

Nilton Borges Pimenta

Mergulho de Superfícies em $\mathbb{R}^4$



1910000931



Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Mergulho de Superfícies em R^4

Nilton Borges Pimenta

Orientador: Sebastião Antonio Izar

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas, Área de Concentração em Matemática.



931/00

São José do Rio Preto - 1998

Dedico

Agradecimentos:

A DEUS pela vida;

Ao Prof. Dr. Sebastião Antonio Izai, pelo auxílio que me prestou em sua orientação, e principalmente pela sua paciência e confiança;

A minha esposa Adriana, pelo apoio e compreensão que firmaram ainda mais nosso Amor;

A Prof. Dr. Angela M. Sitta, pela tempo dedicado aos meus problemas e sua tamanha força;

Aos Professores do Departamento de Matemática desta Instituição, e principalmente aos professores do Conselho de Pós-graduação em Matemática pela sua

Muito grato sou, também a toda minha família que estiveram na torcida de todos os fatos e

Aos amigos e colegas, pelo incentivo;

A FAPESP, pelo apoio financeiro;

A todos que direta e indiretamente ajudaram na elaboração deste trabalho;

Aos meus pais

Aparecido e Elidia

POR TUDO QUE SOU

Aos meus filhos

Vitor e Guilherme

POR TODA ALEGRIA

A minha esposa

Adriana

POR TODO AMOR

Obrigado por TUDO!!!

Agradecimentos:

À **DEUS** pela vida;

Ao Prof. Dr. Sebastião Antonio Izar, pelo auxílio que me prestou com sua orientação, e principalmente pela sua paciência e confiança;

A minha esposa Adriana, pelo apoio e compreensão que firmaram ainda mais nosso Amor;

À Prof. Dr^a. Angela M. Sitta , pela tempo dedicado aos meus problemas e sua tamanha força.

Aos Professores do Departamento de Matemática desta Instituição, e principalmente aos professores do Conselho de Pós-graduação em Matemática pela sua ajuda.

Muito grato sou, também a toda minha família, que sempre estiveram na torcida de todos os fatos e acontecimentos;

Aos amigos e colegas, pelo incentivo;

À FAPESP, pelo apoio financeiro;

A todos que direta e indiretamente ajudaram na elaboração deste trabalho;

Obrigado por TUDO !!!

RESUMO

Estudaremos aqui mergulhos de superfícies no $\mathbb{R}^4$ que tenham no máximo, quatro pontos críticos com respeito a uma projeção na reta. Sobre as hipóteses desta projeção consideraremos que a projeção no plano seja uma função estável e sem cúspides, quando restrita à superfície e provaremos que o mergulho é um mergulho padrão, no qual a superfície é difeomorfa a uma S^2 , a união disjunta de duas S^2 , ao toro, ou a garrafa de Klein.

ABSTRACT

We study embedded surfaces in the Euclidean 4-space which have at most four critical points with respect to the standard projection to the line. Under the hypothesis that projection extends to a projection to the plane which is a stable map without cusps when restricted to the surface, we show that the embedded surface is standard in some sense, where the surface is diffeomorphic to the 2-sphere, the disjoint union of two 2-spheres, the torus, or the Klein bottle.

INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação de Mestrado é estudar mergulhos de superfícies em $\mathbb{R}^4$, através do resultado:

"Se $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um mergulho tal que para alguma reta de $\mathbb{R}^4$, a composta $p \circ f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com, no máximo, quatro pontos críticos, então f é padrão; no qual p é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre a reta $\mathbb{R}$."

Faremos o estudo deste resultado, seguindo as técnicas de topologia diferencial usadas por Ruas, Carrara e Saeki em "A note codimension two submanifolds with at most critical points". Para um melhor desenvolvimento deste trabalho, consideramos as aplicações de Morse e os mergulhos como sendo diferenciáveis de classe C^∞ (poderiam ser no mínimo C^2 para trabalharmos com as Funções de Morse); também dividimos a dissertação em quatro capítulos.

No primeiro, são apresentadas as noções básicas sobre: singularidades (estabilidade e genericidade), aplicações de Whitney, funções de Morse sobre superfícies (incluindo aqui o teorema da classificação das superfícies compactas), isotopia e os tópicos, grupo nó e polinômio de Alexander, da teoria de nós de dimensão um. No segundo colocamos o problema como foi proposto inicialmente por Kuiper, enunciando-o por:

Teorema Principal "Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho da superfície compacta M tal que $\pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função estável sem cúspides e $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com no máximo 4 pontos críticos; no qual $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são projeções ortogonais. Então M é difeomorfa a esfera S^2 , a união disjunta de duas S^2 , a um Toro ou a uma Garrafa de Klein; e ainda o mergulho f é trivial (isto é, f é isotópica ao mergulho padrão).

Além disso temos:

- 1) Se M é defeomorfa a S^2 , então $f(S^2)$ limita um D^3 no $\mathbb{R}^4$.
- 2) Se M é difeomorfa a união disjunta de duas S^2 , então $f(M)$ limita dois discos disjuntos em $\mathbb{R}^4$.
- 3) Se M é difeomorfa ao Toro, então $f(M)$ limita um Toro sólido no $\mathbb{R}^4$.
- 4) Se M é difeomorfa a Garrafa de Klein, então $f(M)$ limita uma Garrafa de Klein sólida no $\mathbb{R}^4$.

Apresentamos, ainda, a solução desenvolvida com técnicas da topologia combinatória dada por Schalermann, em 1985, com o trabalho "*Smooth spheres in $\mathbb{R}^4$ with four points are standard*".

No início do terceiro capítulo desenvolvemos algumas considerações de Mather sobre projeções e em seguida, apresentamos seis resultados, que nos ajudaram a finalizar este capítulo com a demonstração do teorema principal. No último capítulo damos a noção de grupo nó e polinômio de Alexander, para nós de dimensão dois, que foi o pré-requisito para obtermos um exemplo mostrando que o teorema principal é o melhor possível no seguinte sentido: "Existem mergulhos não triviais com funções de Morse com seis pontos críticos".

Obtemos um trabalho que possa iniciar estudantes na área de topologia geométrica e esperamos que os interessados possam ter tanta alegria e prazer quanto tivemos ao ingressar nessa área tão rica e fascinante, como são todas as outras áreas da Matemática.

É um prazer expressar aqui meu agradecimento ao Prof. Dr. Sebastião Antonio Izar por sua constante ajuda, sem a qual não haveria realizado este trabalho, à Prof. Dr Angela Maria Sita pela seu incentivo, ao Prof. Dr. Júlio C. M. Canille pela sua preocupação, à minha esposa e meus familiares pelo excesso de amor e encorajamento.



ÍNDICE

Capítulo 1: Preliminares

1.1 - Singularidades e Aplicações no Plano	1
1.2 - Funções de Morse	8
1.3 - Isotopia de Mergulhos	17
1.4 - Grupo Nó e Polinômio de Alexander	19

Capítulo 2: Equivalência de Superfícies 2-Dimensionais no $\mathbb{R}^4$

2.1 - O Problema	26
2.2 - Um Esboço da Solução de Schallermann para $M = S^2$	28

Capítulo 3: Mergulho 'Padrão' de Superfície no $\mathbb{R}^4$

3.1 - O Teorema Principal	32
3.2 - Um Lema de Mather	32
3.3 - Alguns Resultados Importantes	34
3.4 - Demonstração do Teorema Principal	44

Capítulo 4: Um Exemplo de Mergulho Não 'Padrão'

4.1 - O Polinômio de Alexander para Nó 2-Dimensional	51
4.2 - A Construção do Exemplo	54

Bibliografia	58
--------------------	----

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Singularidades e Aplicações no Plano

Considere uma folha de papel e coloque-a sobre uma superfície regular. Que diferentes formas, esta folha, assume ao redor de um ponto?

Em geral, ocorrem três possibilidades:

- (a) a folha fica plana ou regular;
- (b) o ponto aparece sobre uma linha de dobra da folha;
- (c) uma cuspide é formada pelo ponto.

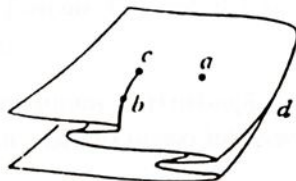


Figura 1.1

Por um instante, podemos dizer que o ponto d na figura é um novo tipo; contudo, se observarmos melhor, o ponto d é na verdade uma cúspide. Para vermos isto, basta que façamos uma pequena perturbação como mostra a figura abaixo.

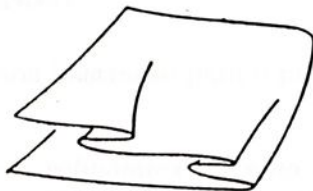


Figura 1.2

Note que pontos do tipo (a) são mais comuns; assim, denominados de **pontos regulares** e os outros tipos são chamados de **pontos críticos**. Observando as figuras 1.1 e 1.2 vemos que quase todos os pontos são regulares, os únicos pontos singulares que são estáveis (i é irremovíveis por uma pequena perturbação) são as dobras e as cúspides.

Nosso interesse, nesta seção, é obter respostas para algumas questões que surgem quando pequenas perturbações são feitas sobre superfícies, como na figura 1.2.

De acordo com o Teorema da Função Inversa, uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo em uma vizinhança de um ponto em que o jacobiano é não nulo. Que estrutura f terá ao redor de um ponto onde o jacobiano é nulo?

Existe uma classificação finita para diferentes modelos estruturais (difeomorfismo, dobra, cúspide) que uma função possa apresentar localmente?

O termo difeomorfismo tem um significado padrão, mas o que é uma dobra ou uma cúspide? Mais especificamente, existe uma função para cada tipo estrutural e quais têm alguma forma simples ou normal?

Finalmente, uma forma normal é supostamente estável, no sentido de que uma pequena perturbação não altera sua estrutura. Qual o significado de perturbar uma função?

Definição 1.1.1 *Sejam X, Y espaços topológicos (superfícies regulares) e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas (diferenciáveis). Então f e g são topologicamente (regularmente) equivalentes se existem homeomorfismos (difeomorfismos) h e k que comutam o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad i \text{ é, } f \circ h = k \circ g$$

Definição 1.1.2 *Dizemos que uma função f é estável se sua classe de equivalência contém uma vizinhança de f na C^k -topologia.*

Whitney notou que ao dar uma pequena perturbação a certas funções, a nova função era topologicamente equivalente a anterior. Como nosso interesse é caracterizar as funções estáveis uma dúvida que surge é:

Podemos qualquer função f_0 ser aproximada por uma função estável?

Esta questão nos dá um problema de *genericidade*, ou seja, será que a propriedade P : "Toda função f_0 está próxima de uma função estável" é genérica?

Seja S um conjunto com uma topologia τ e a relação de equivalência E .

Definição 1.1.3 *Dizemos que uma propriedade P , para elementos de S é genérica se o conjunto de todo $x \in S$ tal que x satisfaz P , contém um conjunto A que é uma interseção enumerável de conjuntos abertos densos; i é, P é genérica se $B = \{x \in S \text{ tal que } x \text{ satisfaz } P\} \supset A$, onde $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$ para V_i s abertos e densos.*

O teorema seguinte nos dá uma boa ilustração para o problema de genericidade.

Teorema 1.1.4 ([Lu], pag 12)

O conjunto de todos os polinômios em uma variável é denso no conjunto das funções contínuas reais definidas em $[a, b]$ com a norma uniforme.

Sejam M, N variedades diferenciáveis com $\dim N \geq 2 \dim M$. Então, o conjunto de todas as imersões de M em N ($\text{Im}(M, N)$) é aberto e denso em $C^\infty(M, N)$.



Exemplo 1.1.5 a) Sejam $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $p(x)$ um polinômio de aproximação (na topologia C^0) para f . Note pela figura que $p^{-1}(0)$ e $f^{-1}(0)$ não são homeomorfos em uma vizinhança da origem; portanto f não é estável.

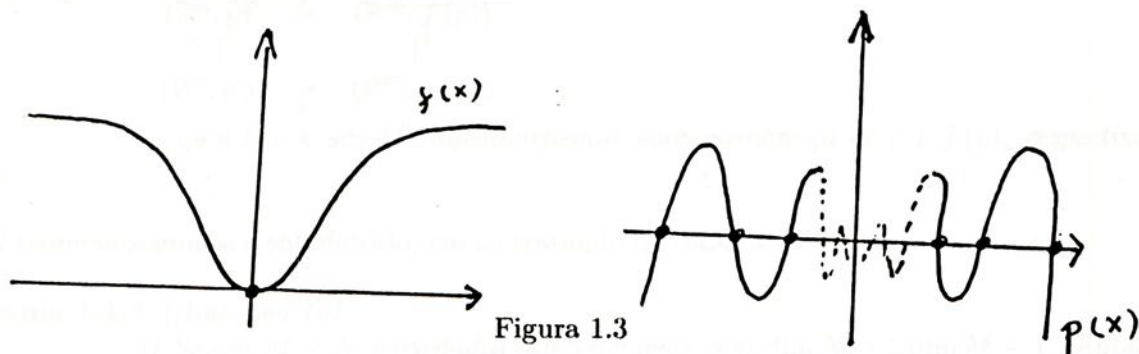


Figura 1.3

b) Tome $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada pelo diagrama abaixo:

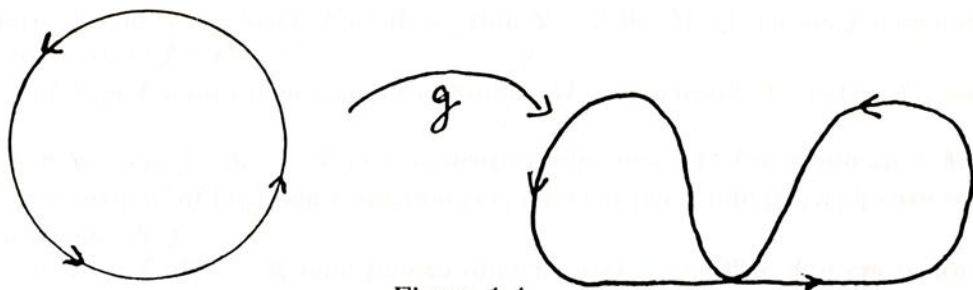


Figura 1.4

Podemos perturbar g em uma das duas formas seguintes:

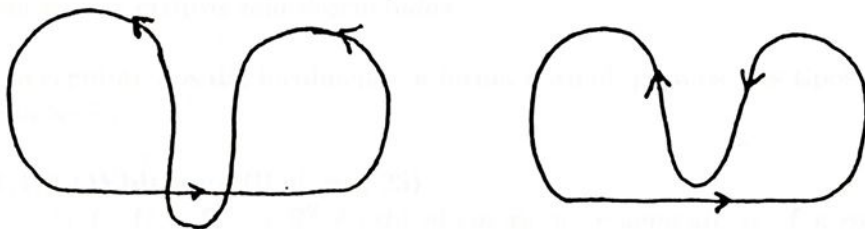


Figura 1.5

Note que as duas perturbações não possuem imagens homeomorfas. Assim, g não é estável.

Do ponto de vista da estabilidade, este teorema não é muito satisfatório, principalmente sendo de nosso interesse, apenas o que ocorre localmente com f (i é a estabilidade em vizinhanças de pontos).

Definição 1.1.6 Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k é localmente estável no ponto p se existe uma vizinhança de p com a seguinte propriedade: "Para qualquer vizinhança aberta V' de p , com $V' \subset V$ e toda C^k -perturbação g de f , existe um ponto $p' \in V'$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, p) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^m, f(p)) \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{R}^n, p') & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^m, g(p')) \end{array}$$

no qual h e k são C^k -difeomorfismos para vizinhança de p e $f(p)$, respectivamente.

O teorema seguinte é satisfatório, em se tratando de estabilidade:

Teorema 1.1.7 ([Lu], pag 16)

a) Sejam M e N variedades diferenciáveis com $\dim N \geq 2 \dim M + 1$. Então, o conjunto de todas as imersões de M em N é denso em $C^\infty(M, N)$. No caso em que M é compacta ele é também aberto.

b) Sejam M e N variedades diferenciáveis com M compacta e $f : M \rightarrow N$ uma imersão injetora. Então, f é estável. E ainda se, $\dim N \geq 2 \dim M + 1$, então, f é uma imersão injetora se e somente se f é estável.

c) Seja f uma submersão da variedade M na variedade Y , então, f é estável.

Definição 1.1.8 a) Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $x_0 \in M$ é dito singular de f se o posto de $df(x_0)$ não é máximo (i é, é menor que o $\min\{m, n\}$); caso contrário o ponto é dito regular de f .

b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é dito um ponto crítico não-degenerado se x_0 for um ponto singular de f e o hessiano em x_0 for não nulo (onde o hessiano é o determinante da matriz $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) \right)_{n \times n}$)

c) Uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de Morse se todos seus pontos singulares são pontos críticos não-degenerados.

O teorema seguinte nos dá, localmente, a forma normal, para os três tipos de pontos vistos no início desta seção.

Teorema 1.1.9 (Whitney) ([Lu], pag 23)

1) $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é estável em x_0 se, e somente se, f é equivalente a uma das três funções numa vizinhança de x_0

a) $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = y$ (ponto regular)

b) $u(x, y) = x^2$ e $v(x, y) = y$ (ponto de dobra)

c) $u(x, y) = xy - x^3$ e $v(x, y) = y$ (ponto de cuspide)

2) O conjunto das funções estáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, com M compacta de dimensão dois, é denso no espaço das funções diferenciáveis.

3) $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável é estável se, e somente se, f é estável para todo ponto de M , as imagens de dobras se interceptam somente aos pares e com ângulos não nulos, e mais, as imagens de dobras não interceptam imagens de cúspides.

As considerações que passaremos a fazer agora serão úteis para a compreensão do teorema da transversalidade de R. Thom e para a definição do que vem a ser um conjunto "ruim".

Definição 1.1.10 Sejam M e Y variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow Y$ diferenciável e S uma subvariedade de Y . Então,

a) f intercepta S transversalmente em $x \in M$ se $f(x) \notin S$ ou se $f(x) \in M$ temos $T_{f(x)}S + df_x T_x M = T_{f(x)}Y$.

b) f é transversal a S em $A \subset M$ se f intercepta S transversalmente em $x \in A$.

Vejam os exemplos, no qual possamos ver geometricamente a definição de transversalidade acima. Para isto basta tomar $M = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$ e N um plano no $\mathbb{R}^3$; com a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y, -x^2 + y^2)$ como na figura abaixo.

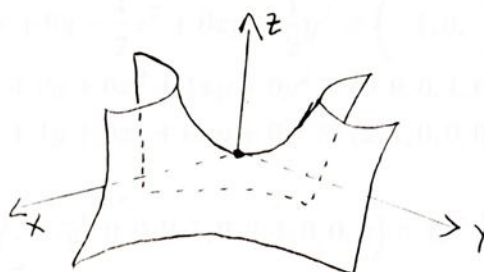


Figura 1.6

A imagem de f é o parabolóide elíptico (sela). Assim, se N for o plano xy , a função f não será transversal a N na origem; mas se N não for o plano xy ela será transversal a N na origem.

Dadas duas subvariedades M e S de Y , dizemos que M é transversal a S quando existe um mergulho f de M em Y tal que f é transversal a S .

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ localmente C^s com $f(0) = 0$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ e $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada f_i tome o desenvolvimento de Taylor na origem, se omitirmos os termos de grau maiores iguais a $r + 1$ (para $r < s$) teremos uma p -upla de polinômios de grau r que aproxima f , a qual denominaremos de r -jato de f , que é uma classe de equivalência de f , e será denotado por $J^r f$. O conjunto de todos os r -jatos será denotado por $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ou simplesmente $J^r(n, p)$.

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ as coordenadas de seu r -jato são os valores das derivadas parciais na origem. Com isso, um r -jato pode ser visto como uma p -upla de N -uplas $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ para algum N , em que cada $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iN})$. Considerando a aplicação que a cada $J^r f \in J^r(n, p)$ associa uma pN -upla temos uma correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^{pN}$ e então, podemos dar a $J^r(n, p)$ a estrutura topológica e diferenciável do $\mathbb{R}^{pN}$.

Exemplo 1.1.11 Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (\cos y - e^x, x \sin y, x + y + \sin x)$. Fazendo $F = (f, g, h)$ com $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Calculemos o 2-jato de F na origem.

$$1) f(x, y) = \cos y - e^x$$

$$\text{Assim } f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -1 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 1$$

$$\text{Portanto, } J^2 f(0, 0) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

$$2) g(x, y) = x \operatorname{sen} y$$

$$\text{Assim } g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

$$\text{Portanto, } J^2 g(0, 0) = xy$$

$$3) h(x, y) = x + y + \operatorname{sen} x$$

$$\text{Assim } h(0, 0) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = 2 \quad e \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 1$$

$$\text{Portanto, } J^2 h(0, 0) = 2x + y$$

Com isso, temos que:

$$J^2 F(0, 0) = \left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, xy, 2x + y \right)$$

Fazendo a identificação com o $\mathbb{R}^{pN}$ teremos:

$$J^2 f = -x + 0y - \frac{1}{2}x^2 + 0xy - \frac{1}{2}y^2 \cong \left(-1, 0, \frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2} \right)$$

$$J^2 g = 0x + 0y + 0x^2 + 1xy + 0y^2 \cong (0, 0, 0, 1, 0)$$

$$J^2 h = 2x + 1y + 0x^2 + 0xy + 0y^2 \cong (2, 1, 0, 0, 0)$$

$$\text{Então, } J^2 F(0, 0) = \left(-1, 0, \frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0 \right) \in \mathbb{R}^{15}$$

$$\text{Logo, } J^2(2, 3) \cong \mathbb{R}^{15}.$$

Teorema 1.1.12 (da Transversalidade de Thom) ([Lu], pag 31)

Seja S uma subvariedade diferenciável de $J^r(n, p)$. Então para quase toda função $C^\infty f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ temos $J^r f(\mathbb{R}^n)$ transversal a S , e se além disso $\operatorname{codim} S > n$ então $J^r f(\mathbb{R}^n) \cap S = \emptyset$ para quase toda f .

