

MAURÍLIO MACHI

DO PAIRO DE RHIND AO PÓS MODERNO
O QUE AINDA PERMANECE EM GEOMETRIA

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de Marília
2001



MAURÍLO MACHI

**DO PAIRO DE RHIND AO PÓS- MODERNO
O QUE AINDA PERMANECE EM GEOMETRIA**

Dissertação apresentada como exigência para a
obtenção do título de Mestre em Educação pela
Universidade Estadual Paulista – Campus de
Marília, sob a orientação da Profa. Dra. Tereza
de J. F. Scheide.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de Marília
2001



1410001178



Aos meus familiares:

Pais, pela vida e pelo zelo com que a acolheu e que me fez homem ; Filhos e esposa pela abnegação e apoio que tornaram possível este trabalho desde seu projeto até este momento.

AGRADECIMENTOS

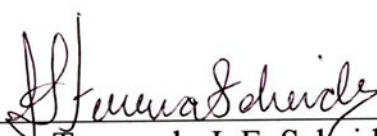
À Professora Tereza, minha orientadora, que soube respeitar a liberdade de criação, ao mesmo tempo que incentivava no caminho das melhores opções.

Ao professor Paulo Ghuiraldelli Jr. que muito me incentivou na busca de novas sendas do conhecimento e no aperfeiçoamento do que bem pouco possuía;

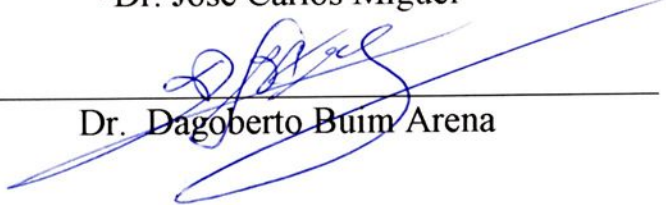
Aos amigos do Grupo de Estudo e Pesquisas “**Filosofia, Sociedade e Educação**” da UNESP Campus de Marília;

A Beethoven por ter criado uma das mais belas obras musicais de todos os tempos, a Nona Sinfonia, ao som da qual desenvolvi, praticamente, todo este trabalho;

Banca examinadora


Dra. Tereza de J. E. Scheide


Dr. José Carlos Miguel


Dr. Dagoberto Buim Arena

SUMÁRIO

1- Introdução.....	08
1.1- Metáfora.....	11
1.2- A Pesquisa.....	14
2- As Mudanças – As Revoluções Científicas.....	18
3- A Curiosidade de Saber – As Origens.....	28
4- Calculando Áreas	52
5- Cubagem de Madeira ou Cubicando Madeira.....	85
6- Conclusão.....	98
7- Referências Bibliográficas.....	114
8- Anexos.....	122
8.1- Questões Propostas	123
8.2- Relação Entre algumas Fórmulas de Cubagem de Madeira.....	128
8.3- Agulha de Buffon	131
8.4- Abelhas e Favos	133
8.5- Reconfiguração e transformação.....	138
8.6-As Formas Geométricas e Natureza.....	141
8.7-Áreas e Perímetros e Construções.....	144
9- Resumo.....	147

*Qual será o absurdo de hoje que será
A verdade de amanhã?*

Alfred North Whitehead (1925)



INTRODUÇÃO

Não estive lá
Não vi
E hoje sei
Faço o que muitos fizeram
Sem os conhecer
Minha mente e meu corpo
Estão impregnados
De sons e imagens de outros tempos
E os meus atos os revelam
Quase com uma inconsciência desejada.

O questionamento que se apresenta na elaboração deste trabalho, num primeiro momento, é a matemática como um todo, num contexto histórico-social, depurando-a à medida que, no seu desenvolvimento, encaminha-se para um ponto de convergência, seu **noyau dur**¹: a **geometria**; não aquela com postulados ou axiomas, definições, teoremas, transformações geométricas, etc. dos compêndios utilizados nas universidades, pelos intelectuais ou, ainda, nas escolas com currículos elaborados por equipes "treinadas" para esse fim com normas estabelecidas por lei ou consenso de uma maioria, podendo, também, ser determinado pelo poder ou interesse de certos grupos hegemônicos.

¹. Núcleo duro, ponto fixo, ponto de convergência.



Os currículos conforme exposto implicam na existência de escolas organizadas, não só como as que se tem na atualidade, com classes e professores individuais, com programas distribuídos por determinado período de tempo e objetivos mais ou menos bem delineados, na direção deste ou daquele conhecimento, mas também nos moldes das escolas de determinados momentos históricos, diga-se por exemplo, das escolas de formação de sacerdotes mantidas pelo clero, onde poderia não existir um currículo prefixado por lei, escrito, mas seus objetivos eram bastante claros: a formação dos agentes propaladores da palavra de Deus e, para isso, baseavam-se na escrituras, que acabavam sendo suas leis, não estabelecidas, entretanto, por organizações governamentais.

Mesmo as escolas do tipo aristotélica (peripatética), da academia de Platão, dos sofistas, e mesmo de outras tantas que surgiram no passar dos séculos, parecem ter surgido com finalidades, senão imediatas, a médio ou a longo prazo. O objetivo da escola grega, por exemplo, era o desenvolvimento do raciocínio, da formação do filósofo e, muito mais evidente, isso acontecia com a matemática.

Com a intenção de mais informar, de forma rápida, vê-se que percorrendo os meandros da história da educação, o surgimento do *currículo* é identificado com a reforma protestante de final do século XVI,

mais especificamente com o calvinismo. Possivelmente o termo teria sido utilizado em 1582, nas escriturações da Universidade de Leiden (Holanda), mas o primeiro registro que dele se constata é, segundo o *Oxford English Dictionary* (*Apud HAMILTON: 197*), o de um atestado de graduação outorgado a um mestre da universidade de Glasgow Escócia , em 1663 (SAVIANI, 1994, p.39).

Como se pode ver, a escola organizada com a idéia de unidade, ordem e seqüência para imprimir maior organicidade ao ensino é, relativamente recente, se se comparar com o período todo da história conhecida da humanidade. Muito do que se sabe hoje é legado de uma tradição, transmitida de pais para filhos, pelos chefes de uma comunidade ou tribo, sem registro escrito ou qualquer forma de código, quando muito através de pinturas em pedras e similares.

Aprender é apropriar-se da realidade presente e isto não se faz *sem que se estabeleça relações* entre o objeto dessa realidade posto a disposição para ser apreendido (de forma intencional ou não) e o sujeito(?) disposto a apreender (ou aprender). O ser humano detém o conhecimento adquirido e o amplia a todo instante através das escolas organizadas com currículos e programas como aludidos anteriormente ou por qualquer outro processo organizado intencionalmente ou, ainda, de forma espontânea, não intencional. A realidade a ser apreendida



apresenta-se das mais variadas formas dependendo da necessidade do aprendiz, de suas expectativas e das possibilidades de apreende-la, condicionadas geográfica e historicamente, dentre outras. Isto elimina as suposições de dicotomias ou dualismo entre os saberes, pois apreendo aquilo que está disponível naquele momento e lugar ou o que permitem (quem?) que eu o apreenda.

1.1. METÁFORA

Algo parece ter ficado para trás, como se a cauda de um cometa tivesse se desprendido de sua cabeça e permanecida lentamente em movimento, enquanto essa cabeça, como que recebendo um impulso extra para manter constante a conservação da quantidade de movimento, aumentasse sua velocidade, compensando a perda de massa, distanciasse cada vez mais daquela cauda desnecessária, mesmo que esta ainda permanecesse, aparentemente perdida no espaço e que para conhecê-la tornar-se-ia necessário perscrutar com a luneta do tempo, de volta ao passado ou procurar nos historiadores a sabedoria de seu paradeiro ou, ainda mais, esperar em algum ponto do espaço, fora do seu sistema de referência, numa tentativa de vê-la passar. A analogia exposta acima, pode muito bem significar ou representar onde se quer

chegar. Observe que não se dá ênfase à cabeça do cometa, mas cita-se sua existência para contextualizar a importância da cauda; assim, também, a matemática como um todo e suas conquistas não é o ponto de referência, mas o contexto e, nem o mais relevante, mas sim adquire ou dá-se essa importância à **geometria**, não a elaborada por Euclides ou formalizada por Hilbert, mas aquela de uso no dia a dia, que não faz parte da cabeça do cometa e ficara à deriva como que perdida no tempo e no espaço, mas que, ainda caminha como se se arrastasse e que brilha de tempos em tempos.

Qual o objetivo desse apêndice da matemática que ficara restrito a grupos, cujos conhecimentos não alcançaram e, nem tampouco puderam fazer parte da cabeça do cometa, ou seja do conhecimento sofisticado, formalizado, dos intelectuais, acadêmico, posse de poucos “privilegiados”? Parece, essencialmente prático e imediato, como poderá ser visto nos capítulos seguintes, que o uso dessa geometria popular, pária de uma ciência com grande elaboração teórica, **a matemática**, como a imaginada pelos gregos e seus seguidores foi postergada pela sociedade intelectual; essa matemática do povo, parece resistir com o passar dos tempos, desde as mais remotas épocas, nas mais diferentes raças.



Não seriam, porventura, determinadas práticas, a exemplo dessa geometria do povo, utilitária, que permaneceram à margem do saber erudito e organizado em escolas com currículos ou mesmo antes da existência deste, da forma como é conhecido modernamente, frutos de um substrato inato que compõe a estrutura da mente humana que é transmitido geneticamente de geração a geração e que aflora espontaneamente, por *insigth*, naqueles momentos onde se exige determinadas formas de comportamento ? Ainda pode-se pensar *que* muito daquilo que o homem faz ou que o tem em potência é determinado por uma espécie de *inconsciente coletivo*. Outras suposições, como a *imitação*, poderão ser consideradas e, quisesa que alguma ou algumas delas, em seu conjunto, pudessem fornecer respostas a essas indagações.

Uma outra hipótese é a de que o conhecimento é objetivo e se encontra fora do sujeito e, para alcançá-lo precisa-se descobri-lo, buscá-lo onde se encontra, já pronto e imutável. Pensando dessa forma cair-se-á no platonismo caracterizado pela dualidade de mundos: o das idéias e o sensível, dos quais se fará breves comentários nos capítulos seguintes.

1.2. A PESQUISA

Desenvolver-se-á, preferencialmente com maior ênfase nos municípios de Clementina e Penápolis, noroeste do Estado de São Paulo, região essencialmente agrícola, propícia para os fins desejados, como ficará claro durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Como desenvolver uma pesquisa para investigar aquilo que permaneceu durante séculos ou mesmo durante milênios, desde a época dos caldeus, babilônios, egípcios por toda a idade antiga e média, atingindo a idade moderna até a presente data, quase totalmente inalterado, ou em alguns casos guardando uma incrível relação de identidade ? Obviamente não se tem, ainda, uma máquina do tempo com a qual se poderia visitar *in locus* essas regiões mais povoadas das civilizações passadas, mas pode-se investigar as práticas das civilizações atuais que repetem os mesmos procedimentos praticados a centenas de anos e buscar nas obras dos historiadores, antropólogos e descobertas arqueológicas, nos trabalhos de decodificação e leitura de papiros, tablitas, pinturas em cavernas ou pedras, paralelos entre as diversas práticas.



Além das fontes já aludidas, desenvolver-se-á com proposta de questões de caráter essencialmente geométrico elaboradas pelo orientando distribuídas a pessoas com características de usuários (ou supostamente usuários) dessas mesmas práticas, a serem resolvidas, que serão afixadas ao final deste trabalho, em forma de anexos, de entrevistas com indivíduo ou grupos de pessoas com diversos níveis culturais, como trabalhadores rurais, pedreiros, agrimensores, alunos de vários graus de ensino, professores, além de outros que oferecerem condições para levar a cabo tal projeto. A pesquisa, pode-se dizer, caracteriza-se mais pelo aspecto qualitativo. Na verdade, nas entrevistas ou nas formas de contato estabelecidas com os participantes das resoluções das questões houve diálogo e trocas de informações. Em alguns momentos, algumas questões foram trabalhadas em sala de aula no curso de Matemática, na FFCL de Penápolis, principalmente com uma turma de fim de curso; alunos do ensino fundamental e médio de escolas públicas, também foram questionados, eles próprios, envolvendo seus pais, outros parentes ou amigos.

Os anexos, na realidade não fazem parte do corpo do desenvolvimento deste projeto ou pesquisa, mas ilustram a utilidade da matemática, em especial a geometria, quer pela própria natureza, pelo ser humano ou pelos animais (*abelhas, nautilus, cupins, etc.*), os seus aspectos estéticos, até mesmo se se pretender, traçar uma linha de



desenvolvimento do alcance ou evolução, comparando as manifestações matemáticas (duas formas de representação, com graus diferentes de complexidade e de elaboração; não há aqui a intenção de fazer configurar um dualismo, uma separação, como se duas matemáticas existissem isoladamente e sem qualquer relação entre si.): a *formalizada*, usada pelos teóricos da matemática, pelas escolas de forma intencional e a *popular* do “dia-a-dia”, usada pelas civilizações primitivas e, que ainda permanecem até os dias atuais, em uso, por muitas comunidades espalhadas em todo o planeta, conforme trabalhos de muitos pesquisadores. Cita-se como exemplo, Paulo Gerdes, em Moçambique, Knijnik com pessoas do MST (Movimento dos Sem Terras, no Rio Grande do Sul – Brasil) e a própria experiência do autor – orientando - desta pesquisa. Qual o motivo, a razão dessa pesquisa? Por que desenvolvê-la? Por simples prazer ou curiosidade? Há uma expectativa de que venha a ser utilizada para fins de ensino-aprendizagem? Tentar-se-á no desenvolvimento deste trabalho, senão responder de modo explícito, claro, sugerir linhas de conduta ou posturas assumidas que permitem ao interlocutor apreender as razões pretendidas, que não é senão resgatar, historicamente, práticas relacionadas com a geometria, que permaneceram ao longo da história, em quase todos os pontos do planeta onde foram pesquisadas (não especificamente neste momento) intactas ou quase isso, nas suas mais variadas utilizações, pelos mais diversos povos. Inicialmente, a pesquisa foi movida pela simples



curiosidade (motivadora e geradora de descobertas e revoluções) de comparar, em diversos momentos, com o perpassar histórico, o que dos povos antigos ainda resistia e permanecia vivo e uso, especialmente de caráter matemático e geométrico. Ao lado disso pretende-se sugerir a utilização dessas práticas, não só espontaneamente, mas como desencadeadoras de ações educativas intencionais, levadas a cabo pelas entidades educacionais (escolas, etc.), como resgate da história das civilizações e da própria história da matemática.

Tudo indica que em determinado momento histórico existia uma só forma de representação dos fatos, fenômenos, objetos e conhecimentos matemáticos, que com o passar dos tempos e sua natural evolução, decorrente, provavelmente das necessidades de sobrevivência dos povos primitivos, certo repertório matemático evoluiu de modo intencional, enquanto outro permaneceu quase que intacto, até os dias atuais, atendendo apenas à pragmaticidade exigida para a manutenção da vida. Parece ter havido nesse distanciamento de repertórios uma espécie de *crise* no seio da própria matemática (muitos historiadores da matemática e também matemáticos não consideram esse distanciamento uma crise, mas um afastar-se sem perturbações, sem quebra de paradigmas). No próximo capítulo tentar-se-á discutir razões para julgar as crises e mudanças de paradigma, não só da matemática, que deverão ratificar tal hipótese.



AS MUDANÇAS – AS REVOLUÇÕES CIENTÍFICAS

A reverência à antiguidade, o respeito à autoridade de homens tidos como grandes mestres de filosofia e o geral conformismo para com o atual estágio do saber e das coisas descobertas também muito retardaram os homens na senda do progresso das ciências, mantendo-os como que encantados (BACON, 1997, p. 65-66).

Vive-se hoje, numa época, onde o moderno, torna-se obsoleto amanhã, ou mesmo após alguns instantes. As mudanças, as *Revoluções Científicas*², nem sempre, no transcurso da história das ciências ou de outros campos do conhecimento humano, tiveram um desenvolvimento tão rápido. A dinâmica dessas transformações têm se manifestado, de modo mais ou menos célere, logo depois da primeira revolução industrial e com muito mais intensidade e rapidez com o advento da terceira revolução. Até às voltas da primeira metade do século XVIII, os rompimentos com paradigmas estabelecidos, aconteciam parcimoniosamente, principalmente nas áreas das ciências da natureza (é óbvio que esses rompimentos não se faziam de forma totalmente independente da filosofia e de outras *ciências* que lhes davam sustentação ou sofriam suas conseqüências. É clássico o exemplo da matemática de Euclides contida nos **Elementos**, obra constituída de 13



volumes, cuja utilização, como ferramenta de ensino perdurou por quase dois mil anos, com pouquíssimas alterações. Salvo algumas tentativas, hoje, sabidamente, de grande vulto, de criação das geometrias não-euclidianas por Lobatchevsky, Bolyai, Riemann e Gauss, mais especificamente, somente na passagem do século XIX para o XX, com Hilbert, que a geometria contida nos Elementos de Euclides, teve um tratamento que lhe deu, de certo modo, uma fisionomia mais didática e rigorosa, preenchendo algumas lacunas encontradas nessa obra *genial*. Quanto a Teoria dos Números e a Álgebra elementar, menos evidentes e de pouca intensidade, foram as mudanças e alterações em relação à obra do matemático grego; em alguns casos, até hoje, repetimos seus ensinamentos, oral ou graficamente.

Um outro campo de conhecimento, considerado por muitos como Ciência, (principalmente na antigüidade e, diga-se de passagem, uma das mais antigas criações da humanidade) modernamente taxada de charlatanismo, devido a exploração por parte de espertalhões e da mídia: a **Astrologia**, nascida, provavelmente de observações estatísticas das configurações dos astros e de acontecimentos repetitivos, nesses períodos, que fortuitamente ou de forma causal se faziam mostrar. A Astrologia poderia até ser interpretada como uma *Cosmologia Social*, ao

²A conotação de Revoluções Científicas é a mesma dada por Thomas S. Khun na obra: As Estruturas das Revoluções Científicas.



mesmo tempo que tentava causar e explicar a ordem (ou desordem) do Universo e colocava o homem e suas vicissitudes como subordinado dos desejos desse mesmo Universo e de suas configurações.

Muitas são as causas, sociais, políticas, de insuficiência tecnológica e..., que geraram essa estagnação ou indiferença na busca e criação de novos conhecimentos. Este trabalho não tem por fim específico, explorar esse aspecto. Alguns comentários ou citações poderão esclarecer. O próprio Aristóteles já afirmara que o conhecimento que se havia conquistado era suficiente para se ter uma vida, vivida de forma não ambiciosa.

Por volta dos anos 400 de nossa era, Santo Agostinho, bispo católico, de Hipona, África, teve por bem dizer que: *"El buen cristiano debe estar alerta en contra de los matemáticos y todos quienes hacen profecías vacuas. Existe el peligro de que los matemáticos tengan pacto com el demonio y la misión de ofuscar el espíritu del hombre para confinarlo en los linderos del infierno"* (Kline, 1992,p.11).³

Vale a pena, ainda , observar, logo adiante, na mesma página, em Kline, o que os juristas romanos decretaram conforme o

³. O bom cristão deve estar alerta contra os matemáticos e todos aqueles que fazem profecias . Existe o perigo de que os matemáticos tenham pacto com o demônio e a missão de ofuscar o espírito do homem para confiná-lo nos limites do inferno.

Código de matemáticos e fazedores de mal: *“se prohíbe aprender a arte de la geometria, arte tan condenable como las matemáticas, y así también tomar parte en ejercicios públicos”*.⁴

Em fins do século XVII, com a afirmação da Física Clássica elaborada por Sir Isaac Newton, em primeiro plano, com a descoberta da Lei da Gravitação Universal, era praxe no seio das comunidades científicas dizer que após Newton nada mais havia para ser descoberto, tanto que, somente (?) nas primeiras décadas do século XX, após os trabalhos de Einstein e outros expoentes das ciências naturais ou da própria física, especialmente, com o advento da Física Quântica e suas aplicações nos diversos segmentos das atividades científicas, aconteceu aquilo que poderíamos chamar de a “Segunda Revolução” científica (melhor seria dizer uma outra revolução). Talvez um dos grandes e bastante significativo movimento tenha ocorrido com a quebra e substituição do paradigma imposto pela Teoria Geocêntrica de Ptolomeu, pelo paradigma do Heliocentrismo descoberto e divulgado por Nicolau Copérnico e Galileu Galilei; aquele corroborado com bases metafísicas e pelo interesse do clero em fazer a Terra centro do Universo, onde habita o homem, suprema criação de Deus, criado à sua imagem e semelhança e, este, elucidado pelos novos métodos da Ciência Moderna, de cunho experimental. Tal como nas Ciências da Natureza (a *Phýsis* dos gregos),

^{4 3}. Proíbe-se aprender a arte da geometria, arte tão condenável como as matemáticas e assim como tomar parte em exercícios públicos.



também na Filosofia , que para muitos não se relacionam de forma alguma, ocorreram revoluções que marcaram épocas e mudanças de comportamento e modo de pensar da comunidade humana. A primeira grande revolução na filosofia foi a saída do mito para a razão, consolidada só muito mais tarde, com os gregos, Sócrates, Platão e Aristóteles. Salvo alguns movimentos, de não muita expressão, duas grandes revoluções ocorreram no final do século XVI e início do XVII, com Descartes e, com Kant no século XVIII. Esta última foi denominada "A Revolução Copernicana" (ou copernicana) da Filosofia. A tônica do novo paradigma kantiano é a busca de alternativas para tirar o homem de sua minoridade, conforme podemos observar em: *"O que é o Iluminismo? : A saída do homem da sua minoridade, da qual é ele próprio o responsável. Menoridade, isto é, incapacidade de se servir do seu entendimento sem direção de outrem, minoridade da qual é ele próprio responsável, já que a sua causa reside não num defeito do entendimento, mas numa falta de decisão e de coragem de se servir dela sem a direção de outrem. "Sapere aude!"(saber ouvir!) Tem a coragem de te servires do teu próprio entendimento. Eis aí a divisa do Iluminismo"* (KANT, Apud, Aranha, 1993, p.175).

Século das Luzes, Ilustração, Iluminismo ou *Aufklärung* cujas designações sugerem o otimismo no poder da Razão em reorganizar o mundo dos Homens. É preciso ressaltar que os momentos de crise que

precedem as substituições de paradigmas, não acontecem isoladamente, mas enovelam-se num emaranhado de relações factuais; Essa inter-relação parece criar uma atmosfera propícia para que fatos sociais, econômicos, políticos, religiosos e muitos outros que se enredam numa sucessão de acontecimentos, catalisadores dessa mesma crise, provocando uma ruptura entre o já estabelecido (paradigma), acarretando, conseqüentemente sua substituição, capaz de responder às indagações que geraram a tal crise. A História do desenvolvimento humano está cheia de exemplos bastante ilustrativos. Se se atentar apenas para um desses exemplos, para não ser prolixo, percebe-se claramente esse enredamento, em fins do século XVIII, quando, principalmente, as ciências físicas já se ancoravam nas teorias de Newton (dito anteriormente), adquirindo um tom de normalidade khuniana; no campo da Filosofia acontecia a revolução copernicana (ou copernicana) com Kant, na política A Revolução Francesa, (diga-se se passagem, era uma das preocupações de Kant, querer saber o que acontecia na França), além de outras, a Música teve, nessa época, um dos períodos mais fértil com grandes compositores do porte de Beethoven. Um outro aspecto desse clima de favorecimento de criações artísticas, científicas, sociais, etc. é o desenvolvimento de idéias ou de aplicações dessas idéias nos mais variados domínios do conhecimento. Veja, a esse respeito, o que diz Rosmorduc: "(...) a ciência e a teoria científica são **produtos históricos**. Uma interpretação surge em dado



momento, e não em outro qualquer, porque estão reunidas as diferentes condições para a sua elaboração. Esta afirmação é ilustrada pela multiplicidade de casos em que as descobertas têm datas muito próximas, feitas por dois sábios que, segundo todas as probabilidades, ignoram os trabalhos respectivos" (Apud. TENÓRIO, 1991, p.15).

Embora este aspecto não seja o objetivo primeiro deste trabalho, acaba sendo o reverso da moeda, que compõe essa mesma moeda, formando uma unidade completa. Dois exemplos, dentre muitos, são bastante ilustrativos. É fato sabido de quase toda comunidade matemática, os trabalhos independentes de Leibniz e Newton, da (re)descoberta⁵ (ou criação, pois estes conceitos dependem da corrente filosófica que se adota) do Cálculo Diferencial e Integral. É bom lembrar, que embora o modo de apresentação de Leibniz fosse mais prático e didático, Newton, em primeira mão, é considerado o Pai do Cálculo. O segundo exemplo acontece com a teoria do Determinantes. Por volta de 1693, Leibniz trabalhava com o desenvolvimento do que hoje conhecemos como Determinante; sabe-se, que cerca de dez anos antes , no Japão, Seike Kowa, também se dedicava ao mesmo tratamento.

