

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ NÃO LINEAR NO
PROJETO DE NEUTRALIZADORES DE
VIBRAÇÕES**

Atila de Carvalho Almeida

Bauru

2022

Atila de Carvalho Almeida

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ NÃO LINEAR NO PROJETO DE NEUTRALIZADORES DE VIBRAÇÕES

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projetos Mecânicos, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves

Bauru

2022

Almeida, Atila de Carvalho.

Influência da rigidez não linear no projeto de
neutralizadores de vibrações / Atila de Carvalho
Almeida, 2022

81 f. : il.

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista (Unesp). Faculdade de Engenharia, Bauru, 2022

1. Neutralizador de vibração não linear. 2.
Sistemas contínuos. 3. Rigidez não linear. I.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ATILA DE CARVALHO ALMEIDA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 19 dias do mês de outubro do ano de 2022, às 14:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ATILA DE CARVALHO ALMEIDA, intitulada **INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ NÃO LINEAR NO PROJETO DE NEUTRALIZADORES DE VIBRAÇÕES**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru UNESP, Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia de Biossistemas / Faculdade de Ciências e Engenharia de Tupa UNESP, Prof. Dr. ADRIANO SILVA BORGES (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Após a exposição pelo mestrando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES



ALMEIDA, A.C., INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ NÃO LINEAR NO PROJETO DE NEUTRALIZADORES DE VIBRAÇÕES, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2022, 81 p., Dissertação (Mestrado).

Palavras chave: Neutralizador de vibração não linear, sistemas contínuos, rigidez não linear.

Resumo - Uma solução para reduzir a vibração em uma estrutura primária é utilizando neutralizadores dinâmicos de vibração. Estes dispositivos são utilizados para o controle passivo de vibração, e são geralmente sintonizados na frequência de uma força harmônica externa. São compostos por uma massa auxiliar e um sistema de suspensão, com elementos de rigidez e amortecimento. Estes elementos podem ser configurados de forma não linear, com o objetivo de melhorar a eficácia do mesmo no que diz respeito a atenuação de vibração. Esta dissertação de mestrado versa sobre a aplicação de uma metodologia capaz de modelar sistemas mecânicos discretos e contínuos lineares com o acoplamento de um neutralizador dinâmico não linear. As funções de resposta em frequência são obtidas considerando uma aproximação pelo método do balanço harmônico de primeira ordem, e diferentemente dos métodos tradicionais, as equações de movimento são calculadas assumindo uma força de excitação exponencial complexa, assim como as variáveis de deslocamento são expandidas em componentes reais e imaginárias, e resolvidas utilizando o método da continuação no PyDSTool (Pacote do Python). O comportamento dinâmico das estruturas são apresentadas através da magnitude da função de receptância, comparando as respostas com as da estrutura com o uso de um dispositivo auxiliar linear, para observar a mudança da frequência linear sintonizada. A partir das respostas dinâmicas, observou-se que a alteração do coeficiente não linear da rigidez do nNDV, provocava uma mudança da frequência linear sintonizada, sendo esta mudança maior com o uso de uma mola do tipo *hardening* do que em uma mola do tipo *softening*.

ALMEIDA, A.C., INFLUENCE OF NONLINEAR STIFFNESS IN THE DESIGN ON
VIBRATION NEUTRALIZERS, Engineering College of Bauru, UNESP - São Paulo
State University, 2022, 81 p., Dissertation (Master's degree).

Keywords: Vibration neutralizer, continuous systems, nonlinear stiffness

Abstract - The solution to reduce vibration in a primary structure is to use dynamic vibration neutralizers. These devices are used for passive vibration control, and are generally tuned to the frequency of an external harmonic force. They are composed of an auxiliary mass and a suspension system, with stiffness and damping elements. These elements can be configured in a nonlinear way, in order to improve their effectiveness in terms of vibration attenuation. This master's thesis deals with the application of a methodology capable of modeling linear discrete and continuous mechanical systems with the coupling of a non-linear dynamic neutralizer. The frequency response functions are obtained considering an approximation by the first-order harmonic balance method, and unlike traditional methods, the equations of motion are calculated assuming a complex exponential excitation force, just as the displacement variables are expanded into components real and imaginary, and solved using the continuation method in PyDSTool (Python Package). The behavior dynamics of the structures are presented through the magnitude of the receptivity function, comparing the responses with those of the structure with the use of a linear auxiliary device, to observe the change of the tuned linear frequency. From the dynamic responses, it was observed that the change in the nonlinear coefficient of the stiffness of nDVN, caused a change in the tuned linear frequency, this change being greater with the use of a spring of type *hardenig* than with a spring of type *softenig*.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força, sabedoria e sustento para o cumprimento dessa etapa, a minha família, em especial ao meu pai, Paulo Roberto da Rocha Almeida e minha vó Marcelina da Rocha Almeida.

Agradeço a minha amiga Marina Gazotto e a família Palhari, em especial minha grande amiga Karina Palhari por todo o suporte ao longo da minha vida acadêmica.

Agradeço ao grupo NDE pelo apoio durante esse período com as conversas e todas as dicas fornecidas.

Agradeço ao meu orientador Professor Dr. Paulo Gonçalves pelo incentivo, dedicação e conhecimento para o desenvolvimento desse trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), pelo financiamento e apoio para o desenvolvimento desse trabalho. Número de processo 88887.497456/2020-00.

A UNESP, pelo apoio e infraestrutura, ao programa de pós-graduação, e a todos que de certa forma ajudaram com esse trabalho.

*“Tudo quando fizerdes fazei-o de todo o coração, como para o SE-
NHOR e não para homens, [...]” (Colossenses 3.23)*

Lista de Figuras

1.1	Modelo simplificado de uma estrutura com neutralizador acoplado.	20
1.2	Modelo simplificado de máquina com neutralizador acoplado. (a) Modelo completo; (b) modelo de alta frequência.	23
1.3	Desenho do absorvedor de vibração não linear. (a) vista de planta (b) vista de elevação, com x como deslocamento da massa; as propriedades materiais da placa circular fina de latão são: densidade $\rho \approx 8500kg/m^3$, e módulo de Young $E \approx 110GPa$. (Todas as dimensões estão em mm.)	23
1.4	Variação da força restauradora F_k contra o deslocamento Δz quando $\gamma_1 = 1N/m$ e $\gamma_3 = 0,05N/m^3$ (curva vermelha), quando $\gamma_1 = 1N/m$ e $\gamma_3 = -0,05N/m^3$ (curva verde) e quando $\gamma_1 = 1N/m$ e $\gamma_3 = 0N/m^3$ (curva azul).	25
2.1	Sistemas mecânicos com um neutralizador dinâmico de vibração não linear (nNDV) acoplado. O caso I consiste em um único grau de liberdade com nNDV e o Caso II consiste em vários graus de liberdade com um nNDV.	33

2.2	Resposta em frequência para o Caso I, (a) Comparação entre a frequência absoluta (Y_1) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV, (b) Comparação entre a frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_1 $) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV (dB ref. 1 N/m), (c) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>hardening</i> , (d) Frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_1 $) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>hardening</i> (dB ref. 1 N/m), (e) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>softening</i> , (f) Frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_1 $) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>softening</i> (dB ref. 1 N/m), (g) Resposta em frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de F - mola <i>hardening</i> , (h) Resposta em frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_1 $) para diferentes valores de F - mola <i>hardening</i> (dB ref. 1 m/N).	42
2.3	Resposta em frequência para o Caso II, (a) Comparação entre a frequência absoluta (Y_1) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV, (b) Comparação entre a frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_2 $) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV (dB ref. 1 N/m), (c) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>hardening</i> , (d) Frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_2 $) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>hardening</i> (dB ref. 1 N/m), (e) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>softening</i> , (f) Frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_2 $) para diferentes valores de γ_3 - mola <i>softening</i> (dB ref. 1 N/m), (g) Resposta em frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de F - mola <i>hardening</i> , (h) Resposta em frequência relativa ($ Z = Y_n - Y_2 $) para diferentes valores de F - mola <i>hardening</i> (dB ref. 1 m/N).	45
2.4	Modelo de um sistema de um grau de liberdade com rigidez não linear cúbica.	46
2.5	Resposta em frequência absoluta (Y_n) com, $f = 1$, $m_n = 1$, $\zeta = 0,04$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,005$ (dB ref. 1 N/m).	48

3.1	Elemento de barra com comprimento L e respectivas forças, deslocamento e deslocamento angular. (LEE, 2009)	51
3.2	Forças e deslocamentos atuantes em uma barra com comprimento L , engastada em uma extremidade, e na outra com o acoplamento do neutralizador dinâmico de vibrações não linear.	52
3.3	Magnitude da função de receptância (U_2/F_2) com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$, $\gamma_1 = 0,25$ e $\gamma_3 = 0,01$ (dB ref. 1 m/N).	54
3.4	Magnitude da função de receptância (U_2/F_2) para diferentes valores positivos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ e $\gamma_1 = 0,25$ (dB ref. 1 m/N).	55
3.5	Magnitude da função de receptância (U_2/F_2) para diferentes valores negativos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ e $\gamma_1 = 0,25$ (dB ref. 1 m/N).	56
3.6	Magnitude da função de receptância (U_2/F_2). (a) Mola <i>hardening</i> . (b) Mola <i>softening</i> (dB ref. 1 m/N).	57
3.7	Elemento de viga com comprimento L e respectivas forças, deslocamento e deslocamento angular. (LEE, 2009)	59
3.8	Forças e deslocamentos atuantes em uma viga com comprimento L , engastada em uma extremidade, e na outra com o acoplamento do neutralizador dinâmico de vibrações não linear.	60
3.9	Magnitude da função de receptância (W_2/F_2) com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,5$ (dB ref. 1 m/N).	63
3.10	Magnitude da função de receptância (W_2/F_2) para diferentes valores positivos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ $\gamma_1 = 1$ (dB ref. 1 m/N).	64
3.11	Magnitude da função de receptância (W_2/F_2) para diferentes valores negativos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ $\gamma_1 = 1$ (dB ref. 1 m/N).	65
3.12	Magnitude da função de receptância (W_2/F_2). (a) Mola <i>hardening</i> . (b) Mola <i>softening</i> (dB ref. 1 m/N).	66
3.13	Elemento de viga de dois nós.	67
3.14	Elemento de viga de dois nós e um nNDV acoplado.	68

3.15	Elemento de viga discretizado em 5 elementos com o nNDV.	69
3.16	Magnitude da função de receptância (W_6/F_6) com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,5$ (dB ref. 1 m/N).	71
A.1	Resposta em frequência absoluta (Y_n) com, $F = 1$, $m = 1$, $\zeta = 0,04$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,005$ (dB ref. 1 N/m).	80

Sumário

Nomenclatura	15
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Introdução ao Problema	18
1.2 Revisão Bibliográfica	19
1.2.1 Controle de vibração	20
1.2.2 Isoladores de vibração não linear	22
1.2.3 Sistemas contínuos unidimensionais	26
1.3 Justificativa	27
1.4 Objetivos	28
1.5 Metodologia	28
1.6 Estrutura da dissertação	29
2 SISTEMAS DISCRETOS	31
2.1 Modelagem matemática	32
2.2 Resposta Dinâmica	38
2.3 Comparação com o Método Runge-Kutta	46
3 SISTEMAS CONTÍNUOS	49
3.1 Modelagem matemática barra em vibração longitudinal	50
3.1.1 Barra com neutralizador	51
3.1.2 Resposta em frequência para barra com neutralizador	53

3.2	Modelagem matemática viga em flexão dinâmica	58
3.2.1	Viga com neutralizador	60
3.2.2	Resposta em frequência para viga com neutralizador	62
3.3	Comparação com o Método Runge-Kutta	66
4	CONCLUSÕES FINAIS	72
4.1	Contribuições	73
4.2	Sugestões para trabalhos futuros	73
A	Método de Resolução	78

Nomenclatura

Símbolo	Descrição
Letras latinas	
A	Área da seção transversal
c	Coeficiente de amortecimento
c_n	Coeficiente de amortecimento do neutralizador
D	Rigidez dinâmica do neutralizador não linear
E_0	Módulo de Young
F	Amplitude da força externa
f_n	Força não linear
F_{NL}	Força não linear em variáveis complexas
I	Momento de inércia da viga
j	Número imaginário ($\sqrt{-1}$)
k	Coeficiente de rigidez
k_1	Coeficiente linear da rigidez do neutralizador acoplado em sistemas discretos
k_3	Coeficiente não linear da rigidez do neutralizador acoplado em sistemas discretos
k_F	Número de onda da viga
k_L	Número de onda da barra
k_n	Parâmetro de rigidez não linear do neutralizador
L	Comprimento da estrutura

m	Massa do sistema primário discreto
m_n	Massa do neutralizador
s_1	Coeficiente linear da rigidez do neutralizador acoplado em sistemas contínuos
s_3	Coeficiente não linear da rigidez do neutralizador acoplado em sistemas contínuos
U	Deslocamento longitudinal da barra
W	Deslocamento transversal da viga
z	Deslocamento relativo
Símbolos gregos	
β	Razão de amortecimentos
δ_{st}	Deflexão estática
η	Amortecimento estrutural
ρ	Densidade do elemento
γ_1	Coeficiente de rigidez linear normalizado
γ_3	Coeficiente de rigidez não linear normalizado
μ	Razão de massa
ω	Frequência de excitação
ω_0	Frequência natural em rad/s
ζ	Razão de amortecimento do neutralizador
Abreviações	
ADV	Absorvedor Dinâmico de Vibrações
ATVAs	Absorvedores de Vibração Sintonizados Adaptativos
BSN	Bifurcação Sela-Nó
DE	Dissipador de Energia
EADs	Equações Algébricas Diferenciais
EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias

FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Graus de Liberdade
MBH	Método do Balanço Harmônico
MBH1	Método do Balanço Harmônico de primeira ordem
MRK	Método Runge-Kutta
MC	Método da Continuação
NDV	Neutralizador Dinâmico de Vibrações
nNDV	Neutralizador Dinâmico de Vibrações Não Linear

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo de introdução apresenta os aspectos gerais sobre sistemas não lineares, especificamente utilizando não linearidade em neutralizadores. Também aborda as principais características do isolamento de vibrações. É apresentado um histórico e uma revisão bibliográfica, com uma visão geral sobre controle passivo de vibração. A justificativa e os objetivos deste trabalho também são apresentados neste capítulo.

1.1 Introdução ao Problema

O controle de vibrações feito de forma efetiva é uma questão importante para atender aos requisitos de alta precisão, segurança e estabilidade das estruturas (JING; VAKAKIS, 2019). Sua análise e seu projeto têm sido tratados através do uso de isolamento passivo de vibração (WU *et al.*, 2015).

Segundo Ma, Bi e Hao (2021), o controle passivo de vibração pode ser agrupado nas categorias: dissipador de energia (DE), absorvedor dinâmico de vibração (ADV) e neutralizador dinâmico de vibração (NDV).

Os dissipadores de energia (DE's) são especificamente dispositivos de controle de vibração, com o princípio básico de converter a energia cinética em calor e assim reduzir as vibrações estruturais. Podendo ser subdivididos de acordo com as diferentes

formas de dissipação (amortecedores de rendimento metálico, amortecedores de atrito e amortecedores viscoelásticos).

Uma das estratégias do controle de vibração é o isolamento, que possui a premissa de que a estrutura pode ser desacoplada ou isolada de perturbações severas, protegendo as estruturas de perigos (IBRAHIM, 2008). Ao introduzir um isolador, a frequência fundamental da estrutura isolada pode ser efetivamente deslocada da frequência dominante de perturbação externa, e as vibrações e forças transmitidas podem ser atenuadas.

Um sistema de controle passivo pode ser composto por uma variedade de materiais e dispositivos (por exemplo, amortecedor, mola e massa, etc.) podendo gerar uma força de controle em resposta ao movimento estrutural, sem requer fonte de alimentação externa (MA; BI; HAO, 2021). Os sistemas de controle ativo, semiativo e híbrido geralmente consistem em dispositivos de força controláveis, sensores e controladores.

Embora os sistemas convencionais de controle de vibração passivo (ADV, NDV, DE's etc) tenham demonstrado ser eficazes e amplamente aplicados na prática, ainda existem algumas limitações inerentes. Por exemplo, a eficácia de controle do ADV ou do NDV é altamente dependente da razão de massa, ou seja, a razão entre as massas físicas das estruturas secundárias (auxiliares) e primárias. De um modo geral, uma grande massa auxiliar é necessária para alcançar o desempenho de controle desejado.

De acordo com Chong, Wu e Li (2022), para solucionar os problemas existentes no referido controle de vibração, os pesquisadores passaram a focar no estudo da não linearidade em sistemas mecânicos. Alguns pesquisadores descobriram que a introdução de não linearidade em algumas estruturas pode efetivamente melhorar o desempenho do isolamento de vibração (HUANG *et al.*, 2014).

1.2 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica a respeito do controle de vibração, não linearidade e sistemas contínuos unidimensionais, tem o objetivo de mostrar alguns aspectos relevantes para

o entendimento da pesquisa. É apresentada os principais trabalhos e os respectivos autores, onde são apresentados seus estudos referentes ao uso de neutralizadores de vibrações, incluindo não linearidade de rigidez cúbica, o foco principal deste trabalho.

1.2.1 Controle de vibração

Neutralizadores dinâmicos de vibrações (NDV's) são dispositivos construídos a partir de sistemas ressonantes, utilizados no controle passivo de vibração. De acordo com Aiello e Gatti (2017) os NDV's são tipicamente compostos por uma massa auxiliar, presa a uma estrutura hospedeira vibratória através de um sistema de suspensão, com elementos de rigidez e amortecimento conforme a Figura 1.1.

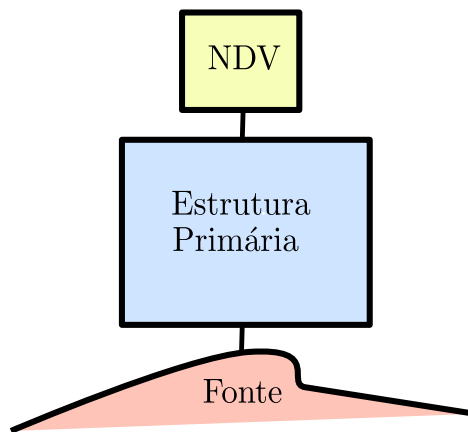


Figura 1.1: Modelo simplificado de uma estrutura com neutralizador acoplado.

Estes dispositivos são utilizados para reduzir a vibração em uma estrutura primária e estão geralmente sintonizados na frequência de uma força harmônica externa, conforme mencionado por Howard (2012), no estudo de neutralizadores de vibração adaptativos-passivos. Não é possível estudar sobre estes dispositivos sem mencionar Frahm, responsável por patentear o primeiro NDV (FRAHM, 1911), que então foi investigado por Hartog e Ormonroyd (1928). O ADV é um dispositivo semelhante, mas a frequência de sintonia alvo é uma ressonância da estrutura primária.

