UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

CLAUDIO WOERLE LIMA

REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E A MEDIÇÃO DE SEGMENTOS: Possibilidades com Tecnologias Informáticas

Rio Claro (SP)

2010

510.07 Lima, Claudio Woerle
L732r Representações dos números racionais e a mediação de segmentos : possibilidades com as tecnologias informáticas / Claudio Woerle Lima. - Rio Claro : [s.n.], 2010
199 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcus Vinicius Maltempi

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Frações. 4. Decimais. 5. Geometria dinâmica. 6. Reta numérica. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E A MEDIÇÃO DE SEGMENTOS: Possibilidades com Tecnologias Informáticas

CLAUDIO WOERLE LIMA

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Área de concentração: em ensino e aprendizagem da matemática e seus fundamentos filosófico-científicos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi

Rio Claro (SP)

2010

CLAUDIO WOERLE LIMA

REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E A MEDIÇÃO DE SEGMENTOS:
Possibilidades com Tecnologias Informáticas

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Área de concentração: em ensino e aprendizagem da matemática e seus fundamentos filosófico-científicos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi – UNESP - RC

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba – UNESP – RC

Prof. Dra. Siobhan Victoria Healy – UNIBAN - SP

RESULTADO: APROVADO

Rio Claro, 01 de Abril de 2010

DEDICATÓRIA:

Dedico esse trabalho a três pessoas especiais, que em algum momento de suas vidas se sacrificaram para que eu pudesse prosseguir na incansável busca por aprendizado.

Meus pais, Isaac e Rute e minha amada esposa Vanessa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, a qual proveu, através do programa Bolsa Mestrado, recursos para o desenvolvimento da presente pesquisa.

Ao Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi, pelas valorosas contribuições e orientações, pela sua paciência e amizade.

À Prof. Dra. Lulu Healy e ao Prof. Dr. Marcelo C. Borba, pelas contribuições dadas no exame de qualificação.

Aos meus professores de graduação, em especial ao Prof. Geraldinho (*in memoriam*), que acreditou em mim e me deu forças para iniciar os estudos de pós-graduação e ao Prof. Dr .Vanderlei Marcos do Nascimento, um dos primeiros incentivadores e motivadores dessa pesquisa.

Minha tia Nilce, que muito me motivou e auxiliou, perguntando, questionando, discutindo e contribuindo assim com o desenvolvimento do trabalho.

Meus familiares que me entenderam e contribuíram de diferentes maneiras para que eu pudesse estudar. Em especial minha prima Angélica que me ajudou com as transcrições e diagramação das atividades, e minha irmã Telma, que leu e corrigiu essa dissertação.

Aos amigos do GPIMEM, Ana, Adriana, Maria Helena, Maurício, Paula, Regina, Ricardo, Sandra, Silvana e Sueli, dentre outros, que sempre se dispuseram a contribuir com esse trabalho.

Aos alunos participantes da pesquisa, sem vocês essa conquista não seria realidade.

A diretora da escola Cesarino Borba, Profª. Flor. Obrigado pelo apoio na minha atividade profissional e por autorizar a realização da pesquisa na escola.

Meus grandes amigos, Thiago, Junão, Anely. Meu amigo Rogério. Vocês são especiais.

Um agradecimento especial à minha querida esposa Vanessa, por toda sua dedicação e por ter tornado essa conquista o nosso sonho.

Agradeço a Deus, por permitir que essa conquista acontecesse.

RESUMO

Essa pesquisa investiga as contribuições que a exploração dos números racionais como medidas de segmentos, em um programa de geometria dinâmica, podem trazer ao entendimento de frações, decimais e da reta numérica entre outras representações dos racionais. A pesquisa se fundamenta em evidências históricas e resultados de pesquisas que mostram a importância do significado de medida para o entendimento dos números. Através das tecnologias informáticas viu-se uma alternativa para a exploração da medida de segmentos. Essa pesquisa é baseada no processo de medição de segmentos, em teorias sobre visualização, experimentação e representações múltiplas. Também se inspira em preceitos construcionistas. Essa investigação qualitativa se baseou na metodologia de experimentos de ensino, em que foram formados dois grupos com alunos de 6ª série / 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual do interior de São Paulo. Esses grupos participaram de encontros em que foram desenvolvidas atividades que envolviam: divisão de segmentos; frações como medidas de segmentos; operações de adição e subtração de frações utilizando os segmentos; processo de medição para criação dos números decimais; relações entre decimais e frações; adição e subtração dos números decimais; adição e subtração de frações e decimais. As atividades realizadas se basearam nos recursos de visualização e experimentação proporcionadas pelo software de geometria dinâmica "Régua e Compasso". O trabalho evidenciou a importância da aprendizagem das representações múltiplas dos números racionais e como as tecnologias informáticas (computadores, software de geometria e calculadoras) podem atuar nessa aprendizagem. A pesquisa também evidência que a utilização de recursos tecnológicos pode modificar a matemática da sala de aula, proporcionando aos estudantes entendimentos qualitativamente diferentes sobre os objetos matemáticos estudados.

Palavras-chave: Processo de medição. Frações. Decimais. Geometria dinâmica. Reta numérica.

ABSTRACT

This research investigates the contributions that the exploration of rational numbers as measure of segments, using geometry dynamic software, can introduce into the understanding of fractions, decimal numbers and the number line, amongst other rational number representations. The research is motivated by both historical evidence and evidence from the research literature showing the importance of the measure meaning to the understanding of rational numbers. Digital technologies offer an alternative method for the exploration of segments measure, as yet under-explored in the field of mathematics education. This research is based on an approach to numbers as measurements of segments, which draws from theories emphasizing the role of visualization, experimentation and multiple representations in mathematics learning. It is also inspired by a constructionist perspective. The qualitative investigation made use of the teaching experiment methodology, in that two groups were formed with students of 6th grade / 7th year within an elementary school of a public school in the state of São Paulo. These groups took part in research sessions where they developed activities that involve: division of segments; fractions as measure of segments; operations of addition and subtraction of fraction using segments; measurement for decimal numbers creation; relations between decimal numbers and fractions; addition and subtraction of decimal numbers; addition and subtraction of fractions and decimal numbers. The activities exploited the resources visualization and experimentation proportioned by the dynamic geometry software "*Compass and Rule*". Analyses of the data collected pointed to the importance of the understanding of multiple representations for rational numbers and to the role that digital technologies (computers, geometry software and calculators) can play in this learning. This research, also, indicates that the application of technological resources can modify the mathematics in the classroom, and contribute to student understanding of a nature qualitatively different from the conventional curriculum treatment of the mathematical objects in question.

Keywords: Measurement. Fractions. Decimal numbers. Dynamic geometry. Number Line.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E OBJETIVO

1.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo abordo a gênese da presente pesquisa, a qual está diretamente relacionada com minha formação como professor e pesquisador e também com minhas opções pessoais. Procuro deixar claro os objetivos desse trabalho, também destaco a relevância desse estudo e as possíveis contribuições para a área de Educação Matemática.

Nessa pesquisa busco explorar as tecnologias da informação aplicadas à Educação Matemática, especialmente no que tange ao ensino dos números racionais. Esses números têm se mostrado de difícil entendimento para os estudantes e são causadores de alguns obstáculos nos processos de ensino e aprendizagem.

Essas dificuldades, observadas durante a prática pedagógica e constatada em algumas pesquisas, como Romanatto (1998), Woerle (1999), Valera (2005), Behr *et al.* (1983), entre outras, são atribuídas tanto ao fato de os números racionais possuírem representações múltiplas quanto ao fato de se poder atribuir diferentes significados a mesma representação. Essas dificuldades de ensino estimularam-me a pesquisar como as tecnologias da informação poderiam contribuir para o ensino desse conteúdo, de forma a possibilitar a exploração dos números racionais em suas representações múltiplas e a aprendizagem dos significados desses, em especial para os números racionais como medida de grandezas contínuas, tanto na forma fracionária quanto decimal, para isso foi utilizado o processo de medição de segmentos.

O estudo dos números através da medição de segmentos (BARONI E NASCIMENTO, 2005) foi um dos motivadores do desenvolvimento da presente pesquisa, de modo que ao conceber as atividades que seriam propostas aos alunos, um dos objetivos foi trabalhar, através de construções geométricas, com a medição de segmentos e que através desse processo de medição, os estudantes pudessem explorar alguns dos significados das frações (parte/todo, razão e medida) e dos decimais (como representantes da medida). Outros trabalhos como Davydov (1975b), Morris (2000), Lesh, Post e Behr (1987) também fundamentam essa opção.

Com o intuito de explorar os números fracionários e decimais como representantes da medida de uma grandeza, nesse caso o comprimento de segmentos, produzi atividades para serem realizadas por estudantes em um *software* de geometria dinâmica (S.G.D.) O *software* escolhido foi o Régua e Compasso (R.e.C.), o qual oferece as ferramentas necessárias para as explorações desejadas, as ferramentas usuais dos S.G.D., o recurso de ampliação e redução e a gravação e execução de macros.

Essas atividades visavam inicialmente familiarizar os estudantes com o programa e com conceitos básicos de geometria para então explorar a medição de segmentos. Ao conceber as atividades utilizei as construções e perguntas para proporcionar experiências aos alunos que os auxiliassem a construir significados para os números racionais.

Foi traçado como objetivo dessa pesquisa buscar indícios das contribuições que o processo de medição de segmentos, realizado em um *software* de geometria dinâmica pode trazer ao ensino e aprendizagem dos números racionais.

Para orientar o trabalho resumo esse objetivo na seguinte pergunta diretriz:

> ***Como a exploração de frações como medida e o processo de medição de segmentos, explorados via software de geometria dinâmica, contribui para o entendimento dos números racionais em suas representações múltiplas?***

1.2 Trajetória Pessoal e Profissional e Delineamento da Pesquisa

Essa pesquisa foi diretamente influenciada pela minha vida estudantil e profissional, por esse motivo farei um breve relato dessa trajetória.

Iniciei os meus estudos na UNESP de Rio Claro, em 2000, concluindo a Licenciatura em Matemática no final de 2004. Durante esse período comecei a lecionar como professor substituto para ensino fundamental e médio, também trabalhando como professor particular.

Durante o ano de 2005 tive a oportunidade de lecionar a disciplina de Física em uma Escola Estadual de Limeira (SP). No ano seguinte, ingressei como professor efetivo de Matemática da rede pública estadual, lecionando desde então Matemática para turmas do Ensino Fundamental, Médio e Ensino de Jovens e Adultos. Nessa prática, pude refletir sobre os erros cometidos pelos estudantes, percebendo que, independentemente das séries/anos em que lecionava, uma parte significante das dificuldades enfrentadas pelos estudantes se referia às operações e representações dos números racionais, bem como a relação entre essas representações.

A dificuldade em atribuir significados para essas representações e, conseqüentemente, realizar as operações de forma correta, gerava um obstáculo para a resolução de problemas e construção de novos conceitos, como, no estudo de funções, representarem pontos do gráfico com coordenadas fracionárias, ou realizar operações com números fracionários ou decimais. No caso do ensino de Física, a aplicação de fórmulas com coeficientes fracionários e cálculos que envolvem notação científica são exemplos de situações em que os estudantes encontram dificuldades.

Durante esses anos, também trabalhei com turmas de 5ª e 6ª séries[1] ou 6º e 7º ano, nas quais os números fracionários e decimais são estudados. Tendo em mente as dificuldades que os estudantes apresentavam nas séries/anos posteriores, me preocupei em como esse conteúdo deveria ser trabalhado, para que os números racionais pudessem ser aprendidos pelos alunos.

Essa preocupação me motivou a olhar mais atentamente para a pesquisa de mestrado de Woerle (1999), com a qual já havia tido contato na época de sua realização, ao ajudar na confecção de materiais, digitação e formatação do trabalho, mas na época em que ainda cursava o ensino médio, sem nenhuma pretensão de ser professor. Agora, com um olhar de professor, apliquei parte das atividades lá propostas na turma de 5ª série/6º ano em que lecionava.

Nesse novo olhar percebi que as atividades propostas e a forma de trabalho tinham ligação com o trabalho de Baroni e Nascimento (2005), que apresenta um tratamento para os números reais através da medição de segmentos, o qual tinha estudado recentemente, ao cursar a especialização em Matemática Universitária na UNESP de Rio Claro.

Ambos os trabalhos exploram fortemente a representação dos números na reta, seja na forma fracionária ou decimal. Esse tratamento me causou interesse e pude me aprofundar nesse estudo ao desenvolver a monografia de conclusão do curso de especialização (LIMA, 2007), orientado pelo Prof. Vanderlei Marcos do

[1] O ensino fundamental de nove anos, e conseqüente a nova nomenclatura foram adotadas em muitas escolas públicas e privadas, porém na rede pública do estado de São Paulo essa nomenclatura começou a ser adotada em 2009 e estará presente no ciclo II somente no ano 2013. Por esse motivo escolhemos adotar as duas nomenclaturas.

Nascimento, na qual realizei um levantamento da teoria necessária para fundamentar esse tratamento através da geometria axiomática.

O processo de medição de segmentos objetiva encontrar um “símbolo” que represente o comprimento exato de um segmento de modo biunívoco[2]. Esse símbolo encontrado é o que chamamos de número real.

Basicamente, a medição de segmentos é a repetição de um processo que se inicia com a escolha de um segmento como unidade de medida e a verificação de quantas vezes essa unidade “cabe” no segmento a ser medido. Repete-se o processo, dividindo a unidade de medida em dez partes e tomando uma das partes como a nova unidade de medida. Esse processo se repete indefinidamente até que a unidade usada “caiba” um número exato de vezes no segmento.[3]

O processo de medição de segmentos foi objeto de estudo de Pasquini (2007) ao ser aplicado em um curso de análise real para pós-graduandos, e acena para uma possível aplicação desse tratamento no ensino fundamental e médio, resultado das discussões presenciadas no curso e de entrevistas com os alunos da disciplina.

Na disciplina cursada por mim durante a especialização, as divisões da unidade em dez partes e as visualizações do processo se repetindo indefinidamente baseavam-se na intuição e capacidade de abstração de cada estudante e quando necessário por alguns esboços no papel, ou seja, exigia um amadurecimento do pensamento matemático para compreender bem o assunto. Como os estudantes da educação básica ainda estão desenvolvendo essa forma de pensar, acredito que teriam grande dificuldade em compreender o processo na maneira proposta na disciplina. Por outro lado, acredito que se fosse possível realizar as divisões através de construções geométricas, portanto com exatidão, e também visualizar concretamente a repetição do processo algumas vezes, possibilitando também outras explorações do processo de medição, seria possível explorar esse estudo na educação básica.

Uma possibilidade para o estudo da medição de segmentos é através das tecnologias informáticas, o uso de um *software* de geometria dinâmica para as

---

[2] Isto é, para todos os segmentos congruentes entre si existe uma medida e, no outro sentido, para cada medida todos os segmentos representados por ele são congruentes. Em Lima (2007) é definino um conjunto chamado de segmentos livres, formado pelas classes de equivalência dos segmentos congruentes. Dessa forma a definição da relação biunívoca se torna mais simples. Optei por não trazer essa discussão matemática a essa dissertação.

[3] Exponho o processo de medição mais detalhadamente em 3.4.

construções geométricas possibilita a repetição do processo "inúmeras" vezes, a ampliação da construção, a representação com exatidão, etc.

Ao procurar um *software* de geometria com os recursos que desejava como a ampliação da construção (*zoom*) e a repetição das construções geométricas, ou que possibilitasse a inserção de ferramentas através de um *plug-in* ou alteração do código fonte, encontrei o *software* Régua e Compasso. Ao explorá-lo, percebi que não seria necessária a programação de novos comandos/ferramentas, pois o *software* possui recursos para as tarefas desejadas, a saber, gravação de macros[4], para a repetição das construções, e ampliação (zoom) do desenho, que pode ser realizada "ilimitadamente[5]", possibilitando uma repetição do processo de medição em pedaços "microscópicos" do segmento.

Influenciado pelas experiências como professor e pelas aulas e monografia do curso de especialização, concebi as primeiras idéias da presente pesquisa. Com o amadurecimento dessas idéias e delineamento dos objetivos iniciei essa pesquisa visando analisar a possibilidade e as contribuições do uso do processo de medição de segmentos através das tecnologias informáticas no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, nas suas representações múltiplas, de forma a favorecer o entendimento desses números pelos estudantes.

1.3 Relevância da Pesquisa

Dentre pesquisas realizadas em educação Matemática, envolvendo os números fracionários e decimais, Silva (1997), que analisa a introdução dos números fracionários e as visões de professores das séries iniciais; Catto (2000), que analisa as formas como esses números são abordados em duas coleções de livros didáticos; e Romanatto (1998), que destaca aspectos epistemológicos e metodológicos para que ocorra uma compreensão dos números racionais, sendo portanto uma pesquisa que analisa aspectos teóricos do ensino e aprendizagem.

Valera (2003) destaca as diferenças entre o uso escolar e social dos números racionais, e ressalta a importância desses usos estarem em concordância. Woerle (1999) e Bezerra (2001) propõem e analisam seqüências didáticas para o ensino

---

[4] Pequenos programas produzidos pelo usuário dentro de um *software*, para a realização de algumas tarefas ou, nesse caso, construções geométricas.
[5] No sentido de que pode ser ampliado quantas vezes o usuário quiser.

dos números fracionários e decimais, sendo que o primeiro apresenta uma seqüência trabalhada com alunos de 6ª série/7º ano e o segundo propõe uma seqüência para alunos de 3ª série /4º ano.

Por outro viés, Moreira e David (2004) destacam as diferenças entre tratamentos e importância dados aos números racionais na educação básica e nos cursos de licenciatura em Matemática. A importância da formação dos professores de Matemática e de como eles entendem e compreendem os números está presente no estudo de Pasquini (2007), que analisa uma proposta de tratamento para os números reais, por meio da medição de segmentos, explorando assim os números na forma decimal, quando estudados por professores de Matemática. Nesse estudo, professores entrevistados e a pesquisadora destacam a necessidade desse tratamento ser pesquisado com alunos da educação básica.

No contexto internacional têm-se expressivas pesquisas, como o *The Rational Number Project*[6], desenvolvido nos Estados Unidos desde 1979 até atualmente. É um projeto de pesquisa que envolve pesquisadores de diversas universidades, tem produzido diversos livros, artigos e materiais pedagógicos, sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais, entre eles: Behr *et al. (1983)*, mostra as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes americanos, relacionadas aos números racionais e atribuídas ao fato de o currículo enfatizar mais os procedimentos de cálculo em detrimento da compreensão dos significados das representações e das operações.

Outras dificuldades apontada por Behr *et al*. (1983) são as diversas maneiras que um número racional pode ser representado, os diversos significados a ele atribuídos (subconstrutos), e a necessidade de estruturas cognitivas diferentes para a compreensão de cada um dos subconstrutos. Sendo cada um dos subconstrutos importante para o entendimento dos racionais, Behr *et al.* (1983) destaca a medida e a relação parte-todo como de importância fundamental no processo de aprendizagem. *"This subconstruct is fundamental to all later interpretations and is considered by Kieren (1981) to be a important language-generating construct." (*BEHR *et al., 1983)*

[6] Ver: http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject/

Também preocupado com as dificuldades de aprendizagem Post *et al.* (1993) destacam o fato de que os professores de matemática apresentam baixos índices de conhecimento matemático e pedagógico, ou seja, os professores não compreendem a matemática que devem apresentar aos estudantes. Como Moreira e David (2004), Post *et al.* (1993) se preocupa com a formação de professores para o ensino de matemática.

No mesmo programa de pesquisa Lesh, Post e Behr (1987) discutem a questão da representação na matemática e a aprendizagem dos números racionais. Bright *et al.* (1988) analisam a utilização da reta numérica para a aprendizagem de frações. Com a mesma fundamentação teórica Wong e Evans (2008) estudam o ensino de frações como medida de grandezas.

Em outra linha de pesquisa, Davydov e TSvetkovich (1991) (*apud* MORRIS, 2000) argumentam que existem vantagens significativas em introduzir o ensino das frações através da medição de quantidades, discretas e contínuas, tendo em vista que historicamente frações e medidas foram desenvolvidas simultaneamente e que o processo de medição está relacionado com a idéia de contar, utilizada na aprendizagem dos números naturais, de maneira que propõem um currículo para o ensino desse conteúdo baseado na medição, o qual foi estudado por Morris (2000) em um experimento de ensino e será discutido na seção 3.4 .

Nota-se que a gama de pesquisas envolvendo números racionais é muito grande e as aqui destacadas representam uma pequena fração das mesmas, porém é possível notar que as dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos no ensino e aprendizagem dos números racionais são indiscutíveis. Essas pesquisas também indicam que dentre os subconstrutos dos números racionais, a compreensão do subconstruto medida é de fundamental importância para o entendimento desses números.

É nesse contexto que essa pesquisa se insere, buscando contribuir com as pesquisas que envolvem o ensino e a aprendizagem dos números racionais, propondo alternativas para o ensino desses números, por meio da análise de uma proposta metodológica que explora os números racionais via medição de segmentos em um *software* de geometria dinâmica, buscando indícios de como essa abordagem pode contribuir para o entendimento dos racionais.

Em outro sentido, também contribui com as pesquisas que envolvem o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na educação, tendo em vista que ainda não foram encontradas pesquisas que tratem especificamente do ensino dos números racionais utilizando tais tecnologias. Sendo assim, espero que aspectos observados em outros contextos, como Borba e Villareal (2005), Benedetti (2003), Scuccuglia (2006), Maltempi (2005), Rosa (2004), Papert (1980) entre outros, também possam ser observados nessa pesquisa.

1.4 Estrutura da Dissertação

Estruturei essa dissertação em cinco capítulos e as considerações finais, esse capítulo inicial, no qual apresentei os motivos para a escolha do tema, os objetivos e a relevância da pesquisa.

No Capítulo 2 apresento o referencial teórico, concernente ao uso das TIC na educação e a contribuição de algumas pesquisas envolvendo os números racionais.

No Capítulo 3 apresento alguns aspectos relevantes dos números fracionários e decimais, o seu surgimento histórico e também os tratamentos dados em alguns livros didáticos, visto que também contribuíram para direcionar algumas das escolhas tomadas nesse trabalho.

O Capítulo 4 apresenta a metodologia de pesquisa adotada e relata como a pesquisa foi realizada, justificando nossas escolhas quanto aos sujeitos e a forma de trabalho, bem como em relação à elaboração das atividades.

No Capítulo 5 apresento parte dos dados coletados, de forma que possa ser feita uma análise a fim de alcançar os objetivos traçados e responder a pergunta de pesquisa.

Nas considerações finais analiso os resultados apresentados no Capítulo 5 e finalizo com os caminhos a serem traçados.

No próximo capítulo apresento a fundamentação teórica que direcionou o desenvolvimento das atividades a serem propostas aos alunos, e a realização dos encontros. Também mostro como as tecnologias podem auxiliar no ensino, provendo novos recursos à professores e alunos e como esses recursos devem ser utilizados.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS DO USO DAS TIC NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nesse capítulo são apresentadas as teorias relevantes para o desenvolvimento dessa pesquisa, que subsidiam os caminhos trilhados e a análise dos dados coletados. Inicio o capítulo com a relação entre as tecnologias de informação e comunicação (TIC) e a Educação, destacando sua importância para a mesma. Exponho também sobre o construcionismo, e aspectos relacionados com a visualização e experimentação em matemática. Além disso é abordada a questão das representações múltiplas dos objetos matemáticos e concluo com a apresentação do *software* utilizado na coleta de dados.

2.1 As Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação

Atualmente as TIC estão cada vez mais presentes na vida dos estudantes. Com a popularização das *lan-houses*, mesmo estudantes das classes mais pobres podem acessar a Internet e seus recursos, como jogos, jogos *on-line*, comunicadores instantâneos, editores de texto, e toda sorte de ferramentas informáticas, a um custo baixo, se comparado aos custos da compra de um computador e do acesso mensal à Internet.

Com a evolução e popularização dos aparelhos celulares, muitos dos estudantes, principalmente nos grandes centros, como São Paulo, possuem aparelhos que permitem a troca de mensagens, fotos, vídeos e acesso à Internet.

Hoje cada vez mais as crianças e os adolescentes estão imersos nesse mundo tecnológico, com computadores, celulares, *vídeos-game*, *players* de música e vídeo, televisão, etc. Enquanto isso, a escola, na maioria das aulas, se utiliza de giz, lousa, caderno, lápis e borracha.

Não faz sentido em uma sociedade tecnológica que as tecnologias digitais sejam evitadas nas salas de aula. Esforços têm sido feitos no sentido de inseri-las; muitas escolas públicas no estado de São Paulo recebem computadores e outros equipamentos para salas de informática, mas sempre em quantidade limitada, em torno de dez computadores a cada três ou quatro anos. Tais equipamentos são utilizados principalmente em atividades extraclasse, em programas como Escola da Família, que realiza oficinas nos finais de semana, ou outros projetos da escola. Minha experiência profissional mostra que o uso efetivo dos computadores durante as aulas ainda é mínimo.

Sei que cada escola tem uma realidade diferente, e também não vejo o uso de computadores e outras tecnologias como solução pura e simples para os problemas educacionais, porém, concordo com Papert: “a tecnologia por si não implica em uma boa educação, mas a falta de tecnologia automaticamente implica em uma má educação” (2001, p. 2 *apud* MALTEMPI, 2005).

Acredito que o desafio é encontrar uma maneira de inserir as tecnologias nas aulas, de forma que elas potencializem a aprendizagem dos alunos, atuando como ferramentas que auxiliem na construção do conhecimento, ao invés de repetirem velhas práticas pedagógicas.

Vejo o uso dos computadores como uma nova mídia educacional, em que “o computador passa a ser uma ferramenta educacional, uma ferramenta de complementação, de aperfeiçoamento e de possível mudança na qualidade do ensino” (VALENTE, 1993, p.6). De forma que o computador e outras tecnologias são vistos como ferramentas que devem ser utilizadas para buscar informações e auxiliar na solução de problemas, ou seja, auxiliar na construção do conhecimento.

Nessa pesquisa utilizo os computadores e calculadoras como ferramentas para auxiliar a aprendizagem, possibilitando, através de seus recursos, experiências qualitativamente diferentes aos alunos e professores.

É nesse sentido que concordo com Borba e Penteado (2001, p. 17) quando dizem que

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica.” [...] O computador deve ser inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais,etc.

É nessa perspectiva que enxergo o uso dos computadores e outras tecnologias na escola, não como algo milagroso, portador das soluções para o ensino, mas sim como algo necessário, algo que a atual sociedade tecnológica exige.

Também é claro para mim que não é com políticas públicas de dez computadores por escola que essas mudanças irão acontecer. Vejo novas perspectivas com programas como o UCA (Um Computador por Aluno), que está sendo implementado no Brasil[7]. Essas ações, aliadas a formação dos professores para o uso das TIC, a meu ver, criam expectativas e uma perspectiva de mudança, em que os estudantes poderão ter acesso efetivo às ferramentas tecnológicas.

Tem-se, portanto, a perspectiva de uma inserção cada vez maior das novas tecnologias em sala de aula, sendo assim, faz necessário inserir essas mídias de modo que proporcionem experiências e modos de aprender qualitativamente diferentes das experiências da sala de aula tradicional. Para que isso ocorra é necessário pesquisar maneiras de colaborar com essas mudanças.

Inserido nessa perspectiva de uso dos computadores, está o construcionismo, reconstrução teórica que foi desenvolvida por Seymour Papert, influenciado pela teoria construtivista de Jean Piaget.

> Papert deu início na década de 60 ao desenvolvimento da linguagem Logo de programação, a qual possibilita ao aprendiz usar a Matemática como um material para criar figuras, animações, jogos e simulações no computador, entre outras coisas. O computador torna-se, então, uma ferramenta viabilizadora de ambientes de aprendizagem, no qual as idéias construcionistas podem ser amplamente exploradas (MALTEMPI, 2005, p.4)

Esses ambientes de aprendizagem podem ser ricos em experiências para os estudantes, ambientes em que eles podem ter acesso a informação, experiências e interações dos mais diferentes tipos. É nesse contexto que o construcionismo procura se focar no aluno, em suas idéias, procurando favorecer novas descobertas.

Esses ambientes de aprendizagem foram explorados inicialmente com a linguagem Logo de programação, a qual propicia aos alunos a oportunidade de comandarem uma tartaruga que se movimenta na tela, deixando um rastro, possibilitando a criação dos mais diversos desenhos geométricos. Com um projeto do tipo de desenho desejado e pensando em como escrever os comandos para a tartaruga é que os aprendizes trabalham diversos conceitos matemáticos, no que ficou conhecida como a geometria da tartaruga (PAPERT, 1994).

No Brasil, a teoria construcionista vem sendo pesquisada e aplicada por diversos pesquisadores, entre eles, Valente (2002), Maltempi (2004, 2005), Rosa (2004) e Richit (2005), tendo seus conceitos repensados e ampliados.

Um aspecto destacado nesses trabalhos é o pressuposto de que os aprendizes devem estar engajados em atividades que alimentem seu processo

[7] Em 2010 a licitação da compra de 150 mil computadores foi realizada, sendo que o programa deve ser implementado nesse ano.

construtivo (MALTEMPI, 2005), de forma que estejam empenhados na produção de algo significativo para eles, ou seja, algo que gostem e que portanto os estimulem a falar e pensar sobre o que estão fazendo.

É nesse sentido que o uso dos computadores pode se tornar relevante, pois permitem o desenvolvimento de projetos em diferentes contextos, seja na linguagem Logo de programação, ou em outras atividades que não fazem uso direto de programação, como simuladores, desenvolvimento de páginas Web (MALTEMPI, 2005), desenvolvimento e aplicação de jogos tipo RPG (ROSA, 2004), ou no estudo de geometria analítica (RICHIT, 2005).

A perspectiva construcionista foca-se nas idéias dos aprendizes, buscando enriquecer o ambiente de aprendizagem, possibilitando aos indivíduos novas experiências. Nesse sentido que os computadores podem colaborar, pois possibilitam inúmeros tipos de interações e experimentações.

Essas pesquisas mostram que as idéias construcionistas não se baseiam somente na geometria da tartaruga, mas que podem ser aplicadas em diferentes contextos, como em *software* de geometria dinâmica, no desenvolvimento de páginas web e de jogos RPG (*Role Playing Game*), etc., ou seja, ao explorar ferramentas que possibilitam aos aprendizes experimentar e explorar pode-se constituir ambientes de aprendizagem.

Nessa pesquisa, me inspirei nessas concepções, ao buscar enriquecer o ambiente de aprendizagem, propiciando aos aprendizes novas experiências com os números racionais e ao guiá-los em explorações e experimentações desses números.

Outros aspectos explorados nas atividades da coleta de dados são as possibilidades de visualização e experimentação proporcionadas pelo *software*. A visualização e a experimentação são importantes para a aprendizagem em matemática. Na próxima seção exponho a fundamentação teórica para a utilização da visualização e da experimentação nas atividades.

2.2 Visualização e Experimentação

A palavra visualização, e outras variações, como imagens, habilidade espacial, imagens visuais, aparecem na literatura em diferentes perspectivas e definições, como mostrado por Borba e Villarreal (2005). As definições apresentadas pelos autores, na minha visão, se completam em um mosaico, que nos permite compreender a amplitude desse conceito.

Uma dessas perspectivas diz que a “visualização engloba a habilidade de interpretar e compreender informações figurais, e a habilidade de conceituar e explicar relações abstratas e informações não figurais em termos visuais” (BORBA; VILLAREAL, 2005, p.80 – tradução nossa). Essa definição apresenta a visualização como dois processos, um no sentido de compreender as informações visuais, e outro no de transformar informações não visuais em informações visuais.

Outra visão apresentada pelos autores é de Zimmermann e Cunningham, que afirmam: “visualização em matemática é um processo de criação de imagens (mentais, ou com papel e lápis, ou com o auxílio da tecnologia) e usadas com o objetivo de obter uma melhor compreensão matemática e estimular o processo de descobrimento matemático” (BORBA; VILLAREAL, 2005, p.80 – tradução minha).

Goldenberg (1998) também define visualização como uma habilidade necessária aos alunos:

> Os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de: criar, manipular e "ler" imagens mentais de aspectos comuns da realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados com objectos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objectos ou idéias que nunca foram vistos. (p.1)

Percebe-se nessas definições, que a visualização pode ser considerada como um processo ou uma habilidade, mas, de qualquer modo, vê-se nas definições que a visualização é considerada necessária para a aprendizagem matemática.

Quando falo em visualização em matemática, estou considerando as representações visuais que são feitas dos objetos matemáticos. Podem ser gráficos, diagramas, construções geométricas ou esboços. Todos esses recursos visuais são o que considero visualização, mais do que isso, a visualização também é um processo mental, em que interpreta-se um problema, ou uma expressão algébrica, através de imagens mentais ou esboços, ou seja, é uma capacidade que deve ser desenvolvida.

Nesse sentido visualizar não é apenas o ato de ver, mas sim de imaginar e interpretar os objetos matemáticos. A construção de imagens mentais (visualização interna) só se torna possível a partir das experiências externas.

Em praticamente todas as áreas a visualização é uma ferramenta praticamente indispensável. Até mesmo para resolver problemas ou demonstrar teoremas, em muitos casos, se faz necessário o acompanhamento por desenhos ou outros tipos de representações gráficas. É por meio da visualização que se constroem imagens mentais dos objetos estudados.

Didaticamente, pode-se considerar que a visualização é indispensável para a aprendizagem matemática. É indiscutível a necessidade de utilizar-se de representações para compreender os objetos matemáticos, e para que sejam criadas representações mentais desses objetos.

Associado com a visualização está a experimentação. Quando é possível visualizar, também é possível manipular, modificar, alterar, imaginar situações, realizar testes. Uma definição ou um teorema, não diz muito se não existir a possibilidade de visualizar, exemplificar as situações e pensar em todas as hipóteses.

Nesse sentido, as tecnologias digitais também podem colaborar com a aprendizagem matemática, pois elas proporcionam visualizações e experimentações qualitativamente diferentes do papel e lápis. Recursos como computadores com *software*, calculadoras gráficas, entre outros, permitem ao aluno a construção de gráficos, tabelas, construções geométricas, etc., com precisão, de maneira ágil e rápida, de modo que, uma construção que levaria vários minutos para ser realizada com os recursos tradicionais, ou que até mesmo não poderia ser realizada, quando se utiliza da tecnologia, demorará poucos minutos ou segundos.

Os computadores com *software* permitem manipular grande quantidade de informações, fazer simulações, construir e manipular gráficos, e também construções geométricas, realizando assim visualizações, experimentações e conjecturas sobre o objeto estudado, ou seja, um aspecto fundamental é que essas mídias “permitem que o aluno experimente bastante” (BORBA; PENTEADO, 2001, p.34).

Essas possibilidades mudam os processos de experimentação e construção e permitem uma mudança nas estruturas de ensino e aprendizagem, conforme afirmam Borba e Penteado (2001, p.36): “As mídias informáticas associadas a pedagogias que estejam em ressonância com essas novas tecnologias podem transformar o tipo de matemática que é abordada em sala de aula”.

Nesse sentido “a experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usual no ensino tradicional, e permitindo uma nova ordem: investigação e, então a teorização” (BORBA; PENTEADO, 2001, p.39).

Dessa forma, uma pedagogia que explore as potencialidades da tecnologia deve se basear na experimentação, proporcionando aos aprendizes a oportunidade de investigar, testar possibilidades, levantar hipóteses, para então teorizarem e generalizarem suas hipóteses.

2.3 Representações Múltiplas

Números, funções, conjuntos, grandezas, matrizes, vetores, estruturas, categorias e alegorias são, entre outros, objetos matemáticos (MACHADO, 1994). Esses objetos, dos mais simples aos mais abstratos, constituem a matemática, e são a esses objetos que estudantes buscam conhecer e compreender.

Esses objetos são frutos das idéias, das estruturas matemáticas e conceitos primitivos. Por exemplo: ponto, reta e plano, são objetos que não estão acessíveis, ou são palpáveis, eles dependem da imaginação e dos sistemas de representação utilizados. Quanto mais se pode dizer sobre outros objetos, como funções e números (BONOMI, 2007). Conhecer e entender esses objetos depende das representações que são feitas.

As representações não são únicas, um mesmo objeto matemático, como exemplo, uma função, pode ser representada por uma expressão algébrica, uma tabela, um gráfico, etc. Isto é o que vários autores chamam de representações múltiplas (Borba e Penteado, 2001).

Lesh, Post e Behr (1987)[8] classificam as representações utilizadas em sistemas de representação, que são: (1) escritas baseadas nas experiências adquiridas no mundo real; (2) Modelos manipulativos (material dourado, discos, tangram, etc.); (3) Imagens, diagramas e modelos figurais; (4) Linguagem falada e (5) Símbolos matemáticos escritos. No caso dos números racionais, como em outros, existem diferentes tipos de representações em cada um dos sistemas, ou seja, possuem representações múltiplas.

---

[8] Foi consultada a versão on-line, desse e outros textos. Como o número das páginas podem não serem as mesmas do original, escolhi por omitir o número da página.

As transformações são mudanças feitas dentro do mesmo sistema, por exemplo, entre duas representações figurais de uma mesma fração, ou também a troca de uma fração por outra equivalente no mesmo sistema. As conversões ou translações são mudanças de um sistema para outro, como quando o aprendiz passa da escrita simbólica para uma representação figural, por exemplo.

De acordo com Lesh, Post e Behr (1987) , independentemente das escolhas dos sistemas de representação para o objeto matemático, não somente a compreensão da representação em si é importante, mas as conversões entre elas (mudanças entre as representações) e as transformações (dentro da representação) também são importantes para a aprendizagem. Na Figura 1 são mostrados os tipos de representações e as conversões entre elas. Por exemplo, quando os estudantes estudam sobre os números racionais devem associar e aprender a alterar a escrita simbólica com as representações figurais ou objetos manipulativos com a linguagem falada e suas próprias experiências do mundo real.

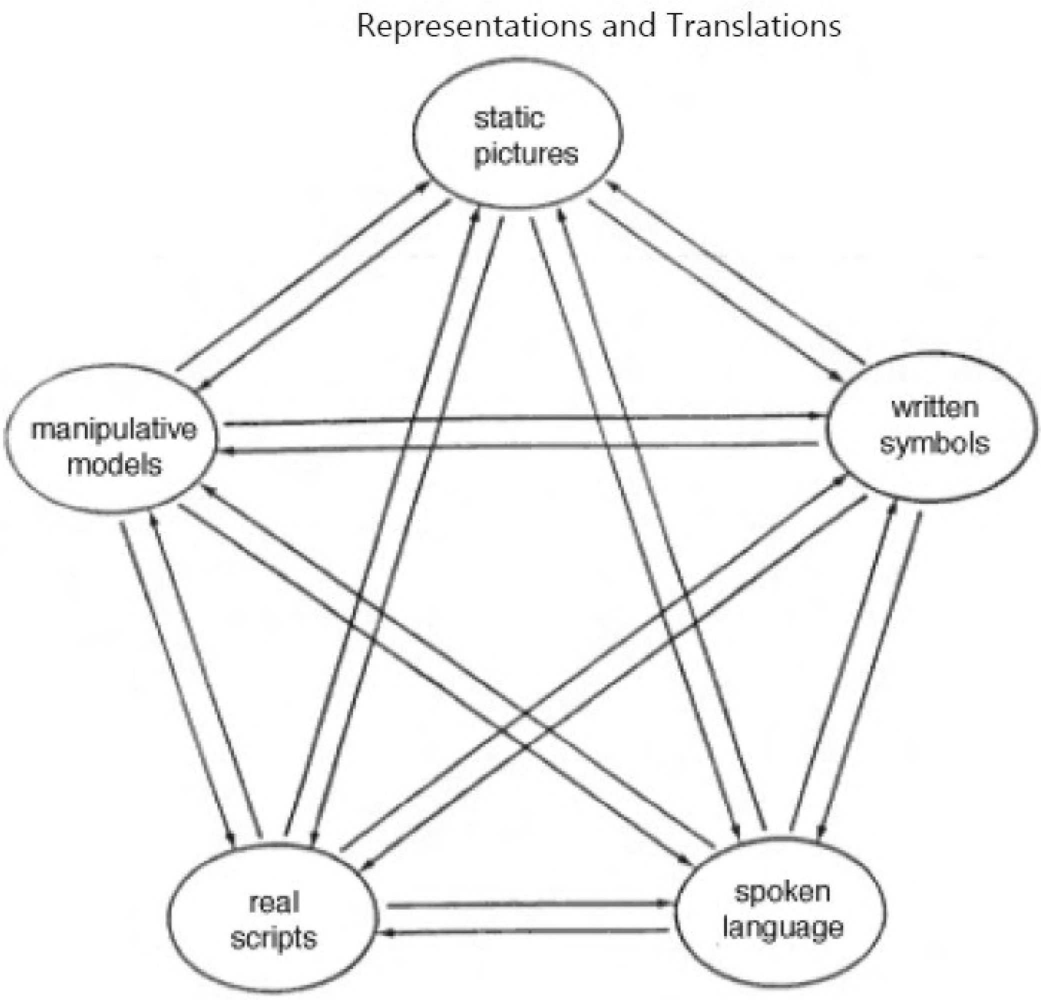


Figura 1: Representações e Conversões. Lesh, Post e Behr (1987)

Sobre as dificuldades apresentadas pelos estudantes nas conversões entre as representações os autores concluem que:

> Furthermore, we have found that these "translation (dis)abilities" are significant factors influencing both Mathematical learning and problem-solving performance, and that strengthening or remediating these abilities facilitates the acquisition and use of elementary Mathematical ideas[9]. (LESH, POST e BEHR, 1987)

No caso dos números racionais, têm-se como representações simbólicas a fracionária, decimal, notação científica e porcentagem, e diversos tipos de representações figurais ou geométricas, sendo que cada uma das representações destaca aspectos diferentes dos números racionais. É nesse sentido que várias pesquisas, como Lesh, Post e Behr (1987), Galén (2008), Woerle (1999), Duval (2003), Borba e Penteado (2001), defendem o uso das representações múltiplas concomitantemente na educação.

É também por esse motivo que Borba e Penteado (2001) defendem o uso das tecnologias informáticas, pois essas viabilizam o uso de diversas representações simultaneamente. No caso dos autores, esse uso modifica o estudo de funções, de modo que o caminho para conhecer funções passa a ser a coordenação das suas representações, privilegiando o uso das diferentes representações, e não somente um tipo, ou seja: “conhecer sobre funções passa a significar saber coordenar representações” (Borba e Penteado, 2001, p.30)

Sobre a coordenação das representações, vejo na informática a possibilidade de experimentação das relações e coordenação das múltiplas representações dos números racionais. Essa coordenação pode propiciar diferentes experiências aos aprendizes da educação básica, no mesmo sentido de que para conhecer os números racionais faz-se necessário o estabelecimento de relações e saber coordenar representações.

Tenho, portanto, considerado que com o uso das tecnologias informáticas, em especial um *software* de geometria dinâmica e também calculadoras, é possível explorar múltiplas representações dos números racionais, de forma que possam ser construídos, pelos aprendizes, significados mais ricos para esses números. Isto é, além de compreender cada uma dessas representações, também possa estabelecer

---

[9] Além disso, temos verificado que essa "(dis)capacidades" na conversão, são fatores importantes que influenciam a aprendizagem matemática e o desempenho na resolução de problemas, e que reforçando ou corrigindo essas habilidades facilita a aquisição e utilização de idéias matemáticas elementares.

relações entre as representações, entendendo que se está falando do mesmo objeto matemático, o número racional.

2.4 O *Software* Régua e Compasso

Nessa pesquisa, foi utilizado o *software* de geometria Régua e Compasso (R.e.C). Esse *software* é desenvolvido pelo professor René Grothmann, da Universidade Católica de Berlim, originalmente chamado de *Zirkel und Lineal* (Z.u.L.), também conhecido pela sigla em inglês C.a.R. (*Compass and Rule*). Trata-se de um programa *open source*, isto é, possui o código aberto, podendo ser modificado e melhorado por qualquer programador interessado. Isso faz com que o programa receba constantes atualizações. A Figura 2 mostra a interface do R.e.C.

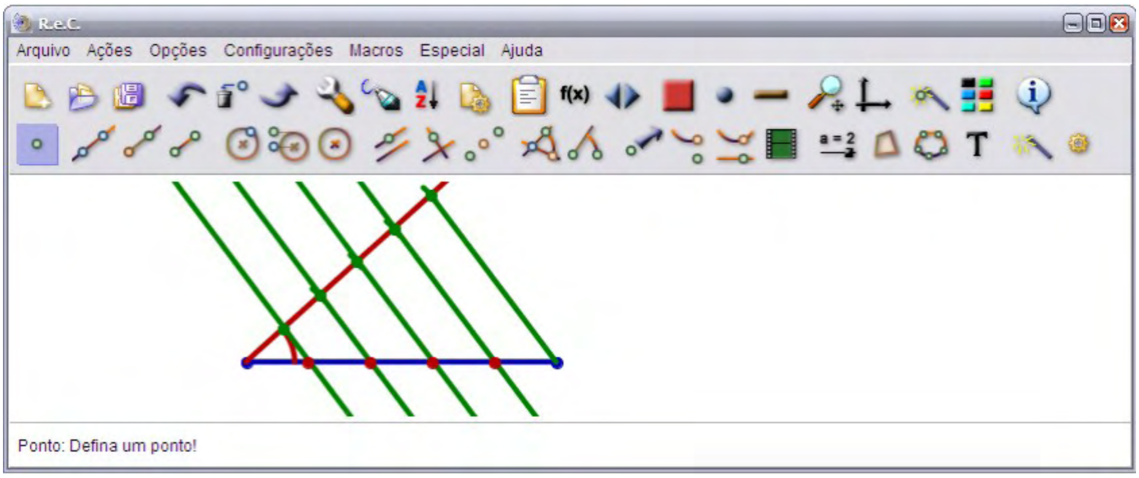


Figura 2: Interface do R.e.C versão 6.3

A versão utilizada na pesquisa foi a 6.3, sendo que atualmente já está disponível a versão 8.6[10]. A atualização e melhoria constante do programa, bem como o fato de ser livre para uso, foram motivadores para a escolha desse. O ambiente do programa e as ferramentas disponibilizadas por ele foram determinantes. Dentre essas ferramentas destaco a criação e execução de macros e *zoom*.

Macros são seqüências de ações, definidas pelo usuário, que são repetidas automaticamente pelo programa. Essa ferramenta permite, por exemplo, que, após o usuário realizar a construção de um quadrado, sejam construídos quadrados automaticamente, do tamanho que o usuário desejar. Mais especificamente

---

[10] Em janeiro de 2010.

relacionado com o nosso trabalho, essa ferramenta permite que os aprendizes definam a seqüência de ações para a divisão de segmentos em partes iguais, de modo que possam repetir essa divisão automaticamente. As macros portanto podem atuar como facilitadoras das experimentações dos alunos, mantendo o foco no objeto estudado e não na repetição de construções, de modo que podem proporcionar uma otimização das construções geométricas. Essas hipóteses poderão ser confirmadas a partir dos dados da pesquisa.

O uso dessa ferramenta é essencial para a realização das atividades propostas nessa pesquisa, principalmente no processo de medição de segmentos (apresentado na seção 3.3), que envolve várias repetições da divisão em dez partes.

Outra ferramenta importante presente no R.e.C é a ferramenta *zoom*, que permite a ampliação e redução da construção geométrica. O *zoom* está presente em diversos tipos de *software*, como processadores de texto, planilhas eletrônicas e programas de edição de imagens, porém, normalmente, ao ampliar uma imagem nesses programas, os traços ficam cada vez mais espessos, de modo que ao ampliar um segmento muitas vezes a sua espessura poderá preencher toda a tela, não aumentando o nível de detalhes mas apenas o tamanho dos *pixels*. Esse não é o tipo de ampliação desejada. Em apenas alguns tipos de *software* tem-se essa ampliação sem modificar a espessura dos traços, como é o caso do Régua e Compasso, em que pode-se ampliar o desenho inúmeras vezes sem restrição, pois os traços mantém a mesma espessura, melhorando o nível de detalhes da imagem.

Essas duas ferramentas, zoom e macros, foram as mais exploradas durante o desenvolvimento das atividades pelos alunos, sendo essenciais para o trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS FRACIONÁRIOS E DECIMAIS:
OS NÚMEROS RACIONAIS

Nesse capítulo apresento inicialmente alguns aspectos históricos do surgimento dos números fracionários e decimais, seguido de alguns indícios da abordagem utilizada para o ensino desses números durante o século XX, levantados através da análise de alguns livros didáticos antigos. Também apresento como os números fracionários e decimais podem ser abordados atualmente, através da análise de alguns livros didáticos atuais. Essa revisão mostra a importância da medida na construção dos racionais e revela caminhos que podem ser trilhados no ensino dos mesmos.

Apresento o processo de medição de segmentos e a sua relação com a construção dos números reais (decimais). Concluo o capítulo com a apresentação da problemática de ensino e aprendizagem dos números racionais, destacada em diversas pesquisas atuais, de âmbito nacional e internacional, e a relevância do conceito da medição de grandezas e da reta numérica no ensino e aprendizagem dos números racionais.

3.1 Perspectivas Históricas

Para que seja possível discutir como ensinar os números racionais e por que ensinar, convém conhecer um pouco da história desses números. Segue um breve relato do surgimento dos números fracionários e decimais, baseado em Caraça (1951), Gálen *et al.* (2008), Ifrah (2005) e Pérez (1988).

A necessidade de expressar tamanhos não inteiros surge com a formação das primeiras civilizações, principalmente pela necessidade de registrar medidas, como a área das terras privadas e do estado (CARAÇA, 1951), massa, comprimentos, e repartir quantidades, ou seja, grandezas com tamanhos que não podiam ser expressos com um número inteiro da unidade de medida.

Os babilônicos faziam as suas contagens em um sistema de base 60, posicional, o qual servia para representar números inteiros e frações. Esse sistema é um dos que mais se assemelha com o nosso sistema moderno, pois apresentava os princípios aditivo e multiplicativo (PÉREZ, 1988). Para escrever as frações sexagesimais, os babilônicos usavam um cravo duplo ( ou  [11]) na posição inicial, que indicava a ausência de unidade. Esse é o primeiro zero que se tem

[11] (IFRAH, 2005, p.243)

registro na história (IFRAH, 2005). O sistema de base 60 é utilizado atualmente em medidas de tempo (horas) e de ângulos (graus, minutos e segundos).

Outros sistemas de numeração também possuíam representações para números não inteiros, como os sistemas de numeração chinês, maia e egípcio, porém eram os egípcios que tinham a forma de escrever mais próxima com a atual, de numerador/denominador. Quando os egípcios criaram as frações, eles utilizavam apenas numerador 1, variando apenas o denominador ($\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}...$ em notação atual). Essa notação foi utilizada até a idade média (GÁLEN *et al.*, 2008), nos casos em que apenas uma fração não era suficiente, utilizava-se uma soma de várias frações, por exemplo: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

A notacão para representação das frações utilizada pelos hindus, já com o sistema decimal, foi a que deu origem à notação atual, sendo aperfeiçoada pelos árabes, que incluíram a barra horizontal (IFRAH, 2005).

