

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“Controle com Modos Deslizantes Aplicado em Sistemas
com Atraso e Acesso Somente à Saída”**

GRACILIANO ANTONIO DAMAZO

Orientador: Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha
Solteira, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira – SP
junho/2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

D155c Damazo, Graciliano Antonio.
 Controle com modos deslizantes aplicado em sistemas com atraso e acesso somente
 à saída / Graciliano Antonio Damazo. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2008
 98 f.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2008

 Orientador: José Paulo Fernandes Garcia
 Bibliografia: p. 95-98

 1. Modos deslizantes. 2. Controle discreto. 3. Observador robusto. 4. Atraso com-
putacional.

A Deus pelo amor incondicional e por permitir-me viver ao lado de pessoas maravilhosas que me ajudam a evoluir como pessoa e espírito no meu caminhar.

OFEREÇO

Aos meus pais, Fabrício e Isabel, pelo apoio, confiança e, principalmente, pelo amor que me fortalece nos momentos mais difíceis.

DEDICO

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a **Deus**, inteligência suprema e causa primária de todas as coisas, por mais um passo em minha longa caminhada de evolução.

Aos meus pais que, com muito sacrifício e paciência, me fortalecem para transpor meus obstáculos, transmitem sabedoria de viver e fazem a minha vida ter sentido.

A minha noiva, **Stefania**, pelo amor, amizade e carinho que me renova e me torna mais forte a cada dia para enfrentar as dificuldades.

As minhas irmãs **Alessandra** e **Fabricia**, pela força, carinho e amizade que são imprescindíveis na minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. **José Paulo**, pela sabedoria, compreensão, conselhos, educação e confiança que enriqueceram minha vida acadêmica e resultou neste trabalho. Minha gratidão.

A professora **Lizete**, que participou de minha graduação e teve uma participação efetiva e muito importante no desenvolvimento do meu trabalho de pós-graduação.

Aos professores **Edvaldo** e **Marcelo** pelos conselhos, confiança, contribuições na minha formação e principalmente pela amizade.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação pela ajuda e apoio que me deram.

RESUMO

O enfoque principal do trabalho foi dado ao Controle Discreto com Modos Deslizantes(CDMD) aplicado em sistemas que possuem atraso no processamento do sinal de controle e acesso somente à saída do sistema. A estratégia de controle tem por objetivo a utilização de técnicas de controle com modos deslizantes para a elaboração de uma lei de controle simples e robusta às incertezas da planta e ao atraso. O observador de estados apresentado possui características de modo deslizante, o qual realiza a estimação robusta do vetor de estados que na maioria dos casos práticos não é totalmente acessível. Os métodos de projetos propostos podem ser aplicados no controle de plantas estáveis ou instáveis com atraso no sinal de controle e acesso somente à saída da planta. Para comprovar a eficiência dos projetos apresentados neste trabalho, analisou-se o controlador atuando com acesso a todos estados e o controlador atuando juntamente com o observador robusto para a estimação dos estados. Os resultados foram obtidos através de simulações no Sistema Bola e Viga, Sistema Pêndulo Invertido Linear e Sistema Pêndulo Invertido Rotacional que são exemplos de plantas de natureza instável.

ABSTRACT

The main focus was placed on the Discrete Sliding Mode Control (DSMC) applied to systems that have a delay in the processing of the control signal and access to the system output only. The control strategy is intended to use control techniques of sliding modes to elaborate a simple and robust control law against the uncertainties of the plant and the delay. The states observer presented has the characteristics of a sliding mode, which performs the robust estimation of the states vector that, in most practical cases, is not fully accessible. The design methods proposed may be applied to the control of stable or unstable plants with delay on the control signal and access to the plant output only. In order to attest the efficiency of the design presented in this work, the controller was analyzed at work with access to all states and jointly with the robust observer to estimate the states. The results were obtained by means of simulations in the Ball and Beam System, Linear Inverted Pendulum System, and Rotational Inverted Pendulum System, which are examples of plants of unstable nature.

Lista de Figuras

2.1	A superfície deslizante é a intersecção das i -ésimas superfícies existentes.....	19
2.2	Ilustração bidimensional do domínio do modo deslizante.....	21
5.1	O Sistema Bola e Viga.....	63
5.2	O Sistema Pêndulo Invertido Linear.....	65
5.3	O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	67
6.1	Diagrama de blocos para o CDMD com acesso a todos os estados do sistema.....	71
6.2	Diagrama de blocos para o CDMD- h com acesso a todos os estados do sistema.....	71
6.3	Diagrama de blocos para o CDMD com acesso parcial aos estados do sistema.....	72
6.4	Diagrama de blocos para o CDMD- h com acesso parcial aos estados do sistema.....	72
6.5	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	74
6.6	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD- h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	74
6.7	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	75
6.8	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD- h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	75
6.9	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	76
6.10	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD- h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	77
6.11	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	77
6.12	Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD- h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	78
6.13	Gráfico dos estados reais (vermelho) e estados estimados (pontilhado) em função do tempo.....	78
6.14	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	80
6.15	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD- h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	80
6.16	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	81
6.17	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD- h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	81
6.18	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	82

6.19	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD- <i>h</i> com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	82
6.20	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	83
6.21	Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD- <i>h</i> com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	83
6.22	Gráfico dos estados reais(vermelho) e estados estimados(pontilhado) em função do tempo.....	84
6.23	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	85
6.24	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD- <i>h</i> com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	86
6.25	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	86
6.26	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD- <i>h</i> com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	87
6.27	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	87
6.28	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD- <i>h</i> com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.....	88
6.29	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	88
6.30	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD- <i>h</i> com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.....	89
6.31	Gráfico dos estados reais(vermelho) e estados estimados(pontilhado) em função do tempo.....	89

Lista de Símbolos e Abreviaturas

A/D	Conversor Analógico/Digital
B	Matriz de entrada
C	Matriz de saída
CDMD	Controle Discreto com Modos Deslizantes
CEV	Controle com Estrutura Variável
CMD	Controle com Modos Deslizantes
D	Matriz de incertezas
D/A	Conversor Digital/Analógico
$e(t)$	Vetor erro de estimação dos estados
EV	Estrutura Variável
$f(t,x)$	Matriz de estados não-linear da planta
G	Matriz de ganhos da superfície deslizante discreta
G_l	Matriz de ganhos lineares do observador robusto
G_n	Matriz de ganhos não-lineares do observador robusto
$grad$	Gradiente
h	Atraso discreto
m	Dimensão do vetor de entradas
MD	Modos Deslizantes
MIMO	Sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas
n	Dimensão do vetor de estados
p	Dimensão do vetor de saída
q	Dimensão do vetor de incertezas
r_l	Escalar positivo conhecido
S	Ganhos da superfície de deslizamento
sgn	Função sinal
SISO	Sistema com uma entrada e uma saída
S_0	Superfície deslizante contínua do espaço erro de estimação
T_0	Matriz mudança de coordenadas
$u(t)$	Sinal de controle contínuo no tempo
u_{eq}	Controle equivalente
u_k	Sinal de controle discreto no tempo
$u_k^\pm$	Controle descontínuo
$V(t,x)$	Função de Lyapunov no espaço de estados

V_s	Função de Lyapunov no espaço erro de estimação
V_k	Função de Lyapunov discreta
v	Vetor descontínuo
$\hat{x}$	Vetor de estados estimados
$x(t)$	Estados da planta no sistema contínuo
x_k	Estados da planta no sistema discreto
y_k	Saída discreta
$y(t)$	Saída contínua
ZOH	Bloqueador de Ordem Zero
Φ	Matriz da planta discreta
Γ	Matriz de entrada discreta
Γ_1	1ª parcela de separação da matriz de entrada discreta
Γ_2	2ª parcela de separação da matriz de entrada discreta
Ψ	Matriz de transformação discreta
σ	Superfície de deslizamento contínua no tempo
α	Ganho escalar
$\alpha(t,y)$	Função escalar conhecida
$\rho(t,y,u)$	Função escalar
λ	Atraso contínuo
Δ	Período de amostragem
Δf	incertezas
$\xi(t,x,u)$	Função incerta, mas limitada
γ_0	Escalar positivo

Sumário

1.	INTRODUÇÃO.....	12
1.1	Motivação para Pesquisa.....	12
1.2	Proposta da Pesquisa.....	14
2.	CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES.....	16
2.1	Modelo do Sistema.....	17
2.1.1	Superfície de Deslizamento.....	18
2.1.2	Modos Deslizantes.....	19
2.1.3	Condições de Existência de um Modo Deslizante.....	20
2.2	O Método do Controle Equivalente.....	23
2.3	Redução de Ordem.....	25
2.4	Forma Regular.....	29
2.5	Projeto do Controlador.....	32
2.6	Sistemas Incertos e CEV/MD.....	34
2.7	Trepidação.....	37
2.8	Comentários.....	39
3.	CONTROLADOR DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES E ATRASO NO SINAL DE CONTROLE.....	41
3.1	Modelo Discreto no Espaço de Estados considerando o Atraso no Sinal de Controle.....	42
3.2	Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso no Sinal de Controle (CDMD- h).....	44
3.2.1	Projeto da Superfície Deslizante Discreta.....	45
3.2.2	Projeto da Lei de Controle Discreta.....	45
3.2.3	Análise da Robustez da Estabilidade.....	47
3.3	Comentários.....	49
4.	OBSERVADOR ROBUSTO COM MODOS DESLIZANTES.....	51
4.1	Observador com Modo Deslizante.....	51
4.1.1	Forma Canônica para o Projeto do Observador.....	52
4.1.2	Transformação Linear T_o	57
4.1.3	Algoritmo para o Projeto do Observador Robusto.....	59
4.2	Comentários.....	61
5.	SISTEMAS INCERTOS, NÃO-LINEARES E DE NATUREZA INSTÁVEL.....	62
5.1	Sistema Bola e Viga.....	62
5.2	Sistema Pêndulo Invertido	64
5.2.1	Sistema Pêndulo Invertido Linear.....	65
5.2.2	Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	67
5.3	Comentários.....	69

6.	RESULTADOS: SIMULAÇÕES DO CONTROLADOR CDMD-<i>h</i> E DO OBSEVADOR ROBUSTO APLICADO EM SISTEMAS INSTÁVEIS.....	70
6.1	Resultados das Simulações no Sistema Bola e Viga.....	73
6.2	Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Linear.....	79
6.3	Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	85
6.4	Comentários.....	90
7.	CONCLUSÕES.....	92
7.1	Conclusões Gerais.....	92
7.2	Trabalhos Publicados.....	94
7.3	Sugestões de Trabalhos.....	94
	REFERÊNCIAS	95

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) foi primeiramente proposto e elaborado nos anos 50 na União Soviética por Utkin e outros [5,6]. Atualmente, esses sistemas (CEV/MD) são amplamente usados em controle e observação de estados de sistemas dinâmicos incertos, devido principalmente a suas características robustas, no que se referem às determinadas classes de incertezas paramétricas - incertezas casadas - e não linearidades [10,12]. Entretanto, a robustez poderá não existir em sistemas com atraso no sinal de controle, caso tais atrasos não sejam considerados no projeto CEV/MD [4,44,35].

1.1 Motivação para Pesquisa

Há algumas décadas o estudo de sistemas dinâmicos com atraso no tempo tem sido foco de considerável atenção por parte de vários pesquisadores, que se sentiram atraídos pela busca de um melhor critério para análise e solução de problemas causados pelo atraso [1, 2]. Na prática, são encontrados vários tipos de sistemas com atrasos, especialmente sistemas com transmissões hidráulicas, pneumáticas, ou mecânicas, sistemas térmicos, etc. Muitas das pesquisas realizadas são relacionadas ao problema de atraso no vetor de estados de sistemas contínuos [1,48,49] e discretos [47]. Ainda, em sistemas controlados por processadores digitais também é comum o aparecimento de atraso devido ao tempo de máquina necessário à computação dos cálculos para gerar o sinal de controle [4,44]. Nestes

sistemas, a saída não começará a responder a uma entrada antes de transcorrer o tempo de atraso. Assim, nos últimos anos, uma maior importância, por parte dos pesquisadores, passou a ser atribuída a pesquisas de técnicas de controle de sistemas com atraso no sinal de controle [4,44,45,50].

Não só na aplicação da estratégia CEV/MD, mas em geral, os sistemas em malha fechada com atrasos estão mais sujeitos a problemas de estabilidade do que os sistemas sem atrasos, independentemente da estratégia de controle utilizada. Muitos autores tratam o problema de controle de sistemas com atraso via controladores baseados em preditores [14, 35, 41, 42]. Estes incluem o preditor para compensar o atraso, ou, pelo menos, minimizar seu efeito. Para o projeto de um controlador baseado em preditor, o sistema pode ser transformado em um sistema livre de atraso no controle.

Especificamente em CEV/MD, o problema do atraso é mais prejudicial ao desempenho do sistema, uma vez que este método utiliza uma lei de controle com chaveamento de alta velocidade para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica escolhida no espaço de estados (chamada de superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento). Este chaveamento depende dos estados atuais e é executado pelo sinal de controle. Se o efeito do atraso não for minimizado, o chaveamento poderá não direcionar a trajetória do sistema para a superfície de deslizamento projetada, podendo com isto levar o sistema à instabilidade [44].

Atualmente muitos sistemas são controlados por microcomputador e/ou microprocessadores. A implementação do controle de estrutura variável por técnica digital requer a consideração de um certo período de amostragem e também requer um determinado tempo para o processamento do algoritmo de controle. Este tempo caracteriza um atraso no controle, dentro de cada período de amostragem. Todos estes fatores devem ser levados em consideração no projeto CEV/MD, caso contrário podem afetar negativamente a performance do sistema.

As pesquisas realizadas na área de controle com modos deslizantes consideram todos os estados acessíveis para o projeto dos controladores. Mas, na prática, na maioria dos casos não é possível ter o acesso pleno do vetor de estados. Devido a essas dificuldades, o estudo de estimadores ou observadores que estimem com eficiência os estados, mesmo em sistemas com incertezas e/ou atrasos, têm uma importância muito grande na área de controle.

Projetos de observadores robustos, utilizando técnicas de controle com modo deslizante, têm sido objeto de pesquisas há vários anos [11,15,21,35]. No entanto, devido a sua característica de ser governado pela mesma entrada de controle do sistema a ser observado, quando em presença de atraso no sinal de controle, têm a sua performance degradada. Por isso, os observadores com modos deslizantes [11] devem levar em consideração esse atraso no seu projeto [15, 21, 35] para poderem estimar o vetor de estados com eficiência.

1.2 Proposta da Pesquisa

Neste trabalho, realiza-se o estudo do problema do atraso e é apresentado um método de projeto para o caso de CEV/MD discreto aplicado em plantas com acesso parcial aos estados (saída), considerando o tempo de atraso devido à computação digital do sinal de controle. Para a estimação dos estados inacessíveis, projeta-se um observador com modos deslizantes contínuo, robusto e governado por uma entrada de controle atrasada [35]. Esses estados estimados são utilizados para compor a superfície de deslizamento do controlador com modos deslizantes que leva em consideração o atraso de computação [44].

Para testar a eficiência do projeto proposto neste trabalho, foram realizadas simulações em três sistemas incertos, não-lineares e de natureza instável: o Sistema Bola e Viga, o Sistema Pêndulo Invertido Linear e o Sistema Pêndulo Invertido Rotacional. Estes modelos dinâmicos foram escolhidos devido a suas complexas não-linearidades e, mais especificamente, por apresentarem instabilidade em malha aberta, tornando o desafio de controle mais interessante.

1.3 Organização do Texto

No Capítulo 2, são apresentados os aspectos mais relevantes de Sistemas com Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes [4, 5, 6, 11].

O Capítulo 3 descreve um controlador com modos deslizantes, que leva em consideração no seu projeto, além do processamento digital que incluem o período de amostragem e os conversores, o atraso na computação do sinal de controle [44].

No Capítulo 4 é apresentado um observador robusto com modos deslizantes proposto por Spurgeon e Edwards [11], porém, neste trabalho, dá-se uma abordagem que leva em consideração o atraso devido a computação do sinal de controle [15,21,35].

No Capítulo 5, todos os sistemas usados para as simulações são apresentados, acompanhados de seus respectivos modelos matemáticos não-lineares e figuras ilustrativas. Neste capítulo também são apresentados os modelos linearizados (em um ponto de equilíbrio) de cada sistema, necessários para o projeto dos controladores e observadores com modos deslizantes.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentados os resultados finais com simulações do controlador discreto atuando com acesso pleno ao vetor de estados e em conjunto com o observador proposto nesse trabalho (acesso à saída do sistema). Os resultados são mostrados de forma comparativa.

No Capítulo 7, são apresentadas as conclusões finais e sugestões de trabalhos subseqüentes.

CAPÍTULO 2

2. CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES [18]

A característica de um sistema de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) é uma lei de controle chaveada em alta velocidade, que ocorre quando o estado do sistema cruza certas superfícies descontínuas no espaço de estados. Essas superfícies são projetadas de forma que a dinâmica dos estados obedeça a um comportamento desejado quando em deslizamento. A estrutura de controle é usualmente não-linear e resulta em um sistema com estrutura variável que pode ser considerado como uma combinação de subsistemas, cada um com uma estrutura fixa e que opera em uma região específica do espaço de estados [5].

Assim, a estratégia de CEV/MD utiliza uma lei de controle chaveada para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica (chamada superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento), ou sobre a intersecção de todas as superfícies escolhidas no espaço de estados. Quando a trajetória dos estados atinge esta superfície e nela permanece, diz-se que o sistema está na condição de deslizamento ou em modo deslizante e, nesta situação, o comportamento do sistema sofre menor influência por parte de alterações paramétricas ou de distúrbios externos, o que dá a característica robusta ao sistema controlado. A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento. Uma lei de controle chaveada deve então ser

projetada para assegurar que a trajetória de estados se dirija à superfície de deslizamento (alcançabilidade) e nela permaneça durante todo o tempo subsequente (atratividade) [6].

Assegurar a existência de um modo deslizante na superfície de deslizamento é um caminho necessário no projeto de CEV/MD. Projetar a dinâmica da superfície é um caminho complementar do problema.

Assim, são duas as etapas principais no projeto:

- (a) Projeto de uma superfície deslizante, tal que a dinâmica da planta, quando em deslizamento, tenha uma trajetória desejada;
- (b) Desenvolvimento de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante.

2.1 Modelo do Sistema

Considera-se uma classe de sistemas não-lineares no vetor de estado $x(t)$ e linear no vetor controle $u(t)$, da forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) \quad (2.1)$$

sendo o vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $f(t, x(t)) \in \mathbb{R}^n$, e $B(t, x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Além disso, cada elemento de $f(t, x(t))$ e $B(t, x(t))$ são assumidos contínuos, com derivadas contínuas e limitadas com respeito à t e $x(t)$.

2.1.1 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento $\sigma(x(t)) = 0$ é um espaço $(n - m)$ dimensional em $\mathfrak{R}^n$, determinado pela intersecção de m superfícies de chaveamento de dimensão $(n - m)$. As superfícies de chaveamento são projetadas tal que o sistema, restrito a superfície $\sigma(x(t)) = 0$, tenha comportamento desejado.

Seja a superfície de deslizamento definida por

$$\{x(t) / \sigma(x(t)) = 0\} \quad (2.2)$$

Cada entrada $u_i(t)$ do controle chaveado $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ tem a forma

$$u_i(t, x(t)) = \begin{cases} u_i^+(t, x(t)) & \text{com } \sigma_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x(t)) & \text{com } \sigma_i(x(t)) < 0 \end{cases}, i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

onde $\{x(t) / \sigma_i(x(t)) = 0\}$ é a i -ésima superfície de deslizamento associada com a superfície de deslizamento (2.2) de dimensão $(n - m)$.

As superfícies de deslizamento são projetadas tais que a resposta do sistema restrito à $\{x(t) / \sigma(x(t)) = 0\}$ tenha o comportamento desejado.

Considera-se neste trabalho, a superfície de deslizamento da forma

$$\{x(t) / \sigma(x(t)) = Sx(t) = 0\} \quad (2.4)$$

em que S é chamada matriz da superfície de deslizamento, sendo $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

Por simplicidade, a notação utilizada para designar a superfície de deslizamento será

$$\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0 \quad (2.5)$$

2.1.2 Modos Deslizantes

Depois de projetada a superfície de deslizamento desejada, o próximo aspecto importante de CEV/MD é garantir a existência de um modo deslizante. Um modo deslizante existe se na vizinhança da superfície de deslizamento, $\sigma(x(t))=0$, a tangente ou vetor velocidade da trajetória dos estados sempre está direcionado para superfície de deslizamento. Consequentemente, se a trajetória dos estados intercepta a superfície de deslizamento, o valor da trajetória de estado ou “ponto representativo” se mantém dentro de uma vizinhança ξ de $\{x(t)/\sigma(x(t))=0\}$. Se o modo deslizante existe em $\sigma(x(t))=0$, então $\sigma(x(t))$ é chamado superfície de deslizamento. Como visto na Figura 2.1, o modo deslizante não pode existir na i -ésima superfície deslizante $\sigma_i(x(t))=0$ separadamente, mas somente na intersecção de todas as superfícies.

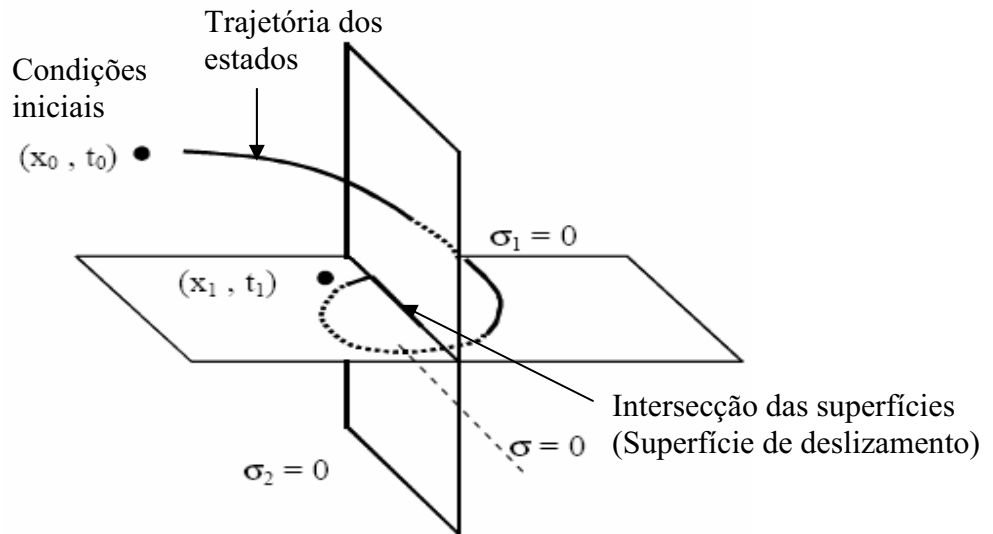


Figura 2.1 – A superfície deslizante é a intersecção das i -ésimas superfícies existentes.

Um modo deslizante ideal existe somente quando a trajetória de estados $x(t)$ da planta controlada satisfaz $\sigma(x(t))=0$ para todo $t \geq t_0$, para algum t_0 . Isto requer chaveamentos infinitamente rápidos. Em sistemas reais, todas as funções com controle chaveado têm imperfeições tais como retardamento, histereses, etc., que forçam os deslizamentos ocorrerem em uma frequência finita. A trajetória de estados então oscila em uma certa vizinhança da superfície de deslizamento. Esta oscilação é chamada trepidação.

Portanto, o modo deslizante real não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite [5,6].

