



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Sérgio Rodrigues Verde Junior

Teoremas de estabilidade para a homologia
persistente

São José do Rio Preto
2024

Sérgio Rodrigues Verde Junior

Teoremas de estabilidade para a homologia
persistente

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2024

V483t Verde Junior, Sérgio Rodrigues
Teoremas de estabilidade para a homologia persistente /
Sérgio Rodrigues Verde Junior. -- São José do Rio Preto, 2024
90 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São
José do Rio Preto

Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Matemática. 2. Topologia. 3. Topologia algébrica. 4. Análise
topológica de dados. 5. Homologia persistente. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências
Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Sérgio Rodrigues Verde Junior

Teoremas de estabilidade para a homologia
persistente

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
Orientadora

Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Thiago de Melo
UNESP – Câmpus de Rio Claro

São José do Rio Preto
05 de abril de 2024

*Às superfícies orientáveis que habitam ao
meu redor, e aos pensamentos desorientados
que habitam dentro de mim.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família: à minha mãe, Sueli, que infelizmente nunca pode ver o quão longe eu cheguei, mas que sei que estaria orgulhosa ao me ver agora. Ao meu pai, Sérgio, por todo o apoio ao longo de toda a graduação e mestrado, aos meus irmãos, Santhiago e Thaynara, por todos os momentos juntos, e ao Lilly, nosso gato e fiel guardião da nossa casa. Agradeço também aos meus avós, meus tios e tias, primos e primas, e todas as pessoas com quem passei tantos domingos juntos, e que me fazem recordar o que é viver em família.

Agradeço ao Ibilce, por ter me proporcionado um ensino gratuito e de qualidade, tanto na graduação quanto na pós-graduação, e também por ter me apresentado à todos os amigos que fiz ao longo da minha jornada acadêmica até então, aos quais também agradeço, especialmente àqueles que fiz durante minha permanência no PET: Ana Julia Rossafa, Eduardo Martins, Gabriela Assis, Guilherme Zahra, Maria Clara Lopes, Maria Fernanda Bonini, Milena Trivelato, Murillo Lozano e Pedro Melo; e àqueles que fiz durante o mestrado: Eduardo Caramori, Leonardo Soria, Lucas Pedro Martins, João Pedro Pillar e José Luiz Neto. Incluo nesses agradecimentos mais dois amigos: um que fiz no meu primeiro ano do bacharelado, e outro que fiz no primeiro ano da licenciatura, Rafael Nemoto e Luiz Henrique. Não tenho palavras para descrever o quão importante foi a presença de cada um desses amigos na minha vida, e sou muito grato por tudo que vivemos juntos.

Meus agradecimentos mais especiais dedico ao meu namorado e companheiro de vida, Gabriel Benedetti. Nesses 6 anos juntos, que totalizam minha graduação e meu mestrado, tive o prazer de compartilhar cada momento com ele. Seu apoio foi fundamental para que eu continuasse minha caminhada: em cada momento em que o caminho se tornou árduo demais, lá estava ele para me reerguer e me mostrar que até os momentos mais complicados são passageiros. Aproveito também para agradecer à minha sogra e ao meu sogro, por sempre me receberem tão bem em sua casa, assim como à toda a família do Gabriel, por me acolherem como parte deles.

Gostaria de agradecer também à todos os professores que estiveram presentes na minha vida, em especial: Rosimeire, que, durante o ensino fundamental, insistiu para que eu estudasse mais matemática e participasse de olimpíadas, e que talvez tenha sido a primeira pessoa a ver em mim algum tipo de potencial para essa área tão específica do saber; Maria Lúcia e Susete, que durante o ensino médio, no momento mais difícil da minha vida, tiveram a paciência para entender o que se passava, e não desistiram de acreditar na minha capacidade; e todos os professores que tive ao longo da graduação e do mestrado: professores Weber e Juliana, pela nossa convivência no PET, professora Flávia, que me orientou durante minha iniciação científica e me introduziu no mundo da Topologia Algébrica, e aos professores Andrea, Claudio Buzzi, Evelin, João Carlos, Thuy e Waldemar, que mesmo que não se lembrem de mim, me inspiraram muito no que diz respeito à “ser professor”. Aqui, agradeço também à Eunice Dumbra, minha professora de piano e música, e que foi responsável por me fazer enxergar (ou seria ouvir?) o mundo de outra forma.

Reservo um espaço para agradecer à professora Dahisy Valadão e ao professor Thiago de Melo, por terem aceitado participar da banca avaliadora do presente trabalho, por todas as correções feitas e por todas as dicas dadas para um caminho futuro.

Agradeço, por fim, à minha orientadora de mestrado, a professora Thaís Fernanda Mendes Monis, que me auxiliou em cada etapa deste trabalho, assim como sempre me apoiou nas decisões transversais à dissertação, como meu ingresso na licenciatura, concorrer à uma bolsa auxílio para monitoria de disciplinas da graduação, e apresentar o trabalho intitulado “A Estabilidade dos Diagramas de Persistência”, no evento *Workshop on Algebraic Topology and Applications*, realizado no ICMC.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Reserve o seu direito de pensar, mesmo
pensar errado é melhor do que não pensar.*

Hipátia de Alexandria

RESUMO

Na análise topológica de dados, deseja-se compreender quais são as características topológicas do espaço subjacente de um determinado conjunto de dados, isto é: através de um conjunto discreto de pontos, obter uma forma contínua no qual pode-se fazer perguntas referentes às quantidades de componentes conexas, quantidades de buracos, e assim sucessivamente. Neste trabalho, apresentaremos os conceitos básicos da teoria da homologia persistente, como os diagramas de persistência, distância *bottleneck* e os teoremas de estabilidade, finalizando o trabalho com o estudo da *persistent homotopy type distance*, que objetiva expandir os conceitos aprendidos para situações em que não poder-se-ia aplicar a teoria básica de homologia persistente.

Palavras-chave: Análise topológica de dados. Homologia persistente. Diagramas de persistência. Estabilidade. Persistent homotopy type distance.

ABSTRACT

In topological data analysis, one wants to understand what are the topological characteristics of the underlying space of a given set of data, that is: through a discrete set of points, we want to obtain a continuous form in which questions can be asked regarding quantities of connected components, number of holes, and so on. In this work, we will present the basic concepts of persistent homology theory, such as persistence diagrams, the bottleneck distance and stability theorems, finishing the work with the study of the persistent homotopy type distance, which aims to expand the concepts learned for situations in which the basic theory of persistent homology could not be applied.

Keywords: Topological data analysis. Persistent homology. Persistent diagrams. Stability. Persistent homotopy type distance.

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de 0-simplexo, 1-simplexo, 2-simplexo e 3-simplexo.	15
2.2	À esquerda, um exemplo de um complexo simplicial. À direita, a união de dois simplexes que não é um complexo simplicial.	16
2.3	Complexo de Čech para valores crescentes de α	19
2.4	Complexo de Vietoris-Rips para valores crescentes de 2α	19
3.1	Um exemplo simples de complexo simplicial, formado por 4 vértices, 4 arestas e 1 triângulo.	22
3.2	O bordo de uma 2-cadeia.	23
3.3	c_1 é um ciclo que não é bordo, c_2 é um bordo e c_3 é uma cadeia que não é ciclo.	24
3.4	Exemplos de números de Betti para alguns complexos simpliciais.	25
3.5	O simplexo negativo σ^i destruindo um 0-ciclo, enquanto o simplexo positivo σ^i cria um 1-ciclo.	30
3.6	Os três primeiros simplexes padrões, junto com a representação de três simplexes singulares.	31
3.7	Considerando K um triângulo cheio, K^ε é o conjunto de todos os pontos no interior da linha tracejada, incluindo o próprio K	33
3.8	Exemplo de distância de Hausdorff entre dois conjuntos.	33
3.9	Representação de d_K , com K sendo a $\mathbb{S}^1$	34
3.10	A construção do vetor gradiente da função distância.	35
3.11	Representação dos conjuntos de nível de d_K , com K sendo a $\mathbb{S}^1$	36
4.1	Uma função real e seu diagrama de persistência.	40
4.2	Diagrama de persistência da aproximação de uma função real. Adaptado de: [1].	40
4.3	Dois diagramas de persistência e sua distância <i>bottleneck</i>	51
4.4	Diagrama que ilustra a estabilidade dos diagramas. Fonte: [2].	54

5.1	Veja que em cada caso, a linha central é a curva C , que é a circunferência que “divide” as duas cores das figuras.	66
5.2	Funções φ e ψ tomadas no exemplo anterior. Fonte: [3].	72
5.3	Objetos considerados no exemplo anterior. Fonte: [3].	72
5.4	Funções φ e ψ consideradas no exemplo anterior. Fonte: [3].	74
5.5	Grafo de Reeb da função altura do Toro.	75
5.6	Representação de uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e sua <i>merge tree</i> T_f . Fonte: [4] . .	75
5.7	Duas aplicações compatíveis. Fonte: [4]	76
5.8	A distância intercalante entra as duas árvores é positiva (e vale metade do tamanho do menor galho), mas ambas têm diagramas de persistência idênticos. Fonte: [4]	79
5.9	Elementos da demonstração do Teorema 5.37.	81

Sumário

1	Introdução	13
2	Complexos Simpliciais	15
2.1	Complexos Simpliciais Geométricos	15
2.2	Complexos Simpliciais Abstratos	16
2.3	Nervo	17
2.4	Filtração de complexos simpliciais	18
2.4.1	Filtrações de Vietoris-Rips e Čech	19
3	Inferência Homológica	21
3.1	Homologia Simplicial e Números de Betti	21
3.1.1	O espaço das k -cadeias	21
3.1.2	O operador bordo e os grupos de homologia	22
3.2	Um algoritmo para computar números de Betti	28
3.3	Homologia Singular e Invariância Topológica	30
3.4	Funções de Distância e a Distância de Hausdorff	32
3.5	Pontos Críticos das Funções de Distância	34
3.6	Topologia dos conjuntos de subnível	35
4	Homologia Persistente	39
4.1	Um exemplo simples	39
4.2	Homologia Persistente de uma Filtração	41
4.2.1	Base da homologia persistente e pares persistentes	42
4.3	Diagramas de persistência e a distância <i>bottleneck</i>	48
4.4	Módulos de persistência, intercalação e estabilidade	50
4.5	Estabilidade persistente para funções	53
4.6	Estabilidade persistente para conjuntos compactos e complexos construídos sobre uma nuvem de pontos	54

5	<i>A persistent homotopy type distance</i>	58
5.1	Categorias	58
5.2	Definição da <i>persistent homotopy type distance</i>	60
5.3	Exemplos de cálculo da d_{HT}	65
5.4	A estabilidade da homologia persistente com respeito à d_{HT}	67
5.5	Comentários sobre a definição d_{HT}^C	70
5.6	A <i>homotopy type distance</i> para comparar <i>merge trees</i>	74
5.7	d_{HT} pode ser vista como uma distância intercalante, usando categorias . .	82
5.7.1	Definição funtorial de distância intercalante	82
5.7.2	A distância intercalante entre funções com contradomínio em $\mathbb{R}^n$. .	83
5.7.3	A distância intercalante entre funções a menos de homotopia	85
	Referências	89

1 Introdução

Uma ideia central na análise topológica de dados é que conjuntos de dados possuem “forma topológica” e que descrever essa “forma” pode ajudar a explicar os processos que geram esses dados. Isto posto, observamos que um dos objetivos centrais nessa área de pesquisa é o de empregar métodos da topologia algébrica de modo a extrair informações topológicas que lancem luz a essa “forma” do conjunto de dados. Mais geralmente, deseja-se recuperar descritores qualitativos do conjunto de dados que sejam robustos a perturbações e ruídos. Tal robustez é verificada através de teoremas de estabilidade.

O objetivo principal deste trabalho é destrinchar os conhecimentos básicos da homologia persistente, e aprofundar os conceitos aprendidos através do estudo do artigo [3], que traz uma nova roupagem à esta tão nova teoria, que borbulha novidades incessantemente. A teoria básica de homologia persistente busca obter uma filtração de um determinado espaço topológico, e então estudar as mudanças das características topológicas de cada nível da filtração, conforme o seu parâmetro (arbitrário) de tempo cresce. Para isso, diversos tipos de filtrações podem ser tomadas em cada situação, como as filtrações de Vietoris-Rips e Čech. Porém, a filtração que mais utilizaremos neste trabalho é definida da seguinte maneira: dado um espaço topológico e uma função real e q -tame deste espaço, tomaremos a filtração gerada pelos conjuntos de subnível da função dada (isto é, imagens inversas pela função de intervalos que vêm do infinito negativo e terminam em algum número real). Após isso, essas informações são colocadas em um diagrama (chamado de diagrama de persistência), onde ficam armazenados todos dados pertinentes aos nascimentos e mortes de características topológicas do seu espaço. Está também no âmbito da homologia persistente, calcular a estabilidade destes diagramas, isto é, compreender como (e o quanto) pequenas perturbações na sua função escolhida (ou então em qualquer outra filtração) podem alterar no resultado final da análise dos seus dados.

Neste trabalho, começaremos os estudos pela base da análise topológica de dados: a homologia simplicial. Para isso, usaremos como referência principal nos Capítulos 2, 3 e 4 o livro [5], posteriormente usando referências complementares. Durante esses capítulos, passaremos por algumas definições e resultados básicos que servirão para nos contextualizar quanto aos resultados amplamente conhecidos da área. Nos Capítulos 2 e 3, veremos definições básicas, como os complexos simpliciais, filtrações, homologia simplicial, núme-

ros de Betti e funções distância. Já no Capítulo 4, adentraremos na área de homologia persistente. Aqui, exemplificaremos o funcionamento da homologia persistente de uma filtração, e veremos os conceitos de diagramas de persistência, assim como alguns teoremas que garantem a estabilidade destes diagramas. Por fim, no Capítulo 5, aprofundaremos o estudo no artigo [3], ocasionalmente usando outros artigos de maneira complementar. Tal artigo traz uma nova ideia: a de expandir os resultados e técnicas já conhecidas da homologia persistente, que antes eram feitas somente entre funções definidas em espaços topológicos iguais (e posteriormente homeomorfos com a introdução da pseudo-distância natural em [6]), afrouxando as condições para que possam também ser aplicados à pares de funções em espaços que sejam homotopicamente equivalentes, mas não necessariamente iguais.

2 Complexos Simpliciais

Toda a teoria apresentada neste trabalho é fundamentada no conceito de complexos simpliciais. Neste capítulo, vamos passar brevemente pela definição de simplexes, apresentando alguns exemplos simples, seguindo para a definição de nervo e filtração: esta última sendo a chave para o desenvolvimento da homologia persistente.

2.1 Complexos Simpliciais Geométricos

Os pontos de um conjunto finito de pontos $P = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ em $\mathbb{R}^d$ são ditos linearmente independentes se eles não estão contidos em nenhum subespaço afim de dimensão menor que k .

Definição 2.1 (Simplexo). Dado um conjunto $P = \{p_0, p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}^d$ de $k + 1$ pontos linearmente independentes, o simplexo k -dimensional σ , ou simplesmente k -simplexo, gerado por P é o conjunto das combinações convexas

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i p_i \text{ com } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0.$$

Os pontos $p_0, \dots, p_k$ são chamados vértices de σ . Nesse caso, denotamos $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$.

Note que σ é o fecho convexo dos pontos de P , ou seja, a intersecção de todos os conjuntos convexas que contem P . Observe ainda que um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo e um 3-simplexo é um tetraedro.

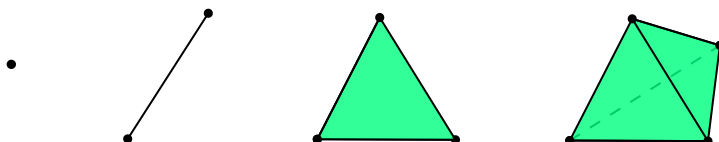


Figura 2.1: Exemplos de 0-simplexo, 1-simplexo, 2-simplexo e 3-simplexo.

As faces de um simplexo σ cujo conjunto de vértices é P são os simplexes gerados pelos subconjuntos de P . Uma face que não seja gerada pelo próprio P é chamada face

própria de σ . Dizemos que o conjunto vazio $\emptyset$ é a face de σ gerada pelo subconjunto vazio de pontos.

Exemplo 2.2. Seja $P = \{p_0, p_1, p_2\}$ um conjunto de três pontos distintos de $\mathbb{R}^n$. As faces do triângulo gerado por P são os simplexos $\emptyset, [p_0], [p_1], [p_2], [p_0, p_1], [p_0, p_2], [p_1, p_2]$ e $[p_0, p_1, p_2]$.

Definição 2.3 (Complexo Simplicial). Um complexo simplicial (finito) K em $\mathbb{R}^d$ é uma coleção (finita) de simplexos tais que:

1. Qualquer face de um simplexo de K é um simplexo de K ;
2. A intersecção de quaisquer dois simplexos de K é ou vazia, ou uma face comum de ambos.

Os simplexos de K são chamados de faces de K . A dimensão de K é a maior das dimensões dos simplexos de K . Um complexo de dimensão k é chamado de k -complexo. Se $A \subset K$ é também um complexo simplicial, dizemos que A é um subcomplexo de K . O j -esqueleto $Sk_j(K)$ de K é um subcomplexo de K que consiste de todos os simplexos de dimensão no máximo j .

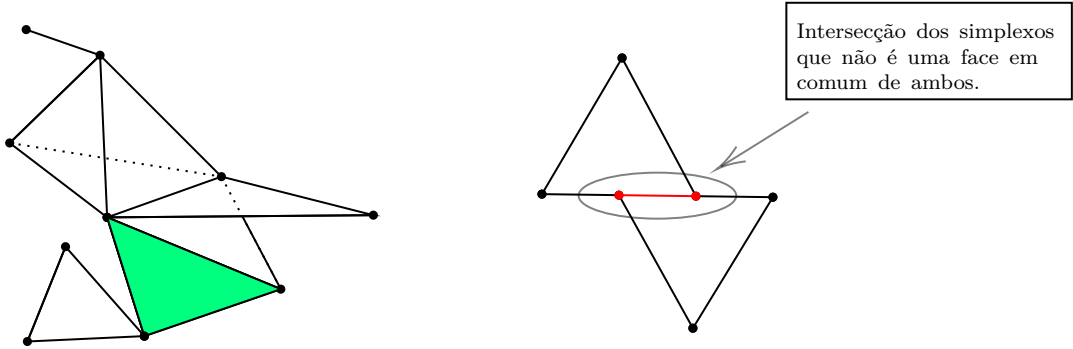


Figura 2.2: À esquerda, um exemplo de um complexo simplicial. À direita, a união de dois simplexos que não é um complexo simplicial.

Dado um complexo simplicial K em $\mathbb{R}^d$, seu espaço subjacente $|K| \subset \mathbb{R}^d$ é a união de todos os simplexos de K , ou seja $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Dizemos que a topologia de K é a topologia induzida em $|K|$ pela topologia padrão de $\mathbb{R}^d$. Quando não houver risco de confusão, não faremos distinção entre K e $|K|$.

2.2 Complexos Simpliciais Abstratos

Note que quando sabemos o conjunto dos vértices, um complexo simplicial é inteiramente e combinatoriamente caracterizado pela sua lista de simplexos.

Definição 2.4 (Complexo Simplicial Abstrato). Seja $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto finito. Um complexo simplicial abstrato $\tilde{K}$ com conjunto de vértices V é um conjunto de subconjuntos finitos de V satisfazendo as duas seguintes condições:

1. Os elementos de V pertencem à $\tilde{K}$;
2. Se $\tau \in \tilde{K}$ e $\sigma \subset \tau$, então $\sigma \in \tilde{K}$.

Os elementos de $\tilde{K}$ são chamados de simplexos ou faces de $\tilde{K}$. Se $\sigma \in \tilde{K}$ tem exatamente $k + 1$ elementos, a dimensão de σ é k , e dizemos que σ é um k -simplexo. A dimensão de $\tilde{K}$ é a maior dimensão de seus simplexos.

Qualquer complexo simplicial K em $\mathbb{R}^d$ determina naturalmente um complexo simplicial abstrato $\tilde{K}$, chamado de *esquema de vértices* de K : K e $\tilde{K}$ têm o mesmo conjunto de vértices e os simplexos de $\tilde{K}$ são os conjuntos de vértices dos simplexos de K . Reciprocamente, se um complexo abstrato $\tilde{K}$ é o esquema de vértices de um complexo K em $\mathbb{R}^d$, então K é chamado de *realização geométrica* de $\tilde{K}$. Note que qualquer complexo simplicial abstrato finito tem uma realização geométrica em um espaço euclidiano da seguinte maneira. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices de $\tilde{K}$, onde n é o número de vértices de $\tilde{K}$, e seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ o simplexo gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ onde, para qualquer $i = 1, \dots, n$, e_i é o vetor cujas coordenadas são todas 0, exceto a i -ésima, que vale 1. Então K é o subcomplexo de σ definido por: $[e_{i_0}, \dots, e_{i_k}]$ é um k -simplexo de K se, e somente se, $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\}$ é um simplexo de $\tilde{K}$.

Definição 2.5 (Isomorfismo de complexos simpliciais abstratos). Dois complexos simpliciais abstratos $\tilde{K}$ e $\tilde{K}'$ com conjuntos de vértices V e V' são isomorfos se existir uma bijeção $\phi : V \rightarrow V'$ de modo que $\{v_0, \dots, v_k\} \in \tilde{K}$ se, e somente se, $\{\phi(v_0), \dots, \phi(v_k)\} \in \tilde{K}'$.

A relação de isomorfismo entre dois complexos simpliciais abstratos induz um homeomorfismo entre suas realizações geométricas.

Proposição 2.6. *Se dois complexos simpliciais K e K' são as realizações geométricas de dois complexos simpliciais abstratos isomorfos $\tilde{K}$ e $\tilde{K}'$, então $|K|$ e $|K'|$ são espaços topológicos homeomorfos. Em particular, os espaços subjacentes de quaisquer duas realizações geométricas de um mesmo complexo simplicial abstrato são homeomorfos.*

2.3 Nervo

Definição 2.7 (Coberturas). Uma cobertura aberta (fechada) de um espaço topológico X é uma coleção $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de conjuntos abertos (fechados) $U_i \subset X$, $i \in I$ onde I é um conjunto de índices, tais que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definição 2.8 (Nervo). Dada uma cobertura $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de um espaço topológico X , nós associamos um complexo simplicial abstrato $C(\mathcal{U})$ cujo conjunto de vértices é $\mathcal{U}$, e tal que

$$\sigma = \{U_{i_0}, \dots, U_{i_k}\} \in C(\mathcal{U}) \iff \bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset.$$

Chamamos esse complexo simplicial de *nervo* da cobertura $\mathcal{U}$.

Quando todos os conjuntos U_i são abertos e todas as intersecções finitas entre eles são contráteis, isto é, homotopicamente equivalente à um ponto, o Teorema do Nervo relaciona a topologia de X e $C(\mathcal{U})$.

Teorema 2.9 (Teorema do Nervo). *Seja $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ uma cobertura finita de um subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ tal que qualquer intersecção de U_i 's é ou vazia ou contrátil. Então X e $C(\mathcal{U})$ são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [7], Corolário 4G.3, p. 459. $\square$

Teorema 2.10 (Teorema do Nervo para Coberturas Convexas). *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$ uma união finita de conjuntos fechados e convexos $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ em $\mathbb{R}^d$. Então X e $C(\mathcal{F})$ são homotopicamente equivalentes.*

2.4 Filtração de complexos simpliciais

Complexos simpliciais aparecem comumente com uma ordenação específica de seus simplexes que interpreta um papel fundamental na inferência geométrica. Um dos papéis desta ordenação é compreender como, ao longo do tempo, as propriedades topológicas do complexo são alteradas, analisando quais destas propriedades desaparecem e quais persistem.

Definição 2.11. Uma filtração de um complexo simplicial finito K é uma sequência crescente de subcomplexos $\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^m = K$ tal que

$$K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}, \text{ onde } \sigma^{i+1} \text{ é um simplexo de } K.$$

Equivalentemente, uma filtração de K pode ser vista como uma ordenação dos simplexes de modo que, para qualquer $i \geq 0$, a coleção dos primeiros i simplexes é um complexo simplicial.

Como uma filtração de K é apenas uma ordenação dos simplexes, em alguns casos, pode ser mais natural indexar os simplexes por uma sequência crescente $(\alpha_i)_{i=0}^m$ de números reais: $\emptyset = K^{\alpha_0} \subset K^{\alpha_1} \subset \dots \subset K^{\alpha_m} = K$. Nesse caso, pode ser conveniente estender a filtração para todo o conjunto de números reais, definindo $K^\alpha = K^{\alpha_i}$ para $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1})$, $K^\alpha = \emptyset$ para $\alpha < \alpha_0$ e $K^\alpha = K$ para $\alpha \geq \alpha_m$.

2.4.1 Filtrações de Vietoris-Rips e Čech

Filtrações são constantemente construídas sobre conjuntos finitos de pontos (chamados de nuvens de pontos) para revelar a estrutura topológica subjacente dos dados. Para isso, a filtração irá aos poucos ligar os pontos, e conforme essas ligações são feitas, novas propriedades topológicas surgem à “forma” dos dados. Veremos exemplos disso mais adiante. Seja $P \subset \mathbb{R}^d$ uma nuvem de pontos.

Definição 2.12. Dado $\alpha > 0$, o complexo de Čech com conjunto de vértices P e parâmetro α é o nervo $\check{\text{Cech}}(P, \alpha)$ das uniões das bolas abertas centradas nos pontos de P com raio α . Os simplexos de $\check{\text{Cech}}(P, \alpha)$ são caracterizados da seguinte maneira:

$$\{x_0, \dots, x_k\} \in \check{\text{Cech}}(P, \alpha) \iff \bigcap_{i=0}^k B(x_i, \alpha) \neq \emptyset.$$

Quando α vai de 0 à $+\infty$, a sequência dos complexos $\check{\text{Cech}}(P, \alpha)$ define a filtração do complexo de Čech.

Dada uma face k -dimensional σ de um simplexo de dimensão $|P| - 1$, o menor α tal que $\sigma \in \check{\text{Cech}}(P, \alpha)$ é o raio da menor bola que contém os vértices de σ .

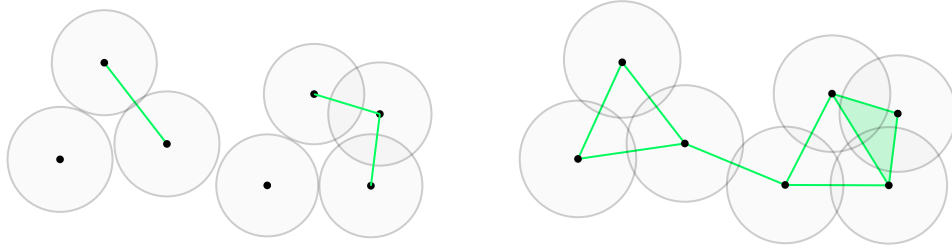


Figura 2.3: Complexo de Čech para valores crescentes de α .

Definição 2.13. Dado $\alpha > 0$, o complexo de Vietoris-Rips $\text{Rips}(P, \alpha)$ com conjunto de vértices P e parâmetro α é definido pela seguinte condição:

$$\{x_0, \dots, x_k\} \in \text{Rips}(P, \alpha) \iff \|x_i - x_j\| \leq \alpha, \forall i, j \in \{0, \dots, k\}.$$

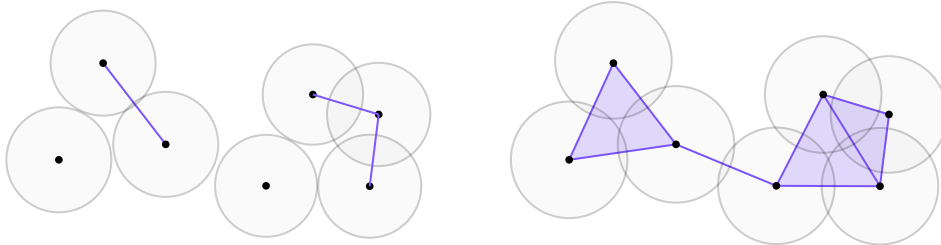


Figura 2.4: Complexo de Vietoris-Rips para valores crescentes de 2α .

Observe que, no complexo de Vietoris-Rips, o triângulo mais à esquerda está preenchido (ou seja, o 2-simplexo formado pelos seus vértices pertence à $\text{Rips}(P, 2\alpha)$), pois as

bolas se encostam duas a duas, logo a distância entre os seus centros é menor que o dobro de seu raio α , satisfazendo a condição de $\text{Rips}(P, 2\alpha)$. Entretanto, no complexo de Čech, o triângulo não está preenchido, pois a intersecção das três bolas é vazia, não satisfazendo a condição de $\check{\text{Cech}}(P, \alpha)$. Logo, esse 2-simplexo não pertence à $\check{\text{Cech}}(P, \alpha)$.

Lema 2.14. *Seja P um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^d$. Para todo $\alpha > 0$,*

$$\text{Rips}(P, \alpha) \subseteq \check{\text{Cech}}(P, \alpha) \subseteq \text{Rips}(P, 2\alpha).$$

Demonstração. Para a primeira inclusão, tome $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\} \in \text{Rips}(P, \alpha)$. Então $x_0 \in \bigcap_{i=0}^k B(x_i, \alpha)$. Logo, $\bigcap_{i=0}^k B(x_i, \alpha) \neq \emptyset$, de onde segue que $\sigma \in \check{\text{Cech}}(P, \alpha)$. Portanto, $\text{Rips}(P, \alpha) \subset \check{\text{Cech}}(P, \alpha)$.

