos, e realizamos 45 testes para cada uma das variações, totalizando 135 testes.

O grupo II foi proposto para os testes dos modelos 3 e 4, em que se tem várias áreas. As instâncias foram construídas da seguinte forma:

Consideramos apenas a variação de terminação 15 de cada classe, onde cada variação representa uma área no problema, totalizando 15 áreas. As 15 áreas foram separadas em 3 conjuntos de acordo com o número de vértices.

- **Conjunto Pequeno:** 5 áreas com  $0 \leq |V| \leq 15$  (classes 1, 5, 6, 7 e 8);
- **Conjunto Médio:** 5 áreas com  $16 \leq |V| \leq 30$  (classes 2, 3, 4, 9 e 11);
- **Conjunto Grande:** 5 áreas com  $31 \leq |V| \leq 50$  (classe 10, 12, 13, 14 e 15).

Como os modelos 3 e 4 consideram um conjunto de áreas, geramos algumas combinações entre essas áreas para representarmos as instâncias. Para cada conjunto geramos 3 combinações:

- $C_3^5$  : Combinação das 5 áreas 3 a 3, totalizando 10 instâncias por conjunto;
- $C_4^5$  : Combinação das 5 áreas 4 a 4, totalizando 5 instâncias por conjunto;
- $C_5^5$  : Combinação das 5 áreas 5 a 5, totalizando 1 instância por conjunto.

Assim, temos 48 instâncias no Grupo II divididas em 3 conjuntos finais (A, B e C) sendo:

- **Conjunto A:** composto por 30 instâncias obtidas pelas combinações  $C_3^5$  (10 pequenas, 10 médias e 10 grandes);
- **Conjunto B:** composto por 15 instâncias obtidas pelas combinações  $C_4^5$  (5 pequenas, 5 médias e 5 grandes);
- **Conjunto C:** composto por 3 instâncias obtidas pelas combinações  $C_5^5$  (1 pequena, 1 média e 1 grande).

Os conjuntos A, B e C possuem quantidades diferentes de áreas, neste caso, 3, 4 e 5 áreas, respectivamente. Além das variações quanto ao número de áreas, os modelos 3 e 4 também tratam problemas com quantidades distintas de veículos, sendo assim, para o Conjunto A consideramos apenas 2 veículos, gerando um total de 30 testes por modelo. Para o Conjunto B, consideramos 2 e 3 veículos, totalizando 30 testes para cada modelo. Para o Conjunto C foram considerados 2, 3 e 4 veículos, gerando um total de 9 testes para cada modelo.

No total, entre os modelos 1, 2, 3 e 4 foram realizados 318 testes. Para fins de comparação com resultados da literatura, todos os testes foram realizados considerando instâncias ventosas, ou seja,  $c_{ij} \neq c_{ji}$ .

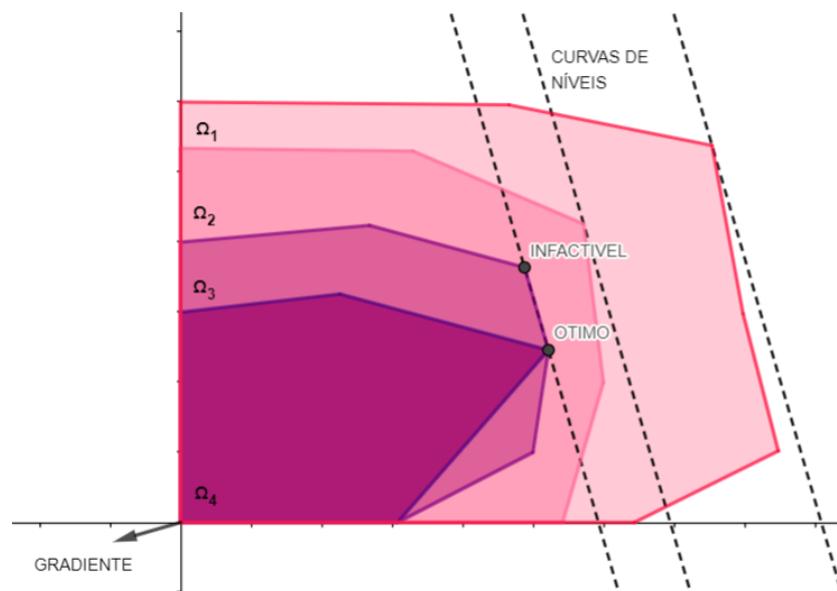
Todos os modelos foram resolvidos de forma iterativa, isto é, os modelos são resolvidos sem as restrições de sub-rotas (Restrições (4.4), (4.11), (4.22) e (4.36)), obtendo o primeiro limitante inferior. As restrições de sub-rotas que são violadas são então adicionadas ao modelo a cada iteração. Isto foi feito para que o número de restrições fosse o menor possível.

Além disso, a solução ótima é obtida quando 2 critérios de parada são satisfeitos, representando a factibilidade da solução obtida:

- **Critério 1** Toda rota deve ser conectada ao depósito, representado pelo vértice 1.
- **Critério 2** A rota de cada máquina deve ser conexa.

Para uma solução ser considerada ótima os dois critérios de parada precisam ser satisfeitos simultaneamente, ou seja, a solução tem que ser factível. Observe a Figura 15:

Figura 15 – Otimalidade



Fonte: Elaborado pelo autor

Como os modelos são construídos iterativamente, a região  $\Omega_1$  representa a região factível do problema sem restrições de sub-rotas. As regiões  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  são as regiões factíveis para o problema conforme algumas restrições de sub-rotas foram adicionadas ao decorrer das iterações. A região  $\Omega_4$  representa a região factível do problema, onde todas as restrições de sub-rotas necessárias já foram adicionadas ao modelo. Perceba que, conforme as restrições de sub-rotas são adicionadas, menor fica a região factível para o problema.

Uma outra questão importante é que o valor objetivo ótimo não implica em uma solução ótima. Observe os pontos INFACTIVEL e OTIMO, ambos estão sobre a mesma curva de nível, isto é, geram o mesmo valor objetivo, porém o ponto INFACTIVEL não pertence à região  $\Omega_4$ . Logo, podemos obter uma solução com o valor objetivo ótimo, porém, ela não satisfaz os dois critérios de parada.

Também vale ressaltar que, devido à forma como o modelo é resolvido, as soluções encontradas pelo solver antes da solução ótima são infactíveis e representam limitantes inferiores para o problema. Para as instâncias testadas, todas as vezes em que uma solução factível foi encontrada, tal solução era a ótima.

## 5.2 Modelo 1

Foram realizados 45 testes para o Modelo 1 que representa o PCR. Na Tabela 2 estão descritos os resultados obtidos.

A primeira coluna (INST) refere-se ao nome das instâncias, na coluna 2 temos o nome das instâncias de acordo com a literatura, na coluna 3 (t(s)) apresentamos o tempo de execução de cada instância, na coluna 4 (L.I.) temos o limitante inferior e na coluna 5 (V.O.) temos o valor ótimo (observa-se que estes valores ótimos coincidem com os valores apresentados na literatura). Quando a instância foi resolvida na otimalidade não apresentamos o limitante inferior (L.I.).

De acordo com a tabela, percebe-se que todas as instâncias foram resolvidas na otimalidade em menos de 2 segundos.

Tabela 2 – Resultados Modelo 1

<b>INST</b>	<b>REF.LIT</b>	<b>t(s)</b>	<b>L.I.</b>	<b>V.O.</b>
01-01	P0115	0,27	-	48
01-02	P0118	0,13	-	67
01-03	P01110	0,19	-	82
02-01	P0415	0,22	-	35
02-02	P0418	0,24	-	68
02-03	P04110	0,25	-	77
03-01	P0515	0,38	-	68
03-02	P0518	0,30	-	94
03-03	P05110	0,18	-	109
04-01	P0715	0,08	-	52
04-02	P0718	0,12	-	86
04-03	P07110	0,23	-	120
05-01	P1015	0,23	-	48
05-02	P1018	0,12	-	58
05-03	P10110	0,14	-	70
06-01	P1115	0,32	-	13
06-02	P1118	0,10	-	17
06-03	P11110	0,09	-	18
07-01	P1215	0,08	-	8
07-02	P1218	0,06	-	11
07-03	P12110	0,11	-	21
08-01	P1315	0,30	-	21
08-02	P1318	0,09	-	24
08-03	P13110	0,12	-	27
09-01	P1515	0,57	-	356
09-02	P1518	0,79	-	382
09-03	P15110	0,62	-	442
10-01	P1615	0,46	-	104
10-02	P1618	1,02	-	145
10-03	P16110	0,60	-	182
11-01	P1715	0,46	-	60
11-02	P1718	0,29	-	80
11-03	P17110	0,56	-	88
12-01	P1915	0,38	-	145
12-02	P1918	0,44	-	203
12-03	P19110	0,44	-	247
13-01	P2115	0,75	-	169
13-02	P2118	0,91	-	279
13-03	P21110	0,92	-	315
14-01	P2215	0,80	-	366
14-02	P2218	1,82	-	448
14-03	P22110	1,08	-	559
15-01	P2415	0,69	-	205
15-02	P2418	0,76	-	280
15-03	P24110	0,94	-	293

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.3 Modelo 2

O modelo 2 representa o K-PCR e foram consideradas duas, três e quatro máquinas. Para cada quantidade de máquina, foram consideradas as 45 instâncias utilizadas anteriormente para o Modelo 1. Na Tabela 3 estão descritos os resultados para o K-PCR com duas, três e quatro máquinas.

A primeira coluna (INST) refere-se ao nome das instâncias e, para cada quantidade de máquinas (2, 3 e 4), são apresentadas as seguintes informações: tempo de execução ( $t(s)$ ), limitante inferior (L.I.), valor ótimo (V.O.) e diferença máxima entre o valor das rotas (D.M.). As colunas 6, 7, 8 e 9 apresentam as mesmas informações referentes a três máquinas, e por fim as colunas 10, 11, 12 e 13 são as informações referentes a quatro máquinas. Quando o limitante inferior (L.I.) é apresentado significa que aquela instâncias não foi resolvida na otimalidade. Neste caso, na coluna V.O. será apresentado o valor ótimo da literatura.

Em particular, as instâncias da classe 14 (14-01, 14-02 e 14-03) não possuem valores ótimos conhecidos na literatura, sendo assim, o valor ótimo apresentado é o valor do limitante superior disponível na literatura.

Perceba que em alguns casos (INST 09-01, 2 MÁQUINAS, por exemplo) apesar de não terem sido resolvidos na otimalidade, o valor do limitante inferior é igual ao valor ótimo, isso ocorre devido ao fato de como o modelo é resolvido, o solver chegou no valor ótimo, porém, a solução não satisfaz os dois critérios de parada, quando terminou o tempo de execução estabelecido, ou seja, a rota ainda possuía sub-rotas desconexas ou não estava ligada ao depósito, obtendo assim, soluções infactíveis.

Considerando duas máquinas o solver resolveu 73,33% das instâncias na otimalidade. Considerando 3 máquinas, o modelo apresentou mais dificuldade para ser resolvido pelo solver, sendo que apenas 46,66% das instâncias foram resolvidas na otimalidade. Além disso, o tempo de execução foi um pouco maior do que considerando apenas duas máquinas. Com quatro máquinas o solver apresentou ainda mais dificuldade para resolver as instâncias na otimalidade, conseguindo resolver apenas 11 das 45 instâncias, o que corresponde a 24,4% das instâncias.

O solver não conseguiu resolver nenhuma instância das classes 13, 14 e 15, sendo essas classes as maiores em relação ao número de vértices, arestas e arestas requeridas. As instâncias da classe 09 também não foram resolvidas, apenas a instância 09-01 com duas máquinas foi resolvida na otimalidade. Apesar de ser uma classe de tamanho médio, é a classe que possui o maior número de componentes conexas, e isso está diretamente ligado à dificuldade de se resolver as instâncias dessa classe, principalmente, em relação à eliminação de sub-rotas.

Tabela 3 – Resultados Modelo 2

INST	2 MÁQUINAS				3 MÁQUINAS				4 MÁQUINAS			
	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
01-01	1,44	-	35	2	1799,97	35	35	-	1799,97	35	35	-
01-02	0,84	-	41	15	1799,97	41	41	-	1799,98	41	41	-
01-03	0,87	-	57	1	2,16	-	55	23	3,35	-	55	23
02-01	30,06	-	21	2	443,33	-	17	0	1870,59	15	16	-
02-02	26,07	-	43	0	338,87	-	36	1	717,35	-	33	3
02-03	9,57	-	47	1	34,36	-	36	1	749,55	-	33	0
03-01	25,63	-	44	1	644,71	-	39	2	993,14	-	34	9
03-02	10,34	-	60	0	1802,07	56	56	-	1825,24	47	49	-
03-03	29,55	-	68	6	754,60	-	58	2	2573,82	52	56	-
04-01	12,43	-	31	2	218,03	-	25	1	1894,66	23	23	-
04-02	6,06	-	45	0	82,64	-	35	3	384,58	-	30	2
04-03	7,03	-	64	1	36,56	-	44	5	1812,68	38	39	-
05-01	0,63	-	28	3	1,99	-	21	5	6,24	-	21	5
05-02	0,47	-	33	1	3,05	-	26	3	5,61	-	24	8
05-03	0,92	-	41	2	4,75	-	37	2	8,76	-	36	7
06-01	0,47	-	8	1	2,01	-	7	3	4,75	-	7	3
06-02	0,84	-	13	5	1,69	-	11	2	3,17	-	11	3
06-03	0,56	-	13	6	0,90	-	13	9	1799,98	13	13	-
07-01	0,57	-	5	0	2,39	-	5	2	1799,98	5	5	-
07-02	0,25	-	8	0	1,00	-	7	2	1800,07	7	7	-
07-03	0,55	-	16	2	2,10	-	14	4	1799,98	14	14	-
08-01	0,25	-	13	4	1799,96	13	13	-	1799,99	13	13	-
08-02	0,19	-	14	2	0,44	-	14	2	0,92	-	14	4
08-03	0,51	-	20	4	1800,00	20	20	-	1800,11	20	20	-
09-01	1801,11	217	217	-	1808,64	181	181	-	1982,43	164	173	-
09-02	39,44	-	236	27	1840,66	191	192	-	1898,19	170	180	-
09-03	59,33	-	275	30	1819,13	228	228	-	1818,49	201	224	-
10-01	268,53	-	61	1	1915,86	41	48	-	1800,08	25	42	-
10-02	24,14	-	78	7	1841,57	56	60	-	1993,59	42	54	-
10-03	1802,00	101	102	-	1905,69	68	75	-	2314,18	46	65	-
11-01	14,63	-	34	1	594,31	-	29	2	1842,15	28	28	-
11-02	19,44	-	48	1	1811,20	38	39	-	1822,91	34	38	-
11-03	13,34	-	52	1	452,92	-	43	1	1896,64	38	41	-
12-01	1056,19	-	85	0	1816,12	63	69	-	1830,10	48	67	-
12-02	1813,57	116	119	-	1845,82	82	97	-	1800,90	42	91	-
12-03	240,41	-	139	0	1850,82	100	108	-	1881,39	77	99	-
13-01	1804,09	90	92	-	1918,11	55	67	-	1800,15	37	56	-
13-02	1966,79	144	150	-	1888,17	95	112	-	1808,94	62	91	-
13-03	1863,70	164	166	-	1816,78	95	122	-	1800,12	71	99	-
14-01	1830,39	191	194	-	1800,11	116	136	-	1800,20	87	111	-
14-02	1804,64	232	236	-	1801,12	139	163	-	1830,53	104	132	-
14-03	2086,54	284	288	-	1800,14	181	201	-	1808,93	136	167	-
15-01	1819,30	110	114	-	1853,40	73	87	-	1822,43	46	72	-
15-02	1836,80	145	155	-	1974,64	99	119	-	1800,16	64	101	-
15-03	1824,30	155	161	-	1925,25	103	118	-	1824,23	75	97	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quanto ao equilíbrio das rotas, o modelo conseguiu atingir o objetivo de gerar rotas equilibradas, percebe-se que a maior diferença entre o valor das rotas foi de 30 na instância 09-03 com duas máquinas.

