

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

ALINE CAMARGO NORONHA

Aplicação de modelos fermiônicos não-lineares em cenários cosmológicos

Guaratinguetá

2019

Aline Camargo Noronha

Aplicação de modelos fermiônicos não-lineares em cenários cosmológicos

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física Bacharelado da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física Bacharelado .

Orientador: Prof^o Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula

Coorientador: Prof^o Dr. Elias Leite Mendonça

Guaratinguetá

2019

N852a	Noronha, Aline Camargo Aplicação de modelos fermiônicos não-lineares em cenários cosmológicos / Aline Camargo Noronha – Guaratinguetá, 2019. 41 f.: il. Bibliografia: f. 38-39 Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula Co-Orientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça 1. Cosmologia. 2. Universo em expansão. 3. Férmions. 4. Física – Estudo e ensino. I. Título. CDU 524.82
-------	---

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

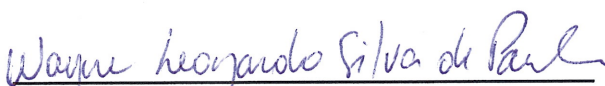
ALINE CAMARGO NORONHA

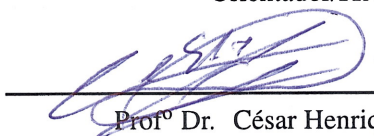
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA
BACHARELADO "

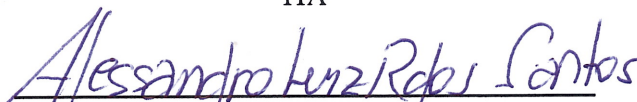
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA BACHARELADO


Profº Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Profº Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula
Orientador/ITA


Profº Dr. César Henrique Lenzi
ITA


Profº Dr. Alessandro Luiz Ribeiro dos Santos
ITA

Dezembro , 2019

DADOS CURRICULARES

ALINE CAMARGO NORONHA

NASCIMENTO 03/05/1996 - Jacaré / SP

FILIAÇÃO Bismark Noronha
Maria Paula Camargo Noronha

2014 / 2019 Graduação em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Campus de Guaratin-
guetá

Este trabalho é em memória da minha mãe, Maria Paula.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a minha família, em especial a minha mãe Maria Paula que sempre torceu por mim e agora mais do nunca esta olhando pelo meu sucesso. Aos meus avós paternos, João e Graça, ao meu pai Bismark e aos meus irmãos Bruna, Victor e David por me apoiarem sempre nas minhas decisões.

Ao meu orientador Wayne de Paula por toda a dedicação e incentivo. Obrigada por acreditar em mim e me motivar a cada dia.

Agradeço aos meus professores da graduação que tiveram papel fundamental na minha formação. Agradeço em especial ao Elias Leite Mendonça além de me orientar por alguns anos, me ensinar que a ciência vai além da sala de aula, ainda foi um amigo importante para as horas difíceis e me mostrou que nunca devemos desistir do que acreditamos.

As minha amigas de infância Gabriella, Manuela, Ana Carolina, Isis, Tayna, Tamara e Victória pela amizade desses anos todos onde aprendemos que nosso amor não diminui com a distância.

Agradeço em especial a República Tcheca e todas as irmãs que fiz lá ao longo desses anos de graduação.

Aos meus amigos Vinícius, Gabriel e Júlio por todos os momentos de estudos na biblioteca.

Agradeço a Associação Atlética Acadêmica T.C.A.M.A. por todos os amigos que fiz e por todo aprendizado que estar nesta extensão me proporcionou.

Agradeço ao ITA - Instituto Tecnológico da Aeronáutica por me aceitar como aluna de iniciação científica e me ensinar a ser uma pesquisadora.

Agradeço ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa que me proporcionaram para que pudesse continuar meus estudos.

*“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)*

RESUMO

Durante a evolução do Universo houve períodos de aceleração e desaceleração de sua expansão. Atualmente a expansão acelerada é descrita pela presença da Energia Escura, que é usualmente representada pela introdução da Constante Cosmológica nas Equações de Einstein. Um dos problemas atuais da Cosmologia é fornecer uma interpretação física para a Energia Escura. Nesse contexto, há propostas de utilização de Campos Fermiônicos acoplados com o campo gravitacional que descrevem o período acelerado. Recentemente, também foi considerada a interação de campos fermiônicos, escalares e vetoriais, na descrição do período de desaceleração. Neste trabalho utilizamos modelos fermiônicos de contato não-linear para descrever a transição entre os períodos de desaceleração e aceleração do Universo.

PALAVRAS-CHAVE: Universo. Expansão. Cosmologia.

ABSTRACT

During the evolution of the universe there were periods of acceleration and deceleration of its expansion. Presently the accelerated expansion is described by the presence of the Dark Energy, which is usually represented by the introduction of the Cosmological Constant in Einstein's Equations. One of the present problems of Cosmology is to supply a physical interpretation of the Dark Energy. In this context, there are proposals for using Fermionic Fields coupled with the gravitational field that describe the accelerated period. Recently, the interaction of fermionic, scalar and vector fields was also considered in the description of the deceleration period. In this work we used nonlinear contact fermionic models to describe the transition between the deceleration and acceleration periods of the universe.

KEYWORDS: Universe. Expansion. Cosmology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Fator de escala do Universo em função do tempo em unidades naturais para $\eta = -0.9$ (linha sólida), $\eta = -1.5$ (linha tracejada) e $\eta = -1.8$ (linha pontilhada). .	37
Figura 2	Derivada segunda do fator de escala do Universo em função do tempo em unidades naturais para $\eta = -0.9$ (linha sólida), $\eta = -1.5$ (linha tracejada) e $\eta = -1.8$ (linha pontilhada).	37

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
TR	Teoria da Relatividade
TRR	Teoria da Relatividade Restrita
TRG	Teoria da Relatividade Geral
PC	Princípio Cosmológico

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Letra Grega Alfa
β	Letra grega Beta
θ	Letra Grega Theta
γ	Letra grega Gama
λ	Letra Grega Lambda
σ	Letra Grega Sigma
δ	Letra Grega Delta
Γ	Letra Grega Gamma Maiúsculo
Λ	Letra Grega Lambda Maiúsculo
Δ	Letra Grega Delta Maiúsculo
∇	Letra Grega Nabla
τ	Letra Grega Tau
e	Número de Euler

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	TEORIA DA RELATIVIDADE	17
2.1	RELATIVIDADE RESTRITA	17
2.1.1	Transformações de Lorentz	17
2.2	RELATIVIDADE GERAL	18
2.2.1	Princípio da equivalência	18
2.2.2	Dinâmica da partícula	18
2.3	RELAÇÕES FUNDAMENTAIS	21
2.4	TENSOR ENERGIA-MOMENTO	21
2.5	EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN	22
3	COSMOLOGIA	25
3.1	LEI DE HUBBLE	25
3.2	PRINCÍPIO COSMOLÓGICO	26
3.3	MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER	26
4	MODELOS FERMIÔNICOS	30
4.1	FÉRMIONS	30
4.2	A EQUAÇÃO DE DIRAC	30
4.2.1	Soluções de Partícula livre da Equação de Dirac	31
4.3	MODELO WALECKA	32
4.4	RESULTADOS	36
5	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

No final do século XIX acreditava-se que o espaço era preenchido por um meio contínuo chamado "éter", onde seria possível a propagação de ondas eletromagnéticas, em analogia ao comportamento das ondas mecânicas (SOUZA, 2004). No entanto, os resultados experimentais de Michelson & Morley (MICHELSON, 1887) mostraram a inconsistência desta formulação. Para explicar esses resultados, Einstein propôs que a velocidade da luz fosse constante, dando início à Relatividade Restrita (EINSTEIN, 1905). Posteriormente, logo no começo do século XX, ele generalizou sua teoria para incluir campos gravitacionais, que denominamos Teoria da Relatividade Geral (EINSTEIN, 1915). Essa proporciona uma nova perspectiva sobre a gravitação, que relaciona a interação gravitacional com a curvatura do espaço-tempo.