Definição 1.1.13 a) Um conjunto é chamado "ruim" em $J^2(n, 1)$ quando ele é formado por um conjunto de pontos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn})$ tal que

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ com } i > j$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

b) Seja f uma função C^2 . Um ponto é dito "bom" se $J(p) \neq 0$ ou $\nabla J(p) \neq 0$ (J_x ou J_y é não nulo). Dizemos que uma função é "boa", se todo ponto de seu domínio é um ponto "bom".

Consideremos uma função "boa" $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se p é um ponto regular o posto do jacobiano de f no ponto p ($Jf(p)$) é máximo; logo $\dim df(p) \cdot \mathbb{R}^2 = 2$. Já no caso em que p é um ponto singular temos que J_x ou J_y é não nulo; logo $\dim df(p) \cdot \mathbb{R}^2 = 1$

Logo quando f é uma função boa, a imagem da aplicação linear $\nabla f(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\nabla f(p)(w) = \nabla_w f(p)$ é um espaço de dimensão 2 quando p é regular e um espaço de dimensão 1 quando p é singular (onde $\nabla f(p)$ a derivada direcional).

Lema 1.1.14 ([Lu], pag 37)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função "boa". Então os pontos singulares de f formam uma curva regular em U .

Demonstração

Seja $p = (x_0, y_0)$ um ponto singular logo $J(p) = 0$. Por outro lado uma das derivadas parciais de f é não nula, suponha $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$.

Então, pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança V de x_0 e uma vizinhança W de y_0 tais que a aplicação $\sigma : V \rightarrow W$ dada por $\sigma(x) = y$, com $\sigma(x_0) = y_0$ e $J(x, \sigma(x)) = 0$ para todo $x \in V$.

Portanto, soluções de $J = 0$ próximo de um ponto "bom" de f formam uma curva regular. ■

Ao conjunto de curvas regulares obtidas acima chamamos de "Dobra Geral" de f e denotamos por $\mathcal{C}$.

Seja $\phi(t) = (t, \gamma(t))$ uma parametrização da dobra geral de f , tal que $\phi(0) = p$, no qual p é um ponto singular de f . Assim temos que p é um ponto de dobra, se $\frac{d}{dt}(f \circ \phi)(0) \neq 0$ e p é um ponto de cúspide, se $\frac{d}{dt}(f \circ \phi)(0) = 0$, mas $\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \phi)(0) \neq 0$.

Definição 1.1.15 Seja f uma função "boa"

a) Dizemos que um ponto $p \in D_f$ é excelente se p é ponto regular ou dobra ou cúspide de f .

b) Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é excelente se cada $p \in U$ é um ponto excelente.

Teorema 1.1.16 (deWhitney) ([Lu], pag 44)

1) O conjunto de todas as funções excelentes de um aberto U do plano no plano é denso no conjunto $C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$

2) Seja p um ponto de dobra de $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$. Então, podemos introduzir sistemas de coordenadas diferenciáveis (x, y) e (u, v) sobre p e $f(p)$, respectivamente, em termos dos quais f se escreva da forma $f(x, y) = (u, v)$ onde $u(x, y) = x^2$ e $v(x, y) = y$

3) Seja p um ponto de cúspide de $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$. Então, podemos introduzir sistemas de coordenadas diferenciáveis como acima, tal que f se escreva da forma $f(x, y) = (u, v)$ com $u(x, y) = xy - x^3$ e $v(x, y) = y$.

Podemos observar graficamente a dobra geral, em ambos os casos, na figura abaixo.

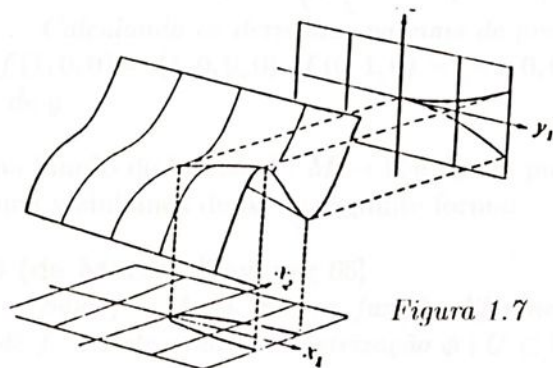


Figura 1.7

1.2 FUNÇÕES DE MORSE

Consideraremos M como sendo uma superfície compacta e conexa, caso não seja mencionarmos.

Sejam M uma superfície e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Pela definição 1.1.9, um ponto é crítico se $f'(p_0) = 0$.

Proposição 1.2.1 ([Tav], pag 63)

Se M é uma superfície compacta e todos os pontos críticos da função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são não-degenerados, então eles são em número finito

Como vimos na seção anterior, uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função de Morse, se todos os seus pontos críticos são não-degenerados, como podemos observar no exemplo abaixo.

Exemplo 1.2.2 *Considere as seguintes funções :*

$f : S^2 \rightarrow P^2$ (plano projetivo) e $g : P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ e $g(f(x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ para todo $(x, y, z) \in S^2$.

Tomemos $V_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \text{ tal que } x_i > 0\}$ com $i = 1, 2, 3$; e as parametrizações

$f_1 : D^2 \rightarrow V_1$ dada por $f_1(x_1, x_2) = (u_1, u_2, u_3)$ onde

$$u_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$u_2 = x_1$$

$$u_3 = x_2$$

$$u_1 = x_1$$

$f_2 : D^2 \rightarrow V_2$ dada por $f_2(x_1, x_2) = (u_1, u_2, u_3)$ onde

$$u_2 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$u_3 = x_2$$

$$u_1 = x_1$$

$f_3 : D^2 \rightarrow V_3$ dada por $f_3(x_1, x_2) = (u_1, u_2, u_3)$ onde

$$u_2 = x_2$$

$$u_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

Assim $f \circ f_i : D^2 \rightarrow W_i = f(V_i)$ definida por $f(f_i(x_1, x_2)) = f(u_1, u_2, u_3)$ logo obtemos:

$$F_1(x_1, x_2) = g(f \circ f_1(x_1, x_2)) = g\left(f\left(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2\right)\right) = 1 + x_1^2 + 2x_2^2$$

$$F_2(x_1, x_2) = g(f \circ f_2(x_1, x_2)) = g\left(f\left(x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_2\right)\right) = 2 - x_1^2 + x_2^2$$

$$F_3(x_1, x_2) = g(f \circ f_3(x_1, x_2)) = g\left(f\left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)\right) = 3 - 2x_1^2 - x_2^2.$$

Calculando as derivadas parciais de primeira e segunda ordem obtemos os pontos críticos $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$ todos não-degenerados de g .

Dada uma função de Morse, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e p_0 um ponto crítico de f podemos expressar esta função em uma vizinhança de p_0 da seguinte forma:

Lema 1.2.3 (de Morse) [Tav; pag 65]

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p_0 \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f . Existe uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ com $\phi(0, 0) = p_0$, tal que



$f \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma das seguintes formas:

- 1) $f \circ \phi(x, y) = f(p_0) + x^2 + y^2$
- 2) $f \circ \phi(x, y) = f(p_0) - x^2 + y^2$
- 3) $f \circ \phi(x, y) = f(p_0) - x^2 - y^2$.

No lema acima chamamos a atenção das seguintes notações:

- i) ϕ é chamada parametrização de Morse
- ii) As expressões de f , numa vizinhança de p_0 , são chamadas formas canônicas de f .
- iii) O número de sinais negativos destas formas é chamado o índice do ponto p_0 .
- iv) p_0 tem índice 0, 1 ou 2 para $f \circ \phi$ igual à $x^2 + y^2$, $-x^2 + y^2$ e $-x^2 - y^2$ (respectivamente).

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, os pontos críticos de f com índice 0, 1 ou 2 serão chamados pontos de mínimo, sela ou máximo, para uma parametrização ϕ conveniente em torno de p_0 , o gráfico de $f \circ \phi$ tem um dos aspectos, conforme o índice de p_0 .

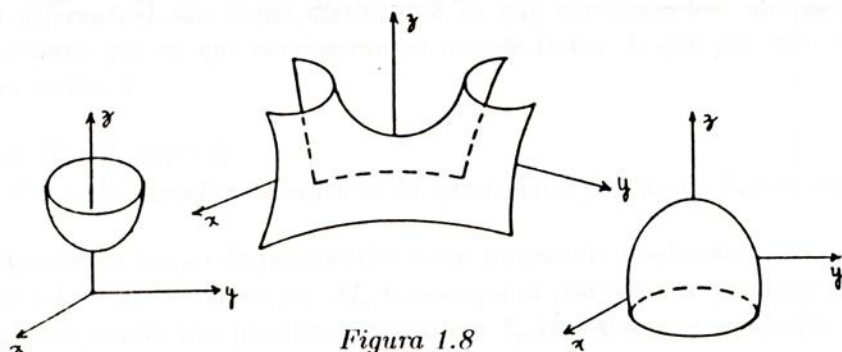


Figura 1.8

Veremos, a seguir, como é possível modificar uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, numa vizinhança de um ponto crítico p_0 de tal forma a alterar o nível de p_0 deixando-o não degenerado e obter uma nova função com os mesmos pontos de f .

Para isso tomemos um ponto crítico de índice 0 da função f e $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ com $\phi(0) = p_0$ a parametrização de Morse. Considere o disco aberto $U(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 < a\}$ e mais $V(a) = \phi(U(a))$.

Assim por [Tav], pag 69, para todo $b < a$ ($b > a$) existe uma função diferenciável $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ tendo os mesmos pontos críticos de f tal que $g(p_0) = b$.

Observevemos que, no caso em que p_0 é um ponto crítico de índice 2 de f , basta tomar $U(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 + f(p_0) < -a, \text{ com } a < f(p_0)\}$ e teremos o mesmo resultado.

Já no caso em que o ponto p_0 tem índice 1, tome a parametrização de Morse $\phi : U \rightarrow V$ com $\phi(0, 0) = p_0$ tal que $f_1(x, y) = f \circ \phi(x, y) - f \circ \phi(0, 0) = x^2 - y^2$. Dados $p_1, p_2 \in V$ tais que $f(p_1) = a$, $f(p_2) = b$ e $a < f(p_0) < b$, tome $U(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x^2 + y^2| < |a| \text{ e } |x \cdot y| < |b - a|\}$.

U , como mostra a figura abaixo.

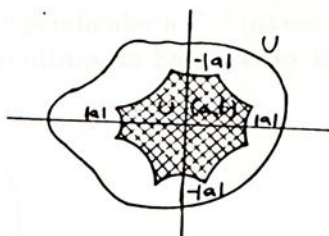


Figura 1.9

Logo, analogamente aos casos anteriores, para todo $c \in]a, b[$, existe uma função diferenciável $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ tendo os mesmos pontos críticos de f , tal que $g(p_0) = c$

Definição 1.2.4 Dizemos que uma função de Morse é ordenada se os valores críticos (de pontos críticos diferentes) são todos distintos e os que correspondem aos pontos críticos de índice 0 são menores que os que correspondem aos de índice 1, que por sua vez são menores que aqueles com índice 2.

Teorema 1.2.5 ([Tav], pag 73)

Em toda superfície compacta M existe uma função de Morse ordenada.

Vejamos como fica a noção de ponto crítico em termos do gradiente.

Inicialmente sejam $M^n \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in M$, temos que a restrição de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ continua sendo um produto interno em $T_p M$. Assim, o gradiente de uma função real diferenciável é o campo de vetores a M definido por

$$\langle \text{grad} f(p), v \rangle = f'(p) \cdot v, \text{ para todo } v \in T_p M \text{ e } p \in M$$

Dado $p \in M$ dizemos que p é ponto crítico de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se e somente se $\text{grad} f(p) = 0$, e um valor $q \in \mathbb{R}$ é dito valor regular de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se para todo $p \in f^{-1}(q)$ a derivada $f'(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva (ou ainda $f'(p) \neq 0$ ou $\text{grad} f(p) \neq 0$). Se q não é valor regular, $f^{-1}(q)$ pode conter pontos críticos e regulares.

Proposição 1.2.6 ([Tav], pag 73)

O conjunto de pontos regulares de $f^{-1}(q)$ é uma família de curvas (supondo-o não vazio)

Demonstração:

Tome $p \in f^{-1}(q)$ um ponto regular de f e $\phi : U \rightarrow V$ com $\phi(0,0) = p$ uma parametrização em torno de p . Como p é regular $(f \circ \phi)'(0,0) \neq 0$ e assim suponhamos que $\frac{\partial f \circ \phi}{\partial y}(0,0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita existe $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 0$ diferenciável tal que $C = \{(x, g(x)); x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\} \subset (f \circ \phi)^{-1}(q)$. Dai considere $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \phi(C) \subset V$ é uma parametrização da curva $\phi(C) \subset f^{-1}(q)$. ■

Corolário 1.2.7 [Tav; pag 75]

Se q é um valor regular de f então $f^{-1}(q)$ é uma curva.

Quando f é de Morse ordenada podemos descrever geometricamente a estrutura de órbita do campo gradiente, já que este é perpendicular a $f^{-1}(q)$ em seus pontos regulares. Observemos como é esta estrutura com a função altura na Esfera e no Toro.



Figura 1.10

Quando q é um valor regular de f dizemos que $f^{-1}(q)$ é uma curva de nível ou nível regular de f . Já no caso de q ser crítico dizemos que é curva de nível crítica ou nível crítico de f . Estudaremos à seguir a mudança de um nível regular para outro, passando por um nível crítico de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para isto considere K uma componente conexa de $f^{-1}([a, b])$ constituída somente de pontos regulares. Tome $K_a = f^{-1}(a) \cap K$, $K_b = f^{-1}(b) \cap K$ e $K_{(-\infty, b)} = f^{-1}(-\infty, a) \cup K$.

Proposição 1.2.8 ([Tav], pag 79)

- 1) Considerando as notações acima, temos as seguintes relações: $K_a \approx K_b$, $K \approx K_a \times [a, b]$ e $f^{-1}((-\infty, a]) \approx K_{(-\infty, a)}$
- 2) Suponha que $f^{-1}([a, b])$ só contenha pontos regulares, então $f^{-1}([a, b]) \approx f^{-1}(a) \times [a, b]$ e $f^{-1}((-\infty, a]) \approx f^{-1}((-\infty, b])$

Considere agora $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse ordenada com $p_1, \dots, p_l$ mínimos tais que $f(p_i) < f(p_j)$ se $i < j$ com $c_i = f(p_i)$. Seja $\phi : U \rightarrow V$ a parametrização de Morse com $\phi(0, 0) = p_1$. Se c está próximo a c_1 então $f^{-1}(c) \approx (f \circ \phi)^{-1}(c) \approx S^1$.

Temos ainda

{

$$\begin{aligned} & f^{-1}(c) \approx S^1 \\ & f^{-1}(-\infty, c) \approx D^2 \quad \text{para } c_1 < c < c_2. \\ & f^{-1}(c_2) \approx S^1 \overset{\circ}{\cup} \{p_2\} \\ & f^{-1}(-\infty, c_2) \approx D^2 \overset{\circ}{\cup} \{p_2\} \\ & f^{-1}(-\infty, c) \approx D^2 \overset{\circ}{\cup} D^2 \\ & f^{-1}(c) \approx S^1 \overset{\circ}{\cup} S^1 \quad \text{para } c_2 < c < c_3 \end{aligned}$$

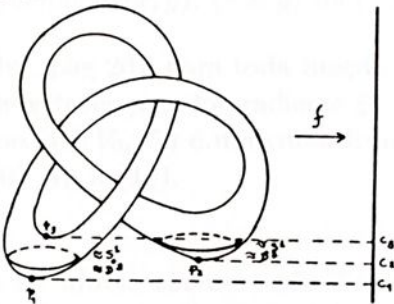


Figura 1.11

Seja agora p_0 um ponto crítico de índice 1 da função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : U \rightarrow V_0$ com $\phi(0,0) = p_0$ a parametrização de Morse. Considere também $c_0 = f(p_0)$; $U(\varepsilon) = U(c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$; $U(\varepsilon, 2\varepsilon) = U(c_0 - \varepsilon, c_0 + 2\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ tal que $U(\varepsilon)$ e $U(\varepsilon, 2\varepsilon)$ estejam contidos em U , sendo $p_1, \dots, p_m$ os outros pontos críticos de f , $V_1, \dots, V_m$ suas respectivas vizinhanças de tais que $V_i \cap W = \emptyset$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Tome $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ tal que $0 \leq \alpha(p) \leq 1$ com $\alpha(p) = 1$ se $p \in M - V$ e $\alpha(p) = 0$ se $p \in K_\varepsilon \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, onde $V = W \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$ e $K_\varepsilon = \overline{U(\varepsilon)}$.

Proposição 1.2.9 ([Tav], pag 80)

Seja $c' < c_0 < c$ tal que p_0 é o único ponto crítico em $f^{-1}[c', c]$; então, temos que $f^{-1}([-\infty, c]) \approx f^{-1}([-\infty, c']) \cup H$.

Onde $H \approx \text{int}(D^2)$ e $f^{-1}([-\infty, c']) \cap H = I \times J$ com $I \cap J = \emptyset$ e I, J difeomorfos a $[0, 1]$

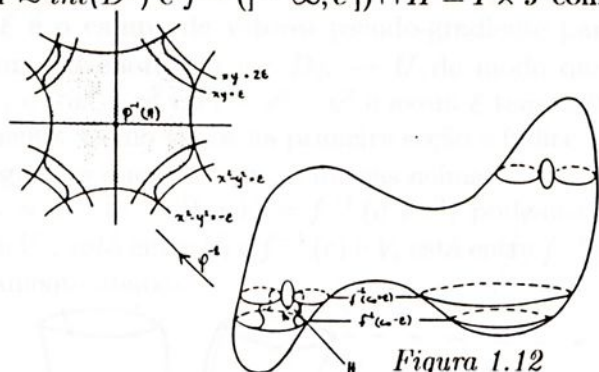


Figura 1.12

Desenvolveremos, agora, um estudo para que possamos obter dois teoremas fundamentais na teoria de Morse, sobre a mudança de níveis críticos.

Definição 1.2.10 1) A terna $(W; V_0, V_1)$ onde W é uma superfície cujos bordos são V_0 e V_1 é chamada cobordismo.

2) Uma função de Morse sobre um cobordismo $(W; V_0, V_1)$ é uma função $f : W \rightarrow [a, b]$ tal que $f^{-1}(a) = V_0$, $f^{-1}(b) = V_1$ e todos os pontos críticos de f são interiores (isto é, estão em $W - \partial W$) e são não-degenerados.

3) Se $f : W \rightarrow [a, b]$ é uma função de Morse sobre o cobordismo $(W; V_0, V_1)$, dizemos que um campo de vetores ξ sobre W é um campo pseudo-gradiente para f se $\xi(f) > 0$ em todo o complementar do conjunto de pontos críticos de f e dado um ponto crítico p , existem (x, y) e uma vizinhança V de p na qual f apresenta uma das formas $f(p) + x^2 + y^2$; $f(p) - x^2 + y^2$ ou $f(p) - x^2 - y^2$ e ξ tem coordenadas (x, y) , $(-x, y)$ ou $(-x, -y)$ em U , respectivamente.

Como podemos ver em ([Mu], pag 20), para toda função de Morse f sobre um cobordismo $(W; V_0, V_1)$ existe um campo de vetores pseudo-gradiente ξ .

Diremos que um cobordismo $(W; V_0, V_1)$ é um cobordismo produto, se ele é difeomorfo ao cobordismo $(V_0 \times [0, 1]; V_0 \times \{0\}, V_0 \times \{1\})$.

Teorema 1.2.11 ([Mu], pag)

Se uma função de Morse sobre o cobordismo $(W; V_0, V_1)$ não possui nenhum ponto crítico; então, $(W; V_0, V_1)$ é um cobordismo produto.

Corolário 1.2.12 ([Mu], pag)

- 1) Seja W uma variedade diferenciável compacta com bordo. Existe uma vizinhança de ∂W chamada de vizinhança colarinho que é difeomorfa a $\partial W \times [0, 1[$.
- 2) Suponha que toda componente M da variedade diferenciável W é compacta e de 2-lados (isto é, o complementar relativo a uma sua δ -vizinhança em M é desconexo). Então existe uma vizinhança de M em W difeomorfa a $M \times]-1, 1[$ de tal forma que M corresponde a $M \times \{0\}$, denominada de vizinhança bicolarinho.

Trataremos aqui de cobordismos que possuem função de Morse com apenas um ponto crítico.

Seja $(W; V_0, V_1)$ um cobordismo com função de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ e o campo pseudo-gradiente ξ de f . Suponha que $p \in W$ é um ponto crítico de f , e $V_0 = f^{-1}(c_0)$ e $V_1 = f^{-1}(c_1)$ são os valores críticos, tal que $c_0 < f(p) < c_1$ e $c = f(p)$ é o único valor crítico no intervalo $[c_0, c_1]$. Seja D_r^k a bola de centro na origem e raio r em $\mathbb{R}^k$ e $D_1^k = D^k$.