Segundo Gao *et al.* (2021) os absorvedores de vibração podem absorver energia de vibração, e reduzir a amplitude de vibração do sistema primário. Um absorvedor de

vibração ajustado adaptativamente (ATVA) pode rastrear a frequência dominante da excitação externa e reduzir a amplitude da resposta de vibração do sistema primário sob excitação externa de frequência variável. Um neutralizador de vibração, é usado para reduzir a vibração da estrutura com uma excitação particular de frequência, e normalmente tem baixo amortecimento para fornecer a maior atenuação de vibração.

Neutralizadores e absorvedores de vibração são dispositivos que se enquadram na classe de sistemas de massa auxiliar. Os NDV's são conhecidos também como amortecedores de massa auxiliares, constituem uma classe amplamente utilizada de dispositivos de vibração para estruturas excitadas dinamicamente. No entanto, um dos problemas inerentes à aplicação de um NDV, é o movimento relativo excessivo, que a massa auxiliar sofre em certas frequências de excitação (MASRI; CAFFREY, 2020).

Segundo Brennan e Gatti (2012) é desejável que a frequência de ressonância, seja o mais alto possível, de modo que o sistema seja tolerante a desajustes. Isso significa que se houver uma mudança na frequência excitação ou uma mudança na frequência sintonizada, a frequência de excitação não se aproxima da frequência de ressonância, o que poderia resultar em uma alta amplitude de vibração da estrutura primária. Para alcançar uma grande frequência de ressonância, com um neutralizador linear é necessário uma grande razão de massas, que em muitos casos pode ser indesejável.

Quando o sistema primário com a adição do sistema auxiliar operam em condição de sintonia, o sistema auxiliar acaba submetido a uma quantidade de energia. Isso pode fazê-lo experimentar intensas amplitudes de vibração, levando-o a gerar ruídos, falhar ou quebrar (BüCHNER, 2017). O projeto desse sistema auxiliar tem como uma etapa principal o processo de sintonização, onde consiste na sintonia da frequência natural do neutralizador com a frequência natural ou de excitação, do sistema primário.

A questão é que o componente responsável pela dissipação de energia, ou seja, o amortecedor, e o responsável pelo armazenamento da energia potencial elástica, a rigidez, podem ser configurados de várias formas, incluindo uma configuração não linear, visando melhorar o desempenho no que diz respeito a atenuação de vibrações.

De acordo com Qian e Zuo (2021), os absorvedores de vibrações não lineares têm sido extensivamente investigados para controle passivo de vibrações e isolamento de movimento, fato este que ocasiona o estudo de diferentes formas para a resolução das equações não lineares envolvidas, proporcionando a criação de uma variedade de metodologias.

Visto que a rigidez não linear é comumente usada como uma alternativa na alteração da razão de massa. A subseção a seguir investiga o comportamento da rigidez não linear, sendo utilizada como uma alternativa para melhorar a eficácia dos NDV's, sem alterar a razão de massas ou aumentar o amortecimento

1.2.2 Isoladores de vibração não linear

Segundo Ibrahim (2008), a teoria de isoladores de vibração não linear testemunhou desenvolvimentos significativos, devido às demandas urgentes para a proteção de instalações estruturais, reatores nucleares, componentes mecânicos e instrumentos sensíveis de movimento do solo sísmico, choques e cargas de impacto.

Segundo Brennan e Gatti (2012), o uso da não linearidade no neutralizador dinâmico de vibrações pode melhorar a sua eficácia, assumindo que a frequência de excitação harmônica está bem acima da frequência ressonante da máquina, à qual o neutralizador está ligado, conforme a Figura 1.2.

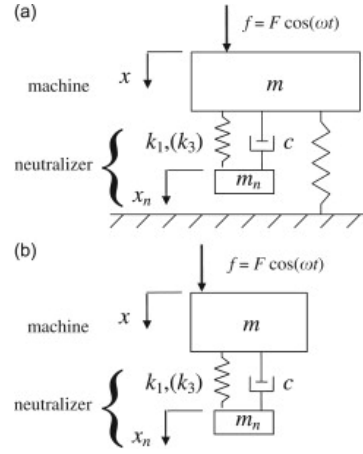


Figura 1.2: Modelo simplificado de máquina com neutralizador acoplado. (a) Modelo completo; (b) modelo de alta frequência.

Fonte: BRENNAN; GATTI (2012)

O artigo de Tang *et al.* (2016), descreve a caracterização de um absorvedor utilizando um novo procedimento experimental, em que o método de estimativa é baseado em um teste de vibração livre, apropriado para um dispositivo levemente amortecido, conforme a Figura 1.3.

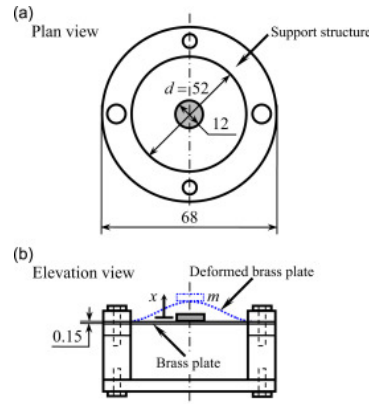


Figura 1.3: Desenho do absorvedor de vibração não linear. (a) vista de planta (b) vista de elevação, com x como deslocamento da massa; as propriedades materiais da placa circular fina de latão são: densidade $\rho \approx 8500 \text{ kg/m}^3$, e módulo de Young $E \approx 110 \text{ GPa}$. (Todas as dimensões estão em mm.)

Fonte: TANG et al., (2016)

Outras pesquisas, estudam os efeitos benéficos da não linearidade da rigidez geométrica (GATTI; BRENNAN; TANG, 2019). Há estudos onde se investigou o comporta-

mento dinâmico de um sistema específico de dois graus de liberdade, onde o sistema não linear não afeta a vibração do sistema linear forçado (GATTI; KOVACIC; BRENNAN, 2010).

De acordo com Noël e Kerschen (2017), o estudo de sistemas não lineares é um vasto campo de pesquisa, que atualmente atrai muita atenção da comunidade científica. A investigação da não linearidade cúbica em neutralizadores de vibrações vem ganhando grande atenção, como uma alternativa para melhorar a eficácia do dispositivo (BRENNAN; GATTI, 2012).

Estes componentes possuem importância também na indústria automotiva conforme Gao *et al.* (2019), que investigou a aplicação de absorvedores de vibração sintonizados adaptativos (ATVA's) para *powertrains* automotivos levemente amortecidos. Para isso, realizou uma análise de vibração de um sistema de trem de força, equipado com transmissão de dupla embreagem do eixo secundário duplo, incluindo uma avaliação de frequência natural e estudos de sensibilidade. Neste contexto, fica evidente a necessidade de encontrar formas mais eficazes para o controle de vibrações excessivas e indesejadas. Consequentemente têm-se uma busca por diferentes métodos para resolução das equações que governam o comportamento dos sistemas.

Diante da contextualização apresentada, o estudo do comportamento da não linearidade de rigidez é de grande importância. O presente trabalho concentra-se na classe de rigidez não linear do tipo cúbica, onde o coeficiente de rigidez não linear produz uma força restauradora cúbica, que pode ser definida conforme a Equação 1.1

$$F_k = \gamma_1 \Delta z \pm \gamma_3 \Delta z^3, \quad (1.1)$$

onde F_k é a força restauradora na mola, z é o deslocamento relativo entre os terminais da mola, γ_1 e γ_3 denotam os coeficientes de rigidez linear e não linear na forma adimensionalizada, respectivamente. Dois casos podem ser considerados dependendo se $\gamma_3 > 0$ ou $\gamma_3 < 0$. O primeiro caso, onde $\gamma_3 > 0$, é chamada de mola de endurecimento

(*hardening*) porque a mola se torna mais rígida à medida que o deslocamento aumenta. Para o caso em que $\gamma_3 < 0$, a mola se torna mais macia à medida que o deslocamento aumenta, conhecido como mola de amolecimento (*softening*).

Por motivos apenas ilustrativos, e para tornar a comparação mais visual entre às duas principais configurações para uma mola de rigidez cúbica, é possível plotar o diagrama desse comportamento em ambos os casos, ou seja, a variação da força restauradora F_k em função da deformação Δz , como mostrado na Figura 1.4.

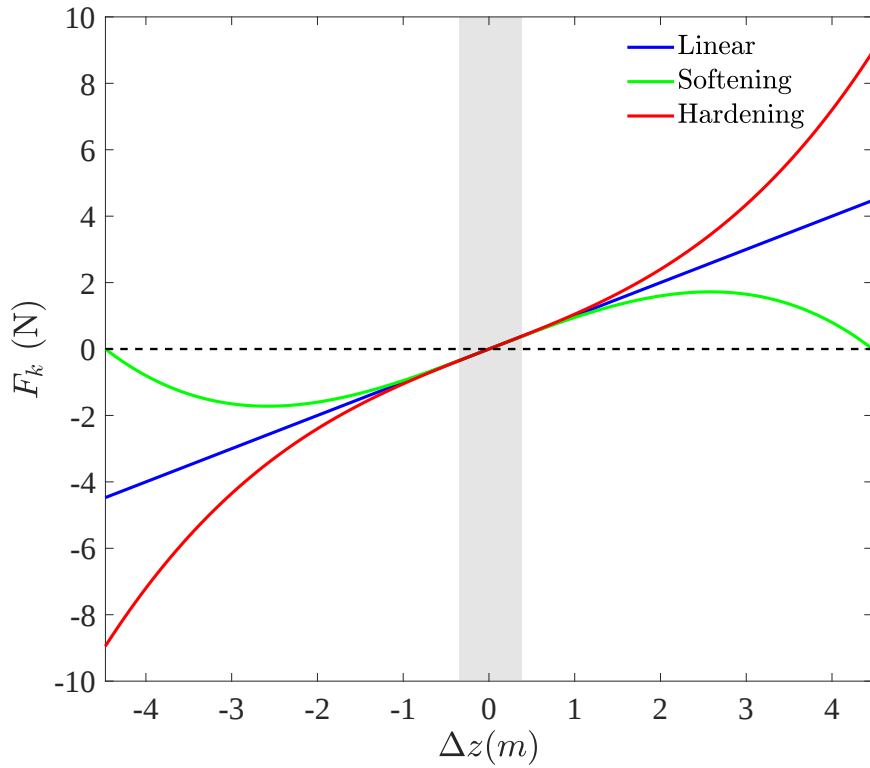


Figura 1.4: Variação da força restauradora F_k contra o deslocamento Δz quando $\gamma_1 = 1N/m$ e $\gamma_3 = 0,05N/m^3$ (curva vermelha), quando $\gamma_1 = 1N/m$ e $\gamma_3 = -0,05N/m^3$ (curva verde) e quando $\gamma_1 = 1N/m$ e $\gamma_3 = 0N/m^3$ (curva azul).

Observe que para o caso da mola de amolecimento (*softening*), a rigidez equivalente do sistema torna-se negativa para grandes valores de deformação, com isso o sistema torna-se estaticamente instável, fato este que torna o estudo destas molas mais com-

plicado. O intervalo em destaque pelo sombreado é conhecido como a área onde a rigidez estática da mola linear é igual a da mola não linear.

Este trabalho se concentra em uma classe de sistema dinâmico discreto com não linearidade do tipo cúbica acoplado em um sistema discreto linear com múltiplos graus de liberdade e em um sistema contínuo linear unidimensional. Sendo assim, ainda neste contexto, conforme revelado a importância do assunto em questão, e inspirado nas potencialidades, a seção a seguir diz respeito aos sistemas contínuos.

1.2.3 Sistemas contínuos unidimensionais

Segundo Ghayesh, Kazemirad e Darabi (2011), por muitos anos, as investigações sobre a dinâmica de sistemas contínuos, como vigas, foram realizadas, pois esta classe de sistema inclui vários dispositivos de engenharia e componentes de máquinas.

De acordo com Leissa e Qatu (2011) as estruturas como aeronaves, edifícios, automóveis, pontes, navios e máquinas são complicadas de serem estudadas. Nesses casos, devido à complexidade da geometria envolvida, as estruturas são tipicamente retratadas como sistemas contínuos. A compreensão do comportamento dos modelos contínuos relativamente simples pode ajudar na compreensão das estruturas mais complexas, seja uma única parte dela, ou todo o corpo.

Entre os componentes fundamentais dos sistemas contínuos estão as barras, classificadas por possuírem uma dimensão (comprimento), consideravelmente maior que as outras duas (largura e espessura). Nisso, as barras compartilham a mesma definição de viga com apenas uma distinção: a direção do movimento. O movimento nas vigas é na direção transversal, e nas barras, o movimento é em uma direção longitudinal.

Vigas são elementos estruturais deformáveis usados em engenharia civil, elétrica, mecânica, oceânica e espacial. Sua grande aplicação se deve ao fato da sua grande capacidade de representar estruturas complexas ou ser uma parte principal no estudo de sensores (KLODA; LENCI; WARMINSKI, 2020). Elas são um dos elementos bá-

sicos de interesse teórico em mecânica aplicada, podendo ser modeladas por diversas metodologias.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo vigas foi feito por Dowell (1980), que retrata a influência de um sistema não linear massa-mola, nas vibrações de uma viga simplesmente apoiada. Posteriormente Birman Birman (1986), estendeu o estudo da vibração livre não linear em vigas articuladas apoiadas por uma fundação elástica cúbica não linear.

De acordo com (LEISSA; QATU, 2011), as suposições usuais de resistência dos materiais são feitas para vigas com base nos deslocamentos transversais. Isso torna o problema tanto matemática quanto fisicamente unidimensional, isto é, w depende de x , mas não de y ou z , logo com uma componente de deslocamento $w = w(x, t)$. Assim, o movimento da viga é completamente determinado pelo movimento de sua linha central (a linha que une todos os centroides das seções transversais), e w é definido mais precisamente como o deslocamento da linha central para longe de sua posição reta de equilíbrio.

No estudo da vibração transversal em vigas, as equações de movimento podem ser derivadas conforme a teoria de Euler-Bernoulli, aplicável na análise de vigas finas.

1.3 Justificativa

Devido à necessidade de diversos ramos da engenharia buscarem estudar a resposta dinâmica de sistemas não lineares, é interessante o estudo da não linearidade de um neutralizador acoplado em sistemas discretos com múltiplos graus de liberdade e em sistemas contínuos unidimensionais.

1.4 Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é analisar a aplicação de uma metodologia para auxiliar a obtenção da resposta dinâmica de uma estrutura primária, com o acoplamento de um neutralizador dinâmico de vibrações não linear (nNDV). A estrutura primária pode ser um sistema discreto linear com múltiplos graus de liberdades ou um sistema contínuo unidimensional linear. Deseja-se analisar a influência da rigidez cúbica do neutralizador na resposta em frequência das estruturas primárias.

O objetivo pode ser dividido em quatro partes:

- Obter o modelo matemático dos sistemas discretos lineares com acoplamento de um sistema discreto não linear (neutralizador);
- Obter o modelo matemático dos sistemas contínuos (barra em vibração longitudinal e viga em vibração transversal) com acoplamento de um sistema discreto não linear (neutralizador);
- Desenvolvimento de rotinas computacionais para a obtenção da resposta em frequência pelo método da continuação dos sistemas estudados;
- Avaliar a resposta dinâmica dos sistemas, no que diz respeito ao desempenho do nNDV utilizando uma mola *softening* e uma mola *hardening*.

1.5 Metodologia

Essa dissertação é baseada na metodologia apresentada por Tatzko e Jahn (2019), onde é abordado a ideia de expandir a força não linear em variáveis reais e imaginárias. Deste modo, as equações fundamentais dos sistemas também serão dadas pelo domínio complexo em sua forma algébrica.

O trabalho apresenta o estudo da resposta em frequência de uma estrutura primária, definida como um sistema discreto linear e um sistema contínuo linear unidimensional. A

estrutura primária está sujeita a uma força de excitação harmônica, onde são analisadas as influências de um neutralizador com rigidez não linear do tipo cúbica, acoplado aos sistemas.

Dois casos para a análise de sistemas discretos são considerados, o primeiro com um único grau de liberdade onde o neutralizador é acoplado (Caso I). O segundo apresenta dois graus de liberdade onde o neutralizador também é acoplado (Caso II).

Para sistemas contínuos, são considerados dois tipos de estruturas, uma barra em vibração longitudinal e uma viga em vibração transversal, engastados na extremidade esquerda. Na extremidade livre é acoplado o neutralizador.

As equações de movimento dos sistemas contínuos unidimensionais são encontradas utilizando o método dos elementos espectrais. A resposta dinâmica em todos os sistemas (discretos e contínuos) é obtida fazendo uma aproximação analítica pelo método do balanço harmônico de primeira ordem. Para resolver as equações diferenciais não lineares dos sistemas é utilizando o método da continuação, que utiliza linguagem de programação Python, com o módulo PyDSTool.

Para analisar a influência do neutralizador em ambos os sistemas (discreto e contínuo), é utilizada a magnitude da função de receptância dB (dB ref. 1 m/N).

1.6 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 1 é apresentada a revisão bibliográfica com uma contextualização a respeito do assunto. O capítulo 2 apresenta os modelos matemáticos dos sistemas discretos com o acoplamento do neutralizador não linear. São feitas as simulações dos sistemas onde são analisadas as respostas de receptância com diferentes valores do coeficiente não linear. O capítulo 3 apresenta os modelos matemáticos dos sistemas contínuos unidimensionais. Neste capítulo são apresentados os modelos matemáticos dos sistemas a fim de demonstrar a obtenção das equações de movimento sem e com o acoplamento do neutralizador não linear, bem como

as condições de contorno impostas. São feitas as simulações dos sistemas contínuos com o neutralizador não linear. As respostas de receptância são apresentadas com diferentes valores do coeficiente não linear. Por fim, as conclusões finais são apresentadas no capítulo 4.

Capítulo 2

SISTEMAS DISCRETOS

Este capítulo apresenta o estudo de sistemas discretos lineares com o acoplamento de um neutralizador não linear. O neutralizador apresenta não linearidade do tipo cúbica de rigidez, contém um amortecedor viscoso e uma massa auxiliar. As equações de movimento são obtidas por meio do método de equilíbrio de forças (Newton). São mostrados os parâmetros dos sistemas.