Apresentando-se como uma ótima ferramenta, inclusive até os dias de hoje, para compreender vários objetos, dinâmicas e efeitos astrofísicos, como por exemplo, a existência de ondas gravitacionais, que foram detectadas recentemente (ABBOTT, 2016) e (ABBOTT, 2017). A teoria da relatividade geral necessita da existência de um fluido exótico, com pressão negativa, para ser compatível com os dados observacionais da expansão acelerada do Universo (PERLMUTTER, 1999)(RIESS, 1998). Isso pode ser modelado com a simples introdução da constante cosmológica nas equações de campo de Einstein (PEEBLES; RATRA, 2016), que é chamado de modelo Λ CDM. Utilizando o modelo Λ CDM podemos descrever o Universo no período do desacoplamento da radiação. Esse cálculo mostra que dois pontos do Universo hoje distantes mais que 2° não poderia ter tido contato casual (BAUMANN, 2009). Porém dados da radiação cósmica de fundo mostram uma grande homogeneidade na sua distribuição de temperatura (BENNETT, 2013). Para explicar esse problema Guth, Linde, Albrecht e Steinhardt propuseram uma Cosmologia Inflacionária (GUTH, 1981) no início dos anos 80. O modelo propõe um campo escalar relacionado a energia do vácuo, chamado de inflaton, tendo a maior parte de sua energia armazenada em seu potencial e que origina uma expansão acelerada em um curto período de tempo. Após a inflação o universo é dominado pela matéria, passando para uma fase desacelerada, visto que a formação de matéria ocorre pela atração gravitacional. Posteriormente, entra em uma nova fase acelerada que é dominada pela energia escura.

Além das observações astrofísicas, é possível verificar por meio do cálculo do parâmetro de densidade total do universo, onde mostram que o mesmo deve ser espacialmente plano, de acordo com a radiação cósmica de fundo (BERNARDIS, 2000). Esta consideração aponta, também, a previsão de que o universo permaneça em expansão acelerada. Atualmente não é possível identificar a origem e características físicas, exceto o seu efeito e manifestação, o que chamamos de "energia escura". Energia por ser uma componente que não se aglomera como a matéria e escura por não transmitir radiação eletromagnética. Existem na literatura diversas hipóteses do que possa ser essa energia escura, sendo algumas delas a quintaessência (CALDWELL; STEINHARDT, 1998), o gás de Chaplyng (FABRIS S. V. B. GONCALVES, 2002), os táquios da teoria das cordas (PADMANABHAN, 2002) e os campos fantasmas (CALDWELL, 2002).

Neste trabalho utilizaremos campos fermiônicos como fonte de campos gravitacionais para descre-

ver um período de transição do universo, passando da era desacelerada para acelerada. Para isso, a monografia foi estruturada da seguinte maneira: no capítulo dois fazemos uma breve introdução as ideias da Relatividade Geral; no capítulo três, discutimos brevemente o modelo cosmológico padrão, assim como apresentamos a assinatura métrica na qual trabalhamos; no quarto capítulo, fazemos uma introdução aos férmions e a inclusão dos mesmos na Relatividade Geral, assim como aplicamos os campos fermiônicos no Modelo Walecka que foi trabalhado, e por fim apresentamos os resultados obtidos; no último capítulo mostramos nossas conclusões e falamos brevemente sobre trabalhos futuros.

2 TEORIA DA RELATIVIDADE

Este capítulo iremos estudar brevemente a Teoria da relatividade de Einstein. Tem este nome porque sugere que apenas o movimento relativo era importante. A teoria da relatividade é fundamental para descrever regimes de altas velocidades, ou seja, quando a partícula se move com velocidade da ordem da velocidade da luz.

2.1 RELATIVIDADE RESTRITA

A teoria da relatividade restrita possui dois postulados fundamentais (SCHUTZ, 2009):

1-Princípio da relatividade

"Todos os observadores inerciais são equivalentes", ou seja, os resultados de qualquer experimento realizado em dois referenciais inerciais são iguais.

2-A velocidade universal da luz

"A velocidade da luz é a mesma para qualquer observador inercial e seu valor vale $c = 3 \times 10^8 m/s$ "

Em um artigo publicado em 1905, Einstein usou as transformações de Lorentz como as leis de transformação para altas velocidades, conseguindo assim generalizar a teoria clássica. Assim ele conseguiu explicar os resultados de Michelson e Morley que, usando um interferômetro, não detectavam nenhum movimento relativo da Terra em relação ao éter (que seria um referencial absoluto). A teoria de Einstein tornou o éter desnecessário para explicar a propagação das ondas eletromagnéticas. (EINSTEIN, 1905)

2.1.1 Transformações de Lorentz

Ao descrever os fenômenos físicos é importante saber relacionar seu comportamento em diferentes referenciais. Na mecânica Newtoniana utilizamos as transformações de Galileu, porém essas são incompatíveis com o fato da velocidade da luz ser a mesma para diferentes referenciais inerciais. Para resolver essa dificuldade, conectamos diferentes referenciais inerciais por meio das transformações de Lorentz, que consistem em rotações em torno dos eixos x, y e z , e boosts nas direções x, y e z . Para a relatividade restrita, vamos considerar dois referenciais com velocidade relativa constante na direção x , $\vec{v}$. As coordenadas de um referencial O' em termos do referencial O podem ser escritas da seguinte forma:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (1)$$

$$x' = \gamma \quad (2)$$

$$y' = y \quad (3)$$

$$z' = z, \quad (4)$$

onde foi considerado que as direções y e z dos referenciais O e O' são coincidentes e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ depende apenas da velocidade v entre os referenciais. Para um estudo mais aprofundado do assunto

consultar (SCHUTZ, 2009).

Para descrever campos gravitacionais é necessário introduzir a Relatividade Geral, que veremos na próxima secção.

2.2 RELATIVIDADE GERAL

Para falar sobre teoria da relatividade geral devemos começar pelo princípio de equivalência, que estabelece a igualdade entre um campo gravitacional e um referencial não inercial, através do princípio da covariância geral.

2.2.1 Princípio da equivalência

Segundo esse princípio para cada ponto do espaço-tempo sob a ação de um campo gravitacional é possível estabelecer um sistema de referência localmente inercial, onde valem as leis da relatividade restrita. Experimentalmente é possível estabelecer o princípio da equivalência desde que fique demonstrado que existe uma igualdade entre a massa gravitacional e a massa inercial. Devido a esse fato, podemos anular localmente os efeitos de um campo gravitacional com a escolha adequada de referenciais, pois todos os corpos estão sujeitos a uma mesma aceleração (INVERNO, 2005).

