UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FABÍOLA PEIXOTO CINTRA

O CONHECIMENTO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A ATIVIDADE DOCENTE

Ilha Solteira
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS

FABÍOLA PEIXOTO CINTRA

O CONHECIMENTO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A ATIVIDADE DOCENTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino e Processos Formativos.

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Orientador

Ilha Solteira
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C575c

Cintra, Fabíola Peixoto.
O conhecimento de futuros professores de matemática sobre o conceito de função e suas implicações para a atividade docente / Fabíola Peixoto Cintra. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
117 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ensino e Processos Formativos, 2018

Orientador: Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Inclui bibliografia

1. Conceito de função. 2. Formação inicial de professores. 3. Conhecimento e prática docente.

Raiane da Silva Santos
Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

Título: **O CONHECIMENTO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A ATIVIDADE DOCENTE**

Autora: FABÍOLA PEIXOTO CINTRA

Orientador: INOCÊNCIO FERNANDES BALIEIRO FILHO

Aprovada como parte das exigências para a obtenção do Título de Mestres em ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Departamento de Matemática/Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti
Departamento de Matemática/USP – Câmpus de São Carlos

Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira
Departamento de Matemática/Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Ilha Solteira, 26 de julho de 2018.

Dedico

Aos meus pais,
Mônica e Sílvio,
Pelo amor e educação que recebi ao longo da minha vida.
Aos meus familiares.
Ao meu amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e pela oportunidade desse momento.

Ao meu orientador, professor Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho, pela disponibilidade, acessibilidade, dedicação e sua amizade.

Aos professores Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti e Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira por aceitarem compor a banca examinadora e contribuírem enormemente para a melhoria do trabalho.

Aos alunos voluntários e professores do Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas – IBILCE – UNESP – Câmpus de São José de Rio Preto que participaram ativamente da pesquisa e contribuíram de forma relevante para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores e colegas do Curso de Mestrado em Ensino e Processos Formativos, parceiros de momentos difíceis e inesquecíveis.

Aos meus familiares e amigos, pelo amor, pelo apoio emocional e financeiro.

Ao meu noivo, por todo carinho, paciência e apoio nesta jornada.

E, a todos, um obrigada!

Graças à vida,

Que me deu tanto

Me deu o riso e me deu o pranto...

Violeta parra, Chile.

RESUMO

O conhecimento dos professores, juntamente com as suas concepções e crenças, é uma importante variável no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática que ocorre em suas aulas, uma vez que o conhecimento do professor é a base para o ensino de um determinado conteúdo. Nesta perspectiva, o objetivo da pesquisa aqui apresentada foi investigar os conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre o conceito de Função e sobre o ensino e a aprendizagem desse conceito. Com isso, tivemos as seguintes questões: i) Como o conceito de função é abordado nos Cursos de Licenciatura em Matemática? ii) Quais os conhecimentos dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função? iii) Quais as implicações dos conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre função para a atividade docente? Para responder a essas questões, tomando como base uma revisão histórica do desenvolvimento do conceito de função e uma revisão bibliográfica sobre o conhecimento dos professores sobre esse conceito, foi aplicado um questionário para alunos do último ano de um curso de Licenciatura em Matemática e foi enviado um questionário para os docentes deste curso. Para a análise dos dados obtidos por meio dos questionários foi adotada a metodologia de Análise de Conteúdo. Os resultados obtidos revelam que, de modo geral, o conceito de função está sendo adequadamente estudado e aprendido pelos alunos, mas ainda existem obstáculos epistemológicos que necessitam ser superados para uma compreensão abrangente do conceito de função, ou seja, há algumas dificuldades de aprendizagem dos alunos em relação ao conceito de função, em virtude da sua variedade de representações, levando aos obstáculos epistemológicos.

Palavras chave: Conceito de função. Formação inicial de professores. Conhecimento e prática docente.