Com as cruzadas e a invasão árabe em parte da Europa, foi propagado o sistema de numeração posicional decimal. A primeira obra conhecida que trata do sistema decimal e de suas operações de cálculo é o "*Tratado de aritmética"* de Al-Huwarizmi (780-850) (PÉREZ, 1988). Nessa obra, o autor expõe a maneira de contar dos indianos, que com apenas nove caracteres, expressam todos os números. É interessante que o "círculo" que simboliza o zero não é considerado um dos caracteres.

Mesmo tratando das frações com numerador 1 e das frações sexagesimais, nessa obra ainda não foi encontrada referências às frações decimais (PÉREZ, 1988). É no trabalho de Al-Uglidisi, que em 952[12] viveu em Damasco, e que procurou recompilar toda a aritmética de seu tempo, que encontra-se uma notação muito parecida com a atual, por exemplo: $\overline{2'35}$ é 2,35 e se lê "2 unidades e 35 de cem" (PÉREZ, 1988). Al-Uglidisi também mostra o domínio das formas de cálculo, realizando facilmente divisões e multiplicações no sistema decimal.

Segundo Pérez (1988), muito mais conhecido é o trabalho de Al-Kasi, intitulado "*A chave da aritmética*" que foi o responsável pela divulgação do sistema posicional decimal na Idade Média. Al-Kasi reivindica a invenção dos números

[12] Acredito que deve ter vivido mais de um ano em Damasco, sendo esse ano comprovado pelos historiadores. Na bibliografia consultada não encontramos justificativa para esse ano em específico.

decimais, e mesmo que ele não seja o inventor, foi o primeiro a explicar claramente uma teoria das frações decimais, a noção de número e a noção de número decimal.

De acordo com Gálen *et al.* (2008), foi apenas por volta de 1600 que a idéia de frações decimais e a notação decimal se popularizou, principalmente pela vantagem de incorporar a mesma estrutura aritmética dos números inteiros. Segundo Ifrah (2005), Simon Stévin em 1582 criou a seguinte notação para o número 679,567: 679(0) 5(1) 6(2) 7(3). Após dez anos, o suíço Jost Bürgi simplificou essa notação, colocando no alto da parte inteira um círculo, como exemplo: $67\overset{o}{9}\,567$ é o número 679,567. Nesse mesmo período começaram a utilizar o ponto e no século XVII o neerlandês Wilbord Snellius inventou o uso da vírgula. A vírgula não é adotada em todos países, sendo também adotado o ponto. No Brasil o uso da vírgula é o mais usual.

Esse breve relato nos mostra que os números decimais surgiram como uma notação para as frações decimais, e que foi um processo longo para a assimilação e para que as pessoas percebessem as vantagens dessa notação.

Olhando para a história perceber-se que as frações foram criadas naturalmente das necessidades de representações de grandezas menores que a unidade, em diferentes culturas e sistemas de numeração. Enquanto que uma representação posicional, como a decimal, demorou um pouco mais para surgir e foi conseqüência da representação fracionária, mas trazendo grandes contribuições, principalmente pela facilitação de alguns tipos de cálculo, que se tornaram necessários, especialmente pela ampliação do comércio entre os povos.

Nessa pesquisa inicio com a notação fracionária a qual, como mostram os indícios históricos surge naturalmente da divisão da unidade. A utilização da notação decimal surge da necessidade de efetuar uma medição, tendo em vista que a medição utilizando frações torna o processo mais difícil[13]. Determinar uma medida e realizar operações são os motivadores da utilização decimal, da mesma forma que historicamente essa notação foi criada também para aperfeiçoar os algoritmos de cálculo. Nesse sentido que essa visão histórica colabora para essa pesquisa, ajudando a traçar o caminho que deve ser tomado para o ensino dos números racionais.

---

[13] Como o método dos egípcios de aproximação por frações unitárias

3.2 Aspectos Históricos do Ensino de Frações e Decimais

Uma das disciplinas cursadas por mim no mestrado foi ministrada pela professora Dra. Arlete de Jesus Brito, sobre a história da Educação Matemática no Brasil no século XX. Como trabalho de conclusão de disciplina, realizei uma pesquisa em alguns livros didáticos de Matemática publicados durante o século XX, com o intuito de conhecer como as frações e decimais eram ensinadas e que mudanças ocorreram nesse processo.

O critério para a escolha dos livros adotados foi: para os mais recentes a sua utilização nas escolas atualmente e a metodologia que adotam. Para os livros da época do movimento da matemática moderna consultei os que faziam parte do acervo particular da professora Arlete e os outros mais antigos do acervo de outra professora amiga da família. Tendo em vista que não encontrei outros livros antigos nas bibliotecas que procurei esses foram os livros analisados.

Essa análise também colaborou para o desenvolvimento da pesquisa, pois permitiu avaliar que possibilidades nossa proposta poderia trazer ao ensino desses números.

Parte desse trabalho foi publicado em Lima e Maltempi (2009). Alguns dos livros pesquisados, em ordem cronológica, são:

Lições de Arithmética, Euclides de Medeiros Guimarães Roxo. Em sua 7ª Edição, 1928;

Conceitos Fundamentais da Matemática, Bento de Jesus Caraça, 1ª edição, Lisboa, 1951;

A pedagogia das Matemáticas, André Fouché, 1957;

Matemática para primeira série ginasial, Dr. Benedito Castrucci e Dr. Geraldo dos Santos Lima Filho, 2ª Edição, 1961;

Matemática Curso Ginasial[14], *School Mathematics Study Group*, 1967;

Matemática para o Ginásio, Lygia Lamparelli *et al.*[15]*.* 1969;

Matemática Moderna, Bethlem, 1971;

Matemática Hoje é Feita Assim, Antonio José Lopes Bigode, 2006;

Tudo é Matemática, Luís Roberto Dante, 2005.

---

[14] De autoria americana, traduzido para o português.
[15] Não registrei o nome completo de todos os autores, os sobrenomes estão nas referências.

Por meio da análise desses livros didáticos foi possível levantar indícios sobre algumas das abordagens utilizadas para o ensino das frações e decimais e as mudanças ocorridas com o passar do tempo, mostrando como os números racionais como medida de grandezas foram explorados nesse período, e a importância desse subconstruto no ensino dos racionais.

Essas obras abrangem um período de transformações no ensino de Matemática. No final do século XIX iniciou-se no mundo o primeiro movimento internacional para a modernização do ensino de Matemática, estimulado principalmente pelos congressos internacionais, “ao possibilitarem o acesso a matemáticos de diferentes países aos últimos estudos desenvolvidos pela área e ampliarem as oportunidades de reflexão conjunta sobre esses futuros estudos” (MIORIM, 1998, p. 72).

Esse primeiro movimento propunha uma grande reforma no ensino de Matemática, com a introdução do cálculo, uma reorganização da matéria, visando uma fusão dos conteúdos e uma maior ênfase em aplicações práticas (MIORIM, 1998).

No Brasil todas as reformas de ensino durante o século XIX e início do século XX surgiam e eram aplicadas inicialmente no colégio Dom Pedro II, que deveria ser o exemplo para as outras instituições no país. Desse modo, as reformas modernizadoras da Matemática se iniciaram nesse colégio, como evidenciado pela participação do professor do colégio, Eugênio Gabaglia, na reunião do V Congresso Internacional de Matemática, em 1912, no qual foi nomeado delegado do Brasil (MIORIM, 1998).

Euclides Roxo, professor do Colégio Dom Pedro II, foi um dos líderes da reforma, tendo suas propostas para a modernização do ensino de Matemática adotadas na reforma Campos, de 1931.

A obra de Roxo (1928) reflete esse momento de transição no ensino de Matemática. Na introdução do livro percebe-se a preocupação do autor com a modernização do conteúdo e em apresentar aplicações mais práticas, como ao expor o sistema de medida britânico, muito utilizado nas transações comerciais do Brasil, e a preocupação em “tornar bem claras e precisas cada operação elementar” (p.6). Afirma também que procurou em toda a obra seguir as orientações do “grande mestre da pedagogia Matemática Jules Tannery” (Roxo, 1928, p.6).

É nesse contexto histórico que vejo essa obra, e em especial o texto que trata dos números fracionários e decimais. As frações são apresentadas no capítulo X, intitulado "Frações ordinárias". E os números decimais no capítulo XI, denominado "Frações decimais".

Para definir frações, inicialmente Roxo (1928) discute a idéia de grandezas contínuas e de como medi-las. Como a mais simples das grandezas é o comprimento de um segmento, essa é a grandeza escolhida para desenvolver a noção de número.

> Se uma certa grandeza contém exatamente uma segunda grandeza da mesma espécie, diz-se que a primeira grandeza é um *múltiplo* da segunda. Reciprocamente, a segunda grandeza é um *submúltiplo* ou uma parte alíquota da primeira. Assim, se, dados os segmentos de reta AB e PQ, pudermos marcar, por exemplo, 3 segmentos iguais a AB, uns em seguida de outros, a partir de P até Q, diremos que o segmento PQ contém AB 3 vezes exatamente e que AB é uma parte alíquota de PQ; é um *terço* ou o *terço* de PQ. Podemos exprimir tal fato, dizendo que *3 é a relação do segmento PQ para AB, ou que o número 3 é a medida de PQ, quando se toma AB para unidade de comprimento* (ROXO, 1928, p.123).

Esse trecho do livro mostra a idéia utilizada para a definição de frações, ou seja, a divisão da unidade tomada para medir o segmento maior. Dessa maneira, a definição de frações dada é: *Fração é, pois, a medida de uma grandeza que contém uma ou mais partes iguais em que se dividiu a unidade* (ROXO, 1928 p.124).

Nessa obra, todas as operações com frações são abordadas explorando a medida de grandezas. Dessa forma, a adição, subtração, multiplicação e divisão de frações são definidas e exemplificadas através de segmentos.

Um livro escrito no período entre o primeiro movimento de modernização da Matemática e o movimento da matemática moderna, é Castrucci e Lima Filho (1961). O capítulo III, Números Fracionários, apresenta as frações a partir da divisão de grandezas em partes iguais, usando também o comprimento de segmentos. Dessa forma, a definição dada é:

> DEFINIÇÃO: Chama-se fração (ou fração ordinária) aos pares de números inteiros 1/6, 4/6, 3/4, etc. que indicam quantas partes foram tomadas da unidade, dividida essa em partes iguais. A fração consta sempre de dois números inteiros, também chamados termos. (p. 92)

Seguem os modos de leitura de frações, a definição de Fração Própria e Imprópria e a comparação de frações, a qual também é realizada a partir da comparação dos segmentos correspondentes a cada fração. Após esse tópico não aparecem mais relações entre as frações e os segmentos, sendo elas tratadas como um novo tipo de número, seguindo-se as regras de cálculo para todas as operações.

Mesmo explorando os segmentos para a definição das frações, já se percebe nas definições acima diferenças na forma como os números fracionários são abordados, Roxo (1928) enfatiza mais diretamente a idéia de medida de grandezas, e baseia as operações e todos os exemplos nessa definição, enquanto Castrucci e Lima Filho (1961) exploram na definição e nos exemplos a relação de parte/todo da unidade e partem para o tratamento das frações como um novo tipo de número, definindo as operações como regras de cálculo.

Fouché (1957) indica que o ensino das frações deve explorar o significado delas como medida. Caraça (1951) também mostra que o surgimento dos números fracionários e a construção dos números racionais resultam da resposta à pergunta: Quantas vezes um comprimento cabe em outro? Explorando, dessa forma, a medição de segmentos.

A partir da segunda metade dos anos 60, iniciou-se no Brasil o movimento da Matemática Moderna, o qual trouxe profundas mudanças no ensino de Matemática, pois realizou uma reformulação na forma e nos conteúdos abordados em Matemática, incorporando diversos conteúdos da Matemática universitária na educação básica.

Com a implantação dos conceitos da Matemática Moderna no ensino foi necessária uma reformulação total dos livros didáticos. Uma das primeiras coleções que foi lançada é a tradução dos livros do *School Mathematics Study Group* (SMSG), lançada em uma edição preliminar em 1967. O prólogo define bem os objetivos da coleção e da Matemática Moderna:

> Os matemáticos do SMSG acham que a Matemática apresentada nesse texto é um conhecimento valioso para todo cidadão bem instruído de nossa sociedade, sendo também importante para o estudante pré-universitário em preparação para trabalhos mais avançados no ramo. [...]
> Na maioria dos casos, a matéria terá um caráter familiar, mas a apresentação e o ângulo sob o qual é vista serão diferentes. Alguns temas serão completamente novos ao currículo tradicional (SMSG, 1967).

Em se tratando, portanto, de uma proposta inovadora para a época, os textos apresentados tiveram seu uso pesquisado nos EUA de 1958 à 1960, quando os livros foram trabalhados com professores de diversos estados daquele país. Na leitura do prefácio nota-se o objetivo dos autores de tornar a Matemática acessível a todos, bem como a crença de que o material deveria cumprir com esse objetivo.

Desse período consultei SMSG (1967), Lamparelli *et al.* (1969) e Bethlem (1971). As mudanças em relação aos textos anteriores ficam evidentes, tanto pelo uso de ilustrações como pela forma de abordagem. Em SMSG (1967) é feita uma introdução histórica sobre o uso das frações, e foi trabalhado o significado de razão entre dois números para então definir o que é uma fração:

> Um símbolo “a/b” onde a e b são números, e b diferente de zero, é chamado fração. Se a e b forem números inteiros, sendo b diferente de zero, o número representado pela fração a/b é chamado número racional; qualquer número que possa ser representado sob essa forma é chamado número racional. (p.177)

Pela definição dada, uma fração é apenas uma notação, não se utilizando de nenhum de seus significados. O nome número racional aparece como novidade, fruto das reformas da Matemática Moderna.

Outra novidade que aparece nesse livro é a apresentação das propriedades das operações no conjunto numérico: comutatividade, associatividade, etc. Tais propriedades não eram exploradas nos livros mais antigos. A reta é explorada para a representação das frações, partindo da reta numérica para números inteiros e dividindo os inteiros em partes iguais, usando assim a relação parte/todo, em que o todo é uma unidade inteira. Também é explorada a divisão de um segmento na reta, de medida inteira, em partes iguais, explorando assim a fração como uma razão.

Em Lamparelli *et al.* (1969, p.187) a definição de frações também é feita por meio da razão entre dois números, como vê-se:

> Dados os números inteiros 15 e 3, sabemos que existe outro número inteiro, o 5 tal que 15 = 5 x 3, isto é, 15 é múltiplo de 3; nesse caso, dizemos que 5 é o quociente de 15 por 3, e podemos representá-lo sob a seguinte forma: 5=15/3. Essa representação é chamada de fração de termos 15 e 3, os quais são chamados, respectivamente, o numerador e o denominador da fração.

Da mesma forma, toma-se o exemplo de 10 e 3, em que “*não existe um número inteiro que multiplicando por 3 dê 10.* [...] Porém 10/3 não representa um número inteiro, mas é um numeral, de uma espécie diferente de número, o chamado número racional” (LAMPARELLI *et al.*, 1969, p.187 – grifo do autor). Nesse trecho a autora mostra que se preocupa com o rigor de diferenciar o símbolo do objeto matemático número racional.

O texto também explora outros significados para fração, como a relação parte/todo. Outro diferencial é o uso de diferentes figuras para exemplificar essas relações, como partes pintadas de uma figura geométrica, partes de grupos, etc, exemplos não utilizados nas obras do período anterior.

Os autores também se preocupam com a representação dos números racionais na reta, partindo de exemplos mais simples como 1/3 e 1/4, explorando as frações equivalentes através da representação na reta.

Também consultei parte da obra de Bethlem (1971), o qual, mesmo tendo sido escrito sob os preceitos da Matemática Moderna, tem uma apresentação diferente dos demais, pois as frações são apresentadas a partir dos segmentos. Sendo U um segmento, o texto define a multiplicação de U por um número inteiro, ou seja, reproduzir U sobre uma semi-reta um certo número inteiro de vezes. Considerando D como o segmento obtido ao multiplicar U por cinco, é definido o *Operador Arquimediano* como o número que permite obter U a partir de D, o qual se representa por 1/5, ou seja, o inverso de cinco. Portanto, conclui-se que "a todo número inteiro corresponde um número inverso que é uma *fração arquimediana* ou uma unidade fracionária" (BETHLEM, 1971 p.131).

Nesses livros que mencionei ficam evidentes as diferenças e mudanças de abordagem no ensino de frações. Enquanto eram apresentadas e definidas como medidas de segmentos (ROXO, 1928; FOUCHÉ, 1957; CARAÇA, 1951) passaram a ser definidos a partir de outros subconstrutos, como parte/todo (CASTRUCCI E LIMA FILHO, 1961), quociente (LAMPARELLI *et al.*, 1969) e operador (BETHLEM, 1971). Em SMSG (1967) as frações são definidas como um símbolo, para então explorar seus significados. Esse último tipo de definição prevalece na maioria dos livros didáticos atuais.

Por outro lado, verifica-se que o ensino dos números decimais não sofreu mudanças significativas, pois, em todas as obras, os números decimais são apenas uma nova notação para as frações decimais, dessa forma, mesmo com as diferenças de texto, a essência continua a mesma.

Após alguns anos foi constatado o fracasso da Matemática Moderna implementada no Brasil e com isso novas abordagens foram propostas. Atualmente os livros didáticos trabalham com diferentes abordagens, mas que sempre procuram explorar os vários significados (subconstrutos) dos números fracionários e decimais.

As obras de Bigode (2006) e Dante (2005), são dois exemplos, entre muitas outras coleções, de como os números racionais (frações e decimais) são abordados atualmente.

As escolas públicas do Brasil participam do Programa Nacional do Livro Didático, em que os professores da disciplina podem “escolher” o livro didático que será utilizado na escola, por um período de pelo menos três anos. No ano de 2007 participei desse processo, no qual a escola recebe das editoras diversas coleções de livros didáticos para o ensino fundamental, e também um guia do livro didático (BRASIL, 2007) com um resumo de cada coleção e a opinião de pareceristas sobre elas.

Cada coleção reflete a concepção de seus autores sobre Educação Matemática, apresentando e trabalhando os conteúdos das mais variadas formas. Dentre as várias coleções escolhi destacar: “Matemática hoje é feita assim” de autoria de Antônio Bigode e a coleção “Tudo é Matemática”, de Luiz Roberto Dante. A escolha dessas coleções se deu pelo fato de serem coleções referenciadas pelo Programa Nacional do Livro Didático PNLD (BRASIL, 2007), elogiadas pelos pareceristas e as obras adotarem estratégias pedagógicas diferentes entre si. Também foram coleções com as quais me identifiquei com as metodologias utilizadas. Essas coleções são adotadas em várias escolas brasileiras.

Dessa maneira, busco fazer uma análise sobre como os números fracionários e decimais são abordados por essas duas coleções, principalmente no que tange à representação na reta, procurando relacioná-las com o trabalho aqui desenvolvido.

Ambas as coleções foram analisadas na versão para professores, que é suplementada pelo manual do professor na parte final de cada volume.

Na coleção de Dante (2005), volume de 5ª série/6º ano, o autor afirma no manual do professor que:

> Nessa coleção e nesse volume, dá-se maior ênfase aos números decimais que as frações, porque no dia-a-dia é mais fácil compará-los para saber qual é o maior e ainda porque é mais fácil usá-los como medida. Além disso, os números decimais estão presentes em todas as aplicações. Apesar dessas vantagens da representação decimal, a forma fracionária apresenta importante valor educativo, que será explorado nesse capítulo. As várias idéias associadas às frações devem ser estudadas desde as séries iniciais até o fim do ensino fundamental, sempre resgatando, ampliando e aprofundando noções importantes, a cada série ou ciclo (p.58).

Nota-se na coleção que o autor, sempre que possível, opta pelo ensino através da resolução de problemas. Essa é também a estratégia utilizada para o tema frações e decimais. As frações e os decimais são tratados em diferentes capítulos, sendo que no início do capítulo de frações o autor introduz o tema comentando sobre a necessidade de medir grandezas e da conseqüente necessidade da criação de símbolos para representar essas medidas menores que a unidade.

Nessa coleção, como em outras, são feitas referências a origem das frações como medida de grandezas, mas esse subconstruto não é muito explorado no desenvolvimento dos conteúdos, sendo dada preferência e ênfase em outros subconstrutos.

A coleção de Bigode (2006) se caracteriza por abordagens diversificadas de todos os conteúdos, inclusive no caso dos números racionais. O autor salienta que o livro foi feito para ser lido pelos alunos e professores, e que um dos objetivos é que os professores tenham autonomia de escolher a abordagem mais conveniente para a sua realidade, ou seja, o livro não deve ser seguido como um manual.

No tratamento das frações e decimais o autor se preocupa em evitar situações-problema fantasiosas e em explorar profundamente as frações decimais e porcentagens, para uma conseqüente relação com os decimais. Buscando proporciona um tratamento mais qualitativo para as mudanças de representação, fracionária e decimal.

As frações são apresentadas no volume de 5ª série/6º ano, onde não ocorre o estudo das operações, ficando esse para o volume seguinte. Essa escolha pode propiciar mais tempo para a abordagem dos números decimais, consideradas no próximo capítulo do livro, e não sobrecarregar o tratamento das frações.

Em ambas as coleções a representação na reta numérica dos números fracionários é feita através de exemplos, para casos mais simples.

Em Dante (2005) as frações são relacionadas com a reta através de exercícios como das Figura 3 e Figura 4.

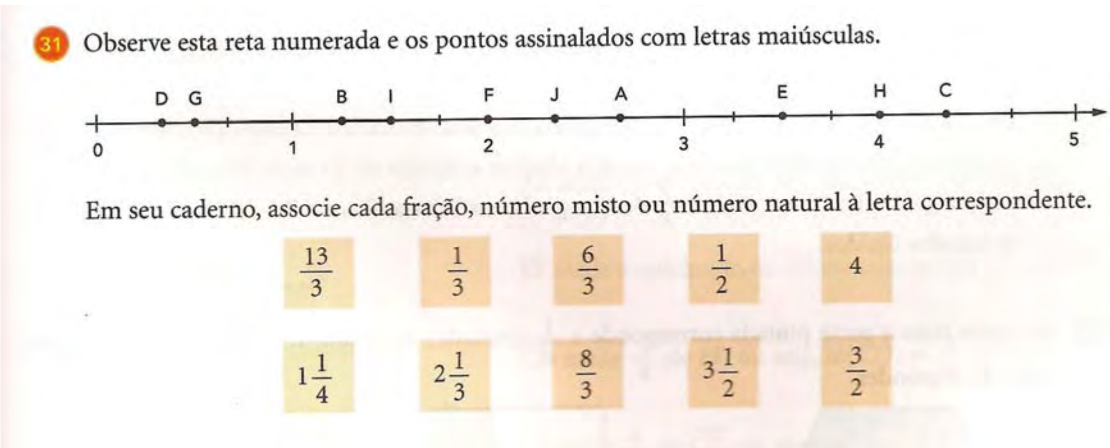


Figura 3: Exercício relacionando a reta numerada e frações. (vol. 5, p.135)

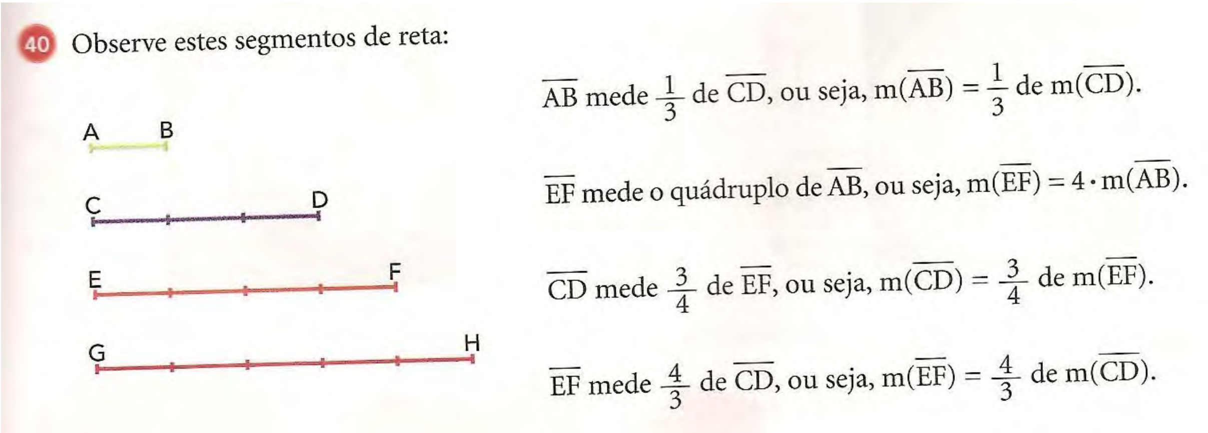


Figura 4: Atividade explorando proporções entre os segmentos (vol. 5, p.137)

Bigode (2006) também explora a representação das frações na reta numérica, com exemplos como (Figura 5):

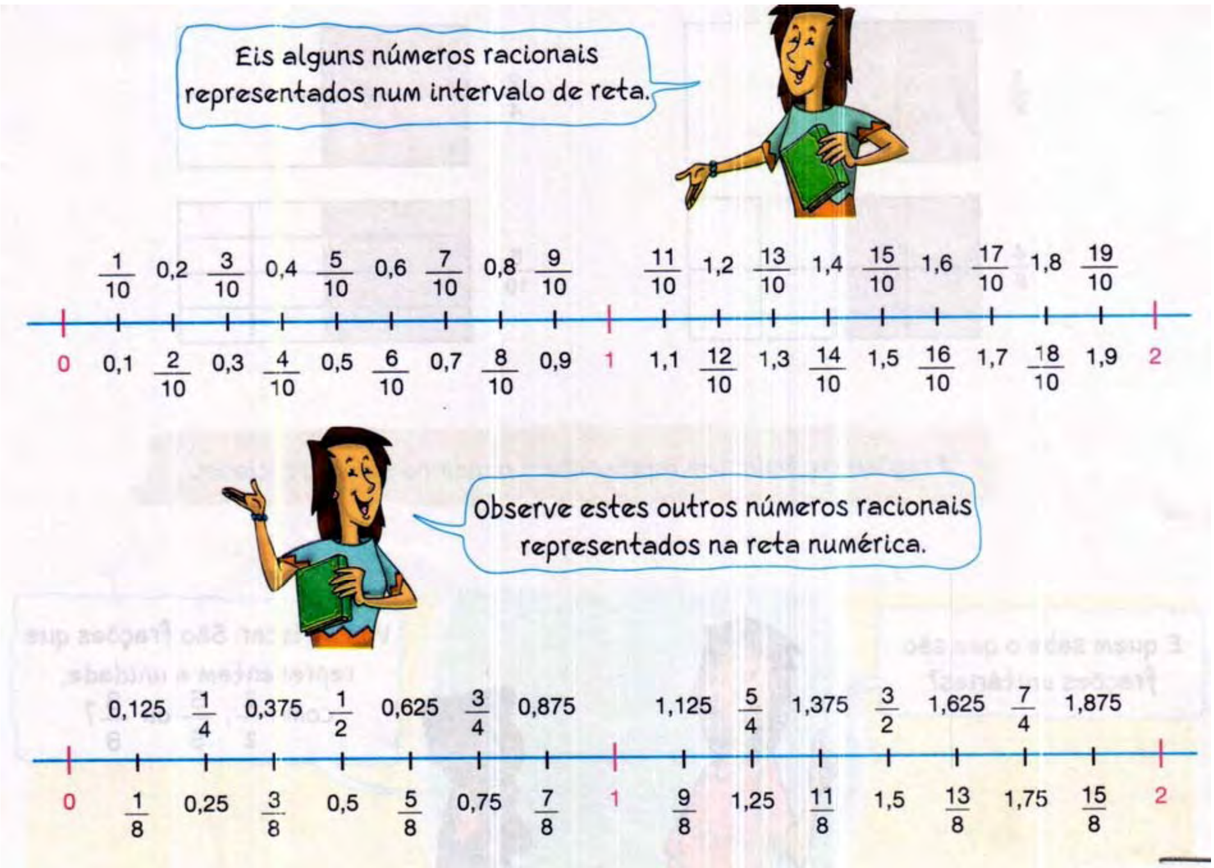


Figura 5: Representação de frações na reta (vol. 5 p.69)

Outra utilização da reta é para mostrar a adição de frações (Figura 6):

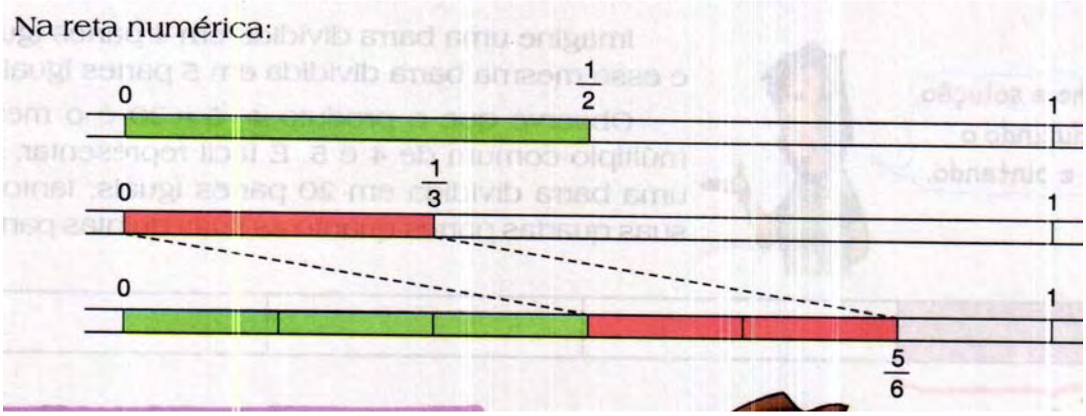


Figura 6: Adição de frações (vol. 5 p.73)

A reta também é usada para mostrar a propriedade de que entre dois números racionais existe outro número racional como mostrado na Figura 7 e na Figura 8. Nesse exemplo o autor recorre a ampliação da reta.

Figura 7: Introdução da densidade dos racionais (p.279)

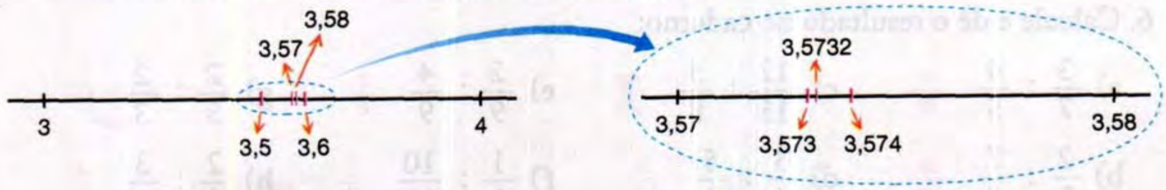
O conjunto dos números racionais tem uma propriedade que o conjunto dos naturais ou o conjunto dos inteiros não tem. Dados quaisquer números racionais é sempre possível encontrar outro número racional entre eles.

Sejam os números 3 e 4. O número 3,5 está entre 3 e 4.

Se considerarmos os números 3,5 e 3,6 vamos encontrar, por exemplo, o número 3,57 entre eles.

Tomando os números 3,57 e 3,58 podemos encontrar entre eles o número 3,573.

O número 3,5732 está entre 3,573 e 3,574.



Quando dois números racionais estão na forma decimal, fica mais fácil achar outro racional na forma decimal entre eles.

Figura 8: Números entre dois decimais (p.274)

No volume 8, Bigode (2006) mostra a construção geométrica para divisão do segmento em partes iguais. Nessa coleção encontrei essa construção explicitada. Mas a sua exploração não é diretamente relacionada com a representação das frações na reta.

Divisão de segmentos em partes proporcionais

Em atividades como construir uma linha de tempo, muitas vezes temos que dividir um segmento com extremidades conhecidas em partes iguais, marcando pontos que serão usados como datas.

Dividir um segmento em 2, 4 ou 8 partes iguais não é difícil e pode ser feito com o auxílio de régua e compasso obtendo-se os pontos médios dos segmentos.

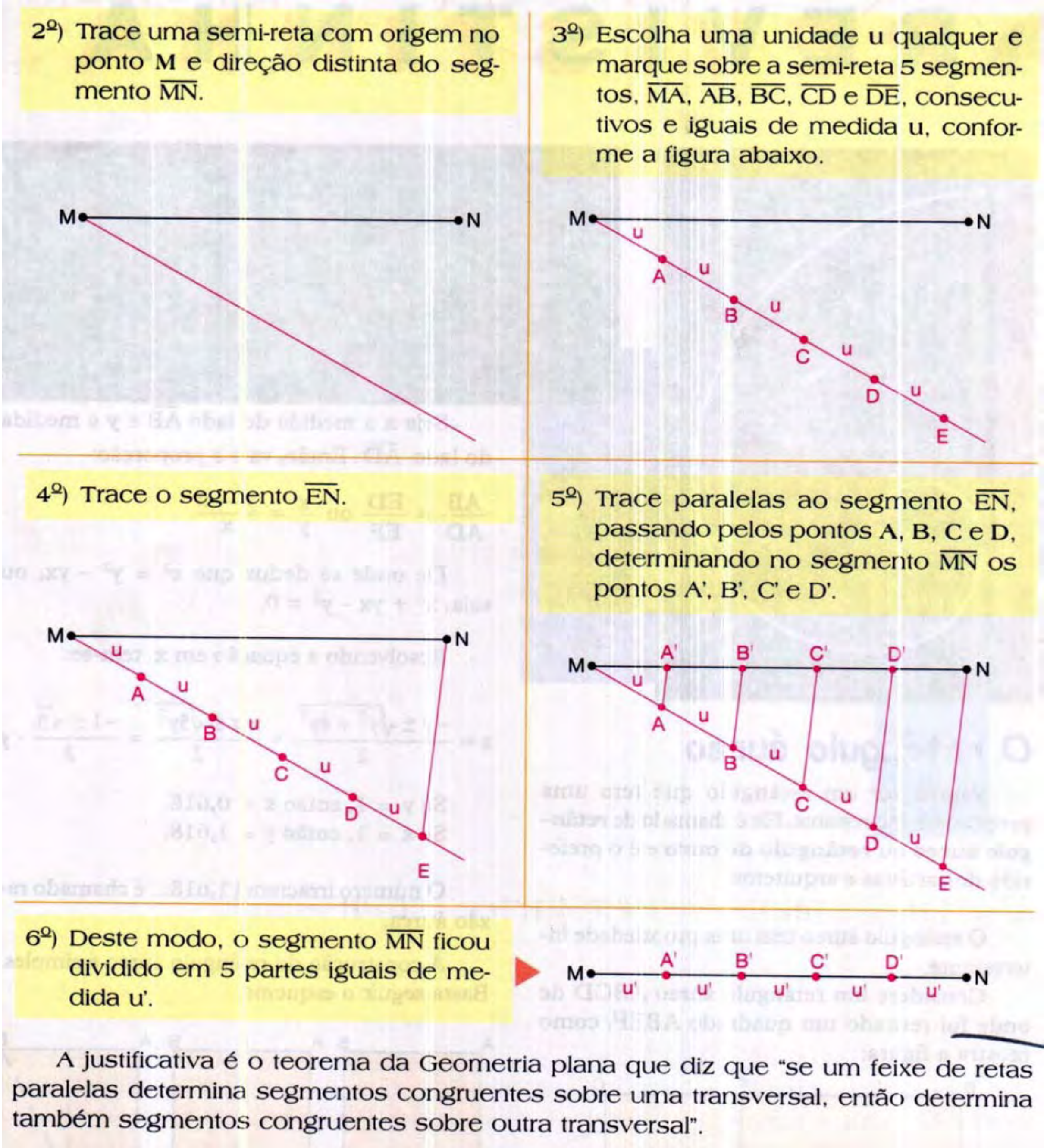
Porém, se um segmento de extremidades M e N tem que ser dividido em 5 partes iguais, precisamos usar outros procedimentos.

Acompanhe os passos:

1º) Trace o segmento $\overline{MN}$.

210

Figura 9: Divisão em partes proporcionais (BIGODE, 2006 P.210)


2º) Trace uma semi-reta com origem no ponto M e direção distinta do segmento $\overline{MN}$.

3º) Escolha uma unidade u qualquer e marque sobre a semi-reta 5 segmentos, $\overline{MA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, consecutivos e iguais de medida u, conforme a figura abaixo.

4º) Trace o segmento $\overline{EN}$.

5º) Trace paralelas ao segmento $\overline{EN}$, passando pelos pontos A, B, C e D, determinando no segmento $\overline{MN}$ os pontos A', B', C' e D'.

6º) Deste modo, o segmento $\overline{MN}$ ficou dividido em 5 partes iguais de medida u'.

A justificativa é o teorema da Geometria plana que diz que "se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina também segmentos congruentes sobre outra transversal".

Figura 10: Divisão em partes proporcionais (BIGODE, 2006, p.211)

O que quero ressaltar é que nessas coleções, em particular, não encontrei um tratamento formal para a representação das frações na reta numérica, aparecendo intuitivamente, através de exemplos, para alguns casos. Isso talvez se deva ao fato de que o tratamento é trabalhoso, exigindo construções geométricas como da Figura 10, uma precisão nesses desenhos, e uma reflexão profunda por parte dos estudantes para a sua compreensão, além de conhecimentos presentes apenas no currículo do último ano do ensino fundamental.

As frações como medida de grandezas eram fortemente exploradas nas obras do início do século XX, sendo esse tratamento modificado no movimento da matemática moderna, dando uma maior ênfase a relação parte/todo de conjuntos e regiões para introduzi-las e a utilização de diversas representações figurais. Nas obras atuais o subconstruto parte/todo ainda é predominante, sendo também explorados os outros subconstrutos como quociente e operador. Vários livros didáticos destacam a importância da medida como motivadora da criação das frações, mas não a utilizam efetivamente. A reta numérica é explorada intuitivamente, não sendo dada ênfase em uma representação precisa das frações na reta.

Nesse sentido, busco resgatar a importância da medida no estudo dos números racionais, apresentando uma alternativa para esse tratamento, de forma que a representação das frações na reta possa ser explorada, usando como ferramenta *software* de geometria dinâmica, colaborando assim para uma compreensão mais profunda dessa representação. Para isso vou usar o processo de medição de segmentos, que será apresentado na próxima seção.

3.3 O Processo de Medição de Segmentos e os Números Decimais

Quando alguém fala em medir alguma grandeza, deseja intuitivamente obter um número que represente seu tamanho. Tomando por exemplo o comprimento de um segmento, para medir se utiliza de uma régua, uma fita métrica, ou outro instrumento, que utiliza uma unidade de medida, como metros, centímetros, milímetros, polegadas ou outra unidade qualquer. Então compara esse instrumento com o segmento e verifica, aproximadamente, qual o valor que representa essa medida. Intuitivamente, essa é a idéia que se tem de medição.

Matematicamente, medida pode ser considerada como um tipo de função, em que o domínio são os objetos a serem medidos e o contra-domínio são os números reais não negativos. Alguns dos autores pressupõem a existência dessa função e do conjunto dos números reais, outros como Borsuk e Szmielew (1960), apresentam essa função e consideram a existência dos números reais.

Segundo Caraça (1951), para se obter uma medida são necessários: 1º estabelecer um padrão único de comparação, para todas as grandezas de mesma espécie, chamado de unidade de medida; 2º responder à pergunta: quantas vezes uma grandeza cabe na outra? A resposta dessa pergunta é um número que exprime o resultado dessa comparação. Pensar dessa maneira é essencial para desenvolver um processo de medição. O autor mostra que foi essa pergunta que originou a criação do conjunto dos números racionais.

Da mesma maneira, Lebesgue (1966) e Baroni e Nascimento (2005) propõem a construção do conjunto dos números reais não negativos através do processo de medição de segmentos. Dessa forma, apresentam a função medida como um processo, chamado de medição.

Como foi visto anteriormente, historicamente os números decimais foram obtidos como uma notação para frações decimais, e pedagogicamente vem sendo tratados dessa maneira. Porém, ao se considerar os números decimais (reais) como o resultado de um processo de medição, torna-se possível explorar a construção desses números sem necessidade de defini-los como outra notação para as frações decimais. Esse é um aspecto que exploro nas atividades dessa pesquisa.

Medir um segmento AB é dizer quantas vezes ele contém exatamente o segmento padrão U. Para obter esse número exato de vezes, considere um processo infinito, em que, na primeira etapa, deve-se verificar quantas vezes o segmento padrão “coube” em AB. Para isso, iniciando em A, reproduza U sobre o segmento até ultrapassar B, anotando quantas vezes U foi reproduzido antes de ultrapassar B.

Na etapa seguinte adota-se um novo segmento unitário U_1, resultado da divisão do segmento U em 10 partes[16]; a comparação ocorre novamente e esse processo se repete infinitamente. A Figura 11 exemplifica essa construção.

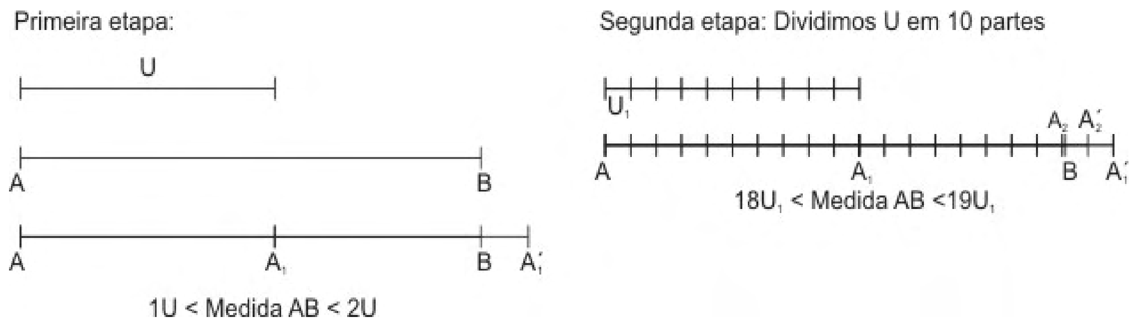


Figura 11: Duas etapas da medição de segmentos

[16] Escolhe-se a divisão em 10 partes para que se obtenham os números decimais. Poderia ser adotada a divisão em outro número qualquer de partes, por exemplo, em duas; nesse caso os resultados seriam na base binária.

Em cada etapa, com exceção da primeira, a unidade anterior é dividida em 10 partes. Na etapa n obtém-se o número de vezes que AB contém U_{n-1}. No exemplo da Figura 11, na primeira etapa AB contém 1 U, na segunda 18 U_1. Continuando o processo, numa terceira etapa poderia se obter 183 U_2, por exemplo, e assim por diante. A cada etapa perceba que é acrescentado um dígito a direita do número obtido na etapa anterior. Dependendo do tamanho do segmento, após *x* repetições, será obtido: 1) zeros em todas as demais repetições, ou seja, o segmento possui uma medida exata; 2) infinitos dígitos que se repetem periodicamente; 3) infinitos dígitos não periódicos.

O resultado desse processo é uma seqüência de números como 1; 18; 183;.... Observe que se for escolhido um dos números dessa seqüência, e olhar apenas para ele, por exemplo 183, não é possível afirmar qual o tamanho do segmento, pois pode ser 183 vezes U ou 183 vezes U_2 ou 183 vezes U_3.

Para que se possa, conhecendo apenas um dos números da seqüência, afirmar, que tamanho ele representa, basta adotar um símbolo que represente quando a unidade foi dividida pela primeira vez. Tal símbolo, usualmente[17], é a vírgula. Assim, no caso acima a seqüência é: 1; 1,8; 1,83;...

Nesse tratamento os números decimais são vistos como um símbolo que representa o resultado do processo geométrico. Dessa forma, o uso da vírgula e o seu significado aparecem naturalmente, atendendo a uma necessidade do processo.

Portanto, através desse processo, são obtidos todos os números reais na representação decimal. Seguindo a proposta de Lebesgue (1966), Baroni e Nascimento (2005) propõem esse tipo de tratamento para os números reais, pois consideram que o mesmo, por se basear na geometria, é mais intuitivo.

O processo de medição como apresentado por Baroni e Nascimento (2005) é infinito, independente do resultado obtido após várias repetições, até mesmo porque com papel e lápis o número de repetições é restrito e não é possível avaliar se os pontos coincidem. Com o *software* R.e.C. essas repetições são ilimitadas, sendo também possível determinar se os pontos coincidiram, tornando nesse caso o processo finito.

O processo de medição não diferencia números racionais de irracionais. Mesmo ao observar o resultado da medição após a repetição do processo um certo

[17] No Brasil é utilizada a vírgula, em outros países é usado o ponto.

número de vezes, nem sempre é possível afirmar se a medida é racional (comensurável) ou irracional (incomensurável). Essa garantia é dada pelo modo como o segmento é construído (por divisão da unidade, construção da diagonal do quadrado, etc.), sendo a incomensurabilidade dependente da unidade padrão adotada.

Da mesma maneira a comensurabilidade de um segmento pode ser garantida se ele for construído como fração da unidade, ou no caso de o ponto final do segmento e do processo de medição coincidirem[18].

O material escrito por Baroni e Nascimento (2005) foi objeto de estudo de Pasquini (2007), quando o mesmo foi estudado em um curso de Análise para pós-graduandos em Educação Matemática. Outras pesquisas também destacam diversos aspectos relevantes quanto ao ensino dos números fracionários e decimais, como Behr *et al.* (1983), Lesh, Post e Behr (1987), Bright *et al.* (1988), Woerle (1999), Valera (2003) e Moreira e David (2004). Na próxima seção faço uma revisão dessas pesquisas.

3.4 Números Fracionários e Decimais: Relações, Ensino e Aprendizagem

Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas sob o tema números racionais. No âmbito internacional o *The Rational Number Project*[19]*,* iniciado em 1979 envolve pesquisadores de algumas universidades americanas. Vem desde então estudando diversos aspectos do ensino e aprendizagem dos números racionais. Das pesquisas realizadas, Behr *et al.* (1983) destacam a importância desses números na educação básica, a qual pode ser vista sob as seguintes perspectivas:

> Their importance may be seen from a variety of perspectives: *(a)* from a practical perspective, the ability to deal effectively with these concepts vastly improves one's ability to understand and handle situations and problems in the real world; *(b)* from a psychological perspective, rational numbers provide a rich arena within which children can develop and expand the mental structures necessary for continued intellectual development; and *(c)* from a Mathematical perspective, rational-number understandings provide the foundation upon which elementary algebraic operations can later be based.[20]

---

[18] Quando realizado no Régua e Compasso.
[19] http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/
[20] Sua importância pode ser vista de várias perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a capacidade de lidar eficazmente com esses conceitos melhora vastamente a capacidade de compreender e lidar

Considero que essas perspectivas devem ser levadas em consideração ao discutir-se a importância do ensino dos números racionais, pois justificam a necessidade da aprendizagem desses números pelos estudantes, na educação básica.

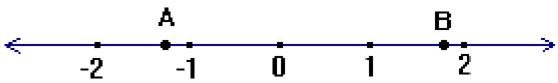
Por outro lado, os baixos índices de acertos apresentados pelos estudantes nos exames nacionais americanos ao responder questões simples sobre os números racionais (LESH, POST e BEHR 1987) indicam dificuldades na aprendizagem desses números.

No âmbito nacional, Valera (2003) se propõe a discutir a presença dos números racionais na sociedade e o que é ensinado na escola, evidenciando que ambos são diferentes e que raramente esses caminhos se cruzam.

Valera analisa resultados de avaliações oficiais, como o SARESP e o SAEB, em que as taxas de acertos nas questões das provas de Matemática estão em no máximo 30%, e essa taxa, que já é baixa, diminui consideravelmente quando se analisa as questões que trabalham com os números racionais, seja da forma fracionária ou decimal. Das questões apresentadas por Valera (2003), as com menor percentual de acertos são as que exigem que o aluno relacione as representações decimal, fracionária e na reta, ficando em torno de 10%.

Veja o caso das seguintes questões da 7ª Série, do SARESP 1996, apresentada por Valera (2003, p. 23):

A figura apresentada mostra um trecho da reta numérica:



Os pontos A e B podem corresponder, respectivamente, aos números:

(A) -1,3 e $\frac{1}{8}$ *(40%)*

(B) $-\frac{4}{3}$ *e 1,45 (13%)*

(C) $-\frac{4}{3}$ *e 1,8 (10%)**

(D) $-\frac{2}{5}$ *e 1,8 (36%)*

---

com situações e problemas do mundo real, (b) a partir de uma perspectiva psicológica, números racionais fornecem um rico cenário no qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuidade do seu desenvolvimento intelectual; e (c) a partir de uma perspectiva matemática, a compreensão do número racional fornecem a base sobre a qual as operações algébricas elementares podem ser baseadas posteriormente. (Tradução nossa)

Essa questão, com acerto de apenas 10% dos alunos, evidencia que os mesmos apresentam dificuldades em localizar números não inteiros na reta numérica, em uma situação mais complexa. O grande número de respostas erradas nas letras A e D, também indicam que os alunos não associam as frações e os decimais com os tamanhos dos segmentos e nem mesmo com as representações corretas.

Outra questão, bem mais simples, mas que também obteve uma baixa taxa de acertos é a seguinte (p.24):

O número $\frac{3}{8}$ é igual a

(A) 3,8 (83%)

(B) 0,125 (4%)

*(C) 0,375 (10%)**

(D) 0,225 (3%)

Fica evidente, quando se observa o alto índice de respostas na letra A, que os alunos não associam as representações fracionária e decimal de maneira correta. Para a grande maioria, 3/8 é igual a 3,8. Esse é um erro que muitos alunos comete nas aulas de Matemática.

No restante da prova, os índices de acerto também foram baixos, entre 20% e 30%. Essas questões são as de menor taxa de acertos, evidenciando a falta de compreensão das relações entre as representações dos números racionais.

Diversos pesquisadores, entre eles Kieren (*apud* BEHR *et al.* 1983), interpretam os números racionais de seis maneiras diferentes, chamadas de subconstrutos: são parte/todo, decimal, razão, quociente, operador e medida de quantidades discretas ou contínuas. Segundo Behr *et al.* (1983) uma compreensão completa dos números racionais requer não apenas o entendimento de cada um dos subconstrutos, mas também de como eles se relacionam. Os autores também ressaltam que o desenvolvimento dos estudantes na aprendizagem dos números racionais pode ser dividida em estágios, os quais são classificados observando a diferenciação e integração que os estudantes fazem entre os subconstrutos.

Valera (2003) posiciona-se a favor de um ensino que objetive o que chama de aprendizagem significativa, a qual considera como uma aprendizagem baseada em aspectos qualitativos de compreensão, com “uma abordagem de ensino extremamente incorporado à vivência do aluno” (p.151). Tal abordagem não exclui as formalizações, regras e técnicas, mas considera que elas devam ser trabalhadas em seu devido tempo.

Romanatto (1997) também ressalta a necessidade de um trabalho mais qualitativo para a aprendizagem Matemática, no qual os algoritmos são deduzidos a partir de experimentações e intuições. Segundo o autor o algoritmo “pode esconder os mecanismos de construção das noções e dos princípios matemáticos presentes nos conteúdos matemáticos” (p. 60).

Fica evidente na leitura dessas pesquisas que as dificuldades para a compreensão dos números racionais estão em parte relacionadas com o fato de os números racionais possuírem representações múltiplas[21]. Valera (2003) evidencia a diferença no uso das frações e decimais, enquanto Kieren (*apud* BEHR *et al.* 1983) e Romanatto (1997) mostram que as representações podem assumir vários significados: parte/todo, medida, operador, razão, proporção, porcentagem, etc., formando uma teia de relações. A necessidade de um trabalho que relacione essas representações significativamente é evidenciada nas pesquisas de Behr, *et al.* (1983), Valera (2003), Romanatto (1997), Woerle (1999), Lesh, Post e Behr (1987) entre outras.