Já que ξ é o campo de vetores pseudo-gradiente para f , existe uma vizinhança U de p em W , e um difeomorfismo $g : D_{2\epsilon} \rightarrow U$ de modo que $f(g(x, y))$ assume uma das formas $c + x^2 + y^2$, $c - x^2 + y^2$ ou $c - x^2 - y^2$ e assim ξ tem coordenadas (x, y) , $(-x, y)$ ou $(-x, -y)$, respectivamente. Como vimos na primeira seção o índice λ do ponto crítico é dado pelo número de sinais negativos que possuem as formas acima.

Seja $V_{-\epsilon} = f^{-1}(c - \epsilon^2)$ e $V_{\epsilon} = f^{-1}(c + \epsilon^2)$ podemos assumir $4\epsilon^2 < \min\{|c - c_0|, |c - c_1|\}$ de modo que $V_{-\epsilon}$ está entre V_0 e $f^{-1}(c)$ e V_{ϵ} está entre $f^{-1}(c)$ e V_1 . A situação está representada esquematicamente abaixo.

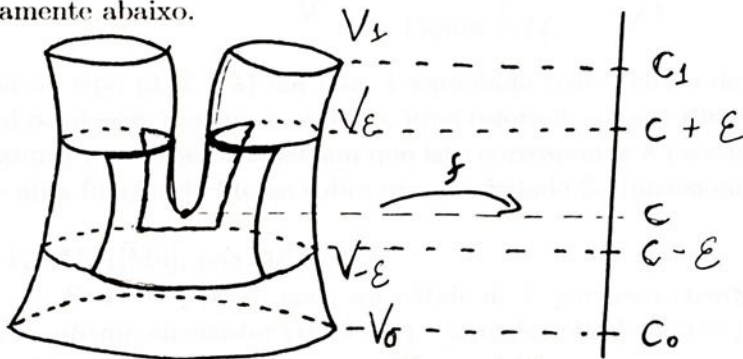


Figura 1.13

Seja S^{k-1} o bordo do disco unitário fechado D^k em $\mathbb{R}^k$.

Definição 1.2.13 O mergulho característico $\phi_L : S^{\lambda-1} \times D^{2-\lambda} \rightarrow V_0$ é obtido como segue. Primeiro defina um mergulho $\phi : S^{\lambda-1} \times D^{2-\lambda} \rightarrow V_{\epsilon}$ por $\phi(u, \theta v) = g(\epsilon u \cosh \theta, \epsilon v \sinh \theta)$ para $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{2-\lambda-1}$ e $0 \leq \theta < 1$. Começando pelo ponto $\phi(u, \theta v)$ em $V_{-\epsilon}$ a curva integral leva $\phi(u, \theta v)$ para algum ponto bem definido $\phi_L(u, \theta v)$ em V_0 .

Defina a esfera esquerda S_L de p em V_0 como a imagem $\phi_L(S^{\lambda-1} \times 0)$. Note que S_L é justamente a interseção de V_0 com as curvas integrais e ξ começando no ponto crítico p . O disco D_L é um disco com bordo S_L , definido pela união dos segmentos das curvas integrais começando em S_L e terminando em p .

Analogamente o mergulho característico $\phi_R : D^{\lambda} \times S^{2-\lambda-1} \rightarrow V_1$ é obtido por $\phi : D^{\lambda} \times S^{2-\lambda-1} \rightarrow V_{\epsilon}$ que a cada ponto $(\theta u, v)$ associa $\phi(\theta u, v) = g(\epsilon u \sinh \theta, \epsilon v \cosh \theta)$ e então trasladando a imagem para V_1 . A esfera direita S_R de p em V_1 é definida por $\phi_R(0 \times S^{2-\lambda-1})$.

S_R é o bordo do disco direito, definido pela união dos segmentos das curvas integrais de ξ começando em p e terminando em S_R .

Definição 1.2.14 Um cobordismo elementar é um cobordismo $(W; V, V')$ que possui uma função de Morse f com, exatamente, um ponto crítico p .

Dada uma variedade V de dimensão 1 e um mergulho $\phi : S^{\lambda-1} \times D^{2-\lambda} \rightarrow V$, temos $\chi(V, \phi)$ denota a variedade quociente obtida da soma disjunta $(V - \phi(S^{\lambda-1} \times 0)) + (D^\lambda \times S^{2-\lambda-1})$ identificando $\phi(u, \theta v)$ com $(\theta u, v)$ para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{2-\lambda-1}$ e $0 < \theta < 1$. Se V' denota alguma variedade difeomorfa a $\chi(V, \phi)$ então veremos que V' pode ser obtida de V pela cirurgia do tipo $(\lambda, 2 - \lambda)$.

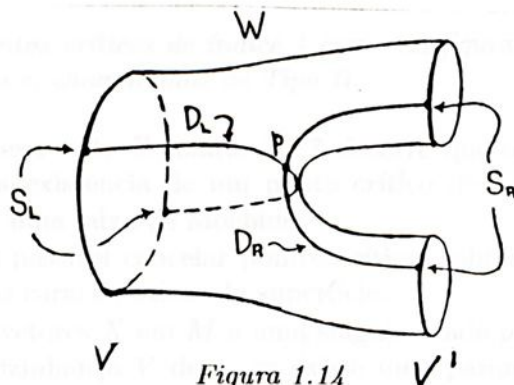


Figura 1.14

Cirurgia do tipo $(\lambda, 2 - \lambda)$ em uma 1-variedade tem o efeito de remover uma esfera $\lambda - 1$ dimensional e colocar, por um mergulho, uma esfera $2 - \lambda - 1$ dimensional.

Os próximos 2 resultados mostram que isto corresponde à passagem de um ponto crítico de índice 1 de uma função de Morse sobre uma variedade 2-dimensional.

Teorema 1.2.15 ([Mu], pag 30)

Se $V' = \chi(V, \phi)$ pode ser obtido de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, 2 - \lambda)$, então existe um cobordismo elementar $(W; V, V')$ e uma função de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ com exatamente um ponto crítico de índice λ .

Teorema 1.2.16 ([Mu], pag 31)

Se $(W; V, V')$ é um cobordismo elementar com mergulho característico $\phi_L : S^{\lambda-1} \times D^{2-\lambda} \rightarrow V$, então $(W; V, V')$ é difeomorfo ao cobordismo $(\omega(V, \phi_L); V, \chi(V, \phi_L))$.

Vejamos, geometricamente como fica a passagem por um ponto crítico de índice 1 numa função de Morse. As figuras a e b são realizadas concretamente tomando a função altura no toro T_1 e a figura c como no exemplo 2.

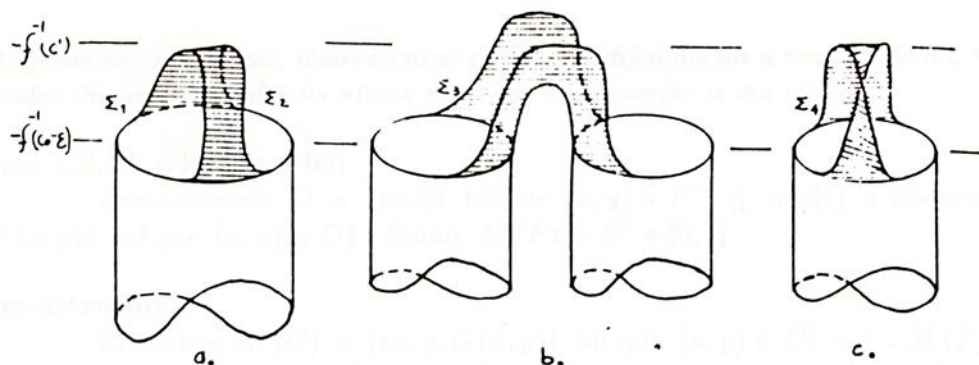


Figura 1.15

Definição 1.2.17 Aos pontos críticos de índice 1 como na figura a e b, chamaremos de Tipo I, e aqueles como na figura c, chamaremos de Tipo II.

Do fato de M ser conexa e do Corolário 1.2.7 decorre que os pontos críticos do Tipo I aparecem aos pares. Já a existência de um ponto crítico do Tipo II faz com que M seja não-orientável, pois possui uma faixa de Möebius.

Vejamos agora como é possível cancelar pontos críticos, obtendo assim funções de Morse mais simples, no entanto as características da superfície.

Considere o campo de vetores X em M e uma singularidade p de X ($X(p) = 0$). Dizemos que X é linear em uma vizinhança V de p_0 se existe uma parametrização $\psi : U \rightarrow V$ com $\psi(0,0) = p_0$ e uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\psi'(x,y) A(x,y) = X(\psi(x,y))$ para $(x,y) \in U$.

Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e p_1 um ponto crítico de índice 1 de f ; se $\phi : U \rightarrow V$ com $\phi(0,0) = p_1$ é a parametrização de Morse, então, $f \circ \phi(x,y) = x^2 - y^2$ e podemos supor $f(p_1) = 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $B(2\delta) \subset U$ e $\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}^{C^\infty}$ tal que $0 \leq \gamma(p) \leq 1$, com $\gamma^{-1}(1) = \phi(\overline{B}(\delta))$ e $\gamma^{-1}(0) = M - \phi(B(2\delta))$. Com estas notações temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.18 ([Tav], pag 85)

Existe um campo de vetores X^f , tangentes a M , satisfazendo:

- X^f é linear em $\phi(B(\delta))$
- Se p não é ponto crítico de f então $f'(p) \cdot X^f(p) > 0$
- X^f e o campo gradiente de f tem as mesmas singularidades.

Proposição 1.2.19 ([Tav], pag 86)

Sejam $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse ordenadas tais que $f^{-1}([a,b])$ e $g^{-1}([c,d])$ são conexos e tem, cada um, dois pontos críticos não-degenerados de índice 0 (ou 2) e 1. Então, existe um homeomorfismo $h : f^{-1}([a,b]) \rightarrow g^{-1}([c,d])$.

Proposição 1.2.20 ([Tav], pag 89)

Existem duas funções diferenciáveis $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- F tem uma sela e dois mínimos como pontos críticos;
- G tem somente um mínimo como ponto crítico;
- Existe um intervalo $[-a,a]$ tal que os pontos críticos de F estão em $F^{-1}([-a,a])$ e se $p \notin F^{-1}([-a,a])$ então $F(p) = G(p)$;

4) Exceto pelos níveis críticos, todos os níveis de F são difeomorfos a um círculo ou, no máximo, dois círculos disjuntos e todos os níveis de G são difeomorfos a um círculo.

Corolário 1.2.21 ([Tav], pag 90)

Considerando $D = \{(x, y) \text{ tal que } (x, y) \in F^{-1}([-a, a])\}$ e também $M(F) = \{(x, y, F(x, y)) \text{ tal que } (x, y) \in D\}$. Então, $M(F) \approx S^1 \times [0, 1]$

Demonstração:

Considere $M(G) = \{(x, y, G(x, y)) \text{ tal que } (x, y) \in D\}$ e $\pi : M(F) \rightarrow M(G)$ dada por $\pi(x, y, F(x, y)) = (x, y, G(x, y))$. Como F e G são diferenciáveis e definia $\pi^{-1}(x, y, G(x, y)) = (x, y, F(x, y))$ temos que π é difeomorfismo.

Portanto $M(F) \approx M(G)$. Como G não possui pontos críticos em D temos $M(G) \approx G^{-1}(a) \times [0, 1] \approx S^1 \times [0, 1]$ portanto $M(F) \approx S^1 \times [0, 1]$. ■

Teorema 1.2.22 (do Cancelamento) ([Tav], pag 83)

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse ordenada tendo a e b como valores regulares. Se $f^{-1}([a, b])$ contém, exatamente, dois pontos críticos p_0 e p_1 com $a < f(p_0) < f(p_1) < b$, de índices 0 (ou 2) e 1, respectivamente, que estão na mesma componente conexa; então, $f^{-1}([a, b]) \approx f^{-1}(a) \times [0, 1]$.

Demonstração:

Das proposições anteriores temos $f^{-1}([a, b]) \approx M(F)$ e $M(F) \approx M(G) \approx S^1 \times [0, 1]$ e portanto $f^{-1}([a, b]) \approx S^1 \times [0, 1]$.

Assim, pela proposição 1.2.20 $f^{-1}([a, b]) \approx f^{-1}(a) \times [0, 1]$ ■

Neste momento, estamos aptos a enunciar o teorema da classificação das superfícies compactas, sabendo que um n -plano projetivo é a soma conexa de n planos projetivos e um p -toro é a soma conexa de p toros. Dizemos ainda que uma S^2 é um 0-toro e uma garrafa de Klein é a soma de 2 planos projetivos, isto é P_2 .

Teorema 1.2.23 ([Tav], pag)

Toda superfície compacta, conexa e sem bordo M é homeomorfa a um n -plano projetivo P_n ou a um p -toro T_p .



1.3 ISOTOPIA DE MERGULHOS

Definição 1.3.1 Seja $f : M \rightarrow N$ um mergulho; $h : [0, 1] \times M \rightarrow N$ é uma isotopia de f se h é diferenciável e $h_t : M \rightarrow N$ dado por $h_t(x) = h(t, x)$ é um mergulho para todo $t \in [0, 1]$ e $h_0 = f$.

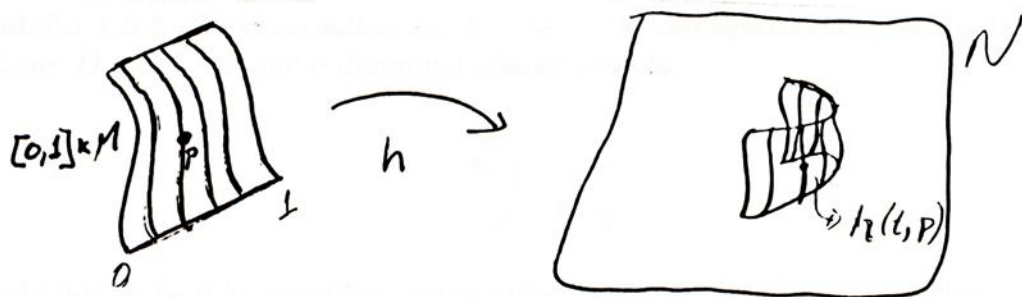


Figura 1.16

Assim, dizemos que h é uma isotopia entre h_0 e h_1 , ou que h_0 e h_1 são isotópicas.

Exemplo 1.3.2 Dado o mergulho $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, considere a função $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $h(\theta, t) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$. Assim temos:

- 1) h diferenciável;
- 2) $h_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $h_t(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$ é um mergulho para todo t ;
- 3) $h_0 = f$

Logo, h é uma isotopia de f .

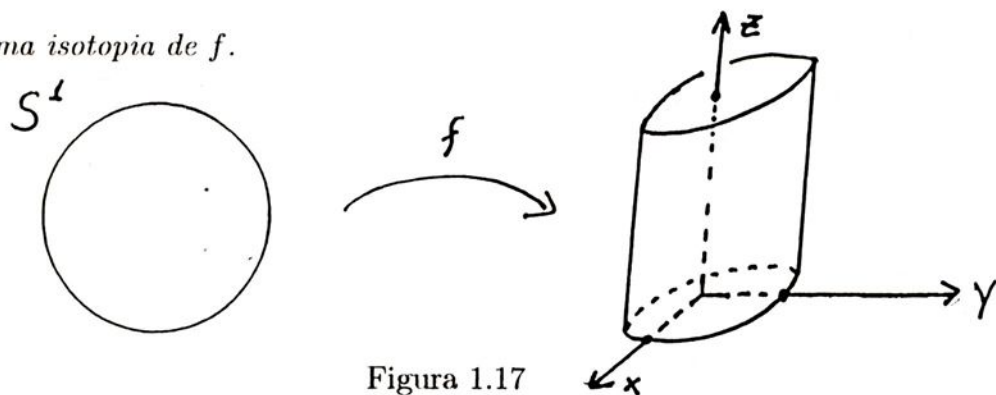


Figura 1.17

Definição 1.3.3 Dizemos que $h : \mathbb{R} \times M \rightarrow N$ é uma isotopia técnica entre h_0 e h_1 se:

- $$\begin{cases} a) h_t : M \rightarrow N \text{ dada por } h_t(x) = h(t, x) \text{ é um mergulho para todo } t \\ b) h_t(x) = h_0(x), \text{ para } t \leq -\epsilon \\ c) h_t(x) = h_1(x), \text{ para } t \geq 1 + \epsilon \end{cases}$$

Observe que toda isotopia pode ser modificada para uma isotopia técnica.

Definição 1.3.4 Uma difeotopia de N é uma aplicação $H : [0, 1] \times N \rightarrow N$, tal que $H_t : N \rightarrow N$ é um difeomorfismo para todo t e $H_0 = Id_N$.

Se $f : M \rightarrow N$ é um mergulho e $H : [0, 1] \times N \rightarrow N$ é uma difeotopia então $h_t = H_t \circ f$ é uma isotopia de f .

Uma isotopia $h : [0, 1] \times M \rightarrow N$ se diz diferenciavelmente imersível em uma difeotopia quando existe uma difeotopia H de N tal que $h_t = H_t \circ h_0$ para todo $t \in [0, 1]$, e neste caso dizemos que h_0 e h_1 são defeotópicas.

Definição 1.3.5 *Dois mergulhos $h_0, h_1 : M \rightarrow N$ são equivalentes, se existe um difeomorfismo D de N , tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ h_1 \downarrow & \searrow h_0 & \\ N & \xrightarrow{D} & N \end{array}$$

Note que se h_0 e h_1 são difeotópicas então elas também são equivalentes.

Teorema 1.3.6 (R. Thom - 1957) ([Br], pag)

Se h é uma isotopia de mergulhos de M em N que mantém fixos todos pontos fora de um compacto $M_0 \subset M$, pode-se imergir difeomorficamente h em uma difeotopia e, em particular, existe uma difeotopia que deixa fixo todos os pontos fora de um subconjunto compacto $N_0 \subset N$.

1.4 O Grupo Nó e o Polinômio de Alexander

O objetivo desta seção é introduzir, para um nó (de dimensão 1), um invariante na forma de um polinômio com coeficientes inteiros e dar um algoritmo simples para sua construção. Primeiramente faremos o estudo para nós de dimensão 1 e servirá de pré-requisito para o caso de nós de dimensão 2 que será desenvolvido no último capítulo. Lá mostraremos, através de um exemplo, que o teorema principal de nosso trabalho não pode ser melhorado. O polinômio de Alexander desempenha, neste exemplo, um papel fundamental.

Definição 1.4.1 Um nó (de dimensão 1) é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a S^1 .

Exemplo 1.4.2 Daremos aqui alguns exemplos graficamente.

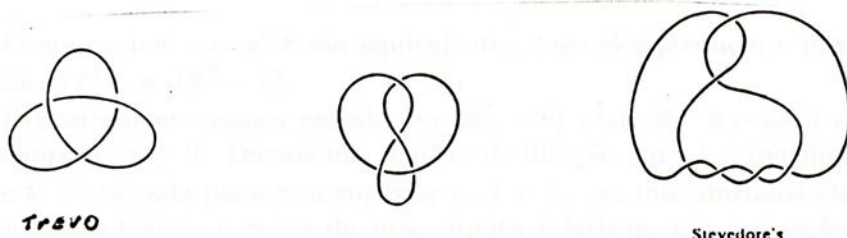


Figura 1.18

Dizemos que dois nós, k_1 e k_2 , são equivalentes se existir um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(k_1) = k_2$.

Como nosso maior interesse é obter o polinômio de Alexander para um nó k devemos, primeiramente, calcular o grupo nó G que é o grupo fundamental do complementar de k no $\mathbb{R}^3$, isto é, $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 - k)$. Para isso, devemos proceder da seguinte forma:

Consideremos o nó, sem perda de generalidade podemos considerar sua projeção no plano $z = 0$. Relativamente, a esta projeção, dividiremos o nó em passagem superior e passagem inferior, assim como mostra a figura abaixo:



Figura 1.19

Quando ocorrem duas passagens superiores (inferiores) consecutivamente, por conveniência introduzimos uma passagem inferior (superior) entre elas, como mostra o exemplo do nó *square*.

Substituímos cada passagem inferior por sua projeção no plano $z = 0$ unido com

as retas que ligam os extremos da projeção da parte inferior. Com esta construção obtemos um novo nó que denotaremos por k .

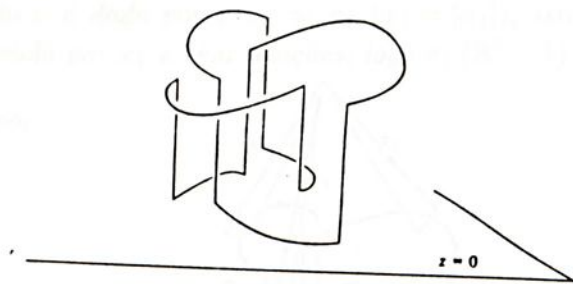


Figura 1.20

O nó original e o nó k são equivalentes, logo eles possuem o mesmo grupo nó. Calculemos, então o $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 - k)$.