Agora seja $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\} \in \check{\text{Cech}}(P, \alpha)$. Temos então que $\bigcap_{i=0}^k B(x_i, \alpha) \neq \emptyset$. Logo, existe y tal que $\|x_i - y\| \leq \alpha$, para todo $i = 0, \dots, k$. Daí, pela desigualdade triangular, temos $\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - y\| + \|x_j - y\| \leq \alpha + \alpha = 2\alpha$, o que implica em $\sigma \in \text{Rips}(P, 2\alpha)$, que demonstra a segunda inclusão. $\square$

3 Inferência Homológica

3.1 Homologia Simplicial e Números de Betti

Nessa seção, introduziremos as noções básicas de homologia simplicial que serão necessárias para definir e estudar a persistência topológica.

3.1.1 O espaço das k -cadeias

Dado $k \in \mathbb{Z}_+$, o espaço das k -cadeias é um espaço vetorial de todas as somas formais (com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$) de simplexes k -dimensionais de K . Mais precisamente, se $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ é o conjunto de k -simplexes de K , qualquer k -cadeia c pode ser escrita de maneira única

$$c = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \sigma_i, \text{ com } \varepsilon_i \in \mathbb{Z}_2.$$

Se $c' = \sum_{i=1}^p \varepsilon'_i \sigma_i$ é outra k -cadeia, a soma de duas k -cadeias e o produto de uma cadeia por um escalar podem ser definidos da seguinte maneira:

$$c + c' = \sum_{i=1}^p (\varepsilon_i + \varepsilon'_i) \sigma_i \quad \text{e} \quad \lambda \cdot c = \sum_{i=1}^p (\lambda \varepsilon_i) \sigma_i.$$

Definição 3.1. O espaço das k -cadeias é o conjunto $C_k(K)$ das k -cadeias simpliciais de K com as duas operações definidas acima. Isso é um $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial cujo vetor nulo é a cadeia vazia $0 = \sum_{i=1}^p 0 \cdot \sigma_i$.

Note que o conjunto dos k -simplexes de K formam uma base de $C_k(K)$. Por exemplo, para o complexo simplicial da figura a seguir, $C_1(K)$ é o $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial gerado pelas arestas $e_1 = [a, b]$, $e_2 = [b, c]$, $e_3 = [c, a]$, $e_4 = [c, d]$. Ou seja,

$$C_1(K) = \{0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3, \dots\}$$

Observe que, por exemplo, somando $e_1 + e_2$ com $e_2 + e_3 + e_4$ obtemos:

$$(e_1 + e_2) + (e_2 + e_3 + e_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 = e_1 + e_3 + e_4,$$

pois $2 \equiv 0 \pmod{2}$, logo $2e_2 = 0e_2 = 0$.

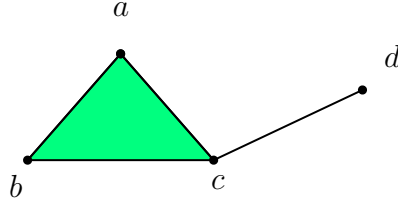


Figura 3.1: Um exemplo simples de complexo simplicial, formado por 4 vértices, 4 arestas e 1 triângulo.

Cadeias com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ têm uma interpretação geométrica óbvia: uma vez que qualquer k -cadeia pode ser escrita de maneira única como $c = \sigma_{i_1} + \cdots + \sigma_{i_m}$ onde cada σ_{i_j} são k -simplexos, c pode ser considerada como a união dos simplexos de σ_{i_j} . A soma de duas k -cadeias é igual à sua diferença simétrica.

3.1.2 O operador bordo e os grupos de homologia

Definição 3.2 (Bordo de um simplexo). O bordo $\partial(\sigma)$ de um k -simplexo é a soma de suas $(k-1)$ -faces, ou seja, uma $(k-1)$ -cadeia.

Se $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ é um k -simplexo, então

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^k [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$$

onde $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ é o $(k-1)$ -simplexo gerado pelos conjuntos de todos os vértices de σ , exceto v_i .

O operador bordo, definido nos simplexos de K , se estende linearmente para $C_k(K)$, conforme a seguinte definição.

Definição 3.3. O operador bordo é a transformação linear definida por

$$\begin{aligned} \partial : C_k(K) &\rightarrow C_{k-1}(K) \\ c &\mapsto \partial c = \sum_{\sigma \in c} \partial(\sigma). \end{aligned}$$

Da maneira que definimos o operador bordo, o correto seria o denotarmos por ∂_k , uma vez que sua definição depende totalmente do índice k . Entretanto, para não sobrecarregar a notação, denotaremos apenas por ∂ . Desse modo, na proposição que virá após o próximo exemplo, teremos dois operadores bordo: $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ e $\partial_{k-1} : C_{k-1}(K) \rightarrow C_{k-2}(K)$, porém denotaremos ambos por ∂ , mesmo que não sejam o mesmo operador.

Uma observação interessante que podemos fazer quanto ao operador bordo é que, por conta de sua linearidade, basta compreender seu comportamento nos geradores de $C_k(K)$,

ou seja, nos simplexos de dimensão k do complexo K , para então entendermos todo o seu comportamento.

Veja na figura a seguir uma representação do operador bordo. Temos uma 2-cadeia formada por um tetraedro oco colado pelo vértice em um triângulo cheio. Veja que no tetraedro, toda 1-face dos 2-simplexos (ou seja, suas arestas) fazem parte de exatamente dois triângulos. Desse modo, ao serem somadas pelo operador bordo, resultam em 0, uma vez que $1 + 1 = 0$ em $\mathbb{Z}_2$. Entretanto, no caso do triângulo que está colado pelo vértice, seus lados não fazem parte de nenhum outro 2-simplexo. Assim, seu bordo será a soma de suas 1-faces, representado pelo triângulo “vazio” na figura. Repare ainda que, caso aplicássemos novamente o operador bordo no resultado, teríamos a soma dos vértices de todas as arestas do triângulo. Como cada vértice aparece em exatamente duas arestas, teríamos o 0 como resultado do bordo. Veremos na proposição a seguir que isso acontece sempre: o operador bordo composto consigo mesmo sempre resulta em 0.

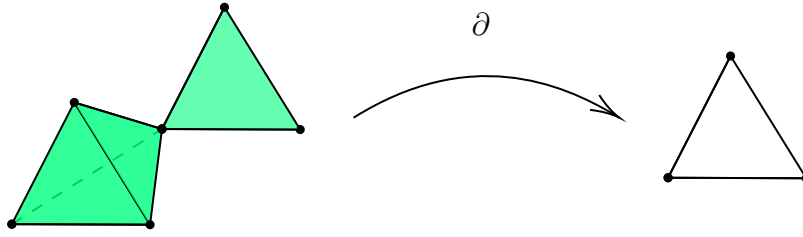


Figura 3.2: O bordo de uma 2-cadeia.

Proposição 3.4. *O bordo de um bordo de uma cadeia é sempre zero:*

$$\partial\partial := \partial \circ \partial = 0.$$

Demonstração. Uma vez que o operador bordo é linear, é suficiente checar essa propriedade para os simplexos. Seja $\sigma = [v_0 \dots v_k]$ um k -simplexo. Temos:

$$\begin{aligned} \partial\partial\sigma &= \partial \left(\sum_{i=0}^k [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_k] \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \partial[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_k] \\ &= \sum_{j < i} [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_k] + \sum_{j > i} [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_k] \\ &= \sum_{j < i}^k 2[v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_k] \\ &= \sum_{j < i}^k 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

O operador bordo define uma sequência de transformações lineares entre espaços de cadeias.

Definição 3.5 (Complexo de cadeia). Um complexo de cadeia associado a um complexo K de dimensão d é a seguinte sequência de transformações lineares:

$$\{0\} \rightarrow C_d(K) \xrightarrow{\partial} C_{d-1}(K) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1}(K) \xrightarrow{\partial} C_k(K) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} \{0\}.$$

Para $k \in \{0, \dots, d\}$, o conjunto $Z_k(K)$ dos k -ciclos de K é o núcleo de $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$:

$$Z_k(K) := \ker(\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}) = \{c \in C_k : \partial c = 0\}.$$

A imagem $B_k(K)$ de $\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k$ é o conjunto das k -cadeias que delimitam uma $(k+1)$ -cadeia:

$$B_k(K) := \text{im}(\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k) = \{c \in C_k : \exists c' \in C_{k+1}, c = \partial c'\}.$$

B_k e Z_k são subespaços de C_k . Ainda, dado $b \in B_k(K)$, temos que existe $c \in C_{k+1}$ tal que $b = \partial c$, e de acordo com a Proposição 3.4, $\partial b = \partial \partial c = 0$. Logo, $b \in Z_k(K)$, de onde segue a inclusão:

$$B_k(K) \subseteq Z_k(K) \subseteq C_k(K).$$

A seguir, temos alguns exemplos de cadeias, ciclos e bordos:

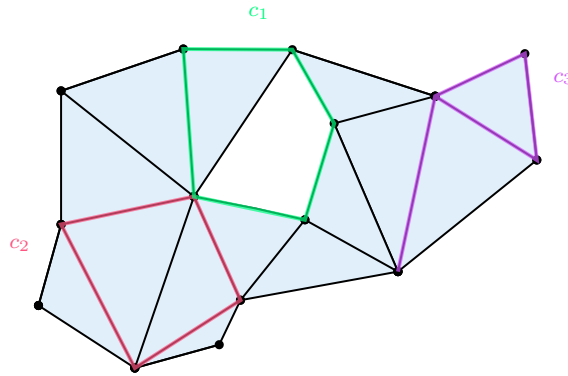


Figura 3.3: c_1 é um ciclo que não é bordo, c_2 é um bordo e c_3 é uma cadeia que não é ciclo.

Definição 3.6 (Grupos de Homologia). O k -ésimo grupo de homologia de K é o espaço quociente:

$$H_k(K) = Z_k(K) / B_k(K).$$

$H_k(K)$ é um espaço vetorial e seus elementos são as classes de homologia de K . A dimensão $\beta_k(K)$ de $H_k(K)$ é o k -ésimo número de Betti de K .

A classe de homologia de um ciclo $c \in Z_k(K)$ é o conjunto $c + B_k(K) = \{c + b : b \in B_k(K)\}$. Dois ciclos c, c' que estão na mesma classe de homologia são chamados de ciclos homólogos.

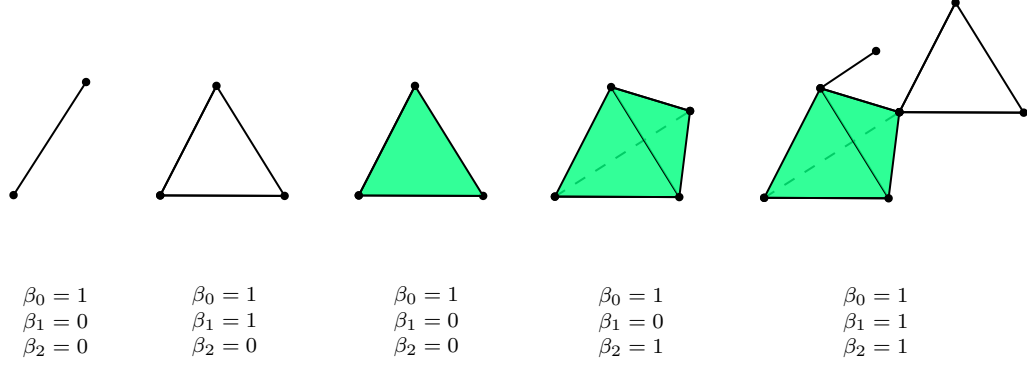


Figura 3.4: Exemplos de números de Betti para alguns complexos simpliciais.

Intuitivamente, β_0 computa o número de componentes conexas do complexo K , enquanto β_k mede o número de “buracos” k -dimensionais. No triângulo vazio da figura acima, temos $\beta_1 = 1$ pois há um buraco cujo bordo tem dimensão 1 (o próprio interior do triângulo). Quando este triângulo é preenchido, temos $\beta_1 = 0$, pois não há mais buracos. Analogamente, no caso do tetraedro oco, há um buraco bidimensional (o próprio interior do tetraedro), isto é, um buraco cujo bordo tem dimensão 2, e portanto $\beta_2 = 1$. Vamos agora ver uma maneira de computar o k -ésimo número de Betti de um complexo simplicial K qualquer.

Sejam m_k e m_{k-1} as quantidades de k e $(k-1)$ simplexes no complexo K , e seja M_k a matriz $m_{k-1} \times m_k$ que representa o bordo ∂_k . Veja que a j -ésima coluna de M_k representa o bordo do j -ésimo k -simplexo, e a i -ésima linha representa o i -ésimo $(k-1)$ -simplexo. Desse modo, temos $m_{i,j} = 1$ se o i -ésimo $(k-1)$ -simplexo faz parte do bordo do j -ésimo k -simplexo, e $m_{i,j} = 0$ caso contrário. Considere a matriz escrita na forma normal de Smith:

$$M_k^* = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & b_{l_k} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

que satisfaz $b_i | b_{i+1}$. Veja que o rank de B_k é igual a l_k e portanto, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, o rank de Z_k é igual a $m_k - l_k$. Veja que a construção acima pode ser feita sobre o espaço das k -cadeias com qualquer corpo de coeficientes $\mathbb{K}$. Entretanto, como especificamos no início deste capítulo, estamos considerando apenas o caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Desse modo, a condição $b_i | b_{i+1}$ resume-se a $b_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, l_k$.

Proposição 3.7. *Nas condições anteriores, o k -ésimo número de Betti de K é dado por:*

$$\beta_k = m_k - l_k - l_{k+1}.$$

Demonstração. Tome $k \in \mathbb{Z}$. Como estamos trabalhando com o corpo $\mathbb{Z}_2$, então Z_k e B_{k+1} são $\mathbb{Z}_2$ -espaços vetoriais. Considere a função sobrejetora

$$\begin{aligned} \phi : Z_k &\rightarrow \frac{Z_k}{B_{k+1}} \\ x &\mapsto x + B_{k+1}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos

$$\dim(Z_k) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi)).$$

Entretanto,

$$x \in \ker(\phi) \iff \phi(x) = 0 \iff x \in B_{k+1}.$$

Desse modo, $\ker(\phi) = B_{k+1}$. Logo,

$$\dim(Z_k) = \dim(B_{k+1}) + \dim(H_k),$$

portanto

$$\beta_k = \dim(H_k) = \dim(Z_k) - \dim(B_{k+1}) = m_k - l_k - l_{k+1}.$$

□

Exemplo 3.8. Vamos considerar o complexo simplicial formado por um tetraedro com vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 . As arestas são $a_0 = [v_0v_1]$, $a_1 = [v_0v_2]$, $a_2 = [v_0v_3]$, $a_3 = [v_1v_2]$, $a_4 = [v_1v_3]$, $a_5 = [v_2v_3]$. As faces são $f_0 = [v_0v_1v_2]$, $f_1 = [v_0v_1v_3]$, $f_2 = [v_0v_2v_3]$ e $f_3 = [v_1v_2v_3]$. Assim, $m_0 = 4$, $m_1 = 6$, $m_2 = 4$ e $m_{-1} = 1$. Apliquemos os operadores bordos para encontrar suas respectivas matrizes, e então encontremos a forma normal de Smith de cada uma delas:

- $\partial_2 : C_2(K) \rightarrow C_1(K)$.

Temos

$$\partial f_0 = a_0 + a_1 + a_3;$$

$$\partial f_1 = a_0 + a_2 + a_4;$$

$$\partial f_2 = a_1 + a_2 + a_5;$$

$$\partial f_3 = a_3 + a_4 + a_5.$$

De onde chegamos na matriz:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo algumas operações entre as linhas e entre as colunas da matriz, obtemos:

$$M_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veja que $l_2 = 3$ (quantidade de termos não nulos na diagonal). Além disso, $l_3 = 0$, pois $\partial_3 = 0$. Desse modo, $\beta_2 = m_2 - l_2 - l_3 = 4 - 3 - 0 = 1$.

- $\partial_1 : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$.

Temos

$$\partial a_0 = v_0 + v_1;$$

$$\partial a_1 = v_0 + v_2;$$

$$\partial a_2 = v_0 + v_3;$$

$$\partial a_3 = v_1 + v_2;$$

$$\partial a_4 = v_1 + v_3;$$

$$\partial a_5 = v_2 + v_3.$$

Assim,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Após algumas operações básicas entre as linhas e colunas da matriz, obtemos:

$$M_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\beta_1 = m_1 - l_1 - l_2 = 6 - 3 - 3 = 0$.

- $\partial_0 : C_0(K) \rightarrow C_{-1}(K) = \{0\}$.

Temos $\partial_0(P_i) = 0$ para todo $P_i \in C_0(K)$, logo $l_0 = 0$. Assim,

$$\beta_0 = m_0 - l_0 - l_1 = 4 - 0 - 3 = 1.$$

Assim, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$. Veja que isso coincide com o descrito na Figura 3.4, e no comentário após ela.

3.2 Um algoritmo para computar números de Betti

Seja K um complexo simplicial finito de dimensão d e

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^m = K$$

uma filtração de K , onde para todo $i = 0, \dots, m-1$,

$$K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}, \text{ onde } \sigma^{i+1} \text{ é um simplexo.}$$

Considerando a evolução dos números de Betti de uma filtração conforme adicionamos os simplexos σ^i , chega-se no seguinte algoritmo.

Algoritmo para computação de números de Betti

Entrada: Uma filtração de um complexo simplicial d -dimensional contendo m simplexos.

$\beta_0 \leftarrow 0; \beta_1 \leftarrow 0; \dots; \beta_d \leftarrow 0$

para $i = 1$ a m **faça**

$k = \dim \sigma^i - 1$

se σ^i estiver contido em um $(k+1)$ -cíclo em K^i **então**

$\beta_{k+1} \leftarrow \beta_{k+1} + 1$

se não

$\beta_k \leftarrow \beta_k - 1$

Saída: Os números de Betti $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d$ de K .

Para provar que nosso algoritmo funciona corretamente, precisamos entender como a

topologia de uma filtração evolui toda vez que adicionamos um simplexo. Vamos assumir que os números de Betti de K^{i-1} são computados e adicionamos o simplexo σ^i de dimensão $k+1$ para conseguirmos K^i . Lembremos que de acordo com a definição de filtração, σ^i não pode ser parte do bordo de nenhum $(k+2)$ -simplexo de K^i . De fato, se σ^i estivesse contido em um bordo de um $(k+2)$ -simplexo de K^i , então σ^i seria uma $(k+1)$ -face de um $(k+2)$ -simplexo de K^i , e como K^i é complexo simplicial, teríamos $\sigma^i \subset K^i$, o que é um absurdo, já que $K^i \neq K^{i-1}$. Como consequência disso, se σ^i estiver contido em um $(k+1)$ -ciclo em K^i , esse ciclo não é o bordo de uma $(k+2)$ -cadeia em K^i . Considere as duas alternativas do algoritmo que estão ilustradas a seguir:

Caso 1: assuma que σ^i está contido em um $(k+1)$ -ciclo c em K^i . Então c não pode ser homólogo à nenhum $(k+1)$ -ciclo em K^{i-1} . Com efeito, se existisse um $(k+1)$ -ciclo c' em K^{i-1} tal que $\overline{c+c'} = 0$, então $c+c'$ seria bordo de alguma $(k+2)$ -cadeia d , isto é, $\partial d = c+c'$. Mas como σ^i não está contido em c' e está contido em c , então está contido em $c+c' = \partial d$, o que é um absurdo. Assim, c cria uma nova classe de homologia que é linearmente independente com as classes dos ciclos de K^{i-1} . Como consequência disso, $\beta_{k+1}(K^i) \geq \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1$.

Agora resta mostrar o outro lado da desigualdade para conseguirmos a igualdade desejada. Para isso, considere c e c' dois $(k+1)$ -ciclos contendo σ^i . Então $c+c'$ é um $(k+1)$ -ciclo em K^{i-1} . Daí, como $c' = (c+c') - c$, c' está contido no espaço gerado por $Z_{k+1}(K^{i-1})$ e c . Ou seja, $\dim Z_{k+1}(K^i) \leq \dim Z_{k+1}(K^{i-1}) + 1$, e como $B_{k+1}(K^{i-1}) \subset B_{k+1}(K^i)$, temos:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1}(K^i) &= \dim \left(\frac{Z_{k+1}(K^i)}{B_{k+1}(K^i)} \right) \leq \dim \left(\frac{Z_{k+1}(K^i)}{B_{k+1}(K^{i-1})} \right) \leq \\ &\leq \dim \left(\frac{Z_{k+1}(K^{i-1})}{B_{k+1}(K^{i-1})} \right) + 1 = \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1. \end{aligned}$$

Portanto, temos $\beta_{k+1}(K^i) = \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1$, como queríamos.

Caso 2: Suponha que σ^i não está contido em nenhum $(k+1)$ -ciclo em K^i . Então o k -ciclo $\partial\sigma^i$ não é um bordo em K^{i-1} . Caso contrário, existiria uma cadeia c em K^{i-1} com $\partial\sigma^i = \partial c$, logo $\partial(\sigma^i + c) = 0$. Então $\sigma^i + c$ seria um $(k+1)$ -ciclo contendo σ^i , o que é um absurdo. Como consequência disso, como o k -ciclo $\partial\sigma^i$, que não é bordo em K^{i-1} , se torna bordo em K^i , temos $\beta_k(K^i) \leq \beta_k(K^{i-1}) - 1$. Analogamente ao Caso 1, podemos mostrar que essa desigualdade é na verdade uma igualdade.

Definição 3.9. Seja K um complexo simplicial d -dimensional, e tome $\emptyset \subset K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^m = K$ uma filtração de K . Um simplexo σ^i é chamado de *positivo* se estiver contido em um $(k+1)$ -ciclo em K^i (que necessariamente não é um bordo em K^i , de acordo com o comentário no início da demonstração do funcionamento do algoritmo anterior), e é dito *negativo* caso contrário.

Exemplo 3.10. No exemplo ilustrado a seguir, temos um subcomplexo K^{i-1} representado

pelos triângulos preenchidos de verde. Veja que o 1-simplexo σ^i não está contido em um 1-ciclo, e logo sua inserção conecta as duas componentes conexas de K^{i-1} . Então $\beta_0(K^i) = \beta_0(K^{i-1}) - 1$. Agora, veja que a inserção do 1-simplexo σ^{i+1} cria um ciclo que não é homólogo a nenhum outro ciclo do complexo. Assim, $\beta_1(K^{i+1}) = \beta_1(K^i) + 1$. Nesse caso, σ^i é negativo, enquanto σ^{i+1} é positivo.

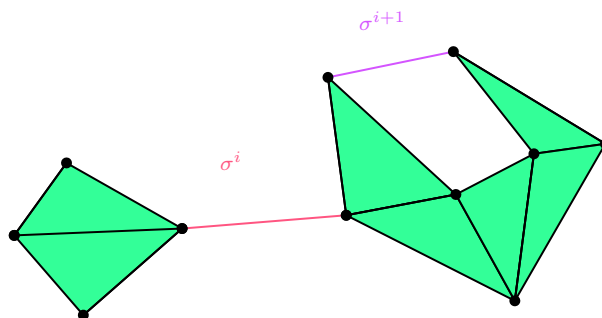


Figura 3.5: O simplexo negativo σ^i destruindo um 0-ciclo, enquanto o simplexo positivo σ^{i+1} cria um 1-ciclo.

De acordo com a definição acima e o algoritmo anterior, podemos enxergar o k -ésimo número de Betti como sendo a diferença entre o número de k -simplexos positivos e o número de $(k+1)$ -simplexos negativos. Isso ocorre pois, cada vez que um k -simplexo positivo entra na filtração, o k -ésimo número de Betti aumenta em 1, e toda vez que um $k+1$ -simplexo negativo entra na filtração, o k -ésimo número de Betti diminui em 1.

Observação 3.11. Os k -simplexos positivos estão “criando” k -ciclos, enquanto os $(k+1)$ -simplexos negativos estão “destruindo” k -ciclos.

Exemplo 3.12. Considere o complexo simplicial da Figura 3.1, e a filtração dada pela adição, uma a uma e em ordem, dos simplexos: $a, b, c, ab, bc, d, ac, cd$ e abc . Isto é,

$$\emptyset \subset \{a\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\} \subset \{a, b, c, ab\} \subset \{a, b, c, ab, bc\} \subset \{a, b, c, ab, bc, d\} \subset \dots$$

Os simplexos positivos são a, b, c, d e ac , onde a, b, c e d são 0-simplexos e ac é um 1-simplexo.

Já os negativos são ab, bc, cd e abc , sendo ab, bc e cd 1-simplexos e abc um 2-simplexo. Assim, usando a definição acima, temos: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 3 - 3 = 0$ e $\beta_2 = 0 - 0 = 0$.

É importante ressaltar que o algoritmo definido anteriormente não só possibilita calcular os números de Betti de K , mas também de todos os subcomplexos da filtração.

3.3 Homologia Singular e Invariância Topológica

Os grupos de homologia e os números de Betti são invariantes topológicos: se K e K' são dois complexos simpliciais com realizações geométricas homeomorfas, então seus

grupos de homologia são isomorfos e seus números de Betti são iguais. Este resultado continua válido quando K e K' são apenas homotopicamente equivalentes. Este é um resultado clássico (mas não trivial) da topologia algébrica, e pode ser encontrado em [8], Corolário 4.24, página 79.

A homologia singular é uma outra noção de homologia, que nos permite considerar espaços gerais que não são necessariamente espaços homeomorfos à complexos simpliciais. A definição de homologia singular é bastante similar à da homologia simplicial.

Definição 3.13. Definimos Δ_k o k -simplexo padrão do $\mathbb{R}^{k+1}$ como sendo o k -simplexo gerado pelos vértices $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, que tem todas as entradas nulas, exceto a i -ésima, a qual vale 1.

Definição 3.14. Dado um espaço topológico X , um k -simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$.

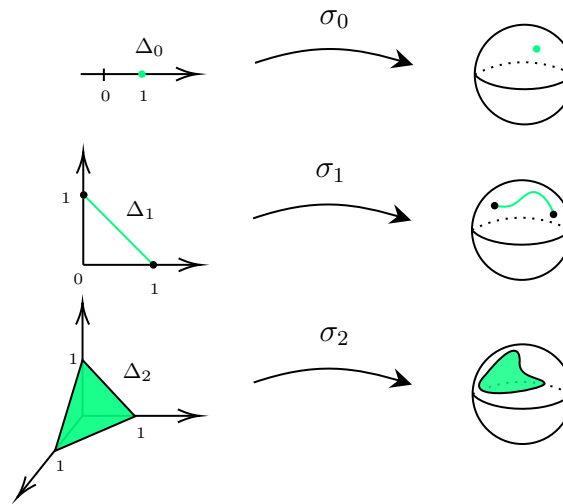


Figura 3.6: Os três primeiros simplexos padrões, junto com a representação de três simplexos singulares.

Assim como no caso da homologia simplicial, temos que o espaço das k -cadeias é o espaço vetorial das combinações lineares formadas pelos k -simplexos singulares. O bordo $\partial\sigma$ de um k -simplexo singular é a soma das restrições de σ à cada uma das $(k-1)$ -faces de Δ_k . Temos também que a Proposição 3.4 continua válida para o caso singular, e definimos o k -ésimo grupo de homologia singular do mesmo modo que definimos em 3.6, no caso simplicial.

Um fato muito importante que relaciona esses dois tipos de homologia é: se X é um espaço topológico homeomorfo ao suporte de um complexo simplicial K , então o k -ésimo grupo de homologia singular de X é isomorfo ao k -ésimo grupo de homologia simplicial de K .

Exemplo 3.15. Seja X uma superfície e K, K' duas triangulações de X . Então $H_k(K) \simeq H_k(K')$. Assim, ambos têm os mesmos números de Betti, que coincidirá com o número de

Betti do espaço X . Como consequência, a partir de agora, para os fins deste trabalho, a homologia singular e a homologia simplicial podem ser (e serão) tratadas sem distinção.

Outra propriedade importante da homologia singular é que as aplicações contínuas entre espaços topológicos induzem, canonicamente, homomorfismos entre seus grupos de homologia.

De fato, se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, e se $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um simplexo singular em X , então $f \circ \sigma : \Delta_k \rightarrow Y$ é um complexo singular em Y . Portanto, f induz uma transformação linear entre os espaços das cadeias em X e das cadeias em Y , que preserva ciclos e bordos. Consequentemente, f induz um homomorfismo $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$. Mais ainda, se f é um homeomorfismo, f_* será um isomorfismo, e valerá a igualdade $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Similarmente, se f for uma equivalência de homotopia, com inversa homotópica $g : Y \rightarrow X$, então f_* é um isomorfismo com $(f_*)^{-1} = g_*$.

Como consequência, dois espaços homotopicamente equivalentes têm os mesmos números de Betti. Note que, quando X não é homotopicamente equivalente a um complexo simplicial, então seus números de Betti não precisam necessariamente ser finitos.

3.4 Funções de Distância e a Distância de Hausdorff

Definição 3.16. Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. A *função distância* d_K até K é a função com domínio em $\mathbb{R}^d$ e contradomínio nos reais não negativos, dada por

$$d_K(x) = \inf_{y \in K} d(x, y).$$

Observação 3.17. Quando $d(x, y) = \|x - y\|$ é a distância euclidiana, d_K é contínua e, ainda, 1-Lipschitziana: para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |d_K(x) - d_K(x')| &= \left| \inf_{y \in K} d(x, y) - \inf_{y' \in K} d(x', y') \right| \\ &\leq \left| \inf_{y \in K} (d(x, y) - d(x', y)) \right| = \inf_{y \in K} |d(x, y) - d(x', y)| \\ &\leq \left| \inf_{y \in K} (d(x, x')) \right| = d(x, x') = \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Ainda, K é completamente caracterizado por d_K , uma vez que $K = d_K^{-1}(0)$.