2.1.3 Condições de Existência de um Modo Deslizante

A existência de um modo deslizante requer estabilidade da trajetória para superfície de deslizamento $\sigma(x(t)) = 0$, ou no mínimo para uma vizinhança desta, ou seja, os estados devem aproximar-se da superfície assintoticamente. A maior vizinhança é chamada região de atração. Geometricamente, o vetor tangente ou derivada no tempo do vetor de estados deverá apontar para a superfície de deslizamento na região de atração.

O problema de existência assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada, então o segundo método de Lyapunov fornece um conjunto natural para a análise. Assim, a estabilidade para a superfície de deslizamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada $V(t, x(t))$, positiva definida e que tenha uma derivada negativa definida em relação ao tempo na região de atração [18].

Definição 1: Um domínio D no espaço fechado $\sigma(x(t)) = 0$ é um domínio de modo deslizante se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que qualquer movimento iniciado dentro de uma vizinhança δ de dimensão n de D pode deixar a vizinhança ε de dimensão n de D somente através da vizinhança ε de dimensão n da fronteira de D (Figura 2.2).

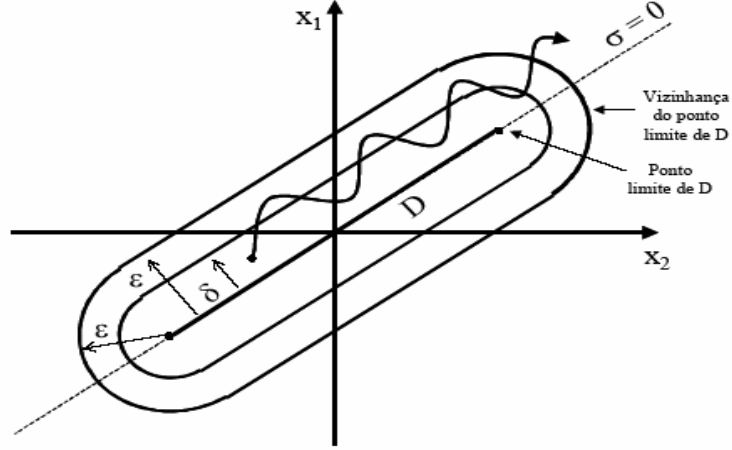


Figura 2.2 – Ilustração bidimensional do domínio do modo deslizante.

Teorema 2.1: Para o domínio D , de dimensão $(n - m)$, ser o domínio de um modo deslizante, é suficiente que, para $\Omega \supset D$, de dimensão n , exista uma função $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ diferenciável com respeito a todos os seus argumentos, satisfazendo as seguintes condições[5]:

(a) $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ é definida positiva em relação a $\sigma(x(t))$, isto é, $V(t, x(t), \sigma(x(t))) > 0$ com $\sigma(x(t)) \neq 0$ e $t, x(t)$ arbitrários, $V(t, x(t), 0) = 0$; e na esfera $\|\sigma(x(t))\| = \rho$ para todo $x(t) \in \Omega$ e algum t , tem-se:

$$\text{i)} \quad \inf_{\|\sigma(x(t))\|=\rho} V(t, x(t), \sigma(x(t))) = h_p, \quad h_p > 0 \quad (2.6)$$

$$\text{ii)} \quad \sup_{\|\sigma(x(t))\|=\rho} V(t, x(t), \sigma(x(t))) = H_p, \quad H_p > 0 \quad (2.7)$$

onde h_p e H_p dependem de ρ ($h_p \neq 0$ se $\rho \neq 0$).

(b) A derivada em relação ao tempo de $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ para o sistema (2.1) tem um supremo negativo para todo $x(t) \in \Omega$, exceto para $x(t)$ na superfície de deslizamento onde o controle na entrada não está definido, e por isso a derivada de $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ não existe.

Nota 2.1: Um modo deslizante é globalmente alcançado se o domínio de atração é todo o espaço de estados. De outra forma, o domínio de atração é um subconjunto do espaço de estados.

Considere o sistema de equação (2.1), com a notação

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.8)$$

e seguinte estratégia geral de controle

$$u = u(t, x(t)) = \begin{cases} u^+(t, x(t)) & \text{se } \sigma(x(t)) > 0 \\ u^-(t, x(t)) & \text{se } \sigma(x(t)) < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

De acordo com [38], as trajetórias de estados do sistema (2.8), com controle (2.9), na condição de deslizamento, $\sigma(x(t)) = 0$, são as soluções da equação

$$\dot{x}(t) = \alpha f^+ + (1 - \alpha)f^- = f^0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

onde $f^+ = f(t, x(t), u^+)$ e $f^- = f(t, x(t), u^-)$.

Resolvendo a equação $\langle \text{grad}\sigma, f^0 \rangle = 0$ para α tem-se

$$\alpha = \frac{\langle \text{grad}\sigma, f^- \rangle}{\langle \text{grad}\sigma, (f^- - f^+) \rangle}$$

Sendo:

(a) $\langle \text{grad}\sigma, (f^- - f^+) \rangle > 0$, e

(b) $\langle \text{grad}\sigma, f^+ \rangle \leq 0$ e $\langle \text{grad}\sigma, f^- \rangle \geq 0$, em que a notação, $\langle a, b \rangle$, denota o produto interno entre a e b , também escrito como $a.b$, e $\text{grad}\sigma$ o gradiente de $\sigma(x(t))$.

Assim, pode-se concluir que, a solução de (2.8) com controle (2.9) existe e é unicamente definida em $\sigma(x(t)) = 0$ [38]. Nota-se também que esta técnica pode ser usada para determinar o comportamento da planta no modo deslizante [18,38].

O método de Filippov [38], apresentado resumidamente acima, é uma técnica que torna possível a determinação do movimento de um sistema num modo deslizante. Uma outra técnica, e mais simples, é o método do controle equivalente descrito a seguir.

2.2 O Método do Controle Equivalente

O método do controle equivalente [5,18] é utilizado para determinar o movimento do sistema restrito à superfície de deslizamento $\sigma(x(t)) = 0$. Suponha que em t_0 , a trajetória de estados da planta intercepta a superfície de deslizamento e um modo deslizante existe para $t \geq t_0$. A existência de um modo deslizante ideal implica que $\dot{\sigma}(x(t)) = 0$ e $\sigma(x(t)) = 0$ para todo $t \geq t_0$.

Diferenciando $\sigma(x(t)) = 0$, em relação à t , tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x}(t) = 0$$

Substituindo $\dot{x}(t)$ por (2.1), tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x}(t) = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(t, x(t)) + B(t, x(t))u_{eq}] = 0 \quad (2.10)$$

onde u_{eq} é chamado de controle equivalente e é solução da equação (2.10).

Para calcular u_{eq} , assume-se que o produto matricial $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x(t))$ é não singular para todo t e $x(t)$. Então,

$$u_{eq} = - \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x(t)) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x(t)) \quad (2.11)$$

Após a substituição deste u_{eq} em (2.1), a equação resultante descreve o comportamento do sistema restrito à superfície de deslizamento, desde que a condição inicial $x(t_0)$ satisfaça $\sigma(x(t_0)) = 0$.

Assim, dado $\sigma(x(t_0)) = 0$, a dinâmica do sistema sobre a superfície de deslizamento para $t \geq t_0$, é dada por

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x(t)) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x(t)) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x(t)) \quad (2.12)$$

Supondo que a superfície de deslizamento é linear e é dada por $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$, então $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = S$, e (2.12) reduz-se a

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x(t)) [SB(t, x(t))]^{-1} S \right] f(t, x(t)) \quad (2.13)$$

Observe que (2.12), juntamente com a restrição $\sigma(x(t)) = 0$ determina o movimento do sistema sobre a superfície de deslizamento. Então, o movimento do sistema (2.1), restrito à superfície de deslizamento, será governado por um conjunto de equações de ordem reduzida.

Algumas aplicações de controle requerem uma superfície de deslizamento variando no tempo: $\sigma(t, x(t)) = 0$. Neste caso, $\dot{\sigma}(t, x(t)) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \dot{x}(t)$ e o controle equivalente toma a forma

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x(t)) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x(t)) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] \quad (2.14)$$

2.3 Redução de Ordem

Por simplicidade, será estudado o caso em que a superfície de chaveamento é linear, $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$. Como mencionamos anteriormente, em um modo deslizante, o sistema equivalente deve satisfazer não somente a dinâmica de estados de dimensão n , mas também as m equações algébricas, $\sigma(x(t)) = 0$. Estas restrições reduzem a dinâmica do sistema de um modelo de n -ésima ordem para um modelo de $(n - m)$ -ésima ordem.

Suponha que o sistema não-linear (2.1) é restrito a superfície de deslizamento (2.4), isto é, $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$, com o sistema dinâmico dado por (2.13), então, é possível resolver m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ variáveis de estado, se o posto de $[S] = m$.

Se o posto $[S] = m$, implica que $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x(t))$ é não singular para todo t e $x(t)$.

Para obter a solução, resolve-se para as m variáveis de estado $(x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ em termos das $(n - m)$ variáveis de estado restantes. Substituindo estas relações nas $(n - m)$ equações de (2.13) e nas equações correspondendo a m variáveis de estado, o sistema resultante de ordem $(n - m)$ descreve o sistema equivalente com condição inicial satisfazendo $\sigma(x(t)) = 0$.

Exemplo 2.1: Para esclarecer o procedimento acima, considere o sistema

$$\dot{x} = A(t, x(t))x(t) + Bu(t), \text{ sendo que}$$

$$A(t, x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(t, x(t)) & a_{12}(t, x(t)) & a_{13}(t, x(t)) & a_{14}(t, x(t)) & a_{15}(t, x(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(t, x(t)) & a_{22}(t, x(t)) & a_{23}(t, x(t)) & a_{24}(t, x(t)) & a_{25}(t, x(t)) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assume-se que a terceira e quinta linhas de $A(t, x(t))$ têm elementos não-lineares variantes no tempo e são limitados. O método de controle equivalente leva a seguinte dinâmica, conforme (2.13).

$$\dot{x} = [I - B[SB]^{-1}S]A(t, x(t))x(t)$$

dado $\sigma(x(t_0)) = 0$ para qualquer t_0 .

Se os parâmetros da superfície de chaveamento linear são dados por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix}$$

então

$$SB = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{15} \\ S_{23} & S_{25} \end{bmatrix}$$

Para simplificar o exemplo, escolhe-se $S_{13}S_{25} - S_{15}S_{23} = 1$. Especificando, escolhe-se $S_{13} = 2$, $S_{15} = S_{23} = S_{25} = 1$. Assim,

$$(SB)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} S_{25} & -S_{15} \\ -S_{23} & S_{13} \end{bmatrix}}{S_{13}S_{25} - S_{15}S_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

O que leva à seguinte equação,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & 0 & S_{24} - S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & 0 & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} x(t)$$

sujeito a $\sigma(x(t)) = 0$.

De $\sigma(x(t)) = 0$ resulta que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Observa-se da equação, que a principal vantagem do controle com estrutura variável é a eliminação da influência dos parâmetros da planta quando o sistema está sobre a superfície de deslizamento.

Obs.: Isso é válido desde que os parâmetros estejam casados, ou seja, possam ser compensados pelas entradas do sistema.

Resolvendo a equação acima para x_3 e x_5 .

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

O sistema linear invariante no tempo equivalente de ordem reduzida é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & S_{24} - S_{14} \\ S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

sendo que $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$ e $\tilde{x}_3 = x_4$.

Um exemplo de como o projeto de controle pode ser realizado é o seguinte:

Suponha que a limitação de projeto exija que o sistema equivalente tenha os seguintes pólos $\{-1, -2, -3\}$, resultando na característica polinomial desejada:

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

A característica polinomial do sistema equivalente é

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^3 + (S_{12} - S_{22} + 2S_{24} - S_{14})\lambda^2 + (S_{12}S_{24} - S_{14}S_{22} + S_{11} - S_{21})\lambda + (S_{11}S_{24} - S_{14}S_{21})$$

Os coeficientes de potências semelhantes de λ produzem o conjunto de equações

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & S_{24} & -S_{22} & -1 & 0 & 0 \\ S_{24} & 0 & 0 & -S_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{14} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ S_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Uma solução que realiza o objetivo do projeto de controle é:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1.833 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1.833 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluindo, o sistema equivalente de ordem reduzida com os autovalores desejados é $\tilde{\dot{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$, sendo que,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1.833 & -6 \end{bmatrix}$$

A facilidade na resolução deste exemplo se deve ao fato de que a dinâmica do sistema original foi dado na forma canônica de *Luenberger*. Os sistemas que não estão nessa forma frequentemente exigem uma transformação para uma forma mais geral denominada forma regular.

2.4 Forma Regular

Suponha que a planta dinâmica (2.1) tenha a seguinte forma regular

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x(t)) + B_2(t, x(t))u(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$. Assume-se $B_2(t, x(t))$ que seja uma função matricial, $m \times m$, não singular.

Assume-se que uma superfície de deslizamento linear da forma

$$\sigma(x(t)) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

com $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ e $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ não singular.

Então, no modo deslizando

$$x_2(t) = -S_2^{-1} S_1 x_1(t) \quad (2.17)$$

e

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x(t)) = f_1(t, x_1(t), -S_2^{-1} S_1 x_1(t)) \quad (2.18)$$

Observe que se $f_1(t, x(t))$ tem uma estrutura linear do tipo $\dot{x}_1(t) = f_1(t, x(t)) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t)$, então a dinâmica de ordem reduzida torna-se,

$$\dot{x}_1(t) = [A_{11} - A_{12}S_2^{-1}S_1]x_1(t) \quad (2.19)$$

que tem estrutura de malha fechada “ $A_{11} + A_{12}F$ ” com $F = -S_2^{-1}S_1$. Se o par (A_{11}, A_{12}) é controlável, então é possível calcular F tal que $A_{11} + A_{12}F$ proporcione a característica dinâmica desejada. Tendo encontrado F , pode-se calcular $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$ tal que $F = -S_2^{-1}S_1$. Assim, completa-se o projeto da superfície de deslizamento.

Para o caso de uma superfície de deslizamento não-linear da forma

$$\sigma(x(t)) = \sigma_1(x_1(t)) + S_2 x_2(t) = 0 \quad (2.20)$$

que é linear em $x_2(t)$ e não-linear em $x_1(t)$, a dinâmica de ordem reduzida do sistema (2.15) num modo deslizante terá a forma

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x(t)) = f_1(t, x_1(t), -S_2^{-1} \sigma_1(x_1(t))) \quad (2.21)$$

Nota 2.2: Para transformar o sistema dinâmico (2.1) para a forma regular (2.15), considera-se o caso de uma superfície de deslizamento linear (2.16) e uma transformação invariante no tempo, linear e não singular $z(t) = Tx(t)$. Derivando $z(t)$ em relação a t , vem

$$\dot{z}(t) = T \dot{x}(t) = T f(t, x(t)) + T B(t, x(t)) u(t) \quad (2.22)$$

Se

$$T B = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

então, na nova coordenada, a dinâmica da planta (2.1) é:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{f}_1(t, z(t)) \\ \dot{z}_2(t) = \hat{f}_2(t, z(t)) + \hat{B}_2(t, z(t)) u(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

Logo, num modo deslizante a dinâmica de ordem reduzida é determinada mediante (2.18) por:

$$\dot{z}_1(t) = \hat{f}_1(t, z_1(t), -\hat{S}_2^{-1} \hat{S}_1 z_1(t)) \quad (2.25)$$

onde $\begin{bmatrix} \hat{S}_1 & \hat{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} T^{-1}$.

Nota 2.3: Para transformar o sistema dinâmico (2.1) para a forma regular (2.15), considera-se o caso de uma superfície de deslizamento linear (2.16) e não existindo uma transformação linear tal que (2.23) seja satisfeita, então primeiro deve-se recorrer a uma transformação não-linear da forma

$$z(t) = T(t, x(t)) = \begin{bmatrix} T_1(t, x(t)) \\ T_2(t, x(t)) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde

(a) $T(\cdot, \cdot): \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é uma função diferenciável cuja inversa é também diferenciável,

(b) $T_1(\cdot, \cdot): \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n-m}$ e

$$T_2(\cdot, \cdot): \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m.$$

Diferenciando z em (2.26) em relação a t , tem-se

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial T}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial T}{\partial t}(t, x(t)) \quad (2.27)$$

Substituindo (2.1) em (2.27) vem

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial T}{\partial x} f(t, x(t)) + \frac{\partial T}{\partial x} B(t, x(t))u(t) + \frac{\partial T}{\partial t}(t, x(t)) \quad (2.28)$$

Se a transformação tem a propriedade

$$\frac{\partial T}{\partial x} B(t, x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} \end{bmatrix} B(t, x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2(t, x(t)) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

então nas novas coordenadas, as equações descrevendo o sistema (2.1) são:

$$\dot{z}_1(t) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(t, \tilde{T}(t, z(t))) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \stackrel{\Delta}{=} \hat{f}_1(t, z(t)) \quad (2.30)$$

$$\dot{z}_2(t) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(t, \tilde{T}(t, z(t))) + \frac{\partial T_2}{\partial t}(t, \tilde{T}(t, z(t))) + \frac{\partial T_2}{\partial x} B(t, \tilde{T}(t, z(t)))u(t) \stackrel{\Delta}{=} \hat{f}_2(t, z(t)) + \hat{B}_2(t, z(t))u(t)$$

2.5 Projeto do Controlador

No projeto de controle, o objetivo é a obtenção de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante. A suposição é que a superfície de deslizamento já tenha sido projetada.

Em geral, o controle é um vetor m dimensional que tem a estrutura da forma

$$u_i(t, x(t)) = \begin{cases} u_i^+(t, x(t)) & \text{se } \sigma_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x(t)) & \text{se } \sigma_i(x(t)) < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $\sigma(x(t)) = [\sigma_1(x(t)), \dots, \sigma_m(x(t))]^T = 0$.

Uma estrutura muito utilizada para o controle (2.31) é

$$u_i = u_{ieq} + u_{in} \quad (2.32)$$

onde u_{ieq} é a i -ésima componente do controle equivalente u_{eq} (que é contínuo) e onde u_{in} é a parte descontínua ou parte chaveada do controle u_n .

Para o sistema (2.1), com um controlador tendo a estrutura (2.32), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x(t)) &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(t, x(t)) + B(t, x(t))(u_{eq} + u_n)] \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(t, x(t)) + B(t, x(t))u_{eq}] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x(t))u_n \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x(t))u_n \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assume-se que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x(t)) = I$, sendo I a matriz identidade. Então $\dot{\sigma}(x(t)) = u_n$. Esta condição permite uma fácil verificação das condições suficientes para a existência e alcançabilidade de um modo deslizante, isto é, condições que

satisfazem $\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$ quando $\sigma_i(x(t)) \neq 0$. A seguir, relacionam-se algumas possibilidades de estruturas com controle descontínuo u_n .

(a) Função sinal com ganhos constantes:

$$u_{in}(x(t)) = \begin{cases} \alpha_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))), & \sigma_i(x(t)) \neq 0, \quad \alpha_i(\cdot) < 0 \\ 0 & \sigma_i(x(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Observe que este controle satisfará as condições suficientes para a existência de um modo deslizante, pois

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i \sigma_i(x(t)) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))) < 0 \text{ se } \sigma_i(x(t)) \neq 0.$$

(b) Função sinal com ganhos dependentes do estado:

$$u_{in}(x(t)) = \begin{cases} \alpha_i(x(t)) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))), & \sigma_i(x(t)) \neq 0, \quad \alpha_i(\cdot) < 0 \\ 0 & \sigma_i(x(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Logo,

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i(x(t)) \sigma_i(x(t)) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))) < 0 \text{ se } \sigma_i(x(t)) \neq 0.$$

(c) Malha fechada com ganhos chaveados:

$$u_{in}(x(t)) = \psi x; \quad \psi = [\psi_{ij}] \quad \psi_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \sigma_i x_j > 0 \\ \beta_{ij}, & \sigma_i x_j < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

com $\alpha_{ij} < 0$ e $\beta_{ij} > 0$.

Logo,

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \sigma_i (\psi_{i1} x_1(t) + \psi_{i2} x_2(t) + \dots + \psi_{in} x_n(t)) < 0$$

(d) Malha fechada linear e contínua

$$u_n(x(t)) = \alpha_i \sigma_i(x(t)) \text{ e } \alpha_i < 0. \quad (2.36)$$

A condição de existência de um modo deslizante é

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i \sigma_i^2(x(t)) < 0$$

ou de forma mais geral

$$u_n(x(t)) = -L \sigma(x(t))$$

onde $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz constante positiva definida. A condição para a existência de um modo deslizante é facilmente vista

$$\sigma^T(x(t)) \dot{\sigma}(x(t)) = -\sigma^T(x(t)) L \sigma(x(t)) < 0 \text{ se } \sigma(x(t)) \neq 0$$

(e) Vetor unitário não-linear com fator de escala

$$u_n(x(t)) = \rho \frac{\sigma(x(t))}{\|\sigma(x(t))\|}, \quad \rho < 0 \quad (2.37)$$

A condição de existência é

$$\sigma^T(x(t)) \dot{\sigma}(x(t)) = \|\sigma(x(t))\| \rho, \text{ se } \sigma(x(t)) \neq 0.$$

2.6 Sistemas Incertos e CEV/MD

Aqui a proposta é a apresentação da teoria de Controle com Estrutura Variável(CEV) para sistemas incertos e uma discussão sobre trepidação. Uma boa parte da literatura tem surgido nos anos recentes interessada na determinação da estabilidade de sistemas tendo parâmetros incertos dentro de limites conhecidos(incertezas casadas). Tais estratégias de controle são baseadas no segundo método de Lyapunov. A motivação para pesquisar

sistemas incertos está no fato de que a representação matemática de sistemas reais na maioria das vezes não é fiel. Assim, pode-se ter não só incertezas paramétricas como também incertezas na própria modelagem do sistema real.

Seja o seguinte sistema incerto

$$\dot{x}(t) = [f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t), r(t)) + [B(t, x(t)) + \Delta B(t, x(t), r(t))] u(t)] \quad (2.38)$$

onde $\Delta f(t, x(t), r(t))$, $\Delta B(t, x(t), r(t))$ e $r(t)$ são funções de parâmetros incertos cujos valores pertencem a algum conjunto fechado e limitado.

Nota 2.4: Um sistema é chamado robusto se a propriedade de interesse do sistema permanece em uma região limitada em face de uma classe de perturbações limitadas [5].

Definição 2: As parcelas de incertezas Δf e ΔB que encontram-se na imagem de $B(t, x(t))$ para todos valores de t e $x(t)$ são chamadas incertezas casadas [10].

Considerando que todas as incertezas são do tipo casadas, é possível representá-las em um único vetor $e(t, x(t), r(t), u(t))$. Então o sistema (2.38) pode ser representado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) + B(t, x(t))e(t, x(t), r(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Considere a seguinte estrutura de controle para o sistema (2.39)

$$u = u_{eq} + u_n \quad (2.40)$$

onde u_{eq} é o controle equivalente assumindo todas incertezas $e(t, x(t), r(t), u(t))$ nulas e u_n é a parte não-linear do controle projetado sem desconsiderar as incertezas. Considerando $\sigma(t, x(t)) = 0$, tem-se

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f \right] \quad (2.41)$$

assumindo que $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B \right]$ é não singular e que $e(t, x(t), r(t), u(t)) = 0$. Agora, é necessário considerar as incertezas da planta e desenvolver uma expressão para u_n . Para isto, assume-se que

$$\|e(t, x(t), r(t), u(t))\| \leq \rho(t, x(t)) \quad (2.42)$$

onde $\rho(t, x(t))$ é uma função escalar com valores não negativos. Também, introduz-se a função com valores escalares

$$\hat{\rho}(t, x(t)) = \alpha + \rho(t, x(t)) \quad (2.43)$$

onde $\alpha > 0$.

