

unesp

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

***DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA***

1210001147



Nº 54

***Controle Automático com Estrutura
Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI***

Aluno: Alfredo Del Sole Lordelo

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Te.1147

Universidade Estadual Paulista – UNESP

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS

Departamento de Engenharia Elétrica – DEE

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista – UNESP, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Alfredo Del Sole Lordelo

Engenheiro Eletricista – FEIS/UNESP

Maio de 2000

Orientador: **Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira** – FEIS/UNESP

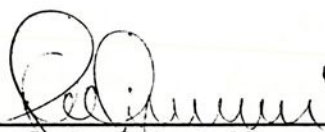
"Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI"

Alfredo Del Sole Lordelo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

1210001147



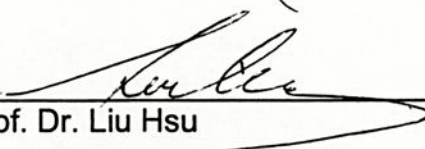

Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi – Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Doc. 017/2000 - NRD 092 - CISA

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE REGISTRAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
13.09.00	29.09.00
REGISTRO	TOMBO
Aleza	Te. 1147
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Woroad Auto R\$10.00	L866c


Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira - orientador


Prof. Dr. Liu Hsu


Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

30400007 ENGA. ELÉTRICA

Ilha Solteira – SP, maio de 2000

sig 136227
sig 53247

BCpIS - FEIS - UNESP

Aos meus pais Alfredo e Vera Lúcia



“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário!”

Albert Einstein

“É com o coração que se vê corretamente; o essencial é invisível aos olhos.”

Antoine de Saint-Exupéry - O pequeno príncipe



Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte de vida e sabedoria infinita.

Aos meus pais Alfredo e Vera Lúcia, às minhas irmãs e à minha família, pelo apoio e incentivo em tudo o que faço.

À minha namorada Alessandra Marnie, pelo seu amor, carinho e compreensão.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por participar diretamente da minha formação científica, pela amizade, humildade, competência, empenho e, também, pelo seu espírito nobre, correto e altruísta, que me deram muitos ensinamentos humanos.

Ao Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia, ao Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho e ao Prof. Dr. Nobuo Oki, pela amizade e ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelas suas dicas de organização, ajuda com o $\text{\LaTeX}$, com as simulações e pela amizade.

Ao Prof. Dr. Liu Hsu da COPPE/UFRJ, pela sua participação, suas sugestões e críticas pertinentes.

Aos professores, técnicos e demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, que propiciaram a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da graduação, pós-graduação e da cidade de Ilha Solteira, pela amizade, companheirismo e saudável convivência.

Ao Arlindo e à Fátima, da seção de Pós-Graduação, pela gentileza e simpatia.

Finalmente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo auxílio financeiro dado à esta pesquisa.



Resumo

São apresentadas condições, em termos de Desigualdades Lineares Matriciais, *Linear Matrix Inequalities* (LMI) em Inglês, para o projeto de Controladores com Estrutura Variável (CEV), com acesso somente às saídas da planta. O método proposto permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições na saída, da taxa de decaimento e da robustez com respeito às incertezas nos parâmetros da planta, casadas ou não casadas. É demonstrado que a taxa de decaimento é limitada pela localização dos zeros de transmissão da planta, mesmo que não ocorra deslizamento. O ponto chave dos resultados foi a formulação, em termos de LMI, de novas condições para tornar uma planta Estritamente Real Positiva (ERP), utilizando compensadores estáticos: encontrar dois controladores estáticos, K que realimenta a saída da planta e F em série e na saída da planta, de modo que o sistema controlado seja ERP. Também é analisado o caso em que o vetor de estado da planta está disponível. O método é aplicado no controle e simulação de um manipulador $\theta - r$, com acesso somente às saídas da planta e sem usar observadores ou filtros de estado. O método proposto permite o projeto de um controlador mais simples e de forma mais metódica, quando comparado com os métodos e os controladores propostos para o manipulador $\theta - r$ descritos na literatura.



Abstract

A Linear Matrix Inequality (LMI) approach to the output Variable Structure Controllers (VSC) design is presented. The method considers as design specification: matched disturbances and/or nonlinearities of the plant, output constraints, decay rate, matched and nonmatched plant uncertainties. We show that the maximum value of the decay rate is related with the transmission zeros of the plant for the controlled system, with or without sliding modes. The key point of our results are new LMI conditions to Strictly Positive Real (SPR) synthesis problem: find a constant output feedback matrix K and a constant output tandem matrix F such that the controlled system is SPR. It is also considered the case when the state vector of the plant is available. The method is applied in the control and simulation of a $\theta - r$ manipulator, using only the outputs of the plant and without state observer or state filters. Our design method and controller are simpler than other design methods and controllers described in the literature, for the $\theta - r$ manipulator.



Sumário

1	Introdução	1
2	Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes	6
2.1	Modos Deslizantes	6
2.2	Controle com Estrutura Variável e observação de sistemas não-lineares . . .	16
2.2.1	Descrição do sistema e definições básicas	17
2.2.2	Projeto do controlador	18
2.2.3	Observação dos estados	21
2.2.4	Síntese do controlador-observador	25
3	Novas condições baseadas em LMI para sistemas ERP	28
4	Controle com Estrutura Variável utilizando sistemas ERP e LMI	42
4.1	Estabilidade e Robustez	43
4.2	Estabilidade, Robustez e Taxa de Decaimento	48
4.3	Estabilidade, Robustez, Taxa de Decaimento e Restrição nas Saídas	48
5	Exemplo de projeto do controlador de um manipulador $\theta - r$	51
5.1	Controle com EVMD do manipulador $\theta - r$ com acesso aos estados e com observador	52
5.1.1	Projeto do controlador	53
5.1.2	Projeto do observador	55
5.1.3	Simulações do controlador-observador	59
5.1.4	Simulações do controlador-observador em malha fechada	63
5.1.5	Simulações com a inserção da camada limite	66
5.1.6	Projeto do observador de estado com CEV baseado em LMI	71



5.2	CEV do manipulador $\theta-r$ com acesso às saídas da planta, utilizando sistemas ERP e LMI	77
6	Conclusões	85
7	Referências Bibliográficas	87
A	Zeros de transmissão de um sistema	90
B	Restrição nos vetores de entrada e saída da planta	92
B.1	Restrição no vetor de entrada	92
B.2	Restrição no vetor de saída	95
C	Cinemática da partícula: coordenadas polares ($\theta-r$)	97
D	Dedução das equações do torque e da força do manipulador $\theta-r$	100



Capítulo 1

Introdução

As características reais de um sistema são descritas através da modelagem matemática. Este modelo pode conter incertezas devido ao desconhecimento de parâmetros, que podem ser constantes, variantes no tempo ou imprecisamente conhecidos e incertezas devido ao desconhecimento das entradas do sistema.

Desde a introdução da teoria de sistemas com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (EVMD) pelo Professor Vadim I. Utkin, para a comunidade ocidental que pesquisa sistemas de controle (Utkin, 1977), as atividades de pesquisa, fora da extinta União Soviética e Iugoslávia, em sistemas com EVMD, têm continuado crescentes. Além disso, a natureza dessas investigações tem se expandido, de assuntos normalmente teóricos durante as décadas de setenta e oitenta, para muitos problemas de aplicações práticas industriais interessantes, em muitos campos da engenharia, no final dos anos oitenta (Young, 1993).

O interesse por Controle com Estrutura Variável (CEV) se justifica pelas suas aplicações efetivas em problemas de automação que são muito diversificados em sua natureza física e propósitos funcionais. No curso de toda a história do desenvolvimento da teoria de controle automático, a intensidade das investigações de controle descontínuo tem se mantido em um nível suficientemente alto. Particularmente, durante os estágios iniciais, relés tomaram destaque no projeto de sistemas de controle à realimentação, por facilidade de implementação e eficiência do equipamento de controle (Young, 1993).

Recentemente, atenção crescente tem sido dada para sistemas onde as ações de controle são funções descontínuas de suas coordenadas e distúrbios. As trajetórias de estado representam as propriedades de um sistema dinâmico. Portanto, através de uma escolha



adequada das ações de controle, as trajetórias de estado podem ser mudadas para que sejam dadas as propriedades desejadas de um processo a um sistema (Utkin, 1978).

Um sistema com CEV consiste de um conjunto de subsistemas contínuos, com uma lógica própria de chaveamento. A ação de controle resultante é uma função descontínua dos estados do sistema, distúrbios e referências de entrada. Essencialmente, um sistema com estrutura variável utiliza uma lei de controle de alta velocidade de chaveamento para levar a trajetória de estado da planta não-linear, para uma superfície especificada no plano de fase, mantendo-a sobre esta superfície por todo o tempo subsequente. Então, a dinâmica da planta fica restrita a esta superfície, que é convenientemente escolhida, de maneira a obter um comportamento desejado (Young, 1993).

O projeto de sistemas com ações de controle descontínuas, normalmente se reduz à seleção de superfícies no plano de fase para que a função de controle tenha descontinuidades. Quando certas relações são válidas, um tipo especial de movimento, chamado de modo deslizante pode aparecer. Este pode ser o caso, por exemplo, se na vizinhança da superfície onde a função de controle tenha descontinuidades, as trajetórias de estado estiverem direcionadas para esta superfície.

Uma vez na superfície descontínua, o sistema evidentemente não pode se mover ao longo de nenhuma trajetória adjacente à esta em qualquer outro instante. Portanto, em resposta à qualquer mudança, um movimento que começa sempre retorna à superfície descontínua. Conseqüentemente, no sistema em discussão, a trajetória pode se mover somente ao longo da superfície descontínua. Este movimento é convencionalmente chamado de modo deslizante (Utkin, 1978).

O primeiro passo no projeto de um CEV é a escolha de um subespaço deslizante (superfície de chaveamento). Um modo deslizante estável é conseguido através da seleção adequada de hiperplanos, de maneira que a resposta dinâmica de malha fechada desejada seja alcançada. O segundo passo envolve a seleção de uma lei de controle que assegure o alcance e a permanência do sistema em modo deslizante (Zinober, 1990).

Estudos subsequentes têm revelado que movimentos em modos deslizantes resultam em controle ótimo. A teoria de sistemas com CEV tem se tornado um campo independente na teoria geral de sistemas não-lineares (Utkin, 1978).

Nos últimos cinco anos, surgiu um novo paradigma para o projeto de CEV: a descrição do problema através de Desigualdades Lineares Matriciais, *Linear Matrix Inequalities* (LMI),



em Inglês. Três fatores tornam as técnicas de LMI especiais:

- (a) Uma grande variedade de especificações e restrições de projeto podem ser expressas como LMI;
- (b) Uma vez formulado em termos de LMI, o problema pode ser exatamente solucionado por algoritmos de otimização bastante eficientes;
- (c) Enquanto que a maioria dos problemas com múltiplas restrições ou objetivos falham em encontrar soluções analíticas em termos de suas equações matriciais, eles são frequentemente factíveis no tratamento por LMI.

Agora serão descritos seis artigos que abordam o CEV com LMI, obtidos após um levantamento bibliográfico eletrônico. Em (Heck et al., 1995), os autores apresentam dois métodos numéricos para o projeto de CEV, com acesso somente às saídas da planta. O projeto considera funções de chaveamento do tipo $s = Gy$, sendo que y é a saída da planta e G é uma matriz constante. A matriz G , que define o comportamento no deslizamento, é considerada disponível e o projeto procura satisfazer a condição $s^T \dot{s} < 0$, para $s \neq 0$, utilizando uma lei de controle adequada e métodos de otimização empregados nas soluções das LMI.

Todos os outros trabalhos, descritos a seguir, sobre o emprego de LMI no projeto de CEV, consideram a disponibilidade do vetor de estado.

Em (Choi, 1997) a especificação das superfícies de deslizamento é feita em termos de LMI, permitindo inclusive, a especificação da taxa de decaimento. Posteriormente, (Choi, 1998) generalizou estes resultados, considerando incertezas não casadas.

Em (Choi, 1999), é demonstrado que as condições de existência para as LMI descritas em (Choi, 1998) são necessárias e suficientes, além de serem apresentadas novas condições para o projeto da superfície de chaveamento linear, em termos de LMI, permitindo o projeto por alocação de pólos do sistema de ordem reduzida no deslizamento, mais geral do que os métodos descritos em (Choi, 1997) e (Choi, 1998). Em (Takahashi e Peres, 1998), o projeto das superfícies de deslizamento é feito de modo a minimizar, adicionalmente, a influência de distúrbios não casados. Foi empregado o método de controle ótimo com a norma $\mathcal{H}_\infty$ e são consideradas incertezas nos parâmetros da planta pertencentes a um politopo convexo. Recentemente estes autores apresentaram um método similar, considerando agora a norma $\mathcal{H}_2$ (Takahashi e Peres, 1999).



Aqui, foi abordado o projeto de CEV, com acesso somente às saídas da planta, utilizando apenas controladores estáticos invariantes no tempo, com LMI. É assumido que a planta apresenta o mesmo número de entradas e saídas e o método proposto permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições nas saídas, da taxa de decaimento e da robustez, com respeito a incertezas nos parâmetros da planta, casadas e não casadas.

O projeto de CEV com controladores invariantes no tempo e acesso somente às saídas da planta já foi estudado, por exemplo, em (Teixeira, 1990), (Teixeira, 1993) e (Žak e Hui, 1993). Entretanto, estes métodos não são tão gerais, pois não permitem, por exemplo, a especificação da robustez com respeito às incertezas nos parâmetros da planta não casadas ou de restrições nas saídas da planta.

Os sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP) também têm uma grande importância no controle de sistemas com incertezas, devido aos importantes resultados disponíveis sobre a estabilidade destes sistemas, como por exemplo a hiperestabilidade assintótica de Popov (Anderson, 1968). Desta forma, um procedimento para a análise e projeto de sistemas de controle, consiste na manipulação do sistema, com o objetivo de colocá-lo na forma de um sistema ERP, de modo que os resultados sobre a estabilidade destes sistemas possam ser utilizados.

Os sistemas Reais Positivos (RP), também conhecidos como passivos, nasceram na teoria de circuitos e foram definidos inicialmente, dentro dos Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT).

As matrizes de transferência RP e ERP possuem duas interpretações interessantes em termos de circuitos elétricos. Considere dois nós de um circuito elétrico composto pela conexão de elementos passivos com parâmetros concentrados R , L e C (resistores, indutores e capacitores), de modo arbitrário. Então, a impedância em Laplace entre os dois nós, $Z(s)$ é racional e RP, e, de modo inverso, qualquer função de transferência $Z(s)$ RP pode ser realizada como a impedância entre dois nós de um circuito elétrico com elementos passivos R , L e C . Agora, se aplicarmos uma tensão entre estes dois nós mencionados anteriormente e se $Z(s)$ for RP (ERP), então a soma da energia inicial armazenada no circuito, no instante inicial $t = 0$, com a energia fornecida no intervalo $t \in [0, T]$, $T > 0$, deve ser maior do que a energia armazenada em $t = T$.

Esta dissertação apresenta novos resultados baseados em LMI sobre o projeto de sistemas ERP. Estes resultados viabilizaram o desenvolvimento de um novo método para o projeto de



CEV baseado em LMI, com acesso somente às saídas da planta. Este novo método permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições na saída, da taxa de decaimento e da robustez com respeito às incertezas nos parâmetros da planta, casados e não casados. Estes resultados não têm similar na literatura (Teixeira et al., 2000).

A base para o desenvolvimento dos novos resultados desta dissertação foi a formulação, em termos de LMI, de novas condições para tornar uma planta ERP, utilizando controladores estáticos e acesso somente às saídas da planta. As LMI aqui descritas são mais adequadas para o projeto de CEV do que as propostas por (Huang et al., 1999), pois estas últimas não permitem a especificação direta da robustez paramétrica e de restrições na saída (Lordelo et al., 2000). Em (Bernussou et al., 1999), é apresentado o projeto de controladores dinâmicos para sistemas ERP, com acesso às saídas da planta, através da solução por LMI, de uma função de custo, de maneira a prover um controle robusto da planta. Existe uma diferença fundamental entre este artigo e os resultados desta dissertação. Considerando a planta dada pelas matrizes $\{A, B, C, D\}$, então em (Bernussou et al., 1999), é considerado que $D + D^T > 0$, enquanto que nesta dissertação assume-se que $D = 0$. O ponto chave dos resultados foi a formulação, em termos de LMI, de novas condições para tornar uma planta ERP, utilizando compensadores estáticos: encontrar dois controladores estáticos, K que realimenta a saída da planta e F em série e na saída da planta, de modo que o sistema controlado seja ERP.

No Capítulo 2, é apresentada a teoria e métodos de projeto de controladores e observadores com EVMD. No Capítulo 3, são descritas novas condições para sistemas ERP, baseadas em LMI. No Capítulo 4, são descritos novos métodos de projeto de CEV para sistemas não-lineares, com acesso somente às saídas da planta e, no caso mais geral, com acesso completo aos estados, levando em consideração índices de desempenho como robustez paramétrica, taxa de decaimento e restrição no vetor de saída da planta. O Capítulo 5 apresenta como exemplo, o projeto do controlador de um manipulador $\theta - r$ e suas simulações, inicialmente considerando acesso às variáveis de estado, e posteriormente, com acesso parcial e utilizando um observador, com EVMD. Posteriormente, para o mesmo exemplo é projetado um compensador estático com acesso somente às saídas da planta, aplicando os novos métodos descritos nos capítulos anteriores. O Capítulo 6 é uma conclusão geral da dissertação.



Capítulo 2

Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes

2.1 Modos Deslizantes

A característica principal de um sistema de CEV está na realimentação não-linear que possui descontinuidades sobre uma ou mais superfícies no espaço de estados. Assim, a estrutura do sistema de realimentação é alterada, ou chaveada, conforme os estados atravessam cada superfície descontínua. Em consequência deste fato, o sistema de malha fechada é descrito como sendo um sistema de Controle com Estrutura Variável, considerado como a combinação de subsistemas, cada qual com uma estrutura fixa e que opera em uma região específica do espaço de estados.

O CEV é caracterizado pela existência do modo deslizante. Isto ocorre quando o estado do sistema cruza imediatamente e repetidamente a superfície de chaveamento, pois todos os movimentos nas vizinhanças da superfície estão direcionados à ela. Dependendo da forma da lei de controle selecionada, o movimento deslizante pode ocorrer em superfícies de chaveamento individuais no espaço de estados, sobre um conjunto de superfícies, ou em todas as superfícies de chaveamento juntas (Zinober, 1990).

A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento, no mínimo em uma vizinhança de $\{x(t) \mid s(x(t)) = 0\}$, ou seja, deve aproximar-se da superfície no mínimo assintoticamente. A vizinhança máxima é chamada região de atração. Geometricamente, o vetor tangente ou a derivada no tempo



do vetor de estado deve apontar para a superfície de deslizamento na região de atração. Isto assemelha-se a um problema de estabilidade generalizado, e o segundo método de Lyapunov fornece uma ferramenta natural para a análise. Especificamente, a estabilidade para a superfície de chaveamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada $V(x,t)$, que é definida positiva e tem uma derivada no tempo negativa, na região de atração (DeCarlo et al., 1988).

Um procedimento de projeto para o seguinte sistema (Young, 1993)

$$\dot{x}(t) = f(x, t, u) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}^m, \quad (2.1)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{se } s(x(t)) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{se } s(x(t)) < 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

consiste em duas etapas. A determinação das superfícies $s(x(t)) = 0$ no espaço de estados, em que o controle é descontínuo e a seleção das funções de controle contínuas $u^+(x, t)$ e $u^-(x, t)$. Devido à descontinuidade, a derivada dos vetores de estado pode estar direcionada para uma das superfícies e um modo deslizante pode ocorrer sobre ela (arcos ab e cb , na Fig. 2.1). Isto pode acontecer também sobre a intersecção (arcos bd). A Fig. 2.2 ilustra o modo deslizante na intersecção, mostrando um caso em que ele não ocorre separadamente em cada superfície.

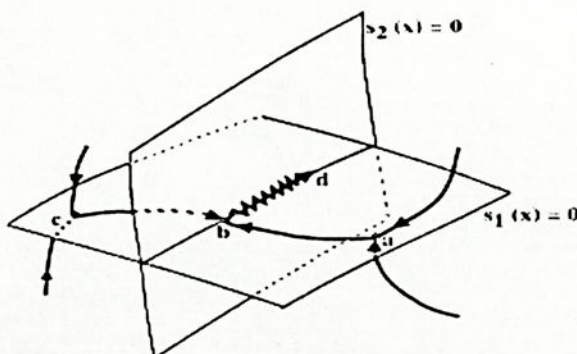


Figura 2.1: Modo deslizante.

Modos deslizantes são muito importantes por dois motivos. Primeiro, no modo deslizante, o elemento que implementa a função descontínua, por exemplo um relé, chaveia em alta

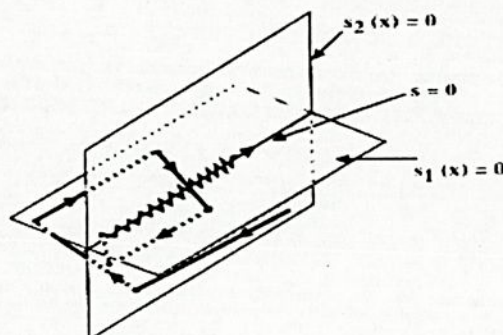


Figura 2.2: Ocorrência de modo deslizante apenas na intersecção das superfícies.

freqüência. A sua entrada está em zero, enquanto que a sua saída, ou mais precisamente o seu valor médio, pode assumir um valor não nulo. Consequentemente, o elemento implementa um alto ganho (teoricamente infinito), que é o meio convencional para se atenuar a influência dos distúrbios e incertezas do sistema. Diferentemente dos sistemas com derivadas contínuas, o efeito de invariância é atingido pelo uso de ações de controle finito. Segundo, a ordem da equação do movimento é reduzida, pois as trajetórias do modo deslizante pertencem a alguma superfície de dimensão inferior a do sistema, ou seja, o movimento dinâmico do sistema é restringido e permanece dentro de um certo subespaço do espaço de estados. Assim, comporta-se como um sistema relaxado, de ordem inferior, chamado *sistema equivalente*. O movimento deste sistema equivalente é diferente dos subsistemas constituintes. Isto permite a simplificação e a decomposição do procedimento de projeto da lei de controle $u(x, t)$. Assim, o conceito básico do projeto da maioria dos sistemas com CEV se baseia em modos deslizantes, já que são o principal modo operacional deste tipo de sistema.

Por exemplo, admita o sistema apresentado em (Utkin, 1978), descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 - a_1 x_1 + u,\end{aligned}\tag{2.3}$$

sendo que a_1 e a_2 são constantes. Considere a lei de controle

$$u = -\psi x_1,\tag{2.4}$$

e assumamos que existem duas estruturas lineares para este sistema, associadas aos valores $-\alpha$ e α (α constante) do coeficiente ψ , como descrito em (2.5). Assumamos também, a_2 negativo em (2.3) e que α seja selecionado de maneira que o sistema (2.3) e (2.4) tenha pólos complexos para $\psi = \alpha$ e pólos reais para $\psi = -\alpha$. Para ambos os casos, o sistema é instável, e representado pelos planos de fase da Fig. 2.3, com um foco instável e um ponto de sela, respectivamente, pois para a matriz característica A do sistema (2.3)

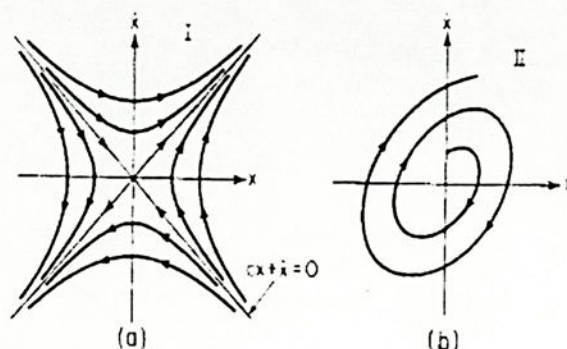


Figura 2.3: Subsistemas lineares instáveis: (a) $\psi = -\alpha$ e (b) $\psi = \alpha$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-a_1 - \psi) & -a_2 \end{bmatrix},$$

a equação característica dada por $\det(sI - A) = s^2 + a_2s + (a_1 + \psi) = 0$ leva às raízes:

$$s = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4(a_1 + \psi)}}{2}$$

e portanto, os pólos do sistema em malha fechada sempre terão parte real positiva, pois $a_2 < 0$. Pela equação acima, note que as raízes para $\psi = \alpha > (a_2^2 - 4a_1)/4$ e $\psi = -\alpha < (a_2^2 - 4a_1)/4$ serão, respectivamente, complexas conjugadas e reais.

Verifique agora, que a estabilidade assintótica pode ser alcançada pela mudança das estruturas nas superfícies $x_1 = 0$ e $s = cx_1 + x_2 = 0$, (c constante). O coeficiente c é selecionado de maneira que a superfície $s = 0$ esteja entre o eixo x_1 e a assíntota das trajetórias hiperbólicas associadas com a estrutura $\psi = -\alpha$. A Fig. 2.4 representa o plano

de fase do sistema (2.3), para a lei de controle

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{se } x_1 s > 0 \\ -\alpha & \text{se } x_1 s < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

que mostra que a trajetória de estado alcança a superfície de chaveamento $s = 0$ para toda condição inicial. Nas vizinhanças da superfície de chaveamento, as trajetórias de ambas as estruturas estão direcionadas à ela, ocorrendo assim, um modo deslizante.

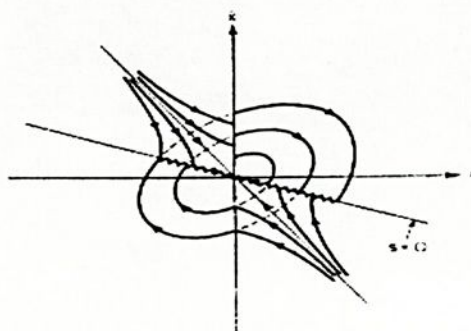


Figura 2.4: Estabilidade assintótica através de EVMD, no plano $(x_1, x_2) = (x, \dot{x})$.

As incertezas de um sistema aparecem como resultado da imperfeição do modelo descrito pela equação (2.1), que procura representar o sistema real (Utkin, 1992). O modelo descrito em (2.2) falha em reconhecer as imperfeições do dispositivo de chaveamento (atraso, zona morta, histerese, inércia, etc). As equações do sistema real podem ter uma ordem maior do que a do modelo e os instrumentos utilizados para obter os valores do vetor de estado, que são necessários para se realizar o controle, também podem apresentar inércia. A aproximação física implica na introdução de tais imperfeições que, subsequente, tendem a zero. Então, os resultados obtidos em tais limites são uma descrição apropriada de um modo deslizante.

Um conceito mais geral requer a introdução da camada limite. Essencialmente, este conceito implica que o controle ideal, definido em (2.2), em alguma vizinhança das superfícies descontínuas, seja substituído por outro, de maneira que a equação obtida, fazendo-se com que a camada limite tenda à zero, seja um modo deslizante. O uso da camada limite

permite que na fronteira da descontinuidade, os modos deslizantes sejam descritos sem que se especifique a natureza das imperfeições, sejam em sistemas com uma única superfície descontínua, ou com um certo número de intersecções de superfícies descontínuas.

Freqüentemente, sistemas dinâmicos não-lineares são descritos através do método de Filippov (Utkin, 1992). Segundo este método, para o sistema descrito pela equação (2.1), em cada ponto da superfície descontínua, o vetor velocidade $f^0(x, t, u)$ pertence à um mínimo convexo, contendo todos os valores de $f(x, t, u)$, quando $x(t)$ cobre toda a vizinhança δ do ponto em consideração (com δ tendendo à zero), exceto possivelmente, em zero.