2.2.2 Dinâmica da partícula

Em geral, as transformações de Lorentz são constituídas de rotações e boosts. As matrizes de rotação em torno dos eixos x , y , e z são dadas, respectivamente, por:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix},$$

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix},$$

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ 0 & -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, as matrizes dos boosts nas direções x , y e z são:

$$\begin{aligned}
B_x &= \begin{pmatrix} \cosh \beta_x & \sinh \beta_x & 0 & 0 \\ \sinh \beta_x & \cosh \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B_y &= \begin{pmatrix} \cosh \beta_y & 0 & \sinh \beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \beta_y & 0 & \cosh \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B_z &= \begin{pmatrix} \cosh \beta_z & 0 & 0 & \sinh \beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta_z & 0 & 0 & \cosh \beta_z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Os θ_i são os ângulos de rotação ordinária ao redor dos eixos i , com $0 \leq \theta_i < 2\pi$, e os β_i são ângulos hiperbólicos, com $-\infty < \beta_i < \infty$ e $\cosh \beta_x = \gamma$. Assim, podemos relacionar os referenciais O e O' com uma notação matricial, dada por:

$$\bar{X}^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu, \quad (5)$$

onde Λ^μ_ν é a Matriz de transformação de Lorentz e os índices gregos tem variação de 0 a 3. Portanto as coordenadas cartesianas $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ correspondem a uma coordenada temporal e três espaciais. No espaço-tempo plano o elemento de linha é definido por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. O elemento de linha é invariante sob transformação de Lorentz (5).

No caso particular de dois referenciais com velocidade relativa constante $\vec{v}$ na direção x , temos

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

que correspondem às equações (1) e (2).

Uma aplicação das transformações de Lorentz é a equação da trajetória para uma partícula em queda livre em um campo gravitacional. Considere uma partícula em queda livre em um sistema de coordenadas ξ^α que acompanha a partícula, sendo o sistema localmente inercial:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (7)$$

onde $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}$ é o tempo próprio da partícula.

Seja, agora, um sistema de coordenadas arbitrário x^μ que está imerso e em repouso em um campo gravitacional. Podemos obter a dinâmica da partícula observada no referencial x^μ se fizermos uma mudança do referencial. Assim, pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (9)$$

Multiplicando por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, ficamos com:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (10)$$

onde $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ é a conexão afim definida como:

$$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (11)$$

A equação (11) é conhecida como **Equação da Geodésica** e está associada a condição que torna a distância entre dois pontos estacionária, em uma variedade de Riemanniana. Portanto esta lei pode ser obtida a partir de um argumento geométrico. Como um exemplo, suponha um espaço tempo curvo, o elemento de linha assume a forma geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu, \quad (12)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Riemann. O comportamento dinâmico do campo gravitacional também é determinado pelos coeficientes da métrica $g_{\mu\nu}$. O comprimento de uma curva descrita por uma partícula imersa nesta variedade, entre os pontos a e b , é dado por:

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda, \quad (13)$$

onde λ é o parâmetro da curva.

Pelo princípio da mínima ação de Hamilton podemos fazer uma variação em (13) com respeito a $g_{\mu\nu}$, sendo $\delta S = 0$, obtemos exatamente a equação (11), onde:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right), \quad (14)$$

que é a conexão afim. Também podemos obter a conexão afim a partir da equação (11) usando a lei de transformação do tensor métrico entre os sistemas ξ^α e x^μ (WEINBERG, 1972).

2.3 RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

• **Tensor de Riemann:** é a quantidade geométrica que identifica se o espaço é curvo ou não. Podemos defini-lo como (WEINBERG, 1972):

$$R_{\mu\nu\beta}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\tau\beta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} + \Gamma_{\tau\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\beta}^{\tau} . \quad (15)$$

Quando o tensor de Riemann é nulo, implica que a forma métrica fundamental descreve uma variedade plana. Fisicamente falando, não há campo gravitacional.

• **Tensor de Ricci:** único tensor de segunda ordem que pode ser construído a partir do tensor de Riemann. É dado por:

$$R_{\mu\beta} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\beta} = R_{\mu\lambda\beta}^{\lambda} . \quad (16)$$

O tensor de Ricci é simétrico com total de 10 componentes independentes, isto devido a certas propriedades de anti-simetria do tensor de Riemann.

• **Escalar de curvatura:** Contraindo o tensor de Ricci definimos o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\beta} R_{\mu\beta} . \quad (17)$$

A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, podemos escrever um tensor de segunda ordem com derivada covariante nula, conhecido como tensor de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) . \quad (18)$$

Este tensor possui derivada covariante nula, então pela definição temos:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = \partial_{\mu} G^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} G^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} G^{\mu\lambda} = 0 . \quad (19)$$

As equações acima também são conhecidas como identidades contraídas de Bianchi.

2.4 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Precisamos agora construir um tensor que nos dê as informações sobre a composição de matéria e energia presentes no Universo. Para montar o tensor, vamos utilizar a densidade langrangiana $\mathcal{L}$ do campo.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} , \quad (20)$$

onde:

- ϕ é um campo qualquer, seja escalar, vetorial ou espinorial;
- O tensor representa o fluxo do quadrimomento p^{μ} através da superfície de $x^{\mu} = \text{constante}$;
- Temos também que é um tensor simétrico, ou seja, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

Podemos agora entender um pouco sobre o significado físico de cada componente do tensor. T^{00} , representa a componente temporal, portanto a densidade de energia do campo. $T^{i0} = T^{0i}$ são as componentes espaço temporais, portanto a densidade da i -ésima componente do momento. $T^{ij} = T^{ji}$ são as componentes espaciais, portanto, tensor pressão do constituinte. Na relatividade geral, a lei de conservação do tensor energia momento, em um espaço tempo curvo, diz que sua derivada covariante é nula, ou seja:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (21)$$

Devemos levar em consideração a contribuição do campo gravitacional do tensor energia momento para definir uma quantidade conservada. Podemos utilizar o tensor energia momento de um fluido perfeito, que não possui viscosidade nem fluxo de calor, como um exemplo simples:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (22)$$

onde p é a pressão e ρ a densidade de energia, sendo ambas funções das coordenadas espaço temporais e $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ é a quadrivelocidade do fluido.

Na próxima seção utilizaremos o tensor energia momento como uma ferramenta para encontrar as equações de campo de Einstein.

2.5 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Como já estudamos as equações básicas que representam a geometria do espaço-tempo e o tensor de segunda ordem com derivada covariante nula, veremos agora como se dá a relação entre composição matéria-energia e a geometria. Para isso partiremos da ação de Einstein-Hilbert, definida como:

$$S_T = \int \sqrt{-g} \left(\frac{-c^3}{16\pi G} R + \frac{1}{c} \mathcal{L}_m \right) d^4x , \quad (23)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento invariante do espaço tempo; g é o determinante da métrica; G é a constante gravitacional; R é o escalar de curvatura (17) e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\alpha g^{\mu\nu})$ é a densidade lagrangiana da matéria. Para que os cálculos sejam menos trabalhosos, iremos separar a ação em duas partes, sendo elas gravitacional e matéria, portanto:

$$S = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x . \quad (24)$$

Utilizaremos o princípio de mínima ação, que estabelece que a ação possui um valor estacionário (máximo, mínimo ou ponto de sela) para a trajetória que será efetivamente percorrida pelo sistema em seu espaço de configuração, ou seja, $\delta S = 0$ (LE MOS, 2007). Fazendo a variação da ação da parte gravitacional e substituindo o escalar de curvatura, temos:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (25)$$

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x . \quad (26)$$

Temos que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}$, portanto a equação (26) fica:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x . \quad (27)$$

Usando a definição do tensor de Riemann (15), substituindo no tensor de Ricci (16) e variando, temos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} \Gamma_{\nu\tau}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\nu\tau}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\lambda\tau}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\tau}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} . \quad (28)$$

Vimos anteriormente que a conexão afim não é um tensor, mas é possível mostrar que $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ se comporta como um (WEINBERG, 1972). Portanto, podemos definir sua derivada covariante

$$\nabla_{\eta}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}}{\partial x^{\eta}} + \Gamma_{\eta\lambda}^{\tau} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\nu}^{\tau} - \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} . \quad (29)$$

Reescrevendo (28), temos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) . \quad (30)$$