Antes de especificar a estrutura de controle, escolhe-se a função de Lyapunov generalizada,

$$V(t, x(t)) = \frac{1}{2} \sigma^T(t, x(t)) \sigma(t, x(t)). \quad (2.44)$$

Para assegurar a existência de um modo deslizante e atratividade para a superfície, é suficiente escolher um controle com estrutura variável tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) = \dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} < 0 \quad (2.45)$$

enquanto $\sigma(t, x(t)) \neq 0$ onde

$$\dot{\sigma}(t, x(t)) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x}(t) \quad (2.46)$$

Utilizando a lei de controle

$$u(t, x(t)) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \frac{B^T(t, x(t)) \text{grad}(V(t, x(t)))}{\|B^T(t, x(t)) \text{grad}(V(t, x(t)))\|} \hat{\rho}(t, x(t)) \quad (2.47)$$

quando $\sigma(t, x(t)) \neq 0$, com

$$\text{grad}(V(t, x(t))) = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t)) \quad (2.48)$$

sendo $\text{grad}(V(t, x(t)))$ o gradiente da função de Lyapunov (2.44) generalizada, é garantida a atratividade para a superfície de deslizamento.

De fato, diferenciando a equação (2.44) em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{V} = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + Bu + Be) \quad (2.49)$$

Substituindo (2.47) em (2.49), vem

$$\begin{aligned} \dot{V} = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \\ \left\| B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \sigma \right\| \rho + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} B e \leq -\alpha \left\| B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \sigma \right\| < 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.7 Trepidação

Os controladores com modos deslizantes e estrutura variável desenvolvidos garantem o comportamento desejado do sistema em malha fechada. Estes controladores, porém, exigem um mecanismo de chaveamento infinitamente rápido (no caso ideal) o que não é possível no caso real. Devido ao chaveamento finito, a trajetória do sistema sobre a superfície de deslizamento oscila, e esta oscilação é denominada trepidação (chattering). As componentes de alta frequência da trepidação são indesejáveis, pois podem excitar dinâmicas de alta frequência não modeladas da planta, resultando em instabilidades não previsíveis.

Uma solução para esse problema consiste em introduzir no controlador uma camada limite, ou seja, permitir que a trajetória do sistema permaneça sobre uma região ao redor da superfície de deslizamento e não restritamente sobre essa superfície.

Define-se o conjunto

$$\{x(t) / \|\sigma(x(t))\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\}$$

como a chamada Camada Limite de espessura 2ε . Considere a lei de controle:

$$u(t) = \begin{cases} u_{eq} - \frac{B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t))}{\left\| B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t)) \right\|} \hat{\rho}, & \text{se } \|\sigma(x(t))\| \geq \varepsilon \\ u_{eq} + p, & \text{se } \|\sigma(x(t))\| < \varepsilon \end{cases}$$

onde u_{eq} é dado por,

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f \right]$$

e sendo $p = p(t, x)$ qualquer função contínua tal que

$$p(t, x(t)) = - \frac{B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t))}{\left\| B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t)) \right\|} \hat{\rho}$$

toda vez que $\|\sigma(x(t))\| = \varepsilon$ e $\|p\| = \hat{\rho}$. Este controle garante atratividade para a camada limite e no interior da camada limite, oferece uma aproximação contínua para a ação de controle descontínuo de

$$u(t, x(t)) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \frac{B^T(t, x(t)) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t))}{\left\| B^T(t, x(t)) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x(t)) \right]^T \sigma(t, x(t)) \right\|} \hat{\rho}(t, x(t))$$

Uma outra lei de controle com camada limite é dada por [29].

$$u(t, x(t)) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \hat{\rho}(t, x(t)) \frac{\sigma(x(t))}{\|\sigma(x(t))\| + \varepsilon}$$

2.8 Comentários

Neste capítulo foram apresentados alguns aspectos que envolvem os Sistemas Incertos com Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes.

Durante todo o capítulo, o vetor de estados foi considerado acessível por completo, entretanto, na maioria dos sistemas reais, tem-se acesso somente à saída da planta. Sabendo-se que a superfície de deslizamento é definida como função dos estados do sistema, existem abordagens que utilizam compensadores para compor a superfície de deslizamento a partir da saída da planta [29,39].

Utilizando técnicas de estrutura variável e modos deslizantes, pode-se projetar observadores de estado [11,12,13,15,21]. Estes conservam as vantagens de robustez e bom desempenho diante de incertezas introduzidas por tais técnicas de controle. Esta abordagem será detalhada no Capítulo 4, onde se considera também sistemas com atraso no sinal de controle.

Um outro detalhe importante deste capítulo é poder notar que ao se utilizar a estrutura de controle (2.32), juntamente com a estrutura (2.37), o controlador não mais apresenta a propriedade de seleção de sinais de controle, caracterizando um projeto baseado em camada limite. Assim, a denominação correta para este caso é apenas Controlador de Modos Deslizantes, perdendo a característica de estrutura variável. Esta propriedade, de sinal de controle único e suave, é levada em consideração no projeto dos novos controladores de modos deslizantes discretos.

Toda a teoria apresentada está voltada para sistemas contínuos no tempo, ou seja, sistemas analógicos. Porém, como mencionado anteriormente, a implementação de controle

de modos deslizantes contínuos em computadores digitais sofre uma deterioração de performance. Desse modo, um controlador projetado com técnicas de controle digital se faz necessário e será apresentado no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3

3. CONTROLADOR DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES E ATRASO NO SINAL DE CONTROLE (CDMD- h)

Controle com Modos Deslizantes (CMD) tem sido estudado desde o início dos anos sessenta [5] e recentemente várias implementações práticas foram efetuadas através de computadores digitais. Sabe-se que o CMD aplicado a sistemas contínuos no tempo é robusto para uma classe de incertezas na planta [5]. Sua implementação através de dispositivos digitais, contudo, requer um certo período de amostragem que causa não somente *chattering* ao longo da superfície de deslizamento, mas também, provável instabilidade, se o período de amostragem não for levado em consideração no projeto do controlador. Além disso, o uso desses dispositivos digitais programáveis para a realização do controle robusto pode causar considerável atraso no sinal de controle devido ao tempo de processamento, podendo levar o sistema a instabilidade.

Neste capítulo, um projeto de CMD discreto que apresenta robustez em relação ao atraso, sem a necessidade de um preditor, é apresentado considerando acessíveis todos os estados [4,44]. O controlador, discreto no tempo, apresenta uma lei de controle suave, ao invés de uma chaveada, que leva em consideração os conversores A/D e D/A, o período de amostragem e o atraso h devido ao tempo de processamento. Este é considerado sempre menor que o período de amostragem Δ . Dessa forma, evita-se que, na presença do atraso na computação dos sinais pelo dispositivo digital, a estrutura chaveada seja influenciada pela ação do mesmo, o que poderia interferir no desempenho e até na estabilidade do sistema. Suas principais características são a simplicidade de implementação e sua robustez em relação a determinadas classes de incertezas.

Simulações nos sistemas bola e viga, pêndulo invertido linear e pêndulo invertido rotacional ilustram o procedimento de projeto. Esses sistemas são apresentados e descritos no Capítulo 5.

3.1 Modelo Discreto no Espaço de Estados considerando o Atraso no Sinal de Controle

Considere o modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) no espaço de estados contínuo, representado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \lambda) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, λ é o atraso contínuo no sinal de controle e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são matrizes constantes.

Uma solução para o sistema (3.1) é dada por [9]

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau - \lambda) d\tau \quad (3.2)$$

A equação (3.2) será utilizada sobre um período de amostragem para obtermos a equação diferença: conseqüentemente precisa-se mudar a notação, $t_0 = k\Delta$ e $t = k\Delta + \Delta$, sendo Δ o período de amostragem. Assim surge uma versão particular de (3.2):

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta} x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{k\Delta + \Delta} e^{A(k\Delta + \Delta - \tau)} Bu(\tau - \lambda) d\tau \quad (3.3)$$

Este resultado é independente do tipo de bloqueio porque u é especificado em termos de tempo contínuo, $u(t)$, sobre o intervalo de amostragem. Uma suposição comum e tipicamente válida, para um *bloqueador de ordem zero* (ZOH) é que

$$u(t) = u(k\Delta), \quad k\Delta \leq t < k\Delta + \Delta \quad (3.4)$$

Para facilitar a solução de (3.3), muda-se as variáveis na integral de τ para η , tal que

$$\eta = k\Delta + \Delta - \tau \quad (3.5)$$

Então tem-se

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta} x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\eta} B u(k\Delta + \Delta - \lambda - \eta) d\eta \quad (3.6)$$

Considera-se o atraso contínuo λ como sendo uma fração do período de amostragem Δ , complementar ao atraso no tempo de computação:

$$\lambda = \Delta - h \quad (3.7)$$

onde h é o atraso computacional.

Com esta substituição, o sistema discreto pode ser escrito como

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta} x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\eta} B u(k\Delta + h - \eta) d\eta \quad (3.8)$$

A integral de (3.6) é calculada de 0 até Δ . Assim, pode-se quebrá-la em duas partes, obtendo

$$\begin{aligned} x(k\Delta + \Delta) &= e^{A\Delta} x(k\Delta) + \int_0^h e^{A\eta} B d\eta u(k\Delta) + \int_h^\Delta e^{A\eta} B d\eta u(k\Delta - \Delta) \\ x(k\Delta + \Delta) &= \Phi x(k\Delta) + \Gamma_1 u(k\Delta - \Delta) + \Gamma_2 u(k\Delta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Em (3.9) define-se [44]

$$\Phi = e^{A\Delta}, \quad \Gamma_1 = \int_h^\Delta e^{A\eta} B d\eta \quad e \quad \Gamma_2 = \int_0^h e^{A\eta} B d\eta \quad (3.10)$$

Dessa forma, o modelo discreto que considera o atraso computacional é dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Note que $x_k = x(k\Delta)$, $y_k = y(k\Delta)$ e $u_k = u(k\Delta)$. Esta nova notação é adotada por questão de simplicidade.

O par (Φ, Γ) é suposto controlável e o par (Φ, C) é suposto observável. No modelo (3.11), a controlabilidade e a observabilidade são preservadas mesmo na presença do atraso no tempo de computação. Note que a matriz de entrada Γ satisfaz a relação $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

A matriz Φ , do sistema discreto, pode ser calculada pela expansão em séries

$$\Phi = e^{A\Delta} = I + A\Delta + \frac{A^2\Delta^2}{2!} + \frac{A^3\Delta^3}{3!} + \dots$$

sendo I a matriz identidade. Assim, Φ também pode ser escrita como

$$\Phi = I + A\Delta\Psi_{\Delta}, \quad (3.12)$$

onde

$$\Psi_{\Delta} = I + \frac{A\Delta}{2!} + \frac{A^2\Delta^2}{3!} + \dots \quad (3.13)$$

As parcelas da matriz de entrada, Γ_1 e Γ_2 , podem ser calculadas de maneira mais simples, através das seguintes relações matriciais

$$\Gamma_1 = (\Delta - h)\Phi_h\Psi_{\Delta-h}B \quad (3.14)$$

$$\Gamma_2 = h\Psi_h B. \quad (3.15)$$

3.2 Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso no Sinal de Controle (CDMD- h)

Considere o sistema discreto (3.11). A lei de controle (2.32) é realizada por um computador digital. O controle é dado a cada instante de amostragem $k\Delta$ com um atraso de computação h , constante e menor que Δ ($0 < h < \Delta$). Em controle digital, a i -ésima entrada de controle $u_i(t)$ tem um valor constante entre as amostragens

$$u_i(t) = u_{ik} = u_{ik}^{eq} + u_{ik}^{\pm}, \quad k\Delta + h \leq t < (k+1)\Delta + h \quad (3.16)$$

onde u_{ik}^{eq} é a i -ésima componente do vetor de controle equivalente discreto e $u_{ik}^{\pm}$ é a i -ésima componente do vetor de controle que mantém o sistema na superfície de deslizamento. A técnica proposta aqui é aplicável a sistemas multivariáveis. Assim, o índice $i = 1, 2, \dots, m$, onde m caracteriza o número máximo de entradas de controle no sistema. Para simplificar o desenvolvimento teórico, será adotado $m = 1$, ou seja, uma única entrada de controle.

3.2.1 Projeto da Superfície Deslizante Discreta

A superfície discreta S_k é definida como segue:

$$S_k = Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1} \quad (3.17)$$

onde a matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, composta pelos ganhos da superfície deslizante, é projetada tal que o sistema, mantido sobre S_k para todo k , seja assintoticamente estável. Observe que esta superfície depende da componente atrasada do sinal de controle, e este sinal é acessível. A escolha dessa superfície é que compensa o atraso no sinal de controle. O controle é dado em cada intervalo de amostragem $k\Delta$, onde Δ é o período de amostragem. Em controle digital, a entrada u tem um valor constante entre os períodos de amostragem.

$$u(t) = u_k = u_k^{eq} + u_k^\pm \quad k\Delta \leq t < (k+1)\Delta \quad (3.18)$$

onde u_k^{eq} é o controle equivalente discreto no tempo e $u_k^\pm$ é o controle chaveado discreto no tempo.

Uma lei de controle equivalente para o sistema (3.11) para todo k é obtida da condição de deslizamento $S_{k+1} = S_k$. Então,

$$\begin{aligned} Gx_{k+1} + G\Gamma_1 u_k^{eq} &= Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}^{eq} \\ G(\Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1}^{eq} + \Gamma_2 u_k^{eq}) + G\Gamma_1 u_k^{eq} &= Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}^{eq} \\ G\Phi x_k + G\Gamma_2 u_k^{eq} + G\Gamma_1 u_k^{eq} &= Gx_k \end{aligned}$$

Considerando que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, o resultado é

$$u_k^{eq} = -(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)x_k \quad (3.19)$$

3.2.2 Projeto da Lei de Controle Discreta

Agora a lei de controle $u_k^\pm$, levando em consideração o tempo de atraso, será projetada. Supondo a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k \quad (3.20)$$

Para garantir a condição de existência para a superfície deslizamento discreta, impõe-se que

$$V_{k+1} < V_k \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.21), a condição de existência para a superfície de deslizamento discreta é

$$\frac{1}{2} S_{k+1}^T S_{k+1} < \frac{1}{2} S_k^T S_k, \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.22)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = Gx_{k+1} + G\Gamma_1 u_k - Gx_k - G\Gamma_1 u_{k-1} \\ \Delta S_{k+1} &= G[\Phi x_k + \Gamma_1(u_{k-1}^{eq} + u_{k-1}^\pm) + \Gamma_2(u_k^{eq} + u_k^\pm)] + G\Gamma_1(u_k^{eq} + u_k^\pm) - Gx_k - G\Gamma_1(u_{k-1}^{eq} + u_{k-1}^\pm) \\ \Delta S_{k+1} &= G\Phi x_k + G\Gamma_2 u_k^{eq} + G\Gamma_2 u_k^\pm + G\Gamma_1 u_k^{eq} + G\Gamma_1 u_k^\pm - Gx_k \\ \Delta S_{k+1} &= G\Phi x_k + G\Gamma u_k^{eq} - Gx_k + G\Gamma u_k^\pm \end{aligned}$$

e substituindo a equação (3.19) na igualdade acima temos

$$\Delta S_{k+1} = G\Gamma u_k^\pm \quad (3.23)$$

Substituindo $S_{k+1} = S_k + \Delta S_{k+1}$ em (3.22) obtém-se

$$\frac{1}{2} (S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}) < \frac{1}{2} S_k^T S_k, \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.24)$$

$$2\Delta S_{k+1}^T S_k < -\Delta S_{k+1}^T \Delta S_{k+1}, \quad \|\Delta S_{k+1}\| \neq 0, \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.25)$$

Substituindo (3.23) em (3.25) obtém-se

$$(G\Gamma u_k^\pm)^T S_k < -\frac{1}{2} (G\Gamma u_k^\pm)^T G\Gamma u_k^\pm, \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.26)$$

Supondo que $G\Gamma = I$, então a condição de existência para a superfície deslizante discreta no tempo é

$$(u_k^\pm)^T S_k < -\frac{1}{2} (u_k^\pm)^T (u_k^\pm), \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.27)$$

A equação (3.27) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^m u_{ik}^{\pm} S_{ik} < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (u_{ik}^{\pm})^2, \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.28)$$

onde $S_{ik} = 0$ é a i -ésima superfície de deslizamento associada com a superfície de deslizamento (3.17).

Uma lei discreta no tempo para a i -ésima lei de controle $u_{ik}^{\pm}$, do vetor $u_k^{\pm}$, que satisfaz a condição (3.28) é

$$u_{ik}^{\pm} = -a_i S_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.29)$$

sendo a_i uma constante real, tal que $0 < a_i < 2$, para $i = 1, 2, \dots, m$.

Para o caso de uma única entrada, com $\alpha = 1$, a lei se reduz a

$$u_k^{\pm} = -S_k, \quad u_k = u_k^{eq} + u_k^{\pm} = -[(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)x_k + S_k] \quad (3.30)$$

É interessante observar a simplicidade na realização desta lei e a garantia que a computação de tal lei, através de um dispositivo digital, é bastante rápida comparada às diversas leis muito mais complexas encontradas na literatura [34]. Outra observação é que tal lei deixa de ser chaveada e passa a ser suave; daí dizer que esta estratégia de controle deixa de ser chaveada e passa ser apenas com modos deslizantes (CDMD- h).

3.2.3 Análise da Robustez da Estabilidade

A lei de controle (3.30) foi escolhida devida sua simplicidade de realização e também por sua rápida computação. Outras várias leis discretas no tempo satisfazem a condição de existência do modo deslizante [34,30]. Entretanto, todas essas leis apresentam uma estrutura variável na forma descrita em (2.3), devido a sua robustez. Contudo, o uso de dispositivos digitais programáveis para a realização do controle robusto [31] pode causar considerável atraso na computação do sinal de controle devido ao processamento da lei de controle. Em geral, os efeitos do atraso na dinâmica do sistema comprometem o desempenho do controlador e faz com que a estabilização do sistema em malha fechada se torne um desafio. A lei de controle variável (2.3) não apresenta robustez com respeito ao atraso [16,21]. A lei de controle discreta proposta em (3.30), além de uma rápida computação, apresenta robustez para uma classe de incertezas como mostrado a seguir.

Considere o sistema discreto incerto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k + \Delta f(x_k) \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $\Delta f(x_k) \in \mathfrak{R}^n$ é a função discreta que representa a incerteza da planta.

Para análise da robustez da estabilidade, apresenta-se o seguinte teorema[4,44]:

Teorema 3.1: Se $\|G\Delta f(x_k)\| < \|G(x_k + \Gamma_1 u_{k-1})\|$ para todo k , então o sistema descrito pela equação (3.31) com lei de controle discreta (3.30) terá condição de atratividade à superfície de deslizamento.

Prova:

Considerando o sistema (3.31), a expressão (3.23) torna-se:

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = G x_{k+1} + G \Gamma_1 u_k - G x_k + G \Gamma_1 u_{k-1} \\ \Delta S_{k+1} &= G(\Phi x_k + \Gamma u_k + \Delta f(x_k)) - G x_k \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo (3.18) e (3.19) em (3.32) tem-se:

$$\Delta S_{k+1} = G \Gamma u_k^\pm + G \Delta f(x_k) \quad (3.33)$$

Para a candidata a função de Lyapunov $V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k$, segue-se que:

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} S_{k+1}^T S_{k+1} \quad (3.34)$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (\Delta S_{k+1} + S_k)^T (\Delta S_{k+1} + S_k) \quad (3.35)$$

Substituindo (3.33) em (3.35) tem-se:

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (G \Gamma u_k^\pm + G \Delta f(x_k) + S_k)^T (G \Gamma u_k^\pm + G \Delta f(x_k) + S_k) \quad (3.36)$$

Considerando $u_k^\pm = -S_k$, $G\Gamma = 1$ (uma única entrada) e substituindo em (3.36) tem-se:

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k - S_k + G \Delta f(x_k))^T (S_k - S_k + G \Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (G \Delta f(x_k))^T (G \Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} \|G \Delta f(x_k)\|^2. \quad (3.37)$$

Sabe-se também que:

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k = \frac{1}{2} (G \Gamma_1 u_{k-1} + G x_k)^T (G \Gamma_1 u_{k-1} + G x_k)$$

$$V_k = \frac{1}{2} \|G(x_k + \Gamma_1 u_{k-1})\|^2 \quad (3.38)$$

Se $\|G \Delta f(x_k)\| < \|G(x_k + \Gamma_1 u_{k-1})\|$, então de (3.37) e (3.38) tem-se:

$$V_{k+1} < V_k$$

e a condição de atratividade à superfície de deslizamento é satisfeita.

3.3 Comentários

Neste capítulo foi apresentado um controlador discreto com modos deslizantes, que leva em consideração o atraso no sinal de controle. Para o projeto desse controlador é necessário que o sistema discreto seja representado por um modelo que considere o atraso. Este novo modelo é importantíssimo, pois é com base nas parcelas da matriz de entrada, Γ_1 e Γ_2 , que seu desenvolvimento se torna possível.

A separação da matriz de entrada do sistema discreto em Γ_1 e Γ_2 , baseada em [44], é o que possibilita ao controlador suportar atrasos muito próximos do período de amostragem. Esta situação não era possível em [4].

Esta lei de controle não utiliza estrutura chaveada, portanto, os efeitos sentidos pelo atraso podem ser minimizados. Outra importante observação é que utilizando este controlador não há necessidade de utilizar um preditor para os casos de controladores com entrada atrasada, portanto, os efeitos do atraso computacional são suprimidos através da

escolha adequada da superfície deslizante, que depende da componente atrasada do sinal de controle.

Podemos notar que a realização desse controlador é muito simples, com um algoritmo de rápida execução. Como demonstrado pelo Teorema 3.1, este controlador também é robusto com respeito a uma classe de incertezas paramétricas da planta.

CAPÍTULO 4

4. OBSERVADOR ROBUSTO COM MODOS DESLIZANTES

Edwards e Spurgeon [11] propuseram um observador muito eficiente para ser utilizado na área de sistemas de controle com modos deslizantes (MD). Além disso, Garcia [15,21], propôs uma nova solução para um caso particular do estimador com MD proposto em [11] levando em consideração o atraso no sinal de controle. Assim, o observador apresentado nesse trabalho levará em consideração o atraso no sinal de controle, como em [15,21], seguindo a estrutura generalizada de projeto proposta em [11].

4.1 Observador com Modo Deslizante

Considere o sistema incerto descrito abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t-h) + f(t, x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Admite-se que as matrizes B e C são de posto completo e a função $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ é desconhecida e representa a incerteza do sistema. Um problema natural para ser considerado inicialmente é o caso particular quando a incertezas do sistema podem ser consideradas casadas. Suponha então que:

$$f(t, x, u) = D \xi(t, x, u) \quad (4.2)$$

onde a função $\xi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ é desconhecida, porém limitada, tal que

$$\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1 \|u\| + \alpha(t, y) \quad (4.3)$$

onde r_1 é um escalar positivo conhecido e $\alpha: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função conhecida. Tem-se também que a matriz constante $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ é de posto completo e que $p \geq q$.

4.1.1 Forma Canônica para o Projeto do Observador

Apresentado o sistema a ser estudado, será proposto e analisado o observador com modo deslizante. Entretanto, este sistema será apresentado primeiramente em uma forma que facilitará a análise e compreensão do projeto. Esta forma é denominada forma canônica do observador.