⁵ A alusão ao (re)descobrimto, pois é muito provável que tanto Newton quanto Leibniz é de supor que tinham do Cálculo Diferencial e Integral, talvez não venha a dar o verdadeiro significado do que realmente aconteceu conhecimento do *Método da Exaustão* de Arquimedes, este que nasceu por volta do ano 287 antes da era cristã. Talvez o próprio Arquimedes tivesse dado um tratamento **mais moderno** se pudesse fazer uso de uma linguagem adequada ou próxima da nossa onde as anotações e simbologias favorecessem a expressão de suas idéias.

Com certeza outras “coincidências” ocorreram e, ainda, ocorrem nas demais ciências, na Literatura, etc. que de certa forma concorreram e concorrem para se ter uma visão menos maniqueísta do mundo como um todo ou de certos aspectos que despontam de maneira relevante. Por outro lado, não de forma simétrica e contraditória alguns afazeres dos homens, ciências ou mitos, conceitos ou técnicas, permanecem ao longo dos tempos quase que inalterados, adquirindo um caráter de *normalidade científica*⁶ conforme MOREIRA E AXT, comentando as idéias de Khun que : “*Os períodos de “ciência normal” são caracterizados pela adesão estrita e dogmática a um paradigma . Um sentimento de confiança de que o conhecimento existente para resolver os problemas com os quais se confronta, toma conta da comunidade*” (1991,p.50).

Como exemplo de Ciência Normal , temos a Astrologia (da qual já fizemos referência) uma das mais antigas parceiras do homem, que o acompanha desde os primórdios da humanidade como forma de explicação e descrição do mundo. Se se pensar a Astrologia como um corpo, pode-se dizer que as mudanças ocorreram mais nos acidentes, com a informatização, a descoberta de outros astros e o modo de suas influências, tal como a ação gravitacional e seus efeitos no ser humano e nos demais seres orgânicos ou não, permanecendo a substância do

⁶ Ver em Khun As Estruturas das Revoluções Científicas.



mesmo, *a priori*, imutável (?)⁷. Da Astrologia, como que sua derivada imediata, a Astronomia, durante a Idade Média, com a prevalência do paradigma do geocentrismo, permaneceu por esse longo período de tempo, quase sem alteração dos conceitos, como ciência; é importante notar que, ainda hoje, para aqueles que não possuem um conhecimento científico ou concepções sistematizadas a respeito do Universo, procedem como se o Mito predominasse sobre a Razão e o conhecimento empírico, miscigenado de teor religioso, pudesse descrever e explicar os fatos do cotidiano como os que promovem grandes alterações, a ponto de comprometer teorias já estratificadas. Este aspecto, da permanência, por um grande período de tempo, de certas formas de ocorrências ou mesmo de teorias corroboradas ou não pelo saber científico ou popular é muito relevante para o desenvolvimento deste trabalho.

A aparente falta de relação deste capítulo, neste momento, com o desenvolvimento da pesquisa, não significa algo solto, isolado do contexto, mas tem a intenção de situar o objeto da pesquisa, sua criação histórica e a interdependência que guarda com os outros saberes, diretamente ligados à matemática, de forma explícita ou não. As práticas

⁷. Na ciência normal não ocorre a permanência absoluta de um paradigma, mas pode acontecer que apêndices complementares de novas formulações venham a ser acrescentados sem, contudo, alterar os conceitos fundamentais.



populares da matemática anteriormente referidas que serão consideradas, a todo momento, daqui em diante, guardam as mesmas relações de **produção histórica**, acima mencionadas por ROSMORDUC, além de que, a tantas revoluções ocorridas nas Ciências Naturais, Humanas, etc. não teriam tido o porte registrado pela História se não houvesse o distanciamento entre as duas formas de fazer matemática ou seja a *popular* e a *acadêmica ou escolar*. Por isso nada mais justo e coerente tratar esse distanciamento, também, como uma **Revolução**. Dentre tantos, basta um exemplo, já comentado neste texto para certificar deste dito: a criação das geometrias não-euclidianas surgiram devido à crise estabelecida nas tentativas de se demonstrar a dependência (seria um teorema) do quinto postulado de Euclides em relação aos quatro outros, seus antecessores. Essas tentativas foram frustradas, mas daí nasceram essas outras geometrias, das quais, hoje, se considera a geometria euclidiana um caso particular. Não resta dúvida de que um paradigma foi mudado ou retificado, em parte substituído por outro mais geral, capaz de elucidar aquilo que o anterior se declarava impotente. Se em relação à geometria de Euclides as não-euclidianas já configuram uma revolução, muito mais então em relação às práticas milenares pesquisadas neste texto. Ainda se se atentar para a grande transformação causada pela Revolução Industrial, com o uso dos teares a vapor, no aumento da produção, na maior presteza nos atendimentos aos pedidos solicitados pelo comércio, além de outras, não se pode negar que houve, realmente,



uma revolução, uma troca ou substituição, pelo menos parcial de um paradigma, no sentido abordado no texto. No entanto pode-se também observar que os teares pré-revolução industrial não foram abolidos, mesmo na atualidades, algumas pessoas ainda os usam, assim como a matemática popular não foi abolida por completo, permanecendo em uso por muitos, em diversos lugares do planeta, embora a matemática, dita formalizada, acadêmica tenha tido um grande salto em termos de desenvolvimento e descobertas.



A CURIOSIDADE DE SABER – AS ORÍGENS

Uma das grandes curiosidades do ser humano é saber de onde vêm as coisas, suas origens, qual o processo envolvido na criação ou descoberta deste ou daquele fenômeno. As ciências são organizadas, mais ou menos nesse sentido, partindo das causas, analisando as ocorrências do presente, para formular hipóteses e previsões. As nossas inferências, não dos fenômenos deterministas (mesmo essas precisam de corroborações), quando justificam ou ratificam certos fatos, determinam se um paradigma tem prosseguimento como “verdade ” , adquirindo um caráter de *normalidade científica*, mesmo que por períodos de tempo pouco duradouro ou se deve ser substituído ou implementado por novas reformas, senão por quebras de estrutura . O exposto acima, sobretudo o seu caráter histórico, é de notável interesse educacional e pedagógico, como elemento motivador dos procedimentos e estratégias da educação. Alguém já disse, certa feita, e não foi possível localizar a fonte, *"que para ser bem sucedido em qualquer empreendimento que se pretenda ensinar, deve-se seguir seu desenvolvimento histórico"*. Talvez não seja preciso interpretar tão ao “pé da letra”, mas o que a experiência tem demonstrado não coloca em dúvida o valor do que expressa a aludida citação.



Neste momento visa-se colocar em pauta uma das origens mais questionadas e, também, muito rica em sugestões e hipóteses sobre seu alvorecer. Fala-se da matemática e, em especial, a Geometria, a mais diletta e, se não a mais detestada, a bastante incompreendida fração que compõe as matemáticas, tal como é vista desde dois ou três séculos passados, ou quem sabe em outros períodos da história. A mais diletta porque contribuiu com a reflexão dos sábios e filósofos, principalmente dos gregos dos primeiros séculos antes da era cristã, para a descrição do universo ao seu redor, tanto como para construir suas cosmologias. Célebre é a frase escrita no pórtico da academia platônica: "*só entra quem for geômetra*". Também famosa é a história ou lenda que diz sobre o rei que "*tendo folheado os Elementos de Euclides perguntou esperançosamente ao mesmo se não havia um caminha mais curto para aprender geometria, ao que Euclides severamente respondeu: "Em geometria não há estradas reais"*" (AABOE, 1984,p.57).

Esse mesmo episódio é contado por Stobeo sobre Alexandre Magno e pelo matemático Menécmo, o que parece justificar seu valor histórico.

A detestada ou incompreendida por aqueles que não conseguiram absorver a beleza que lhe é própria ou imanente, ainda



porque lhes faltam ou faltaram aquela dose de heroísmo daqueles que ousam penetrar numa seara de grande complexidade e, de não menos, em grandeza, de atributos estéticos e tantos outros que se perderia em enumerações.

Na atualidade, o descaso com que é tratada, não é tanto por não venerar os atributos acima mencionados, e nem tanto pela falta de contato com a mesma, pois os nossos passos não se desvencilham do seus engodos e os nossos olhos não conseguem se afastar do seu *canto de sereia*, mas essa atração parece ser insuficiente contra os obstáculos impostos por uma sociedade teleológica, imediatista e pragmática, que herdara daquele discípulo de Euclides que logo após ter superado a primeira proposição dos Elementos, perguntou para que serviria o que acabara de aprender, provocando no geômetra grego a reação de chamar um seu escravo e pedir que entregasse ao aprendiz umas moedas, pois este precisava receber os frutos daquilo que aprendera. Ainda, um outro fator de contribuição para o fracasso da geometria é o descaso dos construtores de currículo e dos autores de livro didático que colocam esse ramo do saber no final dos livros, porque se o tempo não for suficiente para cumprir com a programação instituída, pouco será o prejuízo. Essa é a concepção de muitos supostos educadores e representantes da educação. Kline já observara que: *“A maioria dos autores de compêndios parece acreditar que os escritos*



científicos devem ser frios, sem vida mecânicos e secos. Estes livros não têm autores. Não são apenas impresso por máquinas; são escritos por máquinas...O fato mais desconcertante sobre muitos textos matemáticos tradicionais é que lhes falta originalidade e repetem uns aos outros constantemente... Apenas a ordem dos tópicos é diferente” (1976, p28-29). Essas cópias que se multiplicam, escritas por autores quase sempre não muito bem preparados, cujo único objetivo é tirar proveito de situações que lhes confirmem somas em dinheiro ou prestígio popular (isto não parece ser alcançado , dessa forma), faz com que **Lavoisier** seja parafraseado em: *hoje em dia nada se cria, tudo se copia*. Não se pode esquecer das universidades, faculdades e outros cursos de formação de professores, que quando não ignoram sua presença nas suas grades curriculares, a tratam com relativo desprezo, muitas vezes por incompetência de seus mestres. A matemática é considerada uma matéria difícil, abstrata , chata, mas precisa, exata, que se justifica pelo jargão: *“é tão verdadeiro como $a + b$ ”*; é também um referencial para a medida de inteligência das pessoas; é justificável que o aluno tenha dificuldades em matemática ou mesmo seja reprovado, mas não em história, geografia ou outras disciplinas das humanidades. O Rigor exagerado que professores, de todos os níveis, atribuem à matemática ou às coisas que com ela se relacionam, à suas aulas, tido como técnica da *pedagogia tradicional*, formalismo exagerado, obrigando ao aluno a não atribuir significado ao conteúdo supostamente apreendido, mas ser



capaz de repetir nas avaliações o “*sabidamente decorado*”, contribuem para essa espécie de aversão pela disciplina. Mais uma vez Kline, na mesma obra já mencionada é bastante incisivo: “*entre muitos autores encontram-se matemáticos superficiais e relativamente ignorantes que tomaram os tópicos simples da matemática elementar e os fizeram parecer profundos, envolvendo-os no que, para os jovens, se pode descrever tão somente como pretensioso pedantismo. Procuram com isso dar a impressão de profundo discernimento (insight) matemático. É mais fácil incorporar sofisticação em questões triviais do que dar apresentações claras e intuitivas das idéias mais difíceis. Não há dúvida de que muita coisa do rigor dos textos modernos foi inserida por homens limitados que procuravam ocultar sua própria superficialidade por uma fachada de profundidade e também por homens pedantes que mascaravam seu pedantismo sob o disfarce do rigor*” (1976,p.80-81).

Apesar de se falar tanto sobre interdisciplinaridade, neste momento histórico, a geometria não aparece como elemento de irradiação e de formação de rede interdisciplinar, um seu atributo tão presente desde o primeiro momento, daquilo que se pode dizer, *o nascimento da cultura da humanidade*. Em todos os momentos das grandes criações do homem a geometria esteve ali presente; basta observar, as grandes pirâmides, para se ter uma idéia do fabuloso projeto arquitetado por uma ou por um grupo de pessoas que não ignoravam os



conhecimentos teóricos necessários para a consecução de tal projeto(sic). Observem, também (não importa a ordem cronológica) o aqueduto de Roma, a Grande Muralha da China, a visão cosmológica de Aristóteles, os trabalhos de Euclides, de Descartes, de Hilbert, a explicação do sistema planetário de copérnico, por Kepler¹, as pinturas das cavernas e, além de uma infinidade de outras situações, os agricultores das margens do Rio Nilo e de muitos outros, e seus conhecimentos de agrimensura. No campo da cultura matemática formal, a Álgebra; a teoria dos números nasceram e se desenvolveram através de e por um percurso geométrico.

Célebre é a imagem metafórica construída por Galileu, associando o universo a um livro escrito na linguagem matemática: *“A ciência está escrita neste imenso livro que continuamente se abre diante dos olhos (refiro-me ao universo), livro que só pode ser entendido, se aprendermos antes a entender sua língua e a conhecer os caracteres nos quais está escrito. Ele está escrito em linguagem matemática e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas sem cujos meios é humanamente impossível entender-se uma só palavra; sem eles, é um vagar inútil por um obscuro labirinto”* (Apud. MACHADO, 1995, p).

¹ Na sua obra *Mysterium cosmographicum*, Kepler explica o sistema planetário, utilizando para isso configurações compostas com os cinco poliedros regulares. Encontram-se referências sobre o assunto em *A Magia do Números* de Paul Karlson, editado, em português, pela Editora Globo, Porto Alegre.

Levando-se em conta o que afirma Galileu, para o crente, o mais provável, Deus é o Grande Criador da matemática e, neste sentido, esta ficaria à disposição dos estudiosos para descobri-la, numa região do espaço físico ou ideal ou, simplesmente, constituída por uma forma de impregnação genética na mente do próprio homem, onde este poderia por um simples *insigth* através de um ato de reflexão inferencial, a partir de determinados princípios, descobrir os entes matemáticos e as leis que os relacionam, constituindo, assim a ciência tal como é conhecida, no momento atual, ou no futuro, após novas descobertas.

Num outro momento, falar-se-á, embora sucintamente, desse aspecto da matemática, comunicando algumas opiniões de matemáticos e/ou filósofos, mesmo sem tomar partido deste ou daquele, nem procurando chegar a uma conclusão de que este ou aquele tem a última palavra no assunto e é o construtor de um paradigma absoluto ou hegemônico.

Ainda hoje, lança-se mão de aparatos geométricos como auxiliar didático dos trabalhos educacionais ou como metáfora para outras comunicações. Não se pode esquecer de que a própria natureza é pródiga em exibições geométricas, tanto nas formas vivas e em suas transformações como naquilo que se pode denominar *natureza morta* (talvez muito mais viva do que se pode supor). Aliás como já se disse, a



exemplo de Galileu, *Deus é o grande geômetra* e, com certeza, fez uso desse expediente na “criação”(?) do Universo, colocando nos objetos do mundo sensível, as formas, cujas representações ideais e reais existem no Mundo das Idéias (Platão).

Na concepção de Platão, o Universo é estático e não há desenvolvimento ou criação, pois tudo que existe tem já seu protótipo idealmente formalizado num mundo ideal. Será que as conquistas interplanetárias, o progresso da informática e outros avanços sempre tiveram suas formas ideais no mundo supra sensível, cabendo ao homem descobri-las através das corporificações neste mundo contingente? Novamente se depara com a controvérsia pragmatismo/ idealismo – e seus pontos de vista sobre a existência das coisas - criação/descoberta².

Neste instante, uma pequena pausa, não para discutir, mas para expor pontos de vista de alguns pensadores e/ou matemáticos naquilo que diz respeito à visão da Matemática como algo que se constrói ou que se descobre, assim como a rota de um novo continente ou um objeto que de um momento para outro deparamos com ele em algum lugar escondido e pronto para ser colocado à vista, quando encontrado por curiosos, como simples obra do acaso ou por pesquisadores que

² Consultar obra de Nilson José Machado. Matemática e realidade –Editora Cortez, Filosofia da ciência contemporânea(OMNÈS,1994) e Computadores de papel de TENÓRIO(1991), além de inúmeras outras fontes, onde são feitas referências sobre as correntes filosóficas como o Formalismo, o logicismo e o Intuicionismo.



buscam alguma coisa que pressente existir por razões não muito claras ou, ainda, através de uma rede de raciocínios lógicos, formalizado como resultado de inferências obtidas, posteriormente ao estabelecimento de axiomas ou postulados, na construção de uma teoria.

Algumas considerações sobre essa controvérsia aparecem em vários momentos da história no pensamento de muitos matemáticos e filósofos e algumas delas são apresentadas abaixo. Tal dilema parece ter inspirado Descartes, num trecho da sua Quinta Meditação, que vale a pena mencionar: *“Quando imagino um triângulo, ainda que talvez não haja em nenhum lugar do mundo fora do meu pensamento uma tal figura, e nunca tenha existido, ela porém não deixa de uma certa natureza, ou forma, ou essência determinada dessa figura, a qual é imutável e eterna, que não inventei não depende de modo nenhum de meu espírito; como parece pelo fato de que podemos demonstrar diversas propriedades desse triângulo”* (Obras Escolhidas: DESCARTES, 1994,p.171).

Numa carta para Stieljes, Hermite também dá sua opinião, quando diz *“Creio que os números e as funções da análise não são produtos da mente. Acho que existem fora de nós (...)”* (Apud. OMNÉS, 1996, p.137).



Prosseguindo na fala de Hermite, é possível ver uma grande semelhança com os dizeres de Descartes, ambos comungam os mesmos pensamentos, que se ancoram no idealismo platônico, ou de outro modo como preferem alguns matemáticos e/ou pensadores, falam de um realismo matemático, postulando a existência de uma realidade à parte. Pode parecer repetitivo e de estilo prolixo, mas alguns outros depoimentos dos partidários do realismo matemático devem ser citados de modo a reforçar essa posição desses pensadores, sem no entanto, tornar-se um advogado de tal causa. Para Jean Dieudonné é “ *bastante difícil descrever as idéias dos matemáticos, que variam, aliás, de um para outro (...) Eles admitem que os objetos matemáticos possuem uma realidade distinta da realidade sensível, talvez semelhante à que Platão concedia à suas Idéias*” (*Idem*, p.137).

Ainda, nesta obra de referência, é bom tomar ciência dos dizeres de Bertrand Russell, de Alain Connes, assim como em outras várias obras versadas no assunto, com opiniões de outros matemáticos. Por outro lado, Roland Omnès afirma “*que todo realismo se depara com um nominalismo que consiste em dizer que as matemáticas são como jogos de regras complicadas, semelhante ao xadrez só que mais complicado. Essa posição nem sempre é tratada nos textos matemáticos e defendida por matemáticos. Muitas vezes, fica a cargo da filosofia em geral e, mais especificamente, à filosofia da matemática. Por exemplo, o*



filósofo André Darbon considera as matemáticas como uma construção “hipotético dedutiva” de invenção puramente humana “ (Idem, p. 142).

Além de Darbon, ainda outros defendem suas posições, amparando-se no formalismo, escola cujo representante maior foi Hilbert que, na realidade são defensores do Método Axiomático, que por si só nada justifica a questão da natureza das matemáticas. Dentre os filósofos e matemáticos que se inspiraram na escola formalista, aparecem Raymond Wilder e René Thon que ampliam de forma significativa o conceito tradicional de nominalismo, que defendem o que se pode chamar de sociologismo matemático. Estes e outros filósofos e matemáticos defendem o ponto de vista que *“as matemáticas são essencialmente o que a comunidade dos matemáticos decide fazer delas. (...) levando muito mais em conta a fecundidade das matemáticas, a qual lhes interessa sobretudo sob o ângulo da criatividade”* (OMNÉS, 1996, P.144).

O Método Axiomático, cujo primeiro tratado, parece ter sido os Elementos de Euclides, em especial, no tocante à geometria. Dependendo de onde se pretende chegar, escolhe-se este ou aquele axioma (**da palavra grega $\alpha\lambda\iota\omicron\varsigma$ que significa “fidedigno, digno de confiança”**) ou postulado, preferencialmente com um número reduzido dos mesmos e de tal forma que sejam independentes um do outro, de modo a dar consistência à teoria em desenvolvimento. Nada impede que

o defensor do realismo matemático defendia, também, o Método Axiomático, se para ele, isto também for conveniente, prestando-se para atingir os objetivos desejados. Também é clássico e muito bem conhecido o exemplo do surgimento das geometrias não euclidianas, alterando o sentido e o significado do quinto postulado de Euclides ou postulado das paralelas como vulgarmente é conhecido, quando se tentava prová-lo como se fosse um teorema (**do grego θεωρεο cujo significado é “penso, medito”**) e dependente dos outros quatro postulados. É importante ressaltar que até bem pouco tempo ninguém havia conseguido tal feito e, ao que parece, não será possível de acordo com alguns resultados que chegaram alguns matemáticos. Isto prova que nem toda perspectiva de fracasso vem mesmo a concretizá-lo e, que trabalhos aparentemente irrelevantes, grandes empreendimentos ou simples divertimentos podem, por um lado ou por outro, produzir efeitos de grande valor para as ciências, como um todo. A história das ciências está pontilhada de acontecimentos que exemplificam sobremaneira o que foi dito. As geometrias não-euclidianas representam um desses pontos.

Significativa, também era a “brincadeira” do Conde de Buffon³, quando este lançava uma agulha sobre um papel, onde retas eram traçadas, paralelamente, com uma distância entre as mesmas,

³ O Conde de Buffon era um naturalista francês do século XVIII. Escreveu *História natural* em trinta e seis volumes. Mesmo não sendo matemático, publicou em 1777 um ensaio sobre probabilidade *Essai d'Arithmétique Morale*.

menor que o tamanho da agulha, calculando a probabilidade de a agulha cair sobre as linhas paralelas, interceptando-as. Este fato, que poderia ser um passatempo do conde originou, posteriormente, além de um problema de probabilidade, com alguma alteração, o princípio da tomografia computadorizada (nesta é, como se lançassem as retas paralelas sobre a agulha – fazer cortes num tecido a fim de analisá-lo). É possível, também, através do procedimento utilizado pelo conde calcular o valor de π , ou seja 3,1415....., valor este obtido, normalmente, desde a antigüidade grega ou mesmo antes, embora de forma aproximada, pela razão entre o comprimento C da circunferência e o diâmetro D , da mesma circunferência, ou seja C/D .

A expressão utilizada para esse cálculo que segue logo abaixo foi extraída de (MACHADO, 1990,p.68):⁴

$$p = \frac{2a}{\pi d}$$

onde p é a probabilidade procurada

a é o comprimento da agulha

d é a distância entre as duas retas paralelas

π é a razão acima mencionada C/D .

4. Seu verdadeiro nome era George Louis Leclerc (1707 – 1788) tendo sido nomeado Conde de Buffon por Luis XV.

Estas poucas considerações bem que poderiam ser apresentadas em um apêndice ou anexo, mas optou-se por sua inclusão neste momento, no corpo do trabalho, por se tratar de um aspecto polêmico, imbricado com o teor da pesquisa, e a polêmica é revolucionária e a intenção é reforçar este aspecto através do caráter evolutivo da matemática gerado por diversidade de pontos “de vista”.

Após as abordagens de caráter mais ou menos geral da matemática como um todo ou da geometria, em particular, que é o ponto de partida e de chegada desta pesquisa, para uma contextualização despretensiosa e bastante superficial, volta-se ao tema ou eixo original, ou seja a tentativa de localização no espaço e no tempo de aspectos geométricos e, como consequência da própria geometria, relevantes não tanto por razões teóricas e de provocações de crise ou de mudanças de paradigmas (este é um aspecto muito controvertido) mas, ao contrário, pela permanência de práticas consagradas, não pela matemática formal, constante dos textos do grupo Bourbaki e daqueles utilizados nas universidades, onde consagram grandes volumes de informações sobre Teoria do Grupos, sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, sobre o nascimento e desenvolvimento da *Analysis Situs*⁵ e de tantos outros capítulos das grandes conquistas do gênero humano, rumo às

⁵. Inicialmente, o nome da Topologia.



matemáticas de elevadas elaborações intelectuais, mas sim, da matemática popular, praticada pelo artesão, pelo lavrador, em qualquer período da história, para medir seus campos de colheita, pelos construtores do passado e do presente na utilização empírica de determinadas técnicas.