Portanto, a equação do modo deslizante ideal, definida de acordo com Filippov, para o sistema definido por (2.1) e (2.2), é da forma

$$\dot{x}(t) = f^0(x, t, u), \quad (2.6)$$

com

$$f^0(x, t, u) = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

sendo que μ é um parâmetro que depende das direções e magnitudes dos vetores f^+ , f^- e do vetor $\text{grad } s$, que é o gradiente da função $s(x(t))$.

Logo:

$$\text{grad } s f^0(x, t, u) = 0,$$

$$\text{grad } s [\mu f^+ + (1 - \mu) f^-] = 0,$$

$$\text{grad } s [\mu f^+ + f^- - \mu f^-] = 0,$$

$$\mu \text{grad } s f^+ + \text{grad } s f^- - \mu \text{grad } s f^- = 0,$$

$$\mu [\text{grad } s f^+ - \text{grad } s f^-] + \text{grad } s f^- = 0,$$

$$\mu [\text{grad } s f^+ - \text{grad } s f^-] = -\text{grad } s f^-,$$

$$\mu = \frac{-\text{grad } s f^-}{\text{grad } s [f^+ - f^-]}$$

e

$$\begin{aligned} (1 - \mu) &= 1 + \frac{\text{grad } s f^-}{\text{grad } s [f^+ - f^-]}, \\ &= \frac{\text{grad } s f^+ - \text{grad } s f^- + \text{grad } s f^-}{\text{grad } s [f^+ - f^-]}, \\ &= \frac{\text{grad } s f^+}{\text{grad } s [f^+ - f^-]}. \end{aligned}$$

Logo, de (2.6)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \mu f^+ + (1 - \mu) f^-, \\
 &= \frac{-\text{grad } s f^-}{\text{grad } s[f^+ - f^-]} f^+ + \frac{\text{grad } s f^+}{\text{grad } s[f^+ - f^-]} f^-, \\
 &= \frac{\text{grad } s f^-}{\text{grad } s[f^- - f^+]} f^+ - \frac{\text{grad } s f^+}{\text{grad } s[f^- - f^+]} f^-.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Assim, a equação (2.7) descreve o movimento em modo deslizante.

Portanto, em sistemas com uma única superfície descontínua, o método de Filippov leva aos seguintes resultados:

- (a) O mínimo convexo de todos os vetores $f(x, t, u)$, na vizinhança de algum ponto (x, t, u) , na superfície descontínua (Fig. 2.5), é uma linha reta que liga o fim dos vetores f^+ e f^- ;
- (b) Desde que $f^0(x, t, u)$ é um modo deslizante em um plano tangencial à superfície descontínua, o fim deste vetor pode ser considerado como um ponto de intersecção deste plano com a linha reta que liga o fim dos vetores f^+ e f^- .

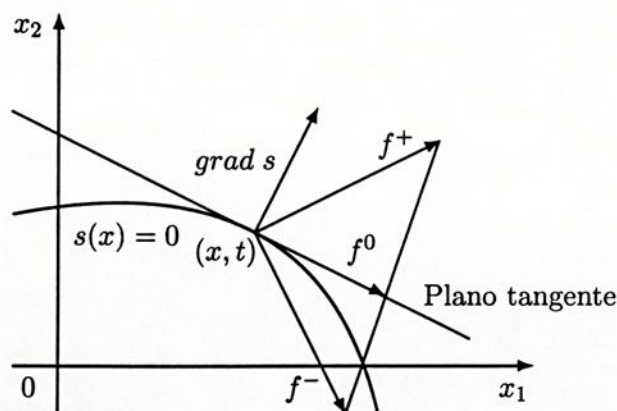


Figura 2.5: Método de Filippov.

O método de Filippov é adequado no tratamento de funções de controle descritas por (2.1) e (2.2), desde que as relações dadas por (2.2) não levem a definições ambíguas do vetor $f(x, t, u)$, fora da superfície descontínua e permita que um mínimo convexo seja constituído para qualquer ponto em tal superfície. Logo, conclui-se que o modo deslizante, em sistemas reais, não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite, em que os componentes do controle possuem valores entre $u(x, t) = u^+(x, t)$ e $u(x, t) = u^-(x, t)$.

Nos sistemas atuais, todos os dispositivos responsáveis por mudanças descontínuas da função de controle sempre possuem imperfeições, tais como atrasos, histerese, etc. Na situação descrita, as imperfeições fazem com que o chaveamento da ação de controle ocorra a uma frequência finita e a trajetória de estado oscile em uma certa vizinhança da superfície de chaveamento.

Para eliminar a ambigüidade do comportamento do sistema sobre o limite descontínuo, algumas não-idealidades que sempre estão presentes devem ser consideradas, resultando em modos deslizantes reais. As equações para o deslizamento real são obtidas quando as não-idealidades tendem à zero. Discute-se a seguir, dois casos de não-idealidades, mostrando-se que quando introduzidas no sistema descrito por (2.1) e (2.2), elas levam aos mesmos resultados descritos pela equação (2.7) (Utkin, 1978).

Histerese: Considere que o elemento que executa o chaveamento possua uma histerese. Então, a função $u(x, t)$, descrita em (2.2) será da forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{se } s(x(t)) > \Delta \\ u^-(x, t) & \text{se } s(x(t)) < -\Delta \end{cases} \quad (\Delta = \text{constante}),$$

e na região $|s(x(t))| \leq \Delta$, a função $u(x, t)$ mantém o valor que possuía, quando $|s(x(t))|$ era igual à Δ .

Em um sistema ideal (com $\Delta = 0$), a condição para o modo deslizante

$$\lim_{s(x(t)) \rightarrow 0^+} \dot{s}(x(t)) < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s(x(t)) \rightarrow 0^-} \dot{s}(x(t)) > 0,$$

ainda é válida, implicando que nas vizinhanças da superfície descontínua $s(x(t)) = 0$, as trajetórias de estado estão direcionadas à ela. A histerese fará com que as trajetórias de estado não se movam exatamente sobre a superfície, mas que oscilem sobre uma vizinhança de largura 2Δ (Fig. 2.6). Para determinar a velocidade média associada com o movimento, deve-se primeiro encontrar o deslocamento na trajetória $\Delta x(t)$ sobre dois intervalos vizinhos (em um deles $u(x, t)$ é igual a $u^-(x, t)$ e no outro igual a $u^+(x, t)$).

Logo,

$$\Delta x(t) = f^- \Delta t_1 + f^+ \Delta t_2,$$

sendo que Δt_1 e Δt_2 são os tempos de duração dos intervalos definidos como

$$\Delta t_1 = \frac{2\Delta}{\text{grad } s \, f^-} \quad \text{e} \quad \Delta t_2 = -\frac{2\Delta}{\text{grad } s \, f^+}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= \frac{2\Delta f^-}{\text{grad } s f^-} - \frac{2\Delta f^+}{\text{grad } s f^+} \\ &= \frac{2\Delta \text{grad } s f^+ f^- - 2\Delta \text{grad } s f^- f^+}{[\text{grad } s f^-][\text{grad } s f^+]}.\end{aligned}$$

Determina-se, então, a velocidade média

$$\begin{aligned}f^0(x, t, u) &= \frac{\Delta x(t)}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \\ &= \frac{\frac{2\Delta \text{grad } s f^+ f^- - 2\Delta \text{grad } s f^- f^+}{[\text{grad } s f^-][\text{grad } s f^+]}}{\frac{2\Delta \text{grad } s f^+ - 2\Delta \text{grad } s f^-}{[\text{grad } s f^-][\text{grad } s f^+]}} \\ &= \frac{\text{grad } s f^+ f^- - \text{grad } s f^- f^+}{\text{grad } s f^+ - \text{grad } s f^-} \\ &= \frac{\text{grad } s f^+}{\text{grad } s [f^+ - f^-]} f^- - \frac{\text{grad } s f^-}{\text{grad } s [f^+ - f^-]} f^+ \\ &= \frac{\text{grad } s f^-}{\text{grad } s [f^- - f^+]} f^+ - \frac{\text{grad } s f^+}{\text{grad } s [f^- - f^+]} f^-.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Comparando as equações (2.7) e (2.8), verifica-se que o vetor velocidade acima encontrado coincide com aquele obtido através do método de Filippov.

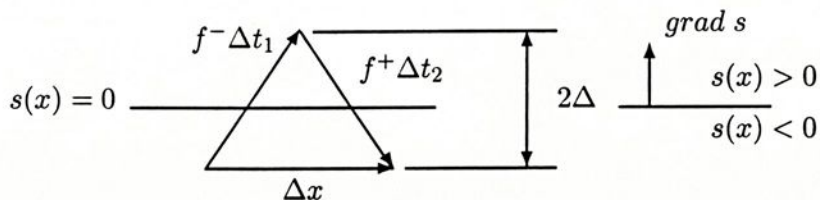


Figura 2.6: Modo deslizante em sistema com histerese.

Atraso: Considere que o controle possua descontinuidades não no instante em que o sinal de $s(x(t))$ muda, mas após um atraso τ , desta mudança de sinal. Em tal sistema, as trajetórias de estado, que se movem da região $s(x(t)) < 0$, alcançam a superfície descontínua $s(x(t)) = 0$ (ponto 1 na Fig. 2.7) e continuam se movendo durante um intervalo de tempo τ , através da trajetória associada ao controle $u(x, t)$, igual a $u^-(x, t)$ (ou $f(x, t, u) = f^-$). No tempo τ (ponto 2 na Fig. 2.7), o controle chaveia de $u^-(x, t)$ para $u^+(x, t)$ e, durante Δt_1 , as trajetórias de estado se movem a uma taxa de f^+ , para a superfície descontínua $s(x(t)) = 0$ (ponto 3 na Fig. 2.7). O chaveamento de $u^+(x, t)$ para $u^-(x, t)$ ocorre após um

período τ (ponto 4 na Fig. 2.7). Desta maneira, um movimento com a velocidade de estado f^- se inicia e após um período Δt_2 , resulta no encontro com a superfície descontínua (ponto 5 na Fig. 2.7). Para determinar a velocidade média, leva-se em consideração o deslocamento $\Delta x(t)$ (vetor 1-5 na Fig. 2.7) e os intervalos Δt_1 e Δt_2 :

$$\Delta x(t) = f^- \tau + f^+ \Delta t_1 + f^+ \tau + f^- \Delta t_2,$$

sendo

$$\Delta t_1 [\text{grad } s \ f^+] + \tau [\text{grad } s(x(t)) f^-] = 0,$$

$$\Delta t_1 = - \frac{\text{grad } s \ f^-}{\text{grad } s \ f^+} \tau \quad \text{e}$$

$$\Delta t_2 [\text{grad } s \ f^-] + \tau [\text{grad } s \ f^+] = 0,$$

$$\Delta t_2 = - \frac{\text{grad } s \ f^+}{\text{grad } s \ f^-} \tau.$$

Os valores resultantes determinam a velocidade média

$$\begin{aligned} f^0(x, t, u) &= \frac{\Delta x(t)}{2\tau + \Delta t_1 + \Delta t_2} \\ &= \frac{\text{grad } s \ f^-}{\text{grad } s [f^- - f^+]} f^+ - \frac{\text{grad } s \ f^+}{\text{grad } s [f^- - f^+]} f^-. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comparando as equações (2.7) e (2.9), verifica-se que o vetor velocidade acima encontrado coincide com aquele obtido através do método de Filippov.

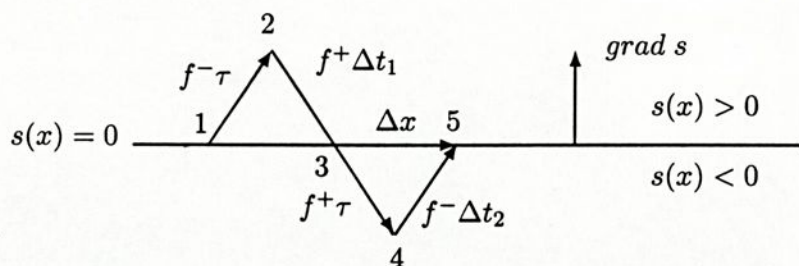


Figura 2.7: Modo deslizante em sistema com atraso.

Deve-se notar que, em ambos os casos, os resultados equivalentes ao descrito pelo método de Filippov foram obtidos sem o processo de limite que assume que a largura do ciclo de histerese de 2Δ , no primeiro caso e, o tempo de atraso τ , no segundo caso, tendam à zero. Contudo, o limite está implicitamente contido no fato de que os vetores f^+ , f^- e $\text{grad } s$ são constantes, porque estas condições somente são válidas no caso extremo em que as deflexões do ponto em consideração tendem à zero.

2.2 Controle com Estrutura Variável e observação de sistemas não-lineares

Recentemente, um número considerável de publicações tem sido dedicado ao tópico de controle de sistemas não-lineares e/ou incertos. Uma aproximação para o problema de controle de sistemas não-lineares é a linearização do sistema sobre uma trajetória nominal e então, a aplicação da bem conhecida teoria de controle linear. Uma desvantagem neste método, é que as leis de controle linear são válidas somente quando as trajetórias estiverem em uma vizinhança das trajetórias nominais.

Outra aproximação seria encontrar uma transformação não-linear que converta o sistema para a forma canônica controlável, ou outra forma linear equivalente, em que o projeto do controlador seja facilitado. A desvantagem deste método é que a construção de uma transformação apropriada não é, geralmente, trivial.

Um dos métodos mais atrativos, que pode ser aplicado em muitos sistemas não-lineares, resultando em controladores que são robustos para erros de modelagem e distúrbios desconhecidos no sistema, é o Controle com Estrutura Variável.

CEV é o controle de sistemas dinâmicos com realimentação de estados descontínua. O conceito desta teoria se baseia na mudança da estrutura do controlador, em resposta às mudanças dos estados do sistema, para que se obtenha a resposta desejada. Isto é realizado através do uso de uma lei de controle de chaveamento de alta velocidade, que força a trajetória do sistema a se manter em uma determinada superfície por todo o tempo subsequente. O sistema é insensível à variação de certos parâmetros e distúrbios, enquanto as trajetórias estiverem sobre a superfície. Se o vetor de estado não estiver acessível, então a implementação de um observador adequado é uma solução para a obtenção de um controlador.

A questão da observação de sistemas não-lineares também tem recebido grande atenção na literatura. Aqui também, uma aproximação para o problema é a linearização da equação do erro do observador sobre os pontos constantes de operação do sistema. Assim, além do fato do projeto do observador ser apenas válido nas vizinhanças destes pontos operacionais constantes, o projeto não é feito independentemente da estratégia de controle. Isto sugere que tal observador não funcionaria bem quando combinado com uma lei de controle não constante.



Outro método para a observação dos estados de sistemas não-lineares, seria encontrar uma transformação que leve o sistema existente para a forma canônica observável, de modo que o projeto de um observador seja simplificado. Como antes mencionado, na estratégia de controle similar, encontrar uma transformação apropriada é, em geral, difícil se não impossível. Um problema comum em tais aproximações é que as não-linearidades da planta devem ser incorporadas, direta ou indiretamente, na dinâmica do observador.

A síntese combinada do controlador/observador envolve três passos. O primeiro é o projeto do controlador, assumindo a disponibilidade do vetor de estado. O segundo passo é o projeto do observador de estado. O observador deverá utilizar apenas a entrada e a saída da planta. O último passo é a combinação dos dois primeiros passos em uma estratégia de controle que utilize os valores estimados do vetor de estado ao invés dos reais.

A seguir é apresentada uma metodologia de projeto de controladores e observadores de estado com estrutura variável e modos deslizantes, para sistemas não-lineares com o mesmo número de entradas e saídas da planta, descrita em (Walcott e Žak, 1988).

2.2.1 Descrição do sistema e definições básicas

Considere o sistema dinâmico modelado pela seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [A + \Delta A(t, x)]x + f(t, x) + B[u + w(t, x)], \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{2.10}$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado; $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle; $y \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema ($p \geq m$); $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $\Delta A(t, x)$ representa a incerteza na matriz característica do sistema; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada do sistema; $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema; $f(t, x)$ representa as não-linearidades da planta; $w(t, x)$ representa as não-linearidades ou distúrbios na entrada do sistema.

Para propósitos de existência, assume-se que $\Delta A(t, x)$, $f(t, x)$ e $w(t, x)$ são contínuos e as matrizes B e C são de posto completo. Além disso, considera-se que as seguintes condições são válidas:

- A1.** Existem funções $h(\cdot) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $d(\cdot) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de maneira que
- $$f(t, x) = Bh(t, x), \Delta A(t, x)x = Bd(t, x).$$



Então, defina

$$v(t, x) = \begin{bmatrix} v_1(t, x) \\ \vdots \\ v_m(t, x) \end{bmatrix} = h(t, x) + d(t, x)x + w(t, x); \quad (2.11)$$

A2. Existem funções contínuas, positivas, limitadas por valores reais, $r_i(\cdot)$ e $\rho(\cdot)$, de maneira que

$$|v_i(t, x)| < r_i(t, x), \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \|v(t, x)\| \leq \rho(t).$$

A3. O par (A, B) é completamente controlável e o par (A, C) é completamente observável.

Portanto, o sistema descrito em (2.10) é simplificado para

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[u + v(t, x)], \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo que $v = v(t, x)$ representa o conjunto de incertezas e/ou não-linearidades;

2.2.2 Projeto do controlador

O projeto de um CEV se baseia na escolha das superfícies de chaveamento, na especificação das funções de controle descontínuas e na determinação da lógica de chaveamento associada com as superfícies descontínuas. As superfícies de chaveamento são, normalmente, hiperplanos fixos no espaço de estados, passando através da origem, cuja intersecção forma o subespaço deslizante. O objetivo do projeto é levar o estado do sistema, de uma condição inicial arbitrária, para a intersecção das superfícies de chaveamento. Assim que o estado começa a deslizar, a ação de controle é necessária apenas para manter o estado sobre a intersecção destas superfícies ou em sua vizinhança.

O sistema equivalente, correspondente ao comportamento no deslizamento, deve ser assintoticamente estável, para que haja garantia de que o estado alcance a origem dentro do modo deslizante. O modo deslizante estável é assegurado através da escolha adequada das superfícies de chaveamento. Isto forma o primeiro estágio do projeto de um CEV. A questão da determinação do conjunto de hiperplanos que dará um comportamento adequado ao modo deslizante é descrito como sendo a questão da existência.

Uma vez resolvida a questão da existência, o segundo estágio no procedimento de projeto envolve a seleção de um controle, de maneira a assegurar que o modo deslizante seja

atingido. Por esta razão, a questão da determinação de uma estrutura de controle e dos ganhos associados, que irão garantir a existência do modo deslizante, é chamada questão de alcançabilidade. A solução da questão de alcançabilidade é dependente das superfícies de chaveamento, já que as funções de controle são descontínuas sobre elas e, portanto, não podem ser alcançadas sem que a questão da existência tenha sido resolvida.

O transiente de um sistema com estrutura variável consiste, portanto, em dois estágios independentes: num movimento, preferencialmente rápido, que traga o estado do sistema para a superfície em que o modo deslizante ocorra e num movimento deslizante mais lento, durante a qual o estado deslize para a origem do espaço de estados, enquanto permanece no subespaço deslizante. Este comportamento de dois estágios pode ajudar a resolver o conflito entre as exigências opostas de exatidão estática e dinâmica que são encontradas no projeto de sistemas de controle lineares, porque o sistema de CEV pode ser projetado para dar uma resposta rápida sem perda de estabilidade, regulação de estado assintótica, insensibilidade a uma classe de variações de parâmetros e invariância a certos distúrbios externos (Zinober, 1990).

Em um modo deslizante, para o caso da superfície de chaveamento linear $s(x(t)) = Sx(t) = 0$, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\text{posto}(S) = m$, o sistema equivalente de ordem $n - m$ deve satisfazer a dinâmica estabelecida previamente no deslizamento, considerando-se as m equações algébricas $s(x(t)) = 0$. O uso de ambas as limitações reduz a ordem do sistema para um modelo de $(n - m)$ -ésima ordem. Especificamente, deve-se supor que o sistema não-linear é restrito à superfície de chaveamento. Então, é possível resolver para m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ variáveis de estado restantes, se o $\text{posto}(S) = m$. Para obter a solução, deve-se resolver o sistema para m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ restantes. Substitui-se, então, estas relações nas $(n - m)$ equações restantes e as equações correspondentes às m variáveis de estado. O sistema de ordem $(n - m)$ resultante descreve completamente o sistema equivalente, dada uma condição inicial, satisfazendo $Sx(t) = 0$ (DeCarlo et al., 1988).

Como no modo deslizante, $S\dot{x} = 0$, obtem-se

$$S\dot{x} = S[Ax + B(u + v)] = SAx + SB(u + v) = 0 \Rightarrow u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx - v.$$



Assim, o sistema equivalente, de ordem reduzida, é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = [I - B(SB)^{-1}S]Ax, \\ Sx = 0. \end{cases}$$

É fácil de se verificar que $B(SB)^{-1}$ possui posto m e $[I - B(SB)^{-1}S]$ posto $(n - m)$. Portanto, a matriz $A_{eq} = [I - B(SB)^{-1}S]A$, no sistema equivalente, pode ter no máximo $(n - m)$ autovalores não nulos. Nosso objetivo é escolher S , de modo que os autovalores não nulos de A_{eq} sejam valores com parte real negativa e os autovetores correspondentes $\{w_1, \dots, w_{n-m}\}$ sejam escolhidos de maneira que permaneçam sobre a superfície de chaveamento. Assim, $W = [w_1 \dots w_{n-m}]$, $W \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$. Sabe-se que a completa controlabilidade do par (A, B) é equivalente à existência de um controlador da forma $u = -Kx$, de maneira que os autovalores de $(A - BK)$ possam ser alocados arbitrariamente.

Se considerarmos $K = (SB)^{-1}SA$, temos que $(A - BK)$ deve possuir $(n - m)$ autovalores com parte real negativa $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}\}$ e $(n - m)$ autovetores correspondentes $\{w_1, \dots, w_{n-m}\}$. Isto equivale a $(A - BK)W = WJ$, sendo $J = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}]$.

Considere $R(T)$ o range do operador T . Desde que SB seja não-singular e $SW = 0$, tem-se que $R(B) \cap R(W) = \{0\}$. Então, deve-se escolher inversas B^g , W^g , de B e W , respectivamente, de maneira que $B^gW = 0$ e $W^g = 0$. Escolhe-se $\{w_1, \dots, w_{n-m}\}$ de maneira que W^gB seja satisfeita. Observe que $R(B) \cap R(W) = \{0\}$ é verificado em $W^gB = 0$. Agora, pode-se determinar S . Se for escolhido $B^g = S$, então $SB = I$ e $SW = 0$. Assim, a superfície de chaveamento é determinada de modo que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = Sx = 0\}$. Suponhamos que $|v_i(t, x)| < r_i(t, x)$, $i = 1, \dots, m$, sendo que $v(t, x) = [v_1(t, x), \dots, v_m(t, x)]^T$ é definido por (2.11) e $r_i(t, x) > 0$.

Considera-se

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -r_1(t, x) \text{sign}(s^T S b_1) \\ \vdots \\ -r_m(t, x) \text{sign}(s^T S b_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix},$$

sendo que b_i é a i -ésima coluna da matriz B , e $s(x(t)) = Sx(t)$ e $\text{sign}(\varpi)$ é igual a 1, quando $\varpi > 0$ e igual a -1 , quando $\varpi < 0$. Pode-se verificar que se

$$u = -(SB)^{-1}SAx + \bar{u} \quad (2.13)$$

então, $s^T \dot{s} < 0$.

Portanto, com a lei de controle anteriormente descrita, consegue-se um modo deslizante. Realmente,

$$\begin{aligned}
 s^T \dot{s} &= s^T S \dot{x} \\
 &= s^T S [Ax - B(SB)^{-1} S A x + B \bar{u} + B v(t, x)] \\
 &= s^T S B [\bar{u} + v(t, x)] \\
 &= \sum_{i=1}^m s^T S b_i [\bar{u}_i + v_i(t, x)] \\
 &= \sum_{i=1}^m s^T S b_i [-r_i(t, x) \operatorname{sign} s^T S b_i + v_i(t, x)] \\
 &\leq \sum_{i=1}^m (-r_i(t, x) + |v_i(t, x)|) |s^T S b_i| < 0,
 \end{aligned}$$

se $s^T S b_i \neq 0$.

Uma desvantagem da lei de controle descrita pela equação (2.13) é que ela é descontínua e isto pode ser uma dificuldade em implementações práticas causando, por exemplo, fadiga mecânica. Adicionalmente, quando as trajetórias do sistema estiverem sobre a superfície de chaveamento, ocorrerá um rápido chaveamento dos termos de controle $\bar{u}_i$, tendendo à excitar os modos de alta frequência da planta. Este problema pode ser atenuado através da inserção de uma camada limite sobre as superfícies de chaveamento.

Considere o vetor $\epsilon = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_m]^T$, sendo $\epsilon_i > 0$, para $i = 1, \dots, m$. Substituindo $\bar{u}$ na equação (2.13) por $\bar{u}(\epsilon)$, sendo $\bar{u}(\epsilon) = [\bar{u}_1(\epsilon_1), \dots, \bar{u}_m(\epsilon_m)]^T$, obtem-se

$$\bar{u}_i(\epsilon_i) = \begin{cases} -r_i(t, x) \operatorname{sign}(s^T S b_i) & |s(x(t))^T b_i| \geq \epsilon_i \\ \frac{-r_i(t, x) s(x(t))^T S b_i}{\epsilon_i} & |s(x(t))^T b_i| < \epsilon_i \end{cases}.$$

O desempenho deste controlador contínuo pode ser feito arbitrariamente próximo do desempenho do controlador descontínuo correspondente, selecionando-se ϵ_i suficientemente pequeno.

2.2.3 Observação dos estados

Considere o sistema modelado pela equação (2.12), com o objetivo de construir um observador de estado. Considere $\bar{x}$ os estados estimados de x , obtidos pelo observador. Então, a equação do observador, para o sistema linear ($v(t, x) = 0$), será descrita por

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu + G(y - \bar{y}) \\
&= A\bar{x} + Bu + Gy - GC\bar{x} \\
&= (A - GC)\bar{x} + Gy + Bu.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

O erro é descrito por $e = \bar{x} - x$ e a sua derivada em relação ao tempo por

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{\bar{x}} - \dot{x} \\
&= (A - GC)\bar{x} + Gy + Bu - Ax - Bu \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GCx - Ax \\
&= A(\bar{x} - x) - GC(\bar{x} - x) \\
&= (A - GC)(\bar{x} - x) \\
&= (A - GC)e.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

A observabilidade de (A, C) implica na existência de uma matriz G , de maneira que $(A - GC)$ tenha autovalores com parte real negativa arbitrariamente posicionados.

Considere então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática

$$V(e) = e^T P e,$$

em que P é uma matriz real simétrica e definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\
&= [(A - GC)e]^T P e + e^T P [(A - GC)e] \\
&= (Ae - GCe)^T P e + e^T P (Ae - GCe) \\
&= (e^T A^T - e^T C^T G^T) P e + e^T P (Ae - GCe) \\
&= e^T A^T P e - e^T C^T G^T P e + e^T P A e - e^T P G C e \\
&= e^T (A^T P + P A - C^T G^T P - P G C) e.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Isto significa que para qualquer matriz real simétrica definida positiva $Q = Q^T > 0$, pode-se resolver

$$(A - GC)^T P + P(A - GC) = -Q.$$

Escolhendo-se Q , de modo que para algum $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $FC = B^T P$. Se tais Q e F existirem, então a função $T(s) = FC[sI - A + GC]^{-1}B$ é ERP.