As respostas em frequência são obtidas por meio do método da continuação no ambiente PyDSTool (o apêndice A apresenta o funcionamento do método em questão). Duas condições serão consideradas para as simulações. Alterando o parâmetro não linear γ_3 , ou seja, utilizando uma mola do tipo *hardening* e uma mola do tipo *softening*, com coeficientes $\gamma_1 > 0$, $\gamma_3 > 0$ e $\gamma_1 > 0$, $\gamma_3 < 0$, respectivamente, comparadas com a utilização de uma mola linear com coeficientes positivos que definem as equações de deflexão da força, ou seja ($\gamma_1 > 0$, $\gamma_3 = 0$).

É importante mencionar que no estudo de neutralizadores de vibrações, o primeiro parâmetro a ser considerado é a relação entre as massas, ou seja, a razão entre as massas do sistema primário e do sistema auxiliar, isto é, μ conforme mencionado por McGraw-Hill (1957) e Meirovitch e Parker (2001).

Quanto maior é a massa auxiliar, maior será a resolução ou a força de controle. Para não cair no erro conceitual de querer controlar um prédio adicionando outro acima, se

adota a razão de massas nos limites $0,1 \leq \mu \leq 0,25$, sendo este conceito verificado experimentalmente por Cruz *et al.* (2004) e Espíndola *et al.* (2005). Logo essa restrição define uma proporção entre os dois sistemas, onde o sistema auxiliar não produzirá alteração significativa no sistema global, no quesito de massas, limitando assim o tamanho do neutralizador de vibrações.

2.1 Modelagem matemática

Dois tipos de estruturas são analisadas para observar a influência de um neutralizador de vibração acoplado em sistemas discretos. A primeira é uma estrutura com um único grau de liberdade onde o neutralizador é acoplado (Caso I). A segunda estrutura apresenta dois graus de liberdade onde o neutralizador também está acoplado (Caso II). Esses sistemas são mostrados na Figura 2.1.

Em ambas as configurações, uma força harmônica $f = F e^{i\omega t}$ é aplicada na primeira massa da estrutura primária, m , k e c são valores de massa, rigidez e amortecimento viscoso. O y_i é o deslocamento das massas da estrutura primária. Os neutralizadores de vibração foram caracterizados por uma massa m_n , um coeficiente de amortecimento viscoso c_n e um coeficiente de rigidez não linear k_n . O coeficiente de rigidez não linear produz uma força restauradora cúbica. Dois casos são considerados; tipos de endurecimento e amolecimento. A força restauradora cúbica pode ser definida conforme a Equação 2.1.

$$f_n = \gamma_1 \Delta z \pm \gamma_3 \Delta z^3, \quad (2.1)$$

onde z é o deslocamento relativo ao qual a mola não linear está sujeita.

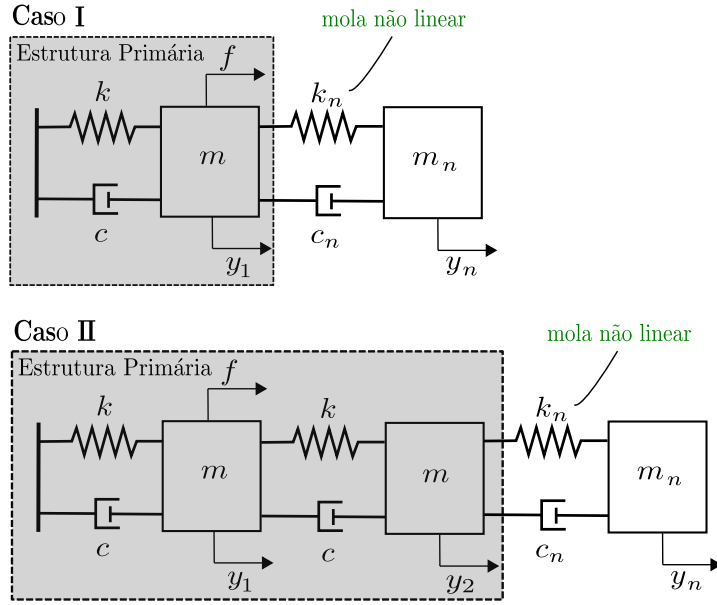


Figura 2.1: Sistemas mecânicos com um neutralizador dinâmico de vibração não linear (nNDV) acoplado. O caso I consiste em um único grau de liberdade com nNDV e o Caso II consiste em vários graus de liberdade com um nNDV.

As equações de movimento para o sistema mostrado no Caso I são definidas em termos dos deslocamentos y_1 e y_n , de modo que o equilíbrio de forças permite escrever as equações na forma adimensional como a Equação 2.2.

$$y_1'' + 2\zeta y_1' + y_1 + 2\zeta\beta(y_1' - y_n') + \gamma_1(y_1 - y_n) + \gamma_3(y_1 - y_n)^3 = \delta_{st}e^{i\Omega\tau} \quad (2.2a)$$

$$\mu y_n'' - 2\zeta\beta(y_1' - y_n') - \gamma_1(y_1 - y_n) - \gamma_3(y_1 - y_n)^3 = 0, \quad (2.2b)$$

onde $y' = \omega_0 \frac{dy}{d\tau}$ é a derivada em relação ao tempo não dimensional τ , e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Os outros parâmetros são $\mu = m_n/m$, $\gamma_1 = k_1/k$, como k_3 difere de zero, tem-se o aparecimento da variável $\gamma_3 = k_3/k$, aqui definida como o parâmetro não linear da rigidez, $\zeta = c/2m\omega_0$, $\beta = c_n/c$, $\delta_{st} = F/k$ e $\Omega = \omega/\omega_0$.

Para o Caso II, onde a estrutura possui dois graus de liberdade mais o grau de liberdade do nNDV, as equações na forma adimensional segue conforme a Equação 2.3.

$$y_1'' + 2\zeta y_1' + 2\zeta\beta(y_1' - y_2') + (2y_1 - y_2) = \delta_{st}e^{i\Omega\tau} \quad (2.3a)$$

$$y_2'' - 2\zeta\beta(y_1' - y_2') - (y_1 - y_2) - 2\zeta\beta(y_2' - y_n') + \gamma_1(y_2 - y_n) + \gamma_3(y_2 - y_n)^3 = 0 \quad (2.3b)$$

$$\mu x_n'' - 2\zeta\beta(y_2' - y_n') - \gamma_1(y_2 - y_n) - \gamma_3(y_2 - y_n)^3 = 0 \quad (2.3c)$$

Assumindo o movimento harmônico para as massas da forma $y_j = Y_j e^{i\omega t}$, como no sistema linear, onde a Equação 2.2 para o Caso I podem ser escritas como a Equação 2.4

$$-\Omega^2 Y_1 + i2\Omega\zeta Y_1 + Y_1 + i2\zeta\beta\Omega(Y_1 - Y_n) + \gamma_1(Y_1 - Y_n) + F_{NL} = \delta_{st} \quad (2.4a)$$

$$-\mu\Omega^2 Y_n - i2\zeta\beta\Omega(Y_1 - Y_n) - \gamma_1(Y_1 - Y_n) - F_{NL} = 0 \quad (2.4b)$$

Seguindo a mesma solução de expansão exponencial é possível obter a Equação 2.3 para o Caso II podem ser escritas como a Equação 2.5.

$$-\Omega^2 Y_1 + i2\Omega\zeta Y_1 + i2\zeta\Omega(Y_1 - Y_2) + (2Y_1 - Y_2) = \delta_{st} \quad (2.5a)$$

$$-\Omega^2 Y_2 - i2\Omega\zeta(Y_1 - Y_2) - (Y_1 - Y_2) + i2\zeta\beta\Omega(Y_2 - Y_n) + \gamma_1(Y_2 - Y_n) + F_{NL} = 0$$

$$-\mu\Omega^2 Y_n - i2\zeta\beta\Omega(Y_2 - Y_n) - \gamma_1(Y_2 - Y_n) - F_{NL} = 0 \quad (2.5b)$$

$$(2.5c)$$

A força restauradora cúbica é expandida em variáveis reais e imaginárias conforme a solução abaixo

$$F_{NL} = F_{NL,r} + iF_{NL,i} \quad (2.6)$$

Os subscritos r e i são as partes reais e imaginárias, respectivamente, e ao expandir a força restauradora cúbica deve-se considerar o deslocamento relativo Z , diferente para cada um dos casos descritos, conforme a Equação 2.7.

$$F_{NL,r} = \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Z_i)^2 (Z_r) + (Z_r)^3 \right) \quad (2.7a)$$

$$F_{NL,i} = i \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Z_i) (Z_r)^2 + (Z_i)^3 \right) \quad (2.7b)$$

Para Caso I, $Z_r = (Y_{1,r} - Y_{n,r})$ e $Z_i = (Y_{1,i} - Y_{n,i})$, logo a Equação 2.4a, expandida em variáveis reais e imaginárias segue conforme a Equação 2.8.

$$\begin{aligned} -\Omega^2 (Y_{1,r} + i Y_{1,i}) + \gamma_1 (-Y_{n,r} - i Y_{n,i} + Y_{1,r} + i Y_{1,i}) + i 2 \zeta \beta \Omega (-Y_{n,r} - i Y_{n,i} + Y_{1,r} + i Y_{1,i}) \\ + i 2 \zeta \Omega (Y_{1,r} + i Y_{1,i}) + Y_{1,r} + i Y_{1,i} + \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,r} - Y_{n,r})^3 + (Y_{1,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{1,r} - Y_{n,r}) \right) \\ + i \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,i} - Y_{n,i})^3 + (Y_{1,r} - Y_{n,r})^2 (Y_{1,i} - Y_{n,i}) \right) = \delta_{st} \end{aligned} \quad (2.8)$$

A Equação 2.4b, expandida variáveis reais e imaginárias segue conforme a Equação 2.9.

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \mu (Y_{n,r} + i Y_{n,i}) - \gamma_1 (-Y_{n,r} - i Y_{n,i} + Y_{1,r} + i Y_{1,i}) - i 2 \zeta \beta \Omega (-Y_{n,r} - i Y_{n,i} + Y_{1,r} + i Y_{1,i}) \\ - \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,r} - Y_{n,r})^3 + (Y_{1,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{1,r} - Y_{n,r}) \right) \\ - i \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,i} - Y_{n,i}) (Y_{1,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{1,i} - Y_{n,i})^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

A Equação 2.8 e a Equação 2.9, foram expandidas de forma separar a parte real da parte imaginária, então agora se tem quatro equações para o Caso I.

Logo a Equação 2.8, separada em duas equações de forma que cada uma delas contenha variáveis reais na primeira e imaginárias na segunda, respectivamente, conforme a Equação 2.10.

$$\begin{aligned} \gamma_1 (Y_{1,r} - Y_{n,r}) + 2 \zeta \Omega \beta (Y_{n,i} - Y_{1,i}) - \Omega^2 Y_{1,r} + Y_{1,r} - 2 \zeta \Omega Y_{1,i} \\ + \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{1,r} - Y_{n,r}) + (Y_{1,r} - Y_{n,r})^3 \right) = \delta_{st} \end{aligned} \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} 2 \zeta \Omega \beta (Y_{1,r} - Y_{n,r}) + \gamma_1 (Y_{1,i} - Y_{n,i}) + 2 \zeta \Omega Y_{1,r} - \Omega^2 Y_{1,i} + Y_{1,i} \\ + \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,i} - Y_{n,i}) (Y_{1,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{1,i} - Y_{n,i})^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.10b)$$

A Equação 2.9, separada em duas equações de forma que cada uma delas contenha variáveis reais na primeira e imaginárias na segunda, respectivamente, conforme a Equação 2.11.

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \mu Y_{n,r} - \gamma_1 (Y_{1,r} - Y_{n,r}) - 2 \zeta \Omega \beta (Y_{n,i} - Y_{1,i}) \\ - \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{1,r} - Y_{n,r}) + (Y_{1,r} - Y_{n,r})^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned} -2 \zeta \Omega \beta (Y_{1,r} - Y_{n,r}) - \Omega^2 \mu Y_{n,i} - \gamma_1 (Y_{1,i} - Y_{n,i}) \\ - \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{1,i} - Y_{n,i}) (Y_{1,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{1,i} - Y_{n,i})^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.11b)$$

Para o Caso II, $Z_r = (Y_{2,r} - Y_{n,r})$ e $Z_i = (Y_{2,i} - Y_{n,i})$, logo a Equação 2.5a, expandida em variáveis reais e imaginárias segue conforme a Equação 2.12.

$$\begin{aligned} -Y_{2,r} + 2i \zeta \Omega (-Y_{2,r} - i Y_{2,i} + Y_{1,r} + i Y_{1,i}) - i Y_{2,i} - \Omega^2 (Y_{1,r} + i Y_{1,i}) \\ + 2i \zeta \Omega (Y_{1,r} + i Y_{1,i}) + 2 (Y_{1,r} + i Y_{1,i}) = \delta_{st} \end{aligned} \quad (2.12)$$

A Equação 2.5b, expandida variáveis reais e imaginárias segue conforme a Equação

2.13.

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 (Y_{2,r} + i Y_{2,i} - Y_{n,r} - i Y_{n,i}) + i 2 \beta \zeta \Omega (Y_{2,r} + i Y_{2,i} - Y_{n,r} - i Y_{n,i}) \\
& - \Omega^2 (Y_{2,r} + i Y_{2,i}) + Y_{2,r} - i 2 \zeta \Omega (-Y_{2,r} - i Y_{2,i} + Y_{1,r} + i Y_{1,i}) + i Y_{2,i} - Y_{1,r} - i Y_{1,i} \\
& + \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{2,r} - Y_{n,r})^3 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{2,r} - Y_{n,r}) \right) \\
& + i \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{2,i} - Y_{n,i}) (Y_{2,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^3 \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A Equação 2.5c, expandida variáveis reais e imaginárias segue conforme a Equação 2.14.

$$\begin{aligned}
& -\gamma_1 (Y_{2,r} + i Y_{2,i} - Y_{n,r} - i Y_{n,i}) - i 2 \beta \zeta \Omega (Y_{2,r} + i Y_{2,i} - Y_{n,r} - i Y_{n,i}) \\
& - \Omega^2 \mu (Y_{n,r} + i Y_{n,i}) - \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{2,r} - Y_{n,r})^3 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{2,r} - Y_{n,r}) \right) \\
& - i \frac{3}{4} \gamma_3 \left((Y_{2,i} - Y_{n,i}) (Y_{2,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^3 \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

A Equação 2.12, a Equação 2.13 e a Equação 2.14, foram expandidas de forma separar a parte real da parte imaginária, então agora se tem seis equações para o Caso II.

Logo a Equação 2.12, separada em duas equações de forma que cada uma delas contenha variáveis reais na primeira e imaginárias na segunda, respectivamente, conforme a Equação 2.15.

$$-Y_{2,r} + 2 \zeta \Omega (Y_{2,i} - Y_{1,i}) - \Omega^2 Y_{1,r} + 2 Y_{1,r} - 2 \zeta \Omega Y_{1,i} = \delta_{st} \tag{2.15a}$$

$$2 \zeta \Omega (Y_{1,r} - Y_{2,r}) - Y_{2,i} + 2 \zeta \Omega Y_{1,r} - \Omega^2 Y_{1,i} + 2 Y_{1,i} = 0 \tag{2.15b}$$

A Equação 2.13, separada em duas equações de forma que cada uma delas conte-
nha variáveis reais na primeira e imaginárias na segunda, respectivamente, conforme a
Equação 2.16.

$$\begin{aligned} \gamma_1 (Y_{2,r} - Y_{n,r}) - \Omega^2 Y_{2,r} + Y_{2,r} - 2\zeta\Omega (Y_{2,i} - Y_{1,i}) + 2\zeta\Omega\beta (Y_{n,i} - Y_{2,i}) - Y_{1,r} \\ + \frac{3}{4}\gamma_3 \left((Y_{2,r} - Y_{n,r})^3 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{2,r} - Y_{n,r}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\begin{aligned} 2\zeta\Omega\beta (Y_{2,r} - Y_{n,r}) - 2\zeta\Omega (Y_{1,r} - Y_{2,r}) + \gamma_1 (Y_{2,i} - Y_{n,i}) \\ - \Omega^2 Y_{2,i} + Y_{2,i} - Y_{1,i} + \frac{3}{4}\gamma_3 \left((Y_{2,i} - Y_{n,i}) (Y_{2,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.16b)$$

A Equação 2.14, separada em duas equações de forma que cada uma delas conte-
nha variáveis reais na primeira e imaginárias na segunda, respectivamente, conforme a
Equação 2.17.

$$\begin{aligned} -\gamma_1 (Y_{2,r} - Y_{n,r}) - 2\zeta\Omega\beta (Y_{n,i} - Y_{2,i}) \\ - \frac{3}{4}\gamma_3 \left((Y_{2,r} - Y_{n,r})^3 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^2 (Y_{2,r} - Y_{n,r}) \right) - \Omega^2 \mu Y_{n,r} = 0 \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} -2\zeta\Omega\beta (Y_{2,r} - Y_{n,r}) - \gamma_1 (Y_{2,i} - Y_{n,i}) \\ - \frac{3}{4}\gamma_3 \left((Y_{2,i} - Y_{n,i}) (Y_{2,r} - Y_{n,r})^2 + (Y_{2,i} - Y_{n,i})^3 \right) - \Omega^2 \mu Y_{n,i} = 0 \end{aligned} \quad (2.17b)$$

2.2 Resposta Dinâmica

Nesta seção, é apresentada uma investigação sobre os efeitos dos parâmetros não
lineares do neutralizador. Em todas as condições de simulação a ressonância linear do
neutralizador foi ajustada para $\Omega = 1$. Isso significa, que sem o parâmetro não linear
da rigidez, $\gamma_3 = 0$, o sistema primário apresentaria uma antirressonância em $\Omega = 1$.

A massa do neutralizador foi assumida como sendo 25% da massa do sistema m
(mostrada na Figura 2.1, tal que $\mu = m_n/m = 0,25$. Como resultado, $\gamma_1 = 0,25$

($k_n/k = 0,25$). O amortecimento no sistema primário também foi considerado um valor fixo em todas as simulações numéricas, usando $\zeta = 0,01$ e $\beta = c_n/c = 1$. A influência da mola não linear pode ser observada alterando a amplitude da força de excitação ou alterando o parâmetro não linear γ_3 . Neutralizadores com molas do tipo *hardening* e *softening* foram considerados ajustando $\gamma_3 > 0$ e $\gamma_3 < 0$ respectivamente.

Uma análise de bifurcação é proposta para os sistemas discretos através do método da continuação no Ambiente PyDSTool, para a obtenção da resposta em frequência dos sistemas. O apêndice A mostra especificamente como o método é utilizado para a resolução das equações diferenciais não lineares.