Suponha que exista uma mudança de coordenadas linear T_0 tal que o sistema (4.1) possa ser escrito como [11]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t-h) \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t-h) + D_2\xi \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)}$, $y \in \mathbb{R}^p$ e a matriz A_{11} tem autovalores estáveis. Considere o observador com modo deslizante da forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11} \hat{x}_1(t) + A_{12} \hat{y}(t) + B_1 u(t-h) - A_{12} e_y(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21} \hat{x}_1(t) + A_{22} \hat{y}(t) + B_2 u(t-h) - (A_{22} - A_{22}^s) e_y(t) + v \end{cases} \quad (4.5)$$

onde A_{22}^s é uma matriz de projeto estável e $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$. Seja $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ uma matriz de Lyapunov, simétrica e positiva definida para A_{22}^s , então o vetor descontínuo v é definido por:

$$v = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \|D_2\| \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\|} & \text{se } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde a função escalar $\rho: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaz

$$\rho(t, y, u) \geq r_1 \|u\| + \alpha(t, y) + \gamma_0 \quad (4.7)$$

e γ_0 é um escalar positivo.

Seja o erro de estimação de estados definido por $e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t)$ e $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$, então dos sistemas (4.4) e (4.5) temos:

$$\dot{e}_1(t) = A_{11} e_1(t) \quad (4.8)$$

$$\dot{e}_y(t) = A_{21} e_1(t) + A_{22}^s e_y(t) + v - D_2 \xi \quad (4.9)$$

O sistema formado pelas equações (4.8) e (4.9) representa a dinâmica do erro resultante da representação do espaço de estado na forma canônica para a planta e para o observador. Assim, para analisar a estabilidade do sistema desse sistema dinâmico, será utilizada a proposição que segue [11].

Proposição 4.1: Existe uma família de matrizes positivas definidas e simétricas $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, tais que a dinâmica do erro dada pelas equações (4.8) e (4.9) é assintoticamente estável.

Prova:

Sejam $Q_1 \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ e $Q_2 \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ as matrizes de projeto positivas definidas e simétricas. Define-se $P_2 \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ como a única solução positiva definida e simétrica da equação de Lyapunov

$$P_2 A_{22}^s + (A_{22}^s)^T P_2 = -Q_2 \quad (4.10)$$

Define-se

$$Q_3 = A_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 A_{21} + Q_1 \quad (4.11)$$

e nota-se que $Q_3 = Q_3^T$ e Q_3 é positiva definida.

Seja $P_1 \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ a única solução positiva definida e simétrica da equação de Lyapunov

$$P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 = -Q_3 \quad (4.12)$$

Considere a forma quadrática dada por

$$V(e_1, e_y) = e_1^T P_1 e_1 + e_y^T P_2 e_y \quad (4.13)$$

como uma candidata a função de Lyapunov.

Derivando ao longo da trajetória do sistema a equação (4.13), tem-se:

$$\dot{V}(e_1, e_y) = -e_1^T Q_3 e_1 + e_1^T A_{21}^T P_2 e_y + e_y^T P_2 A_{21} e_1 - e_y^T Q_2 e_y + 2e_y^T P_2 v - 2e_y^T P_2 D_2 \xi \quad (4.14)$$

Define-se uma nova identidade como sendo:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y &= (e_y - Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1)^T Q_2 (e_y - Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1) \equiv \\ &e_y^T Q_2 e_y - e_1^T A_{21}^T P_2 e_y - e_y^T P_2 A_{21} e_1 + e_1^T A_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo a identidade (4.15) na equação (4.14) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e_1, e_y) &= -e_1^T Q_3 e_1 + e_1^T A_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y + 2e_y^T P_2 v - 2e_y^T P_2 D_2 \xi \\
 &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y + 2e_y^T P_2 v - 2e_y^T P_2 D_2 \xi \\
 &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y + 2\rho(t, y, u) \|D_2\| \|P_2 e_y\| - 2e_y^T P_2 D_2 \xi
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Agora, substituindo a incerteza limitada da equação (4.3) e a expressão para $\rho(t, y, u)$ dada na equação (4.7) na expressão (4.16) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e_1, e_y) &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y - 2\rho(t, y, u) \|D_2\| \|P_2 e_y\| - 2\|D_2\| (r_1 \|u\| + \alpha(t, y)) \|P_2 e_y\| \\
 &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y - 2\gamma_0 \|D_2\| \|P_2 e_y\| \\
 &< 0 \quad \text{para } (e_1, e_y) \neq 0
 \end{aligned}$$

então, devido ao segundo método de Lyapunov conclui-se que a dinâmica do erro é assintoticamente estável.

Seja a superfície de deslizamento para o espaço da dinâmica do erro dada como segue:

$$S_0 = \{e(t) \in \mathbb{R}^n : Ce = e_y = 0\} \tag{4.17}$$

onde $e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_y(t) \end{bmatrix}$.

Como vimos, a dinâmica do erro é assintoticamente estável. Isto garante que $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, os estados da dinâmica do erro “convergem” assintoticamente para o deslizamento, mas não garante o alcance e a permanência no mesmo. Desta forma, surge a necessidade do corolário que segue [11]:

Corolário 4.1: A superfície de deslizamento (4.17) garante a existência e alcançabilidade do deslizamento sobre a mesma.

Prova:

Considere a forma quadrática:

$$V_s(e_y) = e_y^T P_2 e_y \quad (4.18)$$

Diferenciando a forma quadrática (4.18) e, em seguida, substituindo o valor da expressão (4.9) tem-se:

$$\dot{V}_s = -e_y^T Q_2 e_y + 2e_y^T P_2 A_{21} e_1 + 2e_y^T P_2 (v - D_2 \xi) \quad (4.19)$$

Substituindo em (4.19) as equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) tem-se

$$\dot{V}_s \leq 2\|P_2 e_y\| \|A_{21} e_1\| - 2\gamma_0 \|D_2\| \|P_2 e_y\| \quad (4.20)$$

Considerando o domínio Ω como sendo:

$$\Omega = \{(e_1, e_y) : \|A_{21} e_1\| < \|D_2\| \gamma_0 - \eta\}$$

onde η é um pequeno escalar positivo. Então a equação (4.20) torna-se:

$$\dot{V}_s \leq -2\eta \|P_2 e_y\|$$

Da Proposição 4.1 pode-se afirmar que o erro da saída e_y entrará no domínio Ω em um tempo finito e nele permanecerá, o que garante a existência e alcançabilidade do modo deslizante para a superfície de deslizamento (4.17).

Assim, sendo $\hat{x}$ o vetor que representa os estados estimados de x e $e = \hat{x} - x$, então o observador robusto pode ser convenientemente escrito nas coordenadas originais do sistema como segue:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t-h) - G_l C e(t) + G_n v \quad (4.21)$$

e o ganho linear

$$G_l = T_0^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} - A_{22}^s \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e o ganho não linear

$$G_n = \|D_2\| T_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e o vetor descontínuo

$$v = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \|D_2\| \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\|} & \text{se } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.24)$$

Toda análise do observador foi realizada supondo a existência de uma transformação linear T_o tal que o sistema passe a estar na forma canônica desejada. Então, no próximo item, mostrar-se-á como obter essa transformação linear.

4.1.2 Transformação Linear T_o

Ao partir do fato que apenas a saída será considerada acessível [11], é conveniente introduzir uma transformação de coordenadas tal que o sistema passe a ter como saída os últimos p estados do mesmo. Então define-se:

$$T_C = \begin{bmatrix} N_C^T \\ C \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde $N_C \in \Re^{n \times (n-p)}$ é o espaço nulo de C . A transformação de coordenadas $x \mapsto T_C x$ é não singular por construção e, como consequência, no novo sistema de coordenadas a matriz de distribuição da saída torna-se:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Desse ponto, será estabelecido um caso especial da forma regular apresentado no Capítulo 2. Suponha que no novo sistema de coordenadas

$$D = \begin{bmatrix} D_{C1} \\ D_{C2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \updownarrow n-p \\ \updownarrow p \end{array}$$

Então $CD = D_{C2}$ e então por suposição $\text{rank}(D_{C2}) = q$. Assim a pseudo-inversa

$$D_{C2}^\perp = (D_{C2}^T D_{C2})^{-1} D_{C2}^T$$

é bem definida e existe uma matriz ortogonal $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tal que

$$T^T D_{C2} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

onde $D_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é não singular. Consequentemente, a mudança de coordenadas $x \mapsto T_B x$ onde

$$T_B = \begin{bmatrix} I_{n-p} & -D_{C1} D_{C2}^\perp \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

é não singular, e com respeito ao novo sistema de coordenadas, o trio (A, D, C) tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & T \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde $A'_{11} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$. Por suposição as incertezas do sistema são incertezas casadas e consequentemente o deslizamento é independente das incertezas. Por isso, a forma canônica (4.27) pode ser entendida como um caso especial da forma regular normalmente utilizada no projeto de controladores modos deslizantes.

Agora com a submatriz $A'_{11} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$, pode-se particioná-la tal como

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde $\bar{A}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ e suponha que o par matricial $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21})$ é observável. Assim, deve-se encontrar um ganho matricial $L \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (p-q)}$ tal que $\bar{A}_{11} + L\bar{A}_{21}$ seja estável. Então define-se uma transformação não singular tal que

$$T_L = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L_{bar} \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde $L_{bar} = \begin{bmatrix} L & 0_{(n-p) \times q} \end{bmatrix}$.

Dessa maneira, a transformação mudança de coordenadas T_o , citada no início desse capítulo é calculada como

$$T_0 = T_C^{-1} T_B^{-1} T_L^{-1} \quad (4.31)$$

4.1.3 Algoritmo para o Projeto do Observador Robusto

É possível sistematizar o projeto do observador seguindo os passos dados a seguir:

Passo 1: Monte a transformação linear não-singular T_C

$$T_C = \begin{bmatrix} N_C^T \\ C \end{bmatrix}$$

com $N_C \in \mathfrak{R}^{n \times (n-p)}$ e utilize-a para obter as coordenadas do sistema tal que a matriz C tenha a forma $C = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$.

Passo 2: Obtenha D_{C1} e D_{C2} a partir de D . Se $\text{rank}(D_{C2}) < q$, não existe observador robusto. Caso contrário, encontre a matriz ortogonal $T \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, tal que

$$T^T D_{C2} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

e a pseudo-inversa definida como $D_{C2}^\perp = (D_{C2}^T D_{C2})^{-1} D_{C2}^T$ para montar a transformação linear não-singular $x \mapsto T_B x$ que segue $T_B = \begin{bmatrix} I_{n-p} & -D_{C1} D_{C2}^\perp \\ 0 & T^T \end{bmatrix}$ e gere as matrizes do sistema nas novas coordenadas:

$$A = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad T]$$

Passo 3: Identifique os sub-blocos matriciais $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21})$ de A'_{11} . Se não for possível ser encontrado um ganho matricial $L \in \Re^{(n-p) \times (p-q)}$ que estabilize $\bar{A}_{11} + L\bar{A}_{21}$, então não existe um observador robusto. Caso contrário encontre L .

Passo 4: Defina uma transformação não-singular T_L , tal que

$$T_L = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L_{bar} \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

onde $L_{bar} = \begin{bmatrix} L & 0_{(n-p) \times q} \end{bmatrix}$.

Passo 5: Seja P_2 a única solução da equação de Lyapunov para a matriz estável de projeto A_{22}^S e a matriz positiva definida e simétrica de projeto Q_2 . Defina A_{22}^S , Q_2 e compute P_2 .

Passo 6: Calcule os ganhos matriciais G_l e G_n .

ganho linear

$$G_l = T_0^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} - A_{22}^S \end{bmatrix}$$

ganho não-linear

$$G_n = \|D_2\| T_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$$

Passo 7: Monte o observador robusto como segue:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t-h) - G_l Ce(t) + G_n v$$

com

$$v = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \|D_2\| \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\|} & \text{se } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ e $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$.

4.2 Comentários

Neste capítulo foi apresentado um projeto de observadores com Estrutura Variável e Modo Deslizante (EV/MD) considerando sistemas incertos, contínuos no tempo [11], com atraso no sinal de controle [15,21,35].

Considerou-se o acesso apenas à saída do sistema incerto, com atraso na entrada. O projeto apresenta características de robustez em relação a certa classe de incertezas e não-linearidades. Uma característica introduzida nesse observador [11] foi a consideração da presença do atraso no sinal de controle [15,21].

Esse observador será utilizado para efetuar as simulações de sistemas incertos de natureza instável e com atraso no sinal de controle, com acesso somente à saída da planta. Os resultados do desempenho do observador serão apresentados no Capítulo 6.

CAPÍTULO 5

5. SISTEMAS INCERTOS, NÃO-LINEARES E DE NATUREZA INSTÁVEL

O estudo do controle de sistemas instáveis é de extrema importância devido à sua difícil estabilização. Neste capítulo serão apresentados três desses sistemas.

5.1 Sistema Bola e Viga

O sistema Bola e Viga é um sistema não-linear e instável em malha aberta. Este é um importante modelo no aprendizado de engenharia e sistemas de controle, pois é de fácil implementação e, conseqüentemente, permite que inúmeras técnicas de controle possam ser estudadas e pesquisadas.

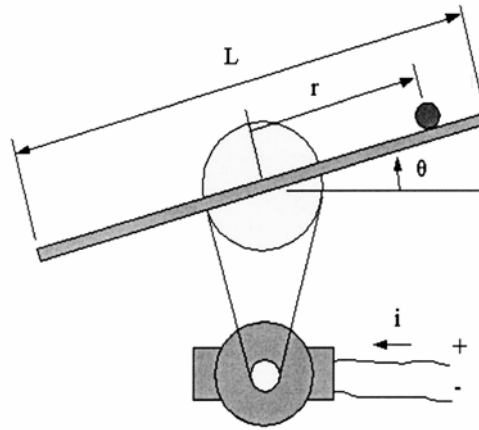


Figura 5.1 – O Sistema Bola e Viga

O sistema mostrado na Figura 5.1 consiste em uma bola de metal rolando ao longo da viga. Esta é montada na saída do eixo de um motor elétrico e então pode ser girada em torno de seu eixo central pela ação de um sinal de controle elétrico, que é amplificado e aplicado ao motor. A posição da bola na viga pode ser medida através de um sensor especial.

O trabalho do controle é o de regular automaticamente a posição da bola apenas pela alteração do ângulo da viga. Existe uma dificuldade de efetuar o controle porque a bola não permanece em um lugar fixo, mas se move com uma aceleração que é proporcional ao giro da viga. Em tecnologia de controle o sistema é instável à malha aberta porque a saída do sistema (a posição da bola) aumenta sem limite para uma entrada fixa (ângulo da viga). Controle de realimentação pode ser utilizado para manter a bola em uma posição desejada sobre a viga.

As equações diferenciais que governam as dinâmicas do sistema são [52]:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{K_m u - mgr \cos(\theta)}{J_R} \\ \ddot{r} &= \frac{-mg \sin(\theta) - F_R \dot{r}}{\frac{J_B}{R^2} + m}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Nas equações dinâmicas (5.1), θ é o ângulo da viga, r é a posição da bola, u é a entrada de controle (corrente aplicada ao motor) e os demais parâmetros são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 5.1
Dados do Sistema Bola e Viga

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Constante do motor e engrenagens	K_m	7.35	Nm / A
Massa da bola	m	0.05	Kg
Constante gravitacional	g	9.8	m / s^2
Inércia da viga	J_R	0.049	Kgm^2
Coefficiente de fricção da bola	F_R	0.07	Kg / s
Inércia da bola	J_B	0.000008	Kgm^2
Raio da bola	R	0.02	m
Comprimento da viga	L	1	m

Linearizando o sistema no ponto de equilíbrio, a origem, $\begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} u \quad (5.2)$$

Com a equação matricial linear (5.2), podemos calcular os ganhos da superfície deslizante e implementar o controlador discreto com modos deslizantes considerando o atraso de processamento(CDMD- h) considerando acesso pleno e parcial dos estados.

5.2 Sistema Pêndulo Invertido

Pêndulos Invertidos são excelentes modelos para demonstrações de técnicas de controle automático. Eles são sistemas não-lineares, instáveis, excelentes para aplicações de métodos de controle moderno e são muito interessantes de serem observados. O sistema

pêndulo invertido a ser considerado deve ter no mínimo dois graus de liberdade: um para a posição da base do pêndulo e outro para seu ângulo.

Em dois graus de liberdade, a base do pêndulo tem seu movimento restrito a apenas uma dimensão (linear ou rotacional), o mesmo ocorre com o ângulo do pêndulo.

5.2.1 Sistema Pêndulo Invertido Linear

O Sistema Pêndulo Invertido Linear da Figura 5.2 está montado sobre um carrinho com motor, que está sobre um trilho. Este é chamado linear porque o carrinho motorizado (base do pêndulo) pode se mover apenas em cima do trilho a qual está posicionada. Assim, o problema considerado está em duas dimensões.

Este modelo pode ser considerado como um sistema de lançamento de foguetes, cujo objetivo é manter a nave na posição vertical no momento de seu lançamento.

Na Figura 5.2, M é a massa do carrinho motorizado, m é a massa do pêndulo, x é a posição do carrinho sobre o trilho, u é a força de controle e θ é o ângulo da haste do pêndulo.

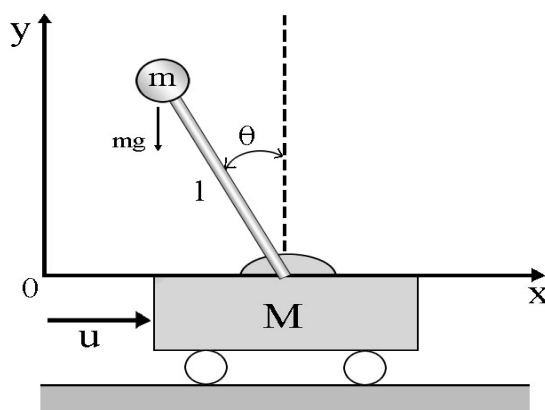


Figura 5.2 – O Sistema Pêndulo Invertido Linear

As equações diferenciais que governam as dinâmicas do sistema são [53]:

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} &= u \\ m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} &= mg\sin\theta\end{aligned}\quad (5.3)$$

e podem ser reescritas da forma matricial abaixo

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\theta}}{(M+m)g\sin\theta - m(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + b\dot{x}\cos\theta} \\ \frac{\dot{x}}{ml\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta - b\dot{x}} \\ \frac{\ddot{\theta}}{(M+m-m\cos\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \\ 0 \\ \frac{a}{(M+m-m\cos\theta)} \end{bmatrix} V \quad (5.4)$$

onde a relação entre a força de controle u e a tensão V , em Volts, gerada pelo computador digital é

$$u = aV - b\dot{x} \quad (5.5)$$

e os valores numéricos de a e b , bem como de todos os outros parâmetros são encontrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2
Dados do Sistema Pêndulo Invertido Linear

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Comprimento do pêndulo	l	0.61	m
Massa do pêndulo	m	0.21	Kg
Constante gravitacional	g	9.8	m/s^2
Massa do carrinho	M	0.4573	Kg
Dado da placa de aquisição	a	1.7378	-
Dado da placa de aquisição	b	7.6832	-

Linearizando o sistema no ponto de equilíbrio $[\theta \quad \dot{\theta} \quad x \quad \dot{x}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ obtemos o seguinte modelo linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)}{Ml}g & 0 & 0 & \frac{b}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{Ml} \\ 0 \\ \frac{a}{M} \end{bmatrix} V \quad (5.6)$$

que ao substituir os valores da Tabela 5.2 resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 46.9 & 0 & 0 & 55.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.5 & 0 & 0 & -16.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -12.5 \\ 0 \\ 3.8 \end{bmatrix} V \quad (5.7)$$

5.2.2 Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional é mostrado na Figura 5.3. Neste, a base do pêndulo é presa a uma haste horizontal através de uma junta. Esta haste é chamada de braço do pêndulo. O eixo de revolução do pêndulo é colinear com o eixo da haste horizontal. O ângulo do pêndulo é α . O braço é acoplado diretamente, ou através de engrenagens, ao eixo do motor, dando a ele o movimento rotacional. A posição angular do braço é θ . A entrada do sistema é o torque T , aplicado pelo motor.

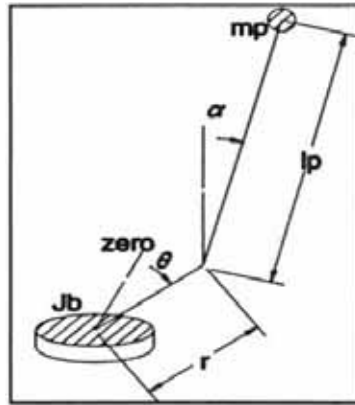


Figura 5.3 – O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

Na Figura 5.3, J_b é a inércia total após a caixa de engrenagens incluindo o braço, r é o tamanho do braço, θ é o ângulo do braço e α é o ângulo do pêndulo. Note que l_p é metade do tamanho do pêndulo ($l_p = 0.5 L_p$).

O modelo matemático usado aqui é dado por [26]. As equações dinâmicas não-lineares, que representam o comportamento do pêndulo, são

$$\begin{aligned} (m_p r^2 + J_b) \ddot{\theta} + m_p r \ddot{\alpha} l_p \cos(\alpha) - m_p r \dot{\alpha}^2 l_p \sin(\alpha) &= T \\ m_p l_p \cos(\alpha) \ddot{\theta} r - m_p l_p \sin(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} r + m_p \ddot{\alpha} l_p^2 - m_p g l_p \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

O modelo desenvolvido é baseado em um torque T aplicado ao braço. O sistema real, por outro lado, é controlado por voltagem. A relação entre o torque de controle T , e a tensão V , em Volts, é

$$T = V \frac{K_m K_g}{R} - \frac{K_m^2 K_g^2}{R} \dot{\theta}. \quad (5.9)$$

Os valores de todos os parâmetros físicos para esta configuração de pêndulo invertido são dados na Tabela 5.3. Todos os valores contidos nesta tabela são baseados nas medidas do sistema real, dando maior confiabilidade ao modelo matemático.

Tabela 5.3
Parâmetros Físicos do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

Parâmetros	Símbolo	Valor	Unidades
Constante de torque do motor	K_m	0.00767	Nm / A
Resistência de armadura do motor	R	2.6	Ω
Relação total de engrenagens	K_g	60.5	-
Inércia total após a caixa de engrenagens incluindo o braço	J_b	0.0044	Kgm^2
Comprimento real do pêndulo	L_p	0.43	m
Massa do pêndulo	m_p	0.14	Kg
Comprimento do braço	r	0.2	m
Constante gravitacional	g	9.8	m / s^2

Linearizando o sistema no ponto de equilíbrio $[\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m_p r g}{J_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(m_p r^2 + J_b)}{l_p J_b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_b} \\ \frac{-r}{l_p J_b} \end{bmatrix} T \quad (5.10)$$

Substituindo a relação (5.9) na equação matricial (5.10), e inserindo os valores paramétricos apresentados na Tabela 5.3, obtém-se o seguinte modelo linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -67.4 & -25.6 & 0 \\ 0 & 122.8 & 25.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 47.4 \\ -47.4 \end{bmatrix} V \quad (5.11)$$

5.3 Comentários

Neste capítulo foram apresentados os modelos matemáticos de todos os sistemas que serão utilizados para comprovar a eficácia do controlador e observador descrito nos capítulos anteriores.