Define-se então, a função

$$E(e, \rho) = \begin{cases} \frac{BFCe}{\|FCe\|} & FCe \neq 0 \\ 0 & FCe = 0 \end{cases},$$

sendo que $\rho(t)$ é definido em A2. Assim, a equação completa do observador é descrita por

$$\dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - E(e, \rho) + Gy + Bu. \quad (2.17)$$

Teorema 1 (Walcott e Žak, 1988) *A função $\bar{x}$ é uma estimativa assintótica do estado x , isto é*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{x} - x) = 0$$

e o erro tende a zero exponencialmente.

Introduz-se, agora, uma versão modificada do observador. Este novo observador é mais fácil de ser implementado do que a estrutura descrita anteriormente.

Considere $\tilde{C} = [\tilde{c}_1^T, \dots, \tilde{c}_m^T]^T = FC$, em que $\tilde{c}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Pela suposição A2, pode-se encontrar $\bar{\rho}(t) = [\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_m]^T$, de maneira que

$$|v_i(t, x)| < \bar{\rho}_i(t, u) \quad i = 1, \dots, m.$$

Define-se a seguinte função

$$\bar{E}(e, \bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_1(e, \bar{\rho}_1(t, u)) \\ \vdots \\ z_m(e, \bar{\rho}_m(t, u)) \end{bmatrix},$$

sendo

$$z_i(e, \bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t, u) \text{sign}(\tilde{c}_i e) & \tilde{c}_i e \neq 0 \\ 0 & \tilde{c}_i e = 0 \end{cases}.$$

Considere o observador de estado não-linear, descrito por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} - \bar{E}(e, \bar{\rho}) + Gy + Bu. \quad (2.18)$$

Então, segue o seguinte:

Teorema 2 (Walcott e Žak, 1988) A função $\tilde{x}$ é uma estimativa assintótica do estado x , isto é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{x} - x) = 0$$

e o erro tende a zero exponencialmente.

Devido ao fato da lei de controle de sistemas com estrutura variável, uma desvantagem do observador, descrito por (2.18), é que o termo $\bar{E}(e, \bar{\rho})$ é descontínuo. O observador é particularmente vulnerável à excitações de modos de alta frequência, se o observador for projetado de maneira que o tempo de resposta seja rápido. Pode-se implementar uma camada limite para superar este problema.

Substitui-se, então, o termo $\bar{E}(e, \bar{\rho})$ por $\bar{E}_\epsilon(e, \bar{\rho})$, sendo

$$\bar{E}_\epsilon(e, \bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_{\epsilon_1}(e) \\ \vdots \\ z_{\epsilon_m}(e) \end{bmatrix}$$

e

$$z_{\epsilon_i}(e, \bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t, u) \text{sign}(\tilde{c}_i e) & |\tilde{c}_i e| \geq \epsilon_i \\ \frac{\bar{\rho}_i(t, u) \tilde{c}_i e}{\epsilon_i} & |\tilde{c}_i e| < \epsilon_i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Embora tenha sido dada uma interpretação para a condição $FC = B^T P$, esta interpretação não ajuda no projeto do observador. A seguir, é dada uma receita para a construção das matrizes F e C (Walcott e Žak, 1988).

Passo 1. Escolha $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$, de maneira que $(A - GC)$ tenha autovalores prescritos no semi-plano esquerdo;

Passo 2. Resolva a equação matricial $C^T F^T = PB$, para os elementos de P , em termos dos elementos de F . Obtenha relações entre os elementos de F , de maneira que a simetria de P seja preservada. Chame o resultado deste passo de P_F ;

Passo 3. Forme $Q(P_F) = -[(A - GC)^T P_F + P_F(A - GC)]$;

Passo 4. Escolha os elementos de $Q(P_F)$, de maneira que $\Delta_i[Q(P_F)] > 0$, para $i = 1, \dots, n$, sendo que $\Delta_i[Q(P_F)] > 0$ denota o i -ésimo menor principal líder de $Q(P_F)$. Isto pode ser conseguido trabalhando-se com sucessivas submatrizes de $Q(P_F)$ e escolhendo-se os elementos de P_F , de maneira que os determinantes destas submatrizes sejam

positivos. Adicionalmente, nomeando-se os elementos livres da matriz P_F para zero, simplifica esta tarefa;

Passo 5. Avalie $P = P_F$ e substitua os valores correspondentes de volta em F . Utilize as relações entre os elementos de F , encontrados no passo 2 e complete F . Esta escolha de P e F irá garantir que a condição $C^T F^T = PB$ seja satisfeita.

2.2.4 Síntese do controlador-observador

Anteriormente, foram discutidos o controlador e o observador, separadamente. Agora, o observador será utilizado para prover uma estimativa dos estados como a entrada para um CEV (Fig. 2.8) e, neste caso, não se deve esperar que os estados se mantenham sobre a superfície de chaveamento.

Como $\bar{x}(t) = x + e$ então, a trajetória dos estados, em modo deslizante, não estará precisamente sobre $s(x) = 0$, mas ao longo de $s(\bar{x}) = s(x + e) = 0$. Assim, o estado irá oscilar sobre a superfície. A meta é mostrar que o estado estimado $\bar{x}$, do observador, irá permanecer sobre a superfície $\{\bar{x} \mid s(\bar{x}) = 0\}$. Desde que $\bar{x}$ tende a x , tem-se que x estará sobre a superfície de chaveamento, quando $\bar{x}$ estiver em modo deslizante.

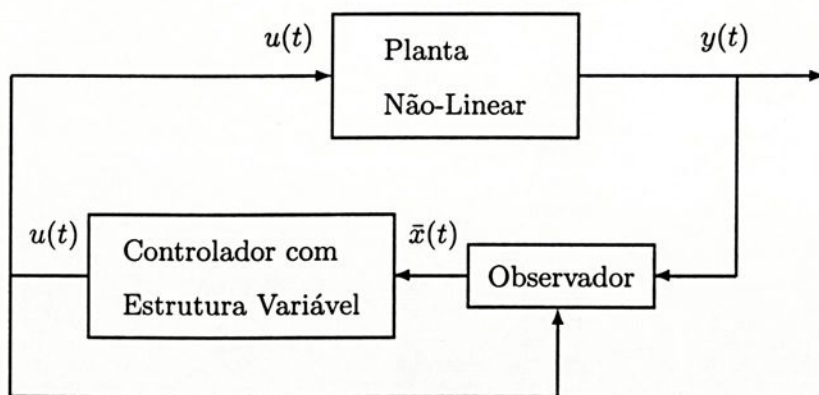


Figura 2.8: Configuração do Controlador-Observador.

A planta e o observador possuem a seguinte forma:

planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv(t, x),$$

$$y = Cx,$$

observador:

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\bar{x} - E(e, \rho) + Gy + Bu.$$

A condição para que o sistema constituído pelo controlador mais o observador alcance o deslizamento é $S\bar{x} = 0$ e $S\dot{\bar{x}} = 0$. Mais explicitamente

$$S(A - GC)\bar{x} + SGy - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGCx - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGC(\bar{x} - e) - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGC\bar{x} - SGCe - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGCe - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0.$$

Resolvendo para u_{eq} , chega-se ao controle equivalente

$$u_{eq} = -(SB)^{-1}SA\bar{x} + (SB)^{-1}SE(e, \rho) + (SB)^{-1}SGCe.$$

A substituição de u_{eq} na equação do observador leva a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - GC)\bar{x} + Gy - E(e, \rho) + Bu_{eq} \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} + GCx - E(e, \rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + B(SB)^{-1}SE(e, \rho) \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} + GC(\bar{x} - e) - E(e, \rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + B(SB)^{-1}E(e, \rho) \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} + GC\bar{x} - GCe - E(e, \rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + B(SB)^{-1}SE(e, \rho) \\ &= [I - B(SB)^{-1}S]A\bar{x} + [I - B(SB)^{-1}S](-GCe) + [I - B(SB)^{-1}S](-E(e, \rho)). \\ &= [I - B(SB)^{-1}S](A\bar{x} - GCe - E(e, \rho)). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como $e = \bar{x} - x$ e, portanto, $\dot{e} = \dot{\bar{x}} - \dot{x}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - GC)\bar{x} - E(e, \rho) + Gy + Bu - Ax - Bu - Bv \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e, \rho) + GCx - Ax - Bv \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e, \rho) + GC(\bar{x} - e) - Ax - Bv \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e, \rho) + GC\bar{x} - GCe - Ax - Bv \\ &= A(\bar{x} - x) - E(e, \rho) - GCe - Bv \\ &= Ae - E(e, \rho) - GCe - Bv \\ &= (A - GC)e - E(e, \rho) - Bv. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Deste modo, (2.19) e (2.20) descrevem o sistema combinado, controlador mais observador, em modo deslizante.

Resumindo, existem dois passos básicos no projeto de um CEV:

- (a) O projeto da superfície de chaveamento, para que o comportamento do sistema tenha certas propriedades pré-estabelecidas sobre a superfície. Por exemplo, a superfície de chaveamento é projetada de maneira que o sistema seja assintoticamente estável sobre ela;
- (b) O projeto da estratégia de controle de maneira a levar o sistema para a superfície de chaveamento e mantê-lo sobre ela por todo o tempo subsequente.



Capítulo 3

Novas condições baseadas em LMI para sistemas ERP

Considere a planta, controlável e observável

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{3.1}$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída do sistema, e todas estas matrizes são constantes.

Definição 1 (Anderson, 1968) A matriz de transferência $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ do sistema (3.1) é RP se:

- (a) Os elementos de $G(s)$ não possuem pólos com parte real positiva;
- (b) $G^*(s) = G^T(s^*)$ e
- (c) A matriz Hermitiana $J(s) = G(s) + G^T(s^*)$ é semi-definida positiva em $\text{Re}[s] > 0$,

sendo que o asterisco (*) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz.

Definição 2 (Anderson, 1968) A matriz $G(s)$ é ERP se $G(s - \epsilon)$ for RP para algum $\epsilon > 0$.



Considere o SLIT completamente controlável e observável

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}\tag{3.2}$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de entrada $u \in \mathbb{R}^m$ é tal que, para todo T positivo,

$$\int_0^T u(t)^T y(t) dt < \delta[\|x(0)\|] \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|, \quad 0 \leq t \leq T.\tag{3.3}$$

Aqui, δ é uma constante positiva que depende do estado inicial do sistema $x(0)$ mas é independente do tempo T . Os resultados a seguir foram formulados por V. M. Popov na década de 1960 (Anderson, 1968).

Definição 3 (Anderson, 1968) O sistema (3.2) é dito hiperestável se para qualquer $u(\cdot)$ satisfazendo (3.3), a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta)\tag{3.4}$$

é satisfeita para alguma constante positiva K e todo $t \geq 0$.

Definição 4 (Anderson, 1968) O sistema (3.2) é dito assintoticamente hiperestável se para qualquer $u(\cdot)$ limitado satisfazendo (3.3), a desigualdade (3.4) é satisfeita também,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.\tag{3.5}$$

Seja por definição, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência do sistema (3.2), então:

Teorema 3 (Anderson, 1968) A condição necessária e suficiente para que o sistema (3.2) seja hiperestável é que $G(s)$ seja RP.

Teorema 4 (Anderson, 1968) A condição necessária e suficiente para que o sistema (3.2) seja assintoticamente hiperestável é que $G(s)$ seja ERP.

O Lema 1, a seguir, fornece condições para os sistemas ERP.

Lema 1 (Anderson, 1968) A matriz de transferência do sistema (3.1)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

é ERP, se e somente se, existir uma matriz $P = P^T$, tal que

$$\begin{aligned} PA + A^T P &< 0, \\ B^T P &= C, \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Recentemente, (Huang et al., 1999), obtiveram condições, em termos de LMI, para que o sistema realimentado da Fig. 3.1, com entrada $V(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP para alguma matriz constante K .

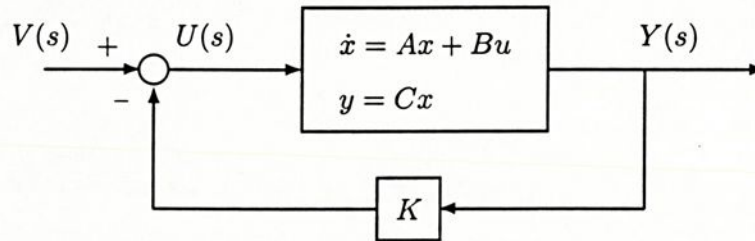


Figura 3.1: Sistema realimentado dos Teoremas 5 e 6.

Teorema 5 (Huang et al., 1999) Existe uma matriz K , constante, de realimentação da saída, de maneira a tornar ERP o sistema em malha fechada da Fig. 3.1, se e somente se, para $\tilde{C} = C^T$,

$$B^T \tilde{C} = \tilde{C}^T B > 0, \quad (3.7)$$

e se existir uma matriz $X = X^T > 0$, de maneira que

$$\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(B_\perp X B_\perp^T A) \tilde{C}_\perp < 0. \quad (3.8)$$

A matriz $\tilde{C}_\perp$ é definida como

$$\tilde{C}_\perp \in \mathbb{R}^{n-m \times n}, \quad \text{posto}(\tilde{C}_\perp) = n - m \quad \text{e} \quad \tilde{C} \tilde{C}_\perp^T = 0$$

e a matriz $B = (b_{ij})$, quadrada e complexa é Hermitiana (herm), se $b_{ij} = \bar{b}_{ji}$, ou seja, se ela for igual à transposta da sua complexa conjugada.

Desde que (3.7) e (3.8) sejam factíveis, todas as soluções para K serão descritas por

$$K = \tilde{C}^\dagger \text{herm}(PA) \{I - \tilde{C}_\perp [\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(PA) \tilde{C}_\perp]^{-1} \tilde{C}_\perp^T \text{herm}(PA)\}^{\dagger T} + S, \quad (3.9)$$

sendo que

$$P = P^T = \tilde{C}(B^T \tilde{C})^{-1} + B_\perp X B_\perp^T > 0,$$

S é uma matriz definida positiva qualquer e $\tilde{C}^\dagger = (\tilde{C}^T \tilde{C})^{-1} \tilde{C}^T$ denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de $\tilde{C}$.

O problema descrito no Teorema 5 já foi estudado teoricamente em (Owens et al., 1987) e (Teixeira, 1989), como mostra o Teorema 6.

Teorema 6 (Kaufman, 1994, p.55) Existe uma matriz constante K , tal que o sistema da Fig. 3.1 seja ERP, se e somente se:

- (a) $CB = (CB)^T > 0$;
- (b) todos os zeros de transmissão da planta apresentam parte real negativa, ou seja, a planta é de fase mínima.

Com o objetivo de explorar mais as especificações, em termos de restrições, que as LMI oferecem, foi proposto aqui o seguinte problema, mais geral do que o abordado por (Huang et al., 1999).

Problema 1 Dada a planta $\{A_o, B_o, C_o\}$, linear, invariante no tempo, controlável e observável, com posto $(B_o) = \text{posto}(C_o) = m$, determine condições necessárias e suficientes, em termos de LMI, para a existência de matrizes constantes F e $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que o sistema descrito na Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP.

A solução do Problema 1 é apresentada no Teorema 7.

Teorema 7 O Problema 1 tem solução, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, R e F , tais que

$$PA_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < 0, \quad (3.10)$$

$$B_o^T P = F C_o, \quad (3.11)$$

$$P > 0. \quad (3.12)$$

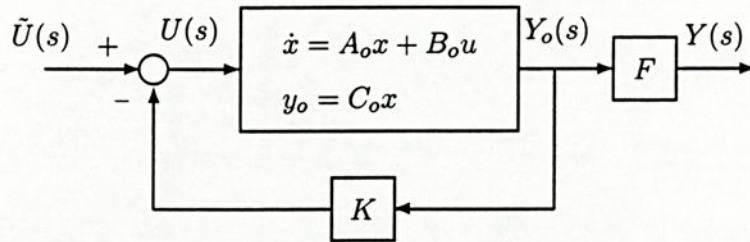


Figura 3.2: Sistema realimentado do Problema 1.

Prova Pelo Lema 1, o sistema da Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, K e F , tais que

$$P(A_o - B_o K C_o) + (A_o - B_o K C_o)^T P < 0, \quad (3.13)$$

$$B_o^T P = F C_o, \quad (3.14)$$

$$P > 0. \quad (3.15)$$

Mas, (3.14) é equivalente a

$$B_o = P^{-1} C_o^T F^T. \quad (3.16)$$

Assim, substituindo (3.16) em (3.13), obtém-se

$$P(A_o - P^{-1} C_o^T F^T K C_o) + (A_o - P^{-1} C_o^T F^T K C_o)^T P < 0,$$

$$P A_o - C_o^T F^T K C_o + A_o^T P - C_o^T K^T F C_o < 0,$$

e definindo $R = F^T K$, então esta equação é equivalente a

$$P A_o + A_o^T P - C_o^T R C_o - C_o^T R^T C_o < 0,$$

$$P A_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < 0, \quad (3.17)$$

que corresponde à equação (3.10). Assim, (3.13) – (3.15) são equivalentes a (3.10) – (3.12) e o Teorema 7 está demonstrado.

A determinação das matrizes $P = P^T$, R e F satisfazendo as LMI (3.10) – (3.12), quando elas existem, pode ser feita eficientemente, utilizando-se programas computacionais disponíveis (Boyd et al., 1994), tais como *LMISol*, *MATLAB*, etc.

Teorema 8 Considere $P = P^T$, R e F soluções de (3.10) – (3.12). Então a matriz K , dada por

$$K = (F^T)^{-1}R, \quad (3.18)$$

torna o sistema da Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, ERP.

Prova Inicialmente, observa-se que (3.11), (3.12) e posto $(B_o) = m$ implicam que $B_o^T P B_o = F C_o B_o$ tem posto m . Assim, $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tem posto m também e $(F^T)^{-1}$ existe. Agora, de (3.18), $R = F^T K$ e, substituindo-se R em (3.10), então:

$$\begin{aligned} P A_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o &< 0, \\ P A_o + A_o^T P - C_o^T (F^T K + K^T F) C_o &< 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Finalmente, substituindo-se (3.11) em (3.19), tem-se:

$$P A_o + A_o^T P - P B_o K C_o - C_o^T K^T B_o^T P < 0. \quad (3.20)$$

Como (3.10) é equivalente a (3.20) então, pelo Teorema 7, as equações (3.11), (3.12) e (3.20), implicam que o sistema da Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP. Assim, o Teorema 8 está demonstrado.

Normalmente, somente a estabilidade de um sistema de controle é insuficiente para assegurar um desempenho desejado. Frequentemente, é necessário também atender especificações referentes à resposta transitória. O teorema a seguir, estabelece condições para que todos os pólos do sistema da Fig. 3.2 tenham parte real menor do que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

O Apêndice A define o conceito de zeros de transmissão de um sistema, que será importante para o entendimento do Teorema 9.

Teorema 9 Considere $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, $i = 1, \dots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, descrito no Problema 1. Dada uma constante γ , então uma condição necessária para a existência de matrizes $P = P^T$, R e F , tais que

$$P A_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < -2\gamma P, \quad (3.21)$$

$$B_o^T P = F C_o, \quad (3.22)$$

$$P > 0, \quad (3.23)$$

é que $\gamma < -\sigma$, sendo que $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$.

Prova Definindo-se $\tilde{A}_o = A_o + \gamma I$, que é equivalente a $A_o = \tilde{A}_o - \gamma I$, então (3.21) pode ser descrita por

$$\begin{aligned} P(\tilde{A}_o - \gamma I) + (\tilde{A}_o - \gamma I)^T P - C_o^T(R + R^T)C_o &< -2\gamma P, \\ P\tilde{A}_o - \gamma P + \tilde{A}_o^T P - \gamma P - C_o^T(R + R^T)C_o &< -2\gamma P, \\ P\tilde{A}_o + \tilde{A}_o^T P - C_o^T(R + R^T)C_o - 2\gamma P &< -2\gamma P, \\ P\tilde{A}_o + \tilde{A}_o^T P - C_o(R + R^T) &< 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pelo Teorema 7, (3.21) (que é equivalente a (3.24)), (3.22) e (3.23) implicam que o sistema $\{\tilde{A}_o - B_o K C_o, B_o, F C_o\}$ é ERP. Agora, é bem conhecido que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP possuem parte real negativa (Kaufman et al., 1994), o que se aplica ao sistema $\{\tilde{A}_o - B_o K C_o, B_o, F C_o\}$. Finalmente, considerando-se que de (3.22), a matriz F tem posto m , então é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A}_o - B_o K C_o, B_o, F C_o\}$ e $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ possuem os mesmos zeros de transmissão, efetuando-se operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros:

$$\begin{array}{c} + \quad \downarrow \\ \left[\begin{array}{cc} sI - \tilde{A}_o + B_o K C_o & B_o \\ -F C_o & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc} sI - \tilde{A}_o & B_o \\ -F C_o & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\times F^{-1}} \left[\begin{array}{cc} sI - \tilde{A}_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

É bem conhecido que os zeros de transmissão de um sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, $A_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_o \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_o \in \mathbb{R}^{m \times n}$, são os $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Então, os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ são os $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s - \gamma)I - A_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Note que se $s = s_o$ é um zero de transmissão de $\{A_o, B_o, C_o\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$. Assim, para que todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ tenham parte real negativa, é necessário que $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$. Então, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$. O Teorema 9 está demonstrado.

O resultado do Teorema 9 é esperado, se for utilizada uma realimentação K com alto ganho, por exemplo, utilizando CEV e modos deslizantes, pois é conhecido que nestes casos, os zeros da planta serão, aproximadamente, os pólos do sistema de malha fechada (no caso de CEV e modos deslizantes, os zeros da planta serão os pólos do sistema no deslizamento (Žak e Hui, 1993)). O inesperado é a constatação da influência da localização dos zeros para todas as possíveis matrizes admissíveis K , de realimentação da planta.

O Lema 2 a seguir, será utilizado nos Corolários 1-4.

Lema 2 (Teixeira, 1990) Considere o sistema $\{A, B, C\}$, descrito em (3.1), com posto $(CB) = m$. Então, existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} = Tx, \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} u, \quad (3.26)$$

$$y_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Prova Define-se $C_{\perp}^T \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$, tal que posto $(C_{\perp}) = n - m$ e $CC_{\perp}^T = 0$.

Então:

$$B = C^T R_2 + C_{\perp}^T R_1, \quad (3.28)$$

sendo que

$$R_1 = (C_{\perp} C_{\perp}^T)^{-1} C_{\perp} B \in \mathbb{R}^{n-m \times m},$$

$$R_2 = (CC^T)^{-1} CB \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

e R_2 é não-singular, pois posto $(CB) = m$.

Define-se então, $B_{\perp}^T \in \mathbb{R}^{n-m \times n}$,

$$B_{\perp}^T = -R_1 R_2^{-1} (CC^T)^{-1} C + (C_{\perp} C_{\perp}^T)^{-1} C_{\perp}. \quad (3.29)$$

Logo, de (3.28) e (3.29), $B_{\perp}^T B = 0$ e como $B_{\perp}^T C_{\perp}^T = I_{n-m}$, então posto $(B_{\perp}) = n - m$.

Desta forma,

$$T = \begin{bmatrix} B_{\perp}^T \\ C \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Assim,

$$T^{-1} = (T_1 T_2), \quad (3.31)$$

sendo que

$$T_1 = B_{\perp} (B_{\perp}^T B_{\perp})^{-1} - B (CB)^{-1} C B_{\perp} (B_{\perp}^T B_{\perp})^{-1}, \quad (3.32)$$

$$T_2 = C^T (C C^T)^{-1} + C_{\perp}^T R_1 R_2^{-1} (C C^T)^{-1}. \quad (3.33)$$

De (3.25) – (3.26), tem-se que

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

sendo que

$$A_1 = B_{\perp}^T A T_1, \quad A_2 = B_{\perp}^T A T_2, \quad A_3 = C A T_1 \quad \text{e} \quad A_4 = C A T_2 \quad (3.37)$$

e o Lema 2 está provado.

Corolário 1 *Assuma que as matrizes A_o , B_o e C_o , na Fig. 3.2, tenham as seguintes formas:*

$$A_o = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

sendo que posto $(CB) = m$. Então, as condições necessárias e suficientes para a solução do Problema 1 são a existência de matrizes $P = P^T$ e R , tais que

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e} \quad (3.39)$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.40)$$

sendo que as matrizes K e F são obtidas pelas expressões:

$$K = (F^T)^{-1} R = (P_c CB)^{-1} R, \quad (3.41)$$

$$F = (CB)^T P_c. \quad (3.42)$$

Prova Pelo Teorema 7, em (3.11), a solução do Problema 1 impõe que:

$$\begin{bmatrix} 0 & (CB)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_a & P_b \\ P_b^T & P_c \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix},$$

sendo que

$$P = \begin{bmatrix} P_a & P_b \\ P_b^T & P_c \end{bmatrix} > 0.$$

Assim, como posto $(CB) = m$, então

$$F = (CB)^T P_c \quad e \quad (3.43)$$

$$P_b = 0. \quad (3.44)$$

Logo, P tem a forma descrita em (3.39) e F pode ser obtida *off-line* pela equação (3.42). Agora, o Teorema 7, (3.10), exige também que

$$\begin{aligned} PA + A^T P - C^T(R + R^T)C &< 0, \\ PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}^T (R + R^T) \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} &< 0, \\ PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} &< 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

coincidindo com a equação (3.40). Pelo Teorema 8, (3.43) e (3.44), K e F apresentam as expressões descritas em (3.41) e (3.42).

Comparando-se os resultados do Corolário 1 com os do Teorema 7 e Teorema 8, observa-se que foi removida a LME (*Linear Matrix Equality*) (3.11). Alguns softwares, como o *toolbox* de LMI do *MATLAB* não aceitam diretamente a existência de LME. Desta forma, o Corolário 1 pode ser útil para a obtenção da solução numérica do Problema 1. Considere agora, que $x \in \mathbb{R}^n$ é disponível.

Problema 2 Dada a planta $\{A_o, B_o, C_o\}$, linear, invariante no tempo, controlável e observável, com posto $(B_o) = \text{posto}(C_o) = m$, determine condições necessárias e suficientes, em termos de LMI, para a existência de uma matriz constante $K_a \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de realimentação dos estados e $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$, de maneira que o sistema descrito na Fig. 3.3, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, seja ERP.

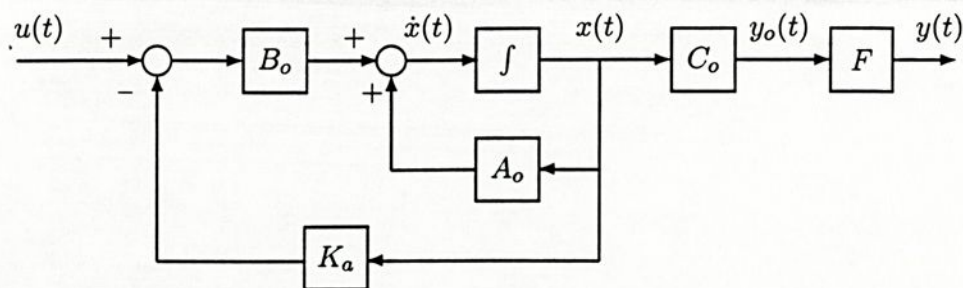


Figura 3.3: Sistema realimentado do Problema 2.

Teorema 10 *O Problema 2 tem solução, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, R e F , tais que*

$$PA_o + A_o^T P - C_o^T R - R^T C_o < 0, \quad (3.46)$$

$$B_o^T P = FC_o, \quad (3.47)$$

$$P > 0, \quad (3.48)$$

sendo que $K_a = (F^T)^{-1}R$ pode ser obtida off-line.