No Caso I, na resposta em frequência espera-se apenas de um pico de antirressonância. A resposta da estrutura primária sujeita a uma força harmônica é mostrada na Figura 2.2(a) e na Figura 2.2(b) com uma linha preta (mostrando um pico de ressonância em $\Omega = 1$) tratando-se do sistema sem o acoplamento de um neutralizador dinâmico de vibração. As linhas azul e vermelha são para o sistema com um neutralizador dinâmico de vibração linear (NDV) e um neutralizador dinâmico de vibração não linear (nNDV), respectivamente. Assim como no sistema linear, no sistema não linear é possível observar o aparecimento da antirressonância. Para o nNDV, uma configuração de *hardening* foi assumida inicialmente com $\gamma_3 = 0,005$. É possível observar que a segunda ressonância se inclina para frequências mais altas como efeito da não linearidade.

É possível observar um ‘loop’ de resposta em frequência ocorrendo no deslocamento absoluto da estrutura da Figura 2.2(a). Este ‘loop’ só aparece no deslocamento absoluto e não é observado na resposta relativa Figura 2.2(b), a visualização do laço ocorre simplesmente pelo gráfico ser apresentado em 2D e as curvas não se cruzam. A parte instável da curva (linha tracejada) aparece com uma amplitude maior que as partes estáveis na magnitude absoluta, conforme a Figura 2.2(a), sendo a parte superior da curva a parte instável da resposta em frequência, fato comprovado pela localização dos pontos limites (onde a estabilidade do sistema muda) conhecidos como pontos de bifurcação (sela-nó), efeito também discutido em Brennan e Gatti (2012). O mais importante nesta figura é

a mudança na frequência de sintonia $\Omega = 1$, influenciada pela não linearidade.

A banda de frequência de isolamento para o sistema linear está entre as frequências de intersecção da linha preta (sistema sem NDV) e a linha azul (sistema com NDV), sendo possível perceber que a utilização de um nNDV (linha vermelha) faz com que a intersecção do segundo pico de ressonância ocorra em frequências mais altas, ou seja, a banda de isolamento, torna-se maior.

Para entender a influência do parâmetro não linear na frequência de sintonia, o parâmetro γ_3 foi variado para algum intervalo de valores e ilustrado na Figura 2.2(c) e na Figura 2.2(d), é possível verificar que à medida que γ_3 aumenta, os picos se curvam para frequências mais altas, mostrando regiões onde podem ocorrer múltiplas amplitudes de resposta. Também é importante observar a mudança de cerca de 40% da frequência linear sintonizada do neutralizador de vibração (de $\Omega = 1$ passando para $\Omega \approx 1,4$) para valores maiores de γ_3 . Este efeito mostra de forma evidente que o desempenho na frequência sintonizada pode ser significativamente afetado pela não linearidade.

Conforme o valor de γ_3 aumenta, a frequência em que esse segundo pico de ressonância é gerado será cada vez maior, logo a banda de isolamento, isto é, a região entre os picos, será cada vez maior.

O efeito de uma mola *softening* no nNDV também foi investigado para o Caso I. Isso foi feito ajustando o parâmetro não linear tal que $\gamma_3 < 0$. Os resultados para diferentes valores de não linearidade são mostrados na Figura 2.2(e) e na Figura 2.2(f).

É possível verificar que à medida que o parâmetro diminui, os picos de ressonância se curvam em direção às frequências mais baixas, fazendo com que as curvas tendam para a esquerda

Nos sistemas lineares, o aumento da amplitude da força aplicada à estrutura provoca o aumento da amplitude da função de transferência e o deslocamento da curva para cima. É possível notar que embora o parâmetro não linear não mude, mas apenas a amplitude da força, que a curva torna-se mais acentuada para altas frequências, semelhante à característica de enrijecimento proporcionada pela utilização de molas *hardening*, ou

menos acentuado, ou curvado para frequências mais altas a medida que a amplitude da força é minimizada como mostrado na Figura 2.2(g) para os deslocamentos absolutos e na Figura 2.2(h) para o deslocamento relativo.

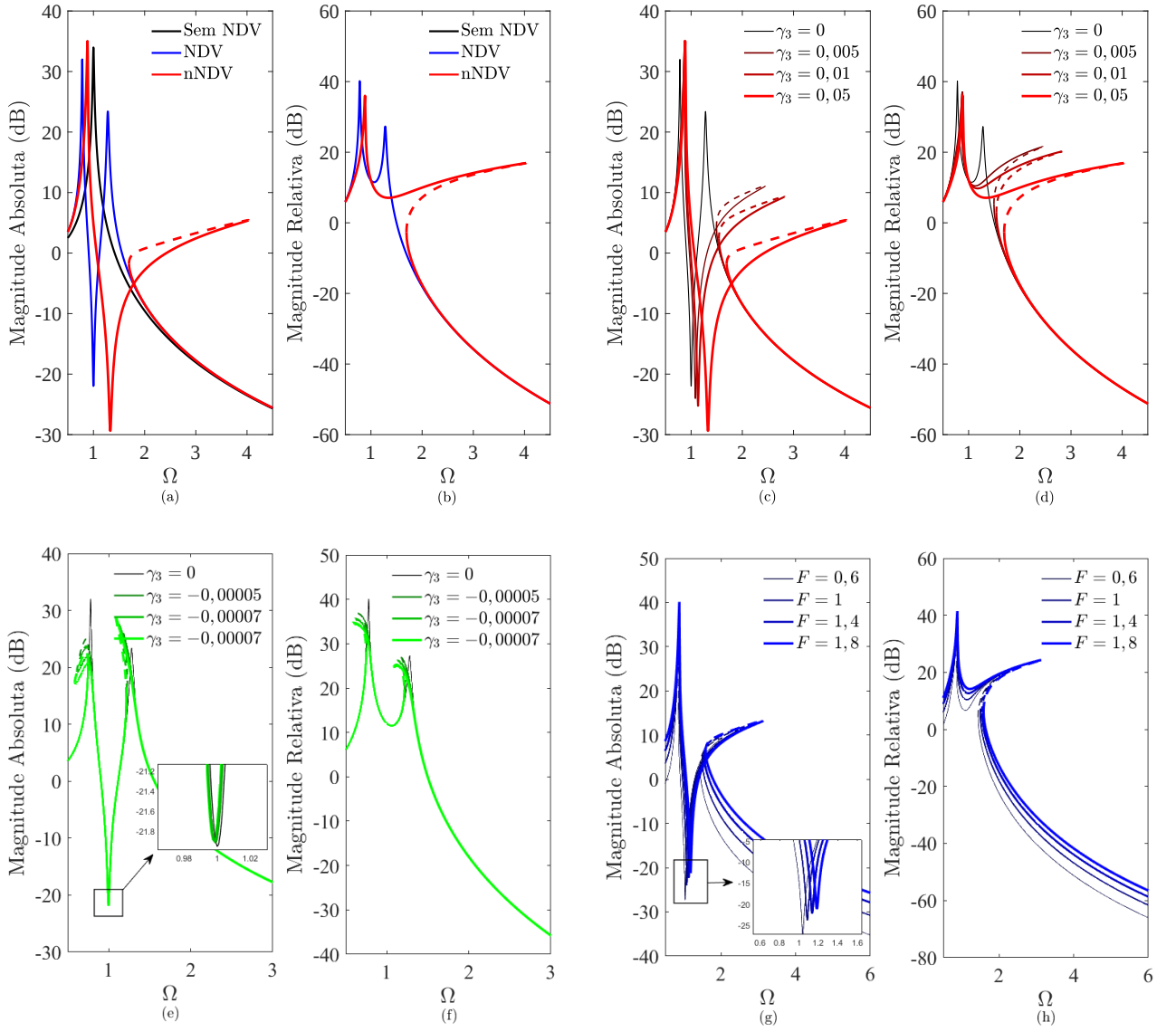


Figura 2.2: Resposta em frequência para o Caso I, (a) Comparação entre a frequência absoluta (Y_1) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV, (b) Comparação entre a frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_1|$) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV (dB ref. 1 N/m), (c) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola *hardening*, (d) Frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_1|$) para diferentes valores de γ_3 - mola *hardening* (dB ref. 1 N/m), (e) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola *softening*, (f) Frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_1|$) para diferentes valores de γ_3 - mola *softening* (dB ref. 1 N/m), (g) Resposta em frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de F - mola *hardening*, (h) Resposta em frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_1|$) para diferentes valores de F - mola *hardening* (dB ref. 1 m/N).

No Caso II, as curvas de resposta de frequência são mostradas na Figura 2.3(a) e na Figura 2.3(b), onde a linha tracejada preta é para o sistema sem a presença de um

neutralizador de vibração dinâmico (Sem NDV), as linhas azul e vermelha são para o sistema com um neutralizador dinâmico de vibração linear (NDV) e um neutralizador dinâmico de vibração não linear (nNDV), respectivamente. Assim como no sistema linear, no sistema não linear é possível observar o aparecimento de duas antirressonâncias, mas deslocadas para a direita da antirressonância do sistema linear conforme mostrado. É possível observar um laço ocorrendo no deslocamento absoluto da estrutura e na Figura 2.3(a).

A influência do parâmetro não linear no sistema pode ser observada alterando o valor do γ_3 como mostrado na Figura 2.3(c) e na Figura 2.3(d), é possível notar que quando o γ_3 aumenta, a maioria dos picos de ressonância se desloca para frequências mais altas (semelhante ao observado no Caso I), assim como deslocamento antirressonância para a direita por uma pequena quantidade.

Pode-se observar laços de resposta em frequência ocorrendo no deslocamento absoluto da estrutura em todas as curvas à medida que o parâmetro não linear é aumentado conforme mostrado na Figura 2.3(c). Este efeito não é observado no deslocamento relativo na Figura 2.3(d).

É possível variar o parâmetro não linear negativamente exatamente como no Caso I, de modo que todas as respostas apresentem deformações do tipo amolecimento em que há perda de rigidez, conforme mostrado na Figura 2.3(e) e na Figura 2.3(f), é possível verificar que à medida que o parâmetro diminui, os picos de resposta em frequência se curvam para frequências mais baixas, bem como um pequeno deslocamento da antirressonância para a esquerda, com a diminuição do parâmetro a perda de rigidez é maior, ou seja, o efeito mola diminui exatamente como no sistema de dois graus de liberdade, o amolecimento da mola causa uma região de maior instabilidade quando comparada à estrutura de dois graus, fato observado no deslocamento absoluto como mostrado na Figura 2.3(e), fazendo com que as curvas tendam para a esquerda. Com uma maior perda de rigidez e aumento do grau de liberdade da estrutura, seria como se o neutralizador fosse acoplado à estrutura apenas pelo amortecedor.

É possível notar que embora o parâmetro não linear não mude, mas apenas a amplitude da força aplicada à estrutura que a curva se torna mais acentuada à direita como na característica de endurecimento como mostrado na Figura 2.3(g) e na Figura 2.3(h) para os deslocamentos absolutos é possível notar a formação de laços de resposta em frequência nas curvas conforme mostrado na Figura 2.3(g) e na Figura 2.3(h) para o deslocamento relativo.

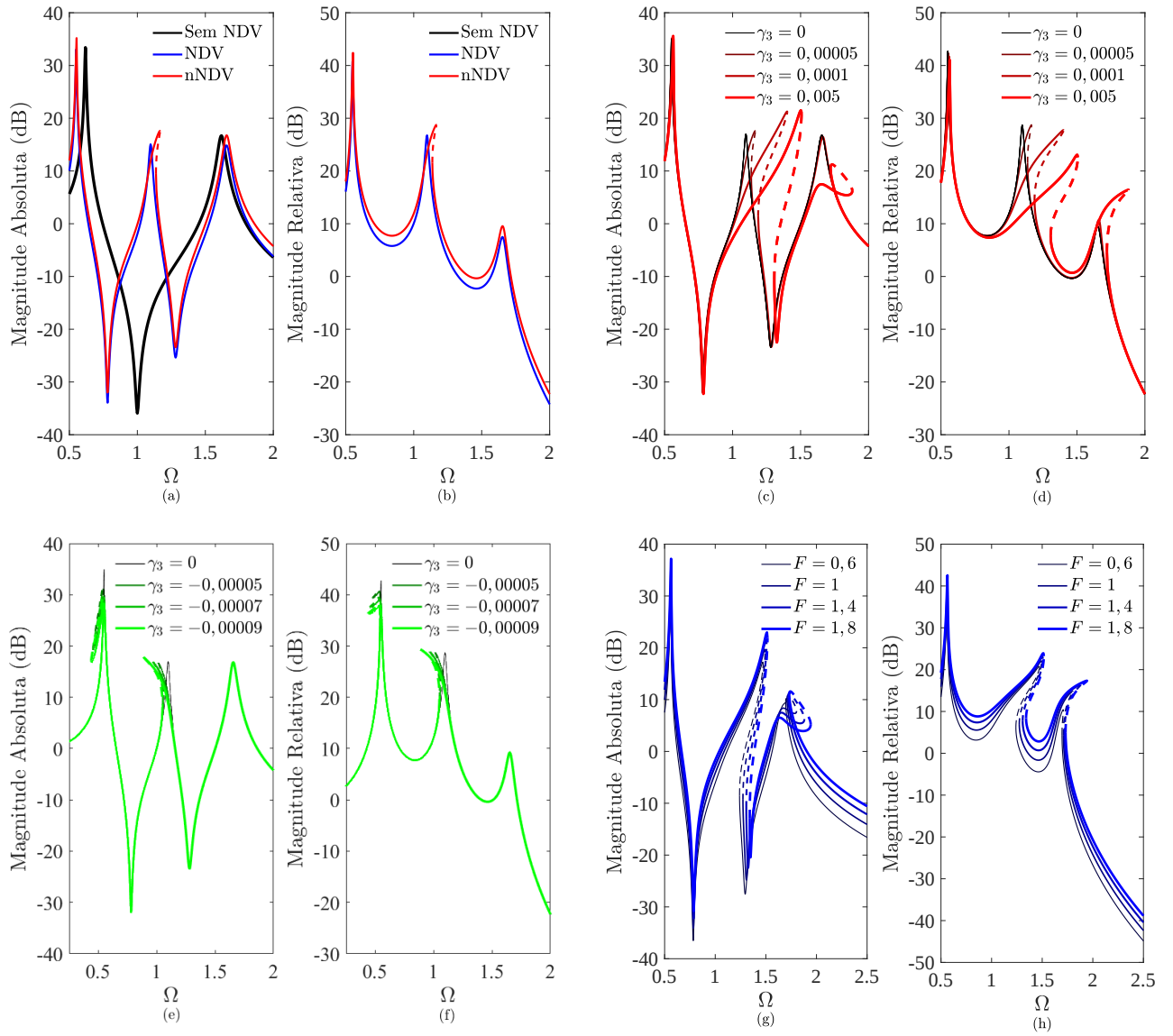


Figura 2.3: Resposta em frequência para o Caso II, (a) Comparação entre a frequência absoluta (Y_1) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV, (b) Comparação entre a frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_2|$) com o sistema Sem NDV, com o NDV e com o nNDV (dB ref. 1 N/m), (c) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola *hardening*, (d) Frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_2|$) para diferentes valores de γ_3 - mola *hardening* (dB ref. 1 N/m), (e) Frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de γ_3 - mola *softening*, (f) Frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_2|$) para diferentes valores de γ_3 - mola *softening* (dB ref. 1 N/m), (g) Resposta em frequência absoluta (Y_1) para diferentes valores de F - mola *hardening*, (h) Resposta em frequência relativa ($|Z| = |Y_n - Y_2|$) para diferentes valores de F - mola *hardening* (dB ref. 1 m/N).

2.3 Comparação com o Método Runge-Kutta

Com o intuito de validar a resolução obtida pelo método da continuação, propõe-se uma comparação entre as respostas dinâmicas obtidas, fazendo a resolução das equações diferenciais não lineares utilizando o método runge-kutta de quarta ordem (RK4). Considerando um sistema de um grau de liberdade, conforme a Figura 2.4, onde a rigidez apresenta não linearidade do tipo cúbica.

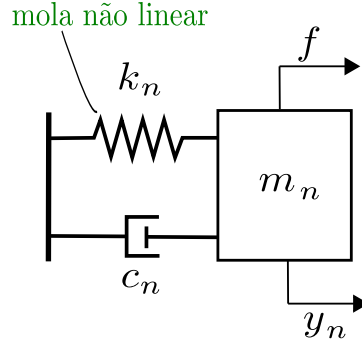


Figura 2.4: Modelo de um sistema de um grau de liberdade com rigidez não linear cúbica.

A equação de movimento para o sistema da Figura 2.4 é definida em função do deslocamento y_n , uma força harmônica $f = F e^{i\omega t}$ é aplicada na massa e a força restauradora cúbica pode ser definida conforme a Equação 2.18.

$$f_n = k_1 y_n \pm k_3 y_n^3 \quad (2.18)$$

Assumindo o movimento harmônico para a massa da forma $y_j = Y_j e^{i\omega t}$, a equação que descreve o movimento da Figura 2.4 pode ser escritas como a Equação 2.19.

$$-\Omega^2 Y_n + i2\Omega\zeta Y_n + Y_n + F_{NL} = \delta_{st} \quad (2.19)$$

A força restauradora cúbica é expandida em variáveis reais e imaginárias conforme a solução apresentada pela Equação 2.20.

$$F_{NL} = F_{NL,r} + iF_{NL,i} \quad (2.20)$$

Os subscritos r e i são as partes real e imaginária, respectivamente, e ao expandir a força restauradora cúbica deve-se considerar o deslocamento Y_n .

A Equação 2.19, expandida em variáveis reais e imaginárias, segue conforme a Equação 2.21.

$$-\Omega^2 Y_{n,r} - 2\Omega\zeta Y_{n,i} + Y_{n,r} + \frac{3}{4}\gamma_3(Y_{n,r}^3 + Y_{n,i}^2 Y_{n,r}) = \delta \quad (2.21a)$$

$$-\Omega^2 Y_{n,i} + 2\Omega\zeta Y_{n,r} + Y_{n,i} + \frac{3}{4}\gamma_3(Y_{n,i} Y_{n,r}^2 + Y_{n,i}^3) = 0 \quad (2.21b)$$

Com as equações expandidas em variáveis reais e imaginários (domínio complexo) é possível fazer uma análise de bifurcação através do método da continuação, para obter a resposta em frequência do sistema, conforme a Figura 2.5.

A linha vermelha retrata o sistema de um grau de liberdade com rigidez não linear do tipo cúbica, onde as equações são resolvidas pelo método da continuação, e os marcadores azuis retratam o mesmo sistema, mas utilizando o método RK4, onde para obter a solução foi utilizado um passo de tempo de 0,001. Foi definido um passo pequeno para que o resultado se apresentasse com uma maior precisão. O RK4 foi utilizado por ser um excelente método de integração numérica, em que ocorre uma aproximação da mudança de uma determinada função ao longo do tempo, onde as equações diferenciais que governam o sistema são conhecidas.