Das 45 instâncias, apenas 11 foram resolvidas na otimalidade todas as alterações no número de máquinas. ou seja, para duas, três e quatro máquinas. Dessas instâncias a 02-03 apresentou a maior diferença no valor ótimo onde, com duas máquinas o valor ótimo foi de 47, com três máquinas foi de 36 e, com quatro máquinas, foi de 33. Em algumas instâncias o valor ótimo não sofreu nenhuma mudança conforme o número de máquinas, como foi o caso da instância 08-02 sendo o valor ótimo 14 para duas, três e quatro máquinas.

## 5.4 Modelo 3

O Modelo 3 representa o PCR junto com o problema de designação onde, dado um conjunto de áreas e um conjunto de máquinas, o objetivo é distribuir as áreas entre as máquinas de forma a se obter um equilíbrio entre as rotas. Foram considerados 6 cenários para o modelo:

- 3 áreas e 2 máquinas;
- 4 áreas e 2 máquinas;
- 4 áreas e 3 máquinas;
- 5 áreas e 2 máquinas;
- 5 áreas e 3 máquinas;
- 5 áreas e 4 máquinas.

Novamente, a otimalidade de cada teste só é alcançada quando os 2 critérios de parada são satisfeitos, simultaneamente em cada área, isto é, em cada área, a rota da máquina deve ser conectada ao depósito e, em cada área, a rota de cada máquina deve ser conexa.

Como o objetivo do modelo é o equilíbrio entre as rotas de cada máquina, não é necessário que uma rota de custo mínimo seja feita em cada área, basta que ela satisfaça os dois critérios de parada.

A seguir, são apresentados e discutidos os resultados obtidos em cada cenário.

### 5.4.1 PCR - 3 Áreas e 2 Máquinas

Dado o total de áreas deste cenário, os testes foram realizados nas 30 instâncias do Conjunto A, que possuem 3 áreas descritos anteriormente. A seguir, temos a Tabela 4 que apresenta os resultados obtidos.

Nas colunas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são exibidos, respectivamente, o nome da instância (INST), áreas que compõem cada instância (ÁREAS), tempo de execução (t(s)), limite inferior (L.I.), valor ótimo (V.O.) e diferença máxima entre os valores das rotas de cada máquina (D.M.). Vale ressaltar novamente que V.O. representa o custo da rota de uma das máquinas, ou seja, daquela que teve o maior custo.

Como o objetivo do modelo é obter o equilíbrio entre as rotas das máquinas, quanto menor o valor apresentado na coluna 6, melhor foi o equilíbrio.

Como não existem resultados na literatura para este modelo, quando a instância for resolvida na otimalidade não apresentaremos o limitante inferior, apenas o valor ótimo. Se a instância não for resolvida na otimalidade, apresentamos o limitante inferior o qual representará uma solução infactível para o problema.

Tabela 4 – Resultados PCR-3A-2M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6)	0,54	-	61	12
P2	(1, 5, 7)	0,39	-	56	7
P3	(1, 5, 8)	0,40	-	69	19
P4	(1, 6, 7)	0,34	-	48	26
P5	(1, 6, 8)	0,35	-	48	12
P6	(1, 7, 8)	0,33	-	48	19
P7	(5, 6, 7)	0,44	-	48	24
P8	(5, 6, 8)	0,37	-	48	6
P9	(5, 7, 8)	0,34	-	48	19
P10	(6, 7, 8)	0,31	-	21	0
M1	(2, 3, 4)	1,77	-	87	18
M2	(2, 3, 9)	1,91	-	356	244
M3	(2, 3, 11)	2,37	-	95	27
M4	(2, 4, 9)	1,55	-	356	224
M5	(2, 4, 11)	1,56	-	87	5
M6	(2, 9, 11)	2,30	-	356	238
M7	(3, 4, 9)	2,06	-	356	205
M8	(3, 4, 11)	2,39	-	112	43
M9	(3, 9, 11)	1,84	-	356	193
M10	(4, 9, 11)	1,84	-	356	8
G1	(10, 12, 13)	14,03	-	249	61
G2	(10, 12, 14)	15,09	-	366	96
G3	(10, 12, 15)	8,09	-	249	33
G4	(10, 13, 14)	96,83	-	366	36
G5	(10, 13, 15)	20,22	-	273	60
G6	(10, 14, 15)	14,38	-	366	57
G7	(12, 13, 14)	6,27	-	366	29
G8	(12, 13, 15)	17,33	-	314	2
G9	(12, 14, 15)	15,76	-	366	0
G10	(13, 14, 15)	14,91	-	374	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 5 temos os resultados referentes a cada máquina individualmente. Na coluna 1 (INST) temos o nome da instância. Nas colunas 2, 3, 4 e 5 são apresentadas as informações referentes à máquina 1, sendo elas: para qual ou quais áreas a máquina foi designada (ÁREA), o valor da rota da máquina por área (V.A.), o valor total da rota da máquina

considerando todas as áreas que ela percorreu (V.T.) e, por fim, o número de arestas requeridas que a máquina atendeu ( $A_R$ ). As colunas 6, 7, 8 e 9 apresentam as mesmas informações referentes à máquina 2.

Tabela 5 – PCR-3A-2M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5]	[49]	49	10	[1, 6]	[48, 13]	61	14
P2	[1, 7]	[48, 8]	56	12	[5]	[49]	49	10
P3	[5, 8]	[48, 21]	69	14	[1]	[50]	50	7
P4	[1]	[48]	48	7	[6, 7]	[14, 8]	22	12
P5	[1]	[48]	48	7	[6, 8]	[15, 21]	36	11
P6	[1]	[48]	48	7	[7, 8]	[8, 21]	29	9
P7	[5]	[48]	48	10	[6, 7]	[15, 9]	24	12
P8	[6, 8]	[21, 21]	42	11	[5]	[48]	48	10
P9	[5]	[48]	48	10	[7, 8]	[8, 21]	29	9
P10	[8]	[21]	21	4	[6, 7]	[13, 8]	21	12
M1	[3]	[69]	69	16	[2, 4]	[35, 52]	87	46
M2	[9]	[356]	356	19	[2, 3]	[38, 74]	112	38
M3	[3]	[68]	68	16	[2, 11]	[35, 60]	95	39
M4	[2, 4]	[38, 94]	132	46	[9]	[356]	356	19
M5	[11]	[82]	82	17	[2, 4]	[35, 52]	87	46
M6	[9]	[356]	356	19	[2, 11]	[41, 77]	118	39
M7	[9]	[356]	356	19	[3, 4]	[87, 64]	151	40
M8	[4, 11]	[52, 60]	112	41	[3]	[69]	69	16
M9	[3, 11]	[83, 80]	163	33	[9]	[356]	356	19
M10	[9]	[356]	356	19	[4, 11]	[65, 283]	348	41
G1	[13]	[188]	188	67	[10, 12]	[104, 145]	249	63
G2	[14]	[366]	366	74	[10, 12]	[125, 145]	270	63
G3	[10, 12]	[104, 145]	249	63	[15]	[216]	216	55
G4	[10, 13]	[158, 172]	330	101	[14]	[366]	366	74
G5	[15]	[213]	213	55	[10, 13]	[104, 169]	273	101
G6	[14]	[366]	366	74	[10, 15]	[104, 205]	309	89
G7	[12, 13]	[159, 178]	337	96	[14]	[366]	366	74
G8	[12, 13]	[145, 169]	314	96	[15]	[312]	312	55
G9	[12, 15]	[151, 215]	366	84	[14]	[366]	366	74
G10	[13, 15]	[169, 205]	374	122	[14]	[373]	373	74

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além da diferença máxima apresentada na Tabela 4, é possível analisarmos, nas colunas 5 e 9 da Tabela 5, o número de arestas requeridas atendidas por cada máquina. Observe a instância G10, a máquina 1 atendeu 122 arestas requeridas e a máquina 2 atendeu 74, uma diferença de 40 arestas. Entretanto, se olharmos o valor da diferença máxima para a instância G10 expresso na coluna 7 da Tabela 4 temos que o valor da diferença foi de apenas 1, em relação, ao valor da rota total de cada máquina.

Isso acontece devido ao fato de que o valor da diferença máxima está relacionado com os custos de cada aresta e impacta diretamente na função objetivo. Na Tabela 5 temos a quantidade de arestas requeridas que cada máquina atendeu.

O valor da função objetivo é o valor total da rota da máquina 1 ou da máquina 2, além disso, para a máquina que não representa a rota máxima, o modelo permite que tal máquina faça ou não a rota de custo mínimo em cada área, e isso impacta diretamente na dificuldade do solver em resolver o modelo.

De maneira geral, o Modelo 3 apresentou um bom desempenho, resolvendo todas as instâncias na otimalidade em tempos menores do que 2 minutos.

#### 5.4.2 PCR - 4 Áreas e 2 Máquinas

Para esse cenário, foram consideradas as 15 instâncias do Conjunto B. Na Tabela 6 são apresentados os resultados obtidos.

Tabela 6 – Resultados PCR-4A-2M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7)	0,86	-	61	4
P2	(1, 5, 6, 8)	0,62	-	69	4
P3	(1, 5, 7, 8)	0,77	-	69	5
P4	(1, 6, 7, 8)	0,57	-	48	5
P5	(5, 6, 7, 8)	0,44	-	48	2
M1	(2, 3, 4, 9)	2,40	-	356	148
M2	(2, 3, 4, 11)	1,76	-	112	0
M3	(2, 3, 9, 11)	2,56	-	356	68
M4	(2, 4, 9, 11)	2,23	-	356	64
M5	(3, 4, 9, 11)	2,45	-	356	121
G1	(10, 12, 13, 14)	56,84	-	418	25
G2	(10, 12, 13, 15)	15,07	-	314	5
G3	(10, 12, 14, 15)	27,50	-	454	21
G4	(10, 13, 14, 15)	118,38	-	470	53
G5	(12, 13, 14, 15)	51,22	-	511	125

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 7 temos alguns resultados referentes a cada máquina individualmente.

Tabela 7 – PCR-4A-2M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5, 7]	[49, 8]	57	15	[1, 6]	[48, 13]	61	14
P2	[1, 6]	[50, 15]	65	14	[5, 8]	[48, 21]	69	14
P3	[5, 7]	[49, 15]	64	15	[1, 8]	[48, 21]	69	11
P4	[1]	[48]	48	7	[6, 7, 8]	[14, 8, 21]	43	16
P5	[5]	[48]	48	10	[6, 7, 8]	[16, 9, 21]	46	16
M1	[9]	[356]	356	19	[2, 3, 4]	[46, 104, 58]	208	62
M2	[4, 11]	[52, 60]	112	41	[2, 3]	[42, 70]	112	38
M3	[2, 3, 11]	[36, 171, 81]	288	55	[9]	[356]	356	19
M4	[2, 4, 11]	[146, 65, 81]	292	63	[9]	[356]	356	19
M5	[9]	[356]	356	19	[3, 4, 11]	[94, 64, 77]	235	57
G1	[10, 12, 13]	[104, 145, 169]	418	130	[14]	[393]	393	74
G2	[12, 13]	[145, 169]	314	96	[10, 15]	[104, 205]	309	89
G3	[10, 12, 15]	[104, 145, 205]	454	118	[14]	[433]	433	74
G4	[10, 14]	[104, 366]	470	108	[13, 15]	[212, 205]	417	122
G5	[12, 14]	[145, 366]	511	103	[13, 15]	[181, 205]	386	122

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebemos que o equilíbrio entre as rotas está diretamente relacionado com a complexidade de cada área individualmente. Observe a instância M1, pela Tabela 6 temos que o valor da diferença máxima foi de 148 e pela Tabela 7 temos que a máquina 1 atendeu apenas 19 arestas requeridas, todas da área 9, e a máquina 2 atendeu 62 arestas requeridas referentes às arestas requeridas das áreas 2, 3 e 4.