Buscando favorecer a compreensão das diferentes representações dos números racionais, Woerle (1999) traz a proposta de uma seqüência didática para o ensino e a aprendizagem dos números racionais, a qual foi desenvolvida com diferentes turmas do ensino fundamental da rede pública municipal de São Paulo.

Ao elaborar as atividades a autora tomou como essencial para a compreensão dos números racionais o domínio das relações das múltiplas representações, baseando-se nas pesquisas sobre cognição de Duval (2003). Esse pesquisador supõe que a compreensão se dá através da relação de conversão entre as representações, defendendo que o aluno reconhece o objeto matemático em suas representações e nas atividades de conversão de uma representação para outra.

A autora buscou nas atividades usar, concomitantemente, as múltiplas representações, com ênfase na fracionária, decimal e geométrica (reta numérica). “O trabalho desenvolvido, apesar de longo e trabalhoso, evidenciou um novo aspecto

---

[21] Woerle (1999) usa o termo “múltiplas representações” referindo-se aos números Racionais. Borba e Penteado (2001) usam “representações múltiplas” para se referirem às representações usuais das funções.

ao ensino dos números racionais – a conversão de um sistema para o outro – tendo em vista uma melhor compreensão desse objeto matemático" (WOERLE, 1999, p. 102). O resultado foi "uma melhora nas iniciativas e nos procedimentos dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para controlá-los, pela rapidez da execução e também pelo interesse na execução das tarefas" (p. 102).

Romanatto (1997) se mostra favorável ao uso das representações de maneira não linear:

> [...] da mesma forma que os contextos para trabalharmos com os números racionais não devem seguir uma linearidade sem significado, as representações também podem ser apresentadas indistintamente nos processos de ensinar e de aprender. Pode acontecer que, em um determinado momento, uma das representações tenha maior significação para os alunos em relação à outras e assim a compreensão dela pode facilitar a compreensão das outras (ROMANATTO, 1997 p.116).

Porém, enquanto Woerle (1999) parte do pressuposto de que as operações de conversão exercem papel fundamental na compreensão, Romanatto (1997) se apóia na idéia de que se as operações em cada sistema de numeração forem compreendidas, é possível mostrar que os procedimentos são equivalentes aos de outra representação. Não discordo do autor, porém, com evidenciado por Lesh, Post e Behr (1987) e Woerle (1999) também considero como fundamental a compreensão da relação entre as representações, que podem ser trabalhadas de forma mais qualitativa através de atividades de conversão intuitivas. De modo que o aluno possa escolher qual das representações é mais favorável para ele, podendo passar de uma para outra sem dificuldades.

A representação de frações e decimais como pontos da reta numérica, tem um aspecto importante para a compreensão dos números racionais, pois evidencia a ordem e a densidade do conjunto numérico. Sobre essa representação na reta Valera (2003) a vê como um caso de relação parte-todo entre o segmento unitário e suas partes. O autor ressalta que essa representação "apresenta dificuldades especiais para a compreensão dos alunos" (p.131), principalmente na representação das frações na reta numérica em que figuram várias unidades inteiras, com as frações entre elas[22]. Por outro lado, salienta a importância dessa representação, principalmente por trazer ao aluno o significado das frações como um número, parecidos com os inteiros 1, 2, 3..., "preenchendo" os espaços entre eles, o que

[22] Conhecidas como frações impróprias.

possibilita a discussão sobre as frações impróprias de maneira natural e evidencia os racionais como uma extensão do conjunto dos naturais, entre outros aspectos.

Sobre o uso da reta numérica para o estudo das frações, Bright *et al.* (1988) destaca que esse modelo figural é diferente dos outros utilizados (como conjuntos e regiões geométricas), de diferentes maneiras:

> First, a length represents the unit, and the number line model suggests not only iteration of the unit but also simultaneous subdivisions of all iterated units. That is, the number line can be treated as a ruler. Second, on a number line there is no visual separation between consecutive units. That is, the model is totally continuous. Both sets and regions as models possess visual discreteness. When regions are used, for example, space is typically left between copies of the unit.
> Third, the number line requires the use of symbols to convey part of the intended meaning. *[No sentido de ser necessário indicar a unidade ou utilizar letras, enquanto outras representações figurais não precisam dessas indicações]* (…). The significant issue is that the number line requires an integration of two forms of information, visual and symbolic; this integration does not seem essential with other models. [23]

Também considero a utilização da reta na representação de frações como diferenciada, no sentido de proporcionar aos estudantes a visualização de dois sistemas de representação (simbólica e figural) simultaneamente.

A partir dos experimentos de ensino, testes e das entrevistas realizadas com estudantes, Bright *et al.* (1988) concluem que o ensino da reta numérica é difícil, pois mesmo que os estudantes executassem as atividades propostas com sucesso, em outras atividades que exigiam os conhecimentos anteriores eles apresentavam dificuldades e não eram bem sucedidos. Os autores atribuem esse insucesso às dificuldades dos alunos em associar e conectar as informações das duas representações, figural e simbólica. Os autores chegam à conclusão de que *"the need to coordinate symbolic and pictorial information with the number line model poses difficulty in matching fraction names with number line representations."*[24]

---

[23] Primeiro, um comprimento representa a unidade, e o modelo da reta numérica sugere não só iteração da unidade, mas também subdivisões simultâneas de todas as unidades inteiras. Ou seja, a reta numérica pode ser tratada como uma régua. Em segundo lugar, na reta numérica não existe uma separação visual entre as unidades consecutivas. Ou seja, o modelo é totalmente contínuo. Ambos, conjuntos e regiões são modelos que possuem uma representação discreta. Quando as regiões são utilizadas, por exemplo, é deixado um espaço entre as cópias da unidade.
Terceiro, a reta numérica requer o uso de símbolos para transmitir o significado pretendido. *[No sentido de ser necessário indicar a unidade ou utilizar letras, enquanto outras representações figurais não precisam dessas indicações]*(...). A questão importante é que a reta numérica requer uma integração das duas formas de informação, visual e simbólica; essa integração não parece essencial em outros modelos.

[24] "A necessidade de coordenar a informação simbólica e figural com o modelo da reta numérica coloca dificuldades em corresponder os nomes da fração com as representações na reta numérica."

Por outro lado, também reforçam que essa dificuldade com a coordenação das representações não é uma exclusividade da reta, mas é relevante pela importância da compreensão dessa representação para a aprendizagem matemática básica. Os autores também perceberam que o uso da reta exerceu um papel importante no modo de pensar dos estudantes, auxiliando-os na resolução dos problemas propostos.

Sob essa mesma perspectiva Wong e Evans (2008) afirmam que um dos empecilhos para a compreensão das frações como medida é o fato de os estudantes se concentrarem e trabalharem isoladamente cada representação, a figural ou a representação simbólica. Segundo os autores estudantes que possuem alguma compreensão são capazes de trabalhar com ambas as representações simultaneamente.

Acredito que mesmo os estudantes apresentando dificuldades em trabalhar com a reta numérica, a riqueza de significados e a compreensão matemática que ela pode proporcionar são motivadores para que seja mais explorada pelos estudantes.

Gálen *et al.* (2008) também mostra que as relações entre as frações, decimais, porcentagens e proporções ou razões devem ser exploradas de diferentes modos, sendo as representações utilizadas simultaneamente, para que os estudantes possam explorar esses contextos.

Uma das formas de representação usada é a barra dupla, com duas escalas distintas, podendo ser usada para relacionar duas grandezas (proporções), ou porcentagens e frações, como na Figura 12, adaptado da (p.36):

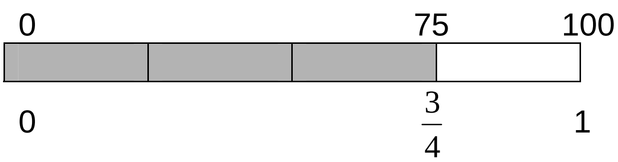


Figura 12: Barra dupla

É essencial que seja proporcionada aos estudantes a oportunidade de explorar as relações entre as representações, pois “um dos objetivos de aprender sobre frações, porcentagens, decimais, e proporções é que o estudante desenvolva uma rede de relações. Dessa maneira a rede é o fundamento para o raciocínio sobre esses objetos” (GÁLEN *et al*, 2008, p.37).

Davydov (1975a) discute a importância de uma mudança significativa no currículo do ensino de matemática, baseado nas teorias cognitivas e em aspectos lógicos e psicológicos do ensino de matemática, ao invés de basear-se apenas nas estruturas matemáticas. A discussão do currículo não é o objetivo principal da presente pesquisa, mas essa discussão motivou Davydov (1975b) analisar os conceitos fundamentais para o ensino e aprendizagem dos números.

Dentro desse contexto Davydov (1975b) argumenta que as frações se originam na medição de grandezas. A exploração desse significado implica na compreensão de que os números racionais são um caso particular dos números reais. Nesse sentido, através da medição de grandezas, os números Reais podem ser obtidos diretamente dos números naturais, não excluindo os números racionais mas tratando-os como um caso particular. Davydov se inspirou em Lebesgue (1966), apresentado na seção anterior, para desenvolver um novo currículo para o ensino de frações através da medição de grandezas.

Morris (2000) estudou o ensino de frações através da medição de grandezas em um experimento de ensino com estudantes de quarta série, baseado na proposta curricular de Davydov. Desse experimento Morris (2000) constatou que dos seis estudantes participantes, quatro deles adquiriram uma compreensão mais aprofunda sobre frações, como: entendimento sobre unidades; a relação entre a unidade de medida e a medida obtida; relação entre frações equivalentes, números inteiros e números mistos, entender a fração como uma quantidade única.

Um caso ressaltado é a coordenação das unidades de medida e frações, no sentido de que se uma unidade A é duas vezes maior que uma unidade B, então uma mesma fração de A é duas vezes maior que a mesma fração de B, ou seja adquiriram um senso de equivalência proporcional.

Morris (2000) também constatou que ao utilizar essa abordagem, foram necessárias muitas instruções e explicações do professor, mas os profundos conhecimentos adquiridos a partir da medição justificam esse papel mais efetivo do professor.

Preocupada com a formação de professores, Pasquini (2007) investigou uma proposta de tratamento para os números Reais, através da medição de segmentos (BARONI; NASCIMENTO, 2005), quando estudada em um curso de análise. Pasquini (2007) sugere uma discussão mais detalhada quanto à utilização dessa construção na educação básica, como uma atividade de caráter mais investigativo no tratamento dos números Reais, diferente da situação atual, muito mais axiomática. “Na adoção do tratamento apresentado pelo Material[25], via medição, esse tipo de atividade reforçaria a essência de como o *Número real* está sendo apresentado, esquivando-se da circularidade[26]” (PASQUINI, 2007 p.99).

Na minha concepção esse tratamento também se justifica em uma abordagem para os números racionais, pois pode proporcionar uma compreensão intuitiva do sistema decimal, e um contato com os números Irracionais, tornando mais clara a diferenciação entre eles, conforme também fica evidenciado em Pasquini (2007).

Vejo que a utilização da medida de grandezas, em especial segmentos, pode evidenciar que os racionais e os irracionais são dois casos particulares dos reais. Nesse sentido não faz necessária uma exploração exaustiva dos números racionais para então definir os irracionais (DAVYDOV, 1975b), também evitando a circularidade na definição (PASQUINI, 2007).

Essas pesquisas mostram que para que ocorra uma aprendizagem dos números racionais se faz necessário que as situações de aprendizagem utilizem as múltiplas representações: fracionária, decimal, figural (barras, círculos, segmentos, etc.), em diferentes contextos, e que destaquem cada um dos significados – medida, razão, proporção, porcentagem, operador e quociente – que essas representações podem assumir.

Nas pesquisas realizadas até o momento são propostas diversas estratégias de ensino visando a aprendizagem dos números racionais. As quais essencialmente buscam explorar os diversos significados que as representações dos números racionais podem assumir, bem como as relações e conversões entre essas representações.

A necessidade de compreensão das frações e decimais como medidas de grandezas aparece em quase todas as pesquisas apresentadas, abordados de diferentes maneiras. Em especial Davydov (1975b), Morris (2000) e Baroni e Nascimento (2005) apontam para a utilização da medição como principal significado a ser explorado na aprendizagem de números não inteiros. Bright *et al.* (1988)

[25] Baroni e Nascimento (2005)

[26] A circularidade da definição de números racionais, irracionais e reais foi discutida na pesquisa e refere-se a maneira como esses conjuntos são definidos na literatura Matemática, de maneira circular.

destaca a importância da reta e da medição na aquisição de conceitos como continuidade, representações múltiplas, unidade de medida, etc.

Tendo em vista os resultados apontados nas pesquisas realizadas quanto a exploração dos números racionais como medida de grandezas; os conhecimentos que podem ser adquiridos por estudantes ao explorarem a reta através da medição; o ponto de vista histórico do surgimento das frações e decimais; e a contribuição da representação na reta para a compreensão das representações múltiplas, acredito que a exploração da medição de segmentos deve ser o caminho a ser traçado no estudo das frações e decimais.

Nessa pesquisa optei por explorar esse significado (medida) em especial, além de outros, como parte/todo e razão, através da construção e exploração da medida de segmentos, que pode ser associada à reta numérica. As atividades desenvolvidas visam essa exploração, de modo que procuro traçar um caminho para que os aprendizes possam desenvolver os conceitos e idéias sobre os números fracionários e decimais como medida, explorando as representações múltiplas e os conceitos de unidade, frações equivalentes, divisão da unidade, representação decimal, etc.

Essa pesquisa se difere das outras aqui mencionadas por se utilizar da tecnologia informática nas explorações, de maneira que pode contribuir com as pesquisas realizadas apresentando o uso dessa ferramenta. Com o auxílio da tecnologia as experimentações realizadas pelos alunos serão diferentes das realizadas nas pesquisas mencionadas, no sentido de serem realizadas experimentações que não são possíveis sem essa mídia, podendo evidenciar outros aspectos e propriedades dos números racionais.

No próximo capítulo apresento as opções metodológicas na pesquisa, o caminho percorrido para o desenvolvimento das atividades e aplicação das mesmas.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesse capítulo, explicito os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa, de cunho qualitativo, justifico minhas escolhas, a visão que tenho da pesquisa e nossos objetivos. Apresento o desenvolvimento das atividades que foram aplicadas com os alunos e os procedimentos adotados para a análise dos dados.

4.1 Metodologia de Pesquisa

Conforme Roth (2005) e Alves-Mazzoti (1998), nas ciências sociais a formação cultural do pesquisador e do pesquisado, bem como as suas histórias de vida, influenciam a coleta e a interpretação dos dados da pesquisa. Essa perspectiva confronta o paradigma cartesiano, em que os resultados da pesquisa são considerados independentes de influências do pesquisador. Roth (2005) mostra que mesmo nas ciências naturais essa visão cartesiana não pode mais ser considerada. Um exemplo é a teoria da relatividade, em que estar em repouso ou em movimento depende do olhar do observador.

As ações e interpretações do pesquisador, iniciando-se na escolha do tema, percorrendo todo o trabalho da pesquisa, condicionam os resultados finais obtidos, sendo considerados, portanto, como resultado do olhar do pesquisador sobre o objeto pesquisado. Por mais que o pesquisador procure evitar as influências de suas crenças pessoais, continuará influenciado pela sua formação e cultura.

Da mesma maneira, o ambiente e os indivíduos que são pesquisados também exercem um importante papel e influenciam os resultados da pesquisa. Suas ações e comprometimento com o trabalho desenvolvido são influenciados pela sua cultura e histórias de vida, o que é chamado de etnografia.

Vejo o conhecimento como algo que é constantemente construído, pelos ambientes freqüentados, nas leituras feitas, nas atividades desenvolvidas, nas interações com outras pessoas e diferentes mídias. Enfim, a cada momento pode-se adquirir algum tipo de conhecimento, sendo o saber modificado constantemente. Penso também que a aquisição de conhecimento não é inconsciente, sendo necessário que o indivíduo esteja engajado em aprender algo, independente da situação. Desse modo, para que estudantes possam aprender devem ser participativos e comprometidos com seu aprendizado.

Essas perspectivas, de pesquisa e de conhecimento, levam a uma abordagem que privilegie o indivíduo como um todo, considerando sua fala, expressões, atitudes, maneiras de pensar e agir, características essas que não podem ser avaliadas quantitativamente, ou seja, requerem uma abordagem de caráter qualitativo, de forma a levar em consideração o objeto de pesquisa como um todo.

Sob essa perspectiva é que faço uso da metodologia de pesquisa qualitativa, que busca o entender, o compreender, dando atenção às pessoas e às suas idéias (BORBA; ARAÚJO, 2004). A abordagem qualitativa busca compreender fenômenos, no caso dessa pesquisa, de aprendizagem, ocorridos durante a coleta de dados.

Como professor da Rede Pública Estadual, optei por realizar a coleta de dados na Escola Estadual Cesarino Borba, na qual leciono, localizada na cidade de Iracemápolis (SP). Essa escola funciona nos três períodos, com turmas de Ensino Fundamental ciclo 2, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos – EJA. Além das salas de aula, a escola conta com uma sala de informática[27], equipada com 12 computadores, dos quais um é destinado ao professor. Dos equipamentos destinados aos alunos, cinco são máquinas de 2005, em boas condições de uso. Os outros computadores possuem uma configuração mais obsoleta, não atendendo aos requisitos mínimos dos *software* atuais, e nem do *software* utilizado.

A princípio, pensei em realizar a coleta durante as aulas regulares, as quais ministrava para turmas de 6ª série / 7º ano. Nesse sentido, realizei algumas atividades de geometria com o *software* Régua e Compasso, com a turma em que lecionava, no ano de 2007. Essa experiência mostrou que a coleta de dados dessa forma não seria viável, pois a sala de informática não comportava todos os alunos da classe ao mesmo tempo, sendo necessário dividir a turma e cuidar dos que estavam trabalhando na sala de aula e na sala de informática.

Essa situação, que já é difícil no papel de professor, inviabilizou o trabalho de pesquisador, pela necessidade de uma coleta de em que o pesquisador precisa estar atento às discussões entre os alunos e na realização das atividades. Dessa forma, optei por realizar o trabalho em horário extra-classe, com um número menor de alunos.

Outro fator que influenciou essa escolha é que as atividades propostas não são usuais no ensino de matemática, de modo que é eticamente correto testá-las primeiramente, fora da sala de aula.

---

[27] Em 2009 a sala foi reformulada e recebeu novos equipamentos.

Esse tipo de pesquisa se enquadra na metodologia de Experimento de Ensino, proposta por Steffe e Thompson (2000). Esses autores destacam que essa metodologia vem preencher uma lacuna entre a prática de pesquisa e a prática de ensino, de modo a conectar as pesquisas da academia com a prática com os aprendizes.

Essa metodologia é adotada em diversas pesquisas nacionais e internacionais (STEFFE, 1991; PAPPE; BELL e YETKIN, 2003, KOMOREK e DUIT, 2004), também foi utilizada em algumas pesquisas do GPIMEM, por exemplo, as pesquisas de Benedetti (2003), Scucuglia (2006) e Azevedo (2008), entre outras. Nesses experimentos, atividades são desenvolvidas durante encontros entre o pesquisador e estudantes. Benedetti (2003) coloca que os experimentos de ensino não se caracterizam por procedimentos padronizados, cabendo ao pesquisador desenvolver estratégias para explorar a matemática dos estudantes através de atividades, baseadas nas hipóteses de ensino e aprendizagem.

Nos encontros as atividades podem ser desenvolvidas individualmente ou por pequenos grupos de estudantes, acompanhados pelo pesquisador. Nas pesquisas realizadas pelo GPIMEM tem-se trabalhado com duplas. Conforme Benedetti (2003, p.56), um dos motivos para o trabalho com duplas

> [...] se refere ao fato de que interações entre estudantes podem proporcionar discussões diferentes daquelas que existiriam apenas com um aluno e com o pesquisador; a linguagem dos educandos, ao trabalharem em conjunto, pode-se tornar mais rica, não apenas para a coleta de dados, em vista dos objetivos do pesquisador, mas também para possíveis aprendizagens que podem ocorrer durante os trabalhos do grupo.

Em minha prática pedagógica, tenho explorado muito o trabalho coletivo, no desenvolvimento das mais diversas atividades. Em muitos casos, esse tipo de trabalho se mostra eficiente, no sentido de que os estudantes se mostram mais engajados em realizar as atividades e ajudarem-se mutuamente. Essas justificativas reforçam a escolha pelo trabalho coletivo. Inicialmente foi escolhido o trabalho em pares, mas, com o início da coleta de dados optei pelo trabalho com pequenos grupos, por motivos que justifico na seção sobre a escolha dos participantes.

Segundo Steffe e Thompson (2000), os experimentos de ensino, permitem ao pesquisador explorar a matemática dos estudantes, a olhar para a estruturação de modelos da matemática pelos estudantes no decorrer das atividades. De modo que vejo essa metodologia como ideal para o nosso trabalho, em que procuro reconhecer as contribuições que a medida e o processo de medição realizados via *software* de geometria dinâmica podem trazer ao aprendizado dos números racionais, ou seja, buscar indícios sobre os conhecimentos e modelos matemáticos desenvolvidos pelos participantes da pesquisa sobre os números racionais.

Nos experimentos o pesquisador trabalha como um professor (STEFFE, 1991). Partindo das falas e ações dos estudantes, cabe ao pesquisador/professor decidir sobre que situações podem ser criadas, quais perguntas críticas serão feitas e que tipos de conhecimento serão estimulados. O foco principal do pesquisador deve ser a aprendizagem do aluno, que tipos de conhecimentos estão sendo desenvolvidos. O pesquisador também deve analisar os conteúdos ensinados como professor, levantando hipóteses sobre o método e a abordagem desenvolvida.

Como professor regular dos participantes da pesquisa, tenho uma visão dos participantes em sala de aula, conheço quais conteúdos foram trabalhados com eles e estou acostumado com a maneira de cada um pensar e agir, de modo que essa visão contribui para a minha interpretação dos resultados do experimento de ensino.

Nessa metodologia, os pesquisadores recorrem a diversos instrumentos de registro, como filmadoras, gravadores de áudio, fotografias, registros escritos, fichas de atividades preenchidas e entrevistas. Para essa coleta de dados, utilizei principalmente os registros em vídeo, anotações em caderno de campo e fichas de atividades.

Não busco com essa pesquisa comprovar teorias, categorias ou hipóteses levantadas previamente, busco sim, indícios, erros e acertos cometidos por professor e alunos, registrar os caminhos trilhados, visando evidenciar contribuições que as experimentações realizadas podem trazer ao entendimento do conteúdo abordado. Para isso tenho em mente a pergunta diretriz:

> ***Como a exploração de frações como medida e o processo de medição de segmentos, explorados via software de geometria dinâmica, contribui para o entendimento dos números racionais em suas representações múltiplas?***

No desenvolvimento da pesquisa como um todo, o papel do grupo de pesquisa foi muito importante. O compartilhamento com outros pesquisadores da mesma área é uma estratégia recomendada por Roth(2005), Alves-Mazzotti (1998) e Goldenberg(2003). No GPIMEM essa é uma prática comum; em que se compartilham as pesquisas em desenvolvimento, desde a etapa inicial, da concepção do projeto, passando pelo desenvolvimento das atividades utilizadas à escrita da dissertação. Essa foi uma prática essencial para esse trabalho, pois ocorreram várias sugestões e críticas, propiciando uma avaliação e novos olhares sobre a pesquisa em andamento.

4.2 Desenvolvimento e Estrutura das Atividades

Durante a concepção das atividades que seriam propostas procurei trilhar um caminho para que os estudantes pudessem desenvolver conhecimentos sobre os números racionais. Ao escrever as atividades me pautei em muitas das leituras que tinha realizado, nas idéias construcionistas, na minha experiência como professor e no conhecimento que tinha dos alunos que poderiam participar dos encontros.

Cheguei a pensar em uma maneira de desenvolver o trabalho com projetos, seguindo preceitos construcionistas, de maneira que os aprendizes pudessem desenvolver algo significativo, que pudesse ser mostrado para outros, mas conclui junto com o meu orientador esse não seria o caminho mais apropriado. Então procurei desenvolver as atividades de modo que os aprendizes pudessem realizar experimentações e visualizações para que pudessem conjecturar e concluir a teoria por detrás dessas experimentações.

Em outros momentos senti que o melhor seria propor uma construção guiada, para que os participantes tivessem um primeiro contato e depois propor outras construções abertas. Mesmo nessas atividades busquei trilhar um caminho para que os aprendizes pudessem desenvolver as idéias e os conceitos por si mesmos, com o meu auxílio como professor/pesquisador.

Minha primeira preocupação foi com a familiarização dos estudantes com o *software*, e também com que tivessem os conhecimentos mínimos de alguns conceitos geométricos que seriam abordados. Como trabalhava com eles nas aulas regulares de matemática, sabia que esse trabalho seria necessário.

Não lecionei para essa turma no ano anterior mas sabia que os números fracionários e decimais tinham sido muito pouco trabalhados na 5ª série / 6º ano. No ano de 2008 foi realizada na rede estadual um projeto de reforço em que parte do conteúdo explorado nas 6ª série/ 7º ano foram os números fracionários e decimais. Sendo explorada a nomenclatura e escrita e os algoritmos de cálculo (adição, subtração, multiplicação e divisão). Seguindo esse trabalho de reforço foram aprofundados os estudos sobre os números racionais.

Quando iniciei as atividades, os alunos já tinham algum conhecimento do conteúdo a ser explorado na pesquisa, adquiridos nas aulas regulares. Durante o período em que ocorreram os encontros o conteúdo números racionais continuou a ser trabalhado em sala de aula. Com essa informação, foquei as atividades de modo a contribuir para que os aprendizes explorassem e construíssem outros significados para os números racionais, diferentes daqueles trabalhados em sala de aula.

Desenvolvi essas atividades baseando-me em alguns materiais preparados anteriormente para uso em aulas regulares, adaptando-os para o uso com a mídia informática. Também tomei como base algumas das atividades propostas por Woerle (1999) e algumas das idéias de Baroni e Nascimento (2005).

Esse material foi submetido ao grupo de pesquisa, que realizou algumas das atividades e as discutiu, contribuindo para uma reformulação das mesmas. O material é composto de 17 atividades, divididos em quatro focos principais:

- Parte 1: Familiarização com o *software* e conceitos prévios: **Atividades de 1 a 4**;
- Parte 2: Divisão de segmentos e frações; adição e subtração de frações: **Atividades 5 a 11**;
- Parte 3: Medição de segmentos, números decimais, relação entre números fracionários e decimais, adição e subtração de decimais: **Atividades 12 a 16**.
- Parte 4: Adição e subtração envolvendo frações e decimais: **Atividade 17**.

As 17 atividades podem ser consultadas na íntegra, na maneira como foram apresentadas aos alunos, no Apêndice A. Nessa seção trago parte das atividades como figuras para não alterar a formatação original.

Cada uma dessas atividades foi programada para ser desenvolvida durante um encontro de 50 a 60 minutos. Na maioria dos casos minha previsão se concretizou, mas em alguns casos foi preciso interromper e concluir no próximo encontro.

Iniciei a atividade 1 com a exploração do *software* e conceitos fundamentais, como ponto, reta, semi-reta, segmento, círculos e comandos do *software*, como movimentação, alterações de cor e espessura, etc. ao final da atividade permito que os participantes explorem esses comandos realizando desenhos livres.

Na atividade 2 inicio com uma construção guiada (ver Figura 13), tendo em vista que era a primeira vez que os aprendizes teriam contato com construções em um S.G.D. e para que percebessem que deveriam ter uma seqüência lógica para realizar uma construção. Nas perguntas 1 e 2 tento levá-los a analisar a construção realizada e na pergunta 3 a utilizarem o recurso do *software*, visualizando que a modificação do segmento inicial não altera as propriedades da construção.

Seguindo na atividade apresento como problema a construção de um quadrado e nesse caso não forneço os passos a serem seguidos, apenas os comandos do *software* que devem ser utilizados e perguntas para que organizem as idéias e explorem a construção.

ATIVIDADE 2 - CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Problema 1: Construir, partindo de um segmento dado, um triângulo com lados congruentes (de mesmo tamanho). Esse tipo de triângulo é chamado de triângulo eqüilátero.

Siga a seqüência de construção:

a) Construa um segmento AB, use a ferramenta  para nomear os pontos.

b) Usando o comando compasso  construa um círculo de raio AB e centro A.

c) da mesma maneira construa um círculo de raio AB e centro B.

d) Marque os pontos da intersecção dos círculos (onde os círculos se cruzam). Nomeie-os de D e E.

e) Construa os segmentos AD e BD.

Pergunta 1: Os segmentos AB, BD e AD formam um triângulo?

Pergunta 2: Esse triângulo tem os lados de mesmo tamanho? Justifique.

Pergunta 3: Com o comando de movimentação de pontos . , movimente o ponto A. O triângulo continua sendo eqüilátero?

Dica: Use  para desenhar um triangulo com preenchimento.

Figura 13: Parte inicial da atividade 2.

Conectado com essa atividade, a atividade 3 objetiva a criação de macros. Para isso foram utilizadas as construções da atividade 2 para a gravação de macros que constroem triângulos eqüiláteros e quadrados. Essa também foi uma atividade guiada, tendo em vista que compreender o processo da gravação de macros não é imediato.

Também incluí uma atividade sobre ângulos (Atividade 4), em que defini o conceito de ângulo e explorei algumas ferramentas do *software*, pois o conceito de ângulo é necessário para a construção da divisão de segmentos.

Ao produzir essas atividades iniciais procurei enfocar apenas os conceitos mínimos necessários para a continuação do trabalho, pois os participantes não tinham nenhuma experiência prévia com o R.e.C ou outro *software* de geometria dinâmica. Acredito que quanto mais experiência os estudantes tiverem com o uso do S.G.D. menos dificuldades terão no desenvolvimento das atividades seguintes.

A atividade 5 trata da divisão em duas partes, a qual exige a construção do ponto médio, parecida com a do triângulo eqüilátero. Outra opção que os participantes poderiam ter utilizado é a ferramenta do R.e.C. ponto médio. Na atividade procurei chamar a atenção dos aprendizes para a necessidade de dividir em partes iguais e em como dividir ao meio. Nessa atividade coloquei como título divisão em múltiplos de 2, porém o correto é potências de dois, erro que somente me atentei na aplicação da atividade.

O objetivo da atividade 6 é a divisão em um número de partes qualquer. Para essa divisão é necessário compreender um pouco do teorema de Tales, e principalmente um resultado do teorema, que diz que "se as retas paralelas têm a mesma distância entre si, os segmentos determinados em uma reta transversal qualquer, são congruentes". Esse conteúdo faz parte do currículo do 7º ou 8º ano, na maioria dos programas e livros didáticos. Para superar esse obstáculo, preparei uma construção que exemplifica o resultado citado acima, deixando-a gravada nas máquinas (Figura 14).

A atividade pede que os alunos abram esse arquivo e verifiquem as congruências. Ao compor essas atividades iniciais me preocupei também com o tempo que seria demandado para cada conteúdo. A abordagem que adotei nessa atividade otimizou o tempo que seria despendido em realizar a construção. Por outro lado não privei os alunos de observar a construção e verificar quais os segmentos eram congruentes, como poderá ser visto na subseção 5.1.1 .

A segunda parte da atividade aplica o teorema na construção da divisão de segmentos em três partes, de forma detalhada[28], para que os alunos pudessem seguir o passo a passo da construção. Em seguida, é solicitado que realizem a

---

[28] Para compreender como as macros funcionam veja a Figura 19 na p.90 e a descrição da atividade.

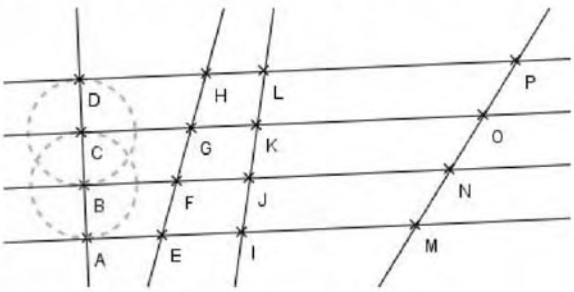
construção para a divisão em 3, 5, 7, 11 e 13 partes e a gravação das respectivas macros.

ATIVIDADE 6 – DIVISÃO DE SEGMENTOS

UM POUCO DE HISTÓRIA: A descoberta de Tales
Tales de Mileto viveu na Grécia antiga, aproximadamente 2400 anos atrás. Ele é o primeiro matemático de que se tem notícia. Como comerciante viajou por todo o domínio do império grego, conhecendo o saber matemático dos egípcios e babilônios. A sua proeza mais conhecida é a de medir a altura da grande pirâmide comparando a sombra da pirâmide com a sombra de um bastão. Essa observação gerou o chamado teorema de tales, que afirma:

"Quando três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados numa das transversais são proporcionais aos determinados na outra."

Esse teorema e suas aplicações serão mais explorados nas series seguintes, porém, uma de suas aplicações é de que **"se as retas paralelas tem a mesma distância entre si, os segmentos determinados em qualquer reta transversal terão o mesmo tamanho (congruentes)."**



CARREGUE A CONSTRUÇÃO ATIVIDADE 6 que está gravada no computador. Nessa construção, verifique se os segmentos AB, BC e CD são congruentes (tem o mesmo tamanho).

Pergunta 1: Que outros segmentos também são congruentes na construção acima? Como você fez para verificar isto?

Figura 14: Atividade 6 parte 1

No final dessa atividade foi explorada a composição dos números em fatores primos de maneira implícita, pois feitas as construções para a divisão em números primos discute-se como seria possível, utilizando as macros gravadas, realizar a divisão em outra quantidade de partes, como, por exemplo, 21 partes. Outra pergunta pedia que o aluno pensasse em uma divisão em partes que pudesse ser realizada com as macros disponíveis.

Na atividade seguinte é introduzido o conceito de fração como uma notação para as partes em que foi dividido o segmento, ou seja, uma notação parte/todo, fazendo a leitura da forma usual, por exemplo, 3/4 lê-se *três quartos* ou, também, como *três partes de quatro*, visando reforçar o significado da escrita.

No *software* R.e.C. não é possível escrever as frações na maneira usual, numerador sobre o denominador, então foi preciso utilizar a escrita na horizontal “a/b”.

A atividade 8 discute com os aprendizes a idéia de tamanho. Inicia com o questionamento de como indicar entre dois segmentos qual é maior, atribuindo a cada segmento um nome ou um símbolo. Minha intenção com essa atividade inicialmente avaliar os conhecimentos que os aprendizes apresentam sobre medidas e comparações. Para então apresentar o conceito de medida. Por exemplo, se os participantes se atentarem para o fato de que o R.e.C informa o comprimento do segmento,e os alunos utilizarem essa medida fornecida a discussão deverá ser direcionada para o significado dessa medida, e não pela definição.

No caso os alunos usaram a ferramenta compasso para comparar os tamanhos e atribuíram nomes para cada segmento. Essa discussão objetiva fazer com que os aprendizes percebam que nomear os segmentos não é uma tarefa simples. Com isso, a atividade sugere, inicialmente, que seja adotado um segmento fixo para a comparação, chamado de “padrão” ou “unidade”, de tamanho um.

Assim desenvolvo a idéia do tamanho do segmento sendo representado por uma fração do padrão ou unidade, isto é, uma medida. Dessa maneira é possível definir e construir as frações impróprias, como representantes do tamanho de segmentos maiores que o padrão.

Na parte final da atividade 8 são construídos alguns segmentos e depois atribuídas medidas a eles. Primeiro peço que os alunos realizem a construção de um segmento (Figura 15), depois pergunto qual o tamanho desse segmento. Procuro com essas perguntas fazer com que os alunos pensem sobre a construção realizada e que concluam que o segmento tem tamanho 2. Na continuação da atividade pergunto como devem fazer para construir outros segmentos sabendo a medida, de tamanhos inteiros ou fracionários.

Acredito que do modo como foi apresentada, a atividade não se torna mecânica e instiga os alunos a pensarem sobre a construção inicial e em como realizar as próximas construções.

Na atividade 9 (Figura 16), objetivo reforçar a construção de segmentos sabendo sua medida fracionária, inclusive com frações impróprias. Procurei deixar a atividade mais aberta, primeiro solicitando os segmentos que devem ser construídos e depois pedindo que escolham algumas frações e as representem. Ainda nessa atividade discute-se a ordenação das frações representadas, a qual é reforçada na atividade 10.

Construção 1: Obtendo segmentos a partir de U.

a) Limpe a tela de desenho, deixando apenas um segmento que será o segmento padrão.

b) Trace uma semi-reta com origem A.

c) Construa uma círculo de **raio U** e **centro A**. Chamando de B o ponto da intersecção da círculo com a semi-reta, qual o tamanho do segmento AB?

d) Construindo um círculo de raio U e centro B, chamando de C a intersecção, que tamanho você atribuiria ao segmento AC?

Figura 15: construção 1 da atividade 8

Na terceira parte das atividades é realizada a construção e definição dos números decimais por meio do processo de medição de segmentos. Para isso, discuto no início da atividade 12, como descobrir a fração que simboliza o tamanho de um segmento dado em relação à unidade. Através de experimentações com o *software*, os alunos podem tentar encontrar tal fração e verificar que essa é uma tarefa quase impossível, de modo que é apresentado outro processo para isso. Elaborei um roteiro para a realização da medição de um segmento, em que ao final é discutido o significado do símbolo obtido, chamado de número decimal. Esse é o tipo de atividade que julguei ser necessária uma apresentação mais estruturada, passo a passo para que os alunos pudessem compreendê-la.

Como agora existem dois símbolos diferentes que simbolizam o tamanho, ou a medida de um segmento, cabe estabelecer a relação entre eles, de modo que, na atividade 13, proponho que dada uma fração, sejam construídos os respectivos segmentos, para que o processo de medição nesses segmentos seja realizado. Dessa maneira espero que os alunos possam estabelecer relações entre essas três representações.

A atividade 14 explora o processo inverso, ou seja, dado um número decimal a tarefa é construir o segmento correspondente. Dessa vez optei por deixar os alunos livres para construir o segmento da maneira que achassem melhor. Também aproveitei para discutir a relação maior e menor entre números decimais. Na atividade 15 é explorada mais uma vez a relação entre as representações, mas explorando as dízimas periódicas, que possuem uma representação finita nas frações e infinita nos números decimais.

ATIVIDADE 9 –FRAÇÕES E SEGMENTOS

Na atividade anterior vimos como obter alguns segmentos com o tamanho representado por frações. Agora vamos explorar como podemos construir um segmento sabendo o seu tamanho na forma de fração.

Construção 1: Construir um segmento com tamanho 3/5 de U.
Dica:

Pergunta 1: O que acontece com o segmento 3/5 se você alterar o tamanho de U?

Construção 2: Construir um segmento com tamanho 7/4 de U.

Construção 3: Escreva três frações:
Construa os segmentos com o tamanho dessas frações em relação a U.

Figura 16: Atividade 9 - Primeira parte

Esse processo pode ser bem visualizado quando é usado o *zoom* na construção e repetido o processo várias vezes. Também é explorado o uso da calculadora para analisar a periodicidade de cada dízima com o denominador da fração.

A atividade 16 tem como tema a adição e a subtração de números decimais, explorada com a adição e subtração de segmentos, para uma posterior formalização. A última atividade apresenta a adição e a subtração de frações e decimais, de forma a estimular os alunos a escolherem entre uma das duas representações.

Essa é a estrutura das atividades propostas, que podem ser consultadas na integra no apêndice A.

4.3 Escolha dos participantes

Para selecionar os participantes conversei com os alunos de uma das classes de sexta série (sétimo ano) em que lecionava, no término de uma das aulas. Informei que esse trabalho fazia parte da minha pesquisa de mestrado, e que seria realizado em horário contrário às aulas, na sala de informática. Também disse que a participação nesse trabalho era voluntária e não implicaria em nenhum benefício direto, como notas ou pontos positivos. Informei também que a participação dependeria da autorização dos pais e da disponibilidade de horários. Alguns alunos demonstraram interesse em participar, então combinamos de marcar os encontros. Sendo assim, os critérios iniciais para selecionar os participantes foram apenas que os mesmos se comprometessem em participar de todo o projeto e que tivessem disponibilidade de horários compatíveis com o pesquisador/professor.

Após reuniões do grupo GPIMEM e de orientação decidi por trabalhar com dois grupos, inicialmente pensei em duplas, e assim foi iniciado o trabalho, com uma dupla, mas na prática percebi que seria melhor trabalhar com grupos de três ou quatro participantes. Isso decorreu pelo fato de logo nos primeiros episódios ocorrer de um dos integrantes não comparecer, impossibilitando a sua realização. Esse fato se repetiu algumas vezes, ora com um, ora com outro participante. Quando convidei outros alunos para participar dos episódios, não foi mais preciso cancelar os encontros, pois mesmo que algum deles faltasse ainda tinham participantes para realizar as atividades. Outro fato que colaborou com a solução desse problema, foi que decidimos, pesquisador e participantes, realizar as atividades após as aulas regulares, entre as 17 e 18 horas.

A coleta de dados começou com uma dupla, Pedro[29] e Paula. Ambos tinham sido escolhidos aleatoriamente entre os interessados. Após alguns encontros, Pedro informou que não poderia mais continuar, alegando que iniciaria um curso de informática no mesmo horário. Já tinham sido desenvolvidas sete atividades com essa dupla. Na tentativa de evitar mais desistências, deixei que a própria aluna convidasse outros participantes, de modo que foi formado um grupo com três alunas, Paula, Carla e Adriana. Fiz uma revisão com as novas participantes dos pontos principais das atividades anteriores e demos continuidade ao trabalho.

Para a escolha do segundo grupo, pela experiência que tive com o primeiro, preferi que fosse formado por amigas, que trabalhavam juntas durante as aulas regulares. Esse grupo foi formado pelas alunas Beatriz, Fabíola, Gabriela e Laura. Os encontros foram interrompidos em julho pelas férias escolares. No segundo semestre os encontros retornaram. No final de junho alguns dos encontros programados com o grupo 1 não ocorreram, pois tanto a Adriana quanto a Carla

---

[29] Utilizei pseudônimos para preservar a identidade dos participantes.

faltaram. Para não cancelar mais encontros e como o grupo 2 estava desenvolvendo as mesmas atividades, pedi a Gabriela para realizar as atividades com Paula.

Foram formados, por fim, dois grupos para a realização das atividades. Esses grupos ficaram até a conclusão do trabalho, com a ausência de um ou outro participante em algumas das atividades. Sei que essa variação de participantes não é ideal, porém, em virtude do tempo necessário para a realização das atividades, não foi possível evitar esse problema. Como o grupo 1 teve uma variação maior dos integrantes vou procurar nos focar nas participantes Gabriela e Paula, que freqüentaram a maior parte dos encontros.

Ao todo participaram da pesquisa dez estudantes, dos quais seis participaram da realização de quase todas as atividades, concluindo todo o trabalho proposto. Para a análise de dados vou focar nesses que participaram de todo o processo.

Problemas como as desistências de alguns participantes e o cancelamento de alguns dos encontros programados, devido às provas escolares, e outras atividades dos alunos, fez com que o nosso cronograma, que previa a coleta entre os meses de março a junho de 2008, não fosse cumprido, sendo que a conclusão do trabalho se deu somente no mês de setembro.

4.4 Participantes da Pesquisa

Nessa seção apresento os participantes e um perfil geral dos mesmos, baseado em minha visão como professor durante o ano letivo de 2008 e também como pesquisador nos encontros da coleta de dados. Com essa descrição objetivo proporcionar uma melhor compreensão das atitudes de cada um nos episódios.

Os participantes da pesquisa foram divididos em dois grupos de trabalho e, como dito na seção anterior, esses grupos não mantiveram a mesma composição durante toda a coleta. Do grupo 1 participaram os alunos Pedro, Paula, Adriana, Carla e Gabriela, sendo que Paula e Gabriela foram as que tiveram uma participação mais efetiva. Os outros participantes desistiram ou faltaram a vários encontros. Essas alunas participaram de quase todas as atividades e quando faltaram foi realizada uma revisão da atividade com elas. Por esse motivo apresento apenas essas duas participantes desse grupo.

A aluna Paula apresentou durante o ano letivo de 2008 um rendimento mediano nas avaliações e atividades de matemática. No momento da escolha dos participantes esse fato não foi levado em consideração, até porque não tinha ainda esse tipo de parâmetro. O que considerei foi o fato de que ela demonstrou inicialmente um grande interesse em participar, e teve, em primeiro momento, a disponibilidade de horários. Durante as atividades apresentou um pouco de timidez e insegurança, precisando ser motivada a expor suas opiniões e pensamentos sobre a atividade. Também deixava sempre que possível o comando do *mouse* para o outro participante. Mesmo sabendo o caminho que deveria ser seguido ela permitia que o outro participante liderasse a construção, tomando rumos não desejados. Com o passar do tempo ela se tornou mais atuante, participando e expressando suas opiniões. Mesmo sem tomar o comando do *mouse* indicava e corrigia as construções.

Como Pedro desistiu de participar, propus a aluna continuar sozinha, tendo em vista que estávamos quase no meio da coleta, e a substituição por outra pessoa atrasaria a realização das atividades. Em um primeiro momento ela aceitou continuar sozinha. No encontro seguinte ela não compareceu e conversei com a mãe da participante, que me informou que a aluna não queria realizar as atividades sozinha. Mesmo com a insistência da mãe ela recusou-se a ir a escola. Depois conversei com a aluna e disse que isso não seria problema, que ela poderia convidar outros colegas da classe para participar das atividades. Sendo assim ela convidou as outras duas alunas, Adriana e Carla. Após conversa, as mesmas confirmaram ter a disponibilidade de horários e o desejo de participar, realizei com as mesmas algumas das atividades introdutórias, mas ambas faltaram a vários encontros, causando atrasos no desenvolvimento das atividades e tornando impossível o acompanhamento e a participação das mesmas. Mesmo com esses problemas não as proibi de participar, sendo que ocasionalmente compareciam aos encontros.

A narração desse fato é importante para compreender a dinâmica dos grupos, pois sempre que os outros membros do grupo 1 faltavam, ou o encontro não se realizava ou eu convidava um integrante do outro grupo. Esse fato ocorreu algumas vezes.

Em um desses encontros pedi à Gabriela, que inicialmente compunha o grupo 2, para realizar as atividades com Paula, tendo em vista que as outras participantes muitas vezes faltavam aos encontros e essa aluna estava muito motivada em participar.

Gabriela tem uma personalidade de liderança, também é prestativa, gosta de auxiliar os professores e colegas, os ajuda com as tarefas e atividades de classe. É uma aluna que demonstra comprometimento com as atividades escolares, procurar sanar as dúvidas, se preparar para as avaliações, etc. é uma aluna que apresentou no ano letivo rendimento satisfatório tanto em matemática como em outras disciplinas. Quando começou a participar do grupo 1 ela assumiu a liderança na realização das atividades, mas discutia e pedia a opinião da Paula, conversavam sobre os passos a serem seguidos em cada construção, trabalhando de forma colaborativa. A ausência em alguns encontros prejudicou um pouco o desenvolvimento das atividades, mas ela permaneceu até o final do trabalho.

Em duas atividades a participante Fabíola, integrante do grupo 2, trabalhou com o grupo 1, pois por motivos de doença não pôde comparecer aos encontros com o grupo 2.

Trago esses detalhes para mostrar a dificuldade em analisar os dados do grupo 1, tendo em vista a rotatividade e as faltas dos participantes, de modo que nenhum deles participou de todos os encontros efetivamente. Esse grupo desenvolveu as atividades de março à setembro de 2008.

A tabela abaixo mostra como foi a participação de dos participantes do grupo 1 em cada atividade:

Atividade	**Data do encontro**	**Participantes**
(1 à 5)	23, 27, 28 de março	Pedro e Paula
6	03 de abril	Pedro e Paula
6 (continuação)	17 de abril	Pedro
7 e 8	22 de abril	Pedro e Paula
Introdução e ativ. 8	15 de maio	Paula e Adriana
9	20 de maio	Paula e Adriana
11	29 de maio	Paula e Gabriela
10	05 de junho	Paula, Gabriela e Carla
12	12 de junho	Paula, Adriana e Carla
13 e 14	28 de agosto	Paula e Gabriela
15	4 de setembro	Paula, Fabíola, Gabriela e Carla
16	11 de setembro	Paula, Fabíola, Carla
16 e 17	18 de setembro	Paula e Gabriela

O grupo 2 foi formado pelas alunas Laura, Fabíola e Beatriz. Nos encontros iniciais também ocorreu a participação da aluna Gabriela. Essas participantes compõem um grupo de amigas que quase sempre realizavam as atividades e tarefas de sala de aula juntas. Também apresentaram rendimento acima da média da sala nas avaliações e atividades de matemática, são alunas que sempre realizam as atividades propostas, tiram dúvidas com o professor e se preparam para as avaliações. Formei esse grupo com o intuito de evitar os problemas que tive com o grupo 1, por serem amigas e estarem muito interessadas em participar imaginei que faltariam menos nas atividades. O que inicialmente seria apenas uma dupla acabou se tornando um trio, e algumas vezes um grupo de quatro alunas.

Laura exerceu a liderança do grupo, muitas vezes assumiu a leitura das atividades e o comando do *mouse*. Quando foram feitos questionamentos sobre as atividades era a que mais respondia.

Fabíola era mais observadora, levantava questionamentos e corrigia as colegas quando não realizavam a construção corretamente. Por essa característica conseguia sistematizar e teorizar os resultados Também assumiu o comando do *mouse* em diversas vezes e liderou algumas construções.

Beatriz não realizou muitas construções, pois tinha dificuldade em comandar o *mouse*. Por outro lado observava bastante e questionava o professor e as colegas, sempre buscando compreender o que estava sendo feito. Nesse sentido também foi muito participativa, durante as discussões e construções expressando suas opiniões e dúvidas.

Nesse grupo as alunas revezavam o comando do *mouse* e a leitura das atividades, algumas vezes uma comandava o *mouse* e outra o teclado. As opiniões de todas eram ouvidas, ocorrendo até mesmo pequenas discussões no decorrer das atividades. Ocorreram poucas faltas aos encontros, sendo que esse grupo realizou o trabalho de abril à setembro de 2008.

4.5 Coleta de Dados

Para a coleta de dados programei a realização de 17 atividades com cada grupo. Os encontros para a realização dessas atividades aconteceram na sala de informática da escola, semanalmente. Algumas vezes ocorreram mais de um encontro por semana, mas em outras semanas não ocorreram encontros.

Esses encontros tiveram a duração de 50 a 60 minutos. Os primeiros encontros se realizaram na parte da manhã, mas após algumas sessões decidi, junto com os participantes, realizar os encontros após as aulas. Essa decisão foi tomada porque, por algumas vezes, foi preciso cancelar os encontros no período da manhã, por diversos motivos, como semana de provas, e outras atividades dos participantes.

Para o registro dos encontros utilizei o *software Camtasia*. Com uma *webcam* e um microfone conectados ao computador, esse programa captura a imagem da tela do computador e da *webcam* simultaneamente, bem como o áudio do ambiente, podendo comparar o que está sendo falado pelos alunos e o que está sendo feito no computador, ao mesmo tempo. Também se pode observar os gestos e as expressões dos estudantes durante a realização das atividades. O registro em vídeo é utilizado em diversas pesquisas que envolvem atividades com estudantes, como nos experimentos de ensino.