Prova Pelo Lema 1, o sistema da Fig. 3.3, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ é ERP, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, K_a e F , tais que

$$P(A_o - B_o K_a) + (A_o - B_o K_a)^T P < 0, \quad (3.49)$$

$$B_o^T P = FC_o, \quad (3.50)$$

$$P > 0. \quad (3.51)$$

Mas (3.50) é equivalente a

$$B_o = P^{-1}C_o^T F^T. \quad (3.52)$$

Assim, substituindo (3.52) em (3.49) e definindo-se $R = F^T K_a$, obtém-se

$$P(A_o - P^{-1}C_o^T F^T K_a) + (A_o - P^{-1}C_o^T F^T K_a)^T P < 0,$$

$$PA_o - C_o^T F^T K_a + A_o^T P - K_a^T FC_o < 0,$$

$$PA_o + A_o^T - C_o^T R - R^T C_o < 0,$$

que corresponde à equação (3.46). Assim, (3.49) – (3.51) são equivalentes a (3.46) – (3.48) e o Teorema 10 está demonstrado.

Teorema 11 Considere $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, $i = 1, \dots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, descrito no Problema 2. Dada uma constante γ , então uma condição necessária para a existência de matrizes $P = P^T$ e K , tais que

$$PA_o + A_o^T P - C_o^T R + R^T C_o < -2\gamma P, \quad (3.53)$$

$$B_o^T P = F C_o, \quad (3.54)$$

$$P > 0, \quad (3.55)$$

é que $\gamma < -\sigma$, sendo que $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$. A matriz K_a pode ser obtida off-line pela expressão $K_a = (F^T)^{-1} R$.

Prova A prova deste teorema é análoga à prova do Teorema 9.

Corolário 2 Assuma que as matrizes A_o , B_o e C_o , na Fig. 3.2, tenham as seguintes formas descritas em (3.38), sendo que $\text{posto}(CB) = m$. Então, as condições necessárias e suficientes para a solução do Problema 1 são a existência de matrizes $P = P^T$ e R , tais que

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \quad e \quad (3.56)$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < -2\gamma P, \quad (3.57)$$

sendo que as matrizes K e F são obtidas pelas expressões:

$$K = (F^T)^{-1} R = (P_c CB)^{-1} R, \quad (3.58)$$

$$F = (CB)^T P_c. \quad (3.59)$$

Prova A Prova deste corolário é análoga às provas do Teorema 9 e do Corolário 1.

O Corolário 3 tem um desenvolvimento semelhante ao apresentado no Corolário 1.

Corolário 3 Assuma que as matrizes A_o , B_o e C_o na Fig. 3.3, tenham as formas descritas em (3.38), sendo que $\text{posto}(CB) = m$. Então, a condição necessária e suficiente para a solução do Problema 2 é a existência da matriz $P = P^T$, R e F , de maneira que

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \quad (3.60)$$

$$PA_o + A_o^T P - \begin{bmatrix} 0 & R^T \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & R^T \end{bmatrix} < 0. \quad (3.61)$$

As matrizes $K_a = (F^T)^{-1}R$ e $F = (CB)^T P_c$ podem ser obtidas off-line.

Prova Pelo Teorema 10, a solução do Problema 2 impõe que:

$$B_o^T P = FC_o \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & (CB)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_a & P_b \\ P_b^T & P_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$P_b = 0 \text{ e } (CB)^T P_c = F.$$

Logo, P tem a forma descrita em (3.60). Agora, definindo-se $R = F^T K_a$, o Teorema 10 exige também que

$$\begin{aligned} PA_o + A_o^T P - C_o^T R - R^T C_o &< 0, \\ PA_o + A_o^T P - \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}^T R - R^T \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} &< 0, \\ PA_o + A_o^T P - \begin{bmatrix} 0 & R^T \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & R^T \end{bmatrix} &< 0, \end{aligned}$$

coincidindo com a equação (3.61).

Corolário 4 Assuma que as matrizes A_o , B_o e C_o na Fig. 3.3, tenham as formas descritas em (3.38), sendo que posto $(CB) = m$. Então, a condição necessária e suficiente para a solução do Problema 2 é a existência da matriz $P = P^T$, R e F , de maneira que

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \quad (3.62)$$

$$PA_o + A_o^T P - \begin{bmatrix} 0 & R^T \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & R^T \end{bmatrix} < -2\gamma P. \quad (3.63)$$

As matrizes $K_a = (F^T)^{-1}R$ e $F = (CB)^T P_c$ podem ser obtidas off-line.

Prova A prova deste corolário é análoga às provas do Teorema 9 e do Corolário 2.

Considere o caso em que o vetor de estado $x \in \mathbb{R}^n$ da planta é disponível e a saída $y_o(t)$, descrito na Fig. 3.3, não é especificada. O problema descrito a seguir é útil para o projeto de CEV nesta situação.

Problema 3 Dada a planta $\{A_o, B_o\}$, controlável, linear, invariante no tempo, $B_o \in \mathbb{R}^{n \times m}$, posto $(B_o) = m$, determine $C_o \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$ tenham parte real menor do que $-\gamma$, $\gamma > 0$ dado.

Lema 3 Uma solução para o Problema 3 é obtida pelas LMI:

$$WA_o^T + A_oW - B_oV - V^TB_o^T < -2\gamma W, \quad (3.64)$$

$$W = W^T > 0. \quad (3.65)$$

Prova Estas LMI sempre apresentam solução, pois $\{A_o, B_o\}$ é controlável e na realidade (3.64) e (3.65) correspondem ao posicionamento dos pólos de $\dot{x} = (A_o - B_oK)x$, sendo

$$K = VW^{-1}. \quad (3.66)$$

Agora, escolhendo-se

$$C_o = B_o^TW^{-1}, \quad (3.67)$$

obtemos para $P = W^{-1}$, de (3.64) – (3.67), que

$$A_o^TP + PA_o - PB_oK - K^TB_o^TP < -2\gamma P, \quad (3.68)$$

$$B_o^TP = C_o, \quad (3.69)$$

$$P = P^T > 0. \quad (3.70)$$

Assim, o sistema $\{A_o - B_oK, B_o, C_o\}$ é ERP e desta forma, todos os zeros de transmissão possuem parte real negativa. Utilizando-se o mesmo tipo de análise empregada no Teorema 9 e Teorema 11, é fácil verificar que todos os zeros de transmissão deste sistema apresentam parte real menor que $-\gamma$.

Uma vez determinado C_o que atenda o Problema 3, da forma descrita acima, pode-se aplicar os resultados referentes ao Problema 2 para o projeto de controladores. Pelo Teorema 11, observamos que a especificação de γ está diretamente relacionada à taxa de decaimento do sistema.

No Capítulo 4, será mostrado que as LMI (3.10) – (3.12) do Teorema 7 permitem a especificação de restrições na saída e a consideração da robustez, com respeito aos parâmetros da planta.



Capítulo 4

Controle com Estrutura Variável utilizando sistemas ERP e LMI

Considere a planta descrita por (4.1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)(u + \xi(t, x)), \\ y &= (C + \Delta C)x,\end{aligned}\tag{4.1}$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

São assumidas as seguintes hipóteses:

- B1.** O par $((A + \Delta A), (B + \Delta B))$ é controlável, e o par $((A + \Delta A), (C + \Delta C))$ é observável para todas as incertezas admissíveis ΔA , ΔB e ΔC ;
- B2.** O vetor x não é disponível, mas a saída y é disponível;
- B3.** $\text{posto}(B + \Delta B) = \text{posto}(C + \Delta C) = \text{posto}((C + \Delta C)(B + \Delta B)) = m$, para todas as incertezas admissíveis ΔB e ΔC ;
- B4.** Seja, por definição, $|\xi(t, x)| = |\xi_1(t, x)| + \dots + |\xi_m(t, x)|$. Então, são conhecidas constantes a e b , tais que $|\xi(t, x)| \leq a|x| + b$;
- B5.** As matrizes das incertezas ΔA e ΔC são constantes, mas desconhecidas e descritas por:

$$A + \Delta A = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \text{ e } C + \Delta C = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i,$$

sendo que $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ são constantes desconhecidas, $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$ e as matrizes A_i e C_i , $i = 1, \dots, r$ são conhecidas (incertezas politópicas).



B6. A matriz $\Delta B = B\Delta\tilde{B}$, sendo que são conhecidos l_i , $i = 1, \dots, m$, tais que $1 + \Delta\tilde{B}_{i,i} - |\Delta\tilde{B}_{i,1}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{i,i-1}| - |\Delta\tilde{B}_{i,i+1}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{i,m}| > l_i > 0$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

É oportuno mencionar que a hipótese B5 é genérica, pois permite incertezas politópicas arbitrárias nas matrizes $A + \Delta A$ e $C + \Delta C$.

4.1 Estabilidade e Robustez

Para a análise da estabilidade do sistema com incertezas (4.1), considerando-se B1-B6, seja a candidata a função de Lyapunov

$$V(x, \alpha) = x^T P(\alpha) x, \quad P(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i, \quad (4.2)$$

sendo que $P_i > 0$, $i = 1, \dots, r$.

Fazendo uma analogia com o Teorema 7, considere a existência de $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R e F , tais que, dadas $(A + \Delta A)$ e $(C + \Delta C)$ em B5 e B , as equações abaixo sejam satisfeitas:

$$P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (R + R^T) (C + \Delta C) < 0, \quad (4.3)$$

$$B^T P(\alpha) = F(C + \Delta C) \quad \text{e} \quad (4.4)$$

$$P(\alpha) > 0, \quad (4.5)$$

para todos α_i , $i = 1, \dots, r$ admissíveis. A hipótese B6 pode ser flexibilizada, mas este fato não será considerado nesta dissertação. Então, para a lei de controle

$$u = -Ky - \beta \text{sign}(Fy), \quad (4.6)$$

de (4.1), B1-B6 e (4.3) – (4.6), chega-se em (4.7), pois:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \alpha) &= [(A + \Delta A)x - (B + \Delta B)Ky - (B + \Delta B)\beta \text{sign}(Fy) + (B + \Delta B)\xi]^T P(\alpha)x \\ &\quad + x^T P(\alpha)[(A + \Delta A)x - (B + \Delta B)Ky - (B + \Delta B)\beta \text{sign}(Fy) + (B + \Delta B)\xi] \\ &= [(A + \Delta A)x - (B + \Delta B)K(C + \Delta C)x - (B + \Delta B)\beta \text{sign}(Fy) \\ &\quad + (B + \Delta B)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)[(A + \Delta A)x - (B + \Delta B)K(C + \Delta C)x \\ &\quad - (B + \Delta B)\beta \text{sign}(Fy) + (B + \Delta B)\xi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^T(A + \Delta A)^T P(\alpha)x - x^T(C + \Delta C)^T K^T(B + \Delta B)^T P(\alpha)x \\
&\quad - [(B + \Delta B)\beta \text{sign}(Fy) - (B + \Delta B)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)(A + \Delta A)x \\
&\quad - x^T P(\alpha)(B + \Delta B)K(C + \Delta C)x - x^T P(\alpha)[(B + \Delta B)\beta \text{sign}(Fy) - (B + \Delta B)\xi] \\
&= x^T[P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - P(\alpha)(B + \Delta B)K(C + \Delta C) \\
&\quad - (C + \Delta C)^T K^T(B + \Delta B)^T P(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)(B + \Delta B)(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Mas, $(B + \Delta B) = B(I + \Delta \tilde{B})$, então

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, \alpha) &= x^T[P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(I + \Delta \tilde{B})K(C + \Delta C) \\
&\quad - (C + \Delta C)^T K(I + \Delta \tilde{B})^T B^T P(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Também, $B^T P(\alpha) = F(C + \Delta C)$, assim

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, \alpha) &= x^T[P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T F^T(I + \Delta \tilde{B})K(C + \Delta C) \\
&\quad - (C + \Delta C)^T K(I + \Delta \tilde{B})^T F(C + \Delta C)]x + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T[P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T F^T K(C + \Delta C) \\
&\quad - (C + \Delta C)^T F^T \Delta \tilde{B} K(C + \Delta C) - (C + \Delta C)^T K F(C + \Delta C) \\
&\quad - (C + \Delta C)^T K \Delta \tilde{B}^T F(C + \Delta C)]x + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T[P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (F^T K + K F)(C + \Delta C) \\
&\quad - (C + \Delta C)^T (F^T \Delta \tilde{B} K + K \Delta \tilde{B}^T F)(C + \Delta C)]x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T[P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (F^T K + K F)(C + \Delta C)]x \\
&\quad - x^T(C + \Delta C)^T F^T \Delta \tilde{B} K(C + \Delta C)x - x^T(C + \Delta C)^T K \Delta \tilde{B}^T F(C + \Delta C)x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^T [P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (F^T K + KF)(C + \Delta C)]x \\
&\quad - y^T F^T \Delta \tilde{B} K y - y^T K \Delta \tilde{B}^T F y + 2x^T (C + \Delta C)^T F^T (I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (F^T K + KF)(C + \Delta C)]x \\
&\quad - 2y^T F^T \Delta \tilde{B} K y + 2y^T F^T (I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (F^T K + KF)(C + \Delta C)]x \\
&\quad + \overbrace{2y^T F^T [(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) - \Delta \tilde{B} K y]}^J. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Assim, de B6 e definindo $y^T F^T = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{bmatrix}$, observe que

$$\begin{aligned}
J &= 2y^T F^T [(I + \Delta \tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) - \Delta \tilde{B} K y] \\
&= 2 \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{bmatrix} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 + \Delta \tilde{B}_{1,1} & \Delta \tilde{B}_{1,2} & \dots & \Delta \tilde{B}_{1,m-1} & \Delta \tilde{B}_{1,m} \\ \Delta \tilde{B}_{2,1} & 1 + \Delta \tilde{B}_{2,2} & \dots & \Delta \tilde{B}_{2,m-1} & \Delta \tilde{B}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta \tilde{B}_{m-1,1} & \Delta \tilde{B}_{m-1,2} & \dots & 1 + \Delta \tilde{B}_{m-1,m-1} & \Delta \tilde{B}_{m-1,m} \\ \Delta \tilde{B}_{m,1} & \Delta \tilde{B}_{m,2} & \dots & \Delta \tilde{B}_{m,m-1} & 1 + \Delta \tilde{B}_{m,m} \end{bmatrix}}^{(I + \Delta \tilde{B})} \right. \\
&\quad \cdot \left(-\beta \begin{bmatrix} \text{sign}(f_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(f_m) \end{bmatrix} + \xi \right) - \Delta \tilde{B} K y \left. \right\} \\
&= -2\beta f_1 [(1 + \Delta \tilde{B}_{1,1}) \text{sign}(f_1) + \Delta \tilde{B}_{1,2} \text{sign}(f_2) + \dots + \Delta \tilde{B}_{1,m} \text{sign}(f_m)] - \dots \\
&\quad - 2\beta f_m [\Delta \tilde{B}_{m,1} \text{sign}(f_1) + \Delta \tilde{B}_{m,2} \text{sign}(f_2) + \dots + (1 + \Delta \tilde{B}_{m,m}) \text{sign}(f_m)] \\
&\quad + 2f_1 \xi [(1 + \Delta \tilde{B}_{1,1}) + \Delta \tilde{B}_{1,2} + \dots + \Delta \tilde{B}_{1,m}] + \dots \\
&\quad + 2f_m \xi [\Delta \tilde{B}_{m,1} + \Delta \tilde{B}_{m,2} + \dots + (1 + \Delta \tilde{B}_{m,m})] - 2y^T F^T \Delta \tilde{B} K y \\
&\leq -2\beta |f_1| \overbrace{[(1 + \Delta \tilde{B}_{1,1}) - |\Delta \tilde{B}_{1,2}| - \dots - |\Delta \tilde{B}_{1,m}|]}^{> l_1 > 0} - \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\beta|f_m| \overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| \dots - (1 + \Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} + \dots \\
& + 2|f_1||\xi_1| \overbrace{[(1 + \Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}|]}^{>l_1>0} + \dots \\
& + 2|f_m||\xi_m| \overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| - \dots - (1 + \Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} - 2[|f_1| + \dots + |f_m|]|\Delta\tilde{B}Ky| \\
\leq & -2\beta|f_1| \overbrace{[(1 + \Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}|]}^{>l_1>0} - \dots \\
& - 2\beta|f_m| \overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| \dots - (1 + \Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} + \dots \\
& + 2|f_1|(a|x_1| + b) \overbrace{[(1 + \Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}|]}^{>l_1>0} + \dots \\
& + 2|f_m|(a|x_m| + b) \overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| - \dots - (1 + \Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} - 2[|f_1| + \dots + |f_m|]|\Delta\tilde{B}Ky|
\end{aligned}$$

Assim, especificando-se $\beta > 0 \in \mathbb{R}$, suficientemente grande, o último termo de $\dot{V}(x, \alpha)$ em (4.7) é menor ou igual a zero. Assim, definindo-se $R = F^T K$, a condição (4.3) implica que $\dot{V}(x, \alpha) < 0$, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Logo, (4.3) – (4.6) são suficientes para a estabilidade global assintótica de (4.1).

Da hipótese B5, então (4.4) e (4.5) são verificadas, para todos $\alpha_i, i = 1, \dots, r$ admissíveis, se e somente se,

$$B^T P_i = F C_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad (4.8)$$

$$P_i = P_i^T > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.9)$$

A condição (4.3) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix}^T < 0, \quad (4.10)$$

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{bmatrix} (R + R^T) \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_r \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Logo, uma condição suficiente para a condição (4.3) é

$$Q < 0. \quad (4.12)$$

Se as LMI (4.8), (4.9) e (4.12) (que são equivalentes a (4.3) – (4.5)) forem factíveis, a matriz K pode ser obtida pela expressão $K = (F^T)^{-1}R$.

Da mesma forma, para o caso em que há acesso completo às variáveis de estado, fazendo uma analogia ao Teorema 10, considere a existência de $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ e K_a , tais que dado $(A + \Delta A)$ em B5, $C(\alpha)$ e B , as equações abaixo sejam satisfeitas:

$$P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T R - R^T C(\alpha) < 0, \quad (4.13)$$

$$B^T P(\alpha) = F C(\alpha) \quad \text{e} \quad (4.14)$$

$$P(\alpha) > 0, \quad (4.15)$$

para todos α_i , $i = 1, \dots, r$ admissíveis. Então, a lei de controle

$$u = -K_a x - \delta \operatorname{sign} x, \quad (4.16)$$

para $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, suficientemente grande, então (4.13) – (4.16) são suficientes para a estabilidade global assintótica de (4.1).

Em termos de LMI, (4.14) e (4.15) são equivalentes a

$$B^T P_i = F C_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad (4.17)$$

$$P_i = P_i^T > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.18)$$

A condição (4.13) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix} Q_a \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix}^T < 0, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} Q_a = & \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_r \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} R_1^T & \dots & R_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_r \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Logo, uma condição suficiente para a condição (4.13) é

$$Q_a < 0. \quad (4.21)$$

4.2 Estabilidade, Robustez e Taxa de Decaimento

A taxa de decaimento 2γ pode ser introduzida nas equações (4.3) – (4.5), pela equação

$$P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (R + R^T) (C + \Delta C) < -2\gamma P(\alpha), \quad (4.22)$$

ou de modo equivalente,

$$P(\alpha)(A + \Delta A + \gamma I) + (A + \Delta A + \gamma I)^T P(\alpha) - (C + \Delta C)^T (R + R^T) (C + \Delta C) < 0, \quad (4.23)$$

(4.4) e (4.5). Analogamente ao efetuado na análise de (4.3), nas equações (4.19) – (4.21), uma condição suficiente, em termos de LMI, para a equação (4.23) é que

$$Q + \begin{bmatrix} \gamma I & \dots & \gamma I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma I & \dots & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.24)$$

As LMI (4.8), (4.9) e (4.24), com Q definida em (4.20), especificam o projeto que garante estabilidade, robustez e taxa de decaimento.

Da mesma forma, para o caso em que há acesso completo às variáveis de estado, a taxa de decaimento, é especificada pela equação

$$P(\alpha)(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T R - R^T C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \quad (4.25)$$

ou de modo equivalente,

$$P(\alpha)(A + \Delta A + \gamma I) + (A + \Delta A + \gamma I)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T R - R^T C(\alpha) < 0, \quad (4.26)$$

(4.14) e (4.15). Analogamente, uma condição suficiente, em termos de LMI, para a equação (4.26) é que

$$Q_a + \begin{bmatrix} \gamma I & \dots & \gamma I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma I & \dots & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.27)$$

4.3 Estabilidade, Robustez, Taxa de Decaimento e Restrição nas Saídas

Considere o sinal

$$s = Hx, \quad (4.28)$$

sendo que $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $1 \leq q \leq n$ é uma matriz constante conhecida. Devido às limitações das implementações práticas de sistemas de controle, muitas vezes, deve ser considerado como restrição no projeto, que

$$\max_{t \geq 0} \|s(t)\| \leq \xi_o, \quad (4.29)$$

sendo que ξ_o é uma constante conhecida, para uma condição inicial $x(0)$ dada.

Em (Boyd et al., 1994), foram apresentadas duas LMI para a especificação destas restrições, para um sinal de controle $u = Gx$. Analisando-se a dedução deste resultado (Apêndice B), observa-se que a lei de controle pode ser arbitrária, desde que exista uma função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, com $P = P^T > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$.

As condições apresentadas por (Boyd et al., 1994) para assegurar que (4.28) e (4.29) sejam satisfeitas são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & P(\alpha)H^T \\ HP(\alpha) & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0. \quad (4.31)$$

Tendo em vista a definição de $P(\alpha)$ em (4.2), então (4.30) e (4.31) são, respectivamente, equivalentes às LMI:

$$\begin{bmatrix} P_i & P_i H^T \\ HP_i & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & P_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.33)$$

Se o projeto exigir, pode-se especificar a restrição de vários sinais distintos, do tipo descrito em (4.28), simultaneamente. As LMI referentes a estas restrições devem ser consideradas juntamente com as outras LMI que asseguram a estabilidade, taxa de decaimento e robustez. Para o caso especial, no qual $s = y$, y dada em (4.1) e B5, a LMI (4.30) merece ser analisada com mais detalhe:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P(\alpha) & P(\alpha)(C + \Delta C)^T \\ (C + \Delta C)P(\alpha) & \xi_o^2 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i \right] P(\alpha) & P(\alpha)(C + \Delta C)^T \\ (C + \Delta C)P(\alpha) & \xi_o^2 \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i \right]^2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix}^T > 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

sendo que

$$S_1 = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T & \dots & C_r^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} [\xi_o^2 I] \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}^T. \quad (4.35)$$

Uma condição suficiente para (4.28) e (4.29), com $H = (C + \Delta C)$, neste caso é $S > 0$ e (4.33).

Capítulo 5

Exemplo de projeto do controlador de um manipulador $\theta - r$

Toma-se como exemplo de aplicação, o manipulador $\theta - r$, descrito em (Walcott e Žak, 1988), apresentado na Fig. 5.1, junto com o seu modelo mecânico equivalente. Aqui, m_1 representa a massa do cilindro externo (posicionada em seu centro de massa) e r_1 a distância fixa entre o centro de massa do cilindro externo e o centro de rotação. A massa da carga é representada por m_2 e assume-se que está localizada no fim de um pistão ou braço telescópico que é variável na direção radial, a uma distância r do centro de rotação. O ângulo de rotação do braço manipulador é denotado por θ . As entradas do sistema são assumidas como sendo o torque T_θ aplicado ao eixo, na direção de θ e, a força translacional F_r aplicada na direção de r . Finalmente, considera-se g a constante gravitacional, na direção apresentada na Fig. 5.1.

Inicialmente, é apresentado o projeto de um controlador e um observador de estado com EVMD, para o manipulador $\theta - r$, descrito em (Walcott e Žak, 1988). Posteriormente, é apresentado um novo método de projeto para o observador de estado, baseado em LMI e, em seguida, o projeto do controlador para o manipulador $\theta - r$ é realizado para o novo método, que considera acesso somente às saídas da planta, utilizando os resultados apresentados no Capítulo 3 para sistemas ERP, baseadas em LMI.



5.1 Controle com EVMD do manipulador $\theta - r$ com acesso aos estados e com observador

Nesta seção, é apresentado o projeto de um controlador e de um observador de estado com EVMD e as suas simulações, para o manipulador $\theta - r$, cuja metodologia é descrita em (Walcott e Žak, 1988) e apresentada no Capítulo 2.

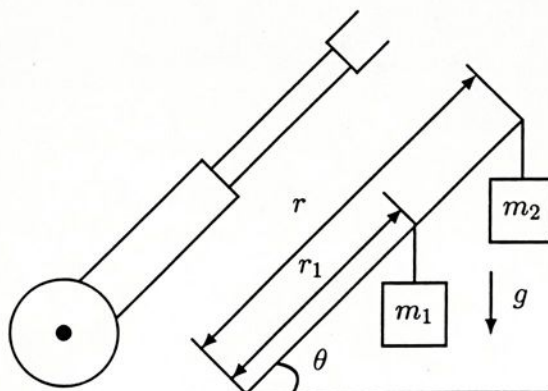


Figura 5.1: Manipulador $\theta - r$ e a sua representação física.

As equações do torque e da força, deduzidas no Apêndice D, são descritas, respectivamente, por

$$T_{\theta} = m_1 r_1^2 \ddot{\theta} + m_2 r^2 \ddot{\theta} + 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + g \cos(\theta) (m_1 r_1 + m_2 r), \quad (5.1)$$

$$F_r = m_2 \ddot{r} - m_2 r \dot{\theta}^2 + m_2 g \sin(\theta). \quad (5.2)$$

Escolheu-se a seguinte representação em variáveis de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

e os seguintes valores para os parâmetros: $m_1 = 10\text{kg}$, $r_1 = 1\text{m}$ e $g = 9,81\text{m/s}^2$.

Assim, a equação de estado será dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{2m_2x_2x_3x_4+10\cos x_1(10+m_2x_3)}{10+m_2x_3^2} \\ x_4 \\ x_2^2x_3 - 10\sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10+m_2x_3^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\theta \\ F_r \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

As restrições na entrada são dadas por

$$T_{\theta_{max}} = 200Nm \quad e \quad F_{r_{max}} = 50N.$$

Para a saída, em vez de se escolher as posições e velocidades, será escolhida uma combinação linear das duas, descrita por

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

O projeto se baseia na combinação de um controlador-observador para o manipulador, de maneira que as posições finais sejam $x_{1ss} = \pi/2$ rad e $x_{3ss} = 2m$, começando da condição inicial $x(0) = [0, 0, 1, 0]^T$. Adicionalmente, o erro de posicionamento deve ser desprezível em 8 segundos.