Definição 3.18. Dado $r > 0$, o r -conjunto de subnível K_r de d_K é o subconjunto de $\mathbb{R}^d$ definido por

$$K^r = d_K^{-1}([0, r]) = \{x \in \mathbb{R}^d; d_K(x) \leq r\}.$$

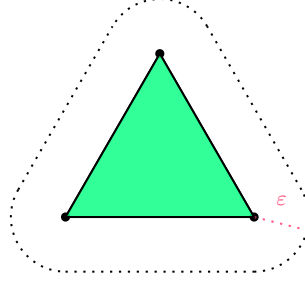


Figura 3.7: Considerando K um triângulo cheio, K^ε é o conjunto de todos os pontos no interior da linha tracejada, incluindo o próprio K .

Definição 3.19. A distância de Hausdorff $d_H(X, Y)$ entre dois subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^d$ é o ínfimo dos $\varepsilon \geq 0$ tais que $X \subset Y^\varepsilon$ e $Y \subset X^\varepsilon$. Equivalentemente:

$$d_H(X, Y) = \max \left(\sup_{y \in Y} \left(\inf_{x \in X} \|x - y\| \right), \sup_{x \in X} \left(\inf_{y \in Y} \|x - y\| \right) \right).$$

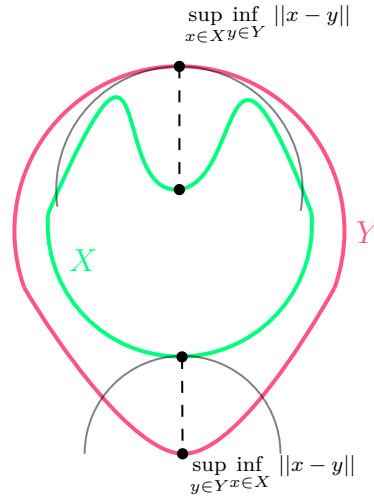


Figura 3.8: Exemplo de distância de Hausdorff entre dois conjuntos.

Proposição 3.20. Sejam $K, K' \subset \mathbb{R}^d$ dois conjuntos compactos. A distância de Hausdorff $d_H(K, K')$ pode ser definida por qualquer uma das equivalências:

- $d_H(K, K')$ é o menor r tal que $K \subset K'^r$ e $K' \subset K^r$;
- $d_H(K, K') = \max \left(\sup_{x \in K} d_{K'}(x), \sup_{x \in K'} d_K(x) \right)$;
- $d_H(K, K') = \|d_K - d_{K'}\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |d_K(x) - d_{K'}(x)|$.

Demonstração. A demonstração da igualdade entre a primeira e a segunda equivalência dessa proposição pode ser encontrada em [9], Proposição 2.1. Já a igualdade entre a segunda e a terceira pode ser encontrada em [10], Proposição 3.4. $\square$

3.5 Pontos Críticos das Funções de Distância

Dado um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$, a função distância não é necessariamente diferenciável. Por exemplo, se K for uma circunferência unitária. Então f não será diferenciável, por exemplo, na origem (imagem a seguir).

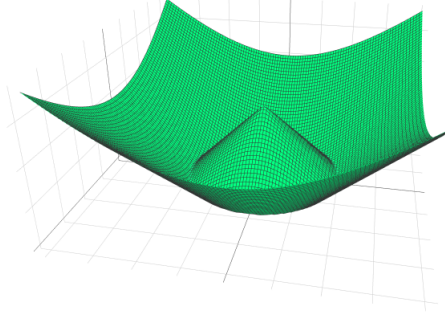


Figura 3.9: Representação de d_K , com K sendo a $\mathbb{S}^1$.

Entretanto, é possível definir um campo de vetores gradientes generalizado $\nabla_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ para d_K que coincide com os vetores gradientes onde d_K for diferenciável.

Dado $x \in \mathbb{R}^d$, o conjunto $\Gamma_K(x) := \{y \in K; d(x, y) = d_K(x)\}$ é um subconjunto compacto e não vazio de K . Considere $B_K(x)$ a menor bola fechada contendo $\Gamma_K(x)$, sendo $c_K(x)$ o seu centro e $F_K(x)$ seu raio. Assim, para qualquer $x \in \mathbb{R}^d - K$, definimos o vetor gradiente generalizado como

$$\nabla d_K(x) = \frac{x - c_K(x)}{d_K(x)},$$

e $\nabla d_K(x) = 0$, caso contrário.

A norma do vetor gradiente é dada por:

$$\|\nabla d_K(x)\|^2 = 1 - \frac{F_K^2(x)}{d_K^2(x)}.$$

Equivalentemente, a norma de $\nabla d_K(x)$ é o cosseno da metade do ângulo do menor setor circular com vértice em x que contém $\Gamma_K(x)$. Intuitivamente, a direção de $\nabla d_K(x)$ é aquela cuja derivada de d_K é maior, ou, em outras palavras, aquela em que a curvatura do gráfico da d_K é maior no ponto $(x, d_K(x))$.

A aplicação $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \nabla d_K(x) \in \mathbb{R}^d$ geralmente não é contínua. Em outras palavras, ∇d_K não é necessariamente um campo vetorial contínuo. Entretanto, é possível mostrar que $x \mapsto \|\nabla d_K(x)\|$ é semi contínua inferiormente, ou seja, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\|\nabla d_K\|^{-1}((-\infty, a])$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^d$. Mais ainda, ∇d_K é “integrável”, no seguinte sentido:

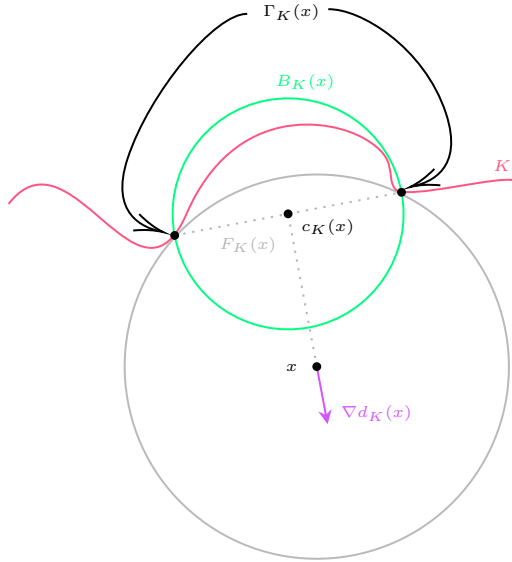


Figura 3.10: A construção do vetor gradiente da função distância.

Proposição 3.21. *Existe uma função contínua $\mathfrak{C} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, a aplicação $t \mapsto \mathfrak{C}(t, x)$, chamada de trajetória de ∇d_K , é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{dX}{dt} = \nabla d_K(X(t)),$$

satisfazendo $X(0) = x$. Além disso, essa trajetória contínua pode ser parametrizada por comprimento de arco $s \mapsto \mathfrak{C}((t(s), x))$, com

$$d_K((t(l), x)) = d_K(x) + \int_0^l \|\nabla d_K(\mathfrak{C}(t(s), x))\| ds.$$

Essa equação implica que d_K não é decrescente sobre as trajetórias de ∇d_K . O mesmo pode ser mostrado para F_k .

O gradiente ∇d_K nos permite definir a noção de ponto crítico para d_K , do mesmo modo que para as funções diferenciáveis.

Definição 3.22 (Ponto crítico). Um ponto $x \in \mathbb{R}^d$ é dito um ponto crítico de d_K se $\nabla d_K(x) = 0$. Um número real $c \geq 0$ é dito um valor crítico de d_K se existe $x \in \mathbb{R}^d$ ponto crítico tal que $d_K(x) = c$. Um valor regular de d_K é um número que não é valor crítico.

3.6 Topologia dos conjuntos de subnível

Usando a noção de ponto crítico definido na seção anterior, algumas propriedades das funções de distância são similares às de funções diferenciáveis. Em particular, os conjuntos de nível de d_K são variedades topológicas de $\mathbb{R}^d$, e suas topologias podem se alterar somente nos pontos críticos. Essas duas propriedades podem ser formalizadas nos

seguintes resultados:

Teorema 3.23. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto e seja r um valor regular de d_K . O conjunto de subnível $d_K^{-1}(r)$ é uma variedade topológica $(d-1)$ -dimensional de $\mathbb{R}^d$.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [11], Proposição 2.13. $\square$

Teorema 3.24 (Lema da Isotopia). *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto, e tome $r_1 < r_2$ dois números reais tais que $[r_1, r_2]$ não contém nenhum ponto crítico de d_K . Então todos os conjuntos de nível $d_K^{-1}(r)$, $r \in [r_1, r_2]$, são homeomorfos (mais que isso, são homotopicamente equivalentes), e o conjunto $A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^d; r_1 \leq d_K(x) \leq r_2\}$ é homeomorfo à $d_K^{-1}(r_1) \times [r_1, r_2]$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado encontra-se em [12], Teorema 2.2, p. 153. $\square$

Exemplo 3.25. Considere K sendo a circunferência unitária, como feita anteriormente. Calculando $d_K^{-1}(a)$, com $0 < a < 1$, obtemos duas circunferências disjuntas (representadas de roxo na figura anterior). Entretanto, ao calcular $d_K^{-1}(1 + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$, obtemos apenas uma única circunferência (a maior delas, e representada de rosa na figura). Logicamente, esses dois conjuntos não são homeomorfos. Assim, caso não conhecêssemos o comportamento de d_K , pelo Lema da Isotopia, poderíamos concluir que 1 é valor crítico, o que de fato ocorre, pois $(0, 0)$ é ponto crítico e $d_K(0, 0) = 1$.

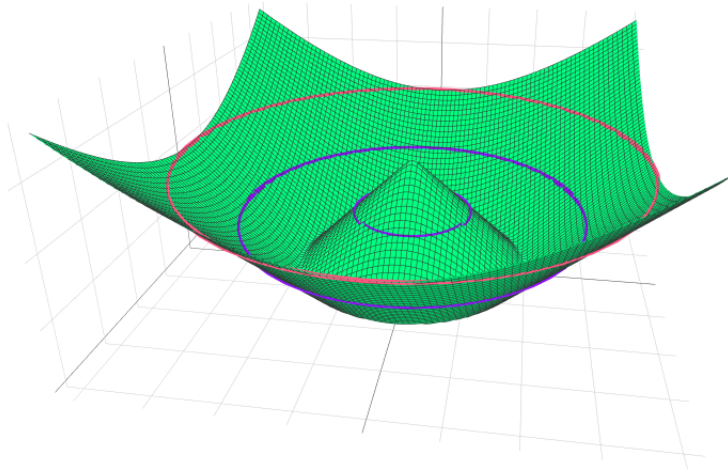


Figura 3.11: Representação dos conjuntos de nível de d_K , com K sendo a $\mathbb{S}^1$.

Como consequência imediata destes dois teoremas, temos que a topologia dos conjuntos de subnível de K podem mudar apenas nos valores críticos, e para qualquer valor regular

r de d_K , o conjunto de subnível K^r é uma variedade topológica d -dimensional com bordo. Em particular, a topologia dos conjuntos de subnível “pequenos” K^r , $r > 0$, não pode mudar quando r for menor que o menor valor crítico positivo de d_K (se existir). Isso nos leva a definir a noção de “weak feature size”.

Definição 3.26 (Weak feature size). Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. A weak feature size $\text{wfs}(K)$ de K é o ínfimo dos valores críticos positivos de d_K . Se d_K não tem valores críticos, definimos $\text{wfs}(K) = +\infty$.

Segue do Lema da Isotopia que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $0 < \alpha \leq \beta < \text{wfs}(K)$, então $K^\alpha \simeq K^\beta$. De fato, basta tomar o lema anterior com $r_1 = \alpha$ e $r_2 = \beta$, observando que não existem valores críticos no intervalo $[\alpha, \beta]$ pois o menor dos valores críticos ainda é maior ou igual que $\text{wfs}(K)$, que é maior que β .

O seguinte teorema nos permite comparar a topologia dos conjuntos de subnível de dois conjuntos compactos com weak feature size positivo.

Teorema 3.27. *Sejam $K, K' \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos compactos e $\varepsilon > 0$ tal que $d_H(K, K') < \varepsilon$, $\text{wfs}(K) > 2\varepsilon$ e $\text{wfs}(K') > 2\varepsilon$. Então, para todo α com $0 < \alpha \leq 2\varepsilon$, K^α e K'^α são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que $\text{wfs}(K) > 2\varepsilon + \delta$ e $\text{wfs}(K') > 2\varepsilon + \delta$. Vamos mostrar que $K^{\delta+2\varepsilon}$ e $K'^{\delta+2\varepsilon}$ são homotopicamente equivalentes. Como $d_H(K, K') < \varepsilon$, e claramente $d_H(K^\delta, K'^\delta) \leq d_H(K, K')$ (pois K^δ é maior que K e K'^δ é maior que K'), então $d_H(K^\delta, K'^\delta) < \varepsilon$. Assim, aplicando a definição de distância de Hausdorff, e usando o fato que $(X^\alpha)^\beta = X^{\alpha+\beta}$, temos $K^\delta \subset K'^{\delta+\varepsilon}$ e $K'^\delta \subset K^{\delta+\varepsilon}$. Portanto, podemos considerar as inclusões $c_0 : K'^\delta \rightarrow K^{\delta+\varepsilon}$ e $d_0 : K^\delta \rightarrow K'^{\delta+\varepsilon}$. De modo análogo, podemos considerar as inclusões $c_1 : K'^{\delta+\varepsilon} \rightarrow K^{\delta+2\varepsilon}$ e $d_1 : K^{\delta+\varepsilon} \rightarrow K'^{\delta+2\varepsilon}$. Ainda, podemos considerar as inclusões naturais $a_0 : K^\delta \rightarrow K^{\delta+\varepsilon}$, $b_0 : K'^\delta \rightarrow K'^{\delta+\varepsilon}$, $a_1 : K^{\delta+\varepsilon} \rightarrow K^{\delta+2\varepsilon}$ e $b_1 : K'^{\delta+\varepsilon} \rightarrow K'^{\delta+2\varepsilon}$. Desse modo, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc}
 K^\delta & \xrightarrow{a_0} & K^{\delta+\varepsilon} & \xrightarrow{a_1} & K^{\delta+2\varepsilon} \\
 & \searrow d_0 & \nearrow d_1 & & \\
 & & K'^{\delta+\varepsilon} & & \\
 & \nearrow c_0 & \searrow c_1 & & \\
 K'^\delta & \xrightarrow{b_0} & K'^{\delta+\varepsilon} & \xrightarrow{b_1} & K'^{\delta+2\varepsilon}
 \end{array}$$

Do Lema da Isotopia 3.24, as inclusões a_0, a_1, b_0 e b_1 são equivalências de homotopia. Sejam agora s_0, s_1, r_0 e r_1 as inversas homotópicas de a_0, a_1, b_0 e b_1 , respectivamente.

Temos então:

$$\begin{aligned}
c_1 \circ (r_1 \circ d_1 \circ s_1) &\simeq c_1 \circ r_1 \circ (b_1 \circ d_0 \circ s_0) \circ s_1 \\
&\simeq c_1 \circ (r_1 \circ b_1) \circ d_0 \circ s_0 \circ s_1 \\
&\simeq (c_1 \circ d_0) \circ (s_0 \circ s_1) \\
&\simeq (a_1 \circ a_0) \circ (s_0 \circ s_1) \\
&\simeq a_1 \circ (a_0 \circ s_0) \circ s_1 \\
&\simeq a_1 \circ s_1 \\
&\simeq \text{id}_{K^{\delta+2\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
(r_1 \circ d_1 \circ s_1) \circ c_1 &\simeq (r_1 \circ d_1 \circ s_1) \circ (a_1 \circ c_0 \circ r_0) \\
&\simeq (r_1 \circ d_1) \circ (s_1 \circ a_1) \circ (c_0 \circ r_0) \\
&\simeq (r_1 \circ d_1) \circ (c_0 \circ r_0) \\
&\simeq r_1 \circ (d_1 \circ c_0) \circ r_0 \\
&\simeq r_1 \circ (a_1 \circ a_0) \circ r_0 \\
&\simeq (r_1 \circ a_1) \circ (a_0 \circ r_0) \\
&\simeq \text{id}_{K'^{\delta+2\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Desse modo, c_1 e $(r_1 \circ d_1 \circ s_1)$ são equivalências de homotopia e, portanto, $K^{\delta+2\varepsilon}$ e $K'^{\delta+2\varepsilon}$ são homotopicamente equivalentes. $\square$

O teorema anterior nos permite mostrar que conjuntos compactos com weak feature size positiva fornecem uma classe de compactos com propriedades de estabilidade topológica interessantes. Além disso, pode-se mostrar que essa classe é grande o suficiente para incluir a maior parte de formas encontradas em aplicação práticas. Em particular, variedades diferenciáveis, poliedros, conjuntos poliédricos, conjuntos compactos subanalíticos (ou seja, obtidos por equações e inequações analíticas) têm todos weak feature size positiva.

Entretanto, o teorema anterior precisa de uma condição que é difícil de ser satisfeita na prática: a relação envolvendo $\text{wfs}(K)$ e $\text{wfs}(K')$.

Por exemplo, seja K uma forma contínua aproximada por uma nuvem finita de pontos K' . Então $\text{wfs}(K')$ será igual à metade da distância entre os dois pontos mais próximos de K' , que normalmente é menor que $2d_H(K, K')$. Como consequência disso, mesmo que $\text{wfs}(K)$ seja grande, independentemente da qualidade da aproximação de K por K' , as hipóteses do teorema anterior podem não ser satisfeitas.

4 Homologia Persistente

O algoritmo no início da Seção 3.2 permite que computemos os números de Betti de um complexo simplicial filtrado, e também provê os números de Betti de todos os sub-complexos da filtração. Intuitivamente, o objetivo da homologia persistente é acompanhar toda essa informação e observar os pares de tempo de criação e de destruição das classes de homologia que aparecem durante o processo.

4.1 Um exemplo simples

Antes de formalmente introduzirmos a homologia persistente, vamos considerar um exemplo bem simples. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está representado a seguir.

Estamos interessados em estudar a evolução da topologia dos conjuntos de nível $f^{-1}([-\infty, t])$ conforme t cresce. A topologia do conjunto de nível muda quando t passa pelos valores críticos a, b, c, d e e . Passar pelo valor crítico a faz aparecer uma componente conexa, e para todo t com $a \leq t < b$, $f^{-1}((-\infty, t])$ é um conjunto conexo (pois será um intervalo). Quando t passa pelo valor crítico b , uma segunda componente conexa surge, e para todo t com $b \leq t < c$, $f^{-1}((-\infty, t])$ tem duas componentes conexas. Quando t passa pelo valor crítico c , as duas componentes conexas se fundem. Observe que a segunda componente conexa surgiu quando t passou por b , e depois desapareceu quando t passou por c . Assim, os pontos b e c correspondem ao “nascimento” e à “morte” dessa componente. Na estrutura de homologia persistente, esse “emparelhamento” é, ou representado pelo intervalo representado no gráfico à esquerda, ou é representado pelo par ordenado (b, c) no gráfico à direita. O comprimento $c - b$ do intervalo (b, c) representa a “vida útil” da componente criada em b . Intuitivamente, quanto maior for este intervalo, mais relevante esta componente é. Agora, conforme crescemos t , uma nova componente conexa surge assim que atinge $t = d$, que acaba se fundindo quando $t = e$, e portanto dá origem ao intervalo de persistência (d, e) . Note que a não está pareado à nenhum valor, uma vez que desde que a primeira componente foi criada, ela nunca se fundiu à outra. Assim, fazemos o pareamento $(a, +\infty)$, simbolizando que esta componente persistiu. No final do processo, podemos representar os pares encontrados de duas maneiras: ou como

conjuntos de intervalos, chamados de *barcodes*, ou então por diagramas no plano, chamados de diagramas de persistência (representados na figura a seguir). Por razões técnicas, e que serão explicada mais adiante, adicionaremos ao diagrama de persistência a diagonal $y = x$

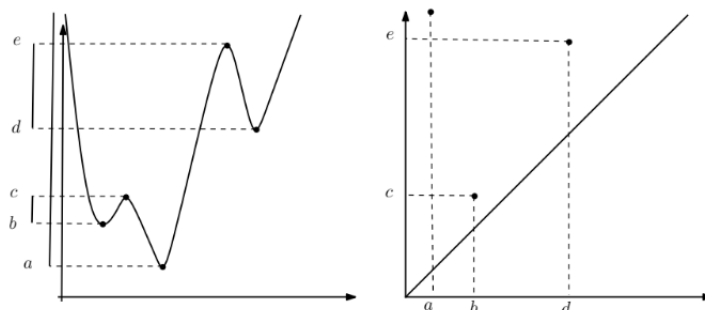


Figura 4.1: Uma função real e seu diagrama de persistência.

Agora, suponha que façamos uma aproximação g da função f definida anteriormente, selecionando diversos pontos $(x, f(x))$, e então ligando-os de maneira linear por partes. Ao fazermos o cálculo do diagrama de persistência da g , observamos que temos muito mais pares de persistência do que tínhamos na função f . Entretanto, muitos destes pontos estão próximos à diagonal $y = x$, ou seja, nascem e morrem rapidamente. Contudo, aqueles pares que estão próximos dos pares da função f acabam sendo os pontos que persistem por mais tempo, e têm seus intervalos maiores. Em outras palavras, as características topológicas que já existiam na função f resistem por mais tempo do que aqueles que foram criados pelo ruído da aproximação pela função g . Assim, podemos supor que pequenas perturbações na função não devem alterar consideravelmente as características topológicas dos conjuntos de subnível. Veremos adiante que isto de fato é verdade.

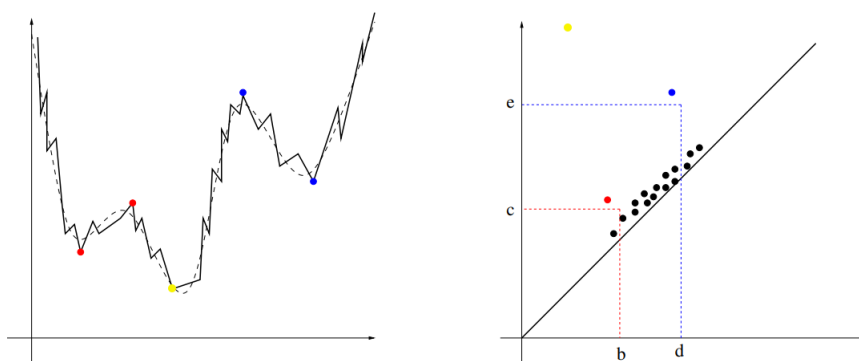


Figura 4.2: Diagrama de persistência da aproximação de uma função real. Adaptado de: [1].

Quando consideramos funções definidas em espaços de dimensões maiores, passar por pontos críticos pode não só alterar a conexidade dos conjuntos de subnível (isto é, a criação ou destruição de 0-ciclos), mas também outras características topológicas, como

a criação e destruição de k -ciclos de ordens maiores (ou seja, a alteração na quantidade de “buracos” k -dimensionais do espaço). Posteriormente, vamos mostrar como é possível definir os pares e diagramas de persistência para qualquer dimensão.

4.2 Homologia Persistente de uma Filtração

Primeiro, vamos definir a noção de persistência para a filtração de um complexo simplicial. O objetivo é estudar a evolução da homologia dos subcomplexos da filtração.

Seja K um complexo simplicial d -dimensional, e seja

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \cdots \subset K^m = K$$

uma filtração de K de modo que, para qualquer $i = 0, \dots, m-1$, $K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}$, onde σ^{i+1} é um simplexo.

Para qualquer n tal que $0 \leq n \leq m$, denotaremos por C_k^n o conjunto das k -cadeias de K^n . Observe que a restrição do operador bordo para C_k^n , tem sua imagem contida em C_{k-1}^{n-1} . Denotaremos por Z_k^n e B_k^n os conjuntos dos k -ciclos e k -bordos de K^n , respectivamente. O k -ésimo grupo de homologia de K^n é, então

$$H_k^n = Z_k^n / B_k^n.$$

Com essa notação, temos as seguintes inclusões:

$$Z_k^0 \subset Z_k^1 \subset \cdots \subset Z_k^n \subset \cdots \subset Z_k^m = Z_k(K)$$

$$B_k^0 \subset B_k^1 \subset \cdots \subset B_k^n \subset \cdots \subset B_k^m = B_k(K)$$

Definição 4.1 (Números persistentes de Betti). Para $p \in \{0, \dots, m\}$ e $l \in \{0, \dots, m-p\}$, o k -ésimo número persistente de Betti de K^l , denotado por $\beta_k^{l,p}$, é a dimensão do espaço vetorial $H_k^{l,p} = Z_k^l / (B_k^{l+p} \cap Z_k^l)$.

O k -ésimo número persistente de Betti de K^l representa o número de classes de homologia independentes de k -ciclos em K^l que não são bordos em K^{l+p} . Intuitivamente um k -ciclo em K^l que gera um elemento não nulo em $H_k^{l,p}$, é um ciclo que apareceu na filtração antes do passo $l+1$, e ainda não é um bordo no passo $l+p$. Vimos anteriormente que uma classe de homologia é criada quando um simplexo positivo é adicionado na filtração, e que uma classe de homologia é destruída quando um simplexo negativo é adicionado.

Lema 4.2. *Seja $\sigma = \sigma^i$ um k -simplexo positivo na filtração de K . Então existe um único k -ciclo c que não é bordo em K^i , que contém σ e não contém nenhum outro k -simplexo positivo.*

Demonstração. Suponha que para qualquer k -simplexo positivo adicionado antes de σ à filtração, exista um k -ciclo d que não é bordo de ninguém em K^i , que contém σ e mais nenhum outro k -simplexo positivo. Vamos mostrar que o mesmo vale para $k + 1$. Sejam σ_j^i , $j = 1, \dots, p$ os k -simplexos positivos diferentes de σ contidos em d , e sejam c_j os ciclos que não são bordos, que contêm σ_j^i e que não contêm mais nenhum outro simplexo positivo. Então

$$c = d + c_1 + \dots + c_p$$

é um k -ciclo no qual σ é o único simplexo positivo. Mas como σ^i foi o último simplexo adicionado em K^i , não existe nenhum $(k + 1)$ -simplexo contendo σ em seu bordo. Logo, c não pode ser bordo. $\square$

Definição 4.3. Conforme aumentamos os índices l , sucessivos complexos são vinculados à filtração por meio de inclusões, o que induz uma função entre as cadeias $f^l : K^l \rightarrow K^{l+1}$ nos complexos de cadeia e homomorfismos $\eta_k^l : H_k^i \rightarrow H_k^{i+1}$ no k -ésimo módulo de homologia. A sequência de complexos de cadeia $(K_\bullet^l)$ conectada pelas funções de cadeia e homomorfismos (f^l) é chamado de complexo persistente de K .

O seguinte diagrama representa parcialmente o complexo persistente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \partial_{k+1}^i & & \downarrow \partial_{k+1}^{i+1} & & \downarrow \partial_{k+1}^{i+2} \\
 \dots & \xrightarrow{f^{i-1}} & K_k^l & \xrightarrow{f^i} & K_k^{l+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & K_k^{l+2} \xrightarrow{f^{i+2}} \dots \\
 & & \downarrow \partial_k^i & & \downarrow \partial_k^{i+1} & & \downarrow \partial_k^{i+2} \\
 \dots & \xrightarrow{f^{i-1}} & K_{k-1}^l & \xrightarrow{f^i} & K_{k-1}^{l+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & K_{k-1}^{l+2} \xrightarrow{f^{i+2}} \dots \\
 & & \downarrow \partial_{k-1}^i & & \downarrow \partial_{k-1}^{i+1} & & \downarrow \partial_{k-1}^{i+2} \\
 \dots & \xrightarrow{f^{i-1}} & K_{k-2}^l & \xrightarrow{f^i} & K_{k-2}^{l+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & K_{k-2}^{l+2} \xrightarrow{f^{i+2}} \dots \\
 & & \downarrow \partial_{k-2}^i & & \downarrow \partial_{k-2}^{i+1} & & \downarrow \partial_{k-2}^{i+2} \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Veja que cada coluna do diagrama é um complexo de cadeia conectados pelas funções f^i .

4.2.1 Base da homologia persistente e pares persistentes

Os k -ciclos associados aos k -simplexos positivos do lema anterior, nos permite preservar uma base de grupos de homologia k -dimensionais dos subcomplexos da filtração. No começo, a base de $H_k(K^0)$ está vazia. As bases de $H_k(K^i)$ são construídas indutivamente da seguinte maneira:

- Suponha que a base de H_k^{i-1} foi construída e que o i -ésimo simplexo σ^i é positivo e tem dimensão k . Adicionaremos à base de H_k^{i-1} a classe de homologia do ciclo c^i associado à σ^i para obter a base de H_k^i . De fato, como c^i é a soma de σ^i e simplexos negativos, então não é homóloga à nenhuma combinação linear dos ciclos que definem a base de H_k^{i-1} . Como $\dim H_k^i = \dim H_k^{i-1} + 1$, nós obtemos uma base de H_k^i .
- Assumiremos agora que a base de H_k^{j-1} foi construída, e que o j -ésimo simplexo σ^j é negativo e tem dimensão $k + 1$. Sejam $c^{i_1}, \dots, c^{i_p}$ os ciclos associados aos simplexos positivos $\sigma^{i_1}, \dots, \sigma^{i_p}$ cujas classes de homologia formam uma base de H_k^{j-1} . O bordo $d = \partial\sigma^j$ é um k -ciclo em K^{j-1} que não é bordo em K^{j-1} , mas é bordo em K^j . Assim, podemos escrevê-lo de maneira única como

$$d = \partial\sigma^j = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k c^{i_k} + b,$$

onde $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ e b é um bordo. Assim, denotamos $l(j) = \max\{i_k; \varepsilon_k = 1\}$ e removemos a classe de homologia de $c^{l(j)}$ da base de H_k^{j-1} .