Primeiramente vamos calcular $\pi_1(\mathbb{R}^3_+ - k)$ onde $\mathbb{R}^3_+$ é o semi espaço fechado definido pela inequação $z \geq 0$. Damos um sentido de direção para k e escolhemos um ponto base p acima de k . Para cada passagem superior s_i , $i = 1, \dots, n$, introduzimos um laço baseado em p cuja orientação obedece a regra da mão direita relativamente à direção da passagem superior. Chamemos esses laços de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

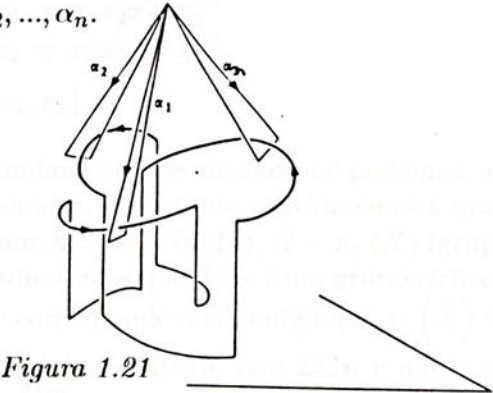


Figura 1.21

Seja $x_i \in \pi_1(\mathbb{R}^3_+ - k)$ tal que $x_i = [\alpha_i]$. Assim temos por ([Ar], pag), que $\pi_1(\mathbb{R}^3_+ - k)$ é o grupo livre gerado por $x_1, x_2, \dots, x_n$, com as relações $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ que são obtidas de maneira construtiva; as quais ficarão mais claras com os dois exemplos que daremos a seguir.

Exemplo 1.4.3 O nó trivial:

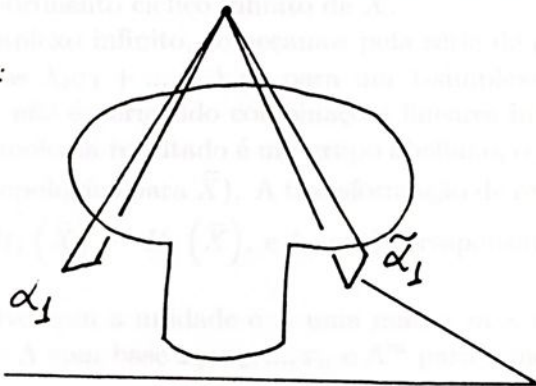


Figura 1.22

Existe uma única passagem superior $\alpha_i = \hat{\alpha}$, $\alpha_{i+1} = \tilde{\alpha}$, onde $\hat{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são homotópicos a α_1 . A relação r é dada por : $x_1 = x_1$ ($x_1 = [\alpha_1]$), isto é, não existe relação. Portanto, $\pi_1(\mathbb{R}^3 - k)$ é gerado por x_1 e sem relações; logo $\pi_1(\mathbb{R}^3 - k) = \{x_1 : x_1 = x_1\} \cong \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.4.4 O nó trevo:

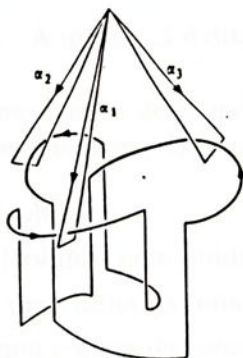


Figura 1.23

Temos três passagens inferiores; e para estas três passagens inferiores temos três relações:
$$\begin{cases} r_1 \text{ é dada por: } x_3x_1 = x_2x_3 \Rightarrow x_3x_1x_3^{-1}x_2^{-1} \\ r_2 \text{ é dada por: } x_1x_2 = x_3x_1 \Rightarrow x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1} \\ r_3 \text{ é dada por: } x_2x_3 = x_1x_2 \Rightarrow x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1} \end{cases}$$
 Assim $G = \{x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2, r_3\}$

Visto como podemos calcular o grupo fundamental de um certo nó podemos, então, passar ao estudo para o cálculo do polinômio de Alexander. Para tanto consideremos k um nó, engrosse k levemente para a forma de um tubo T . Sejam $X = \mathbb{R}^3 - \text{int}(k)$, $G = \pi_1(X)$ (grupo fundamental de X) e G' o subgrupo comutador de G , assim temos que G/G' é um grupo cíclico infinito. Se $\tilde{X}$ denota o espaço de recobrimento de X que corresponde a G' , então que $\pi_1(\tilde{X}) \cong G'$. Sabemos que a existência de $\tilde{X}$ é assegurada por ([Ar]; teo 10.19, pag 232); e ainda por ([Ar]; Teor 10.18, pag 231) temos que $\pi_1(\tilde{X})/\pi_*(\pi_1(\tilde{X})) \cong \mathbb{Z}$.

Portanto, $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}))$ é o subgrupo comutador de G' para G . Considerando o epimorfismo natural de $\pi_1(X)/G'$ em $\pi_1(X)/\pi_*(\pi_1(\tilde{X}))$, como seu kernel é $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}))/G'$ temos que $\pi_*(\pi_1(\tilde{X})) = G'$. Logo $\tilde{X}$ é o espaço de recobrimento cíclico infinito de X .

Considere $\tilde{X}$ como um complexo infinito, começamos pela série de grupos cujos elementos são combinações lineares finitas $\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_s\sigma_s$ para um 1-simplexo orientado de $\tilde{X}$ com coeficientes inteiros. Note que não é permitido combinações lineares infinitas para nenhum 1-simplexo de $\tilde{X}$. O grupo de homologia resultado é um grupo abeliano, o qual será denotado por $H_1(\tilde{X})$ (que é um invariante topológico para $\tilde{X}$). A transformação de recobrimento $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ induz um automorfismo $h_* : H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X})$, e h_* será o responsável para a obtenção do nosso polinômio desejado.

Sejam Λ um anél comutativo com a unidade e A uma matriz $m \times n$, com entradas em Λ . Denote Λ^n para o módulo livre Λ com base $x_1, x_2, \dots, x_n$ e Λ^m para o módulo livre Λ com base

$y_1, y_2, \dots, y_m$. Agora tome $f : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ um homomorfismo de Λ módulos determinado por A , isto é:

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} y_j$$

e defina o módulo quociente $M = \Lambda^m / f(\Lambda^n)$. A matriz A é dita um representante matricial para o módulo M .

Duas matrizes A, B nos fornecem isomorfismos de Λ módulos sobre esta construção se, e somente se, é possível converter A em B por uma sequência de operações do tipo:

- 1) Permutando duas linhas (colunas);
- 2) Multiplicando uma linha (coluna) pela unidade de Λ ;
- 3) Somando um múltiplo de uma linha (coluna) a outra linha (coluna);
- 4) Colocando ou retirando uma coluna de zeros;
- 5) Permutando A com $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou vice versa.

Assim, se A é uma matriz quadrada seu determinante é um isomorfismo invariante para o módulo M .

Considere Λ o anél $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ dos polinômios de Laurent finitos, com coeficientes inteiros

$$p(t) = c_{-w} t^{-w} + \dots + c_l t^{-l}$$

Então, definindo o produto de um polinômio $p(t) \in \Lambda$ por uma classe de homologia $[z] \in H_1(\tilde{X})$ por $p(t)[z] = c_{-w} h_*^{-w}[z] + \dots + c_l h_*^l[z]$, tem-se que h_* leva a $H_1(\tilde{X})$ sobre o módulo Λ .

É possível interpretar $H_1(\tilde{X})$ em termos do grupo nó G de k , como foi visto no início desta seção. Lembrando que $\tilde{X}$ tem como grupo fundamental G' , e tomando G'' como o subgrupo comutador de G' , temos $H_1(\tilde{X}) \cong^{G'} G'/G''$ e com isso o monomorfismo $\pi_* : \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X)$ induz um isomorfismo $\pi_{**} : H_1(\tilde{X}) \rightarrow^{G'} G'/G''$. Se $u \in^{G'} G'/G''$ corresponde (via π_{**}) à classe de homologia $[z]$, então G'/G'' torna-se um Λ módulo via $p(t)u = \pi_{**}(p(t)[z])$.

Veja o que ocorre tomando o polinômio $p(t) = t$ como exemplo.

$$tu = \pi_{**}(t[z]) = \pi_{**}h_*[z]$$

Escolha um ponto base p e seja q seu correspondente em $\tilde{X}$, represente $[z]$ pelo laço α com base em $q \in \tilde{X}$. Então, $h_*[z]$ é representado pelo laço $\gamma(h \circ \alpha)\gamma^{-1}$ onde γ é um caminho ligando q a $h(q)$ em $\tilde{X}$. Isto significa que se $u = gG'' \in^{G'} G'/G''$ e se x denota o elemento de $G = \pi_1(X, p)$ determinado pelo laço $\pi \circ \gamma$,

$$tu = xgx^{-1}G''$$

A representação de G é dada por $\{x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_n\}$, já que existe um gerador para cada passagem superior e uma relação para cada cruzamento; na qual uma típica relação tem a forma $x_w x_i x_w^{-1} x_{i+1}^{-1}$ e a última relação pode ser omitida por ser consequência das demais. Quando G

é abelianizado, todo x_i torna-se igual e resulta um gerador para $\mathbb{Z}$, como se fosse escolhido um novo conjunto de geradores

$$x = x_n, \alpha_1 = x_1 x^{-1}, \dots, \alpha_{n-1} = x_{n-1} x^{-1}$$

no qual todos os α_j ficam em G' . E mais, todas as conjugações sobre potências de x geram G' .

Escreva $u_i = \alpha_i G''$ e R_i a relação sobre u_i dada por r_i . Os $u_{i's}$ geram G'/G'' como um módulo sobre Λ e para encontrar uma representação matricial, tome cada R_i como uma combinação linear dos $u_{i's}$, com coeficientes em Λ e, então, use os coeficientes de cada R_i como a i -ésima coluna para obter a matriz. Por definição, o determinante da matriz resultado $(n-1) \times (n-1)$, desprezando a última linha e a última coluna, é o Polinômio de Alexander para o nó k .

Tome os exemplos

1) O nó trivial S^1

Como já foi observado o grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 - S^1$ é dado por

$$G = \{x_1 : x_1 x_1^{-1}\} \cong \mathbb{Z}$$

A relação $x_1 x_1$ escrita em termos de α_1 é dada por

$$\alpha_1 x \alpha_1^{-1} x^{-1}$$

passando em termos dos $u_{i's}$, resulta

$$1.$$

Portanto a matriz resultante é $(1)_{1 \times 1}$, cujo determinante é 1. Assim, o polinômio de Alexander para S^1 é $p(t) = 1$.

Como o polinômio de Alexander é um invariante topológico, todo nó cujo polinômio de Alexander $p(t)$ é constante será o nó trivial

2) O nó Trevo, cuja representação do Grupo Nó, como foi visto, é:

$$G = \{x_1, x_2, x_3 : x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1}, x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} \text{ e } x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1}\}$$

A relação $x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1}$, escrita em termos de α_i é dada por:

$$\alpha_1 x \alpha_2 x x^{-1} \alpha_1^{-1} x^{-1} \alpha_3^{-1}$$

ou equivalente (por G ser abeliano);

$$\alpha_1 x \alpha_2 x^{-1} x \alpha_1^{-1} x^{-1} \alpha_3^{-1}$$

passando em termos dos $u_{i's}$ temos

$$(1-t)u_1 + tu_2 - u_3$$

Analogamente a segunda e terceira relação corresponde, respectivamente, a

$$-u_1 + (1-t)u_2 + tu_3$$

$$tu_1 - u_2 + (1-t)u_3$$

Assim teremos a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & 1-t & -1 \\ -1 & t & 1-t \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

tomando a matriz resultado 2×2 temos

$$\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

cujo determinate é $t^2 - t + 1$.

Portanto, o polinômio de Alexander para o nó Trevo é :

$$p(t) = t^2 - t + 1$$

Observação 1.4.5 (Método Prático) Existe um método prático para o cálculo do polinômio de Alexander para um nó k . Oriente o nó e denote as passagens superiores por $x_1, x_2, \dots, x_n$. Construa uma matriz $B_{n \times n}$ que tenha uma coluna para cada cruzamento; as entradas não nulas correspondem a um cruzamento, e são dadas olhando a figura:

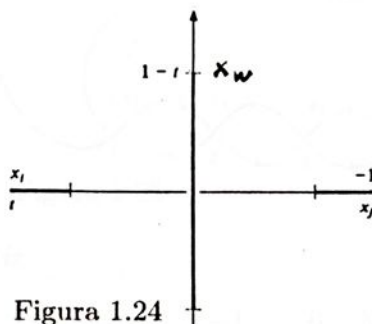


Figura 1.24

e teremos $\begin{cases} 1-t, & \text{na passagem } w \\ t, & \text{na passagem } i \\ -1, & \text{na passagem } j \end{cases}$

Note que somente temos que acomodar a direção de x_w e observar x_i a esquerda e x_j a direita. O determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$, obtida exclusão da última linha e da última coluna de B nos dá o polinômio de Alexander para k .

Vejamos dois exemplos para o cálculo do polinômio de Alexander usando esse método prático.

Exemplo 1) O nó Trevo

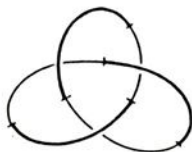


Figura 1.25

Observando a Figura 4.8 temos a matriz B dada por;

$$\begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & 1-t & -1 \\ -1 & t & 1-t \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Daí, teremos a matriz 2×2 dada por:

$$\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

cujo determinante é : $t^2 - t + 1$. Portanto o Polinômio de Alexander do nó Trevo é : $p(t) = t^2 - t + 1$.

Exemplo 2) O nó Steverode's

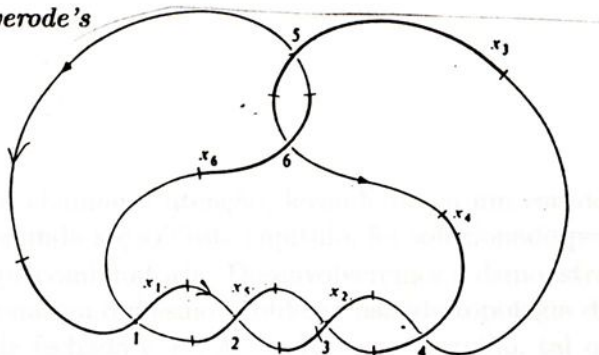


Figura 1.26

Observando a Figura 4.9 teremos a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1-t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & t \\ 0 & 0 & -1 & 1-t & 0 & -1 \\ -1 & 1-t & t & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

e trabalhando com a matriz 5×5 teremos que seu determinante é $2t^2 - 5t + 2$, que vem a ser o polinômio de Alexander para este nó.

Capítulo 2

Equivalência de Superfícies 2-Dimensionais no $\mathbb{R}^4$

2.1 O Problema

Enunciaremos aqui o problema que nos chamou a atenção, levando-nos a um estudo para dimensão $n = 2$ que, como veremos na segunda seção deste capítulo, foi solucionado por Schallermann por um ponto de vista da topologia combinatória. Desenvolveremos a demonstração dada por Ruas, Carrara e Saekyi, que solucionaram o mesmo problema usando topologia diferencial.

"Sejam $M^2 \subset \mathbb{R}^4$ uma subvariedade fechada e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho, tal que $p \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de Morse com no máximo 4 pontos críticos, no qual $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma projeção. Então o mergulho f é padrão."

Para uma melhor compreensão do problema, façamos um estudo sobre seu enunciado.

Definição 2.1.1 *Dois mergulhos $f, g : M^m \rightarrow N^n$ são equivalentes se e somente se existe um difeomorfismo $D : N \rightarrow N$ tal que $D \circ f = g$, isto é, o diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ g & \searrow & \downarrow \exists D \\ & & N \end{array}$$

Se f e g são dois mergulhos equivalentes escrevemos $f \sim_D g$. Note que a relação $\sim_D$ é uma relação de equivalência, pois:

Dados mergulhos $f, g : M \rightarrow N$, temos:

- 1) $f \sim_D f$ para o difeomorfismo $D = Id_N$
- 2) Se $f \sim_D g$ então tome $D^{-1} : N \rightarrow N$ e com isso temos $g \sim_{D^{-1}} f$
- 3) Se $f \sim_{D_1} g$ e $g \sim_{D_2} h$ então tome $D = D_2 \circ D_1$ e temos $f \sim_D h$.

Definição 2.1.2 *Um mergulho $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é dito padrão se f é equivalente a inclusão trivial de M em $\mathbb{R}^{n+2}$.*

Exemplo 2.1.3 *Seja $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho e considere a inclusão $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $i(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$. Assim, f será padrão se existir um difeomorfismo $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $D(f(S^1)) = i(S^1)$*



2 Considerando o exemplo 2.1.3, a inclusão i e a projeção p no eixo Oz , e ainda o mergulho f dado geometricamente por:

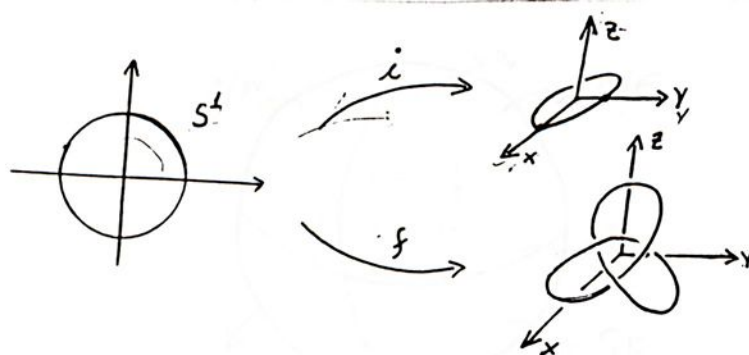


Figura 2.1

Temos $p \circ f$ uma função de Morse com 4 pontos críticos; porém, não existe difeomorfismo $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $D(f(S^1)) = i(S^1)$. Logo, f não é padrão. Com isso, note que no problema para $n = 1$ o resultado é falso pois trata-se do problema principal da clássica teoria dos nós.

O objetivo deste trabalho é mostrar a validade do problema para $M = S^2$, usando topologia diferencial como principal instrumento e, assim, ter uma visão diferente daquela dada por Martin Schalermann, que em 1985, publica o trabalho "Smooth spheres in $\mathbb{R}^4$ with four points are standard", dando a prova do resultado ($M = S^2$) através de combinatória e de uma "pesada" teoria de grafos, prova esta que será descrita abaixo a título de comparação.

2.2 Um Esboço da Solução de Martin Schalermann para $M = S^2$

Considere a bola B^3 no $\mathbb{R}^4$ e divida-a em 4 quadrantes (NE, NW, SE, SW) por dois discos D_v e D_h de dimensão 2.

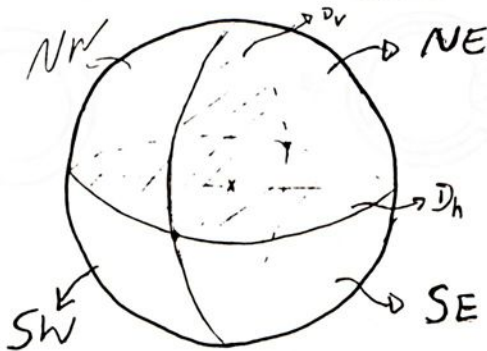


Figura 2.2

Seja N^3 uma variedade obtida pela ligação de duas alças $C = D^2 \times [0, 1]$ em B^3 , uma ligando NW a SW e a outra NE a SE, onde as alças ligam pontos no bordo de um disco $D_\perp$ em B^3 sendo $D_\perp$ perpendicular tanto a D_v como a D_h

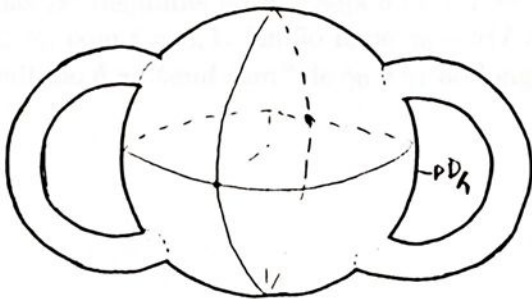


Figura 2.3

Note que $D_\perp$ divide B^3 em 2 hemisférios. Tome A_m uma família de curvas fechadas simples no ∂N , constituída de m círculos $a_1, \dots, a_m$ paralelos a ∂D_v ; e B_n uma família de curvas fechadas simples no ∂N , constituído de n círculos $b_1, \dots, b_n$ paralelos ao ∂D_h , mais um círculo simples b_0 que passa por cada uma das alças C .



Figura 2.4

As provas dos resultados abaixo encontram-se em [Sc].

Teorema 2.2.1 [Sc]

Suponha que N está mergulhada na variedade orientável M^3 , de modo que alguma A_m (m ímpar) e alguma B_n limitam superfícies planas P, Q em $\overline{M - N}$. Então, A_1 e B_0 limitam discos em $M - N$ cuja interseção são arcos singulares.

Na demonstração deste teorema Schalermann usa os recursos de combinatória e teoria de grafos.

Definiremos, agora, a soma entre 2 nós, a qual chamar-se-á "band sum". Para γ_0 e γ_1 nós em S^3 , definimos "band sum" entre γ_0 e γ_1 da seguinte forma:

Mergulhe γ_0 e γ_1 em duas bolas B^3 disjuntas no S^3 . Seja $b : I \times I \rightarrow S^3$ um mergulho tal que $b(I \times \{i\}) \neq \gamma_i$ e $b(I \times \{i\}) \subset \gamma_i$, com $i = 0, 1$. Então ligue $\gamma_0 - b(I \times \{0\})$ a $\gamma_1 - b(I \times \{1\})$ pelo arco $b(\partial I \times I)$. O nó resultado é a "band sum" de γ_0 e γ_1 ao longo de b o qual denotamos por $\gamma_0 \#_b \gamma_1$.