Voltando, um pouco, ao início do presente capítulo, onde se faz referência à curiosidade natural do ser humano, em descobrir a origem das coisas, do mundo que o rodeia, quer pelo seus valores *estético*, quer pela *finalidade* com que se apresenta. Vê-se no mito a primeira tentativa de representação e de racionalização do mundo, embora se diga que o abandono do mito deveu-se à sua substituição pela razão. A conotação que se dá a essa formulação é como se o mito, de repente deixasse de existir e, somente a razão, a partir desse momento, o substituísse por completo. Sabemos não ser verdade, pois o mito ainda continua, subliminarmente ou de forma explícita, vivo, ratificando ou retificando posturas assumidas, tanto por homens das camadas culturais sem conhecimentos científicos dos fatos, habitantes das zonas afastadas dos centros irradiadores dos saberes, das tribos com formas de vida bastante primitivas, assim como das sociedades cultas. Nunca se falou tanto de mandala, horóscopo, astrologia e outras formas de teofania como nos dias atuais. Tem-se notícia de presidentes de países de primeiro mundo, empresários, etc. que consultam astrólogos ou similares antes de tomar

decisões importantes. O mito perpassa o transcorrer da história da humanidade sob as mais diversas formas, como um paradigma. Desde a antigüidade grega, passando pelos nórdicos, pelos romanos, pelas tribos indígenas ou outros povos quaisquer, não houve mudanças de paradigma, mas sim interpretações diferentes dos fatos à luz da mitologia, assim como a troca de personagens executoras ou invocadas para participar deste ou daquele fato ou de uma tarefa a ser executada. As aparências das primeiras mitologias refletem um caráter eminentemente religioso, mas a esperança do homem no Iluminismo é, em tudo semelhante, à esperança do mesmo homem quando invoca um deus para resolver seu problema. O positivismo, o ídolo de um determinado grupo social tem sempre seus homólogos em qualquer época que se pesquisar.

E o que tudo isso tem a ver com o surgimento, a origem da matemática, ou melhor, da geometria?

Os primeiros povos, os mais antigos habitantes do planeta, não tendo uma interpretação dos acontecimentos sob a ótica das leis físicas, atribuíam tudo à atividade de um ser onipotente capaz de solucionar todos problemas e de criar a partir do nada, todas as coisas. Nas mais diversas sociedades, a princípio isoladas, encontra-se as mais variadas interpretações sobre a origem do Universo (no princípio a Terra). Uma das mais conhecidas encontra-se no livro do Gêneses, do Antigo



Testamento, da Bíblia, que Deus cria em seis dias todas as coisas, de onde, antes havia somente o caos. Praticamente todas as pessoas que sabemos existir, não levando em conta a suposta existência de extra-terrestre, acreditam na criação do Universo (Terra) por via divina; outros atribuem ao Big Bang, uma outra força também tão poderosa, capaz de, através de uma grande explosão, não em seis dias, mas num determinado instante, ou a partir, dele, criar os sistemas planetários, galáxias, etc. ***Os deuses podem ter vários nomes, mesmo praticando a mesma ação!*** E antes de tudo isso o que existia? Parece haver um consenso entre as várias tribos e raças que antes do início "existia" o **caos**. Marcelo Gleiser em *A Dança do Universo*, divide os mitos em duas categorias: os mitos de criação e os mitos sem criação, aqueles admitem um início, um instante $t = 0$ para o universo, ao passo que estes admitem o universo eterno; essas duas categorias ainda se dividem em três e dois tipos, respectivamente. Não será feita uma descrição dos mesmos, mas parece que a preferência recai sobre os de criação, onde um ser todo poderoso é o responsável pelo início de tudo que existe. Em Cassirer, vê-se : *"Assim a história assírio - babilônica da Criação descreve o caos como o estado em que o céu, no alto, ainda "não tinha nome" e em que na terra, cá em baixo, não se conhecia ainda nome algum de coisa. Também no Egito o tempo anterior à Criação é chamado o tempo em que não existia nenhum deus, e no qual ainda não se conhecia nenhum nome para as coisas(...) o deus, do sol, Râ, é consignado o seu próprio criador,*

por haver dado a si mesmo seu nome, ou seja suas essencialidades e poderes (1992, p. 98-99).

Do ponto de vista da Cosmogonia, parece não restar dúvida, de que a origem de tudo é resultado de uma força poderosíssima, que cada um dá o nome que lhe convém ou baseado no dogma de sua preferência. Olhando por esse ângulo, não se vê discordância do exposto com a teoria platônica do mundo das formas perfeitas, das quais existem cópias corruptíveis no mundo sensível. Dessa forma tudo já estaria previamente determinado (*a priori*) não restando possibilidade de escolha e a *criação* de algo novo estaria, sempre, fadada ao insucesso e, aquilo que não se vê ou não se conhece estaria à disposição para ser descoberto. Prigogine cita Karl Popper no livro *O fim das certezas* e segundo Popper, o senso comum tende a afirmar “ *que **todo** evento é causado por um evento que o precede, de modo que se poderia predizer ou explicar qualquer evento...Por outro lado, o senso comum atribui às pessoas sadias e adultas a capacidade de escolher livremente entre várias vias de ação distintas...*”.⁶ Esta tensão no interior do senso comum traduz-se no pensamento ocidental por um problema maior, que William James⁷ chamou de “ *dilema do determinismo*”. Este dilema tem como desafio nossa relação com mundo e particularmente com o tempo. O

⁶ JAMES.W. *The dilemma of determinism*. In the *Will to believe*. New York, Dover, 1956.



futuro é dado ou está em perpétua construção? É uma ilusão a nossa liberdade"? (1996, p.9).

Tendo o Universo já sido criado, resta estudar as transformações culturais provocadas pelo homem e, de certa forma, essas transformações são proporcionais ao grau de cultura do povo onde se avalia esses acréscimos culturais. As finalidades imediatas eram mais privilegiadas nas paleoculturas, onde aparecem as primeiras pinturas rupestres, realizadas, provavelmente, por razões místicas (hierofanias); quando o homem começou perceber, analisar e tirar conclusões sobre os fenômenos da natureza, pode formular projetos de alcance mediano, imediato e até mesmo a longo prazo; a civilização alcançava o neolítico. Nesse período "desenvolveram-se a agricultura, a domesticação e criação de animais e a fabricação de novos instrumentos e armas. Isso fez com que já não existisse mais uma dependência total da natureza. As pinturas desse período não tentam reproduzir, com a maior perfeição possível animais, objetos e pessoas, mas mostram representações esquemáticas, em que eram bastante utilizadas simetrias e congruências. Mas por que teriam surgido essas figuras geométricas? E por que o uso de simetrias e congruências? Seria outra forma de magia? Ou teria sido a observação da natureza, tão cheia de exemplos geométricos, que inspirou essas novas pinturas?



Sabe-se que as comunidades que se destacavam ou se destacaram, avizinham-se, quase sempre, dos grandes rios, tais como Tigre, Eufrates, Nilo e outros, como na China ou em locais onde haviam civilizações das mais antigas. Ainda hoje, as comunidades nascem e se desenvolvem em locais com abundância de água.

As civilizações de que se tem mais conhecimento, de como viviam, trabalhavam, de suas ciências, embora quase sempre primitiva e rústica, são as da mesopotâmia e as que ladeavam o rio Nilo, principalmente mais próximo de sua foz, no Egito. Desta, os compêndios de história e de história das ciências e, mais especificamente, da Matemática, que mais fazem referências, chegando mesmo, Heródoto, um dos primeiros historiadores e considerado o Pai da História, mencionar em sua obra **História**, a forma como procediam os responsáveis pelas medições das terras após as enchentes que faziam com que o Nilo se tornasse uma dádiva do Egito, mas que destruíam as demarcações que limitavam os lotes de terra agricultáveis, fazendo-se necessário novas medições, após cada inundação. Eis o que diz Heródoto: *“Disseram-me ainda os sacerdotes que Ses  tris realizou a partilha das terras, concedendo a cada Egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O*

soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia” (op. cit. s/d, p.116).

Parece ter sido desta forma o nascimento da **geometria**, como princípio básico e rudimentar do grande legado geométrico que a humanidade possui, hoje.

“Segundo Aristóteles, o berço da matemática foi o Egito, o que ele atribuía ao fato de haver naquele país uma classe sacerdotal com tempo de lazer suficiente para cultivar essa ciência. Também na Babilônia, o saber matemática era propriedade de um pequeno grupo de especialistas, em geral sacerdotes” (HYGINO, Revista de Educação matemática, 1997, p. 43).

Tanto Aristóteles como Heródoto concordam como sendo o Egito o berço da matemática, embora se tenha notícias, resultante de escavações recentes que a região da mesopotâmia concorre com a mesma força na direção das origens da matemática; É bem forte a importância destinada à geometria, principalmente no Egito. Pelo que se sabe, atualmente, após escavações e pesquisas arqueológicas e mesmo antropológicas, a matemática parece ter se originado mesmo da



geometria; a Álgebra (se se puder falar em álgebra) incipiente, nada mais é do que uma formulação, de um problema ou uma questão para ser resolvida em forma de desafio, usando entidades geométricas. Pode-se dizer que se tem uma *álgebra geométrica*. Esse aspecto era bem delineado na Índia, na Grécia e em outras comunidades antigas.

Um aspecto importante, que se deve levar em consideração, é o de que, a partir de um dado momento, duas matemáticas parecem existir, e que caminham, lado a lado, até os dias de hoje. Uma, a matemática que se desenvolveu através da classe sacerdotal, que deu origem à matemática erudita, hoje formalizada, dos especialistas, que teve seu ponto culminante com os gregos, entre os povos antigos e, parece ter sido aí a origem de sua formalização e, a outra, a matemática cultivada pelos agricultores, tanto do Egito como de outras civilizações: a matemática popular. Ainda em Hygino, na mesma página,: *“A matemática dos especialistas freqüentemente é inacessível às pessoas comuns ou é difícil de usar em situações concretas, o que dá origem a métodos nem sempre corretos, teoricamente falando, mas que são práticos e levam a resultados razoáveis para o dia a dia”*.

Mas como eram medidas essas terras? O cálculo das áreas, provavelmente, de figuras geométricas simples? O que se sabe pelas informações dos historiadores, nos livros de história ou pelas tradições

que até o presente momento, se conhece, não se dispunham de instrumentos sofisticados de medidas, as civilizações antigas, algumas já citadas no texto, de modo a obter mensurações precisas. As fórmulas conhecidas hoje, freqüentemente usadas pelos técnicos e engenheiros para o cálculo de áreas e de volumes, pelo que se sabe, não eram conhecidas pelos povos da mesopotâmia e nem pelos egípcios, sabidamente estes, os que mais usavam a geometria, informações chegadas até nós, mais através de escavações como as tablitas ou tabletas encontradas nas vizinhanças dos rios Tigre e Eufrates, assim como dos papiros de Rhind e de Moscou, os dois mais importantes documentos matemáticos da antigüidade, no Egito e das Tábuas de Alkmin, além de outras fontes.

Reforçando o exposto na introdução, o objeto deste trabalho, por um lado é comparar algumas técnicas praticadas pelos povos antigos, com o que ainda hoje se pratica, por algumas comunidades, não aparelhadas tecnologicamente e verificar o que permanece, parcialmente ou em sua totalidade. Esse saber aliado às técnicas que o fez permanecer ao longo dos tempos é o que se denomina, no contexto, matemática popular. Por outro lado, sugere-se também a utilização dos elementos e resultados desta pesquisa como elementos de ações provocadoras de uma reconstrução dos saberes escolares (GIARDINETO, 1999)



CALCULANDO ÁREAS

Nada se pode afirmar quanto às formas dos lotes sujeitos a inundações e submetidos a novas medidas, posteriormente. Levando em conta o conhecimento dos povos antigos, em relação à matemática, imagina-se que figuras simples eram usadas para a configuração dessas áreas, no estabelecimento de seus limites ou divisas.

A figura geométrica mais simples, considerando o número de lados, é o triângulo, mas nem sempre (quase nunca) a que tem o cálculo de sua área encontrado de modo breve e fácil. Em muitos casos, esse cálculo seria impossível, para esses povos. Na realidade, são alguns quadriláteros, aqueles que oferecem menor dificuldade no cálculo da medida de superfície. É claro que essa referência aos quadriláteros, vale para os quadrados e retângulos, sabe-se hoje! Quando os ângulos internos desses polígonos diferem de 90° (noventa graus – ângulo reto) medir essas superfícies, não é nada simples.

Obviamente, ao se referir às cheias ou inundações, figuras geométricas, cálculo de áreas, leva-se em conta o apelo histórico expresso por Heródoto, mas nada impede que se suponha outras formas



de uso, o que equivaleria a pensar numa formalização incipiente da matemática ou , melhor, da geometria. Há casos em que as questões propostas pelos “matemáticos” do passado, encontradas pelos pesquisadores, não se referem, especificamente, a problemas práticos, do dia-a-dia, mas não cabe neste momento dedicar-se a tais indagações.

E quais eram os processos envolvidos nessas medidas, quais as fórmulas aplicadas e de onde vieram e quem as ensinou? A sua origem perde-se nos tempos e não se sabe com precisão quem primeiro as utilizou. Supõe-se que a região da mesopotâmia tenha sido o *berço da humanidade* e que, provavelmente, naqueles sítios e, posteriormente, no Egito (para Heródoto esta civilização, a egípcia, veio depois daquela) tenham sido, inicialmente, utilizadas.

Com o desenrolar da pesquisa, tenta-se encontrar, ainda hoje, procedimentos que não diferem daqueles de antigamente, usados por tribos ou pessoas remanescentes de culturas não tecnológicas, imbricadas em culturas de saberes altamente sofisticados; foram formuladas certas questões, que guardam certas semelhanças com as encontrados nos “textos antigos”, e distribuídas para um certo número de pessoas, das quais já se fez alusão anteriormente e, que se encontram nos anexos, mais para o fim deste. Se necessário, à medida que se fizer referência às mesmas serão ou não reproduzidas. Não se dará ênfase

às estatísticas, e os resultados serão mencionados como: várias pessoas, nenhuma, uma ou algumas, porque aquilo que se procura não é, propriamente *quantas*, mas sim, *o que*.

RESULTADO DA PESQUISA E SEU DESENVOLVIMENTO

Por questão, também de conveniência, e parece ter sido, historicamente, a primeira figura geométrica a ser estudada, pela sua simplicidade, o relato inicia-se pelo quadrado. Foi proposto encontrar a área de um quadrado de lado 6m. Para este caso não houve dificuldades, pois todas pessoas solicitadas a resolverem ou sugerir soluções e que entregaram o resultado das questões por escrito ou verbalmente encontraram 36m^2 , melhor dizendo 36 somente, sem a unidade, para muitos. Alguns fizeram as “contas”: $6 \times 6 = 36$. Mesmo professor, acabou esquecendo a unidade.

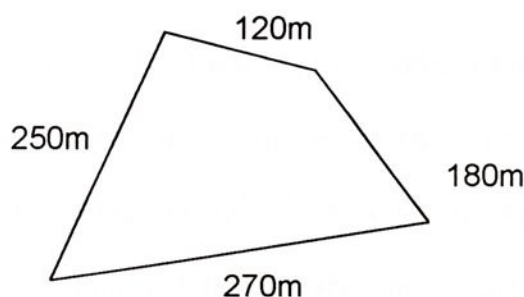
Outra questão, ainda bastante simples, um retângulo de lados 2m e 3m para o cálculo de sua área. Esta também não ofereceu dificuldades e, os que resolveram, encontraram 6, ou seja 6m^2 . Era de se supor que o cálculo não resultasse em complicadas “contas”, e todos fariam $2 \times 3 = 6$ e pronto. Uma surpresa, dois deles procederam do modo



seguinte: $2 + 2 + 3 + 3 = 10$, $10 : 4 = 2,5$ e, em seguida $2,5 \times 2,5 = 6,25$.

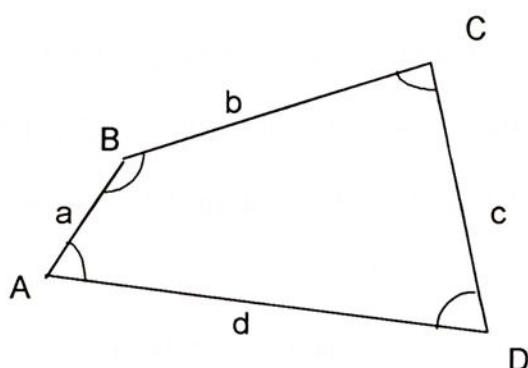
Parece que só sabiam o cálculo da área do quadrado.

Na seqüência, aparece um quadrilátero não regular:



Algumas pessoas, geralmente da zona rural ou dela procedente, alunos de uma classe de telessala do ensino fundamental, não resolveram, outras apresentaram quaisquer resultados, sem se interessar pela solução; uma outra, desse grupo, apresentou o resultado que se segue: $120 + 180 = 300$ e dividiu por dois obtendo 150; O mesmo fez com os lados $270 + 250 = 520$, dividindo por 2, obteve 260; depois multiplicou 260 por 150 que é igual 39 000, ou seja, $39\,000\text{m}^2$, registrando como a área do polígono. Perguntado sobre a razão desse procedimento, não soube responder. A maior parte das soluções, com variações de ordem apenas, apresentou o processo seguinte: somou-se apenas dois lados, dividindo os resultados por dois, por exemplo $(250 + 180)/2 = 430/2 = 215$ e $(120 + 270)/2 = 390/2 = 195$. Fazendo $215 \times 195 = 41\,925$ unidades de

área ou metros quadrados. Um outro modo, não tão usado como o anterior, segue o seguinte padrão: somam-se as quatro dimensões e divide-se a soma por 4, multiplicando posteriormente esse valor por ele mesmo, dando portanto o valor da área do quadrilátero, ou melhor dizendo a área de um quadrado equivalente. Eis os cálculos: $(120+180+270+250)/4 = 820/4$, sendo a área igual a $205 \times 205 = 42\,025$ unidades de área(m^2). Os dois resultados, esperava-se que fossem iguais, mas não o são. E agora? Qual é o verdadeiro valor da área $41\,925m^2$ ou $42\,025m^2$ ou será um outro diferente desses dois? Na verdade, nenhum deles deverá ser o valor exato(ver logo Adiante). Para o quadrilátero abaixo, o valor exato é dado por:



A área do quadrilátero = $\frac{1}{4} [ab \cdot \sin B + bc \cdot \sin C + cd \cdot \sin D + da \cdot \sin A]$ (1). É preciso, portanto que se conheça, não apenas os lados, mas também os ângulos formados por esses lados. Como nessas questões, nunca

aparecem os ângulos, não se pode afirmar, no caso em voga, qual dos dois valores da área é o mais próximo do real (?).

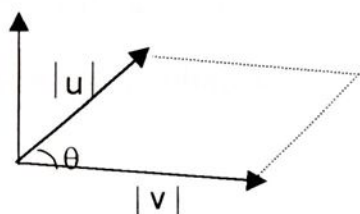
Ao primeiro modo de proceder, Knijnik chama o Método do Adão, um aluno da escola do MST (Movimento dos Sem Terras) do Rio Grande do Sul, e ao outro, Método do Jorge, igualmente aluno do MST. Knijnik também constata que o Método de Adão já era usado nos períodos ptolomaicos , romanos e cópticos do Egito, para fins de taxaço (1996, p. 35). Cita, ainda Peet e, segundo este autor, *em uma grande inscrição encontrada no templo de Edfu, construído por Ptolomeu XI, está mencionado um significativo número de campos. Em cada caso, quatro dimensões lineares são dadas, que podemos nomear por a, b, c e d, e a área é determinada pela fórmula $\text{Área} = (a + c)/2 \cdot (b + d)/2$, onde presumivelmente a e c, b e d são pares de lados opostos* (ibidem, p.35). Cerca de 15 séculos após as inscrições no templo de Horo, em Edfu, talvez o mais importante documento remanescente da matemática do passado longínquo, o Papiro de Rhind ou de Ahmés, faz referência a problemas, que levam a inferir de como eram calculadas a áreas dos terrenos doados ao templo. Guida Maria de Abreu constatou que o Método de Adão era usado pelos canavieiros de Pernambuco, o mesmo acontecendo com Isabel Soto, com comunidades rurais, no Chile. Portanto, esse método, mais que o do Jorge, parece fazer parte de um contexto, não só regional, mas sim, como um legado de povos de várias



partes do planeta, nos diversos períodos da história da humanidade. Os pesquisadores, historiadores fazem, na maioria das vezes, referências aos tempos antigos, no Egito e de povos mais antigos e, quase nunca, nos outros períodos, medievais, etc. Mais recentemente, muitas pesquisas têm sido feitas, nesse sentido, algumas já mencionadas acima. Não é possível descartar a permanência dessas práticas, permeando todos as épocas e regiões, porque senão as mesmas não chegariam até nós. Aqueles que fazem uso dessas técnicas, não as aprenderam através de livros, mesmo porque as publicações neste sentido são escassas e, quando se as tem, são de difícil entendimento. Resta apenas uma opção: a tradição oral; e isto justifica supor sua existência, como prática, em todo momento histórico. Para a área do paralelogramo foi perguntado a dois ou três daqueles que utilizaram do Método do Adão e estes responderam que deveriam aplicar o mesmo “jeito” dos outros, os quadriláteros.

A área máxima de um quadrilátero, paralelogramo ou quadrado, acontece quando o seno do ângulo constituído pelos dois lados que o forma mede 90° e, ainda mais, para o caso do paralelogramo (retângulo, neste caso), se os quatro lados forem congruentes, mantendo-se o perímetro constante. Veja figura.





onde, através da fórmula da área, como segue, deduz-se que se $\theta = 90^\circ$, obtém-se o valor máximo. Eis: $\text{ÁREA} = |u \wedge v| = |u| \cdot |v| \cdot \text{Sen}\theta$.

É interessante notar, nas construções antigas, tanto da zona urbana como da rural, mais ainda nesta, seus compartimentos ou cômodos tinham a forma geométrica de um quadrado, na fórmula acima, $|u| = |v|$. Como a intenção do construtor era gastar uma certa quantidade de tijolos (perímetro constante) e para o mobiliário não se levava muito o aspecto estético, mas o utilitário, a forma quadrada oferece a maior área. O Método do Jorge, geralmente dá um valor maior que o Método do Adão, pois ao se somar todos os lados, dividindo a soma por quatro, transforma-se o quadrilátero em um quadrado de mesmo perímetro e este é o quadrilátero de maior área, como visto acima. É bem provável que a experiência tenha sugerido essa regra ou a preferência pela forma “mais regular”, a tradição ou mesmo vários condicionantes, simultaneamente. Pode até ser que nos meios mais sofisticados dos donos de terra, dos patrões de um modo geral, praticassem essa regra com conhecimento de causa, como resultado de um teorema matemático

e os subalternos, que sempre tenderam a copiar os detentores do poder, tivessem aprendidos essa técnica por **imitação**.

Não parece, tudo isso, decorrente de um código genético, deterministicamente, realizando essas operações, nem tão só desprovidas de sentido lógico como também não só provida desse sentido. Quem sabe? E um campo aberto para pesquisa. "Quem viver verá".

Embora não seja possível calcular, por meios simples, a área de um quadrilátero convexo, dados apenas seus lados⁷, é perfeitamente possível comparar suas magnitudes, ou seja, dizer qual dos quadriláteros possui maior área quando calculadas pela fórmula que dá um resultado exato (*fórmula I dada acima*) ou quando calculado pela fórmula usada pelos povos antigos, dos quais sabemos mais de sua utilização pelos egípcios. Considere o quadrilátero convexo ABCD, cujos ângulos internos têm medidas entre 0° e 180° seus senos obedecem as relações:

$0 < \text{senA}, \text{senB}, \text{senC}, \text{senD} \leq 1$. Através da fórmula acima mencionada, chegamos a:

$$\text{Área}_{\text{exata}} = \frac{1}{4} [ab \cdot \text{senB} + bc \cdot \text{senC} + cd \cdot \text{senD} + da \cdot \text{senA}] \leq$$

⁷. Sabendo-se as coordenadas dos vértices do quadrilátero convexo é possível, também, calcular sua área, mas o processo para encontrar essas coordenadas é tão difícil quanto a determinação dos ângulos, para as pessoas que estão interessadas nesses cálculos ou deles têm necessidades.

$$\frac{1}{4} [ab + bc + cd + da] = \frac{1}{4} [b(a+c) + d(a+c)] = (a+c)/2 \cdot (b+d)/2 = \text{Área}_{\text{Egípcia}}.$$

Vê-se, então que o valor da área calculada pela matemática popular dos Egípcios dá, sempre, um resultado maior que a área exata, calculada por métodos da matemática erudita.