Substituindo (30) em (27), temos:

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} [\nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] . \quad (31)$$

Como a derivada covariante da matéria é identicamente nula, podemos reajustar a equação, portanto:

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) d^4x . \quad (32)$$

Sabemos agora que, pelo teorema de Gauss podemos transformar uma integral de volume em uma de superfície que se anula nas fronteiras de integração, pois $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ de acordo com o princípio variacional. Portanto:

$$\int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) d^4x = \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) dS_{\lambda} = 0 . \quad (33)$$

Finalmente, a variação do campo gravitacional fica:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x , \quad (34)$$

onde o termo entre parenteses é o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Podemos agora analisar a variação do campo da matéria

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 , \quad (35)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento dos campos fontes, definido como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (36)$$

Assim, a variação da ação total fica:

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x . \quad (37)$$

Pelo princípio de mínima ação, sabemos que $\delta S = 0$, como a variação da métrica $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrária, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = 0 \quad (38)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (39)$$

Esta é conhecida como *Equação de Campo de Einstein*, onde o lado esquerdo representa a deformação do espaço-tempo e o lado direito é a fonte do campo gravitacional com derivada covariante nula, onde as fontes do campo gravitacional devem obedecer a lei de conservação do tensor energia-momento ($\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$).

Para escrever as equações de uma forma mais geral, podemos introduzir um termo linear em $g_{\mu\nu}$, ficando:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \quad (40)$$

onde Λ é a constante cosmológica e possui um papel importante para descrever a expansão do Universo. Nesse caso, a ação pode ser escrita como:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4x . \quad (41)$$

3 COSMOLOGIA

No início do século XX a Cosmologia surgiu como um ramo da física graças a duas grandes descobertas realizadas independentemente (SOUZA, 2004). No aspecto teórico, Einstein publicou em 1915 a Teoria da Relatividade Geral, que descreve a gravitação geometricamente e fornece uma ferramenta para modelar a dinâmica global do Universo. Em paralelo, Hubble mostrou experimentalmente que o Universo estava em expansão. A seguir iremos discutir como essas duas descobertas iniciaram a Cosmologia moderna.

3.1 LEI DE HUBBLE

Edwin Hubble (1889-1953) foi um astrônomo norte-americano responsável por grandes descobertas no início do século XX. Utilizando o telescópio do Observatório de Monte Wilson, Hubble mostrou que, ao contrário do que se imaginava, o universo estava de fato em expansão. As galáxias estavam se afastando uma das outras com uma taxa que aumentava com a distância entre elas. Para tal descoberta, ele usou uma característica das galáxias que é sua velocidade radial em relação ao observador, a interpretação clássica desse fenômeno é por efeito Doppler. A velocidade de afastamento provoca um deslocamento sistemático das linhas espectrais, o qual pode ser medido, sendo esse o efeito de redshift. Em primeira aproximação está relacionado com a velocidade de afastamento.

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq \frac{v}{c} \quad (\text{Caso não-relativístico}) \quad (1)$$

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1 \quad (\text{Caso relativístico}), \quad (2)$$

onde z é o desvio para vermelho (redshift), λ é o comprimento de onda que observamos e λ_0 é o comprimento de onda emitido pela galáxia. Assim, originou-se a chamada Lei de Hubble:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (3)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade de afastamento da galáxia, $\vec{r}$ é a distância da galáxia com relação a Terra, e H_0 é a constante de Hubble, que tem seu valor atual de $H_0 = 74,8 \pm 3.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $1 \text{ Mpc} \equiv 3,02 \times 10^{22} \text{ m}$ (MADDOX, 2003). Para cosmologia usamos um sistema de coordenadas que se move junto com a expansão do universo, sendo ele chamado de coordenadas comóveis. Assim, podemos escrever a relação entre distância real $\vec{r}$, e a distância comóvel, chamada de $\vec{x}$, já que a expansão é uniforme:

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}, \quad (4)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, que mede a taxa de expansão do universo e por convenção, temos que hoje $t = t_0$ e portanto $a(t_0) = 1$. Podemos agora reescrever a Lei de Hubble em termos do fator de

escala:

$$\vec{v} = \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{a'(t)}{a(t)} \vec{r}. \quad (5)$$

Definindo assim o parâmetro de Hubble H

$$H \equiv \frac{a'(t)}{a(t)}. \quad (6)$$

3.2 PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

O Princípio Cosmológico foi inicialmente formulado por Milne (1896-1950) para que pudesse ser aplicada uma nova dinâmica gravitacional para o Universo, ou seja, eles precisavam de uma distribuição de matéria do universo. A solução encontrada nas principais teorias cosmológicas consiste na adoção desse princípio, segundo o qual o Universo em expansão deve ser necessariamente homogêneo e isotrópico. Entende-se por homogeneidade pois as mesmas evidências observacionais estão disponíveis para observadores em diferentes posições do universo. E Isotropia quando a mesma evidência observacional pode ser encontrada em qualquer direção no universo em que olhemos, ou seja, as mesmas leis físicas se aplicam em todos os lugares. Sendo essa hipótese válida para distâncias maiores que $10Mpc$ (SOUZA, 2004). Uma segunda observação que revela propriedades importantes sobre o universo, é a radiação de fundo cósmica, prevista por Gamow, Alpher e Herman no final da década 40 (RIBAS, 2008). Eles previram que quando o universo era jovem sua temperatura era alta o suficiente para os fótons ionizarem os átomos de hidrogênio, pois a densidade total de energia da radiação obedece a lei de Stefan Boltzmann $\rho_r = cT^4$. Por outro lado a densidade de energia cai com $\rho_r \sim \frac{1}{a^4}$, onde a é o fator de escala do universo. Portanto podemos concluir que $T \sim \frac{1}{a}$. Assim com essa relação, temos que a medida que o universo se expandiu ele esfriou, e portanto os fótons não tiveram mais energia suficiente para ionizar os átomos. Entrando assim na era do desacoplamento, quando os fótons se desacoplaram da matéria e passaram a viajar livremente pelo espaço, formando a radiação cósmica de fundo observada hoje. A radiação cósmica de fundo pode ser detectada de qualquer direção do espaço, e possui um espectro de corpo negro com temperatura aproximadamente de $2,7K$ (SOUZA, 2004).

3.3 MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER

Uma métrica simples é composta por três dimensões espaciais, porém a relatividade nos mostrou que o espaço e o tempo juntos formam uma quarta dimensão, o espaço-tempo (RYDEN, 2003). Se conseguimos calcular a distância entre dois pontos no espaço usando uma métrica apropriada, então conseguimos calcular a distância entre dois eventos no espaço-tempo.

Considere dois eventos, um ocorrendo no espaço-tempo (t, r, θ, ϕ) , e outro em $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$. De acordo com as leis da relatividade restrita, a separação no espaço-tempo entre esses dois eventos é:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^d \Omega^2, \quad (7)$$

que é chamada de métrica de Minkowski e o espaço-tempo que ela descreve é chamado de espaço-tempo de Minkowski.

Quando um fóton caminha no espaço-tempo ele percorre uma geodésica, ou seja, a menor distância que une dois pontos tal que, para pequenas variações da forma da curva, o seu comprimento é estacionário. Para uma geodésica nula, ao longo de segmento infinitesimal do caminho do fóton $ds = 0$. No espaço-tempo de Minkowski, a trajetória do fóton obedece a relação:

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (8)$$

Se o fóton estiver se movendo em um caminho radial isto implica que o θ e ϕ são constantes

$$c^2 dt^2 = dr^2 \quad (9)$$

ou

$$\frac{dr}{dt} = \pm c . \quad (10)$$

Portanto, a equação (7) pode ser usada apenas no contexto da relatividade restrita, onde o espaço-tempo não é curvo pela presença da massa e energia escura.