Corolário 2.2.5 [ref]

Se $f : S^2 \rightarrow S^2$ é um mergulho, $f^* \omega$ é uma 1-forma fechada e $\int_{S^2} f^* \omega = 0$, então f é homotópica a uma função constante.

A demonstração deste corolário utiliza o Teorema 2.2.3 e o Teorema 2.2.4.

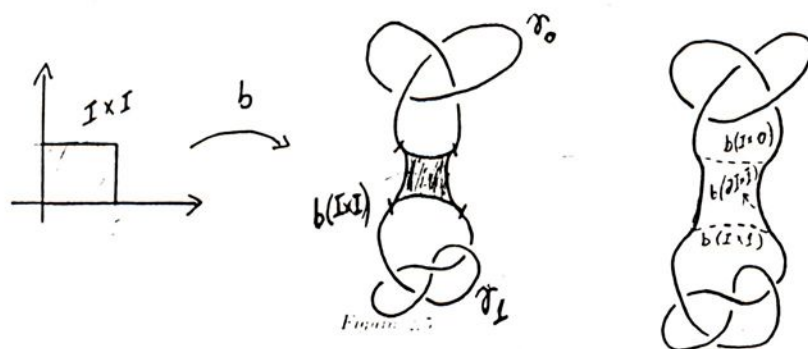


Figura 2.5

A princípio, podemos achar que a definição desta soma é excessiva, pois temos a "band sum" entre 2 nós como um caso particular de soma conexa de pares, na qual as variedades são esferas, definida em ([Rol]; pag 40)

Contudo, vemos que a soma conexa entre 2 nós é uma operação não bem definida, uma vez que ela depende da escolha das bolas em que a conexão é feita e talvez até a escolha do homomorfismo. O que pode ser visto concretamente em ([Rol]; pag 61) com o nó quadrado e o nó granny.

Teorema 2.2.2 [Sc]

Suponha γ_0 e γ_1 são nós na S^3 e uma "band sum" de γ_0 e γ_1 produz o nó trivial; então, γ_0 e γ_1 são nós triviais e a "band sum" é justamente a soma conexa.

Observe que a demonstração deste teorema é dada a partir do Teorema 2.2.3.

Um par de variedades (M, N) é formado por uma variedade M juntamente com uma sub-variedade N de M . Uma função entre pares $f : (M, N) \rightarrow (P, Q)$ é uma função $f : M \rightarrow P$ tal que $f(N) \subset Q$. A variedade (M, n) é dita uma (m, n) -variedade par (ou dupla) denotada por (M^m, N^n) ou $M^{m,n}$; e ainda dizemos que uma variedade par (M^m, N^n) é própria se $N^n \cap \partial M^m = \partial N^n$.

Dizemos que a variedade par própria é localmente plana se, cada ponto $p \in M^m$, existe uma vizinhança em (M^m, N^n) homeomorficamente, como um par, com um conjunto aberto em $(\mathbb{R}_+^m, \mathbb{R}_+^n \times \{0\})$ para $n < m$.

Definição 2.2.3 Uma imagem localmente plana de um mergulho $f : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (D^4, \partial D^4)$ é um disco "ribbon" se existe uma função raio $r : D^4 \rightarrow [0, 1]$ tal que $r \circ f$ tem mínimo mas não tem máximo.

Corolário 2.2.4 [ref]

Se $f : (D^2, \partial D^2) \hookrightarrow (D^4, \partial D^4)$ é um disco "ribbon" com dois mínimos e $f(\partial D^2)$ é o nó trivial então f é uma função sem nó.

Corolário 2.2.5 [ref]

Se $f : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ é um mergulho C^∞ e para alguma projeção $r : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, a função $r \circ f$ tem 4 pontos críticos então f é isotópica ao mergulho padrão.

A demonstração dos dois corolários acima encontra-se em [Sc], sendo que o último nos dá a resolução do problema para $n = 2$.

Mergulho 'Padrão' de Superfícies no $\mathbb{R}^4$

3.1 O Teorema Principal

Daremos, aqui, a formulação do Teorema Principal de Alexander sobre a isotopia de mergulhos e o algoritmo natural dos cálculos.

Teorema 3.1.1 (Principal) Seja $Y = \bigcup_{i=1}^k Y_i$ um conjunto de variedades compactas M_i tal que $\pi_i \circ f : M_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função convexa para mergulhos $f : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ e $\pi_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função de Morse com no máximo 4 pontos críticos. Se $\pi_i \circ f : M_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma projeção ortogonal, então M_i é difeomorfo a esfera S^2 , a sendo difeomorfo a uma S^2 e um $Torus$ ou a uma $Clifford$ de S^1 e S^1 . Se as variedades f e g são isotópicas em $\mathbb{R}^4$ então f é isotópica ao mergulho padrão.

Além disso segue:

- 1) Se M é difeomorfo a S^2 então $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem no $\mathbb{R}^2$ no máximo 4 pontos críticos.
 - 2) Se M é difeomorfo a $Torus$ então $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem no $\mathbb{R}^2$ no máximo 4 pontos críticos.
 - 3) Se M é difeomorfo a $Clifford$ então $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem no $\mathbb{R}^2$ no máximo 4 pontos críticos.
 - 4) Se M é difeomorfo a S^2 então $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem no $\mathbb{R}^2$ no máximo 4 pontos críticos.
- Assim, se f e g são isotópicas em $\mathbb{R}^4$, então f e g são isotópicas em $\mathbb{R}^4$ para f e g isotópicas em $\mathbb{R}^4$.

3.2 Um Lema de Alither

Como visto, a teoria clássica das variedades feitas por Mather, sobre projeções, mergulhos e isotopia de variedades de dimensão par nos dá uma maneira de resolver o problema de isotopia de variedades de dimensão par.

Seja Y um conjunto de variedades de um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e Y um conjunto de variedades de dimensão par. Se Y é um conjunto de variedades de dimensão par e Y é um conjunto de variedades de dimensão par, então Y é um conjunto de variedades de dimensão par.

Capítulo 3

Mergulho ' Padrão ' de Superfícies no $\mathbb{R}^4$

3.1 O Teorema Principal

Daremos, aqui, o enunciado do teorema que resolve o problema para $n = 2$, cuja demonstração é o objetivo central desse trabalho.

Teorema 3.1.1 (Principal) *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho da superfície compacta M tal que $\pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função estável sem cúspides e $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com no máximo 4 pontos críticos; onde $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são projeções ortogonais. Então, M é difeomorfa a esfera S^2 , a união disjunta de duas S^2 , a um Toro ou a uma Garrafa de Klein; e, ainda, o mergulho f é trivial (isto é, f é isotópica ao mergulho padrão).*

Além disso temos:

- 1) Se M é difeomorfa a S^2 , então $f(S^2)$ limita um D^3 no $\mathbb{R}^4$.
- 2) Se M é difeomorfa a união disjunta de duas S^2 , então $f(M)$ limita dois discos disjuntos em $\mathbb{R}^4$.
- 3) Se M é difeomorfa ao Toro, então $f(M)$ limita um Toro sólido no $\mathbb{R}^4$.
- 4) Se M é difeomorfa a Garrafa de Klein, então $f(M)$ limita uma Garrafa de Klein sólida no $\mathbb{R}^4$.

Veremos que a hipótese de $\pi_1 \circ f$ não possui cúspides é fundamental na prova das partes 1), 2) e 4).

3.2 Um Lema de Mather

Nesta seção veremos algumas das considerações feitas por Mather, sobre projeções, encerrando-a com a demonstração de um lema que nos garante a existência das projeções mencionadas nas hipóteses da teorema principal.

Seja X uma subvariedade diferenciável de um espaço vetorial real V , e Y um segundo espaço vetorial real de dimensão finita, com $\dim Y < \dim V$. Assim, uma projeção de X em Y será a restrição a X de uma função linear sobrejetiva de V em Y .



Considerando alguns resultados de Mather ([Ma1], e as referências lá contidas) sobre projeções, vamos observar algumas propriedades de uma projeção genérica (no sentido de genericidade visto no capítulo 01) para alguns casos especiais. Tome a projeção $p : X \rightarrow Y$.

- 1) Se $Y = \mathbb{R}$, então p é uma função de Morse.
- 2) Se $\dim X = \dim Y = 2$, então p é uma função excelente.
- 3) Se $\dim X = 2$ e $\dim Y = 3$, então as únicas singularidades da imagem são interseções normais e "pontos de pressão" ("pinch points").
- 4) Uma projeção $p : X \rightarrow Y$ é transversal a imagem.
- 5) Se $(\dim X, \dim Y)$ estão na "região boa" (ou "nice region") de dimensões, p é localmente infinitesimalmente estável.

No caso em que X é compacto então p é estável.

Sabemos que uma função f entre variedades de dimensão finita é estável se para toda aproximação g , de f , existe um difeomorfismo no espaço das funções, tal que $H(f) = g$; isto é, g e f são equivalentes. Contudo encontramos funções que não são estáveis, mas satisfazem o critério de estabilidade local.

Como estamos estudando projeções de uma subvariedade qualquer em espaços vetoriais reais, não podemos dizer que esta subvariedade é compacta. Assim, uma forma de garantir um a compacidade local é estudarmos as funções próprias (uma função é própria se e somente se dado K compacto temos $f^{-1}(K)$ compacto); observando que isto não prejudicará nossos estudos uma vez que para uma função ser estável ou não depende unicamente de suas propriedades locais, e aqui trabalhamos com superfícies.

Mather provou, em [Ma2], que o conjunto das funções estáveis de N^k em P^l é denso no conjunto das funções próprias se, e somente se, $k < \sigma(k, l)$, onde σ é uma função de valores inteiros das duas variáveis $k = \dim N$ e $l = \dim P$ sobre $\mathbb{Z}_+$.

Para definirmos σ , a dividiremos em dois casos:

$$1) \ k \leq l \text{ temos } \sigma(k, l) = \begin{cases} 6(l - k) + 8 & \text{se } l - k \geq 4 \text{ e } k \geq 4 \\ 6(l - k) + 9 & \text{se } (0 \leq l - k \leq 3 \text{ e } k \geq 4) \text{ ou } k = 3 \\ 7(l - k) + 10 & \text{se } k = 2 \end{cases}$$

$$2) \ k > l \text{ temos } \sigma(k, l) = \begin{cases} 9 & \text{se } k = l + 1 \\ 8 & \text{se } k = l + 2 \\ k - l + 7 & \text{se } k \geq l + 3 \end{cases}$$

Assim, o conjunto das funções próprias estáveis é denso se e somente se o par (k, l) satisfaz uma das seguintes condições:

- 1) $k < \frac{6}{7}l + \frac{8}{7}$ e $l - k \geq 4$;
- 2) $k < \frac{6}{7}l + \frac{9}{7}$ e $0 \leq l - k \leq 3$;
- 3) $l < 8$ e $l - k = -1$;
- 4) $l < 6$ e $l - k = -2$;
- 5) $l < 7$ e $l - k \leq -3$.

Todo par de dimensões (l, k) , que satisfaz uma dessas condições, é chamado de "bom".

Na figura, a região hachurada corresponde a "região boa" de dimensões no plano.

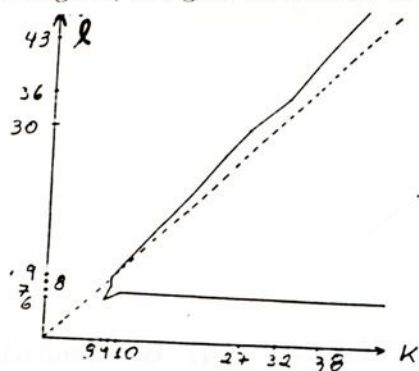


Figura 3.1

Lema 3.2.1 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ um mergulho da variedade fechada M^n , tal que $p \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com no máximo 4 pontos críticos, onde $p : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma projeção ortogonal. Então existem projeções $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi_1 \circ f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função estável e $\pi_2 \pi_1 = p$ (pertubando p se necessário).*

Demonstração:

Considere uma projeção $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, então o par de dimensão da projeção π_1 é $(n+2, n)$, e observando na Figura 3.1 a reta $l = 2$ está totalmente contida na região hachurada; logo temos $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma projeção cujo par de dimensões está contido na "região boa" de dimensões e pela consideração 5) feita por Mather (am [Ma1]), π_1 é localmente infinitesimalmente estável.

Tome $h : \pi_1|_{f(M)} : f(M) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (restrição de π_1 em $f(M)$) dada por $h(q) = \pi_1(f(p))$ com $p \in M$. Assim $h = \pi_1 \circ f$, e como M é compacta e f é um mergulho temos $f(M)$ é compacta.

Daí $\pi_1 \circ f$ é estável.

Podemos considerar p como a projeção na última coordenada e π_1 como a projeção nas 2 últimas coordenadas. Tomemos π_2 a projeção na última e, então, teremos $\pi_2 \circ \pi_1 = p$. ■

3.3 Alguns Resultados Importantes

Nesta seção, veremos cinco resultados que serão úteis na demonstração do teorema principal. Para iniciá-la faremos um breve estudo no conceito de vizinhança tubular, e para um estudo mais profundo veja [El].

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$, o segmento $[p, a] = \{p + t(a - p) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ é normal a M

em p se $p \in M$ e $v = a - p \in T_p M^\perp$.

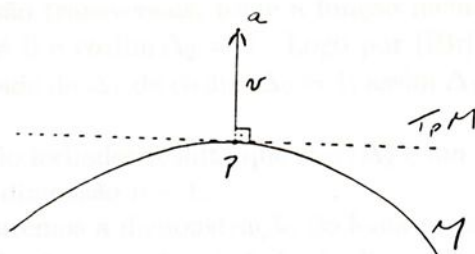


Figura 3.2

Definimos $B^\perp(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \text{ tal que } |x - p| < \epsilon \text{ e } \langle x - p, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in T_p M\}$; e denominamos $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ de raio normal admissível para um subconjunto $X \subset M$ se dados dois pontos $p \neq q$ e X temos $B^\perp(p, \epsilon) \cap B^\perp(q, \epsilon) = \emptyset$.

Teorema 3.3.1 *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície compacta de classe C^k ($k \geq 2$). Então*

- 1) $\exists \epsilon > 0$, que é raio admissível para M
- 2) $V_\epsilon(M) = \bigsqcup_{p \in M} B^\perp(p, \epsilon)$ é um aberto do $\mathbb{R}^{m+n}$.

3) $\pi : V_\epsilon(M) \rightarrow M$ que a cada $q \in V_\epsilon(M)$ associa a origem do único segmento normal que o contém, é de classe C^{k-1} .

A vizinhança tubular $V_\epsilon(M)$ é equivalente ao espaço produto $M \times B^n(\epsilon)$ se existir um difeomorfismo $h : M \times B^n \rightarrow V_\epsilon(M)$ que para cada $p \in M$, h é uma isometria da fibra $\pi_1^{-1}(p) = \{p\} \times B^n(\epsilon)$ sobre $\pi^{-1}(p) = B^\perp(p, \epsilon)$; e além disso h comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times B^n(\epsilon) & \xrightarrow{\exists h} & V_\epsilon(M) \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Sabemos também que se M é uma superfície compacta de classe C^∞ , as seguintes condições são equivalentes:

- 1) $M = f^{-1}(a)$ onde a é valor regular de uma aplicação de classe C^∞ , para $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com U aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$.
- 2) Existem, em M , n campos de vetores normais, de classe C^∞ , L.I. em todos os pontos.
- 3) Toda vizinhança tubular de M é equivalente a um produto.

Lema 3.3.2 *Seja $j : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ($n = 1, 2$) o mergulho padrão. Suponha que D_1 e D_2 são dois discos de dimensão n , mergulhados no $\mathbb{R}^{n+1}$, cujo bordo é $j(S^{n-1})$. Então D_1 e D_2 são isotópicos, por uma isotopia que fixa $\partial D_1 = j(S^{n-1}) = \partial D_2$.*

Demonstração:

Como $S^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$, mergulhe o $\mathbb{R}^{n+1}$ em S^{n+1} .

Sejam N uma vizinhança tubular de $j(S^{n-1})$ e $\Delta_i = D_i - \text{int}(N)$ para $n = 1, 2$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que:

- 1) $\partial \Delta_1 \cap \partial \Delta_2 = \emptyset$,
- 2) $D_1 \cap D_2 \cap N = j(S^{n-1})$ e
- 3) Δ_1 e Δ_2 são transversais

Como Δ_1 e Δ_2 são transversais, tome a função inclusão $i : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, então i é transversal a Δ_2 ; $i^{-1}(\Delta_2) \neq \emptyset$ e $\text{codim } \Delta_2 = 1$. Logo por ([Br], Proposição 5.12, pag 53) temos $i^{-1}(\Delta_2)$ é uma subvariedade de Δ_1 de $\text{codim } \Delta_2 = 1$; assim $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é uma subvariedade de dimensão $n - 1$.

Como Δ_1 e Δ_2 são fechados resulta que $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é um fechado; portanto $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é uma subvariedade fechada de dimensão $n - 1$.

Primeiramente faremos a demonstração do lema para $n = 1$.

Com isso $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é uma subvariedade de dimensão zero, logo $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é um número finito de pontos.

Associe a cada ponto da interseção de Δ_1 e Δ_2 o índice ± 1 , da seguinte forma: orientando Δ_i , de um extremo a outro, teremos os índices ± 1 associados a base formada pelas tangentes nestes pontos. Veremos que a soma de todos os índices será nula, a menos de uma possível deformação de D_1 .

Assim devemos considerar dois casos:

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$$

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$$

No primeiro caso, $D_1 \cup D_2$ é bordo de um disco Δ , de dimensão 2, mergulhado no $\mathbb{R}^2 = S^2 - \{\infty\}$; daí pelo Teorema de Schoenflies, existe um difeomorfismo h de $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}$ em Δ tal que $\{h(1, 0), h(-1, 0)\} = j(S^0)$, $h(\partial D_-^2) = D_1$ e $h(\partial D_+^2) = D_2$, onde $D_-^2 = \{(x, y) \in D^2 \text{ tal que } x, y < 0\}$ e $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 \text{ tal que } x, y > 0\}$. Tome a função $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D^2$ de forma que $F(0, I) = (-1, 0)$; $F(1, I) = (1, 0)$; $F(I, 0) = \partial D_-^2 - [0, 1]$ e $F(I, 1) = \partial D_+^2 - [0, 1]$

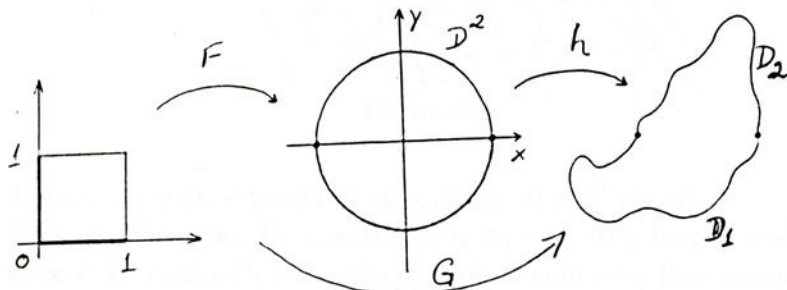


Figura 3.3

Agora defina $G : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $G(s, t) = h(F(s, t))$ com isso temos, para todo $(s, t) \in I \times I$:

$$G(0, t) = h(F(0, t)) = h(-1, 0)$$

$$G(1, t) = h(F(1, t)) = h(1, 0)$$

$$G(s, 0) = h(F(s, 0)) = h(\partial D_-^2) = D_1$$

$$G(s, 1) = h(F(s, 1)) = h(\partial D_+^2) = D_2$$

Assim, G é uma isotopia entre D_1 e D_2 que deixa fixo $\partial D_1 = j(S^0) = \partial D_2$.

Já no caso $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$, existem $x_1, x_2 \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, tal que entre eles não existe nenhum outro ponto de interseção e os índices de x_1 e x_2 são distintos.

Tome $C = \{x_1, x_2\}$ e denote por G_i o arco fechado em Δ_i , cujo bordo é C . Com isso $G_1 \cup G_2$ é um círculo mergulhado em S^2 e portanto $G_1 \cup G_2$ é bordo de dois discos B e B' em S^2 .

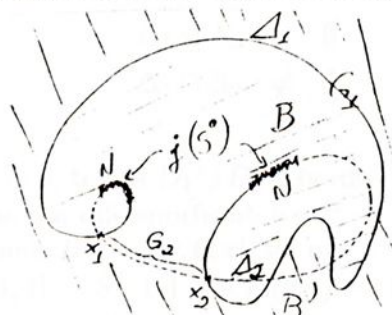


Figura 3.4

Escolha B , tal que $j(S^0) \subset B$ e denote $B \cap \Delta_1$ por Δ'_1 ; considere ainda, K o disco fechado dado por $A \cup G_2$, onde A é o fechado de $D_1 - G$, cujo bordo é $j(S^0) \cup C$, e podemos fazer K regular e pequeno em B' para obter um disco Δ_3 tal que $\Delta_3 \cap K = \partial D_1$



Figura 3.5

Então, $\Delta_3 \cup D_1$ é bordo de dois discos $\bar{B}$ e $\bar{B}'$ em S^2 .

Se $\infty \in \bar{B}'$; então, D_1 é isotópico a Δ_3 com ∂D_1 fixo, usando $\bar{B}$, caso contrário ($\infty \in B$) ou seja $\infty \in \bar{B}$, então D_1 e Δ_3 são isotópicos com ∂D_1 fixo, usando $\bar{B}'$.

Seguindo o mesmo raciocínio do primeiro caso, para os discos D_2 e Δ_3 temos que Δ_3 e D_2 são isotópicos com ∂D_2 fixo.