ABSTRACT

Teachers' knowledge, together with their conceptions and beliefs, is an important variable in the teaching and learning process of Mathematics that occurs in their classes, since the knowledge of the teacher is the basis for the teaching of a certain content. In this perspective, the purpose of the research presented here was to investigate the knowledge of the future Mathematics teachers about the concept of Function and about the teaching and learning of this concept. With this, we had the following questions: i) How the concept of function is approached in the Mathematics Degree Courses? ii) What are the students' knowledge of the Degree in Mathematics about the concept of function? iii) What are the implications of the knowledge of the future teachers of Mathematics about function for the teaching activity? For answer these questions, based on a historical review of the development of the concept of function and a bibliographical revision on the teachers' knowledge about this concept, a questionnaire was applied to students of the last year of a degree in Mathematics and a questionnaire was sent to the teachers of this course. For the analysis of the data obtained through the questionnaires, the Content Analysis methodology was adopted. The results show that function concept is be studied and learned by students, but there are still has epistemological obstacles that need to be overcome for a embracing function concept understanding, because of your representations variety, which leads to epistemological obstacles.

Keywords: Concept of function. Initial teacher training. Knowledge and teaching practice.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A profissão docente sempre esteve presente na minha vida. Acompanhei parte da trajetória da minha avó e da minha mãe como professoras e percebi que eu não seria diferente: e, de fato, me tornei professora de Matemática formada pelo Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas – IBILCE – UNESP – Câmpus de São Jose do Rio Preto. O gosto por ensinar e aprender a Matemática tomou-me por completo e a licenciatura despertou em mim a vontade de contribuir para a sociedade por meio da educação.

Por isso, optei por continuar meus estudos na área da Educação Matemática, para tornar meu conhecimento mais amplo nesta área e buscar estabelecer um elo que possa relacionar as experiências vividas em sala de aula ao longo da realização do Estágio Supervisionado e as teorias que estudei e que, muitas vezes, ficam apenas no papel, com a minha prática docente.

Meus questionamentos sobre aspectos do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e meu anseio por contribuir para mudanças despertaram minha curiosidade pelos trabalhos desenvolvidos nas áreas de Formação de Professores e Educação Matemática. Tais questionamentos e anseios tiveram início durante a realização do Estágio Supervisionado, que me proporcionou uma visão do processo de ensino e de aprendizagem, em especial, de Matemática, que me levou a repensar a forma como as políticas públicas educacionais e os currículos são colocados em prática.

Na graduação, tive a oportunidade de realizar atividades complementares por meio do Programa de Educação Tutorial (PET), do qual fui bolsista, que me proporcionou uma vasta compreensão da tríade ensino-pesquisa-extensão. O PET-Matemática promoveu atividades acadêmicas no âmbito universitário, com o objetivo de mostrar a importância da Matemática na sociedade, que também colaboraram para o meu interesse pelo desenvolvimento de uma pesquisa que discutisse a concepção dos futuros professores sobre a Matemática e sobre conceitos fundamentais desta ciência.

A formação inicial de professores de Matemática é um tema que vem sendo estudado e discutido sistematicamente por diversos pesquisadores internacionais (SHULMAN, 1999; BALL, 1991; PONTE, 2002; PETROU; GOULDING, 2011).

No Brasil, as pesquisas sobre o tema também são numerosas e abrangem diversos aspectos relacionados aos Cursos de Licenciatura em Matemática: currículo, disciplinas, projetos, estágio supervisionado, trajetórias, entre outros. Entretanto, ainda são poucas as pesquisas que analisam a compreensão e as concepções dos futuros professores sobre conceitos de Matemática e a sua relação com a prática em sala de aula.

Shulman (1987) faz algumas contribuições pertinentes em relação à compreensão de processos de aprendizagem profissional do professor. Tal compreensão envolve os conhecimentos da docência, os processos formativos em relação a esses conhecimentos e a prática profissional.

Nesta perspectiva, a pesquisa proposta tem como intuito analisar e discutir as concepções dos futuros professores de Matemática sobre um dos conceitos que fazem parte da base dos Fundamentos da Matemática: o conceito de Função.

A origem do conceito de função é muito antiga, já que no transcorrer da História da Matemática esse conceito apareceu como uma relação, uma operação, uma lei ou uma regra. Ou ainda, de modo implícito, dado por uma tabela, uma descrição verbal, um gráfico, uma regra cinemática, uma fórmula analítica, etc.