Como $\dim H_k^{j-1} = \dim H_k^j + 1$, e como $c^{l(j)}$ é a combinação linear de um bordo com os ciclos c^{i_k} , então $\{c^{i_k}; i_k \neq l(j)\}$ é uma base para H_k^j .

Definição 4.4. Os pares de simplexos $(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)$ são chamados de pares persistentes da filtração de K .

Intuitivamente, a classe de homologia criada por $\sigma^{l(j)}$ em $K^{l(j)}$ é destruída por σ^j em K^j . A persistência desse par é $j - l(j) - 1$.

Com isso, deduzimos nosso primeiro algoritmo para computar os pares persistentes de uma filtração de um complexo simplicial K de dimensão d com m simplexos.

Algoritmo para computação dos pares persistentes

Entrada: Uma filtração de um complexo simplicial d -dimensional contendo m simplexos.

$L_0 = L_1 = \dots = L_{d-1} = \emptyset$

para $j = 0$ à m **faça**

$k = \dim \sigma^j - 1$

se σ^j é negativo, **então**

$l(j) =$ o maior índice do k -simplexo positivo associado a $\partial\sigma^j$;

$L_k \leftarrow L_k \cup \{(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)\};$

Saída: Os pares persistentes $L_0, \dots, L_{d-1}$ (em cada dimensão);

Veja que, assim como no algoritmo para computar os números de Betti, o maior problema deste algoritmo é determinar $l(j)$. Para resolver isto, consideraremos uma versão matricial para este algoritmo.

Seja K um complexo simplicial de dimensão d , e

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^m = K$$

uma filtração de K tal que, para qualquer $i = 0, \dots, m-1$, temos

$$K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}, \text{ onde } \sigma^{i+1} \text{ é um simplexo.}$$

Vamos dizer que uma face σ' de σ tem codimensão n quando $\dim \sigma - \dim \sigma' = n$.

Consideremos a matriz $M = (m_{i,j})$ $m \times m$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ que representa o operador bordo ∂ , definida por:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma^i \text{ é uma face de } \sigma^j \text{ com codimensão } 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, se σ^j é um $(k+1)$ -simplexo, a j -ésima coluna de M representa o conjunto de todas as faces k -dimensionais do bordo de σ^j .

Exemplo 4.5. Considere o complexo com a filtração dados no Exemplo 3.12. Então a matriz do operador ∂ será:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz do exemplo é uma matriz triangular superior. Entretanto, isso não é um comportamento particular deste complexo. Como os simplexos de K estão ordenados de acordo com a filtração, é impossível termos $m_{i,j} = 1$ para $j < i$, pois isso acarretaria em σ^i ser uma face de σ^j , o que é um absurdo: como K^j é simplexo e contém σ^j , então deveria conter todas as suas faces, em particular a σ^i , que só será adicionada em K^i . Para cada coluna C_j de M , consideremos $l(j)$ o menor índice das linhas de M que contém um termo não nulo na coluna C_j :

$$l(j) = i \iff m_{i,j} = 1 \text{ e } m_{i',j} = 0, \text{ para todo } i' < i.$$

Observe que $l(j)$ não é definido quando a coluna C_j não contém nenhum termo não nulo.

Temos então o seguinte algoritmo para computar pares persistentes:

Algoritmo para computação dos pares persistentes - Versão Matricial
Entrada: Uma filtração de um complexo simplicial d -dimensional contendo m simplexes, e a matriz M do operador bordo
para $j = 0$ à m faça
enquanto existe $j' < j$ tal que $l(j') = l(j)$ faça
$C_j \leftarrow C_j + C_{j'} \bmod(2)$
Saída: Os pares persistentes $(l(j), j)$;

Entretanto, precisamos mostrar que, de fato, o algoritmo anterior calcula os pares persistentes da filtração. Colocaremos este resultado em forma de proposição, e sua demonstração seguirá de uma sequência de afirmações elementares.

Proposição 4.6. *O algoritmo anterior computa os pares persistentes da filtração $\emptyset \subset K^0 \subset \dots \subset K^m = K$.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em quatro afirmações.

Afirmação 1: Em cada passo do algoritmo, a coluna C_j representa uma cadeia da forma

$$\partial \left(\sigma^j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma^i \right), \text{ com } \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Mostremos essa afirmação por indução. Para $j = 0$, não há nada a demonstrar. Suponha agora que no passo k , a coluna C_k representa a cadeia da forma

$$\partial \left(\sigma^k + \sum_{i < k} \varepsilon_i \sigma^i \right), \text{ com } \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Ao utilizarmos nosso algoritmo para $j = k + 1$, teremos que, para todo $j' < k + 1$, se $l(j') = l(k + 1)$, então $C_{k+1} = C_{k+1} + C_{j'}$. Veja que temos apenas dois casos:

- Se $C_{k+1} = C_k$, então a cadeia do $(k + 1)$ -ésimo passo será

$$\partial \left(\sigma^{k+1} + \sigma^k + \sum_{i < k} \varepsilon_i \sigma^i \right) = \partial \left(\sigma^{k+1} + \sum_{i < k+1} \varepsilon_i \sigma^i \right).$$

- Se $C_{k+1} \neq C_k$, então a cadeia do $(k + 1)$ -ésimo passo será

$$\partial \left(\sigma^{k+1} + 0\sigma^k + \sum_{i < k} (\varepsilon_i + 1)\sigma^i \right) = \partial \left(\sigma^{k+1} + \sum_{i < k+1} \delta_i \sigma^i \right).$$

Afirmação 2: No final do algoritmo, se j é tal que $l(j)$ está definido, então $\sigma^{l(j)}$ é um simplexo positivo.

De fato, a coluna C_j representa uma cadeia da forma

$$\sigma^{l(j)} + \sum_{p < l(j)} \eta_p \sigma^j \text{ com } \eta_p \in \{0, 1\}.$$

Mas de acordo com a Afirmação 1, C_j também representa um bordo em K^j . Assim

$$\partial \left(\sigma^{l(j)} + \sum_{p < l(j)} \eta_p \sigma^j \right) = \partial \left(\partial \left(\sigma^j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma^i \right) \right) = 0.$$

Assim, a cadeia anterior é um ciclo em $K^{l(j)}$ que contém $\sigma^{l(j)}$. Portanto, o simplexo $\sigma^{l(j)}$ é positivo.

Afirmação 3: Se no final do algoritmo, a coluna C_j só contiver termos nulos, então σ^j deve ser um simplexo positivo.

De fato, representando a coluna C_j como na afirmação anterior, usando que todos os termos de C_j são 0, e aplicando a Afirmação 1, temos:

$$\partial \left(\sigma^j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma^i \right) = 0.$$

Então, σ^j está contido em um ciclo de K^j .

Afirmação 4: Se, ao final do algoritmo, a coluna C_j contiver termos não nulos, então $(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)$ é um par persistente.

Combinando as afirmações 1 e 2, e isolando $\partial \sigma^j$, temos:

$$\partial \sigma^j = \sigma^{l(j)} + \sum_{p < l(j)} \eta_p \sigma^j + \partial \left(\sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma^i \right).$$

Mais ainda, $\sigma^{l(j)}$ é positivo, e portanto foi adicionado à base da homologia persistente no tempo $l(j)$ e não foi pareado antes do tempo j . Entretanto, como ao final do algoritmo uma linha da matriz não pode conter mais de um elemento não nulo que é o menor termo não nulo de sua coluna, então deduzimos que $(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)$ é um par persistente. $\square$

Veja que, após a aplicação do algoritmo anterior, um ponto (a_i, ∞) estará nos diagramas de persistência se, e somente se, a i -ésima coluna for nula e a i -ésima linha não tiver um $l(j)$. Em outras palavras, temos que σ_i é um simplexo positivo, pois sua i -ésima coluna é nula, e se ele fosse negativo, deveria conter algum $l(j)$ na i -ésima linha.

Exemplo 4.7. Vamos aplicar o algoritmo anterior no exemplo 4.5. Vamos descartar os passos $j = 1$, $j = 2$ e $j = 3$, pois as três colunas são nulas. Para $j = 4$, veja que as três colunas anteriores são nulas, logo não há nada a fazer. Para $j = 5$, temos $l(5) = 2$ e $l(4) = 1$, também não havendo nada para fazer. Para $j = 6$, a coluna é nula, e portanto

a matriz também não sofre alteração. Agora, para $j = 7$, temos $l(7) = 1 = l(4)$. Assim, trocamos a coluna C_7 por $C_7 + C_4$. Obtemos a matriz

$$M_{7,4} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Veja que, com isso, teremos que a coluna 7 coincidirá com a coluna 5, logo $l(7) = l(5)$, e assim, trocaremos C_7 por $C_7 + C_5$, que será uma coluna nula. Desse modo, a matriz resultante será

$$M_{7,5} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para $j = 8$ e $j = 9$ não será necessário fazer nada, uma vez que nenhuma das outras colunas terá o mesmo pivô que elas. Por fim, temos que a matriz reduzida será $R = M_{7,5}$.

Vamos agora interpretar nossa matriz bordo. Lembremos que os simplexes da filtração são, em ordem, os simplexes $a, b, c, ab, bc, d, ac, cd$, e abc . Veja que os 0-simplexes estão armazenados nas colunas 1, 2, 3 e 6. Já os 1-simplexes estão armazenados nas colunas 7 e 8. Por fim, o 2-simplexo está armazenado na coluna 9. Desse modo, calcular β_i se resume a calcular a diferença entre a quantidade de colunas de i -simplexes positivos (para isso, basta ver as Afirmações 2 e 3 do teorema anterior) e os $(i + 1)$ -simplexes negativos.

- β_0 : observe que os 0-simplexes a, b, c e d são positivos, pois têm as colunas nulas, enquanto os 1-simplexes ab, bc e cd são negativos. Assim, $\beta_0 = 4 - 3 = 1$;
- β_1 : observe que o único 1-simplexo positivo é ac , enquanto o 2-simplexo abc é negativo. Assim, $\beta_1 = 1 - 1 = 0$;

- β_2 : como o 2-simplexo é negativo, segue que $\beta_2 = 0 - 0 = 0$.

Veja que os números coincidiram com os que obtemos no Exemplo 3.12.

4.3 Diagramas de persistência e a distância *bottleneck*

Para um k fixado, os pares persistentes de simplexos de dimensões k e $k + 1$, respectivamente, são convencionalmente representados por um diagrama no plano: cada par $\sigma^{l(j)}$ em $K^{l(j)}$ é representado pelo ponto com coordenadas $(l(j), j)$. Para cada simplexo σ^i positivo que não está emparelhado com nenhum simplexo negativo da filtração, nós associamos o par $(i, +\infty)$. Por razões técnicas, nós adicionaremos à esse conjunto finito de pontos a diagonal $y = x$ do plano, para conseguirmos o diagrama persistente de dimensão k da filtração.

Definição 4.8. Um multiconjunto $\mathcal{A} = (S, m)$ é um par que consiste de um conjunto S e uma aplicação $m : S \rightarrow \{1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$, chamada de função multiplicidade. Cada $s \in S$ é dito um elemento de $\mathcal{A}$ com multiplicidade $m(s)$.

Se a filtração estiver indexada por uma sequência crescente de números reais, como por exemplo na filtração associada ao conjunto de subnível de uma função:

$$\emptyset = K^{\alpha_0} \subset K^{\alpha_1} \subset \dots \subset K^{\alpha_m} = K \text{ com } \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m,$$

um par persistente de simplexos (σ_i, σ_j) é representado no diagrama como o ponto com coordenadas (α_i, α_j) . Entretanto, como a sequência não é necessariamente decrescente, podemos ter diversos pares associadas a um mesmo ponto no plano. Assim, um diagrama de persistência é simplesmente um multiconjunto $\mathcal{A} = (S, m)$ onde $S \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), e a aplicação m conta a quantidade de pares associados ao ponto dado. Por convenção, os pontos da diagonal têm multiplicidade infinita, e se um simplexo σ_i não estiver emparelhado, nós adicionamos o ponto de coordenadas $(\alpha_i, +\infty)$ ao diagrama de persistência.

Seja $\mu_p^{i,j}$ o número de classes linearmente independentes em $H_p(K_i)$ que nascem em K_i e morrem quando entram em K_j . Então temos

$$\mu_p^{i,j} = (\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}),$$

para todo $i < j$ e qualquer p .

O primeiro termo $\beta_p^{i,j-1}$ é o número de classes de homologia independentes em $H_p(K_{j-1})$ que nasceram em $H_p(K_i)$ ou antes. Assim, a diferença $(\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j})$ representa o número

de classes de homologia independentes em $H_p(K_{j-1})$ que nasceram em $H_p(K_i)$ ou antes, e morrem antes de $H_p(K_j)$.

Analogamente, a diferença $(\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j})$ computa o número de classes de homologia independentes em $H_p(K_{j-1})$ que nasceram entre $H_p(K_{i-1})$ e $H_p(K_i)$ e morrem entre $H_p(K_{j-1})$ e $H_p(K_j)$.

Definição 4.9 (Distância *bottleneck*). Sejam D_1 e D_2 diagramas de persistência. A distância *bottleneck* entre D_1 e D_2 é definida como

$$d_B(D_1, D_2) = \inf_{\gamma} \sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_{\infty},$$

onde γ varia no conjunto de todas as bijeções entre os multiconjuntos D_1 e D_2 , e $\|p - q\|_{\infty} = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$. Por convenção, se $y_p = y_q = +\infty$, então $\|p - q\|_{\infty} = |x_p - x_q|$.

Proposição 4.10. A distância *bottleneck* é uma métrica.

Demonstração. Sejam D_1 , D_2 e D_3 diagramas de persistência. Então:

1. $d_B(D_1, D_2) = \inf_{\gamma} \sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_{\infty} \geq 0$, pois $\|p - \gamma(p)\| \geq 0$;
2. $d_B(D_1, D_2) = d_B(D_2, D_1)$: Seja γ uma bijeção de D_1 em D_2 . Então para qualquer $p \in D_1$, existe um único $q \in D_2$ de modo que $\gamma^{-1}(q) = p$. Assim, temos $\|p - \gamma(p)\| = \|\gamma^{-1}(q) - q\| = \|q - \gamma^{-1}(q)\|$. Logo, $\{\|p - \gamma(p)\|; p \in D_1\} = \{\|q - \gamma^{-1}(q)\|; q \in D_2\}$, o que implica em $\sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\| = \sup_{q \in D_2} \|q - \gamma^{-1}(q)\|$. Agora veja que γ^{-1} pode ser qualquer bijeção de D_2 em D_1 , pois qualquer bijeção terá sua inversa, digamos λ , de D_1 em D_2 . Desse modo, $d_B(D_1, D_2) = \inf_{\gamma} \sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_{\infty} = \inf_{\gamma^{-1}} \sup_{q \in D_2} \|q - \gamma^{-1}(q)\|_{\infty} = \inf_{\lambda} \sup_{q \in D_2} \|q - \lambda(q)\|_{\infty} = d_B(D_2, D_1)$;
3. $d_B(D_1, D_2) = 0 \iff D_1 = D_2$:
 $(\Leftarrow)$ Se $D_1 = D_2$, considere $\text{id} : D_1 \rightarrow D_2$. Claramente, id é uma bijeção. Mais ainda, para qualquer $p \in D_1$, temos $\|p - \text{id}(p)\| = \|p - p\| = 0$. Logo, $d_B(D_1, D_2) = 0$.
 $(\Rightarrow)$ Se $d_B(D_1, D_2) = 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe γ de modo que

$$\sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Portanto, dado $p \in D_1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $q = \gamma(p) \in D_2$ tal que $\|p - q\|_{\infty} < \varepsilon$. Desse modo, $p \in \overline{D_2}$. Mas veja que um diagrama de persistência é, por definição, um conjunto fechado, por ser a união da diagonal (fechada) com uma coleção de uma quantidade finita de pontos (também fechado). Logo, $p \in D_2$, ou seja, $D_1 \subset D_2$.

Agora, como $d_B(D_1, D_2) = d_B(D_2, D_1)$, também garantimos que $D_2 \subset D_1$. Desse modo, segue a igualdade esperada;

4. $d_B(D_1, D_3) \leq d_B(D_1, D_2) + d_B(D_2, D_3)$: Sejam A , B e Γ os conjuntos das bijeções de D_1 em D_2 , D_2 em D_3 e D_1 em D_3 , respectivamente. Tome $a \in A$, $b \in B$, e considere a bijeção $b \circ a \in \Gamma$. Para todo $p \in D_1$, temos:

$$\begin{aligned} \|p - b(a(p))\|_\infty &= \|p - a(p) + a(p) - b(a(p))\|_\infty \leq \\ &\leq \|p - a(p)\|_\infty + \|a(p) - b(a(p))\|_\infty \leq \\ &\leq \sup_{x \in D_1} \|x - a(x)\|_\infty + \sup_{y \in D_2} \|y - b(y)\|_\infty. \end{aligned}$$

Tomando o supremo com $z \in D_1$, na desigualdade acima e considerando que o ínfimo de um conjunto é menor ou igual a todos os elementos dele, temos:

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{z \in D_1} \|z - \gamma(z)\|_\infty \leq \sup_{z \in D_1} \|z - b(a(z))\|_\infty \leq \sup_{x \in D_1} \|x - a(x)\|_\infty + \sup_{y \in D_2} \|y - b(y)\|_\infty.$$

Agora, passando o ínfimo com relação às bijeções $\alpha \in A$, e depois com relação às bijeções $\beta \in B$, temos

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{z \in D_1} \|z - \gamma(z)\|_\infty \leq \inf_{\alpha \in A} \sup_{x \in D_1} \|x - \alpha(x)\|_\infty + \inf_{\beta \in B} \sup_{y \in D_2} \|y - \beta(y)\|_\infty.$$

Portanto,

$$d_B(D_1, D_3) \leq d_B(D_1, D_2) + d_B(D_2, D_3).$$

De 1, 2, 3 e 4, segue que d_B é uma métrica. $\square$

Essa definição é o que nos motiva a incluir a diagonal aos diagramas de persistência, pois isso permite que calculemos a distância entre dois diagramas que não têm a mesma quantidade de pontos fora da diagonal, associando os pontos excedentes com pontos da diagonal.

4.4 Módulos de persistência, intercalação e estabilidade

Definição 4.11 (Módulos de persistência). Um módulo de persistência $\mathbb{V}$ sobre um subconjunto I dos números reais é uma família indexada de espaços vetoriais $(V_a; a \in I)$ e uma família duplamente indexada de transformações lineares $(v_a^b : V_a \rightarrow V_b; a \leq b)$ que satisfaz a lei da composição $v_b^c \circ v_a^b = v_a^c$.

Definição 4.12. Dizemos que um módulo de persistência $\mathbb{V}$ é q -tame se o posto de v_a^b for finito sempre que $a < b$.

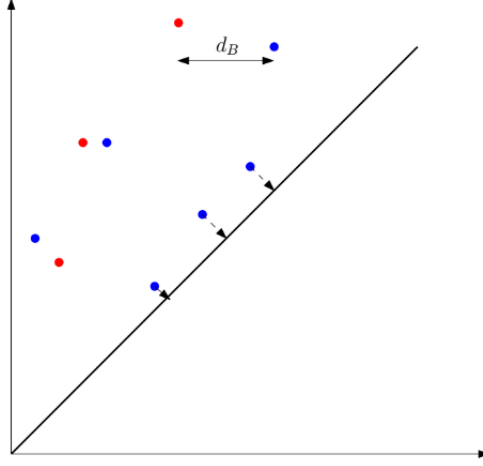


Figura 4.3: Dois diagramas de persistência e sua distância *bottleneck*.

A sequência dos grupos de homologia de uma filtração K , com os homomorfismos induzidos pela inclusão, é um módulo de persistência indexado sobre o conjunto $\{0, 1, \dots, m\}$. Pode-se mostrar que o diagrama de persistência de uma filtração $\{\emptyset = K^{\alpha_0} \subset K^{\alpha_1} \subset \dots \subset K^{\alpha_m} = K\}$ é completamente determinado pelo posto dos homomorfismos $H_k(K^{\alpha_i}) \rightarrow H_k(K^{\alpha_j})$ para quaisquer $i < j$. Essa propriedade se estende para módulos q -tame.

Teorema 4.13. *Se um módulo de persistência $\mathbb{V}$ é q -tame, então ele tem um diagrama de persistência $\text{dgm}(\mathbb{V}) \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ bem definido. Quando $\mathbb{V}$ é um módulo de persistência definido por uma filtração de um complexo simplicial finito, o diagrama coincide com o definido anteriormente.*

Demonstração. A definição exata de diagramas de persistência para módulos de persistência, assim como a demonstração deste teorema, podem ser encontrados em [1]. Para os fins deste trabalho, basta a definição dada na seção anterior. $\square$

Vamos assumir que todos os módulos de persistência considerados são indexados em $\mathbb{R}$. Isso não é uma suposição restritiva no ambiente em que estamos trabalhando: se $\mathbb{V}$ for um módulo de persistência indexado por um conjunto finito $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$, ele pode ser estendido para um módulo constante por partes indexado nos reais, definindo $V_\alpha = V_{\alpha_j}$ for $\alpha \in [\alpha_j, \alpha_{j+1})$ com a convenção de que $\alpha_0 = -\infty$ e $\alpha_{m+1} = +\infty$. As transformações lineares são então definidas de maneira óbvia, fazendo $v_a^b = \text{id}$ sempre que $\alpha_j \leq a \leq b < \alpha_{j+1}$.

Definição 4.14. Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ dois módulos de persistência sobre $\mathbb{R}$, e seja ε um número real qualquer. Um homomorfismo de grau ε é uma coleção Φ de transformações lineares

$$\{\phi_a : U_a \rightarrow V_{a+\varepsilon}; a \in \mathbb{R}\}$$

tal que $v_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon} \circ \phi_a = \phi_b \circ u_a^b$ para todo $a \leq b$. Escrevemos:

$$\begin{aligned}\text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{U}, \mathbb{V}) &= \{f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}; f \text{ é homomorfismo de grau } \varepsilon\} \\ \text{End}^\varepsilon(\mathbb{V}) &= \{f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}; f \text{ é homomorfismo de grau } \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Veja que a composição é definida de maneira óbvia. Para $\varepsilon \geq 0$, o endomorfismo mais importante de grau ε é a aplicação shift $1_{\mathbb{V}}^\varepsilon \in \text{End}^\varepsilon(\mathbb{V})$, que é a coleção das aplicações $(v_a^{a+\varepsilon})$.

Se $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ é um homomorfismo de qualquer grau, então por definição $\Phi 1_{\mathbb{U}}^\varepsilon = 1_{\mathbb{V}}^\varepsilon \Phi$ para todo $\varepsilon \geq 0$.

Definição 4.15 (Intercalação de módulos de persistência). Dois módulos de persistência $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ são ditos ε -intercalados se existirem aplicações

$$\Phi \in \text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \text{ e } \Psi \in \text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{V}, \mathbb{U})$$

tais que $\Psi\Phi = 1_{\mathbb{U}}^{2\varepsilon}$ e $\Phi\Psi = 1_{\mathbb{V}}^{2\varepsilon}$.

Em outras palavras, existem aplicações

$$\phi_t : U_t \rightarrow V_{t+\delta} \text{ e } \psi_t : V_t \rightarrow U_{t+\delta}$$

definidos para todo t , de modo que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_t^s} & U_t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ V_{s+\varepsilon} & \xrightarrow{v_{t+\varepsilon}^{s+\varepsilon}} & V_{t+\varepsilon} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U_{s-\varepsilon} & \xrightarrow{u_{s+\varepsilon}^{s-\varepsilon}} & U_{s+\varepsilon} \\ \searrow \phi_{s-\varepsilon} & & \nearrow \psi_s \\ & V_s & \end{array} \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{v_t^s} & V_t \\ \downarrow \psi_s & & \downarrow \psi_t \\ U_{s+\varepsilon} & \xrightarrow{u_{t+\varepsilon}^{s+\varepsilon}} & U_{t+\varepsilon} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V_{s-\varepsilon} & \xrightarrow{v_{s+\varepsilon}^{s-\varepsilon}} & V_{s+\varepsilon} \\ \searrow \psi_{s-\varepsilon} & & \nearrow \psi_s \\ & U_s & \end{array}$$

comutam para todo s tal que $s \leq t$.

A noção de intercalação nos permite enunciar o Teorema Fundamental da Estabilidade para Diagramas de Persistência.

Teorema 4.16 (da estabilidade dos diagramas de persistência). *Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ dois módulos de persistência q -tame ε -intercalados para algum $\varepsilon \geq 0$. Denotando por $\text{dgm}(\mathbb{U})$ e $\text{dgm}(\mathbb{V})$ seus diagramas de persistência, temos*

$$d_B(\text{dgm}(\mathbb{U}), \text{dgm}(\mathbb{V})) \leq \varepsilon.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1], Teorema 5.24, e está dividida nas Seções 5.6 e 5.7. $\square$

4.5 Estabilidade persistente para funções

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com imagem nos reais definida em um espaço topológico X . Vamos considerar a filtração dos conjuntos de subnível $\{F_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha])\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ e considere os grupos de homologia singular $H_k(F_\alpha)$ destes conjuntos de subnível. Note que a inclusão canônica $F_\alpha \subset F_\beta$ sempre que $\alpha \leq \beta$ induz um homomorfismo $H_k(F_\alpha) \rightarrow H_k(F_\beta)$. Então, a filtração de conjuntos de subnível de f induzem um módulo de persistência $\mathbb{F}_k$.

Definição 4.17. Uma função real f definida em um espaço topológico X é dita q -tame se seus módulos de persistência associados $\mathbb{F}_k$ são q -tame para todo inteiro k não negativo.

O seguinte resultado fornece condições para f e g serem q -tame.

Proposição 4.18. *Se X for homeomorfo a um complexo simplicial finito e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, então f é q -tame. Em particular, $\text{dgm}(\mathbb{F}_k)$ é bem definido.*

Proposição 4.19. *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas em um espaço topológico X tal que $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Então os módulos de persistência $\mathbb{F}_k$ e $\mathbb{G}_k$ induzidos pelas filtrações dos conjuntos de subnível das filtrações de f e g são ε -intercalados.*

Demonstração. Como $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, temos, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, que $F_\alpha \subset G_{\alpha+\varepsilon} \subset F_{\alpha+2\varepsilon} \subset G_{\alpha+3\varepsilon} \subset \dots$. Essas inclusões induzem homomorfismos $H_k(F_\alpha) \rightarrow H_k(G_{\alpha+\varepsilon})$ e $H_k(G_\alpha) \rightarrow H_k(F_{\alpha+\varepsilon})$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto destes homomorfismos definem uma ε -intercalação entre $\mathbb{F}_k$ e $\mathbb{G}_k$. $\square$

Quando não houver ambiguidade, denotaremos por $\text{dgm}(f)$ o diagrama de persistência de $\mathbb{F}_k$ para qualquer k . Aplicando a proposição anterior e o Teorema da estabilidade dos diagramas de persistência 4.16, imediatamente obtemos o seguinte resultado para a estabilidade de funções.

Teorema 4.20. *Seja X um espaço topológico homeomorfo a um complexo simplicial finito e sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então*

$$d_B(\text{dgm}(\mathbb{F}_k), \text{dgm}(\mathbb{G}_k)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Demonstração. Como X é homeomorfo a um complexo simplicial, temos que as funções f e g são limitadas, portanto $\|f - g\|_\infty = \varepsilon \in \mathbb{R}$. Ainda, sabemos que f e g são q -tame, logo, pela proposição anterior, os módulos de persistência $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ são ε -intercalados. Por fim, aplicando o Teorema 4.16, obtemos:

$$d_B(\text{dgm}(\mathbb{F}_k), \text{dgm}(\mathbb{G}_k)) \leq \varepsilon = \|f - g\|_\infty.$$

□

Intuitivamente, esse teorema nos diz que a perturbação entre os diagramas de persistência de duas funções é limitada pela distância entre as funções. Em outras palavras, funções próximas terão diagramas próximos

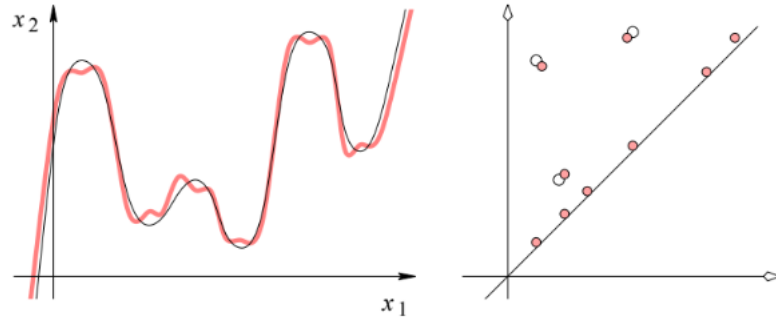


Figura 4.4: Diagrama que ilustra a estabilidade dos diagramas. Fonte: [2].

4.6 Estabilidade persistente para conjuntos compactos e complexos construídos sobre uma nuvem de pontos

Proposição 4.21. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. Então, a função distância $d_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é q -tame.*

Demonstração. Sejam α e β tais que $0 \leq \alpha < \beta$, e considere um $k \in \mathbb{Z}$ não negativo. Vamos mostrar que o homomorfismo induzido pela inclusão dos conjuntos de subnível $i_* : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ tem posto finito. Seja $\varepsilon = (\beta - \alpha)/2 > 0$. Como X é compacto, então existe um subconjunto $P \subset X$ finito tal que $d_H(X, P) < \varepsilon$. Isso acontece pois, como X é compacto e $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$, então essa cobertura admite subcobertura finita, isto é, existe uma subconjunto finito de pontos P tal que $X \subset \bigcup_{x \in P} B(x, \varepsilon)$, e como para qualquer x , temos $B(x, \varepsilon) \subset \overline{B}(x, \varepsilon)$, então $X \subset \overline{B}(x, \varepsilon) = P^\varepsilon$. Agora, como P é subconjunto de X , temos $P \subset X \subset X^\varepsilon$.