Também testei, nas primeiras atividades, outros tipos de registro, com gravador de áudio e câmeras de vídeo, e avaliei que esses registros não seriam necessários, pois o registro de melhor qualidade foi o gerado pelo *Camtasia*. A impossibilidade de ter uma pessoa para auxiliar com as filmagens também pesou nessa escolha.

Outro registro utilizado foram as notas de campo, que como proposto por Bogdan e Biklen (1991) devem conter as descrições e concepções do pesquisador sobre o dia-a-dia do experimento, com as observações pertinentes para uma posterior análise. Procurei registrar, em um caderno, minhas observações durante os experimentos, e depois da realização dos mesmos.

As fichas de atividades são compostas por situações problema, que os participantes deveriam resolver com o *software* e perguntas para direcionar o raciocínio e conclusões. Essas fichas foram preenchidas pelos alunos e também caracterizam um registro da coleta de dados. Outro registro são os arquivos das construções. Sendo possível consultar esses arquivos e rever os passos realizados na construção, pois o R.e.C. possibilita isso.

Essa multiplicidade de registros permite a triangulação dos dados durante a análise. A triangulação é colocada como fundamental por vários pesquisadores, como Alves-Mazzoti (1998, p.63), pois “[...] tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo”. Com essa multiplicidade de registros busco essa amplitude e um melhor compreender do pensamento matemático dos estudantes.

Ressalto a necessidade de utilizar vários meios para o *backup* dos dados. Quando conclui a coleta de dados gravei todas as informações em um *pendrive* e no meu *notebook* pessoal. As informações também ficaram gravadas nas máquinas em que foram realizadas as atividades. Os vídeos decodificados[30] também foram gravados em um DVD. Mesmo com essas fontes de armazenamento uma seqüência de acontecimentos fez com que perdesse parte dos dados. Um acidente com o p*endrive*, o furto do *notebook* e a substituição dos computadores da sala de informática fez com que ficasse apenas com o DVD com os vídeos as notas de campo e as atividades desenvolvidas pelos estudantes, sendo que no DVD faltaram duas atividades que não tinha decodificado.

4.6 Análise dos Dados

Para a análise dos dados disponho dos vídeos dos encontros, notas de campo, fichas das atividades preenchidas pelos alunos e arquivos[31] com as construções realizadas pelos alunos. Borba e Villarreal (2005) sistematizam como são realizados os procedimentos para análise de dados nos experimentos realizados pelo GPIMEM. Tais procedimentos também foram adotados nessa pesquisa. São eles: assistir os vídeos entre as sessões, procurando por questões que possam emergir nos próximos encontros; tomar notas após cada encontro com os estudantes; assistir os vídeos após o término do experimento, procurando por episódios que possam trazer luz sobre a pergunta de pesquisa; transcrever esses episódios; triangular com as anotações dos alunos; apresentar o episódio e a análise inicial aos membros do GPIMEM (o compartilhamento com os pares); estudar as possíveis alternativas de interpretação dos dados que emergiram.

Durante os primeiros episódios avaliei as formas de registro de vídeo, optando pelo *software Camtasia*. Também avaliei qual seria o melhor formato de arquivo do *software*, pois, como foi indicado por alguns dos membros do GPIMEM, ao utilizarem esse mesmo recurso em suas pesquisas, o arquivo de vídeo gerado

---

[30] Na próxima seção explico o significado da decodificação dos vídeos.
[31] Os arquivos das atividades foram consultados apenas em parte da análise, tendo em vista que foram perdidos.

era muito grande e os vídeos (tela e *webcam*) e o áudio ficavam algumas vezes dessincronizados. Com essas informações optei por fazer a gravação dos episódios no formato de arquivo do próprio programa, pois ficava menor, e não apresentava o problema de sincronia. Mas, nesse formato, os arquivos só podem ser assistidos no próprio *Camtasia*, sendo necessário fazer uma nova decodificação do vídeo, para um formato universal.

Essa decodificação, feita com o próprio *Camtasia*, permitiu que melhorasse o áudio dos vídeos, e a configuração da qualidade da imagem, porém esse processo exige muito tempo de processamento do computador, de 4 a 6 horas para cada vídeo de 50 minutos, sendo necessário que a máquina fique ligada e sem outro uso. Por esse motivo nem sempre pude assistir aos vídeos entre os episódios, e no final da coleta ainda faltavam alguns vídeos para decodificar.

Após a conclusão dessa etapa iniciei a análise dos vídeos, assistindo em seqüência, um grupo de cada vez. Ao assistir os vídeos procurei identificar os trechos significativos, que mostravam a resolução das atividades e as conclusões dos participantes, de modo a formar um cenário da coleta de dados. Esses trechos foram anotados e transcritos, de modo que pudesse analisá-los na forma escrita.

Benedetti (2003) destaca o ato de transcrever como importante para um mergulho profundo nos dados, sendo de extrema relevância, pois torna possível identificar minúcias de falas e ações, importantes na análise dos dados. Vejo que o ato de assistir aos vídeos, selecionar trechos para a transcrição e realizá-la são etapas importantes da análise dos dados. Após essa etapa organizei e codifiquei os trechos transcritos para compor os episódios de ensino, apresentados no próximo capítulo.

Os registros em vídeo somam pouco mais de trinta horas, sendo que em torno de 40% disso foi transcrito. Das atividades iniciais, que abrangem a familiarização com o *software* e conceitos geométricos, não realizei nenhuma transcrição, pois, mesmo tendo ocorrido interessantes episódios de aprendizagem e de pensamento matemático, não se relacionam com a pergunta diretriz:

> ***Como a exploração de frações como medida e o processo de medição de segmentos, explorados via software de geometria dinâmica, contribui para o entendimento dos números racionais em suas representações múltiplas?***

Buscando responder essa pergunta é que selecionei os trechos transcritos, explicitando o caminho percorrido na resolução dos problemas propostos e as conclusões finais dos alunos. Tentando compor o cenário em que a pesquisa se realizou e que conhecimentos foram produzidos sobre os números racionais.

CAPÍTULO 5

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo apresento os episódios criados a partir da coleta de dados, os quais trazem luz à pergunta diretriz:

> ***Como a exploração de frações como medida e o processo de medição de segmentos, explorados via software de geometria dinâmica, contribui para o entendimento dos números racionais em suas representações múltiplas?***

Das 17 atividades realizadas com cada grupo selecionei os trechos que contribuem para a compreensão do trabalho realizado e para que a pergunta possa ser respondida. Dividi os dados apresentados em quatro episódios, baseado nos conteúdos matemáticos que foram desenvolvidos nas atividades. O primeiro episódio apresenta como os participantes realizaram a produção de macros para a divisão de segmentos e como utilizaram a fatoração para realizar a divisão de segmentos quando não possuíam a macro desejada.

O segundo episódio mostra como os participantes exploraram as frações nos subconstrutos parte/todo e medida, como as frações foram definidas a partir da divisão de segmentos, a ordenação de frações e as operações de adição e subtração.

O terceiro episódio apresenta como o processo de medição foi apresentado, as primeiras experiências que os estudantes tiveram com esse processo e como os estudantes conheceram e exploraram os números decimais.

O quarto episódio trata sobre a adição e subtração de números decimais e finaliza com a última atividade em que foram propostas adições e subtrações de números decimais com números fracionários e as participantes tiveram que decidir com qual processo deveriam realizar essas operações.

Para cada episódio me baseei na seqüência da atividade proposta e no desenvolvimento dela pelos participantes. Em alguns episódios trago o desenvolvimento da atividade dos dois grupos ou de apenas um dos grupos, conforme julguei relevante.

Para a leitura dos episódios faz necessário explicitar a codificação utilizada:

- Para a transcrição das falas optei por reproduzir o primeiro nome dos participantes antes de cada fala.
- As falas do pesquisador são indicadas como Professor. Observações feitas pelo pesquisador ou a ação realizada pelos estudantes no momento da fala são apresentadas entre chaves e em itálico.

- Observações generalizadas, descrições e comentários são inseridos entre as transcrições.
- Nas transcrições apresento a atividade a que se referem, a data em que o encontro foi realizado, os participantes do encontro e a localização das falas no arquivo de vídeo, com minutos e segundos, por exemplo: 9:45 – 10:30, transcrição extraída dos nove minutos e quarenta e cinco segundos aos dez minutos e trinta segundos.
- Falas seguidas por três pontos indicam que o participante parecia querer dizer algo, mas não disse, ou que relutou por alguns instantes em dizer.
- Trechos em que a fala dos alunos não se relaciona com o desenvolvimento da atividade, ou em que repetem falas anteriores são indicados com três pontos entre colchetes [...].
- Intercalo a descrição com comentários durante o desenvolvimento do episódio.
- Para ressaltar algumas das falas utilizei o negrito. Para cada episódio é possível verificar a atividade na integra, no apêndice A, para que o leitor possa acompanhar o desenvolvimento da mesma.
- As figuras que ilustram os episódios foram extraídas das construções dos alunos, portanto as variações de espessura, formato de ponto, e cores correspondem às escolhas dos alunos. Quando necessário inseri indicações, nomeei pontos ou segmentos para auxiliar a compreensão do leitor.

5.1 1º Episódio: Divisão de segmentos – usando fatores

Esse episódio se baseia em parte da atividade 6 – Divisão de segmentos.

Para dividir segmentos foram utilizadas duas construções, a primeira, para efetuar a divisão em potências de dois (atividade 5) foi a construção do ponto médio e depois reaplicada sucessivamente para 4, 8, e 16 partes.

Para a divisão em outras quantidades de partes deveriam utilizar conceitos do teorema de Tales[32], com o objetivo de dividir em qualquer número de partes. Na atividade solicitei que produzissem divisões em números primos, iniciando em três. Foi apresentado um passo a passo para a divisão em três partes, sendo então solicitado que realizem a divisão em 5, 7, 11 e 13 partes. Ao final da atividade discutiu-se como realizar a divisão em outras quantidades de partes, utilizando as macros produzidas anteriormente.

Destaco dessa atividade a discussão ocorrida sobre a utilização das macros para a divisão em outro número de partes, diferente das construídas. Essa discussão permitiu que as participantes pudessem explorar a decomposição em fatores como uma maneira de realizar essas divisões, ou seja, encontram uma finalidade prática para a decomposição em fatores.

Tendo em vista a necessidade da decomposição em fatores para realizar operações de adição e subtração e simplificar operações de multiplicação e divisão nos números racionais, a compreensão da decomposição em fatores pode contribuir para o entendimento dos números racionais. Por esse motivo construí esse episódio, pois evidencia como foi utilizada a fatoração nas atividades e como a informática auxiliou nesse processo.

O grupo 1 trabalhou essa atividade em dois encontros. No segundo encontro estava presente apenas o aluno Pedro, que não continuou com o trabalho, por esse motivo nesse episódio trago apenas os dados do grupo 2. Também os resultados constatados foram parecidos.

5.1.1 Dividindo Segmentos – Grupo 2

O encontro com o grupo 2 foi realizado no dia 29 de maio de 2008 e estavam presentes as alunas Beatriz, Fabíola e Laura. Nesse dia foi desenvolvida apenas a primeira parte da atividade 6. Como sabia que as alunas desconheciam o teorema de Tales produzi um arquivo com algumas retas paralelas cortadas por transversais (Figura 17) e pedi que abrissem esse arquivo. A atividade inicia com uma introdução sobre Tales e em seguida apresenta o enunciado:

---

[32] Foi usado um resultado do teorema, que diz: se um feixe de retas paralelas é eqüidistante os segmentos determinados em uma reta transversal qualquer são congruentes.

CARREGUE A CONSTRUÇÃO ATIVIDADE 6 que está gravada no computador. Nessa construção, verifique se os segmentos AB, BC e CD são congruentes (tem o mesmo tamanho).

Pergunta 1: Que outros segmentos também são congruentes na construção acima? Como você fez para verificar isto?

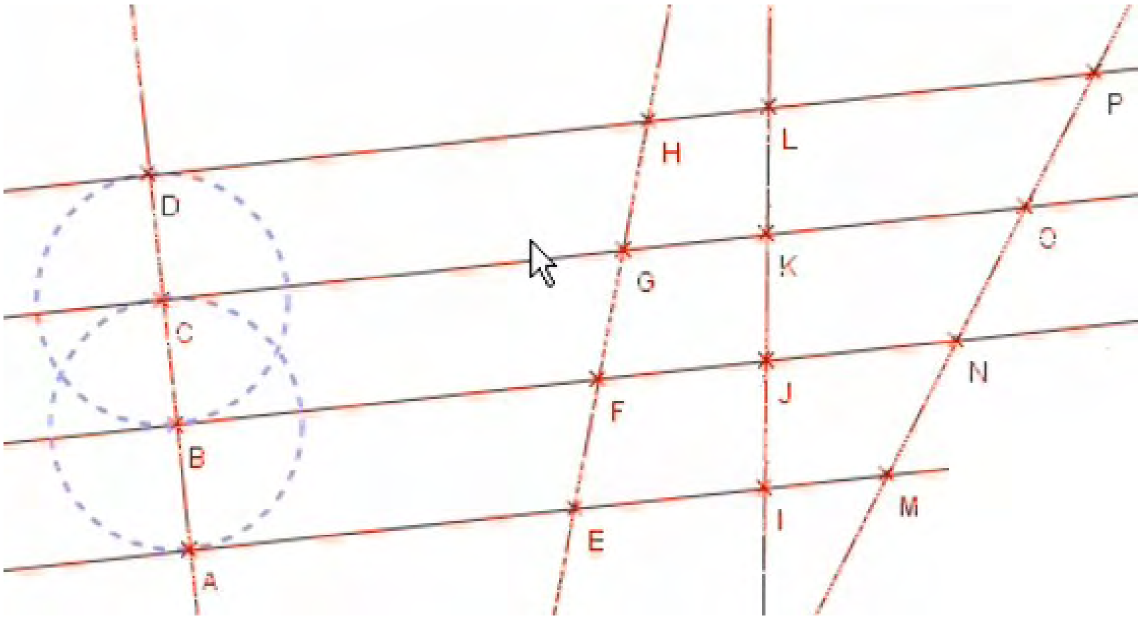


Figura 17: Construção para experimentação do teorema de Tales

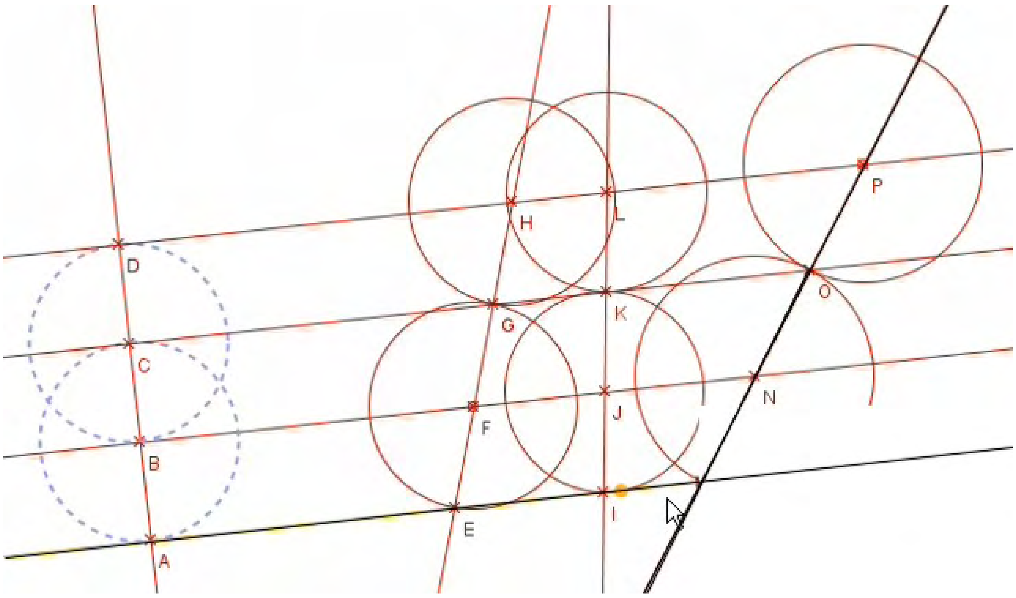


Figura 18: Circunferências utilizadas para a verificação dos segmentos congruentes

As participantes utilizaram a ferramenta compasso e verificaram que os segmentos determinados em cada uma das retas transversais eram congruentes entre si (Figura 18). Essa verificação serviu para que as participantes pudessem compreender um pouco do teorema de Tales e utilizá-lo para dividir os segmentos.

Nesse mesmo dia as alunas iniciaram a divisão dos segmentos e a gravação das macros. De início elas não compreenderam as instruções fornecidas na atividade e foi necessário que eu realizasse a primeira construção com elas. Li novamente as instruções com elas e mostrei como deviam segui-las de modo que conseguiram produzir a divisão em três partes (Figura 19).

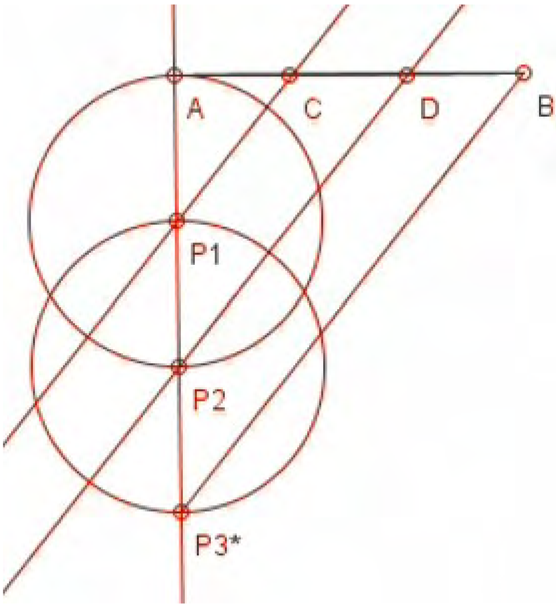


Figura 19: Primeira divisão efetuada pelo grupo 2

Essa construção não permitiu a gravação da macro, sendo necessário alguns ajustes, os quais foram realizados no encontro seguinte, ocorrido no dia 05 de junho. Nesse encontro as alunas realizaram a construção e concluíram com a gravação das macros para divisão em 3, 5 e 7 partes. A Figura 20 apresenta a construção para a gravação da macro em sete partes.

No dia da realização dessa atividade estava trabalhando com os dois grupos simultaneamente, então não acompanhei todos os passos realizados. Na análise do vídeo constatei que as construções demandaram mais tempo porque quando a macro não funcionava as alunas refaziam toda a construção ao invés de procurar o erro. Com o meu auxílio elas concluíram as macros de 5 e 7. Como o tempo estava se esgotando pedi que concluíssem a atividade sem produzir as macros para 11 e 13 partes.

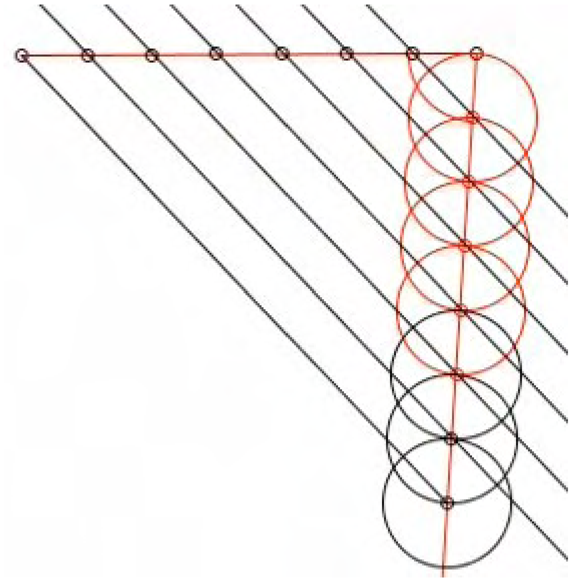


Figura 20: Construção para a produção da macro de divisão em 7 partes

ATIVIDADE 6 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura - Data: 05-06-2008

43:45 - 49:20

[Pergunta: Usando as macros de divisão em 2, 3, 5, 7, 11 e 13 partes, como podemos dividir um segmento em 10 partes?]

PROFESSOR: Você já tem essas macros já feitas. Sem fazer uma nova construção, só usando as macros, dá pra dividir em dez partes?

BEATRIZ: Com a de cinco?

PROFESSOR: com cinco e ? Vamos fazer aqui? Divide esse segmento em dez partes. [*tracei um segmento na tela, ver Figura 21*]

BEATRIZ: Como?

PROFESSOR: Você falou com a de cinco. Como você faria?

LAURA: Eu não sei

BEATRIZ: Não dá pra dobrar?

PROFESSOR: Só que você tem que saber o meio né? [*as alunas dividem em cinco aproximadamente a metade do segmento (Figura 21) e iriam fazer o mesmo com o restante quando chamo a atenção para a necessidade de determinar primeiro o meio do segmento*]

Figura 21: Segmento construído pelas alunas

LAURA: O meio já tá ali não tá?

BEATRIZ: Aqui é o meio [*indicando com o cursor aproximadamente o meio do segmento (Figura 21)*]

PROFESSOR: No zoiômetro?

LAURA: É.

PROFESSOR: Você não tem um jeito de saber exatamente o meio?

FABÍOLA: Tinha... tinha um negócio...

LAURA: como é que era mesmo professor?

[*o professor carrega as macros de divisão em potências de dois*]

PROFESSOR: Então combinando duas dessas macros tem como dividir em dez?

LAURA: É, divide em dois e depois em cinco e cinco.

[...]

LAURA: Como que divide no meio?

PROFESSOR: Como que é que divide?

BEATRIZ: Eu não sei.

FABÍOLA: tá na cara, macro divide ao meio.

Figura 22: Segmento dividido ao meio

FABÍOLA: [*executando a divisão*] Agora clica nesse e nesse [*dividindo o segmento ao meio (Figura 22)*], agora na macro de cinco, e de cinco de novo. [D*ivide cada parte da Figura 22 em cinco partes, obtendo a Figura 23*]

Figura 23: Cada parte do segmento dividida em cinco

PROFESSOR: Então você combinou as duas, lembrando que 2 vezes 5 é 10.

[...]

[*Agora para dividir em seis partes? (pergunta 5)*]

LAURA: “Usando as macros como dividir o segmento em 6 partes?”

LAURA: **Divide no meio, pega o de três e divide em três de novo.** [*Observe que para efetuar a divisão em seis partes a aluna utiliza a macro de dois e de três, ou seja,* $6 = 2\cdot 3$]

PROFESSOR: Entendeu Fabíola?

FABÍOLA: Não.

PROFESSOR: Mostra então Laura.

[mostrando a divisão na tela]

[...]

FABÍOLA: A agora eu entendi...

PROFESSOR: Um segmento em 14 partes Fabíola, como teria que fazer?

FABÍOLA: **Divide ao meio e utiliza a macro de sete.** [$14 = 2\cdot 7$]

LAURA: A entendi, e agora em 21 partes

BEATRIZ: Usa de sete e em três.

LAURA: Divide em três e em sete partes.

FABÍOLA: **Agora 77 partes.**

LAURA: Meu Deus!

PROFESSOR: Vou dar uma dica, é uma das macros que vocês não fizeram.

BEATRIZ: **Usa de 13? 11? Ah, 11 e 7.**

PROFESSOR: Então a idéia é a seguinte, você tem os números primos não tem? Todo número é um múltiplo de primos, então seis é múltiplo do dois e do três. Então pra fazer uma divisão você pode usar essa combinação dessa multiplicação. No caso do 77, ele é a multiplicação do 11 e 7.

Percebo que as alunas assimilaram a idéia de pensar em um número como uma composição de outros números, referentes às macros criadas. Ao responderem prontamente qual macros devem utilizar percebo que estão pensando nos fatores da multiplicação que resulta no número. Nesse sentido a utilização do software possibilitou essa visualização prática para a decomposição em fatores, efetuar divisões geométricas sem produzir novas macros.

Com o objetivo de reforçar o conhecimento adquirido, a atividade pede que as alunas pensem cada uma em uma divisão que possa ser realizada com as macros criadas e que as outras descubram como essa divisão pode ser realizada (ver pergunta 6 da atividade 6 no Apêndice A).

ATIVIDADE 6 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura - Data: 05-06-2008

49:20 - 57:30

PROFESSOR: Pensa em um número de partes que dá pra você dividir usando as macros já criadas, 2, 3, 5, 7. Pode usar qualquer uma dessas macros.

[...]

LAURA: já sei.

FABÍOLA: 25 partes

LAURA: a minha é 49.

Beatriz: 20 partes.

Professor: Vamos começar com a da Beatriz. Fabíola e Laura, como faria a divisão em vinte?

FABÍOLA: Vai usar macro de cinco né?

LAURA: E a de quatro né?

PROFESSOR: Tem a macro de quatro aí?

LAURA: Não, a tem...

PROFESSOR: Quatro é duas vezes dois, é só dividir no meio e no meio de novo.

LAURA: Assim professor? Pronto, 20 partes.

[***realização da construção****. A Figura 24 representa a primeira etapa, em que as alunas dividem o segmento em 4 partes. A Figura 25 representa a segunda etapa em que as alunas dividem cada parte do segmento em 5 partes e a Figura 26 apresenta o segmento dividido em 20 partes*]

Figura 24: Divisão do segmento em quatro partes

Figura 25: Divisão de cada parte em cinco partes

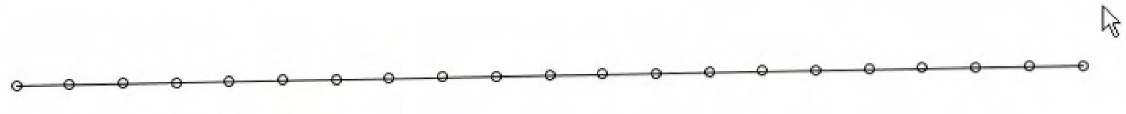


Figura 26: Segmento dividido em 20 partes

[*dando continuidade a pergunta as alunas respondem como realizar a divisão em 25 partes*]

PROFESSOR: Agora Beatriz, faz em 25 partes.

BEATRIZ: Professor tem que dividir ao meio também né?

PROFESSOR: pensa em que multiplicação dá 25.

BEATRIZ: cinco vezes cinco que dá vinte cinco.

[*A Figura 27 representa a divisão do segmento em 5 partes e a Figura 28 a divisão de cada uma das partes em cinco. Nesse momento a aluna achou que a construção não estava correta e recomeçou.*]

Figura 27: Divisão do segmento em cinco partes

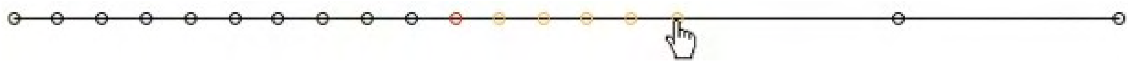


Figura 28: divisão das partes em cinco

BEATRIZ: Aqui eu tenho cinco... e agora vinte cinco... **mas eu não entendi isso aí...**

[*nesse momento o professor não interviu, aguardando que a aluna e as outras colegas concluíssem a construção. A aluna conseguiu concluir a construção sem precisar de ajuda do professor, apenas com a ajuda das colegas. A Figura 29 apresenta a construção final*]

Figura 29: Segmento dividido em 25 partes

PROFESSOR: então como faz de 49?

FABÍOLA: sete vezes sete né?

PROFESSOR: então como faria?

FABÍOLA: divide em sete e em sete.

[*A aluna Fabíola realizou a construção dessa divisão. A Figura 30 representa a construção obtida*]

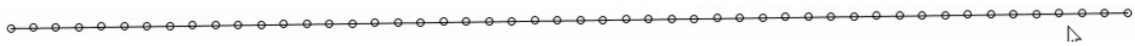


Figura 30: segmento dividido em 49 partes

Laura: **ah, é fácil é só ir combinando os números**.

Beatriz: é tudo a mesma coisa.

Professor: É, tudo na mesma idéia, ir combinando os números.

O pensamento das alunas se baseou na construção geométrica, como por exemplo, para a divisão em dez partes, dividir em dois e cada parte em cinco. Procurei evidenciar que o dez se tratava do produto de dois por cinco, assim como os outros números da atividade. Por meio dessa intervenção, que as alunas puderam resolver a divisão em 25 partes. Quando sugeri que as alunas pensassem em uma multiplicação cujo resultado é vinte e cinco, prontamente responderam cinco vezes cinco.

A fala da aluna Beatriz, "*mas eu não entendi isso aí*" não foi percebida por mim no momento da realização da atividade. Na análise do vídeo, percebo que essa fala pode indicar a dificuldade com a mudança dos fatores utilizados, e a conseqüente mudança na construção do segmento. Nesse caso não ocorreu intervenção do professor e a aluna conseguiu concluir a construção. As análises do vídeo e da fala indicam que a visualização gerada pelo *software* foi fundamental para a compreensão, pois mesmo sabendo que $25 = 5 \cdot 5$, a aluna apenas compreendeu que a composição dos dois números gerava uma divisão em 25 partes após realizar a construção.

5.1.2 Considerações Sobre o Episódio

A introdução ao teorema de Tales foi feita de maneira superficial, pois um conhecimento aprofundado desse teorema não era o objetivo da pesquisa e demandaria mais tempo do que se tinha disponível. Penso que o exemplo apresentado na Figura 17 e a experimentação realizada pelos alunos tornaram possível um entendimento superficial sobre a utilização do teorema no que era preciso: Construir segmentos congruentes.

Os participantes apresentaram dificuldades em realizar as construções das macros, mas conseguiram concluí-las. Atribuo essas dificuldades a pouca experiência que os participantes (de ambos os grupos) possuíam em geometria, Além do que muitos dos conceitos geométricos utilizados foram vistos pela primeira vez durante as atividades. A realização de construções geométricas com programas de geometria dinâmica também foi uma novidade para os participantes.

Considerando as atividades introdutórias realizadas e o desenvolvimento desse episódio, noto que seria desejável uma maior experimentação dos alunos em geometria dinâmica e construções geométricas, para que o desenvolvimento das atividades fluísse melhor. Tendo em vista que o trabalho foi realizado com apenas um grupo de cada vez, com a presença constante do professor para guiar os participantes, a inexperiência não chegou a ser um empecilho para a conclusão da atividade. Nesse sentido o acompanhamento do professor foi fundamental para a realização correta das atividades.

Após a construção das macros, a atividade direcionou as alunas a refletirem sobre como efetuar outras divisões com as macros realizadas. Ao perguntar como efetuar a divisão do segmento em dez partes, noto que de imediato Beatriz pensou em dobrar o cinco, expressando em duas falas distintas: “Usa de cinco” e “Não tem como dobrar?”. Essas falas indicam que a aluna pensou na multiplicação de 5 por 2, mas ainda não tinha claro como seria a construção..

A realização da divisão no R.e.C (Figura 22 e Figura 23) e a visualização do resultado permitiram às estudantes compreender como dividir em 10 usando os fatores 2 e 5. Na próxima divisão, em seis partes, Laura prontamente respondeu que deveriam dividir ao meio e dividir em três cada parte. Essa rápida resposta correta indica que ela compreendeu como efetuar as divisões.

A realização dessa divisão no R.e.C ajudou a Fabíola compreender o processo que até então não estava claro para ela. Para os números seguintes as alunas prontamente responderam quais fatores deveriam ser utilizados. As rápidas respostas evidenciam que elas começaram a pensar nos números como resultados de uma multiplicação.

A não utilização da construção geométrica indica que as alunas não necessitavam mais de visualizar a divisão por terem construído imagens mentais, ou seja, internalizaram a representação, não necessitando mais da visualização no computador.

Quando solicitadas a dividir em 77 partes as alunas hesitaram em responder. Esse tipo de dúvida pode ser atribuído a 77 não ser um “número familiar” às alunas, no sentido de que é um número pouco utilizado, mas com poucas dicas logo responderam que deveriam utilizar 11 e 7.

Para as primeiras divisões de segmentos foi necessário definir e explicitar como efetuar a construção, pois o conhecimento necessário para a execução ainda era desconhecido das alunas. Com o auxílio do R.e.C essa dificuldade foi superada, possibilitando que as alunas prosseguissem a atividade. Dessa maneira, vejo que a tecnologia informática e, nesse caso, o R.e.C, e o direcionamento da construção, permitiram que as alunas executassem as tarefas desejadas. Não vejo essa abordagem como ideal, mas quero destacar que com o uso da tecnologia e a atuação do professor foi possível realizar a atividade com um mínimo de informação.

Sendo superadas as dificuldades, as participantes puderam focar no objetivo principal de dividir segmentos. A possibilidade de dividir segmento em potências de dois e 3, 5 e 7 partes permitiu que experimentassem e visualizassem as divisões em outros números, tornando desnecessário explicitar “como fazer” para executar outras divisões. Nesse caso a visualização e a experimentação permitiram que as alunas investigassem e teorizassem sobre como fazer essas divisões, invertendo a ordem teorização e exercícios “e permitindo uma nova ordem: investigação e, então a teorização” (BORBA; PENTEADO, 2001, p.39).

Outra alteração que pode ser notada é na aplicação do conhecimento matemático. Em aulas ministradas em sala de aula, noto a dificuldade dos alunos em pensar em um número na forma fatorada, e também em compreender que uma divisão pode ser realizada em etapas. As construções realizadas ajudaram que as alunas compreendessem e pensassem nos números de forma fatorada, mas não da maneira usual, elas expressaram o pensamento com frases como “usar a macro de *a* e de *b*”. Elas também usaram a divisão em etapas com naturalidade ao dizer “Divide no meio, pega o de três e divide em três de novo”. Mostra que está claro que divisão por seis é a mesma coisa que dividir por dois e por três.

Os resultados das experimentações realizadas nesse episódio indicam que o uso de *software* de geometria dinâmica para a divisão de segmentos ajudou as estudantes a compreender a propriedade de fatoração e construir conceitos sobre a operação de divisão, de modo que contribui também para um entendimento das frações, pois esse conhecimento é necessário nas operações de adição e subtração e também para efetuar simplificações na multiplicação e divisão.

Nesse sentido esse episódio ajuda a compor a resposta da pergunta diretriz, pois ao *software* contribuir para esse entendimento está contribuindo também para a compreensão posterior das frações e do processo de medição.

5.2 2º Episódio: Frações e Segmentos

Nesse episódio reuni trechos dos encontros com os dois grupos, nos quais foram desenvolvidas as atividades de 7 à 11. Nessas atividades foi trabalhado o conceito de fração como parte/todo e medida, a ordem das frações e as operações de adição e subtração. Esse episódio apresenta como as frações foram definidas e exploradas pelos participantes da pesquisa.

Tendo sido realizadas a construção e gravação das macros no episódio anterior, na atividade 7 foi definido o símbolo da fração como a indicação de em quantas partes um segmento foi dividido (o denominador) e quantas partes foram tomadas (numerador). Ambos os grupos realizaram essa atividade com rapidez e imediatamente iniciaram a atividade 8 na qual ocorre a discussão sobre como expressar a classificação dos segmentos por tamanho, com o objetivo de concluir que necessita-se de um padrão de comparação símbolo que represente o tamanho do segmento, ou seja uma medida.

Nesse episódio mostro como foi trabalhada a fração como medida do segmento e como os estudantes utilizaram a representação geométrica para aprender sobre a ordenação das frações e as operações de adição e subtração.

5.2.1 Comparação de Segmentos: Introdução à Medida Fracionária – Grupo 1

A primeira questão apresentada foi: Como determinar entre dois segmentos quaisquer, chamados de AB e CD, qual é o maior. O grupo 1, com os participantes Paula e Pedro traçaram os segmentos da Figura 31.

Figura 31 - Segmentos traçados pelo grupo 1

Quando questionados sobre qual dos segmentos era o maior, responderam:

> **Atividades 7 e 8 - Participantes: Paula e Pedro Data: 22-04-08**
>
> **13:29 – 15:10**
>
> Pedro: O CD.
>
> Paula: tá igual.
>
> Professor: Mas vocês desenharam para ser igual?
>
> Paula: Ele pediu.
>
> Pedro, Eu falei, tenta fazer igual, [*mostra na tela como fez para desenhar igual, tentando marcar o ponto C abaixo de A e o ponto D abaixo de B*]
>
> [...]
>
> Professor: Então me responde, qual dos dois é maior.

Pedro: O CD

Professor: Como você sabe?

Pedro: Comparando os pontos. Olham comparando os pontos, se eu for fazer uma reta ele vai “encurva”, e essa vai “encurva” prá lá.

[...]

Paula: Qual é maior?

Pedro: O CD

Paula: Como ele sabe?

Professor: Pelo que ele falou. Mostra pra gente no desenho.

Figura 32: Quadrilátero ABDC

[*Enquanto Pedro mostra o desenho na tela, Paula comenta:*]

Paula: Não pode usar o compasso?

Pedro justificou que o segmento CD era o maior baseado na inclinação dos segmentos AC e BD (Figura 32). O professor desenhou outro quadrilátero para que o aluno visualizasse que nem sempre esse argumento era válido. Então a aluna Paula utilizou o compasso para comparar os tamanhos, concluindo:

Atividades 7 e 8 - Participantes: Paula e Pedro Data: 22-04-08

18:15 - 19:05

[*A aluna usou o compasso para fazer a circunferência de raio AB (Ver* Figura 33*)*]

PAULA: Esse com esse, tá igual [*referindo-se ao raio da circunferência e ao segmento AB*], mas eu fiz nesse e não tá igual [*o segmento AD*].

PEDRO: Como você fez para saber qual era o maior? [*pergunta da atividade*]

PAULA: Eu usei o compasso.

PROFESSOR: Como você usou o compasso?

PAULA: Eu medi as retas com ele.

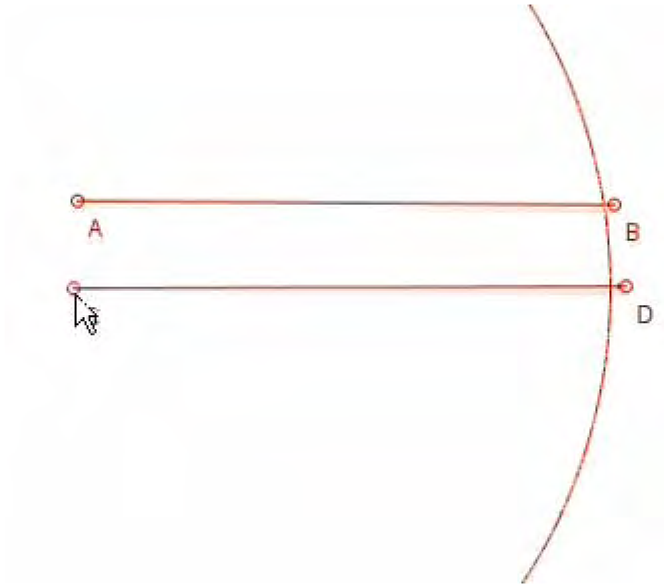


Figura 33: comparação dos segmentos com a circunferência.

O uso da ferramenta compasso para comparar os tamanhos não foi problema para a participante, facilmente Paula concluiu que o segmento CD era maior. A dificuldade apresentada foi em responder a pergunta sobre como a comparação foi feita, ou seja, formalizar o pensamento. Para essa formalização foi necessário intervir e ajudá-los a estruturar os passos seguidos. Pedro se manifestou que não tinha entendido a utilização do compasso para comparar. Para ajudá-lo na visualização movimentei o ponto B, alterando o tamanho do segmento AB, para que o aluno visualizasse que o raio da circunferência também se alterava (Figura 34).

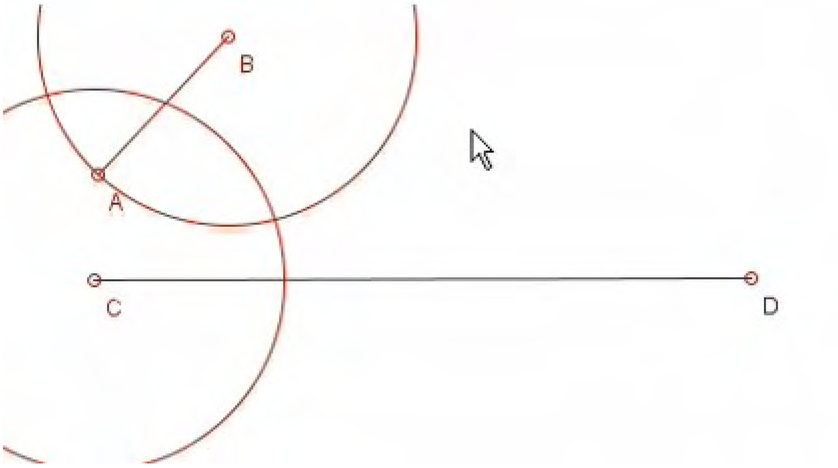


Figura 34: Movimentação do ponto B

Essa visualização auxiliou os participantes a compreenderem a comparação realizada e a escrever na atividade a resposta da pergunta.

Continuando a atividade, os participantes traçaram outros dois segmentos e compararam entre eles qual era o maior. Para que eles pudessem sentir a dificuldade em criar e atribuir símbolos que representassem os tamanhos, a atividade solicitou que eles criassem símbolos ou nomes que representassem os tamanhos dos segmentos. Diversas sugestões surgiram, entre elas, o uso de nomes de planetas.

> **Atividades 7 e 8 - Participantes: Paula e Pedro Data: 22-04-08**
>
> **35:50 - 39:50**
>
> PEDRO: Crie um nome ou símbolo para cada segmento de tal forma que seja possível saber a posição na seqüência do menor segmento para o maior.
>
> PAULA: Não sei.
>
> PROFESSOR: Criar símbolo ou nome. Vamos lá que nome você chamaria o segmento menor que tem aí dos 4?
>
> PEDRO: **Menorzinho.**
>
> PAULA: **Polegar.**
>
> PROFESSOR: Então escreve aí o nome que você deu.
>
> PEDRO: O nome?
>
> PROFESSOR: É.
>
> PEDRO: **Tiririca.**
>
> PROFESSOR: Aí eu vou falar assim pra você esse segmento ele é tiririca eu vou saber se ele é menor ou maior? Sei que ele é desdentado e usa peruca amarela.
>
> PAULA: **Polegar.**
>
> PROFESSOR: Um nome assim que se a outra dupla vier amanhã eu vou falar tem esses 4 vocês sabem qual é o menor deles só pelo nome?
>
> PEDRO: Põe **maior, médio, menor...**
>
> [...]
>
> PEDRO: Põe os **nomes dos planetas**...que que tem, põe o **maior o sol**
>
> É o maior **menorzinho... a Terra.**
>
> PROFESSOR: Resolve os 2 aí.
>
> PAULA: Eu num sei.
>
> PROFESSOR: Como não sabe? Resolve aí, vocês já tiveram um monte de idéias só escrever.
>
> PAULA: Pronto peraí. Vou por aqui tá.
>
> PEDRO: **Plutão**
>
> PAULA: AB, CB, FG, HI... **AB é o menorzinho**
>
> PROFESSOR: Pode ser Pedro **menorzinho**? você tem outra sugestão?
>
> PEDRO: Tenho umas idéias aí mas pode ser.

Os alunos atribuíram ao menor segmento o nome menorzinho, e ao maior segmento o nome maiorzão, os outros dois segmentos foram chamados de menor e médio. Com esses nomes foi possível classificar esses segmentos, e os alunos concluíram que essa classificação foi uma tarefa difícil. Como sugestão para facilitar essa tarefa os participantes sugeriram utilizar letras do alfabeto do maior para o menor segmento, sendo AB o maior segmento, depois CD, etc... até o menor segmento.

Noto que os participantes enxergam o conjunto de segmentos como um conjunto discreto, em que é possível realizar uma ordenação simples. Nesse momento eles ainda não pensam em utilizar qualquer tipo de números para representar os tamanhos, mas sugerem um conjunto finito e ordenado, o alfabeto. Talvez esse seja um indício de que sentiram a necessidade de uma ordenação para classificar os segmentos.

5.2.2 Comparação de segmentos: Introdução à medida fracionária – Grupo 2

O grupo 2 realizou a atividade 8 e as participantes traçaram segmentos com tamanhos bem distintos, de modo que ficou fácil a comparação. Como símbolo as alunas escolheram nomes de jogadores de futebol, e o critério utilizado foi a beleza/feiúra dos jogadores (Figura 35).

Atividade 7 e 8 - Participantes: Laura, Fabíola e Beatriz, Data: 09-06-2008 16:50-17:10

LAURA: Agora dá pra saber por feiúra né: Cristiano Ronaldo, Nani, Valdívia, e Tevez.

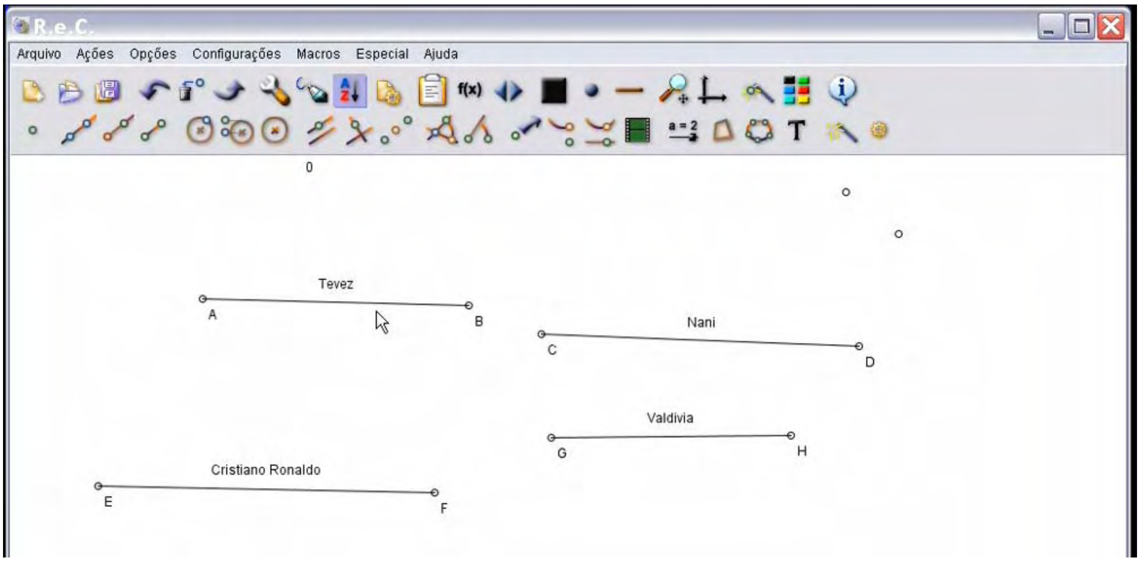


Figura 35: Segmentos classificados com nomes

A classificação dos segmentos por nomes foi criativa e refletiu a vivência das alunas como fãs de futebol. A escolha indica que por esse motivo essa classificação foi considerada fácil pelas alunas, sendo necessário solicitar que traçassem mais segmentos para serem classificados. Agora, com dez segmentos na tela, pelo critério utilizado ser subjetivo, "beleza" ou "feiúra", a classificação dos segmentos tornou-se mais difícil. Mesmo assim esse grupo não sentiu a necessidade de utilizar um conjunto ordenado, como o grupo 1, que sugeriu o uso do alfabeto. Nesse caso procurei evidenciar a subjetividade da escolha dos nomes e o fato de que ao inserir novos segmentos a classificação se tornava incompreensível.

Em ambos os grupos utilizei a dificuldade em classificar os segmentos com os critérios utilizados para justificar a escolha de um segmento como padrão de comparação, de modo que todos os outros segmentos sejam comparados com ele. Esse segmento foi chamado de U e definido com medida 1. Logo, todos os segmentos possuirão uma medida com relação a U.

Inicialmente, os participantes construíram segmentos conhecendo as suas medidas, inteiras ou fracionárias.

Atividade 7 e 8 - Participantes: Laura, Fabíola e Beatriz, Data: 09-06-2008

[construção de segmentos de tamanhos inteiros]

35:50-37:10

"Sobre uma semi-reta construir uma circunferência de raio 1. **Pergunta:** Qual o tamanho do segmento AB, formado pela circunferência sobre a semi-reta."

LAURA: Qual o tamanho do segmento AB? Eu acho que tem que medir.

PROFESSOR: Precisa medir? Como você vai medir?

LAURA: [... *lendo novamente a pergunta*] Tem que ver o tamanho do padrão U e comparar com esse né? *(ver Figura 36)*

PROFESSOR: Qual é o tamanho do padrão?

LAURA: Um

LAURA: Mas o AB é maior.

PROFESSOR: Maior?

LAURA: É maior, olhando é.

PROFESSOR: Como que você desenhou esse segmento AB?

LAURA: Usando a semi-reta.

PROFESSOR: Depois da semi-reta.

LAURA: Usei o compasso.

PROFESSOR: Qual foi o raio do compasso?

LAURA: U

PROFESSOR: Que tem tamanho?

LAURA: Um

PROFESSOR: E AB não é um raio também?

LAURA: A então também tem tamanho 1? É que tá deitado, por isso. [*referindo-se a inclinação da semi-reta em relação ao raio. Ver Figura 36*]

FABÍOLA: Ilusão de ótica.

LAURA: A tá, então tem o mesmo tamanho do padrão U.

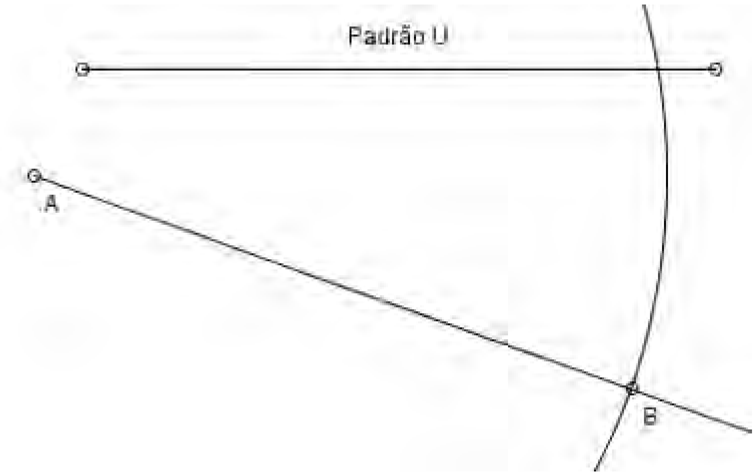


Figura 36: construção do segmento AB com tamanho padrão 1

Nessa construção, a posição em que as alunas traçaram a reta, inclinada, e o centro da circunferência em A, prejudicou a visualização de que os segmentos AB e U tinham o mesmo tamanho, e conseqüentemente a mesma medida, então as lembrei de que ao construírem AB, tomaram como raio da circunferência o segmento padrão U. Também se percebe que a transferência de medidas com o compasso ainda não está clara, necessitando da intervenção do professor para a conclusão.

Atividade 7 e 8 - Participantes: Laura, Fabíola e Beatriz, Data: 09-06-2008 38:25-42:45

[*construir outra unidade a partir de B, formando o segmento BC*]

PROFESSOR: Qual o tamanho de AC?

LAURA: dois U?

PROFESSOR: Isso, tem tamanho 2

LAURA: Porque é o dobro de U.

LAURA: É possível construir um segmento 3 vezes maior que U? [*lendo pergunta da atividade*] Sim, do mesmo jeito que a gente construiu um a gente constrói outro.

[...]

LAURA: Como fazer para construir um segmento com metade do tamanho de U?

BEATRIZ: Dividindo ao meio, usando as macros.

PROFESSOR: Você estão muito espertas.

BEATRIZ: É fácil.

PROFESSOR: Então constrói.