Observa-se que ambos os métodos são correspondentes quando comparados. A medida que a frequência aumenta, a resposta se torna mais destorcida se afastando da forma linear (linha preta), o que continua até que a amplitude atinja um valor crítico, a partir deste ponto para um conjunto de valores de Ω a resposta apresenta três soluções reais.

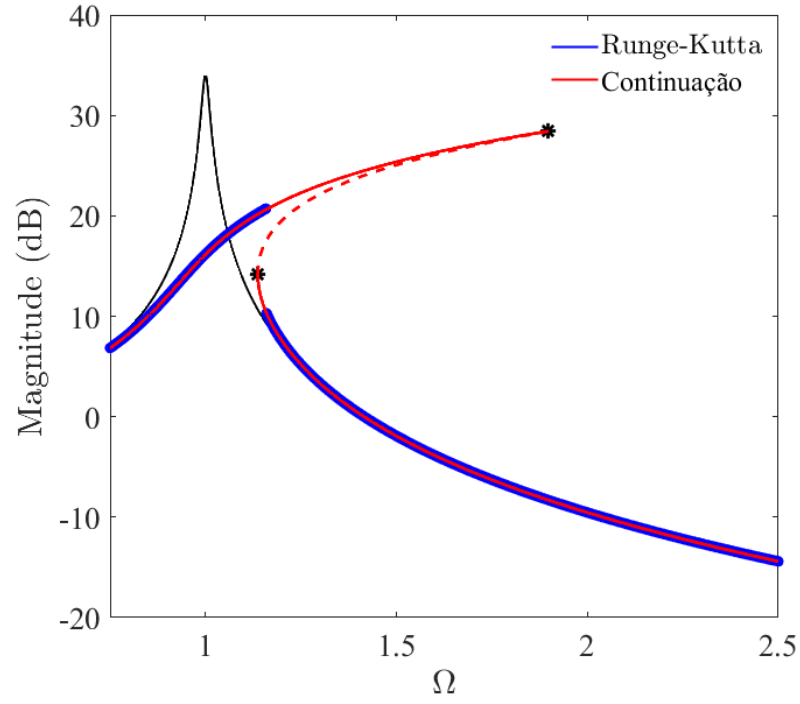


Figura 2.5: Resposta em frequência absoluta (Y_n) com, $f = 1$, $m_n = 1$, $\zeta = 0,04$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,005$ (dB ref. 1 N/m).

Capítulo 3

SISTEMAS CONTÍNUOS

Este capítulo apresenta o estudo de sistemas contínuos unidimensionais com o acoplamento de um neutralizador não linear. Os sistemas contínuos analisados são uma barra e uma viga. O neutralizador apresenta não linearidade do tipo cúbica de rigidez, contém um amortecedor viscoso e uma massa auxiliar. As equações de movimento são obtidas por meio do método dos elementos espectrais.

Uma análise de bifurcação também foi proposta para a obtenção das respostas em frequência dos sistemas contínuos, utiliza-se o método da continuação no ambiente PyDSTool (o apêndice A apresenta o funcionamento do método em questão). Da mesma forma que ao feito em sistemas discretos, duas condições foram utilizadas para as simulações. Alterando o parâmetro não linear γ_3 , ou seja, utilizando uma mola do tipo *hardening* e uma mola do tipo *softening*.

No estudo de sistemas contínuos se faz necessário o uso do amortecimento estrutural η , conhecido também como fator de perda da estrutura, sendo este introduzido nos sistemas, transformando o módulo de young em complexo, ou seja, $E = E_0(1 + i\eta)$. A razão de massas também foi adotada como $\mu = 0,25$, dentro do limite $(0,1 \leq \mu \leq 0,25)$.

3.1 Modelagem matemática barra em vibração longitudinal

O método de formulação de elementos espectrais para barras é apresentado conforme proposto por Lee (2009), onde a vibração longitudinal livre de uma barra uniforme é representada pela Equação 3.1

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0, \quad (3.1)$$

onde o $u(x, t)$ é o deslocamento longitudinal da barra, E é o Modulo de Young's, A é a área da seção transversal da barra, ρ é a densidade mássica. A aspa (') denota a derivada com a respectiva coordenada espacial x . A força axial interna é dada por

$$N_t(x, t) = EAu'(x, t), \quad (3.2)$$

onde o subscrito t é usado para denotar a quantidade no domínio do tempo.

Assumindo a solução conforme a Equação 3.3

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (3.3)$$

onde $U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t}$ é o coeficiente de Fourier limitado em $n=0$, N é o número de amostras, ω_n é a frequência natural e t é o tempo. Substituindo a Equação 3.3 na Equação 3.1, é possível obter a seguinte Equação 3.4.

$$EAU'' + \omega^2 \rho AU = 0 \quad (3.4)$$

A solução da Equação 3.4 pode ser dada pela Equação 3.5.

$$U(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (3.5)$$

Logo, substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.4, a relação de dispersão é encontrada e o número de onda k_L é obtido conforme a Equação 3.6.

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (3.6)$$

Com a definição do número de onda, k_L , a subseção a seguir explora a matriz de rigidez dinâmica da barra em vibração longitudinal sem restrições impostas.

Assumindo-se que a barra é um elemento finito de comprimento L , a solução geral do modelo é obtida para definir a matriz do elemento espectral.

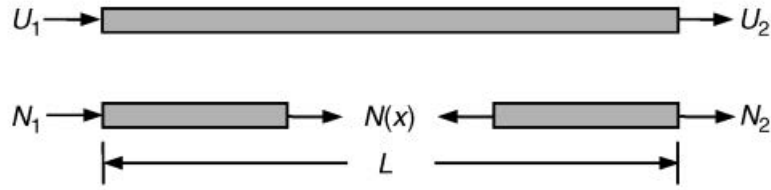


Figura 3.1: Elemento de barra com comprimento L e respectivas forças, deslocamento e deslocamento angular. (LEE, 2009)

$$D_b(\omega) = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde $D_{11} = D_{22} = k_L L \cot(k_L L)$ e $D_{12} = D_{21} = -k_L L \csc(k_L L)$ respectivamente.

3.1.1 Barra com neutralizador

Visto que a solução geral do modelo da barra foi apresentado, agora é possível apresentar a configuração das equações com o acoplamento do nNDV. A metodologia é aplicada apresentando o comportamento dinâmico de uma barra linear uniforme em vibração longitudinal com comprimento L , com as condições de contorno impostas conforme a Figura 3.2. A extremidade esquerda ($x = 0$) da barra encontra-se engastada, e a extremidade direita ($x = L$) está sujeita a uma força de magnitude $F_2 = 1$, e está conectada a um nNDV, com não linearidade do tipo cúbica de rigidez. A mola não

linear apresenta os coeficientes de rigidez linear e não linear como s_1 e s_3 , respectivamente. O amortecimento viscoso e a massa do nNDV, são representados por c_n e m_n . O deslocamento da extremidade direita da barra é denotado por U_2 e o deslocamento da massa do neutralizador é denotado por U_3 .

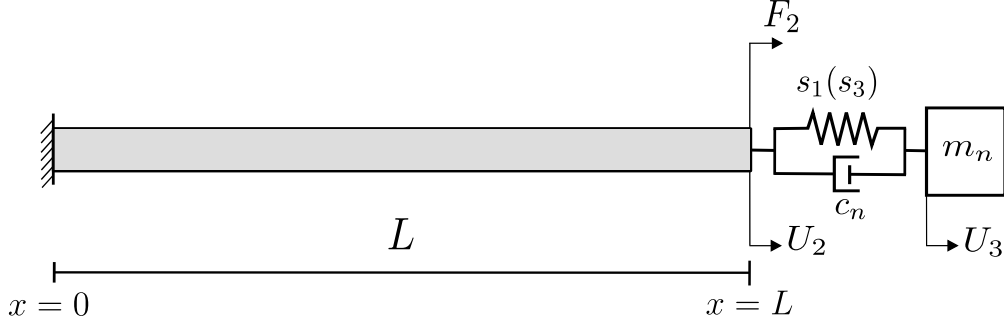


Figura 3.2: Forças e deslocamentos atuantes em uma barra com comprimento L , engastada em uma extremidade, e na outra com o acoplamento do neutralizador dinâmico de vibrações não linear.

O equilíbrio de forças para o problema da Figura 3.2 é definido conforme a Equação 3.8.

$$k_L L \cot(k_L L) U_2 + \zeta(U_2 - U_3) + \gamma_1(U_2 - U_3) + F_{NL} = \hat{F}_2 \quad (3.8a)$$

$$\mu U_3 + \zeta(U_2 - U_3) + \gamma_1(U_2 - U_3) + F_{NL} = 0, \quad (3.8b)$$

onde F_{NL} é a componente de força devido ao termo não linear de mola que depende do deslocamento relativo, $\mu = \frac{m_n k_L^2 L}{\rho A}$, $\zeta = \frac{c_n k_L L}{A \sqrt{\rho E}}$, $\hat{F}_2 = \frac{F_2 L}{EA}$, $\gamma_1 = \frac{s_1 L}{EA}$ e $\gamma_3 = \frac{s_3 L^3}{EA}$.

A Equação 3.8 será definida em variáveis complexas e expandida em quatro equações contendo as componentes reais e imaginárias, seguindo a Equação 3.9.

$$U_2 = U_{2,r} + iU_{2,i} \quad (3.9a)$$

$$U_3 = U_{3,r} + iU_{3,i} \quad (3.9b)$$

$$F_{NL} = F_{NL,r} + iF_{NL,i} \quad (3.9c)$$

Ou seja, substituindo a Equação 3.9 na Equação 3.8, o equilíbrio das forças reais e imaginárias das equações são definidas conforme a Equação 3.10.

$$k_L L \cot(k_L L) U_{2,r} + \zeta(U_{2,r} - U_{3,r}) + \gamma_1(U_{2,r} - U_{3,r}) + F_{NL,r} = \hat{F}_2 \quad (3.10a)$$

$$k_L L \cot(k_L L) U_{2,i} + \zeta(U_{2,i} - U_{3,i}) + \gamma_1(U_{2,i} - U_{3,i}) + F_{NL,i} = 0 \quad (3.10b)$$

$$\mu U_{3,r} + \zeta(U_{2,r} - U_{3,r}) + \gamma_1(U_{2,r} - U_{3,r}) + F_{NL,r} = 0 \quad (3.10c)$$

$$\mu U_{3,i} + \zeta(U_{2,i} - U_{3,i}) + \gamma_1(U_{2,i} - U_{3,i}) + F_{NL,i} = 0, \quad (3.10d)$$

onde $F_{NL,r} = \frac{3}{4} \gamma_3 \left((U_{2,r} - U_{3,r})^3 + (U_{2,r} - U_{3,r})(U_{2,i} - U_{3,i})^2 \right)$
e $F_{NL,i} = \frac{3}{4} \gamma_3 \left((U_{2,i} - U_{3,i})^3 + (U_{2,i} - U_{3,i})(U_{2,r} - U_{3,r})^2 \right).$

3.1.2 Resposta em frequência para barra com neutralizador

Na Figura 3.3, a linha preta retrata o sistema sem o acoplamento de NDV e a linha azul o sistema com o acoplamento de um NDV linear e a linha vermelha o sistema com o acoplamento de um nNDV, as linhas sólidas e tracejadas correspondem aos ramos estáveis e instáveis na resposta em frequência do sistema, respectivamente, e os “*” referem-se aos pontos de bifurcação sela-nó (BSN).

É importante observar a mudança de cerca de 80% da frequência linear sintonizada do neutralizador de vibração (de $k_L L = 1$ passando para $k_L L \approx 1,8$) para um elevado valor de γ_3 . Este efeito mostra de forma evidente que o desempenho na frequência sintonizada pode ser significativamente afetado pela não linearidade.

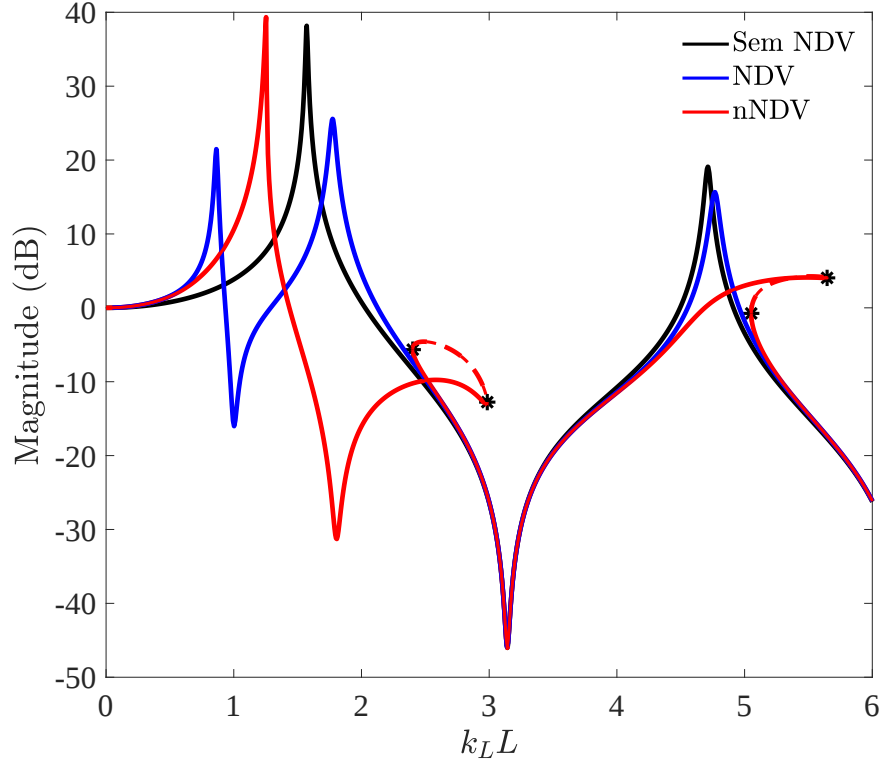


Figura 3.3: Magnitude da função de receptância (U_2/F_2) com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$, $\gamma_1 = 0,25$ e $\gamma_3 = 0,01$ (dB ref. 1 m/N).

Rigidez não linear do tipo *hardenig*

Os resultados para diferentes valores de não linearidade são mostrados na Figura 3.10. É possível notar que quando o γ_3 aumenta, a maioria dos picos de ressonância se desloca para frequências mais altas, onde a resposta se afasta da forma linear, bem como a antirressonância mesmo que em pequenas proporções. É possível notar também um aumento da amplitude no primeiro pico de ressonância, e uma queda no segundo.

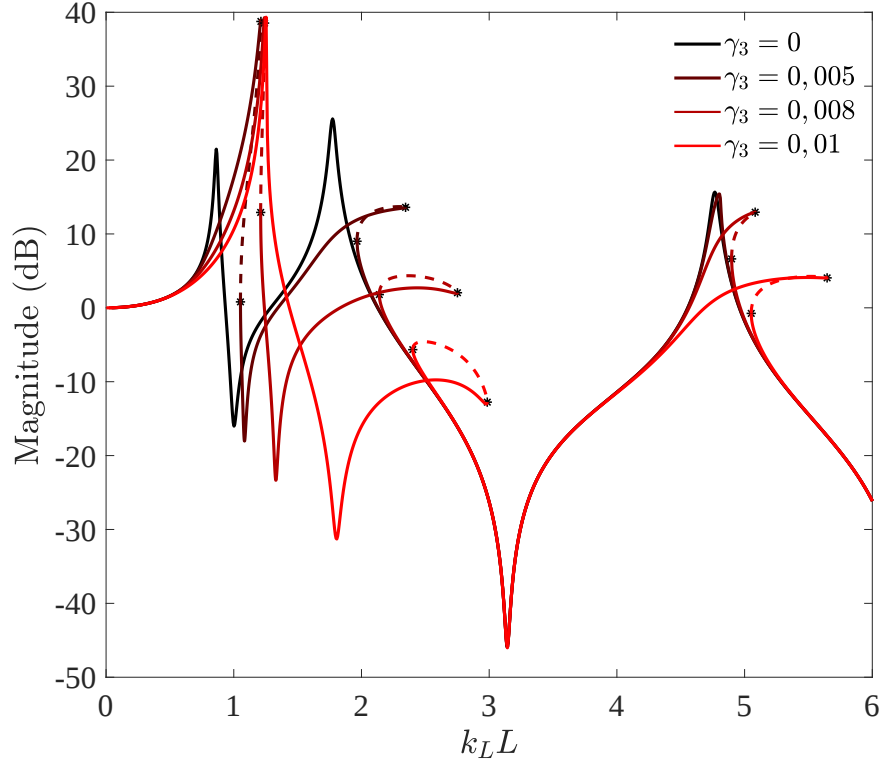


Figura 3.4: Magnitude da função de receptância (U_2/F_2) para diferentes valores positivos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ e $\gamma_1 = 0,25$ (dB ref. 1 m/N).

Rigidez não linear do tipo *softening*

É possível variar o parâmetro não linear negativamente para observar o efeito de uma mola *softening*, ajustando $\gamma_3 < 0$, conforme a Figura 3.11. É possível verificar que à medida que o parâmetro diminui, os picos de ressonância se curvam em direção às frequências mais baixas, bem como o deslocamento da antirressonância em pequenas proporções da forma linear, se tornando cada vez mais distorcida a medida que atinja valores críticos. Sendo possível notar também um aumento da amplitude no segundo pico de ressonância, e uma queda no primeiro.

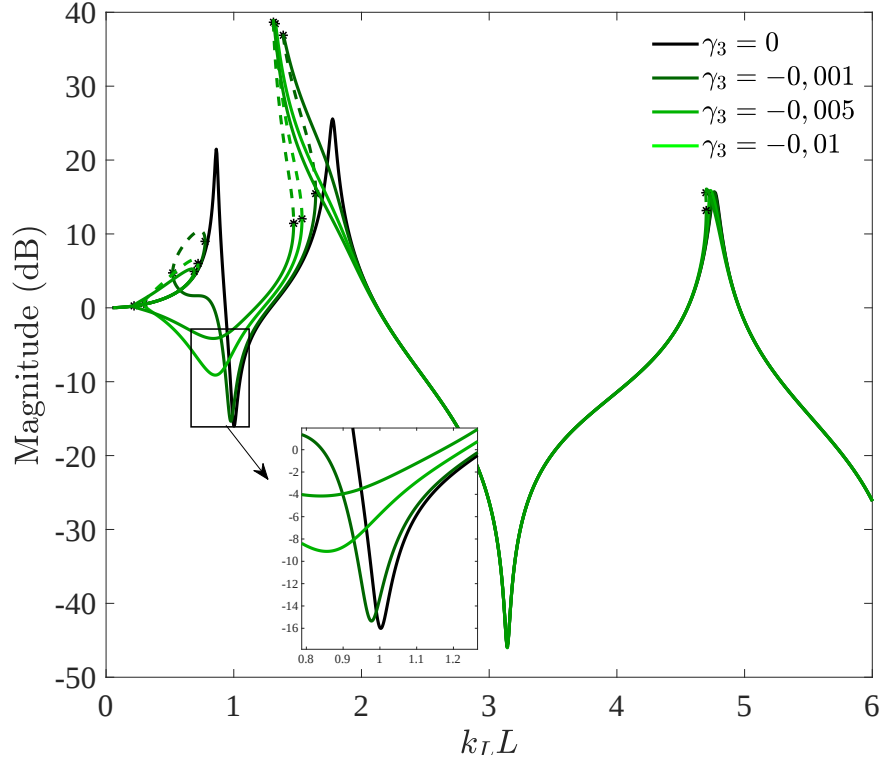


Figura 3.5: Magnitude da função de receptância (U_2/F_2) para diferentes valores negativos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ e $\gamma_1 = 0,25$ (dB ref. 1 m/N).