Isso mostra que a área 9 apresenta custos altos relacionados às arestas e um grau de dificuldade maior em relação às áreas 2, 3 e 4, uma vez que a área 9 possui 8 componentes conexas no grafo induzido pelas arestas requeridas, enquanto que as áreas 2, 3 e 4 apresentam 3, 5 e 3 componentes conexas, respectivamente.

Como no cenário anterior, o modelo resolveu todas as instâncias na otimalidade em tempos menores do que 2 minutos.

### 5.4.3 PCR - 4 Áreas e 3 Máquinas

Agora vamos analisar o cenário de 4 áreas e 3 máquinas, considerando as 15 instâncias do Conjunto B. Na Tabela 8 são apresentados os resultados obtidos.

Tabela 8 – Resultados PCR-4A-3M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7)	0,99	-	48	24
P2	(1, 5, 6, 8)	0,77	-	48	0
P3	(1, 5, 7, 8)	0,81	-	48	19
P4	(1, 6, 7, 8)	0,74	-	48	38
P5	(5, 6, 7, 8)	0,81	-	48	33
M1	(2, 3, 4, 9)	7,71	-	356	178
M2	(2, 3, 4, 11)	6,37	-	87	9
M3	(2, 3, 9, 11)	7,67	-	356	145
M4	(2, 4, 9, 11)	8,57	-	356	229
M5	(3, 4, 9, 11)	7,66	-	356	131
G1	(10, 12, 13, 14)	472,12	-	366	142
G2	(10, 2, 13, 15)	113,86	-	249	49
G3	(10, 12, 14, 15)	622,90	-	366	110
G4	(10, 13, 14, 15)	1831,25	364	-	133
G5	(12, 13, 14, 15)	458,14	-	366	159

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apenas a instância G4 não foi resolvida na otimalidade, por isso, apresentamos o valor do limitante inferior retornado pelo solver e não apresentamos o valor ótimo, uma vez que este não é conhecido na literatura.

Nas Tabelas 9 e 10 estão as informações referentes às três máquinas.

Tabela 9 – PCR-4A-3M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5]	[48]	48	10	[1]	[48]	48	7
P2	[1]	[48]	48	7	[5]	[48]	48	10
P3	[7, 8]	[8, 21]	29	9	[1]	[48]	48	7
P4	[1]	[48]	48	7	[6, 8]	[15, 21]	36	11
P5	[5]	[48]	48	10	[6]	[15]	15	7
M1	[9]	[356]	356	19	-	-	-	-
M2	[3]	[77]	77	16	[11]	[78]	78	17
M3	-	-	-	-	[2, 3, 11]	[36, 94, 81]	211	55
M4	[9]	[312]	356	19	[2]	[312]	312	22
M5	[9]	[356]	356	19	-	-	-	-
G1	[14]	[366]	366	74	[12]	[224]	224	29
G2	[10, 12]	[104, 145]	249	63	[15]	[248]	248	55
G3	[15]	[288]	288	55	[14]	[366]	366	74
G4	[10, 13]	[113, 171]	284	101	[14]	[364]	364	74
G5	[12, 13]	[170, 194]	364	96	[15]	[207]	207	55

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 10 – PCR-4A-3M (MAQ3)

INST	MAQ 3			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[6, 7]	[15, 9]	24	12
P2	[6, 8]	[17, 31]	48	11
P3	[5]	[48]	48	10
P4	[7]	[10]	10	5
P5	[7, 8]	[8, 21]	29	9
M1	[2, 3, 4]	[36, 78, 64]	178	62
M2	[2, 4]	[35, 52]	87	46
M3	[9]	[356]	356	19
M4	[4, 11]	[53, 74]	127	41
M5	[3, 4, 11]	[83, 65, 77]	225	57
G1	[10, 13]	[124, 186]	310	101
G2	[13]	[200]	200	67
G3	[10, 12]	[109, 147]	256	63
G4	[15]	[231]	231	55
G5	[14]	[366]	366	74

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que a máquina 2 não foi designada para nenhuma área da instância M1, a máquina 1 percorreu a área 9 enquanto que a máquina 3 percorreu as áreas 2, 3 e 4. A mesma coisa ocorreu com as instâncias M3 e M5, das 3 máquinas disponíveis apenas 2 foram suficientes para resolver o problema na otimalidade. Isso mostra que considerar um número maior de máquinas para resolver este problema, pode não fazer diferença em relação ao valor ótimo da solução.

Além disso, devido à dificuldade da área 9, observamos que em todas as instâncias M1 - M5, a máquina designada para a área 9 não foi designada para mais nenhuma outra área.

A menos da instância G4, o modelo conseguiu resolver todas as outras na otimalidade, entretanto, houve um aumento no tempo de execução, principalmente nas instâncias G1 - G5, chegando a mais de 10 minutos de execução.

#### 5.4.4 PCR - 5 Áreas e 2 Máquinas

Os testes foram realizados considerando as 3 instâncias do Conjunto C. Como nos cenários anteriores, o objetivo é distribuir as 5 áreas entre as 2 máquinas visando o equilíbrio entre as rotas. A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 11 – Resultados PCR-5A-2M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7, 8)	1,03	-	69	0
M1	(2, 3, 4, 9, 11)	3,54	-	356	113
G1	(10, 12, 13, 14, 15)	34,39	-	511	4

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 12 temos as informações relacionadas com cada máquina.

Tabela 12 – PCR-5A-2M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5,8]	[48, 21]	69	14	[1,6,7]	[48,13,8]	69	19
M1	[9]	[356]	356	19	[2,3,4,11]	[35,79,52,77]	243	79
G1	[10,13,15]	[104,197,206]	507	156	[12,14]	[145,366]	511	103

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que ocorreu um equilíbrio entre as máquinas na instância P1, ambas as máquinas tiveram o mesmo valor total e a máquina 2 atendeu apenas 5 arestas requeridas a mais que a máquina 1. Novamente, é possível perceber a diferença entre a área 9 e as demais áreas da instância M1. Em relação à instância G1 também notamos um bom equilíbrio entre os valores das rotas, o que mostra que o modelo cumpriu bem com o objetivo.

As 3 instâncias foram resolvidas na otimalidade em menos de 1 minuto.

#### 5.4.5 PCR - 5 Áreas e 3 Máquinas

Agora vamos considerar o cenário de 5 áreas e 3 máquinas. Na Tabela 13 apresentamos os resultados obtidos para as 3 instâncias do Conjunto C.

Tabela 13 – Resultados PCR-5A-3M

INST	AREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7, 8)	1,01	-	48	4
M1	(2, 3, 4, 9, 11)	12,70	-	356	307
G1	(10, 12, 13, 14, 15)	1847,72	364	-	51

Fonte: Elaborado pelo autor.

A instância G1 não foi resolvida na otimalidade, sendo assim, apresentamos apenas o valor do limitante inferior.

Além disso, perceba que o valor ótimo da instância M1 foi o mesmo que o valor ótimo considerando duas máquinas (Tabela 11). Considerar mais uma máquina para resolver o problema não melhorou o valor da função objetivo.

A seguir, nas Tabelas 14 e 15 são apresentadas as informações referentes às máquinas um, dois e três.

Tabela 14 – PCR-5A-3M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[6, 7, 8]	[15, 8, 21]	44	16	[1]	[48]	48	7
M1	[3, 4, 11]	[81, 59, 77]	217	57	[2]	[49]	49	22
G1	[12, 13]	[137, 176]	313	96	[14]	[364]	364	74

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 15 – PCR-5A-3M (MAQ3)

INST	MAQ 3			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5]	[48]	48	10
M1	[9]	[356]	356	19
G1	[10, 15]	[145, 214]	359	89

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando 3 máquinas foi possível obter uma redução de 69,56% no valor ótimo da função objetivo da instância P1. Como dito, o valor ótimo da função objetivo da instância M1 se manteve o mesmo para 2 e 3 máquinas.

#### 5.4.6 PCR - 5 Áreas e 4 Máquinas

Os últimos testes do modelo 3 foram realizados nas 3 instâncias do Conjunto C, considerando o cenário de 5 áreas e 4 máquinas. Os resultados obtidos são descritos na Tabela 16.

Tabela 16 – Resultados PCR-5A-4M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7, 8)	1,59	-	48	33
M1	(2, 3, 4, 9, 11)	18,98	-	356	271
G1	(10, 12, 13, 14, 15)	2070,03	364	-	237

Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente, o solver não conseguiu resolver a instância G1 na otimalidade. O valor do limitante inferior foi o mesmo que para o caso de três máquinas (Tabela 13)

Perceba que o valor ótimo das instâncias P1 e M1 não se alteraram ao considerar 4 máquinas, ou seja, o modelo foi resolvido na otimalidade em ambos os casos e obteve o mesmo valor objetivo.

Nas Tabelas 17 e 18 são apresentadas as informações referentes à cada máquina.

Tabela 17 – PCR-5A-4M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[6]	[15]	15	7	[7, 8]	[8, 21]	29	9
M1	[3]	[85]	85	16	-	-	-	-
G1	[15]	[303]	303	55	[10]	[127]	127	34

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 18 – PCR-5A-4M (MAQ3 e MAQ4)

INST	MAQ 3				MAQ 4			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[1]	[48]	48	7	[5]	[48]	48	10
M1	[2, 4, 11]	[48, 73, 83]	204	63	[9]	[356]	356	19
G1	[14]	[364]	364	74	[12, 13]	[185, 173]	358	96

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que na instância M1 a máquina dois não foi utilizada para percorrer nenhuma área, ou seja, para essa instância é suficiente considerar apenas três máquinas para resolver o problema.

O mesmo não aconteceu para a instância P1, ou seja, apesar do valor objetivo ser o mesmo para três e quatro máquinas, todas as quatro máquinas foram designadas para alguma área.

A menos da instância G1, o modelo resolveu as outras duas instâncias na otimalidade em um tempo inferior a 20 segundos.

## 5.5 Modelo 4

O modelo 4 representa o K-PCR junto com o problema de designação onde, dado um conjunto de áreas e um conjunto de máquinas, o objetivo é distribuir as áreas entre as máquinas de forma a se obter um equilíbrio entre as rotas. Diferente do modelo 3, vamos considerar que uma área pode ser designada para até 2 máquinas. Foram considerados ao todo 6 cenários para os testes sendo eles:

- 3 áreas e 2 máquinas;
- 4 áreas e 2 máquinas;
- 4 áreas e 3 máquinas;
- 5 áreas e 2 máquinas;
- 5 áreas e 3 máquinas;
- 5 áreas e 4 máquinas.

A seguir, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos em cada cenário.

### 5.5.1 K-PCR - 3 Áreas e 2 Máquinas

Os teste foram realizados nas 30 instâncias do Conjunto A, descritos anteriormente. A seguir, temos a Tabela 19 que apresenta os resultados obtidos.

Na maioria das instâncias, a diferença entre os valores das rotas das máquinas foi nula, logo, o modelo atingiu o objetivo de equilibrar as rotas.

Observe que a instância G10, composta pelas áreas 13, 14 e 15, foi resolvida na otimalidade, essas áreas correspondem às instâncias 13-01, 14-01 e 15-01 do modelo 2, as quais não foram resolvidas. Isso ocorreu devido ao fato do modelo permitir que algumas máquinas façam uma rota diferente da rota de custo mínimo, conforme explicado anteriormente.

Tabela 19 – Resultados K-PCR-3A-2M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6)	1,09	-	55	0
P2	(1, 5, 7)	2,05	-	53	2
P3	(1, 5, 8)	1,29	-	60	2
P4	(1, 6, 7)	0,48	-	35	0
P5	(1, 6, 8)	0,92	-	42	0
P6	(1, 7, 8)	1,26	-	40	1
P7	(5, 6, 7)	1,21	-	35	0
P8	(5, 6, 8)	0,82	-	41	0
P9	(5, 7, 8)	0,93	-	40	3
P10	(6, 7, 8)	0,41	-	21	0
M1	(2, 3, 4)	10,06	-	79	1
M2	(2, 3, 9)	13,62	-	258	1
M3	(2, 3, 11)	14,98	-	84	1
M4	(2, 4, 9)	27,75	-	251	0
M5	(2, 4, 11)	6,80	-	75	1
M6	(2, 9, 11)	17,21	-	254	0
M7	(3, 4, 9)	20,07	-	267	0
M8	(3, 4, 11)	12,87	-	92	0
M9	(3, 9, 11)	19,54	-	272	1
M10	(4, 9, 11)	14,00	-	262	0
G1	(10, 12, 13)	1484,58	-	215	0
G2	(10, 12, 14)	918,55	-	311	0
G3	(10, 12, 15)	243,32	-	233	0
G4	(10, 13, 14)	1602,20	-	323	0
G5	(10, 13, 15)	498,84	-	243	0
G6	(10, 14, 15)	388,91	-	339	0
G7	(12, 13, 14)	226,18	-	342	0
G8	(12, 13, 15)	692,05	-	264	0
G9	(12, 14, 15)	179,96	-	360	0
G10	(13, 14, 15)	185,81	-	371	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 20 estão descritos algumas informações referentes à cada máquina.