Mesmo sem querer, presume-se, os agricultores do passado já sofriam de injustiça quando pagavam seus tributos para os Reis ou Faraós, pois os cálculos das áreas de seus lotes de terra mediam sempre mais que o real. Parece que a tradição é, realmente, “*forte e determinística*” e faz com que determinadas práticas permaneçam para sempre ou reapareçam de vez em quando (também neste caso). Obviamente a expressão entre aspas em grifo aparece mais como reforço de oratória, na realidade o determinístico nesse caso, buscando novamente Rosmorduc, são as relações de produção histórica.

Um prova disto pode ser vista em BOYER . Por volta de 628, na Índia central viveu BRAHMAGUPTA, que além de outros estudos menciona, só para lembrar, o valor de π , como valor prático 3 e como “valor bom” $10^{1/2} \approx 3,16$. Mas não é para isso que é citado, mas sim pelo interesse que demonstrou por resolver a questão da área de um quadrilátero convexo qualquer. Brahmagupta apresentou para esse fim,

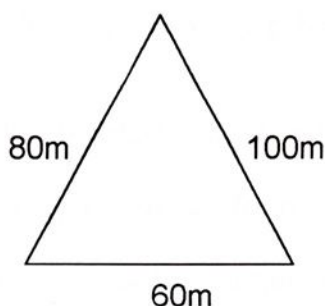
como se fosse uma generalização da fórmula de Heron, da seguinte maneira:

$\text{Área}_{\text{quadrilátero}} = [(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)]^{1/2}$, onde a, b, c e d são os lados do quadrilátero e s é o semiperímetro. Soube-se, depois, que essa fórmula só vale para quadriláteros cíclicos e que a fórmula correta válida para quadriláteros convexos arbitrários é: $\text{Área}_{\text{quadrilátero}} = [(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d) - abcd \cdot \cos^2 \theta]^{1/2}$, sendo θ a metade da soma de dois ângulos opostos. Como regra para a área "bruta" (área calculada pelos métodos da matemática popular) de um quadrilátero deu a fórmula já conhecida pelos egípcios: o produto das semi-somas dos lados opostos. O exemplo dado por Brahmagupta, sendo os lados do quadriláteros 25, 25, 25 e 39, encontrou $(25 + 25)/2 = 25$ e $(25 + 39)/2 = 32$ encontrou a área "bruta" $= 25 \times 32 = 800$, (1974, p.160).

É importante notar que a área do quadrilátero não é univocamente determinada pelos quadriláteros, cujos lados sejam, respectivamente congruentes, ou mesmo pelo perímetro constante desses quadriláteros. O que vai assumir papel relevante na variação do valor das áreas é, na realidade, a variação dos ângulos internos do quadrilátero, sendo a maior área, como já foi visto, daquele que tem todos os ângulos retos.

Essas considerações valem para as questões que virão, para outras formas geométricas planas ou espaciais, como é o caso dos triângulos, trapézios, figuras sem forma definida, cilindros e tronco de cones. Como seria o cálculo da área de um triângulo, dentro dessa forma de ver e fazer da matemática popular?

Tomou-se um triângulo retângulo, cuja área é fácil de calcular e com resultado exato, porém desenhado de modo a não parecer ter um ângulo de 90° , embora, para muitos, não faz a menor diferença, senão para aqueles que já possuem algum conhecimento do tema.



Parece haver uma tendência em somar os lados e dividir pelo número destes, multiplicando esse resultado por ele mesmo, transformando a figura em quadrado. Essa maneira de fazer ocorreu e ficou assim: $100 + 80 + 60 = 240$, $240 : 3 = 80$ e $80 \times 80 = 6\,400$. A área exata desse triângulo é igual a $(60 \times 80) : 2 = 4800 : 2 = 2\,400$, muito diferente do resultado anterior. Ocorreu também, dividir a soma dos lados 240m por quatro, multiplicando-se esse resultado por ele mesmo,

resultando $60 \times 60 = 3\,600\text{m}^2$. A “empreita” de terras para plantio, realizada desse modo não é nem um pouco justa.

Esse é o caso, que normalmente ocorre, pois as medidas feitas por pessoas não técnicas, tendem a ser simplificada e o modo mais simples de medir um terreno (normalmente tem essa finalidade) é medindo seus limites, ou seja seus lados. Uma fórmula útil para o caso seria a de Heron, mas de difícil utilização, pois envolve radiciação; Eis a fórmula e seus cálculos: $\text{Área} = [p.(p-a).(p-b).(p-c)]^{1/2}$, onde p é o semi- perímetro e a , b e c são os lados do triângulo. Os cálculos:

$$P = (100 + 80 + 60) : 2 = 240 : 2 = 120, \quad p-a=20, \quad p-b=40 \text{ e } p-c=60.$$

$\text{Área} = [120.20.40.60]^{1/2} = 2\,400$ (unidades de área), o mesmo resultado já encontrado. A operacionalização dessa fórmula, de fato, é muito complicada, até por pessoas com certo conhecimento de “geometria escolar” e, mesmo nas escolas é muito pouco, ou quase nunca utilizada.

A fórmula de Heron se presta para calcular a área de um quadrilátero irregular desde que se acrescente a medida de uma das diagonais. Normalmente essa medida não é levada em consideração e os problemas são apresentados e resolvidos pelos dois métodos já aludidos.

Numa classe de final de curso (quarto ano) de Licenciatura em Matemática (1999), na FFCL de Penápolis, cerca de 25 a 30 por cento de um total de 31 alunos percebera a aplicação da fórmula de Heron, quando as questões lhes foram propostas. Obviamente, o trabalhador rural ou o usuário das matemáticas populares, não têm conhecimento da técnica e, a maioria, nunca ouviu falar em raiz quadrada ou algo que o valha.

Entre os casos de resolução de triângulos, exceto quando se conhece três lados, não foram propostos, devido ao não conhecimento, por parte dos praticantes destas técnicas e por também não possuírem instrumentação própria ou adequada, mesmo as mais rudimentares. Atualmente, tornou-se fácil adquirir instrumentos precisos de medidas, pois não faz muito tempo, usava-se mesmo passadas (ou jardas, não tomadas com o valor da medida inglesa), cordas ou varas de madeira, previamente medidas ou estas tomadas com aproximações, muitas vezes, grosseiras. Vale como justificativas, dessas afirmações, a experiência do pesquisador, que chegou a fazer uso, em parte, desses procedimentos.



Embora não se fazia uso gráfico do zero, em época bem antiga, o que não prejudicou determinadas posturas relacionadas ao conhecimento adquirido e transmitido, depreende-se que seu conceito era conhecido e, implicitamente, apreciava nos trabalhos dos sábios ou escribas. No depoimento que segue, que é recente, a personagem que o utiliza, menciona seu nome, escreve-o e traduz seu conceito, mas essa invenção é “bem atual”, nova e os povos antigos não o utilizavam da mesma forma e sentiam sua presença.

DEPOIMENTO 1:

“Dentre as lembranças do período de trabalho na zona rural, veio a do Tio Osvaldo⁸, que fazia o papel de escriba e de matemático da família e da vizinhança e era bastante procurado, tendo muito trabalho nas épocas de colheita, para fazer a “partilha” dos bens de final de safra e a divisão de terras destinadas ao plantio, da forma considerada justa pelo “empreiteiro ou patrão”. Ao ser procurado, algumas questões lhe foram propostas. A primeira foi sobre o cálculo da área de um quadrilátero e a solução, rápida, foi exatamente a já comentada logo atrás, conhecida como Método do Adão ou a encontrada pelos antigos egípcios. Uma outra questão foi o cálculo da área de um triângulo

8. Tio Osvaldo não é um nome inventado, fictício, mas foi lavrador na região rural de Penápolis: Boa Vista, até por volta da década de 60 e respondeu algumas questões no dia 29 de fevereiro de 2000, por ocasião do seu “décimo oitavo” aniversário bissexto.



*qualquer, cujas dimensões não são mais lembradas. A solução não foi meu primeiro deslumbramento (alumbramento), como disse Manuel Bandeira, mas foi um momento de uma vertiginosa viagem entre o passado e o presente, que parecia trazer, à tona, num só espaço de tempo, num instante, o Tio Osvaldo e o escriba egípcio, traçando num só papiro as mesmas linhas, as mesmas figuras e a mesma solução: “Coloque o zero aqui - **num dos vértices** – soma esse, o zero, com este aqui – **o lado oposto** – e divide por dois, soma esses outros dois e divide também por dois e multiplica os resultados encontrados, essa é a área procurada”. Nos entremeios da conversa meu pai procurava ajudar o Tio Osvaldo, lembrando alguns detalhes ou dando palpites”.*

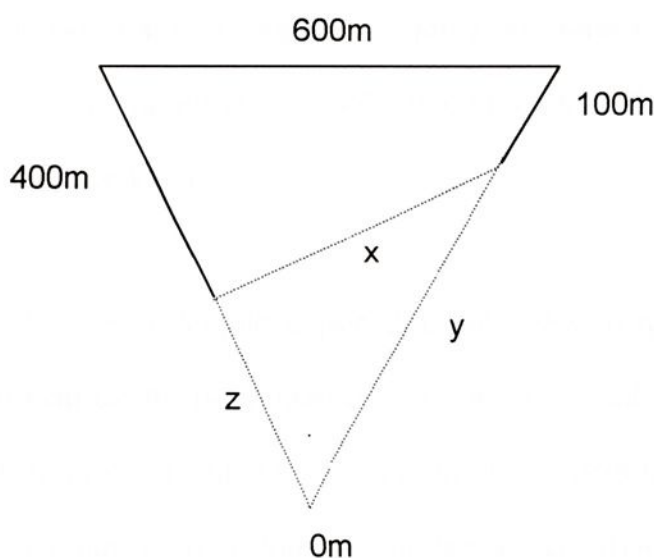
Exatamente como vem sendo feito a mais de dois mil anos! Sem tirar e nem por nada, só mudaram as vozes, os sons, os “papéis”, os “lápís”; os conceitos, em essência parecem misturar-se numa e única forma perene e imutável. A área do círculo também lhe foi proposta. Para isso respondeu: “tem que quadrar o redondo”, “tem que transformar num quadrado, por dentro, (e mostrava, tentando construir um quadrado dentro do círculo), mas não me lembro”. Ainda há mais!

DEPOIMENTO 2:

Certa vez fui procurado por um senhor de etnia japonesa, residente na zona rural, para calcular a área de um terreno triangular, do

qual não é possível lembrar as dimensões, mas recordo muito bem, que após aplicar a fórmula de Heron, o resultado deu negativo, então afirmei que as medidas tomadas poderiam estar erradas. Esse senhor, no meu entender, procurava a solução de um problema, no caso um milagre, saiu bravo e gesticulando, ao que pareceu, achando-me um perfeito ignorante no assunto. Nunca mais me procurou.

Uma questão semelhante também foi proposta aos entrevistados, onde os lados são respectivamente 100, 400 e 600, que se sabe não ser possível construir um triângulo, mas sua área foi feita como o produto da semi – soma de dois lados pela metade da base (o outro lado) cujo resultado é (tomando 600 como base) $[(600 + 0) : 2] \times [(400 + 100) : 2] = 75\ 000$. Este é um procedimento enganoso, pois considera o quarto lado do triângulo como sendo nulo, para poder obter $(600 + 0) : 2 = 300$, o que não acontece neste caso. Observe a figura.



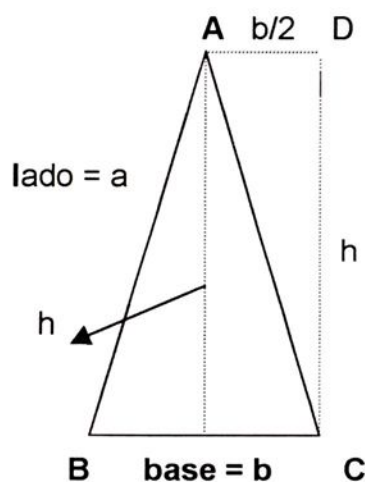
Onde x , y e z são valores não nulos. Para ter sentido $400 + z = 400$, o que equivaleria $z = 0$, o mesmo acontecendo com $100 + y = 100$, $y = 0$ e, obviamente, $x = 0$. Isto não é possível! Calculada a área pela fórmula de Heron, nota-se que aparece uma raiz quadrada de número negativo, comprovando a inexistência do triângulo, pois $600 > 400 + 100$ e, da mesma forma, sua área.

Vale a pena lembrar que a aplicação da fórmula egípcia, para um triângulo qualquer, atribui valores diferentes para as áreas, quando calculadas tomando por base lados também diferentes e, em alguns casos, bastante discrepantes. Veja por exemplo, o triângulo dado no início destas considerações, cujos lados medem 60m, 80m e 100m. Tomando como bases 60, 80 e 100, respectivamente, suas áreas são $2\,700\text{m}^2$, $3\,200\text{m}^2$ e $3\,500\text{m}^2$. Como pode um só triângulo possuir três valores diferentes para a área? As fórmulas valem somente para aproximações e não garantem a existência do triângulo. Este é um grande defeito desses procedimentos.

Para um triângulo especial, o isósceles, o **problema 51 do Papiro Rhind ou de Ahmés**, mostra que a área era calculada tomando-se a metade da base, multiplicando-se pela altura, pois julgava que dois triângulos retângulos (na linguagem moderna, congruentes) poderiam

através de um movimento colocá-los juntos de modo a formar um retângulo (ver figura abaixo). Na pesquisa não foi colocado triângulos isósceles, a menos que se fizesse, dando os três lados, devido ao fato de que não era comum (e ainda não o é) as medidas serem tomadas por segmentos seccionando o interior de uma figura. Esse procedimento é o mesmo utilizado atualmente, o que mostra noção de demonstração através de raciocínio lógico e de equivalência de áreas entre polígonos.

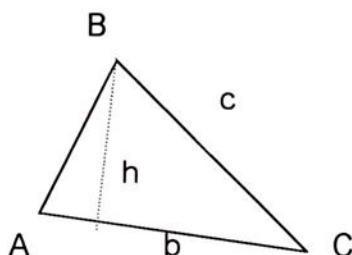
E se a área desse triângulo fosse calculada pelo método do quadrilátero de um lado nulo (o oposto àquele considerado base), qual seria a relação entre suas áreas? Para perceber melhor eis uma figura:



Área do triângulo ABC = $b/2 \cdot h$

Área do retângulo ABCD,
cálculo exato, também feito
pelo escriba, como visto acima.

Observe que o lado é maior que a altura, ou seja $a \geq h$, o que acarreta $b/2 \cdot a \geq b/2 \cdot h$, isto é, a área calculada pelo método do quadrilátero de lado nulo dá um resultado maior que o do método exato. Para o caso de um triângulo escaleno, seguindo o mesmo raciocínio, tem-se:



Observe que $c \geq a \geq h$.

A área do triângulo $ABC = b \cdot h / 2 = b \cdot h / 4 + b \cdot h / 4 < b \cdot a / 4 + b \cdot c / 4 = b(a+c) / 4 = b/2 \cdot (a+c)/2 =$ área do triângulo dado pela fórmula egípcia. Pode-se dizer que a fórmula egípcia dá sempre um resultado maior que o valor exato da área.

Mais uma vez Brahmagupta.

Este também calculou a área de um triângulo isósceles multiplicando a metade da base por um dos lado iguais (o que equivale à

media dos lados). Para um triângulo escaleno de base 14 e lados 13 e 15 achou a área "bruta" multiplicando a metade da base pela média aritmética dos outros dois lados, obtendo $[(14 + 0) : 2] \times [(13 + 15) : 2] = 98$.

Como indicativo de que as técnicas aqui mencionadas perpassaram por todos os momentos da história, nos mais variados locais, cita-se um problema sobre o cálculo de áreas, encontrado em Beda, *O Venerável*, que viveu entre 673 e 735, na Inglaterra, um dos maiores professores das escolas religiosas medievais.

Problema do campo triangular: Um campo triangular mede de um lado 30 pérticas, de outro também 30 e de frente 18. Diga quem puder, quantos aripenos (um aripenos eqüivale a 144 "pérticas quaradas") compreende?

Solução: Os dois lados de 30 somados perfazem 60, cuja metade é 30 que multiplicado por 9 (que é a metade de 18) dá 270 (que é o cálculo da área em "pérticas quadradas"). Para expressar a área em aripenos é necessário dividir por 144, etc (apud. HELLMEISTER, 2000, p.26).

Obs. Pértica (do lat.), resultando, posteriormente pértiga, eqüivale a vara ou vara do carro (de boi) que vai do recavém ao cabeçote (Nota do pesquisador).



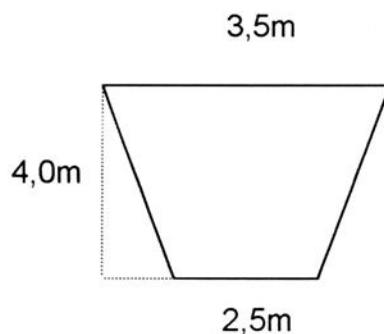
Problema 52 do Papiro de Rhind:

Qual a área de um triângulo “truncado” de 20 k entre seus lados, 6 k em sua base e 4 k, em sua linha “truncada”?

Resolução: Adicione 6 e 4. Você obtém 10. Tome $1/2$ de 10, ou seja, 5 (de moda a fazer um retângulo) . Faça a multiplicação de 20 por 5. Essa é a área.

Em verdade esse problema pode ser pensado como sendo um trapézio, cujas bases maior e menor, respectivamente, são 6 e 4 e a altura 4. Neste caso a solução egípcia e a moderna, encontrada nos livros, coincide. Uma questão similar foi proposta aos entrevistados:

Qual a área da figura?



A área exata é dada por $= [(3,5 + 2,5) : 2] \times 4,0 = 12 \text{ m}^2$.

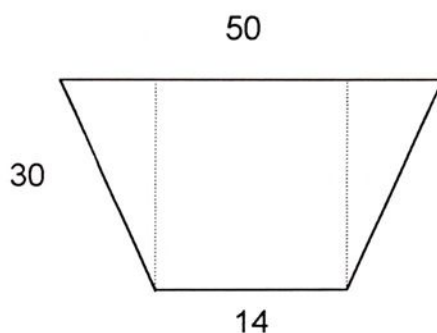
Algumas soluções foram apresentadas desde o começo dessa forma, ao passo que outra tinham as bases somadas e divididas por dois e $3,5 + 2,5 = 6,0$, $6:2 = 3,0$ e $4,0 + 4,0 = 8,0$, $8,0 : 2 = 4,0$ e este

resultado multiplicado por 3,0 que dava 12. Não havia como errar! O que se vê é a tendência em transformar “tudo” em retângulos ou quadrados e aplicar o Método do Tio Osvaldo, não fazendo a distinção entre lado e altura. É um teorema: **Parece com isto, então é assim!** Isto mostra um vislumbre de lógica, mesmo nas culturas mais rudimentares e uma tendência em usá-la, sempre que achar necessário, mesmo sem um entendimento racional da questão.

Em AABOE encontra-se um problema de cálculo de área de um trapézio e sua solução, na terceira de sete seções preservadas de um tablete selêucida. *[em] um trapézio 30 é o comprimento, 30 o segundo comprimento, 50 a largura superior, 14 a largura inferior. 30 vezes 30 é 15,0. Subtraia 14 de 50 e o resto é 36. Metade disso é 18. 18 vezes 18 é 5,24. Subtraia 5,24 de 15,0 e o resultado é 9,36. O que deveríamos multiplicar por si próprio para que o resultado seja 9,36? 24 vezes 24 é 9,36. 24 é a reta divisora. Adicione 50 e 14, as larguras, e (o resultado é) 1,4. Metade disso é 32. Multiplique por 24, a reta divisora, por 32, e o (resultado) é 12,48...*

Trata-se de calcular a área de um trapézio isósceles, cujas medidas são (ver figura):





Calculando a área desse trapézio pela fórmula hoje conhecida, utilizando o Teorema de Pitágoras para o cálculo de h (altura) e expressando o resultado no sistema de numeração babilônico, obtém-se o resultado 12,48, o mesmo encontrado acima pela regra dos “matemáticos” daquela época.

Nos corpos redondos, o que impede sua quadratura não são os números irracionais, mas sua perfeição e sua metafísica, o desejo dos filósofos e sua beleza! Desde a cosmologia de Aristóteles até as órbitas elípticas de Kepler, na *Phýsis*, na concepção da Terra como centro do Universo, no dogmatismo religioso, quantos erros já se cometeram em seus nomes para velar pela manutenção de um paradigma da mais bela obra da Criação e quantos delitos foram provocados contra aqueles que os desobedeceram. Como é grande a dificuldade do sábio para entendê-los, mas muitas vezes o homem rude, o artesão, ousam desafiá-los inventando teorias “simples” para torná-los mais racionais!

Dentre muitos, um exemplo deve ser considerado. No primeiro livro do Reis, do Antigo Testamento, no Capítulo 7, que descreve a construção do palácio de Salomão, está escrito nos versículos de 13 a 15: *Salomão mandou chamar Hiran de Tiro, filho de uma viuva da tribo de Neftali e cujo pai era natural de Tiro e trabalhava em bronze. Era dotado de grande habilidade, talento e inteligência para executar qualquer trabalho em bronze. Apresentou-se ao rei Salomão e executou todos os seus trabalhos. Fundiu duas colunas de bronze, a altura de uma era de dezoito côvados e sua **circunferência** media-se com um fio de doze côvados; assim também era a segunda coluna.* Mais adiante, no versículo 23, lê-se: *Fez o Mar de metal, fundido com dez côvados de diâmetro. Era redondo, tinha cinco côvados de altura; sua circunferência media-se com um fio de trinta côvados*⁹. É possível encontrar uma aproximação racional, ou melhor, natural para π , com base nesses dados. Do que se sabe hoje, $2\pi r = 30$ e $\text{diâmetro} = 2r = 10$, conclui-se que $\pi = 3$.

No caso da pesquisa sobre a área do círculo, foi proposta uma questão que é exatamente o **problema 50 do Papiro Rhind**. *Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?*

⁹ .Antiga medida de comprimento, definida como a distância do cotovelo até a extremidade do dedo médio, estando o braço e o antebraço dobrados em ângulo reto e a mão aberta (Larousse Cultural). Mede, aproximadamente, 52,5 cm. Também chamado cúbito.



Solução: Tome $1/9$ do diâmetro, a saber 1; o restante é 8. Multiplique 8 por 8; isto resulta 64. Portanto a área é 64.

Assim,

1	9
$1/9$	1;

isso resulta 8

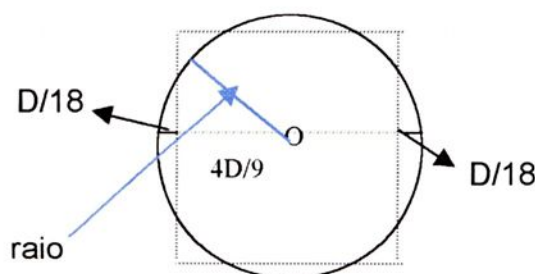
1	8
2	16
3	32
8	64

Esta área é 64 (MIORIN, 1998, P.5).

*“O escriba Ahmes¹⁰ assume que a área de um campo circular com diâmetro nove unidades é a mesma de um quadrado com lado oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equívale aproximadamente a atribuir a π o valor $3 \frac{1}{6}$ uma aproximação bastante elogiável, mas novamente não há sinal de que Ahmes soubesse que as áreas de seu círculo e seu quadrado não eram **exatamente** iguais (BOYER, 1974, p. 13).*

¹⁰ . Papiro de Rhind, hoje no British Museum, foi comprado pelo escocês Henry Rhind, em 1858, numa cidade à margens do Nilo, também chamado de Papiro Ahmes o maior documento matemático do Egito, em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 A. C. Outras fontes matemática do Antigo Egito são os Papiros Kahun, o Papiro de Berlim, duas pranchas de madeira de Akhmin (2000 A . C), rolos de couro cujo conteúdo são frações unitárias é o segundo mais importante documento matemático egípcio, o Papiro de Moscou, comprado no Egito em 1893. Sua qualidade é inferior a do de Ahmes. Os papiros de Moscou de Rhind contêm 110 problemas, 25 e 85, respectivamente, dos quais 26 são de geometria, sendo que em sua maioria se referem a cálculos de áreas de terras e volumes de celeiros.

Em Eves pode se ver que “ A área de um círculo era tomada como sendo igual à de um quadrado de lado igual a $8/9$ de seu diâmetro e (...) (1993, p.5), o que vem referendar a solução do problema 50 do Papiro de Rhind, exposto por Miorim, anteriormente citado. Traduzindo em linguagem algébrica moderna, tem-se : área do círculo = $(D - 1/9D)^2 = (8/9 D)^2$, onde D é o diâmetro da circunferência associada o círculo.



$$D/18 + \frac{4D/9 + 4D/9}{\downarrow} + D/18 = D \text{ (diâmetro).}$$

lado do quadrado

Pensava-se, é o que parece, que aquilo que se perdia com a parte do círculo que fica além do quadrado (“para fora”), ganhava-se com a parte do quadrado que fica além do círculo. O que se sabe não ser verdadeiro.