5.1.1 Projeto do controlador

Como um primeiro passo no projeto do controlador, precisa-se passar o modelo do manipulador para a forma do sistema (2.12). Embora para o projeto do controlador não seja essencial que a matriz de entrada B seja independente de x , juntou-se o termo $1/(10+m_2x_3^2)$, contido em B com o controle e a não-linearidade. Isto foi feito porque o termo é comum a ambos, o controle e a não-linearidade, e não muda de sinal. Similarmente, por conveniência, foi feito o mesmo com o termo $1/m_2$ contido em B . O resultado desta manipulação é representado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T_\theta + v_1}{10+m_2x_3^2} \\ \frac{F_r + v_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

sendo

$$v_1 = -[2m_2x_2x_3x_4 + 10\cos x_1(10 + m_2x_3)],$$

$$v_2 = m_2(x_2^2x_3 - 10\sin x_1).$$

Desde que o problema estipula que o regime permanente seja alcançado em menos de 8 segundos, as superfícies de chaveamento serão projetadas de maneira que a constante de tempo de ordem reduzida do sistema seja de 1 segundo, isto é, o sistema, quando confinado na superfície de chaveamento, irá possuir autovalores iguais a -1 . Uma constante de tempo mais rápida contribuiria para uma maior susceptibilidade do sistema para o fenômeno de trepidação (*chattering*). Portanto, as equações de deslizamento desejadas são definidas como

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{\pi}{2} = x_2 \quad \dot{x}_3 = -x_3 + 2 = x_4$$

e a superfície de chaveamento correspondente é dada por

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -2 \end{bmatrix} = 0.$$

A matriz $S(t, x)B$ é simplificada para

$$S(t, x)B = \begin{bmatrix} Sb_1 & Sb_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10+m_2x_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -(SB)^{-1} = \begin{bmatrix} -(10+m_2x_3^2) & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -(SB)^{-1}SAx &= \begin{bmatrix} -(10+m_2x_3^2) & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(10+m_2x_3^2)x_2 \\ -m_2x_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mas

$$|v_i(t, x)| < r_i(t, x) \quad i = 1, \dots, m.$$

Logo, utilizando as estimativas $|x_1| \leq \pi \text{ rad}$, $|x_2| \leq 2 \text{ rad/s}$, $|x_3| \leq 2 \text{ m}$, $|x_4| \leq 2 \text{ m/s}$, $|m_2| \leq 2 \text{ kg}$, obtém-se:

$$|v_1| < 172 \quad \text{e} \quad |v_2| < 36.$$

Portanto, adotaremos (Walcott e Žak, 1988):

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -r_1 \text{sign}(s^T S b_1) \\ -r_2 \text{sign}(s^T S b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -172 \text{sign}(s_1) \\ -36 \text{sign}(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a lei de controle inteira, em semelhança com a equação (2.13), é descrita por

$$u = \begin{bmatrix} T_\theta \\ F_r \end{bmatrix} = -(SB)^{-1} S A x + \bar{u} = \begin{bmatrix} -(10 + m_2 x_3^2) x_2 - 172 \text{sign}(s_1) \\ -m_2 x_4 - 36 \text{sign}(s_2) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.1.2 Projeto do observador

Desde que a massa da carga não é necessariamente constante e pode ser desconhecida, para o propósito de projeto do observador, juntou-se o controle inteiro em um termo não-linear/incerto, designado como $v(t, x)$. Esta medida deve produzir um observador que é mais robusto às variações dos parâmetros. Assim, o modelo resultante é descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

sendo

$$\tilde{v}_1 = \frac{T_\theta - (2m_2 x_2 x_3 x_4 + 10 \cos x_1 (10 + m_2 x_3))}{10 + m_2 x_3^2}$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{F_r}{m_2} + (x_2^2 x_3 - 10 \sin x_1).$$

As estimativas das fronteiras das não-linearidades são dadas por

$$|\tilde{v}_1| \leq 0,0556|T_\theta| + 9,5556 = \bar{\rho}_1(t, u)$$

$$|\tilde{v}_2| \leq 0,5000|F_r| + 18,0000 = \bar{\rho}_2(t, u)$$

A seguir, é apresentado o algoritmo descrito anteriormente, para a construção das matrizes que satisfazem a condição $C^T F^T = P B$ (Walcott e Žak, 1988).

Passo 1. Desde que o par (A, C) é completamente observável, pode-se alocar arbitrariamente o espectro de $A_0 = A - GC$. Devido à especificação de erro de posicionamento desprezível em menos de 8 segundos, o observador deverá ter um tempo de resposta

extremamente rápido. Além disso, não é desejável a alocação dos autovalores muito distantes no semi-plano esquerdo, pois isto poderia aumentar a sensibilidade da saída do observador, levando ao aumento da trepidação. A seleção de $\{-1, -1, -1, -1\}$ leva a um tempo de resposta adequado, mas lento o suficiente para uma redução no efeito de trepidação. A escolha

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

leva a

$$A_0 = A - GC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Passo 2. Considerando-se

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}.$$

A solução da equação matricial $C^T F^T = PB$ resulta em

$$C^T F^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$PB = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12} & p_{14} \\ p_{22} & p_{24} \\ p_{32} & p_{34} \\ p_{42} & p_{44} \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} p_{12} & p_{14} \\ p_{22} & p_{24} \\ p_{32} & p_{34} \\ p_{42} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Por analogia, sendo $f_{21} = f_{12}$, tem-se que

$$P_F = \begin{bmatrix} p_{11} & f_{11} & p_{13} & f_{12} \\ f_{11} & f_{11} & f_{21} & f_{12} \\ p_{13} & f_{21} & p_{33} & f_{22} \\ f_{12} & f_{12} & f_{22} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Passo 3. A equação matricial $Q(P_F) = -[A_0^T P_F + P_F A_0]$, em que

$$A_0^T P_F = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & f_{11} & p_{13} & f_{12} \\ f_{11} & f_{11} & f_{21} & f_{12} \\ p_{13} & f_{21} & p_{33} & f_{22} \\ f_{12} & f_{12} & f_{22} & f_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -p_{11} - f_{11} & -2f_{11} & -p_{13} - f_{12} & -2f_{12} \\ -f_{11} & -f_{11} & -f_{12} & -2f_{12} \\ -p_{13} - f_{12} & -2f_{12} & -p_{33} - f_{22} & -2f_{22} \\ -f_{12} & -f_{12} & -f_{22} & -2f_{22} \end{bmatrix},$$

$$P_F A_0 = \begin{bmatrix} p_{11} & f_{11} & p_{13} & f_{12} \\ f_{11} & f_{11} & f_{21} & f_{12} \\ p_{13} & f_{21} & p_{33} & f_{22} \\ f_{12} & f_{12} & f_{22} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -p_{11} - f_{11} & -f_{11} & -p_{13} - f_{12} & -f_{12} \\ -2f_{11} & -f_{11} & -2f_{12} & -f_{12} \\ -p_{13} - f_{12} & -2f_{12} & -p_{33} - f_{22} & -f_{22} \\ -2f_{12} & -f_{12} & -f_{22} & -f_{22} \end{bmatrix},$$

resulta em

$$Q(P_F) = \begin{bmatrix} -2p_{11} - 2f_{11} & -3f_{11} & -2p_{13} - 2f_{12} & -3f_{12} \\ -3f_{11} & -2f_{11} & -3f_{12} & -2f_{12} \\ -2p_{13} - 2f_{12} & -3f_{12} & -2p_{33} - 2f_{22} & -2f_{22} \\ -3f_{12} & -2f_{12} & -3f_{22} & -2f_{22} \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A atribuição

$$p_{11} = p_{33} = 2, \quad f_{11} = f_{22} = 1, \quad p_{13} = f_{12} = 0,$$

produz

$$Q(P_F) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1[Q(P_F)] = 6 > 0, \quad \Delta_2[Q(P_F)] = 3 > 0, \quad \Delta_3[Q(P_F)] = 18 > 0, \quad \Delta_4[Q(P_F)] = 9 > 0.$$

Passo 5. Substituindo-se estes valores em $P = P_F$ e F , tem-se

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta escolha de Q e P leva a $\eta = \lambda_{\min}(P^{-1}Q) = 1$. Isto implica que o erro de medida do observador, $e^T P e$, decrescerá tão rapidamente quanto e^{-t} , ou mais rapidamente.

A equação do observador, deduzida no Capítulo 2, é descrita por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} - \bar{E}(e, \bar{\rho}) + Gy + Bu,$$

sendo que

$$\bar{E}(e, \bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_1(e, \bar{\rho}_1) \\ \vdots \\ z_m(e, \bar{\rho}_m) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z_i(e, \bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t, u) \operatorname{sign}(\tilde{c}_i e) & \tilde{c}_i e \neq 0 \\ 0 & \tilde{c}_i e = 0 \end{cases},$$

com

$$\tilde{C} = [\tilde{c}_1^T, \dots, \tilde{c}_m^T]^T = FC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$e = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 - x_1 \\ \tilde{x}_2 - x_2 \\ \tilde{x}_3 - x_3 \\ \tilde{x}_4 - x_4 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\tilde{C}e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 - x_1 \\ \tilde{x}_2 - x_2 \\ \tilde{x}_3 - x_3 \\ \tilde{x}_4 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 - x_1 + \tilde{x}_2 - x_2 \\ \tilde{x}_3 - x_3 + \tilde{x}_4 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - y_1 \\ \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 - y_2 \end{bmatrix}$$

e

$$z_1(e, \bar{\rho}_1) = \begin{cases} \bar{\rho}_1(t, u) \text{sign}(\tilde{c}_1 e) & \tilde{c}_1 e \neq 0 \\ 0 & \tilde{c}_1 e = 0 \end{cases}, \quad z_1(e, \bar{\rho}_2) = \begin{cases} \bar{\rho}_2(t, u) \text{sign}(\tilde{c}_2 e) & \tilde{c}_2 e \neq 0 \\ 0 & \tilde{c}_2 e = 0 \end{cases}.$$

Logo,

$$\bar{E}(e, \bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_1(e, \bar{\rho}_1) \\ \vdots \\ z_m(e, \bar{\rho}_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(e, \bar{\rho}_1) \\ z_2(e, \bar{\rho}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_1(e, \bar{\rho}_1) \\ 0 \\ z_2(e, \bar{\rho}_2) \end{bmatrix}.$$

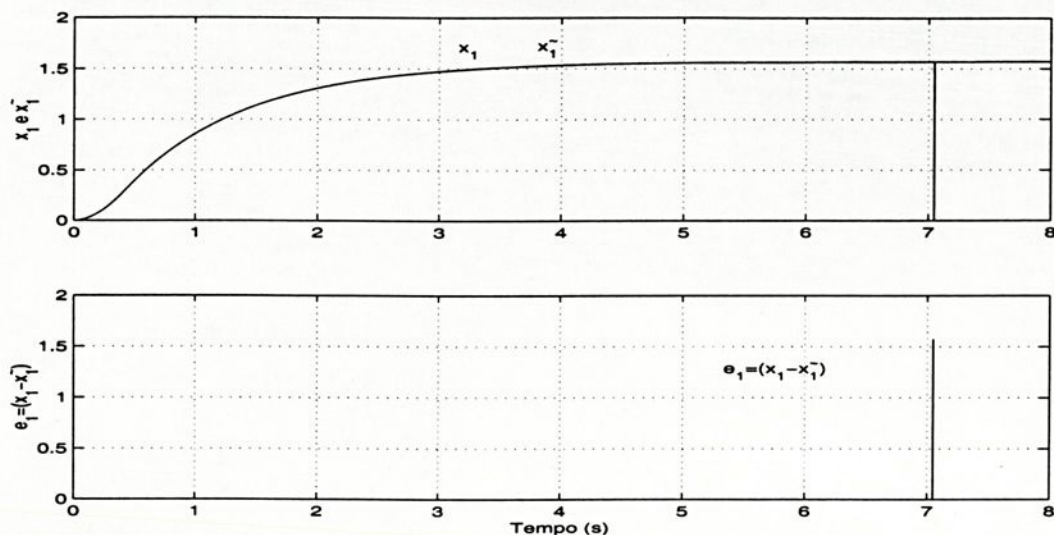
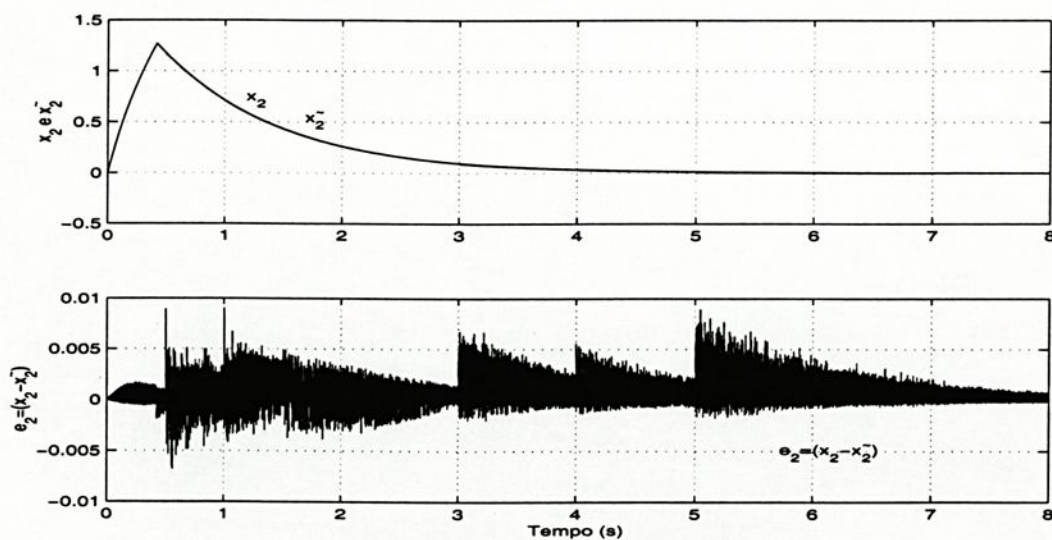
Chega-se, então, à dinâmica do observador, através da seguinte descrição em variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\rho}_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - y_1) \\ 0 \\ -\bar{\rho}_2 \text{sign}(\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 - y_2) \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

5.1.3 Simulações do controlador-observador

Nesta seção, são apresentadas as simulações do controlador e do observador de estado com EVMD. Utilizando-se a condição inicial $x(0) = [0, 0, 1, 0]^T$ e $\tilde{x}(0) = [0, 0, 0, 0]$, o

sistema regido pelas equações (5.3) e (5.4), sob a influência do controle descrito pela equação (5.6) e o observador, pela equação (5.8) foram simulados. Os resultados das simulações são apresentados nas Fig. 5.2- 5.5, com os respectivos erros e, as superfícies de chaveamento, através das Fig. 5.6 e Fig. 5.7. O gráfico da Fig. 5.2 apresenta um *spike* e o gráfico da Fig 5.8 um erro desprezível entre 6 e 7 segundos. Isto se deve, possivelmente, a algum erro de iteração numérica ocorrido durante a simulação.

Figura 5.2: x_1 e $\tilde{x}_1$.Figura 5.3: x_2 e $\tilde{x}_2$.

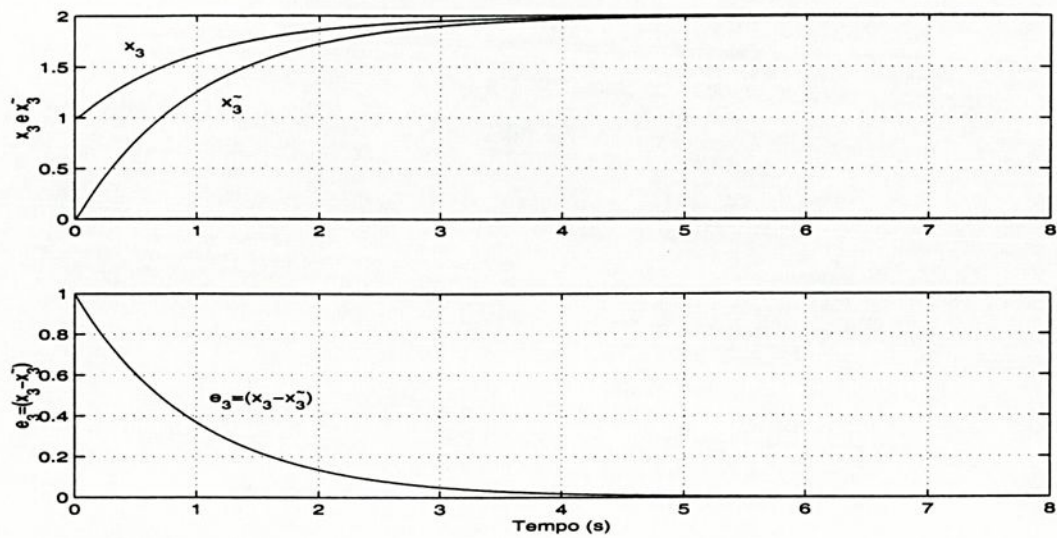


Figura 5.4: x_3 e $\tilde{x}_3$.

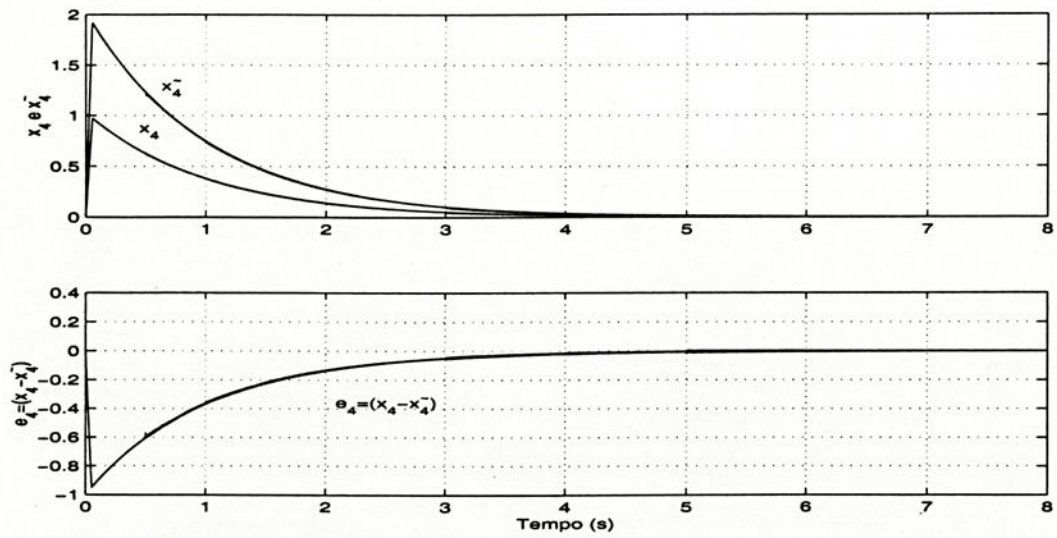


Figura 5.5: x_4 e $\tilde{x}_4$.

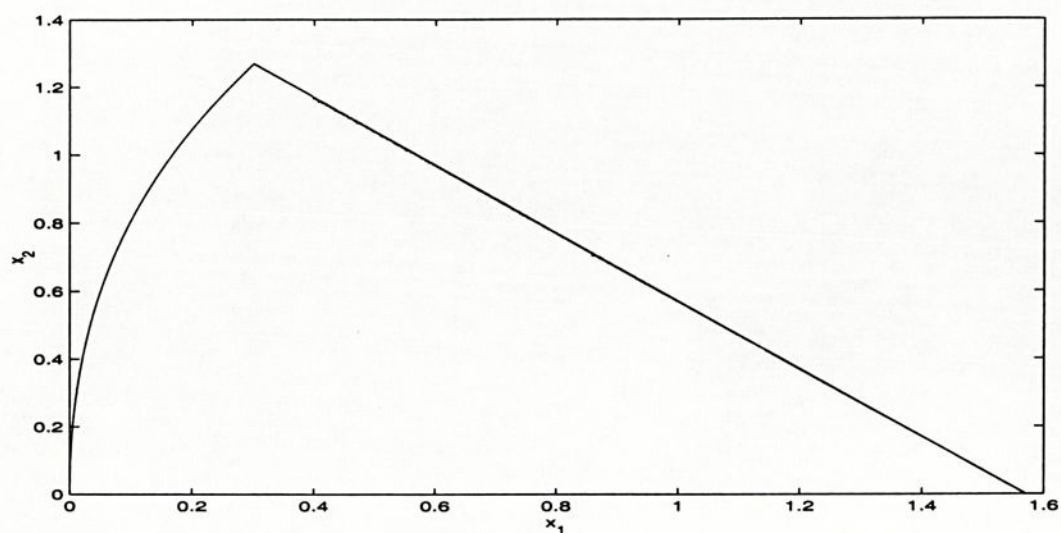


Figura 5.6: Superfície de chaveamento S_1 .

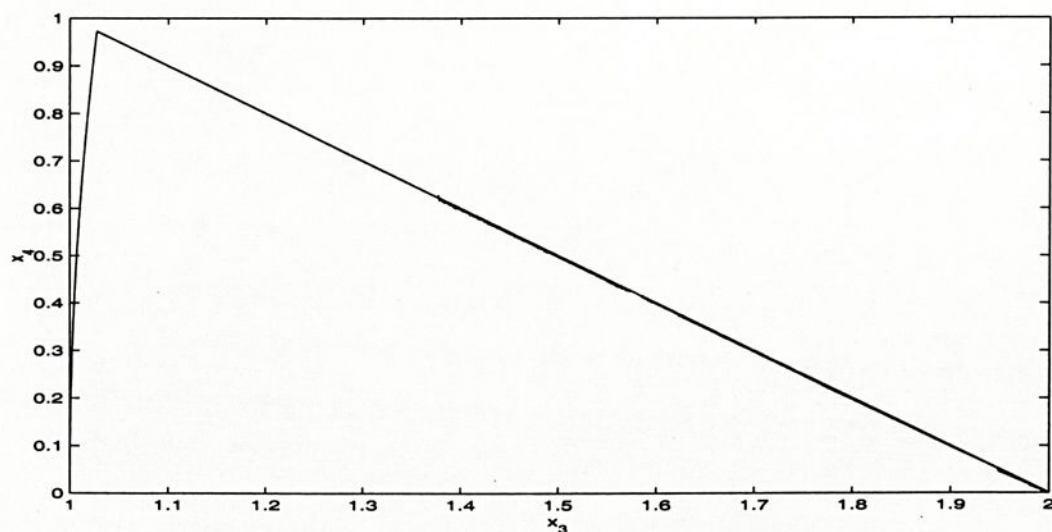


Figura 5.7: Superfície de chaveamento S_2 .

5.1.4 Simulações do controlador-observador em malha fechada

O sistema composto pelo controlador e observador, em malha fechada, como descrito pela Fig. 2.8, é composto pela nova lei de controle:

$$\begin{bmatrix} T_\theta \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(10 + m_2 \tilde{x}_3^2) \tilde{x}_2 - 150 \text{sign}(\hat{s}_1) \\ -m_2 \tilde{x}_4 - 25 \text{sign}(\hat{s}_2) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -2 \end{bmatrix} = 0.$$

A trajetória resultante desta configuração controlador-observador será denotada por $\tilde{x}$. O sistema sob a influência deste controle foi simulado com as condições iniciais $x(0) = [0, 0, 1, 0]^T$ e $\tilde{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$, sendo que os resultados encontram-se nas Fig. 5.8 a Fig. 5.13. Nota-se que o desempenho do controlador-observador é adequado, quando comparado com os resultados do controlador.

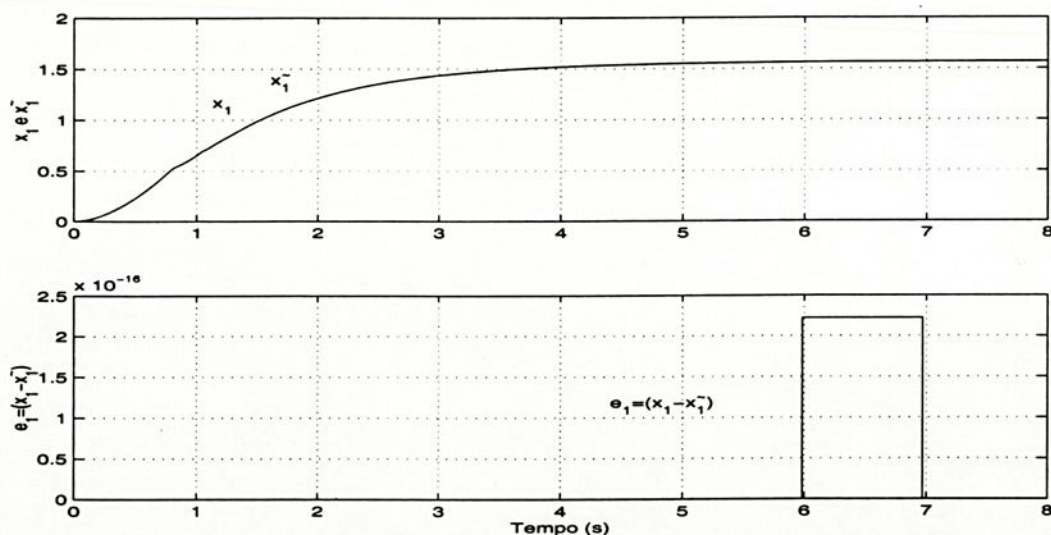


Figura 5.8: x_1 e $\tilde{x}_1$.

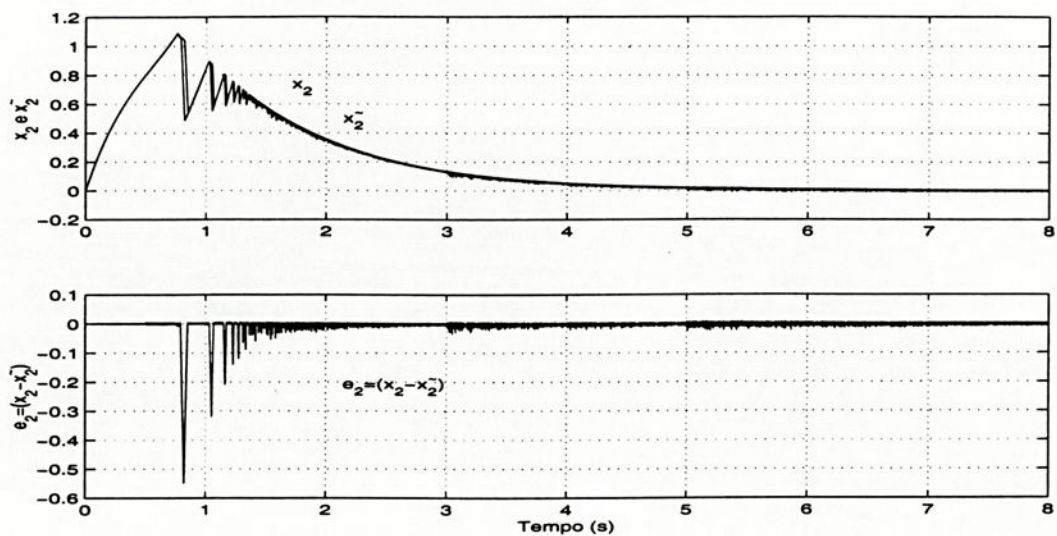


Figura 5.9: x_2 e $\tilde{x}_2$.

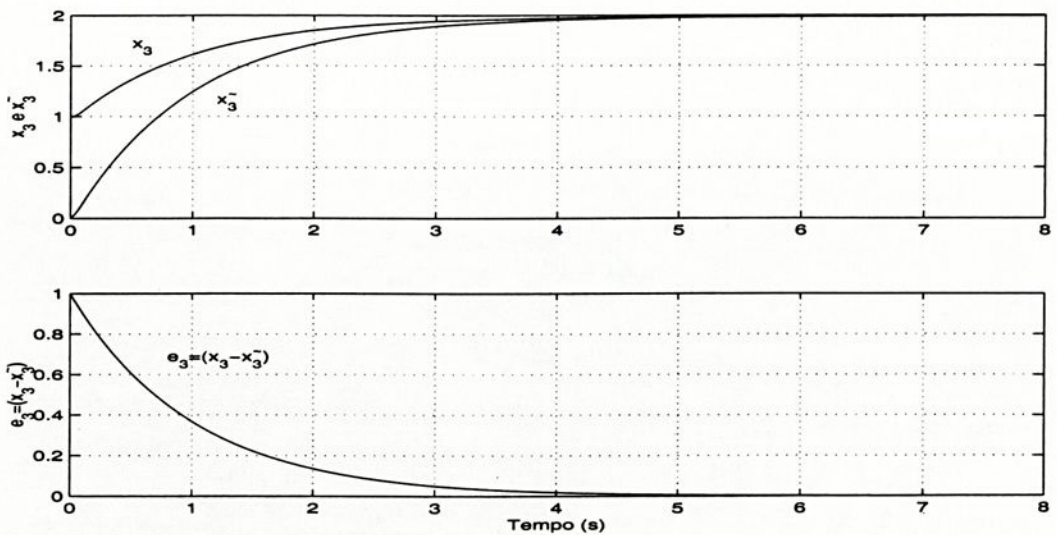


Figura 5.10: x_3 e $\tilde{x}_3$.