Tabela 20 – K-PCR-3A-2M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[1, 5, 6]	[35, 16, 4]	55	9	[1, 5, 6]	[13, 32, 10]	55	15
P2	[1, 5]	[35, 16]	51	6	[1, 5, 7]	[13, 32, 8]	53	16
P3	[1, 5, 8]	[13, 32, 13]	58	14	[1, 5, 8]	[35, 16, 9]	60	7
P4	[1, 6, 7]	[13, 13, 9]	35	14	[1]	[35]	35	5
P5	[1, 6, 8]	[13, 8, 21]	42	11	[1, 6]	[35, 7]	42	7
P6	[1, 7]	[35, 5]	40	7	[1, 7, 8]	[13, 5, 21]	39	9
P7	[5, 6, 7]	[16, 11, 8]	35	12	[5, 6]	[32, 3]	35	10
P8	[5, 6]	[32, 9]	41	13	[5, 6, 8]	[16, 4, 21]	41	8
P9	[5, 8]	[16, 21]	37	5	[5, 7]	[32, 8]	40	14
P10	[6, 7]	[13, 8]	21	12	[8]	[21]	21	4
M1	[3, 4]	[68, 11]	79	25	[2, 4]	[35, 43]	78	37
M2	[9]	[257]	257	12	[2, 3, 9]	[35, 68, 155]	258	45
M3	[2, 11]	[35, 49]	84	35	[3, 11]	[69, 14]	83	20
M4	[4, 9]	[242]	251	16	[2, 4, 9]	[35, 46, 170]	251	49
M5	[4, 11]	[15, 60]	75	27	[2, 4]	[37, 37]	74	36
M6	[2, 9, 11]	[36, 158, 60]	254	47	[9]	[254]	254	11
M7	[4, 9]	[10, 257]	267	16	[3, 4, 9]	[68, 44, 155]	267	43
M8	[3, 4, 11]	[68, 15, 9]	92	30	[4, 11]	[37, 55]	92	27
M9	[3, 9, 11]	[68, 195, 9]	272	28	[9, 11]	[217, 54]	271	24
M10	[4, 9, 11]	[52, 150, 60]	262	48	[9]	[262]	262	12
G1	[10, 13]	[101, 114]	215	79	[10, 12, 13]	[5, 145, 65]	215	51
G2	[14]	[311]	311	59	[10, 12, 14]	[104, 145, 62]	311	78
G3	[10, 12]	[87, 146]	233	59	[10, 15]	[28, 205]	233	59
G4	[13, 14]	[6, 317]	323	62	[10, 13, 14]	[104, 163, 56]	323	113
G5	[10, 13, 15]	[5, 33, 205]	243	67	[10, 13]	[101, 142]	243	89
G6	[14]	[339]	339	66	[10, 14, 15]	[104, 30, 205]	339	97
G7	[12, 13, 14]	[145, 168, 29]	342	101	[13, 14]	[2, 340]	342	69
G8	[13, 15]	[59, 205]	264	75	[12, 13]	[145, 119]	264	76
G9	[12, 14, 15]	[145, 10, 205]	360	87	[14]	[360]	360	71
G10	[13, 15]	[166, 205]	371	121	[13, 14]	[4, 366]	370	75

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que em 29 instâncias, pelo menos, uma área foi designada para duas máquinas. Se comparado com o Modelo 3, onde era permitido apenas 1 máquina por área, 29 das 30 instâncias obtiveram valor objetivo inferior ao valor objetivo do Modelo 3 (Tabela 4). Apenas a instância P10 obteve o mesmo valor de função objetivo, e cada máquina foi designada apenas para uma área.

Em algumas instâncias, a redução no valor ótimo da função objetivo foi maior do que 28%. O valor da função objetivo é o valor total de percurso da máquina 1 ou da máquina 2. Ressaltamos novamente que, se o valor ótimo da função objetivo for o valor total de

percurso da máquina 1, então as áreas que foram designadas para a máquina 2 podem ou não terem sido percorridas no menor tempo possível.

O modelo resolveu todas as instâncias na otimalidade com tempo médio de execução de 3,65 minutos.

### 5.5.2 K-PCR - 4 Áreas e 2 Máquinas

Para este cenário, utilizamos as 15 instâncias do Conjunto B. A seguir, temos a Tabela 21, que apresenta os resultados obtidos.

Tabela 21 – Resultados K-PCR-4A-2M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7)	1,15	-	59	0
P2	(1, 5, 6, 8)	1,93	-	65	0
P3	(1, 5, 7, 8)	3,16	-	64	2
P4	(1, 6, 7, 8)	1,32	-	46	1
P5	(5, 6, 7, 8)	1,21	-	45	0
M1	(2, 3, 4, 9)	25,77	-	284	0
M2	(2, 3, 4, 11)	12,36	-	109	1
M3	(2, 3, 9, 11)	19,64	-	286	20
M4	(2, 4, 9, 11)	24,55	-	280	1
M5	(3, 4, 9, 11)	14,73	-	286	1
G1	(10, 12, 13, 14)	1431,75	-	393	0
G2	(10, 12, 13, 15)	70,66	-	313	0
G3	(10, 12, 14, 15)	1828,10	412	-	-
G4	(10, 13, 14, 15)	1812,59	424	-	-
G5	(12, 13, 14, 15)	1829,49	444	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Lembrando que o valor ótimo retornado pelo solver é referente ao valor da última iteração antes de atingir o tempo limite, uma vez que o modelo é resolvido iterativamente.

Na Tabela 22 temos algumas informações referentes à cada máquina.

Tabela 22 – K-PCR-4A-2M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[1, 5, 7]	[35, 16, 8]	59	11	[1, 5, 6]	[13, 32, 14]	59	18
P2	[1, 6, 8]	[35, 9, 21]	65	13	[1, 5, 6]	[13, 48, 4]	65	15
P3	[1, 7, 8]	[35, 8, 21]	64	14	[1, 5]	[13, 49]	62	12
P4	[1, 6]	[35, 10]	45	10	[1, 6, 7, 8]	[13, 4, 8, 21]	46	13
P5	[5, 6]	[32, 13]	45	16	[5, 7, 8]	[16, 8, 21]	45	10
M1	[9]	[284]	284	14	[2, 3, 4, 9]	[35, 68, 53, 128]	284	67
M2	[2, 3, 4]	[3, 68, 37]	108	31	[2, 4, 11]	[34, 15, 60]	109	48
M3	[2, 3, 9, 11]	[38, 68, 100, 60]	266	61	[9]	[286]	286	13
M4	[2, 4, 9]	[35, 52, 192]	279	55	[9, 11]	[220, 60]	280	27
M5	[3, 4, 9, 11]	[68, 54, 100, 63]	285	63	[9]	[286]	286	13
G1	[13, 14]	[27, 366]	393	84	[10, 12, 13]	[104, 145, 144]	393	120
G2	[12, 13, 15]	[145, 154, 14]	313	91	[10, 13, 15]	[104, 16, 193]	313	94
G3	[12, 14, 15]	[145, 62, 205]	412	100	[10, 14]	[104, 308]	412	92
G4	[10, 13, 14]	[104, 6, 314]	424	98	[13, 14, 15]	[163, 56, 205]	424	132
G5	[13, 14, 15]	[145, 94, 205]	444	135	[12, 13, 14]	[145, 24, 274]	443	90

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que em todas as instâncias, pelo menos, uma área foi designada para as duas máquinas, e houve um equilíbrio entre as rotas, tanto no valor das rotas de cada máquina, quanto no número de arestas requeridas que cada máquina atendeu. A maior diferença em relação ao valor das rotas aconteceu na instância M1, sendo a diferença de valor de 20. A maior diferença em relação à quantidade de arestas requeridas atendidas por cada máquina aconteceu na instância M5, com uma diferença de 50 arestas requeridas.

Em relação ao mesmo cenário considerado no Modelo 3, onde só era permitido uma máquina por área, houve uma redução média de 9,71% no valor da função objetivo quando permitido até duas máquinas por área, a instância M4 apresentou a maior diferença no valor da função objetivo comparando os dois modelos. No modelo 3 o valor objetivo foi de 356 e, no Modelo 4 o valor foi de 280. De maneira geral, o solver resolveu na otimalidade 12 das 15 instâncias, com um tempo médio de execução de 7,86 minutos.

### 5.5.3 K-PCR - 4 Áreas e 3 Máquinas

Agora vamos analisar o cenário de 4 áreas e 3 máquinas. Na Tabela 23 são apresentados os resultados obtidos.

Tabela 23 – Resultados K-PCR-4A-3M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7)	7,73	-	40	0
P2	(1, 5, 6, 8)	8,16	-	45	0
P3	(1, 5, 7, 8)	4,96	-	43	1
P4	(1, 6, 7, 8)	2,16	-	35	11
P5	(5, 6, 7, 8)	1800,37	32	-	-
M1	(2, 3, 4, 9)	421,53	-	217	60
M2	(2, 3, 4, 11)	974,13	-	74	2
M3	(2, 3, 9, 11)	370,63	-	217	22
M4	(2, 4, 9, 11)	400,27	-	217	58
M5	(3, 4, 9, 11)	410,57	-	217	12
G1	(10, 12, 13, 14)	1800,21	232	-	-
G2	(10, 12, 13, 15)	1800,16	176	-	-
G3	(10, 12, 14, 15)	1800,22	243	-	-
G4	(10, 13, 14, 15)	1800,23	258	-	-
G5	(12, 13, 14, 15)	1800,30	260	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que o solver apresentou mais dificuldade para resolver o modelo considerando esse cenário.

Em relação ao cenário anterior de 4 áreas e 2 máquinas, houve uma redução média de 27,35% no valor da função objetivo, ou seja, 3 máquinas gerou uma diferença significativa no valor total das rotas. Se compararmos com o Modelo 3, onde é considerado apenas uma máquina por área, houve uma redução média de 25,72% no valor da função objetivo.

A seguir, nas Tabelas 24 e 25, apresentamos algumas informações em relação às máquinas 1, 2 e 3.

Tabela 24 – K-PCR-4A-3M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5, 7]	[32, 8]	40	14	[1, 5, 6]	[13, 16, 11]	40	8
P2	[5, 6, 8]	[16, 8, 21]	45	9	[1, 6]	[35, 10]	45	8
P3	[1, 7, 8]	[13, 8, 21]	42	11	[1, 5]	[35, 8]	43	7
P4	[1, 6, 7]	[13, 3, 8]	24	8	[1]	[35]	35	5
P5	[5]	[32]	32	9	[5, 6, 7]	[16, 8, 8]	32	9
M1	[9]	[217]	217	9	[9]	[195]	195	10
M2	[2, 4]	[35, 37]	72	36	[3, 11]	[68, 5]	73	18
M3	[9]	[195]	195	9	[2, 3, 11]	[40, 92, 84]	216	55
M4	[9]	[200]	200	10	[9]	[217]	217	9
M5	[3, 4, 11]	[68, 54, 83]	205	57	[9]	[217]	217	9
G1	[10, 12, 13]	[49, 42, 141]	232	88	[12, 13, 14]	[62, 6, 164]	232	53
G2	[10, 12, 13, 15]	[39, 29, 46, 62]	176	79	[12, 13]	[75, 101]	176	56
G3	[10, 14, 15]	[46, 129, 68]	243	57	[12, 14]	[24, 219]	243	52
G4	[10, 13, 14]	[55, 37, 164]	256	73	[14, 15]	[184, 74]	258	64
G5	[12, 13, 14, 15]	[54, 43, 139, 24]	260	74	[13, 15]	[104, 156]	260	88

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 25 – K-PCR-4A-3M (MAQ3)

INST	MAQ 3			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[1, 6]	[35, 5]	40	7
P2	[1, 5]	[13, 32]	45	11
P3	[5]	[43]	43	9
P4	[6, 8]	[14, 21]	35	10
P5	[6, 8]	[10, 21]	31	8
M1	[2, 3, 4]	[36, 68, 53]	157	62
M2	[4, 11]	[15, 59]	74	25
M3	[9]	[217]	217	10
M4	[2, 4, 11]	[38, 53, 68]	159	63
M5	[9]	[212]	212	10
G1	[10, 14]	[48, 184]	232	63
G2	[10, 15]	[58, 118]	176	52
G3	[10, 12, 15]	[51, 80, 112]	243	83
G4	[10, 13, 15]	[42, 110, 106]	258	93
G5	[12, 14]	[50, 209]	259	64

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que, novamente em todas as instâncias, pelo menos uma área foi designada para duas máquinas e houve um equilíbrio entre as rotas, tanto no valor das rotas de cada máquina, quanto no número de arestas requeridas que cada máquina atendeu. A maior diferença em relação ao valor das rotas e ao número de arestas requeridas atendidas por

máquina aconteceu na instância M1, sendo a diferença de valor de 60 e, a diferença, em relação à quantidade de arestas requeridas atendidas, foi de 53.

De modo geral, o solver resolveu a maior parte das instâncias com um tempo médio de 14,89 minutos, porém percebe-se uma maior dificuldade se comparado com o cenário anterior, resolvendo na otimalidade 9 das 15 instâncias.

#### 5.5.4 K-PCR - 5 Áreas e 2 Máquinas

Os testes foram realizados considerando as 3 instâncias do Conjunto C. Como nos cenários anteriores, o objetivo é designar as 5 áreas entre as 2 máquinas visando o equilíbrio entre as rotas. A Tabela 26 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 26 – Resultados K-PCR-5A-2M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7, 8)	1,57	-	69	0
M1	(2, 3, 4, 9, 11)	16,31	-	294	2
G1	(10, 12, 13, 14, 15)	2378,46	496	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

O solver resolveu apenas as instâncias P1 e M1 na otimalidade.

A seguir, na Tabela 27, estão as informações referentes a cada máquina.

Tabela 27 – K-PCR-5A-2M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5, 8]	[48, 21]	69	14	[1, 6, 7]	[48, 13, 8]	69	19
M1	[2, 3, 4, 9, 11]	[35, 68, 52, 77, 60]	64	292	[9]	294	294	15
G1	[10, 12, 13, 15]	[104, 18, 169, 205]	496	160	[12, 14]	[129, 366]	495	99

Fonte: Elaborado pelo autor.

Perceba que, apesar de permitido até duas máquinas por área, na instância P1 cada área foi designada para apenas uma máquina. Na instância M1 apenas a área 9 foi designada para as duas máquinas e uma máquina percorreu todas as áreas e a outra apenas a área 9.

Em relação ao valor ótimo da função objetivo, a instância P1 não obteve nenhuma diferença em relação ao Modelo 3, ou seja, permitir ou não duas máquinas por área. A instância M1 obteve uma redução de 17,41% no valor ótimo da função objetivo quando permitido duas máquinas por área. Na instância G1 o valor objetivo foi 2,93% menor quando comparado com o valor ótimo da mesma instância considerando o Modelo 3, porém, não foi provada a otimalidade da instância com este modelo.

O tempo médio de execução do solver foi de 13,31 minutos, provando a otimalidade de 2 das 3 instâncias.

### 5.5.5 K-PCR - 5 Áreas e 3 Máquinas

Agora vamos considerar o cenário com 5 áreas e 3 máquinas. Na Tabela 28 apresentamos os resultados obtidos nas 3 instâncias do Conjunto C.