Como consequência, temos a seguinte inclusão

$$X^\alpha \subset P^{\alpha+\varepsilon} \subset X^\beta$$

que induz a seguinte sequência de homomorfismos

$$H_k(X^\alpha) \rightarrow H_k(P^{\alpha+\varepsilon}) \rightarrow H_k(X^\beta).$$

Assim, segue do Lema do Nervo que $P^{\alpha+\varepsilon}$ é a união finita de bolas homotopicamente equivalentes a $\check{C}ech(P, \alpha + \varepsilon)$, que é um complexo simplicial finito. Como consequência disso, $\dim H_k(P^{\alpha+\varepsilon}) < +\infty$, e o posto da homomorfismo $H_k(X^\alpha) \rightarrow H_k(X^\beta)$ (ou seja, a dimensão da imagem de i_*) satisfaz:

$$\dim(\text{im}(i_*)) \leq \dim H_k(X^\alpha) \leq \dim H_k(P^{\alpha+\varepsilon}) < +\infty.$$

Daí, pela Proposição 4.18, d_X é q -tame, e ainda mais, $\text{dgm}(\mathbb{F}_k)$ é bem definido. □

A proposição acima nos permite dizer que as funções distância para conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ têm um diagrama de persistência bem definido. Recordando que se $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ são compactos, então $d_H(X, Y) = \|d_X - d_Y\|_\infty$, obtemos imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 4.22. *Sejam X, Y conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$. Então*

$$d_B(\text{dgm}(d_X), \text{dgm}(d_Y)) \leq d_H(X, Y).$$

Em particular, se $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ são nuvens finitas de pontos, então para qualquer k inteiro não negativo,

$$d_B(\text{dgm}(H_k(\check{C}ech(P))), \text{dgm}(H_k(\check{C}ech(Q)))) \leq d_H(P, Q),$$

onde $\check{C}ech(P)$ denota a filtração de Čech.

Demonstração. Sabemos que as funções d_X e d_Y são q -tame, pela proposição acima. Daí, aplicando o Teorema 4.20, temos

$$d_B(\text{dgm}(d_X), \text{dgm}(d_Y)) \leq \|d_X - d_Y\|_\infty = d_H(X, Y).$$

Isso prova a primeira parte do corolário.

A demonstração da segunda parte pode ser encontrada em [5]. □

Assim, os módulos de persistência induzidos pela filtração de d_P e pela filtração de Čech são 0-intercalados. Esse mesmo tipo de resultado pode ser também estabelecido para

o complexo de Vietoris-Rips e, graças à essas propriedades de estabilidade, os diagramas de persistência obtidos podem ser considerados como assinaturas topológicas multiescala robustas associadas a nuvens de pontos. Assim, é possível comparar estruturas topológicas de nuvens de pontos associadas a diferentes formas.

Veja que, se uma nuvem finita de pontos P é transformada por uma isometria de $\mathbb{R}^d$ em uma outra nuvem de pontos P' , então suas filtrações de Čech e de Vietoris-Rips permanecem as mesmas. Entretanto, $d_H(P', Q)$ pode se tornar muito maior que $d_H(P, Q)$, enquanto a distância *bottleneck* permanecerá a mesma, o que torna a segunda desigualdade do corolário anterior muito menos interessante. Para superar esse problema, podemos considerar a distância de Gromov-Hausdorff, definida da seguinte maneira.

Definição 4.23. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ dois conjuntos compactos, e tome $\varepsilon \geq 0$. Uma ε -correspondência entre X e Y é um subconjunto $C \subseteq X \times Y$, tal que:

1. Para qualquer $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in C$;
2. Para qualquer $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $(x, y) \in C$;
3. Para quaisquer $(x, y), (x', y') \in C$, temos $|d(x, x') - d(y, y')| \leq \varepsilon$, onde d é a distância euclidiana.

A distância de Gromov-Hausdorff entre X e Y é definida da seguinte maneira:

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{existe uma } \varepsilon\text{-correspondência entre } X \text{ e } Y\}.$$

Veja que a definição acima pode ser estendida para qualquer par de espaços métricos compactos. Mas, voltando às nossas nuvens de pontos P, P' e Q , onde P' é a imagem de P por uma isometria de $\mathbb{R}^d$, nós temos $d_{GH}(P, Q) = d_{GH}(P', Q)$.

Mais ainda, o corolário anterior tem a seguinte generalização:

Teorema 4.24. Sejam $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ duas nuvens finitas de pontos seja $\text{Filt}(\cdot)$ a filtração do complexo de Čech ou de Vietoris-Rips. Então, para qualquer inteiro não negativo k , temos

$$d_B(\text{dgm}(H_k(\text{Filt}(P))), \text{dgm}(H_k(\text{Filt}(Q)))) \leq d_{GH}(P, Q).$$

Este resultado não se restringe a $\mathbb{R}^d$, podendo ser estendido para espaços métricos não euclidianos. Geralmente, o cálculo da distância de Gromov-Hausdorff não é feito na prática, mas podemos comparar a estrutura topológica de conjuntos de dados finitos a partir dos diagramas de persistência das filtrações de Vietoris-Rips. O Teorema 4.24 nos garante que se a distância *bottleneck* entre os diagramas for grande então os conjuntos correspondentes estarão distantes com relação à distância de Gromov-Hausdorff. Entretanto, a recíproca não é verdadeira.

Por exemplo, considere os conjuntos $P = \{0\}$ e $Q_n = \{0, 1, \dots, n\}$. Então, teríamos $d_{GH}(P, Q_n) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow +\infty$ uma vez que dada uma ε -intercalação entre P e Q_n , deveríamos ter $|d(0, 0) - d(0, n)| \leq \varepsilon$. Ou seja, $\varepsilon \geq n$, e logo, $d_{GH}(X, Y) \geq n$. Fazendo $n \rightarrow +\infty$ obtemos o que queríamos. Ou seja, P e Q_n são tão distantes quanto se queira. Por outro lado, claramente a distância *bottleneck* entre os diagramas das filtrações de P e Q_n terão distância nula. Assim, a outra parte da inequação não é válida.

5 *A persistent homotopy type distance*

Recentemente, uma nova definição de distância, chamada de *persistent homotopy type distance*, foi introduzida, em [3], usada para comparar duas funções definidas em espaços topológicos homotopicamente equivalentes, mas não necessariamente iguais. É importante ressaltar que uma distância com objetivo parecido começou a ser introduzida em [6], chamada de pseudo-distância natural. Esta, entretanto, é usada para comparar funções definidas em espaços homeomorfos. Sendo assim, a pseudo-distância expande o conjunto de objetos onde a distância *bottleneck* pode ser aplicada, enquanto a *persistent homotopy type distance* expande ainda mais este conjunto. Nesse capítulo, estudaremos principalmente o artigo [3], trazendo a definição desse novo tipo de distância, os teoremas que garantem sua estabilidade e a comparamos com as outras funções supracitadas, e também veremos algumas aplicações e comentário a respeito de sua definição extremamente particular. Em conjunto com o artigo principal, usaremos outros que nos auxiliem com as definições e aprofundamentos que não constam no artigo original: como a definição de categorias e a categorificação da homologia persistente, retirados de [13], a definição formal detalhada das *merge trees* e alguns teoremas, retirados de [4].

5.1 Categorias

Definição 5.1. Uma categoria $\mathbf{C}$ consiste em uma classe de objetos $\mathbf{C}_0$ (também denotada por $ob(\mathbf{C})$) e, para quaisquer pares de objetos $X, Y \in \mathbf{C}_0$, um conjunto de morfismos $\mathbf{C}(X, Y)$ (também denotado por $hom(\mathbf{C})$). Usualmente, escrevemos $f : X \rightarrow Y$ para denotar um elemento $f \in \mathbf{C}(X, Y)$. Sejam X, Y e Z em $\mathbf{C}_0$. Então existe uma aplicação (chamada de composição) que associa a cada $(g, f) \in \mathbf{C}(Y, Z) \times \mathbf{C}(X, Y)$ um elemento $gf \in \mathbf{C}(X, Z)$. Essa composição deve satisfazer a propriedade $(hg)f = h(gf)$, chamada de associatividade. Além disso, dado qualquer $X \in \mathbf{C}_0$, existe um único morfismo chamado de morfismo identidade, $id_X : X \rightarrow X$, que satisfaz $id_X f = f$ e $g id_X = g$ para quaisquer $f : W \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow Y$.

Normalmente, abusamos a notação e escrevemos $X \in \mathbf{C}$ quando nos referimos à um elemento $X \in \mathbf{C}_0$. Ainda, caso os elementos de $\mathbf{C}_0$ não sejam conjuntos, dizemos que $\mathbf{C}$ é uma categoria pequena.

Exemplo 5.2. Seja **Top** a categoria cujos objetos são espaços topológicos, e morfismos são funções contínuas. Aqui, a composição é a aplicação que associa a cada par de funções contínuas (g, f) à função $gf := g \circ f$, e os morfismos identidades são as funções identidades.

Uma categoria interessante e que “deriva” da anterior, é a categoria **Par**, cujos objetos são os pares (X, A) , onde X é um espaço topológico e A é um subespaço de X . Um morfismo de (X, A) em (Y, B) é uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$. Nós expressamos essa condição no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & B \\ j_A \downarrow & & \downarrow j_B \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

onde j_A e j_B são as inclusões canônicas.

Exemplo 5.3. Seja **Vet** a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$, onde os morfismos são as transformações lineares entre eles. Novamente, a composição e os morfismos identidades são dados de maneira óbvia.

Um espaço vetorial graduado é uma coleção $V_* = \{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ com cada $V_n \in \mathbf{Vet}$. Um morfismo $f_* : V_* \rightarrow W_*$, entre espaços vetoriais graduados é uma sequência $f_* : \{f_n : \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{W}_n\}$. Denote por **grVet** a categoria dos espaços vetoriais graduados e seus morfismos.

Definição 5.4. Dado um conjunto P , uma relação $\preceq$ é chamada de relação de ordem parcial se for reflexiva, antissimétrica e transitiva. Ou seja, para todos $x, y, z \in P$, temos:

- $x \preceq x$;
- $x \preceq y$ e $y \preceq x \Rightarrow x = y$;
- $x \preceq y$ e $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

O par $(P, \preceq)$ é chamado de conjunto parcialmente ordenado, ou também pode ser chamado de *poset*. Quando $x \preceq y$, podemos também escrever $y \succeq x$. Identificamos à um *poset* P uma categoria **P**, onde $\mathbf{P}_0 = P$ e **P**(x, y) tem exatamente um elemento se $x \preceq y$, e é vazio caso contrário. Esse morfismo será indicado simplesmente por $x \preceq y$. Nesse caso, chamamos a categoria **P** de categoria *poset*.

Definição 5.5. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria. Dizemos que dois objetos $X, Y \in \mathbf{C}_0$ são isomorfos se existem morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $gf = \text{id}_X$ e $fg = \text{id}_Y$. Nesse caso, dizemos que f e g são isomorfismos. Claramente, a relação $(X \sim Y \iff X \text{ e } Y \text{ são isomorfos})$ é uma relação de equivalência.

Observe que em **Top**, os isomorfismos serão os homeomorfismos.

Definição 5.6. Sejam **A** e **C** duas categorias. Um funtor $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ consiste de uma aplicação $F : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{C}_0$ e para cada par $X, Y \in \mathbf{A}_0$, uma aplicação $F : \mathbf{A}(X, Y) \rightarrow \mathbf{C}(F(X), F(Y))$, de modo que, se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, então $F(gf) = F(g)F(f)$ e se $X \in \mathbf{A}_0$, então $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.

Podemos interpretar um funtor entre duas categorias como uma aplicação que “preserva” a estrutura da categoria, no sentido que F relaciona as categorias mantendo uma compatibilidade entre a composição e os morfismos identidades.

Exemplo 5.7. Denotemos por $H_*(-)$ a homologia singular com coeficientes em determinado corpo $\mathbb{F}$. Então $H_*(X)$ é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial para qualquer $X \in \mathbf{Top}_0$. Além disso, se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então temos um homomorfismo induzido $H_*(f) : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$. Como $H_*(gf) = H_*(g)H_*(f)$, a homologia singular define um funtor $H_* : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{grVet}$. Se considerarmos apenas os grupos de homologia de grau k , então conseguimos um funtor $H_k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Vet}$.

5.2 Definição da *persistent homotopy type distance*

Dado um inteiro $n \geq 1$, vamos considerar $\mathbb{R}^n$ com a ordem parcial $\preceq$, definida por: dados $\alpha = (\alpha_i), \beta = (\beta_i) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \preceq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Vamos ainda imbuir $\mathbb{R}^n$ com a métrica do máximo, ou seja, $\|\alpha\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$. Ainda, dada uma função $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos $\|\varphi_X\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\varphi_X(x)\|_\infty$. Definimos ainda, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o elemento diagonal $\vec{\alpha} = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$.

Vamos considerar a categoria **S** tal que: os objetos de **S** são todos os pares (X, φ_X) , onde X é um espaço topológico e $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua. Os morfismos entre dois objetos (X, φ_X) e (Y, φ_Y) são todas as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ que satisfazem $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$. A composição e os morfismos identidades são dados de maneira usual.

Definição 5.8. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, com $\alpha \succeq \vec{0}$, o funtor α -shift $(\cdot)_\alpha : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ é definido da seguinte maneira:

- Para todo $(X, \varphi_X) \in \text{ob}(\mathbf{S})$, $(X, \varphi_X)_\alpha = (X, \varphi'_X)$, onde $\varphi'_X(x) = \varphi_X(x) - \alpha$ para todo $x \in X$;
- Para todo $f : (X, \varphi_X) \rightarrow (Y, \varphi_Y)$ em $\text{hom}(\mathbf{S})$, onde $(f)_\alpha = f$ considerado como um morfismo entre $(X, \varphi_X)_\alpha$ e $(Y, \varphi_Y)_\alpha$.

No lugar de trabalharmos com **S**, vamos nos restringir a uma subcategoria **C** qualquer de **S**, desde que **C** seja fechada com relação ao funtor α -shift, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$. A partir de agora, assumiremos que essa certa categoria **C** está fixa.

Definição 5.9. Sejam (X, φ_X) e (Y, φ_Y) dois objetos em $\mathbf{C}$. Dado $\alpha \succeq \vec{0}$ em $\mathbb{R}^n$, uma α -aplicação f com respeito a (φ_X, φ_Y) é um morfismo de $\mathbf{C}$ entre (X, φ_X) e (Y, φ_Y) , que é uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ de modo que $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X + \alpha$. Ainda mais, dadas duas α -aplicações $f_1 : X \rightarrow Y$ e $f_2 : X \rightarrow Y$, uma α -homotopia em $\mathbf{C}$ entre f_1 e f_2 com respeito ao par (φ_X, φ_Y) é uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de modo que

1. $f_1 \equiv H(\cdot, 0)$;
2. $f_2 \equiv H(\cdot, 1)$;
3. $H(\cdot, t)$ é uma α -aplicação em $\mathbf{C}$ com respeito ao par (φ_X, φ_Y) para todo $t \in [0, 1]$.

Se uma α -homotopia entre duas α -aplicações f_1 e f_2 com respeito ao par (φ_X, φ_Y) existe, nós dizemos que f_1 e f_2 são α -homotópicos com respeito à (φ_X, φ_Y) .

Em outras palavras, uma α -homotopia é uma homotopia entre α -aplicações que é uma α -aplicação em cada instante t .

Observação 5.10. Qualquer aplicação $f : X \rightarrow Y$ que induz um morfismo $f : (X, \varphi_X) \rightarrow (Y, \varphi_Y)_\alpha$ com respeito a (φ_X, φ_Y) também induz um morfismo $f : (X, \varphi_X) \rightarrow (Y, \varphi_Y)_\beta$ ainda com respeito a (φ_X, φ_Y) , para todo $\beta \succeq \alpha$. Portanto, qualquer α -aplicação pode ser vista como uma β -aplicação, para todo $\beta \succeq \alpha$.

Observação 5.11. Para qualquer $\alpha \succeq \vec{0}$, a α -homotopia com respeito a (φ_X, φ_Y) é uma relação de equivalência entre as α -aplicações de (X, φ_X) em $(Y, \varphi_Y)_\alpha$.

De fato: Sejam f, g e h três α -aplicações com respeito a (φ_X, φ_Y) , e defina no espaço das α -aplicações a relação $(f_1 \sim f_2 \iff f_1 \text{ e } f_2 \text{ são } \alpha\text{-homotópicas})$. Temos:

- $f \sim f$: basta considerar a aplicação $H(x, t) = f(x)$. As duas primeiras propriedades são claramente satisfeitas, e a terceira basta observar que a função constante é uma α -aplicação.
- $f \sim g \Rightarrow g \sim f$: Se $f \sim g$, então existe uma aplicação contínua $H_1 : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ satisfazendo as três condições de α -homotopia. Considere então $H_2(x, t) = H_1(x, 1 - t)$. Desse modo, a terceira condição é satisfeita automaticamente, e ainda, $f_1 \equiv H_1(\cdot, 0) \equiv H_2(\cdot, 1)$ e $f_2 \equiv H_1(\cdot, 1) \equiv H_2(\cdot, 0)$.
- $f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$: Como $f \sim g$, existe H_1 uma α -homotopia entre f e g , e como $g \sim h$, existe H_2 uma α -homotopia entre g e h . Ainda, observe que elas satisfazem $g(x) = H_1(x, 1)$ e $g(x) = H_2(x, 0)$. Considere a aplicação dada por $H_3(x, t) = H_1(x, 2t)$, se $0 \leq t \leq 1/2$, e $H_3(x, t) = H_2(x, 2t - 1)$ se $1/2 < t \leq 1$. Claramente H_3 é contínua, pois os únicos pontos onde poderia haver a quebra de continuidade são nos pontos da forma $(x, 1/2)$, mas $H_3(x, 1/2) = H_1(x, 1) = g(x)$ e $\lim_{t \rightarrow 1/2^+} H_3(x, t) = \lim_{t \rightarrow 1/2^+} H_2(x, 2t - 1) = H_2(x, 0) = g(x)$, portanto

H_3 é contínua em todo ponto. As três propriedades de ser α -homotopia seguem diretamente da construção da H_3 .

Agora, podemos introduzir a relação de equivalência de α -homotopia entre objetos de $\mathbf{C}$. Observe que, apesar de abusarmos no nome, esta relação não é necessariamente de equivalência.

Definição 5.12. Para todo $\alpha \succeq \vec{0}$ em $\mathbb{R}^n$, e quaisquer dois objetos (X, φ_X) e (Y, φ_Y) em $\mathbf{C}$, nós dizemos que (X, φ_X) e (Y, φ_Y) são α -homotopicamente equivalentes em $\mathbf{C}$ se existirem α -aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ em $\mathbf{C}$ com respeito a (φ_X, φ_Y) e (φ_Y, φ_X) , respectivamente, tais que as seguintes propriedades são verificadas:

- a aplicação $g \circ f : X \rightarrow X$ é 2α -homotópica à id_X com respeito a (φ_X, φ_X) ;
- a aplicação $f \circ g : Y \rightarrow Y$ é 2α -homotópica à id_Y com respeito a (φ_Y, φ_Y) .

Quando as duas condições são satisfeitas, dizemos que g é uma inversa de α -homotopia de f com respeito a (φ_X, φ_Y) , e que o par (f, g) consiste de um par de equivalências de α -homotopias em $\mathbf{C}$ com respeito ao par (φ_X, φ_Y) .

Geralmente, uma inversa de α -homotopia de f com respeito ao par (φ_X, φ_Y) não é única.

Definição 5.13. Seja $((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \in \text{ob}(\mathbf{C}) \times \text{ob}(\mathbf{C})$. Denote por $\Lambda^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$ o conjunto:

$$\{\alpha \geq 0; (X, \varphi_X) \text{ e } (Y, \varphi_Y) \text{ são } \vec{\alpha}\text{-homotopicamente equivalentes em } \mathbf{C}\},$$

e por $d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$ o valor:

$$\inf \Lambda^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)),$$

onde usamos a convenção de que o ínfimo sobre um conjunto vazio é $+\infty$. Desse modo, mostrar que a função $d_{HT}^{\mathbf{C}}$ é limitada, é o mesmo que mostrar que o conjunto $\Lambda^{\mathbf{C}}$ é não vazio, fato que será usado na proposição que seguirá.

$d_{HT}^{\mathbf{C}}$ será chamada de *persistent homotopy type distance* na subcategoria $\mathbf{C}$. Quando a subcategoria $\mathbf{C}$ for a categoria $\mathbf{S}$ inteira, denotaremos $d_{HT}^{\mathbf{C}}$ por d_{HT} .

Proposição 5.14. *Sejam (X, φ_X) e (Y, φ_Y) dois objetos em $\mathbf{S}$ tais que φ_X e φ_Y são limitadas, ou seja, $\|\varphi_X\|_{\infty}, \|\varphi_Y\|_{\infty} < +\infty$. Então, $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) < +\infty$ se, e somente se, X e Y são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Vamos assumir que X e Y são homotopicamente equivalentes. Então, existem aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ e homotopias $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$,

$G : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre $g \circ f$ e id_X e entre $f \circ g$ e id_Y , respectivamente. Uma vez que φ_X e φ_Y são funções limitadas, os números $\alpha_X := \|\varphi_X - \varphi_Y \circ f\|_\infty$, $\alpha_Y := \|\varphi_X \circ g - \varphi_Y\|_\infty$, $\hat{\alpha}_X := \frac{1}{2} \max_{t \in [0, 1]} \|\varphi_X - \varphi_X \circ H(\cdot, t)\|_\infty$ e $\hat{\alpha}_Y := \frac{1}{2} \max_{t \in [0, 1]} \|\varphi_Y \circ G(\cdot, t) - \varphi_Y\|_\infty$ são finitos. Assim, $\alpha := \max\{\alpha_X, \alpha_Y, \hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}$ é finito, e α pertence à $\Lambda^{\mathbf{S}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$, logo $d_{HT} \leq \alpha$.

($\Rightarrow$) Assuma agora que $d_{HT} < \infty$. Desse modo, existe algum $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que (X, φ_X) e (Y, φ_Y) são $\vec{\alpha}$ -homotopicamente equivalentes em $\mathbf{S}$ com $\vec{\alpha} = (\alpha, \dots, \alpha)$. Assim, X e Y são homotopicamente equivalentes. $\square$

Observação 5.15. Sejam (X, φ_X) , (Y, φ_Y) , (Z, φ_Z) objetos de $\mathbf{C}$, e sejam $\alpha, \beta \succeq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Considere $f : X \rightarrow Y$ uma α -aplicação com respeito a (φ_X, φ_Y) e $g : Y \rightarrow Z$ uma β -aplicação com respeito a (φ_Y, φ_Z) . Então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é uma $(\alpha + \beta)$ -aplicação com respeito ao par (φ_X, φ_Z) .

$$\text{De fato: Temos } \begin{cases} \varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X + \alpha & (i) \\ \varphi_Z \circ g \preceq \varphi_Y + \beta & (ii) \end{cases}.$$

Logo, $\varphi_Z \circ (g \circ f) = (\varphi_Z \circ g)(f) \stackrel{(ii)}{\preceq} \varphi_Y \circ f + \beta = \varphi_Y(f) + \beta \stackrel{(i)}{\preceq} \varphi_X + (\alpha + \beta)$.

A continuidade de $g \circ f$ segue pelo fato que composição de funções contínuas é uma função contínua.

Lema 5.16. Sejam (X, φ_X) , (Y, φ_Y) e (Z, φ_Z) três objetos em $\mathbf{C}$. Se (f_1, g_1) é um par de equivalências de α_1 -homotopia com respeito a (φ_X, φ_Y) e (f_2, g_2) é um par de equivalências de α_2 -homotopia com respeito a (φ_Y, φ_Z) , todos em $\mathbf{C}$, então $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$ é um par de equivalências de $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -homotopia com respeito a (φ_X, φ_Z) , também em $\mathbf{C}$.

Demonstração. Pela observação acima, $f_2 \circ f_1$ é uma $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -aplicação com respeito a (φ_X, φ_Z) , e $g_1 \circ g_2$ é uma $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -aplicação com respeito a (φ_Z, φ_X) . Seja $H_1 : X \times [0, 1] \rightarrow X$ uma $2\alpha_1$ -homotopia com relação ao par (φ_X, φ_X) entre $g_1 \circ f_1$ e id_X , e seja $H_2 : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ uma $2\alpha_2$ -homotopia com relação ao par (φ_Y, φ_Y) entre $g_2 \circ f_2$ e id_Y . Defina a aplicação $\bar{H} : X \times [0, 1] \rightarrow X$ por

$$\bar{H}(x, t) := \begin{cases} g_1 \circ H_2(f_1(x), 2t), & \text{se } t \in [0, 1/2) \\ H_1(x, 2t - 1), & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Então $\bar{H}$ é uma $(2\alpha_1 + 2\alpha_2)$ -homotopia com respeito a (φ_X, φ_X) de $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1$ a id_X .

Analogamente, podemos definir uma $(2\alpha_1 + 2\alpha_2)$ -homotopia com respeito a (φ_Z, φ_Z) de $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2$ e id_Z . $\square$

Definição 5.17. Dizemos que uma aplicação $d : \text{ob}(\mathbf{C}) \times \text{ob}(\mathbf{C}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma pseudo-métrica estendida se

1. $d(x, y) \in [0, +\infty]$;

2. $d(x, x) = 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Proposição 5.18. *A função $d_{HT}^{\mathbf{C}} : ob(\mathbf{C}) \times ob(\mathbf{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma pseudo-métrica estendida.*

Demonstração. 1. Por definição, $d_{HT}^{\mathbf{C}} \in [0, +\infty]$, pois é o ínfimo de um conjunto não negativo;

2. $d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (X, \varphi_X)) = 0$, pois (X, φ_X) é $\vec{0}$ -homotopicamente equivalente à (X, φ_X) (basta considerar a aplicação identidade $\text{id}_X : X \rightarrow X$);
3. $d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = d_{HT}^{\mathbf{C}}((Y, \varphi_Y), (X, \varphi_X))$ pois (X, φ_X) é α -homotopicamente equivalente à (Y, φ_Y) se, e somente se, (Y, φ_Y) é α -homotopicamente equivalente à (X, φ_X) ;
4. Sejam $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_Z : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ três objetos na categoria $\mathbf{C}$. Seja $\alpha \geq 0$. Se (X, φ_X) não for $\vec{\alpha}$ -homotopicamente equivalente à (Y, φ_Y) , ou se (Y, φ_Y) não for $\vec{\alpha}$ -homotopicamente equivalente à (Z, φ_Z) , então a desigualdade será satisfeita, pois teremos $d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Z, \varphi_Z)) \leq +\infty$. Seja $\varepsilon > 0$. Por definição da $d_{HT}^{\mathbf{C}}$ (que é o ínfimo de um conjunto), existem $\alpha_1 \in \Lambda^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$ e $\alpha_2 \in \Lambda^{\mathbf{C}}((Y, \varphi_Y), (Z, \varphi_Z))$ tais que $\alpha_1 \leq d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) + \varepsilon$ e $\alpha_2 \leq d_{HT}^{\mathbf{C}}((Y, \varphi_Y), (Z, \varphi_Z)) + \varepsilon$. Claramente, existe um par (f_1, g_1) de $\vec{\alpha}_1$ -homotopia com respeito a (φ_X, φ_Y) , e existe um par (f_2, g_2) de $\vec{\alpha}_2$ -homotopia com respeito a (φ_Y, φ_Z) . Assim, pelo lema anterior, temos que $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$ é um par de equivalências de $(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)$ -homotopia com respeito a (φ_X, φ_Y) . Ainda, das desigualdades envolvendo ε , obtemos:

$$\begin{aligned} d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Z, \varphi_Z)) &\leq \alpha_1 + \alpha_2 \\ &\leq d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) + d_{HT}^{\mathbf{C}}((Y, \varphi_Y), (Z, \varphi_Z)) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando o limite, temos que

$$d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Z, \varphi_Z)) \leq d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) + d_{HT}^{\mathbf{C}}((Y, \varphi_Y), (Z, \varphi_Z)).$$

□

Antes de partirmos para o próximo resultado, introduziremos uma nova distância, chamada de pseudo-distância natural. Dadas duas funções contínuas $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$, a pseudo-distância natural entre as funções é definida por:

$$d_{NP}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) := \inf_h \|\varphi_1 - \varphi_2 \circ h\|_{\infty},$$

onde $h : X \rightarrow Y$ varia no conjunto de todos os morfismos da categoria $\mathbf{H}_0$, cujos objetos são todos espaços topológicos munidos de funções reais contínuas, e cujos morfismos são os homeomorfismos entre os espaços topológicos.

Agora, veremos qual a relação entre a pseudo-distância natural e a *homotopy type distance*.