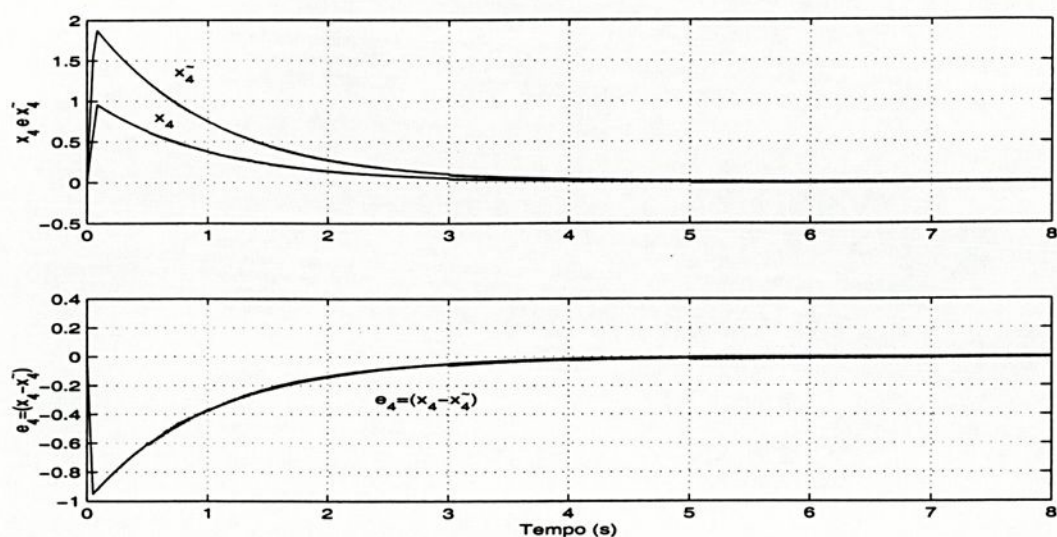


Figura 5.11: x_4 e $\tilde{x}_4$.

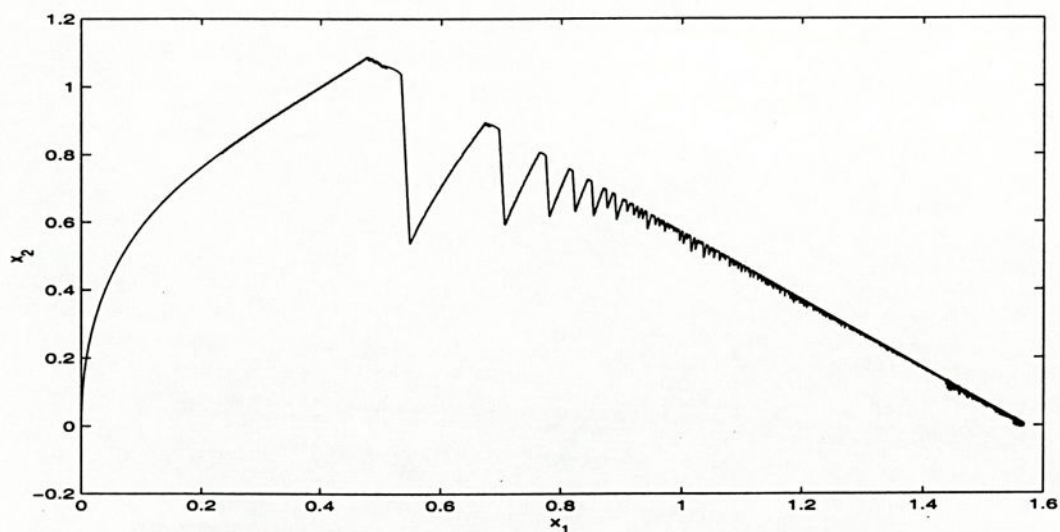
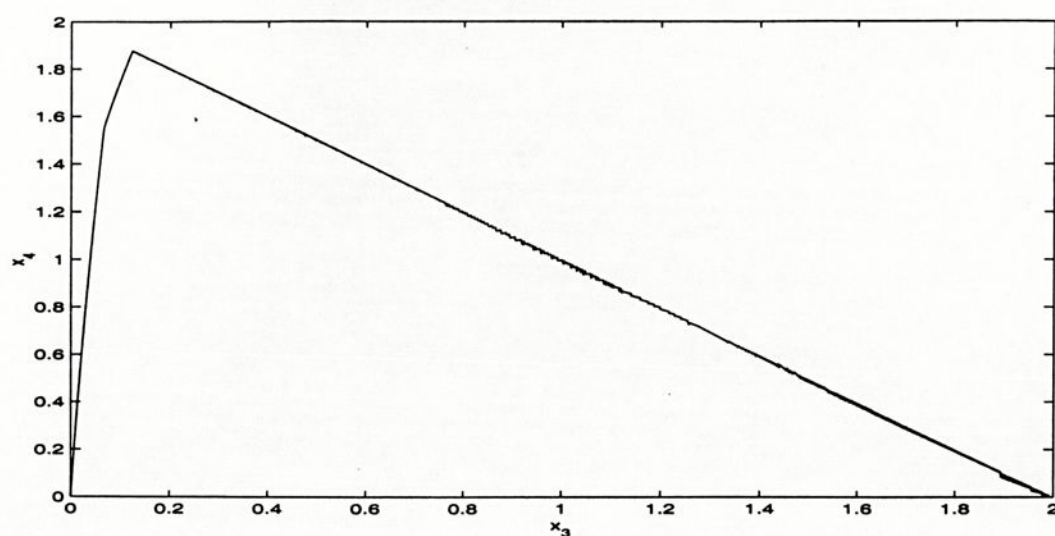


Figura 5.12: Superfície de chaveamento S_1 do controlador-observador.

Figura 5.13: Superfície de chaveamento S_2 do controlador-observador.

5.1.5 Simulações com a inserção da camada limite

Inicialmente, simulou-se a resposta do sistema até 4 segundos, com um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, para que se possa observar o efeito da trepidação (*chattering*).

Os resultados são apresentados nas Fig. 5.14 e Fig. 5.15.

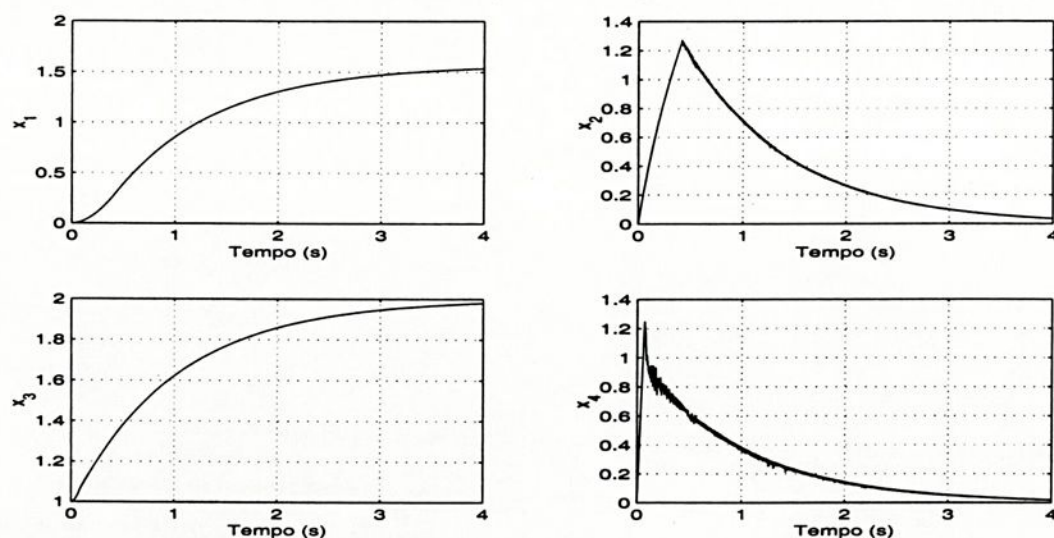


Figura 5.14: Estados do sistema para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos.

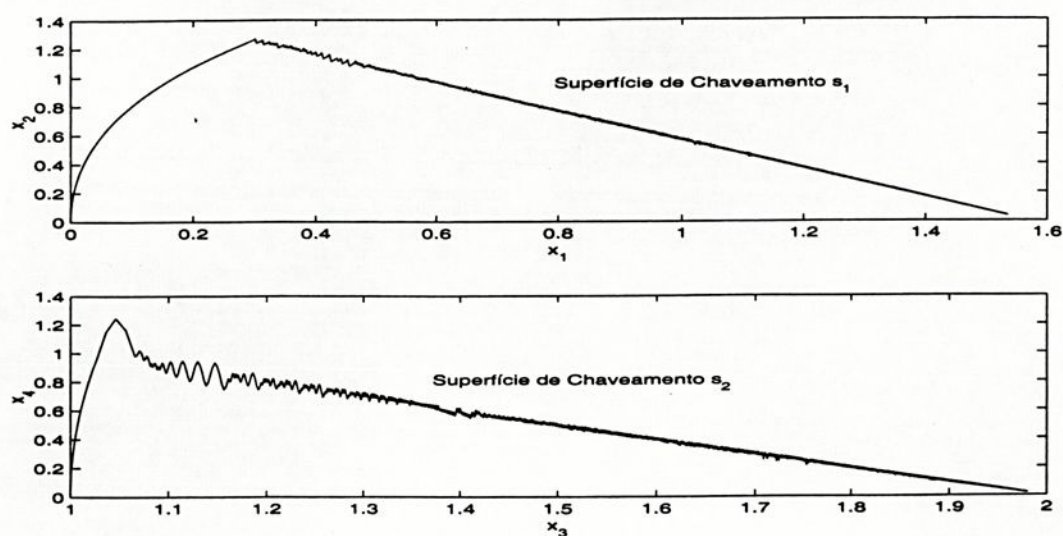


Figura 5.15: Superfícies de chaveamento S_1 e S_2 para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos.

Para eliminar as oscilações de alta frequência, adotou-se o seguinte esquema de controle:

$$T_\theta = \begin{cases} -(10 + m_2 x_3^2)x_2 - 172 \text{sign}(s_1) & |s_1| \geq \epsilon_{c1} \\ -(10 + m_2 x_3^2)x_2 - \frac{172s_1}{\epsilon_{c1}} & |s_1| < \epsilon_{c1} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$F_r = \begin{cases} -m_2 x_4 - 36 \text{sign}(s_2) & |s_2| \geq \epsilon_{c2} \\ -m_2 x_4 - \frac{36s_2}{\epsilon_{c2}} & |s_2| < \epsilon_{c2} \end{cases} \quad (5.11)$$

O sistema foi simulado até 8 segundos, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,5$; $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,1$; $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,05$ e $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,01$. Os resultados são descritos nas Fig. 5.16 a Fig. 5.23. Pode-se notar, que o efeito indesejável da trepidação desapareceu, mas houve alteração da resposta do sistema para os casos em que ϵ é muito grande.

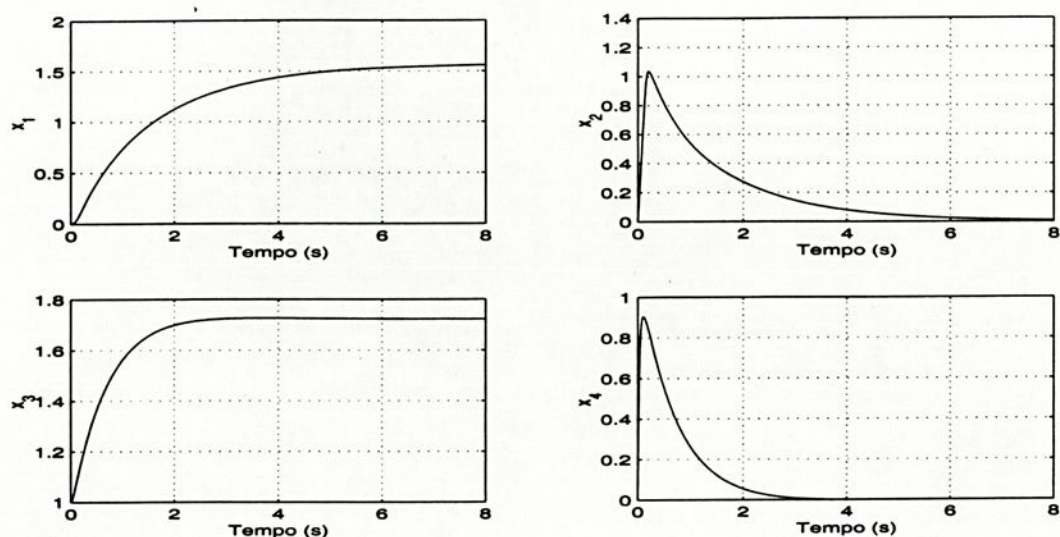


Figura 5.16: Estados do sistema para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,5$.

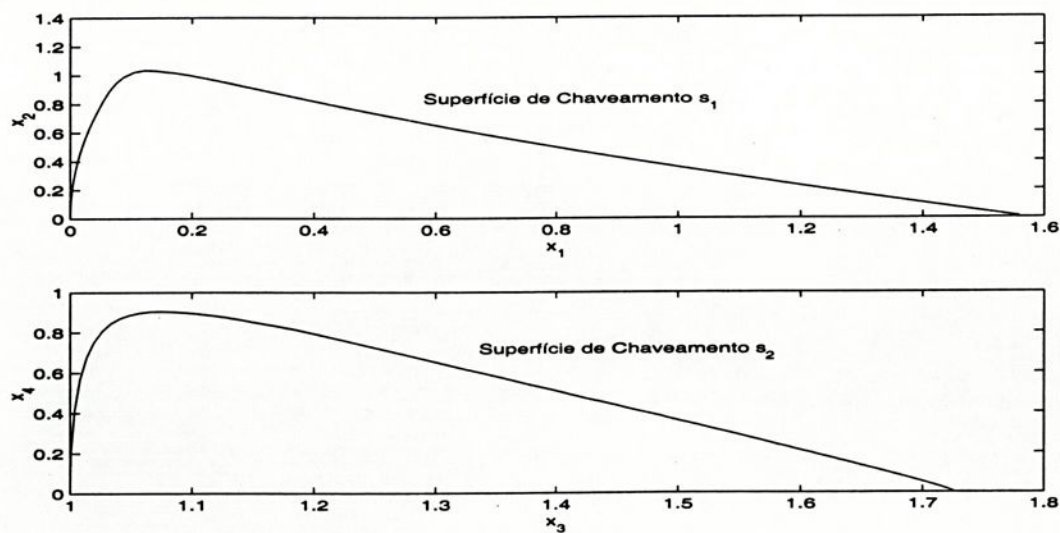


Figura 5.17: Superfícies de Chaveamento s_1 e s_2 para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,5$.

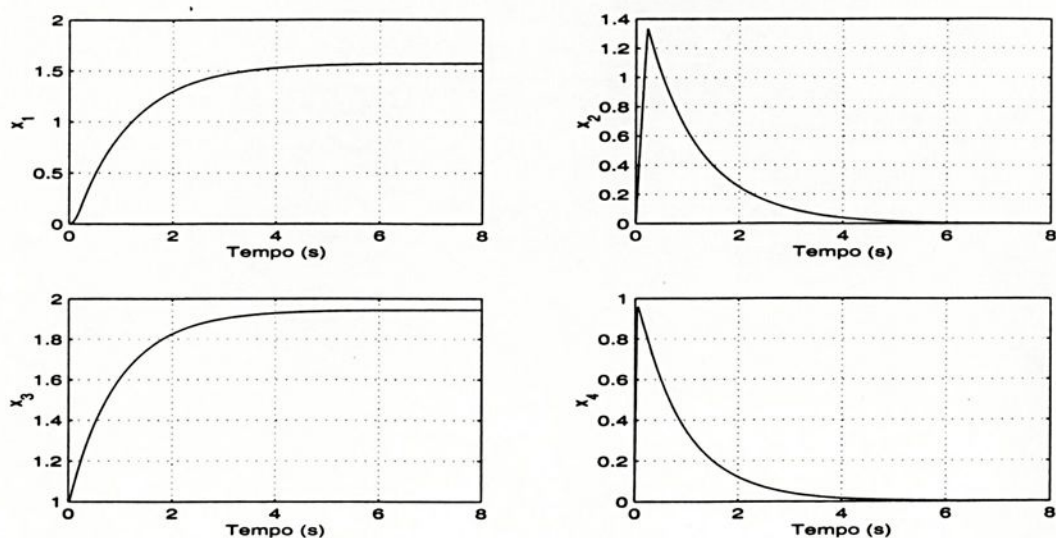


Figura 5.18: Estados do sistema para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,1$.

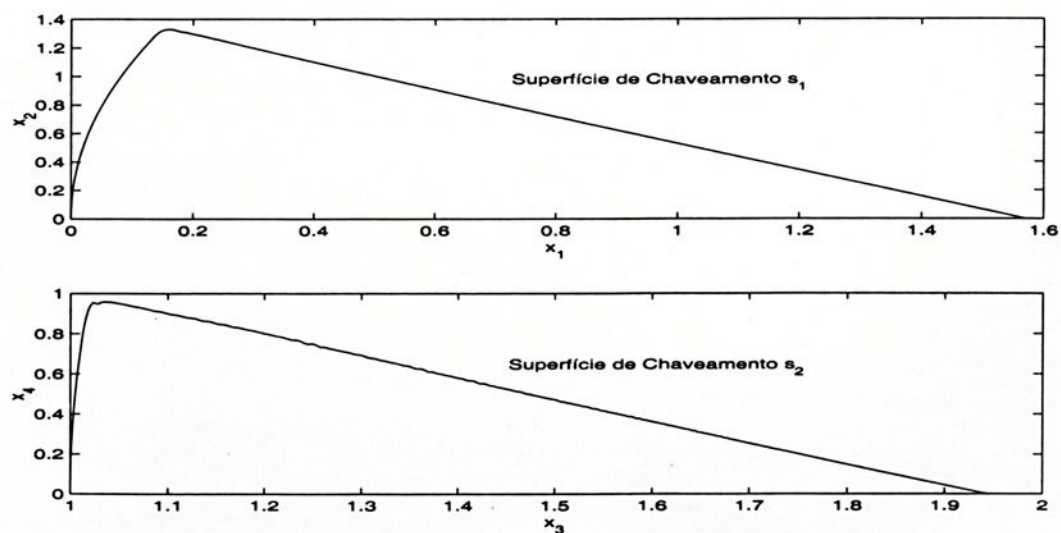


Figura 5.19: Superfícies de Chaveamento S_1 e S_2 para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,1$.

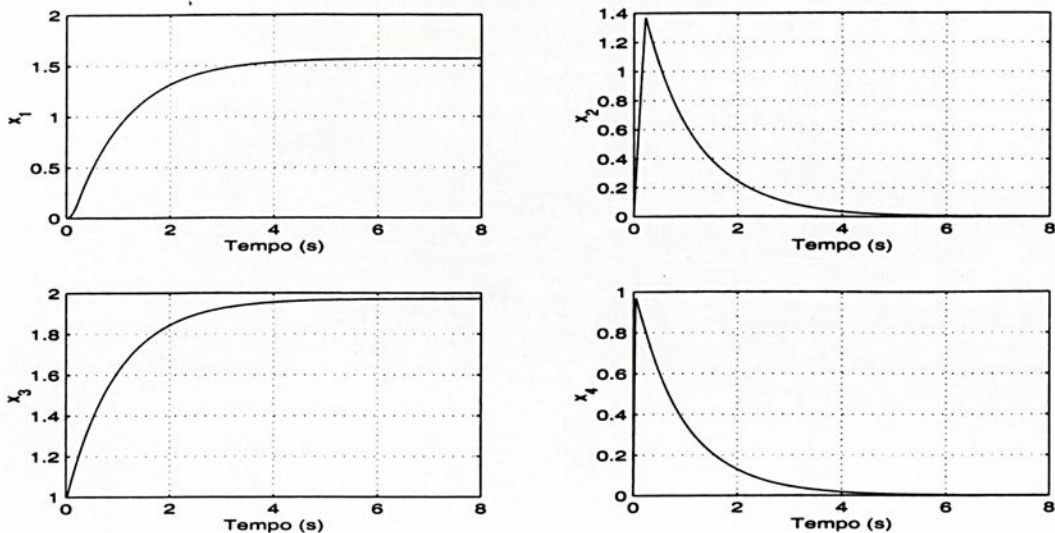


Figura 5.20: Estados do sistema para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,05$.

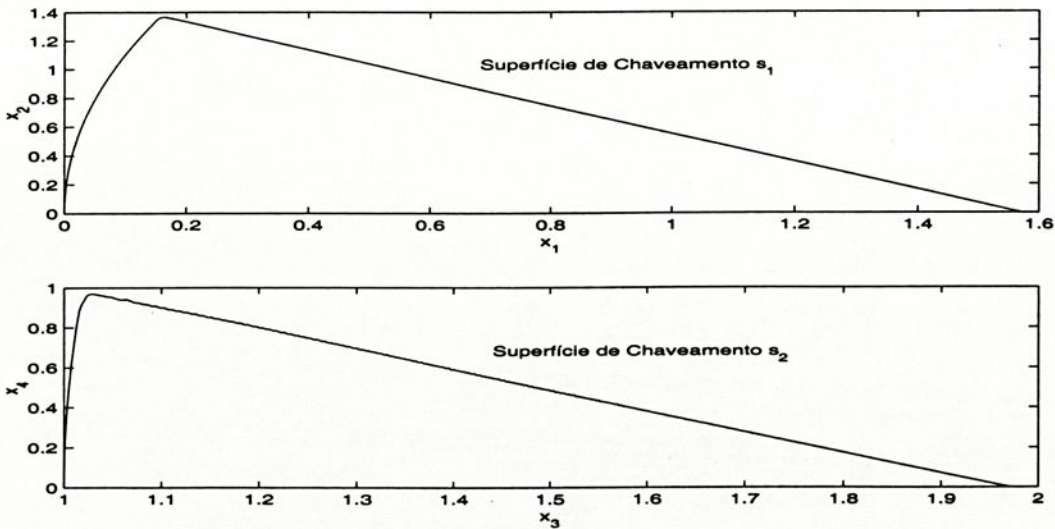


Figura 5.21: Superfícies de Chaveamento S_1 e S_2 para um tempo de chaveamento de 5 milissegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,05$.

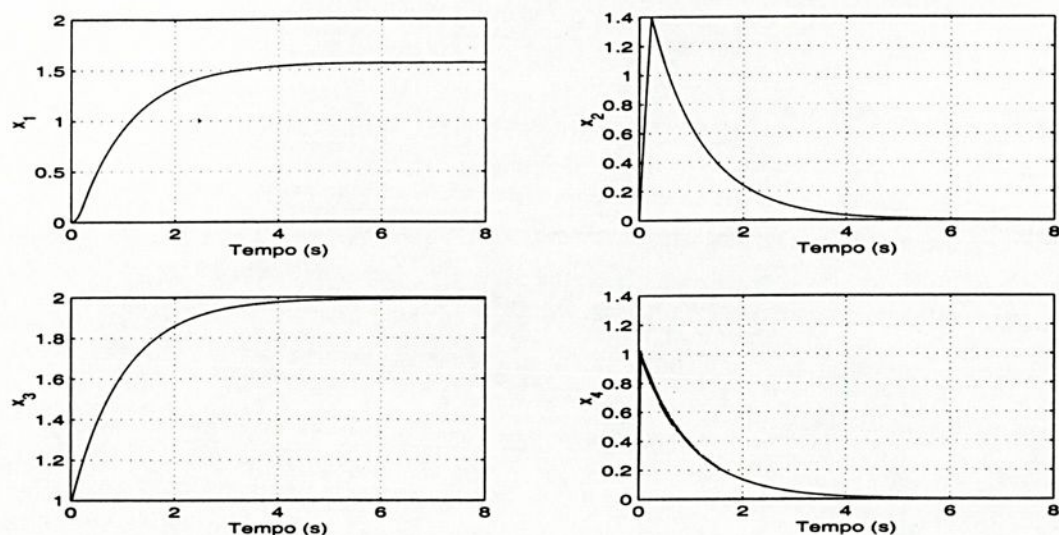


Figura 5.22: Estados do sistema para um tempo de chaveamento de 5 milisegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,01$.

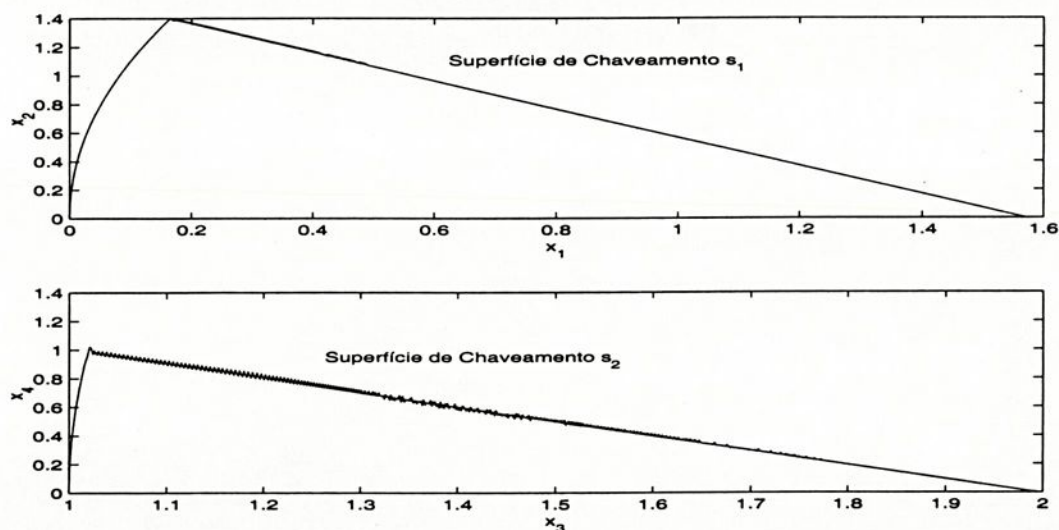


Figura 5.23: Superfícies de Chaveamento S_1 e S_2 para um tempo de chaveamento de 5 milisegundos, com aplicação da camada limite, para $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} = 0,01$.

5.1.6 Projeto do observador de estado com CEV baseado em LMI

É apresentada uma nova metodologia para o projeto de observadores com Estrutura Variável, baseado em LMI. Considere então, a equação (2.16), que descreve a derivada no tempo, ao longo de qualquer trajetória, da candidata à função de Lyapunov em função do

erro. Assim, $\dot{V}(e) < 0$ para $e \neq 0$ se

$$A^T P + PA - C^T G^T P - PGC < 0.$$

Portanto, para $H = PG$, a questão da estabilidade do observador, na forma de LMI, pode ser formulada por

$$A^T P + PA - C^T H^T - HC < 0, \quad (5.12)$$

$$FC = B^T P, \quad (5.13)$$

$$P > 0. \quad (5.14)$$

As LMI (5.12) – (5.14) foram solucionadas para as matrizes do observador descrito em (5.8), pelo programa *LMISol* (Oliveira et. al, 1997), fornecendo

$$P = \begin{bmatrix} 0,76 & 0,24 & 0,12 & 0 \\ 0,24 & 0,24 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0 & 0,75 & 0,27 \\ 0 & 0 & 0,27 & 0,27 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -2,45 \\ 0 & -2,45 \\ 2,45 & 0 \\ 2,45 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{14} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 0,24 & 0 \\ 0 & 0,27 \end{bmatrix}.$$

Encontrou-se assim, a matriz G , calculada *off-line*,

$$G = P^{-1}H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1,04 \\ 0 & 0 \\ 0,92 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{15}.$$

Os ganhos descritos pela matriz G são muito elevados para serem implementados na prática. Uma maneira de contornar este problema, concebida nesta dissertação, é a imposição de restrição no vetor de entrada. Para isso, considerou-se, além das LMI (5.12) – (5.14), que

$$\|He\|_2^2 < \mu_0^2,$$

sendo que $e = \bar{x} - x$. Como $G = HP^{-1}$, a idéia é que minimizando-se $\|He\|_2^2$, minimiza-se $\|H\|_2^2$ e, portanto, também $\|G\|_2^2 = \|HP^{-1}\|_2^2$.