Todos os sistemas são governados por equações dinâmicas não-lineares, e todos apresentam a propriedade de instabilidade à malha aberta, ou seja, são sistemas de natureza instável.

Ao se modelar um sistema, alguns dos parâmetros podem não ser considerados no projeto, porque é muito difícil representar com perfeição as dinâmicas reais por um modelo matemático. Assim, a utilização de controladores robustos, capazes de suprimir as incertezas paramétricas da planta, é essencial. O mesmo deve se dizer em relação aos observadores, pois estes são projetados baseados na modelagem matemática da planta.

CAPÍTULO 6

6. RESULTADOS: SIMULAÇÕES DO CONTROLADOR CDMD- h E DO OBSERVADOR ROBUSTO APLICADO EM SISTEMAS INSTÁVEIS

Neste capítulo são apresentadas as simulações do CDMD- h , considerando primeiramente todos os estados acessíveis e depois com acesso parcial aos estados (saída do sistema), utilizando nessa última simulação o observador robusto/contínuo com modos deslizantes desenvolvido no Capítulo 4. Para efeito de comparação, todas as simulações realizadas para o controlador CDMD- h (que leva em consideração o atraso computacional), também serão realizadas para o controlador CDMD [44] (que não leva em consideração o atraso computacional). Estas simulações foram feitas nos sistemas Bola e Viga, Pêndulo Invertido Linear e Pêndulo Invertido Rotacional. Nestes sistemas, os modelos matemáticos não-lineares são simulados, mesmo que os controladores tenham sido projetados através de seus modelos linearizados em torno dos pontos de operações. As representações simplificadas através de blocos para o controle dos sistemas simulados são mostradas abaixo:

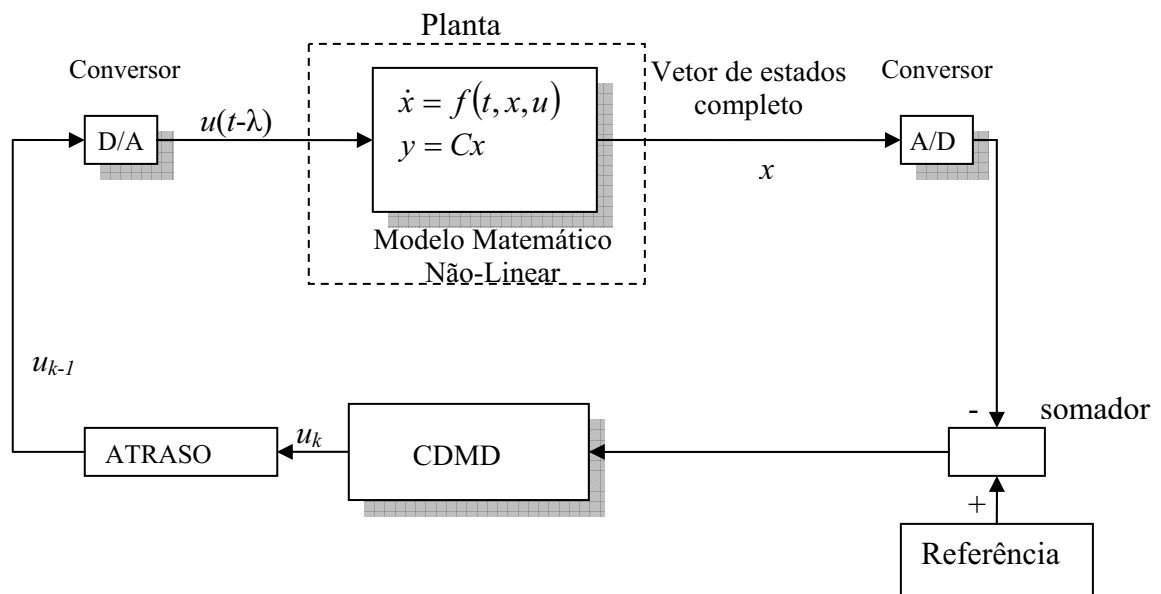


Figura 6.1 – Diagrama de blocos para o CDMD com acesso a todos os estados do sistema.

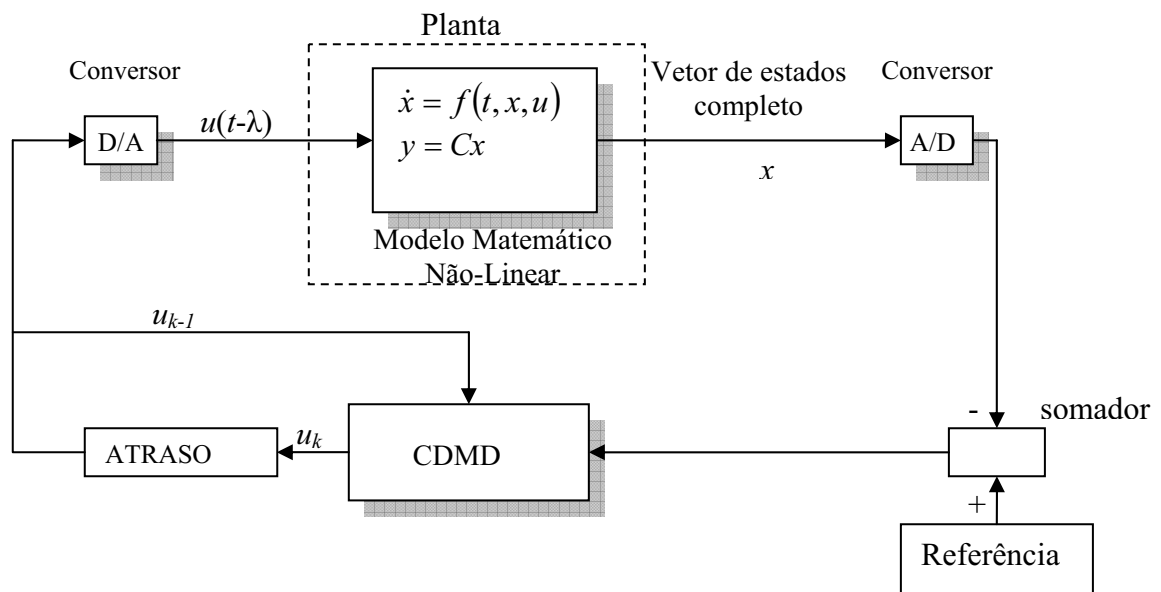


Figura 6.2 – Diagrama de blocos para o CDMD-h com acesso a todos os estados do sistema.

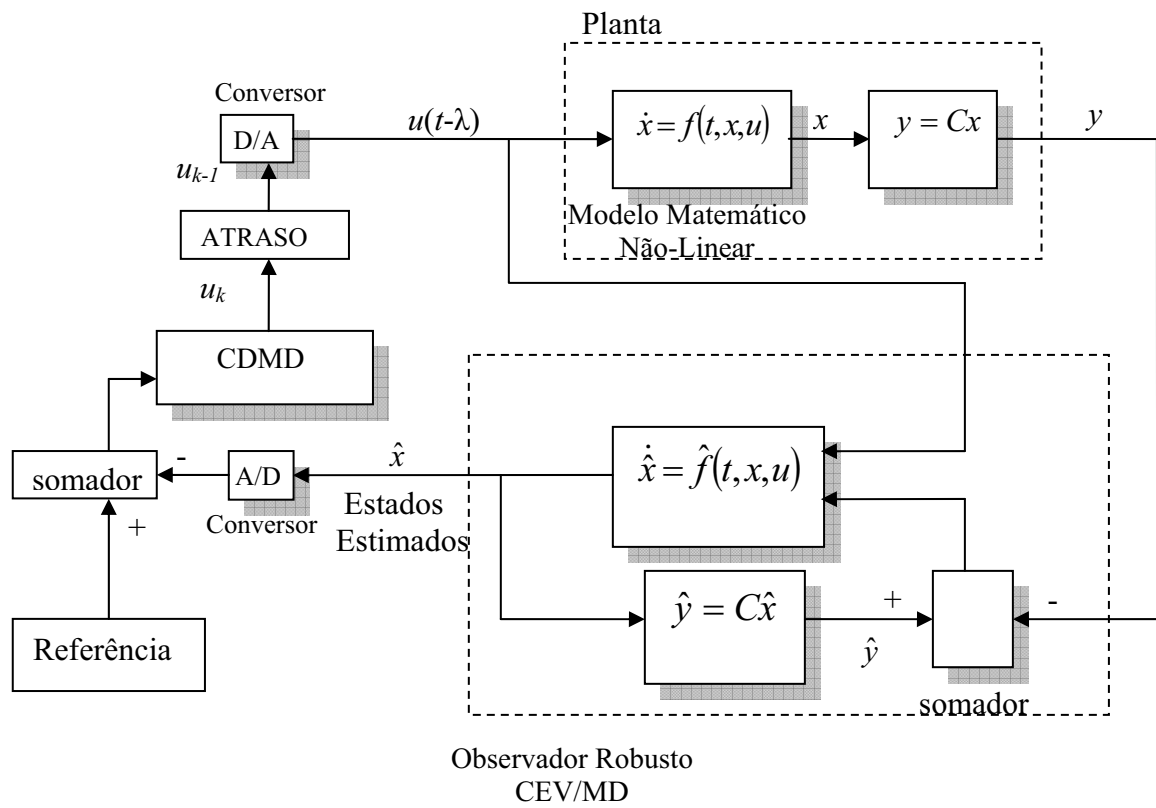


Figura 6.3 – Diagrama de blocos para o CDMD com acesso parcial aos estados do sistema.

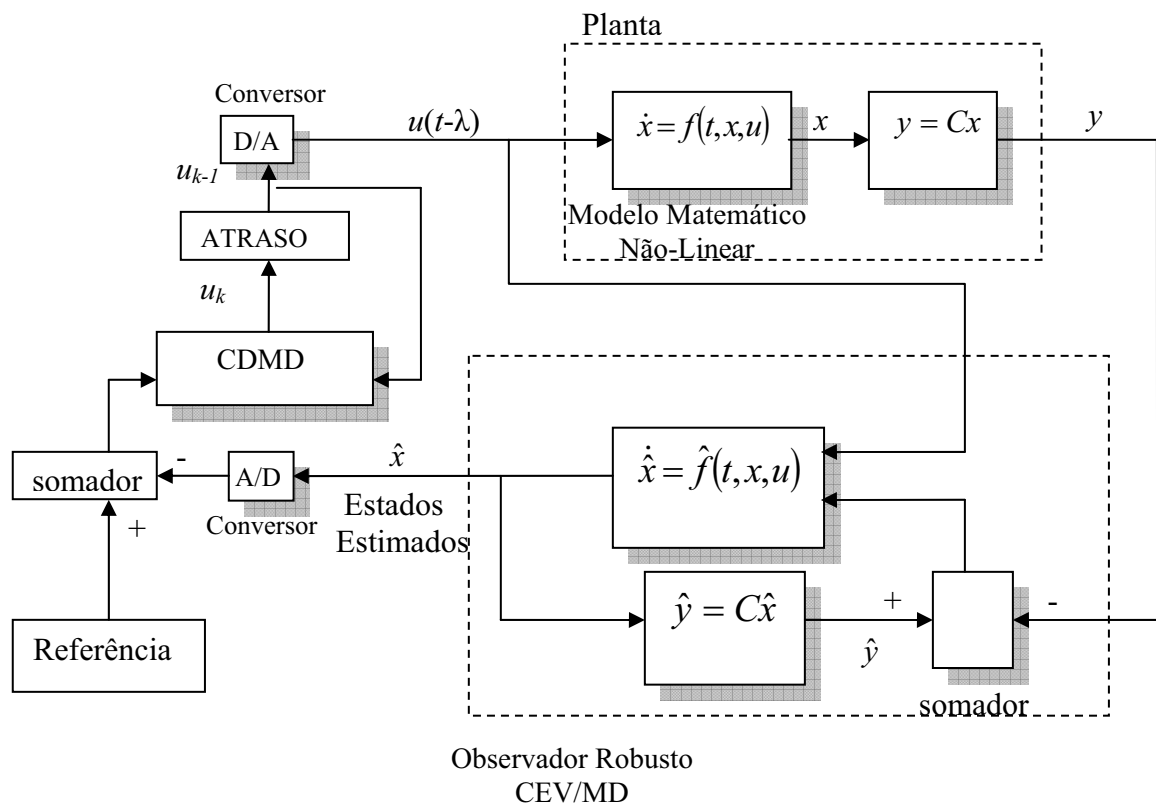


Figura 6.4 – Diagrama de blocos para o CDMD-h com acesso parcial aos estados do sistema.

Para análise da eficiência do controlador e do observador, as simulações foram feitas com o atraso crítico, ou seja, atraso grande em relação ao período de amostragem. Porém, esse atraso crítico será testado primeiro com um período de amostragem pequeno, $\Delta = 0,01s$, e um atraso computacional de $h = 0,009s$. Em seguida, será testado um período de amostragem grande, $\Delta = 0,05s$ e um atraso computacional de $h = 0,04s$. Em ambos os casos, serão simulados para efeito de comparação, como já mencionado anteriormente, dois tipos de controladores:

- a) O primeiro controlador não leva em consideração o atraso computacional no projeto da superfície deslizante (CDMD) [4,44]. Este controlador é dado pela equação (3.30) e pela superfície deslizante projetada da seguinte maneira:

$$S_k = Gx_k$$

- b) O segundo controlador leva em consideração o atraso computacional no projeto da superfície deslizante (CDMD- h , projetado no Capítulo 3). Este controlador é dado pela equação (3.30) e pela superfície deslizante (3.17).

Além disso, ainda será apresentado um gráfico que mostra a evolução temporal dos estados estimados e estados reais, para uma melhor visualização da performance do sistema observador apresentado neste trabalho (este gráfico será simulado para o observador de estados atuando junto ao controlador CDMD- h , período de amostragem de $\Delta = 0,05s$ e atraso computacional de $h = 0,04s$).

6.1 Resultados das Simulações no Sistema Bola e Viga

Para essa simulação foi estabelecido que a bola seguisse um sinal de referência na forma de onda quadrada e amplitude 0,3m. Com isso a bola deve percorrer a viga de um lado para outro, partindo de sua posição inicial na origem. Uma especificação do modelo físico real é que seu sinal de controle tem uma saturação de $\pm 1A$. Assim, esta limitação foi introduzida nas simulações, expondo o controlador a uma situação mais próxima da realidade.

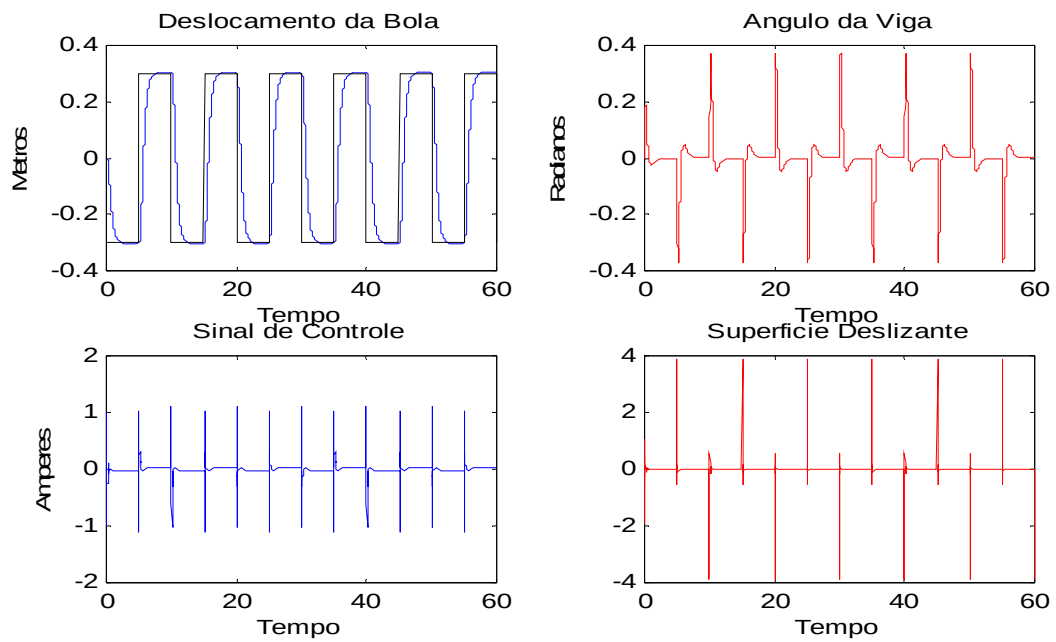


Figura 6.5- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

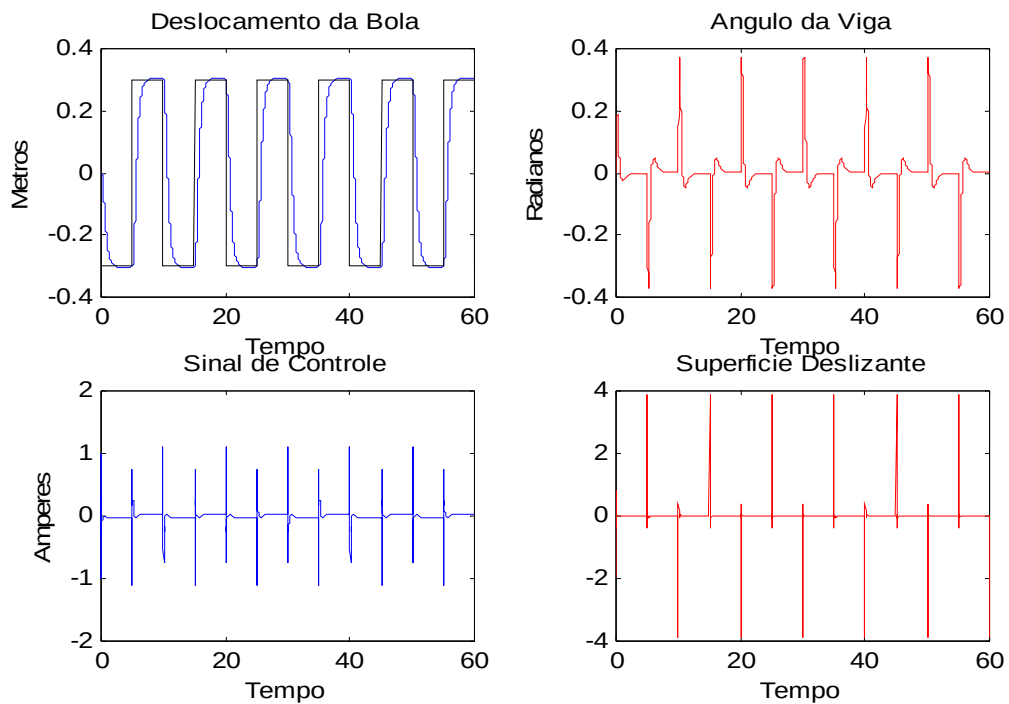


Figura 6.6- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD-h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

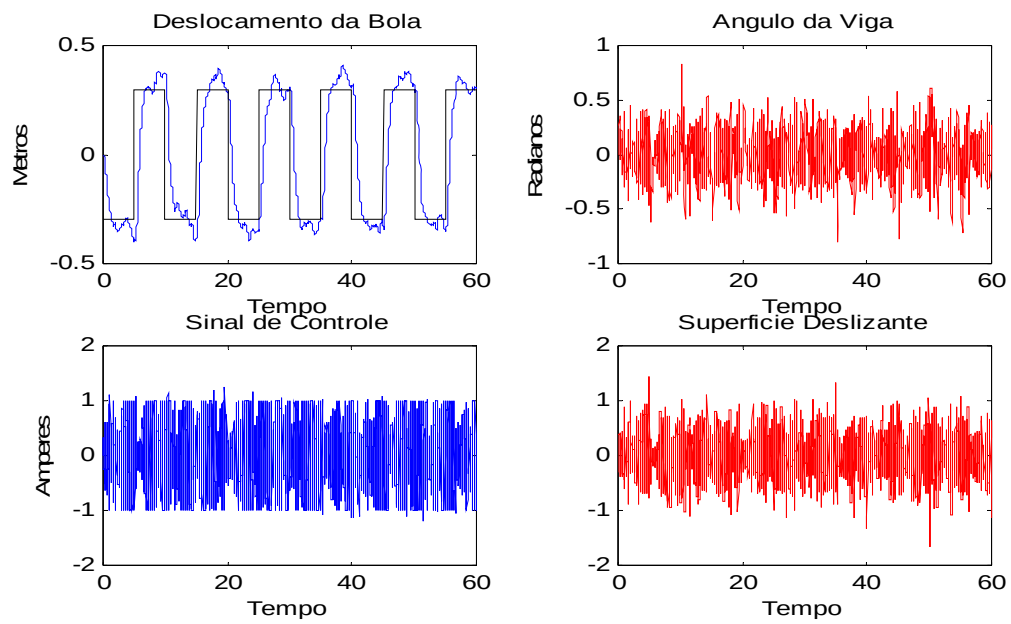


Figura 6.7- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

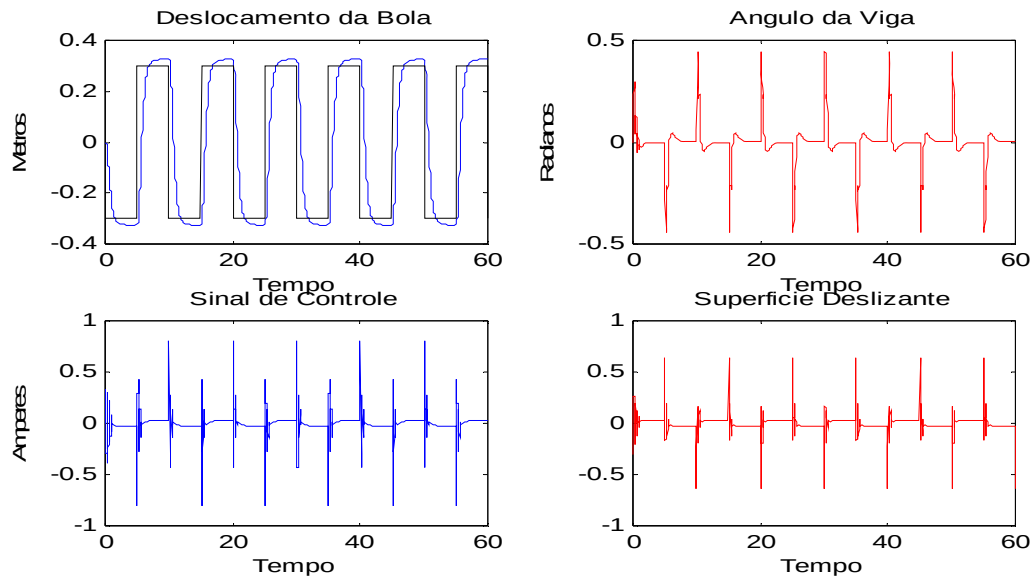


Figura 6.8- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD-h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

O período de amostragem utilizado nas Figuras 6.5 e 6.6 foi de $\Delta = 0,01s$ e o atraso de processamento de $h = 0,009s$. Este atraso é grande em relação ao período de amostragem (90%), e mesmo nesta situação os controladores, CDMD e CDMD- h , apresentaram um bom desempenho e estabilizaram o sistema.

Essa situação do atraso crítico pode ser imaginada quando se tem um computador com bom processador para realização do controle, onde se pode atuar com um período de amostragem mais refinado (0,01s), pois o valor absoluto do atraso computacional é reduzido (0,009s).