O conceito de função, até o século XX, passou por diversos obstáculos: problemas relacionados à utilização do conceito na prática, problemas numéricos, algébricos e geométricos (SIERPINSKA, 1992). Dessa forma, é compreensível que os alunos dos diferentes níveis de ensino tenham dificuldades na compreensão do conceito de função.

Diversos estudos, conforme citado em Llinares (1996), apontam que o conhecimento dos professores, juntamente com as suas concepções e crenças, é uma importante variável no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática que ocorre em suas aulas, uma vez que o conhecimento do professor é a base para o ensino de um determinado conteúdo. Além disso, o conhecimento matemático do professor tem relações com suas crenças e concepções, com o conhecimento pedagógico do conteúdo e com sua prática.

Assim, o objetivo da pesquisa proposta foi investigar quais os conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre o conceito de função e sobre o ensino e a aprendizagem desse conceito. Com isso, tivemos as seguintes questões:

a) Como o conceito de função é abordado nos Cursos de Licenciatura em Matemática?
b) Quais os conhecimentos dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função?
c) Quais as implicações dos conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre função para a atividade docente?

Com a finalidade de encontrar respostas satisfatórias para as questões diretrizes da pesquisa foram seguidas as seguintes etapas:

- Revisão sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função. Para isso, foi elaborado um panorama histórico do desenvolvimento do conceito de função e discutida as definições de função que se adotam atualmente.
- Revisão Bibliográfica sobre o conhecimento dos professores de Matemática sobre o conceito de função.
- Análise dos Planos de Ensino de disciplinas que tratam do conceito de função no Curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de São José do Rio Preto.
- Elaboração e Aplicação de um questionário (Questionário 1) para os alunos do último ano do Curso de Licenciatura em Matemática da UNESP do Câmpus de São José do Rio Preto com o intuito de investigar o conhecimento desses futuros professores de Matemática sobre o conceito de função.
- Questionário (Questionário 2) para os professores do Curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de São José do Rio Preto. O questionário 2 teve como objetivo buscar compreender quais os conhecimentos sobre o conceito de função que são desenvolvidos nas disciplinas do Curso.

O Questionário 2 foi enviado por e-mail e as respostas obtidas foram analisadas pela Análise do Conteúdo, que é um conjunto de técnicas que permite ao pesquisador tratar os dados e inferir conteúdos. Para isso, Bardin (2011) aponta o seguinte roteiro: 1) Pré-análise; 2) Leitura Flutuante; 3) O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. A Análise de Conteúdo permite ao pesquisador a realização de um estudo interpretativo para a abstração de categorias de classificação.

Vale destacar que, conforme Bardin (2011), os métodos da Análise de Conteúdo podem ser usados em pesquisas quantitativas e qualitativas, porém, em nossa pesquisa, o viés adotado é qualitativo e, neste enfoque, a Análise de Conteúdo é utilizada para se traçar uma frequência das características que se repetem nos dados obtidos.

2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

2.1 Indícios da noção de função na Matemática da Antiga Mesopotâmia

A Matemática foi produzida por várias civilizações antigas (mesopotâmica – 3500 a.C., egípcia – 3000 a.C., indiana – 2500 a.C., mediterrânea – 2000 a.C., chinesa – 2000 a.C., mesoamericana e andina – 1500 a.C.). Entretanto, o conhecimento dessa ciência ficava restrito a poucos indivíduos (sacerdotes, administradores, escribas, agrimensores, etc.) e seu desenvolvimento decorria da sua utilidade diária para a movimentação comercial, avanço na engenharia de construção, mecânica e bélica, da necessidade de aprimoramento na confecção de calendários astronômicos úteis para os períodos de plantio e para a realização de rituais religiosos desses remotos povos. Porém, há vestígios históricos que comprovam uma transposição dos limites entre a ciência matemática puramente prática empregada por aquelas civilizações. Assim, em conformidade, com Katz:

> A Matemática certamente existiu em praticamente todas as civilizações antigas, das quais há registros históricos. Mas em cada uma dessas civilizações, a Matemática estava no domínio de sacerdotes e escribas especialmente treinados, funcionários do governo cujo trabalho era desenvolver e utilizar a Matemática para o benefício desse governo em áreas como coleta de impostos, medição, construção, comércio, calendário e práticas rituais. No entanto, embora as origens de muitos conceitos matemáticos decorram de sua utilidade nesses contextos, os matemáticos sempre exerceram sua curiosidade estendendo essas ideias muito além dos limites da necessidade prática. No entanto, como a Matemática era uma ferramenta de poder, seus métodos eram transmitidos somente aos poucos privilegiados, muitas vezes mediante uma tradição oral. Assim, os registros escritos são geralmente escassos e raramente não fornecem muitos detalhes. (KATZ, 2008, p. 2)