O uso de uma mola *softening* evidencia uma maior instabilidade no sistema, por meio da observação da resposta em frequência quando o parâmetro não linear é muito pequeno. É possível destacar às regiões de biestabilidade comparando os valores de γ_3 nas mesmas proporções com uma mola *hardening* e uma mola *softening*, para uma melhor visualização.

Utilizar uma mola *softening* faz com que os pontos de bifurcação sela-nó aumentem de forma não linear mas previsível, pois estes pontos tendem as baixas frequências, mas o valor da magnitude aumenta proporcionalmente com a diminuição da rigidez. A diminuição da rigidez aumenta a faixa de frequência onde se evidencia a biestabilidade do sistema, tomando como base apenas os valores de menor e maior não linearidade, ou seja, $\gamma_3 = -0,001$ e $\gamma_3 = -0,01$. É possível visualizar que quando se usa uma mola *hardening* a faixa de frequência onde se evidencia a biestabilidade do sistema não é tão grande como observado na Figura 3.6, que retrata as regiões onde há três estados

estacionários ocorrendo no sistema para uma única frequência, dois deles são estáveis e um instável, por esta razão o nome de biestabilidade. Os resultados correspondem com o comportamento esperado intuitivamente nas baixas frequências.

O pico de frequência considerando $\gamma_3 = -0,01$ começa a subir (como se houvesse uma espécie de barreira que impede a curvatura e a faz subir), significando que o limite para frequências negativas esteja próximo. Uma possível explicação é que o valor de γ_3 é extrapolado negativamente, fazendo com que o efeito da mola diminua muito, e o amolecimento causa uma região de muita instabilidade.

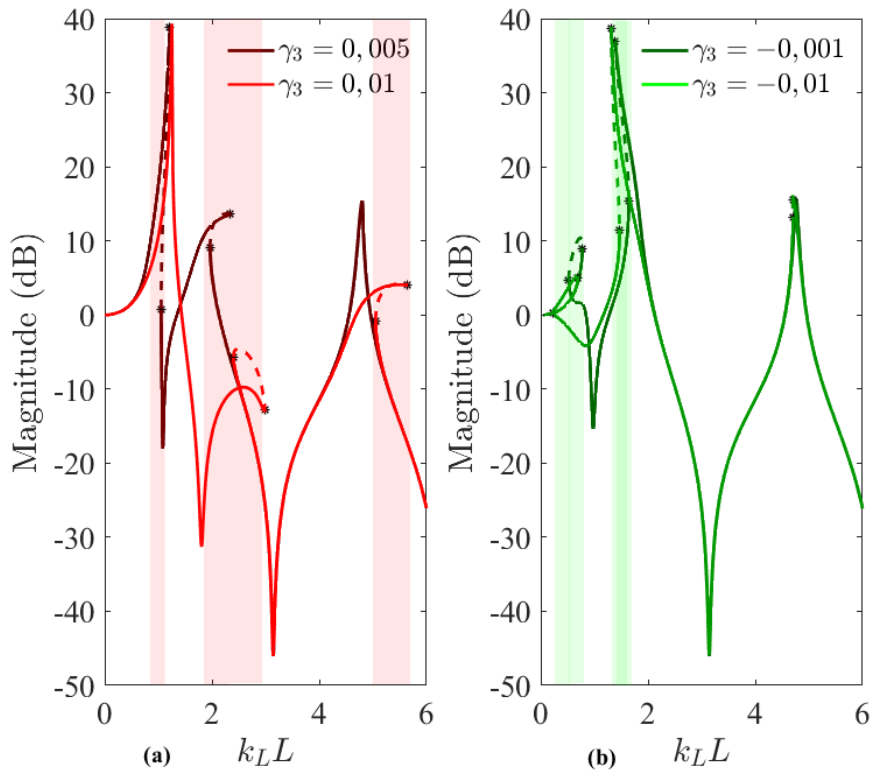


Figura 3.6: Magnitude da função de receptância (U_2/F_2). (a) Mola *hardening*. (b) Mola *softening* (dB ref. 1 m/N).

Este comportamento oposto entre a utilização das duas molas se dá, pois, uma mola *softening*, é responsável por causar um amolecimento no sistema, tornando-o menos rígido, o que ocasiona uma maior instabilidade como foi observado. A utilização de uma mola *hardening* é responsável por endurecer o sistema, tornando-o mais rígido, ou seja,

menos suscetível a grandes instabilidades como foi observado.

3.2 Modelagem matemática viga em flexão dinâmica

Nesta seção, é apresentado o método de formulação de elementos espectrais para vigas finas conforme proposto por Lee (2009). A vibração de flexão livre de uma viga Bernoulli-Euler é representada pela Equação 3.11

$$EIw'''' + \rho A\ddot{w} = 0, \quad (3.11)$$

onde $w(x, t)$ é o deslocamento transversal, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da viga, A é a área da seção transversal da viga, ρ é a densidade de massa. A força cortante transversal interna e o momento fletor são representados pela Equação 3.12.

$$M_t(x, t) = EIw''(x, t) \quad (3.12)$$

$$Q_t(x, t) = -EIw'''(x, t) \quad (3.13)$$

A solução da Equação 3.12 na forma espectral é dado pela Equação 3.14.

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.14)$$

Substituindo a Equação 3.14 na Equação 3.12, é possível obter a Equação 3.15.

$$EIW'''' - \omega^2 \rho AW = 0 \quad (3.15)$$

Assim, a solução geral da Equação 3.15 é dado pela Equação 3.16.

$$W(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (3.16)$$

Substituindo a Equação 3.16 na Equação 3.15, o número de onda, k_F é obtido conforme a Equação 3.17.

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.17)$$

À solução encontrada para o número de onda, é conhecida também como propagação de feixe e modos não propagantes.

Assumindo um elemento de viga finito de comprimento L , Figura 3.7, a solução do modelo é obtida para uma condição livre-livre sendo apresentada para definir a matriz do elemento espectral.

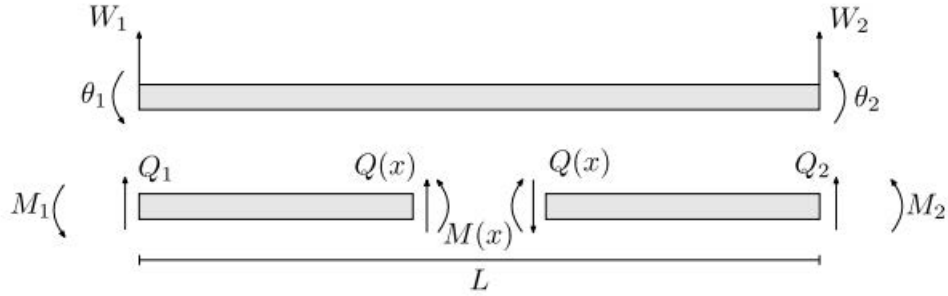


Figura 3.7: Elemento de viga com comprimento L e respectivas forças, deslocamento e deslocamento angular. (LEE, 2009)

$$S_v(\omega) = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde $S_{11} = S_{33} = \Delta b k_F^3 L^3 (\cos(k_F L) \sinh(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L))$,

$$S_{22} = S_{44} = \Delta b k_F L^3 (-\cos(k_F L) \sinh(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)),$$

$$S_{21} = S_{12} = -S_{34} = \Delta b L^3 k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L),$$

$$S_{13} = -\Delta b k_F^3 L^3 (\sin(k_F L) + \sinh(k_F L)),$$

$$S_{14} = -S_{23} = \Delta b L^3 k_F^2 (-\cos(k_F L) + \cosh(k_F L)),$$

$$S_{24} = \Delta b k_F L^3 (-\sin(k_F L) + \sinh(k_F L)) \text{ e}$$

$$\Delta b = \frac{1}{1 - \cos(k_F L) \cosh(k_F L)} \text{ respectivamente.}$$

3.2.1 Viga com neutralizador

Visto que a solução geral do modelo da viga foi apresentado, agora é possível apresentar a configuração das equações com o acoplamento do nNDV. A metodologia é aplicada apresentando o comportamento dinâmico de uma viga linear uniforme em vibração transversal com comprimento L , com as condições de contorno impostas conforme a Figura 3.8.

A extremidade esquerda ($x = 0$) da viga encontra-se engastada, e a extremidade direita ($x = L$) está sujeita a uma força de magnitude $F_2 = 1$, e está conectada a um nNDV, com não linearidade do tipo cúbica de rigidez. A mola não linear apresenta os coeficientes de rigidez linear e não linear como s_1 e s_3 , respectivamente. O amortecimento viscoso e a massa do nNDV, são representados por c_n e m_n . O deslocamento da extremidade direita da viga é denotado por W_2 e o deslocamento da massa do neutralizador é denotado por W_3 .

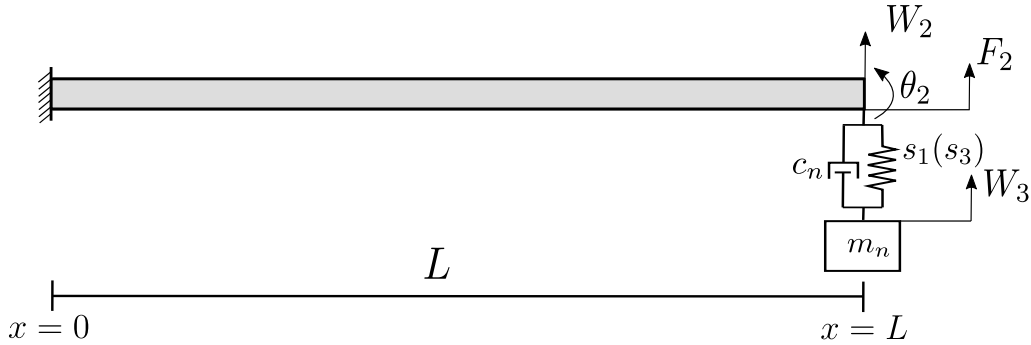


Figura 3.8: Forças e deslocamentos atuantes em uma viga com comprimento L , engastada em uma extremidade, e na outra com o acoplamento do neutralizador dinâmico de vibrações não linear.

O equilíbrio de forças para o problema da Figura 3.8 é definido conforme a Equação 3.19.

$$\begin{aligned}
& L^3 \Delta b k_F^3 (\cos(k_F L)(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)) W_2 \\
& - L^3 \Delta b k_F k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L) \theta_2 \\
& + \gamma_1 (W_2 - W_3) + \zeta (W_2 - W_3) + F_{NL} = \hat{F}_2
\end{aligned} \tag{3.19a}$$

$$\begin{aligned}
& - L^3 \Delta b k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L) W_2 \\
& + L^3 \Delta b k_F (-\cos(k_F L)(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)) \theta_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.19b}$$

$$\mu W_3 + \gamma_1 (W_2 - W_3) + \zeta (W_2 - W_3) + F_{NL} = 0, \tag{3.19c}$$

onde F_{NL} é a componente de força devido ao termo não linear de mola que depende do deslocamento relativo, $\mu = \frac{m_n k_F^4 L^3}{\rho A}$, $\zeta = \frac{c_n k_F^2 L^3}{\sqrt{\rho A E I}}$, $\hat{F}_2 = \frac{F_2 L^3}{EI}$, $\gamma_1 = \frac{s_1 L^3}{EI}$ e $\gamma_3 = \frac{s_3 L^5}{EI}$.

A Equação 3.19 é definida em variáveis complexas sendo expandidas em seis equações contendo os componentes reais e imaginários seguindo a Equação 3.20.

$$W_2 = W_{2,r} + iW_{2,i} \tag{3.20a}$$

$$\theta_2 = \theta_{2,r} + i\theta_{2,i} \tag{3.20b}$$

$$W_3 = W_{3,r} + iW_{3,i} \tag{3.20c}$$

$$F_{NL} = F_{NL,r} + iF_{NL,i} \tag{3.20d}$$

Logo, substituindo a Equação 3.20 na Eq. Equação 3.19, o equilíbrio das forças reais e imaginárias das equações são definidas conforme a Equação 3.21, dobrando o número de equações a serem resolvidas.

$$\begin{aligned}
& L^3 \Delta b k_F^3 (\cos(k_F L)(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)) W_{2,r} \\
& - L^3 \Delta b k_F k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L) \theta_{2,r} \\
& + \zeta(W_{2,r} - W_{3,r}) + \gamma_1(W_{2,r} - W_{3,r}) + F_{NL,r} = \hat{F}_2
\end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$\begin{aligned}
& L^3 \Delta b k_F^3 (\cos(k_F L)(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)) W_{2,i} \\
& - L^3 \Delta b k_F k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L) \theta_{2,i} \\
& + \zeta(W_{2,i} - W_{3,i}) + \gamma_1(W_{2,i} - W_{3,i}) + F_{NL,i} = 0
\end{aligned} \tag{3.21b}$$

$$\begin{aligned}
& L^3 \Delta b k_F (-\cos(k_F L)(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)) \theta_{2,r} \\
& - L^3 \Delta b k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L) W_{2,r} = 0
\end{aligned} \tag{3.21c}$$

$$\begin{aligned}
& L^3 \Delta b k_F (-\cos(k_F L)(k_F L) + \sin(k_F L) \cosh(k_F L)) \theta_{2,i} \\
& - L^3 \Delta b k_F^2 \sin(k_F L) \sinh(k_F L) W_{2,i} = 0
\end{aligned} \tag{3.21d}$$

$$\mu W_{3,r} + \zeta(W_{2,r} - W_{3,r}) + \gamma_1(W_{2,r} - W_{3,r}) + F_{NL,r} = 0 \tag{3.21e}$$

$$\mu W_{3,i} + \zeta(W_{2,i} - W_{3,i}) + \gamma_1(W_{2,i} - W_{3,i}) + F_{NL,i} = 0, \tag{3.21f}$$

onde $F_{NL,r} = \frac{3}{4} \gamma_3 \left((W_{2,r} - W_{3,r})^3 + (W_{2,r} - W_{3,r})(W_{2,i} - W_{3,i})^2 \right)$
e $F_{NL,i} = \frac{3}{4} \gamma_3 \left((W_{2,i} - W_{3,i})^3 + (W_{2,i} - W_{3,i})(W_{2,r} - W_{3,r})^2 \right).$

3.2.2 Resposta em frequência para viga com neutralizador

A resposta em frequência da estrutura é mostrada na Figura 3.9 onde a linha preta retrata o sistema sem o acoplamento de NDV e a linha azul o sistema com o acoplamento de um NDV linear e a linha vermelha o sistema com o acoplamento de um nNDV, as linhas sólidas e tracejadas correspondem aos ramos estáveis e instáveis na resposta em frequência do sistema, respectivamente, e os “*” referem-se aos pontos de bifurcação sela-nó (BSN).

É importante notar que a mudança da frequência linear sintonizada do neutralizador

de vibração (de $k_FL = 2$ passando para $k_FL \approx 2,2$) cerca de 20%, é menor em vigas onde o movimento de deslocamento é transversal.

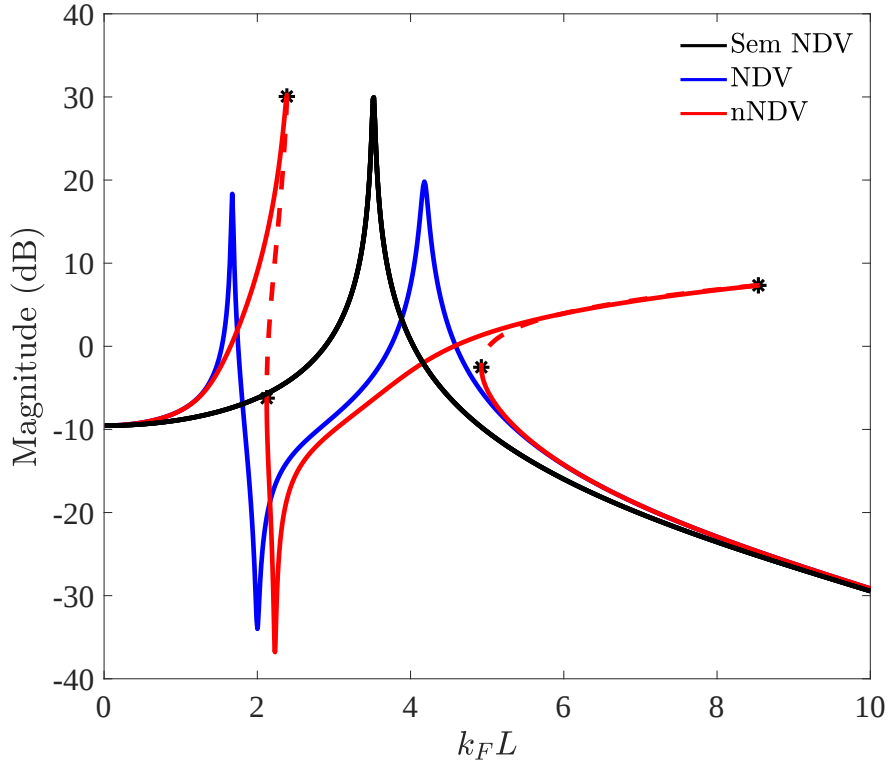


Figura 3.9: Magnitude da função de receptância (W_2/F_2) com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,5$ (dB ref. 1 m/N).

Rigidez não linear do tipo *hardening*

Para verificar a influência do parâmetro não linear no sistema, altera-se o valor do γ_3 , incrementando gradualmente para notar que mudanças ele causa, sendo possível variar positivamente para evidenciar o efeito de uma mola *hardening*. Os resultados para diferentes valores de não linearidade são mostrados na Figura 3.10 sendo possível notar que quando o γ_3 aumenta, a maioria dos picos de ressonância se desloca para frequências mais altas, bem como a antirressonância, é possível notar também um aumento da amplitude no primeiro pico de ressonância, e uma queda no segundo, como exatamente observado na barra em vibração longitudinal.