Nas Figuras 6.7 e 6.8, foi utilizado um período de amostragem de $\Delta = 0,05s$ e o atraso de processamento de $h = 0,04$ segundos, o que é também um atraso grande em relação ao período de amostragem (80%). Mas nesta situação o controlador CDMD [4,44], não conseguiu estabilizar o sistema, porém o controlador CDMD- h [44] continuou apresentando bom desempenho e estabilizou o sistema.

Esta nova situação de atraso crítico pode ser imaginada quando se tem um computador com um processador inferior em relação ao primeiro caso para realização do controle, devendo-se atuar agora com um período de amostragem grande (0,05s), pois o valor absoluto do atraso computacional aumenta (0,04s).

Agora, o CDMD e o CDMD- h , serão simulados com o observador robusto para a estimação dos estados tendo acesso a saída do sistema.

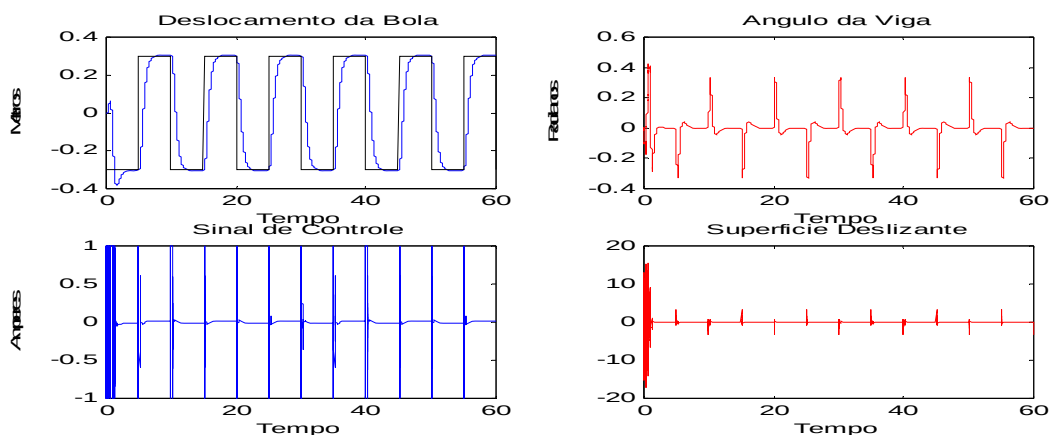


Figura 6.9- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

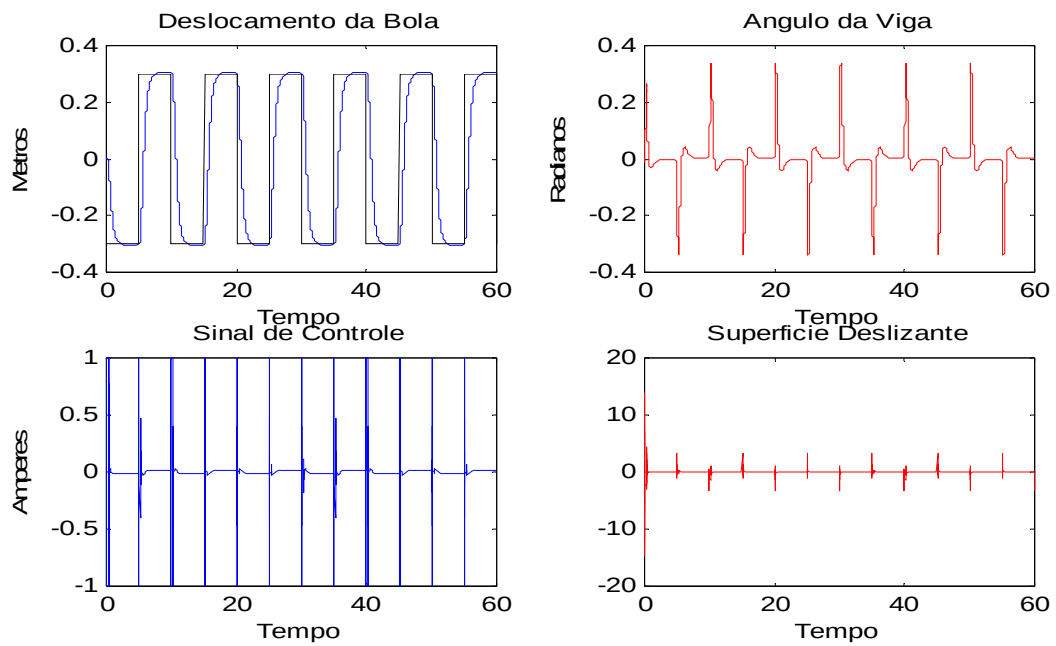


Figura 6.10- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD-h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

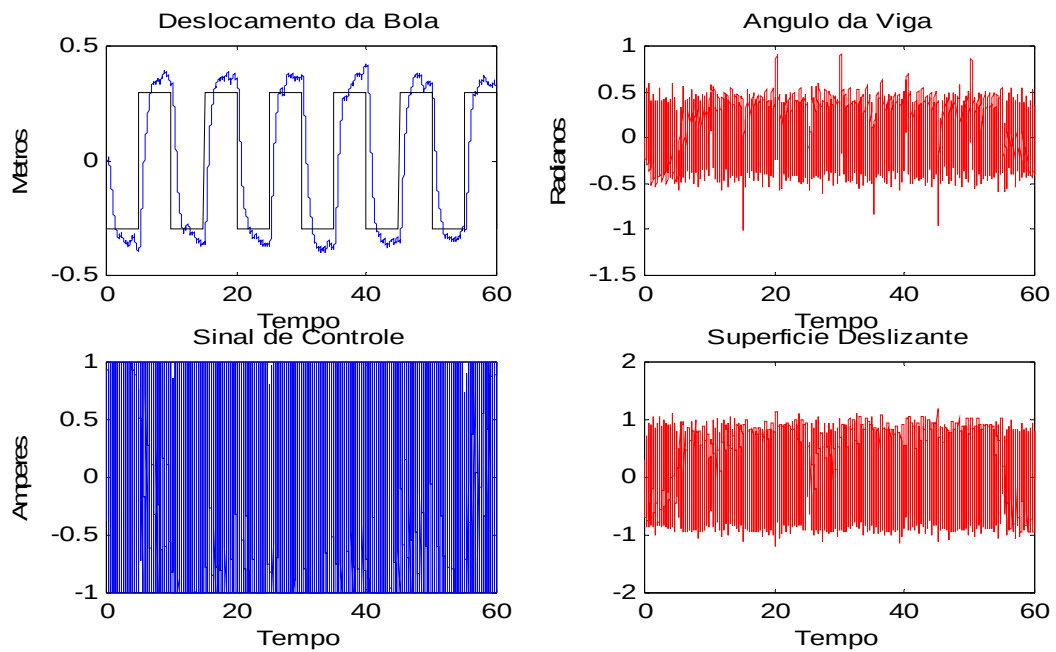


Figura 6.11- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

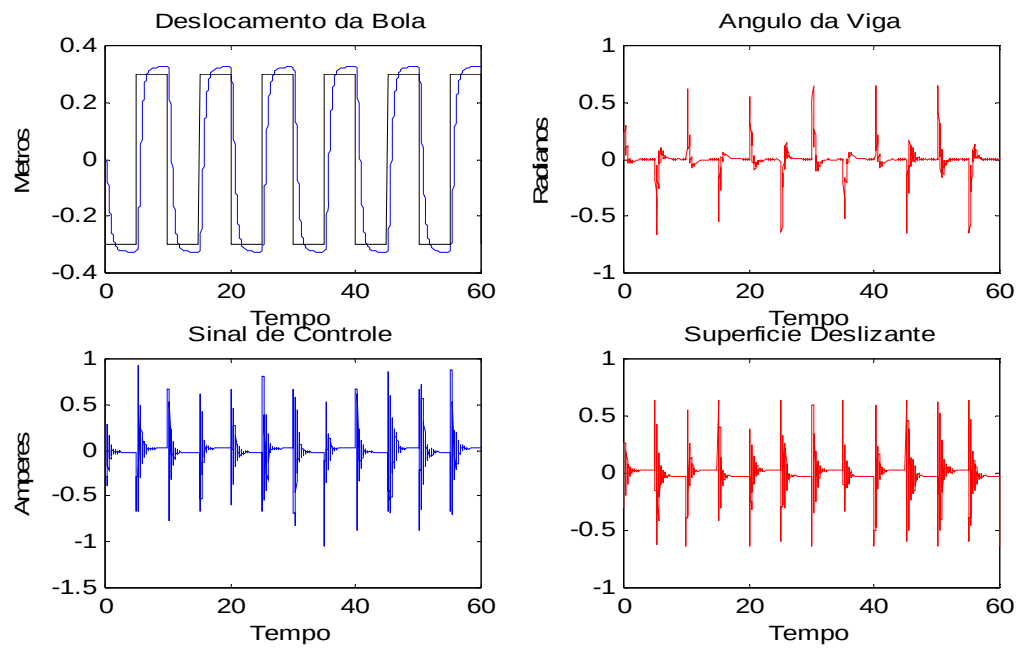


Figura 6.12- Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD-h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

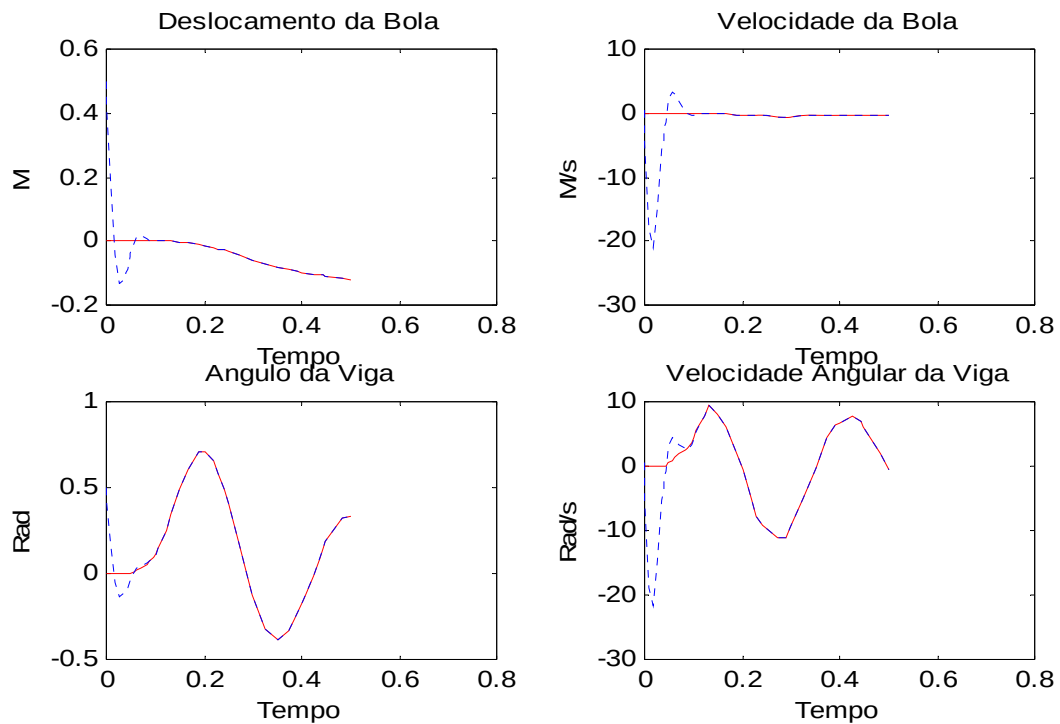


Figura 6.13- Gráfico dos estados reais(vermelho) e estados estimados(pontilhado) em função do tempo.

Pode-se notar que na Figura 6.9, na presença de um período de amostragem pequeno, o CDMD conseguiu estabilizar o sistema atuando com o observador robusto, porém o mesmo êxito não foi obtido na presença de um período de amostragem grande, como mostra a Figura 6.11.

As Figuras 6.10 e 6.12 mostram que o CDMD- h obteve um bom desempenho na presença do observador robusto. Porém, podemos notar que na presença do observador robusto (Figura 6.12), o CDMD- h foi um pouco mais exigido nas inversões do sinal de referência quadrada da bola em relação ao sistema com o acesso pleno aos estados (Figura 6.8).

Na Figura 6.13, foi apresentada a evolução temporal dos estados estimados e estados reais do sistema. Percebe-se que antes de 0.2s os estados estimados já se igualam aos estados reais do sistema, o que demonstra a eficiência do observador robusto na estimação. Para a melhor visualização gráfica da estimação dos estados, os estados reais foram considerados com condições iniciais nulas, enquanto que os estados do observador (estados estimados) foram considerados com condições iniciais diferentes de zero na simulação.

6.2 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Linear

Nas simulações do Pêndulo Invertido Linear foi estabelecido que o carrinho seguisse um sinal de referência na forma de onda quadrada e amplitude de 0,05m. Para aproximar a simulação do modelo físico real considerou-se a saturação do sinal de controle em $\pm 5V$. Os resultados são apresentados a seguir.