Mas, quando surgiram os conceitos da relatividade geral, os físicos Howard Robertson e Arthur Walker, pensaram como deveria ser a métrica para um universo homogêneo e isotrópico. Então, de forma paralela, ambos chegaram na equação hoje conhecida como métrica de Robertson-Walker, dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (11)$$

onde:

$a(t)$ é o fator de escala, que é uma função adimensional do tempo que descreve como as distâncias crescem ou decrescem com o tempo, ela é também normalizada, portanto $a(t_0) = 1$ no presente momento.

k é a constante de curvatura, que é um número adimensional que pode assumir os seguintes valores discretos: $k = 0$ se o universo for espacialmente plano, $k = -1$ se o universo tiver curvatura espacial negativa, e $k = +1$ se o universo tiver curvatura espacial positiva.

t é o tempo próprio cosmológico.

O fator de escala descreve como o Universo que se expande ou contrai no tempo. As variáveis espaciais (x, θ, ϕ) ou (r, θ, ϕ) são chamadas de coordenadas comóveis de um ponto do espaço. Se a expansão do universo é perfeitamente homogênea e isotrópica, então as coordenadas comóveis de qualquer ponto permanecem constantes no tempo.

Para essa forma da métrica de Robertson-Walker, para um universo homogêneo e isotrópico, as

coordenas comóveis ficam $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$, (ISLAM, 1992)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 a(t)^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

E o inverso da métrica:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kr^2-1}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\csc^2(\theta)}{r^2 a(t)^2} \end{pmatrix}.$$

Vamos agora escrever a equação de Einstein utilizando a métrica de Robertson-Walker considerando que a matéria é descrita por um fluido perfeito com densidade de massa-energia ρ e pressão p . Então usaremos o tensor de energia-momento (22-cap2), com $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, & g_{11} &= -\frac{a^2}{(1-kr^2)} \\ g_{22} &= -r^2 a^2, & g_{33} &= -r^2 a^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (12)$$

e

$$\begin{aligned} g^{00} &= 1, & g^{11} &= -\frac{(1-kr^2)}{a^2} \\ g^{22} &= -(ra)^{-2}, & g^{33} &= -(ra \sin \theta)^{-2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Agora os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ nos quatro grupos de acordo com seus valores 0, 1, 2, 3 do índice μ :

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{c} \frac{a(t)a'(t)}{(1-kr^2)}, \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{c} r^2 a(t)a'(t), \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{c} r^2 \sin^2 \theta a(t)a'(t); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{c} \frac{a'(t)}{a(t)}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{(1-kr^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{c} \frac{a'(t)}{a(t)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta; \quad (16)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{a'(t)}{a(t)}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta; \quad (17)$$

onde $a'(t) = \frac{da(t)}{dt}$. Substituindo os símbolos de Christoffel na equação (15-cap2) ou (16-cap2), obtemos as componentes do tensor de Ricci diferentes de zero. Notemos que r é adimensional enquanto $a(t)$ tem dimensão de comprimento.

$$R_{00} = \frac{-3a''(t)}{a(t)}, \quad (18)$$

$$R_{11} = \frac{(a(t)a''(t) + 2a'(t)^2 + 2c^2k)}{(1 - kr^2)}, \quad (19)$$

$$R_{22} = r^2[a(t)a''(t) + 2a'(t)^2 + 2c^2k], \quad (20)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta [a(t)a''(t) + 2a'(t)^2 + 2c^2k]. \quad (21)$$

Podemos agora escrever as equações de Einstein (40-cap2) observando que as componentes da quadrivelocidade são as mesmas do vetor contravariante $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$, portanto as componentes diferentes de zero do tensor $T_{\mu\nu}$ são:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho, & T_{11} &= \frac{pa(t)^2}{(1-kr^2)}, \\ T_{22} &= pr^2 a(t)^2, & T_{33} &= pr^2 a(t)^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Portanto as componentes 00 e 11 da equação de Einstein podem ser escritas, respectivamente:

$$3(a'(t)^2 + c^2k) = \frac{8\pi G \rho a(t)^2}{c^2}, \quad (23)$$

$$2a(t)a''(t) + a'(t)^2 + kc^2 = -\frac{8\pi G p a(t)^2}{c^2}. \quad (24)$$

Para chegar nesses resultados, multiplicamos a componente 00 de (40-cap2) por $a(t)^2$ para achar (23), e para as componentes 11 = 22 = 33 de (40-cap2) multiplicamos por $(kr^2 - 1)$. Obteremos agora a expressão de conservação do Tensor energia momento. Usando (21-cap2), temos:

$$\frac{dT^{\mu\nu}}{dx^\nu} + \Gamma_{\nu\tau}^\mu T^{\tau\nu} + \Gamma_{\nu\tau}^\nu T^{\mu\tau} = 0, \quad (25)$$

onde as componentes do tensor $T^{\mu\nu}$ contravariante diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho, & T^{11} &= \frac{p(1-kr^2)}{a(t)^2}, \\ T^{22} &= \frac{p}{[ra(t)]^2}, & T^{33} &= \frac{p}{[ra \sin \theta]^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

E utilizando os símbolos de Christoffel representados nas equações (14)-(17), podemos reescrever a (25) como:

$$\rho' + 3(p + \rho) \frac{a'(t)}{a(t)} = 0, \quad (27)$$

com $\mu = 0$ em (25). A equação (27) é uma consequência de (23) e (24), e pode ser encontrada a partir das mesmas.

4 MODELOS FERMIONICOS

Iremos introduzir campos de matéria em nosso modelo de universo para estudar o seu efeito na taxa de expansão. Para isso, é necessário introduzir um campo espinorial ψ que descreve a matéria bariônica.

4.1 FÉRMIONS

Os férmions são partículas de spin semi-inteiro representadas por um objeto matemático chamado espinor, sendo este um tipo de campo físico que generaliza os conceitos de campos vetoriais e tensoriais. Na teoria quântica de campos, um campo fermiônico é um campo quântico cujo quantum é o férmion, isto é, obedece as estatísticas de Fermi-Dirac (EDWARDS, 1981). O exemplo mais proeminente do campo fermiônico é o campo de Dirac, que descreve férmions de spin $-1/2$ de: elétrons, prótons e quarks.

Na próxima seção iremos estudar a equação de Dirac e sua aplicação no modelo Walecka.

4.2 A EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Dirac é uma equação de onda relativística proposta por Paul Dirac em 1928 que descreve com sucesso partículas elementares de $spin - \frac{1}{2}$, como o elétron. A equação de Dirac é uma equação de primeira ordem, que eliminou o problema na definição de densidade de probabilidade, problema este apresentado pela equação de Klein-Gordon por ser uma equação de segunda ordem nas derivadas temporais e espaciais. Para encontrarmos essas equações partiremos de um cenário já conhecido, sem aceleração, onde os campos se transformam de um referencial inercial a outro segundo as transformações de Lorentz (RIBAS, 2008):

$$T'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda_{\sigma}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} T^{\sigma\nu}(x) , \quad (1)$$

onde Λ_{β}^{α} são as matrizes de Lorentz e a equação (1) representa a lei de transformação de um campo tensorial.

Para um espaço-tempo plano, a lagrangiana que governa o campo fermiônico é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - (\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi] - m \bar{\psi} \psi - V , \quad (2)$$

que é a Lagrangiana de Dirac, onde m é a massa do férmion, $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$ é o adjunto do espinor ψ , e V a densidade potencial de auto interação do campo fermiônico. Agora, precisamos fazer algumas generalizações para podermos estudar os campos acima, via princípio da covariância geral.