Para viabilizar esta idéia, escolheu-se um conjunto de condições iniciais, de maneira a cobrir todos os possíveis arranjos do vetor e . Assim,

$$x_0^{(i)} = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i x_0^{(i)}, \quad \alpha_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, 16, \quad \sum_{i=1}^{16} \alpha_i = 1,$$

sendo que,

$$\begin{bmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & x_0^{(3)} & \dots & x_0^{(15)} & x_0^{(16)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a introdução de mais um novo conjunto de LMI, às LMI (5.12) – (5.14):

$$\begin{bmatrix} P & H^T \\ H & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (x_0^{(1)})^T \\ x_0^{(1)} & P \end{bmatrix} > 0, \dots, \begin{bmatrix} 1 & (x_0^{(16)})^T \\ x_0^{(16)} & P \end{bmatrix} > 0, \quad (5.15)$$

impõe tal restrição.

Esta análise permite que seja encontrada uma matriz G , cujos módulos dos seus elementos não sejam muito elevados e que solucionem o problema.

As LMI (5.12) – (5.15) foram solucionadas para as matrizes do observador descrito em (5.8), pelo programa *LMISol* (Oliveira et al., 1997), fornecendo

$$P = \begin{bmatrix} 18,33 & 5,00 & 0 & 0 \\ 5,00 & 5,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18,33 & 5,00 \\ 0 & 0 & 5,00 & 5,00 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 8,51 & 0 \\ 5,54 & 0 \\ 0 & 8,51 \\ 0 & 5,54 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 5,00 & 0 \\ 0 & 5,00 \end{bmatrix}.$$

Encontra-se assim, a matriz G , calculada *off-line*,

$$G = P^{-1}H = \begin{bmatrix} 0,22 & 0 \\ 0,89 & 0 \\ 0 & 0,22 \\ 0 & 0,89 \end{bmatrix}.$$

O resultado das simulações é apresentado nas Fig. 5.24 a Fig. 5.29, para as condições iniciais $x(0) = \begin{bmatrix} 0,0,1,0 \end{bmatrix}^T$ e $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,0,0,0 \end{bmatrix}^T$

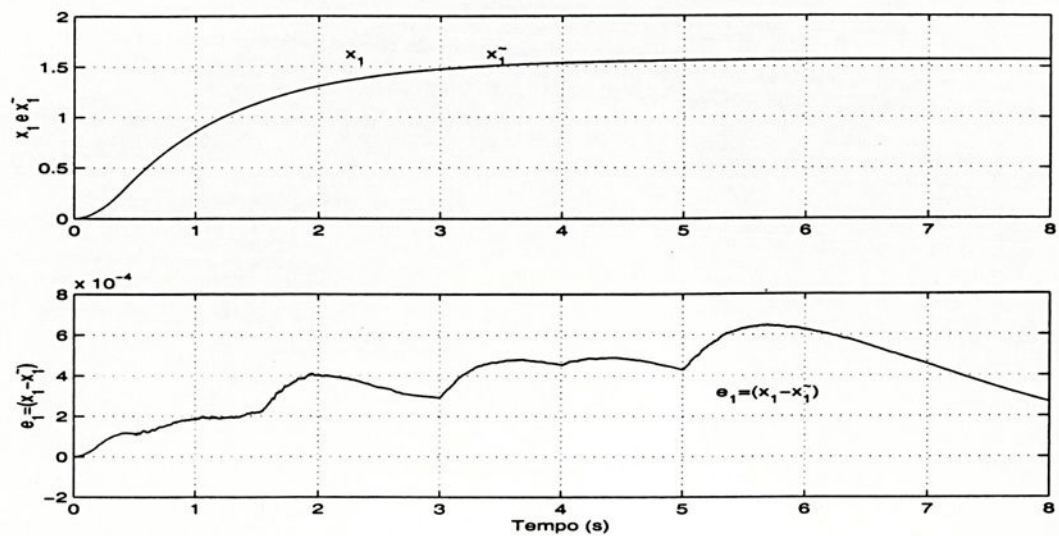


Figura 5.24: x_1 e $\tilde{x}_1$.

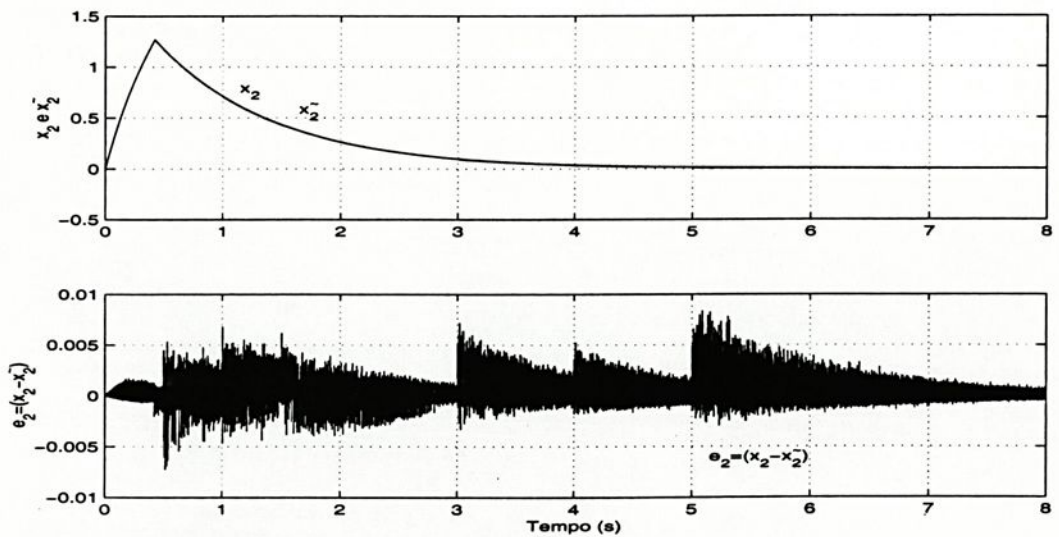


Figura 5.25: x_2 e $\tilde{x}_2$.

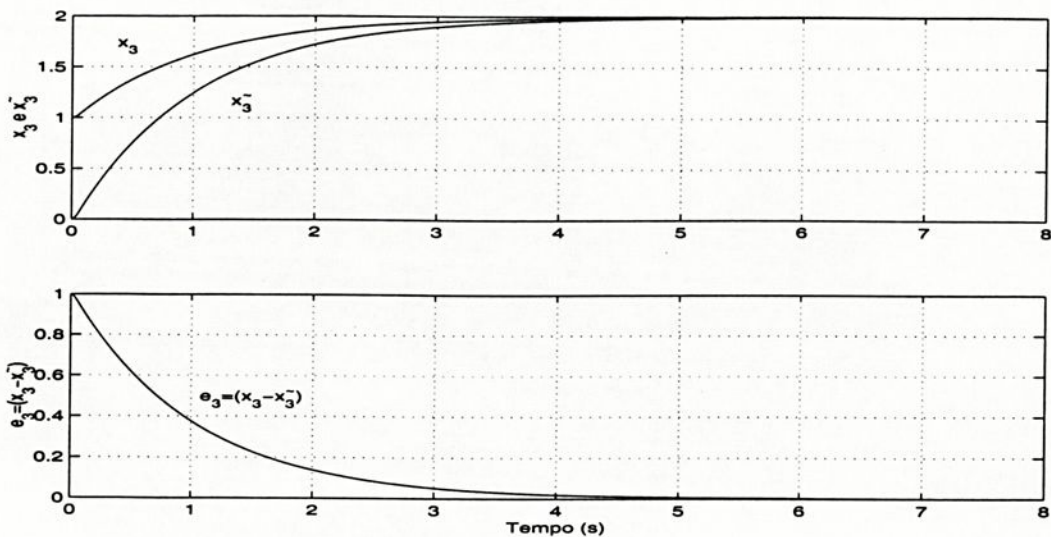


Figura 5.26: x_3 e $\tilde{x}_3$.

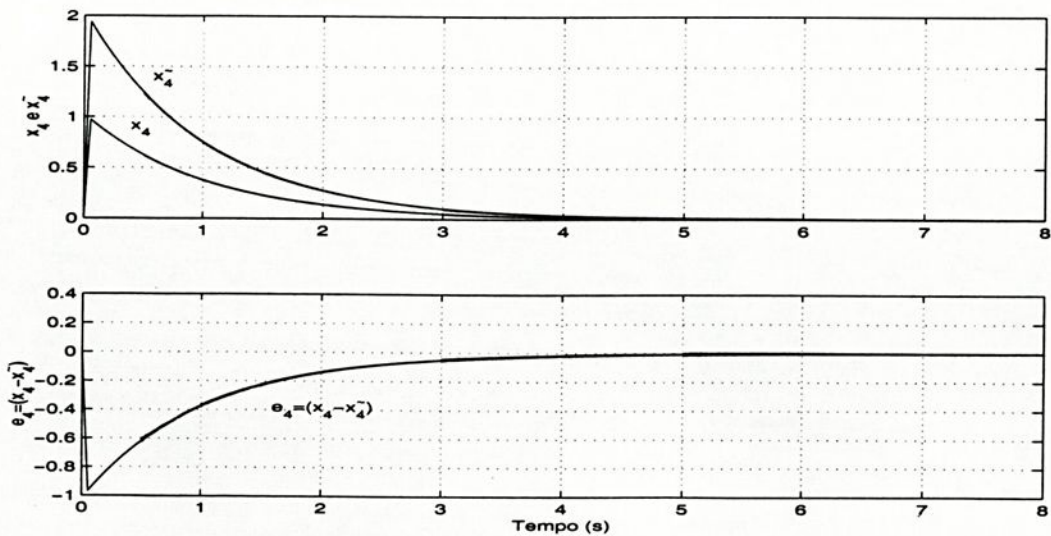
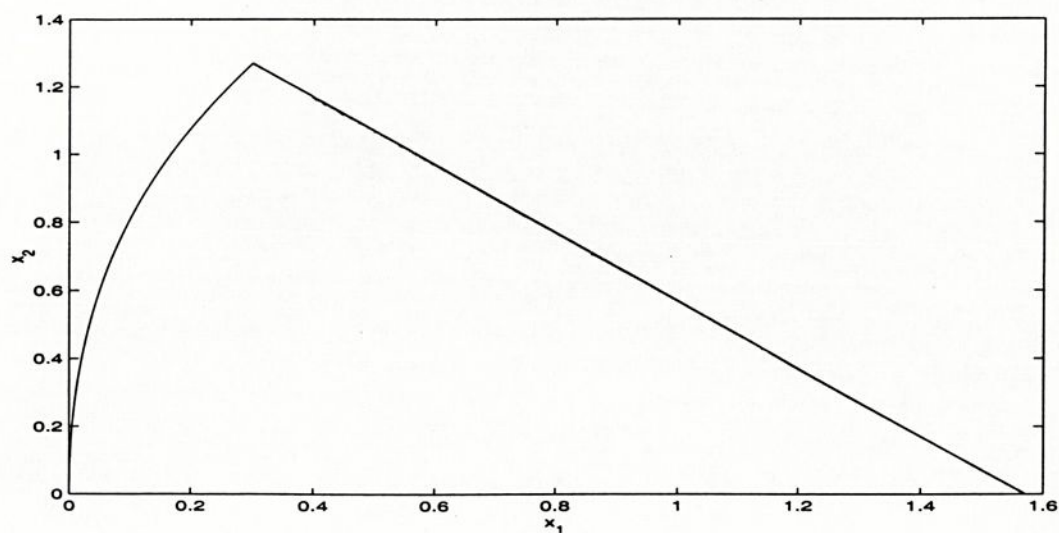
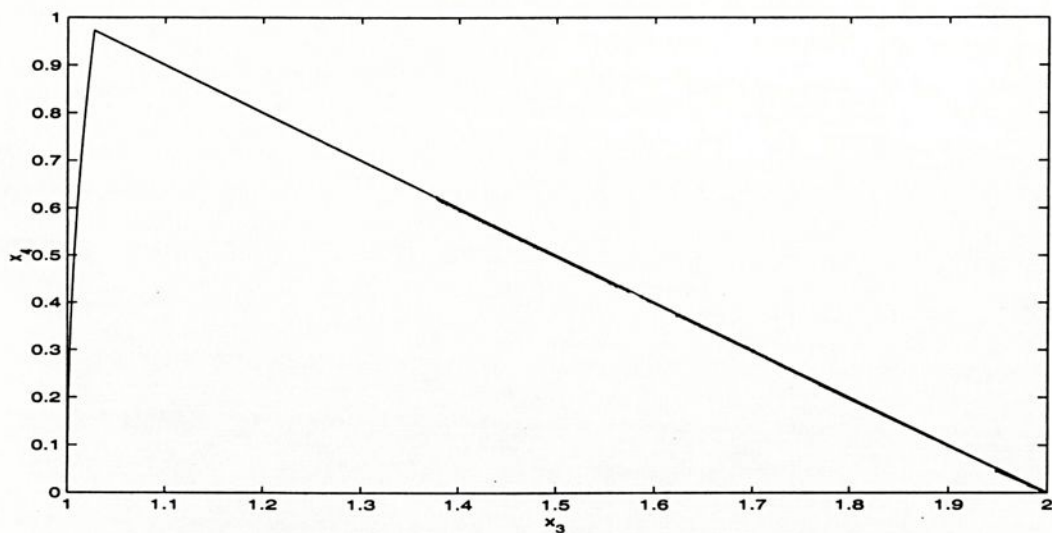


Figura 5.27: x_4 e $\tilde{x}_4$.

Figura 5.28: Superfícies de Chaveamento S_1 do sistema com observador baseado em LMI.Figura 5.29: Superfícies de Chaveamento S_2 do sistema com observador baseado em LMI.

O projeto do observador de estado baseado em LMI é mais simples do que o método algébrico descrito em (Walcott e Żak, 1988), que é de difícil solução para sistemas de ordens elevadas.

5.2 CEV do manipulador $\theta - r$ com acesso às saídas da planta, utilizando sistemas ERP e LMI

Considere agora, o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A(t, x))x + f(t, x) + BR(t, x)(u + w(t, x)), \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{5.16}$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, não disponível; $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle; $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída do sistema, disponível; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $\Delta A(t, x)$ representa a incerteza na matriz característica do sistema; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada do sistema; $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída do sistema; $f(t, x)$ representa as não-linearidades da planta; $w(t, x)$ representa as não-linearidades ou distúrbios na entrada do sistema e $R(t, x)$ é uma matriz diagonal e positiva definida.

Para facilitar a análise, considere as seguintes definições:

$$FCx = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad K_{ev} = \begin{bmatrix} K_{ev1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{evm} \end{bmatrix},$$

$$Ky = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{K}_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R(t, x) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r_m \end{bmatrix}.$$

Para propósitos de existência, assume-se que $\Delta A(t, x)$, $f(t, x)$ e $w(t, x)$ são contínuos e as matrizes B e C são de posto completo. Além disso, considera-se que as seguintes condições são válidas:

C1. Existem funções $h(\cdot) : \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $d(\cdot) : \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de maneira que

$f(t, x) = Bh(t, x)$, $\Delta A(t, x) = Bd(t, x)$. Então,

$$\begin{bmatrix} v_1(t, x) \\ \vdots \\ v_m(t, x) \end{bmatrix} = R^{-1}(t, x)(h(t, x) + d(t, x)x) + w(t, x); \quad (5.17)$$

C2. Os sinais $r_i(\cdot)$ e $v_i(\cdot) : \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$ são limitados;

C3. O par (A, B) é completamente controlável e o par (A, C) é completamente observável;

C4. Existem matrizes F e K , tais que a matriz de transferência $H(s) = FC(sI - A + BKC)^{-1}B$ seja ERP.

O sistema (5.16) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BR(t, x)(u + v(t, x)), \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (5.18)$$

sendo que $v(t, x)$ representa o conjunto de incertezas e/ou não-linearidades da planta. Deseja-se encontrar uma lei de controle u , de maneira que, para o sistema descrito em (5.18), $x(\infty) \rightarrow 0$ e $\|x\| < \infty$, para $t \geq 0$. Será demonstrado que a lei de controle

$$u = -K_{ev} \text{sign}(Fy), \quad (5.19)$$

garante estabilidade assintótica ao sistema descrito em (5.18), pois existe uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$, com $P = P^T > 0$, de maneira que, das hipóteses C1-C4 e (5.19), para $x \neq 0$, a derivada no tempo, ao longo de qualquer trajetória, $\dot{V}(x) < 0$. Isto é verdadeiro, pois

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \{(A - BKC)x + B[R(u + v) + KCx]\}^T Px \\ &\quad + x^T P\{(A - BKC)x + B[R(u + v) + KCx]\} \\ &= x^T \overbrace{[PA + A^T P - PBKC - C^T K^T B^T P]}^Q x \\ &\quad + x^T PB[R(u + v) + KCx] + [R(u + v) + KCx]^T B^T Px. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mas, do Lema 1, $FC = B^T P$. Então,

$$\dot{V}(x) = x^T Qx + x^T (FC)^T [R(u + v) + KCx] + [R(u + v) + KCx]^T FCx$$

$$\begin{aligned}
&= x^T Q x + 2x^T (FC)^T [R(-K_{ev} \text{sign}(FCx) + v) + KCx] \\
&= x^T Q x + 2[-|f_1|K_{ev1}r_1 - \dots - |f_m|K_{evm}r_m \\
&\quad + f_1v_1r_1 + \dots + f_mv_mr_m + f_1\bar{K}_1 + \dots + f_m\bar{K}_m] \\
&\leq x^T Q x + 2[|f_1|r_1(-K_{ev1} + |v_1|) + f_1|\bar{K}_1| + \dots \\
&\quad + |f_m|r_m(-K_{evm} + |v_m|) + f_m|\bar{K}_m|] < 0,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

pois do Lema 1, $Q < 0$ e K_{ev} é especificado, de modo que

$$\begin{aligned}
r_i(-K_{evi} + |v_i|) + |\bar{K}_i| &< 0, \\
r_i(-K_{evi} + |v_i|) &< -|\bar{K}_i|, \\
-K_{evi} + |v_i| &< -\frac{|\bar{K}_i|}{r_i}, \\
-K_{evi} &< -|v_i| - \frac{|\bar{K}_i|}{r_i}, \\
K_{evi} &> |v_i| + \frac{|\bar{K}_i|}{r_i}, \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

O sistema completo é representado pela Fig. 5.30, junto com a lei de controle (5.19).

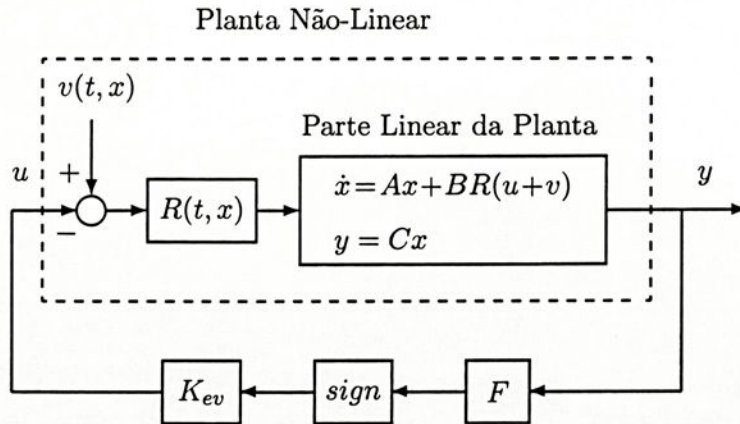


Figura 5.30: Sistema completo com o compensador em malha fechada.

Para tornar o sistema ERP, escolheu-se uma nova representação em variáveis de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ r \\ \theta + \dot{\theta} \\ r + \dot{r} \end{bmatrix}$$

e os seguintes valores para os parâmetros: $m_1 = 10\text{kg}$, $r_1 = 1\text{m}$ e $g = 9,81\text{m/s}^2$. Deseja-se que o manipulador $\theta - r$ alcance, em regime permanente, um ângulo de $\pi/2\text{rad}$ e uma extensão final de 2m . Assim, uma nova representação em variáveis de estado é adotada para que o sistema siga uma referência, de modo que

$$x_n = \begin{bmatrix} \theta - \theta_{ref} \\ r - r_{ref} \\ \theta + \dot{\theta} - \theta_{ref} \\ r + \dot{r} - r_{ref} \end{bmatrix} = x - \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ r_{ref} \\ \theta_{ref} \\ r_{ref} \end{bmatrix},$$

e portanto, $x_n = x - x_{ref}$ e $\dot{x} = \dot{x}_n = Ax_n + BR(t, x_n)(u + v)$, sendo que

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ r_{ref} \\ \theta_{ref} \\ r_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Agora,

$$Ax_n = A(x - x_{ref}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(x - \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \right) = Ax, \text{ pois,}$$

$$Ax_{ref} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, como $Ax_{ref} = 0$, o novo sistema será da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= Ax_n + BR(t, x)(u + v(t, x)), \\ y_n &= Cx_n. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Assim, o modelo do manipulador $\theta - r$ descrito em (5.24) e (5.25), com as restrições na entrada, de $T_{\theta_{max}} = 200Nm$ e $F_{r_{max}} = 50N$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_3 \\ -x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_3 + \frac{[-2m_2x_2(-x_2+x_4)(-x_1+x_3) - g\cos(x_1)(m_1r_1+m_2x_2)]}{m_1r_1^2+m_2x_2^2} \\ -x_2 + x_4 + \frac{[m_2x_2(-x_1+x_3)^2 - m_2g\sin(x_1)]}{m_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1r_1^2+m_2x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\theta \\ F_r \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

é agora representado por (5.26) e (5.27):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{2n} \\ \dot{x}_{3n} \\ \dot{x}_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ x_{3n} \\ x_{4n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(t, x) \begin{bmatrix} T_\theta + v_1 \\ F_r + v_2 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\begin{bmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ x_{3n} \\ x_{4n} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

sendo v_1 , v_2 e $R(t, x)$, respectivamente,

$$v_1 = [-2m_2x_{2n}(-x_{2n} + x_{4n})(-x_{1n} + x_{3n}) - g\cos(x_{1n})(m_1r_1 + m_2x_{2n})], \quad (5.28)$$

$$v_2 = [m_2x_{2n}(-x_{1n} + x_{3n})^2 - m_2g\sin(x_{1n})] \text{ e} \quad (5.29)$$

$$R(t, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1r_1^2+m_2x_{2n}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Considerando que y_{1n} e y_{2n} são disponíveis e x_n não é disponível para a especificação da lei de controle. Assim, a partir das matrizes do sistema descrito em (5.26) e (5.27) e da

solução das LMI (3.39) e (3.40), com o *MATLAB*, obteve-se as matrizes P , N e *off-line*, K e F , a partir das equações (3.41) e (3.42), respectivamente, sendo

$$P = \begin{bmatrix} 42,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42,22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49,90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49,90 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 82,53 & 0 \\ 0 & 82,53 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 49,90 & 0 \\ 0 & 49,90 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} 1,65 & 0 \\ 0 & 1,65 \end{bmatrix}.$$

Impondo taxa de decaimento ao sistema, obteve-se, através da solução das LMI (3.56) e (3.57) e das equações (3.58) e (3.59), para $\gamma = 0,999$

$$P = \begin{bmatrix} 1,10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,10 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2,72 & 0 \\ 0 & 2,72 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 2,47 & 0 \\ 0 & 2,47 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1,10 & 0 \\ 0 & 1,10 \end{bmatrix}.$$

Como o sistema possui dois zeros de transmissão, em $\sigma = -1$, pelo Teorema 9, para $\gamma > 0,999$, as LMI (3.56) e (3.57) não são factíveis. Este fato foi verificado computacionalmente. Para $\gamma = 0,5$ e $\gamma = 0,2$ obtém-se, respectivamente,

$$K = \begin{bmatrix} 2,00 & 0 \\ 0 & 2,00 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} 1,77 & 0 \\ 0 & 1,77 \end{bmatrix},$$

ou seja, o ganho K de realimentação diminui, com a imposição de uma taxa de decaimento menor.

Adicionando restrição no vetor de saída, obteve-se, através da solução das LMI (3.56), (3.57), (4.32) e (4.33), com o *MATLAB* e das equações (3.58) e (3.59), para $\gamma = 0,999$, $\xi_0 = 1$ e $x_n(0) = \begin{bmatrix} 0,1,0,1 \end{bmatrix}^T$.

$$P = \begin{bmatrix} 0,72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,32 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2,70 & 0 \\ 0 & 3,03 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 3,77 & 0 \\ 0 & 3,98 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1,04 & 0 \\ 0 & 1,32 \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se as estimativas $|x_{1n}| \leq \pi \text{rad}$, $|x_{2n}| \leq 2m$, $|x_{3n}| \leq \pi \text{rad} + 2 \text{rad/s}$, $|x_{4n}| \leq 2m + 2m/s$ e $|m_2| \leq 2kg$, de (5.22)

$$K_{ev} = \begin{bmatrix} K_{ev1} & 0 \\ 0 & K_{ev2} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 170,42 & 0 \\ 0 & 43,88 \end{bmatrix}.$$

Foram adotados $K_{ev1} = 175$ e $K_{ev2} = 50$. Desta forma, o sistema completo é representado na Fig. 5.31, com a lei de controle

$$u = -K_{ev} \text{sign} \left(F \left(\begin{bmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ r_{ref} \end{bmatrix} \right) \right). \quad (5.31)$$

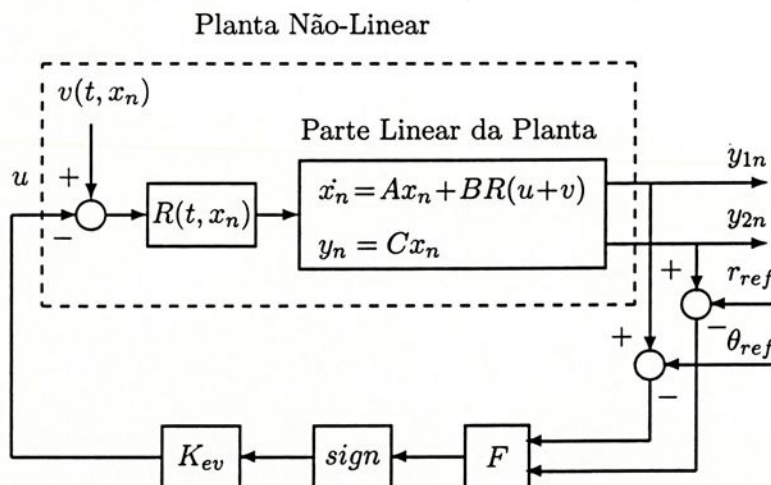


Figura 5.31: Sistema completo com o compensador em malha fechada para o manipulador $\theta - r$.

A dinâmica do manipulador $\theta - r$ foi simulada para o último caso (estabilidade, taxa de decaimento e restrição no vetor de saída). O resultado é apresentado na Fig. 5.32. A solução das LMI, assim como as simulações, foram feitas em um microcomputador Pentium II de 266MHz, com 256MB de memória RAM, utilizando-se o *MATLAB* versão 5.3 com a *toolbox* de LMI (Gahinet et al., 1995).