Efetuando os cálculos das duas áreas, do círculo e do quadrado, tem-se:

Área_{cir.} = $\pi r^2 = \pi (D/2)^2 = \pi/4 D^2$ e a Área_{quad.} = $(8/9 D)^2 = 64/81 D^2$. Qual a relação entre essas áreas? Ambas possuem um fator comum D^2 e o outro fator, é $\pi/4$ irracional, ao passo que o outro $64/81$ é racional, não

podendo aventar a possibilidade de igualdade, que não acontecerá jamais. É preciso notar que as figuras (quadrado e círculo) não guardam entre si as relações requeridas é, apenas, um esboço.

Nenhuma das pessoas procuradas (entrevistadas) conseguiu resolver, de modo satisfatório, a questão usando técnicas da matemática popular, nem mesmo ousaram procurar uma solução mais moderna, buscando auxílio na matemática dos livros ou através da ajuda de outrem. O que vem confirmar a dificuldade oferecida pelos corpos redondos, na solução de problemas a eles relacionados. As respostas ouvidas, quando se as tem, é sempre a mesma: tornar o "redondo quadrado", mas não se sabe como fazê-lo. A esperança por uma solução, parecida com a do papiro era imensa, mas não aconteceu. Os corpos redondos continuam mantendo sua divindade e perfeição, não permitindo que o comum dos mortais os entendam.

DEPOIMENTO: 3

"Fato curioso, pode assim ser chamado, numa aula recente, no curso de Licenciatura em Matemática, não a mesma já referida anteriormente, algumas questões das que se encontram no anexo, foram propostas para essa turma. Não tem muita importância o que sugeriu o resto da classe, a não ser o que disseram dois alunos, considerados bons. Trabalho com essa turma Tópicos de Ensino e História da



Matemática, e foi constatado que nada sabem, pelos livros do teor temático desta pesquisa. Tanto melhor!. Duas questões sobressaíram pelas respostas dadas, uma das quais, que interessa neste momento, pois a outra será mencionada em outro depoimento, devido a ordem em que se encontra. A primeira questão foi o problema de número 50 do Papiro de Rhind, para encontrar a área do círculo. A solução de um aluno: **“mede-se o contorno, a circunferência**, (embora o que é dado seja o diâmetro), **divide-se por quatro e o que der multiplica-se por ele mesmo”**. Até aí, nada de mais. A solução de um outro, aluno aplicado, e que sempre tem uma resposta, aproveitável, boa: **“Eu dividiria por oito, pois assim terei dois quadrados e, conseqüentemente, uma melhor aproximação”**. De relance, dá-se a impressão de que, até faz sentido, mas parando para pensar, a realidade é outra, e a aproximação é muito pior. Depois de alguns instantes, chegou-se a conclusão de que dividindo por oito, ao invés de obter dois quadrados, o correto seria trabalhar com o octógono. Erro de formulação da resposta ou não”?

Também no século VIII, atribuído a Beda, O Venerável, encontra-se um **problema do campo circular** : “Quantos aripenos tem um campo circular de 400 pérticas de circunferência?

Solução: A Quarta parte de 400 é 100 que multiplicado por 100 dá 10 000, que é a área. Para expressar em aripenos, divide-se por 144, etc”.
(HELLMEISTER, opus cit, p. 27).

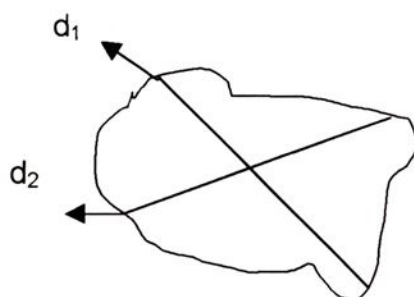


Sabendo-se que o comprimento da circunferência é $2\pi r$, pela forma como é proposta a solução, tem-se $(2\pi r/4)^2 = (4\pi^2 r^2/16) = \pi/4 \cdot \pi r^2$, donde se tira que para se ter a área exata como πr^2 , deve-se atribuir a π um valor 4, que não deixa de ser uma aproximação grosseira. Isto reforça sobremaneira a hipótese de que, como normalidade, a matemática popular, espontânea, resistiu e resiste, ainda, ao tempo e o desenvolvimento adquirido nestes últimos séculos, não que este desenvolvimento deveria ser evitado, mas sim mais valorizado aquilo que permanece através da trajetória histórico-social do Homem, como desenvolvimento e fruto de seu labor, de suas reflexões e atitudes, mesmo não tendo as elaborações sofisticadas das técnicas modernas.

Quando, na pesquisa, foram apresentados retângulos, losangos e outros quadriláteros regulares ou não, os procedimentos foram os mesmos já descritos e analisados anteriormente. Uma fato curioso ocorreu quando se apresentou uma figura de forma não poligonal, mas “cortada” por dois segmentos de retas com um ponto de intercessão interno à figura, cujas extremidades dos segmentos são pontos da linha limite que define a figura, mais ou menos “como se fossem diagonais”. O cálculo da área da superfície limitada por essa figura foi encontrada multiplicando-se as medidas dos dois segmentos, fornecidas na questão.



Um rascunho da figura, sem as medidas, encontra-se abaixo, pois nos anexos encontra-se a figura utilizada.



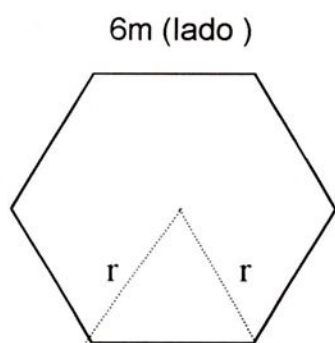
Área sugerida = $d_1 \cdot d_2$.

Parece haver uma tendência natural, quando se fala em área, de multiplicar as dimensões constantes nas figuras ou gráficos. O mesmo aconteceu para o losango, quando só foram fornecidas as medidas das diagonais. Não parecia haver muita convicção.

Poder-se-ia perguntar: e quando as figuras possuem 3, 4, 5, 6, ... lado? A lei é: tudo se transforma em quadrado! Poderia também se transformar em triângulos, traçando diagonais, mas, mais uma vez, as medidas são, normalmente, feitas nos limites externos das figuras (ou terrenos), nos seus lados. E aí então, "somam-se os lados, divide-se a soma pelo número de lados e esse resultado multiplica-se por si mesmo, obtendo-se assim sua área". Um polígono qualquer transformado em quadrado, o que mostra uma noção rudimentar de equivalência de áreas. Aí aparece novamente o Tio Osvaldo, confirmando o que outros, seus não conhecidos, também já haviam afirmado, em outras épocas e durante a

pesquisa. Um exemplo não constante da lista de questões, encontradas no anexo, com o objetivo de, simplesmente, mostrar as diferenças de valores encontrados quando se usa este ou aquele procedimento. Nada sugere ter sido a preocupação dos antigos a busca pela exatidão dos resultados. Era importante ter-se um resultado.

Segue-se uma figura ilustrativa de um hexágono de lado igual a 6m.



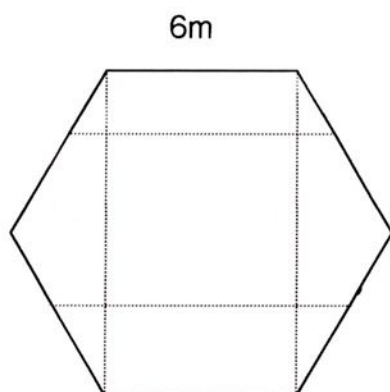
Transformando em quadrado:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36 \\ 36 : 6 = 6 \\ 6 \times 6 = 36 = \text{área "bruta"}. \end{array} \right.$$

A área exata desse hexágono é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 6m.

$$\text{Área de um triângulo} = [9.3.3.3]^{1/2} = 9.3^{1/2}.$$

$$\text{Área total} = 6.9.3^{1/2} = 54.3^{1/2}. \text{ Por que essa diferença?}$$



O quadrado formado pelas linhas pontilhadas, através de suas interseções, tem lado 6m e portanto área igual a 36 e “cabe”, com sobra, dentro do hexágono. Vê-se que o método não é muito bom. Isso também deve ter provocado a procura de métodos mais exatos, embora se tenha dito que a exatidão não parecia ser a preocupação dos povos antigos, mas há sempre aqueles que querem sair do “lugar comum” : esta é a mola propulsora do desenvolvimento, do progresso e da criatividade, tanto artística como científica ou de qualquer natureza.

Outra forma de resolução apresentada foi somando-se todos os lados (perímetro), dividindo o resultado por 4, transformando, mais logicamente, a figura em um quadrado. Ficando assim: $6 \times 6 = 36$ que dividido por 4 resulta 9. Fazendo $9 \times 9 = 81$, que é a área procurada, valor bem mais próximo da área exata.

CUBAGEM DE MADEIRA OU CUBICANDO MADEIRA

A cubagem de madeira nada mais é do que medir a quantidade de madeira, em unidades cúbicas, contida em um determinado “tronco” de árvore que se sabe não ser um cilindro, mas sim, um tronco de cone; na verdade não se trata só de madeira, o conceito se aplica para cisternas (poços), celeiros, outros espaços ou recipientes dos quais se deseja calcular seus volumes. Parece que o desafio consiste em calcular o volume de uma figura geométrica espacial não “regular” ou que apresente diferenças entre elementos que, a princípio, supunham-se congruentes. Exemplos: tronco de cones ao invés de cilindros e tronco de pirâmide ao invés de prismas. Muitas vezes, dependendo da região, usa-se também “cubagem de terras” para significar o cálculo da área de figuras planas. Em geral, a preocupação dos lavradores, empreiteiros, compradores de madeiras para serrarias ou para queima em fornos de olarias ou caldeiras de alambiques e, ainda outras finalidades, é com o cálculo do volume do tronco de cone. Esse é o desafio, pois envolve, além do cálculo de área de círculos, ainda a quantidade de coisa, matéria contida (volume). A pessoa capaz de tal feito goza de certa fama e



prestígio entre seus pares e são, constantemente, procurados. É o caso do Tio Osvaldo. A pesquisa nesse sentido versou-se apenas em duas figuras, ou seja, dois troncos de cones, onde em um deles coincide com um **problema das Tábuas de Alkmin**, obviamente, com unidades diferentes a fim de facilitar a compreensão, pois o esperado é a técnica utilizada e o outro com medidas tomadas aleatoriamente. No primeiro problema são dados a altura e os perímetros das duas bases e, no segundo, a altura e os diâmetros das bases. Não se colocou tronco de cone com as áreas das bases já dadas, pois nesse caso as dificuldades quase não existem, mas mesmo assim perguntou-se a algumas pessoas, que prontamente respondiam "que era só somar as duas bases, as áreas, dividir por dois e multiplicar esse resultado pela altura e "tudo está resolvido", tem-se o volume". Parece haver uma lógica no ser humano, *a da compensação*: põe-se um pouco aqui, tira-se outro pouco dali e "tudo está resolvido", perde-se de um lado e ganha-se de outro. Infeliz ou felizmente, isso bem poucas vezes é verdadeiro. Quando as perdas e ganhos relacionam-se por linhas, superfícies,... de mesma natureza, como exemplo, segmentos $\leftrightarrow$ segmentos, arcos $\leftrightarrow$ arcos, planos $\leftrightarrow$ planos,....., a equivalência de áreas, volumes,..., *pode* dar certo, mas quando se relacionam linhas, superfícies, ..., de naturezas diferentes, segmentos $\leftrightarrow$ arcos, planos $\leftrightarrow$ não - planos, a equivalência entre áreas, volumes,... torna-se complicada, senão impossível. Um exemplo clássico e impossível é o da quadratura do círculo e do qual já se fez referência



quando se tentou calcular a área do círculo. Desde a época dos gregos, bem antes de nossa era, vem se tentando encontrar uma equivalência entre a área do círculo e a do quadrado, um dos três problemas famosos, mesmo, com régua e compasso, do que se sabe hoje não se poder lograr tal feito. Algebricamente é possível, pois $\pi \cdot r^2 = x^2$ e $x = r \cdot \pi^{1/2}$, com x lado do quadrado e r o raio do círculo, mas, para os usuários da matemática popular e prática, isso não importava (e não importa, ainda), porque se satisfaziam (e se satisfazem) apenas com aproximações. As respostas obtidas para a solução dessas duas questões não foram muito animadoras, praticamente todas as pessoas não souberam resolvê-las. Duas ou três disseram: é preciso “esquadrear”, tornar um quadrado com a medida do meio, da média das duas pontas da “tora”, pensando, obviamente, na madeira, ou do tronco de cone, e depois multiplicar pelo comprimento (altura). Tendo a área da base média ou as áreas das duas bases, parece não haver dificuldade. Ao serem inquiridas, as pessoas entrevistadas, até com muita insistência, uma apenas, dentre umas dez, disse que precisaria ter o “comprimento”, neste caso a “grossura da tora”, “dividir por quatro para ter um quadrado e multiplicar esse lado por ele mesmo”¹¹. E esse resultado pelo comprimento (altura). Qual comprimento, o maior ou o menor? O do meio, “que sai” da divisão por dois da soma do

¹¹Normalmente as palavras entre aspas são aquelas tomadas do linguajar próprio dos entrevistados; algumas vezes, claro, alterações foram introduzidas, para melhor compreensão contextual.



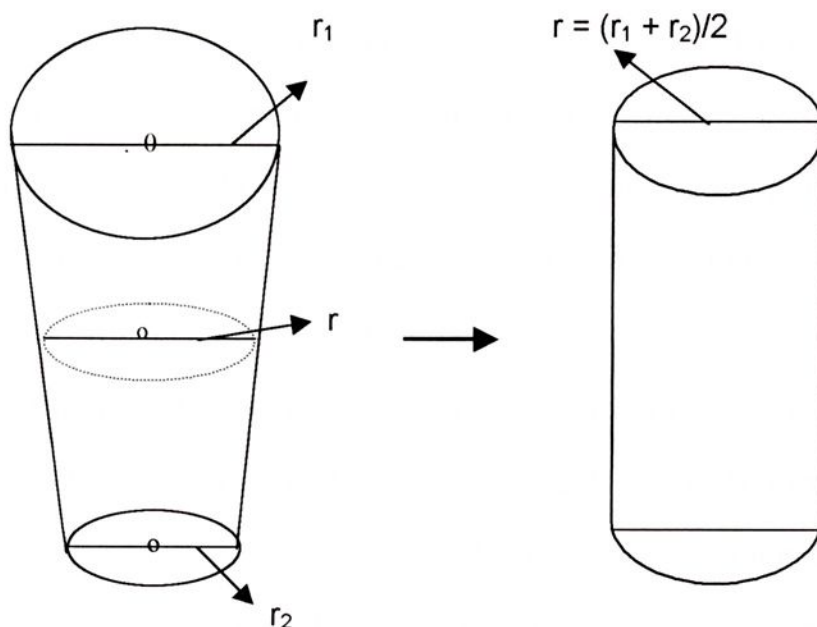
maior com o menor. O quadrado é um modelo, um padrão, um paradigma (conforme conceito de Platão)! Achar um quadrado é quase encontrar sua área (uma jóia)!

Tudo se resolve, se puder achar um quadrado “equivalente”. Bom, após essa insistência, que valeu a pena, a resposta dada, que também era a esperada e que, quase havia levado a uma grande frustração, surgiu como um poema, cheio de ritmo, cheio de vida e cheio de significado: uma criança recebendo o tão esperado presente. A sensação do encontro com aquilo que se busca, da conquista, não se descreve com as palavras do senso comum, embora o conquistado seja o usufruto comum de uma grande parcela dos que animam e motivam a humanidade. Os exercícios propostos pelos escribas da mesopotâmia e pelos egípcios, assim como em outros tempos e em épocas mais recentes, ainda podem ser resolvidos da mesma forma como o foram, mais de dois, três, quatro mil anos passados, como um tributo àqueles que ousaram uma primeira solução, e rompendo as barreiras do tempo e do espaço, entregar como legado aos futuros conquistadores, através da fala simples e do fazer humilde, não impedindo que outros, talvez mais arrojados ou mais desobedientes, trilhassem novos caminhos, construindo, sem danificar aquela, caminhante da normalidade, uma teoria mais sofisticada, um suposto novo paradigma: a matemática do sábios atuais. E então, isto é um culto à estagnação, à permanência do



saber, contrário ao desenvolvimento, ao progresso e outros tantos chavões da dinâmica da atualidade, do pós-moderno? A história tem começo, meio e fim, imbricados e inseparáveis e sua dinâmica só atua e se completa na conjunção de todas as peças que compõem esses momentos do espaço temporal.

Uma pergunta óbvia deveria ser feita. Por que razão toma-se a *volta do meio*, em torno do corpo, e não qualquer uma das outras duas? Mais uma vez a *Lei da Compensação*: "o que se perde na volta maior, se ganha na volta menor". Como se relacionam os volumes do tronco de cone, seu valor exato, com o do cilindro, supostamente, "equivalente"?



O raio médio igual ao raio do cilindro, considerado “equivalente” é $r = (r_1 + r_2)/2$. Um modo de comparar é achando a diferença entre os volumes.

$Vol_{real} = \pi h/3 \cdot [r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2]$ e o volume do cilindro $Vol_{cil.} = \pi h \cdot [(r_1 + r_2)/2]^2$. Fazendo $Vol_{real} - Vol_{cil.} = \pi h/12 \cdot [4(r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2) - 3(r_1 + r_2 + 2r_1 r_2)] = \pi h/12 \cdot [r_1 + r_2 - 2r_1 r_2] = \pi h/12 \cdot (r_1 - r_2)^2 > 0$, isto quer dizer que o volume real, exato do tronco é maior que o do cilindro “equivalente”. Se se permanecer constante a altura, a relação passa a depender, apenas, dos valores dos raios. Quanto maior for a diferença entre os raios, maior a diferença entre os volumes, ao passo que se os raios forem iguais, ou mesmo os comprimentos das circunferências, o que é óbvio, os volumes também serão iguais, pois nesse caso o tronco de cone é o próprio cilindro. A outra questão (ver anexo), onde são envolvidos, para o cálculo do volume, os raios das bases do tronco de cone e a altura, não teve resposta esperada, poucos tentaram resolvê-la e quando o fez, rabiscou algumas “continhas” sem muito (ou quase nada de) nexos ou razão de ser. O padrão de pensamento é em torno do quadrado e, no caso anterior, tendo-se o comprimento todo da circunferência, fica mais fácil dividi-lo por quatro para encontrar o lado do quadrado (equivalente?) e o cilindro passa a ser um prisma. Parece não saber a relação entre raio ou diâmetro com a circunferência. Sabem que existe uma “coisa” chamada **Pi** (π) e até aventuram, às vezes, a atribuir-lhe um valor de 3,... “alguma coisa”, mas não passa disso.



Um exercício por demais antigo, retirado das **Tábuas de Alkmin**, com exceção da unidade de medida tem as mesmas dimensões do exercício 2-a, do anexo, proposto como objeto da pesquisa:

Havia uma cisterna (reservatório) redonda; o perímetro superior tinha 20 c., o perímetro inferior 12 c., a profundidade 6 1/2c.. Qual o volume da cisterna? Obviamente a tradução satisfaz as necessidades da comunicação atual, em português e aparece invertido, na posição, no anexo.

Solução: 20 e 12 fazem 32; e 1/2 de 32 são 16. Do mesmo modo 16 por 16 faz 256. Do mesmo modo que 256 por 6 1/2 faz 1664. Do mesmo modo divida os 1664 em 36, de modo que o resultado é 46 1/6 1/18.

A princípio, parece não fazer sentido a solução, uma regra aplicada mecanicamente e pronto. Traduzindo para a álgebra, resultaria: $\text{Vol. tronco} = [(p_1 + p_2) : 2]^2 \cdot h = (p_1 + p_2) : 2 \cdot (p_1 + p_2) : 2 \cdot h = [(p_1 + p_2)^2 : 4] \cdot h$, onde p_1 e p_2 são, respectivamente, o perímetro da circunferência da base maior e da base menor e h a altura. Essa fórmula guarda uma certa relação com a fórmula apresentada anteriormente e de largo uso na matemática popular, através de comentários, onde o $\text{Vol. tronco} = (\text{Area}_{\text{base média}}) \cdot h = \{[(p_1 + p_2) : 2] : 4\}^2 \cdot h = [(p_1 + p_2) : 8] \cdot [(p_1 + p_2) : 8] \cdot h = [(p_1 + p_2)^2 : 64] \cdot h$. Se é verdade que esta fórmula tem um caráter de

universalidade, a hipótese mais provável é a de que o escriba deve ter cometido um engano, confundindo área média com semi perímetro, circunferência média ou, sua fórmula era mesmo outra ou o importante era fazer por fazer; pode também, ter ocorrido um erro de tradução. Há, contudo, uma analogia de raciocínio.

No artigo *A Cubagem da Árvores* de Antonio Acra Freiria e Geraldo Garcia Duarte Júnior na Revista do Professor de Matemática, nº 26 do 2º semestre de 1994, Os autores apontam três fórmulas populares para o cálculo do volume de um tronco de cone (uma tora de madeira), utilizadas em diferentes partes do Brasil.

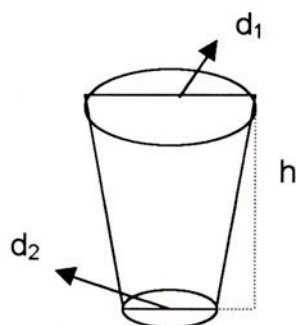


fig. a

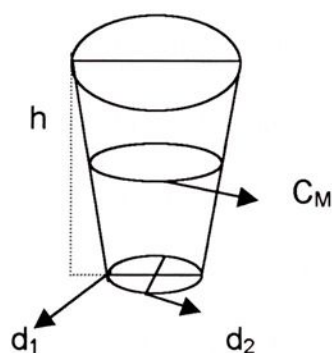


fig. b

Na fig.a, d_1 e d_2 são, respectivamente, os diâmetros das bases maior e menor e, na fig.b, d_1 e d_2 são, da mesma forma, os diâmetros máximos e mínimos da mesma base menor e, ainda C_M a base média. Segundo os

autores as fórmulas ou procedimentos são usados, respectivamente, nas seguintes regiões:

Em Rolim Moura, Rondônia, utiliza-se a chamada medida geométrica, dada por $\text{Vol}_G = \pi D h : 4$, com D igual ao diâmetro médio entre d_1 e d_2 , ou seja $D = (d_1 + d_2) : 2$.

O método paulista calcula o volume da seguinte forma : $\text{Vol}_P = d_1.d_2.h$. O método ou sistema Francon, bastante difundido no Amazonas e disseminado por todo o Brasil e, como já se viu, em, praticamente em todo o planeta, porque esse método guarda uma lógica subjacente, explicada por uma tendência (?) ...? O Método Francon já foi comentado e só para reforçar, seu volume é encontrado calculando-se a “grossura média da tora” ou a circunferência média (C_M), dividindo-a por quatro, transformando a circunferência em um quadrado e, conseqüentemente, o tronco de cone em um prisma de base quadrada. A fórmula para o cálculo é $\text{Vol}_F = (C_M : 4)^2 . h$. A justificativa para o uso dessa fórmula é devida, principalmente, aos compradores de madeira para serrarias, com o objetivo de retirar tábuas, caibros ou vigas, objetos de forma prismática bem definida, alegando que as *costaneiras*¹² ou seja, as primeiras tábuas (sic) retiradas do tronco não servem para o comércio da madeira, não podendo ser consideradas. Dessa forma, sem as *costaneiras*, o que sobra representa um sólido prismático quadrangular. É possível mostrar que a diferença entre o volume real, exato do tronco de cone e o do prisma



pode atingir valores consideráveis, pois mantendo-se a altura fixa, esta é a mesma para os dois sólidos, essa diferença vai depender dos valores dos raios das bases (ver anexo). Veja, por exemplo, o cálculo do volume do sólido, proposto nas Tábuas de Alkmin, feitos pela fórmula exata:

$\text{Vol. tronco} = \pi h/3 [r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2]$. Considerando as circunferências das bases como 20 e 12, seus raios são, nessa ordem, $r_1 = 10/\pi$ e $r_2 = 6/\pi$. Então: $\text{Vol. tronco} = \pi h/3 [(10/\pi)^2 + (6/\pi)^2 + 10/\pi \cdot 6/\pi] = \pi h/3 [196/\pi^2]$. $= (6 \frac{1}{2} \cdot 196)/3\pi \cong 135,24$. $\text{Vol. F} = [C_M/4]^2 \cdot h = 4^2 \cdot 6 \frac{1}{2} = 16 \cdot 13/2 = 104$.