[...]

PROFESSOR: Eu quero que você construa um segmento com metade de U, não dividir o U ao meio.

LAURA: Mas não pode dividir o U e depois ocultar o resto?

PROFESSOR: Pode, mas eu quero que você construa fora, nessa semi-reta constrói o tamanho meio.

LAURA: E agora? Tem que dividir ao meio...

PROFESSOR: Você não pode transferir a unidade para a semi-reta? Se você dividir ao meio não vai ter meio de u?

BEATRIZ: A sim.

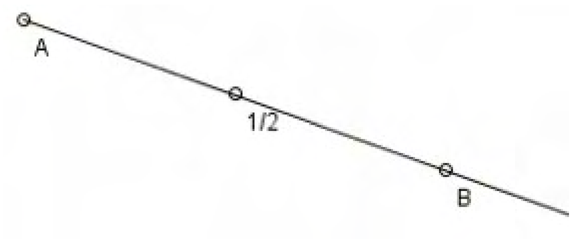


Figura 37: segmento de tamanho 1/2

43:15-45:45

BEATRIZ: Descreva como foi feito: Usando a macro de dividir ao meio.

LAURA: Como podemos representar o tamanho desse segmento? Meio?

BEATRIZ: Pode escrever assim? [***meio***]?

PROFESSOR: Como número.

BEATRIZ: A tá. [***1/2***]

LAURA: Como fazer para obter o segmento de tamanho 3 vezes menor que U? Só dividir em três. Pode fazer?

PROFESSOR: Pode.

As alunas não tiveram dificuldades em construir os segmentos com os tamanhos solicitados, rapidamente construíram e definiram os tamanhos de cada um. Esse fato indica que a associação da medida dos segmentos com as frações foi compreendida pelas alunas.

No encontro seguinte foi realizada a atividade 9. Os registros dessa atividade realizada pelo grupo 2 foram perdidos. No grupo 1, devido às mudanças do grupo ela foi realizada mais de uma vez, com diferentes participantes, ficando difícil fazer uma análise da mesma, por esse motivo não trago transcrições dessa atividade. O objetivo dela foi reforçar a relação entre as frações e os segmentos, sendo dadas frações e solicitado aos participantes a construção do segmento com a medida da fração. Acredito que no momento da realização tal relação foi compreendida, pois os participantes necessitaram desse conhecimento na atividade posterior.

5.2.3 Comparação e Ordenação de Frações – Grupo 1

Na atividade 10 do grupo 1 participaram as alunas Gabriela, Paula e Carla. Como essa última aluna não participava de todas as atividades ficou mais como espectadora. Gabriela vinha participando dos encontros com o grupo 2, e agora por minha solicitação começou a participar do grupo 1. O objetivo da atividade é a construção de segmentos com medida fracionária em uma mesma semi-reta.

Construção 1: Construa sobre uma mesma semi-reta r os segmentos que correspondem as frações de U: 1/5; 3/5; 1/4; 3/4; 2/7 ; 5/7; 2/9; 5/9; 5/3; 7/4.

Nessa construção Gabriela assumiu o controle do *mouse* e Paula orientou as construções, indicando o que deveria ser feito e corrigindo eventuais erros. Trabalhando dessa maneira as alunas não tiveram dificuldades em representar a maioria das frações (ver Figura 38), não necessitando que as auxiliasse muito.

Figura 38: Representação das frações grupo 1

Na construção das frações com denominador 9 logo concluíram que deveriam utilizar a divisão em três e em três novamente. O excesso de pontos confundiu um pouco as alunas na construção:

Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 1 – Participantes: Gabriela, Paula e Carla– Data: 05-06-2008

10:20-11:15

PAULA: Agora é o 2/9. [*Procura entre as macros gravadas. Ver Figura 39*] Não tem a macro ai? Não tem.

GABRIELA: Não tem.

Figura 39: Lista de Macros

GABRIELA: A gente vai ter que fazer macro.

PROFESSOR: Não precisa.

PAULA: Não? Porque não?

PROFESSOR: Vamos pensar em um jeito que dá pra gente fazer a de nove.

GABRIELA: De três.

PROFESSOR: Divide em três e depois em... GABRIELA: É em três e três.

Figura 40: Divisão do padrão em três

GABRIELA: E agora professor? Só tem dois aqui. [*pontos beges da Figura 40*]

PAULA: São três, um, dois, três. [*mostrando que devem contar as partes e não os pontos.*]

GABRIELA: a ta. E agora como faz?

PROFESSOR: É o dois nonos. Então dois nonos tem que...

GABRIELA: Tem que pegar aqui de novo?

PROFESSOR: É até o primeiro ponto marrom [*bege*].

[...]

Figura 41: Divisão em nonos

As participantes concluíram a divisão do segmento em nonos (Figura 41) e marcaram os pontos desejados (2/9 e 5/9). Noto que as participantes conseguiram utilizar a composição de fatores que tinha sido trabalhada no episódio anterior. A próxima fração é 5/3, uma fração imprópria sendo necessária a construção e divisão de mais de uma unidade.

Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 1 – Participantes: Gabriela, Paula e Carla– Data: 05-06-2008

13:00-16:16

GABRIELA: a outra agora é 5/3...

PAULA: Professor 5/3 agora.

PROFESSOR: É e como faz?

GABRIELA: Eu não sei.

PROFESSOR: 5/3 é maior ou menor que uma unidade? [...*participantes pensando*] Uma unidade você vai dividir em três não é?

GABRIELA: É. Então é maior.

PROFESSOR: Isso, na unidade você vai ter 1/3 ,2/3, 3/3. Então 5/3 é maior que uma unidade.

GABRIELA: Isso.

PROFESSOR: Então nessa unidade você tem até o 3/3, e depois você vai fazer mais uma unidade pra cá [*justaposta a primeira unidade*] pra ter o 4/3, e o...

GABRIELA: 5/3.

[...]

[*seguindo orientações do professor as alunas utilizam o compasso para marcar uma nova unidade e a dividem em três, determinando o ponto 5/3.*]

PAULA: Agora é 7/4.

PROFESSOR: Então 7/4 é maior ou menor que um?

GABRIELA: Maior.

PROFESSOR: É maior ou menor que dois?

PAULA: Menor

PROFESSOR: isso, porque o 2 corresponde a 8/4, certo? Então a construção é a mesma né?

GABRIELA: Sim.

[*as participantes realizam a construção sem necessitar de auxílio do professor e determinam o ponto do 7/4.*]

Feita a construção dos segmentos correspondentes às frações, a atividade pergunta qual das frações corresponde ao segmento maior, 1/5 ou 3/5. As alunas ficam na dúvida sobre qual segmento corresponde a cada fração então mostro na tela que os segmentos iniciam na origem da semi-reta até o ponto em que a fração está indicada.

Observando a construção as alunas concluem que o segmento maior é o 3/5. A atividade segue com diversas perguntas sobre a comparação de frações, primeiro das frações com mesmo denominador (letras (a), (b), (c)) as quais as alunas realizam observando a semi-reta. Em seguida pedindo que separem as frações com mesmo numerador e indiquem qual das frações refere-se ao segmento menor em cada caso (letra f).

a) Dentre as frações acima, quais possuem o mesmo denominador?
b) Das frações 1/5 e 3/5, qual corresponde ao segmento maior?
c) Das frações 1/4; 3/4 e 7/4, qual corresponde ao segmento menor? E ao segmento maior?
d) Entre todas as frações da construção, qual fração representa o menor segmento?
e) Entre todas as frações da construção, qual fração representa o maior segmento?
f) Quais entre as frações da construção tem o mesmo numerador? Qual delas representa o segmento menor? E o segmento maior?

As participantes respondem corretamente, como se pode observar na Figura 42.

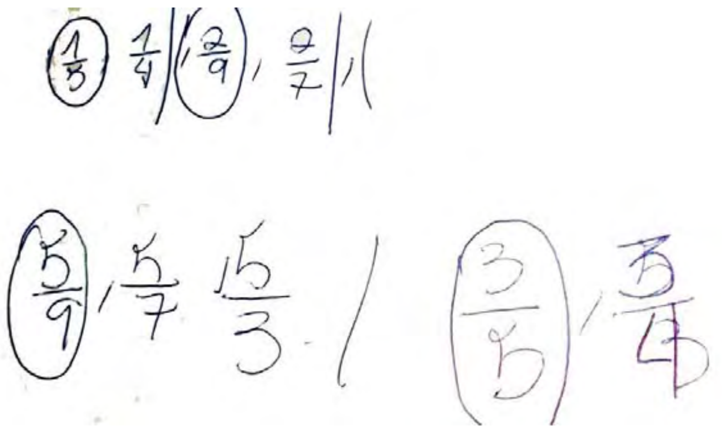


Figura 42: Resposta à questão f) - atividade 10 - grupo 1

Note que procurei primeiro determinar a correspondência entre as frações e os segmentos para então definir que na comparação de frações, a fração menor será a que corresponde ao segmento menor. Não apresentei nenhuma outra regra para a comparação, apenas a observação do tamanho do segmento. Após definir essa comparação a próxima pergunta pede que as alunas respondam como proceder para comparar duas frações, sendo que as alunas sugerem como exemplo as frações 3/7 e 2/7 (com mesmo denominador) e as frações 2/5 e 2/7 (com mesmo numerador). Carla explica como fez para determinar a fração maior:

Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 1 – Participantes: Gabriela, Paula e Carla– Data: 05-06-2008

29:57-30:59

PROFESSOR: Como você fez para saber qual a maior? 3/7 ou 2/7?

CARLA: Ah, porque embaixo é igual e em cima é diferente e 3 é maior que dois.

Para a segunda comparação Gabriela respondeu que a fração maior era 2/7 e Carla respondeu 2/5. Para explicar sua escolha disse:

> **Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 1 – Participantes: Gabriela, Paula e Carla– Data: 05-06-2008**
>
> **31:55-32:59**
>
> PROFESSOR: Porque é 2/5?
>
> CARLA: Ah, é quase igual a primeira explicação só que ao contrário.
>
> PROFESSOR: Então, o numerador é o mesmo.[*As alunas concordam*]. Então o número de partes é o mesmo. O que é maior...
>
> GABRIELA: Só que foi dividido ao contrário
>
> PROFESSOR: O que é maior se você dividir em 5 ou em 7?
>
> GABRIELA E CARLA: Em cinco.
>
> PROFESSOR: Em cinco, então se você pegar duas partes de cinco vai ser maior que duas partes de sete.

Dessa maneira as participantes e o professor definiram regras para comparar as frações de mesmo numerador ou de mesmo denominador.

Para reforçar a comparação a atividade solicita que as alunas comparem duas frações e assinalem a fração menor. Nas duas primeiras elas confundem a pergunta e assinalam a fração maior, mas logo percebem o erro e corrigem a resposta (Figura 43).

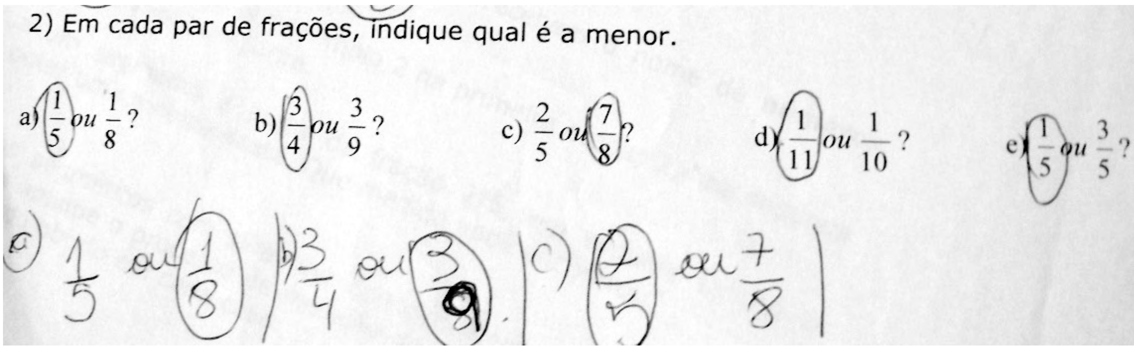


Figura 43: Resposta da pergunta 2 - grupo 1

Na letra (c) as frações possuem numerador e denominador diferentes. Nesse caso a aluna Gabriela analisa:

> **Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 1 – Participantes: Gabriela, Paula e Carla– Data: 05-06-2008**
>
> **34:25- 35:25.**
>
> GABRIELA: 7/8. Tá Certo?
>
> PROFESSOR: O que vocês acham?
>
> PAULA: Também.
>
> GABRIELA: Porque assim ó professor. A gente tem sete coisa pra dividir em 8.

PROFESSOR: Você vai ter sete partes em oito?

GABRIELA: É.

PROFESSOR: Na outra você só tem duas em cinco.

GABRIELA: É. tá certo?

PROFESSOR: Sim. Mas a menor é 7/8?

CARLA: Não essa daí é a maior Gabriela.

PROFESSOR: Você tá sempre pensando na maior né?

GABRIELA: É. Mas agora eu sei.

A alternativa encontrada pelas participantes foi utilizar a relação parte/todo para comparar as frações quando os numeradores e denominadores eram diferentes. Considerando a atividade realizada esperava que elas usassem segmentos para verificar qual era a fração menor, porém não as induzi a isso, não sendo essa a escolha delas. Por outro lado o modo em que pensaram foi útil para responder às perguntas nessa situação e a estabelecer regras para a ordenação de frações.

5.2.4 Comparação e Ordenação de Frações – Grupo 2

Na atividade 10 foram realizadas comparações entre as frações, para definir a ordenação das mesmas. Com a representação das frações em uma mesma semi-reta as participantes de ambos os grupos identificaram visualmente a ordem das frações. As participantes do grupo 2 representaram diversas frações sem dificuldades, como mostra a Figura 44. Na continuação da atividade a representação ficou poluída, com muitos pontos, e as alunas tiveram dificuldades em continuar a atividade, necessitando o auxílio do professor.

Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 2 – Participantes: Laura, Fabíola e Beatriz – Data: 16-06-2008

14:38-19:05

[*Durante a realização da atividade as alunas necessitam dividir o segmento em 9 partes para marcar a fração 2/9 na semi-reta, mas essa macro não foi construída, então o professor sugere que usem a divisão em 3 partes para dividir o segmento em 9 partes, relembrando a realização da atividade anterior.*]

PROFESSOR: O nove é múltiplo de quem?

LAURA: de três...

PROFESSOR: É de três e de três de novo.

[*As estudantes dividem a unidade em três partes, mas ficam na dúvida de qual segmento dividir em três novamente*]

LAURA: É daqui professor? [*indicando um ponto da semi-reta*]

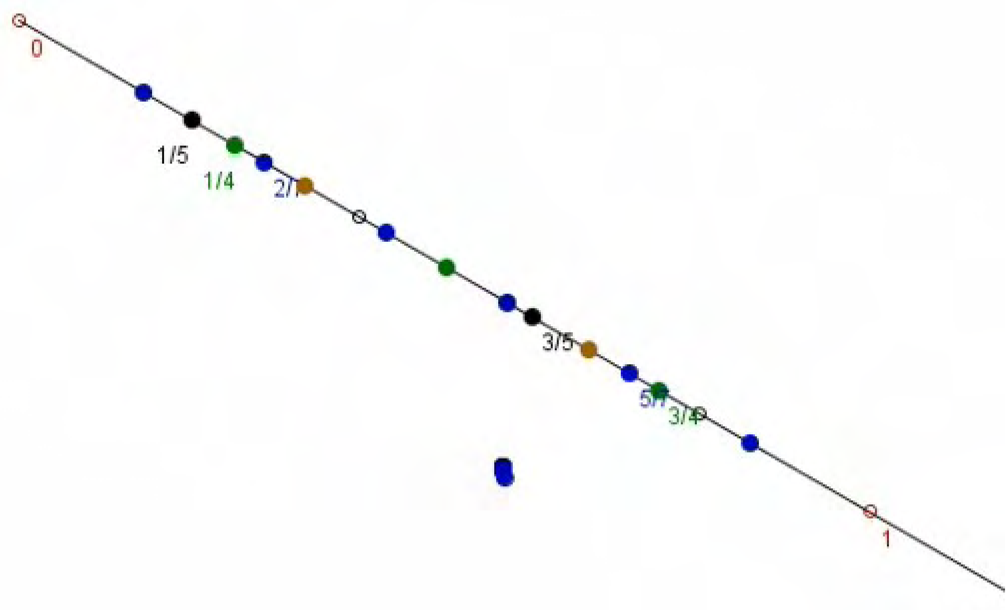


Figura 44: Semi-reta com segmentos fracionários

PROFESSOR: É do zero até o primeiro ponto marrom [representante do 1/3] Você marcou do zero até o 1, ficando três partes, agora você divide cada um desses pedaços em três partes. [*professor mostra na construção*]

[*tiveram dificuldades na visualização, pois tinham vários pontos na semi-reta. após o professor identificar os pontos na tela as alunas conseguiram prosseguir com a divisão*]

FABÍOLA: Mas não tem só dois marronzinhos? [*fato verdadeiro, pois o ponto inicial e final já existiam e o software não altera as cores desses pontos*]

LAURA: Nesse, nesse e nesse [*realizando a divisão em três partes em cada um dos segmentos*]

FABÍOLA: A tá, entendi. **Tira esse negócio daqui que tá atrapalhando. Esse monte de bolinha tá confundindo.**

PROFESSOR: **então vamos arrumar, é só mover aqui** [*movendo o ponto representante da unidade, fazendo com que a semi-reta fique na horizontal e que os pontos fiquem mais afastados, ver a Figura 45*]

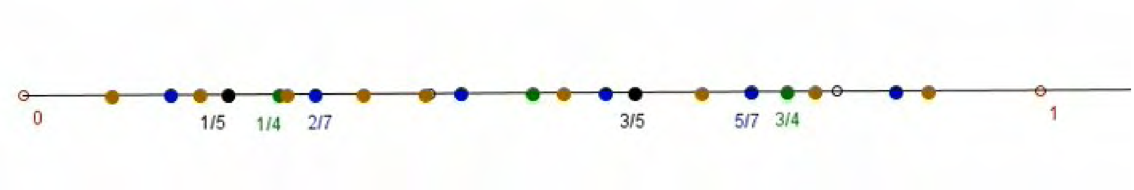


Figura 45: Semi-reta alterada para auxiliar na visualização

[...]

FABÍOLA: Ainda não nomeou o dois nonos.

PROFESSOR: São os pontos marrons né.

LAURA: Isso, um, dois nonos.

FABÍOLA: Agora é cinco nonos.

LAURA: Um, dois, três, quatro, cinco, é aqui.

FABÍOLA: Agora é cinco terços...

> LAURA: [*dividindo em terços*] Cadê professor?
>
> PROFESSOR: Sabe o que aconteceu? Quando você fez os nonos, você já tinha feito os terços.
>
> LAURA: Ah, devia ter feito de novo.

Nota-se nesse trecho que as alunas apresentaram dificuldades, primeiro pela macro de nonos não ter sido produzida anteriormente. Para solucionar essa dificuldade sugeri que utilizassem os fatores 3 e 3. Outra dificuldade foi na visualização e localização dos pontos desejados, causada pelos diversos pontos marcados na mesma semi-reta. Com o primeiro grupo essa dificuldade não ocorreu, pois as participantes ocultavam quase todos os pontos não utilizados na construção.

Por outro lado, o grupo 2 não teve dificuldades em marcar e identificar os pontos dos segmentos fracionários, quando os denominadores correspondiam às macros produzidas.

Ao utilizar o *software* para construir os segmentos correspondentes às frações, as participantes puderam comparar as frações e dizer a sua ordenação, observando os pontos da semi-reta. (Ver Figura 45 e Figura 46) Para as frações representadas as alunas não necessitaram de regras para ordenar as frações. Ressalto que a representação das frações em uma semi-reta não é tarefa simples, mas se tornou simples com o *software*.

Quando perguntadas como poderiam fazer para determinar entre duas frações qual a menor, as alunas não se basearam na definição dada, mas no denominador e numerador das frações e afirmaram:

> **Atividade 10 – Comparação de Frações – Grupo 2 – Participantes: Laura, Fabíola e Beatriz – Data: 16-06-2008**
>
> **36:30-39:00**
>
> PROFESSOR: Em frações que tem o mesmo denominador, como saber qual a maior?
>
> LAURA: Olhando o numerador.
>
> PROFESSOR: Então se elas tem o mesmo denominador, você olha pro...
>
> TODAS: Numerador.
>
> PROFESSOR: E você olha o que?
>
> FABÍOLA: Qual é maior ou menor.
>
> PROFESSOR: O numerador maior corresponde a fração...
>
> LAURA: Maior.
>
> PROFESSOR: Agora vamos olhar para o segundo caso, que é quando tem o mesmo numerador, por exemplo na letra (f) que tem 1/5 e 1/4. Como faz?
>
> FABÍOLA: Olha o denominador.
>
> LAURA: Do mesmo jeito que olhou o numerador.

PROFESSOR: Sim, você olha no denominador e daí? O que você vai olhar no denominador? A mesma coisa que no outro caso?

LAURA: É não é?

PROFESSOR: Então se o denominador é maior?

LAURA: É o número maior, se é menor é o número menor.

PROFESSOR: Então no 1/5 e 1/4. Você olhou no denominador. Qual é o maior?

BEATRIZ: É o ¼ não é?

PROFESSOR: O cinco é o denominador maior, mas ele corresponde à fração maior?

LAURA: Não, à fração menor. Porque então professor?

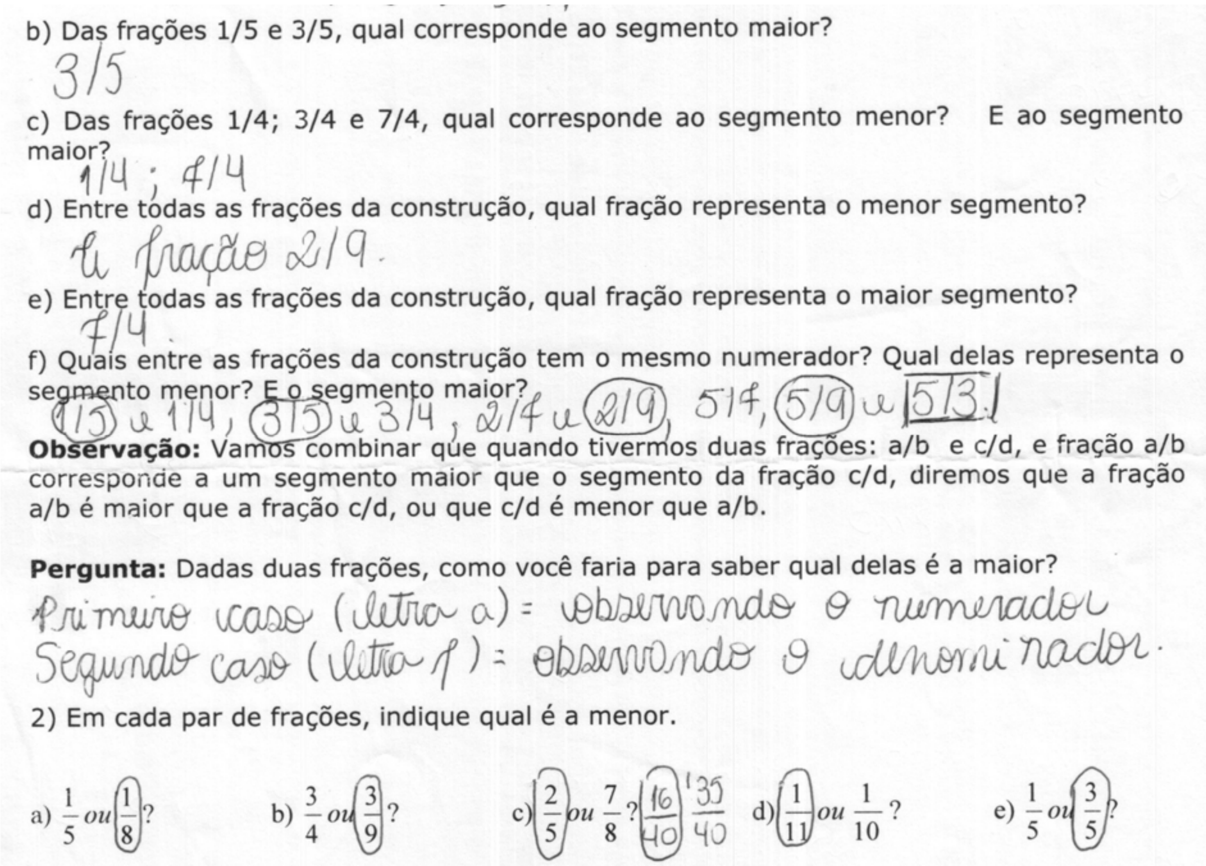
PROFESSOR: Olha agora no último [*ver Figura 46 letra f*] qual o denominador maior?

FABÍOLA: 9, do 5/9.

PROFESSOR: E ele corresponde à fração maior ou menor?

FABÍOLA: Menor.

PROFESSOR: Conseguiram perceber? Então no caso do numerador ser igual acontece invertido, a fração de maior denominador é a fração menor.



b) Das frações 1/5 e 3/5, qual corresponde ao segmento maior?

3/5

c) Das frações 1/4; 3/4 e 7/4, qual corresponde ao segmento menor? E ao segmento maior?

1/4 ; 7/4

d) Entre todas as frações da construção, qual fração representa o menor segmento?

A fração 2/9.

e) Entre todas as frações da construção, qual fração representa o maior segmento?

7/4.

f) Quais entre as frações da construção tem o mesmo numerador? Qual delas representa o segmento menor? E o segmento maior?

1/5 e 1/4, 3/5 e 3/4, 2/4 e 2/9, 5/4, 5/9 e 5/3.

Observação: Vamos combinar que quando tivermos duas frações: a/b e c/d, e fração a/b corresponde a um segmento maior que o segmento da fração c/d, diremos que a fração a/b é maior que a fração c/d, ou que c/d é menor que a/b.

Pergunta: Dadas duas frações, como você faria para saber qual delas é a maior?

Primeiro caso (letra a) = observando o numerador

Segundo caso (letra f) = observando o denominador.

2) Em cada par de frações, indique qual é a menor.

a) $\frac{1}{5}$ *ou* $\frac{1}{8}$? b) $\frac{3}{4}$ *ou* $\frac{3}{9}$? c) $\frac{2}{5}$ *ou* $\frac{7}{8}$? $\frac{16}{40}$ $\frac{35}{40}$ d) $\frac{1}{11}$ *ou* $\frac{1}{10}$? e) $\frac{1}{5}$ *ou* $\frac{3}{5}$?

Figura 46: Atividade 10 - Respostas do grupo 2

As respostas das participantes na pergunta 2 (Figura 46) indicam que nesse momento compreenderam como comparar as frações de mesmo numerador. Na letra c, as participantes não sabem como responder, inicialmente comparam os numeradores e os denominadores e percebem que em ambos os casos, 2 e 5 são menores que 7 e 8. Sugeri que elas desenhassem os segmentos correspondentes, mas elas demonstraram não querer seguir essa alternativa, então sugeri que escrevam as frações com um mesmo denominador. Fizeram as contas e afirmaram que a fração menor era 35/40, mostrando que estavam confundindo as regras. Corrigi-as e expliquei as regras novamente. Então assinalaram a resposta correta (Figura 46), porém na letra (e) mais uma vez assinalaram a fração maior ao invés da menor.

A utilização das regras não foi minha intenção quando compus a atividade, inicialmente desejava que as participantes usassem os segmentos para ordenar as frações e percebessem as regras como propriedades, mas que, sobretudo se baseassem na representação geométrica. Como havia sido trabalhado em sala de aula regras de ordenação, acredito que isso tenha influenciado as participantes. Fica evidente que as participantes confundem as regras causando respostas incorretas. Quando elas usaram a representação das frações para ordená-las esses erros não ocorreram, mas mesmo assim preferem a utilização das regras em detrimento da representação geométrica.

5.2.5 Adição e Subtração de Segmentos e Frações – Grupo 1

O grupo 1 realizou a atividade 11 no dia 29[33] de maio e estavam presentes as alunas Paula e Gabriela.

A dupla conseguiu realizar a adição dos segmentos sem dificuldades, utilizando a ferramenta compasso transferiram os segmentos AB e CD para uma semi-reta, obtendo o segmento EF, como na Figura 47.

A construção seguinte solicita a construção do segmento de tamanho 1/3 + 4/3. De imediato Gabriela responde que esse segmento possui tamanho 5/3. Sabendo o resultado da adição a aluna inicia a construção do segmento 5/3, sem se preocupar com os termos da adição.

Noto que a aluna tem o domínio da operação com frações e por esse motivo não precisou da representação geométrica. A dificuldade encontrada foi em

---

[33] Essa atividade foi realizada antes da atividade 10 por uma confusão com a ordem das atividades realizadas pelo grupo, mas isso não influenciou no desenvolvimento, pois uma atividade não dependia da outra.

representar essa fração resultante, quando as alunas confundiram o numerador e o denominador, e dividiram o padrão em cinco partes.

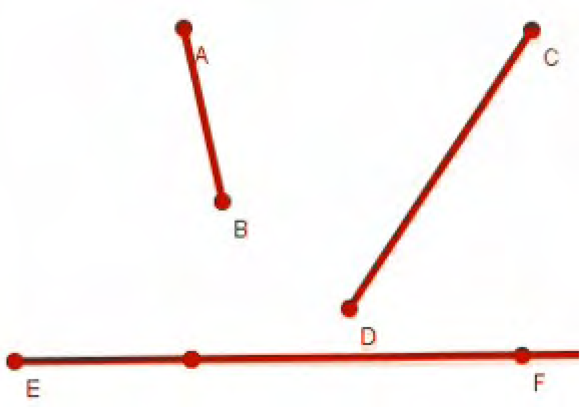


Figura 47: Adição dos segmentos AB+CD = EF

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 1 - 29-05-2008 – Participantes: Paula e Gabriela

13:50 - 16:00

PROFESSOR: Qual macro você quer usar?

PAULA: de cinco.

PROFESSOR: Você desenhou o padrão para fazer a fração? Tem que ter o padrão.

GABRIELA: Esse aqui, daqui até aqui

PROFESSOR: Nossa que gigante [*referindo-se ao tamanho do padrão*]

GABRIELA: Tá muito grande?

PROFESSOR: Manda ver

PAULA: Não tem importância

GABRIELA: tá dividido em 5 partes [*divide o padrão em cinco partes*]

PROFESSOR: Qual fração você tem que desenhar ai?

GABRIELA: 5/3 só que eu fiz errado

PROFESSOR: 5/3 o inteiro você vai dividir em quantas partes?

GABRIELA: 5.

PAULA: 5. Não, 3.

PROFESSOR: Três partes. Vamos fazer o padrão aqui em cima separado.

PAULA: Vamos.

PROFESSOR: Escreve aí U... esse aqui é o seu inteiro tem tamanho 1, uma unidade.

GABRIELA: Tá torta.

PROFESSOR: Não tem problema, esse aqui é seu inteiro. Você vai dividir em 3 é esse aqui pra você construir o segmento 1/2 ou 1/3 você vai usar esse aqui.

PAULA: 1/3 é 3.

GABRIELA: Segmento de 3 partes.

[*As alunas corrigem o erro e constroem diretamente o segmento 5/3, sem utilizar a adição de segmentos. Iniciam a construção 3, adição de 1/2 + 1/3.*]

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 1 - 29-05-2008 – Participantes: Paula e Gabriela

23:18 – 34:30

GABRIELA: Construção 3: dadas as frações 1/2 e 1/3 construir um segmento CD com tamanho 1/2 + 1/3. Vamos lá Paula...

[...*apagam os objetos da tela*]

GABRIELA: vai ter que fazer um segmento CD como que faz?

PROFESSOR: Primeiro você constrói um segmento de tamanho 1/2.

PAULA: Como assim?

[...*Definem novamente o padrão*]

PROFESSOR: Constrói um segmento de tamanho meio.

GABRIELA: Como?

PROFESSOR: Como.

PAULA: Ah. dividindo no meio?

PROFESSOR: É.

GABRIELA: Como que nós divide?

PAULA: Rodar macros.

GABRIELA: Mas já tá salvo.

PAULA: tá vai.

GABRIELA: 3 partes iguais.

PAULA: 2 porque é meio. Pronto professor.

PROFESSOR: Constrói aqui com compasso.

[*As alunas dividem o padrão em dois e transferem o tamanho para uma semi-reta, em seguida dividem o padrão em três e transferem para a semi-reta, obtendo o segmento AB (Figura 48) adição de 1/2+1/3.*]

PAULA: Professor conseguimos.

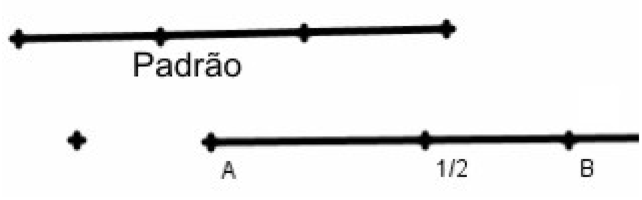


Figura 48: Segmento AB = 1/2 + 1/3 - Grupo 1

PROFESSOR: Como a gente pode expressar o tamanho desse segmento 1/2+1/3 em uma única fração?

PAULA: 1/2+1/3?

[*imediatamente Gabriela começa os cálculos para determinar o resultado da adição*]

GABRIELA: Professor deu 2/6? 1/2+1/3?

PROFESSOR: Não.

PAULA: Ai, eu errei na prova. [*As alunas tinham tido uma avaliação sobre adição de frações nesse mesmo dia.*]

GABRIELA: Daí tem que fazer seis dividido por dois vezes um?

PROFESSOR: Sim, mas vamos esquecer um pouco da regrinha e da prova e vamos pensar com o desenho.

[*Como as alunas já tinham concluído que o denominador era seis o professor as orienta a dividir a unidade em seis e verificar a qual fração corresponde o ponto*]

PROFESSOR: A qual fração corresponde o ponto B?

GABRIELA: tem 5.

PROFESSOR: cinco de quantas?

PROFESSOR: Em quantas partes tá dividido o inteiro?

GABRIELA: seis

PROFESSOR: Então a fração é?

PAULA: 5/6.

PROFESSOR: Isso. Agora pensando na regrinha pensa porque o resultado deu errado.

GABRIELA: É porque eu só somei tudo e tirei o mmc. Daí o mmc de dois e três é seis. Daí eu tinha que dividir e depois multiplicar.

[...]

GABRIELA: A gente já fez a divisão. 6 dividido por 2 dá 3 e 3 vezes 1 dá 3 agora a gente tem que somar. Tá certo, não tá?

No desenvolvimento das adições as participantes do grupo 1 optaram por utilizar as regras de cálculo, conhecidas da sala de aula e que haviam sido avaliadas nesse mesmo dia. Na adição de frações com denominadores diferentes as alunas se confundiram com as regras e a utilização da representação geométrica serviu para o professor e as alunas efetuarem a adição, sem a utilização da regra. Então o professor pediu que pensassem sobre que procedimentos faltaram na adição realizada. A aluna Gabriela se lembrou que precisava dividir o mmc pelo denominador e multiplicar pelo numerador antes de somar.

Mesmo as alunas recorrendo primeiramente ao algoritmo para determinar o resultado, a utilização do programa contribuiu para o entendimento da adição de frações, tendo em vista que a princípio algoritmo foi utilizado incorretamente, sendo confrontado com o resultado da experimentação.

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 1 - 29-05-2008 – Participantes: Paula e Gabriela

39:16 – 44:50

GABRIELA: Dados os segmentos AB e CD de modo que AB é maior que CD obtenha o segmento AB – CD;

PAULA: Como que vai fazer isso.

GABRIELA: Ah tá aqui o AB o C e o D vamos nomear... professor não tá nomeando certo.

PROFESSOR: O que você tá fazendo?

GABRIELA: Aqui é o CD agora a gente tem que fazer o AB pronto agora vai nomear.

PAULA: Aqui Gabriela A. [*como as alunas tinham nomeado antes outros segmentos a nomeação automática não coincidiu com a atividade*]

PROFESSOR: Não tem problema ele vai colocar outro. Onde está como AB você lê como EF... Construa o segmento AB menos CD.

PAULA: Já sei não é igual aquela outra? [*As alunas utilizam o mesmo procedimento da adição de segmentos e obtém a Figura 49*]

GABRIELA: É.

[...]

GABRIELA: Paula a gente vai ter que medir esse até aqui.

PAULA: E colocar na linha. [*as alunas ficam na dúvida sobre qual dos segmentos corresponde a adição pois pela construção obtiveram a subtração e a adição ao mesmo tempo*]

GABRIELA: Como faz eu não sei, tá que seja, tá em cima da linha.

PROFESSOR: Você tá construindo ali em cima?

GABRIELA: É a gente vai pegar esse por aqui, aqui aqui não é? [*referindo-se à transferência dos segmentos para a semi-reta*]

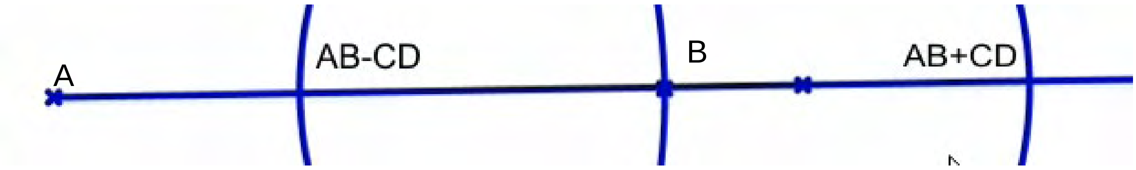


Figura 49: Subtração de AB-CD

PROFESSOR: Ele tá pedindo pra fazer o que aqui? A diferença não é?

GABRIELA: É menos.

PROFESSOR: Qual dos segmentos é a diferença nesse desenho?

GABRIELA: Um menor que outro. [*a palavra diferença não foi entendida como a operação, mas com o que os segmentos tinham de diferente.*]

PROFESSOR: Então me mostra a diferença.

PAULA: Esse é maior e esse é menor.

GABRIELA: Não olha o AB é daqui aqui e o CD daqui aqui.

PROFESSOR: Mas se eu quero fazer menos?

PAULA: Como assim?

PROFESSOR: Você fez o AB e dele você vai tirar o CD.

GABRIELA: Como assim vai tirar?

PROFESSOR: Vamos supor que você vai apagar.

GABRIELA: tá vou tirar o C.

PAULA: Já entendi.

PROFESSOR: Daqui até aqui é o AB e daqui aqui é o CD mas aqui é a soma, daqui aqui é mais, e quando eu tiro o que eu faço?

PAULA: Então professor vai ficar só isso. [*indicando a diferença com o mouse, a aluna afirma com convicção, evidenciando que compreendeu o conceito de diferença entre segmentos*] do AB porque esse aqui também é o CD.

PROFESSOR: Isso esse é o CD e eu tô tirando o CD. A subtração vai ficar só esse pedacinho aqui.

GABRIELA: Ahh entendi...

Esse trecho indica que as alunas compreenderam o significado da subtração de segmentos, pois, após observações na construção realizada, concluíram qual o segmento que representava a diferença. Na construção 5[34] (diferença entre 4/5 e 2/5) as participantes usaram os mesmos passos das construções 3 e 4, e geometricamente concluíram que o segmento resultante tinha tamanho 2/5.

Na construção 6 (diferença entre 1/2 e 1/3), inicialmente as alunas não utilizaram um mesmo padrão para construir cada uma das frações, sendo necessário que eu discutisse com as alunas sobre o significado do padrão ser o mesmo em toda a construção.

Construídos os segmentos de medida 1/2 e 1/3 as alunas procederam da mesma maneira que nas construções anteriores e construíram o segmento resultante. Quando perguntado qual a fração que representa o tamanho desse segmento Gabriela iniciou os cálculos e respondeu que era 1/6. Como ela utilizou os cálculos mostrei para elas que também poderiam chegar a essa resposta geometricamente. Cabe ressaltar que nesse caso ela efetuou os cálculos corretamente.

5.2.6 Adição e Subtração de Segmentos e Frações – Grupo 2

Inicialmente foi solicitado que as alunas traçassem dois segmentos AB e CD e em seguida um segmento de tamanho AB+CD. Essa construção foi realizada com sucesso sem maiores obstáculos. A construção 2 pedia a adição de duas frações de mesmo denominador e também foi realizada com facilidade pelas participantes. A próxima construção pedia que elas construíssem um segmento GH com tamanho *1/2 + 1/3,* como transcrito no trecho:

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 2 - 30-06-2008 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura.

14:38-26:15

[*Construção 3: construir 1/2 + 1/3.*]

---

[34] Ver atividade 11 apêndice A.

LAURA: tem que fazer o meio...

FABÍOLA: [*Relê a construção proposta*] Tem que fazer o meio e o um terço.

FABÍOLA: Não vai ser como no anterior?

PROFESSOR: Pode aproveitar o um terço da construção anterior, mas precisa construir o um meio.

[*realizam a construção sobre o segmento já dividido em três partes, ficando com os segmentos sobrepostos (Figura 50)*]

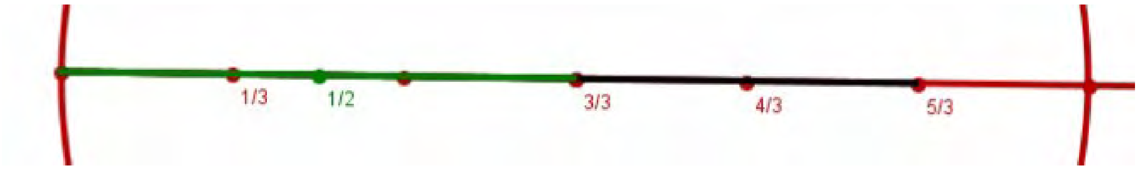


Figura 50: Construção dos segmentos sobrepostos

LAURA: Agora a (b)...

PROFESSOR: Cadê o segmento GH?

LAURA: Tem que marcar né professor?

BEATRIZ: O GH é Entre esses dois pontos? [1/3 e 1/2]

PROFESSOR: Mostra pra mim qual o tamanho 1/3.

LAURA: É esse aqui? [*indicando do ponto inicial ao 1/3]*

PROFESSOR: Qual o tamanho um meio?

LAURA: Esse aqui...indicando entre o 1/3 e 1/2... não é esse aqui ó indicando entre o 0 e 1/2.

PROFESSOR: **Isso, então qual é o 1/2 + 1/3?**

[*Após alguns segundos de dúvida*]

PROFESSOR: Tem que construir né?

LAURA: Então não tá construído ainda, tem que construir?

PROFESSOR: Isso. Como na primeira atividade.

[*... realizando a construção*]

LAURA: agora mede 1/3, tá certo professor? Um meio é tudo isso...

PROFESSOR. Isso, então esse é o G e esse é o H.

LAURA: I professor ficou EF... tem importância? [*ao nomear com a ferramenta do software, Figura 51*]

FABÍOLA: é porque não nomeou aqui ó...

PROFESSOR: Não tem problema.

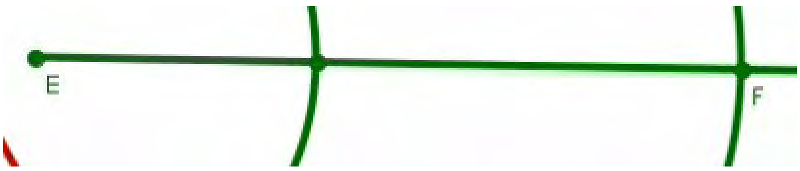


Figura 51: Segmento EF: 1/3+1/2

FABÍOLA: Letra b: represente o tamanho do segmento como uma única fração.

LAURA: 5/3...não tem que somar o um terço mais meio

LAURA: 2/5?

BEATRIZ: Porque esses dois aqui são iguais (numeradores) então tem que somar só os de baixo.

LAURA: Professor tem que somar todos não é? Um mais um e três mais dois, não é?

BEATRIZ: Não porque esses dois são iguais, daí fica o um, três mais dois é cinco.

FABÍOLA: Precisa somar o de cima?

LAURA: Não vai ser o 2/5 então professor?

LAURA: Tem que multiplicar e dividir né?

PROFESSOR: Vamos pensar na figura. Vou fazer essa soma. [*transfere a medida para a semi-reta com os terços e meios*]

Dá pra ver que não é nem com três nem com dois no denominador.

Será que é com quintos? Olha só a divisão em cinco.[*mostrando a divisão em cinco, que não sobrepõe o ponto*].

LAURA: Não é quintos, é quartos?

PROFESSOR: Vamos ver é quartos?

FABÍOLA: Não.

[*as alunas começam a chutar denominadores, aleatoriamente, o professor mostra, usando as macros, que o segmento referente a soma não representa uma fração com nenhuma das divisões gravadas (4, 5, 7)*]

PROFESSOR: vou dar uma dica, não é nenhuma das que temos aí.

[...]

LAURA: é de seis partes?

PROFESSOR: Porque de seis?

LAURA: Porque...[*as alunas não conseguem nesse momento justificar a escolha*]

PROFESSOR:Tenta pra ver...

[...] [*Realização da divisão da unidade em seis partes*]

PROFESSOR: então dividindo em seis cai sobre o ponto que nós queríamos?

LAURA: A tá, então esse é o ponto que a gente queria?

LAURA: Agora é só descobrir o valor

PROFESSOR: é, agora é só fazer a contagem, que ponto é esse?

FABÍOLA: 5/6.

LAURA: Então é só fazer a multiplicação, né, ver qual de baixo... lembrei agora...

PROFESSOR: Então a soma de 1/3+1/2 dá?

ALUNAS: 5/6.

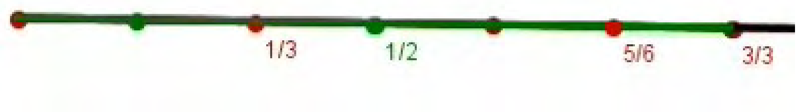


Figura 52: Segmento com tamanho 1/3+1/2=5/6

Nessa atividade é possível perceber que a representação das frações como segmentos não causou dificuldades para as alunas, a adição geométrica de segmentos também se deu de maneira intuitiva, mas não a adição aritmética. A dificuldade apresentada pelas alunas foi em determinar a fração resultante da adição dos segmentos. A primeira reação foi em somar os numeradores os denominadores, mas as alunas perceberam que essa não era a resposta correta pela reação do professor, então procuraram se lembrar de como efetuar a adição de frações.

A fala da aluna Beatriz “Porque esses dois aqui são iguais (numeradores) então tem que somar só os de baixo” indica que a aluna tenta se lembrar como efetuar a adição, mas se confunde com as regras de cálculo. Como a resposta dada pelas alunas foi 2/5, o professor mostra para as alunas que o segmento não é uma fração de denominador 5, e estimula as alunas a verificar outros denominadores. Nesse momento as alunas decidem chutar respostas aleatoriamente, então o professor direciona as alunas a testarem o denominador 6. Ao perceberem que com a divisão em 6 partes um dos pontos sobrepôs o ponto desejado foi possível responder que a fração desejada era 5/6.

Nesse episódio é possível notar que o uso do computador permitiu às alunas explorarem qual a fração resultante da adição. Mesmo sem utilizarem corretamente o algoritmo da adição de frações, do qual tinham conhecimento, mas não se lembravam. Ao concluírem que a fração resultante era 5/6 se lembraram que para “descobrir” o denominador do resultado era necessário multiplicar os denominadores de cada termo da adição. Nesse sentido percebo que com o auxílio da informática as alunas puderam realizar a adição de duas frações mesmo não lembrando o algoritmo de cálculo e que a partir do resultado obtido relembraram como realizar essa operação.

Em seguida foi trabalhada a subtração de segmentos, para posteriormente explorar a subtração de frações. O trecho seguinte mostra o desenvolvimento dessa construção pelas alunas.

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 2 - 30-06-2008 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura.

29:10-34:15

[*a atividade pede que as alunas construam dois segmentos sendo que o segmento AB deve ser maior que o segmento CD. A* Figura 53 *representa os segmentos construídos pelas alunas.*

Construção: Obtenha o segmento AB – CD]

Figura 53: Segmentos construídos pelas alunas

Professor: Agora vamos fazer uma subtração

Laura: Compasso também?

Professor: Compasso. Vai tirar um do outro.

Laura: Semi-reta ou segmento professor?

Professor: Pode usar semi-reta.

[*Laura traça uma semi-reta*]

Laura: Tem que medir o AB primeiro né?

[*as alunas se distraem com conversas paralelas e perdem o foco da atividade*]

Beatriz: Que confusão.

[*Laura lidera a construção, as outras alunas estão dispersas, ela usa o compasso para transferir a medida de AB mas fica na dúvida sobre o que fazer*]

Professor: Porque você fez essa semi-reta aqui embaixo?

Laura: Para obter o segmento AB – CD. Ah, mas tem que usar aqui dentro do AB o CD?

Professor: Não, você pode fazer como quiser, eu só quero entender.

Laura: Eu queria fazer assim, queria colocar o AB e o CD, entendeu?

Professor: Mas daí é soma.

Laura: Esquece professor. [*apaga a semi-reta que tinha traçado e entrega o comando do mouse para Beatriz*]

Beatriz: Professor tem que medir não tem? Não entendi...

Laura: [*relê a construção*] Você vai clicar no primeiro... professor eu não entendi a subtração ainda eu confundi com a adição.

Professor: A subtração você vai tirar um segmento do outro. Subtração não é tirar? Porque você acha que teve a exigência de AB maior que CD?

Laura: Ah, entendi agora, vai ter que medir o CD e colocar dentro do AB. Isso?

Professor: Tenta.

[...]

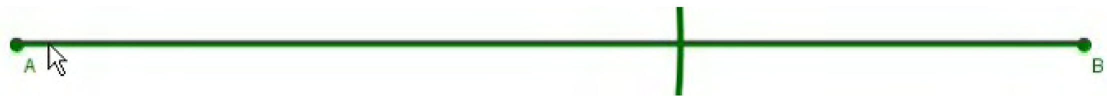


Figura 54: Subtração de segmentos

Laura: Agora venho aqui? Assim? Ou isso é adição? [*usando compasso de raio CD, com centro A, ver* Figura 54]

Professor: É a subtração, mas qual o resultado da subtração se você clicar aí?

Beatriz: Seria esse aqui? [*mostra na tela o segmento AP, ou seja de tamanho CD*]

Laura: Esse é o CD.

Professor: Isso, então qual o resultado da subtração?

Laura: Esse daqui que sobrou.

Professor: Muito bem. Mas como a gente tá pensando que começa no A, então pra fazer a subtração volta do B

Laura: Mas tá errado?

Professor: Não, mas pensando no número a gente tá voltando. Geometricamente tá certa, mas pra usar com os números a gente tá tirando do maior.

Ao realizar a subtração de segmentos as participantes tentaram utilizar o mesmo método da adição, mas se confundiram e acabaram apagando a construção. Como professor eu não desejava dar a resposta de como deveriam efetuar a construção e por isso procurei apenas orientar o pensamento de acordo com as falas. Laura sugeriu marcar o segmento CD em AB. A Figura 54 apresenta a construção realizada. Vou chamar o ponto marcado pelas alunas de P. Como a marcação realizada pela aluna foi a partir do ponto A, o segmento resultante da subtração é o segmento PB. Esse fato ainda não estava claro para as alunas que inicialmente indicaram como resultado o segmento AP, mas a aluna Laura logo percebeu que o segmento AP correspondia ao CD e que o resultado era “o que sobrou”, ou seja, o segmento PB. Como elas perceberam qual era o segmento resultante partimos para a próxima construção, a subtração de frações.