Os resultados obtidos nas simulações mostram que o desempenho do controlador estático com estrutura variável se mostrou adequado, respeitando os índices de desempenho especificados como parâmetros de projeto. Há ainda vantagens como maior facilidade de projeto

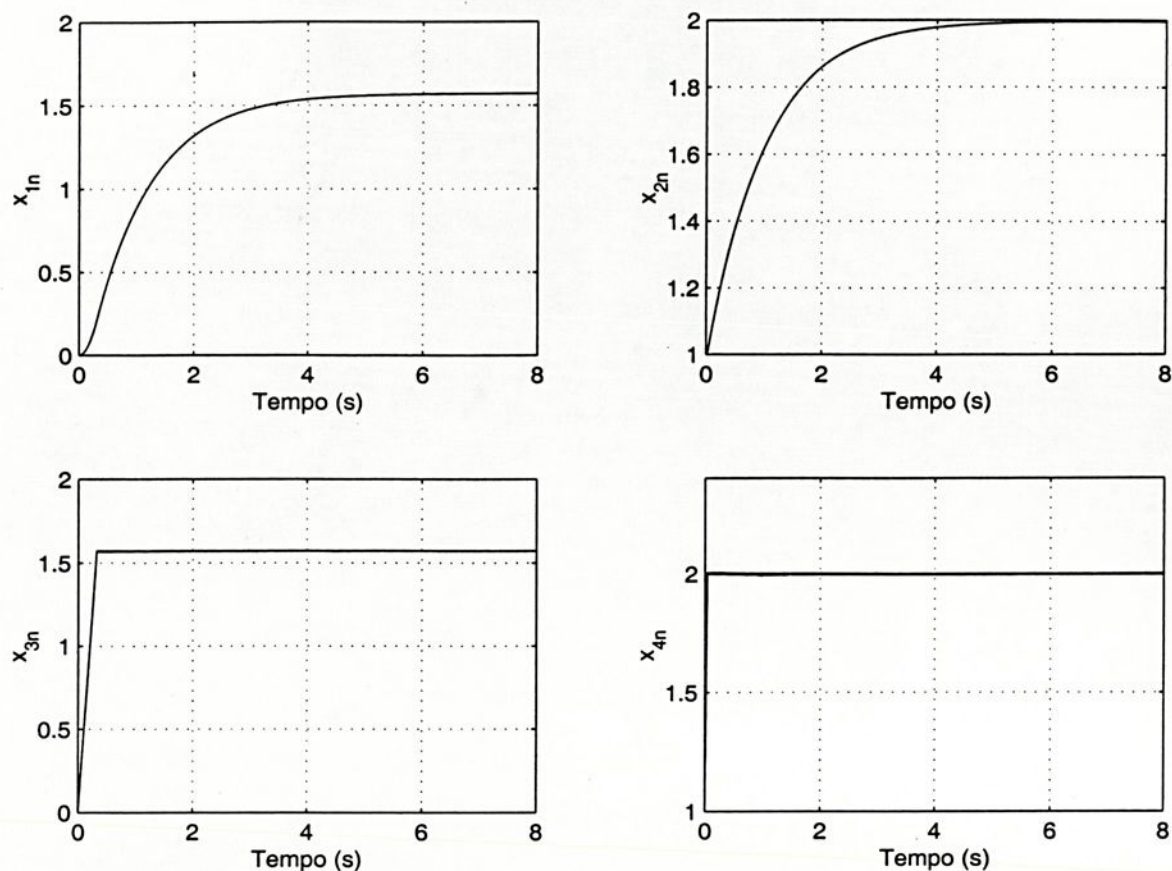


Figura 5.32: Resposta dinâmica do manipulador $\theta - r$, com taxa de decaimento e restrição no vetor de saída.

e solução por métodos numéricos, quando comparado com o método algébrico descrito em (Walcott e Žak, 1988). Além disso, proporciona uma estrutura mais simples e mais econômica para ser implementada do que a do observador de estado.

Capítulo 6

Conclusões

Foi apresentado um novo método para o projeto de Controladores com Estrutura Variável (CEV) baseado em LMI. Considerando a planta com o mesmo número de entradas e saídas disponíveis, o método permite a especificação da taxa de decaimento, restrições nas saídas, rejeição de distúrbios, incertezas e termos não-lineares da planta casados e incertezas paramétricas nos parâmetros da planta não casadas. Também foi apresentado um novo método de projeto de observadores com Estrutura Variável, baseado em LMI.

A chave destes resultados foi uma nova formulação, em termos de LMI, de condições necessárias e suficientes para tornar um sistema Estritamente Real Positivo (ERP), com controladores estáticos. É demonstrado que a taxa de decaimento máxima está relacionada com a parte real dos zeros de transmissão, existindo ou não modos deslizantes.

É dada uma aplicação destas técnicas no projeto de CEV, através do projeto de um controlador, para um manipulador $\theta - r$. Foram consideradas a estabilidade, taxa de decaimento e restrição no vetor de saída. O CEV do manipulador $\theta - r$ considerado, com acesso apenas às saídas da planta, já havia sido feito em (Walcott e Žak, 1988), utilizando um observador de estado de quarta ordem, sendo que o projeto lá proposto, exige uma manipulação de expressões algébricas mais complexas do que as apresentadas aqui. O controlador apresentado aqui é estático e composto apenas por duas matrizes constantes, que são facilmente obtidas, utilizando-se programas computacionais disponíveis.

Trabalhos futuros relacionados aos resultados obtidos nesta dissertação são:

- (i) generalização das condições para tornar uma planta ERP, baseadas em LMI, para plantas com um número diferente de entradas e saídas;



- (ii) consideração de compensadores dinâmicos no problema descrito em (i);
- (iii) projeto com observadores de ordem completa ou de ordem reduzida de CEV, baseados em LMI, considerando incertezas na planta;
- (iv) generalização das condições para tornar ERP, baseadas em LMI, de plantas $\{A, B, C\}$ com o mesmo número m de entradas e saídas e posto $(CB) < m$, utilizando as idéias apresentadas em (Hsu et al., 1994).



Capítulo 7

Referências Bibliográficas

- Anderson, B.D.O. (1968). A Simplified Viewpoint of Hiperstability, *IEEE Transactions on Automatic Control* **13**: 292-294.
- Bernussou, J., Geromel, J.C., Oliveira, M.C. (1999). On Strict Positive Real Systems Design: Guaranteed Cost and Robustness Issues, *Systems & Control Letters* **36**: 135-141.
- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Chen, C. T. (1999). Linear System Theory and Design, *Oxford University Press, inc.* 3rd edition.
- Choi, H. H. (1997). A New Method for Variable Structure Control System Design: A Linear Matrix Inequality Approach, *Automatica* **33**(11): 2089-2092.
- Choi, H. H. (1998). An Explicit Formula of Sliding Surfaces for a Class of Uncertain Dynamic Systems with Mismatched Uncertainties, *Automatica* **34**(8): 1015-1020.
- Choi, H. H. (1999). On the Existence of Linear Sliding Surfaces for a Class of Uncertain Dynamic Systems with Mismatched Uncertainties, *Automatica* **35**(10): 1707-1715.
- DeCarlo, R. A., Žak, S. H., Mathews, G. P. (1988). Variable Structure Control of Multi-variable Systems: a Tutorial, *Proceedings of IEEE* **76**(3): 212-232.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., Chilali, M. (1995). LMI Control Toolbox for Use with MATLAB, *The Mathworks inc.*



- Heck, B. S., Yallapragada, S. V., Fan, M. K. H. (1995). Numerical Methods to Design the reaching Phase of Output Feedback Variable Structure Control, *Automatica* **31**(2): 275-279.
- Hsu, L., Araujo, A., Costa R. R. (1994). Analysis and Design of I/O Based Variable-Structure Adaptive-Control, *IEEE Transaction on Automatic Control* **39**(1): 4-21.
- Huang, C. H., Ioannou P. A., Maroulas J., Safanovi M. G. (1999). Design of Strictly Positive Real Systems Using Constant Output Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(3): 569-573.
- Kaufman, H., Bar-Kana, I., Sobel, K. (1994). Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications, *Communications and Control Engineering Series*, Springer Verlag.
- Lordelo, A. D. S., Teixeira, M. C. M., Assunção E. (2000). Aplicação de Técnicas de Controle com Estrutura Variável e Acesso às Saídas da Planta com Projeto Baseado em LMI, 13^o CBA (Trabalho submetido).
- Merian, J. L., (1990). Dinâmica, *Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.* 2^a edição: 63-66.
- Owens, D. H., Pratzel-Wolters, D., Ilchmann, A. (1987). Positive-Real Structure and High-Gain Adaptive Stabilization, *IMA Journal of Mathematical Control & Information* **4**(2): 167-181.
- Oliveira, M. C., Farias, D. P., Geromel, J. C. (1997). *LMISol*, User's Guide, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.
- Takahashi, R. H. C., Peres, P. L. D. (1998). $\mathcal{H}_\infty$ Design of Switching Surfaces for Sliding-Mode Control with Nonmatching Disturbances, *IEE Proceedings - Control Theory Applications* **145**(4): 435-441.
- Takahashi, R. H. C., Peres, P. L. D. (1999). $\mathcal{H}_2$ Guaranteed Cost-Switching Surface Design for Sliding Modes with Nonmatching Disturbances, *IEEE Transaction on Automatic Control* **44**(11): 2214-2218.
- Teixeira, M. C. M. (1989). Sistemas Reais Positivos e Aplicações ao Controle com Incertezas, *Tese de Doutorado*, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ.



- Teixeira, M. C. M. (1990). Condições para Tornar um Sistema Estritamente Real Positivo e Aplicação no Controle com EVMD utilizando Somente as Saídas da Planta, 8^o CBA, pp. 291-296.
- Teixeira, M. C. M. (1993). Output Control with Dynamical Compensators and Strictly Positive Real Systems, *International Journal of Control* **57**(5): 1101-1105.
- Teixeira, M. C. M., Lordelo, A. D. S., Assunção E. (2000). Projeto Baseado em LMI de Controladores com Estrutura Variável com Acesso às Saídas da Planta, 13^o CBA (Trabalho submetido).
- Utkin, V. I. (1977). Variable Structure Systems with Sliding Modes, *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(2): 212-222.
- Utkin, V. I. (1978). Sliding Modes and their application in Variable Structure, *Moscow, Mir Publishers*.
- Utkin, V. I. (1992). Sliding Modes in Control Optimization, *Berlin, Heidelberg: Springer Verlag*.
- Walcott, B. L., Žak, S. H. (1988). Combined Observer-Controller Synthesis for Uncertain Dynamical Systems with Applications, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **18**(1): 88-104.
- Young, K. K. D. (1993). Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications, *Studies in Automation and Control*.
- Žak, S. H., Hui, S. (1993). On Variable Structure Output Feedback Controllers for Uncertain Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(10): 1509-1512.
- Zinober, A. S. I. (1990). Deterministic Control of Uncertain Systems, *Peter Peregrinus: London IEEE Control Engineering Series*.



Apêndice A

Zeros de transmissão de um sistema

Considere $A(s) = B(s)C(s)$, sendo que $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ são polinômios de ordens compatíveis. Assim, $C(s)$ é um *divisor à direita* de $A(s)$ e $A(s)$ é um *múltiplo à esquerda* de $C(s)$. De maneira similar, $B(s)$ é um *divisor à esquerda* de $A(s)$ e $A(s)$ é um *múltiplo à direita* de $B(s)$. Considere também, duas matrizes polinomiais $D(s)$ e $N(s)$ com o mesmo número de linhas e colunas p . Então, uma matriz polinomial quadrada $R(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é um *divisor comum à direita* de $D(s)$ e $N(s)$, de maneira que

$$D(s) = \hat{D}(s)R(s) \quad \text{e} \quad N(s) = \hat{N}(s)R(s).$$

Uma matriz polinomial quadrada $M(s)$ é *unimodular* se o seu determinante for diferente de zero e independente de s .

Uma matriz polinomial $R(s)$ é um *maior divisor comum à direita* de $D(s)$ e $N(s)$ se:

- (i) $R(s)$ é um divisor à direita de $D(s)$ e $N(s)$;
- (ii) $R(s)$ é um múltiplo à esquerda de todos os divisores comuns à direita de $D(s)$ e $N(s)$.

Se um maior divisor comum à direita é uma matriz unimodular, então $D(s)$ e $N(s)$ é dita *coprima à direita*.

Considere uma matriz $\hat{G}(s) = N(s)D(s)^{-1}$, $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ racional *própria* ($\hat{G}(s)$ é própria $\Leftrightarrow \text{grau } D(s) \geq \text{grau } N(s) \Leftrightarrow \hat{G}(\infty) = 0$ ou $\hat{G}(\infty)$ for igual a uma constante diferente de zero), sendo que $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas à direita. Então, um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *zero de transmissão* de $\hat{G}(s)$, se o posto de $N(\lambda) < \min(p, q)$ (Chen, 1999).



Os zeros de transmissão também podem ser definidos através da realização mínima de $\hat{G}(s)$. Considere $\{A, B, C, D\}$ qualquer realização mínima n -dimensional de uma matriz própria racional $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Então, os zeros de transmissão são os valores de $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(p, q).$$

Apêndice B

Restrição nos vetores de entrada e saída da planta

B.1 Restrição no vetor de entrada

Admita que um SLIT possua a seguinte representação em variáveis de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{B.1}$$

sendo que:

$x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado; $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle; $y \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema ($p \geq m$); $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada do sistema; $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema.

O problema da restrição no vetor de entrada u consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que $\max_{t \geq 0} \|u\| \leq \mu_0$, sendo que μ_0 é uma especificação considerada no projeto do controlador. Para a lei de controle $u = Kx$, tem-se que

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x.$$

Considera-se então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x^T Px$, em que P é uma matriz real simétrica e definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A + BK)^T Px + x^T P (A + BK)x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^T(A^T P + K^T B^T P)x + x^T(PA + PBK)x \\
&= x^T(PA + A^T P + PBK + K^T B^T P)x \\
&= x^T P P^{-1}(PA + A^T P + PBK + K^T B^T P)P^{-1}Px \\
&= x^T P(AP^{-1} + P^{-1}A^T + BK P^{-1} + P^{-1}K^T B^T)Px.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $F = KP^{-1} = KX$, tem-se que

$$\dot{V}(x) = x^T P(AX + XA^T + BF + F^T B^T)Px.$$

Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para que se tenha estabilidade assintótica, é suficiente que $\dot{V}(x)$ seja definida negativa. Logo

$$AX + XA^T + BF + F^T B^T < 0.$$

Então, as condições para a estabilidade são a existência de X e F , tais que

$$AX + XA^T + BF + F^T B^T < 0 \quad \text{e} \quad X = X^T > 0, \tag{B.3}$$

que são LMI em X e F .

Quando uma determinada condição inicial $x(0)$ é conhecida, é possível encontrar um limite superior para a norma euclidiana da entrada de controle u (Boyd et al., 1994, pp. 103). Considera-se inicialmente, que $X = X^T > 0$ satisfaça

$$x(0)^T X^{-1} x(0) < 1. \tag{B.4}$$

Esta condição não restringe a solução de (B.3), pois apenas limita a norma de X^{-1} e (B.3) não impõe outras restrições à matriz X .

Segundo (Boyd et al., 1994, pp. 7-8), a idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI

$$\begin{bmatrix} M(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \tag{B.5}$$

sendo que $M(x) = M(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ tem uma dependência afim de x e é equivalente a

$$R(x) > 0 \quad \text{e} \quad M(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

ou seja, este conjunto de inequações não-lineares pode ser representado através da LMI (B.5).

Logo, pelo complemento de Schur, (B.4) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} x(0) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.6})$$

Como $K = FX^{-1}$ e definindo-se $z = X^{-\frac{1}{2}}x$, tem-se que

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|u\|_2 &= \max_{t \geq 0} \|Kx\|_2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|FX^{-1}x\|_2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|FX^{-1}X^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x\|_2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De (B.4),

$$\begin{aligned} \|z(0)\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}}x(0)\|_2^2 \\ &= x(0)^T X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x(0) \\ &= x(0)^T X^{-1} x(0) \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Como para $V(x) = x^T X^{-1}x$, $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$, então (B.8) é satisfeita para todo x , $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}}x\|_2^2 \\ &= x^T X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x \\ &= x^T X^{-1} x \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De (B.7) e (B.8),

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2 &= \max_{t \geq 0} \sqrt{z^T X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}} z} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}}) z^T z} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Assim,

$$\max_{t \geq 0} \|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \mu_0^2 \Rightarrow \lambda_{\max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}}) < \mu_0^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I < 0, \quad (B.11)$$

pois

$$z^T (X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I) z \leq z^T z (\lambda_{\max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}}) - \mu_0^2).$$

Multiplicando-se (B.11), em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} X^{\frac{1}{2}} (X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}}) X^{\frac{1}{2}} - X^{\frac{1}{2}} \mu_0^2 I X^{\frac{1}{2}} &< 0, \\ F^T F - \mu_0 X &< 0, \\ \mu_0^2 X - F^T F &> 0, \\ X - F^T (\mu_0^{-2} I) F &> 0. \end{aligned} \quad (B.12)$$

Logo, pelo complemento de Schur, (B.12) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}} + \mu_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & F^T \\ F & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (B.13)$$

Portanto, as LMI (B.6) e (B.13) solucionam o problema.

B.2 Restrição no vetor de saída

O problema da restrição no vetor de saída y consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que $\max_{t \geq 0} \|y\| \leq \xi_0$, sendo que ξ_0 é uma especificação considerada no projeto do controlador.

A análise a seguir é semelhante àquela efetuada no estudo da restrição no vetor de entrada. Para isso, considera-se, novamente, o SLIT descrito em (B.1). Como $x = X^{\frac{1}{2}} z$, tem-se que

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|y\|_2^2 &= \max_{t \geq 0} \|Cx\|_2^2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|CX^{\frac{1}{2}} z\|_2^2 \\ &= \max_{t \geq 0} \sqrt{z^T X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} z} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} z^T z)} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \quad (B.14)$$

Portanto, analogamente ao desenvolvimento realizado anteriormente em (B.11), (B.12) e (B.13), tem-se que

$$\max \|CX^{\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \xi_0^2 \Rightarrow \lambda_{\max}(X^{\frac{1}{2}}C^T CX^{\frac{1}{2}}) < \xi_0^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$X^{\frac{1}{2}}C^T CX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I < 0, \quad (B.15)$$

pois,

$$z^T (X^{\frac{1}{2}}C^T CX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I) z \leq z^T z (\lambda_{\max}(X^{\frac{1}{2}}C^T C - \xi^2 X^{\frac{1}{2}}) - \xi_0^2).$$

Multiplicando-se (B.15), em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} XC^T CX - \xi_0^2 X &< 0, \\ \xi_0^2 X - XC^T CX &> 0, \\ X - XC^T(\xi_0^{-2}I)CX &> 0. \end{aligned} \quad (B.16)$$

Logo, pelo complemento de Schur, (B.16) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}}C^T CX^{\frac{1}{2}} + \xi_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T \\ CX & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (B.17)$$

Portanto, as LMI (B.6) e (B.17) solucionam o problema.

Apêndice C

Cinemática da partícula: coordenadas polares ($\theta - r$)

Uma maneira de se descrever o movimento curvilíneo plano é através das coordenadas polares, em que a partícula tem a sua posição determinada pela distância r , medida a partir de um pólo fixo e, pela medida angular θ , da linha radial. As coordenadas polares são particularmente úteis quando o movimento é restrito através do controle de uma distância radial e de uma posição angular, ou quando movimentos não restritos são observados através de medidas de uma distância radial e de uma posição angular.

A Fig. C.1(a) mostra as coordenadas polares r e θ , que locam uma partícula viajando em uma trajetória curva. Uma linha arbitrária fixa, tal como o eixo x , é usada como referência para a medida de θ . Os vetores unitários $\vec{r}_1$ e $\vec{\theta}_1$ estão estabelecidos nas direções positivas de r e θ , respectivamente. O vetor posição da partícula em A , $\vec{r}$, tem módulo igual à distância radial r e a direção especificada pelo vetor unitário $\vec{r}_1$. Assim, expressamos a localização da partícula em A pelo vetor $\vec{r} = r\vec{r}_1$.

Ao diferenciar esta expressão com relação ao tempo, para obter $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, necessita-se de expressões das derivadas em relação ao tempo dos vetores unitários $\vec{r}_1$ e $\vec{\theta}_1$. Obtém-se, então, $\dot{\vec{r}}_1$ e $\dot{\vec{\theta}}_1$. Durante o intervalo de tempo dt , as direções coordenadas giram de um ângulo $d\theta$ e os vetores unitários também rodam do mesmo ângulo de $\vec{r}_1$ e $\vec{\theta}_1$, para $\vec{r}'_1$ e $\vec{\theta}'_1$, conforme mostrado na Fig. C.1(b). Nota-se que o vetor variação $d\vec{r}_1$ está na direção positiva da direção θ e que $d\vec{\theta}_1$ está na direção negativa de r . Uma vez que os seus módulos, no limite, são iguais aos vetores unitários, como raios, multiplicados pelo ângulo $d\theta$ em



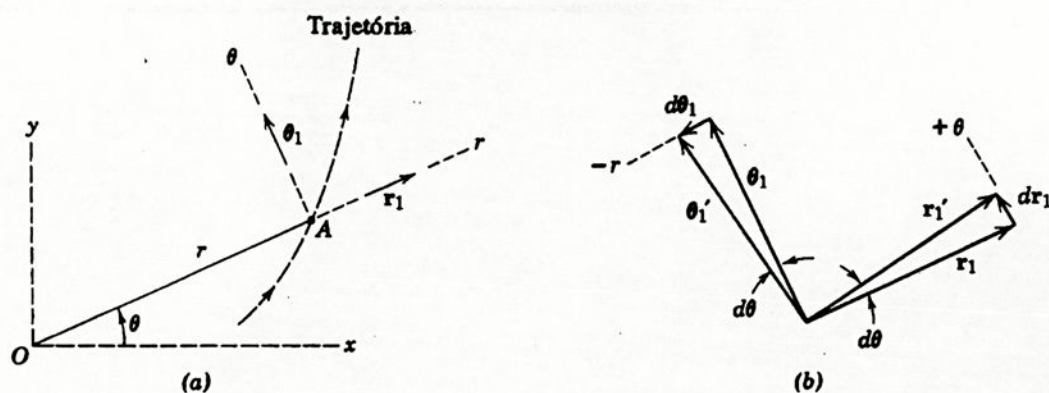


Figura C.1: (a) Coordenadas polares r e θ de uma partícula em trajetória curva. (b) Deslocamento da partícula.

radianos, pode-se então, descrevê-los como $d\vec{r}_1 = \vec{\theta}_1 d\theta$ e $d\vec{\theta}_1 = -\vec{r}_1 d\theta$. Se estas equações forem divididas por $d\theta$, obtém-se, então

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\theta} = \vec{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{\theta}_1}{d\theta} = -\vec{r}_1.$$

Ou, simplesmente, dividindo-se por dt , obtém-se

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{\theta}_1}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{r}_1,$$

ou

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\theta} \vec{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \dot{\vec{\theta}}_1 = -\dot{\theta} \vec{r}_1.$$

Pode-se, agora, diferenciar $\vec{r} = r\vec{r}_1$ em relação ao tempo. Usando a regra da diferenciação do produto de um escalar por um vetor, obtém-se

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\vec{r}}_1.$$

Logo, a expressão vetorial para a velocidade fica

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1,$$

sendo

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad \text{e} \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}.$$

A componente segundo r de $\vec{v}$ é meramente a taxa com que o vetor $\vec{r}$ se distende. A componente em θ de $\vec{v}$ é devida à rotação de $\vec{r}$.

Diferencia-se, agora, a expressão de $\vec{v}$, para obter a aceleração $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$. Note que a derivada de $r\dot{\theta}\vec{\theta}_1$ produzirá três termos, visto que todos os fatores são variáveis. Assim,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r}\vec{r}_1 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_1) + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\vec{\theta}_1 + r\dot{\theta}\dot{\vec{\theta}}_1).$$

Logo,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta}_1,$$

sendo

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \text{e} \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}.$$

Para movimento numa trajetória circular, com r constante, as componentes das equações da velocidade e da aceleração, tornam-se, simplesmente

$$v_r = 0, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad a_r = -r\dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad a_\theta = r\ddot{\theta}.$$

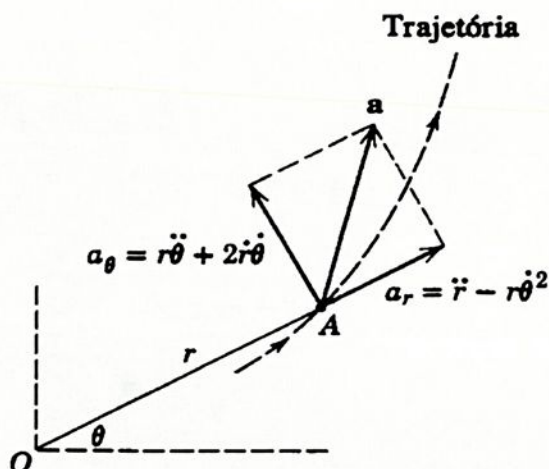


Figura C.2: Movimento de uma partícula numa trajetória circular, com r constante.

Apêndice D

Dedução das equações do torque e da força do manipulador $\theta - r$

A parcela estática da equação do torque é obtida diretamente pela expressão

$$T_e = g \cos \theta (m_1 r_1 + m_2 r).$$

A parcela dinâmica é definida através da teoria da cinemática da partícula descrita no apêndice C.

Para um corpo rígido, o momento de inércia I de uma massa m , em relação ao seu eixo de rotação, é definido como

$$I = \int r^2 dm.$$

Tal como a massa m de um corpo é a medida da resistência à aceleração de translação, o momento de inércia é uma medida da resistência à aceleração rotacional do corpo. A integral momento-de-inércia também pode ser representada por

$$I = \sum r_i^2 m_i,$$

sendo que r_i é a distância radial do eixo de inércia à i -ésima partícula representativa de massa m_i e o somatório é considerado sobre todas as partículas do corpo.

Como o modelo mecânico equivalente, representado na Fig. 5.1, considera toda a massa do manipulador e da carga concentradas (apenas duas partículas de massas m_1 e m_2 , distantes r_1 e r do centro de rotação, respectivamente), então, a equação do torque é descrita por

$$T_\theta = I \alpha_i + T_e,$$



sendo α_i a aceleração angular, definida como

$$\alpha_i = \frac{a_{\theta_i}}{r}.$$

Logo

$$\begin{aligned} T_\theta &= m_1 r_1^2 \alpha_1 + m_2 r^2 \alpha_2 + T_e \\ &= m_1 r_1^2 \frac{a_{\theta_1}}{r_1} + m_2 r^2 \frac{a_{\theta_2}}{r} + T_e \\ &= m_1 r_1^2 \frac{r_1 \ddot{\theta}}{r_1} + m_2 r^2 \left(\frac{r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} \right) + T_e. \end{aligned} \quad (D.1)$$

Assim, a equação do torque (5.1) é descrita por

$$T_\theta = m_1 r_1^2 \ddot{\theta} + m_2 r^2 \ddot{\theta} + 2 m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + g \cos \theta (m_1 r_1 + m_2 r).$$

A equação da força é deduzida de forma que

$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}.$$

Logo

$$\begin{aligned} F_r &= m_2 a_r + m_2 g \sin \theta \\ &= m_2 (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + m_2 g \sin \theta. \end{aligned} \quad (D.2)$$

Assim, a equação da força (5.2) é descrita por

$$F_r = m_2 \ddot{r} - m_2 r \dot{\theta}^2 + m_2 g \sin \theta.$$

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP**