O valor encontrado na resolução do escriba nas Tábuas de Alkmin foi $46 \frac{1}{6} \frac{1}{18} = 46 + 1/6 + 1/18 = 46 \frac{2}{9} = 46 + 2/9$.

O volume real é maior que os dois outros e, no caso do valor encontrado pelo escriba, a diferença é bastante significativa, o que mostra o não interesse por boas aproximações.

DEPOIMENTO 4: (20/03/2000)

“A outra questão mencionada no depoimento 3 é o cálculo do volume do sólido (cisterna ou tronco de madeira – tora), proposto nas Tábuas de Alkmin. A solução (foi pedido com insistência que não deveriam ser usadas fórmulas precisas vistas no curso, mas sim a lógica, saída da experiência, da vivência do dia-a-dia); apresentada, coincidiu com a dos compradores de madeira, onde o volume do tronco é tomado

¹² Costaneira s.f. (do cast. costanera). Palavra usada no meio rural, que aprendi com meu Tio Osvaldo e seu irmão Ernesto (meu pai), ambos moradores da zona rural, como já havia dito, e significa a primeira e a última tábua de um tronco serrado em diversas folhas.

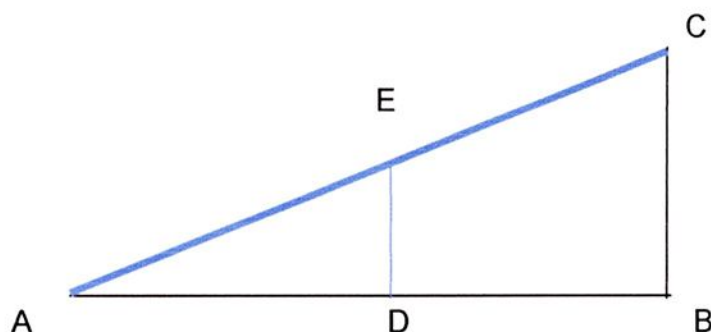


como o do prisma extraído do miolo (sem as costaneiras). Eis uma segunda solução: “**os compradores de madeira enchem os caminhões, colocando as madeiras de forma a preencher o máximo dos espaços da carroceria e, como o volume desta é fácil de calcular, tem-se uma boa aproximação**”. Lembrei-me de que era justamente o que meus tios e meu pai faziam quando empilhavam madeira em forma de prisma de base retangular. Havia madeira de todas as formas, mas procurava-se encaixar as madeiras de modo a utilizar o maior espaço possível, sem deixar vazios entre os troncos, uns bastante acentuados (troncos), outros mais ou menos cilíndricos, de forma que no total o “monte de madeira” era regular (sic)”.

A última questão difere quanto a natureza dos cálculos, pois é bastante comum pesquisas levadas em consideração, cálculo de áreas e de volumes e, neste caso assemelha-se mais ao trabalho de pedreiros ou carpinteiros. Nas matemáticas dos livros e para aqueles que as usam, a solução é muito simples, uma mera aplicação do Teorema de Pitágoras, e só. Alguns entrevistados que já possuíam alguns conhecimentos da matemática erudita, fizeram alusão ao teorema ou regra de Pitágoras, e uma solução foi apresentada com a aplicação correta desse teorema, mas a maioria, quase absoluta, não soube resolver, afirmando que nunca havia visto algo parecido. Os carpinteiros, normalmente, calculam esses valores no chão, desenhando a figura ou no próprio lugar que se encontra o “ripamento”, caibro ou “vigota”. As distâncias, dificilmente, tornam-se



inacessíveis permitindo a medida *in locus* ou mesmo não sendo preciso medir, pelo fato de se colocar a peça de madeira no local, tirando-lhe as sobras, não necessitando, até mesmo ser medida. Parece até não ter sido uma boa escolha essa questão para algum propósito. Mesmo assim a questão oferece aspecto interessante, como aplicação do conceito de semelhança de triângulos ou do Teorema de Tales, espontaneamente, sem ter conhecimento daquilo que se trata no saber escolar, de forma intencional. Um dos procedimentos utilizados pelos marceneiros consiste em medir a metade de AB (ver figura) e formar um triângulo ADE, medindo-se DE. Para obter AC multiplica-se esse resultado, o de DE por dois. Se AB for muito grande, divide-se em maior número de partes e procede-se da mesma maneira.



Nem tudo estava perdido, a aplicação do Teorema de Pitágoras está sempre presente quando se quer determinar um ângulo reto sem o uso de um esquadro. "Toma-se três medidas uma de 60cm outra de 80cm e fecha-se essas duas com outra medida de 100cm, tem-

se aí um "*ângulo de canto*", ou seja, um ângulo reto" (depoimento de um pedreiro). Não foi possível constatar a determinação desse ângulo, usando-se múltiplos de 60cm, 80cm e 100cm ou por qualquer outra terna pitagórica.



CONCLUSÃO

Há algum interesse, numa época de grandes avanços tecnológicos, onde o homem desvende “mistérios” do universo, além dos limites desta e de outras galáxias, penetra no microcosmo além das (ou nas) partículas subatômicas, em pesquisar se ainda restam sinais de práticas milenares que os homens de culturas inferiores as utilizavam, e comparar com práticas rudimentares ainda hoje existentes e outras de alto valor formal e cultural, para medir o progresso e a evolução de camadas sociais ou mesmo da sociedade como um todo? Vale a pena investir em pesquisas, nesse sentido ou são apenas *projetos* (conceito muito difundido atualmente, mas pouco entendido) mirabolantes de curiosos, sem ter muito ou nada que fazer?

Um aspecto relevante desta dissertação, já aludido anteriormente, é o da *curiosidade* do ser humano em procurar saber as origens das coisas, assim como sua própria origem, construir sua própria cosmologia, situar-se no limite e além deste, no seu micro e/ou macrocosmo, contextualizar sua existência. É bastante comum, nos escritos dos primeiros filósofos, principalmente nos pré-socráticos, gregos essa preocupação de contextualização, visto pelo nome de suas obras:



Sobre a Natureza (*Peri Physeos*) (Os Pensadores pré-socráticos, p. 35, 1996).

No Homem, ser histórico, seu passado , seu futuro e seu presente estão imbricados de tal forma que o abandono de uma atividade por um, acarreta desvios de metas ou objetivos fundamentais para sua sobrevivência. A experiência de cada um, por si só, mesmo planejada, com vistas a determinados fins, ainda é incompleta e necessita do complemento das ações de outros seres humanos, (Iluminismo vazio?) de suas experiências, para que unindo esforços o resultado ultrapasse, supere a soma de suas partes. O curioso é aquele que vence barreiras, quebra paradigmas, inova, descobre, não aceita mistérios. Em O Último teorema de Fermat, Simon Singh diz que " *O desejo de solucionar qualquer problema matemático é impulsionado pela **curiosidade** e a recompensa é a simples mas enorme satisfação derivada da solução do enigma. O matemático E.C. Titchmarsh uma vez disse: Não existe utilidade prática em se saber que π é irracional, mas se podemos saber, então certamente seria intolerável não saber*" (1999, p.159).

Conhecer as técnicas do passado permite compreender o modo de vida das sociedades primitivas e comparar como se vive hoje e traçar uma linha (ou rede) de entendimentos e evoluções que tornaram possíveis construir as ciências atuais, ratificando determinados conceitos e saberes e, até corrigindo desvios advindos do próprio desconhecimento

dessas práticas. Se não se tivessem feito escavações, pesquisas e buscas em várias regiões do planeta especialmente na mesopotâmia, no Egito e em sítios antigos nas proximidades destas, não teria sido possível um aprofundamento no conhecimento dos sistemas de numeração, da trigonometria, da geometria, da ciência do Egito, da China ou da Índia, fatos inegáveis (entre outros) para a construção da sociedade moderna e contemporânea. Mas por que tão poucas pessoas ainda conservam estes conhecimentos, pessoas de vidas simples e cultura rudimentar; mesmo grandes conhecedores da cultura atual e acadêmica quase não se interessam pelas tradições e por aquilo que ainda persiste em continuar acontecendo agora como outrora. É sabido que o conhecimento acadêmico formalizado, não surgiu do acaso e nem fora escrito em tábuas por deuses, roubadas do Olimpo para auxiliar os homens, portanto é de se esperar que tudo tenha acontecido cumulativamente, passo a passo, pela ação do próprio homem agindo sobre a natureza, construindo o que hoje denominamos *cultura*. Parafraseando E.C. Titchmarsh, citado acima, por Singh “ *não conhecer seus antepassados e suas culturas, pode não ser importante para que alguns vivam, ter a oportunidade de conhecer e não fazê-lo é intolerável, assim como negar o valor da história, cuja função, uma delas, talvez a mais importante, é conduzir o homem através do espaço - tempo para retificar, ratificar ou mesmo implementar ações norteadoras que permitem formular hipóteses e construção de Teorias, visando explicar os fenômenos físicos,*



econômicos, sociais e tantos outros inerentes ao desenrolar da vida do homo sapiens, neste planeta carregado pela atração (ou repulsão ou curvatura do universo) de tantos outros astros ou...,obedecendo a formulações matemáticas no cumprimento de seu dever através de suas órbitas, talvez ainda pela desordem provinda do caos ou do suave bater das asas das borboletas.

Pode-se observar, atualmente, um voltar, mesmo timidamente, para os estudos e as pesquisas das práticas rudimentares dos antepassados da humanidade , não só pelos arqueólogos, os que talvez primeiramente, se dedicaram a estudá-los, mas também pelos etnólogos, antropólogos, filólogos, os historiadores depois de todos esses outros, de modo a construir a arquitetura do saber, caminhando junto com a tradição, confirmando-a ou negando-a, responsabilizando-se assim, muitas vezes, pela quebra, manutenção ou troca de paradigmas. Os matemáticos, como os historiadores, também descobriram o grande potencial de informações contidas nos documentos antigos, papiros, tabletes, desenhos em paredes de cavernas,..., além da força das tradições dos vários povos, das mais variadas regiões do planeta, que fazem emergir conhecimentos e práticas de comunidades então extintas ou não, muitas dessas até pouco tempo inconcebíveis, pelo que se conhecia dessas civilizações. Tantos foram os avanços e descobertas que a Matemática os incorporou, em consequência dessas pesquisas e



descobertas, como os sistemas de numeração, a astronomia, aspectos geométricos, alguns até parecendo fantasias, outros provavelmente verdadeiros, existentes nas medidas das pirâmides, nas formas e disposições em que se encontra em relação aos corpos celestes, isto decorrente das escavações nas próprias pirâmides, nas regiões próximas ou em outras partes do planeta, além de muitas outras das quais não se objetiva ficar discorrendo. *A Etnomatemática sendo um campo recente, mesmo entre os matemáticos não há clareza quanto aos seus limites e às suas potencialidades para a educação, estando ainda em fase de consolidação* (in JARDINETTI, apud MOISÉS 1997, p.63), ainda assim dedica muito espaço para o resgate dessas formas de saber, vendo-os como fonte de estratégias e de procedimentos didáticos para um enriquecimento e eficiência do ensino-aprendizagem, aproveitando para valorizar os aspectos históricos como fonte e motivação a fim de contextualizar a matemática e compreender suas relações intrínsecas com os outros campos de conhecimentos.

Foi possível observar, durante o desenvolvimento da pesquisa que, no decorrer e passar dos tempos, aquelas práticas conhecidas através de fontes estatísticas secundárias, os livros de História da Matemática e das Ciências e, mesmo outras fontes escritas ou faladas, perpetuadas pelas tradições, que versam sobre estas práticas, encontram atividades neste mundo pós-moderno que lhes são

similares e até idênticas, como se pode, por exemplo, ver no Método do Tio Osvaldo ou do Adão para o cálculo de áreas dos quadriláteros e de como os egípcios também as calculavam. O que impressiona é a permanência por vários séculos ou milênios dos mesmos procedimentos para as mesmas atividades, vinculados à matemática popular, quando uma outra manifestação dessa mesma matemática, o que viria a ser a matemática erudita, desvencilhando-se de suas amarras projetou-se para o infinito. A distância que separa, hoje, as duas matemáticas(?) geradas por uma mesma cepa, cujas origens se perdem nas profundezas dos tempos, é tão imensa que, aquela, *a atrevida*, distancia-se em busca da erudição, projeta-se, talvez, exponencialmente (um exagero?) enquanto a outra, da normalidade, caminha em uma mesma linha reta ou, quando muito, em outras que se mantêm praticamente paralelas.

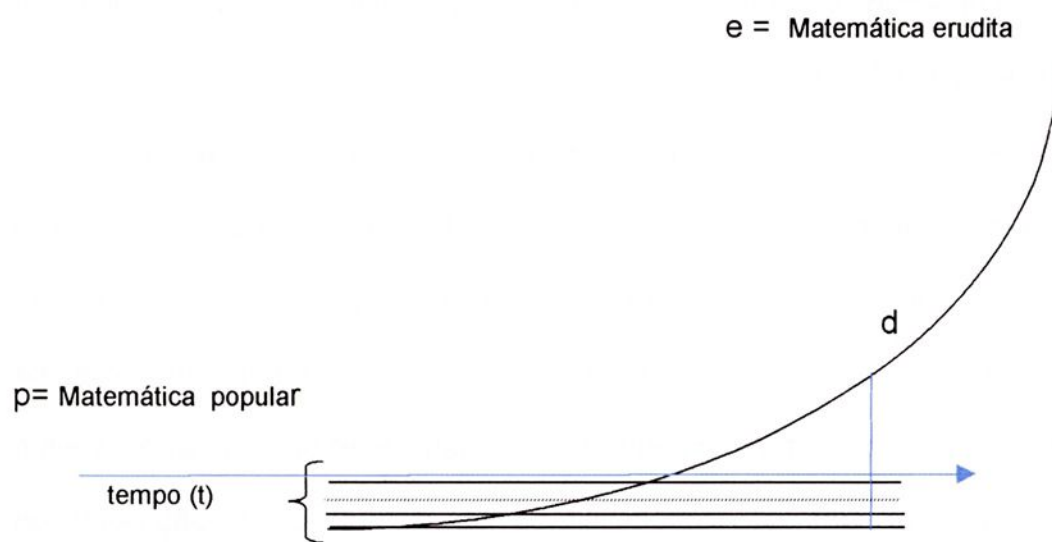


Fig. 1. Relação entre o crescimento e distanciamento das "duas matemáticas", com o passar dos tempos.

Vê-se que: $\lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - p(t)] = d$, onde d assume um valor tão grande quanto se “desejar”, ou melhor quanto se puder alcançar (infinito potencial?). As retas paralelas representam os vários métodos ou técnicas, da matemática popular, que permaneceram através dos tempos como *normalidade científica*. Essa normalidade não é estática como parece, mas sua dinâmica, nem de longe, assemelha-se à da matemática erudita, dos livros, que busca o infinito, pois à medida que nesta se observa um desenvolvimento, cujo crescimento é representado por uma curva como na figura anterior, poucas técnicas, ou quase nenhuma, foram criadas por aquela, que permite uma representação por linhas retas paralelas (ou “quase”), cujas distâncias entre elas, na realidade é muito pequena, representando os possíveis desvios dessa normalidade. Qual a razão de tudo isso? Por que essa diferença toda e por tanto tempo? A questão é puramente educacional e a educação é um produto social e historicamente construído, portanto as hipóteses levantadas na introdução de que os responsáveis pela permanência das práticas milenares aqui tratada é decorrente de substrato inato, inconsciente coletivo ou conhecimento objetivo não se sustentam por si só, mas convergem ou cedem espaço ao processo educacional, de forma mais incisiva, quando relacionamos às formas preconizada por Vygotsky de aquisição e construção do conhecimento, ou seja uma Teoria Histórico-Social. É sabido que a educação sempre foi privilégio de minorias. Atualmente, em grande parte dos países, a educação é



obrigatória por lei, mas a qualidade desta deixa a desejar, pelo abandono dos setores (i)(r)responsáveis dos governos, em todos os níveis, pela própria sociedade elitista que circula nas vertentes do poder ou que a ele pretende chegar e, até mesmo, por setores específicos que dirigem os destinos desta educação, cujos filhos e parentes não freqüentam essa escola obrigatória oferecida aos “menos favorecidos pela sorte”. Ao longo dos tempos não parece ter sido sempre assim, o que não quer dizer que era melhor ou pior, talvez os mesmos problemas e suas conseqüências vistos com outros olhos, de outros ângulos. Não cabe neste momento uma análise detalhada deste exposto.

Nas sociedades primitivas, os homens enquanto viviam e retiravam seus sustentos da natureza, não precisando se locomover por grandes distâncias para alcançar alimentos, havia, muito provavelmente, igualdades entre os componentes dessa sociedade, cada um sabia o que deveria fazer para manutenção da vida do grupo ou tribo; com o passar dos tempos e a escassez de alimentos que obrigavam ao homem a buscar em outras localidades ou cultivá-los, houve necessidade de distribuir tarefas e de alguém que comandasse essas atividades e as controlasse, fazendo o papel de contador ou de economista da tribo o que lhe dava poder de decisão e de comando e, também, o obrigava a adquirir novos conhecimentos sobre a natureza: clima, épocas de plantio, de caça, uso do fogo e de outros instrumentos, de conservação de



alimentos, etc. É o começo da trilha por onde a educação perpassaria até chegar a nossos dias. Cargos de comando seriam atribuídos a poucos, com a maioria destinada à produção de bens de consumo, básicas para a sobrevivência, construção de abrigos ou adaptações naturais para esse fim e do culto aos totem - deuses ou seja, das atividades religiosas. Essa matemática popular de hoje nasceu dessas necessidades. Aqueles que não tiveram a oportunidade de trilhar os caminhos da evolução da matemática e de outros setores em desenvolvimento das sociedades, permaneceram como responsáveis pelas tradições ora investigadas e disseminadas pelo mundo todo, como relíquia disposta a mostrar as origens dos conhecimentos hoje adquiridos, indicando para aqueles que ousam procurar-lhes, um provável caminho do percurso histórico da humanidade.

Os agrupamentos das aldeias vieram a formar as cidades, dando origem a um novo tipo de organização e de novas necessidades, isto por volta do final do Neolítico. Novos conhecimentos deveriam ser buscados, novas técnicas para aumentar a produção e conservação de alimentos e o homem foi obrigado a prever acontecimentos. É o começo da divisão do saber no binômio: teoria e prática. Esses conhecimentos teriam que se perpetuar para as futuras gerações e a forma de ensinamento era a palavra falada, pois não se dispunha de um código sógnico capaz de perpetuar informações como memória exterior ao

homem. De modo geral o chefe-economista também era o chefe religioso e esta ocupação era dominante, pois tratava de explicar os fenômenos naturais pela bondade, indiferença ou ira dos deuses. Poucos tinham acesso a esses conhecimentos. Essa forma de transmissão de conhecimento seletiva deu-se no decorrer de toda história da humanidade e até para os deuses, onde o mito de Prometeu retrata muito bem a centralização de saber e poder, como domínio de alguns, gozando de muitos privilégios. Hoje tem-se a falsa sensação de direitos e oportunidades iguais, mas educação de qualidade é destinada a poucos que lutam para se perpetuar no assento real, tendo ao seu lado direito o cetro do qual emana a figura decapitada da democracia. É interessante notar que essa matemática popular de hoje era a que dava distinção aos sábios no início da civilização. Posteriormente, com os gregos, povos que cultivavam o saber filosófico, por influência dos primeiros filósofos, principalmente Platão, o saber ascendeu da mão do artesão para o plano da abstração, das fórmulas e das figuras imaginadas, das generalizações originadas da concretude do mundo sensível. Mais do que nunca estimulou-se e fez aumentar a diferença entre as formas de representações entre o "mundo prático e o mundo teórico". O sábio grego não precisava mais ter a terra ou pisá-la para saber medi-la, só a reflexão lhe bastava. Todo terreno ou objeto do mundo manipulável tinha seu representante no Mundo das Idéias, da reflexão e era esse objeto(ente) ou traçado ideal que deveria ser conhecido e estudado,



dissecadas suas propriedades. Quem necessitasse, na prática, que os tomassem e os transformassem em aplicações concretas, submetida ao arbítrio dos sentimentos. Poucos tinham acesso ao Mundo Privilegiado das Idéias enquanto a maioria, quase absoluta, continuava de costas para a luz, vislumbrando apenas as sombras daqueles que transitavam sob o Sol¹. A partir daí a Matemática dos sábios, fruto da reflexão, da abstração e da generalização, não mais sequer deu a mão àquela que de uma mesma origem, nasceu-lhe gêmea.

Mesmo tendo de caminhar sozinha, a matemática rude, simples e cheia de arestas, que ela mesma não pode aparar, continuou sua rota firme e severa e utilitária de todos os povos, glória que só ela conseguiu, pois a matemática dos sábios, do alto de seu pedestal, só pode ser vista e adorada por aqueles que irreverentes subiam até ela ou eram chamados como escolhidos dos deuses.

O seu papel social e cultural foi cumprido; esteve na mão do artesão e está na mão do pedreiro, serviu aos agricultores do Egito e de outros tantos cantos do planeta e serve ao cortador de cana e de lenha que alimentam os fornos e caldeiras de indústrias e de usinas; serviu aos donos do saber no início das civilizações e serve hoje aos seus subordinados e nem por isso perdeu o valor, manteve-se firme mas

¹ . Platão. A República, VII, 514a - 519d



serena (foi dura mas não perdeu a ternura) como alguém que tem uma grande missão e não pode fracassar.

Qual seu papel, hoje, numa sociedade altamente sofisticada como a que se vive, grandemente aparelhada com instrumentos de extrema precisão e com técnicos à disposição para grandes projetos? Mede-se, agora, distâncias interplanetárias, traça-se mapas de outros planetas, vasculha-se o interior do átomo. Por que se preocupar com traçados rudes e cálculos imprecisos? Por que amarrar 5, 4 e 3 nós em uma corda e dar-lhe uma forma triangular para obter um canto em ângulo reto? Além da curiosidade de conhecer, entre tantos atributos e emoções, os homens sempre procuraram guardar e preservar aquilo que lhes permitiu fazer história, uma lembrança qualquer, mas que tem para si grande significado: uma foto, um terno de casamento, *um passado*, mas que não é um passado individual, só, de cada um e, sim, de toda uma humanidade e que serviu de base para as primeiras aventuras do homem na busca e construção de seu desenvolvimento. Conhecer e cultivar o passado é fazer história, é olhar para trás e ver que se não tivesse sido assim, *o agora*, provavelmente seria diferente e, então por que não render homenagens e dar o valor merecido àqueles e aquilo dos quais se fez o presente e um lançar-se para o futuro?



À parte de todas as justificativas que poderiam ser arroladas, no sentido de dar significado a esta pesquisa, uma e talvez a mais importante, é o do aspecto didático-metodológico oriundo de sua incorporação nos currículos como resgate de uma construção cultural, característica esta de países milenares que permitem conviver em perfeita simbiose, o antigo e o moderno e dessa relação retiram elementos de aprendizado da economia, sociologia, filosofia, dos mitos que permeiam, sempre, todos os saberes, de forma a não correr o risco de cometer os erros de estratégias tão comum nas propagandas de governos e entidades bastante difundidos pela mídia, na luta para preservação do patrimônio cultural e da própria vida.

O homem, parece reproduzir, em sua vida individual (ontogênese), como elemento constitutivo de uma relação maior, os passos trilhados e conquistados por toda a humanidade (filogênese) e isto é mais uma razão para se conhecer onde viviam, como e o que faziam durante toda essa caminhada até o instante presente. Nada mais justo, então do que aprender com a história das civilizações. Parece uma boa metodologia apresentar aquilo que se deseja que o outro aprenda, seguindo os passos dos “descobridores” ou dos “construtores” do conhecimento atual (com sugerido antes, neste mesmo trabalho) o que, na verdade, os aprendizes estariam reconstruindo seu próprio saber,

postura que se coaduna, perfeitamente, com os orientações pedagógica e metodológicas da atual interpretação do ensino - aprendizagem.