- 1- Substituímos o tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ pela a métrica $g_{\mu\nu}$;
- 2- Trocamos as derivadas ordinárias ∂_{ν} por derivadas covariantes ∇_{ν} ;
- 3- Trocamos Λ_{β}^{α} , (grupo de Lorentz) para $\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$ (grupo de transformação geral), onde ξ^{α} são as coorde-

nadas do referencial inercial local e x^β são as coordenadas do referencial não inercial. Portanto podemos generalizar a lagrangiana para o espaço-tempo curvo como sendo:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V, \quad (3)$$

onde $\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ são as matrizes de Dirac no espaço-curvo. Assim, a ação fica:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V \right\}. \quad (4)$$

Agora estamos trabalhando na presença de um campo gravitacional e podemos extrair informações importantes sobre os campos utilizando (4).

Variando a ação com relação ao tensor métrico:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\bar{\psi} \Gamma^\mu \nabla^\nu \psi + \bar{\psi} \Gamma^\nu \nabla^\mu \psi - \nabla^\nu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi - \nabla^\mu \bar{\psi} \Gamma^\nu \psi] - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (5)$$

que é o tensor energia momento para o campo fermiônico em um espaço-tempo curvo. Variando, então, a ação (4) com relação a $\bar{\psi}$:

$$i \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m \psi - \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0, \quad (6)$$

que é a equação de Dirac. E variando em relação a ψ :

$$i \nabla_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + m \bar{\psi} + \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (7)$$

que representa a equação conjugada na presença de um campo gravitacional. Note que a equação de Dirac é de primeira ordem e invariante sob transformação de Lorentz.

Suponha que quiséssemos fazer o mesmo para um campo escalar. Teríamos termos como $v^\mu \partial_\mu \phi + \dots$, que inclui um vetor v^μ que não é invariante de Lorentz. Para espiniores, γ^μ fazer esse papel. Portanto, da equação de Dirac, temos:

$$\begin{aligned} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0 \\ (i \gamma^\nu \partial_\nu + m)_{\alpha\beta} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m)_{\beta\gamma} \psi_{\gamma 1} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0, \quad (9)$$

onde (9) é a equação de Klein-Gordon. A equação de Dirac mistura as componentes do espinor $\psi(x)$, por outro lado, cada componente deve satisfazer a equação de Klein-Gordon separadamente.

4.2.1 Soluções de Partícula livre da Equação de Dirac

Vamos estudar soluções da equação de Dirac, uma vez que ψ é solução da equação de Klein-Gordon, sabemos que ela pode ser escrita como combinação linear de ondas planas. Para $p^0 > 0 \rightarrow \psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}$, onde $p^2 = m^2$ e $u(p)$ é um espinor de quatro componentes. Substituindo na equação de

Dirac:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = \begin{pmatrix} -m & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & -m \end{pmatrix} u(p) = 0 ,$$

onde

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) , \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}) , \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} , \quad u(p) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} .$$

Temos:

$$\begin{cases} (p \cdot \sigma)u_2 = mu_1 \\ (p \cdot \bar{\sigma})u_1 = mu_2 \end{cases} ,$$

onde σ são as matrizes de Pauli definidas como:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$m^2 u_1 = (p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})u_1 . \quad (10)$$

Portanto (10) temos:

$$\begin{aligned} (p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) &= (p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})(p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = p_0^2 - p_i p_j \sigma^i \sigma^j \\ \{\sigma^i, \sigma^j\} &= 2\delta^{ij} \\ (p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) &= p_0^2 - p_i p_j \delta^{ij} = p_\mu p^\mu = m^2 . \end{aligned} \quad (11)$$

Uma relação implica na outra. Seja o Ansatz:

$$u_1 = (p \cdot \sigma)\xi' \quad (12)$$

$$u_2 = m\xi' , \quad (13)$$

então

$$u(p) = A \begin{pmatrix} (p \cdot \sigma)\xi' \\ m\xi' \end{pmatrix} .$$

Escolhendo $A = \frac{1}{m}$ e $\xi' = \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\xi$.

4.3 MODELO WALECKA

Dados observacionais nos dizem que o universo está se expandindo de maneira acelerada. Uma maneira simples de obter essa expansão acelerada é introduzir a constante cosmológica nas equações de Einstein.

Para descrever férmions em um espaço-tempo curvo devemos utilizar um sistema de coordenadas localmente Lorentziano. Assim, em cada ponto do espaço vamos definir um espaço tangente localmente plano, cujas coordenadas e_ν^a são chamadas de tetradas e definidas como:

$$ds^2 = \eta_{ab}\theta^a\theta^b , \quad (14)$$

onde $\theta^a = e_\mu^a dx^\mu$, $\eta_{ab} = (+1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski. Utilizando a métrica de Fridman-Robertson-Walker em coordenadas cartesianas, temos:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (15)$$

e as tetradas são:

$$e_\mu^0 = \delta_\mu^0, \quad e_\mu^i = a(t)\delta_\mu^i . \quad (16)$$

A derivada covariante é descrita em termos da conexão de Spin:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{\omega_\mu^{ab}}{4} \Sigma_{ab} \quad (17)$$

$$\Sigma_{ab} = \frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b] , \quad (18)$$

onde γ^a são as matrizes de Dirac, dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde cada elemento é uma matriz 2×2 , e σ^i são as matrizes de Pauli.

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford $\{\gamma^i, \gamma^j\} = \eta^{ij}$, e $\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i$. A conexão de spin é dada por (PAULA A. CHAVES, 2017):

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} e^{\nu a} (\partial_\nu e_\mu^b - \partial_\mu e_\nu^b) - \frac{1}{2} e^{\nu b} (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) - \frac{1}{2} e^{\rho a} e^{\tau b} (\partial_\rho e_{\tau c} - \partial_\tau e_{\rho c}) . \quad (19)$$

Para a métrica de Friedman-Robertson-Walker, as componentes não nulas da conexão de spin são:

$$\omega_1^{01} = \omega_2^{02} = \omega_3^{03} = a'(t) \quad (20)$$

$$\omega_1^{10} = \omega_2^{20} = \omega_3^{30} = -a'(t) . \quad (21)$$

Vamos supor que o campo fermiônico dependa somente do tempo, para preservar a isotropia e homogeneidade de nosso modelo.

A equação de Dirac nessa métrica fica:

$$(i\Gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi = 0 , \quad (22)$$

onde $\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ são as matrizes de Dirac no espaço-curvo e m a massa do férmion.

Nosso objetivo é usar o modelo de Walecka não linear para descrever a dinâmica de um campo fermiônico e verificar se a evolução do Universo pode ser explicada pela presença desse campo. Assim, utilizaremos a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\frac{1}{2} R + \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \frac{i}{2} (\nabla_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi \right) - \frac{\alpha}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{\beta}{3} (\bar{\psi} \psi)^3 - \frac{\gamma}{4} (\bar{\psi} \psi)^4 - 2\eta (\bar{\psi} \psi)^{1/2} \right\} .$$

Temos então:

$$\Gamma^0 = \gamma^0, \quad \Gamma^i = \frac{1}{a(t)} \gamma^i . \quad (23)$$

Portanto utilizando a métrica, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi &= \Gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \Sigma_{ab}) \psi \\ &= \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{1}{4} \frac{1}{a(t)} \gamma^i \omega_i^{ab} \Sigma_{ab} \psi \\ &= \gamma^0 \psi' + \frac{1}{4} \frac{1}{a(t)} 2a'(t) (\gamma^1 \gamma^1 \gamma^0 + \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 + \gamma^3 \gamma^3 \gamma^0) \psi \\ &= \gamma^0 \psi' + \frac{3a'(t)}{2a(t)} \gamma^0 \psi. \end{aligned} \quad (24)$$