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 2 - 30-06-2008 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura.

36:55-37:50

[*Construção 5: construir o segmento de tamanho 4/5 – 2/5. As estudantes constroem a semi-reta com os segmentos 2/5 e 4//5 (*Figura 55*). As participantes dividiram o padrão em quintos e marcaram os pontos correspondentes ao 2/5 e ao 4/5.*]

Figura 55: Segmentos 2/5 e 4/5

Laura: Agora tem que pegar o pedaço...

Professor: É, olha na figura, 4/5 onde tá? Agora tira 2/5 dele. Onde vai cair?

Laura: Mais pra frente. Ah não, eu tô somando. Aqui?

Professor: Cada pedacinho desses é quantos quintos?

Fabíola: Um.

Professor: Olha, tirei um, tirei dois.

Laura: Então já tá feito.

Professor: Você entendeu a figura?

Laura: Sim, eu tenho que a partir do 4/5...

Professor: tá tirando o outro 2/5.

Essa construção utilizou frações com um mesmo denominador, por esse motivo foi fácil determinar o resultado. Ela contribuiu para que as alunas compreendessem melhor a subtração, pois na construção anterior elas tinham tido o primeiro contato com essa operação com segmentos.

Na próxima construção propus a subtração com frações de denominadores diferentes, 1/2 - 1/3. Como essas frações tinham sido construídas anteriormente as alunas utilizaram os mesmos segmentos, mas logo detectaram que seria "mais difícil", pois os denominadores eram diferentes. Assim, iniciaram a discussão sobre como deveriam proceder com a construção.

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 2 - 30-06-2008 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura.

39:50-43:40

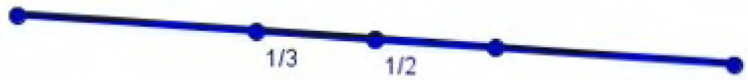


Figura 56: Segmento unitário com as frações 1/3 e 1/2

Professor: Agora, quanto é 1/2 menos 1/3?

Laura: Agora ficou mais difícil porque não tem o número igual professor.

Professor: Mas faz igual o anterior.

Laura: Então tem que fazer o mesmo que fez antes aqui.

Fabíola: Ela não tem que pegar 1/3 e depois 1/2 e fazer em outra linha?

Laura: Precisa de outra linha?

Professor: Pode, mas também pode fazer nessa que já tá pronta. Desde que você esteja entendendo o que está fazendo.

Laura: Esse aqui eu entendi, esse aqui não.

[*Usando o recurso rever construção o professor relembra os passos seguidos na atividade anterior*]

Professor: Você pegou dois segmentos, pegou o CD e tirou do AB, obtendo esse segmento azul como resultado da subtração AB – CD. Agora você tem o segmento 1/2 e daqui você vai tirar o 1/3.[...] Como você faria para tirar isso?

Laura: Como é a conta? 1/2 - 1/3? Eu...

Professor: Quer fazer em outro segmento? Pra ficar mais fácil de ver?

Laura: Semi-reta, né professor?

[*Traçam a semi-reta e transferem o segmento 1/2 para a semi-reta*]

Professor: Então esse é o 1/2, e agora você vai tirar 1/3.

Laura: **Ah, pega o compasso e mede 1/3. coloca aqui no 1/2 e o espaço que sobrar vai ser o resultado. Então esse aqui é o que sobrou.**

Professor: Isso, esse é o segmento resultante.

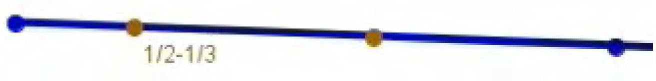


Figura 57: segmento resultante da subtração

As alunas inicialmente buscaram responder qual a fração resultante sem utilizar os recursos do programa. Na construção anterior, com as frações de mesmo denominador, tinham contado as partes e respondido a fração resultante. Na construção atual também pensaram em proceder da mesma maneira, mas não conseguiam pelas frações serem de denominadores diferentes. Por esse motivo o professor sugeriu que construíssem o segmento resultante e indicassem como 1/2-1/3, obtendo a Figura 57, para então determinarem a fração resultante. A conclusão da construção segue abaixo.

Atividade 11 – Adição e subtração de segmentos – Grupo 2 - 30-06-2008 – Participantes: Beatriz, Fabíola e Laura.

44:10-48:45

Professor: Então Isso aqui é o 1/2 - 1/3. Agora tem que representar isso como uma única fração.

Laura: Agora é um número negativo.

Professor: Porque negativo?

Laura: Porque não dá pra tirar 1/2 de 1/3. A não, tá certo.

Professor: 1/2 não é maior que 1/3?

Laura: **Ah... Aí é. Mas nos números não. É que eu estou confundindo com os números.**

Professor: O que a gente viu na outra atividade? Sobre qual era maior?

Laura: Ai, eu não lembro.

Professor: O tamanho da figura é o mesmo tamanho do número, se a figura é maior então o número também é maior. O terço você dividiu a unidade em três, o meio você dividiu só em duas.

Beatriz: Não entendi.

Professor: Qual parte? Sobre ser maior?

Beatriz: Sim.

Professor: você tem o inteiro. No meio você divide em duas partes. No terço você divide em três. Qual pedacinho vai ser maior?

Laura: Ah, tá. Agora sim.

Professor: A gente fez uma atividade sobre isso.

Laura: Porque ó, Beatriz, **esse aqui vai estar dividido em mais partes, então as partes vão ser menores.** E se dividir ao meio fica esse espaço, maior, entendeu?

Beatriz: E qual é a fração?

Professor: Qual a fração? Pensa na figura.

Todas: Eu não sei.

Professor: Lembra da anterior, era 1/2 + 1/3, agora a gente fez 1/2 - 1/3.

[*o professor relembra a construção anterior com as alunas*]

Professor: Olha, o ponto não é nem terço e nem meio, qual fração vai ser?

Laura: E agora...

Professor: Esse ponto não está no meio do 1/3?

Laura: Tá então ele é meio?

Professor: não o meio é esse. O que acontece se dividir os terços ao meio, quantas partes fica?

Fabíola: 6.

Professor: Isso, 2·3 que é 6.

Professor: E o ponto marrom, vai ser que fração?

Laura: 1. 1/6.

Para efetuar a subtração as alunas determinaram o segmento geometricamente, restando representá-lo com uma única fração. A aluna Laura afirmou que essa fração seria um número negativo porque não dava para tirar 1/2 de 1/3. Quando indagada pelo professor se 1/2 não era maior que 1/3, a aluna respondeu “Ah... Aí é. Mas nos números não.” Essa fala indica que a aluna inicialmente não relaciona os segmentos e suas medidas fracionárias com as frações conhecidas anteriormente nas aulas regulares de matemática. Sem maiores indicativos conjecturo que a aluna pensa a fração como medida de segmento e a fração como número racional como coisas diferentes que compartilham o mesmo símbolo, ou seja, em seus pensamentos o segmento 1/2 é maior que o segmento1/3, mas o número 1/2 é menor que o número 1/3.

Mais do que isso a aluna apresenta uma conclusão errônea sobre as frações, de que 1/2 é menor que 1/3. Para ajudá-las a compreender qual das frações era a maior relembrei com elas a atividade anterior, sobre comparação de frações e também a noção de que na primeira fração o padrão foi dividido em duas partes e na outra fração o padrão foi dividido em três partes, logo 1/3 era menor que 1/2. Ao que indica a aluna Laura conseguiu compreender e explicar para as outras alunas como fez para saber qual era a menor.

Superada essa dificuldade as alunas puderam determinar a fração resultante. Mais uma vez não foi imediata a determinação do denominador seis. Foi necessário chamar a atenção para o fato de as frações serem as mesmas utilizadas na adição. Ao atentarem para isso logo concluíram que a fração resultante da subtração era 1/6.

Percebo que mais uma vez a visualização e a experimentação tiveram um papel importante na realização da atividade, pois as alunas conseguiram determinar o segmento resultante da subtração sem conhecer a fração resultante. A visualização também foi fundamental para compreender a ordenação das frações e descobrir qual a fração resultante.

Na operação realizada as alunas não recorreram ao algoritmo de cálculo para determinar a fração, mais uma vez se basearam no segmento construído, ao dividirem em sextos e contarem as partes. No ambiente em que estávamos inseridos tal procedimento se mostra mais simples do que a utilização dos algoritmos de cálculo. O que poderia ser diferente em outro ambiente em que a operação de subtração fosse exigida. Sem a ferramenta tecnológica os estudantes não teriam facilidade em realizar uma representação geométrica com a exatidão necessária.

5.2.7 Análise do Episódio 2

Nesse episódio a representação das frações como medidas de segmentos permitiu que as participantes visualizassem e experimentassem algumas propriedades das frações e as operações de adição e subtração. Essas visualizações e experimentações proporcionaram que as participantes conjecturassem e verificarem as propriedades de ordenação entre as frações, conhecidas anteriormente nas aulas regulares. Alguns momentos também indicam que a visualização confundiu as alunas e levou-as a conclusões incorretas. São esses aspectos que vou destacar desse episódio.

Na primeira parte do episódio, a comparação e classificação de segmentos, apresentada nas subseções 5.2.1 e 5.2.2 mostra que com os segmentos traçados no computador os estudantes tiveram dúvidas em como determinar qual o maior, pois pelo modo como foram traçados[35] não foi possível responder apenas visualizando os segmentos (Figura 32). Pedro se baseou na imaginação de um quadrilátero, parecido com um trapézio e na inclinação dos dois lados, percebendo que esse se fechava sobre o segmento AB. O aluno não precisou traçar os segmentos para conjecturar sobre qual dos segmentos era menor. Eu os tracei para que a outra aluna compreendesse o pensamento do colega. Quando foi utilizado o compasso para comparar os segmentos o aluno não compreendeu e nesse caso a

[35] Ver na subseção 5.2.1 que os alunos tentaram traçar os segmentos iguais.

movimentação do ponto que alterava o raio permitiu ao aluno entender como a comparação estava sendo realizada (Figura 34). Em ambas as formas de comparar a resposta foi correta, mas na primeira maneira não era um método de comparação que poderia ser generalizado. Enquanto no grupo 1 os participantes traçaram segmentos com tamanhos próximos, dificultando a comparação, o outro grupo traçou segmentos com tamanhos distintos podendo compará-los com facilidade sem necessidade de utilizar o compasso. O uso dessa ferramenta ocorreu apenas quando tinham vários segmentos e os tamanhos eram parecidos.

Ressalto que o tipo de representação visual influencia na dificuldade da atividade. Podendo torná-la difícil, no sentido de causar dúvidas e permitir uma discussão mais aprofundada, como no caso do grupo 1, que logo chegou a conclusão de que deveriam usar um conjunto ordenado, o alfabeto, para nomear os segmentos e saber a sua ordem. Ou torná-la fácil, como no caso do grupo 2 com as discussões mais superficiais, que pensou em um sistema de classificação subjetivo e que fazia sentido apenas para as alunas.

Através da representação de frações sobre a semi-reta as participantes visualizaram a ordenação dessas frações sem precisar usar regras de comparação. Mais uma vez o modo como escolheram representar as frações definiu o grau de dificuldade da atividade. Na construção do grupo 1 as alunas ocultaram os pontos que não seriam utilizados (Figura 38), enquanto as participantes do grupo 2 mantiveram os pontos e também traçaram a semi-reta em diagonal (Figura 44), sentindo a necessidade de "melhorar" a imagem a aluna Fabíola disse: *"Tira esse negócio daqui que tá atrapalhando. Esse monte de bolinha tá confundindo"*.

Esse foi mais um indício de que o modo como as alunas construíram as representações influenciou no desenvolvimento da atividade, resultando em uma visualização boa ou não, no sentido de a visualização ajudar a concluir a atividade ou atrapalhar e causar estranhamento aos estudantes. Isso pode ser percebido na rapidez com que as participantes do grupo 1 construíram as frações de nonos e na dificuldade que as participantes do grupo 2 tiveram nas mesmas frações, pois os pontos se sobrepunham a outros que tinham sido marcados anteriormente.

Esses exemplos indicam que deve haver uma preocupação do professor em orientar os alunos a desenvolverem as construções de forma mais clara possível, para que trilhem caminhos com mais chances de fomentar discussões e reflexões que levem ao aprendizado dos conceitos considerados na atividade realizada.

Quando foram feitas perguntas sobre a ordem das frações que tinham sido construídas (primeira parte da atividade), as alunas não se preocuparam em comparar pelo numerador ou denominador e sim em observá-las na semi-reta, a qual dava resposta imediata. Por esse motivo vejo que o uso do R.e.C. as ajudou a visualizar quais frações eram maiores ou menores. Em ambos os grupos as alunas deram as respostas se baseando na imagem construída.

Ao ser perguntada a ordem de outras frações, não construídas, as estudantes não usaram como recurso os segmentos, mas regras que tinham sido conhecidas em sala de aula. O uso das regras erroneamente fez com que respondessem algumas das comparações incorretamente. Noto que o uso dos recursos visuais proporcionados pela tecnologia não é natural para as alunas, mas sim o uso de algoritmos e regras.

De maneira semelhante nota-se que a adição e a subtração de segmentos/frações foram visualmente compreendidas, sendo que as participantes determinaram o segmento resultante mesmo não conhecendo a fração correspondente a ele (ver subseção 5.2.6). Para determinar essa fração tentaram recorrer ao algoritmo, conhecido das aulas regulares. A experimentação geométrica só ocorreu pela dificuldade em utilizar o algoritmo e por eu tê-las influenciado.

Como o grupo 1 desenvolveu a atividade de comparação de frações e a de adição e subtração no mesmo período em que estavam tendo o conteúdo em sala as alunas tiveram menos dificuldades em se lembrar das regras de comparação e do algoritmo da adição, mas mesmo assim precisaram construir e testar geometricamente para determinar o resultado.

Vejo que de modo geral as alunas foram influenciadas pelas aulas regulares de matemática, nas quais eram tratados os mesmos conteúdos. Porém as experimentações realizadas no R.e.C. contribuíram para que teorizassem sobre esse conhecimento anterior e corrigissem algumas das falhas de aprendizado. Tendo em vista que somente após observarem a semi-reta com as frações puderam concluir quais as regras para compará-las e que depois de construírem as representações das frações e realizarem as operações geometricamente se lembraram de como utilizar os algoritmos (ver final da subseção 5.2.5).

Nesse episódio a as frações tratadas como representantes do tamanho do segmento (medida) foi essencial para que pudessem ser feitas explorações das propriedades de ordenação e das operações, as quais, como visto, contribuíram para que as alunas teorizassem e aprimorassem seus conhecimentos desse conteúdo em específico. Também fica evidenciado que o uso da tecnologia modificou o modo como as alunas visualizavam e conheciam as frações.

Esse episódio, portanto revela indícios de que a exploração das frações como medida de segmentos e a sua representação na reta contribuíram para a compreensão da ordem das frações e das operações de adição e subtração, auxiliando a compor a resposta da pergunta diretriz.

5.3 3º Episódio – Medição de Segmentos

Esse episódio se baseia no desenvolvimento das Atividades 12 e 13. Nas atividades anteriores as alunas desenvolveram a construção de segmentos a partir de uma fração, ou seja, dada uma fração, por exemplo 5/3, elas construíam um segmento de tamanho 5/3 do padrão.

A atividade 12 busca evidenciar a necessidade da medição de segmentos e introduz as primeiras noções do processo. A atividade 13 tem três objetivos, primeiro evidenciar o uso da vírgula, para indicar quando a unidade padrão foi dividida pela primeira vez. Segundo, relacionar as frações com os números decimais e terceiro, reforçar o processo de medição. Apresento como foi o desenvolvimento dessas atividades pelos dois grupos.

5.3.1 Medindo segmentos - Grupo 2

O grupo 2 realizou a atividade 12 no dia 11 de agosto, concluiu a atividade em 40 minutos e iniciamos a atividade 13 no mesmo dia, concluindo-a no dia 13 de agosto.

Discutiu-se na atividade 12 o processo de medição de segmentos, como uma alternativa para solucionar o seguinte problema:

“Trace um segmento AB qualquer. Encontre uma fração que represente o tamanho do segmento AB”. Logo perceberam que essa não foi uma tarefa fácil.

As participantes do grupo 2 traçaram o segmento e definiram o padrão de comparação, para que pudessem construir as frações. Usando a ferramenta compasso verificam que o segmento AB tem sua medida entre 1 e 2, mais próxima de dois. Então pergunto se conseguiram determinar a fração que representa o tamanho de AB. As alunas respondem que é necessário medir. Para isso sugerem o uso de uma régua. Como isso não é possível sugiro que testem algumas divisões do padrão para tentar descobrir a fração.

As participantes então abrem a lista de macros e decidem utilizar a divisão em dezesseis partes, por ser o maior número que tinham. Efetuando a divisão verificam que AB tem medida entre 31/16 e 2 unidades. Em seguida decidem testar os sétimos e verificam que o intervalo ficou maior. De imediato concluem que devem usar um denominador maior que 16.

Como esse era o maior denominador que tinham, seria necessário criar novas macros. Então finalizei essa construção comentando sobre a dificuldade de determinar a medida usando as frações e que poderíamos definir a medida do segmento utilizando o processo de medição, o qual seria aprendido a seguir.

No restante da atividade as participantes seguiram os passos apresentados para realizar a medição do segmento, mas esses não foram suficientes para compreenderem o processo e as intervenções e explicações do professor foram determinantes nesse sentido.

Na conclusão da atividade foi produzida uma tabela (Figura 58) com as medidas encontradas para cada unidade utilizada. Ao término da atividade 12 foi possível iniciar a discussão do uso da vírgula, realizando a primeira parte da atividade 13. Na tabela construída (Figura 58) pode-se observar a regularidade dos números e concluir pela necessidade do uso da vírgula para indicar a primeira vez que a unidade foi dividida.

	Sem ultrapassar B	Medida de AB	Ultrapassando B
U	1		2
U1	(3) 13		(2) 14
U2	134		135
U3	1342		1343
U4	13423		13424
U5	134.235		134.236

Figura 58: Tabela com os resultados do processo de medição - grupo 2

Esperando que os alunos fizessem essa observação, pergunta-se na Atividade 13: Que semelhanças você pode notar nos números que representam o tamanho dos segmentos antes de ultrapassar B?

A resposta apresentada, após as observações foi: “a mudança ocorre somente no último dígito”.

Com essa observação a atividade pergunta: Se eu disser que em uma determinada etapa da comparação tive 132 como resultado, é possível descobrir quantas vezes já repeti o processo?

A princípio as alunas responderam essa pergunta afirmativamente, que era possível repetir o processo, então argumentei que esse número poderia representar um segmento que continha 132 vezes o segmento U ou então que contenha 13 vezes U mais 2 vezes o segmento U_1 ou então que seja 1U mais $3U_1$ mais $2U_2$. Isso significa que apenas conhecer o número sem saber a qual unidade ele se refere não é possível determinar o segmento, pois não se sabe quando a unidade começou a ser dividida. A atividade apresenta um texto explicando a necessidade da vírgula para indicar a primeira mudança de unidades.

O desenvolvimento do restante da atividade ocorreu no dia 13/08, dois dias depois, com a presença das alunas Laura e Fabíola.

Até o momento o processo de medição foi aplicado uma única vez, em um segmento qualquer. Nessa medição, para ambos os grupos, o processo foi repetido várias vezes e mesmo assim não foi possível determinar uma medida decimal exata. Agora a proposta é que se construa um segmento de tamanho fracionário, no caso 2/5, para então aplicar o processo de medição nesse segmento até obter uma medida exata.

Para tanto, as participantes construíram o segmento de tamanho 2/5, dividindo o padrão em 5 e tomando 2 partes, como se observa na Figura 59.

Figura 59: segmento padrão dividido em cinco partes

Seguindo minhas orientações, reproduziram o segmento em uma semi-reta, para então realizarem o processo de medição.

Esse trecho mostra o início do processo de medição, com a reprodução da unidade sobre a mesma semi-reta.

Atividade 13 – Medindo Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

8:10-9:05

PROFESSOR: Então a gente vai reproduzir [*o padrão*] a partir daqui.

LAURA: Ah então até passar a linha.[*o arco vermelho*]

PROFESSOR: Até passar esse ponto. No caso na primeira ele já passou, então o que a gente vai obter aqui na primeira etapa? coube alguma vez o segmento no padrão?

LAURA: Não.

PROFESSOR: Então coube zero vezes, passando ficou uma vez. A gente sempre vai anotar o quanto ele coube no segmento então na primeira etapa ele teve medida 0.

Figura 60: O segmento de tamanho 2/5 do padrão reproduzido na semi-reta

A Figura 60 mostra o segmento construído pelas alunas e a primeira etapa do processo. Nessa primeira etapa o segmento é menor que a unidade, então a medida está entre 0 e 1.

O passo seguinte é dividir a unidade em dez partes. Nessa etapa a fala das alunas mostra que ainda não tinham compreendido bem o processo de medição, pois estavam inseguras sobre o que deveriam fazer. Percebo na fala das alunas essa incerteza, ao dividirem o segmento referente ao 2/5 em dez partes, no lugar de dividir o segmento padrão. Ao consultarem a ficha da atividade anterior percebem o erro e procedem com a divisão da unidade.

Atividade 13 – Medindo Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

9:30-11:55

LAURA: Agora divide em pedacinho não é?

FABÍOLA: Em 10 professor?

PROFESSOR: Em dez.

FABÍOLA: Macros... até aqui?

PROFESSOR: É até ai? Agora o que você vai ter que dividir em 10?

LAURA:Tem que dividir esse pedacinho aqui? [*dividindo o segmento 2/5*]

PROFESSOR: Não o que você vai dividir em 10? É o 2/5?

Figura 61: segmento 2/5 dividido em 10 partes

FABÍOLA: É não é? O segmento esse aqui não é? Esse é o 2/5 eu tenho que dividir o 2/5 em 10 partes?

PROFESSOR: Vai adiantar alguma coisa?

LAURA: Não.

FABÍOLA: aí meu Deus eu num lembro...professor da uma dica.

PROFESSOR: Uma dica pega a atividade 12 lê o quarto passo.

LAURA: Ah então tem que dividir o padrão em 10 partes.

Essa insegurança indica que até o momento o processo de medição não foi compreendido pelas alunas, ou que os passos do processo ainda não estão claros, mesmo a atividade anterior tendo sido realizada há apenas dois dias. Essa incerteza com relação ao processo de medição também pôde ser percebido nas atividades do grupo 1.

Ao dividirem a unidade em dez partes as alunas percebem que obtiveram uma medida exata:

Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

12:40-13:55

PROFESSOR: Essa daqui então é nossa nova unidade. Agora quantas vezes couberam sem ultrapassar o ponto?

LAURA: 4.

FABÍOLA: 4.

PROFESSOR: Exatamente 4?

LAURA:Um pouco mais?

PROFESSOR: Exatamente?

FABÍOLA: Acho que tá.

PROFESSOR: Se não fosse exatamente ia estar um ponto verde ali em volta dele não ia?

LAURA:Ah tá, mas já tá certo?

PROFESSOR: Já.

LAURA: Nossa que rápido, ontem demoro tanto.

PROFESSOR: Então na primeira vez que a gente divide a unidade a gente põe a vírgula. Então a gente obteve zero vírgula quatro.

Figura 62: Segmento com medida decimal e fracionária

Nessa parte, para verificar que obtiveram a medida exata do segmento, as participantes utilizaram o recurso visual do *software*, clicando no ponto inicial e movendo o *mouse* até o ponto um, percebendo que um ponto sobrepõe o outro (Figura 62). Ao aproximar com o zoom viram que era o mesmo ponto. Essa construção foi importante, pois pela primeira vez a medição foi exata.

Na medição realizada anteriormente (Atividade 12) o resultado obtido não foi exato, pois se tratava de um segmento qualquer. Por esse motivo Laura comentou sobre a rapidez com que chegaram ao fim da medição.

Continuando a atividade, a construção 2 pede que seja realizada a medição de diversos segmentos com tamanhos fracionários. Iniciando com o segmento de tamanho 3/4.

Para organizar a visualização das frações nomeei os pontos com os tamanhos que representavam, pois as alunas não tinham feito isso e parecia que a falta dessas informações estava causando confusão no pensamento. Na medição do segmento 3/4, o processo foi repetido duas vezes para obter a medida exata. Laura e Fabíola se confundiram um pouco, mas concluíram a medição. As alunas optaram por construir o segmento sobre a mesma semi-reta da construção anterior (Figura 63), de forma que a unidade já estava dividida em décimos, assim a primeira e segunda etapa do processo de medição já estavam realizados. As alunas discutem sobre como deverá ser a próxima etapa, pois a unidade já está dividida em 10.

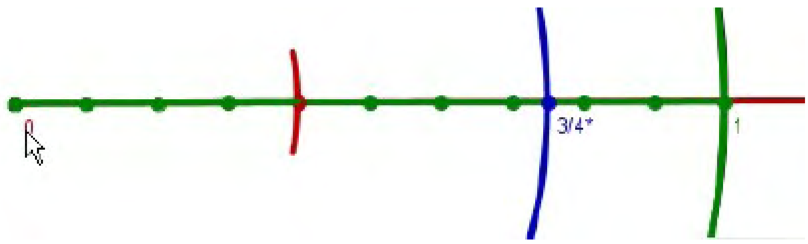


Figura 63: Semi-reta com o segmento 3/4.

Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

18:10-24:25

PROFESSOR: Esse é o 3/4. Quantas vezes a unidade coube nele?

LAURA: Só uma. Só aqui

PROFESSOR: Esse aqui é o 1 não é? Temos aqui o 0 e o 1.

Por enquanto nós temos 0. Marca aqui na frente o 1 que você obteve na primeira etapa. Agora a segunda etapa seria dividir entre o 0 e o 1 em 10. Que já tá dividido não tá? São esses aqui. Agora quantos que coube antes do 3/4?

FABÍOLA: 4.

PROFESSOR: Como 4 Laura?

FABÍOLA: Ah antes do 3/4 até aqui.

LAURA: 7 e meio.

PROFESSOR: Então o que você vai marcar aqui?

FABÍOLA: 7

LAURA: 0,7

PROFESSOR: Agora repetindo mais uma vez.

FABÍOLA: Hum?

PROFESSOR: Repetir o processo pra tentar achar a medida exata.

LAURA: Peraí se já tá dividido em 10 tem que dividir mais uma vez não é professor?

FABÍOLA: Dividir em 10?

LAURA: Já tá dividido em 10... aí meu Deus.

PROFESSOR: O que você acha?

LAURA: Cancela vai.

FABÍOLA: Tem que dividir o que?

LAURA: Tem que dividir, mas só que tem que ver o que?

PROFESSOR: Cada uma dessas unidades em 10. Inclusive a unidade inteira. Mas no caso nossa unidade é essa pequenininha você dividiria ela em 10.

LAURA: A primeira né professor?

FABÍOLA: Não, mas a gente fez isso daí errado lembra não era até o 3/4?

Nesse momento permiti que as alunas discutissem sobre quais procedimentos deveriam tomar para concluir a medição, permiti que tomassem as decisões que achassem melhor. As alunas dividiram cada uma das unidades (décimos) em dez novamente, desde o ponto zero, até ultrapassar o ponto 3/4. Com essa nova divisão os pontos ficaram todos aglomerados (Figura 64), mas é possível perceber que os pontos se sobrepõem, definindo uma medida exata.

LAURA: Mas já tá dividido não tá professor? não é isso ai? [*dividindo o primeiro décimo*]

PROFESSOR: Ainda não tá resolvido o problema.

FABÍOLA: Tem que dividir todos não é?

PROFESSOR: Divide todos.

FABÍOLA: Até o 3/4?

LAURA: Não. É até o outro ponto né professor?

PROFESSOR: Quantos pontinhos ficou lá?

LAURA: Espera eu contar tem que voltar do começo. Meu Deus.

PROFESSOR: Tem certeza que você vai contar?

FABÍOLA: Dá 10, 20 ,30 , 40, 50,60, 70

PROFESSOR: 70 e?

FABÍOLA: 80.

PROFESSOR: Antes de passar o 3/4.

LAURA: 70 e 1, 2, 3, 4, 5. 75. 0,75?

PROFESSOR: Caiu em cima já?

LAURA: aham.

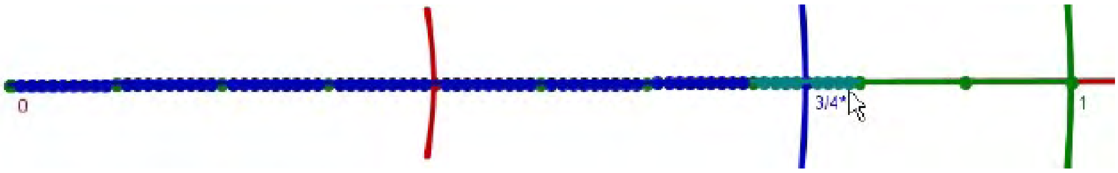


Figura 64: etapa 3 - dividindo em centésimos.

No desenvolvimento da atividade 12 não foram divididos todos intervalos em dez, apenas o intervalo que continha o ponto desejado. Quando as alunas realizaram essa medição dividiram todos os intervalos. Parece-me que assim elas conseguiram visualizar e compreender melhor o processo, o que não estava ocorrendo até então. Mesmo essa divisão não sendo necessária ela foi simples de ser realizada com as macros e permitiu que visualizassem os centésimos.

Vejo um papel importante do *software* como ferramenta de visualização, pois seria impossível realizar essa divisão sem o mesmo.

As participantes optaram por usar a mesma semi-reta para representar todas as frações pedidas e conseqüentemente aplicar o processo de medição. Por esse motivo, na medição das outras frações não foi necessário realizar todas as etapas do processo para as frações, por exemplo, ao construir a fração 1/2 (letra c da atividade) o ponto já coincidiu com o 0,5, no caso das frações 3/10, 23/100 e 12/10 ocorreu o mesmo. A descoberta da representação decimal foi direta, após a construção da fração sobre a semi-reta.

Na fração 6/5 (letra b da atividade) surgiu a dúvida quanto ao modo de construí-la. A construção de frações impróprias foi trabalhada em atividades anteriores (ver 1º episódio), mas esses encontros ocorreram no primeiro semestre, alguns meses antes, sendo necessário relembrar algumas idéias básicas, como o fato de 1 = 5/5 e que para construir a fração 6/5 deveriam tomar 1 inteiro mais 1/5.

Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

24:50-31:55

FABÍOLA: Agora é 6/5 pega 6 divide em 5? Mas não tem 6 professor cadê o 6?

LAURA: Agora tem que fazer uma semi-reta?

PROFESSOR: Como vocês solucionariam esse problema?

FABÍOLA: Junta.

LAURA: Não da pra juntar não tem macro de um.

FABÍOLA: Ah pega a semi-reta aí mede aqui, e põe aqui e faz um pontinho nele.

PROFESSOR: E se você pensar num jeito que você já marca em baixo e fica marcado 6 pontos direto. (...) Quanto mede isso aqui.

FABÍOLA: Cinco.

PROFESSOR: Cinco o que?

LAURA: Inteiros.

PROFESSOR: 5 inteiros? Não é 1 inteiro?

LAURA: Nossa é 1 inteiro professor dividido em 5 partes.

PROFESSOR: Tá então aqui é 1 inteiro ou? Quantos quintos?

LAURA: 1/5

PROFESSOR: 1 inteiro é a mesma coisa que 1/5?

(...)

LAURA: Não. Esquece.

FABÍOLA: Perai é a mesma coisa que alguma coisa.

PROFESSOR: Que uma fração de quintos, quantos quintos você tem aí?

LAURA: 5, cinco quintos.

PROFESSOR: Cinco quintos. Um inteiro é igual a cinco quintos e você quer qual fração?

FABÍOLA: 6/5

PROFESSOR: Quanto tá faltando?

LAURA: 1.

PROFESSOR: Então você já tem 1 inteiro? quanto que tem que por pra cá pra dar 6/5?

LAURA: 1.

PROFESSOR: Então faz isso.

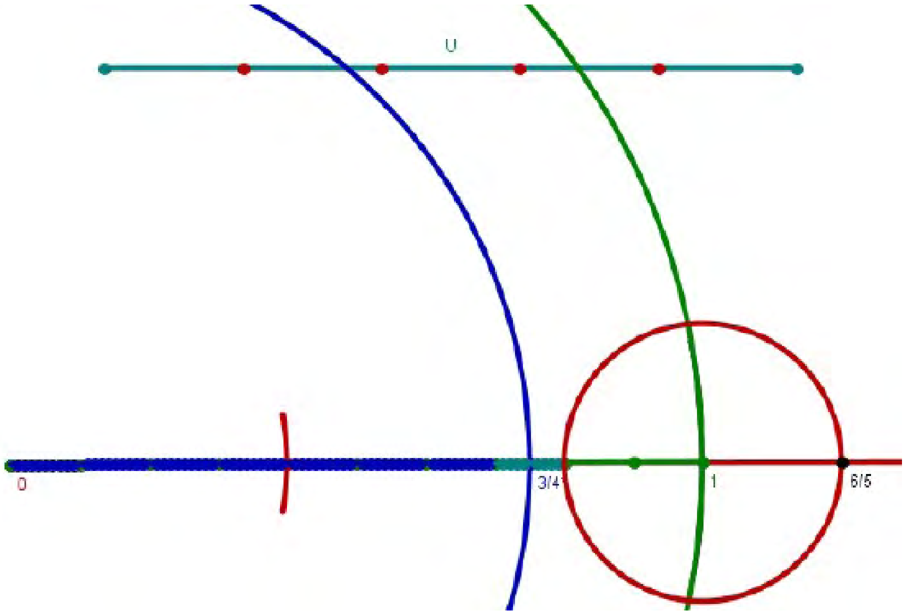


Figura 65: segmento padrão dividido em cinco e a semi-reta com o segmento 6/5

LAURA: Não é 1 pontinho.

[*as alunas dividiram o padrão em cinco. Por sugestão do professor as alunas reproduziram o segmento 1/5 após o ponto 1 da semi-reta (Figura 65). Mesmo fazendo o que o professor sugeriu elas não compreenderam o que foi feito, motivando os questionamentos que seguem*]

FABÍOLA: Ah tá.

PROFESSOR: Onde tá?

FABÍOLA: Aqui é o 6/5.

PROFESSOR: É?

LAURA: Não, aí é 1/5. [*considerando apenas o segmento menor*]

PROFESSOR: É não é?

FABÍOLA: Não é 1/5 só.

PROFESSOR: Por que só 1/5?

FABÍOLA: Porque **não tem mais 6**.

PROFESSOR: Você tem que contar daqui. [*indicando o ponto inicial da semi-reta*]

FABÍOLA: **Não mas aqui ó Laura é esse tamanho 5/5 a gente fez mais 1 já tem 6/5 aqui.**

LAURA: Ah tá.

Nesse trecho noto que as estudantes realizam as representações das frações próprias sem problemas, baseadas no número de partes do inteiro, porém, ao trabalharem com frações impróprias ainda apresentam dúvidas quanto a construção e ao significado. Acredito que pelo intervalo de quase dois meses entre a realização de uma atividade e outra.

Da mesma maneira, a mudança de representação das frações decimais para os números decimais foi direta, sem a necessidade da realização do processo de medição. Porém ao serem questionadas sobre como relacionar as duas representações, percebe-se que as alunas ainda não associaram as duas representações para as outras frações. No trecho abaixo vê-se que a aluna se baseou em regras conhecidas em sala de aula e criou regras próprias para a mudança da fração decimal para o número decimal.

> **Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.**
>
> **43:19-44:16**
>
> PROFESSOR: Você tem 23/100 o que você faria?
>
> LAURA: Eu pegava 0,23 porque em baixo eu tenho 3 números eu tenho 2 zeros ia colocar o 0 vírgula os dois números da frente entendeu os dois zeros em vez de colocar o 2,3.
>
> FABÍOLA: Eu entendi mais ou menos. Eu tenho o 23/100, aí esses dois zeros que ela tem ela vai colocar um zero porque é menor e no lugar desses dois zeros ela vai colocar o 23.
>
> FABÍOLA: É, tá certo?
>
> PROFESSOR: E se for 125/100?
>
> LAURA: 1,25.

Vê-se que a regra utilizada pela a aluna funciona para as frações decimais, mas a aluna tem dificuldade em explicar a regra para as colegas. No trecho que segue a aluna Fabíola expressa que entende que a fração 3/4 é igual a 0,75 pois esse é o resultado do processo, mas Laura expressa-se dizendo que se não tivesse realizado o processo afirmaria que 3/4 é igual a 3,4. De mesmo modo afirma que 5/5 é igual a 5,5. Como o professor sinaliza que a afirmação não é verdadeira ela afirma que é igual a 0,5.

> **Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.**
>
> **46:15-50:35**
>
> Pergunta 4: Nessa construção, cada segmento foi obtido com um tamanho correspondente a uma fração de U. Você obteve um número decimal que representa também o tamanho desse segmento em relação a U. Como você relaciona esses dois símbolos que representam o tamanho do mesmo segmento?
>
> [*A resposta que desejava era que os símbolos fração e decimal representavam um mesmo segmento e portanto eram iguais*]
>
> PROFESSOR: A gente construiu a fração e depois fez o processo de medição e chegou no decimal. Quando eu falo que o segmento tem 3/4 e têm tamanho 75 centésimos eu tô falando do mesmo segmento. Então são tamanhos iguais. Como vocês relacionariam o 3/4 com 0,75?
>
> FABÍOLA: É a conta igual a gente fez.
>
> PROFESSOR: Que conta?
>
> LAURA: A conta... como eu posso chamar isso daí?

PROFESSOR: Processo.

LAURA: É o resultado do processo. Feito pra descobrir a divisão, pra descobrir o resultado.

PROFESSOR: Assim se eu falasse pra você, tem o segmento que tem a fração 3/4 você já conseguiria pensar de um modo pra saber qual a medida decimal desse segmento?

FABÍOLA: Como assim professor?

PROFESSOR: No enunciado, o segmento a medida dele em fração é 3/4, teria como você saber que a medida decimal dele é 0,75?

LAURA: Não porque esse não tem 0 eu já ia falar que era 3,4.

PROFESSOR: Mas você sabe que não é?

LAURA: Aham.

PROFESSOR: Então primeira coisa você olha pra fração, qual número é maior o numerador ou o denominador?

FABÍOLA: O denominador.

PROFESSOR: E o que isso fala pra gente?

LAURA: Perai... deixa eu lembrar, você explicou na sala.

PROFESSOR: O que acontece se o numerador é menor que o denominador? (...) O que acontece se é igual? por exemplo 5/5 dá que numero?

LAURA: 5,5

PROFESSOR: 5/5 é igual a que numero?

LAURA: Não. É 0,5.

Nesse trecho fica evidente a dificuldade na mudança de representação, uma possibilidade para efetuar essa mudança seria pelo procedimento da atividade, construir um segmento pela fração e realizar o processo de medição nesse segmento, descobrindo o decimal, porém parece que esse procedimento não é natural para as alunas.

Percebo que elas querem lembrar a regra para essa conversão, a saber, dividir o numerador pelo denominador, como foi ensinado nas aulas regulares de matemática. Ao se basearem na mesma regra das frações decimais, gerou o erro. Não gostaria de apresentar essas regras novamente, nem mesmo que as alunas as usassem. Meu objetivo era de que conjecturassem sobre a relação entre as frações e os decimais baseadas na experiência que estavam tendo no desenvolvimento das atividades e não que utilizassem ou criassem regras de conversão.

Procurei estimulá-las a observar melhor o desenho para que pudessem compreender melhor a relação entre frações e decimais.

Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

50:50-53:35

PROFESSOR: Aqui é quanto em décimos? [*mostrando o segmento construído anteriormente no computador*]

LAURA: Cada pedacinho? É 1 décimo.

PROFESSOR: um décimo, dois décimos, três décimos, quatro décimos, cinco décimos.

FABÍOLA: É até dez décimos. [*indicando a construção em que o padrão foi dividido em dez*]

PROFESSOR: E se tivesse dividido em 8 ia até quanto?

LAURA: oito oitavos

PROFESSOR: E em 5?

LAURA:cinco quintos.

PROFESSOR: O que tem em comum todos esses que a gente falou?

LAURA: O denominador é igual ao numerador?

PROFESSOR: Isso representa o que então? 1 inteiro.

LAURA: 1 inteiro da fração?

PROFESSOR: Não 1 todo [LAURA: um pedaço] 1 padrão.

LAURA: Ah tá.

PROFESSOR: Quando você tem o denominador igual ao numerador você tem 1 inteiro.(...) Pensa aqui você tem 10/10.

Se fosse 9/10 o numerador é menor. 8/10 o numerador é menor. 7/10, 6/10, 5/10, o que acontece quando o numerador é menor? (...)

Quer dizer que em decimal isso é menos do que 1. E se for maior?

LAURA: 11/10

PROFESSOR: 11/10, 12/10

FABÍOLA: Aí o numerador é maior do que o denominador.

PROFESSOR: Vai ser maior, então vai ser maior do que 1. Então já da pra gente ter uma idéia, se vai começar com zero, se vai começar com 1.

PROFESSOR: Agora, se eu te dou uma fração, pra você saber a representação decimal dela... então a Laura falou que o problema era essa fração ser sobre 10, sobre 100, aí ela saberia fazer.

LAURA: Eu não sei se eu saberia fazer, professor...

PROFESSOR: Só pra deixar uma coisa clara, três quartos não é 3,4.

LAURA: não, eu sei, é 0,75.

PROFESSOR: Pra você já ver que tá errado o 3 é menor que o 4 então já tem que começar com 0.

LAURA: Ah então entendi se o numerador for maior aí começa com 0, não, não começa com zero, mas se for menor começa com zero.

PROFESSOR: Se for maior pode começar com 1 com 2 dependendo.

LAURA: Mas não começa com 0.

Nesse trecho nota-se que as estudantes ainda não relacionam as frações com os números decimais corretamente. Com o auxílio das construções realizadas no *software,* tentei mostrá-las que frações com numerador menor que o denominador deveriam ter obrigatoriamente a representação decimal começando com zero e que, portanto a maneira como estavam realizando a conversão não poderia estar correta. Aparentemente entenderam minha argumentação.

Na fala da participante Laura em que ela afirma que as frações e decimais estão relacionadas pelo processo, indica que a aluna entende que o processo de medição relaciona frações, segmentos e decimais, mas nota-se que ainda não compreende bem como é a relação e ainda tem dúvidas de que usar a fração ou o decimal é a mesma coisa. Também percebo na fala da aluna que o uso do processo de medição a colocou em dúvida sobre a validade do procedimento que usava para a mudança da fração para o decimal.

Apesar das dificuldades apresentadas nota-se que as alunas puderam, auxiliadas pelo professor, conjecturar sobre a representação decimal das frações. O papel do professor foi fundamental para que elas observassem que uma fração com numerador e denominador iguais representa um inteiro, que frações com numerador menor que o denominador representam números decimais menores que um e que frações com numerador maior que o denominador representam decimais maiores que um. As alunas não determinaram uma regra para a mudança de representação, concordando apenas com a explicação do professor.

Com a experimentação realizada não está claro se as alunas perceberam que apesar de diferentes, as representações simbolizavam a mesma coisa, a medida de um segmento. Vê-se no trecho abaixo que a aluna ainda tem dúvidas de que a fração e a decimal representam a mesma coisa.

A pergunta final da atividade visa discutir a preferência das alunas pelas representações. As alunas, em um primeiro momento dão preferência para a representação decimal, para o caso 1/2 ou 0,5. Porém, ao serem perguntadas sobre as outras representações as alunas mostram preferência pela representação fracionária, afirmando que a fração tem mais significado para elas. Como vê-se nesse trecho:

Atividade 13 – Medindo de Segmentos II – Grupo 2 - 13-08-2008 – Participantes: Fabíola e Laura.

54:02-55:33

LAURA: Eu escolheria 0,5 mais fácil já sabe que aí é 0,5

PROFESSOR: Vamos lá se você pudesse escolher 3/4 ou 0,75?

LAURA: 75?

PROFESSOR: 3/4 OU 0,75?

LAURA: Eu escolheria 3/4 mais fácil. E aqui é o contrário eu escolheria o 0,5 porque eu já sei que 1/2 é 0,5.

PROFESSOR: tá 6/5 ou 1,2?

FABÍOLA: 1,2

PROFESSOR: O que você acha que tem mais significado pra você?

LAURA: 6/5

PROFESSOR: **6/5 tem mais significado que 1,2?**

LAURA: **Pra mim tem. Mas é igual o resultado?**

PROFESSOR: Você tem os dois que representam a mesma coisa, o mesmo segmento. Se você pudesse escolher quero usar esse ou aquele, qual faz mais sentido?

FABÍOLA: Fração.

LAURA: Fração.

PROFESSOR: Então vocês preferem usar a fração?

FABÍOLA: A fração, eu acho mais fácil.

Acredito que a escolha da representação fracionária se deva ao modo como as duas representações foram construídas. Pela última fala, a aluna afirma que a fração é mais fácil. Realmente a construção das frações é direta, basta dividir a unidade em partes iguais, tarefa que com o *software* se tornou simples para as alunas. Por outro lado, a construção dos números decimais demanda repetições e a torna, mesmo com os recursos do R.e.C, mais demorada. O grupo 1, nessa questão também demonstrou preferência pela representação fracionaria.

5.3.2 Considerações sobre o Episódio

Os estudantes de uma maneira geral preferem utilizar os números decimais (VALERA, 2003). Nessa etapa do trabalho as participantes alegam preferir as frações, afirmando serem mais fáceis e significativas. Percebe-se que ainda não compreendem bem os decimais e o processo de medição, tendo em vista que nesse episódio, pela maneira como construíram os segmentos, o processo completo foi efetuado poucas vezes.

Nas atividades desenvolvidas o uso do *software* permitiu que a representação das frações em segmentos se tornasse uma tarefa simples. Por outro lado, a representação dos números decimais, da maneira que foi trabalhada, mesmo com o auxílio do *software* se mostrou mais trabalhosa. Também pela forma como as alunas realizaram a construção, o processo de medição não foi efetuado em todas as etapas. Essa escolha pelos números fracionários indica que o modo como foram abordadas as representações e o uso do *software,* até o momento, fez as alunas preferirem a representação fracionária à representação decimal.

O uso de regras para conversão entre as representações se mostrou um complicador, pois as alunas utilizaram uma regra válida apenas para frações decimais, como base para “criar” uma “regra” para a mudança de representação de frações para decimais, gerando erros como 3/4 é 3,4. Por outro lado, o uso do *software* para a visualização dos segmentos permitiu aos participantes conjecturar sobre a representação fracionária e decimal e a perceber algumas relações entre elas, como no caso das frações próprias e impróprias e suas representações decimais.

A utilização do R.e.C para a construção das representações e a utilização de duas representações simbólicas propiciou que as alunas aprimorassem seus conhecimentos e as relações entre as representações. Mesmo cometendo erros de conversão nota-se que as atividades propiciaram discussões e correções em falhas de aprendizagem ocorridas nas aulas tradicionais. Nesse sentido vejo que as atividades desse episódio contribuíram para o entendimento dos números racionais quando explorados como medidas de segmentos e das conversões entre as representações.

5.4 4º Episódio – Números Decimais, Representações e Operações

No 2º episódio mostrei como os participantes efetuaram a construção de segmentos sabendo sua medida em fração e a dificuldade em descobrir qual fração representava o tamanho de um segmento qualquer. Ao introduzir e definir os números decimais, no 3º episódio, apresentei como as alunas efetuaram o processo de medição, atribuindo a um segmento um número que representa o seu tamanho. Nesse 4º episódio mostrarei como as participantes realizaram o processo inverso da medição (Atividade 14) e trago trechos das atividades 15, 16 e 17 que evidenciam as contribuições do processo de medição para o entendimento dos números decimais, das operações e da conversão entre decimais e frações.

5.4.1 Explorando a Representação Decimal – Grupo 1

A atividade 13 foi a última atividade realizada pelo grupo 1 no primeiro semestre de 2008 e foram retomados os encontros no dia 21 de agosto de 2008.

Nesse encontro, fiz uma revisão do processo de medição e da construção dos decimais, conversei sobre a utilização do padrão e dos passos que deveriam seguir para realizar a medição de segmentos.

Para revisar a construção abri o arquivo produzido no encontro anterior e usei o recurso repetir construção, na qual o programa repete cada passo da construção realizada (Figura 66). Com esse recurso as alunas visualizaram e revisaram cada passo da construção, relembrando o processo de medição.

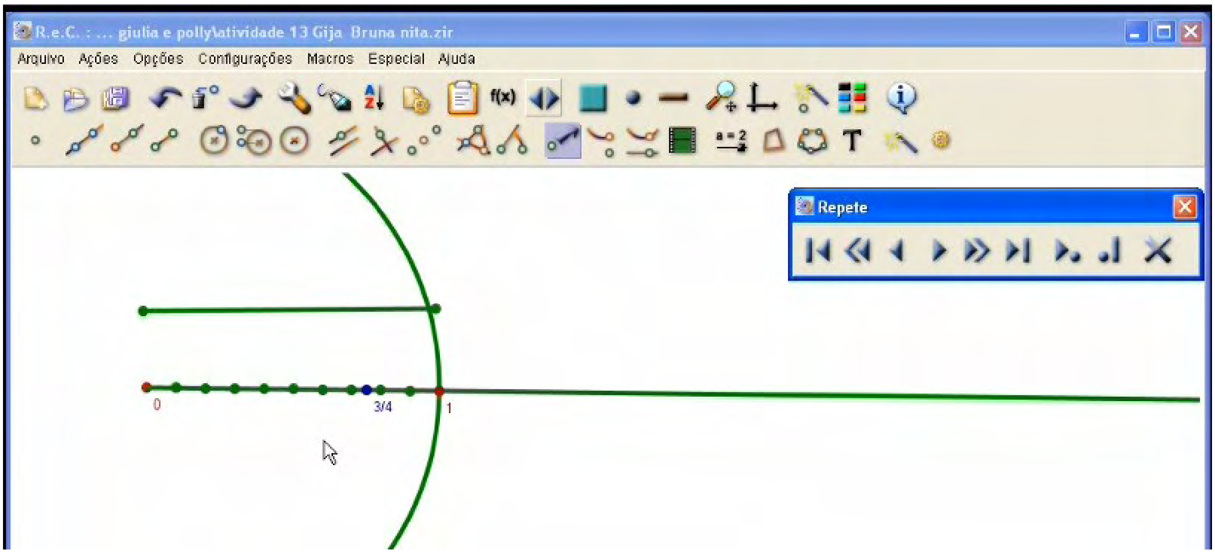


Figura 66: Repetição da construção

Após a revisão solicitei que realizassem o processo de medição em um segmento qualquer, com a intenção de verificar se tinham compreendido o processo. Essa construção não fazia parte do cronograma das atividades, mas julguei necessário para o prosseguimento das mesmas. Tendo em vista as dificuldades de visualização ocorridas nas atividades anteriores, orientei as alunas a realizarem a construção sempre nomeando os pontos utilizados, para que não se confundissem. Verifica-se com o compasso que o padrão coube duas vezes no segmento. Ao dividir o padrão em dez partes parece que foi encontrada uma medida exata (Figura 67), então pedi que ampliassem o desenho para verificar a exatidão da medida.