Tabela 28 – Resultados K-PCR-5A-3M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7, 8)	11,53	-	47	2
M1	(2, 3, 4, 9, 11)	1808,56	215	-	-
G1	(10, 12, 13, 14, 15)	1800,36	292	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Das 3 instâncias apenas a instância P1 foi resolvida até a otimalidade, com uma redução de 31,88% no valor da função objetivo comparado com o cenário anterior com duas máquinas. Em relação ao cenário com cinco áreas e três máquinas do modelo 3 (Tabela 13) o valor objetivo foi bem próximo com uma redução de apenas 2,08%.

Nas Tabelas 29 e 30 temos as informações referentes às máquinas um, dois e três.

Tabela 29 – K-PCR-5A-3M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5, 6, 8]	[16, 10, 21]	47	10	[1, 6, 7]	[35, 4, 8]	47	12
M1	[2, 3, 4, 11]	[35, 68, 52, 60]	215	79	[9]	[215]	215	10
G1	[10, 12, 14, 15]	[58, 14, 109, 111]	292	75	[13, 14]	[53, 239]	292	79

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 30 – K-PCR-5A-3M (MAQ3)

INST	MAQ 3			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[1, 5]	[13, 32]	45	11
M1	[9]	[215]	215	9
G1	[10, 12, 13, 15]	[38, 90, 94, 68]	292	105

Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo geral, todas as instâncias tiveram, pelo menos, uma área designada para duas máquinas. Apesar de ter resolvido a instância P1 na otimalidade em menos de 12 segundos, ao permitir até duas máquinas em uma área houve um aumento na dificuldade de resolução pelo solver, se comparado com o Modelo 3 no mesmo cenário.

### 5.5.6 K-PCR - 5 Áreas e 4 Máquinas

Por fim, vamos considerar o cenário de 5 áreas e 4 máquinas. Os resultados obtidos são descritos na Tabela 31.

Tabela 31 – Resultados K-PCR-5A-4M

INST	ÁREAS	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
P1	(1, 5, 6, 7, 8)	44,33	-	35	1
M1	(2, 3, 4, 9, 11)	2492,21	209	-	-
G1	(10, 12, 13, 14, 15)	1800,34	219	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente, o solver resolveu apenas a instância P1 na otimalidade e o valor objetivo teve uma redução de 25,5% quando comparado com o cenário de 5 áreas e 3 máquinas, e uma redução de 49,27% quando comparado com o cenário de 5 áreas e 2 máquinas. Quando comparado com os resultados do mesmo cenário de 5 áreas e 4 máquinas do Modelo 3, a redução foi de 27,08%.

Nas Tabelas 32 e 33 temos as informações referentes às máquinas um, dois e três.

Tabela 32 – K-PCR-5A-4M (MAQ1 e MAQ2)

INST	MAQ 1				MAQ 2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[5, 6]	[32, 3]	35	10	[1, 8]	[13, 21]	34	6
M1	[9]	[209]	209	9	[9]	[206]	206	10
G1	[10, 12, 15]	[26, 53, 140]	219	75	[10, 12, 13]	[71, 51, 97]	219	80

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 33 – K-PCR-5A-4M (MAQ3 e MAQ4)

INST	MAQ 3				MAQ 4			
	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$	ÁREA	V.A.	V.T.	$A_R$
P1	[1]	[35]	35	5	[5, 6, 7]	[16, 11, 8]	35	12
M1	[4, 11]	[50, 58]	108	23	[2, 3, 4, 11]	[39, 68, 42, 41]	190	56
G1	[14, 15]	[179, 40]	219	46	[13, 14]	[50, 169]	219	60

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que na instância que foi resolvida na otimalidade (P1) todas as máquinas foram utilizadas e, pelo menos, uma área foi designada para mais de uma máquina. As rotas das máquinas na instância P1 foram bem equilibradas, com uma diferença máxima do valor objetivo de apenas 1 e a diferença máxima da quantidade de arestas requeridas atendidas por cada máquina foi de 7 arestas.

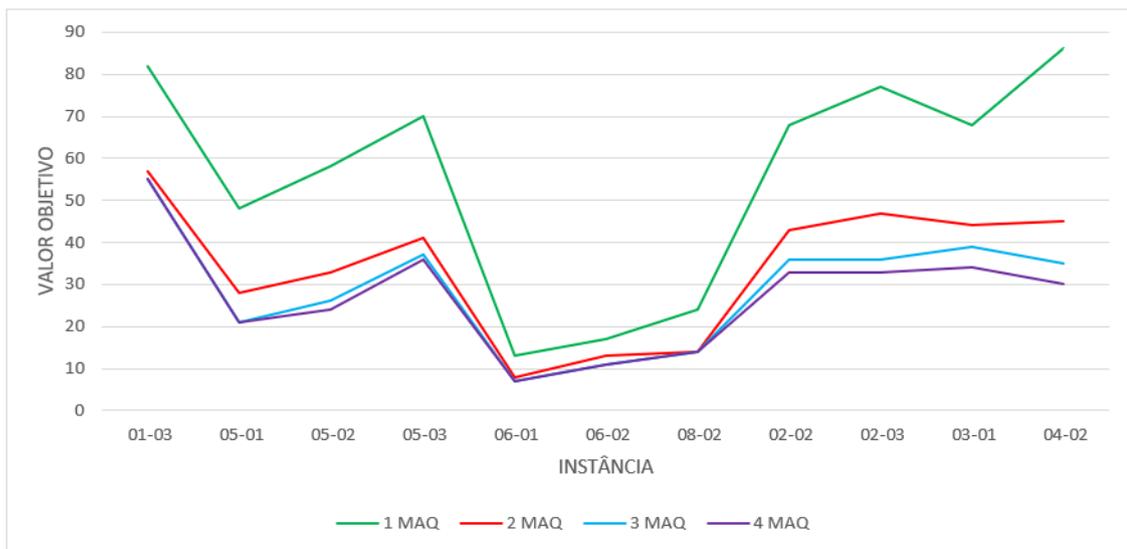
Percebemos que o solver apresentou mais dificuldade para resolver o modelo considerando esse cenário, e essa dificuldade pode estar relacionada com o número de variáveis do problema. Ao considerar mais áreas e mais máquinas, o número de variáveis aumenta consideravelmente, aumentando a dificuldade para resolução do modelo.

## 5.6 Discussões Gerais

A seguir, serão apresentados alguns gráficos para analisarmos o impacto que o número de máquinas teve no valor da função objetivo.

No gráfico representado pela Figura 16 temos a comparação entre os Modelos 1 e 2 em relação ao número de máquinas usadas. São apresentados apenas os resultados das instâncias que foram resolvidas na otimalidade pelos dois modelos.

Figura 16 – Comparação Modelos 1 e 2 - Soluções ótimas



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebemos uma diferença muito expressiva entre uma e duas máquinas. Por exemplo, na instância 04-02, a redução foi de quase 50% no valor da função objetivo.

Também é possível notar que as diferenças entre três e quatro máquinas são bem menores, em algumas instâncias pois o valor da função objetivo não sofreu nenhuma mudança entre duas três e quatro máquinas. Isso mostra que a quantidade de máquinas a serem usadas deve ser proporcional ao tamanho da área.

No gráfico representado pela Figura 17 também temos a comparação entre os Modelos 1 e 2 em relação ao números de máquinas usadas, porém, apresentamos todas as instâncias e as linhas pontilhadas representam as instâncias que não foram resolvidas na otimalidade.

Os valores das instâncias que não foram resolvidas na otimalidade são limitantes inferiores (soluções ineficazes) para o problema, porém, eles dão uma boa estimativa quanto à redução no valor da função objetivo.

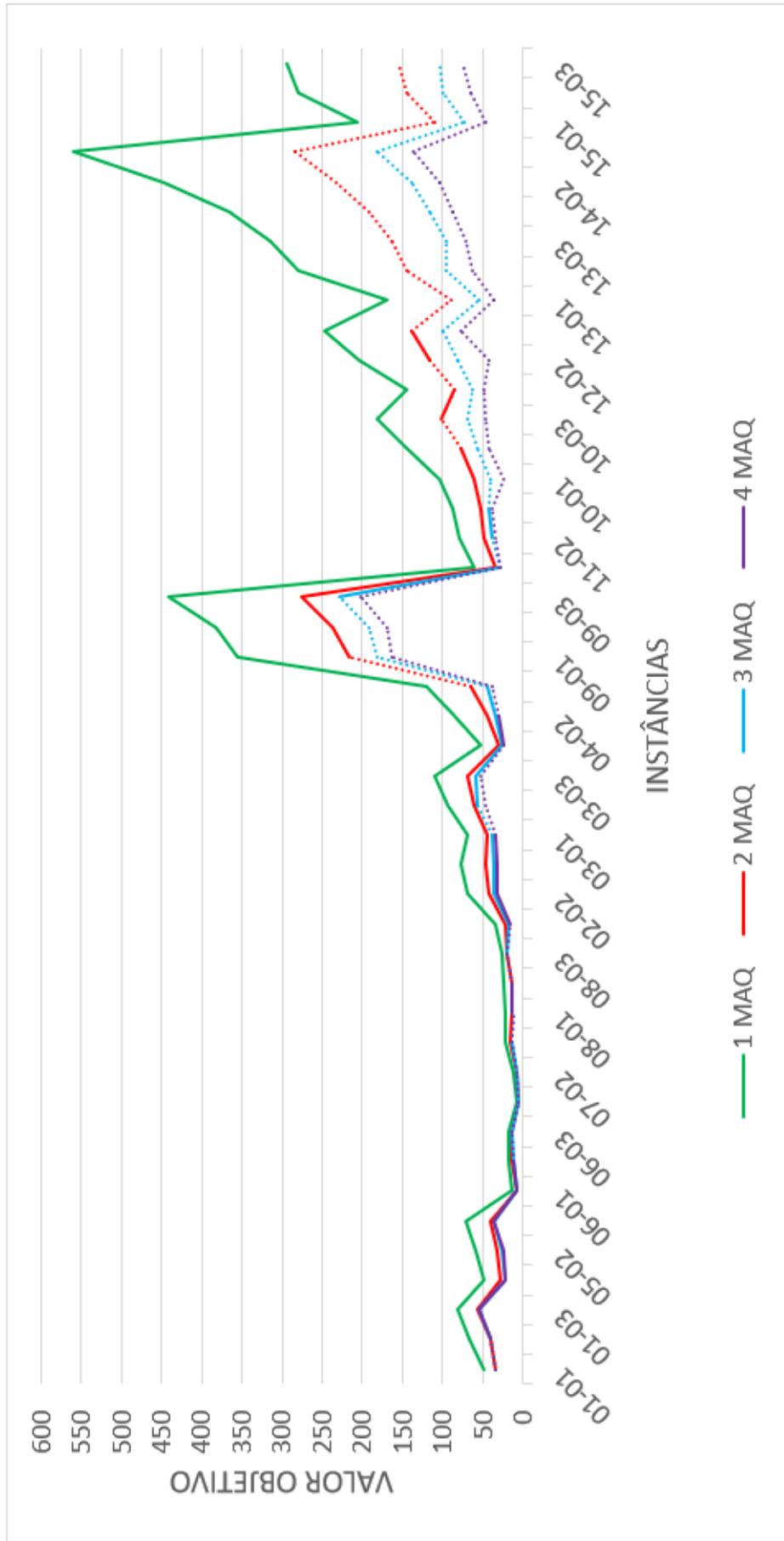
Observe que, para as instâncias pequenas (01, 05, 06, 07, 08), a maior diferença no valor da função objetivo ocorre entre o uso de uma máquina e duas máquinas. A diferença entre o uso de duas, três e quatro máquinas é bem pequena, mostrando que em instâncias pequenas não vale a pena usar mais de duas máquinas.

Nas instâncias médias (02, 03, 04, 09, 11), a maior diferença no valor objetivo também ocorreu entre o uso de uma e duas máquinas, entretanto, é possível observar a redução no valor da função objetivo, ainda que menor, entre o uso de duas e três máquinas. Entre três e quatro máquinas a diferença é muito pequena, o que pode levar ao questionamento se realmente vale a pena o uso de quatro máquinas.

Como podemos observar, a maior diferença no valor da função objetivo ocorreu nas instâncias grandes (10, 12, 13, 14, 15), principalmente, entre uma e duas máquinas. Entre duas e três máquinas percebemos também uma diferença significativa, porém, como nos outros casos, essa diferença vai diminuindo conforme o número de máquinas aumenta. Entretanto, como a maioria das instâncias grandes não foram resolvidas na otimalidade, a diferença entre os valores objetivos tendem a diminuir, pois ao resolver as instâncias na otimalidade considerando duas, três e quatro máquinas, o valor da função objetivo irá aumentar.

Essas diferenças mostram que o número de máquinas usadas deve ser decidido baseado no tamanho da área a ser colhida, pois o valor da função objetivo tende a se estabilizar conforme o número de máquinas usadas, chegando ao ponto onde o valor da função objetivo não irá se alterar ao se considerar mais máquinas.