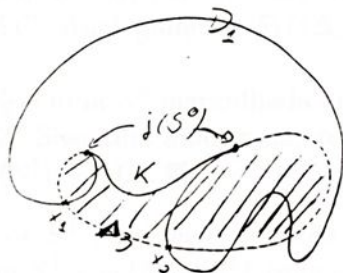


Figura 3.6

Portanto, teremos uma isotopia entre D_1 e D_2 que deixa fixo $\partial D_1 = j(S^0) = \partial D_2$.

Passemos ao caso $n = 2$.

Neste caso temos que $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é uma subvariedade de dimensão 2, logo $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é a união finita de curvas fechadas simples. Devemos considerar, como anteriormente, os casos

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$$

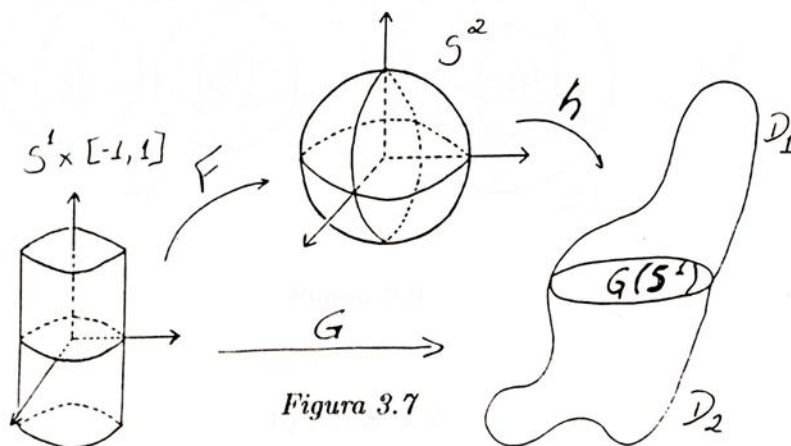
$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$$

Para $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, temos $D_1 \cup D_2$ é bordo de um disco D^3 em $S^3 - \{p\}$, e pelo Teorema de Schoenflies, existe um difeomorfismo $h : S^2 \rightarrow D_1 \cup D_2$ tal que $h(1, \theta, 0) = j(S^1)$; $h(H_+) = D_1$ e $h(H_-) = D_2$ onde $H_- = \{(r, \theta, z) \text{ tal que } z < 0\}$ e $H_+ = \{(r, \theta, z) \text{ tal que } z > 0\}$. Tome as funções $F : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow S^2$, tal que $F(\theta, t) = (1 - t^2, \theta, t)$; e $G : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $G(\theta, t) = h(F(\theta, t))$ e disto resulta:

$$G(\theta, 0) = h(1, \theta, 0) = j(S^1)$$

$$G(\theta, t > 0) = h(H_+) = D_1$$

$$G(\theta, t < 0) = h(H_-) = D_2$$



Assim, D_1 e D_2 são isotópicos pela isotopia G , que deixa fixo $\partial D_1 = j(S^1) = \partial D_2$.

Já no caso $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$, existe uma componente C (que é uma variedade no interior de $\Delta_1 \cap \Delta_2$ e portanto sem bordo) em $\Delta_1 \cap \Delta_2$ tal que $F_2 \cap \Delta_1 = C$, no qual F_2 é o disco fechado em Δ_2 cujo bordo é C . Analogamente $F_1 \cap \Delta_2 = C$, com F_1 sendo o disco fechado em Δ_1 cujo bordo é C .

Desde que $F_1 \cup F_2$ é uma S^2 mergulhada em S^3 temos que $F_1 \cup F_2$ é bordo de dois discos B e B' de dimensão 3. Seguindo analogamente ao caso $n = 1$, temos uma isotopia entre D_1 e D_2 que fixa $\partial D_1 = j(S^1) = \partial D_2$. ■

Lema 3.3.3 Seja $j_2 : S^1 + S^1 \rightarrow S^3$ o mergulho padrão de dois círculos disjuntos. Se S e S' são esferas S^2 mergulhadas em $S^3 - j_2(S^1 + S^1)$ cada qual separando duas componentes de $j_2(S^1 + S^1)$. Então, S e S' são isotópicas por uma isotopia que fixa $j_2(S^1 + S^1)$.

Demonstração:

Inicialmente consideremos o mergulho padrão de $S^1 + S^1$ graficamente por;

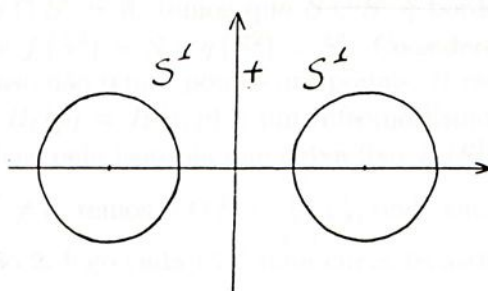


Figura 3.8

Podemos supor que toda situação da hipótese está contida em um único hemisfério de S^3 (suponhamos H_+), e mais, S e S' possuam interseção transversais e assim consideremos os casos:

$$a) S \cap S' = \emptyset$$

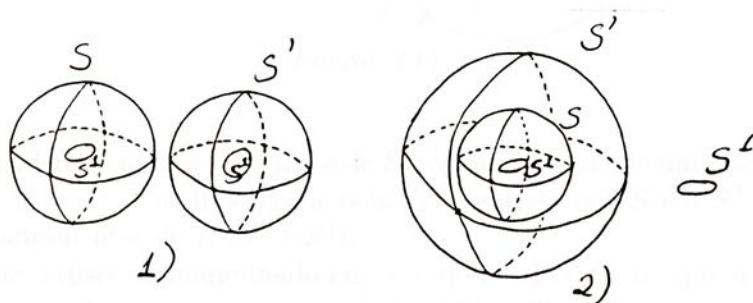


Figura 3.9

$$b) S \cap S' \neq \emptyset$$

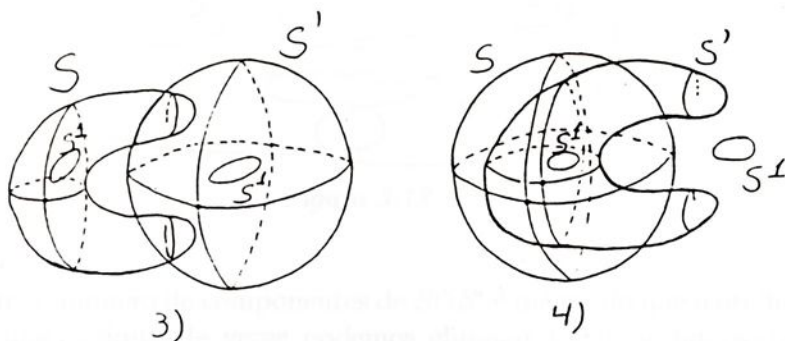


Figura 3.10

Observe que, como estamos trabalhando no $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, as figuras 1) , 2)

no caso a) e 3) , 4) no caso b) , na verdade representam uma só situação; já que no S^3 uma S^2 é bordo de dois discos D^3 .

No caso a) $S \cap S' = \emptyset$, temos que $S \cup S'$ é bordo de $S^2 \times [0, 1]$ mergulhado em $S^3 - j_2(S^1 + S^1)$ tal que $f(S^2) = S$ e $g(S^2) = S'$. Considere a função $H : S^2 \times [0, 1] \rightarrow S^3 - j_2(S^1 + S^1)$ dada por caso não temos pontos antipodais, H está bem definida, e $H_t : S^2 \rightarrow S^3 - j_2(S^1 + S^1)$ dada por $H_t(p) = H(t, p)$ é um difeomorfismo tal que $H_0 = f$ e $H_1 = g$, temos que S e S' são isotópicas pela isotopia que deixa fixo $j_2(S^1 + S^1)$.

Em b) $S \cap S' \neq \emptyset$, temos $S \cap S' = \bigcup_{i=1}^k C_i$, onde cada C_i é interseção transversal de subvariedades de dimensão 2, logo cada C_i é uma curva fechada simples

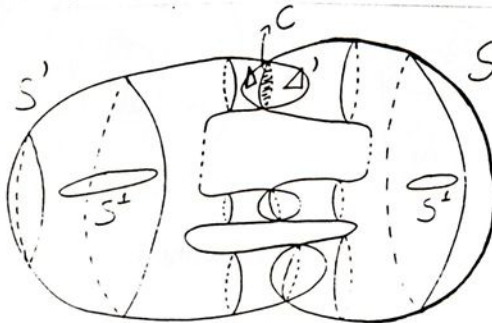


Figura 3.11

Considere C uma componente de $S \cap S'$ que é bordo de um disco Δ' de dimensão 2, em S' com $\Delta' \cap S = C$. Por hipótese a bola B^3 limitada por S em S^3 contém Δ' e não contém uma das componentes de $j_2(S^1 + S^1)$.

Tome o disco Δ mergulhado em S , cujo bordo é C , tal que a bola $B' \subset B$ seja limitada pela esfera $\Delta \cup \Delta'$, e com isso temos $B' \cap j_2(S^1 + S^1) = \emptyset$.

Dai temos uma isotopia entre S e S' de forma que no instante $t = 0$ temos a situação da Figura 3.11 e no instante $t = 1$ temos a seguinte situação:

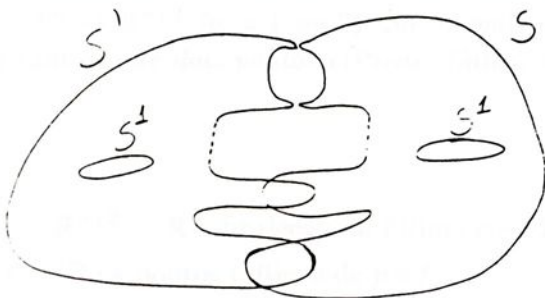


Figura 3.12

Assim, o número de componentes de $S \cap S'$ é menor do que o original. Repetindo este processo um número finito de vezes podemos eliminar todas as interseções e, ao final, (usando o caso a) $S \cap S' = \emptyset$) teremos uma isotopia entre S e S' que fixa $j_2(S^1 + S^1)$.

Observe que a isotopia que nos permite diminuir o número de componentes de $S \cap S'$, tem no seu instante $t = 1$ a troca de posição entre Δ e Δ' usando a bola B' . ■

Lema 3.3.4 *Seja $j_2 : S^1 + S^1 \rightarrow S^3$ o mergulho padrão de dois círculos disjuntos do Lema 3.3.3. Se $j_2(S^1 + S^1)$ é bordo de outro conjunto de dois discos disjuntos $D'_1 \cup D'_2$ em S^3 , então $D_1 \cup D_2$ e $D'_1 \cup D'_2$ são isotópicos por uma isotopia que fixa $\partial D_1 \cup \partial D_2 = j_2(S^1 + S^1) = \partial D'_1 \cup \partial D'_2$.*

Demonstração:

Considere S e S' duas esferas S^2 mergulhadas em S^3 tais que S separa as duas componentes de $D_1 \cup D_2$ e S' separa as duas componentes de $D'_1 \cup D'_2$. Pelo Lema 3.3.3 S e S' são isotópicas, então podemos considerar $S = S'$.

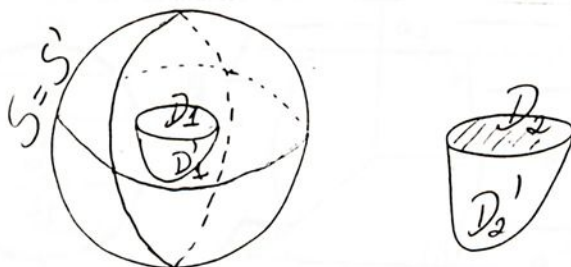


Figura 3.13

Considere $j_2|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^3 \supset \mathbb{R}^3$ e assim D_1 e D'_1 são discos de dimensão 2 limitados por $j_2(S^1)$, então pelo Lema 3.3.2, D_1 é isotópico a D'_1 por uma isotopia que fixa $\partial D_1 = j_2(S^1) = \partial D'_1$. Analogamente existe uma isotopia entre D_2 e D'_2 que fixa $\partial D_2 = j_2(S^1) = \partial D'_2$.

Com isso temos uma isotopia entre $D_1 \cup D_2$ e $D'_1 \cup D'_2$ que deixa fixo $\partial D_1 \cup \partial D_2 = j_2(S^1 + S^1) = \partial D'_1 \cup \partial D'_2$. ■

O resultado que segue é a chave para a demonstração do Teorema Principal, pois em sua demonstração veremos que, nas condições da hipótese, não pode surgir nenhum nó; deixando assim o mergulho padrão.

Proposição 3.3.5 *Seja $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ ($n = 1$ ou 2) um mergulho, tal que $p \circ f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com exatamente dois pontos críticos. Então, o mergulho f é padrão.*

Demonstração:

Considere:

$$\begin{aligned} p &: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R} \text{ a projeção na última coordenada.} \\ c_1, c_2 &\in S^n \text{ os pontos críticos de } p \circ f \\ a_1 &= p(f(c_1)) < p(f(c_2)) = a_2 \end{aligned}$$

Como $p \circ f$ é uma função de Morse, temos então que c_1 é ponto de mínimo e c_2 é de máximo. Dai $p \circ f(S^n) = [a_1, a_2]$, pois S^n é conexa.

Note que $Df(T_{c_i}S^1)$ pode ser identificado pela reta dada por $\begin{cases} z = a_i \\ x = 0 \end{cases}$ no $\mathbb{R}^3$; e $p^{-1}(a_i)$ é plano $z = a_i$, analogamente temos que $Df(T_{c_i}S^2)$ pode ser identificado com o plano

dado por $t = a_i$; e $p^{-1}(a_1)$ é o hiperplano no $\mathbb{R}^4$ na altura a_1 . Portanto $Df(T_{c_i}S^n) \subset p^{-1}(a_i)$ com $i = 1, 2$ e $n = 1$ ou 2 .

Agora tome V_i uma vizinhança de c_i e Δ_i um disco fechado em S^n tal que $c_i \in \text{int}\Delta_i \subset V_i$; logo como $Df(T_{c_i}S^n) \subset p^{-1}(a_i)$ podemos ter uma isotopia H de f cujo suporte está contido em V_i e que $p \circ f|_{S^2 - (\Delta_1 \cup \Delta_2)}$ não tem pontos críticos.

Tome $b \in]a_1, a_2[$, assim $p^{-1}(b)$ e $p^{-1}(a_1)$ são dois $(n + 1)$ -planos no $\mathbb{R}^{n+2}$. Dado $x \in g(\partial\Delta_1)$, sua imagem pelo campo de vetores normais a $p^{-1}(a_1)$ é $y \in p^{-1}(b) \cap g(S^n)$ logo $p^{-1}(b) \cap g(S^n)$ são dois nós isotópicos.

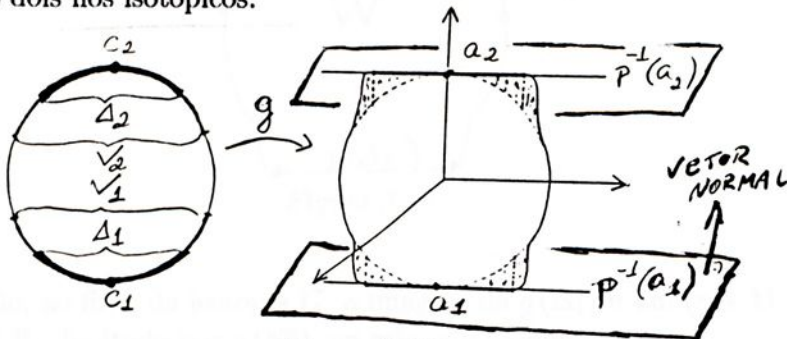


Figura 3.14

Podemos verificar isto geométicamente para o caso $n = 1$.

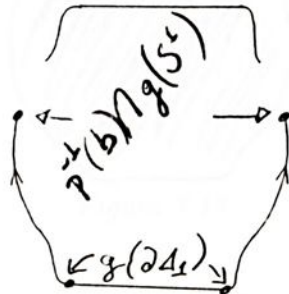


Figura 3.15

Considere a imagem de $g(\Delta_1)$ por essa isotopia:

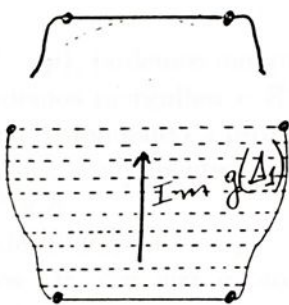


Figura 3.16

Tome W uma vizinhança de $g(\Delta_2)$, tal que $p^{-1}(b) \cap g(S^n) \subset W$, para todo

$b \in]a_1, a_2[$. Mas $p^{-1}(b) \cap g(S^n)$ é uma S^{n-1} mergulhada no $\mathbb{R}^{n+1}$ sendo bordo de dois discos D_1 e D_2 em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde D_i é a parte de $g(S^n)$ até a altura b , que contém a_1 . Assim usando o Lema 3.3.2 temos que existe uma isotopia G entre D_1 e D_2 , que fixa $\partial D_1 = p^{-1}(b) \cap g(S^n) = \partial D_2$. Portanto, a imagem de $g(\Delta_1)$ coincide com $g(\Delta_2)$ quando $b = a_2$.

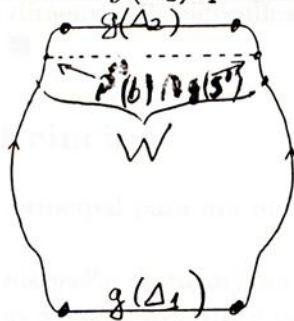


Figura 3.17

Então, ao final da isotopia G , a imagem de $g(\Delta_1)$ é um $(n+1)$ -disco B mergulhado em $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, limitado por $g(S^n)$, ou seja, g é padrão.



Figura 3.18

Como f é isotópica a g , resulta que f é padrão. ■

Proposição 3.3.6 *Seja $f : S^2 \cup S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho tal que $p \circ f$ é uma função de Morse com exatamente 2 pontos críticos em cada componente S^2 . Então o mergulho f é padrão.*

Demonstração:

Desde que $\mathbb{R}^3 = S^3 - \{p\}$, podemos mergulhar o $\mathbb{R}^3$ em S^3 , e consequentemente, considerando o $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, podemos mergulhar o $\mathbb{R}^4$ em $S^3 \times \mathbb{R}$. Desta forma considere $\pi : S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi(q, t) = t$, estendendo a projeção original p sobre $\mathbb{R}^4$.

Sejam S_1 e S_2 as duas componentes de $S^2 \cup S^2$, então pela Proposição 3.3.5 temos duas S^2 mergulhadas em $S^3 \times \mathbb{R}$.

Tome dois discos, de dimensão 2, $D_i \subset S_i$ (com $i = 1, 2$), com isso, em cada componente S_i teremos dois discos D_i^2 , um será o próprio D_i e o outro será o disco $D'_i = S_i - \text{int} D_i$.

Logo $\partial D_i = \partial D'_i$ e D_i, D'_i estão mergulhados em $S^3 \times \mathbb{R}$. Portanto pelo Lema 3.3.4 e pela prova do Lema 3.3.2, temos os discos $D_1 \cup D_2$ e $D'_1 \cup D'_2$ tal que $\partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D'_1 \cup \partial D'_2$ e assim $D_1 \cup D'_1$ é bordo de um disco B_1 , de dimensão 3, e analogamente $D_2 \cup D'_2$ é

bordo de outro disco B_2 (de dim 3), onde B_1 e B_2 são dois discos disjuntos e estão mergulhados em $S^3 \times \mathbb{R}$ tal que $\partial B_1 \cup \partial B_2 = f(S^2 \cup S^2)$.

Considerando mergulho $g : S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por $g(\theta, \phi, \gamma, t) = (\theta, \phi, \gamma, e^t)$ cuja imagem é $\mathbb{R}^4 - \{\text{origem}\}$ para $(\theta, \phi, \gamma) \in S^3$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $f(S^2 \cup S^2) = \partial B_1 \cup \partial B_2$ onde B_1 e B_2 são dois discos disjuntos de dimensão 3, mergulhados em $\mathbb{R}^4$.

Portanto f é padrão. ■

3.4 Prova do Teorema Principal

Enunciaremos novamente o teorema principal para um melhor entendimento da prova.

Teorema Principal 3.1.1

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho da superfície compacta M tal que $\pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função estável sem cúspides e $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com no máximo 4 pontos críticos; onde $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são projeções ortogonais. Então M é difeomorfa a esfera S^2 , a união disjunta de duas S^2 , a um Toro ou a uma Garrafa de Klein; e ainda o mergulho f é trivial (isto é, f é isotópica ao mergulho padrão).

Demonstração:

Considere Σ o conjunto dos pontos singulares da função estável $\pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $\pi_1 \circ f = \pi_1|_{f(M)}$ temos que $\pi_1 \circ f$ é uma função excelente, mas como por hipótese $\pi_1 \circ f$ não tem cúspides, os pontos singulares de $\pi_1 \circ f$ são todos pontos de Dobra.