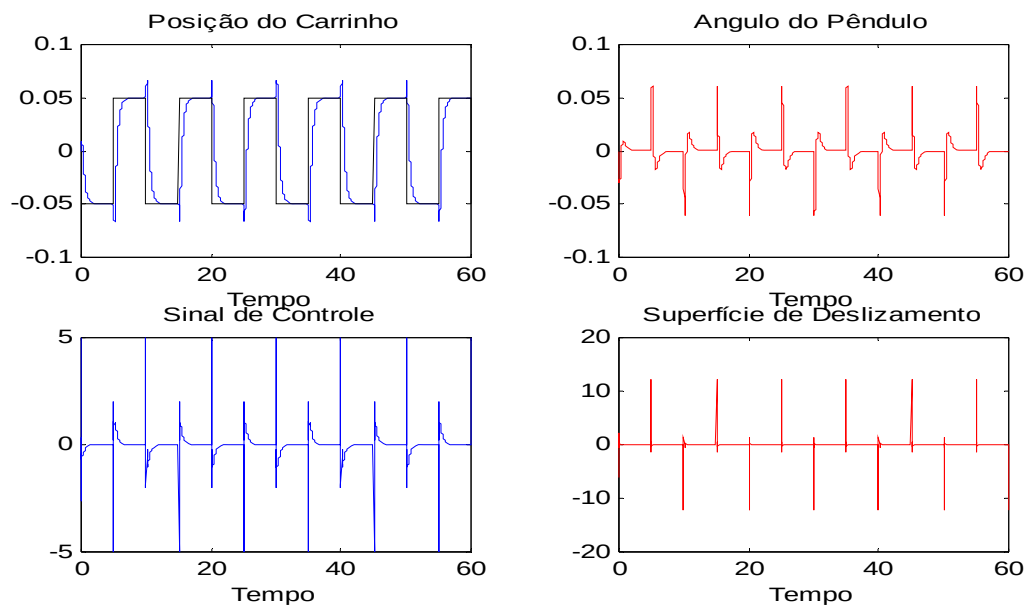


Figura 6.14- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

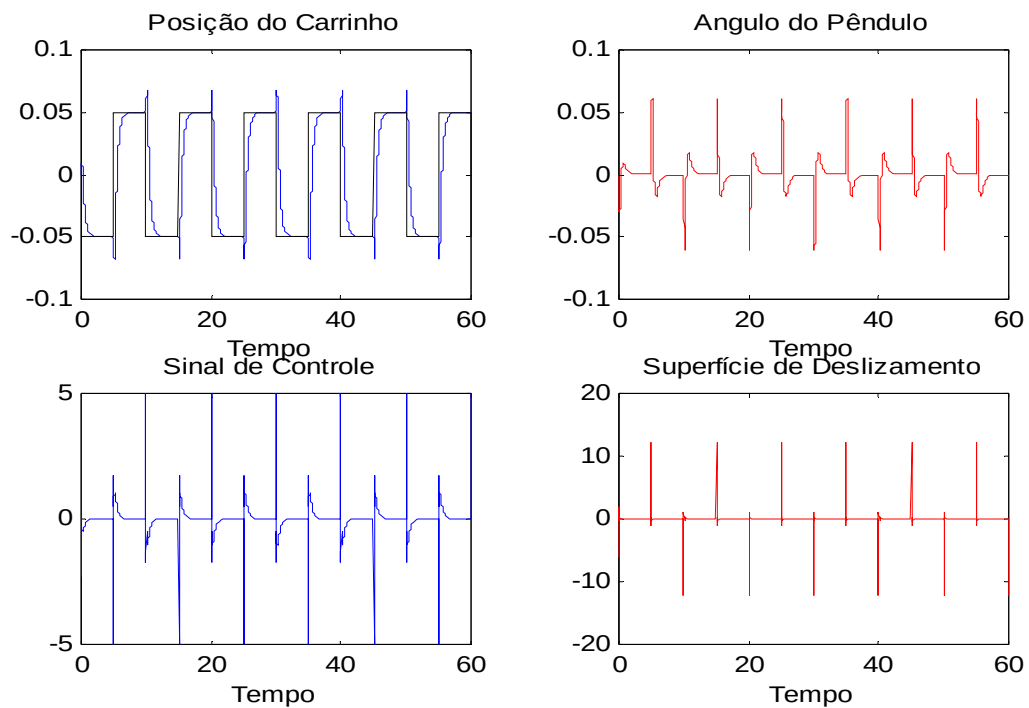


Figura 6.15- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

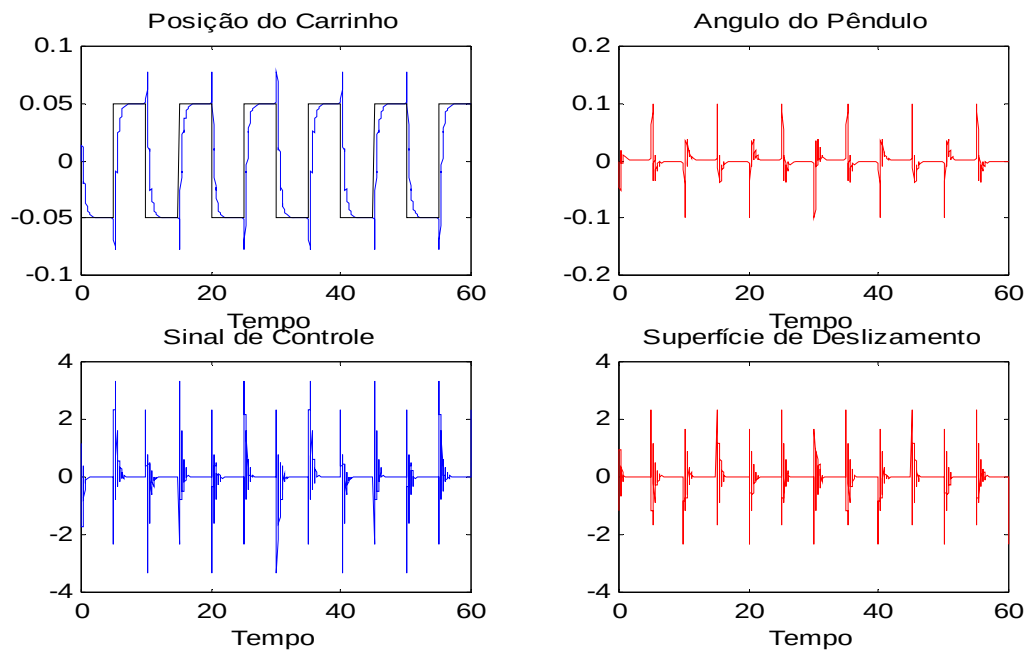


Figura 6.16- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

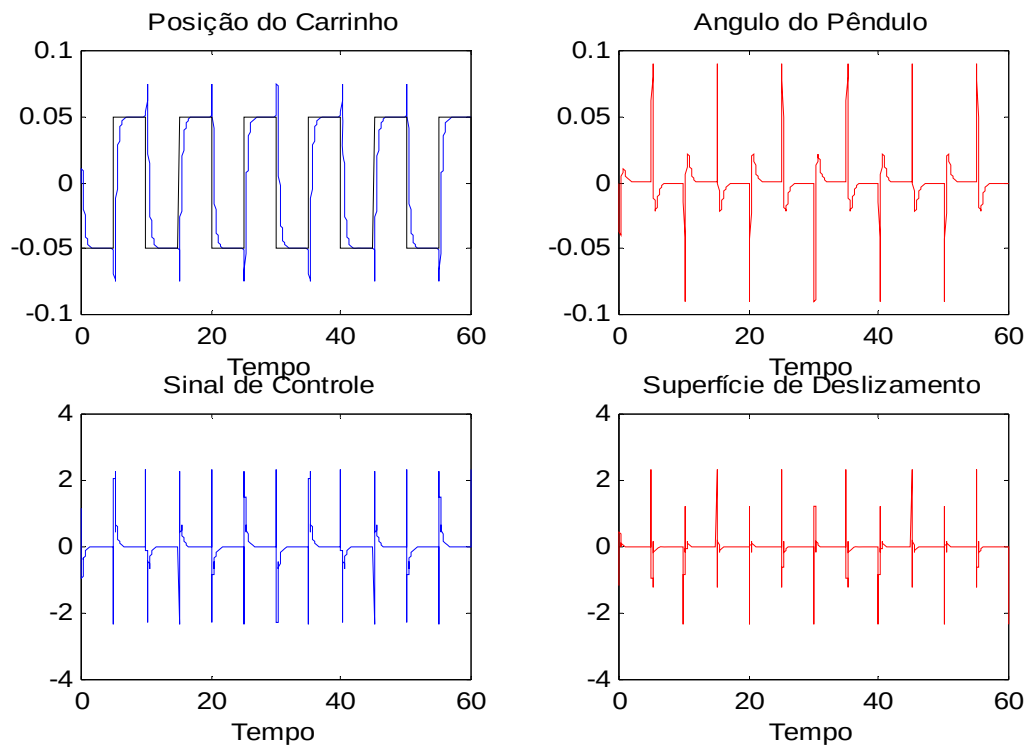


Figura 6.17- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

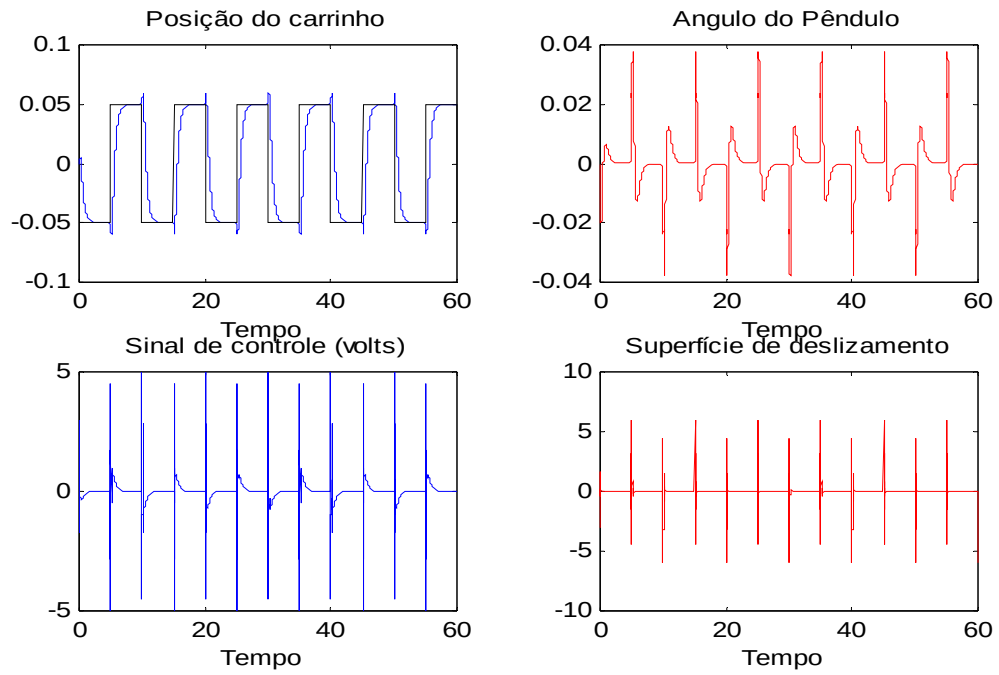


Figura 6.18- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

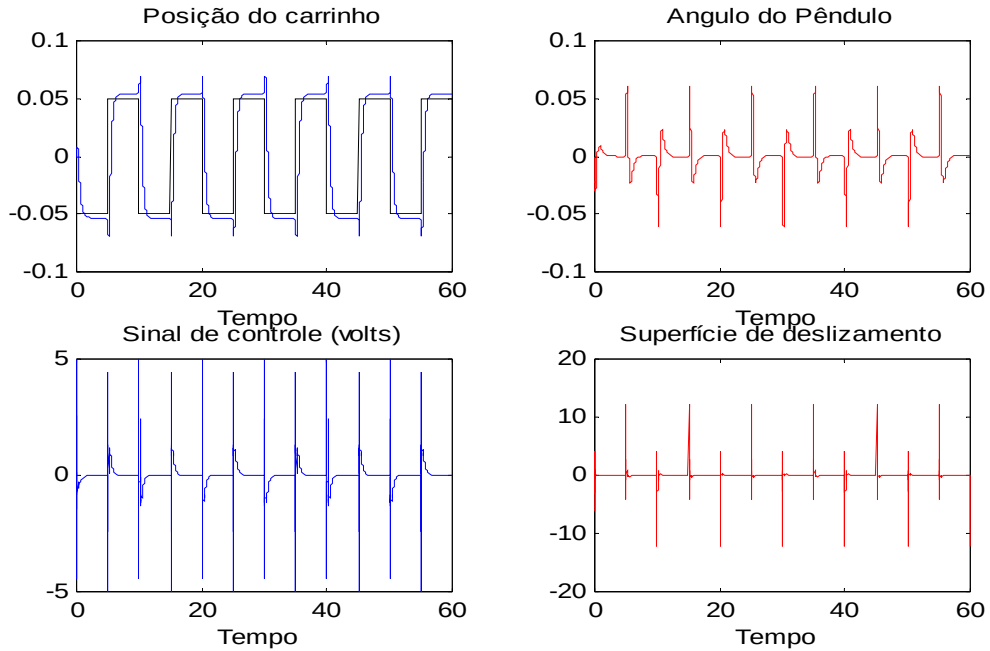


Figura 6.19- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

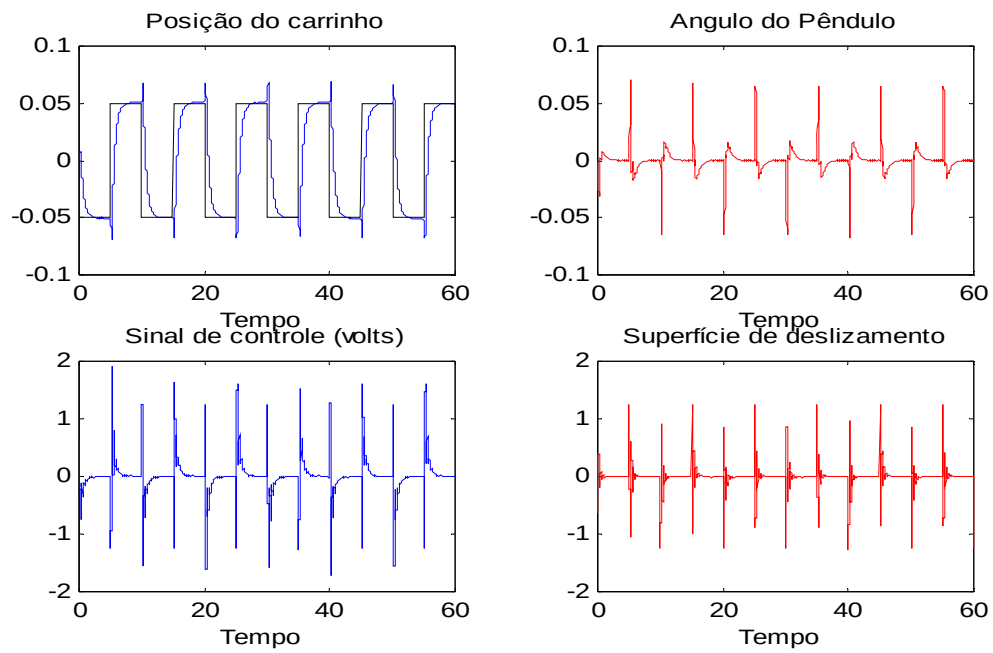


Figura 6.20- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

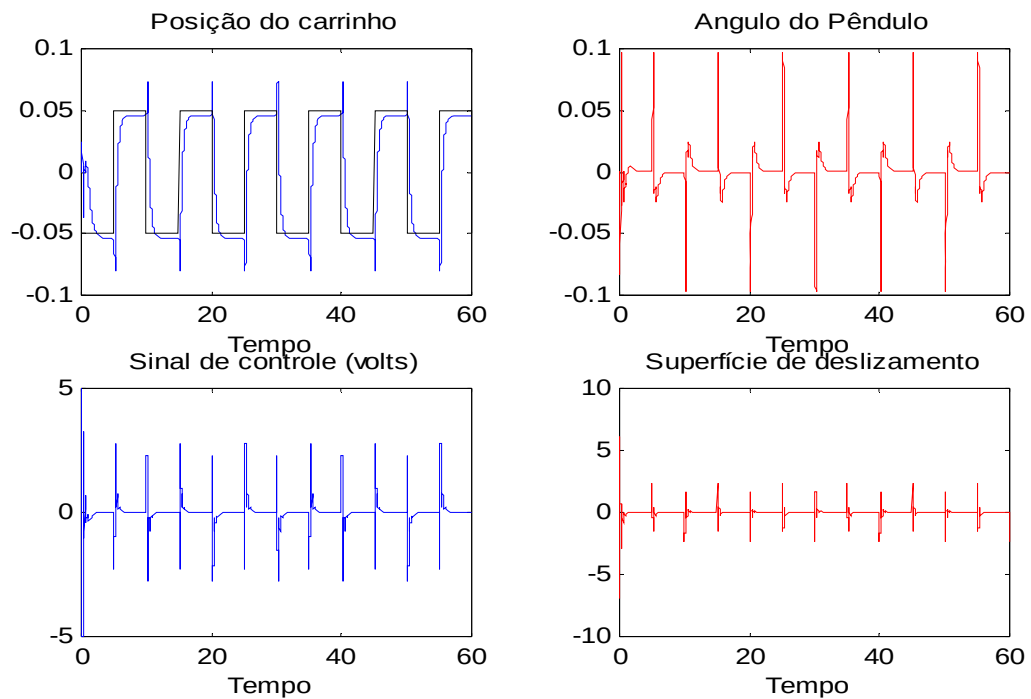


Figura 6.21- Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

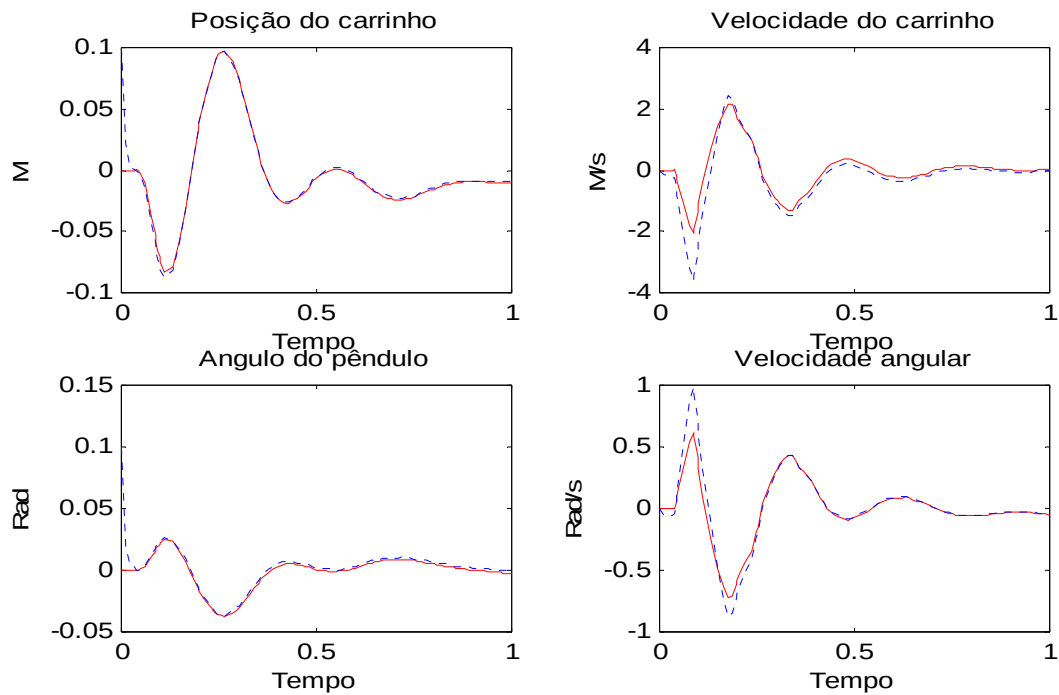


Figura 6.22- Gráfico dos estados reais(vermelho) e estados estimados(pontilhado) em função do tempo.

Foi possível observar pelos gráficos que o CDMD- h obteve bons resultados tanto com o acesso total dos estados como na presença do observador robusto e nos dois casos: $\Delta = 0,01$ s com $h = 0,009$ s e $\Delta = 0,05$ com $h = 0,04$ s.

O CDMD também obteve bons resultados mesmos nas situações em que foi exigido trabalhar com período de amostragem grande ($\Delta = 0,05$) e um atraso que ocupava 80% desse período ($h = 0,04$ s). Porém, ao comparar as Figuras 6.20 e 6.21, perceber que na primeira, tanto na superfície de deslizamento como no sinal de controle, as oscilações são um pouco mais acentuadas se comparadas com a última. Assim, os resultados do controlador CDMD foram inferiores se comparados aos resultados do CDMD- h .

A eficiência do observador foi constatada na Figura 6.22, onde os estados estimados, em um curto espaço de tempo, encontram os estados reais do sistema.

6.3 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

Nas simulações de controle do Pêndulo Invertido Rotacional foi imposta a condição de o braço do pêndulo seguir uma referência em onda quadrada de amplitude $\pm 0,6109\text{rad}$ ($\pm 35^\circ$). Novamente foi imposta uma saturação de $\pm 5\text{V}$ no sinal de controle, com base na limitação do hardware responsável por entregar o sinal ao sistema físico real.

Os resultados são mostrados pela Figura 6.23 à Figura 6.31.

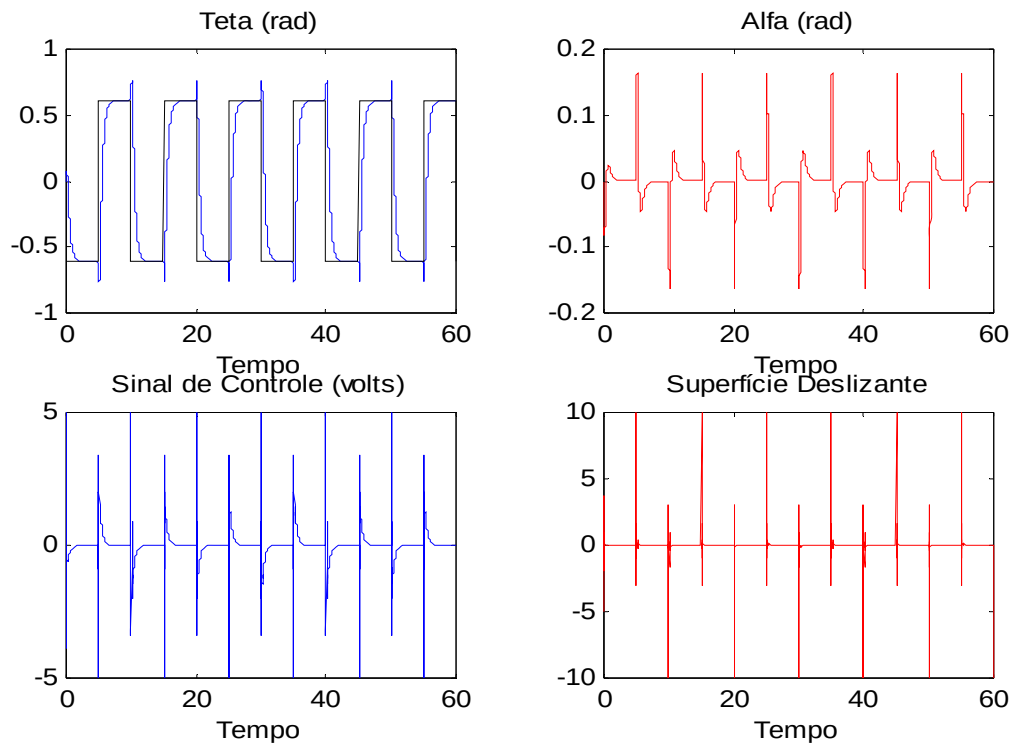


Figura 6.23- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de $0,01\text{s}$ e atraso na computação de $0,009\text{s}$.

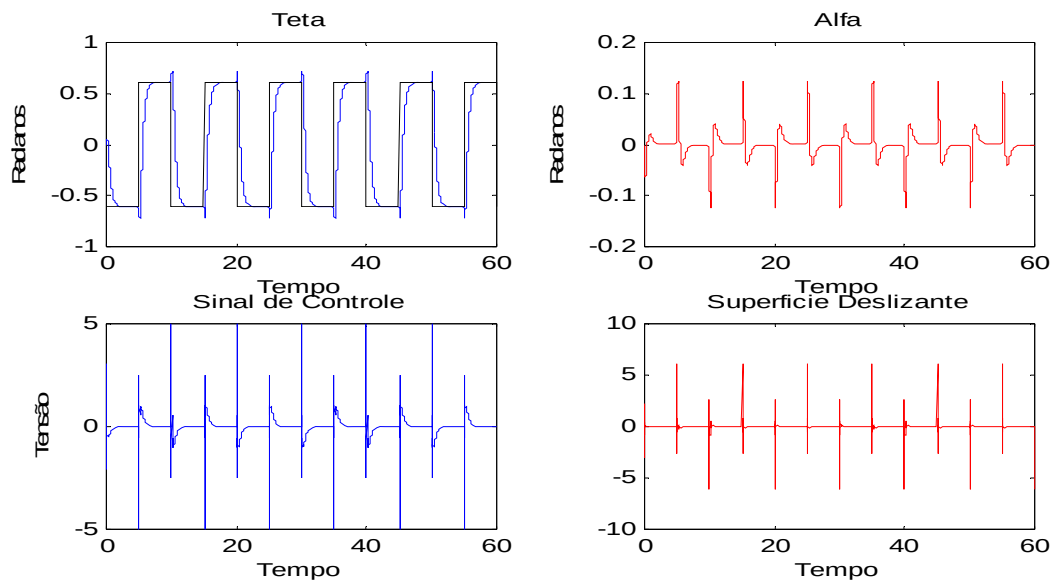


Figura 6.24- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

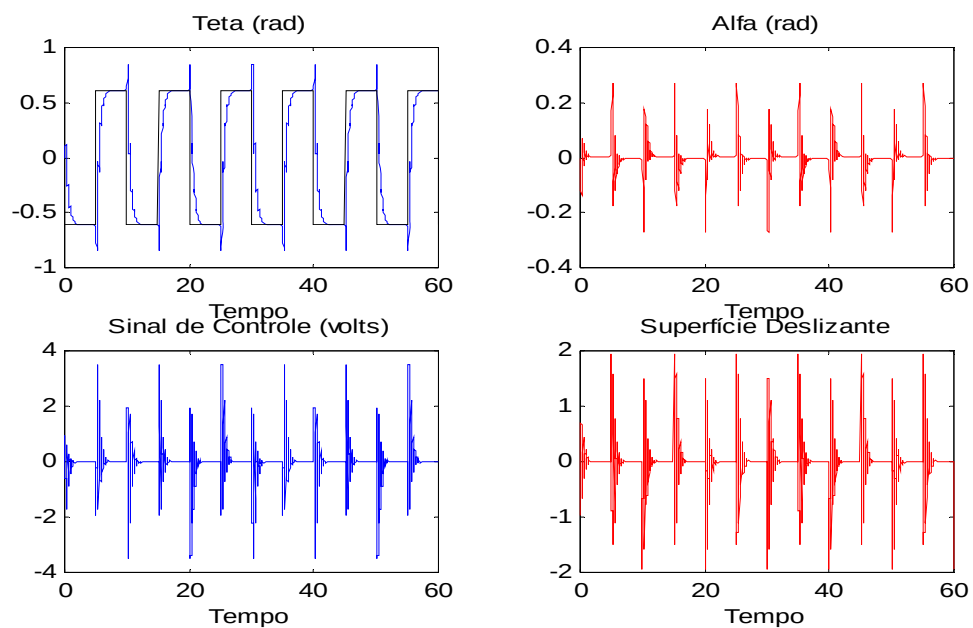


Figura 6.25- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

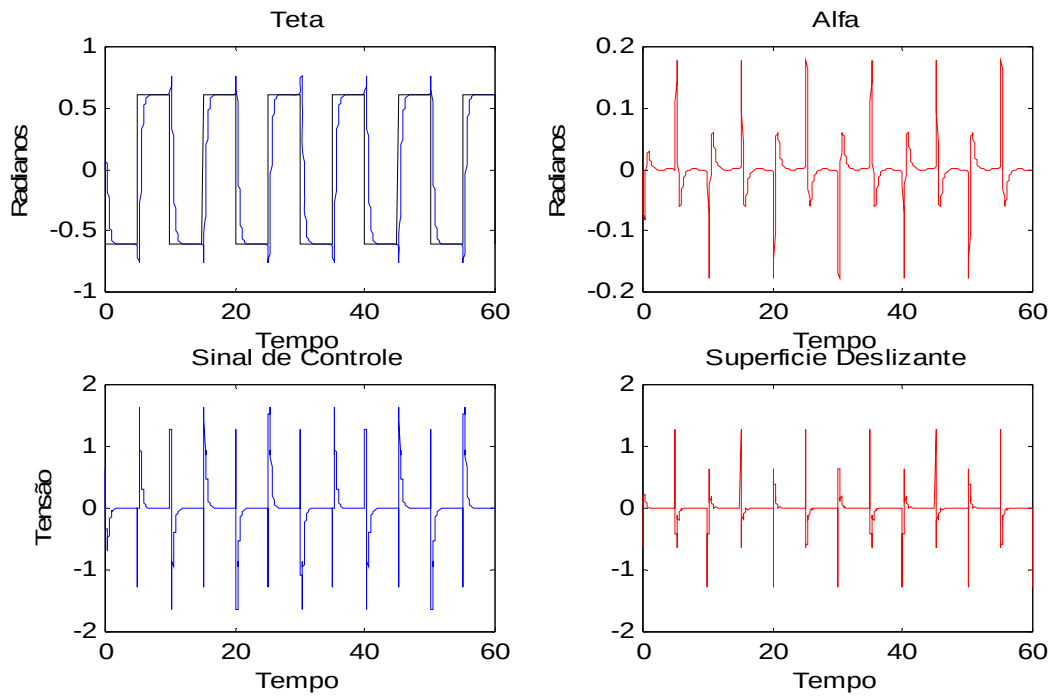


Figura 6.26- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com acesso total aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

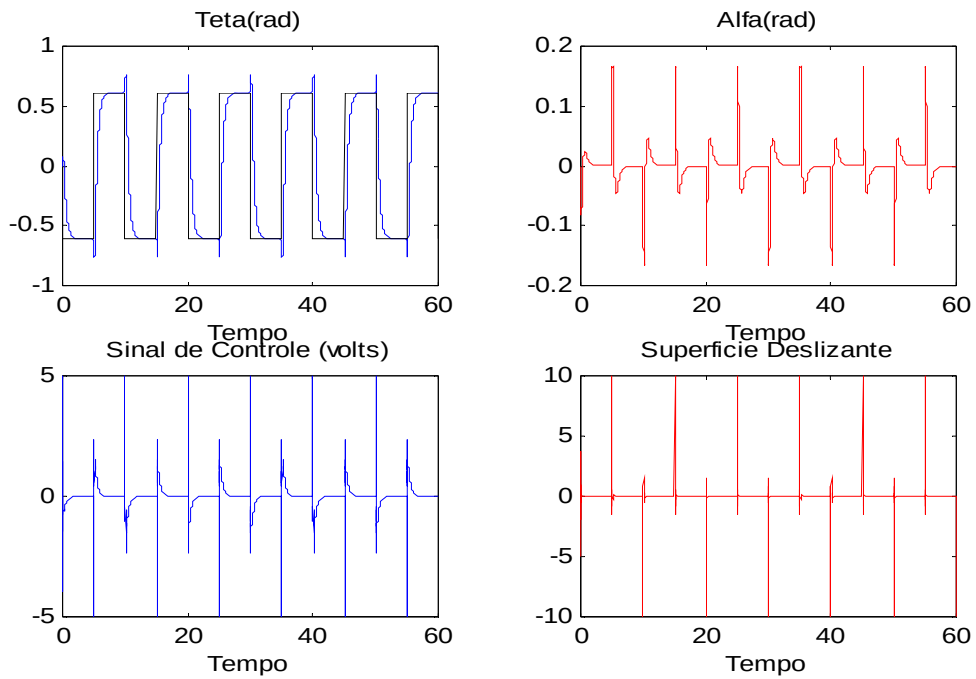


Figura 6.27- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

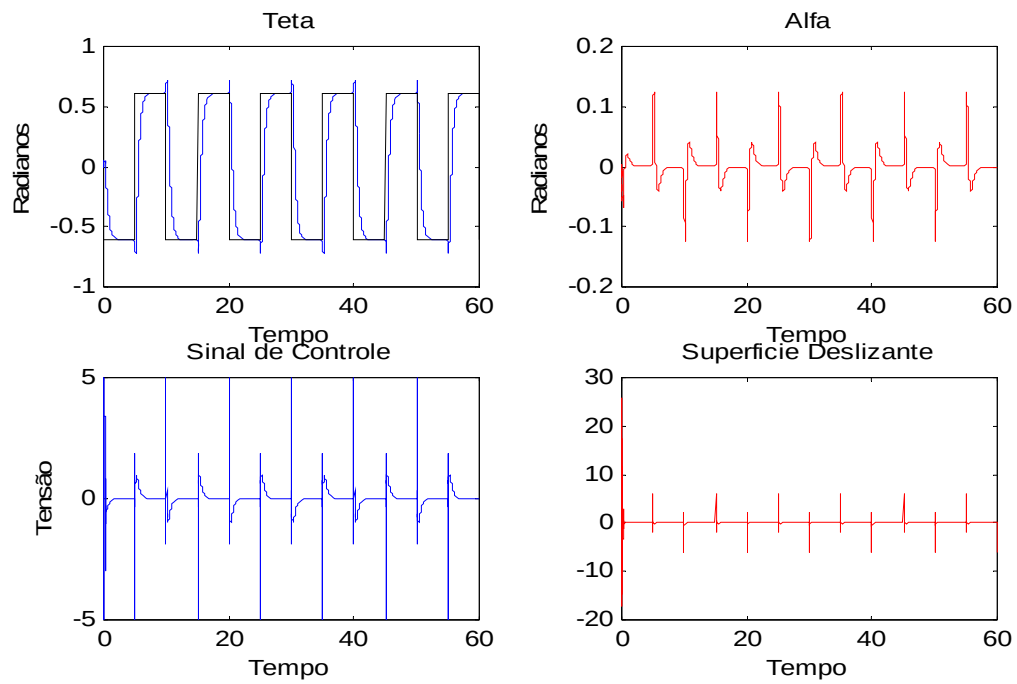


Figura 6.28- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,01s e atraso na computação de 0,009s.