Figura 17 – Comparação Modelos 1 e 2 - Todas as Instâncias

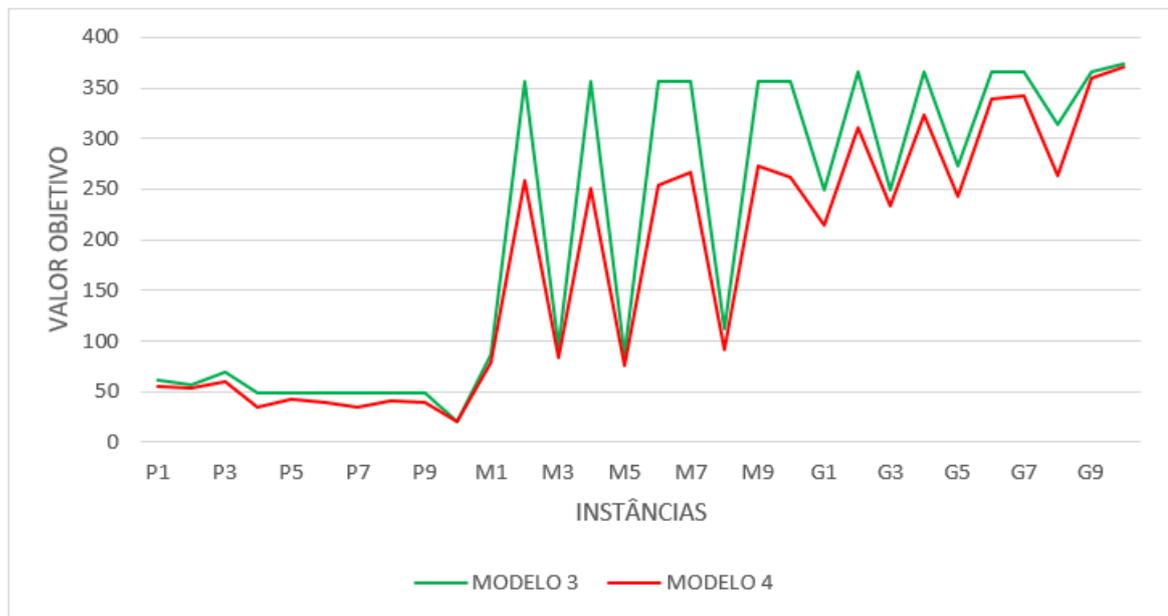


Fonte: Elaborado pelo autor

As comparações entre os Modelos 3 e 4 foram feitas de acordo com a variação do número de áreas. Foram feitos então 3 gráficos para analisarmos a diferença entre o número de máquinas utilizadas.

O gráfico representado na Figura 18 é referente ao cenário de três áreas e duas máquinas considerado nos Modelos 3 e 4. Por esse gráfico podemos analisar a diferença no valor da função objetivo ao permitir duas máquinas na mesma área.

Figura 18 – Comparação Modelos 3 e 4 (3 ÁREAS)



Fonte: Elaborado pelo autor

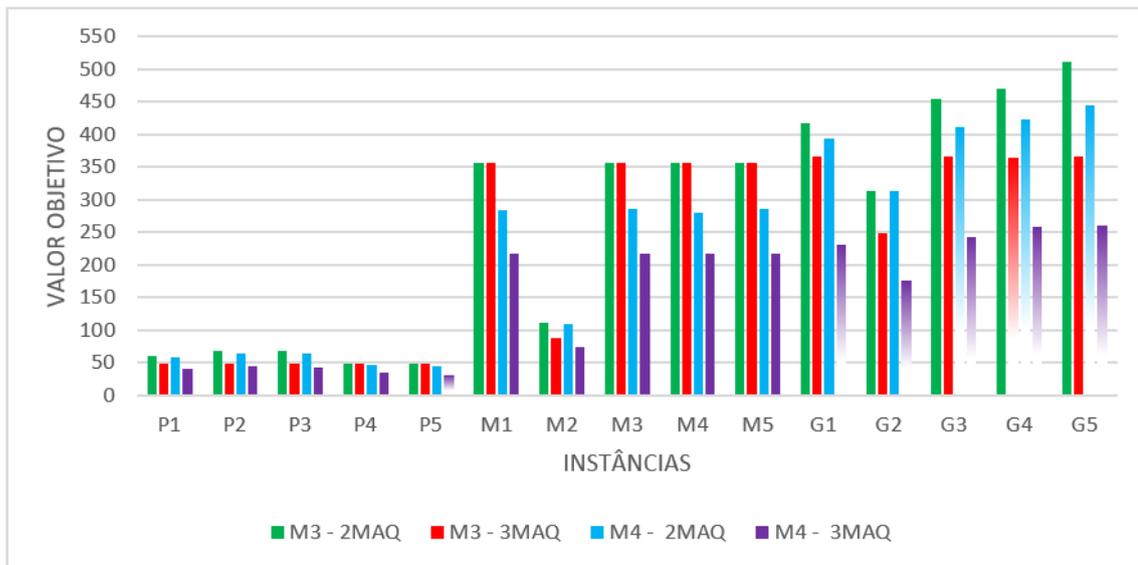
Podemos perceber que a principal diferença ocorreu nas instâncias da classe média, onde as maiores diferenças ocorreram nas instâncias M2, M4, M6, M7, M9 e M10. As instâncias de classe pequena apresentaram uma diferença muito sutil e pouco relevante se compararmos com as outras instâncias. Em relação às instâncias da classe grande, podemos notar uma oscilação maior entre as instâncias da classe, por exemplo, existe uma diferença notória na instância G2, porém, na instância G10 as linhas que representam os Modelos 3 e 4 praticamente estão sobrepostas.

No gráfico representado pela Figura 19 é considerado os cenários de quatro áreas e duas máquinas e quatro áreas e três máquinas para os Modelos 3 e 4. As barras que não estão com cores uniformes representam as instâncias que não foram resolvidas na otimalidade.

Dois tipos de análise podem ser feitas a partir desse gráfico. Primeiramente, podemos analisar o impacto no valor da função objetivo ao considerarmos duas e três máquinas no mesmo modelo. A segunda comparação pode ser feita em relação ao se permitir mais de uma máquina por área.

Como nem todas as instâncias foram resolvidas na otimalidade, as barras que não estão com cores uniformes representam os limitantes inferiores (soluções infactíveis) para o problema, dessa forma, as diferenças em relação a essas barras não são exatas, mas elas nos dão uma boa estimativa quanto ao valor da função objetivo.

Figura 19 – Comparação Modelos 3 e 4 (4 ÁREAS)



Fonte: Elaborado pelo autor

A primeira análise se concentra no uso de duas e três máquinas no mesmo modelo (comparação entre as cores verde e vermelha e entre as cores azul e roxa).

Entre as instâncias pequenas, considerando os Modelos 3 e 4, as diferenças foram bem pequenas ou nulas, como no caso das instâncias P4 e P5 no Modelo 3, onde o uso de duas e três máquinas resultou no mesmo valor da função objetivo.

Nas instâncias médias, apenas a instância M2 apresentou diferença em relação ao uso de duas e três máquinas no Modelo 3, entretanto, considerando o Modelo 4 houve uma diminuição no valor da função objetivo de todas as instâncias com o uso de três máquinas ao invés de duas máquinas.

Nas instâncias grandes, houve diminuição no valor da função objetivo considerando duas e três máquinas no Modelo 3. Observando o gráfico temos que as diferenças entre o uso de duas e três máquinas no Modelo 4 são maiores, entretanto, considerando três máquinas no Modelo 4, as instâncias não foram resolvidas na otimalidade, logo quando a otimalidade for alcançada o valor objetivo irá aumentar e a diferença entre duas e três máquinas irá diminuir.

A segunda análise é sobre o uso de uma ou duas máquinas na mesma área considerando o mesmo cenário (comparação entre as cores verde e azul e entre as cores vermelha e roxa na Figura 19).

Para as instâncias pequenas, considerando duas máquinas, a diferença entre os modelos 3 e 4 é quase imperceptível e, considerando três máquinas, as diferenças também são muito pequenas, sendo as maiores obtidas nas instâncias P4 e P5, mas a instâncias P5 não foi resolvida na otimalidade considerando 3 máquinas no Modelo 4.

As instâncias médias apresentaram diferenças maiores em ambos os cenários. Perceba que a barra azul é menor do que a barra verde em todas as instâncias médias, inclusive na instâncias M2, onde ocorreu a menor diferença. A diferença entre as barras vermelhas e roxas são ainda maiores, sendo que a menor diferença ocorreu nas instância M2. Concluímos que permitir mais de uma máquina por área, impactou positivamente nos resultados, ou seja, resultou em valores da função objetivo menores.

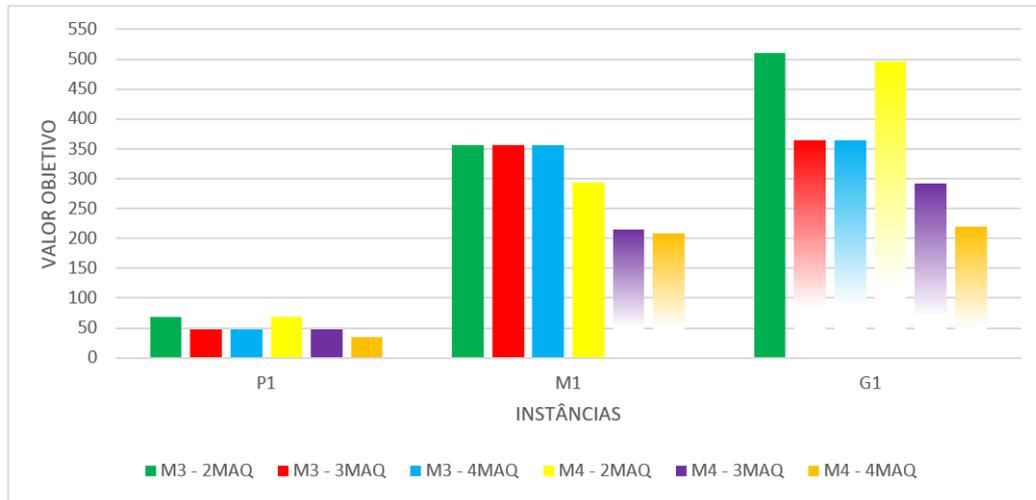
Para as instâncias grandes também houve diminuição no valor da função objetivo em ambos os cenários. A diferença no cenário de duas máquinas (barra verde e azul) é perceptível, menos na instância G2, onde não houve diferença ao permitir mais de uma máquina por área. Mas, vale ressaltar que pelo fato das instâncias G3, G4 e G5 não terem sido resolvidas na otimalidade considerando duas máquinas no Modelo 4, as diferenças podem diminuir quando as instâncias forem resolvidas até a otimalidade.

No cenário de três máquinas (barra vermelha e roxa) obtivemos as maiores diferenças, entretanto, nenhuma das instâncias grandes foi resolvida na otimalidade considerando 3 máquinas no Modelo 4, logo, essas diferenças entre os valores da função objetivo podem diminuir. Mesmo diminuindo as diferenças quando resolvidas todas as instâncias na otimalidade, podemos perceber que, ao considerarmos três máquinas para distribuir entre as quatro áreas, é relevante permitir que mais de uma máquina seja designada para a mesma área.

Por último, no gráfico apresentado na Figura 20, vamos analisar os cenários considerando cinco áreas para, novamente, analisar as diferenças ao consideramos duas, três e quatro máquinas no valor da função objetivo no mesmo modelo. E depois, vamos analisar a diferença no valor da função objetivo considerando o mesmo número de máquinas e os dois modelos distintos, ou seja, vamos analisar a diferença no resultado ao permitir até duas máquinas na mesma área.

Novamente, temos que as instâncias onde as barras não apresentam cores uniformes não foram resolvidas na otimalidade e, sendo assim, seus valores (limitantes inferiores) são apenas uma estimativa para as comparações quanto aos valores da função objetivo.

Figura 20 – Comparação Modelos 3 e 4 (5 ÁREAS)



Fonte: Elaborado pelo autor

Primeiramente, vamos analisar a diferença no número de máquinas para cada modelo individualmente (comparação entre as cores verde, vermelha e azul e comparação entre as cores amarela, roxa e laranja na Figura 20).

Para a instância P1, considerando o Modelo 3 houve uma diminuição entre o valor da função objetivo para duas e três máquinas, porém, para três e quatro máquinas o resultado foi o mesmo. Considerando o Modelo 4 houve diminuição entre o valor da função objetivo para duas, três e quatro máquinas, entretanto, a maior ocorreu entre duas e três máquinas.

Para a instância M1, considerando o Modelo 3 não houve nenhuma diferença no valor da função objetivo para duas, três e quatro máquinas. Já no Modelo 4, houve diferença no resultado para os 3 casos (duas, três e quatro máquinas), sendo a maior diferença entre duas e três máquinas e uma diferença sutil entre três e quatro máquinas. Mas para três e quatro máquinas, não foi provado a otimalidade, podendo a diferença ser menor ainda.

Para a instância G1, considerando o Modelo 3, houve diferença no valor da função objetivo entre duas e três máquinas e não houve diferença entre três e quatro máquinas mas, novamente, para três e quatro máquinas, as instâncias não foram resolvidas na otimalidade, sendo assim, as diferenças podem mudar. Para o modelo 4, houve diferença no valor objetivo entre os 3 casos, sendo a maior diferença entre duas e três máquinas novamente, mas novamente temos que nenhuma das instâncias foi resolvida na otimalidade, logo, as diferenças podem ser diferentes se provada a otimalidade nas instâncias.

Agora, vamos analisar a diferença entre os modelos considerando o mesmo número de máquinas, ou seja, a diferença no valor da função objetivo ao permitir que até duas máquinas sejam designadas para a mesma área (comparação entre as cores verde e amarelo, vermelha e roxa, azul e laranja na Figura 20).

Como já esperado, para a instância P1 as diferenças foram bem sutis. Para duas

máquinas não houve diferença no resultado ao permitir duas máquinas na mesma área. Para três máquinas, a diferença foi muito pequena e, para quatro máquinas, a diferença foi um pouco maior, porém, ainda muito pequena.

Para a instância M1 as diferenças foram maiores entre os modelos. Com isto, percebemos que permitir duas máquinas na mesma área reduz consideravelmente o valor da função objetivo. Considerando três e quatro máquinas, as diferenças entre os modelos podem sofrer alterações, pois no Modelo 4, as instâncias não foram resolvidas na otimalidade.

Para a instância G1, também houve diferença entre os resultados, porém, as diferenças foram menores se comparado com a instância M1. Entretanto, como a instância só foi resolvida na otimalidade considerando duas máquinas no Modelo 3, as diferenças podem mudar quando provada a otimalidade nos outros cenários.

De forma geral, concluímos que o uso de múltiplas máquinas sempre reduziu o valor da função objetivo, principalmente, em instâncias médias e grandes em que a diminuição no resultado é bem significativo. Permitir até duas máquinas na mesma área também se mostrou eficiente quanto à redução no valor objetivo e, novamente, as instâncias médias e grandes apresentaram as maiores diferenças no valor objetivo. Podemos concluir que usar mais máquinas e permitir múltiplas máquinas na mesma área está diretamente relacionado com o tamanho da área, mas em 80% dos casos testados, o valor da função objetivo diminuiu.