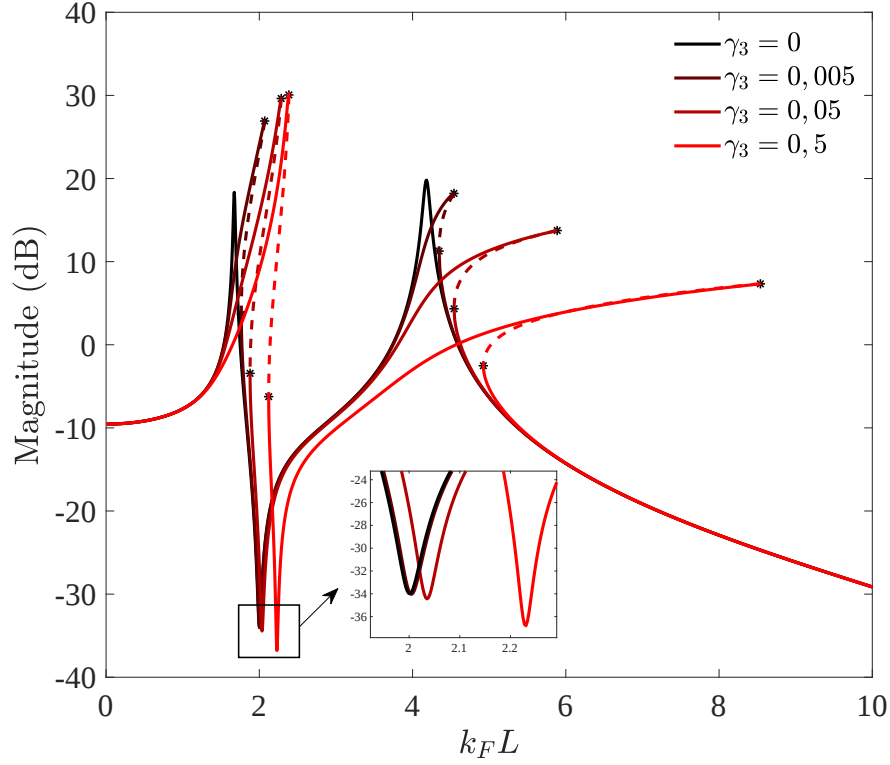


Figura 3.10: Magnitude da função de receptância (W_2/F_2) para diferentes valores positivos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ $\gamma_1 = 1$ (dB ref. 1 m/N).

Rigidez não linear do tipo *softening*

É possível variar o parâmetro não linear negativamente para observar o efeito de uma mola *softening*, ajustando $\gamma_3 < 0$. Os resultados para diferentes valores de não linearidade são mostrados na Figura 3.11. É possível verificar que à medida que o parâmetro diminui, os picos de ressonância se curvam em direção às frequências mais baixas, bem como o deslocamento da antirressonância em pequenas proporções. Nota-se um aumento da amplitude no segundo pico de ressonância, e uma queda no primeiro, mas é evidente que quando a rigidez é diminuída muito a antirressonância desaparece, evidenciando uma elevada instabilidade, o que pode ser comprovado com estudo mais efetivo.

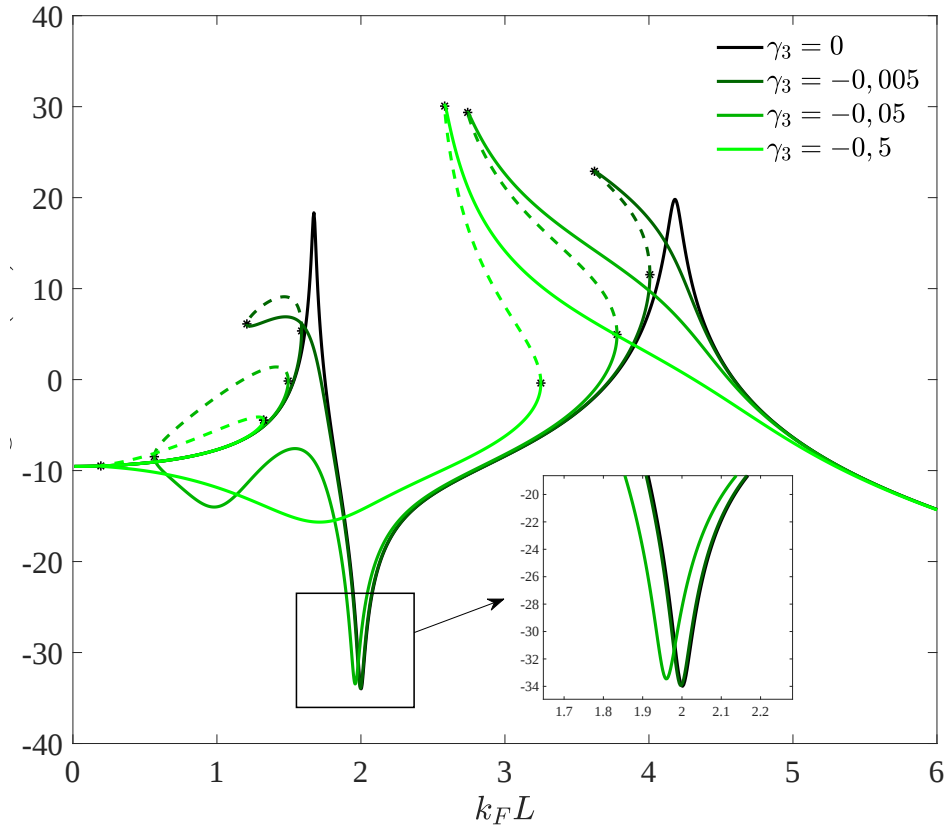


Figura 3.11: Magnitude da função de receptância (W_2/F_2) para diferentes valores negativos de γ_3 com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$ $\gamma_1 = 1$ (dB ref. 1 m/N).

Semelhante ao feito com barras, é possível observar que o uso de uma mola *softening* evidencia uma maior instabilidade no sistema, é possível destacar às regiões de biestabilidade (NAYFEH; BALACHANDRAN, 2008) comparando os valores de γ_3 nas mesmas proporções como uma mola *hardening* e uma mola *softening*, para uma melhor visualização. É possível verificar que a utilização de uma mola *softening* faz com que os pontos de bifurcação sela-nó aumentem de forma não linear, mas previsível também, pois estes pontos tendem as baixas frequências, mas o valor da magnitude aumenta proporcionalmente com a diminuição da rigidez. A diminuição da rigidez aumenta a faixa de frequência onde se evidencia a biestabilidade do sistema, tomando como base apenas os valores de menor e maior não linearidade, ou seja, $\gamma_3 = -0,005$ e $\gamma_3 = -0,5$. É possível visualizar que quando se usa uma mola *hardening* na mesma proporção (ou seja, o módulo dos valores de γ_3) a faixa de frequência onde se evidencia a biestabilidade do

sistema não é tão grande, como observado na Figura 3.12, que retrata as regiões onde há três estados estacionários ocorrendo no sistema para uma única frequência, dois deles são estáveis e um instável como já discutido anteriormente. Os resultados correspondem com o comportamento esperado nas baixas frequências com a diminuição da rigidez e nas altas frequências para um sistema endurecido com o uso de uma mola *hardening*.

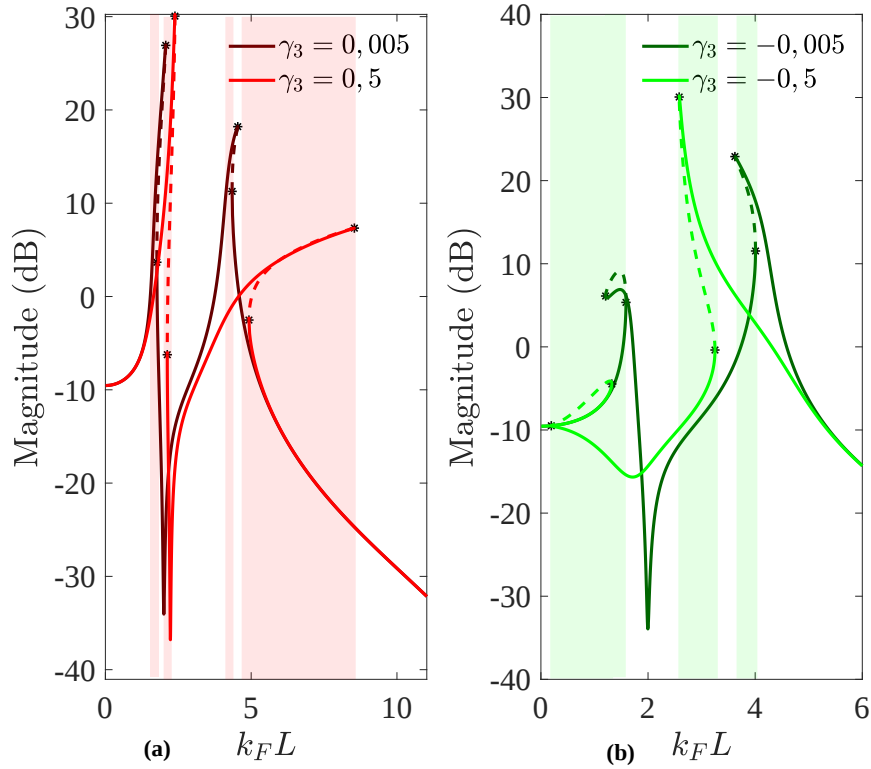


Figura 3.12: Magnitude da função de receptância (W_2/F_2). (a) Mola *hardening*. (b) Mola *softening* (dB ref. 1 m/N).

3.3 Comparação com o Método Runge-Kutta

Com o intuito de validar a resolução obtida pelo método da continuação, propõe-se uma comparação, fazendo a resolução das equações diferenciais não lineares utilizando o método runge-kutta de quarta ordem (RK4).

Seguindo a metodologia apresentado por Kwon (2000), para a flexão de uma viga

Euler-Bernoulli. Considerando um elemento que possui dois nós, um em cada lado, como mostrado na Figura 3.13. Aplica-se o método dos resíduos ponderados, método de Galerkin, para desenvolver a formulação dos elementos finitos e as correspondentes equações matriciais, considerando um elemento com dois nós e dois graus de liberdade por nó.

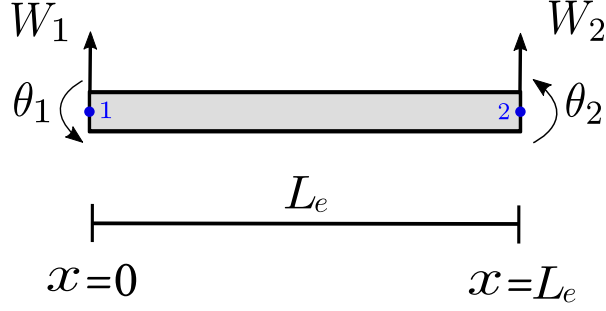


Figura 3.13: Elemento de viga de dois nós.

Usam-se as funções de forma Hermitianas para interpolação espacial da deflexão transversal, em termos de variáveis nodais. Sendo assim, a matriz de rigidez do elemento de viga é apresentada conforme a equação 3.22.

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

O elemento de viga conserva a massa em termos de seus graus de liberdade translacionais. A matriz de massa na equação 3.23 é conhecida como matriz de massa consistente.

$$M_e = \frac{\rho AL_e}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

O presente trabalho considera o acoplamento de um nNDV na extremidade $x = L$,

sendo assim, é possível inferir a existência de mais um grau de liberdade que contém apenas deslocamento transversal (despreza-se a rotação da massa), como mostrado na Figura 3.14.

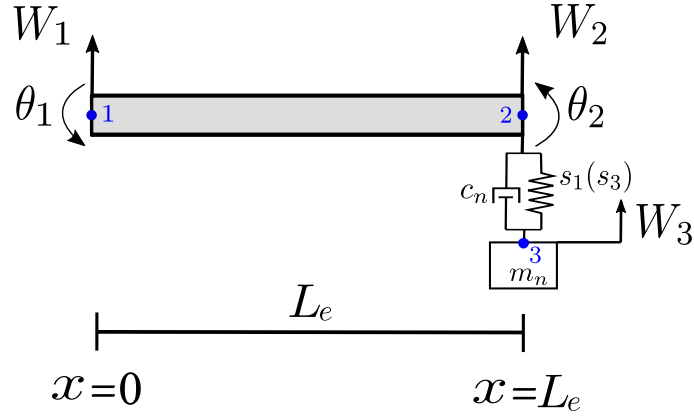


Figura 3.14: Elemento de viga de dois nós e um nNDV acoplado.

Logo, as matrizes de rigidez global, massa global e a de amortecimento global do sistema com o acoplamento do nNDV são

$$K_G = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e & 0 \\ 6l & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 \\ -12 & -6L_e & (12 + s_1) & -6L_e & -s_1 \\ 6l & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1 & 0 & s_1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$M_G = \frac{\rho AL_e}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e & 0 \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e & 0 \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$C_G = \frac{i\eta EI}{L_e^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e & 0 \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 \\ -12 & -6L_e & (12 + c_n) & -6L_e & -c_n \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_n & 0 & c_n \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Com esta teoria desenvolvida, é possível compreender que o acoplamento do nNDV resulta no aumento das matrizes globais na proporção de um grau de liberdade, visto que considera apenas deslocamento transversal do dispositivo não linear.

Para a respectiva análise, uma viga foi discretizada em 5 elementos, para obter uma resposta mais consistente (não é feito um refinamento maior por questão de tempo computacional). E, por motivos de comparação entre os métodos, são consideradas as mesmas condições de contorno, sendo assim, a extremidade esquerda ($x = 0$) encontra-se engastada, e a extremidade direita ($x = L$) está sujeita a uma força de magnitude $F_6 = 1$, e está conectada ao nNDV, com não linearidade do tipo cúbica de rigidez, como mostrado na Figura 3.15.

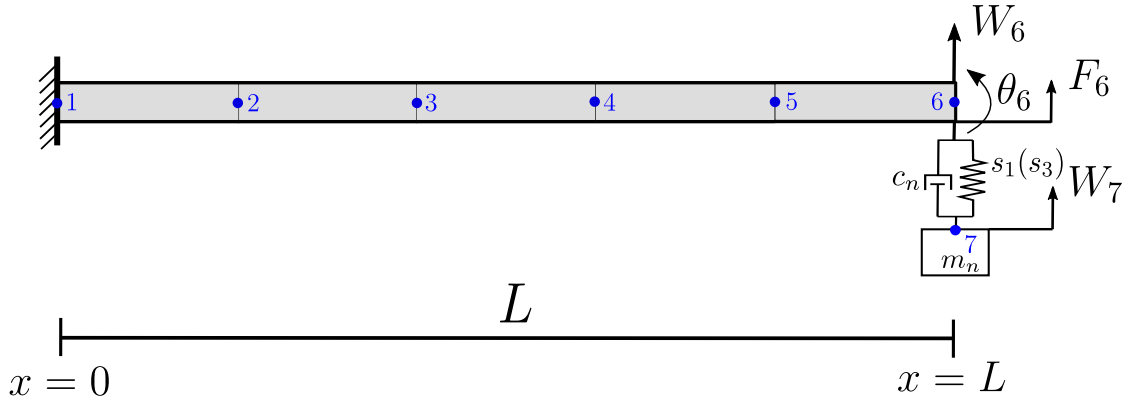


Figura 3.15: Elemento de viga discretizado em 5 elementos com o nNDV.

Resposta em frequência (Rididez hardening)

Para resolver as equações diferenciais não lineares é utilizado o método runge-kutta de quarta ordem. A resposta em frequência obtida, é comparada com a implementação

do modelo pelo método dos elementos espectrais, onde a resolução das equações se dão usando o método da Continuação. As análises computacionais, em ambos os métodos, é feita com uma mola do tipo *hardening*.

Na Figura 3.16, a linha azul retrata o sistema com o NDV, onde as equações são resolvidas pelo método da continuação, e os marcadores azuis retratam o mesmo sistema, mas utilizando método RK4. É possível observar que utilizando um NDV as respostas entre os dois métodos coincide, sendo esta uma razão plausível para dizer que os métodos estão em concordância. Mas, o objetivo do trabalho é uma análise com relação à rigidez cúbica do neutralizador. Sendo assim, na Figura 3.16, é possível observar que o sistema com o nNDV é mostrado com a linha vermelha com o método da continuação, sendo as linhas sólidas e tracejadas correspondem aos ramos estáveis e instáveis na resposta em frequência do sistema, respectivamente, e os “*” referem-se aos pontos de bifurcação sela-nó (BSN) esta em concordância com os marcadores vermelhos que retratam o mesmo sistema, mas com a resolução pelo método RK4.

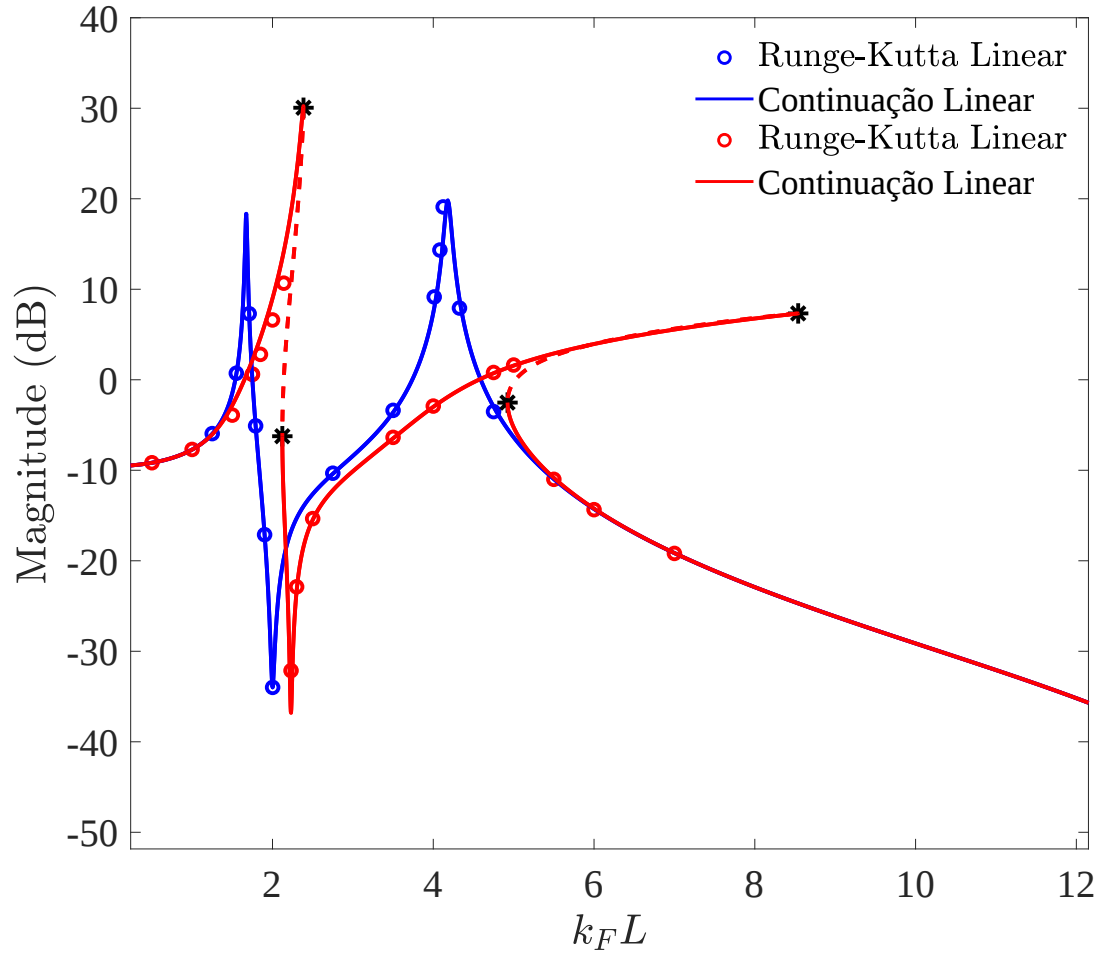


Figura 3.16: Magnitude da função de receptância (W_6/F_6) com, $\mu = 0,25$, $\zeta = 0,01$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,5$ (dB ref. 1 m/N).