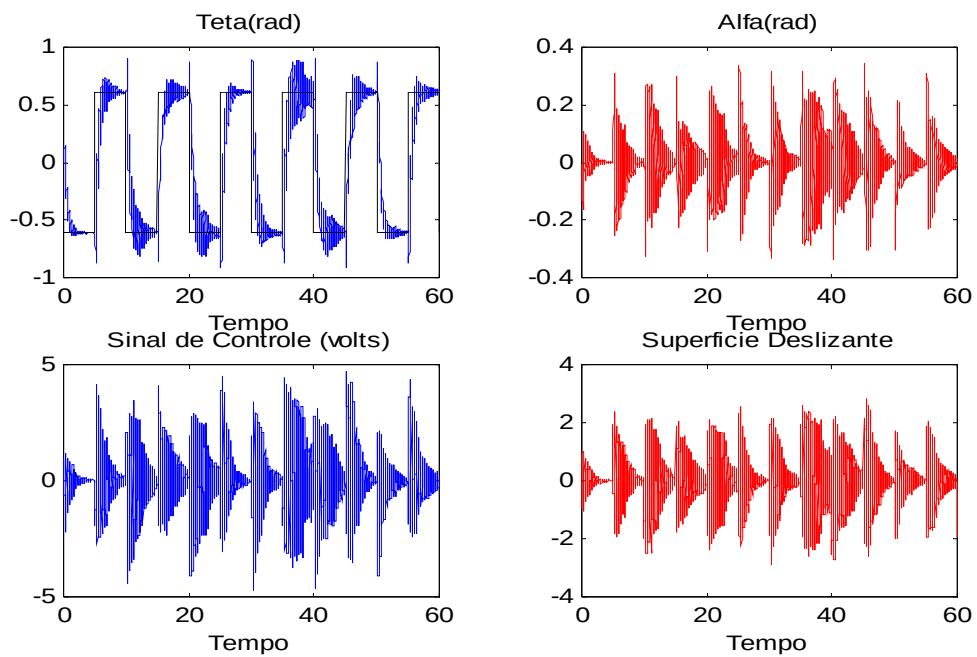


Figura 6.29- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

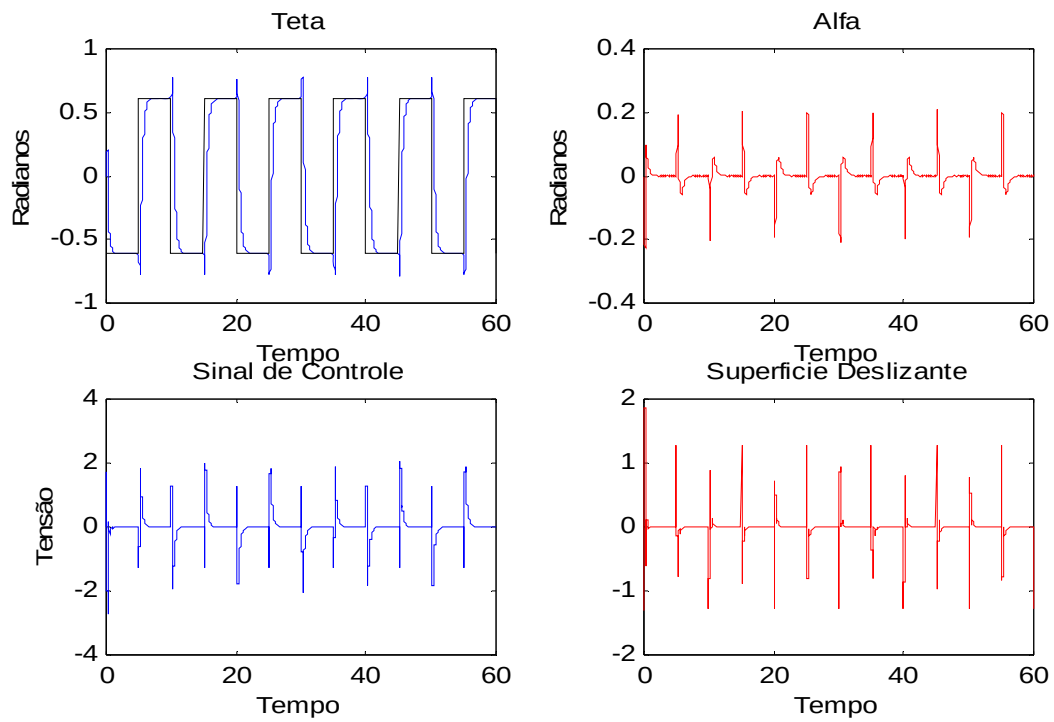


Figura 6.30- Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com acesso parcial aos estados, período de amostragem de 0,05s e atraso na computação de 0,04s.

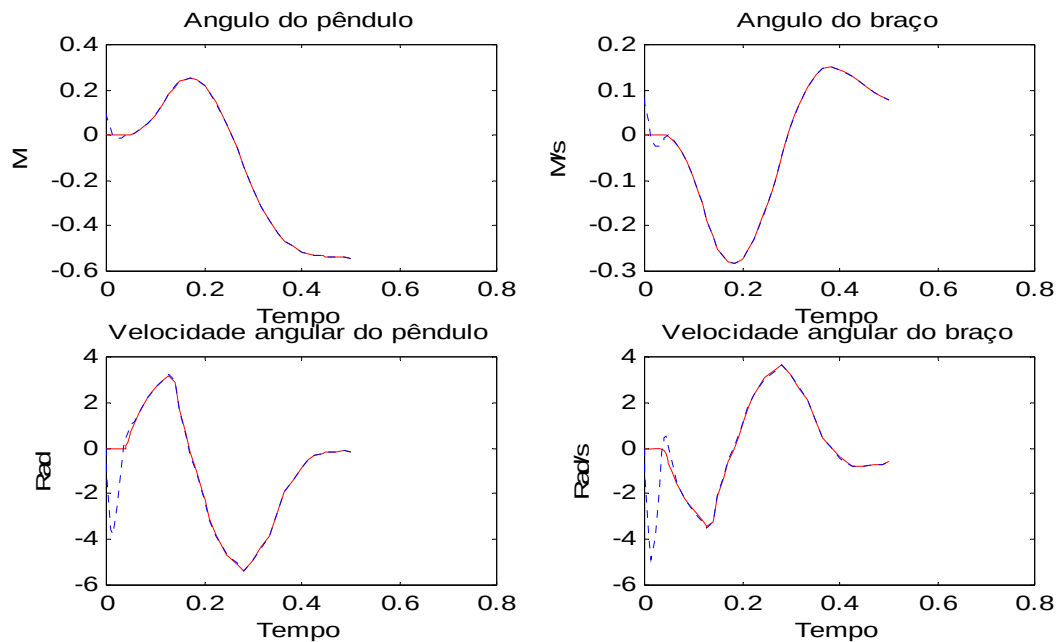


Figura 6.31- Gráfico dos estados reais(vermelho) e estados estimados(pontilhado) em função do tempo.

Na situação em que o tem-se o acesso total ao vetor de estados e um período de amostragem grande (Figuras 6.25 e 6.26), percebe-se que atuando o controlador CDMD (Figura 6.25), algumas pequenas oscilações são observadas, indicando que a lei de controle foi mais exigida para que o ângulo Teta acompanhasse o sinal de referência, Alfa permanecesse igual a zero (equilíbrio) e o sistema se mantivesse em deslizamento. Porém, atuando o CDMD-*h* (Figura 6.26) essas oscilações só ocorrem nas inversões de sinal da referência e rapidamente a condição de equilíbrio é restabelecida, indicando um melhor desempenho.

Já nas situações em que os controladores tinham que atuar com acesso parcial ao vetor de estados, a diferença de desempenho ficou mais acentuada, principalmente atuando com o período de amostragem grande ($\Delta = 0.05s$). Percebe-se este resultado ao analisar as Figuras 6.29 e 6.30, onde na primeira o controlador CDMD apresentou resultados muito ruins devido a presença de muitas oscilações, o que não ocorreu na última figura, onde o CDMD-*h* apresentou um controle muito eficiente.

O bom desempenho do observador está registrado na Figura 6.31, onde novamente os estado estimados se igualam rapidamente aos estados reais. Esta boa atuação do observador robusto que possibilita o bom desempenho do controlador, já que este depende dos estados estimados.

6.4 Comentários

Neste capítulo foram apresentados os resultados das simulações dos controladores e do observador robusto aplicado aos sistemas incertos, não-lineares de natureza instável. Mostrou-se que o controlador CDMD [4,44], apresentou alguns resultados ruins com o acesso total ou parcial do vetor de estados, demonstrando algumas deficiências, principalmente para períodos de amostragem grande. Já o controlador CDMD-*h* mostrou-se muito eficiente na presença de atrasos críticos no processamento do sinal de controle para os dois períodos de amostragem adotados (simulando dois tipos de processadores diferentes), e acesso pleno dos estados. A mesma eficiência apresentou o controlador atuando junto ao

observador robusto, ou seja, com acesso apenas à saída do sistema, nas mesmas situações anteriores, suprimindo assim as limitações apresentadas pelo CDMD. Também algumas limitações físicas de cada sistema foram impostas nas simulações para tornar os resultados os mais condizentes possíveis com a realidade.

CAPÍTULO 7

7. CONCLUSÕES

7.1 Conclusões Gerais

Este trabalho baseou-se na implementação de um observador contínuo, robusto e com modos deslizantes [11], em sistemas instáveis utilizando um controlador discreto com modos deslizantes que leva em consideração o atraso no processamento do sinal de controle [44]. Assim o controlador CDMD- h , que possui um algoritmo simples e uma lei de controle suave, passa a ser mais amplamente aplicado atuando com o observador robusto, pois na maioria das situações práticas o acesso a todos os estados é impossível ou inviável.

O atraso computacional presente em sistemas digitais, que é levado em consideração no controlador CDMD- h , afeta negativamente a estabilidade e robustez, além de degradar a performance do controle. Assim, o atraso computacional foi levado em consideração no projeto do observador robusto com a finalidade de evitar o problema de degradação de sua performance, que poderia ter como consequência uma estimação de estados pouco eficiente, o que influenciaria na atuação do controlador CDMD- h , pois este utiliza o vetor de estados

no seu algoritmo de controle. Este atraso foi considerado constante e menor que o período de amostragem.

Para comparação de performance, foi simulado o CDMD- h considerando acesso total e parcial dos estados do sistema. Neste último, o observador contínuo/robusto com modos deslizantes foi implementado para a estimação dos estados. Os mesmos procedimentos foram realizados para o controlador CDMD (que não leva em consideração o atraso de processamento do sinal de controle). Também foram simuladas essas situações para outros dois casos, onde em um tinha-se um bom processador, o que fornece um atraso computacional absoluto pequeno ($h = 0,009s$), possibilitando trabalhar com um período de amostragem melhor ($\Delta = 0,01s$); em outro caso um processador mais lento, onde o atraso computacional absoluto é maior ($h = 0,04s$), que força trabalhar com um período de amostragem ruim ($\Delta = 0,05s$).

A estratégia de controle, CDMD- h , apresentou bons resultados em ambos os casos (vetor de estados total ou parcialmente disponível) para os sistemas instáveis simulados, nas duas condições de processamento apresentadas ($\Delta = 0,05s$ e $h = 0,04s$; $\Delta = 0,01s$ e $h = 0,009s$). Já o controlador CDMD, apresentou desempenho muito inferior ao do controlador CDMD- h , principalmente atuando com um período de amostragem grande.

A eficiência do observador pode ser vista nas Figuras 6.13, 6.22 e 6.31, onde é mostrada a evolução temporal dos estados reais do sistema e dos estados estimados pelo observador. Essas figuras resultaram de simulações realizadas com os sistemas instáveis sendo controlados pelo CDMD- h e atuando com o observador robusto nas seguintes condições: período de amostragem $\Delta = 0,05s$ e atraso computacional $h = 0,04s$. Para que a visualização desse bom resultado fosse mais nítida, foram consideradas nas simulações condições iniciais nulas para os estados reais do sistema e condições iniciais diferentes de zero para os estados estimados. Assim foi possível notar como os estados estimados rapidamente se igualavam aos estados reais, o que comprova a poderosa ferramenta que é esse observador robusto.

Esse trabalho de pesquisa deu origem a publicações nacionais e internacionais e abriu caminho para novas pesquisas, conforme descrito no item 7.2.

7.2 Trabalhos Publicados

DAMAZO, G. A.; GARCIA, J. P. F.; GARCIA, L. M. C. F. Modo Deslizante Discreto Aplicado ao Sistema Pêndulo Invertido Rotacional com atraso na computação do sinal de controle e acesso parcial dos estados. **I Simpósio Regional de Matemática Aplicada de Ilha Solteira (I SRMAIS)**, Ilha Solteira, Brasil, 2007.

GARCIA, J. P. F.; GARCIA, L. M. C. F.; DAMAZO, G. A. Modo Deslizante Discreto Aplicado ao Sistema Bola e Viga com Atraso na Computação do Sinal de Controle e Acesso à Saída do Sistema. **Congresso Internacional de Educação em Engenharia e Tecnologia (INTERTECH)**, Santos, Brasil, 2008(trabalho submetido e aceito).

DAMAZO, G. A., GARCIA, L. M. C. F., J. P. F. GARCIA . Modos Deslizantes Discreto Aplicado em Sistemas Instáveis com Atraso no Sinal de Controle e Acesso Somente à Saída. In.: **7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications - DINCON'** 2008. Maio de 2008. (trabalho aceito: <http://www4.fct.unesp.br/dmec/dincon2008/poster.htm#area3>).

7.3 Sugestões de Trabalhos

Sugere-se para trabalhos futuros

- i) pesquisa e implementação de observadores discretos;
- ii) aplicações do controlador e observador robusto propostos em sistemas MIMO;
- iii) aplicação de LMI para o problema do atraso computacional;
- iv) implementação prática.

REFERÊNCIAS

- [1] JANARDHANAN, B. S.; BANDYOPADHYAY, B.; THAKAR, V. K. Discrete-time output feedback sliding mode control for time-delay system with uncertainty. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS., 4, 2004, Tapei. **Proceedings...** Tapei: IEEE, 2004. p. 1358-1363, 2004.
- [2] LEE, S. M.; LEE, B. H. Discrete-time sliding mode controller an observer with computation time delay. **Control Engineering Prattice**, London, v. 7, n. 8, p. 943-955, 1999.
- [3] OGATA, K. **Modern control engineering**. 3rd ed. NJ: Prentice-Hall, 1997. 808p.
- [4] RIBEIRO, J. M. S. **Controle discreto com modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no sinal de controle**. 2006, 126f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- [5] UTKIN, V. I. **Sliding modes and their applications in variable structure systems**. Moscow: Mir Publishers, 1978. 257p.
- [6] UTKIN, V. I. **Sliding modes in control and optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 284p.
- [7] RICHARD, J. P. Time delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, Elmsford, v. 39, n. 10, p. 1667-1694, 2003.
- [8] ZAK, S. K.; WALCOTT, B. L. State observation of nonlinear control systems via the method of Lyapunov. In : ZINOBER, A. S. I. **Deterministic control of uncertain systems**. London: Peter Peregrinus, 1990. p. 175-185.
- [9] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. **Digital control of dynamics systems**. 3th ed. California: Addison Wesley Longman, 1998. 741p.
- [10] DRAZENOVIC, B. The invariance conditions in variable structure systems. **Automatica**, Elmsford, v. 5, n. 3, p. 287-295, 1969.
- [11] SPURGEON, S.K.; EDWARDS, C. **Sliding mode control: theory and applications**. London: Taylor & Francis, 2002. 237p.
- [12] SPURGEON, S. K.; Davies, R. A nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the present of unmatched uncertainty. **International Journal of Control**, London, v. 57, n. 5, p. 1107-1123, 1993.
- [13] EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. On the development of discontinuous observers. **International Journal of Control**, London, v. 59, n. 5, p. 1211-1229, 1994.
- [14] SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**, New York, v. 53, n.5, p. 217-219, 1957.

- [15] RIBEIRO, J. M. S., GARCIA, J. P. F. JACOMELI, J. R., GARCIA, L. M. C. F. Discrete-time sliding mode control input-delay systems applied on a power generation system. **Proceedings of IEEE ISIE 2006**, Montreal, v. 3, n. 11, p. 1794-1799, 2006.
- [16] CHOI, H. H.; CHUNG, M. J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time varying delayed and controls. **Automatica**, Oxford, v.31, n. 9, p. 1349-1351, 1995.
- [17] PHOOJARUENCHANACHAI, S.; FURUTA, K. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays. **IEEE Transaction On Automatic Control**, Boston, v. 37, n. 7, p. 1022-1026, 1992.
- [18] DE CARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTLEWS, G. P. Variable structure control f nonlinear and multivariable systems: a tutorial. **Proceedings of the IEEE**, v. 76, n. 3, p. 212-232, 1988.
- [19] FURUTA, K. Sliding mode control of a discrete system. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 14, n. 2, p.145-152, 1990.
- [20] SU, W. C., TSAI, C. C. Discrete-time VSS temperature control for a plastic extrusion process with water cooling systems. **IEEE Transaction on Control Systems Technology**, New York, v.9, n.4, p.618-623, 2001.
- [21] GARCIA, L. M. C. F.; BENNATON, J. F. Sliding mode control for uncertain input-delay systems with only plant output access. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 7, 2002, Sarajevo. **Proceedings...** Sarajevo: IEEE, 2002. p.175-184.
- [22] SHEN, J. C.; CHEN, B.S.; KUNG, F. C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. **IEEE Transaction on Automatic Control**, Boston, v. 36, n. 5, p.638-640, 1991.
- [23] DUGARD, L.; VERRIEST, E. I. Stability and control of time-delay systems. **Lectures Notes in Computer Science**. Berlin: Springer, 1997. 228p.
- [24] CHAN, C. Y. Servo-systems with discrete variable structure control. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.17, n. 4, p. 321-325, 1991.
- [25] UTKIS, U. **Control systems of variable structure**. New York: Wiley, 1976. 214p.
- [26] SELF-ERECTING. Rotary motion inverted pendulum. Ontário: Quanser Consulting, 1996. p. 1-16.
- [27] GARCIA, C. **Modelagem e simulação de sistemas**. São Paulo: Edusp, 1997. 457p.
- [28] TESFAYE, A.; TOMIZUKA, M. Robust control of discretized continuous systems using the theory of sliding modes. **International Journal of Control**, London, v. 62, n. 1, p. 209-226, 1995.

- [29] BAG, S. K.; SPURGEON, S. K.; EDWARDS, C. Output feedback sliding mode design for linear uncertain systems. **Proceedings of IEEE Control and Theory Applications**, Stevenage, v. 144, n. 3, p. 209-216, 1997.
- [30] LI, X.; DE SOUZA, C. E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear system with state delay. **Automatica**, Elmsford, v. 33, n. 9, p.1657-1662, 1997.
- [31] MAHMOUD, M. S. **Robust control and filtering for time-delay systems**. New York: Marcel Dekker, 2000. 425 p.
- [32] CHERES, E.;GUTMAN, S.; PALMOR, S. J. Stabilization of uncertain dynamic systems including state delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 34, n. 11, p. 1199-1203, 1989.
- [33] KOJIMA, A.; UCHIDA, K.; SHIMEMURA, E.; ISHIJIMA, S. Robust stabilization of a systems with delayed in control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 39, n. 8, p. 1694-1698, 1994.
- [34] JANARDHANAN, S.; BANDYOPADHYAY, B. Multirate output feedback based robust quasi-sliding mode control of discrete-time systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 52, n. 3, p. 499-503, 2007.
- [35] GARCIA, L.M.C.F **Controle com estrutura variável e modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no controle**. 2002, 92f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [36] HALE, J. **Theory of functional differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1997. 365p.
- [37] FILLIPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous righthand sides**. USA: Kluwer Academic Publishers, 1998. 304p.
- [38] COVACIC, M. **Controle automático com estrutura variável utilizando sistemas ERP e LMI**. 2001. 101f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2001.
- [39] GARCIA, J. P. F.; RIBEIRO, J. M. S.; SILVA, J. J. F.; MARTINS, E. S. Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer. **IEE Proc. Control Theory Appl.**, Stevenage, v.152, n.2, p.220-228, 2005.
- [40] HUANG, J. J.; DEBRA, D. B. Automatic Smith-Predictor Tuning Using Optimal Parameter Mismatch. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 10, n. 3,p. 447-459, 2002.
- [41] FURUTANI, E.; ARAKI, M. Robust stability of state-predictive and smith control systems for plants with a pure delay. **Int. J. Robust Nonlinear Control**, Chicago, v. 8, n. 8, p. 907-919, 1998.

- [42] XIA, Y.; Jia, Y. Robust Sliding-Mode Control for Uncertain Time-Delay Systems: An LMI Approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 48, n.6, p. 1086-1092, 2003.
- [43] PRADO, M. L. M. **Controle multivariável aplicado a sistemas com atraso**. 2000. 122f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- [44] CAUN, A.P **Modos deslizantes discretos em sistemas incertos de natureza instável com atraso na computação do sinal de controle**. 2007, 96f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, e Ilha Solteira, 2007
- [45] CHENG, C. C.; WEN, C. C.; CHEN, J. L. Stabilization of perturbed linear systems with time-varying delays in states and inputs. **JSME International Journal**, Chicago, v.49, n.2, p. 455-462, 2006. (Series C).
- [46] JANARDHANAN, S.; BANDYOPADHYAY, B. Output feedback discrete-time sliding mode control for time delay systems. **IEE Proc.-Control Theory Appl.**, Stevenage, v. 153, n. 4, p. 387-396, 2006.
- [47] STOJANOVIC S. B.; DEBELJKOVIC, D. L.; MLADENOVIC, I. A Lyapunov-krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems. **Serbian Journal of Electrical Engineering**, Belgrade, v. 4, n. 2, p. 109-117, 2007.
- [48] MAHMOUD, M. S.; BOUKAS, E. K.; SHI. P. Resilient feedback stabilization of discrete-time systems with delays. **IMA Journal of Mathematical Control and Information Advance Access**, Oxford, v. 1, n. 12, p. 1-16, 2007.
- [49] XIA, Y.; LIU, G. P.; SHI, P.; CHEN, J.; REES, D. Robust delay-dependent sliding mode control for uncertain time-delay systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chicago, v. 4, n. 1, p. 2786-2791, 2007.
- [50] BASIN, M.; GONZALES, J. R.; ACOSTA, P.; FRIDMAN, L. Regulador óptimo y robusto com modos deslizantes para sistemas lineales com control retardado. **Computación y Sistemas**, México, v. 9, n. 2, p.133-150, 2005.
- [51] OGUCHI, T.; RICHARD, J. P. Sliding-mode control of retarded nonlinear systems via finite spectrum assignment Approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 51,n.. 9, p. 1527-1531, 2006.
- [52] BALL and beam apparatus. Nottingham: TQ Education and Training, 2000. (CE, 106).
- [53] INVERTED pendulum. Ontário: Quanser Consulting, 1998.