## 5.7 Testes Baseados em Instâncias Reais

Nesta seção foram realizados alguns testes, utilizando instâncias geradas a partir de instâncias reais. No trabalho de Santoro *et.al.* [43] os autores utilizam instâncias reais de uma usina do estado de São Paulo. Baseado na Instância 22 de Santoro *et.al.* [43] foram geradas 5 instâncias semelhantes quanto ao *layout*.

As características de cada instâncias são descritas na Tabela 34. Temos o nome de cada instância (INST), o número de vértices ( $|V|$ ), arestas ( $|A|$ ), arestas requeridas ( $|A_R|$ ) e o número de componentes conexas do grafo induzido pelas arestas requeridas (C.C.).

Tabela 34 – Características-Instâncias Reais

INST	CARACTERÍSTICAS			
	$ V $	$ A $	$ A_R $	C.C.
R1	61	71	30	30
R2	41	54	20	20
R3	77	104	38	38
R4	43	57	21	21
R5	67	90	33	33

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para cada instância foram considerados os mesmos custos para as arestas, sendo eles:

- 20 para as arestas requeridas (linhas de cana em que deve ser feita a colheita);
- 10 para as arestas não requeridas horizontais (que representam a possibilidade de se fazer o tiro direto entre um talhão e outro)
- 120 para as arestas não requeridas (que representam a manobra da colhedeira);
- 20 para as arestas incidentes ao depósito.

Os testes também foram limitados em 30 minutos como anteriormente e as configurações da máquina e os pacotes de otimização utilizados também foram mantidos.

### 5.7.1 Modelo 1 e Modelo 2

Dentre as instâncias disponíveis os Modelos 1 e 2 tiveram bons desempenhos, apenas a instância R4 não foi resolvida na otimalidade pelo Modelo 2.

Os resultados estão descritos na Tabela 35, onde temos o nome da instância (INST) na coluna 1. As colunas 2, 3 e 4 apresentam o tempo de execução (t(s)), limitante inferior (L.I.) e o valor ótimo (V.O.), respectivamente, obtidos pelo Modelo 1. As colunas 5, 6, e 7 também apresentam as mesma informações e, na coluna 8 temos a diferença máxima entre o valor da rota de cada máquina (D.M.), referentes ao Modelo 2.

Tabela 35 – Resultados Modelos 1 e 2

INST	MODELO 1			MODELO 2 - 2 MÁQUINAS			
	t(s)	L.I.	V.O.	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
R1	0,41	-	3350	247,30	-	1920	0
R2	0,28	-	1620	1,92	-	890	0
R3	0,53	-	3150	8,06	-	1610	0
R4	0,37	-	1320	1806,49	760	-	-
R5	0,49	-	2120	41,66	-	1160	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

O Modelo 1 resolveu todas as 5 instâncias na otimalidade em menos de 1 segundo. O Modelo 2, considerando 2 máquinas, resolveu 4 das 5 instâncias na otimalidade. Os tempos de execução foram um pouco maiores, porém, ainda bem pequenos, sendo o maior de 247,30 segundos na instância R1.

Ainda em relação ao Modelo 2, percebe-se também que, as diferenças entre os valores das rotas das máquinas foram nulas em todas as instâncias, ou seja, os tempos das rotas da máquina um e da máquina dois, foram iguais. Vale ressaltar que para a instâncias R4, apresentamos apenas o valor do limitante inferior (infectível) pois, a instância não foi resolvida na otimalidade antes do tempo limite.

Comparando os dois modelos, em relação ao valor ótimo da função objetivo, tivemos uma redução de 42,7% no valor da função objetivo da instância R1, 45,06% no valor da

função objetivo da instância R2, 48,89% no valor da função objetivo da instância R3 e, por fim, 45,29% no valor da função objetivo da instância R5.

Notamos uma diferença significativa no valor ótimo em ambas as instâncias, ou seja, utilizar duas máquinas fez bastante diferença quanto ao tempo gasto para a realização da colheita. Além disso, foi considerada apenas a utilização de duas máquinas no Modelo 2, devido ao *layout* dos campos e ao risco de se utilizar muitas máquinas em situações reais.

### 5.7.2 Modelo 3 e Modelo 4

A partir das 5 instâncias apresentadas no início desta Seção 5.7, geramos 10 novas instâncias (C01 - C10) fazendo a combinação das 5 instâncias iniciais 3 à 3.

Isso foi feito para analisarmos os Modelos 3 e 4 considerando um conjunto de três áreas e duas máquinas disponíveis para realizar a colheita. Vale ressaltar que, no Modelo 3, é permitido apenas uma máquina por área e, no Modelo 4, é permitido duas máquinas por área. Novamente, a permissão de no máximo duas máquinas por área, está relacionada com o *layout* dos campos e o risco de acidentes com muitas máquinas em situações reais.

Na Tabela 36 temos algumas informações e resultados, sendo: nome da instância (INST) e as áreas que compõem cada instância (ÁREAS) nas colunas 1 e 2, respectivamente. Nas colunas 3, 4, 5 e 6 temos alguns resultados como: tempo de execução (t(s)), limitante inferior (L.I.), valor ótimo (V.O.) e diferença máxima entre as rotas das máquinas (D.M.) referentes ao Modelo 3. As colunas 7, 8, 9 e 10 apresentam os mesmos resultados, porém, referentes ao Modelo 4.

Tabela 36 – Resultados Modelos 3 e 4

INST	ÁREAS	MODELO 3				MODELO 4			
		t(s)	L.I.	V.O.	D.M.	t(s)	L.I.	V.O.	D.M.
C01	(R1, R2, R3)	13,12	-	4770	10	1806,84	4090	-	-
C02	(R1, R2, R4)	4,38	-	3350	270	1800,05	1430	-	-
C03	(R1, R2, R5)	5,22	-	3740	10	1800,10	1660	-	-
C04	(R1, R3, R4)	8,78	-	4470	840	1800,15	1780	-	-
C05	(R1, R3, R5)	17,35	-	5270	1840	1800,20	2020	-	-
C06	(R1, R4, R5)	7,00	-	3440	30	533,13	-	3420	10
C07	(R2, R3, R4)	10,12	-	3150	0	1800,14	1580	-	-
C08	(R2, R3, R5)	12,60	-	3740	510	1800,18	1820	-	-
C09	(R2, R4, R5)	15,21	-	2940	620	463,18	-	2560	20
C10	(R3, R4, R5)	1425,20	-	3440	10	2414,31	3330	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

O Modelo 3 conseguiu resolver todas as instâncias na otimalidade em tempos menores do que 20 segundos, a menos da instância C10, que levou 1425,20 segundos para ser resolvida na otimalidade. O Modelo 4 apresentou muita dificuldade para resolver as instâncias, resolvendo apenas as instâncias C06 e C09 na otimalidade, dentro do tempo limite.

Acreditamos que a dificuldade do Modelo 4 nestes testes está relacionado com o formato das instâncias (*layout* dos campos). Percebemos que, o número de componentes conexas do grafo induzido pelas arestas requeridas, aumentou significativamente, quando comparado com as instâncias utilizadas no início do Capítulo 5.

Comparando os Modelos 3 e 4, a partir das instâncias C06 e C09, percebemos que a redução no valor ótimo da função objetivo, foi pequena na instância C06 (redução de 0,59%). Na instância C09 a redução foi mais expressiva (de 12,92%) ou seja, permitir até duas máquinas por área, pode diminuir expressivamente o tempo de colheita, quando comparado com o uso de apenas uma máquina por área.

Nas Tabelas 37 e 38 temos as distribuições das máquinas entre as áreas, pelos Modelos 3 e 4, respectivamente, referente as instâncias C06 e C09. Na coluna 1 (INST) temos o nome da instância. Nas colunas 2, 3, 4 e 5 são apresentadas as informações referentes à máquina 1, sendo elas: para qual ou quais áreas a máquina foi designada (ÁREA), o valor da rota da máquina por área (V.A.), o valor total da rota da máquina considerando todas as áreas que ela percorreu (V.T.) e, por fim, o número de arestas requeridas que a máquina atendeu ( $A_R$ ). As colunas 6, 7, 8 e 9 apresentam as mesmas informações referentes à máquina 2.

Tabela 37 – Áreas - Modelo 3

INST	MODELO 3							
	MAQ1				MAQ2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	AR	ÁREA	V.A.	V.T.	AR
C06	[R4, R5]	[1320, 2120]	3440	54	[R1]	[3410]	3410	30
C09	[R2, R4]	[1620, 1320]	2940	41	[R5]	[2320]	2320	33

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 38 – Áreas - Modelo 4

INST	MODELO 4							
	MAQ1				MAQ2			
	ÁREA	V.A.	V.T.	AR	ÁREA	V.A.	V.T.	AR
C06	[R1, R4]	[2090, 1320]	3410	42	[R1, R5]	[1300, 2120]	3420	42
C09	[R4, R5]	[440, 2120]	2560	39	[R2, R4]	[1620, 920]	2540	35

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando a instância C06 temos que, pelo Modelo 3, a máquina um colheu as áreas R4 e R5, e a máquina dois colheu apenas a área R1. Pelo Modelo 4 temos que, a área R1 foi colhida pelas máquinas um e dois e as outras duas áreas foram colhidas por apenas uma máquina cada uma, sendo a R4 colhida pela máquina um e a R5 colhida pela máquina dois.

Agora, analisando a instância C09 temos que, pelo Modelo 3, a máquina um colheu as áreas R2 e R4, e a máquina dois colheu apenas a área R5. Pelo Modelo 4, a máquina um colheu as áreas R4 e R5 e a máquina dois colheu as áreas R2 e R4.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, utilizamos o PCR e K-PCR para representar o problema da colheita de cana-de-açúcar com o objetivo de minimizar o tempo gasto nesta etapa da cadeia produtiva da cana. A partir de modelos propostos na literatura para o PCR, fizemos as adequações necessárias e representamos as 4 versões propostas para o problema da colheita. As versões foram definidas de acordo com os trabalhos encontrados na literatura e com os estudos relacionados à colheita da cana.

No desenvolvimento do trabalho foi possível notar a grande aplicabilidade dos problemas de roteamento em arcos em diversos contextos reais. Em especial, o problema do carteiro rural e suas variações representam diversos problemas logísticos, sendo os modelos matemáticos, juntamente com as técnicas de Pesquisa Operacional, ferramentas importantes na resolução destes problemas.

Em especial, a cadeia produtiva da cana-de-açúcar é uma área onde os estudos matemáticos e a Pesquisa Operacional se desenvolvem de maneira contínua e inovadora. Como a cultura da cana-de-açúcar apresenta grande importância para a economia Brasileira, pois o Brasil é o principal produtor do mundo, tais estudos são de grande importância para que os processos da cadeia funcionem da melhor forma possível.

O problema da colheita de cana-de-açúcar é um dos problemas mais importantes do contexto da cana-de-açúcar, uma vez que a etapa de colheita é a mais cara de toda a cadeia. Os modelos matemáticos apresentados neste trabalho foram pensados neste contexto, como uma ferramenta eficaz para auxiliar o planejamento da colheita.

Os 4 modelos apresentados neste trabalho tiveram como objetivo representar o problema da colheita da cana-de-açúcar considerando 4 versões para o problema sendo elas: uma área para ser colhida e uma máquina disponível para fazer a colheita, uma área e múltiplas máquinas, múltiplas áreas e apenas uma máquina por área e, por fim, múltiplas áreas e múltiplas máquinas por área.

Os modelos buscam diminuir o valor da função objetivo (tempo de colheita) e, conforme o número de máquinas aumenta, obter rotas equilibradas entre as máquinas. Este equilíbrio visa evitar situações em que uma máquina está trabalhando muito tempo, enquanto que outra está parada no depósito. Se este equilíbrio acontece, o tempo total de colheita diminui pois as máquinas podem trabalhar paralelamente e isto reflete em economias como tempo.

Os dois objetivos foram alcançados nos resultados. Percebemos que utilizar mais máquinas sempre reduz o valor da função objetivo, principalmente, em instâncias médias e grandes. Percebemos também uma redução no valor da função objetivo para os Modelos 3 e 4, ou seja, permitir múltiplas máquinas em uma mesma área pode gerar resultados

satisfatórios, quanto à redução do tempo de colheita. Vale ressaltar que em contextos reais, a condição de múltiplas máquinas na mesma área deve ser planejada cuidadosamente e por um profissional da área para que não ocorra acidentes entre as máquinas.

Os Modelos 3 e 4 foram propostos a partir dos Modelos 1 e 2 já existentes na literatura, e representam bem a situação da colheita da cana, uma vez que muitas vezes é necessário o planejamento da colheita de diversas áreas simultaneamente. Um outro fator importante é o fato do maquinário ser de alto custo então, normalmente, o número de máquinas disponíveis para realizar a colheita é inferior ao número de áreas a serem colhidas, sendo necessária uma boa designação entre as máquinas, de forma a obter economias significativas nesta etapa da cadeia produtiva da cana.

Como já esperado, os Modelos 1 e 2 apresentaram um bom desempenho durante os testes realizados, considerando a implementação feita e somente o uso do solver para a resolução. Os Modelos 3 e 4 tiveram um desempenho um pouco inferior, mas ainda assim se mostraram promissores quanto às soluções obtidas. Pelos resultados obtidos, percebemos que se considerarmos uma restrição que elimine simetria entre as rotas, o modelo poderá ter uma melhora significativa quanto ao seu desempenho.

O objetivo de se obter o equilíbrio entre as rotas foi alcançado com os modelos propostos, entretanto, percebemos que é necessário considerar algumas condições a mais no modelo, para que ele represente o problema da colheita da cana de forma mais realista. Algumas dessas condições estão relacionadas com a capacidade das máquinas, um custo associado ao uso de cada máquina, além de algumas restrições referentes à permissão de mais de uma máquina na mesma área, pois isso pode acarretar em acidentes que podem gerar grandes prejuízos para o produtor.