A situação atual da matemática popular², especialmente, no que se refere à geometria, nos moldes constantes neste trabalho, passa por uma crise, talvez não porque seu uso já se tornou inadequado para os fins a que se destina ou aos que vinha sendo destinada, no transcorrer de todo esse tempo aludido, mas porque métodos mais eficientes, mais exatos e de variadas aplicações relativamente fácil e barata, operacionalizadas por técnicos especializados, começam a penetrar nas trincheiras desse reduto de práticas milenares, outrora impenetrável e, ainda mais, substituí-las, brotando uma nova forma de praticar a matemática, um novo paradigma. A demolição e o total desprezo por essa *normalidade* causa certo temor, pela perda dos primeiros elos da construção da fantástica corrente que é Matemática como um todo. Já se tornou difícil encontrar pessoas que utilizam esses procedimentos, principalmente nas regiões da pesquisa, também porque os pequenos produtores, seus maiores utilitários, quase não existem, cedendo espaço aos grandes produtores, cujas técnicas, para estes, sim seriam inadequadas, pois para grandes glebas de terra a diferença existente

² Em tempo: é preciso ressaltar que essa forma de representação da matemática denominada popular, no contexto deste trabalho, é realmente um núcleo mais forte e resistente ao passar dos tempos, que permaneceu praticamente intocável. Outras formas de manifestação de saber incorporados pela população, que passam a fazer parte de seu cotidiano, de forma assistemática sem necessitar de ações reflexivas, passam a tomar parte do repertório dito popular dessa comunidade.



entre a área real e a calculada pelos métodos aqui descritos, assim como os volumes aludidos, alcançariam proporções significativas, além do que dispõem de métodos modernos e de apoio técnico, da forma acima referida. Os proprietários de pequenas áreas não conseguem competir com latifundiários ou grandes empreiteiros e não tendo alternativa, migram para as cidades, abandonando assim as práticas de cálculo; como morador urbano não há necessidade de continuar mantendo essa tradição, que aos pouco vai desaparecendo. Alguns pequenos produtores que ainda insistem em permanecer no campo atribuem, normalmente, aos filhos as tarefas de agrimensor e, estes, muitos deles, já aprenderam as técnicas ensinadas nas escolas. Com isso, essa **forma de fazer matemática**, tende a desaparecer, no dia-a-dia de seus supostos usuários, permanecendo apenas nos manuais de algum pesquisador ou estudioso, fadada ao esquecimento, correndo o risco de não ser lembrada nem como conteúdo histórico, nem como didático. Em termos de Brasil, esse processo de desaparecimento é muito mais acelerado na região Sul do país. Como agourenta profecia (aliás, fato óbvio, parece) muito provavelmente as outras regiões, inclusive de outros países, com pouco desenvolvimento tecnológico também terão o mesmo **fim**. Não se quer com isso negar as conquistas, os avanços da Ciências, mas preservar e difundir suas origens e, partindo delas propor uma “reconstrução” dos mesmos saberes, ora alcançados.



É dever dos educadores, das Secretarias de Educação de Estados, do Ministério da Educação, da sociedade, das escolas e dos professores zelarem pelas tradições, impulsionadoras e origem da história dos homens que, dialeticamente, fazem e são ao mesmo tempo feitos por essa mesma história. A modernidade e as tradições devem e precisam caminhar juntas, assim como uma construção não pode se manter de pé se se retirar de sua *inteiridade* seus alicerces. A história não tem passado, nem presente e se constitui dia-a-dia como se almejasse um futuro.

Esta conclusão deverá ser suplementada pelo exposto nos anexos, acrescentando alguns pontos talvez não respondido neste momento ou representando através de ícones ou de outros símbolos idéias, suposições e questionamentos.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

- AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de matemática, 1984.
- ABREU, Guida Maria de. *Psicologia no trabalho, um enfoque Cognitivo: o uso da matemática por agricultores de cana-de-açúcar*. Psicologia: Teoria e pesquisa, Brasília, v.7, n.2, p.163-177, 1991.
- _____. *O uso da matemática na agricultura: o caso dos produtores de cana-de-açúcar*. Recife: UFPe, 1988. Dissertação (Mestrado em Psicologia).
- ARANHA, M. L. DE Arruda e MARTINS, M. H. Pires. *Filosofando – uma Introdução à filosofia*. São Paulo, Editora Atual, 1983.
- BACON, Francis. *Novum organum*. Col. Os Pensadores. São Paulo, Nova Cultural, 1997.
- BÍBLIA DE JERUSALÉM, Paulus, 1995.
- BOYER, Carl B. *História da matemática*. Traduzido por Elza F. Gomide. São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.
- CASSIRER, Ernest. *Linguagem e mito*. São Paulo, Editora Perspectiva S.A., 1992.
- CHERVEL, André. *História das disciplinas escolares: reflexões Sobre um campo de pesquisas*. In Teoria e Educação nº 2, 1990. Porto Alegre, p. 177-229.
- DESCARTES. *Obras escolhidas*. Rio de Janeiro, Editora Bertrand do Brasil S.A., 1994.
- DOMINGUES, HYGINO H. *Um a fórmula antiga para o cálculo, de*



- Área dos Quadriláteros convexos: aspectos histórico educacionais.* Revista de Educação Matemática (SBEM-S.P.), ano 5, v. 3, p. 43-57, 1997.
- EVES, Haward. *História da matemática para uso em sala de aula. Geometria* Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual Editora, 1993.
- FREIRIA, Antonio A. e DUARTE Jr., Geraldo G. *A cubagem das Árvores.* Revista do Professor de Matemática (São Paulo), nº 26, p. 22-25, 1994.
- GIARDINETTO, José R. B. *Matemática escolar e matemática da vida cotidiana.* Campinas –SP, Autores associados, 1999.
- HELLMEISTER, Ana Catarina P. *Uma aula de matemática no ano 1000.* Revista do Professor de Matemática (São Paulo), nº 42, p. 19 - 27, 2000.
- KNIJNIK, Gelsa. *Exclusão e resistência – Educação matemática e Legitimidade Cultural.* Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.
- KLINE, Morris. *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México, Fondo de Cultura Económica, 1992.
- _____. *O fracasso da matemática moderna.* São Paulo, Ibrasa, 1976.
- MACHADO, Nilson José. *Matemática e realidade.* São Paulo, Editora Cortez, 1987.
- _____. *Matemática e língua materna (análise de uma impregnação mútua).* Cortez Editora, 1990.
- MIORIM, Maria Ângela. *A matemática de povos antigos.* Mini-curso, V EPEM, S.J. Rio Preto, janeiro de 1998.
- MOYSÉS, Lucia. *Aplicações de Vygotsky à educação matemática.* Campinas, Editora Papirus, 1997.
- MOREIRA, M, Antonio & AXT, Rolando. *Tópicos em ensino de Ciências.* Porto Alegre, Sagra, 1991.
- OMNÈS, Roland. *Filosofia da ciência contemporânea.* São Paulo, Editora da Unesp, 1994.



PRÉ-SOCRÁTICOS - Vida e obra. São Paulo, Nova Cultural, 1996
(Coleção Os Pensadores).

RABSON, Gustave. *Introdução à teoria das probabilidades para matemáticos*. Notas de Matemática nº 40 . Rio de Janeiro, IMPA, 1968.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. São Paulo, Record, 1999.

TENÓRIO, R. Moreira. *Computadores de papel: máquinas abstratas para um ensino concreto*. São Paulo, Cortez Editora, 1991.

VITTI, Catarina Maria. *Matemática com prazer*. Piracicaba S. P., Editora da Unimep, 1996.

WHITEHEAD, Alfred North. *Science and the modern world*. Nova York, Macmillan, 1925.

BIBLIOGRAFIA DE APOIO

BECKER, Oskar. *O pensamento matemático*. São Paulo, Editora Herder, 1965.

BELLUOMINI, Giuseppe. *Manuale per la cubatura dei legnami Cilindrici, conici e squadrati*. Editore Ulrico Hoepli Milano, 1950.

BIEMBENGUT, Maria S. e HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo, Editora Contexto, 2000.

BOLETIM GEPEM 29, ANO XVI, 2º semestre de 1991.

BOLT, Brian. *Actividades matemáticas*. Barcelona, Editorial Labor, S.A., 1988.

BRANDÃO, Zaia (Org.). *A crise dos paradigmas e a educação*. São Paulo, Cortez Editora, 1994.

CADERNOS CEDES 40. *História e educação matemática*. Campinas, Papirus, 1996.

CAPRA, Fritjof. *O tao da física*. São Paulo, Cultrix, 1983.



CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa, Sá da Costa, 1951.

CARRAHER, T., et alli. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo, Cortez, 1991.

CASTELNUOVO, Emma. *Geometria intuitiva*. Barcelona, Editorial Labor, 1966.

CHAUÍ, Marilena. *Introdução à história da filosofia dos pré - Socrático a Aristóteles*. São Paulo, Brasiliense, 1994.

COURANT, Richard & ROBBINS Herbert. *O que é Matemática ?* Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

COVENEY, Peter & HIGHFIELD, Roger. *A flecha do tempo*. São Paulo, Editora Siciliano, 1993.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática : da teoria à prática*. Campinas, Papirus, 1996.

_____. *Etnomatemática*. São Paulo, Editora Ática, 1990.

DELACHET, André. *A geometria contemporânea*. Coleção "Saber Atual". São Paulo, Difusão Européia do Livro, 1962.

DUARTE, newton. *Educação escolar, teoria do cotidiano e a escola de Vigotski*. Coleção Polêmicas do Nosso Tempo. Campinas, Editora Autores associados, 1999.

DROZ, Geneviève. *Os mitos platônico*. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1997.

ELIADE, Mircea. *O sagrado e o profano*. São Paulo, Martins Fontes, 1999.

EVES, Haward. *Introdução à história da matemática*. Traduzido por Hygino H. Domingues. Campinas (SP). Editora da Unicamp, 1995.

FETISSOV, A. *A demonstração em geometria*. Moscou, Editora Mir, 1985.

FIORENTINI, D., MIORIN, M. A. , MIGUEL, A. *Contribuição para*



um pensar a educação algébrica elementar. Pro- posições (Cortez- Unicamp), v.4, nº1(10), março-1993.

FOLSCHEID, Dominique & WUNENBURGER, Jean - Jacques. *Metodologia filosófica*. São Paulo, Martins Fontes, 1997.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética*. São Paulo, Abril Cultural, 1980. (Col. Os Pensadores).

FREIRE-MAIA, Newton. *A ciência por dentro*. Petrópolis, Editora Vozes, 1998.

FREUDENTHAL, Hans. *Perspectivas da matemática*. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1975.

GAARDER, Jostein. *O mundo de Sofia*. São Paulo, Círculo do livro, 1991.

GERDES, P. *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Tese de Doutorado. Moçambique, Universidade Eduardo Mondlane, 1987.

_____. *Desenhos da África*. Vivendo a Matemática. São Paulo. Editora Scipione, 1990.

GLEISER, Marcelo. *A dança do universo: dos mitos de criação ao Big-Bang*. São Paulo, Editora Schwarcz Ltda, 1998.

GUELLI, O. *História da equação do 2º grau*. São Paulo, Ática, 1992. Coleção: Contando a história da matemática, v.3.

HELLER, Agnes. *O cotidiano e a História*. São Paulo, Editora Paz e Terra S. A. 2000.

HERÓDOTO, *História*. Traduzido por J. Brito Broca. Rio de Janeiro, Ediouro, s/d.

GRANDO, Neiva Ignês & MORETTI, Mércles Thadeu. *Análise de modelos utilizados na agricultura na determinação de áreas*. Zetetiké, ano 3, nº 4, novembro de 1995, Campinas Unicamp

IFRAH, Georges. *O s números*. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1989.

IMENES, Luiz Márcio. *O volume da tora de madeira*. Revista do Professor de matemática (São Paulo), nº9, p.18-20, 1986.

KASNER, Edward & NEWMAN, James. *Matemática e imaginação*.



- Rio de Janeiro, Zahar, 1976.
- KOMAROV, V. *Nueva astronomia recreativa- ciência popular*. Moscú, Editorial Mir, 1985.
- KUHN, Thomas S. *La estructura de las revoluciones científicas*. México Fondo de Cultura Económica, 1992.
- LAO - TSE. *Tao te king*. Tradução de Huberto Rohden. São Paulo, Alvorada, 1987.
- LE GOFF, Jacques. *A história nova*. São Paulo, Martins Fontes, 1990.
- LE GOFF, Jacques & NORA Pierre. *História : novos objetos*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1988.
- LEWIS, Roy. *Por que almocei meu pai*. São Paulo, Companhia das Letras, 1995.
- LIMA, E. Lages. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro, SBM, 1991.
- _____. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro, SBM, 1987.
- LINS, R Campos & GIMENEZ, Joaquim. *Perspectiva em aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas, Papirus, 1997.
- LISBOA, Luiz Carlos & Andrade, Roberto Pereira de. *Grandes enigmas da humanidade*. São Paulo, Círculo da Livro, 1986.
- MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo, Cortez Editora, 1995.
- _____. *Educação matemática: alegorias, tecnologias e temas afins*. São Paulo, Cortez Editora, 1992.
- _____. (coord). *Atividades em geometria*. São Paulo, Atual Editora, 1996.
- MARQUES, José Francisco. *Introdução a teoria dos números*. São Paulo - Piracicaba, Editora Unimep, 1993.
- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo, Atual Editora, 1998.



NORMAS PARA PUBLICAÇÕES DA UNESP, vol. 1,2,3 e 4, São Paulo, Editora da Unesp, 1994

OBERMAIR, Gilbert. *Quebra – cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo*. Rio de Janeiro, Tecnoprint S.A. 1981.

PAVANELO, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil: Causas e conseqüências*. Zetetiké (Unicamp), ano1, v.1p.7-17, 1993.

PERELMAN, Ya. I. *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú, Editorial Mir, 1975.

_____. *Algebra recreativa*. Moscú, Editorial Mir, 1978.

_____. *Matemáticas recreativas*. Moscú, Editoria Mir, 1979.

PESSOA, Fernando. *Obra poética (volume único)*. Rio de Janeiro, Editora Nova Aguilar S.A., 1986.

POLITZER, Georges. *Princípios fundamentais de filosofia*. São Paulo, Hemus, s/d.

POLYA, G.A. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

Prática Pedagógica Matemática – 2º grau- geometria I, v. 2. São Paulo Secretaria da Educação de São Paulo – Coordenadoria de Normas Pedagógica, 1992.

PROCEEDINGS. *Meeting of the international study group on relations Between history and pedagogy of mathematics*. HPM - Blumenau / Brazil 25 – 27 july, 1994.

Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau. São Paulo: Secretaria da Educação de São Paulo – Coordenadoria de Estudos De Estudos e Normas Pedagógicas, 1988.

Proposta Curricular para o ensino de Matemática – 2º grau. São Paulo, Secretaria da Educação de São Paulo - Coordenadoria De Estudos e Normas Pedagógicas, 1995.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. *Fractais e caos: a matemática de hoje*. São Paulo, Prandiano, 1990.

RONAN, Colin. *História ilustrada da ciência*. v.1, v.2, v.3 e v.4. São Paulo, Círculo do Livro, 1987.

- SANTOS, Christovam Colombo. *As bases culturais da matemática*. Editora Betânia, 1972.
- SCHEFFER, Nilce Fátima & CAMPAGNOLLO, Adriano José. *Modelagem matemática uma alternativa para o ensino aprendizagem da matemática no meio rural*. ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP, V. 6, nº 10, jul./dez. , 1998.
- STRUICK, D. J. *A concise History of mathematics*. New York, Dover Publications, Inc. 1987
- TAHAN, Malba. *As maravilhas da matemática*. Rio de Janeiro, Bloch 1974.
- _____. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro, Editora Record, 1991.
- _____. *O homem que calculava*. Circulo do Livro, 1983.
- TEMAS & DEBATES, Anais do Seminário Nacional de História da Matemática, ANO VII, 1994, nº 4, SBM.
- _____. *Matemática, Ensino e Educação: Concepções Fundamentais*, ANO IV, 1991 nº 3, SBM.
- _____. *A matemática hoje*, ANO I, 1988, nº 1, SBM.
- _____. *A matemática hoje*, ANO II, 1989, nº 2, SBM.
- UPINSKY, Arnaud-Aaron. *A perversão matemática*. Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves, 1985.
- VILLAS BOAS, Orlando e Cláudio. *XINGU: os índios, seus mitos*. São Paulo, Círculo da Livro, s/d.
- WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. Rio de Janeiro, SBM, 1993.

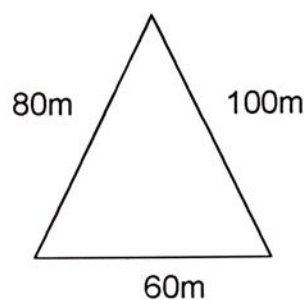
Anexos



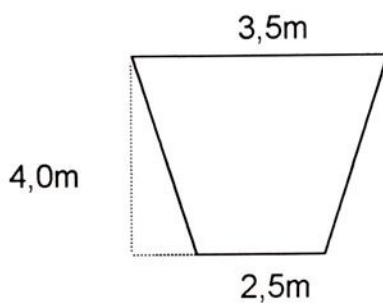
**1) QUESTÕES PROPOSTAS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E
VOLUMES**

1) Qual a área das figuras?

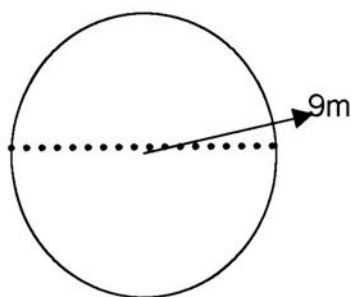
a)



b)

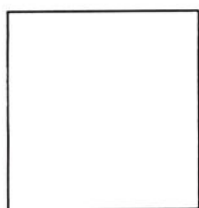


c)



d)

6m



e)

3m

2m



2m

3m

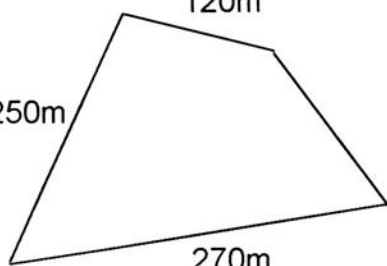
f)

120m

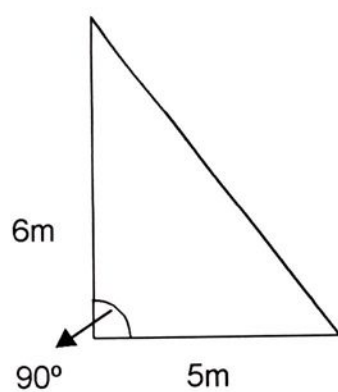
250m

180m

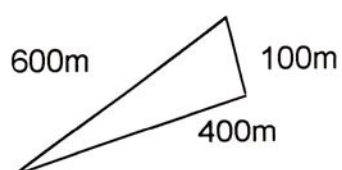
270m



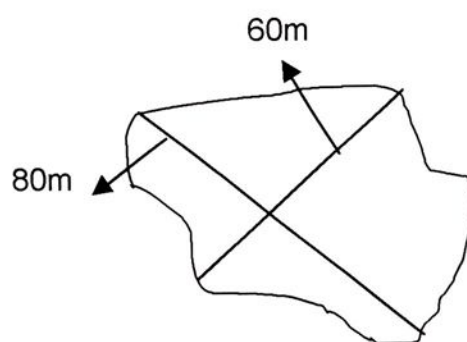
g)



h)



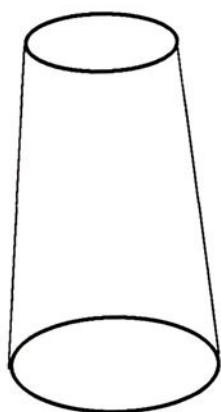
i)



2) Qual o volume, em unidades cúbicas, do troco de cone?

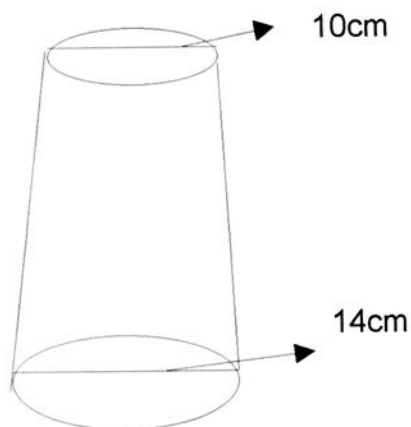
a) Problema da Tábua de ALKMIN:

Perímetro (em volta) = 12cm



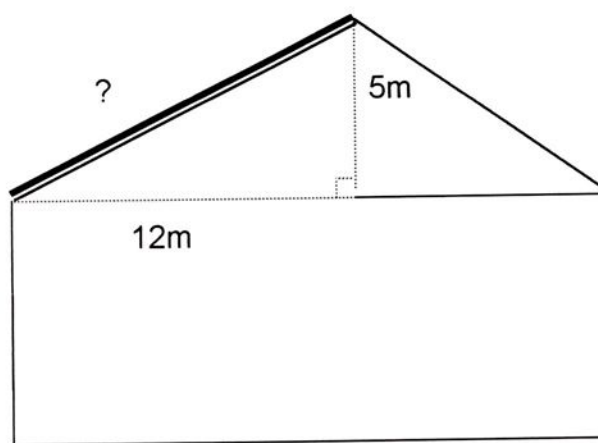
Perímetro (em volta) = 20cm

b)



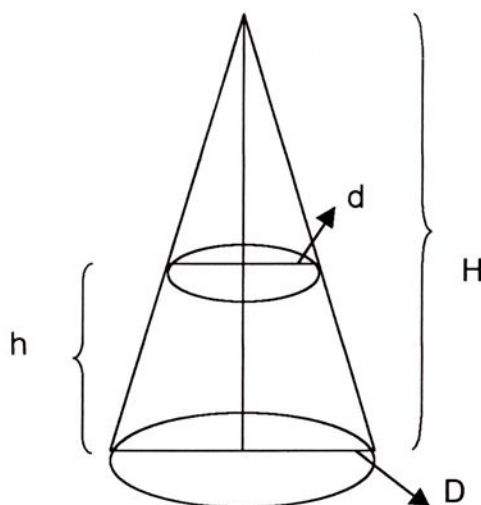
3) Qual o valor do comprimento em destaque?

Telhado de uma casa.



2) RELAÇÃO ENTRE ALGUMAS FÓRMULAS SOBRE CUBAGEM DE MADEIRA

Considere a figura



Seja D o diâmetro da base maior e d o da base menor, H a altura do cone e h a do tronco do cone.

$$\text{Vol.}_{\text{Tronco}} = \text{Vol.}_{\text{T}} = 1/12 \pi [D^2 H - d^2 (H - h)] = 1/12 \pi [H(D^2 - d^2) + d^2 h] =$$

$$\dots\dots\dots = 1/12 \pi H [(D^3 - d^3)/D].$$

Pela semelhança de triângulos, através d cortes feitos no cone, pode-se tirar as relações: $H/D = h/(D - d)$ donde se obtém $h = [(D - d)/D].H$.

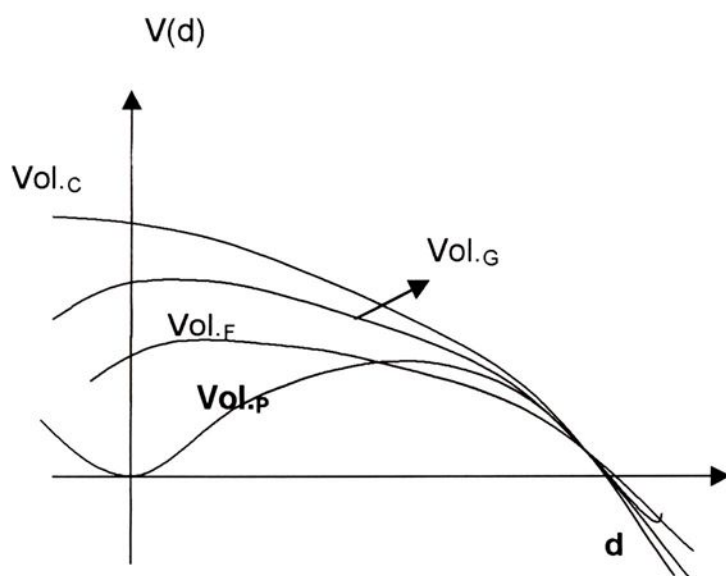
Levando-se em consideração as fórmulas do tronco vistas no corpo do trabalho, ou seja, o Método Geométrico:

$$\text{Vol.}_G = \pi D^2 h/4 = \pi [(D + d)/2]^2 h/4 = \pi/16 (D + d)^2 \cdot (D - d) D \cdot H$$

$$\text{Vol.}_P = d^2 h = d^2 (D - d)/D.H$$

$$\text{Vol.}_F = (C_M/4) h = [\pi(D+d)/8]^2 \cdot (D-d)/DH = \pi^2/64(D+d)^2 \cdot (D-d)/D.H.$$

Fazendo variar d e h e permanecendo fixos D e H , é possível determinar os pontos de máximo das funções Vol._G , Vol._P e Vol._F e determinar o comportamento das mesmas. Assim sendo: para Vol._G e Vol._F o ponto de máximo é $1/3D$ e, para Vol._P o ponto de máximo é $2/3D$; para Vol._C 0 (zero) é o ponto de máximo. Observe o gráfico abaixo.