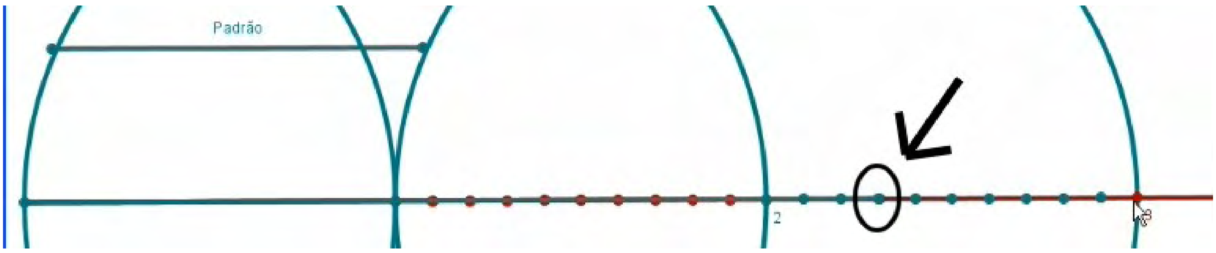


Figura 67: Medição de um segmento qualquer

Ao ampliarem o desenho viram que os pontos não se sobrepunham (Figura 68). Continuaram com o processo, realizando a terceira etapa e viram que ainda não tinham uma medida exata e que nessa etapa a unidade não coube nenhuma vez (Figura 69). Após repeti-lo quatro vezes não foi possível determinar uma medida exata (Figura 70).

Figura 68: 2ª Etapa do processo de medição

Figura 69: 3ª Etapa do processo de medição

Figura 70: 4ª Etapa do processo de medição

A redução do desenho ao tamanho original fez com que os pontos se sobrepusessem, revelando que estavam trabalhando com medidas microscópicas (Figura 71).

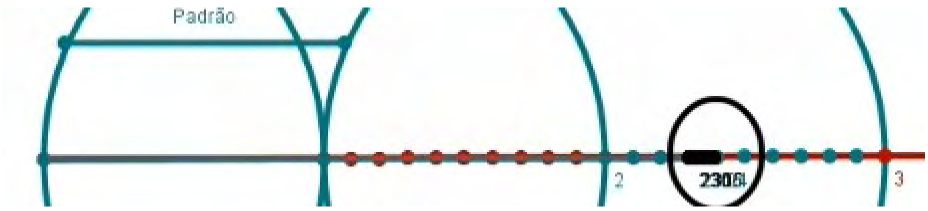


Figura 71: Redução da imagem - pontos sobrepostos

Com minhas orientações as participantes puderam revisar o processo e a definição do uso da vírgula, concluindo que a medida do segmento estava entre 2,305 e 2,306. Essa construção não estava prevista, mas foi essencial para que as alunas continuassem as atividades, tendo em vista que tinham decorrido dois meses desde o último encontro. Essa construção também mostra como as participantes do grupo 1 realizaram o processo de medição, não mostrado no episódio anterior.

Realizada essa construção foi iniciada a atividade 14, na qual as alunas deveriam construir segmentos conhecendo a medida decimal. Nessa atividade não foi apresentada nenhuma orientação de como deveriam efetuar a construção. As alunas deveriam construir um segmento com medida 2,453 do padrão

Elas determinaram o padrão e o reproduziram três vezes sobre uma semi-reta (Figura 72). Orientei-as a nomear o ponto que representava o segmento de medida dois. Em seguida Gabriela afirmou que deveriam dividir o próximo intervalo em dez, porém a ampliação da imagem e a existência de um ponto na semi-reta que não fazia parte da construção a confundiram fazendo com que errasse o intervalo (Figura 73). Após minhas orientações elas ocultaram o ponto, nomearam o ponto correspondente ao três e dividiram o intervalo corretamente. As alunas não tiveram mais dificuldades e concluíram a construção do segmento (Figura 74), sempre nomeando os pontos que antecediam e precediam o segmento desejado.

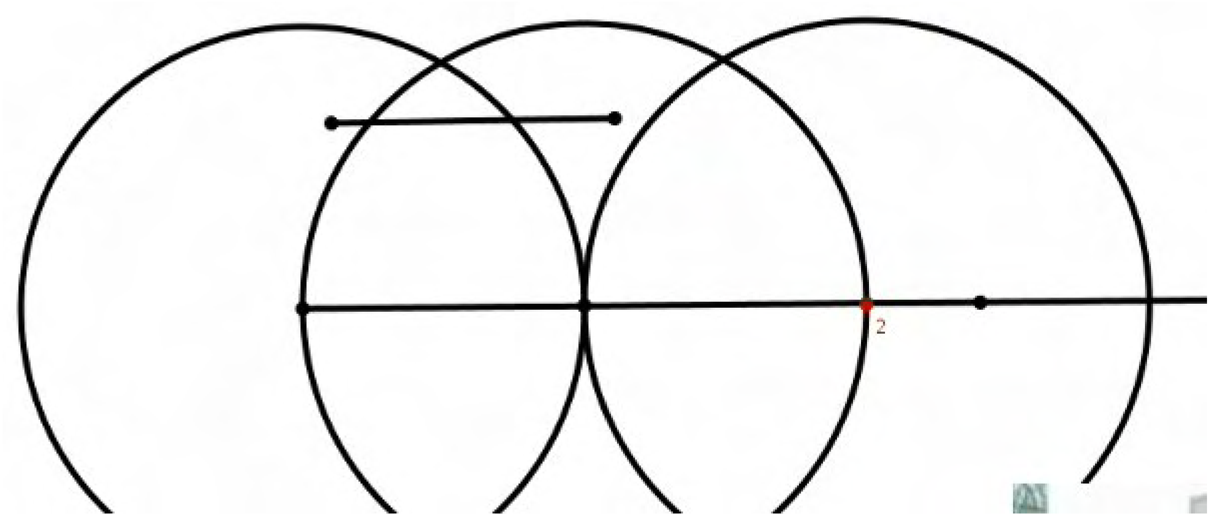
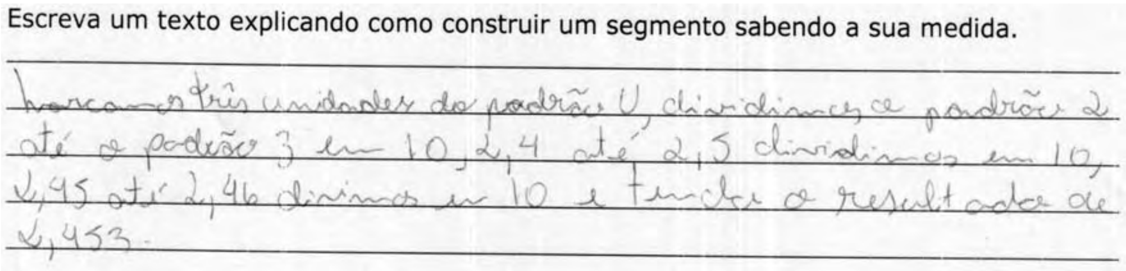


Figura 72: Início do processo inverso - reprodução do padrão.

Figura 73: Divisão incorreta após a ampliação.

Figura 74: Conclusão do processo inverso

Baseadas na construção realizada as alunas descreveram em texto como tinham realizado a construção (Figura 75). A pergunta pedia que escrevessem uma explicação para a construção de um segmento qualquer, mas acredito que da maneira como escreveram[36] demonstrou que tinham compreendido a construção realizada.


Escreva um texto explicando como construir um segmento sabendo a sua medida.

Marcamos três unidades do padrão U, dividimos o padrão 2 até o padrão 3 em 10, 2,4 até 2,5 dividimos em 10, 2,45 até 2,46 divimos em 10 e tendo o resultado de 2,453.

[37]

Figura 75: Sistematização da atividade 14, construção 1 - Grupo 1

Como o tempo tinha se esgotado deixei que as alunas concluíssem a atividade no próximo encontro. A continuação da atividade pedia que as alunas construíssem alguns segmentos sobre a mesma semi-reta e se deu no dia 28 de agosto. Identifiquei primeiramente uma confusão de leitura entre a notação decimal e fracionária, quando a aluna lê 1,2 como meio. Corrigi a leitura da aluna e ela iniciou a construção.

> **Atividade 14 – O Processo Inverso – Grupo 1 - 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.**
>
> **1:30-2:15**
>
> [ambos os grupos confundem a leitura dos números decimais e fracionários, apresentando essa dificuldade com a representação, como mostrado nesse trecho.]
>
> GABRIELA: Um meio. É um vírgula dois
>
> PROFESSOR: Como que lê?
>
> GABRIELA: Meio
>
> PROFESSOR: 1 inteiro
>
> GABRIELA: um inteiro
>
> PROFESSOR: e 2 décimos
>
> GABRIELA: e dois décimos.
>
> GABRIELA: E agora como a gente vai fazer?
>
> PROFESSOR: Igual semana passada

A conversa das alunas sobre como realizar a construção mostra que Gabriela tem certeza sobre como realizar a construção e Paula ainda tem dúvidas sobre a construção do 1,2.

---

[36] O texto na figura é: Marcamos três unidades do padrão U, dividimos o padrão 2 até 3 em 10, 2,4 até 2,5 dividimos em 10, 2,45 até 2,46 dividimos em 10 e tendo o resultado de 2,453.

[37] Resposta da atividade: Marcamos três unidades do padrão U, dividimos o padrão 2 até o padrão 3 em 10, 2,4 até 2,5 dividimos em 10, 2,45 até 2,46 em 10 e tendo o resultado de 2,453.

Atividade 14 – O Processo Inverso – Grupo 1 - 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

2:55-3:15

GABRIELA: Tem que pegar o número 1 e dividir em 10 pra pegar 2?

PAULA: Não sei

GABRIELA: É sim

Ao utilizarem a ampliação da construção, as estudantes perdem os pontos de referência, se atrapalhando quanto aos intervalos que devem dividir. Esse problema foi contornado ao nomearem os pontos dos intervalos que queriam dividir. Dessa maneira conseguiram determinar todos os segmentos solicitados (Figura 76), demonstrando domínio da construção.

Figura 76: Segmentos com medida decimal sobre a mesma semi-reta

Quando se pergunta qual o maior segmento respondem 1,215 e o menor 1,03. Ao escreverem os segmentos em ordem surge a dúvida sobre o segmento 1,2 ser menor que 1,18. De maneira geral esse é um erro comum entre estudantes, pois, comparam a parte decimal como números inteiros. No caso da atividade esperava que observassem a representação na semi-reta para dizer a ordem. Como essa dúvida surgiu argumentei que 1,2 era o mesmo que 1,20, como visto em atividade anterior.

Atividade 14 – O Processo Inverso – Grupo 1 - 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

12:00 - 13:10

GABRIELA: E qual foi o menor? Paula?

PAULA: Oi.

GABRIELA: Qual foi o menor?

PAULA: Foi esse aqui, 1,03.

GABRIELA: Escreva os números decimais da construção do menor para o maior.

PAULA: 1,2

GABRIELA: Não é 1,18?

PAULA: Mas 18 não é menor que 2.

GABRIELA: Do menor para o maior.

PAULA: Então.

PROFESSOR: 18 é menor que 2?

GABRIELA: Não

PROFESSOR: 18 é menor que 20?

PAULA: NÃO. Ah, É

GABRIELA: Não é.

PROFESSOR: Então 1,18 é menor que 1,20?

GABRIELA: É

PAULA: É

PROFESSOR: E 1,2 não é igual a 1,20?

PAULA: É, 1,18. Ninguém me explica.

PROFESSOR: Pra comparar você iguala as casas.

Vejo que esse tipo de erro demonstra falta de atenção e não falta de conhecimento, tendo em vista que as alunas tinham a semi-reta com a representação dos números na tela.

De modo geral vê-se que esse grupo não teve dificuldades com a representação dos números decimais sobre a semi-reta, e demonstraram compreensão do processo de medição. A representação de alguns números decimais sobre a reta proporcionou que as alunas visualizassem a ordem dos números decimais e tirassem dúvidas sobre como compará-los.

A utilização do processo de medição também serviu para que explorassem as dízimas periódicas. As alunas construíram segmentos a partir da medida fracionária e ao ampliarem a imagem verificaram que a medida decimal era não exata e periódica.

Nessa atividade ficou evidente que as participantes estavam confundindo a leitura das frações com as decimais. Realizaram a construção do 1/3 corretamente, mas ao nomearem o ponto escreveram um terço como 1,3.

Atividade 15 – Dízimas Periódicas– 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

17:00 - 18:20

PROFESSOR: Qual é o 1/3?

GABRIELA: Esse aqui ó. [*Figura 77*]

PROFESSOR: Então nomeia.

GABRIELA: Nomeia aí e aqui ó Paula.

PROFESSOR: Assim que escreve 1/3? [*a aluna escreveu 1,3*]

GABRIELA: Não volta é 1 barra 3 não é?

PAULA: Tira a vírgula Gabriela.

GABRIELA: Isso 1 barra 3. [*Figura 78*]

Figura 77: segmento 1/3 nomeado como 1,3

Figura 78: segmento nomeado corretamente

Através do processo de medição as participantes determinaram a medida decimal do segmento 1/3. Primeiramente verificaram que 1/3 era menor que a unidade, então dividiram o padrão e verificaram que a nova unidade coube três vezes (Figura 79). A cada etapa anotam na folha da atividade os resultados, tendo até o momento 0,3.

Atividade 15 – Dízimas Periódicas– 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

19:50 - 21:50

PROFESSOR: Então o padrão coube quantas vezes?

GABRIELA: 1.

PROFESSOR: Não gente não tá a mais você só olha para o que está menos.

GABRIELA: Ah.

PROFESSOR: Número inteiro ou é zero ou é um.

GABRIELA: Zero.

PROFESSOR: Então marca aí, zero.

PAULA: Zero Gabriela.

PROFESSOR: Agora você vai dividir o padrão em 10?

GABRIELA: Uhum.

PROFESSOR: Então quando a gente vai dividir o que você põe ai?

GABRIELA: Vírgula. Vai Paula divide o padrão em 10, rodar macro.

PAULA: Deixa assim Gabriela.

GABRIELA: Agora qual que é? [*pergunta qual é o ponto que estão medindo, pois os pontos ficaram da mesma cor (*Figura 79*)*]

PAULA: Eu sei é quando tá juntinho assim.

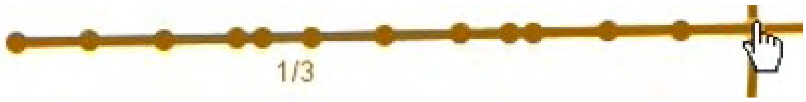


Figura 79: Segunda etapa da medição do 1/3

GABRIELA: Não é.

PAULA: Vamos voltar tudo de novo.

GABRIELA: Eu falei pra você voltar.

[...]

[*por iniciativa delas refizeram a divisão alterando a cor dos pontos, ver Figura 80]*

Figura 80: Segunda etapa com a cor dos pontos alterada

PROFESSOR: Quantas vezes coube?

GABRIELA: Uma, duas, três. Duas. Três.

PROFESSOR: Aí você marca.

GABRIELA: É. Vai agora você vai ter que dividir esse tanto e esse tanto.

PAULA: Esse pequenininho aqui?

GABRIELA: É.

PROFESSOR: Esse pedaço do padrão.

Ao tomarem a iniciativa de usar cores diferentes, nota-se que as alunas demonstram maior domínio das funcionalidades do R.e.C, utilizando-as para melhorar a visualização e compreensão da construção realizada. Na terceira etapa do processo (Figura 81) as alunas verificam que mais uma vez a nova unidade coube três vezes, obtendo 0,33 até o momento.

Figura 81: terceira etapa da medição do 1/3

Figura 82: Ampliação da terceira etapa

Nessa etapa as alunas se lembram do conhecimento adquirido em sala de aula de que uma dízima é infinita (trecho transcrito abaixo), mesmo assim estimulo que repitam a medição mais algumas vezes, para que possam visualizar a repetição da dízima. Mesmo porque não tínhamos discutido ainda esse tipo de representação infinita e um dos objetivos da atividade era que percebessem o infinito através da medição.

Atividade 15 – Dízimas Periódicas– 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

24:20 - 27:00

GABRIELA: É dízima nunca vai chegar ao fim.

PROFESSOR: Vai chegar Paula?

PAULA: Não num vai chegar. O negócio chama dízima, como vai chegar?

PROFESSOR: Chegou?

GABRIELA: Não.Viu!

PROFESSOR: Mas tá quase chegando.

GABRIELA: Não vai chegar nunca.

PAULA: Mesmo que aumentar.

GABRIELA: Paula isso só com o microscópio a gente vai conseguir ver.

PAULA: É mas chega lá.

PROFESSOR: Quantas vezes coube?

GABRIELA: 3.

PROFESSOR: 3. E se fizer mais uma vez?

PAULA: Ah não.

GABRIELA: Nós chega até lá.

PROFESSOR: Quantas vezes coube?

GABRIELA: 3.

PROFESSOR: Quantas vezes coube?

GABRIELA: 3

PROFESSOR: Então vai chegar lá?

GABRIELA: Não

PAULA: Não sei

GABRIELA: Paula nós num vai chegar nunca.

PAULA: A ciência nunca provou que não vai chegar.

GABRIELA: Matemática.

PROFESSOR: Chegou Paula?

PAULA: Não mais vai chegar.

PROFESSOR: Quantas vezes coube?

GABRIELA: 3.

PAULA: 3. (...) Mais uma vez a ciência vai comprovar.

PROFESSOR: Quantas vezes coube?

GABRIELA: 3. Acabou, desisto.

PROFESSOR: Acreditou agora que não vai?

PAULA: Acredito mas agora eu vou diminuir pra ver onde vai dar esse negócio.

GABRIELA: Só com, o microscópio.

Após a repetição da medição várias vezes as alunas desistem e se convencem de que pelo processo de medição “nunca vai chegar” no ponto. Esse convencimento se deu também pelo fato de terem um conhecimento anterior sobre dízimas periódicas, sendo que o processo de medição no R.e.C serviu para que adquirissem uma visão geométrica das dízimas periódicas. E concluíssem que a representação decimal dessa fração é infinita, ou seja, sendo sempre aproximada. Portanto devem utilizar a fração se desejarem uma representação exata.

As alunas ainda verificaram a dízima para 3/7[38]. Nesse caso ao construírem o segmento 3/7 as alunas mais uma vez confundiram a notação de 3/7 com 3,7 e construíram três inteiros. Ao perceber a confusão chamei-lhes a atenção para o significado de 3/7, Quando Gabriela disse que 3/7 era três dividido em sete. Aproveitei esse momento para mostrá-las que a construção poderia ser realizada dessa maneira também. Dividir três unidades em sete partes, sendo que uma parte corresponde ao 3/7.

Atividade 15 – Dízimas Periódicas– 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

31:20 – 34:30

PROFESSOR: Faz 3/7.

PAULA: Pior ainda.

GABRIELA: Vai Paula, divide aí.

PAULA: Divide o que de 7?

GABRIELA: Em 7.

PAULA: Mas divide o que em 7.

GABRIELA: Aqui e aqui.

PAULA: Pronto, dividido.

PROFESSOR: Onde tá o 3/7

GABRIELA: Olha 1 2 3

PAULA: Então tá faltando mais uma então.

PROFESSOR: Não é 3,7 é 3/7 três inteiros dividido por 7 ou 3 partes de 7. Onde está 3 partes de 7.

GABRIELA: Aqui ó. Vai Paula marca.

PROFESSOR: Lembrando que eram 3 inteiros divididos em 7, então olha vou dividir 3 inteiros não é tudo isso?

GABRIELA: É.

PROFESSOR: Vou dividir em 7 onde caiu?

PAULA: Certinho então cada pontinho assim que cai em cima 3/7.

PROFESSOR: 3/7 6/7 9/7 de três em três porque eu peguei o 3 e dividi em 7 partes. Agora você pode pegar o 3 e dividir em 7 ou você divide o inteiro em 7 e pega 3 pedacinhos.

A maneira como construíram serviu para que fosse explorada a fração como quociente, representando o resultado da divisão. Gabriela não utilizou o processo de medição para determinar a representação decimal, preferiu realizar a divisão na folha da atividade, obtendo 0,3127813...

---

[38] A atividade pede para 3/11, mas o grupo não tinha produzido a macro de 11, então mudei para 3/7.

Vejo a preferência de Gabriela por utilizar a operação de divisão ao processo de medição por achar mais prático, tendo em vista que a aluna demonstra compreensão do processo e o utiliza corretamente. A fala das alunas no trecho abaixo mostra que elas entendem que podem utilizar ambas as representações para o mesmo segmento, sendo que a fração é uma representação finita e a dízima infinita.

Atividade 15 – Dízimas Periódicas– 28-08-2008 – Participantes: Paula e Gabriela.

38:35 - 38:50

GABRIELA: Como poderíamos representar essa medida na forma finita?

PAULA: Na forma finita.

GABRIELA: Por fração.

PAULA: Por fração de novo.

PROFESSOR: Por fração.

O uso de uma fração ou um decimal como medida de um segmento parece estar claro para as participantes, de modo que na atividade 16 foi trabalhada a adição e subtração de decimais, de modo análogo ao que foi realizado na atividade 11, apresentada no 2º Episódio. As participantes puderam verificar geometricamente como proceder as operações de adição e subtração. De maneira geral as construções ficaram visualmente confusas, de modo que interferi dando indicações sobre quais segmentos estavam sendo utilizados e dicas de como deveriam realizar a adição e a subtração.

Com a representação geométrica as alunas realizaram a operação contando primeiro os inteiros, para então contar os décimos, os centésimos e os milésimos, pois esse parecia o procedimento natural. Por esse motivo expliquei-lhes porque deveriam operar da menor unidade para a maior.

Atividade 16 – Adição e Subtração de Decimais – Grupo 1 - 11-09-2008 – Participantes: Paula , Fabíola e Carla.

29:30 - 31:31

CARLA: Primeiro soma os inteiros depois os décimos e depois os milésimos

PROFESSOR: Olhando do jeito que a gente fez aqui foi assim, mas se você for fazer a conta você começa dos menores para os maiores

FABÍOLA: Dos milésimos

PROFESSOR: Porque se você tem 10 milésimos você tem quanto? 1 décimo e se você tem 10 décimos você tem 1 inteiro.

FABÍOLA: O que eu entendi foi o que eu falei. A gente pega 1 inteiro por exemplo tem 2 inteiros vai lá e da 2 o décimo pega o tanto de décimo que tem e coloca e milésimos também

> [...]
>
> PAULA: Primeiro a gente junta os milésimos depois os décimos e depois os inteiros e acabou.

Na atividade 17 as alunas realizaram a adição e subtração com números fracionários e decimais, como 1,4 e 6/5. Quando propus essa atividade tinha o intuito de verificar como as participantes procederiam, escolhendo uma ou outra representação, porém, a resolução dessa atividade revelou que as alunas ainda apresentavam dificuldades com o significado das representações e com a mudança de representação.

Nos trechos abaixo destaco as dificuldades de conversão, em que as alunas tentam converter as frações em decimais para resolver as operações.

> **Atividade 17 – Frações e Decimais – Grupo 1 - 18-09-2008 – Participantes: Gabriela e Paula**
>
> **39:12 - 43:20**
>
> [*estão construindo o segmento 2,5 e consecutivo 4/3*]]
>
> GABRIELA: Agora consecutivo 4/3. Faz aí **4/3 em decimais**.
>
> PAULA: **dá 0,43**
>
> GABRIELA: Faz aí Paula 4/3 em decimal. Assim, **1,43 ,não é**?
>
> PAULA: **Não, é 4,3**
>
> GABRIELA: Não. O professor falou que não.
>
> PAULA: **3,4**
>
> GABRIELA: **1,4**
>
> PROFESSOR: Não foi eu que falei gente. Nós já fizemos várias atividades tratando desse assunto... o que quer dizer 4/3?
>
> GABRIELA: Que o inteiro 4 foi dividido em 3 partes
>
> PROFESSOR: **E 4 dividido em 3 dá 4,3?** Então o que tem que fazer pra transformar?
>
> GABRIELA: Dividi...vai á fiz **4 dividido por 3 da 1,3**
>
> PROFESSOR: **1,3333333333333333** e fica aqui infinitamente falando.
>
> E agora Gabriela tá pedindo pra você construir o que?
>
> GABRIELA: Construir um segmento que tenha tamanho **1,3**
>
> PROFESSOR: Ou **4/3**

Gabriela optou por usar a construção em decimais para o segmento 4/3, então lembrei que para utilizar a decimal teria que construir 1,333... infinitamente ou não teria a representação exata. Nesse caso a utilização da fração é necessária para que se obtenha o segmento desejado.

> **Atividade 17 – Frações e Decimais – Grupo 1 - 18-09-2008 – Participantes: Gabriela e Paula**
>
> **44:30 - 48:50**

GABRIELA: 2,5 eu quero 1,3

PROFESSOR: Ah você vai marcar o 1,333333333333 com decimal

GABRIELA: não

PROFESSOR: Você vai ficar marcando 1,3333 infinitamente?

PAULA: Que nem aquele dia

GABRIELA: Sei que não ia dar certo. Sei que eu fiquei tentando. E agora professor?

PROFESSOR: E agora faz pela fração.

PAULA: **4,3**

PROFESSOR: Não fala isso

GABRIELA: **4/3 tá então aqui é 3**

GABRIELA: Eu nunca vou achar

PROFESSOR: Você nunca vai achar. Se você fizer pela fração você vai achar direto.

GABRIELA: Vou.

PROFESSOR: Então o que é mais fácil de fazer?

GABRIELA: A fração.

No caso dessa construção as alunas demonstram que preferem utilizar a representação decimal, mas necessitam utilizar a fração para construir o segmento desejado. Mesmo utilizando a fração para realizar a construção, ao efetuarem a operação de adição convertem a fração em decimal com a calculadora e somam com 2,5.

A maneira como as estudantes procederam para resolver os problemas propostos foi diferente do imaginado ao preparar a atividade, pois as alunas recorreram ao uso da calculadora (Figura 83), o que não tinha previsto para essa atividade. Com esse auxílio tecnológico, a escolha natural foi a representação decimal.

A Figura 84 mostra que nas operações as alunas convertem a fração para decimal antes de efetuarem a adição ou subtração do segmento. Então vejo que para a construção geométrica as participantes preferem a representação fracionária, enquanto que para realizar operações elas preferem a representação decimal.

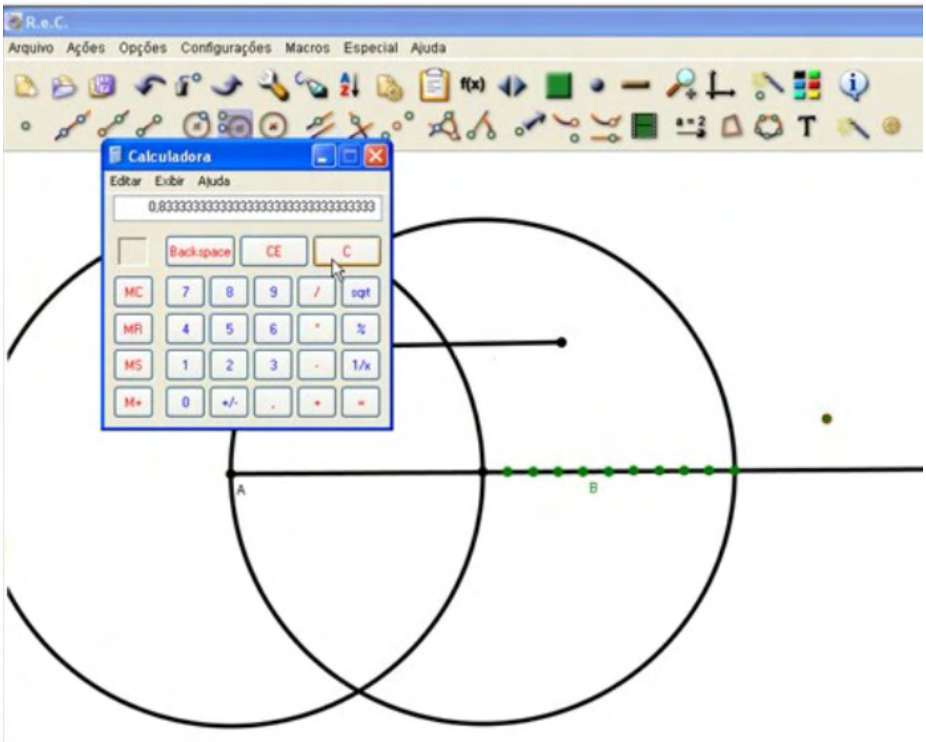
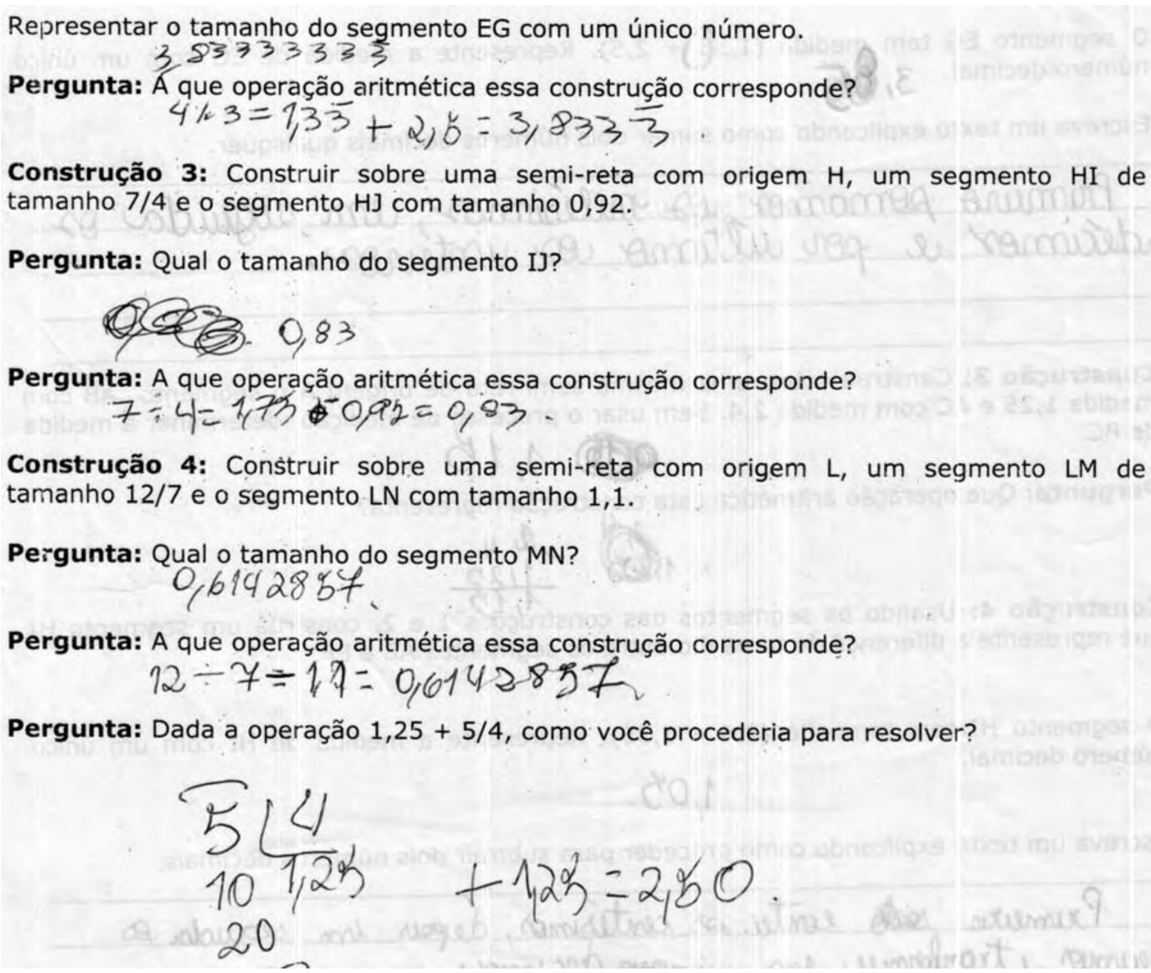


Figura 83: Uso da calculadora para converter frações



Representar o tamanho do segmento EG com um único número.

3,8333333

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

4÷3=1,33 + 2,5 = 3,8333

Construção 3: Construir sobre uma semi-reta com origem H, um segmento HI de tamanho 7/4 e o segmento HJ com tamanho 0,92.

Pergunta: Qual o tamanho do segmento IJ?

0,83

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

7÷4=1,75 − 0,92 = 0,83

Construção 4: Construir sobre uma semi-reta com origem L, um segmento LM de tamanho 12/7 e o segmento LN com tamanho 1,1.

Pergunta: Qual o tamanho do segmento MN?

0,6142857.

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

12 ÷ 7 = 1,7 = 0,6142857

Pergunta: Dada a operação 1,25 + 5/4, como você procederia para resolver?

5 |4
10 1,25 + 1,25 = 2,50.
20

Figura 84: Atividade 17 - grupo 1

5.4.2 Explorando a Representação Decimal – Grupo 2

O desenvolvimento das atividades pelo grupo 2 se deu de forma semelhante ao grupo 1, então irei apresentar apenas alguns pontos que refletem o pensamento das alunas.

Ao iniciar a atividade 14 com o grupo 2 também senti a necessidade de rever o processo de medição, pois as alunas expressaram que não se lembravam do processo com certeza e tinham dúvidas sobre como construir o segmento 2,453. Feita essa revisão elas iniciaram a construção do segmento 2,453. Primeiro marcaram na semi-reta duas unidades e dividiram a segunda unidade em dez. As alunas ficam inseguras sobre como proceder e quais intervalos dividir. Minhas orientações foram fundamentais para que conseguissem construir o segmento, pois sempre mudavam de opinião e não seguiram um procedimento único.

Depois de marcarem duas unidades, dividiram a primeira em dez, então Beatriz percebeu que teriam que marcar 4 décimos após as duas unidades. Nesse momento a aluna sabia o que deveria fazer, mas não tinha certeza de como fazer, então orientei que utilizasse o compasso e marcasse 4 décimos, reproduzindo-os após o 2 (Figura 85).

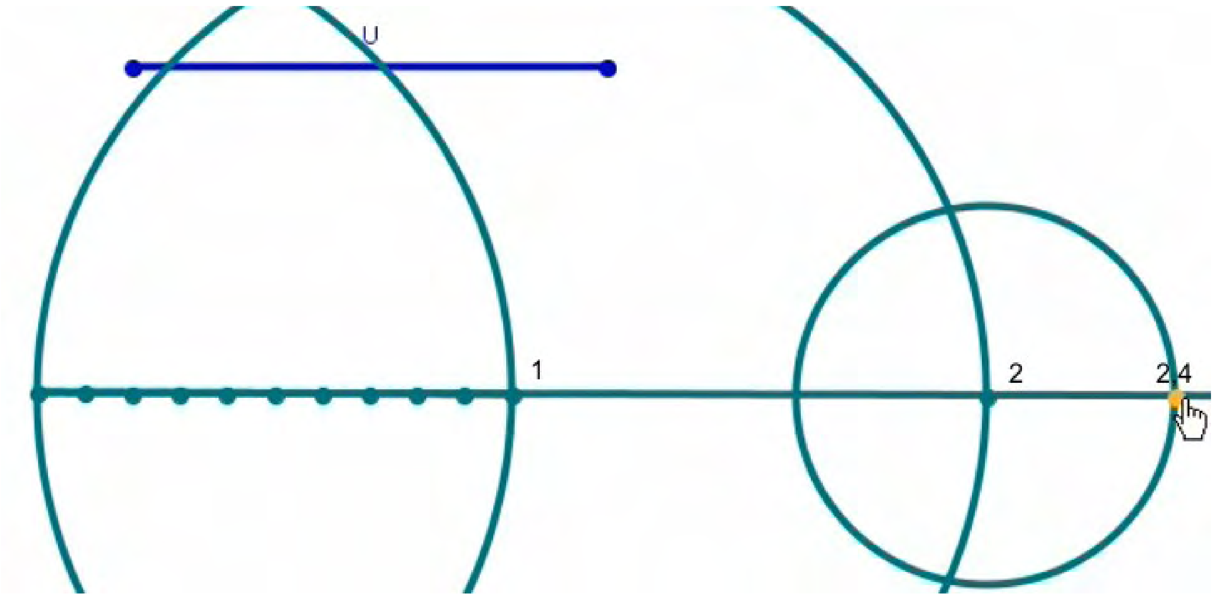


Figura 85: Segmento 2,4

Para marcar o centésimo 5 as alunas efetuam outro procedimento. Primeiro dividiram o décimo em dez e depois reproduziram o centésimo cinco vezes após o 2,4, obtendo o 2,45

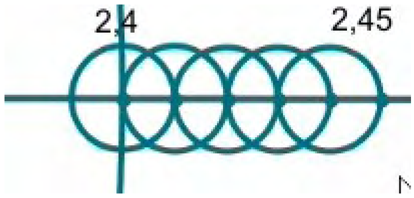


Figura 86: Final do Segmento 2,45

Para a conclusão da construção fizeram o mesmo procedimento e concluíram a construção obtendo o segmento 2,453. Ao reduzir a imagem para o tamanho inicial percebem que as construções feitas (Figura 86) se fundem em praticamente um ponto (Figura 87). Chamei a atenção para o fato de terem realizado procedimentos diferentes mas que todos estavam corretos, então pedi que conversassem e respondessem a pergunta da atividade sobre como tinham realizado a construção.

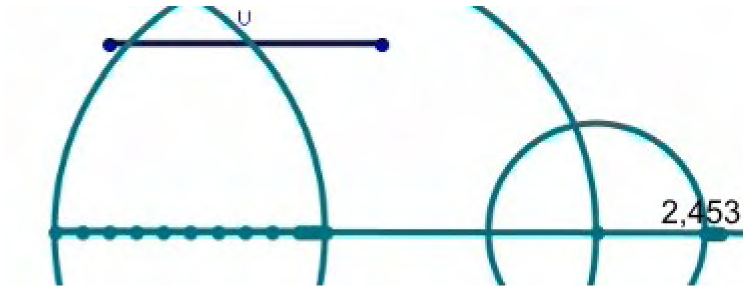
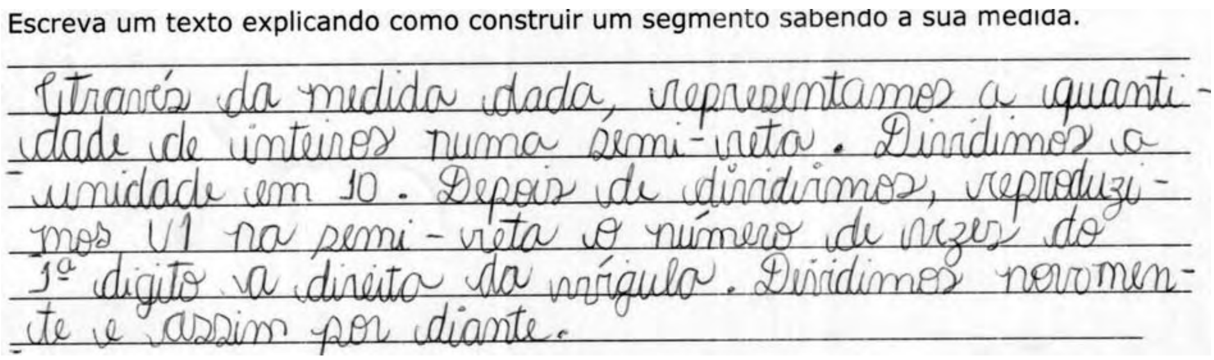


Figura 87: Segmento 2,453

Ao procederem essa discussão organizaram os procedimentos tomados e compreenderam a construção que realizaram. A explicação que escreveram (Figura 88) revela como ocorreu esse entendimento.


Escreva um texto explicando como construir um segmento sabendo a sua medida.

Através da medida dada, representamos a quanti-
dade de inteiros numa semi-reta. Dividimos a
unidade em 10. Depois de dividirmos, reproduzi-
mos U1 na semi-reta o número de vezes do
1º digito a direita da vírgula. Dividimos novamen-
te e assim por diante.

Figura 88: texto explicativo do processo inverso - do Grupo 2

As participantes também confundiram a leitura das representações fracionária e decimal, ao lerem 1,2 como um meio.

Atividade 14 – Processo Inverso – Grupo 1 - 14-08-2008 – Participantes: Fabíola, Laura e Beatriz.

39:43 - 40:00

LAURA: 1 meio.

PROFESSOR: Não é um meio é?

LAURA: 1,2 1,18 1,215 é 1,2

As alunas não tiveram dificuldades em representar os números decimais na mesma semi-reta e também não tiveram problemas em verificar a ordenação dos segmentos, pois observaram a representação geométrica. A Figura 89 mostra a representação dos números decimais produzida pelo grupo 1.

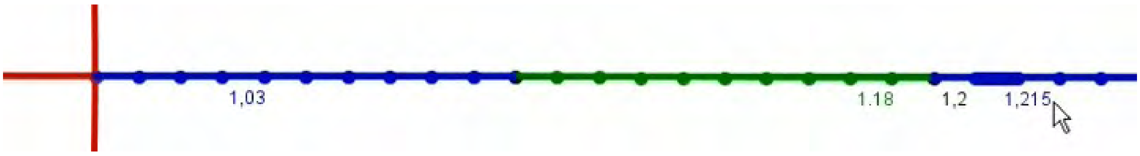
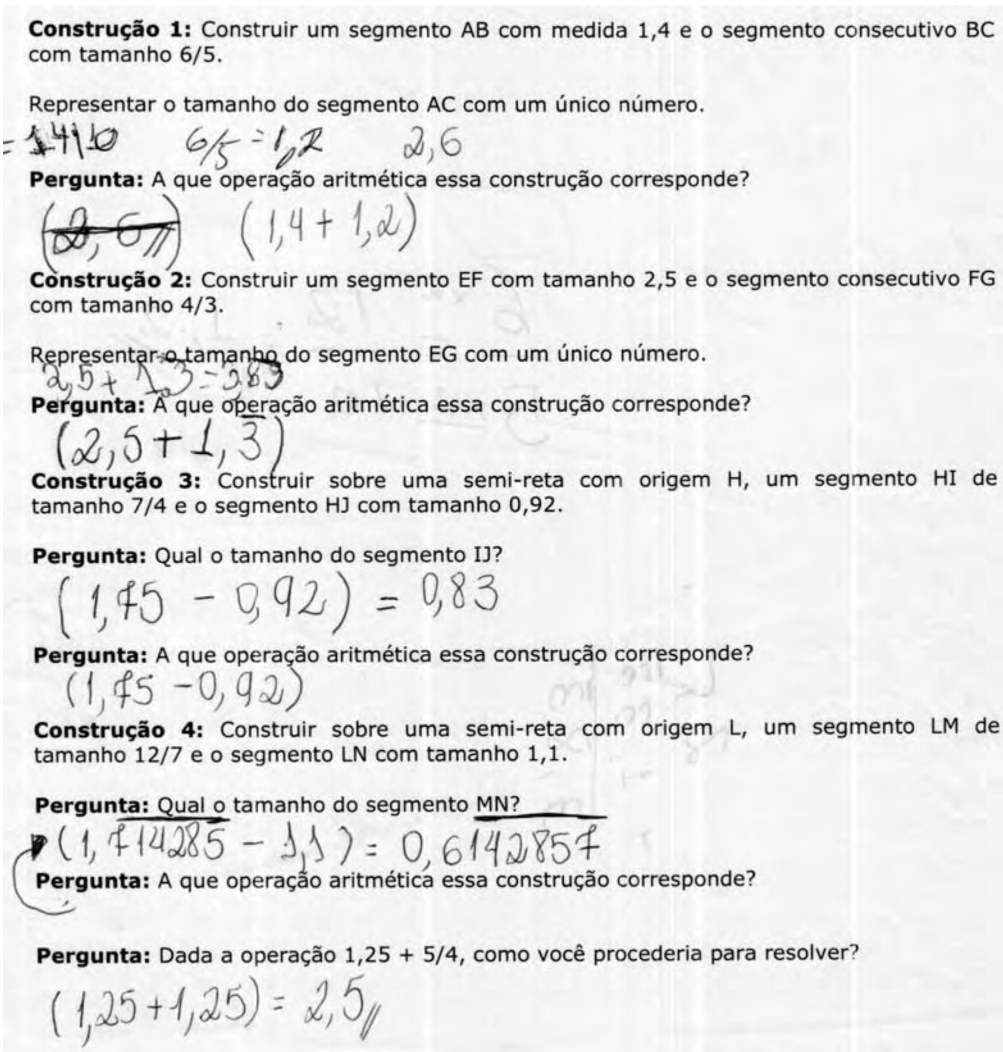


Figura 89: Representação dos decimais na semi-reta.

A atividade 17 evidencia a escolha das participantes pela representação decimal. Ao observar as respostas das perguntas da atividade vê-se que as alunas utilizaram a representação decimal.



Construção 1: Construir um segmento AB com medida 1,4 e o segmento consecutivo BC com tamanho 6/5.

Representar o tamanho do segmento AC com um único número.

= 1,4 ~~10~~ 6/5 = 1,2 2,6

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

~~(2,6)~~ (1,4 + 1,2)

Construção 2: Construir um segmento EF com tamanho 2,5 e o segmento consecutivo FG com tamanho 4/3.

Representar o tamanho do segmento EG com um único número.

2,5 + 1,3 = 3,83

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

(2,5 + 1,3)

Construção 3: Construir sobre uma semi-reta com origem H, um segmento HI de tamanho 7/4 e o segmento HJ com tamanho 0,92.

Pergunta: Qual o tamanho do segmento IJ?

(1,75 − 0,92) = 0,83

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

(1,75 − 0,92)

Construção 4: Construir sobre uma semi-reta com origem L, um segmento LM de tamanho 12/7 e o segmento LN com tamanho 1,1.

Pergunta: Qual o tamanho do segmento MN?

(1,714285 − 1,1) = 0,6142857

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

Pergunta: Dada a operação 1,25 + 5/4, como você procederia para resolver?

(1,25 + 1,25) = 2,5

Figura 90: Respostas da atividade 17 - Grupo 2

A fração foi usada apenas para a construção da representação (Figura 91). Essa foi realizada sem dificuldades, demonstrando que as alunas dominam a representação de frações e decimais na semi-reta, porém ao realizarem a conversão entre frações e decimais continuam afirmando que 1,4 é 1/4 e que 6/5 é 6,5.

Figura 91: 1,4 + 6/5

Tendo em vista essa dificuldade converso mais uma vez com as alunas sobre o significado do decimal 1,4 e da fração 1/4, demonstrando que são conceitos diferentes e que portanto não podem representar o mesmo segmento. Mostrei que o decimal 1,4 representa 14 partes de 10 e portanto a fração 14/10.

Da mesma forma foi conversado sobre a diferença entre 6/5 e 6,5. Reforcei que a fração 6/5 pode ser escrita como 12/10 e em decimal 1,2. Aparentemente as alunas se lembraram das atividades anteriores, e não cometeram mais esse erro durante a atividade.

Para efetuar a operação 1,4 + 6/5, Laura afirmou que para construir a fração é mais fácil, mas para operar é melhor a decimal, então as alunas optam por utilizar os decimais para as operações, como ficou registrado na Figura 90.

5.4.3 Considerações sobre o episódio

A atividade que introduz o processo inverso não foi uma atividade guiada, como aconteceu com o processo de medição. As alunas realizaram a construção da maneira que quiseram, com algumas orientações do professor. O fato de conseguirem realizar essa construção diversas vezes indica que a construção aberta, sem o passo-a-passo foi mais proveitosa para as participantes, no sentido de compreenderem o que estavam fazendo. Ao contrário da medição de segmentos, no qual a construção guiada não foi suficiente para que as participantes entendessem o processo, sendo necessária a revisão e realização do processo de medição por várias vezes, inclusive antes da atividade 14.

O uso do processo inverso permitiu as participantes explorar mais a representação decimal, visualizando a ordenação dos números na semi-reta e a realização das operações.

No processo inverso realizado pelo grupo 1 a ampliação e redução da imagem proporcionou que as alunas visualizassem a diferença entre às unidades. Quando ampliavam a construção estavam trabalhando em unidades muito pequenas e ao retornarem para ao tamanho normal viam que a construção realizada se tornava praticamente um ponto.

Acredito que os erros de conversão apresentados por ambos os grupos são respostas impulsivas, no sentido de ser a primeira resposta que vem a mente, pois após dialogar sobre o erro elas efetuaram as conversões corretamente.

O uso da calculadora na exploração das dízimas permitiu que as alunas explorassem bastante os denominadores que geram dízimas. A calculadora também fez com que as participantes escolhessem os números decimais para efetuar as operações. Mesmo quando tinham dízimas elas utilizaram a fração apenas para construir o segmento e converteram em decimais para as operações.

Note que na construção e representação das frações e decimais na reta as participantes afirmaram que as frações eram mais significativas. Agora, quando tiveram a chance de escolher a representação a ser utilizada escolheram a decimal, pela facilidade do cálculo.

Apresento no próximo capítulo as considerações finais dessa análise, visando tecer um quadro geral dos resultados da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa evidenciei resultados de outros trabalhos sobre a importância da medição de grandezas para o ensino e aprendizagem de números racionais. Também foi feita uma revisão de alguns livros didáticos utilizados ao longo do séc. XX e coleções atuais, mostrando que a medição de grandezas era muito utilizada no estudo das frações, mas com as reformas educacionais passou-se a uma maior ênfase em outros subconstrutos (parte/todo, quociente, razão, operador). A medição de grandezas como origem histórica das frações também confirma a importância desse subconstruto.

Partindo desses resultados, e explorando as possibilidades de experimentação e visualização proporcionada por um *software* de geometria dinâmica, foram criadas atividades focando a exploração das múltiplas representações dos números racionais (fracionária, decimal, figural,...), utilizando a medição de segmentos.

Baseado na metodologia de experimento de ensino, as atividades foram realizadas em encontros com grupos de estudantes de 6ª série/7º ano do ensino fundamental. Ocorreram 17 encontros com cada grupo, durante sete meses. Nessas atividades os estudantes exploraram a representação da medida de segmentos por frações e decimais, operações de adição e subtração em ambas as representações, dízimas periódicas e a conversão e coordenação entre as representações.

Utilizando os registros coletados nos encontros foram compostos quatro episódios, que visam trazer luz à pergunta de pesquisa, mostrando como ocorreram as discussões, construções e resolução dos problemas das atividades. A análise desses episódios levanta indícios dos conhecimentos e compreensões sobre os números racionais adquiridos com as experimentações realizadas.

São esses significados construídos e compreensões que busco destacar nessas considerações, objetivando responder a pergunta diretriz:

> ***Como a exploração de frações como medida e o processo de medição de segmentos, explorados via software de geometria dinâmica, contribui para o entendimento dos números racionais em suas representações múltiplas?***

Como foi visto nas pesquisas de Bright *et al.* (1998) e Wong e Evans (2008) o trabalho com a reta numérica não é simples, mas é fundamental pela coordenação entre as representações que ela proporciona. Morris (2000) considera sobre a necessidade de um papel instrucional do professor ao trabalhar com a medição de grandezas, no sentido de instruir e auxiliar nas tarefas propostas, mas do que em outras atividades.

Na presente pesquisa também ficou evidente a necessidade da participação mais efetiva do professor, auxiliando os participantes a concluírem suas idéias e orientando-os nas construções e representações. As participantes apresentaram dificuldades em realizar construções e comparações, sendo sempre necessária a intervenção do professor para concluírem as atividades.