Capítulo 4

CONCLUSÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentados os comentários finais a respeito de um sistema discreto não linear acoplado em uma estrutura primária. Neste trabalho, foi apresentado uma metodologia para resolução de problemas não lineares. Foi discutido a influência da não linearidade de rigidez de um neutralizador de vibrações.

Este trabalho foi desenvolvido visando avaliar se a metodologia aplicada seria eficaz na resolução de problemas envolvendo o acoplamento de um sistema discreto não linear, em uma estrutura primária, onde esta pode ser um sistema discreto com múltiplos graus de liberdades ou um sistema contínuo unidimensional, como uma barra em vibração longitudinal, ou uma viga em vibração transversal.

À medida que o coeficiente não linear foi modificado, houve uma mudança significativa nos picos de ressonância causada pelo nNDV, para os casos de molas *hardening* e *softening*, onde o uso desta última verificou-se uma maior instabilidade nos picos de ressonância, o que já era esperado, devido à diminuição da rigidez. Observou-se uma mudança significativa da frequência linear sintonizada do neutralizador de vibração, evidenciando que o desempenho na frequência sintonizada pode ser significativamente afetado pela não linearidade.

Além disso, pode-se concluir que a metodologia aplicada se mostrou excelente para estudar sistemas dinâmicos (discretos e contínuos unidimensionais) com o acoplamento

de um neutralizador de vibrações não linear. Os resultados mostraram concordância com as previsões teóricas, em particular os picos de frequência, que se inclinavam para frequências mais altas utilizando uma mola *hardening* e se inclinavam para frequências mais baixas utilizando uma mola *softening*, combinando exatamente com a resposta em frequência esperada. Houve a verificação das respostas dinâmicas obtidas através do método runge-kutta de quarta ordem, para validar os resultados numéricos obtidos por meio de outra abordagem.

4.1 Contribuições

O presente trabalho apresenta como contribuições a participação em dois eventos acadêmicos:

1. ALMEIDA, A. C.; GONCALVES, P. J. P. On the influence of nonlinear stiffness on the design of vibration absorber and neutralizers. In: COBEM, 2021, Florianópolis, SC. 26th International Congress of Mechanical Engineering, 2021.
2. ALMEIDA, A. C.; GONCALVES, P. J. P. Influência da Rigidez Não Linear no Projeto de Absorvedores e Neutralizadores de Vibração. In: Seminário de pós-graduação em engenharia mecânica, 2021, Bauru, São Paulo.

4.2 Sugestões para trabalhos futuros

Nesse trabalho o objetivo principal foi a aplicação de uma metodologia para a resolução das equações não lineares por meio da expansão em variáveis complexas, e a obtenção da resposta em frequência dos sistemas analisados utilizando o método da continuação. Considera-se uma aproximação pelo método do balanço harmônico de primeira ordem, calculando as equações de movimento assumindo uma força de excitação exponencial complexa, assim como as variáveis de deslocamento são expandidas em componentes reais e imaginárias. Uma sugestão para trabalhos futuros seria considerar a realização

de um experimento, para validar as análises dinâmicas obtidas.

Referências Bibliográficas

AIELLO, R.; GATTI, G. Vibration mitigation of a linear host structure using a passive neutralizer: effect of nonlinearity in the neutralizer suspension. *Procedia Engineering*, v. 199, p. 1659–1664, 2017. X International Conference on Structural Dynamics, EURODDN 2017.

BIRMAN, V. On the effects of nonlinear elastic foundation on free vibration of beams. American Society of Mechanical Engineers (ASME), 1986.

BRENNAN, M. J.; GATTI, G. The characteristics of a nonlinear vibration neutralizer. *Journal of Sound and Vibration*, v. 331, n. 13, p. 3158–3171, 2012.

BüCHNER, P. C. *Neutralizador dinâmico de vibrações torcionais viscoelásticos aplicado em sistemas rotodinâmicos*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.

CHONG, X.; WU, Z.; LI, F. Vibration isolation properties of the nonlinear x-combined structure with a high-static and low-dynamic stiffness: Theory and experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 179, p. 109352, 2022. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327022004861>>.

CLEWLEY, R. H.; SHERWOOD, W.; LAMAR, M.; GUCKENHEIMER, J. Pydstool, a software environment for dynamical systems modeling. URL <http://pydstool.sourceforge.net>, 2007.

CRUZ, G. A. M. *et al.* Projeto ótimo de neutralizadores viscoelásticos baseado no modelo a derivadas fracionárias. Florianópolis, SC, 2004.

DOWELL, E. Component mode analysis of nonlinear and nonconservative systems. 1980.

ESPÍNDOLA, J.; MÉNDEZ, G.; OLIVEIRA, J.; BABASTRI, C. Design of optimum viscoelastic vibration absorbers based on the fractional calculus model. *Proceedings Of The XI DINAME, 28th February-4th March*, 2005.

FRAHM, H. *Device for damping vibrations of bodies*. [S.l.]: Google Patents, 1911. US Patent 989,958.

- GAO, P.; LIU, H.; YAN, P.; XIANG, C. Optimization of the frequency tracking scheme for an adaptively tuned vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, v. 512, p. 116376, 2021. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X21004284>>.
- GAO, P.; WALKER, P. D.; LIU, H.; ZHOU, S.; XIANG, C. Application of an adaptive tuned vibration absorber on a dual lay-shaft dual clutch transmission powertrain for vibration reduction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 121, p. 725–744, 2019. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018307805>>.
- GATTI, G.; BRENNAN, M.; TANG, B. Some diverse examples of exploiting the beneficial effects of geometric stiffness nonlinearity. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 125, p. 4–20, 2019. Exploring nonlinear benefits in engineering.
- GATTI, G.; KOVACIC, I.; BRENNAN, M. J. On the response of a harmonically excited two degree-of-freedom system consisting of a linear and a nonlinear quasi-zero stiffness oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, n. 10, p. 1823–1835, 2010.
- GHAYESH, M. H.; KAZEMIRAD, S.; DARABI, M. A. A general solution procedure for vibrations of systems with cubic nonlinearities and nonlinear/time-dependent internal boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 22, p. 5382–5400, 2011. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X11004780>>.
- HARTOG, J. D.; ORMONROYD, J. Theory of the dynamic absorber. *Trans. ASME*, p. 11–22, 1928.
- HOWARD, C. Q. A sliding goertzel algorithm for adaptive passive neutralizers. *Journal of Sound and Vibration*, v. 331, n. 9, p. 1985–1993, 2012.
- HUANG, X.; LIU, X.; SUN, J.; ZHANG, Z.; HUA, H. Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using euler buckled beam as negative stiffness corrector: a theoretical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 4, p. 1132–1148, 2014.
- IBRAHIM, R. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 314, n. 3, p. 371–452, 2008. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08000436>>.
- JING, X.; VAKAKIS, A. F. Exploring nonlinear benefits in engineering. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 125, p. 1–3, 2019.
- KLODA, L.; LENCI, S.; WARMINSKI, J. Hardening vs. softening dichotomy of a hinged-simply supported beam with one end axial linear spring: Experimental and numerical studies. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 178, p. 105588, 2020. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740319333351>>.

- KWON, H. B. Y. W. *The Finite Element Method Using MATLAB*. [S.l.: s.n.], 2000.
- LEE, U. *Spectral element method in structural dynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- LEISSA, A.; QATU, M. *Vibration of Continuous Systems*. McGraw-Hill Education, 2011. ISBN 9780071714808. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=59R1oLzNvCQC>>.
- MA, R.; BI, K.; HAO, H. Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review. *Engineering Structures*, v. 243, p. 112655, 2021. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029621008051>>.
- MASRI, S. F.; CAFFREY, J. P. Response of a multi-degree-of-freedom system with a pounding vibration neutralizer to harmonic and random excitation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 481, p. 115427, 2020. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X20302595>>.
- MCGRAW-HILL, J. P. D. H. Mechanical vibrations. *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, Cambridge University Press, v. 61, n. 554, p. 139–139, 1957.
- MEIROVITCH, L.; PARKER, R. Fundamentals of vibrations. *Appl. Mech. Rev.*, v. 54, n. 6, p. B100–B101, 2001.
- NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- NOËL, J.; KERSCHEN, G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 83, p. 2–35, 2017. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832701630245X>>.
- QIAN, F.; ZUO, L. Tuned nonlinear spring-inerter-damper vibration absorber for beam vibration reduction based on the exact nonlinear dynamics model. *Journal of Sound and Vibration*, v. 509, p. 116246, 2021.
- TANG, B.; BRENNAN, M.; GATTI, G.; FERGUSON, N. Experimental characterization of a nonlinear vibration absorber using free vibration. *Journal of Sound and Vibration*, v. 367, p. 159–169, 2016.
- TATZKO, S.; JAHN, M. On the use of complex numbers in equations of nonlinear structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 126, p. 626–635, 2019.
- WU, Z.; JING, X.; BIAN, J.; LI, F.; ALLEN, R. Vibration isolation by exploring bio-inspired structural nonlinearity. *Bioinspiration & biomimetics*, IOP Publishing, v. 10, n. 5, p. 056015, 2015.

Apêndice A

Método de Resolução

A análise proposta discutida neste apêndice considera mostrar como o método da continuação funciona e por que o mesmo foi escolhido para a resolução das equações. O conjunto de equações não lineares no domínio da frequência pode ser resolvido usando, por exemplo, um método de busca de raízes, como o algoritmo de Levenberg-Marquardt, mas isso exigiria muitas estimativas iniciais para cada frequência de interesse. Neste sentido, a resolução das equações de movimento, assumindo uma força de excitação exponencial complexa, assim como as variáveis de deslocamento expandidas em componentes reais e imaginárias, e resolvidas pelo método da continuação mostrou-se com uma abordagem mais interessante para calcular as curvas de resposta em frequência, para isso, foi utilizada a linguagem de programação Python com o módulo PyDSTool.

PyDSTool é um conjunto de ferramentas de sistemas dinâmicos, fornecendo um poderoso arsenal de ferramentas computacionais para o desenvolvimento, simulação e análise de sistemas dinâmicos usados para a modelagem de processos físicos em muitas disciplinas científicas com foco em modelos envolvendo equações diferenciais ordinárias (EDOs), equações algébricas diferenciais (EADs) e mapas discretos (CLEWLEY *et al.*, 2007).

Para ver como os pontos de bifurcação dependem dos parâmetros, plota-se os diagramas de bifurcação usando a classe de continuação (*ContClass*), onde o atributo “*Loc-*

BifPoints” dentro do algoritmo informará ao PyCont o tipo de bifurcação que deve ser rastreada, neste trabalho foi especificado que apenas bifurcações sela-nó (“*LP*”) devem ser detectadas, para localizar os pontos onde ocorria mudança de instabilidade na curva de resposta em frequência do sistema, visto que esta é uma característica em respostas utilizando não linearidade cúbica de rigidez. O atributo “*SaveEigen*” no algoritmo é uma variável *booleana* que determina se os autovalores dos pontos de equilíbrio devem ou não ser salvos ao longo da curva, define esse atributo como “*True*” pois se deseja conhecer a estabilidade ao longo da curva de equilíbrio. Sendo a classe de continuação configurada, pode-se então calcular o diagrama de bifurcação.

No algoritmo do diagrama de bifurcação, P_1 e P_2 referem-se aos pontos inicial e final da continuação (para frente “*forward*” ou para trás “*backward*”), e também correspondem a rótulos no conjunto de pontos de solução para poderem ser facilmente extraídos. É, necessário também, que variáveis iniciais sejam definidas, para que o método possa realizar a continuação da curva, onde a estratégia utilizada é remover esses pontos da resposta em frequência linear distante da ressonância ou por tentativas e estimativas.

Com o método de resolução definido, é possível obter a resposta em frequência da estrutura primária sujeita a uma força harmônica, e comparar os sistemas com um neutralizador de vibração linear (NDV) e um neutralizador de vibração não linear (nNDV), até mesmo com o sistema sem o acoplamento de um neutralizador dinâmico de vibração, para salientar as principais diferenças entre os sistemas e as mudanças provocadas em suas respectivas respostas em frequência.

De forma a compreender mais visualmente o comportamento da resposta em frequência não linear, no quesito do conceito dos “*saltos*” observados, para análises futuras, toma-se como exemplo um sistema de um grau de liberdade conforme a Figura 2.4, onde a rigidez apresenta não linearidade do tipo cúbica.

Observa-se conforme a Figura A.1, que enquanto a frequência aumenta, a resposta se torna mais destorcida se afastando da forma linear, o que continua até que a amplitude atinja um valor crítico, a partir deste ponto para um conjunto de valores de Ω a resposta

apresenta três soluções reais.

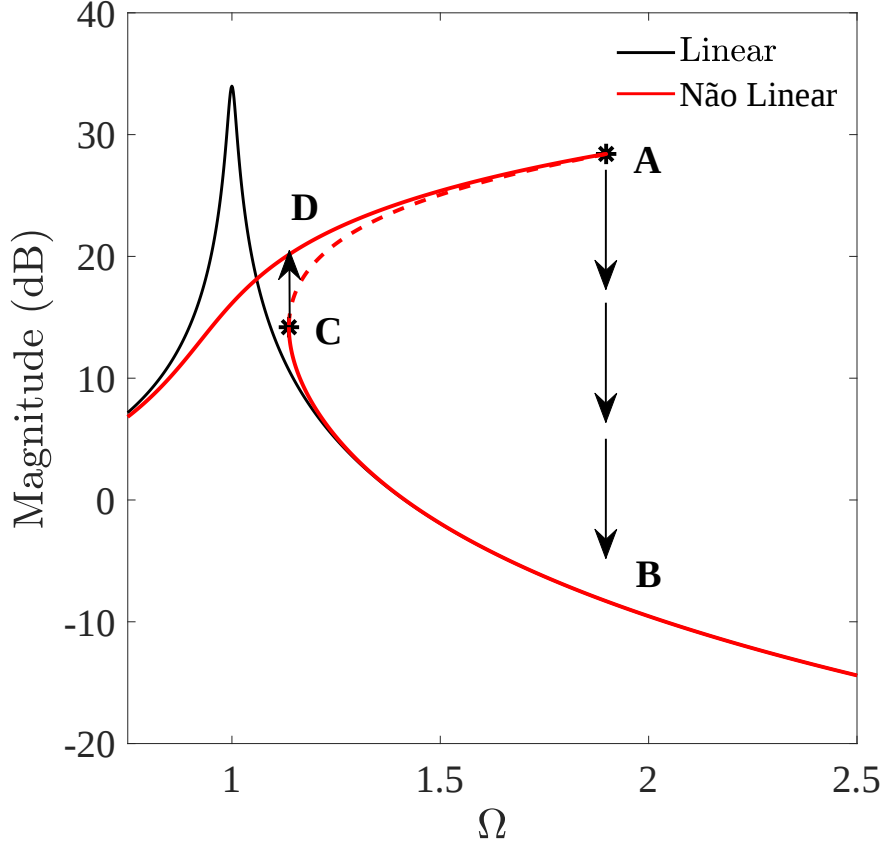


Figura A.1: Resposta em frequência absoluta (Y_n) com, $F = 1$, $m = 1$, $\zeta = 0,04$, $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_3 = 0,005$ (dB ref. 1 N/m).

Isto é compreendido na literatura como um exemplo de bifurcação sela-nó, para o parâmetro de amplitude, estas duas soluções adicionais persistem até um determinado valor de Ω , que ao ser alcançado desaparecem. A região de instabilidade, em forma de linha tracejada, na Figura A.1, pode ser encontrada numericamente usando a técnica do balanço harmônico, por meio das frequências e amplitudes de *jump-up* (limite de frequência mais baixo da região de resposta instável), e *jump-down* em sistema não lineares simples, mas este processo acaba tornando-se exaustivo e complicado quando se trata de sistemas não lineares onde o número de equações a serem resolvidas torna-se maior, devido ao elevado número de graus de liberdade envolvido no modelo matemático.

Sendo assim, usar equações analíticas para determinar, as frequências de *jump-up*, e *jump-down* e as correspondentes amplitudes de vibração tanto para sistemas com rigidez *softening* quanto sistemas com rigidez *hardening* ambos com amortecimento viscoso linear torna-se desnecessário visto que o método da continuação já encontra os valores dos pontos de sela-nó.

Este comportamento comum nas respostas em frequência dos sistemas analisados nesta dissertação, torna conveniente aprofundar o estudo no sentido de se entender o comportamento desse tipo de resposta em um sistema não linear. Sendo assim, apesar das múltiplas soluções encontradas pelo método da continuação, apenas uma solução pode acontecer por vez. Considerando uma varredura ascendente da frequência, uma única resposta existe até o ponto D da Figura A.1, a partir deste ponto a resposta permanece neste ramo da solução, essencialmente por continuidade, até alcançarmos o ponto A, onde o ramo deixa de existir e a única solução possível ocorre a partir do ponto B, este salto na solução ocorre devido à descontinuidade do sistema. Em uma varredura descendente encontramos um processo similar. Para altas frequências uma única solução existe até o ponto B, a partir daí, apesar das múltiplas respostas, a solução permanece neste ramo por continuidade, o que persiste até o ponto C, onde o ramo deixa de existir e ocorre um salto para o ponto D que passa a ser a única solução possível.