Proposição 5.19. *Sejam (X, φ_X) e (Y, φ_Y) dois objetos em $\mathbf{S}$, onde X e Y são homeomorfos. Então*

$$d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \leq d_{NP}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)).$$

Em particular, se $X = Y$, e $(X, \varphi_1), (X, \varphi_2)$ são objetos em $\mathbf{S}$, então

$$d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \leq \|\varphi_X - \varphi_Y\|_\infty.$$

Demonstração. Se $d_{NP}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = +\infty$, não há nada a demonstrar. Caso contrário, existe $\alpha \geq 0$ e um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ tal que $\|\varphi_X - \varphi_Y \circ f\|_\infty \leq \alpha$. Assim, f e f^{-1} são $\vec{\alpha}$ -aplicações, e $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ são $\vec{0}$ -homotópicas, (e portanto, $2\vec{\alpha}$ -homotópicas), à id_X e id_Y , respectivamente (nesse caso, basta considerar as homotopias $H_1(x, t) = x$ e $H_2(y, t) = y$). Portanto, (f, f^{-1}) é um par de equivalências de $\vec{\alpha}$ -homotopias com relação a (φ_X, φ_Y) , o que implica que (X, φ_X) e (Y, φ_Y) são $\vec{\alpha}$ -homotopicamente equivalentes. Portanto, $d_{HT} \leq d_{NP}$. $\square$

5.3 Exemplos de cálculo da d_{HT}

Vamos agora calcular a *persistent homotopy type distance* em alguns casos simples. Primeiramente, tomemos $\mathbf{C} = \mathbf{S}$, denotando a pseudométrica somente por d_{HT} . Ainda, considere $\mathbb{R}^n$ que $n = 1$.

O primeiro exemplo pertence ao caso onde podemos retrair um espaço X em um subespaço A , de modo que os valores da função φ_X não aumentem.

Proposição 5.20. *Seja (X, φ_X) um objeto em $\mathbf{S}$, e seja A um subconjunto de X tal que existe uma retração $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ de X em A com a propriedade que $\varphi_X(F(x, t)) \leq \varphi_X(x)$ para todo $x \in X$ e todo $t \in [0, 1]$. Então,*

$$d_{HT}((X, \varphi_X), (A, \varphi_X|_A)) = 0.$$

Demonstração. Basta observar que F é uma 0-homotopia entre φ_X e sua restrição em A . $\square$

Corolário 5.21. *Seja X um espaço contrátil, e tome $z \in X$. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, defina $\varphi_c : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função constante $\varphi_c(x) = c$ em X . Denote por c a função constante em $\{z\}$ que leva z em c . Portanto, $d_{HT}((X, \varphi_c), (\{z\}, c)) = 0$.*

Demonstração. Basta aplicar a proposição anterior para $A = \{z\}$ e φ_X a função constante. $\square$

No exemplo a seguir, observe que não vale a igualdade $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = d_{NP}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$, ainda que os espaços X e Y sejam homeomorfos.

Exemplo 5.22. Seja X a faixa obtida ao colar dois lados opostos de um retângulo R mantendo a orientação (isto é, sem nenhum giro), e seja Y a faixa obtida ao colar os dois lados opostos do mesmo retângulo, porém invertendo a orientação (ou seja, fazendo um giro completo). Assuma que os lados colados têm comprimento igual a 2 e que X e Y estejam mergulhados em $\mathbb{R}^3$ como segue:

$$X : \begin{cases} x(u, v) = 2 \cos u, \\ y(u, v) = 2 \sin u, \\ z(u, v) = v, \end{cases} \quad e \quad Y : \begin{cases} x(u, v) = (2 + v \sin u) \cos u, \\ y(u, v) = (2 + v \sin u) \sin u, \\ z(u, v) = v \cos u. \end{cases}$$

com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $-1 \leq v \leq 1$. Mais ainda, defina $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi_X(x, y, z) = z$ e $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi_Y(x, y, z) = z$. Desse modo, as linhas centrais de X e Y coincidem com a curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$ e φ_X toma valores em $\{-1, 1\}$ em cada ponto no bordo de X , enquanto φ_Y continuamente varia no intervalo $[-1, 1]$ para cada ponto no bordo de Y .

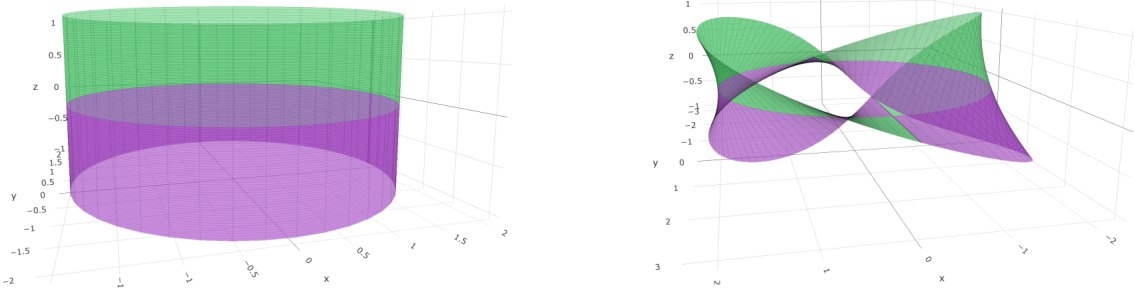


Figura 5.1: Veja que em cada caso, a linha central é a curva C , que é a circunferência que “divide” as duas cores das figuras.

Afirmção: $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = 1$ e $d_{NP}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = 2$.

Vamos provar primeiro a segunda parte da nossa afirmação. Note que para qualquer homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ temos $\|\varphi_X - \varphi_Y \circ f\|_\infty = 2$ pois f deverá levar pontos no bordo em pontos no bordo.

Já para provarmos a primeira parte da afirmação, vamos definir duas retrações sobre a curva C : $r_X : X \rightarrow C$ dada por $r_X(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $r_Y : Y \rightarrow C$ dada por $r_Y((2 + v \sin u) \cos u, (2 + v \sin u) \sin u, v \cos u) = (2 \cos u, 2 \sin u, 0)$. Sejam ainda as

inclusões de C em X e de C em Y , denotadas por $i_{C,X}$ e $i_{C,Y}$, respectivamente. Temos então que $(i_{C,Y} \circ r_X, i_{C,X} \circ r_Y)$ é um par de equivalências de 1-homotopia com respeito a (φ_X, φ_Y) . Logo, $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \leq 1$. Por outro lado, note que $\text{dgm}_1(\varphi_X) = \{(-1, \infty)\}$, enquanto $\text{dgm}_1(\varphi_Y) = \{(0, \infty)\}$. Assim, pelo Teorema 5.25 (que enunciaremos e provaremos a seguir), temos $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \geq d_B(\text{dgm}_1(\varphi_X), \text{dgm}_1(\varphi_Y)) = 1$. Portanto, segue que $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = 1$.

Exemplo 5.23. Seja M uma superfície conexa, fechada e orientável. Considere $X = Y = M$ e $\varphi_Y = \varphi_c$ a função constante igual a c . Nesse caso, $d_{NP}(\varphi_X, \varphi_Y) = \|\varphi_X - c\|_\infty$. Vamos mostrar que $d_{HT}(\varphi_X, \varphi_Y) = d_{NP}(\varphi_X, \varphi_Y)$. Suponha que exista um par (f, g) de α -homotopia com respeito ao par (φ_X, φ_Y) , onde $\alpha \geq 0$. Mostraremos que $\alpha \geq \|\varphi_X - c\|_\infty$. Note que como $c = \varphi_c(f(x)) \leq \alpha + \varphi_X(x)$ para $x \in M$, temos $\alpha \geq c - \min \varphi_X$. Agora, como $f \circ g$ e id_M são homotópicas, segue que f e g são sobrejetoras. Da condição $\varphi_X(g(x)) \leq \alpha + \varphi_c(x) = \alpha + c$, para todo $x \in M$, obtemos que $\alpha \geq \max \varphi_X - c$. Assim, $\alpha \geq \max(c - \min \varphi_X, \max \varphi_X - c) = \|\varphi_X - c\|_\infty$. Agora, como tomamos α arbitrário, podemos tomar o ínfimo dentre eles, de onde segue que $d_{HT}(\varphi_X, \varphi_Y) \geq \|\varphi_X - c\|_\infty = d_{NP}(\varphi_X, \varphi_Y)$. Por fim, pela Proposição 5.19, temos que $d_{HT} \leq d_{NP}$. Assim, temos $d_{HT}(\varphi_X, \varphi_Y) = d_{NP}(\varphi_X, \varphi_Y)$.

5.4 A estabilidade da homologia persistente com respeito à d_{HT}

Nessa seção, discutiremos uma outra versão do Teorema da Estabilidade 4.20, desta vez para espaços topológicos não necessariamente iguais, mas homotopicamente equivalentes. Usaremos para isso algumas definições vistas nos capítulos anteriores, como a distância bottleneck e módulos intercalados.

Denotemos por $H_k(\cdot)$ o funtor homologia (com coeficientes em um corpo). Veja que, com essa notação, dado um espaço topológico X , $H_k(X)$ será exatamente o k -ésimo grupo de homologia de X . Além disso, dada $f : X \rightarrow Y$ contínua, a aplicação $H_k(f) : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ será o homomorfismo induzido por f , ou seja, $H_k(f) = f_*$. Dado um par (X, φ_X) e um inteiro k não negativo, definimos o módulo de persistência associado ao conjunto de nível:

$$\mathcal{B}_k^X := \{V_\varepsilon \xrightarrow{v_{\varepsilon, \varepsilon'}} V_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'},$$

onde:

- para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $V_\varepsilon := H_k(X^\varepsilon)$ (onde X^ε é o conjunto de nível $\varphi_X^{-1}((-\infty, \varepsilon])$);
- para cada $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}$, com $\varepsilon \leq \varepsilon'$, a transformação linear $v_{\varepsilon, \varepsilon'} := H_k(i_{\varepsilon, \varepsilon'}^X : X^\varepsilon \hookrightarrow X^{\varepsilon'})$, induzida pela inclusão natural de X^ε em $X^{\varepsilon'}$.

Lema 5.24. *Sejam (X, φ_X) , (Y, φ_Y) um par de α -equivalências de homotopia em $\mathbf{C}$. Então, para qualquer inteiro k não negativo, os módulos de persistência $\mathcal{B}_k^X$ e $\mathcal{B}_k^Y$ são α -intercalados.*

Demonstração. Fixe um inteiro k não negativo, e escreva:

$$\mathcal{B}_k^X := \{V_\varepsilon \xrightarrow{v_{\varepsilon, \varepsilon'}} V_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'} \text{ e } \mathcal{B}_k^Y := \{W_\varepsilon \xrightarrow{w_{\varepsilon, \varepsilon'}} W_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$$

como feito anteriormente.

Seja (f, g) um par de α -equivalências de homotopia com respeito ao par (φ_X, φ_Y) . Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sejam $f_\varepsilon := f|_{X^\varepsilon}$ e $g_\varepsilon := g|_{Y^\varepsilon}$ as restrições de f_ε em X^ε e g_ε em Y^ε , respectivamente. Note que, como f e g são α -aplicações, segue que $\text{im}(f_\varepsilon) \subset Y^{\varepsilon+\alpha}$ e $\text{im}(g_\varepsilon) \subset X^{\varepsilon+\alpha}$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $\mathcal{B}_k^X$ e $\mathcal{B}_k^Y$ são α -intercalados, para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$, nós precisamos fornecer aplicações $\phi_\varepsilon : V_\varepsilon \rightarrow W_{\varepsilon+\alpha}$ e $\psi_\varepsilon : W_\varepsilon \rightarrow V_{\varepsilon+\alpha}$ tais que os diagramas (4.1) comutem, sempre que $\varepsilon \leq \varepsilon'$.

Para estabelecermos a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_\varepsilon & \xrightarrow{v_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}} & V_{\varepsilon+2\alpha} \\ & \searrow \phi_\varepsilon & \nearrow \psi_{\varepsilon+\alpha} \\ & W_{\varepsilon+\alpha} & \end{array} \quad (5.1)$$

consideraremos o seguinte diagrama de espaços topológicos

$$\begin{array}{ccc} X^\varepsilon & \xrightarrow{i_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}^X} & X^{\varepsilon+2\alpha} \\ & \searrow f_\varepsilon & \nearrow g_{\varepsilon+\alpha} \\ & Y^{\varepsilon+\alpha} & \end{array}$$

Veja que $g_{\varepsilon+\alpha} \circ f_\varepsilon : X^\varepsilon \rightarrow X^{\varepsilon+2\alpha}$ e a inclusão $i_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}^X$ são homotópicos. De fato, como existe uma 2α -homotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ entre $g \circ f$ e id_X , então a restrição de H em $X^\varepsilon \times [0, 1]$ tem sua imagem contida em $X^{\varepsilon+2\alpha}$ e, portanto é uma homotopia entre as aplicações $g_{\varepsilon+\alpha} \circ f_\varepsilon$ e $i_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}^X$. Assim, $H_k(g_{\varepsilon+\alpha} \circ f_\varepsilon) = H_k(i_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}^X)$. Por outro lado, temos que $H_k(g_{\varepsilon+\alpha}) = H_k(g_{\varepsilon+\alpha} \circ f_\varepsilon) \circ H_k(f_\varepsilon)$. Logo, $H_k(g_{\varepsilon+\alpha} \circ f_\varepsilon) \circ H_k(f_\varepsilon) = H_k(i_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}^X)$. Tomando $\phi_\varepsilon = H_k(f_\varepsilon)$ e $\psi_{\varepsilon+\alpha} = H_k(g_{\varepsilon+\alpha} \circ f_\varepsilon)$, obtemos:

$$\psi_{\varepsilon+\alpha} \circ \phi_\varepsilon = H_k(i_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}^X) = v_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}.$$

Ou seja, o diagrama (5.1) comuta.

De modo análogo, podemos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_\varepsilon & \xrightarrow{w_{\varepsilon, \varepsilon+2\alpha}} & W_{\varepsilon+2\alpha} \\ & \searrow \psi_\varepsilon & \nearrow \phi_{\varepsilon+\alpha} \\ & V_{\varepsilon+\alpha} & \end{array}$$

também comuta.

Agora, vamos mostrar a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_\varepsilon & \xrightarrow{v_{\varepsilon, \varepsilon'}} & V_{\varepsilon'} \\ \phi_\varepsilon \downarrow & & \downarrow \phi_{\varepsilon'} \\ W_{\varepsilon+\alpha} & \xrightarrow{w_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha}} & W_{\varepsilon'+\alpha} \end{array} \quad (5.2)$$

Para isso, consideraremos o diagrama de espaços topológicos

$$\begin{array}{ccc} X^\varepsilon & \xrightarrow{i_{\varepsilon, \varepsilon'}^X} & X^{\varepsilon'} \\ f_\varepsilon \downarrow & & \downarrow f^{\varepsilon'} \\ Y^{\varepsilon+\alpha} & \xrightarrow{i_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha}^Y} & Y^{\varepsilon'+\alpha} \end{array}$$

Verifiquemos que este diagrama é comutativo, como fizemos anteriormente, para garantir que o diagrama dos espaços vetoriais também será comutativo. De fato, dado $x \in X^\varepsilon$, temos:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon'}(i_{\varepsilon, \varepsilon'}^X(x)) &= f_{\varepsilon'}(x) && \text{definição da inclusão} \\ &= f|_{X^{\varepsilon'}}(x) && \text{definição da } f_{\varepsilon'} \\ &= f|_{X^\varepsilon}(x) && \text{pois } X^\varepsilon \subset X^{\varepsilon'} \\ &= f_\varepsilon(x) && \text{por definição da } f_\varepsilon \\ &= i_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha}^Y(f_\varepsilon(x)). \end{aligned}$$

Assim, como $x \in X^\varepsilon$ é qualquer, segue que $f_{\varepsilon'} \circ i_{\varepsilon, \varepsilon'}^X = i_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha}^Y \circ f_\varepsilon$. Aplicando $H_k(\cdot)$ na igualdade e usando que $\phi_\varepsilon = H_k(f_\varepsilon)$ e $\phi_{\varepsilon'} = H_k(f_{\varepsilon'})$, temos:

$$\phi_{\varepsilon'} \circ v_{\varepsilon, \varepsilon'} = H_k(f_{\varepsilon'} \circ i_{\varepsilon, \varepsilon'}^X) = H_k(i_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha}^Y \circ f_\varepsilon) = w_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha} \circ \phi_\varepsilon.$$

Portanto, o diagrama (5.2) comuta. De modo análogo, podemos provar a comutatividade

do diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_\varepsilon & \xrightarrow{w_{\varepsilon, \varepsilon'}} & W_{\varepsilon'} \\ \psi_\varepsilon \downarrow & & \downarrow \psi_{\varepsilon'} \\ V_{\varepsilon+\alpha} & \xrightarrow{v_{\varepsilon+\alpha, \varepsilon'+\alpha}} & V_{\varepsilon'+\alpha} \end{array}$$

Com a comutatividade dos 4 diagramas, fica provado que $\mathcal{B}_k^X$ e $\mathcal{B}_k^Y$ são α -intercalados. $\square$

Com esse lema, conseguimos enunciar finalmente o resultado da estabilidade dos diagramas de persistência com respeito à *persistent homotopy type distance*. Como estamos utilizando a letra grega ϕ para as funções contínuas, faremos uma pequena mudança na notação que usávamos no capítulo anterior: dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, em vez de escrevermos seu diagrama de persistência como $\text{dgm}(\mathbb{F}_k)$, escreveremos $\text{dgm}_k(f)$.

Teorema 5.25. *Sejam X e Y complexos simpliciais finitos, e seja k um número inteiro não negativo. Sejam $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então*

$$d_B(\text{dgm}_k(\varphi_X), \text{dgm}_k(\varphi_Y)) \leq d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)).$$

Demonstração. Como as funções φ_X e φ_Y são contínuas definidas em complexos simpliciais finitos, então, pelo Teorema 4.18, f e g são q -tame. Assim, seus módulos de persistência $\mathcal{B}_k^X$ e $\mathcal{B}_k^Y$ são q -tame. Se X e Y não são α -homotopicamente equivalentes para nenhum α , então segue que $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = +\infty$, de onde segue o resultado. Agora, caso exista α -equivalência de homotopia entre X e Y , então pelo lema anterior, $\mathcal{B}_k^X$ e $\mathcal{B}_k^Y$ são α -intercalados para todo inteiro k não negativo. Assim, pelo Teorema da Estabilidade dos diagramas de persistência (4.16), segue que

$$d_B(\text{dgm}_k(\varphi_X), \text{dgm}_k(\varphi_Y)) \leq \alpha.$$

Mas veja que essa desigualdade é válida para todo $\alpha \in \Lambda^C((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$. Assim, tomando o ínfimo dos α 's, temos

$$d_B(\text{dgm}_k(\varphi_X), d_B(\text{dgm}_k(\varphi_Y))) \leq d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)).$$

$\square$

5.5 Comentários sobre a definição d_{HT}^C

Vamos levantar alguns questionamentos sobre as escolhas feitas para definir a d_{HT}^C , dando um exemplo que responde cada uma destas perguntas. Consideraremos $\mathbb{R}^n$ com $n = 1$, ou seja, funções com contradomínio nos reais.

1ª Pergunta: E se, na Definição 5.9 sobre α -homotopia, removêssemos a condição sobre H ser uma α -aplicação em cada instante, exigindo apenas que fosse uma α -aplicação para $t = 0$ e $t = 1$?

Consideraremos d^* a distância que segue a mesma construção da $d_{HT}^{\mathbf{C}}$, porém com a simplificação feita na pergunta anterior.

Exemplo 5.26. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} & \psi : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - |x| & x &\mapsto \frac{1+x}{2} \end{aligned}$$

Defina também as funções

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1] & g : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto 1 - 2|x| & x &\mapsto \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \psi \circ f(x) &= \frac{1 + (1 - 2|x|)}{2} = 1 - |x| = \varphi(x) \\ \varphi \circ g(x) &= 1 - \left| \frac{x-1}{2} \right| = 1 - \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2} = \psi(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= \frac{(1 - 2|x|) - 1}{2} = -|x| \\ f \circ g(x) &= 1 - 2\left| \frac{x-1}{2} \right| = 1 - 2\left(\frac{1-x}{2} \right) = x \end{aligned}$$

Segue que $f \circ g$ é igual à identidade, enquanto $g \circ f$ é homotópica à identidade (via a homotopia $H(x, t) = (t-1)|x| + tx$. Note que $H(\cdot, 0)$ e $H(\cdot, 1)$ são claramente 0-aplicações com respeito a (φ, ψ) . Como consequência, $d^*(\varphi, \psi) = 0$. Agora, conseguimos observar que as homologias persistentes dos conjuntos de subnível de φ e ψ são claramente distintos (enquanto a primeira começa com duas componentes conexas e termina com uma, a segunda começa e termina com apenas uma), e portanto a distância bottleneck entre eles deve ser positiva. Como consequência, $d_B(\text{dgm}_0(\varphi), \text{dgm}_0(\psi)) > 0 = d^*(\varphi, \psi)$. Deste modo, d^* não é mais um limitante superior de d_B , diferente do que acontece com a d_{HT} (como vimos no Teorema 5.25).

2ª Pergunta: E se, analogamente à pergunta anterior, removêssemos a condição sobre uma α -homotopia em uma subcategoria $\mathbf{C}$ de $\mathbf{S}$ ser um morfismo em cada instante?

Exemplo 5.27. Sejam $X = \{0\} \times \mathbb{R} \cup [0, 1] \times 2\mathbb{Z}$ e $Y = \{0\} \times \mathbb{R} \cup [0, 1] \times (2\mathbb{Z} + 1)$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Considere $\varphi_X(s, t) = t$ e $\varphi_Y(s, t) = t$. Seja $\mathbf{C}$ a subcatego-



Figura 5.2: Funções φ e ψ tomadas no exemplo anterior. Fonte: [3].

ria de $\mathbf{S}$ cujo conjunto de morfismos consiste de todos os homeomorfismos. Segue que $d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = 1$, enquanto $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = 0$. Note que, ao remover a exigência de que uma α -homotopia em $\mathbf{C}$ seja um homeomorfismo a cada instante, iríamos obter que $d_{HT}^{\mathbf{C}}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) = 0$ usando a 0-aplicação $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(s, t) = (s, t - 1)$, e $g : Y \rightarrow X$ dada por $g(s, t) = (s, t - 1)$.

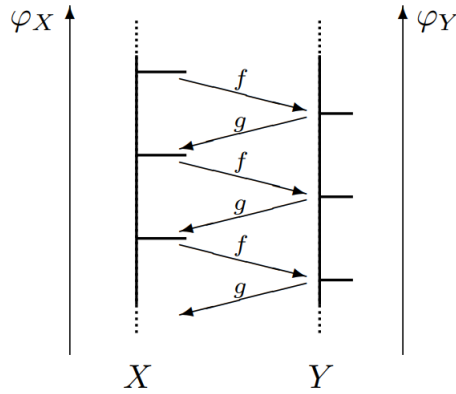


Figura 5.3: Objetos considerados no exemplo anterior. Fonte: [3].

Responderemos as próximas duas perguntas utilizando um único exemplo.

3ª Pergunta: Seria possível definir $d_{HT}^{\mathbf{C}}$ usando a noção de mínimo, em vez do ínfimo?

4ª Pergunta: A aplicação $d_{HT}^{\mathbf{C}}$ é realmente apenas uma pseudo-métrica estendida, ou seria na verdade uma métrica estendida?

Observação 5.28. Uma métrica estendida satisfaz as mesmas condições de uma pseudo-métrica estendida, com a condição adicional de que $d(x, y) \neq 0$ se $x \neq y$.

Exemplo 5.29. Defina $\varphi, \psi : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $\varphi(x) = -|x|$, e $\psi(x) = 0$ se $|x| \leq 1$, e $\psi(x) = 2 - 2|x|$ se $|x| > 1$. Nós afirmamos que, para todo $\alpha > 0$ pequeno o suficiente, conseguimos achar um par de equivalências de α -homotopia $(f_\alpha, f_\alpha^{-1})$ com respeito a (φ, ψ) . Como consequência disto, $d_{HT}(([-2, 2], \varphi), ([-2, 2], \psi)) = 0$. Seja $0 < \alpha < 2$, e

considere o homeomorfismo $f_\alpha : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ definido por

$$f_\alpha := \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}x + \frac{2\alpha-2}{2-\alpha}, & \text{se } -2 \leq x < -\alpha, \\ \frac{1}{\alpha}x, & \text{se } -\alpha \leq x < \alpha, \\ \frac{1}{2-\alpha}x + \frac{2\alpha-2}{2-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Veja que $f_\alpha([-2, -\alpha]) = [-2, -1]$, $f_\alpha([-\alpha, \alpha]) = [-1, 1]$ e $f_\alpha([\alpha, 2]) = [1, 2]$. Segue que

$$\begin{aligned} \psi \circ f_\alpha(x) &= \begin{cases} 2 - 2\left|\frac{x}{2-\alpha} + \frac{2\alpha-2}{2-\alpha}\right|, & \text{se } -2 \leq x < -\alpha, \\ 0, & \text{se } -\alpha \leq x < \alpha, \\ 2 - 2\left|\frac{x}{2-\alpha} + \frac{2\alpha-2}{2-\alpha}\right|, & \text{se } \alpha \leq x \leq 2. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\frac{x+\alpha}{2-\alpha} & \text{se } -2 \leq x < -\alpha, \\ 0 & \text{se } -\alpha \leq x < \alpha, \\ -2\frac{x-\alpha}{2-\alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\varphi(x) - \psi \circ f_\alpha(x) = \begin{cases} -\alpha\frac{2+x}{2-\alpha} & \text{se } -2 \leq x < -\alpha, \\ -|x| & \text{se } -\alpha \leq x < \alpha, \\ -\alpha\frac{2-x}{2-\alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Veja que em cada um dos três casos, a função atinge valor máximo igual a 0, e valor mínimo igual a $-\alpha$ (basta substituir nos extremos dos intervalos, pois as funções são monótonas, com exceção da parte do meio da função, a qual deve ser substituída nos extremos e no 0). Desse modo, segue que $\|\varphi - \psi \circ f_\alpha\|_\infty \leq \alpha$. Assim, $(f_\alpha, f_\alpha^{-1})$ é um par de equivalências de α -homotopia com respeito a (φ, ψ) . Como o resultado é válido para todo $0 < \alpha < 2$, segue que

$$d_{HT}([-2, 2], \varphi), ([-2, 2], \psi) = d_{NP}([-2, 2], \varphi), ([-2, 2], \psi) = 0.$$

Agora, mostremos que não existe um par de 0-equivalências de homotopia com respeito a (φ, ψ) . Suponha, por contradição, que (f_0, g_0) é um par de 0-homotopia. Então existe uma homotopia $H_0 : [-2, 2] \times [0, 1] \rightarrow [-2, 2]$ tal que $H_0(x, 0) = g_0 \circ f_0(x)$, $H_0(x, 1) = x$ e $\varphi(H_0(x, t)) \leq \varphi(x)$ para todo $x \in [-2, 2]$ e todo $t \in [0, 1]$. Observe que, com $\varphi(H_0(-2, t)) \leq \varphi(-2) = -2$ para todo $t \in [0, 1]$ e -2 é um mínimo global de φ (que só ocorre quando $x = \pm 2$, temos que $H_0(-2, t) = \pm 2$. Mas como $H_0(-2, 1) = -2$, segue que $H_0(-2, t) = -2$, para todo t . Analogamente, obtemos que $H_0(2, t) = 2$ para todo $t \in [0, 1]$. Portanto,

$g_0 \circ f_0(-2) = -2$ e $g_0 \circ f_0(2) = 2$.

Agora, veja que $f_0(\{-2, 2\}) \subset \{-2, 2\}$, pois f_0 é uma 0-aplicação, e $-2, 2$ são os únicos pontos onde ψ toma valores que não são maiores que $\varphi(-2) = \varphi(2) = -2$. Analogamente, $g_0(\{-2, 2\}) \subset \{-2, 2\}$. Temos então duas possibilidades, $f_0(-2) = -2$ ou $f_0(-2) = 2$. Mostraremos que a primeira possibilidade não pode acontecer.

Suponha que $f_0(-2) = -2$. Como $g_0 \circ f_0 = -2$, segue que $g_0(-2) = -2$. Agora, provemos que $f_0([-2, 2]) \subset [-2, 1]$. De fato, como $f_0(-2) = -2$, se $f_0([-2, 2])$ contivesse um ponto $x_0 > -1$, também deveria conter infinitos pontos onde ψ se anula. Isso contradiz o fato que f_0 é uma 0-aplicação, pois φ toma valor máximo 0 apenas no ponto 0. Agora, sabendo que $f_0([-2, 2]) \subset [-2, 1]$, como $g_0(-2) = -2$, se $g_0([-2, -1])$ contivesse algum ponto $x_1 > 0$, deveria existir algum ponto $x_2 \in [-2, -1)$ tal que $g(x_2) = x_1$ e $\varphi(g(x_2)) = \varphi(x_1) = 0$. Mas isso contradiz o fato de g_0 ser uma 0-aplicação. Por fim, deveríamos ter $g_0 \circ f_0([-2, 2]) \subset [-2, 0]$, o que contradiz o fato de $g_0 \circ f_0(2) = 2$.

De modo análogo, supondo que $f_0(-2) = 2$, chegamos também em um absurdo.

Portanto, não existe um par de 0-homotopia com respeito a (φ, ψ) .



Figura 5.4: Funções φ e ψ consideradas no exemplo anterior. Fonte: [3].

5.6 A homotopy type distance para comparar merge trees

Uma *merge tree* é um descritor estruturado usado na análise de formas. Para uma função contínua $\varphi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um domínio conexo, a *merge tree* de φ codifica como os subníveis $\varphi^{-1}(\infty, t]$ estão conectados, para valores crescentes de $t \in \mathbb{R}$.

Definição 5.30. Considere uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathbb{X}$ é um espaço conexo. Dizemos que dois pontos x e y são equivalentes, denotando por $x \sim y$, quando eles pertencem à mesma componente conexa de um único conjunto de nível $f^{-1}(c)$, para algum $c \in \mathbb{R}$. O espaço quociente $\mathbb{X}/\sim$ é chamado de grafo de Reeb de f .