Em relação aos testes feitos nas instâncias baseadas em dados reais, percebemos que o *layout* das instâncias, isto é, o formato dos campos que possuem plantação de cana-de-açúcar, dificultam a resolução do problema considerando mais de uma máquina. Percebe-se que os Modelos 1 e 3 desempenharam muito bem, enquanto que, os Modelo 2 e 4 tiveram mais dificuldades, principalmente o Modelo 4.

Como trabalhos futuros, além da melhoria na formulação dos modelos matemáticos, uma opção válida é propor um algoritmo que resolva o problema por etapas. A ideia do algoritmo é primeiro resolver um PCR ou K-PCR em cada área, depois de obtido os resultados de cada área individualmente, realizamos a designação das máquinas entre as áreas baseado nestes valores.

Uma outra consideração importante é a realização de mais testes com instâncias reais do problema e, a partir destes testes, propor desigualdades que possam fortalecer os modelos, para resolver instâncias com este tipo de formato.

## Referências

- 1 CEPEA, C. de Estudos Avançados em Economia Aplicada. *PIB do Agro-negócio Brasileiro*. 2021. Disponível em: <<https://www.cepea.esalq.usp.br/br/pib-do-agronegocio-brasileiro.aspx>>. Acesso em: 25 de out. de 2021.
- 2 CONAB, C. N. de A. *Acompanhamento de safra brasileira: cana-de-açúcar, safra 2021/22, v. 8, n. 2, segundo levantamento, ago.2021*. 2021. Disponível em: <<https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/cana>>. Acesso em: 25 de out. de 2021.
- 3 LANÇONI, A. A.; SOARES, W. M.; CARRER, C. da C.; LIMA, C. G. Efeito da aplicação de um sistema de automação agrícola em colheita mecanizada de cana-de-açúcar como ferramenta de gestão e controle de custo operacional. *Ensaios e Ciência C Biológicas Agrárias e da Saúde*, v. 24, n. 2, p. 146–152, 2020.
- 4 AZEVEDO FILHO, A.; NEVES, E. Pesquisa operacional na agricultura brasileira. *Mini-curso. 11<sup>ª</sup>. Reunião da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada à Computação. Botucatu*, v. 9, 1988.
- 5 NUNES, A. N.; LEE, G. C.; ANDREOTI, G. de S.; D'ALKIMIN, J. E. A programação linear na agricultura. *IX JORNACITEC-Jornada Científica e Tecnológica*, 2020.
- 6 TASKINER, T.; BILGEN, B. Optimization models for harvest and production planning in agri-food supply chain: A systematic review. *Logistics*, v. 5, n. 3, 2021. ISSN 2305-6290.
- 7 TEIXEIRA, E. d. S.; RANGEL, S.; FLORENTINO, H. d. O.; ARAUJO, S. A. de. A review of mathematical optimization models applied to the sugarcane supply chain. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, 2021.
- 8 CORBERÁN, Á.; EGGLESE, R.; HASLE, G.; PLANA, I.; SANCHIS, J. M. Arc routing problems: A review of the past, present, and future. *Networks*, Wiley Online Library, v. 77, n. 1, p. 88–115, 2021.
- 9 NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. Grafos: introdução e prática. Editora Blucher, 2017.
- 10 MOURÃO, M. C.; PINTO, L. S. An updated annotated bibliography on arc routing problems. *Networks*, Wiley Online Library, v. 70, n. 3, p. 144–194, 2017.
- 11 EISELT, H. A.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G. Arc routing problems, part ii: The rural postman problem. *Operations research*, INFORMS, v. 43, n. 3, p. 399–414, 1995.
- 12 ORLOFF, C. A fundamental problem in vehicle routing. *Networks*, Wiley Online Library, v. 4, n. 1, p. 35–64, 1974.
- 13 LENSTRA, J. K.; KAN, A. R. On general routing problems. *Networks*, Wiley Online Library, v. 6, n. 3, p. 273–280, 1976.
- 14 FREDERICKSON, G. N. Approximation algorithms for some postman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, ACM New York, NY, USA, v. 26, n. 3, p. 538–554, 1979.

- 
- 15 CHRISTOFIDES, N.; CAMPOS, V.; CORBERÁN, A.; MOTA, E. An algorithm for the rural postman problem. *Report IC. OR*, v. 81, p. 81, 1981.
- 16 GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier, 2012.
- 17 CORBERÁN, A.; SANCHIS, J. A polyhedral approach to the rural postman problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 79, n. 1, p. 95–114, 1994.
- 18 CORBERÁN, A.; PLANA, I.; SANCHIS, J. M. A branch & cut algorithm for the windy general routing problem and special cases. *Networks: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 49, n. 4, p. 245–257, 2007.
- 19 EASTON, K.; BURDICK, J. A coverage algorithm for multi-robot boundary inspection. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, p. 727–734, 2005.
- 20 CORBERÁN, Á.; LAPORTE, G. *Arc routing: problems, methods, and applications*. SIAM, 2015.
- 21 GOLDEN, B. L.; WONG, R. T. Capacitated arc routing problems. *Networks*, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 305–315, 1981.
- 22 CHRISTOFIDES, N. The optimum traversal of a graph. *Omega*, Elsevier, v. 1, n. 6, p. 719–732, 1973.
- 23 AGARWAL, S.; AKELLA, S. Line coverage with multiple robots. *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, p. 3248–3254, 2020.
- 24 CAMPBELL, J. F.; CORBERÁN, Á.; PLANA, I.; SANCHIS, J. M.; SEGURA, P. Solving the length constrained k-drones rural postman problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 292, n. 1, p. 60–72, 2021.
- 25 TIRKOLAEI, E. B.; MAHDAVI, I.; ESFAHANI, M. M. S. A robust periodic capacitated arc routing problem for urban waste collection considering drivers and crew's working time. *Waste Management*, Elsevier, v. 76, p. 138–146, 2018.
- 26 BATISTA, G. V. Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia, *Proposta de um modelo matemático para o problema de roteamento em arcos capacitado e periódico*. 2014.
- 27 KHAJEPOUR, A.; SHEIKHMOHAMMADY, M.; NIKBAKHSH, E. Field path planning using capacitated arc routing problem. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier, v. 173, p. 105401, 2020.
- 28 FREDERICKSON, G. N.; HECHT, M. S.; KIM, C. E. Approximation algorithms for some routing problems. *17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1976)*, p. 216–227, 1976.
- 29 AHR, D. *Contributions to multiple postmen problems*. Tese (Doutorado) — University of Heidelberg, 2004.
- 30 BENAVENT, E.; CORBERÁN, A.; PLANA, I.; SANCHIS, J. M. Min-max k-vehicles windy rural postman problem. *Networks: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 54, n. 4, p. 216–226, 2009.

- 
- 31 WILLEMSE, E. J.; JOUBERT, J. W. Applying min–max k postmen problems to the routing of security guards. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 63, n. 2, p. 245–260, 2012.
- 32 CHEN, H.; CHENG, T.; SHAW-TAYLOR, J. A balanced route design for min-max multiple-depot rural postman problem (mmdrpp): a police patrolling case. *International Journal of Geographical Information Science*, Taylor & Francis, v. 32, n. 1, p. 169–190, 2018.
- 33 XU, L.; STENTZ, A. An efficient algorithm for environmental coverage with multiple robots. *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 4950–4955, 2011.
- 34 QUIRION-BLAIS, O.; LANGEVIN, A.; LEHUÉDÉ, F.; PÉTON, O.; TRÉPANIER, M. Solving the large-scale min–max k-rural postman problem for snow plowing. *Networks*, Wiley Online Library, v. 70, n. 3, p. 195–215, 2017.
- 35 HOLMBERG, K. Heuristics for the weighted k-rural postman problem with applications to urban snow removal. *Journal on Vehicle Routing Algorithms*, Springer, v. 1, n. 2, p. 105–119, 2018.
- 36 GAROFALO, D.; PACKER, A.; RAMOS, N.; KONDO, V.; MATSUURA, M. d. S.; CABRAL, O. Dinâmica na cultura da cana-de-açúcar no brasil: 1990 a 2018. *Embrapa Meio Ambiente - Documentos (INFOTECA-E)*, 2020.
- 37 RODRIGUES, G. S. d. S. C.; ROSS, J. L. S. A trajetória da cana-de-açúcar no brasil: perspectivas geográfica, histórica e ambiental. EDUFU, 2020.
- 38 ALVES, M.; PONCE, G. H.; SILVA, M. A.; ENSINAS, A. V. Surplus electricity production in sugarcane mills using residual bagasse and straw as fuel. *Energy*, Elsevier, v. 91, p. 751–757, 2015.
- 39 CAPAZ, R. S.; CARVALHO, V. S. B.; NOGUEIRA, L. A. H. Impact of mechanization and previous burning reduction on ghg emissions of sugarcane harvesting operations in brazil. *Applied Energy*, Elsevier, v. 102, p. 220–228, 2013.
- 40 DORIGUEL, F. Mestrado em Agronomia, *Modelagem matemática de otimização no processo de manobra do transbordo de cana-de-açúcar*. 2019.
- 41 NETO, J. A. A indústria de máquinas agrícolas no brasil: origens e evolução. *Revista de Administração de Empresas*, SciELO Brasil, v. 25, p. 57–69, 1985.
- 42 GASSO, V.; SØRENSEN, C. A.; OUDSHOORN, F. W.; GREEN, O. Controlled traffic farming: A review of the environmental impacts. *European Journal of Agronomy*, Elsevier, v. 48, p. 66–73, 2013.
- 43 SANTORO, E.; SOLER, E. M.; CHERRI, A. C. Route optimization in mechanized sugarcane harvesting. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier, v. 141, p. 140–146, 2017.
- 44 JUNIOR, A. F. Mestrado em Ciência da Computação, *Método para otimização de rotas na agricultura*. 2019.

- 
- 45 TREIN, C.; LEVIEN, R.; SOUZA, L. Tráfego controlado: pneus e compactação. *Cultivar Máquinas*, v. 41, p. 22–25, 2005.
- 46 SCHMIDT, R. *Modelagem para apoio ao planejamento das operações de colheita mecanizada no setor sucroenergético*. Tese (Doutorado) — Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, 2021.
- 47 DORIGUEL, F.; CRUSCIOL, C. A. C.; FLORENTINO, H. de O. Mathematical optimization models in the sugarcane harvesting process. *Sugarcane-Technology and Research*, IntechOpen, 2017.
- 48 ROSA, J. H. M. *Dimensionamento operacional e econômico da colheita mecanizada de cana-de-açúcar (Saccharum spp): modelo computacional como ferramenta de apoio a tomadas de decisão*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017.
- 49 LIONÇO, E.; BRESSAN, J.; SILVA, C. M. da. Sistematização da área para implantação da colheita mecanizada da cana-de-açúcar. *Campo Digital*, v. 5, n. 1, 2010.
- 50 GOMES, L. H.; COSTA, M. A. Sistema de melhoria contínua na colheita mecanizada da cana-de-açúcar. 2017.
- 51 PAIVA, R. P. O. d.; MORABITO, R. Um modelo de otimização para o planejamento agregado da produção em usinas de açúcar e álcool. *Gestão & Produção*, SciELO Brasil, v. 14, n. 1, p. 25–41, 2007.
- 52 SALASSI, M. E.; BARKER, F. G. Reducing harvest costs through coordinated sugarcane harvest and transport operations in louisiana. *Journal of the American Society of Sugar Cane Technologists*, 2008.
- 53 JENA, S. D.; ARAGÃO, M. Sugar cane cultivation and harvesting: Mip approach and valid inequalities. p. 969–980, 2009.
- 54 ALI, O.; VANOUUDHEUSDEN, D. Logistics planning for agricultural vehicles. *2009 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, p. 311–314, 2009.
- 55 OKSANEN, T.; VISALA, A. Coverage path planning algorithms for agricultural field machines. *Journal of field robotics*, Wiley Online Library, v. 26, n. 8, p. 651–668, 2009.
- 56 SCARPARI, M. S.; BEAUCLAIR, E. G. F. de. Optimized agricultural planning of sugarcane using linear programming. *Investigacion operacional*, Universidad de La Habana, v. 31, n. 2, p. 126–132, 2010.
- 57 STRAY, B.; VUUREN, J. V.; BEZUIDENHOUT, C. An optimisation-based seasonal sugarcane harvest scheduling decision support system for commercial growers in south africa. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier, v. 83, p. 21–31, 2012.
- 58 SETHANAN, K.; NEUNGMATCHA, W. Multi-objective particle swarm optimization for mechanical harvester route planning of sugarcane field operations. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 252, n. 3, p. 969–984, 2016.

- 
- 59 CONESA-MUNOZ, J.; BENGOCHEA-GUEVARA, J. M.; ANDUJAR, D.; RIBEIRO, A. Route planning for agricultural tasks: A general approach for fleets of autonomous vehicles in site-specific herbicide applications. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier, v. 127, p. 204–220, 2016.
- 60 SEYYEDHASANI, H.; DVORAK, J. S. Using the vehicle routing problem to reduce field completion times with multiple machines. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier, v. 134, p. 142–150, 2017.
- 61 PHILIPSE, L.; JANSEN, N.; KLEUSKENS, J.; VAANDRAGER, F. Routing algorithms for autonomous agricultural vehicles. 2020.
- 62 FILIP, M.; ZOUBEK, T.; BUMBALEK, R.; CERNY, P.; BATISTA, C. E.; OLSAN, P.; BARTOS, P.; KRIZ, P.; XIAO, M.; DOLAN, A.; FINDURA, P. Advanced computational methods for agriculture machinery movement optimization with applications in sugarcane production. *Agriculture*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 10, p. 434, 2020.
- 63 Python Software Foundation. *Python 3.8.12 documentation*. 2021. Disponível em: <<https://www.python.org>>.
- 64 Gurobi Optimization, LLC. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. 2021. Disponível em: <<https://www.gurobi.com>>.
- 65 CORBERÁN, Á.; PLANA, I.; SANCHIS, J. *Arc routing problems: data instances*. Disponível em: <<https://www.uv.es/corberan/instancias.htm>>.