Os documentos matemáticos mesopotâmicos consistem de problemas práticos e teóricos de aritmética, álgebra e geometria. Em especial, há placas de argila que contêm tabelas que fornecem valores de algumas potências e há uma placa que contém um problema que envolve uma tabela exponencial e sua utilização para calcular as taxas de juros.

> Várias placas das coleções de Berlim, Istambul, Louvre e Yale contêm valores para os expoentes a^n, em que n é um número natural que toma os valores $1, 2, \ldots, 10$, e $a = 9{,}16{,}100$ e 225 – todos os quadrados perfeitos. Para que essas tabelas foram usadas? O seguinte problema, tomado de uma placa do Louvre do período Babilônico antigo, pode fornecer a resposta. Calcule quanto tempo levaria para certa quantia de dinheiro dobrar se foi emprestado a uma taxa composta anual de $0;12$ [20%]. *Solução*: Utilizando a notação simbólica moderna, seja P o montante do empréstimo (o principal) e r $(0;12 = 1/5)$ a taxa de juros. A questão pode então ser reformulada da seguinte forma: Encontre n, dado $2P = P(1+r)^n$. O problema é resolvido pela primeira identificação com base em uma tabela exponencial que n deve estar entre 3 e 4 para satisfazer a equação $(1;12)^n = 2$ [ou em termos

> modernos $(1,2)^n = 2$]. A partir da tabela, $(1;12)^3 = 1;43,40,48$ (ou 1,7280) e $(1;12)^4 = 2;04,25$ (ou 2,0736). Aplicar interpolação linear e utilizando a notação moderna temos $3 + \frac{2-1,7820}{2,0736-1,7820} = 3,7870$ ou, em notação mesopotâmica, $3;471320$ anos – exatamente mostrada na placa do Louvre! (JOSEPH, 2011, p. 148-149)

Nesse contexto, podemos conjecturar, em virtude desse conjunto de dados, que tendo um valor inicial P e um percentual constante r para entradas equitativas n, esses dados podem ser modelados pela função exponencial $f(n) = P(1+r)^n$ para o crescimento exponencial. Em outro texto da mesopotâmica encontra-se exemplo de progressão geométrica.

> [...] um exemplo de uma série geométrica de um texto babilônico antigo de Mari. O problema foi inicialmente descrito como "um relato de formigas", e o que continha era o cálculo de cinco termos de uma progressão geométrica, com o primeiro termo 99 e o quociente comum 9 como mostra na tabela.

sexagesimal	Decimal	Itens	cálculo
1,39	99	Pessoas	___
14,51	891	Pássaros	$9 \times 99 = 891$
2,13,39	8.019	Formigas	$9 \times 891 = 8.019$
20,02,51	72.171	espigas de cevada	$9 \times 8019 = 72.171$
3,00,25,39	649.539	grãos de cevada	$9 \times 72171 = 649.539$

> O lado reverso contém a mesma série geométrica que diminui de 649.539 para99, mas também há uma sexta linha que é a soma dos diferentes itens: $649.539 + 72.171 + 8.019 + 891 + 99 = 730.719$. (JOSEPH, 2011, p. 149-150)

Uma progressão geométrica é uma sequência de números reais $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ cujo primeiro termo é distinto de zero e cada um dos termos seguintes é igual ao termo anterior multiplicado por um certo número q que é constante, denominado quociente, para aquela sequência. Assim, cada progressão geométrica pode ser estabelecida pela fórmula $a_n = aq^{n-1}$ ou pela fórmula de recorrência $a_1 = a$ e $a_n = qa_{n-1}$ para $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ou podemos estabelecer uma relação da seguinte forma $a_n = f(n)$, em que f é uma função exponencial, definida por $f(n) = cq^n$ para algum c. Nesse sentido, considerando o texto babilônico, podem-se observar implicitamente indícios de função.