Será que existe um lugar onde se deve cortar a tora de modo que esse troco resultante tenha o maior volume possível? O corte da ponta mais fina, para que se tenha um maior volume, deve ser feito onde a circunferência da tora (tronco) mede $1/3$ da circunferência maior, ou seja, de diâmetro D , se estiver calculando o volume pelo

Método Geométrico ou pelo Francon e ainda $2/3$ se o Método for o Paulista. Ver **FREIRIA, 1994**.



3) AGULHA DE BUFFON

Cada vez que uma agulha cai, o centro pode estar a uma distância qualquer, ao acaso, da reta mais próxima, salvo, claro que esta distância d deve estar entre 0 e 1 (supondo que a distância entre as retas seja 2). A inclinação da agulha em relação às retas pode ser um ângulo θ qualquer entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

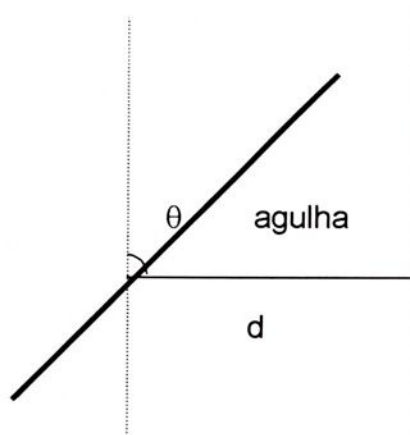


Fig. 1

Vamos escolher, como o espaço de probabilidade, o produto cartesiano $\{-\pi/2, \pi/2\} \times \{0, 1\}$ é o retângulo da figura 2 .

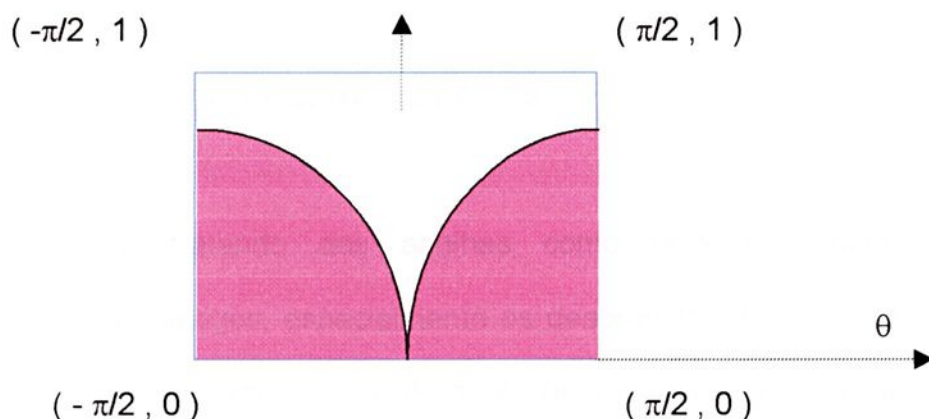


Fig.2

Vamos escolher como o anel Λ , a família de subconjuntos mensuráveis (no sentido de Lebesgue) do retângulo.

Seja $P (A) = 1/\pi \cdot \mu (A)$, onde $A \in \Lambda$ e μ é a medida de Lebesgue .

Vamos supor, agora que a agulha tem comprimento $a \leq 1$.

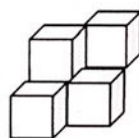
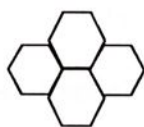
A agulha vai tocar uma reta se e somente se $| a/2 \sin \theta | \geq d$, daí o conjunto A que representa um evento em que a agulha toca a linha é o conjunto sombreado no diagrama acima (fig. 2). Logo

$$P (A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} a/2 \sin \theta . d\theta = a/\pi .$$

Este método pode ser empregado para se fazer uma estimativa de π .

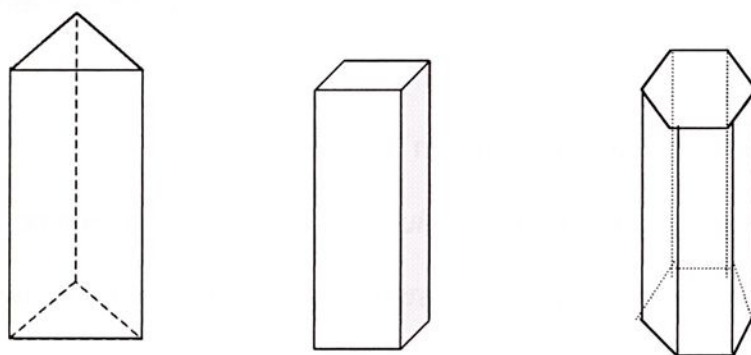
4) ABELHAS E FAVOS

Em se tratando das abelhas como uma sociedade, dificilmente os povos antigos, especialmente os desprovidos de um "alto nível cultural", perceberam a estrutura e operacionalidade dessa organização, o simbolismo das ordens de realização das tarefas específicas de cada segmento que compõe a colmeia. Menos provável ainda, quase certeza, que soubessem das propriedades geométricas ou algébricas e da *alta matemática* envolvidas na construção dos alvéolos, das suas formas e da disposição que ocupam, no conjunto, um em relação ao outro. Para um entendimento, ainda que superficial, transcrever-se-á, na íntegra o artigo do livro *Matemática divertida e curiosa* (TAHAN, 1991, p.44-7). Afirma Maeterlinck, no seu famoso livro sobre as abelhas, que esses animais, na construção de seus alvéolos resolvem um problema de *alta matemática*.



Há nessa asserção certo exagero do escritor belga: o problema que a abelhas resolvem pode ser abordado, sem grandes dificuldades, com os recursos da Matemática elementar.

Não nos importa, porém, saber se o problema é elementar ou transcendente; a verdade é que esses pequeninos e laboriosos insetos resolvem um interessantíssimo problema por um artifício que chega a deslumbrar a inteligência humana.



Todos sabem que a abelha constrói os seus alvéolos para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. A abelha procura, portanto, obter uma forma de alvéolo que seja a mais

econômica possível, isto é, que apresente maior volume para a menor porção de material empregado.

É preciso que a parede de um alvéolo sirva, também, ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, pois do contrário cada pare só serviria a um alvéolo.

Procuraram as abelhas uma forma prismática para os seus alvéolos. Os únicos prismas regulares que podem ser justapostos sem deixar interstício são: o triangular, o retangular e o hexagonal. Foi este último que as abelhas escolheram. E sabem por que? Porque dos três prismas regulares construídos com porção igual de cera, o prisma hexagonal é o que apresenta *maior volume*.

Eis o problema resolvido pelas abelhas: *Dados três prismas de mesma altura, um triangular, outro quadrangular e, ainda outro hexagonal, tendo a mesma área lateral, qual é o de maior volume?*

Uma vez determinada a forma dos alvéolos, era preciso fechá-lo, isto é, determinar o meio mais econômico de cobrir os alvéolos.



A forma adotada foi a seguinte: O fundo de cada alvéolo é constituído de três losangos iguais.¹

Maraldi, astrônomo do observatório de Paris, determinou, experimentalmente, com absoluta precisão, os ângulos desse losango e chegou a $109^{\circ} 28'$, para o ângulo obtuso e $70^{\circ} 32'$ para o ângulo agudo. O físico Réamur, supondo que as abelhas eram guiadas na construção dos alvéolos por um princípio de economia, propôs ao geômetra alemão Köening, em 1739, o seguinte problema: *entre todas as células hexagonais, com o fundo formado de três losangos, determinar a que seja construída com a maior economia de material.*

Köening, que não conhecia os resultados obtidos por Maraldi, achou que os ângulos do losango do alvéolo *matematicamente mais econômico* deviam ser $109^{\circ} 26'$ para o ângulo obtuso e $70^{\circ} 34'$ para o ângulo agudo.

A concordância entre as medidas feitas por Maraldi e os resultados calculados por Köening era espantosa. Os geômetras concluíram que as abelhas cometiam, na construção dos alvéolos, um erro de $2'$ no ângulo do losango de fechamento.²

¹A adoção do fundo romboidal traz, sobre o de fundo plano, uma economia de um alvéolo em cada 50 construído.

Concluíram os homens de ciência que as abelhas erravam, mas entre o alvéolo que construíam e o alvéolo *matematicamente certo* havia uma diferença extremamente pequena.

Fato curioso! Alguns anos depois (1743), o geômetra Mac Laurin retomou novamente o problema e demonstrou que Köening havia errado e que o resultado era traduzido precisamente pelos valores dos ângulos dados por Maraldi – $109^{\circ} 28'$ e $70^{\circ} 32'$.

A razão estava, pois, com as abelhas. O matemático Köening é que havia errado! ♦

Os alvéolos com formas de prismas hexagonais, são construções próprias das abelhas européias, algumas abelhas silvestres constróem suas colmeias de formas diferentes, com um poliedro pouco conhecido, ou seja o octaedro truncado. Este poliedro é obtido seccionando o octaedro regular em cada uma de sua seis pontas, a $1/3$ de cada vértice, todas as aresta de cada um desses vértices. *“Mais uma propriedade interessante do octaedro truncado: de todos os poliedros que podem se aglomerados sem deixar vazios ele é o mais econômico: para uma dada superfície ele é o de maior volume. (...) Como se vê as abelhas são mestres e economia”* (IMENES, 1983,p.7).

2. Essa diferença é tão pequena que precisa ser medida com instrumento de precisão.



5) RECONFIGURAÇÃO E TRANSFORMAÇÃO

A *Reconfiguração* é um conceito usado por PADILLA SANCHES, citado em GRANDO, 1995, p.79, que é também uma transformação e segue o seguinte procedimento:

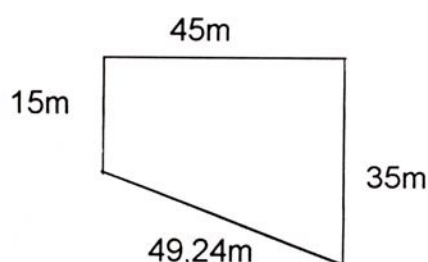
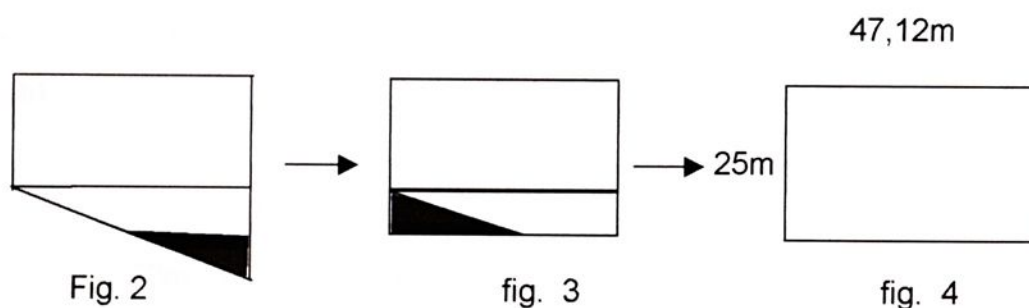


fig. 1 Esta é a figura dada inicialmente.

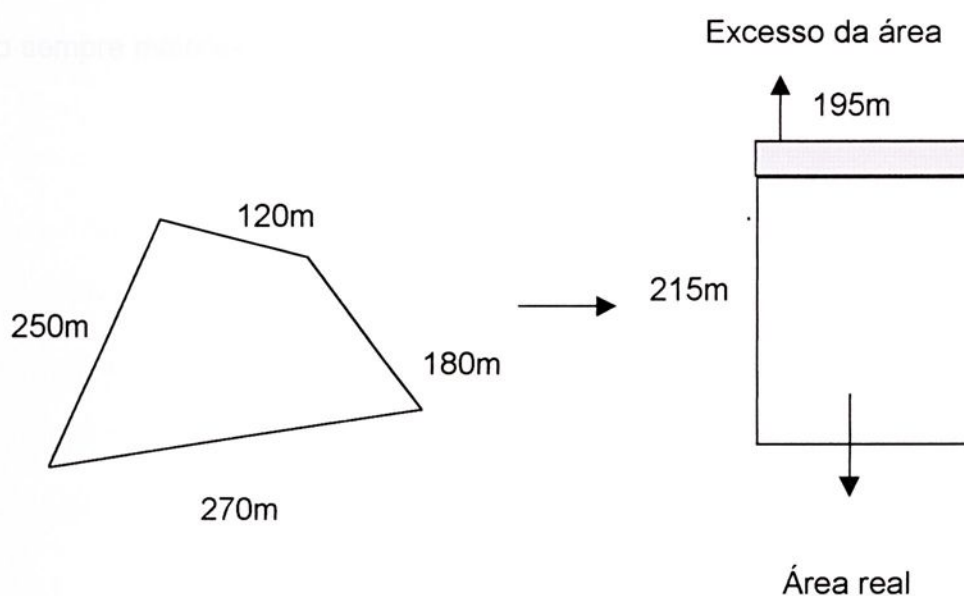


Nestas figuras variam os ângulo, o perímetro, mas a área permanece constante. A figura 4 é a figura transformada da figura 1

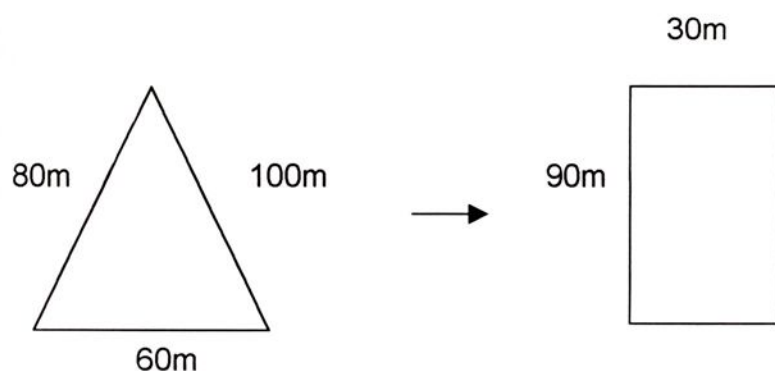
ou da figura 2, não importando, neste caso, o preenchimento de parte da figura.

Grando apresenta dois quadriláteros e dois triângulos e suas transformadas. No caso deste trabalho, apenas dois exemplos serão suficientes para apreender o conceito.

a)



b)



Neste caso o perímetro permanece constante, variando a área; esta é 12,50% maior na figura transformada que na inicial, para o exemplo b). No item a) a figura transformada (retângulo), cujos lados medem 195m e 215m deriva do que se convencionou chamar Método do Tio Osvaldo ou de Adão (conforme KNIJINIK). Uma outra variante, transformada do quadrilátero inicial, é um quadrado de lado 205m (Método do Jorge). Em ambos os casos as áreas das transformadas são sempre maiores que a real.



6) AS FORMAS GEOMÉTRICAS E A NATUREZA

Muito provavelmente, não escaparam, aos mais humildes e incultos seres humanos primitivos, nas mais remotas e isoladas tribos, os mais variados aspectos estéticos naturais provocadores de emoções, como fonte de prazer e deslumbramento.

Assim como hoje a visão do arco-íris, deve ter sido apreciada por todos os homens. Como o exemplo de escrito antes da Era Cristã que exalta essa visão: *“Olha para o arco-íris e bendize aquele que o fez: mui formoso é no seu resplendor. Girou o céu com o círculo da sua glória e as mãos do Excelso lhe deram toda a sua extensão”* (Eclesiastes 43, v. 12-13).

Não há quem não se tenha deslumbrado com a visão de uma paisagem montanhosa, vista ao longe e que não a tenha desenhado no papel ou no chão e até feito um esforço extra para guardá-la na memória como aquele momento que deveria ser eternizado. As crianças em seus primeiros anos, em casa ou nas escolas tentam reproduzir essas emoções desenhando as paisagens que todos conhecem: uma cadeia de

montanhas ao fundo, por entre elas o Sol, uma casinha nas encostas, umas árvores, coqueiros, pássaros voando, mesmo fora de proporções e sem perspectiva, mas reproduzem aí seus sentimentos e desejos de fixá-la para sempre. A criança em suas produções de arte tem muito a ver com o homem primitivo, não existe aí qualquer determinismo imposto pela natureza, inato, é uma questão puramente de desenvolvimento cultural, de agir sobre as coisas com planejamento. Quem já não se extasiou em observar, nos céus, as formações nas nuvens, de figuras reais ou imaginárias? A observação das mulheres(homens) pelos homens (mulheres) e mesmo pelas mulheres(homens), não é puramente sensual ou libidinosa, mas emotiva, causadas pelas formas geométricas suaves, muitas delas relacionadas com o segmento (e o triângulo) áureo.

SIMETRIAS....

A Beleza, o Belo, aquilo que deflagra emoções nas pessoas vem cumprindo seu papel desde o começo das civilizações, mesmo porque no início destas, as emoções ocorrentes nos homens eram basicamente causadas pelos atributos naturais e, muito posteriormente, na tentativa de captar e copiar o Belo e de expressar a Beleza captada, os homens ainda na tentativa de perenizar os momentos de emoções, criaram a Arte. No início, rude de traçados simples, estilizado pela falta de materiais adequados e de técnicas, para depois se



transformar em cópias quase perfeitas, até a invenção da fotografia. O homem já não precisava mais reproduzir a natureza, a eternidade (grande período de tempo, suficiente para garantir a qualidade e integridade de algo antes de sua corrupção) da representação estaria garantida pela técnica, bastaria só pegá-la e fazer, e deixar fluir as emoções. A arte, projeta-se então na direção não, agora da representação da natureza física, visível do homem, das montanhas, das flores, do firmamento, ..., do concreto palpável, mas do concreto significativo, do abstrato geradores dessas emoções, conseqüências não só do toque e, sim da percepção, das múltiplas relações do homem com a Natureza, com os outros homens e, muito mais, consigo mesmo. Estavam criadas, assim, as categorias de arte, as escolas e os estilos da compreensão moderna do Universo "Total". Contudo, assim como o Classicismo foi uma tentativa de retorno e resgate da Filosofia e da Arte, principalmente, Grega, a impressão que se tem, é de uma volta ao antigo, o resgate desses valores com técnica moderna e vestimenta nova, sem, no entanto, permanecer idênticas, pois a grande diferença reside no fato de que o homem primitivo representava a Natureza e seus fenômenos, para continuar sentindo as mesmas emoções de um dado momento, ao passo que o homem "moderno" tem suas emoções e procura representá-las na Arte, sem que o sentido inverso deixe de existir, entretanto não se determinando prevalência.



7) ÁREAS, PERÍMETROS E CONSTRUÇÕES

Já se fez referência, no corpo deste trabalho, das construções de casas, principalmente na zona rural, encontrando também nas cidades, normalmente de forma quadrangular, tanto na totalidade da construção, ou seja, na sua forma externa, como nas dimensões dos cômodos, repartições internas. As construções mais antigas, na maioria delas, não eram dotadas de forros, mas mesmo quando passadas por reformas e forradas, tendo sua área máxima e, também, o maior volume de ar. Isto é qualidade de vida!

Via-se muito, em colônias (agrupamentos de casas onde moravam ou ainda moram os colonos, pessoas que prestam serviços a um fazendeiro ou proprietário de terras), muito raramente ainda se vê, casas germinadas, de “parede-e-meia”³ com formas retangulares propriamente dita, mas suas dimensões internas mantinha-se mais ou menos na forma de um quadrado. Os talhões de plantações de grandes dimensões, de cana, arroz, café ou... , são quase sempre quadrados, pois mantendo-se o mesmo perímetro, obtém-se a maior área; já em

³. Paredes-meias é forma correta : é a parede que serve de separação para dois prédios contíguos. A forma como está escrita no texto faz parte do repertório popular e é (era) muito comum na zona rural.



plantações menores, tipo “horta caseira” as dimensões fogem da forma de um quadrado, para facilidades de “regas”, de colheitas, mas as dimensões do terreno que contém os canteiros, guardam sua forma quadrangular, dando a entender que a *normalidade* de tal conhecimento, durante séculos, provém de uma impregnação transmitida pela tradição (ou provém de uma lógica interna, própria da raça humana, inata?). Não parece ser nada já determinado *à priori*, escrito no código genético como uma mácula impregnada que alguns seres humanos seriam obrigados a carregar como uma espécie de castigo ou quem sabe por benesse da natureza. Também já se falou do livre arbítrio, em momentos anteriores deste trabalho, e, se se aceitar essa condição, o que parece razoável, e justifique é pensar no homem escolhendo seu destino ou este sendo imposto por outro homem, coisa bem natural e fruto da cultura criada pelo próprio homem, sem interferência do transcendente e do divino; isto faz pensar, e formular hipóteses de que o homem é produto do aproveitamento e do esforço em se realizar com e entre as relações que se estabelecem com o meio ambiente natural e cultura.

Interessante é observar, principalmente nas periferias das zonas urbanas, as construções atuais, financiadas pelos planos de habitação, as formas das casas são geralmente quadradas - além de muito pequenas- justamente para melhor aproveitamento da área do terreno. Uma construção barata e com a maior área possível, dentro dos



padrões de gastos projetados pelas empresas construtoras. Conforme referência já feita, na questão do mobiliário, este é o que pouco importa(?) para as famílias de baixo poder aquisitivo, então a prioridade passa a ser o aproveitamento do espaço(área) útil.



RESUMO: O presente trabalho, através de pesquisa de campo e da própria vivência do autor, tem por fim pontilhar histórica e geograficamente alguns conceitos da matemática popular, geradores, a partir de um dado momento, da matemática acadêmica, que permaneceram quase por completo inatingíveis pelas mudanças provocadas pelo acúmulo das culturas elaboradas pelos homens. A pesquisa circula, basicamente, em torno de elementos, que no dizer de Thomas Khun transformaram-se em **normalidade científica**. Tais elementos, além de outros, que herdaram as mesmas características khunianas, são os cálculos de áreas ou de medidas de elementos relevantes de figuras ou terrenos com formas geométricas regulares ou não, ou ainda, de volumes de figuras inteiras ou seccionadas formando troncos. Deu-se realce a formas quadrangulares, triangulares, círculos, cilindros, cones e troco de cones, destinados, na pesquisa, a pessoas com experiências práticas nos trabalhos da zona rural e outros afazeres congêneres, assim como elementos que lembram a utilização do Teorema de Pitágoras, estes dirigidos, principalmente, a pedreiros e carpinteiros. Não se teve a intenção de esgotar ou de se aprofundar no assunto, por ser demais vasto, mas resgatar as origens e as tradições afins de um campo de saber, que permanece praticamente intacto desde os primórdios da humanidade quando esta sentiu necessidade de produzir seu próprio alimento por razões do aumento das populações tribais e a escassez destes mesmos alimentos, obrigando ao homem "primitivo" delimitar as porções de terrenos destinados ao plantio de espécies para prover suas necessidades básicas, nascendo desta forma a **geometria**, que ainda hoje, em muitas de suas aplicações, guarda uma profunda identidade com as práticas do passado, como se o tempo tivesse parado.

Palavras-chave: Matemática popular e acadêmica; normalidade científica; áreas; volumes; tronco de figuras geométricas.



ABSTRACT: The present work, elaborated through field reserch and from the aurther's own existence, aims to stipple historical and geographically some concepts of the popular mathematics, generators, starting from a given moment, of the academic mathematics, that stayed almost entirely unattainable for the changes provoked by the accumulation of the cultures alaborated by men. The research circulates, basically, around geometric elements, that in Thomas Khun's saying **scientific normality**. Such elements, besides others, that inherited the same khunian's characteristics, are the calculations of areas or of important elements of illustrations or lands with regular geometric forms or not, of volumes of whole illustrations or section, forming logs. Preference was given to such as square, triangles, circles, cylinders, cones and logs of cones, destined, in the research, to people with experiences in the work in rural zones and other tasks akin, as well as elements that remind of the use of the Pitágora's Theorem, these driven bricklayers and carpenters mainly. The intention was never draining or deepening into the subject, for being too vast, but to rescue the origins and the kindred traditions of a field of knowledge, that has remained intact practicaly since humanity's origins, when men felt the need to produce their own food for reasons of the increase of the tribal populations and the shortage of this same very food, forcing the "primitive man" to delimit the portions of lands destined to planting of species to provide his basic needs, being born this way the **geometry**, that still today, in many of its applications, keeps a deep identity with the pratices of the past, as if time had stopped.

Keywords: Popular and academic mathematics; scientific normality; areas; volumes; logs of geometric illustrations.