Podemos enxergar o grafo de Reeb, de maneira informal, como uma contração contínua do contorno da função f .

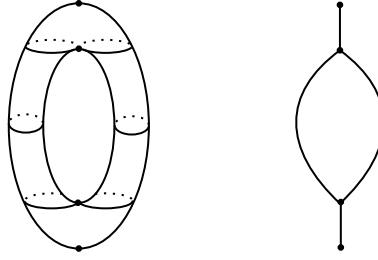


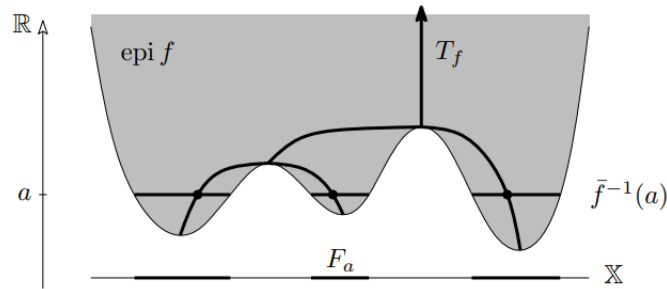
Figura 5.5: Grafo de Reeb da função altura do Toro.

Definição 5.31. Um epígrafo de uma função f , denotado por $\text{epi}(f)$, é o conjunto de todos os pontos acima de seu gráfico, ou seja,

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}.$$

Denotamos a projeção do epígrafo de f sobre a sua segunda coordenada: $\bar{f} : \text{epi}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}((x, y)) = y$. Note que se nós projetarmos os conjuntos de nível de $\bar{f}$ de volta ao domínio da nossa função, teremos os conjuntos de subnível de f , $F_a = f^{-1}(-\infty, a] = \pi_{\mathbb{X}}(\bar{f}^{-1}(a))$. O grafo de Reeb da função $\bar{f}$, denotado por T_f , é chamado de *merge tree* da função f . Intuitivamente, T_f continua traçando a evolução das componentes conexas dos conjuntos de subnível de f . Uma componente surge em um ponto de mínimo, e cresce até que se funde com outra componente conexa em uma sela.

Uma vez que os pontos identificados pela relação de equivalência da *merge tree* pertence ao mesmo conjunto de nível de $\bar{f}$, eles devem possuir a mesma imagem pela f . Desse modo, existe uma aplicação bem definida $\hat{f} : T_f \rightarrow \mathbb{R}$ de uma *merge tree* na imagem da $\bar{f}$, que será a única aplicação que satisfaz $\bar{f} = \hat{f} \circ q$, onde $q : \text{epi}(f) \rightarrow T_f$ é definida por $q(x) = y$, onde y é a componente do conjunto de nível $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(x))$ que contém x .

Figura 5.6: Representação de uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e sua *merge tree* T_f . Fonte: [4]

Vamos definir agora a aplicação ε -shift, denotada por $i^\varepsilon : T_f \rightarrow T_f$. Para isso, lembremos que, dado $x \in T_f$ com $\hat{f}(x) = a$, temos que x representa a componente conexa X de um conjunto de subnível F_a da função f . A inclusão dos conjuntos de subnível $F_a \subseteq F_{a+\varepsilon}$ mapeia X em uma nova componente conexa Y de $F_{a+\varepsilon}$. Seja y essa componente conexa na árvore T_f . Então, $i^\varepsilon(x) = y$. Em outras palavras, para encontrar a imagem de x sob a aplicação ε -shift i^ε , simplesmente seguiremos o caminho de x até a raiz de T_f , até

encontrarmos o ponto y com $\hat{f}(y) = a + \varepsilon$.

Definição 5.32. Dado $\varepsilon \geq 0$, duas aplicações contínuas $\alpha^\varepsilon : T_f \rightarrow T_g$ e $\beta^\varepsilon : T_g \rightarrow T_f$ são ditas ε -compatíveis se

$$\begin{aligned} \hat{g}(\alpha^\varepsilon(x)) &= \hat{f}(x) + \varepsilon, & \hat{f}(\beta^\varepsilon(y)) &= \hat{g}(y) + \varepsilon, \\ \beta^\varepsilon \circ \alpha^\varepsilon &= i^{2\varepsilon} & \alpha^\varepsilon \circ \beta^\varepsilon &= j^{2\varepsilon} \end{aligned}$$

onde $i^{2\varepsilon} : T_f \rightarrow T_f$ e $j^{2\varepsilon} : T_g \rightarrow T_g$ são aplicações 2ε -shifts.

Notemos que, como as aplicações α^ε e β^ε são contínuas, a condição para a ε -compatibilidade se estende às seguintes relações para todo $a \geq 0$:

$$\begin{aligned} \beta^\varepsilon \circ j^a \circ \alpha^\varepsilon &= i^{a+2\varepsilon}, & \alpha^\varepsilon \circ i^a \circ \beta^\varepsilon &= j^{a+2\varepsilon}, \\ j^\varepsilon \circ \alpha^\varepsilon &= \alpha^\varepsilon \circ i^a, & i^\varepsilon \circ \beta^\varepsilon &= \beta^\varepsilon \circ j^a. \end{aligned} \tag{5.3}$$

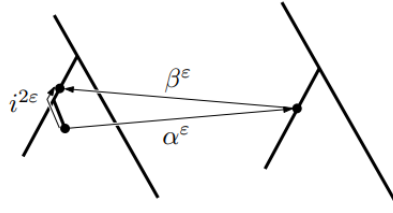


Figura 5.7: Duas aplicações compatíveis. Fonte: [4]

Com isso, conseguimos definir uma noção de distância entre duas *merge trees* T_f e T_g , analisando as “melhores” aplicações ε -compatíveis.

Definição 5.33 (Distância Intercalante). A distância intercalante, $d_I(T_f, T_g)$ entre as duas *merge trees* T_f e T_g , é definida como o ínfimo dos ε tal que existem aplicações ε -compatíveis entre T_f e T_g , ou seja

$$d_I(T_f, T_g) = \inf\{\varepsilon \mid \text{existem aplicações } \varepsilon\text{-compatíveis } \alpha^\varepsilon : T_f \rightarrow T_g \text{ e } \beta^\varepsilon : T_g \rightarrow T_f\}.$$

Lema 5.34. A distância d_I é uma pseudo-métrica no conjunto das *merge trees*.

Demonstração. Sejam T_f , T_g e T_h *merge trees*.

1. Se $T_g = T_f$, então $d_I(T_f, T_g) = 0$.

De fato, se $T_f = T_g$, considere $\alpha^0 = \beta^0 = \text{Id} : T_f \rightarrow T_f$. Então:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\alpha^0(x)) &= \hat{g}(x) = \hat{f}(x) + 0, & \hat{f}(\beta^0(y)) &= \hat{f}(y) = \hat{g}(y) + 0, \\ \beta^0 \circ \alpha^0 &= \text{Id} = i^{2 \cdot 0} & \alpha^0 \circ \beta^0 &= \text{Id} = j^{2 \cdot 0} \end{aligned}$$

Assim, as aplicações α^0 e β^0 são 0-compátíveis. Logo, $d_I(T_f, T_g) \leq 0$, ou seja, $d_I(T_f, T_g) = 0$.

2. $d_I(T_f, T_g) = d_I(T_g, T_f)$.

Vale claramente pela maneira que a definimos:

$$\begin{aligned} d_I(T_f, T_g) &= \inf\{\varepsilon \mid \exists \alpha^\varepsilon : T_f \rightarrow T_g, \beta^\varepsilon : T_g \rightarrow T_f \text{ } \varepsilon\text{-compátíveis}\} \\ &= \inf\{\varepsilon \mid \exists \beta^\varepsilon : T_g \rightarrow T_f, \alpha^\varepsilon : T_f \rightarrow T_g \text{ } \varepsilon\text{-compátíveis}\} = d_I(T_g, T_f). \end{aligned}$$

3. $d_I(T_f, T_h) \leq d_I(T_f, T_g) + d_I(T_g, T_h)$.

Suponha que $d_I(T_f, T_g) = \varepsilon_1$. Então, para todo $\delta > 0$, existem aplicações $(\varepsilon_1 + \delta)$ -compátíveis, $\alpha_{fg}^{\varepsilon_1+\delta} : T_f \rightarrow T_g$ e $\beta_{gf}^{\varepsilon_1+\delta} : T_g \rightarrow T_f$. Analogamente, suponha que $d_I(T_g, T_h) = \varepsilon_2$. Então para todo $\delta > 0$, existem aplicações $(\varepsilon_2 + \delta)$ -compátíveis $\alpha_{gh}^{\varepsilon_2+\delta} : T_g \rightarrow T_h$ e $\beta_{hg}^{\varepsilon_2+\delta} : T_h \rightarrow T_g$. Sejam $i^a : T_1 \rightarrow T_1$, $j^a : T_2 \rightarrow T_2$ e $k^a : T_3 \rightarrow T_3$ as aplicações a -shift das respectivas árvores. Dado $\delta > 0$, considere $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, e defina $\alpha_{fh}^{\varepsilon_3+\delta} : T_f \rightarrow T_h$ e $\beta_{hf}^{\varepsilon_3+\delta} : T_h \rightarrow T_f$ por:

$$\begin{aligned} \alpha_{fh}^{\varepsilon_3+\delta} &= \alpha_{gh}^{\varepsilon_2+\delta/2} \circ \alpha_{fg}^{\varepsilon_1+\delta/2}, \\ \beta_{hf}^{\varepsilon_3+\delta} &= \beta_{gf}^{\varepsilon_1+\delta/2} \circ \beta_{hg}^{\varepsilon_2+\delta/2}. \end{aligned}$$

Vejamos que essas aplicações são $(\varepsilon_3 + \delta)$ -compátíveis. De fato,

$$\begin{aligned} i^{2(\varepsilon_3+\delta)} &= i^{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\delta)} \\ &= i^{2(\varepsilon_1+\delta/2)+2(\varepsilon_2+\delta/2)} \\ &= \beta_{gf}^{\varepsilon_1+\delta/2} \circ j^{\varepsilon_2+\delta/2} \circ \alpha_{fg}^{\varepsilon_1+\delta/2} \\ &= \beta_{gf}^{\varepsilon_1+\delta/2} \circ \beta_{hg}^{\varepsilon_2+\delta/2} \circ \alpha_{hg}^{\varepsilon_2+\delta/2} \circ \alpha_{fg}^{\varepsilon_1+\delta/2} \\ &= \beta_{hf}^{\varepsilon_3+\delta} \circ \alpha_{fh}^{\varepsilon_3+\delta}, \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} \hat{h}(\alpha_{fh}^{\varepsilon_3+\delta}(x)) &= \hat{h}(\alpha_{gh}^{\varepsilon_2+\delta/2}(\alpha_{fg}^{\varepsilon_1+\delta/2}(x))) \\ &= \hat{g}(\alpha_{fg}^{\varepsilon_1+\delta/2}(x)) + \varepsilon_2 + \delta/2 \\ &= \hat{f}(x) + \varepsilon_1 + \delta/2 + \varepsilon_2 + \delta/2 \\ &= \hat{f}(x) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \delta \\ &= \hat{f}(x) + (\varepsilon_3 + \delta). \end{aligned}$$

De modo análogo, é possível mostrar que valem as igualdades $k^{2(\varepsilon_3+\delta)} = \alpha_{fh}^{\varepsilon_3+\delta} \circ \beta_{hf}^{\varepsilon_3+\delta}$ e $\hat{f}(\beta_{hf}^{\varepsilon_3+\delta}(y)) = \hat{h}(y) + (\varepsilon_3 + \delta)$.

Assim, para todo $\delta > 0$, temos que $d_I(T_f, T_h) \leq \varepsilon_3 + \delta$. Portanto, quando δ tende à zero, obtemos $d_I(T_f, T_h) \leq \varepsilon_3 = d_I(T_f, T_g) + d_I(T_g, T_h)$.

Assim, d_I é uma pseudo-métrica. □

Como dito anteriormente, *merge trees* são descritores de formas. Desse modo, eles devem ser estáveis: ou seja, dada uma pequena variação na função, devemos obter uma pequena distância entre as árvores. Mostraremos a estabilidade de *merge trees* quando utilizando a distância intercalante.

Teorema 5.35. *Dadas $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, sejam T_f e T_g suas merge trees. Então a distância intercalante entre as árvores não ultrapassa a maior diferença entre as duas funções, ou seja:*

$$d_I(T_f, T_g) \leq \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x) - g(x)|.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x) - g(x)|$. Claramente, temos para qualquer $a \in \mathbb{R}$, as inclusões

$$F_a \subset G_{a+\varepsilon} \subset F_{a+2\varepsilon}.$$

Nesse caso, as inclusões definidas entre esses subníveis define uma aplicação entre as *merge trees*. Um ponto $x \in T_f$ com $\hat{f}(x) = a$ corresponde à uma componente no conjunto de subnível F_a . A inclusão $F_a \subseteq G_{a+\varepsilon}$ mapeia essa componente no conjunto de subnível $G_{a+\varepsilon}$. Seja $y \in T_g$ representando essa componente na *merge tree* de g . Assim, a inclusão dos conjuntos de subnível induzem uma aplicação $\alpha^\varepsilon : T_f \rightarrow T_g$ definida via a construção anterior como $\alpha^\varepsilon(x) = y$. Reciprocamente, dado $y \in T_g$ com $\hat{g}(y) = a$, temos um $z \in T_f$ que representa uma componente em $F_{a+2\varepsilon}$, induzindo uma aplicação $\beta^\varepsilon : T_g \rightarrow T_f$ com $\beta^\varepsilon(y) = z$. Por construção, se $\hat{f}(x) = a$, então $\hat{g}(\alpha^\varepsilon(x)) = a + \varepsilon$ e se $\hat{g}(y) = a$, então $\hat{f}(\beta^\varepsilon(y)) = a + \varepsilon$.

Veja que o conjunto de subnível de uma função produz a aplicação shift, definida no início dessa sub-seção. A inclusão $F_a \subseteq F_{a+2\varepsilon}$ induz uma aplicação $i^{2\varepsilon} : T_f \rightarrow T_f$ que mapeia cada ponto $z \in T_f$ com $\hat{f}(z) = a$ no seu ponto “ancestral” $z \in T_f$ tal que $\hat{f}(z) = a + 2\varepsilon$. Veja que da maneira que construímos, $\beta^\varepsilon(\alpha^\varepsilon(x)) = \beta^\varepsilon(y) = z = i^{2\varepsilon}(x)$. Analogamente, podemos mostrar que $\alpha^\varepsilon \circ \beta^\varepsilon = j^{2\varepsilon}$, onde $j^{2\varepsilon} : T_g \rightarrow T_g$ é a aplicação shift.

Dessa maneira, por definição, α^ε e β^ε são ε -compatíveis, e a distância intercalante não excede ε . Portanto,

$$d_I(T_f, T_g) \leq \varepsilon = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x) - g(x)|.$$

□

Vamos agora mostrar que a distância bottleneck entre os diagramas de persistência 0-dimensionais de duas funções contínuas não excede a distância intercalante entre suas *merge trees*.

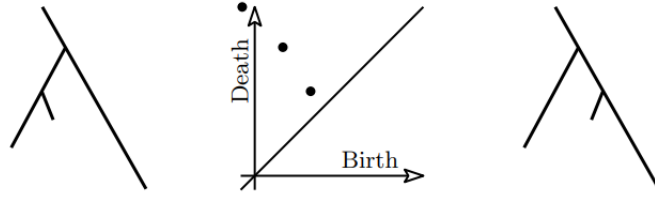


Figura 5.8: A distância intercalante entra as duas árvores é positiva (e vale metade do tamanho do menor galho), mas ambas têm diagramas de persistência idênticos. Fonte: [4]

Teorema 5.36. *Dadas duas funções contínuas $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$d_B(\text{dgm}_0(f), \text{dgm}_0(g)) \leq d_I(T_f, T_g).$$

Demonstração. Primeiro, observe que $\text{dgm}_0(f) = \text{dgm}_0(\hat{f})$. Isso ocorre pois, ao colidirmos componentes conexas em pontos, não mudamos a quantidade de componentes conexas, nem o momento em que elas surgem ou desaparecem. Desse modo, $d_B(\text{dgm}_0(f), \text{dgm}_0(g)) = d_B(\text{dgm}_0(\hat{f}), \text{dgm}_0(\hat{g}))$. Mostremos agora que essa distância é menor que a intercalante entre T_f e T_g . Considere $\hat{F}_a = \hat{f}^{-1}(\infty, a]$ e $\hat{G}_a = \hat{g}^{-1}(\infty, a]$, e tome $\varepsilon = d_I(T_f, T_g)$. Assim, por definição da distância intercalante, para todo $\delta > 0$, existem duas aplicações: $\alpha^{\varepsilon+\delta} : T_f \rightarrow T_g$ e $\beta^{\varepsilon+\delta} : T_g \rightarrow T_f$ $(\varepsilon + \delta)$ -intercaladas. Assim, $H_0(\hat{F}_a)$ e $H_0(\hat{G}_a)$ são $(\varepsilon + \delta)$ -intercalados. Portanto, pelo Teorema 4.16, $d_B(\text{dgm}_0(f), \text{dgm}_0(g)) \leq \varepsilon + \delta$. Como o resultado vale para todo $\delta > 0$, tomando o limite, temos $d_B(\text{dgm}_0(f), \text{dgm}_0(g)) \leq \varepsilon$. $\square$

Teorema 5.37. *Para cada par de aplicações lineares por partes $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um poliedro compacto conexo X (ou seja, um complexo simplicial finito), temos*

$$d_I(T_\varphi, T_\psi) = d_{HT}((T_\varphi, \hat{\varphi}), (T_\psi, \hat{\psi}))$$

Demonstração. Primeiro vamos provar que $d_{HT} \leq d_I$. Vamos mostrar que dado $\varepsilon \geq 0$, cada par de aplicações ε -compatíveis entre T_φ e T_ψ constituem um par de equivalência de ε -homotopia. Sejam $i_\varphi^\varepsilon : T_\varphi \rightarrow T_\varphi$ e $i_\psi^\varepsilon : T_\psi \rightarrow T_\psi$ as aplicações ε -shifts. Suponha que $f^\varepsilon : T_\varphi \rightarrow T_\psi$ e $g^\varepsilon : T_\psi \rightarrow T_\varphi$ são ε -compatíveis. Como $\hat{\varphi} \circ f^\varepsilon : \hat{\varphi} + \varepsilon$ e $\hat{\psi} \circ g^\varepsilon : \hat{\psi} + \varepsilon$, segue que f^ε e g^ε são ε -aplicações, no sentido da definição 5.9. Vamos mostrar que $(f^\varepsilon, g^\varepsilon)$ é um par de equivalência de ε -homotopia com respeito a $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$. Para isso, precisamos construir uma 2ε -homotopia com respeito a $(\hat{\varphi}, \hat{\varphi})$ entre a identidade de T_φ e $g^\varepsilon \circ f^\varepsilon$, e analogamente, precisamos de uma 2ε -homotopia com respeito a $(\hat{\psi}, \hat{\psi})$ entre a identidade de T_ψ e $f^\varepsilon \circ g^\varepsilon$. Entretanto, como assumimos que f^ε e g^ε são ε -compatíveis, temos $i_\varphi^{2\varepsilon} = g^\varepsilon \circ f^\varepsilon$ e $i_\psi^{2\varepsilon} = f^\varepsilon \circ g^\varepsilon$. Desse modo, as 2ε -homotopias que precisamos construir H e K são entre as aplicações identidade em T_φ e $g^\varepsilon \circ f^\varepsilon$, e entre a identidade em T_ψ e $f^\varepsilon \circ g^\varepsilon$, respectivamente. Mostraremos como podemos construir H , e K seguirá de modo análogo. Lembremos que T_φ é uma *merge tree*, e que para cada $p \in T_\varphi$, temos

uma quantidade finita de “folhas” $l_1, \dots, l_{n_p} \in T_\varphi$ (ou seja, os vértices nas pontas das árvores, que estão ligados a somente uma aresta) que podem ser conectadas à p de maneira crescente através da $\hat{\varphi}$. Para $i = 1, \dots, n_p$, tome $\delta_i^p := (\hat{\varphi}(p) - \hat{\varphi}(l_i))/2\varepsilon \in \mathbb{R}$, e considere $\gamma_i^p : [-\delta_i^p, +\infty) \rightarrow T_\varphi$ sendo o caminho na árvore T_φ que começa no ponto l_i , passa pelo ponto p , e é parametrizada por $\hat{\varphi} \circ \gamma_i^p(t) = \hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon t$, com $t \in [-\delta_i^p, +\infty)$. Em outras palavras, esse caminho sai da folha l_i , segue para p sem desviar para nenhuma outra folha, e então segue para a “raiz” da árvore. Além disso, ao pegarmos dois caminhos distintos, ambos vão se encontrar em algum ponto, e então fundir-se-ão em apenas um a partir disto. Observe também que como $\hat{\varphi}(\gamma_i^p(0)) = \hat{\varphi} \circ \gamma_i^p(0) = \hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon \cdot 0 = \hat{\varphi}(p)$, então $\gamma_i^p(0) = p$. Desse modo, a partir do ponto p , os dois caminhos com certeza já estarão fundidos. Os itens e as notações que aparecerem nesta construção estão ilustrados na figura 5.9.

Considere $H : T_\varphi \times [0, 1] \rightarrow T_\varphi$, dada por $H(p, s) = \gamma_i^p(s)$, onde l_i é qualquer folha que esteja ligada à p pela construção anterior. Temos então que H está bem definida, uma vez que, dados $i, j \in [0, 1]$ tal que p está ligado à l_i e também à l_j , de acordo com a construção anterior, temos

$$\gamma_i^p(t) = \hat{\varphi}^{-1}(\overbrace{\hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon t}^{> \hat{\varphi}(p)}) = \gamma_j^p(t).$$

Veja ainda que $H(p, 0) = \gamma_i^p(0) = p$, $H(p, 1) = i_{\varphi}^{2\varepsilon}(p)$ e $\hat{\varphi}(H(p, s)) = \hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon t$, para todo $p \in T_\varphi$ e $t \in [0, 1]$. Resta mostrarmos a continuidade de H .

Seja $\varepsilon > 0$, e considere $q_0 = H(p_0, t_0)$, onde $(p_0, t_0) \in T_\varphi$ é arbitrário. Seja V uma vizinhança de p_0 em T_ε . Dado $\eta > 0$ e $q \in T_\varphi$, seja $U(q, \eta)$ uma componente conexa de $\hat{\varphi}^{-1}((\hat{\varphi}(q) - \eta, \hat{\varphi}(q) + \eta))$ que contém q . Veja que podemos tomar $\eta > 0$ pequeno o suficiente para que $U(q_0, \eta) \subset V$. Seja $J(t_0) = (t_0 - \eta/4\varepsilon, t_0 + \eta/4\varepsilon) \cap [0, 1]$. Temos $p \in U(p_0, \eta/2)$ e $t \in J(t_0)$, e ainda $U(p_0, \eta/2)$ é um aberto de T_φ e $J(t_0)$ é um aberto de $[0, 1]$, portanto $U(p_0, \eta/2) \times J(t_0)$ é uma vizinhança aberta de (p_0, t_0) em $T_\varphi \times [0, 1]$. Temos que, dado $(p, t) \in U(p_0, \eta/2) \times J(t_0)$, valem as desigualdades

$$\hat{\varphi}(p_0) - \eta/2 < \hat{\varphi}(p) < \hat{\varphi}(p_0) + \eta/2 \quad \text{e} \quad t_0 - \frac{\eta}{4\varepsilon} < t < t_0 + \frac{\eta}{4\varepsilon}.$$

Agora, multiplicando a segunda desigualdade por 2ε e somando-a com a primeira, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(p_0) - \eta/2 + 2\varepsilon \left(t_0 - \frac{\eta}{4\varepsilon} \right) &< \hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon t < \hat{\varphi}(p_0) + \eta/2 + 2\varepsilon \left(t_0 + \frac{\eta}{4\varepsilon} \right) \Rightarrow \\ \hat{\varphi}(p_0) + 2\varepsilon t_0 - \eta &< \hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon t < \hat{\varphi}(p_0) + 2\varepsilon t_0 + \eta. \end{aligned}$$

Usando que $\hat{\varphi}(H(p, t)) = \hat{\varphi}(p) + 2\varepsilon t$, e $\hat{\varphi}(q_0) = \hat{\varphi}(H(p_0, t_0)) = \hat{\varphi}(p_0) + 2\varepsilon t_0$, temos

$$\hat{\varphi}(q_0) - \eta < \hat{\varphi}(H(p, t)) + 2\varepsilon t_0 < \hat{\varphi}(q_0) + \eta.$$

Disto, obtemos que $H(U(p_0, \eta/2) \times J(t_0)) \subset U(q_0, \eta) \subset V$, uma vez que, dados $(p, t) \in$

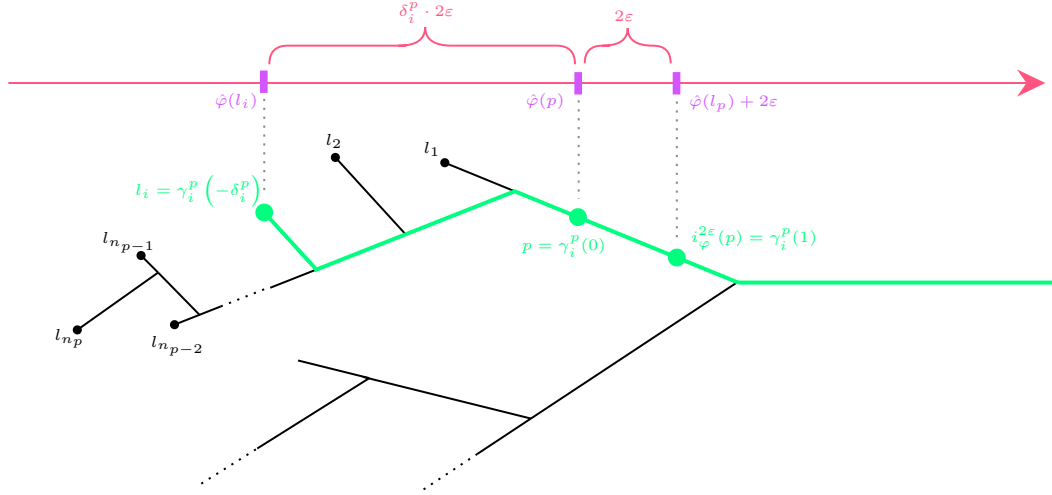


Figura 5.9: Elementos da demonstração do Teorema 5.37.

$U(p_0, \eta/2) \times J(t_0)$, mostramos que $H(p, t)$ pertence à componente conexa de $\hat{\varphi}^{-1}((\hat{\varphi}(q_0) - \eta, \hat{\varphi}(q_0) + \eta))$ que contém q_0 . Desse modo, H é contínua.

Portanto, H é uma 2ε -homotopia entre a identidade em T_φ e $i_\varphi^{2\varepsilon}$. Analogamente, podemos construir uma 2ε -homotopia K entre T_ψ e $i_\psi^{2\varepsilon}$. Portanto, $(f^\varepsilon, g^\varepsilon)$ é um par de ε -equivalência de homotopia com respeito ao par $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$. Assim, $d_{HT} \leq d_I$.

Mostremos agora que $d_I \geq d_{HT}$. Sejam $f : T_\varphi \rightarrow T_\psi$ e $g : T_\psi \rightarrow T_\varphi$ tais que (f, g) são um par de equivalência de ε -homotopia com respeito à $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$, para algum $\varepsilon \geq 0$. Para qualquer $p \in T_\varphi$ e $q \in T_\psi$, defina:

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(p) &:= \left(i_\psi^{\hat{\varphi}(p) + \varepsilon - \hat{\psi}(f(p))} \circ f \right) (p) \\ g^\varepsilon(q) &:= \left(i_\varphi^{\hat{\psi}(q) + \varepsilon - \hat{\varphi}(g(q))} \circ g \right) (q). \end{aligned}$$

Em outras palavras, f^ε leva o ponto p em $f(p) \in T_\psi$, e então aplica o shift em $f(p)$, até que ele chegue no nível $\hat{\varphi}(p) + \varepsilon - \hat{\psi}(f(p))$. g^ε pode ser interpretado de forma análoga. Assim, pela construção de f^ε e pela própria definição do shift, temos $(\hat{\psi} \circ f^\varepsilon)(p) = \hat{\psi}(f(p)) + (\hat{\varphi}(p) + \varepsilon - \hat{\psi}(f(p))) = \hat{\varphi}(p) + \varepsilon$, ou seja, $\hat{\psi} \circ f^\varepsilon = \hat{\varphi} + \varepsilon$. Analogamente, $\hat{\varphi} \circ g^\varepsilon = \hat{\psi} + \varepsilon$. Ainda, $f^\varepsilon \circ g^\varepsilon = i_\psi^{2\varepsilon}$ e $g^\varepsilon \circ f^\varepsilon = i_\varphi^{2\varepsilon}$. Como f^ε e g^ε são contínuas (pois são composições de funções contínuas), temos que f^ε e g^ε constituem um par de funções ε -compatíveis. Daí, temos $d_I \leq d_{HT}$. $\square$

5.7 d_{HT} pode ser vista como uma distância intercalante, usando categorias

5.7.1 Definição funtorial de distância intercalante

Dado $n \geq 1$, denotemos por $\mathbf{R}^n$ a categoria *poset* com conjunto de objetos $\mathbf{R}^n$, cuja relação parcial é a definida no início deste capítulo. Seja $\mathbf{O}$ uma categoria arbitrária. Começaremos com uma definição geral sobre a distância intercalante entre funtores de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{O}$.