A placa matemática babilônica conhecida por *Plimpton 322*, analisada em 1945 por Neugebauer e Sachs, contém alguns ternos pitagóricos. E, conforme Eves (2007), “um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muitos séculos à tábula Plimpton 322, foi mostrar que todos os ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) são dados parametricamente por $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$ em que u e v são primos entre si, um é par o outro é ímpar e $u > v$”. Em notação decimal, segundo Eves (2007), esses ternos são descritos pela tabela abaixo.

Tabela 1 – Tábula Plimpton 322

a	B	c	u	V
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8

2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Fonte: Eves (2007, p. 65)

Eves (2007) salienta que essa placa matemática contém informações sobre secante de um ângulo.

> Vale a pena examinar a coluna de valores $(c/a)^2$ um pouco mais a fundo. Essa coluna, obviamente, é uma tábua que fornece o quadrado da secante do ângulo B oposto ao lado b do triângulo retângulo. Como o lado a é regular, $\sec B$ tem uma representação sexagesimal finita. Além do mais, ocorre que, com a particular escolha dos triângulos como se deu, aqueles valores de $\sec B$ formam uma surpreendente sequência regular que decresce de quase exatos $1/60$ quando se passa de uma linha da tábua para a próxima, decrescendo o ângulos de $45°$ para $31°$. Temos assim uma tábua de secante para ângulos de $45°$ a $31°$, formada por meio de triângulos retângulos de lados inteiros, em que se verifica uma variação em saltos regulares na função em vez de no ângulo correspondente. Tudo isso é verdadeiramente notável. Parece altamente provável que houvesse tábuas acompanhantes que davam informações análogas para ângulos variando de $0°$ para $15°$ e de $16°$ para $30°$. (EVES, 2007, p. 66)

Na placa Plimpton 322 pode-se observar que há certas associações de valores de uma coluna com os valores das outras colunas, ou seja, evidencia a ideia da dependência de um conjunto de valores em relação a outro conjunto de valores.

2.2 Indícios da noção de função na Matemática do Antigo Egito

O conhecimento atual da Matemática Egípcia procede de várias escavações arqueológicas cuja primeira expedição foi realizada pela campanha militar, de 1798 a 1801, por Napoleão Bonaparte. E, posteriormente, houve várias expedições nos numerosos sítios arqueológicos que encontram artefatos e papiros egípcios que contêm textos de conteúdo matemático: Papiro de Akhmim, Berlim, Kahun, Lahun, Rhind, Michigan, Moscou e Reisner I, II e III e o Rolo de Couro, que estão em Museus de Berlim, Boston, Cairo, Londres e Moscou.

Os problemas envolvendo as formas simples de progressão aritmética e geométrica foram resolvidos pelos antigos egípcios. No papiro de Rhind, no problema 40, encontramos o seguinte problema, segundo Clagett (1999, p. 56): *[Dividir] 100 pães entre 5 homens [de tal forma que as porções recebidas estão em progressão aritmética e que] 1/7 da [soma] das três* *maiores porções é [igual à soma] das duas menores. Qual é o excesso [comum] [ou diferença das porções]?*

Conforme Duvillié (1999), em notação moderna, com algumas modificações, sua solução consiste em encontrar cinco números a_1,a_2, a_3, a_4 e a_5 que verificam: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ e $a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$ em que d é a diferença comum da progressão aritmética. Utilizando-se o método da falsa posição, explorando alguns valores, obtêm $a_1 = 1$ e$d = 5 + 1/2$ para calcular: $a_2 = a_1 + d = 1 + 5 + 1/2 = 6 + 1/2$; $a_3 = a_2 + d = 6 + 1/2 + 5 + 1/2 = 12$; $a_4 = a_3 + d = 12 + 5 + 1/2 = 17 + 1/2$; e $a_5 = a_4 + d = 17 + 1/2 + 5 + 1/2 = 23$. Desse modo, tem-se $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 6 + 1/2 + 12 + 17 + 1/2 + 23 = 60$. Diante desse resultado, é necessário adicionar 40 a 60 para obter a soma 100, isto é, $2/3$ de 60. Desse modo, é necessário fazer uma correção dos valores encontrados:

$b_1 = a_1 + \frac{2}{3}a_1 = 1 + 2/3$;

$b_2 = a_2 + \frac{2}{3}a_2 = 6 + 1/2 + 2/3 \times (6 + 1/2) = 10 + 1/2 + 1/3$;

$b_3 = a_3 + \frac{2}{3}a_3 = 12 + 2/3 \times 12 = 20$;

$b_4 = a_4 + \frac{2}{3}a_4 = 17 + 1/2 + 2/3 \times (17 + 1/2) = 29 + 1/6$; e

$b_5 = a_5 + \frac{2}{3}a_5 = 23 + 2/3 \times 23 = 38 + 1/3$.

Em seguida, pode-se verificar que, ao adicionarmos esses números, temos a soma igual a: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1 + 2/3 + 10 + 1/2 + 1/3 + 20 + 29 + 1/6 + 38 + 1/3 = 100$. Logo, um sétimo da soma das três maiores porções é igual à soma das duas menores porções, ou seja:

$$1/7 \times (20 + 29 + 1/6 + 38 + 1/3) = 1/7 \times 84 + 1/7(3 + 1/2) = 12 + 1/2 \text{e}$$
$$1 + 2/3 + 10 + 1/2 + 1/3 = 12 + 1/2.$$

Portanto, o excesso comum ou a diferença das porções entre dois termos é

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = b_4 - b_3 = b_5 - b_4 = d = 9 + 1/6.$$

E ainda, segundo Clagett (1999), ao tratar das progressões geométricas, os matemáticos egípcios sabiam que a mais simples de todas as séries geométricas era aquela que proporcionava a duplicação, ou seja, 1, 2, 4, 8, 16, ..., em que o quociente comum de qualquer desses termos em relação ao termo predecessor era 2. Assim, essa progressão estava presente no sistema egípcio de multiplicação e divisão. Desse modo, conforme Katz:

> O algoritmo egípcio para a multiplicação foi estabelecido por um processo de duplicação continua. Para multiplicar dois números a eb, o escriba anotaria primeiro o par 1, b. Ele então duplicaria repetidamente cada número do par, até que a duplicação seguinte faria o primeiro elemento do desse par exceder o número a. Em seguida, tendo determinado as potências de 2 que adicionadas têm soma igual a, o escriba adicionaria os múltiplos correspondentes de b para obter a resposta. Por exemplo, para multiplicar 12 por13, o escriba anotaria as seguintes linhas:
>
> | | |
> |---|---|
> | 1 | 12 |
> | 2 | 24 |
> | 4 | 48 |
> | 8 | 96 |
>
> Neste ponto, ele pararia porque na próxima duplicação lhe daria 16 na primeira coluna, que é maior do que 13. Ele, em seguida, verificaria aqueles multiplicadores que somaram 13, ou seja, 1, 4 e 8, e adicionaria os números correspondentes na outra coluna. O resultado seria o seguinte: Totais 13 e 156. (KATZ, 2009, p. 4)

Além disso, outra série geométrica simples que os matemáticos egípcios utilizaram para fornecer multiplicadores fracionários unitários era a progressão seguinte: $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, ... , composta dos recíprocos da série de números naturais descrita acima. De fato, os primeiros seis termos dessa sequência de frações unitárias eram comumente empregados para frações de um heqat[1], e eram representados pelos símbolos de fração do olho de Hórus.

Ainda de acordo com Clagett (1999), podemos partir dessas duas séries geométricas básicas para uma mais complicada no *Problema 79* do Papiro Rhind. Nessa questão o escriba egípcio estava interessado em uma progressão geométrica em que o quociente comum de qualquer termo para seu antecessor fosse 7 e o primeiro termo fosse 7: [A soma de uma progressão geométrica de cinco termos dos quais o primeiro termo é 7 e o multiplicador de cada termo é 7.] Um inventário de casa [mostra como encontrar a multiplicação por 7 para encontrar cada termo como um produto em uma série]. [Multiplicar 2801 por 7:]. A primeira coluna do problema 79 do papiro de Rhind descreve o que se segue:

Tabela 2 – Problema 79

1	2801
2	5602
4	11204
Total	19607

Fonte: Clagett (1999, p. 59)

[1] **heqat** foi uma antiga unidade de volume egípcio usado para medir grão, pão e cerveja. É igual a 4,8 litros nas medidas de hoje.