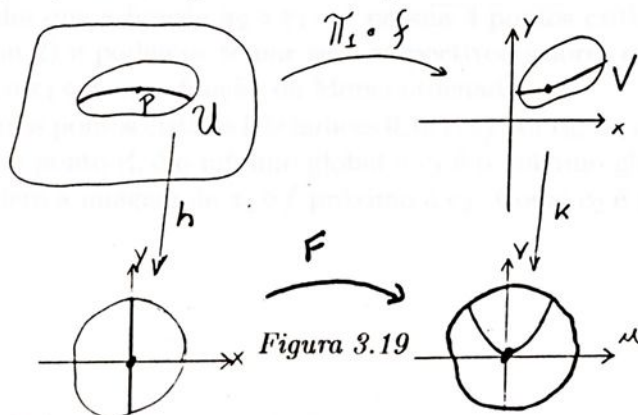
Para cada $p \in \Sigma$, já que p é ponto de dobra, podemos introduzir um sistema de coordenadas (x, y) e (u, v) sobre as vizinhanças U de p e V de $\pi_1(f(p))$, respectivamente, em termos das quais $\pi_1 \circ f$ se escreve da forma:

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 \\ v(x, y) = y \end{cases}$$

Logo temos:

$$J(\pi_1 \circ f)_p = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

Assim, os pontos singulares de $\pi_1 \circ f$ em U são da forma $(0, y)$, ou seja, o eixo Oy .



Então, Σ é uma união disjunta de subvariedades de dimensão 1; isto é Σ é a união

disjunta de curvas fechadas simples. Pelo Teorema da Classificação das Superfícies (compactas e sem bordo) M pode ser homeomorfa a S^2 , ou a $S^2 \cup S^2$, ou ao Toro T^2 , ou a Garrafa de Klein ou ainda ao Plano Projetivo P_2 . Mas considere $p \in M$ tal que $p \notin \Sigma$ e portanto p é um ponto regular de $\pi_1 f$. Como Σ é a união disjunta de curvas fechadas simples, temos que Σ é uma vizinhança aberta U de p tal que U é domínio de uma carta $h : U \rightarrow U_0$ onde $h(p) = (0, 0)$. Tomando $q = \pi_1(f(p))$, existe uma carta $k : V \rightarrow V_0$ tal que $\pi_1(f(U)) = V$ e como p é ponto regular da função estável $\pi_1 \circ f$, usando o Teorema de Whitney, $\pi_1 \circ f$ é localmente a identidade do $\mathbb{R}^2$, isto é:

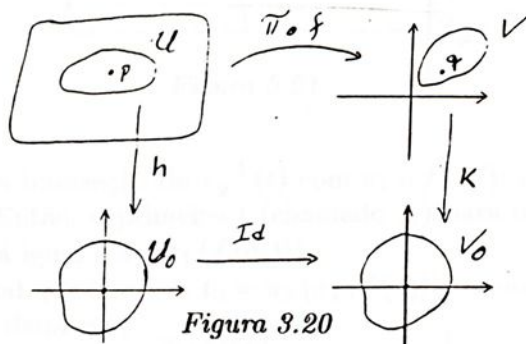


Figura 3.20

Logo, na vizinhança U de p , $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ é dada por $\pi_2(x, y) = y$, e assim $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ é localmente uma submersão para todo $p \in M - \Sigma$.

Portanto, as singularidades de $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são as mesmas da função $(\pi_2 \circ \pi_1 \circ f)|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Mas $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ é uma função de Morse e $\Sigma = \bigcup C_i$ onde cada $C_i \cong S^1$, cuja característica de Euler é zero, e assim os pontos críticos de $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ para cada C_i aparece aos pares, logo os pontos críticos da função se Morse $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ aparecem, também aos pares, o que impossibilita M ser homeomorfa ao Plano Projetivo P_2 , pois toda função de Morse sobre P_2 possui um número ímpar de pontos críticos.

Portanto, M deverá ser homeomorfa somente a S^2 , ou a $S^2 \cup S^2$, ou ao Toro T^2 ou ainda a Garrafa de Klein.

Provenos agora que o mergulho f é padrão para cada caso separadamente.

Caso 1 : $M = S^2$

Primeiro considere a situação onde a função de Morse $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ possui exatamente 2 pontos críticos, o que segue diretamente da Proposição 3.3.5.

Suponha que a função $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ possua 4 pontos críticos, cujos os índices são 0, 0, 1 e 2 (ou 0, 1, 2 ou 2) e podemos tomar seus respectivos valores críticos, 2 a 2 distintos; já que se pode supor $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ uma função de Morse ordenada.

Denote os pontos críticos (de índices 0, 0, 1, 2) por c'_0, c_0, c_1 e c_2 em que $\pi_2(\pi_1(f(c'_0))) < \pi_2(\pi_1(f(c_0)))$, isto é o ponto c'_0 é o mínimo global e c_2 é o máximo global.

Considere a imagem de $\pi_1 \circ f$ próximo a c_2 . Como c_2 é ponto de máximo global

de $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ esta imagem é dada por

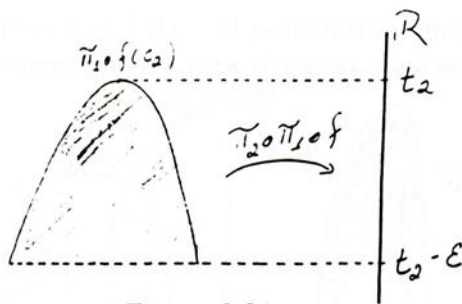


Figura 3.21

Observando a interseção de $\pi_2^{-1}(t)$ com $\pi_1 \circ f(M)$; no qual t começa em $t_2 = \pi_2(\pi_1(f(c_2)))$ e decresce. Então, o primeiro t (chamado t_1) para o qual $\pi_2^{-1}(t)$ contém três pontos críticos de $\pi_1 \circ f$ será igual a $\pi_2(\pi_1(f(c_1)))$

Dado $\epsilon > 0$ tal que $t_1 - \epsilon > t_0 = \pi_2(\pi_1(f(c_0)))$ temos que a imagem da região $\pi_2^{-1}([t_1 - \epsilon, t_2])$ em $\pi_1 \circ f$ é dada por;

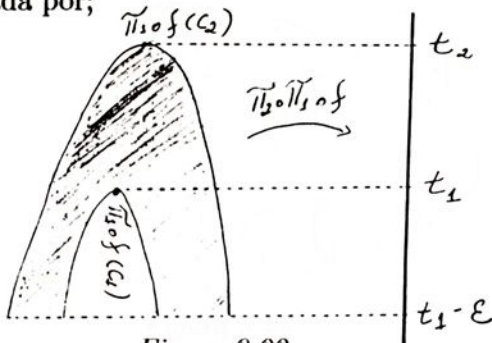


Figura 3.22

Existe um ponto b pertencente a reta $\pi_2^{-1}(t_1 - \epsilon)$ no $\mathbb{R}^2$ tal que o 3-plano $\pi_1^{-1}(b)$ separa as duas componentes de $f(M) \cap (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon)$ em $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon) \subset \mathbb{R}^4$.

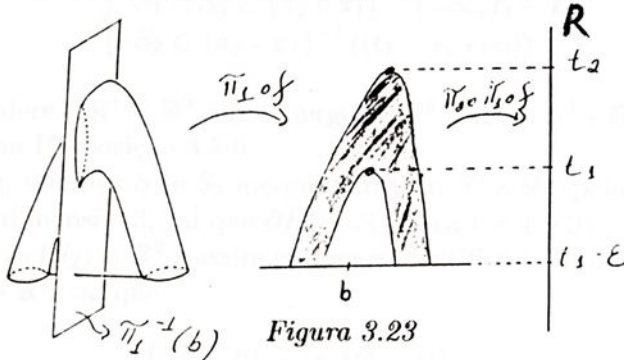


Figura 3.23

Então, pela Proposição 3.3.5 existem dois discos disjuntos de dimensão 2, D_1 e D_2 tal que:

$$\begin{cases} D_1 \cup D_2 \subset (\pi_2 \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon) \\ \partial D_1 \cup \partial D_2 = f(M) \cap (\pi_2 \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon) \end{cases}$$

Usando o nível $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon)$ podemos decompor $f(M) \subset \mathbb{R}^4$ como união de 2 discos e um anel, já que, concretamente esta situação pode se representada por:

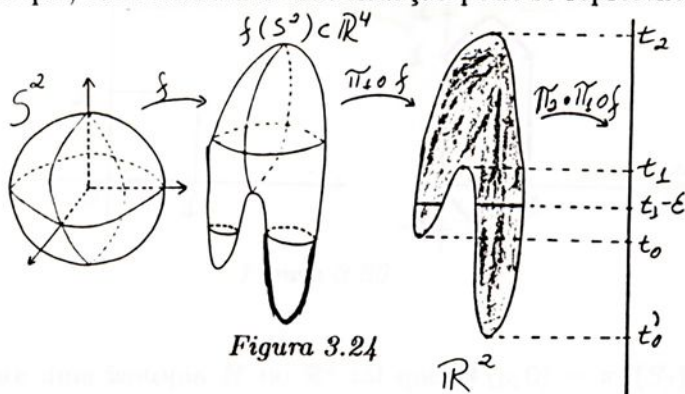


Figura 3.24

Os dois discos e o anel são:

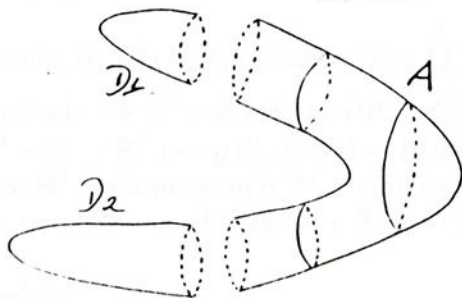


Figura 3.25

Com os discos $D_1 \cup D_2$, podemos construir 3 esferas S^2 disjuntas S_1 , S_2 e S_3 tal que:

$$\begin{cases} S_1 \cup S_3 \subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(-\infty, t_1 - \epsilon) \\ S_2 \subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}((t_1 - \epsilon, +\infty)) \end{cases}$$

Considere o $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e mergulhe $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ em $S^3 \times \mathbb{R}$, automaticamente temos $\mathbb{R}^4 \hookrightarrow S^3 \times \mathbb{R}$ como na Proposição 3.3.6.

Assim, teremos S_1 e S_3 mergulhadas em $S^3 \times \mathbb{R}$ e pela Proposição 3.3.6 existem 2 discos B_1 e B_3 , de dimensão 3, tal que $\partial B_i = S_i$ (para $i = 1$ e 3).

Tome $\pi_1(S_2) \subset \mathbb{R}^2$ e assim podemos identificá-la como $[0, 1] \times [0, 1]$, daí considere $h : \partial([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\begin{cases} h(t, 0) = (t, 4t^2 - 4t) \\ h(t, s) = (t, s); s \in]0, 1[\\ h(t, 1) = (t, -4t^2 + 4t + 1) \end{cases}$$

Assim, $h([0, 1] \times [0, 1])$ é geometricamente dada por:

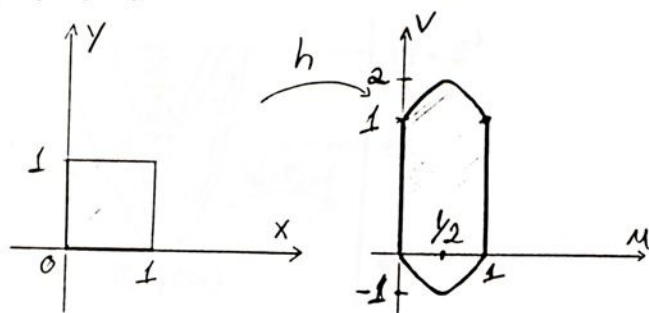


Figura 3.26

Considere uma isotopia H no $\mathbb{R}^2$ tal que $H(p, 0) = \pi_1(S_2)$ e $H(p, 1)$ igual a região cujo bordo é $h(\partial([0, 1] \times [0, 1]))$. Levantando a isotopia H para uma isotopia $\tilde{H}$ no $\mathbb{R}^4$, temos que $(\pi_2 \circ \pi_1)|_{S^2}$ possui exatamente 2 pontos críticos, e com isso $S^2 = \partial B_2$, no qual B_2 é um 3-disco em $S^3 \times \mathbb{R}$.

Finalmente, colando B_1 , B_2 e B_3 obtemos $B = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ tal que $\partial B = f(M)$, isto é, obtemos um 3-disco B mergulhado em $S^3 \times \mathbb{R}$ tal que $\partial B = f(M)$.

Definindo $g : S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ por $g(\theta, \phi, \gamma, t) = (\theta, \phi, \gamma, e^t)$, onde $(\theta, \phi, \gamma) \in S^3$ e $t \in \mathbb{R}$, obtemos um mergulho em $\mathbb{R}^4$, cuja imagem é $\mathbb{R}^4 - \{\text{origem}\}$ (difeomorfa a $S^3 \times \mathbb{R}$).

Então, com este mergulho g , obtemos um 3-disco B mergulhado em $\mathbb{R}^4$ tal que $f(M) = \partial B$.

Portanto, f é padrão.

Caso II : $M = S^2 \cup S^2$

Este caso segue diretamente da Proposição 3.3.6.

Caso III : $M = T^2$

Neste caso, os índices dos 4 pontos críticos da função de Morse $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ são iguais a 0, 1, 1 e 2 os quais denotaremos, respectivamente por c_0 , c'_1 , c_1 e c_2 onde $\pi_2(\pi_1(f(c'_1))) < \pi_2(\pi_1(f(c_1)))$; e o ponto c_0 é o mínimo e c_2 é o máximo.

Seguindo o mesmo raciocínio do Caso I, vemos que, tomando um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para $t_1 - \epsilon < t'_1 = \pi_2(\pi_1(f(c'_1)))$, a imagem da região $\pi_2^{-1}(t_1 - \epsilon, t_2)$ será:

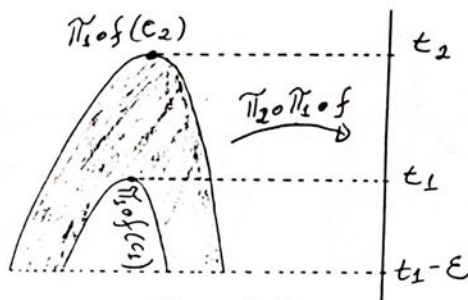


Figura 3.27

Analogamente temos $\epsilon' > 0$ suficientemente pequeno para $t_1 - \epsilon > t'_1 + \epsilon'$, e a

imagem de $\pi_1 f$ na região $\pi_2^{-1}([t_0, t'_1 + \epsilon])$ será:

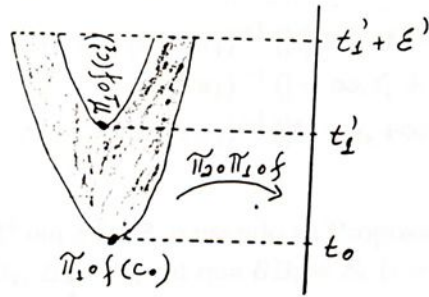


Figura 3.28

Como $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f$ tem exatamente 4 pontos críticos, não existem valores críticos entre $t'_1 + \epsilon'$ e $t_1 - \epsilon$. Existem pontos $b \in \pi_2^{-1}(t_1 - \epsilon)$ e $b' \in \pi_2^{-1}(t'_1 + \epsilon')$, tal que $\pi_1^{-1}(b)$ (e $\pi_1^{-1}(b')$) separa as duas componentes de $f(M) \cap (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon)$ (respectivamente em $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t'_1 + \epsilon')$)

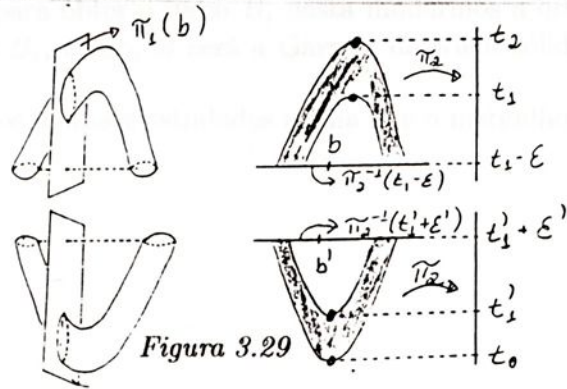


Figura 3.29

Então, pela Proposição 3.3.5 existem 4 discos disjuntos $D_1 \cup D_2 \subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon)$ e $D'_1 \cup D'_2 \subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t'_1 + \epsilon')$ tais que:

$$\begin{cases} \partial D_1 \cup \partial D_2 = f(M) \cap (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon) \\ \partial D'_1 \cup \partial D'_2 = f(M) \cap (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t'_1 + \epsilon') \end{cases}$$

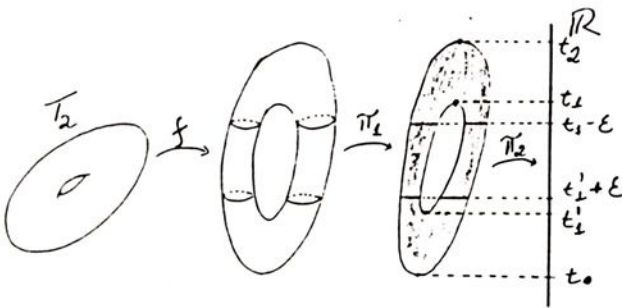


Figura 3.30

Usando $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t_1 - \epsilon)$ e $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(t'_1 + \epsilon')$ podemos decompor a imagem

$f(M)$ como a união de 4 esferas S_1, S_2, S_3 e S_4 tal que:

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_3 &\subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1} (|t'_1 + \epsilon', t_1 - \epsilon|) \\ S_2 &\subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1} (]-\infty, t'_1 + \epsilon'|) \\ S_3 &\subset (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1} (|t_1 - \epsilon, +\infty|) \end{aligned}$$

Mergulhando $\mathbb{R}^4$ em $S^3 \times \mathbb{R}$, e usando as Proposições 3.3.5 e a 3.3.6, construímos 4 discos, de dimensão 3, B_1, B_2, B_3 e B_4 tal que $\partial B_i = S_i$ ($i = 1, \dots, 4$) e então podemos colar B_1, B_2, B_3 e B_4 para obter $B = \bigcup_{i=1}^4 B_i$ tal que $\partial B = f(M)$. Assim temos B um toro sólido mergulhado em $S^3 \times \mathbb{R}$ e mergulhando $S^3 \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^4$, como anteriormente, temos que o mergulho f é padrão.

Caso IV : $M = G$. Klein.

Procedendo analogamente ao *Caso III*, obtemos os 4 discos B_1, B_2, B_3 e B_4 , de dimensão 3, e ao colá-los para obter o disco B , basta mudarmos a orientação de uma das 2 cópias de D_1 em B_4 ou em B_1 , então, B será a Garrafa de Klein sólida no $\mathbb{R}^4$, portanto o mergulho f será padrão.

Resulta de todos os casos estudados acima que o mergulho f é padrão. ■



Capítulo 4

Um Exemplo de Mergulho não Standard

O objetivo deste capítulo é mostrar que existem esferas não triviais em $\mathbb{R}^4$. Daremos uma família de exemplo; assim formada : "Dado um polinômio $p(t)$ com coeficientes inteiros tal que $p(1) = \pm 1$, existe um mergulho $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ onde $\pi_1 \circ f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função estável sem cúspide, $\pi_2 \circ \pi_1 \circ f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com 6 pontos críticos (para as projeções π_1 e π_2 , respectivamente no plano e na reta), então o mergulho f não é padrão e mais o polinômio de Alexander para $f(S^2)$ está bem definido e é exatamente o polinômio $p(t)$ dado."

A demonstração desse fato terá a seguinte sequência: primeiro dado o polinômio $p(t)$ construiremos uma esfera S_p no $\mathbb{R}^4$, onde seu polinômio de Alexander é, exatamente $p(t)$, depois veremos que a projeção de S_p no plano xy é uma função estável sem cúspides e, em seguida, faremos a projeção no eixo Ox obtendo uma função de Morse com 6 pontos críticos.

4.1 O Polinômio de Alexander de um Nó de dimensão 2

Como nosso interesse é o estudo de nós 2-dimensionais em $\mathbb{R}^4$, daremos o procedimento para o cálculo do grupo fundamental e depois para o polinômio de Alexander que é o objetivo central desta seção.

Para calcular o polinômio de Alexander de um nó K , de dimensão 2 é necessário saber a representação do grupo fundamental de $S^4 - K$. Mas veremos aqui o grupo fundamental de $S^4 - M$, onde M é uma superfície.

Seja $Q = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ com } -1 \leq x_4 \leq 1\}$, e tomemos $E_t^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ tal que } x_4 = t\}$. Considere F uma superfície fechada com bordo, que pode não ser conexa em Q , satisfazendo as condições:

- 1) O ∂F e somente ele fica em E_1^3 e E_{-1}^3
- 2) Para cada $t \neq 0$, $E_t^3 \cap F$ consiste em um número finito de curvas fechadas simples
- 3) Tomando t próximo de zero, temos uma transformação hiperbólica para $E_t^3 \cap F$



em exatamente um ponto, como na figura:

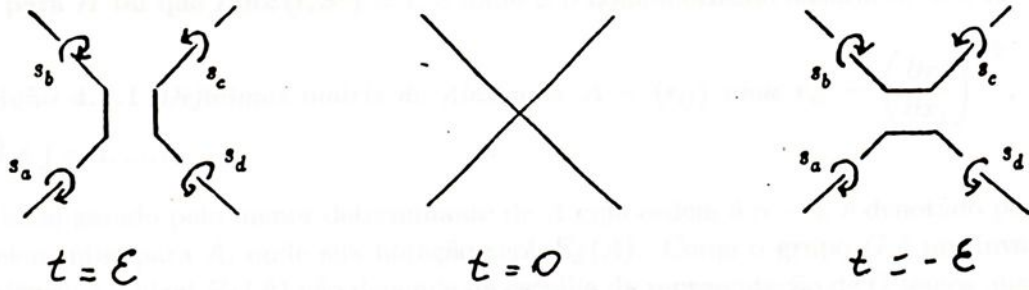


Figura 4.1

Agora, $E_\epsilon^3 \cap F$ é um laço em E_ϵ^3 , e usando a representação de Wirtinger temos um representante de $G_\epsilon = \pi_1(E_\epsilon^3 - (E_\epsilon^3 \cap F))$. Suponha que esta representação seja:

$$\{s_a, s_b, s_c, s_d, \dots : s_a = s_b, s_c = s_d, \dots\}$$

Com isso, a representação de $G = \pi_1(Q - F)$ é dada por:

$$\{s_a, s_b, s_c, s_d, \dots : s_a = s_b, s_c = s_d, \dots\}$$

, em que os geradores e as relações para G são as mesmas para G_ϵ .