Definição 5.38. Seja $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{O}$ um funtor, e considere $\varepsilon \succeq 0$. O ε -shift em T é o funtor $T_\varepsilon : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{O}$ tal que:

- $T_\varepsilon(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u} + \varepsilon)$;
- $T_\varepsilon(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \varepsilon \preceq \mathbf{v} + \varepsilon)$.

Dados dois funtores $T, T' : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{O}$, uma transformação natural $\xi : T \Rightarrow T'$ entre esses dois funtores, consiste de um morfismo $\xi_{\mathbf{u}} : T(\mathbf{u}) \rightarrow T'(\mathbf{u})$ em $\mathbf{O}$, para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, de modo que, para cada $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbf{u}) & \xrightarrow{\xi_{\mathbf{u}}} & T'(\mathbf{u}) \\ \downarrow T(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) & & \downarrow T'(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \\ T(\mathbf{v}) & \xrightarrow{\xi_{\mathbf{v}}} & T'(\mathbf{v}) \end{array} \quad (5.4)$$

Definição 5.39. Dados dois funtores $T, T' : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{O}$ e um número real $\varepsilon \geq 0$, T e T' são ditos ε -intercalados se existirem transformações naturais $\xi : T \Rightarrow T'_\varepsilon$ e $\eta : T' \Rightarrow T_\varepsilon$ de modo que, para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, $\eta_{\mathbf{u}+\varepsilon} \circ \xi_{\mathbf{u}} = T(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\varepsilon)$ e $\xi_{\mathbf{u}+\varepsilon} \circ \eta_{\mathbf{u}} = T'(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\varepsilon)$. Nesse caso, o par (ξ, η) é chamado de ε -intercalação entre T e T' .

Definição 5.40. Dados dois funtores $T, T' : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{O}$, a distância intercalante entre T e T' é definida como

$$d_I^{\mathbf{O}}(T, T') := \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid T \text{ e } T' \text{ são } \varepsilon\text{-intercalados}\}.$$

Como já feito nas outras distâncias geradas a partir do ínfimo de um conjunto, caso não exista ε -intercalação entre T e T' , definimos $d_I^{\mathbf{O}}(T, T') = \infty$.

Proposição 5.41. *Seja $\mathbf{O}$ uma categoria arbitrária, e seja $\mathbf{O}^{\mathbf{R}}$ a categoria dos funtores de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{O}$. Segue que $d_I^{\mathbf{O}}$ é uma pseudométrica estendida dos objetos de $\mathbf{O}^{\mathbf{R}}$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], Teorema 2.3.5. □

Nas próximas subseções, consideraremos escolhas específicas para a categoria $\mathbf{O}$. Quando não houver risco de confusão, omitiremos o índice da categoria na distância, escrevendo simplesmente d_I .

5.7.2 A distância intercalante entre funções com contradomínio em $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathbf{O} = \mathbf{Top}/\mathbb{R}_{\succeq}^n$ a categoria de todas as funções contínuas $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde as $\vec{0}$ -aplicações são morfismos: um morfismo entre φ_X e φ_Y é uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ de modo que $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$.

Proposição 5.42. *Toda função contínua $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ define um funtor $T^{\varphi_X} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{Top}/\mathbb{R}_{\succeq}^n$, definido por:*

- para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $T^{\varphi_X}(\mathbf{u}) := \varphi_X - \mathbf{u}$;
- para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$, $T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) := \text{id}_X$.

Demonstração. Para $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$, $\text{id}_X : X \rightarrow X$ é um morfismo entre $\varphi_X - \mathbf{u}$ e $\varphi_X - \mathbf{v}$, pois $(\varphi_X - \mathbf{v}) \circ \text{id}_X \preceq \varphi_X - \mathbf{u}$. Temos ainda que se $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$, $T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{w}) = \text{id}_X = \text{id}_X \circ \text{id}_X = T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \circ T^{\varphi_X}(\mathbf{v} \preceq \mathbf{w})$. Ainda, $T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u}) = \text{id}_X$. Desse modo, T^{φ_X} satisfaz todas as condições de um funtor. $\square$

Proposição 5.43. *Para todo $\varepsilon \succeq 0$ e todo φ_X , o ε -shift de T^{φ_X} , denotado por $T_{\varepsilon}^{\varphi_X}$, coincide com o funtor $T^{\varphi_X - \varepsilon} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{Top}/\mathbb{R}_{\succeq}^n$.*

Demonstração. Da proposição anterior e da definição 5.38, temos, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$,

1. $T_{\varepsilon}^{\varphi_X}(\mathbf{u}) = T^{\varphi_X}(\mathbf{u} + \varepsilon) = \varphi_X - (\mathbf{u} + \varepsilon) = \varphi_X - \mathbf{u} - \varepsilon = T^{\varphi_X - \varepsilon}(\mathbf{u})$;
2. $T_{\varepsilon}^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = T_{\varepsilon}^{\varphi_X}(\mathbf{u} + \varepsilon \preceq \mathbf{v} + \varepsilon) = \text{id}_X = T^{\varphi_X - \varepsilon}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v})$.

Como os funtores coincidem em todos os objetos e em todos os morfismos da categoria $\mathbf{R}^n$, então são iguais. $\square$

Lema 5.44. *Sejam X e Y espaços topológicos, e considere $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas funções contínuas. Então, qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, com $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$, induz uma transformação natural $\xi^f : T^{\varphi_X} \rightarrow T^{\varphi_Y}$, de modo que, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\xi^f(\mathbf{u})$ coincide com f . Reciprocamente, cada transformação natural $\xi : T^{\varphi_X} \Rightarrow T^{\varphi_Y}$ corresponde a uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, que satisfaz $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$, e é definida por $f = \xi(\mathbf{u})$ para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua tal que $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$. Definimos $\xi^f : T^{\varphi_X} \Rightarrow T^{\varphi_Y}$ da seguinte maneira: para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\xi^f(\mathbf{u}) := f$. Verifiquemos que é de fato uma transformação natural. Para cada $\mathbf{u}$, $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$, o que implica $(\varphi_Y - \mathbf{u}) \circ f \preceq \varphi_X - \mathbf{u}$, logo f é um morfismo entre $\varphi_X - \mathbf{u}$ e $\varphi_Y - \mathbf{u}$, portanto $\xi^f(\mathbf{u}) : T^{\varphi_X}(\mathbf{u}) \rightarrow T^{\varphi_Y}(\mathbf{u})$. Além disso, como $f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f$, temos que

$$\xi^f(\mathbf{u}) \circ T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = T^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \circ \xi^f(\mathbf{v}).$$

Desse modo, temos que o diagrama (5.4) comuta, ou seja, ξ^f é uma transformação natural. ($\Leftarrow$) Suponha que exista uma transformação natural $\xi : T^{\varphi_X} \Rightarrow T^{\varphi_Y}$. Assim, para cada $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, o diagrama (5.4) comuta, ou seja,

$$\xi(\mathbf{u}) \circ T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = T^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \circ \xi(\mathbf{v}).$$

Entretanto, por definição, temos $T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = \text{id}_X$ e $T^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = \text{id}_Y$. Logo, $\xi(\mathbf{u}) = \xi(\mathbf{v})$ sempre que $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$. Assim, é suficiente definir $f := \xi(\mathbf{u})$. $\square$

Agora, com auxílio do lema e da proposição anteriores, mostraremos que a distância intercalante entre funtores T^{φ_X} e T^{φ_Y} em $\mathbf{Top}/\mathbb{R}_{\preceq}^n$ coincide com a pseudo-distância natural.

Teorema 5.45. *Sejam X e Y espaços topológicos. Então, para qualquer par de funções contínuas $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, segue que*

$$d_I(T^{\varphi_X}, T^{\varphi_Y}) = d_{NP}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)).$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que $d_I \leq d_{NP}$. Veja que se X e Y não são homeomorfos, então $d_{NP} = \infty$, portanto não há o que demonstrar. Vamos supor então que existe um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$, com $\|\varphi_X - \varphi_Y \circ f\|_{\infty} \leq \varepsilon$, para algum $\varepsilon \geq 0$. Segue então que $(\varphi_Y - \varepsilon) \circ f \preceq \varphi_X$ e $(\varphi_X - \varepsilon) \circ f^{-1} \preceq \varphi_Y$. Isso acontece pois $\|\varphi_X - \varphi_Y \circ f\|_{\infty} \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in X} \|(\varphi_X - \varphi_Y \circ f)(x)\|_{\infty} \leq \varepsilon \Rightarrow \|(\varphi_X - \varphi_Y \circ f)(x)\|_{\infty} \leq \varepsilon$, para todo x , logo $|\varphi_X^i(x) - (\varphi_Y \circ f)^i(x)| \leq \varepsilon$, de onde obtemos $-\varepsilon \leq \varphi_X^i(x) - (\varphi_Y \circ f)^i(x) \leq \varepsilon$. Usando a primeira desigualdade, chegamos em $(\varphi_Y \circ f)^i(x) - \varepsilon \leq \varphi_X^i(x)$, e enxergando ε como a função constante, temos $((\varphi_Y - \varepsilon) \circ f)^i(x) \leq \varphi_X^i(x)$. Como a desigualdade é válida para toda coordenada i , obtemos $(\varphi_Y - \varepsilon) \circ f \preceq \varphi_X$. Desenvolvendo o lado direito da desigualdade envolvendo o ε , obtemos $(\varphi_X - \varepsilon) \circ f^{-1} \preceq \varphi_Y$. Pelo lema anterior, f induz uma transformação natural ξ^f de T^{φ_X} em $T^{(\varphi_Y - \varepsilon)}$, assim como uma transformação natural $\xi^{f^{-1}}$ de T^{φ_Y} em $T^{(\varphi_X - \varepsilon)}$. Pela proposição anterior, $T^{\varphi_X - \varepsilon} = T_{\varepsilon}^{\varphi_X}$ e $T^{\varphi_Y - \varepsilon} = T_{\varepsilon}^{\varphi_Y}$. Além disso, $\xi^f(\mathbf{u}) = f$ e $\xi^{f^{-1}}(\mathbf{u} + \varepsilon) = f^{-1}$. Assim, $\xi^{f^{-1}}(\mathbf{u} + \varepsilon) \circ \xi^f(\mathbf{u}) = f^{-1} \circ f = \text{id}_X = T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\varepsilon)$. Analogamente, $\xi^f(\mathbf{u} + \varepsilon) \circ \xi^{f^{-1}}(\mathbf{u}) = T^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\varepsilon)$. Portanto, o par $(\xi^f, \xi^{f^{-1}})$ é uma ε -intercalação entre T^{φ_X} e T^{φ_Y} , provando que $d_I \leq d_{NP}$ quando os

espaços são homeomorfos. Com isso, temos $d_I \leq d_{NP}$ sempre.

Agora, vamos mostrar que $d_{NP} \leq d_I$. Se não houver intercalação entre T^{φ_X} e T^{φ_Y} , então $d_I = \infty$, e portanto a desigualdade segue diretamente. Vamos supor então que T^{φ_X} e T^{φ_Y} são ε -intercalados para algum $\varepsilon \geq 0$, onde a ε -intercalação é (ξ, η) , com $\xi : T^{\varphi_X} \Rightarrow T^{\varphi_Y}$ e $\eta : T^{\varphi_Y} \Rightarrow T^{\varphi_X}$. Pela definição de ε -intercalação, para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\eta(\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}) \circ \xi(\mathbf{u}) = T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon})$, e $\xi(\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}) \circ \eta(\mathbf{u}) = T^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon})$. Pelo lema e pela proposição anteriores, existem duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\xi(\mathbf{u}) = f$, $\eta(\mathbf{u}) = g$, $(\varphi_Y - \vec{\varepsilon}) \circ f \preceq \varphi_X$ e $(\varphi_X - \vec{\varepsilon}) \circ g \preceq \varphi_Y$. Como $\eta(\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}) \circ \xi(\mathbf{u}) = T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon})$ e $\xi(\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}) \circ \eta(\mathbf{u}) = T^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon})$, segue que $g \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ g = \text{id}_Y$. Assim, $g = f^{-1}$ e $\|\varphi_X - \varphi_Y \circ f\|_\infty \leq \varepsilon$. Portanto, $d_{NP} \leq d_I$.

Provadas as duas desigualdades, concluímos então que $d_{NP} = d_I$. $\square$

5.7.3 A distância intercalante entre funções a menos de homotopia

Fixemos $\mathbf{O} = \mathbf{hTop}/\mathbb{R}_{\leq}^n$ a categoria cujos objetos são as funções contínuas $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, e os morfismos sendo as classes de $\vec{0}$ -homotopia de $\vec{0}$ -aplicações entre X e Y : dados φ_X e φ_Y objetos de $\mathbf{O}$, um morfismo de φ_X em φ_Y é uma classe de $\vec{0}$ -homotopia com respeito a (φ_X, φ_Y) de uma $\vec{0}$ -aplicação $f : X \rightarrow Y$, isto é, uma aplicação contínua entre X e Y de modo que $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$. Tal classe será denotada por $[f]_{(\varphi_X, \varphi_Y)}$. Veja que se $f' \in [f]_{(\varphi_X, \varphi_Y)}$, então f e f' são $\vec{0}$ -homotópicas, logo, por definição, temos que existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $f \equiv H(\cdot, 0)$, $f' \equiv H(\cdot, 1)$ e $H(\cdot, t)$ é tal que $\varphi_Y \circ H(\cdot, t) \preceq \varphi_X$, para todo $t \in [0, 1]$.

A composição de morfismos será definida de seguinte maneira: dados φ_X , φ_Y e φ_Z objetos em $\mathbf{O}$, e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sendo $\vec{0}$ -aplicações com respeito a (φ_X, φ_Y) e (φ_Y, φ_Z) , respectivamente, definimos:

$$[g]_{(\varphi_Y, \varphi_Z)} \circ [f]_{(\varphi_X, \varphi_Y)} = [g \circ f]_{(\varphi_X, \varphi_Z)}.$$

Veja que isto está bem definido, pois como $\varphi_Z \circ g \preceq \varphi_Y$ e $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$,

$$(\varphi_Z \circ g) \circ f \preceq \varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X,$$

e, além disso, a composição não depende dos representantes das classes. De fato, tomando $[f] = [f']$, existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $f \equiv H(\cdot, 0)$, $f' \equiv H(\cdot, 1)$ e $\varphi_Y \circ H(\cdot, t) \preceq \varphi_X$, para todo $t \in [0, 1]$. Tomando $K : X \times [0, 1] \rightarrow Z$ dado por $g \circ H$, temos: $(g \circ H)(\cdot, 0) = g \circ f$, $(g \circ H)(\cdot, 1) = g \circ f'$, e $\varphi_Z \circ (g \circ H)(\cdot, t) = (\varphi_Z \circ g)(H(\cdot, t)) \preceq \varphi_Y \circ H(\cdot, t) \preceq \varphi_X$. Observe que na primeira desigualdade, usamos que g é $\vec{0}$ -aplicação. Com isso, mostramos que $K = g \circ H$ é uma $\vec{0}$ -homotopia entre $g \circ f$ e $g \circ f'$. Em outras palavras, temos $[g \circ f] = [g \circ f']$. De maneira análoga, podemos mostrar que se $[g] = [g']$, então $[g \circ f] = [g' \circ f]$. Assim,

$[g \circ f] = [g' \circ f']$, o que mostra que realmente a composição dos morfismos não depende do representante das classes. Temos que a composição é associativa, e para qualquer objeto (X, φ_X) , a classe de $\vec{0}$ -homotopia da identidade id_X com respeito a (φ_X, φ_X) é um morfismo de (X, φ_X) em (X, φ_X) .

Observe que, ao longo desta subseção, as construções e demonstrações serão muito parecidas com as feitas na subseção anterior.

Proposição 5.46. *Toda função contínua $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ define um funtor $hT^{\varphi_X} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{hTop}/\mathbb{R}_{\succeq}^n$, fazendo:*

- para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $hT^{\varphi_X}(\mathbf{u}) := \varphi_X - \mathbf{u}$;
- para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$, $hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) := [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{v})}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$. Observe que $(\varphi_X - \mathbf{v}) \circ \text{id}_X \preceq \varphi_X - \mathbf{u}$, enxergando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como funções constante. Logo, $[\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{v})}$ é um morfismo entre $\varphi_X - \mathbf{u}$ e $\varphi_X - \mathbf{v}$. Temos ainda que se $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$, $hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{w}) = [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{w})} = [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{v}, \varphi_X - \mathbf{w})} \circ [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{v})} = T^{\varphi_X}(\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}) \circ T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v})$. Ainda, $T^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u}) = [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{u})}$. Desse modo, T^{φ_X} satisfaz todas as condições de um funtor. $\square$

Vamos considerar agora os ε -shifts dos funtores hT^{φ_X} .

Proposição 5.47. *Dado $\varepsilon \succeq \vec{0}$, e para todo φ_X , o ε -shift de hT^{φ_X} , $hT_{\varepsilon}^{\varphi_X} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{hTop}/\mathbb{R}_{\succeq}^n$ coincide com o funtor $hT^{\varphi_X - \varepsilon} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{hTop}/\mathbb{R}_{\succeq}^n$.*

Demonstração. Da definição 5.38 e da proposição anterior, temos que, dados $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

1. $hT_{\varepsilon}^{\varphi_X}(\mathbf{u}) = hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} + \varepsilon) = \varphi_X - (\mathbf{u} + \varepsilon) = (\varphi_X - \varepsilon) - \mathbf{u} = hT^{\varphi_X - \varepsilon}(\mathbf{u})$;
2. $hT_{\varepsilon}^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} + \varepsilon \preceq \mathbf{v} + \varepsilon) = [\text{id}_X]_{(\varphi_X - (\mathbf{u} + \varepsilon), \varphi_X - (\mathbf{v} + \varepsilon))} = hT^{\varphi_X - \varepsilon}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v})$.

$\square$

O próximo lema descreve as transformações naturais entre hT^{φ_X} e hT^{φ_Y} .

Lema 5.48. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções contínuas. Então, qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ que satisfaz $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$ induz uma transformação natural $h\xi^f : hT^{\varphi_X} \Rightarrow hT^{\varphi_Y}$, de modo que, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $h\xi^f(\mathbf{u}) = [f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})}$. Reciprocamente, para qualquer transformação natural $h\xi : hT^{\varphi_X} \Rightarrow hT^{\varphi_Y}$, com $h\xi(\mathbf{u}) = [f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})}$, e para todo $\alpha \succeq \vec{0}$, $f_{\mathbf{u}}$ e $f_{\mathbf{u} + \alpha}$ são α -homotópicos com respeito ao par (φ_X, φ_Y) , para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $f : X \rightarrow Y$ tal que $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$. Defina $h\xi^f(\mathbf{u}) : hT^{\varphi_X} \rightarrow hT^{\varphi_Y}$ da seguinte maneira: para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $h\xi^f(\mathbf{u}) := [f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})}$. Vamos mostrar que $h\xi^f$ é de fato uma transformação natural. Para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_Y \circ f \preceq \varphi_X$, logo

$(\varphi_Y - \mathbf{u}) \circ f \preceq \varphi_X - \mathbf{u}$, assim f é um morfismo entre $\varphi_X - \mathbf{u}$ e $\varphi_Y - \mathbf{u}$. Além disso, como $[f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})} \circ [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{u})} = [\text{id}_Y]_{(\varphi_Y - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})} \circ [f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})}$, temos

$$h\xi^f(\mathbf{u}) \circ hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) = hT^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \circ h\xi^f(\mathbf{v}).$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $h\xi$ é uma transformação natural entre hT^{φ_X} e hT^{φ_Y} , com $h\xi(\mathbf{u}) = [f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})}$, e tome $\alpha \succeq 0$. Veja que o diagrama (5.4) comuta, para quaisquer $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$. Em particular, para $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \alpha$, temos:

$$h\xi(\mathbf{u} + \alpha) \circ hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + \alpha) = hT^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + \alpha) \circ h\xi(\mathbf{u}).$$

Substituindo $h\xi$ por sua definição, e hT^{φ} pela definição feita na penúltima proposição, temos

$$[f_{\mathbf{u}+\alpha}]_{(\varphi_X - \mathbf{u} - \alpha, \varphi_Y - \mathbf{u} - \alpha)} \circ [\text{id}_X]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{u} - \alpha)} = [\text{id}_Y]_{(\varphi_Y - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u} - \alpha)} \circ [f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u})}.$$

Daí, usando a definição da composição dos morfismos, e como compor a identidade com uma função resulta na própria função, temos $[f_{\mathbf{u}+\alpha}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u} - \alpha)} = [f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u} - \alpha)}$. Isso garante que $f_{\mathbf{u}}$ e $f_{\mathbf{u}+\alpha}$ são α -homotópicos com relação ao par (φ_X, φ_Y) . $\square$

Finalmente, podemos provar que a distância intercalante entre funtores hT^{φ_X} e hT^{φ_Y} na categoria $\mathbf{hTop}/\mathbb{R}_{\geq}^n$ coincide com a *persistent homotopy type distance*.

Teorema 5.49. *Sejam X e Y espaços topológicos. Segue então que, para todo par de funções contínuas $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$,*

$$d_I(hT^{\varphi_X}, hT^{\varphi_Y}) = d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)).$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $d_I \leq d_{HT}$. Se X e Y não são homotopicamente equivalentes, $d_{HT} = \infty$ e portanto, não há o que demonstrar. Suponha então que existam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ de modo que (f, g) é um par de equivalências de ε -homotopia com respeito ao par (φ_X, φ_Y) . Então, temos $(\varphi_Y - \varepsilon) \circ f \preceq \varphi_X$ e $(\varphi_X - \varepsilon) \circ g \preceq \varphi_Y$. Pelo lema anterior, f induz uma transformação natural $h\xi^f : hT^{\varphi_X} \Rightarrow hT^{\varphi_Y - \varepsilon}$ com $h\xi^f(\mathbf{u}) = [f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \varepsilon - \mathbf{u})}$, e g induz uma transformação natural $h\xi^g : hT^{\varphi_Y} \Rightarrow hT^{\varphi_X - \varepsilon}$ com $h\xi^g(\mathbf{u}) = [g]_{(\varphi_Y - \mathbf{u}, \varphi_X - \varepsilon - \mathbf{u})}$. Pela proposição anterior,

$hT^{\varphi_X - \varepsilon} = hT_{\varepsilon}^{\varphi_X}$ e $hT^{\varphi_Y - \varepsilon} = hT_{\varepsilon}^{\varphi_Y}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} h\xi^g(\mathbf{u} + \varepsilon) \circ h\xi^f(\mathbf{u}) &= [g]_{(\varphi_Y - \varepsilon - \mathbf{u}, \varphi_X - 2\varepsilon - \mathbf{u})} \circ [f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \varepsilon - \mathbf{u})} \\ &= [g \circ f]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - 2\varepsilon - \mathbf{u})} \\ &= [g \circ f]_{(\varphi_X, \varphi_X - 2\varepsilon)} \\ &= [\text{id}_X]_{(\varphi_X, \varphi_X - 2\varepsilon)} \\ &= hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

De modo análogo, temos $h\xi^f(\mathbf{u} + \varepsilon) \circ h\xi^g(\mathbf{u}) = hT^{\varphi_Y}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\varepsilon)$. Assim, o par $(h\xi^f, h\xi^g)$ é uma $\|\varepsilon\|_{\infty}$ -intercalação entre hT^{φ_X} e hT^{φ_Y} , provando que $d_I \leq d_{HT}$.

Agora, mostremos que $d_{HT} \leq d_I$. Veja que, se hT^{φ_X} e hT^{φ_Y} não são ε -intercalados, então $d_I = \infty$, não havendo o que demonstrar. Suponha então que exista uma ε -intercalação $(h\xi, h\eta)$. Da proposição anterior, temos que, para todo $\mathbf{u}$, existe uma $\vec{0}$ -aplicação contínua $f_{\mathbf{u}} : X \rightarrow Y$ com respeito ao par $(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u} - \vec{\varepsilon})$, de modo que $[f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \mathbf{u} - \vec{\varepsilon})} = h\xi(\mathbf{u})$, e uma $\vec{0}$ -aplicação contínua $g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}} : Y \rightarrow X$ com respeito ao par $(\varphi_Y - \mathbf{u} - \varepsilon, \varphi_X - \mathbf{u} - 2\vec{\varepsilon})$ tal que $[g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}]_{(\varphi_Y - \mathbf{u} - \varepsilon, \varphi_X - \mathbf{u} - 2\vec{\varepsilon})} = h\eta(\mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon})$. Veja que $f_{\mathbf{u}}$ e $g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}$ são $\vec{\varepsilon}$ -aplicações com respeito a (φ_X, φ_Y) e (φ_Y, φ_X) , respectivamente. Pela definição de $\vec{\varepsilon}$ -intercalação, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $h\eta(\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}) \circ h\xi(\mathbf{u}) = hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon})$. Substituindo $h\xi, h\eta, hT^{\varphi_X}$ de acordo com suas definições apresentadas acima, obtemos

$$\begin{aligned} [g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}} \circ f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{u} - 2\vec{\varepsilon})} &= [g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}]_{(\varphi_Y - \vec{\varepsilon} - \mathbf{u}, \varphi_X - 2\vec{\varepsilon} - \mathbf{u})} \circ [f_{\mathbf{u}}]_{(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_Y - \vec{\varepsilon} - \mathbf{u})} \\ &= h\eta(\mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon}) \circ h\xi(\mathbf{u}) = hT^{\varphi_X}(\mathbf{u} \preceq \mathbf{u} + 2\vec{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Assim, $g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}} \circ f_{\mathbf{u}}$ é $\vec{0}$ -homotópica à id_X com respeito ao par $(\varphi_X - \mathbf{u}, \varphi_X - \mathbf{u} - 2\vec{\varepsilon})$, ou seja, é $2\vec{\varepsilon}$ -homotópica à identidade, com respeito ao par (φ_X, φ_X) . Analogamente, podemos mostrar que $f_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}} \circ g_{\mathbf{u}}$ é $2\vec{\varepsilon}$ -homotópica à id_Y com respeito ao par (φ_Y, φ_Y) . Porém, pelo lema anterior, temos que $f_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}$ é $\vec{\varepsilon}$ -homotópica à $f_{\mathbf{u}}$ com respeito a (φ_X, φ_Y) , e $g_{\mathbf{u}}$ é $\vec{\varepsilon}$ -homotópica à $g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}$ com respeito ao par (φ_Y, φ_X) . Segue então que $f_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}} \circ g_{\mathbf{u}}$ é $2\vec{\varepsilon}$ -homotópica a $f_{\mathbf{u}} \circ g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}$ com respeito à (φ_Y, φ_Y) , portanto $f_{\mathbf{u}} \circ g_{\mathbf{u} + \vec{\varepsilon}}$ é $2\vec{\varepsilon}$ -homotópica à identidade id_Y . Desse modo, temos $d_{HT}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \leq \varepsilon \leq d_I(hT^{\varphi_X}, hT^{\varphi_Y})$.

Provadas as duas desigualdades, concluímos a igualdade entre as duas distâncias.

□

Referências

- [1] CHAZAL, F. et al. Springerbriefs in mathematics. In: SPRINGER (Ed.). *The Structure and Stability of Persistence Modules*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2016.
- [2] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. Persistent homology—a survey. *Contemporary Mathematics*, p. 257–282, 2008.
- [3] FROSINI, P.; LANDI, C.; MÉMOLI, F. The persistent homotopy type distance. *Homology, Homotopy and Applications*, v. 21(2), p. 231–259, 2019.
- [4] MOROZOV, D.; BEKETAYEV, K.; WEBER, G. Interleaving distance between merge trees. *Manuscrito apresentado na TopoInVis 2013*.
- [5] BOISSONNAT, J. D.; CHAZAL, F.; YVINEC, M. *Geometric and topological inference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [6] FROSINI, P.; MULAZZANI, M. Size homotopy groups for computation of natural size distances. *Bull. Belg. Math. Soc.*, v. 6, p. 455–464, 1999.
- [7] HATCKER, A. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [8] ROTMAN, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer, 1988.
- [9] HENRIKSON, J. Completeness and total boundedness of the hausdorff metric. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, p. 69–60, 1999.
- [10] CONCI, A.; KUBRUSLY, C. Distance between sets-a survey. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, v. 26, p. 1–18, 2017.
- [11] RATAJ, J.; ZAJICEK, L. Critical values and level sets of distance functions in riemannian, alexandrov and minkowski spaces. *Houston J. Math*, v. 38, p. 435–467, 2012.
- [12] HIRSCH, M. W. Graduate texts in mathematics. In: SPRINGER (Ed.). *Differential Topology*. New York: Springer, 1976.
- [13] BUBENIK, P.; SCOTT, J. A. Categorification of persistent homology. *Discrete Comput. Geom.*, p. 600–627, 2014.

-
- [14] BUBENIK, P.; SILVA, V. da; SCOTT, J. Metrics for generalized persistence modules. *Found. Comput. Math.*, v. 15, p. 1501–1531, 2015.
 - [15] BIASOTTI, S. et al. Describing shapes by geometrical-topological properties of real functions. *ACM Comput. Surv.*, v. 40, p. 12:1–12:87, 2008.
 - [16] COHEN-STEINER, D.; EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. Stability of persistence diagrams. *Discrete Comput. Geom.*, v. 37, p. 103–120, 2007.
 - [17] FRITSCH, R.; PICCININI, R. A. *Cellular structures in topology*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
 - [18] GASPAROTTO, F. *Estrutura e estabilidade de módulos de persistência*. Dissertação (Mestrado) — Ibilce-Unesp, 2017.
 - [19] SOUZA, M. P. *Classificação de imagens tridimensionais por meio de homologia persistente e imagem de persistência*. Dissertação (Mestrado) — Ibilce-Unesp, 2022.