Com esses resultados podemos obter agora a equação de Dirac:

$$\psi' + \frac{3}{2} \frac{a'(t)}{a(t)} \psi + i \left[1/2 (-2\eta) (\bar{\psi} \psi)^{1/2} \gamma^0 + 2 \left(\frac{-\alpha}{2} \right) (\bar{\psi} \psi) \gamma^0 + 3 \left(\frac{-\beta}{3} \right) (\bar{\psi} \psi)^2 \gamma^0 + 4 \left(\frac{-\gamma}{4} \right) (\bar{\psi} \psi)^3 \gamma^0 \right] \psi = 0 \quad (25)$$

$$\bar{\psi}' + \frac{3}{2} \frac{a'(t)}{a(t)} \bar{\psi} + i \left[1/2 (-2\eta) (\bar{\psi} \psi)^{1/2} \gamma^0 + 2 \left(\frac{-\alpha}{2} \right) (\bar{\psi} \psi) \gamma^0 + 3 \left(\frac{-\beta}{3} \right) (\bar{\psi} \psi)^2 \gamma^0 + 4 \left(\frac{-\gamma}{4} \right) (\bar{\psi} \psi)^3 \gamma^0 \right] \bar{\psi} = 0 . \quad (26)$$

Vamos multiplicar a equação (25) por $\bar{\psi}$ e somar com a equação (26) multiplicada por ψ , obtendo:

$$\bar{\psi} \psi' + \bar{\psi}' \psi + 3 \frac{a'(t)}{a(t)} \bar{\psi} \psi = 0 \quad (27)$$

Fazendo $\bar{\psi} \psi = y$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -3 \frac{a'(t)}{a(t)} y \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= -3 \frac{d}{dt} \log a \\ \int \frac{dy}{y} &= -3 \int dt \frac{d \log a}{dt} . \end{aligned} \quad (28)$$

Portanto

$$y = \frac{A}{a^3}, \quad (29)$$

onde A é uma constante.

Escrevendo em termos dos espinores, temos:

$$\bar{\psi}\psi = \frac{A}{a^3} . \quad (30)$$

Utilizando a métrica de Fridman-Robertson-Walker em coordenadas cartesianas(15), as componentes dos Tensores de Ricci não nulos se tornam:

$$R_{00} = -\frac{a''(t)}{a(t)} \quad (31)$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = 2a'(t)^2 + a(t)a''(t) . \quad (32)$$

O escalar de curvatura fica:

$$R = -6 \left(\frac{a'(t)^2}{a(t)^2} + \frac{a''(t)}{a(t)} \right) . \quad (33)$$

E a equação de Einstein (39-cap2) da origem a duas equações:

$$3 \left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 = T_0^0 \quad (34)$$

$$\left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 + \left(\frac{a''(t)}{a(t)} \right) = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 , \quad (35)$$

onde foi usado um sistema de unidades no qual $8\pi G = 1$ e $c = 1$. Considerando o tensor energia-momento de um fluido perfeito (22):

$$T_0^0 = \rho \quad (36)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p , \quad (37)$$

onde $\rho(t)$ é a densidade e $p(t)$ é a pressão do fluido. Portanto as equações de Friedman-Robertson-Walker são:

$$3 \left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 = \rho \quad (38)$$

$$\left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 + \left(\frac{a''(t)}{a(t)} \right) = -p . \quad (39)$$

Podemos obter a equação para a aceleração do universo a partir das equações (38) e (39) como sendo:

$$\frac{a''(t)}{a(t)} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) . \quad (40)$$

Utilizando a lagrangiana da matéria como fonte do campo gravitacional, podemos calcular o tensor energia-momento associado:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - \mathcal{L}_M \delta_\nu^\mu . \quad (41)$$

A densidade de energia da fonte gravitacional é

$$T_0^0 = \rho = +2\eta(\bar{\psi}\psi)^{1/2} + \frac{\alpha}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{\beta}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{\gamma}{4}(\bar{\psi}\psi)^4. \quad (42)$$

E a pressão associada ao campo fermiônico é

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p = -2\left(-\frac{1}{2}\right)\eta(\bar{\psi}\psi)^{1/2} - \frac{\alpha}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 - 2\frac{\beta}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 - 3\frac{\gamma}{4}(\bar{\psi}\psi)^4. \quad (43)$$

Substituindo a equação (30), temos:

$$\rho = +2\eta\frac{A^{1/2}}{a^{3/2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{A^2}{a^6} + \frac{\beta}{3}\frac{A^3}{a^9} + \frac{\gamma}{4}\frac{A^4}{a^{12}} \quad (44)$$

$$p = -\eta\frac{A^{1/2}}{a^{3/2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{A^2}{a^6} + 2\frac{\beta}{3}\frac{A^3}{a^9} + 3\frac{\gamma}{4}\frac{A^4}{a^{12}}. \quad (45)$$

4.4 RESULTADOS

Nosso objetivo agora é resolver a equação diferencial

$$\frac{a''(t)}{a(t)} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \quad (46)$$

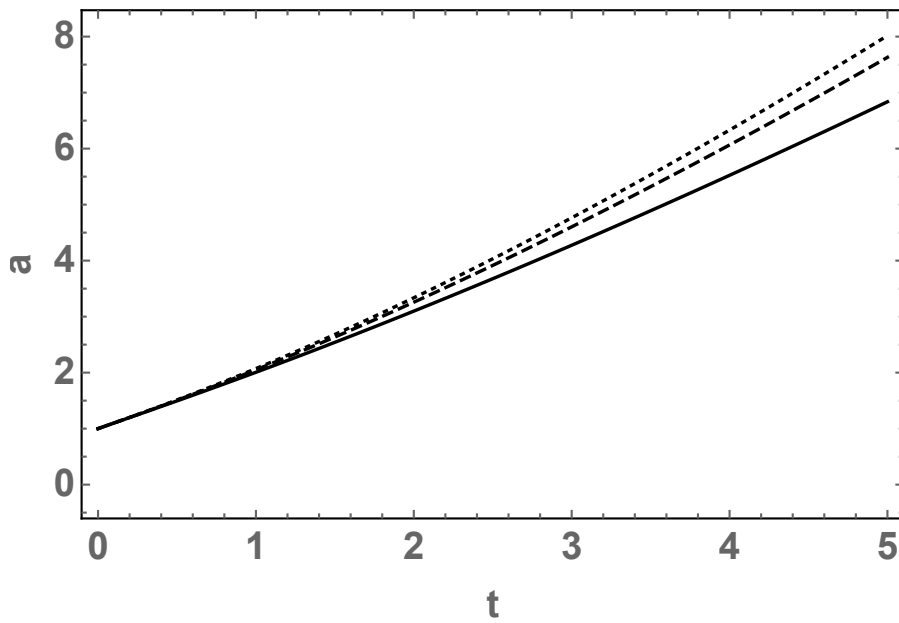
para a densidade e pressão dadas por (44) e (45).