Considerando, novamente, F como acima, tomemos sobre F as seguintes condições:

- 1) O ∂F e somente ele fica em E_1^3 e E_{-1}^3 ;
- 2) Para cada $t \neq 0$, $E_t^3 \cap F$ consiste em um número finito de curvas fechadas simples;

3) Tomando t próximo de zero, temos uma transformação elíptica para $E_t^3 \cap F$ em exatamente um ponto, como na figura:

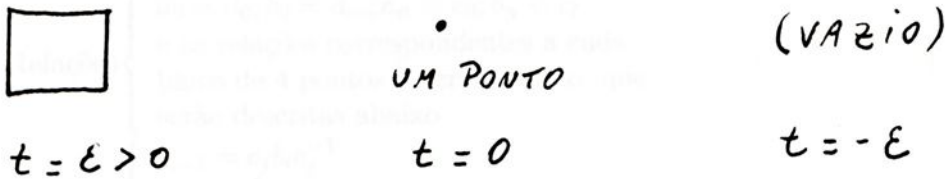


Figura 4.2

Com isso, $\pi_1(Q - F)$ é isomorfo a $\pi_1(E_1^3 - (E_1^3 \cap F))$. Então se F é uma superfície em E^4 , tal que para cada t , $E_t^3 \cap F$ consiste em um número finito de curvas simples, exceto em um número finito de valores de t , e que para cada t excepcional, $E_t^3 \cap F$ induz uma transformação hiperbólica ou uma elíptica juntamente em um ponto, podemos obter uma representação de $\pi_1(E^4 - F)$. Assim, em especial, uma representação de $\pi_1(E^4 - K)$ será obtida a seguir.

Tome S^2 e S^4 orientadas, $G = \pi_1(S^4 - S^2)$ é finitamente gerado (isto é, existem $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$ geradores e $r_1, r_2, \dots, r_\beta$ relações que representam G).

Sejam X o grupo livre gerado por $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$, e Φ o homomorfismo natural de X em G ; e denote G' o subgrupo comutador de G ; assim, tome $H = G / G'$, isto é, H é o abelianizado de

G . Como H é o grupo de homologia 1-dimensional de $S^4 - S^2$, H é cíclico infinito. Escolha a base t para H tal que $Link(t, S^2) = 1$, e tome ψ o homomorfismo natural de G e H .

Definição 4.1.1 Definimos matriz de Alexander $A = (r_{ij})$ onde $r_{ij} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\psi\Phi}$, com $i = 1, \dots, \beta$ e $j = 1, \dots, \alpha$.

O ideal gerado pelo menor determinante de A cuja ordem é $\alpha - d$, é denotado por d -ésimo ideal elementar para A , onde sua notação será $E_d(A)$. Como o grupo G é um invariante de equivalência e o ideal $E_d(A)$ não depende da escolha da representação de G temos que os ideais $E_d(A)$ são invariantes de equivalência para $S^4 - S^2$.

Seja o ideal $E_1(A)$ e se $\Delta(t)$ é um gerador deste ideal, então chamaremos $\Delta(t)$ de polinômio de Alexander, que é determinado pelos fatores $\pm t^\lambda$ com $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Consideremos na figura abaixo, o nó K_p e tomemos os arcos $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_l, d_0, \dots, d_m$ com $l + m = n$, cuja orientação obedece a regra da mão direita relativamente a orientação de K_p .

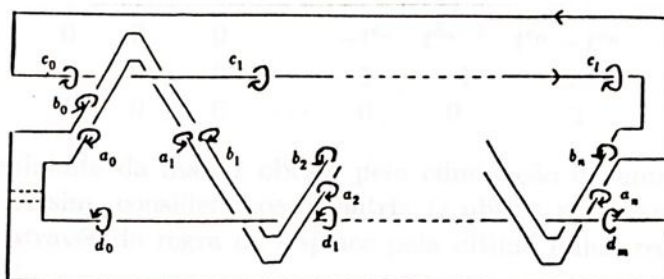


Figura 4.3

Assim a representação do grupo fundamental de $E^3 - K_p$ é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Geradores} & \left\{ \begin{array}{l} a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \\ c_0, \dots, c_l, d_0, \dots, d_m \end{array} \right. \text{ com } m + l = n \\ \text{Relações} & \left\{ \begin{array}{l} a_0 = d_0; b_0 = d_m; a_n = c_0; b_n = c_l \\ \text{e as relações correspondentes a cada} \\ \text{bloco de 4 pontos de cruzamento, que} \\ \text{serão descritas abaixo} \end{array} \right. \\ 1) \text{ Se } \epsilon_i = \delta_i = 1 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{i-1} = c_j b_i c_j^{-1} \\ a_i = c_j^{-1} a_{i-1} c_j \\ c_j = a_{i-1}^{-1} b_{i-1} c_{j-1} b_{i-1}^{-1} a_{i-1} \end{array} \right. \\ 2) \text{ Se } \epsilon_i = \delta_i = 1 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{i-1} = c_{j-1}^{-1} b_i c_{j-1} \\ a_i = c_{j-1} a_{i-1} c_{j-1}^{-1} \\ c_j = b_i^{-1} a_i c_{j-1} a_i^{-1} b_i \end{array} \right. \\ 3) \text{ Se } \epsilon_i = \delta_i = 1 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{i-1} = d_j b_i d_j^{-1} \\ a_i = d_j^{-1} a_{i-1} d_j \\ d_j = a_{i-1}^{-1} b_{i-1} d_{j-1} b_{i-1}^{-1} a_{i-1} \end{array} \right. \\ 4) \text{ Se } \epsilon_i = \delta_i = 1 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{i-1} = d_{j-1}^{-1} b_i d_{j-1} \\ a_i = d_{j-1} a_{i-1} d_{j-1}^{-1} \\ d_j = b_i^{-1} a_i d_{j-1} a_i^{-1} b_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Onde as últimas relações podem ser dadas por:

$$r_i = a_{i-1} c^{\delta_i} d^{\epsilon_i - \delta_i} a_i^{-1} d^{\delta_i - \epsilon_i} c^{-\delta_i} = 1$$

Então,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial a_{i-1}} \end{pmatrix}^{\Psi\Phi} = 1 \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial a_i} \end{pmatrix}^{\Psi\Phi} = -t^{\epsilon_i}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial c} \end{pmatrix}^{\Psi\Phi} = t^{\delta_i} - 1 \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial d} \end{pmatrix}^{\Psi\Phi} = t^{\epsilon_i} - t^{\delta_i}$$

Assim, temos a matriz de Alexander para K_p , dada por:

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	c	d
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	$-t^{\epsilon_1}$	0	$\cdots$	0	t^{δ_1-1}	$t^{\epsilon_1} - t^{\delta_1}$
0	1	$-t^{\epsilon_2}$		0	t^{δ_2-1}	$t^{\epsilon_2} - t^{\delta_2}$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
0	0	0		$-t^{\epsilon_n}$	t^{δ_n-1}	$t^{\epsilon_n} - t^{\delta_n}$
0	0	0	$\cdots$	1	-1	0
1	0	0	$\cdots$	0	0	-1

Note que o determinante da matriz obtida pela eliminação de uma coluna não depende da coluna escolhida. Assim, consideremos a matriz D obtida eliminando a primeira coluna e calculando o $\det D$ através da regra de Laplace pela ultima linha, resulta no polinômio de Alexander para o nó K_p .

4.2 Construção da Família de Exemplos.

Construiremos nesta seção uma família de exemplos, para cada polinômio $p(t)$ com $p(1) = \pm 1$ encontraremos um nó 2-dimensional cujo o polinômio de Alexander é o polinômio dado; verificando que o teorema principal não pode ser melhorado.

Antes de construirmos a S_p veremos um resultado dado por Terasaka: " Seja $p(t)$ um polinômio com a propriedade $p(1) = -1$ então $p(t)$ se expressa como um determinante de ordem ímpar do tipo:

$$T = \begin{vmatrix} -t^{\epsilon_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{\delta_1} - 1 \\ 1 & -t^{\epsilon_2} & 0 & & 0 & t^{\delta_2} - 1 \\ 0 & 1 & -t^{\epsilon_3} & & & t^{\delta_3} - 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -t^{\epsilon_n} & t^{\delta_n} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

onde $\epsilon_i = \pm 1$, $\sum \epsilon_i = 0$ e $\delta_i = \epsilon_i$ ou 0."

Passemos agora à construção de S_p .

Seja $p(t)$ um polinômio com $p(1) = \pm 1$, como o polinômio de Alexander fica determinado pelos fatores $\pm t^\lambda$, podemos supor que $p(1) = -1$, logo $p(t)$ pode ser expresso pelo determinante T (conforme Terasaka).



Considere o determinante

$$D_p(t) = \begin{vmatrix} -t^{\epsilon_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{\delta_1} - 1 \\ 1 & -t^{\epsilon_2} & 0 & & 0 & t^{\delta_2} - 1 \\ 0 & 1 & -t^{\epsilon_3} & & & t^{\delta_3} - 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -t^{\epsilon_n} & t^{\delta_n} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

no qual $\epsilon_i = \pm 1$ e $\delta_i = \epsilon_i$ ou 0. Assim, fica claro que esta família de determinantes engloba a família de determinantes do tipo proposto por Terasaka.

Construiremos S_p sobre o determinante

$$D_p = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & t - 1 \\ 1 & -t^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} & 0 & t^{-1} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

o que nos resulta o polinômio $p(t) = t^{-1} + t - 1$ onde $p(1) = 1$.

Obtemos D_p a partir de $D_p(t)$ fazendo:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \delta_1 = 1 \\ \epsilon_2 = -1; \delta_2 = 0 \\ \epsilon_3 = \delta_3 = -1 \\ \epsilon_4 = \delta_4 = 1 \end{cases}$$

o que nos dá o seguinte nó K_p :

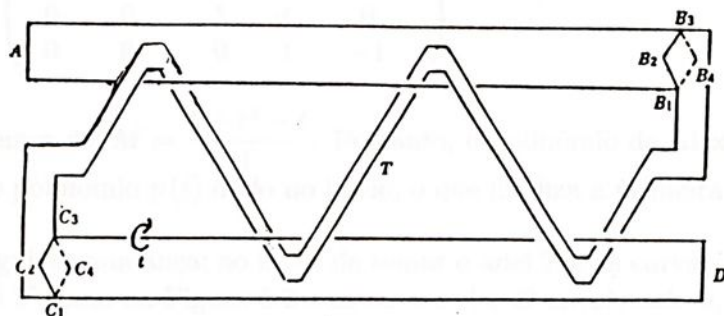


Figura 4.4

A Figura 1.1 está em $E^3 = \{(t_1, t_2, t_3, 0)\}$; em que T é um anel cujo bordo é formado pelos círculos $B_1B_2B_3B_4B_1$ e $C_1C_2C_3C_4C_1$. Tome 4 discos em E^4 dos quais dois discos, cujos bordos são as curvas fechadas $AB_1B_2B_3A$ e $DC_1C_2C_3D$, estão em $E^4_+ = \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \text{ com } t_4 \geq 0\}$ e os outros dois discos cujos bordos são $AB_1B_4B_3A$ e $DC_1C_4C_3D$, estão no conjunto $E^4_- = \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \text{ com } t_4 \leq 0\}$.

Assim, colando estes 4 discos naturalmente com o anel T através dos respectivos bordos, temos uma 2-esfera em $\mathbb{R}^4$ (ou seja, em S^4). Naturalmente, neste caso, não podemos fazer uma visualização geométrica, pode ser criada uma situação analoga no $\mathbb{R}^3$ para dar a noção

exata de que este processo resulta uma 2-esfera. Para tanto tome o anel T e as curvas A e D da seguinte forma :

$T = [-1, 1] \times Q \subset \mathbb{R}^3$, onde Q é o quadrado no plano xz de vértices $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$;

A é uma curva no plano yz , ligando os pontos $B_1 = (1, 1)$ e $B_3 = (1, -1)$;

D é uma curva no plano yz ligando os pontos $C_1 = (-1, 1)$ e $C_3 = (-1, -1)$.

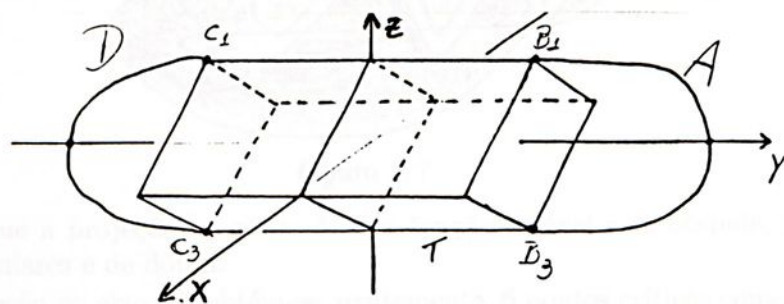


Figura 4.5

Note que neste caso devemos tomar os quatro discos com os mesmos bordos de antes, porém eles devem estar no $\mathbb{R}^3$; e nossa colagem resultará na 2-esfera desejada.

Como vimos na seção 1.4, para calcular o polinômio de Alexander de um nó devemos observar as situações em que acontecem os cruzamentos para, em cada uma, obter os valores de ϵ_i e δ_i , e então, montar a matriz de Alexander cujo determinante é o polinômio de Alexander do nó.

Com isso, observando a S_p temos a seguinte matriz de Alexander:

$$M = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & t-1 \\ 1 & -t^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} & 0 & t^{-1}-1 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e calculando seu determinante temos $\det M = \frac{1+t^2-t}{t}$. Portanto, o polinômio de Alexander de S_p é $t + t^{-1} - 1$ sendo igual ao polinômio $p(t)$ dado no início, o que finaliza a primeira parte do problema.

Represente o nó K_p com a seguinte mudança; ao invés de tomar o anel T e as curvas A e D da forma inicial, considere o anel T como na Figura 1.2 e as curvas A e D envolvendo-o, como na figura abaixo:

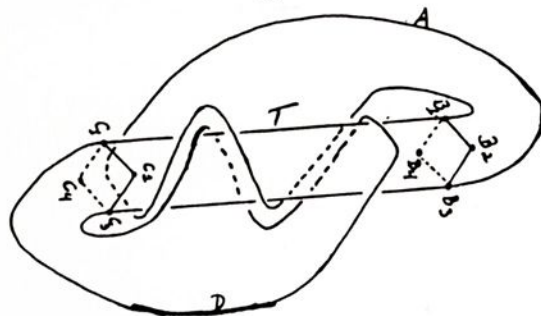


Figura 4.6

Temos, então, a 2-esfera S_p no $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t)\}$, cuja projeção no plano xy está representada abaixo:

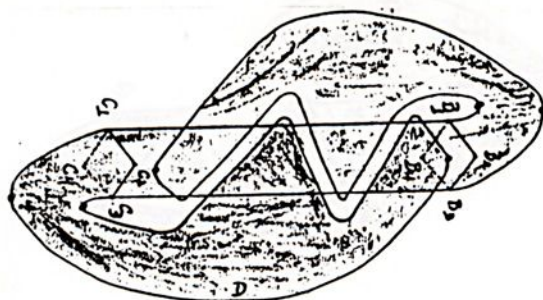


Figura 4.7

Assim vemos que a projeção no plano é uma função estável sem cúspide, já que se tem, apenas, pontos regulares e de dobra.

Fazendo a projeção no eixo Ox obtém-se, exatamente, 6 pontos críticos como pode ser visto na seguinte figura:

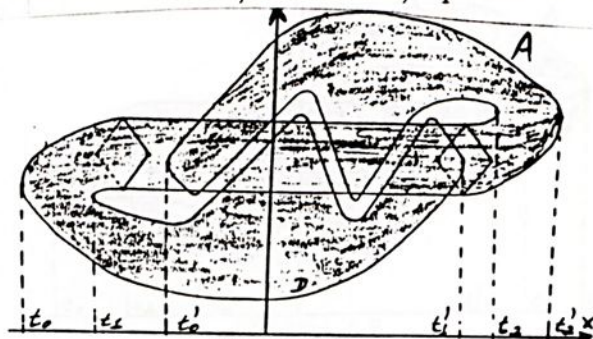


Figura 4.8

Logo para todo polinômio $p(t)$ ($p(t) \neq cte$) com coeficientes inteiros, tal que $p(1) = \pm 1$, existe um S_p em $\mathbb{R}^4$, S_p não é a esfera padrão e mais, considerando o mergulho $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, temos que $f(S^2) = S_p$. Assim, temos a família de exemplos desejada.

Temos, então, a 2-esfera S_p no $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t)\}$, cuja projeção no plano xy está representada abaixo:

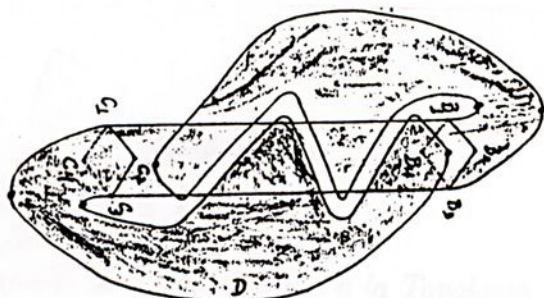


Figura 4.7

Assim vemos que a projeção no plano é uma função estável sem cúspide, já que se tem, apenas, pontos regulares e de dobra.

Fazendo a projeção no eixo Ox obtém-se, exatamente, 6 pontos críticos como pode ser visto na seguinte figura:

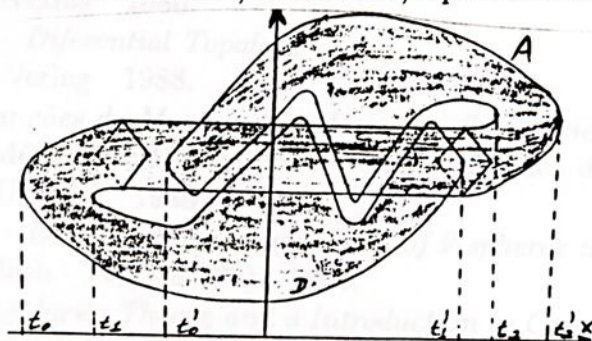


Figura 4.8

Logo para todo polinômio $p(t)$ ($p(t) \neq cte$) com coeficientes inteiros, tal que $p(1) = \pm 1$, existe um S_p em $\mathbb{R}^4$, S_p não é a esfera padrão e mais, considerando o mergulho $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, temos que $f(S^2) = S_p$. Assim, temos a família de exemplos desejada.

Bibliografia

- [Ar] - Armstrong, M.A. - *Basic Topology*.
Springer-Verlag 1983.
- [Br] - Brocher, T; Janish, K. - *Introducción a la Topología Diferencial*.
Editorial A C Madrid 1977.
- [Cr] - Crowell, R.H.; Fox, R.H. - *Introduction to Knot Theory*
Princeton University 1963.
- [Go] - Golubitsky, M.; Guillemin, V. - *Stable Mappings and their Singularities*
Springer-Verlag 1986.
- [Hi] - Hirsh, M.W. - *Differential Topology*
Springer-Verlag 1988.
- [Iz] - Izar, S.A. - *Funções de Morse e Topologia das Superfícies*
Revista Métrica do Departamento de Matemática do
IBILCE-UNESP 1988.
- [Ki] - Kinoshita, S. - *On Alexander polynomials of 2-spheres in a 4-space*
Ann of Math - 74 (518-293) 1961.
- [Lu] - Lu, Y.C. - *Singularity Theory and a Introduction to Catastrophe Theory*
UTM Springer-Verlag 1976.
- [Ma1] - Mather, J. - *Generic Projections*
Ann of Math - 98 (226-245) 1993.
- [Ma2] - Mather, J. - *Stability of C^∞ Mappings : VI "The Nice Region"*
Lecture Notes, Harvard University 1970.
- [Mi] - Milnor, J.W. - *Lectures on the h-cobordism theorem*
Princeton University Press 1965.
- [Ro] - Rolfsen, D. - *Knots and Links*
Publish or Perish, Inc 1976.
- [Ru] - Ruas, M.A.S; Carrara, V.; Saeki, O - *A note on codimension two
submanifolds with at most four critical points*
preprint que aparece em Trabalhos do Departamento de Matemática
da IME-USP - RT-MAT 94-22 - outubro de 1994 - 11pp
- [Sc] - Scharlemann, M - *Smooth spheres in $\mathbb{R}^4$ with four critical points
are standard*
Invent Math - 79 (125-141) 1985
- [Tav] - Tavares, G. - *Funções de Morse e Classificação das Superfícies*
IMPA - Rio de Janeiro 1979.
- [Wa] - Wallace, A. - *Differential Topology - First Steps*
Advanced Book Program 1977.