Para as estudantes a seqüência de atividades foi trabalhosa, em especial o processo de medição de segmentos. Porém, os indícios de contribuições à aprendizagem, justificam essa exploração. Destaco as seguintes contribuições:

1º - A coordenação entre as representações fracionária, decimal e figural

Não é possível afirmar que os alunos compreenderam as conversões diretas entre as representações, principalmente da fracionária para a decimal. Ao serem abordadas, as alunas de imediato respondiam, por exemplo, 3/4 = 3,4, mas quando questionadas conseguiam aplicar a regra de conversão. Da mesma forma as representações das frações e decimais (simbólica) na semi-reta (figural) foram realizadas corretamente, mas também ocorreram casos em que confundiram as construções.

Nesse sentido acredito que o longo período em que as atividades foram desenvolvidas prejudicou esse entendimento. Os participantes muitas vezes afirmaram que se “esqueceram” como fazer as construções.

O modo como foram representadas as frações, na horizontal, também confundiu as participantes, exigindo uma maior atenção das mesmas, como no caso da aluna Gabriela que leu 1,2 como “um meio”.

Mesmo com esses erros de conversão, a representação em segmentos contribuiu para que as participantes avaliassem o erro[39], pois mesmo afirmando que 3/4 era 3,4, através da medição a aluna visualizou que 3/4 é 0,75. A experimentação realizada e a visualização ajudaram a corrigir esse aprendizado incorreto.

2º - **Compreensão das representações decimais infinitas, periódicas e não periódicas. A precisão das representações construídas.**

---

[39] Ver na subseção 5.3.1 a transcrição da atividade 13 - grupo 2 – 50:50-53:35

A periodicidade das dízimas periódicas foi obtida ao medir segmentos fracionários. A ampliação do desenho permitiu a visualização das diferenças entre as unidades, evidenciando a estrutura do sistema posicional. A ampliação também permitiu a realização do processo certo número de vezes. As alunas puderam visualizar que a medida encontrada não era exata, pois o ponto final do segmento e o ponto da medição não coincidiam. Também perceberam que estavam trabalhando em uma escala microscópica, dessa forma lidando e experimentando alguns aspectos sobre a densidade da reta.

A exatidão nas construções e a possibilidade de ampliar a imagem tanto quanto se queira, explicita que, não obtendo um resultado exato, o processo de medição sempre pode ser repetido mais uma vez.

Ao aplicarem a medição num segmento qualquer, não foi possível determinar o período. Isso não permite concluir que o segmento tem medida irracional (incomensurável), pois podem existir períodos muito grandes[40]. Mesmo assim as aprendizes entenderam que sempre podiam repetir o processo mais uma vez e que a medida encontrada era uma aproximação.

A oportunidade de repetir o processo tanto quanto se queira se mostrou importante para a compreensão dos decimais infinitos (dízimas). Tendo em vista que a partir da quinta ou sexta repetição do processo as participantes se convenceram de que os resultados seriam aproximados. Falas como "*nunca vai chegar*" ou "*sempre vai repetir*"[41] indicam que tiveram esse entendimento.

Note que apenas o repetição do processo de medição também não garante que na próxima etapa os resultados terão a mesma periodicidade, como ocorrido no episódio 4, subseção 5.4.1, mas ao confrontarem o processo com a divisão na chave (algoritmo da divisão) e os resultados na calculadora, as alunas perceberam que eram processos equivalentes, pois os resultados eram idênticos.

A utilização da ferramenta zoom e dos conceitos utilizados nessa pesquisa podem ser aplicados na exploração da irracionalidade. A construção e medição de segmentos incomensuráveis (como a diagonal do quadrado de lado 1), podem evidenciar a irracionalidade e propiciar discussões sobre ela.

---

[40] Por exemplo: 1234/4321 = 0,2855820411941680166628095348299...
[41] Ver atividade 15 grupo 1 trecho 24:20 - 27:00, na subseção 5.4.1

3º – Utilização concomitante das representações

As alunas consideraram as frações mais significativas principalmente ao construir os segmentos. Por outro lado demonstraram preferência pela representação decimal ao realizar os cálculos. No final da seqüência utilizaram a calculadora para efetuá-los. Da história destaquei que as frações surgiram naturalmente das necessidades de representação em diferentes culturas, enquanto os decimais têm sua origem nas necessidades de cálculo. A pesquisa também evidenciou que as participantes vêem as frações como mais significativas, principalmente ao associar o sistema de representação simbólica com o figural.

Por outro lado os decimais evidenciam a densidade da reta e no caso da adição e subtração apresentam um algoritmo de cálculo "mais fácil", sendo preferência das participantes nesse tipo de operação. O uso de calculadoras também favorece a representação decimal.

Dessa evidência concluo que as frações não devem ser relegadas no currículo, pelo significado que trazem aos alunos. Também devem ser exploradas juntamente com as representações decimal e figural. Nesse caso a utilização de segmentos. As diferenças nas construções das representações na semi-reta evidenciam a importância das frações, como uma representação exata e mais simples de ser obtida quando comparada com a representação decimal.

Nessa pesquisa, as experimentações realizadas através da informática ajudaram a mostrar essa importância das frações, evidenciando que, dependendo da situação, as frações podem ser mais significativas que a representação decimal.

4º – A visualização geométrica das operações de adição e subtração

Outro aspecto mostrado pela pesquisa foi a possibilidade de explorar as operações de adição e subtração geometricamente, sem conhecer o resultado aritmético. Tanto na representação fracionária e decimal, esse tipo de exploração foi proveitosa para as participantes, pois possibilitou que confrontassem o resultados aritméticos com os resultados geométricos, verificando e corrigindo os erros cometidos. A visualização geométrica da operação ajudou as participantes a entender os algoritmos de cálculo, como no caso da Gabriela[42], que utilizou o

[42] Ver subseção 5.2.5

algoritmo chegando a um resultado incorreto e após a experimentação conseguiu utilizar o algoritmo corretamente.

A confrontação dos algoritmos de cálculo com as construções geométricas revelou a importância da utilização das representações das operações concomitantemente, no sentido de que da mesma maneira que é importante trabalhar com as representações dos números, a visualização geométrica de uma operação aritmética ajuda a compreender o algoritmo da operação.

Dessa maneira acredito que explorações geométricas das operações aritméticas, como as realizadas nesse trabalho, podem contribuir para o entendimento das mesmas, inclusive corrigindo falhas de aprendizagem.

5º – O entendimento da decomposição em fatores primos

Outro aspecto ressaltado pelas atividades foi a decomposição em fatores primos, como evidenciado no 1º episódio[43]. Mesmo não se tratando do foco principal da atividade, a exploração realizada ajudou as participantes a entender esse conceito, o qual elas conheciam, mas não utilizavam. A atividade evidenciou a importância de compor fatores, evitando a realização de construções trabalhosas.

Dessa maneira as experimentações realizadas com o auxílio das ferramentas tecnológicas também beneficiaram a compreensão desse conceito matemático.

Esses resultados indicam que as explorações das frações como medidas e o processo de medição de segmentos contribuíram ao entendimento dos números racionais e na aquisição de novos significados.

Reflexões sobre as atividades desenvolvidas

Além dos indícios de contribuições mostrados, também refleti sobre as atividades utilizadas. Sobre elas, vejo que devem ser revistas frente à análise dos resultados. Percebe-se que as atividades estão elaboradas de forma a atingir os objetivos, mas algumas devem ser aprimoradas, visando facilitar a compreensão dos alunos. O caminho traçado pelas atividades estava dentro do contexto em que foram aplicadas, sendo que podem servir para outros casos, mas devem ser adaptadas a cada realidade.

---

[43] Seção 5.1

Atividades que permitiram aos aprendizes escolher o caminho a ser seguido se mostraram mais proveitosas e compreendidas em relação às atividades que utilizaram construções guiadas. Nesse sentido fica reforçada a característica de que o trabalho com as mídias informáticas deve favorecer a experimentação para uma posterior teorização. Por outro lado, no momento da concepção das atividades acreditei que essa seria a melhor escolha.Desse modo faz-se necessário refletir sobre como esse caminho pode ser traçado.

Em atividades construcionistas, o aprendiz é engajado em construir algo significativo para ele. As atividades desenvolvidas não tinham essa característica. Por esse motivo percebi que as participantes se engajavam durante os encontros, mas não pensavam sobre o que foi realizado entre os encontros. Isso foi notado ao ouvir falas como: “*Não lembro*” ou “*A gente já esqueceu tudo*”, em que mostravam que não recordavam mais as construções realizadas em encontros anteriores. Portanto, vejo que as atividades devem adotar a característica de envolver os alunos, de modo que se engajem e pensem sobre o trabalho realizado, também entre os encontros.

Outra característica evidenciada pelo trabalho realizado foi o modo como as participantes realizaram as construções, muitas vezes despreocupadas com a “poluição” visual. Por esse motivo as indicações do professor para que “nomeassem os pontos importantes da construção e ocultassem outros que não seriam utilizados, foi importante para a compreensão das construções. Cabe ressaltar também que primeiramente as participantes sentiram a necessidade de “melhorar” a construção, de modo a torná-la mais compreensível. Dessa maneira elas entenderam essa necessidade e a utilizaram em outras construções.

Sobre as explorações realizadas na pesquisa e os tratamentos usuais para a representação na reta

A presente pesquisa evidenciou que ao explorar as representações na reta as participantes puderam visualizar a densidade da reta e a possibilidade de ampliar a reta tanto quanto se queira. Puderam entender o significado da representação decimal exata, pois os pontos da medição e do segmento se sobrepunham e mesmo que ampliasse a imagem os pontos se mantinham sobrepostos. Ao contrário, nas dízimas sempre que ampliavam viam que tinha um espaço entre os dois pontos.

Ao utilizar a semi-reta também ficou claro que deveriam definir primeiramente a unidade padrão, de modo que qualquer representação na reta deve ser associada a uma representação simbólica.

Esse tipo de exploração vem a contribuir com os tratamentos usuais para a representação na reta, como foram mostrados na seção 3.2, evidenciando e mostrando efetivamente as propriedades e importância da reta como sistema de representação. Entendo que exemplos intuitivos podem não ser suficientes para a compreensão desses conhecimentos, pois a intuição depende de cada indivíduo. Por outro lado as explorações e visualizações apresentadas na pesquisa podem favorecer essa intuição, pois proporcionam a construção de imagens mentais.

Pelas evidências de contribuições à aprendizagem encontradas durante a coleta de dados, acredito que esse tipo de abordagem deva ser utilizada em sala de aula, tendo em vista também que o tempo utilizado em todo o trabalho foi de vinte aulas aproximadamente, não excedendo o tempo previsto para desenvolver esse conteúdo no plano de curso.

Nesse tempo também foram consideradas as aulas iniciais, que visavam que os alunos desenvolvessem uma maior experiência com a mídia informática, nesse sentido faz-se necessário mais experiência da mídia informática como ferramenta educacional.

As compreensões adquiridas com as experimentações realizadas podem contribuir inclusive para uma redução no tempo despendido em aulas para explicar conceitos como racionalidade e irracionalidade, densidade dos racionais, etc.

O computador como ferramenta educacional

O pouco uso dos computadores nas escolas se refletiu nessa pesquisa, em que se fez necessária uma familiarização dos participantes com o *software* educacional para então realizar as explorações desejadas. Também percebi que as participantes usavam os computadores apenas como entretenimento, para acessar redes sociais e comunicadores instantâneos.

Dentro desse contexto acredito que a incorporação das mídias informáticas na prática escolar, como uma ferramenta educacional e não simplesmente como entretenimento ou ferramenta para a realização de pesquisas escolares, implicará em que explorações como as realizadas nesse trabalho se tornarão corriqueiras, pois os estudantes estarão familiarizados com a utilização da mídia e com suas ferramentas.

Penso que em todas as disciplinas deveria ocorrer a utilização das mídias, de diferentes maneiras. O estudo aqui apresentado seria facilitado se os aprendizes tivessem uma experiência anterior no estudo de geometria em *software* de geometria dinâmica.

Em consonância com Borba e Penteado (2001), ficou evidenciado nessa pesquisa que a tecnologia informática favorece a experimentação, de modo a ordem no ensino dos números racionais passou a ser investigação e então teorização.

Continuidade da pesquisa

A pesquisa realizada evidenciou diversos aspectos sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais, mostrando indícios de que a abordagem utilizada contribuiu para com o entendimento desses números. Por outro lado também foi constatado que as atividades podem ser aperfeiçoadas e reorganizadas. A exploração da medição com outras faixas de ensino, explorando outros contextos dos números também pode ser realizada. Uma revisão nas atividades e a aplicação em diferentes contextos podem vir a contribuir com os resultados obtidos. Por esses motivos vejo que a pesquisa deve ser continuada e aprofundada

Foi minha escolha restringir as explorações para os números racionais. Refletindo sobre o trabalho vejo que pode também ser feito em outra ordem, focando os números reais e evidenciando que os racionais são um caso particular desse conjunto. Essa abordagem pode ser utilizada em outras pesquisas.

Acredito que essas explorações também podem ser discutidas com professores, pois podem ampliar as compreensões dos mesmos sobre os números, da mesma maneira que ampliaram minhas concepções.

Aspectos metodológicos da pesquisa e outras considerações sobre os dados não demonstrados nesse trabalho devem ser discutidos em artigos.

REFERÊNCIAS

ALVEZ-MAZZOTTI, A.J. O Método nas Ciências Sociais in: ALVEZ-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

AZEVEDO, J.L.A. **Trabalhando Conceitos Matemáticos com Tecnologias Informáticas por Meio da Elaboração de Projetos de Construção Civil.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2008

BARONI, R.L.S.; NASCIMENTO, V.M. Um Tratamento, Via Medição, Para os Números Reais. **São Paulo: Sbhmat, 2005. (Coleção História Da Matemática Para Professores).**

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T; SILVER E. Rational Number Concepts in R. Lesh & M. Landau (Eds), **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,** (p. 91-125). New York: Academic Press, 1983.

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2003

BETHLEM, A. **Matemática Moderna,** primeiro volume para a primeira série ginasial, São Paulo: São Paulo Editora, 1971

BEZERRA, J. B. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de Suas Representações:** Uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 2001.

BIGODE, A.J.L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2ª ed. atual, Obra em 4 v. Manual do professor, 2006. (volume de 5ª série/6ºano)

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação***:* uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1991.

BONOMI, M. C. **Matemática: objetos e representações.** Seminários de Estudo em Epistemologia e Didática (SEED) 1º semestre de 2007 Disponível em: <http://www.educarede.org.br/educa/img_conteudo/File/CV_132//2007-05-25-Objetos_e_suas_representacoes.doc> Acesso em: 20 Jan. 2009.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**, Autêntica Editora, 2004

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M. **Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking:** Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization. USA: Springer, 2005. (Mathematics Education Library).

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Guia de livros didáticos** PNLD 2008: Matemática / Ministério da Educação – Brasília: MEC, 2007

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática; Ensino de quinta à oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998

BRIGHT, G., BEHR, M., POST, T., & WACHSMUTH, I.. Identifying fractions on number lines. **Journal for Research in Mathematics Education.**, 19(3), 215-232, 1988. Disponível em: http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/88_3.html Acesso em: 14/02/2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: 1ª edição, 1951.

CASTRUCCI, B; LIMA FILHO, G. S. **Matemática para primeira série ginasial.** São Paulo: Editora Paulo de Azevedo, 1961.

CATTO, G. G. **Registro de Representação e o Número Racional: Uma abordagem nos livros didáticos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 2000.

DANTE, L.R. **Tudo é matemática,** Livro do professor, obra em quatro volumes, São Paulo: Ática, 2005

DAVYDOV, V. V. Logical and Psychological Problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject, p. 55-108. In: **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics.** Vol. VII, STEFFE, L.P. (Ed.), University of Chicago, 1975a.

DAVYDOV, V. V. The Psychological Characteristics of the “Prenumerical” Period of Mathematics Instruction, p. 109-206. In: **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics.** Vol. VII, STEFFE, L.P. (Ed.), University of Chicago, 1975b.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática** in: Aprendizagem Em Matemática: Registros de Representação Semiótica, Papirus Editora, São Paulo, 2003

FOUCHÉ, A. **A pedagogia das matemáticas**. São Paulo: Ed. Nacional, 1957

GÁLEN, F.; FEIJS, E.; FIGUEIREDO, N.; GRAVEMEIJER, K.; HERPEN, E.; KEIJZER, R. **Fractions, Percentages, Decimals and Proportions**. A Learning Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6. The Netherlands: Sense Publishers, 2008

GOLDENBERG, E. P. "Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II). **Revista Educação e Matemática**, nº 48, Portugal, 1998? Disponível em:<http://www.apm.pt/apm/revista/educ48/educ48_6.htm> – Acesso em: 15. Jan. 2009.

GOLDENBERG, M. **A arte de Pesquisar**. como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

IFRAH, G.. **Os números:** história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 1989. 366 p.

KOMOREK, M. DUIT, R. The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. In: **International Journal of Science Education,** vol. 26 nº 5, p. 619-633, 2004

LAMPARELLI, L. C.; CANTON, A. W. P.; MORETTIN, P. A.; INDIANI. D. F. **Matemática para o Ginásio,** v.1. São Paulo: EDART, 1969.

LEBESGUE, H. **Measure and the Integral**, Holden-Day, Inc., 1966

LESH, R., POST, T., & BEHR, M. Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, (Ed.), **Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics** (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1987. Disponível em: http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/87_5.html Acesso em: 14/02/2010.

LIMA , C.W. **Sobre a Medição de Segmentos**. Monografia de Especialização, Rio Claro: UNESP, 2007 (Não publicado)

LIMA, C.W., MALTEMPI, M.V. **Possibilidades para o Ensino de Frações e Decimais no Século XXI.** In: VI Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM). Puerto Montt, Chile, 04 a 09 de janeiro 2009.

MACHADO, Nílson José. Dos conjuntos às alegorias. **Estud. av.**, São Paulo, v. 8, n. 21, Aug. 1994 . Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-0141994000200010&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 20 Jan. 2009. doi: 10.1590/S0103-40141994000200010.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática In: BICUDO, M. A. V.; M. C. BORBA (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 264-282, 2004.

MALTEMPI, M.V. – **Novas Tecnologias e construção do conhecimento: Reflexões e perspectivas.** In: V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM). Porto, Portugal, 17 a 22 de julho 2005

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática no séc. XX**. Editora Atual, São Paulo, 1998.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. **Números Racionais: Conhecimentos da Formação Inicial e Prática Docente na Escola Básica**. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 21, p.1-19. 2004

MORRIS, A. K. A teaching experiment: Introducing fourthgraders to fractions from the viewpoint of measuring quantities using Davydov's Mathematics curriculum. **Focus on Learning Problems in Mathematicss**, *22*, 32-83. 2000

PAPE, S. J.; BELL, C. V.; YETKIN, I. E. Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experimenti in a seventh-grade mathematics classroom, in: **Educational Studies in Mathematics** 53: p. 179-202, 2003.

PAPERT, S. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática**. Tradução: Sandra Costa, Porto Alegre: Artes Médicas, 1994

PAPERT, S. **Constructionism: a new opportunity for elementary science education**. Massachusetts Institute of Technology, The Epistemology and Learning Group. Proposta para a National Science Foundation, 1986.

PAPERT, S. **Logo: computadores e educação**. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985. Publicado originalmente sob o título de **Mindstorms: children, computers and powerful ideas.** New York: Basic Books, 1980.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: Uma proposta, uma investigação.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 2007

PÉREZ, J. C. **Números decimales. Por qué? Para qué?** Editorial Síntesis, Madrid, 1988

POST, T.; CRAMER, K.; LESH, M.; HAREL, G. Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In: T. Carpenter, E. F.; Harel, G. Designing instructionally relevant assessment reports. In: T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), **Research on the learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts.** Lawrence Eribaum and Associates, 1993.

RICHIT, A. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica:** Repensando a formação inicial docente em matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2005.

ROMANATTO, M.C. **Número Racional: Relações Necessárias à sua compreensão**. Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, 1997

ROSA, M. **Role Playing Game Eletrônico: uma tecnologia lúdica para aprender e ensinar matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2004.

ROTH, W-M. **Auto/Biography and Auto/Ethnography:** Praxis of Research Method, Sense Publishers, 2005

ROXO, E. M. G.; **Lições de Arithmetica**, Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1928.

S.M.S.G. (*School Mathematics Study Group*) **Matemática Curso Ginasial** v.1, São Paulo: EDART, 1967.

SCUCUGLIA, R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com calculadoras gráficas.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 2006.

SILVA, M. J. F. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 1997.

STEFFE, L. The Constructivist Teaching Experiment: Illustrations and Implications, em: **Radical Constructivism in Mathematics Education**, A. J. BISHOP; H. BAUERSFELD; J. KILPATRICK; G. LEDER; S. TURNAU; G. VERGNAUD; ERNST VON GLASERSFELD. Springer Netherlands, 1991

STEFFE, L.P.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESHM R.; KELLY, A. E. (Ed.) **Research design in Mathematics and science education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307

VALENTE, J. A. **Diferentes Usos do Computador na Educação.** In: Valente, J. A. (Org.) Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação. Campinas: UNICAMP/NIED, 1993.

VALERA, A.C. **Uso Social e Escolar dos Números Racionais: Representação Fracionária e Decimal**. Dissertação (Mestrado em Educação), UNESP, Marília, 2003

WOERLE, N. H. **Números Racionais no Ensino Fundamental: Múltiplas Representações**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 1999.

WONG, M.; EVANS, D. Fractions as a Measure. **Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.** M. Goos, R. Brown, & K. Makar, (Eds), 2008. Disponível em http://www.merga.net.au/documents/RP722008.pdf último acesso: 12/02/2010.

APÊNDICE A – ATIVIDADES

ATIVIDADE 1

RÉGUA E COMPASSO - COMANDOS BÁSICOS

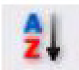
Nesta atividade serão explorados os comandos mais usados do programa. Experimente cada um deles. Tente compreender cada exercício, conversando com o professor sempre que tiver dúvidas. Não prossiga a resolução dos exercícios se tiver dúvidas.

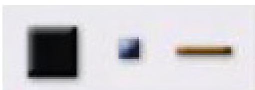
Os botões apresentados abaixo são as principais funções para desenharmos objetos geométricos. Comece Explorando cada um deles.

Passando o mouse sobre o ícone aparecerá o nome do objeto geométrico que ele desenha.

O primeiro é o comando ponto. Clicando na área de desenho você pode desenhar diversos pontos.
Experimente desenhar com os comandos reta, semi-reta e segmento. Em seguida responda:
1) Observando os desenhos, quais diferenças você pode notar entre os desenhos de uma reta, uma semi-reta e um segmento?

2)  Esses três comandos são usados para traçarmos círculos. Cada um tem uma característica de construção diferente. Explore os três comandos e veja as diferenças.

3) Para nomear os elementos do desenho automaticamente, basta clicar no ícone  e depois sobre os elementos a serem nomeados (pontos, retas, círculos). Nomeie alguns dos elementos que você desenhou.

4) Os ícones  permitem a modificação da cor, formato do ponto e espessura das linhas, respectivamente. Basta clicar sobre os ícones. <u>Experimente modificar essas opções e desenhar alguns objetos.</u>

5) Para eliminar algum objeto clique em  , em seguida sobre o objeto a ser apagado.

Para gravar seu desenho use  e dê um nome para ele na tela que se abrirá. Grave todas as suas construções.

Usando esses comandos faça um desenho usando a sua imaginação.

Dica: Sempre observe as mensagens que aparecem na parte inferior da tela, elas lhe ajudarão com as construções.

Faça um desenho com o Régua e Compasso, explorando os outros comandos.

ATIVIDADE 2 - CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Problema 1: Construir, partindo de um segmento dado, um triângulo com lados congruentes (de mesmo tamanho). Esse tipo de triângulo é chamado de triângulo eqüilátero.

Siga a seqüência de construção:

a) Construa um segmento AB, use a ferramenta  para nomear os pontos.

b) Usando o comando compasso  construa um círculo de raio AB e centro A.

c) da mesma maneira construa um círculo de raio AB e centro B.

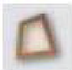
d) Marque os pontos da intersecção dos círculos (onde os círculos se cruzam). Nomeie-os de D e E.

e) Construa os segmentos AD e BD.

Pergunta 1: Os segmentos AB, BD e AD formam um triângulo?

Pergunta 2: Esse triângulo tem os lados de mesmo tamanho? Justifique.

Pergunta 3: Com o comando de movimentação de pontos . , movimente o ponto A. O triângulo continua sendo eqüilátero?

Dica: Use  para desenhar um triangulo com preenchimento.

Problema 2: A partir de um segmento AB, construir um quadrado com lados iguais a AB.

Dica: Use os comandos 

Pergunta 4: Quais as características de um quadrado?

Pergunta 5: Escreva resumidamente os passos realizados na construção.

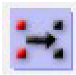
Pergunta 6: Realizada a construção, o que acontece se você movimentar os pontos A e B? o polígono continua a ser um quadrado?

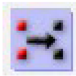
Observação: Uma construção geométrica deve conservar suas características mesmo que os pontos sejam movimentados.

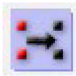
ATIVIDADE 3 - MACROS

No Régua e Compasso, podemos ensinar o programa a repetir as construções geométricas usando o comando macros.

a) Precisamos primeiro mostrar a construção para o computador. Para isso vamos usar a construção do quadrado.

b) Com a construção do quadrado terminada, clique 1 vez na ferramenta macro  o ícone mudará para , e aparecerá na parte de baixo da tela a mensagem: **Parâmetros de Macro: Escolha objetos!** Esse comando é para definir os objetos iniciais que definem a construção, nesse caso, para construirmos o quadrado partimos do segmento AB, portanto clique nos pontos A e B.

c) Clicando no ícone 1 vez, ele continuará com o mesmo formato mas a mensagemserá: **Alvo de Macro: Escolha objetos!** Nesse passo você deve escolher os objetos que devem aparecer no final da construção, nesse caso o quadrado ABCD. Portanto clique sobre o quadrado.

d) Clicando novamente no ícone , abrirá uma janela com uma caixa NOME, dê um nome para a macro, por exemplo, QUADRADO. Clique em OK. A macro está gravada e pronta para ser testada.

Observação: Se você não selecionar outro comando, o programa continuará gravando novas macros.

e) Para utilizar a macro clique em . Abrirá uma tela com os nomes das macros gravadas. Clique no nome da sua macro e em OK, agora basta indicar dois pontos para construir um quadrado. Se a Macro não desenhar um quadrado como desejado indica que teve algum erro no processo de criação, refaça os passos tentando identificar esse erro.

Exercício 1: Crie uma macro para construir um triângulo eqüilátero. Use o arquivo que você gravou anteriormente com a construção do triângulo eqüilátero.

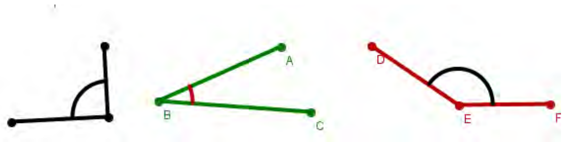
<u>Não se esqueça:</u> Antes de fechar o programa é necessário gravar um arquivo com as macros.
No menu macro, clique em guardar macros, selecione a macro para gravar, na próxima tela selecione a pasta na caixa de diretório e o nome da macro na caixa nome da macro. A macro será gravada na pasta selecionada.

Carregando macros: quando o R.e.C. é fechado todas as macros são apagadas, para usar as suas macros você vai precisar de carregá-las novamente. Para isso acesse no menu macro a opção carregar macro e selecione a macro que desejar.

ATIVIDADE 4 - ÂNGULOS

ÂNGULOS

Duas semi-retas com origem em um mesmo ponto A delimitam uma região chamada de ângulo (veja figura abaixo). O tamanho de um ângulo é determinada pela sua abertura.



O Ângulo formado por pontos D,E e F é chamado de DÊF, e o ponto E, o ponto em que as semi-retas tem origem, é chamado de vértice.

Os ângulos são medidos em graus. Uma volta completa tem 360º. O ângulo reto mede exatamente 90º. Ângulos com abertura menor que 90º são chamados de agudos e com abertura maior são chamados de obtusos.

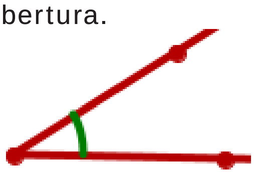
DESENHANDO E MEDINDO ÂNGULOS.

a) No R.e.C., podemos desenhar e medir ângulos, para isso, construa um ponto A. Partindo de A construa duas semi-retas

AB e AC .

b) Com o comando ângulo  marcamos o ângulo desejado. Para isso, clique em B, A e depois em C.

Aparecerá uma curva entre as duas semi-retas. Essa curva indica o ângulo de abertura.



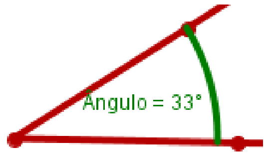
c) Para alterar as propriedades dos objetos vamos utilizar a tela de edição.

Ao clicar com o botão direito do mouse sobre qualquer objeto, se abrirá uma janela para edição, nessa janela é possível alterar cores, tamanho e nome, entre outras opções.

Na edição de um ângulo, podemos colocar um nome para ser exibido, para isso, preencha o campo nome e clique

no ícone . Em seguida no botão OK e veja o que aconteceu.

Clicando no ícone , aparecerá a medida do ângulo, no desenho.



Exercício 1:

a) Construa duas retas concorrentes (que se cruzam)

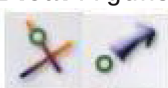
b) Quantos ângulos foram formados por essas retas?

c) Construa e nomeie cada um deles, exiba o nome e as medidas.

d) Construa mais duas retas e verifique quantos ângulos se formaram.

e) Classifique os ângulos em agudo, reto e obtuso.

Problema 1: A partir de uma semi-reta AB, construa um ângulo reto, com vértice A, de modo que, ao mover os pontos A e B, esse ângulo continue reto.
Dica: Alguns comandos necessários:



Importante: Quando duas retas formam um ângulo reto dizemos que elas são perpendiculares.

Problema 2: A partir de uma semi-reta qualquer, construa ângulos de tamanhos:
a) 30º b) 60º c) 112º d) 73º e) 190º
Dica: Explore o comando ângulo de

amplitude fixa .

ATIVIDADE 5 – DIVISÃO DE SEGMENTOS – múltiplos de 2

Pergunta 1: Você já tentou dividir coisas em partes iguais? Em caso afirmativo, o quê você tentou dividir? Em caso negativo pense em alguma situação em que você precise dividir em partes iguais. Escreva suas conclusões abaixo.

Muitas vezes fazemos isso intuitivamente, mas com a geometria podemos fazer as divisões com exatidão. Agora nós vamos estudar como dividir segmentos em partes iguais.

CONSTRUÇÃO 1: Divisão em duas partes

a) Dividir um segmento em duas partes iguais é encontrar o ponto M que está exatamente no meio do segmento.
Construa o segmento e nomeie os extremos de A e B.
Construa M de forma que o segmentos AM e MB tenham exatamente o mesmo tamanho.

b) Movimente os extremos do segmento e verifique o que acontece. O segmento AB continua dividido em duas partes iguais?

c) Grave uma macro para essa divisão.

CONSTRUÇÃO 2: Divisão em múltiplos de 2.

a) Se você sabe dividir um segmento em 2 partes, como você pode fazer para dividir em 4 partes?

b) O que acontece se você dividir cada uma das partes do segmento AB ao meio?

c) Que outras divisões podemos fazer usando a divisão em 2 partes?

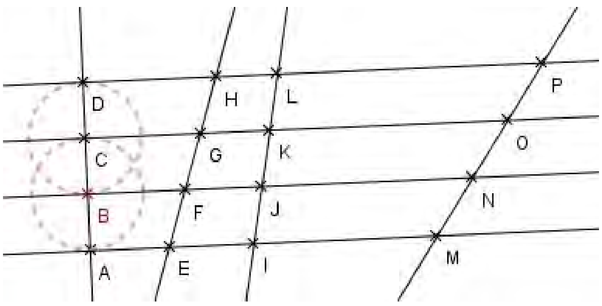
d) Produza macros para a divisão do segmento em 4, 8 e 16 partes.

ATIVIDADE 6 – DIVISÃO DE SEGMENTOS

UM POUCO DE HISTÓRIA: A descoberta de Tales
Tales de Mileto viveu na Grécia antiga, aproximadamente 2400 anos atrás. Ele é o primeiro matemático de que se tem notícia. Como comerciante viajou por todo o domínio do império grego, conhecendo o saber matemático dos egípcios e babilônios. A sua proeza mais conhecida é a de medir a altura da grande pirâmide comparando a sombra da pirâmide com a sombra de um bastão. Essa observação gerou o chamado teorema de tales, que afirma:

"Quando três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados numa das transversais são proporcionais aos determinados na outra."

Esse teorema e suas aplicações serão mais explorados nas series seguintes, porém, uma de suas aplicações é de que **"se as retas paralelas tem a mesma distância entre si, os segmentos determinados em qualquer reta transversal terão o mesmo tamanho (congruentes)."**



CARREGUE A CONSTRUÇÃO ATIVIDADE 6 que está gravada no computador. Nessa construção, verifique se os segmentos AB, BC e CD são congruentes (tem o mesmo tamanho).

Pergunta 1: Que outros segmentos também são congruentes na construção acima? Como você fez para verificar isto?

CONSTRUÇÃO 1: Objetivo: dividir um segmento em três partes iguais.
Vamos usar a idéia de Tales, usada para dividir o segmento em 3 partes. Tente realizar a construção com as suas idéias, caso tenha dificuldades, siga o passo a passo abaixo:

a) Primeiramente construa um segmento AB qualquer.

b) No extremo A do segmento construa uma reta que não contenha o segmento AB.

c) Nessa reta marque um ponto P_1 próximo de A, marque o ponto P_2 para que P_1P_2 seja congruente a AP_1 (use a ferramenta compasso para transferir o tamanho AP_1), repita esse procedimento para P_2P_3.

d) Desenhe o segmento P_3B.

e) Nos pontos P_2 e P_1 construa retas paralelas a P_3B.

f) Marque os pontos de intersecção dessas retas com o segmento AB e oculte o restante daconstrução. O segmento AB está dividido em 3 partes de mesmo tamanho. **(verifique!)**

Pergunta 2: O que acontece se tentarmos gravar uma macro para essa divisão? Por quê?

Pergunta 3: Podemos mudar algum passo da construção que possibilite a gravação da macro? Como?
Dica: Tente realizar a divisão novamente alterando o passo b. Ao invés de construir uma reta construa um ângulo de amplitude fixa BAP. Verifique se agora é possível gravar a macro.

Construção 2: Construa a divisão de um segmento em 5 partes e grave a macro para a repetição da construção.

Construção 3: Produza as construções e macros para as divisões em 7, 11 e 13 partes.

Pergunta 4: Os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são números primos. Até o momento gravamos macros para a divisão por esses números. Usando as macros já gravadas, como podemos fazer para dividir um segmento em 10 partes?

Pergunta 5: Usando as macros anteriores, responda como podemos dividir:

a) Um segmento em 6 partes.

b) Um segmento em 14 partes.

c) Um segmento em 21 partes.

d) Um segmento em 77 partes.

Pergunta 6 (Individual): Descubra uma divisão em um número de partes que possa ser obtida usando as macros já criadas, em seguida desafie seu colega a descobrir como fazer essa divisão. Descreva os procedimentos adotados.

ATIVIDADE 7

CONSTRUÇÃO 1: Construa um segmento qualquer, usando as macros gravadas divida o segmento em 3 partes.

CODIFICANDO AS PARTES

Assim uma parte do segmento que foi dividido em 3 partes é simbolizada por $\frac{1}{3}$ (lê-se um terço) que quer dizer 1 parte de 3.
Da mesma forma 2 partes juntas são simbolizadas por $\frac{2}{3}$ (dois terços) isto é, duas partes de três e três partes por $\frac{3}{3}$ (três terços) que significa que foram tomadas três partes de três, ou seja, o segmento inteiro.

Para codificarmos as partes de um segmento usamos

$$\frac{parte\ \ (quantidade\ de\ partes)}{todo\ \ \ (total\ de\ partes\ no\ segmento)}.$$

Ou, parte/todo.

Para representar as partes que cada ponto representa, abra a janela de edição clicando com o botão direito sobre o ponto.

Na janela de edição do ponto escreva na caixa nome a fração que o representa. Codificando cada ponto com as frações que eles correspondem.

ATIVIDADE 8 – COMPARANDO TAMANHOS

Desde a antiguidade a humanidade sentiu a necessidade de comparar os tamanhos das coisas, dessa forma classifica-las pelo tamanho.

Explorando:
a) Desenhe dois segmentos AB e CD quaisquer. Qual dos segmentos é maior?

b) Como você fez para dizer qual era maior?

c) Desenhe mais dois segmentos. Entre os quatro segmentos qual é o maior?

d) Crie um nome ou símbolo para cada segmento de tal forma que seja possível saber a posição na seqüência do menor segmento para o maior.

e) Você teve dificuldades para pensar nesses símbolos? Caso tenha sido fácil, desenhe mais seis segmentos, e crie nomes para esses segmentos como no item d, sem alterar os nomes dos outros segmentos. Como foi essa experiência?

f) Talvez você tenha percebido que criar nomes significativos para os segmentos não é uma tarefa fácil. Você tem alguma sugestão para tornar essa tarefa mais fácil?

g) O que você acha de compararmos o tamanho dos segmentos com um segmento fixo?

Uma das soluções para esse problema é escolhermos um segmento para ser o padrão de comparação. Vamos chamá-lo de U. Agora todos os outros segmentos serão comparados com o segmento U. Fica combinado que o tamanho do segmento padrão é 1.

Construção 1: Obtendo segmentos a partir de U.

a) Limpe a tela de desenho, deixando apenas um segmento que será o segmento padrão.

b) Trace uma semi-reta com origem A.

c) Construa uma círculo de **raio U** e **centro A**. Chamando de B o ponto da intersecção da círculo com a semi-reta, qual o tamanho do segmento AB?

d) Construindo um círculo de raio U e centro B, chamando de C a intersecção, que tamanho você atribuiria ao segmento AC?

e) É possível construir um segmento que seja três vezes maior que U? Como?

f) Quais os procedimentos para construir um segmento cinco vezes maior que U?

Construção 2:
a) Como poderia fazer para construir um segmento com metade do tamanho de U? Faça a construção no R.e.C e descreva como foi feita.
Dica: Use a macro para divisão em duas partes

b) Como podemos representar o tamanho desse segmento?

c) Da mesma forma é possível obter um segmento três vezes menor que U? Como podemos representar esse tamanho?

Veja que nesses casos temos as frações representando o tamanho dos segmentos em relação a U, dessa forma podemos comparar o tamanho dos segmentos a partir das frações.

ATIVIDADE 9 –FRAÇÕES E SEGMENTOS

Na atividade anterior vimos como obter alguns segmentos com o tamanho representado por frações. Agora vamos explorar como podemos construir um segmento sabendo o seu tamanho na forma de fração.

Construção 1: Construir um segmento com tamanho 3/5 de U.
Dica: 

Pergunta 1: O que acontece com o segmento 3/5 se você alterar o tamanho de U?

Construção 2: Construir um segmento com tamanho 7/4 de U.

Construção 3: Escreva três frações:
Construa os segmentos com o tamanho dessas frações em relação a U.

EXPLORANDO

Pergunta 2: Quais desse segmentos são menores que U?

Pergunta 3: Consequentemente quais frações representam tamanhos menores que 1?

Pergunta 4: Quais frações são maiores que 1? Os segmentos correspondentes são-maiores que U?

Exercício 1: Escreva as frações das construções 1, 2 e 3 em ordem crescente.

ATIVIDADE 10 – COMPARANDO FRAÇÕES

Vimos que as frações podem representar o tamanho de um segmento com relação a outro. Nesta atividade vamos ver como podemos comparar uma fração com outra.

Construção 1: Construa sobre uma mesma semi-reta r os segmentos que correspondem as frações de U: 1/5; 3/5; 1/4; 3/4; 2/7 ; 5/7; 2/9; 5/9; 5/3; 7/4. Em seguida responda:

a) Dentre as frações acima, quais possuem o mesmo denominador?

b) Das frações 1/5 e 3/5, qual corresponde ao segmento maior?

c) Das frações 1/4; 3/4 e 7/4, qual corresponde ao segmento menor? E ao segmento maior?

d) Entre todas as frações da construção, qual fração representa o menor segmento?

e) Entre todas as frações da construção, qual fração representa o maior segmento?

f) Quais entre as frações da construção tem o mesmo numerador? Qual delas representa o segmento menor? E o segmento maior?

Observação: Vamos combinar que quando tivermos duas frações: a/b e c/d, e fração a/b corresponde a um segmento maior que o segmento da fração c/d, diremos que a fração a/b é maior que a fração c/d, ou que c/d é menor que a/b.

Pergunta: Dadas duas frações, como você faria para saber qual delas é a maior?

2) Em cada par de frações, indique qual é a menor.

a) $\frac{1}{5}$ *ou* $\frac{1}{8}$? b) $\frac{3}{4}$ *ou* $\frac{3}{9}$? c) $\frac{2}{5}$ *ou* $\frac{7}{8}$? d) $\frac{1}{11}$ *ou* $\frac{1}{10}$? e) $\frac{1}{5}$ *ou* $\frac{3}{5}$?

ATIVIDADE 11 – "Adição e Subtração" de segmentos

CONSTRUÇÃO 1: Dados dois segmentos, AB e CD, obter um segmento de tamanho AB+CD.

Dica:  

CONSTRUÇÃO 2

a) Dadas as frações 1/3 e 4/3, construir um segmento AB com tamanho (1/3) + (4/3).

b) Represente o tamanho do segmento AB com uma única fração.

CONSTRUÇÃO 3

a) Dadas as frações 1/2 e 1/3, construir um segmento CD com tamanho (1/2) + (1/3)

b) Represente o segmento CD com uma única fração.

CONSTRUÇÃO 4

Dados dois segmentos AB e CD, de modo que AB > CD (lê-se: AB maior que CD), obtenha o segmento AB – CD.

CONSTRUÇÃO 5

a) Dados os segmentos 4/5 e 2/5, construir um segmento EF com tamanho (4/5) – (2/5).

b) Represente o segmento CD com uma única fração.

CONSTRUÇÃO 6

a) Dadas as frações 1/2 e 1/3, construir um segmento GH com tamanho (1/2) – (1/3)

b) Represente o segmento GH com uma única fração.

CONSTRUÇÃO 7

Resolva geometricamente as operações, representando o tamanho dos segmentos resultantes com uma única fração.

a) 3/4 + 5/8
b) 5/3 + 6/9
c) 7/10 + 3/5
d) 3/5 + 4/3
e) 2/7 + 1/2

ATIVIDADE 12 – MEDINDO SEGMENTOS

Vimos que dada uma fração sempre podemos construir um segmento que corresponde a essa fração, porém encontrar uma fração que representa o tamanho de um segmento não é um caminho fácil. Vamos experimentar isso agora.

Construção 1: Trace um segmento AB qualquer.

Desafio: Encontrar uma fração que represente o tamanho do segmento AB.

Pergunta 1: Foi possível determinar exatamente qual fração representa o tamanho de AB?

Uma das dificuldades é saber em quantaspartes dividir U para encontrar essa fração. Essa dificuldade pode ser solucionada através de um novo processo, em que usaremos também novos símbolos. Vamos conhecer esse processo na construção 2.

Construção 2: Dado um segmento AB determinar o seu tamanho em relação a um segmento U.

1º passo: Construa uma semi-reta

de origem A passando por B. 

2º passo: Começando em A, construa segmentos consecutivos de

tamanho U, até ultrapassar B. 

3º passo: Verifique quantas vezes U foi reproduzido antes de ultrapassar B.
Codifique o último ponto a direita de B com o seu tamanho em relação a U. Faça o mesmo com o ponto à esquerda de B.

Agora sabemos que o segmento AB tem o seu tamanho entre ___U e ___U.

Preencha a tabela no final da atividade com os valores encontrados.

4º passo: Para prosseguirmos a comparação precisamos de uma unidade de medida menor. Poderíamos escolher um segmento qualquer, mas isso não nos traria nenhuma vantagem. Outra opção é escolher um segmento obtido de uma divisão de U em partes iguais. Vamos usar a divisão em dez partes (veremos mais a frente o porque dessa escolha), então divida U em dez partes (use a macro para divisão em dez partes). E a uma dessas partes vamos chamar de U1.

5º passo: Repita o 2º e o 3º passo, usando U1 como unidade de medida, em seguida, divida U1 em 10 partes e tome uma delas como U2, Repita novamente, sempre dividindo a unidade anterior em 10 partes e anotando quantas vezes o segmento foi reproduzido.

Dica: Use a ferramenta Zoom para ampliar o desenho e prosseguir com a medição.

Preencha a tabela com os dados obtidos:

	Sem Ultrapassar B	Medida de AB	Ultrapassando B
U			
U1			
U2			
U3			
U4			
U5			

* PENSE EM COMO DESCOBRIR QUANTAS PARTES TEREMOS NA UNIDADE, SEM REALIZAR A DIVISÃO?

ATIVIDADE 13 – MEDINDO SEGMENTOS II

Na atividade anterior vimos como comparar segmentos com unidades diferentes, cada vez menores. Sendo cada unidade obtida dividindo a anterior em dez partes. Veja os valores obtidos na atividade anterior.

Pergunta 1: Que semelhanças você pode notar nos números que representam o tamanho dos segmentos antes de ultrapassar B?

Pergunta 2: Que diferenças temos nesses mesmos números?

Pergunta 3: Se eu disser que em uma determinada etapa da comparação tive 132 como resultado, é possível descobrir quantas vezes já repeti o processo?

Você deve ter percebido que responder a pergunta 3 não é simples, pois o número 132 poderia ter sido obtido tanto na terceira repetição, quanto na segunda ou primeira vez.
Para que nós não tenhamos esse problema vamos representar a primeira vez que dividimos U em dez com uma vírgula.
Assim, o símbolo 13,2 significa que o segmento AB contém 132U1.
1,32 significa que AB contém 132U2
132 significa que AB contém 132U

Os símbolos obtidos através da medição de segmentos recebem o nome de **números decimais.**

Em um processo de medição obteremos, por exemplo 2 na primeira etapa; 2,4 na segunda etapa; 2,45 na terceira etapa e assim por diante.

Construção 1: Construa um segmento a partir da fração 2/5, em seguida aplique o processo de medição até obter uma medida exata. Que medida você encontrou?

Construção 2: Construa os segmentos com tamanho correspondente a cada uma das frações abaixo e em seguida aplique o processo de medição de segmentos até obter uma medida exata. Anote o resultado obtido em cada caso.
a) 3/4
b) 6/5
c) 1/2
d) 3/10
e) 23/100
f) 12/10

Pergunta 4: Nessa construção, cada segmento foi obtido com um tamanho correspondente a uma fração de U. Você obteve um número decimal que representa também o tamanho desse segmento em relação a U. Como você relaciona esses dois símbolos que representam o tamanho do mesmo segmento?

Pergunta 5: Se você pudesse escolher, qual dos dois símbolos você usaria para representar o tamanho de um segmento, 1/2 ou 0,5?

ATIVIDADE 14 – O PROCESSO INVERSO

Construção 1: Construir um segmento com medida 2,453 em relação a U.

Dica:  

Escreva um texto explicando como construir um segmento sabendo a sua medida.

____

____

____

____

____

____

____

Construção 2: Construa sobre uma mesma semi-reta segmentos com os tamanhos:

a) 1,2

b) 1,18

c) 1,215

d) 1,03

Pergunta 1: Qual a medida do maior dos segmentos construídos?

Pergunta 2: Qual a medida do menor dos segmentos construídos?

Escreva os números decimais da construção do menor para o maior.

ATIVIDADE 15 – DÍZIMAS PERIÓDICAS

Construção 1: Construa um segmento de tamanho 1/3, em seguida aplique o processo de medição e encontre uma representação decimal para esse tamanho.

a) Qual número decimal você encontrou?

b) Essa medida tem uma representação decimal finita ou infinita?

c) Como poderíamos representar essa medida de forma finita?

Construção 2: Construa um segmento de tamanho 3/11, em seguida aplique o processo de medição e encontre uma representação decimal para esse tamanho.

a) Qual número decimal você encontrou?

b) Essa medida tem uma representação decimal finita ou infinita?

c) Como poderíamos representar essa medida de forma finita?

Observação: Os números decimais obtidos nas construções 1 e 2 são conhecidos como dízimas periódicas, pois os algarismos se repetem infinitamente em um período. Para representar esses números infinitamente usamos uma barra sobre os algarismos que se repetem. Exemplo: 2/3=0,6666...=0,6.

Experimentação 1: Podemos descobrir a representação decimal de uma fração com o auxilio de uma calculadora, **Por Exemplo:** para a fração 2/3 tecle 2 ÷3 = e aparecerá no visor 0,66666666

Verifique com o auxilio de uma calculadora a representação decimal para:

a) Cinco frações com denominador 3

b) Cinco frações com denominador 7

c) Cinco frações com denominador 11

d) Cinco frações com denominador 6

e) Cinco frações com denominador 2

f) Cinco frações com denominador 5

g) Cinco frações com denominador 10

Pergunta 1: Com quais denominadores as frações tiveram como representação decimal dízimas periódicas?

Pergunta 2: Quantos algarismos tivemos no período das frações com denominador 7? Todas as frações com denominador 7 terão essa mesma quantidade de algarismos no período?

ATIVIDADE 16 – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE DECIMAIS

Já vimos como adicionar ou subtrair segmentos, agora vamos aprender como adicionar ou subtrair números decimais.

Construção 1: Construir um segmento AB com medida 2,4 e o segmento consecutivo BC com tamanho 1,3.

O segmento AC tem medida (2,4 + 1,3). Represente a medida de AC com um único número decimal.

Construção 2: Construir um segmento EF de tamanho 1,35 e um segmento consecutivo FG de tamanho 2,5.

O segmento EG tem medida (1,35 + 2,5). Represente a medida de EG com um único número decimal.

Escreva um texto explicando como somar dois números decimais quaisquer.

____

____

____

____

____

Construção 3: Construa sobre uma mesma semi-reta de origem A o segmento AB com medida 1,25 e AC com medida 2,4. Sem usar o processo de medição, determinar a medida de BC.

Pergunta: Que operação aritmética esta construção representa?

Construção 4: Usando os segmentos das construções 1 e 2, construa um segmento HI que represente a diferença de tamanho entre os segmentos AB e EF.

O segmento HI tem tamanho (2,4 – 1,35). Represente a medida de HI com um único número decimal.

Escreva um texto explicando como proceder para subtrair dois números decimais.

____

____

____

____

____

ATIVIDADE 17 – FRAÇÕES E DECIMAIS

Construção 1: Construir um segmento AB com medida 1,4 e o segmento consecutivo BC com tamanho 6/5.

Representar o tamanho do segmento AC com um único número.

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

Construção 2: Construir um segmento EF com tamanho 2,5 e o segmento consecutivo FG com tamanho 4/3.

Representar o tamanho do segmento EG com um único número.

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

Construção 3: Construir sobre uma semi-reta com origem H, um segmento HI de tamanho 7/4 e o segmento HJ com tamanho 0,92.

Pergunta: Qual o tamanho do segmento IJ?

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

Construção 4: Construir sobre uma semi-reta com origem L, um segmento LM de tamanho 12/7 e o segmento LN com tamanho 1,1.

Pergunta: Qual o tamanho do segmento MN?

Pergunta: A que operação aritmética essa construção corresponde?

Pergunta: Dada a operação 1,25 + 5/4, como você procederia para resolver?