Como condição inicial, utilizaremos para o fator de escala e sua derivada $a(0) = a'(0) = 1$. Escolhendo os parâmetros $A = 1$ e $\alpha = -1$, temos

$$\frac{a''(t)}{a(t)} = -\frac{1}{6}\left(\frac{\eta}{a^{3/2}} - 2\frac{1}{a^6}\right). \quad (47)$$

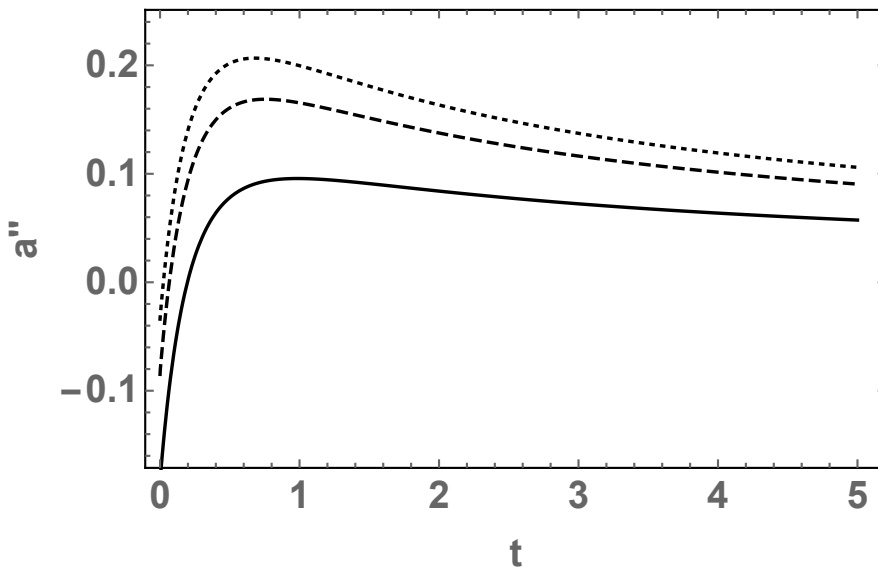
Na figura 1 mostramos a solução numérica da equação diferencial para 3 valores distintos de η , onde o nosso zero referencial está colocado a partir do período pós inflacionário. Vemos que nossa solução apresenta um fator de escalar que cresce com o passar do tempo, o que significa que o Universo está em expansão. Na figura 2 apresentamos a derivada segunda do fator de escala. Nosso modelo nos fornece uma região de transição entre o universo desacelerado/acelerado, que podemos interpretar como a transição entre o reaquecimento do Universo e a Era dominada pela Energia Escura.

Figura 1 – Fator de escala do Universo em função do tempo em unidades naturais para $\eta = -0.9$ (linha sólida), $\eta = -1.5$ (linha tracejada) e $\eta = -1.8$ (linha pontilhada).



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 2 – Derivada segunda do fator de escala do Universo em função do tempo em unidades naturais para $\eta = -0.9$ (linha sólida), $\eta = -1.5$ (linha tracejada) e $\eta = -1.8$ (linha pontilhada).



Fonte: Produção do próprio autor.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos uma breve introdução à Teoria da Relatividade, deduzindo a equação de campo de Einstein a partir da ação de Einstein-Hilbert. Foi realizada uma revisão sobre alguns conceitos cosmológicos e obtivemos as equações de Friedman, que descrevem a evolução do Universo. Os dados observacionais atuais mostram que o Universo teve várias Eras desde o Big Bang, passando por um período inflacionário, de reaquecimento e de expansão acelerada.

Em particular, estamos interessados em investigar o período entre o fim do reaquecimento e o início da expansão acelerada do Universo. Para isso utilizamos campos fermiônicos como fonte do campo gravitacional. De maneira mais específica, utilizamos o modelo de Walecka não-linear para descrever a dinâmica de um campo fermiônico e verificamos se essa transição poderia ser descrita pela presença desse campo. Por simplicidade, utilizamos uma interação de contato, que é obtida quando a massa do méson trocado vai para o infinito.

A partir da solução numérica da equação (46), foi possível perceber que os campos fermiônicos de fato podem ser responsáveis pela transição entre o fim da inflação e o início do período de expansão acelerada do Universo. Para isso, basta ver na figura 2 que temos uma região de aceleração negativa e outra de valores positivos, representando um Universo com expansão desacelerada seguido de uma expansão acelerada. Em particular a figura 1 mostra que nesse modelo temos um Universo que está se expandindo ao longo tempo.

Para trabalhos futuros estamos interessados em estudar em mais detalhes outros períodos da evolução do Universo. Especificamente, devemos obter uma expansão acelerada (relacionado à inflação) antes do período de reaquecimento. Para isso introduziremos modelos hadrônicos realísticos que são utilizados para descrever a matéria nuclear (M.DUTRA O. LOURENCO, 2014).

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, New York, n. 116, p. 061102, 2016.
- ABBOTT, B. P. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical Review L.**, New York, n. 119, p. 161101, 2017.
- BAUMANN, D. Tasi lectures on inflation. 2009. Disponível em: <arXiv:0907.5424>. Acesso em: 19 nov. 2019.
- BENNETT, D. L. e. a. C. L. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. **International J. of Theor. Phys**, New York, n. 208, 2013.
- BERNARDIS, P. de. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. **Nature**, Reino Unido, n. 404, p. 955–959, 2000.
- CALDWELL, R. D. R. R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint or an energy component with general equation of state. **Physical Review Letters**, New York, v. 80, n. 4, p. 1582 – 1585, 1998.
- CALDWELL, R. R. A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. **Elsevier**, Amsterdã, v. 545, n. 6, p. 23 – 29, 2002.
- EDWARDS. The mathematical foundations of quantum field theory: fermions, gauge fields, and super-symmetry. **International J. of Theor. Phys**, n. 7, p. 503 – 517, 1981.
- EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. **Annalen der Physik**, Berlim, n. 17, 1905.
- EINSTEIN, A. Grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, Amsterdã, v. 4, n. 49, p. 769 – 822, 1915.
- FABRIS S. V. B. GONCALVES, P. E. d. S. J. C. Mass power spectrum in a universe dominated by the chaplygin gas. **Nature**, v. 53, n. 34, p. 2111–2126, 2002.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, New York, v. 23, n. 10, p. 347 – 356, 1981.
- INVERNO, R. A. d'. **Introducing Einstein's relativity**. Oxônia: Oxford University Press, 2005.
- ISLAM, J. N. **An introduction to mathematical cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- LEMONS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2007.
- MADDOX, S. **Astronomy picture of the day**. 2003. Disponível em: <apod.nasa.gov/apod/ap030611.html>. Acesso em: 25 out. 2019.
- M.DUTRA O. LOURENCO, S. S. A. B. V. C. A. B. D. P. M. C. P. S. T. J. R. S. Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints. **Physical Review C**, Estados Unidos, v. 90, n. 055203, p. 1 – 10, 2014.
- MICHELSON, E. W. M. A. A. On the relative motion of the earth and of the luminiferous ether. **Philos. Mag.**, Reino Unido, v. 5, n. 24, p. 449 – 463, 1887.

- PADMANABHAN, T. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter. **Physical Review D**, New York, v. 66, n. 4, p. 021301–1 – 021301–4, 2002.
- PAULA A. CHAVES, O. O. T. F. W. de. Signature of curved qft effects on the optical properties of deformed graphene. **Europhysics Letters (Print)**, v. 117, n. 27003, 2017.
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. **Physical Review L.**, New York, n. 116, p. 061102, 2016.
- PERLMUTTER, G. A. S. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, Chicago, n. 21, p. 565 – 586, 1999.
- RIBAS, M. de O. **Modelos cosmológicos acelerados com campos fermiônicos**. 2008.123. f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.
- RIESS, A. V. F. A. G. Observacional evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astrophysical Journal**, Chicago, n. 36, p. 1009 – 1038, 1998.
- RYDEN, B. **Introduction to cosmology**. San Francisco, CA: Addison Wesley, 2003.
- SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- SOUZA, R. E. de. **Introdução à cosmologia**. São Paulo, SP: Edusp, 2004.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principle and applications of the general theory of relativity**. Hoboken: John Wiley and Sons, 1972.