[O mesmo procedimento é seguido para multiplicar cada termo na seguinte série de cinco números por 7, que então pode ser adicionado]. A segunda coluna do problema 79 do papiro de Rhind descreve o que se segue:

Tabela 3 – Problema 79

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de milho	2.401
Grãos	16.807
Total	19.607

Fonte: Clagett (1999, p. 59)

Assim, cada progressão geométrica pode ser estabelecida pela fórmula $a_n = aq^{n-1}$ ou pela fórmula de recorrência $a_1 = a$ e $a_n = qa_{n-1}$ para $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ou podemos estabelecer uma relação da seguinte forma $a_n = f(n)$, em que f é uma função exponencial, definida por $f(n) = cq^n$ para algum c. Nesse sentido, considerando o texto egípcio, podem-se observar implicitamente indícios de uma função.

2.3 Indícios da noção de função na Matemática da Grécia

A antiga civilização grega, cujo núcleo situava-se entre o mar Egeu e o mar Jônico, abarcava várias povoações que se disseminaram pelas costas do mar Negro e por colônias espalhadas em torno do mar Mediterrâneo. Segundo Joseph (2011), o intenso comércio dessas cidades com os centros de culturas mesopotâmicas e egípcias contribuíram para uma comunicação intelectual com esses antigos centros dos quais recebiam diretamente os conhecimentos, em especial, matemáticos e astronômicos.

Em relação aos trabalhos matemáticos, podem ser citadas as obras *História da Aritmética, História da Geometria e História da Astronomia*, consideradas as mais antiga sobre História da Matemática Grega e foram escritas, por volta do quarto século antes da nossa era, por um discípulo de Aristóteles de Estagira (384 – 322 a.C.), Eudemo de Rodes (350 – 290 a.C.). Em relação ao segundo tratado, segundo Heath (1981), um breve extrato dessa obra, hoje perdida, aparece no *Comentário sobre o livro I dos Elementos de Euclides*, escrito por Proclo de Lícia (411 – 485); assim, por meio dele, podemos conhecer, entre outros assuntos, que o pioneiro da Matemática Grega, ou melhor, o precursor da Geometria Grega, foi Thales de Mileto (624 – 547 a.C.) que adquiriu seus conhecimentos em suas viagens ao Egito.

Euclides de Alexandria (325 – 265 a.C.), provavelmente o fundador da escola de matemática da universidade de Alexandria, recebeu provavelmente sua formação matemática na Academia de Atenas de Platão. Euclides pode ser considerado o geômetra mais proeminente da antiguidade, conhecido por seu tratado sobre de Geometria – *Os Elementos*. No entanto, pouco se sabe sobre sua vida, exceto que ele ensinou em Alexandria. Conforme Heath, o comentarista Proclo escreveu:

> Não muito mais jovem do que estes (Hermotimo de Cólofon e Filipo de Mende ou Medna) é Euclides, que reuniu os Elementos, coletando muitos dos teoremas de Eudoxo, aperfeiçoando muitos de Teeteto, e também trazendo para demonstração irrefragável as coisas que foram apenas um pouco frouxamente provados por seus predecessores. Esse homem viveu na época do primeiro Ptolomeu. Para Arquimedes, que veio logo após o primeiro (Ptolomeu), faz menção a Euclides; e ainda dizem que Ptolomeu lhe perguntou uma vez se havia em Geometria qualquer maneira mais curta do que a dos Elementos, e ele respondeu que não havia caminho real para a Geometria. Ele é então mais jovem que os alunos de Platão, mas mais velho que Eratóstenes e Arquimedes, este último tendo sido contemporâneo, como Eratóstenes diz em algum lugar. (HEATH, 1981, p. 354)

Os conteúdos apresentados nos treze livros de *Os elementos* não estão dedicados unicamente à Geometria Plana e Espacial. Eles também contêm ideias sobre a aritmética elementar e álgebra elementares abordadas geometricamente. Os capítulos daquele tratado são: 1. Fundamentos da geometria plana; 2. Geometria dos retângulos; 3. Geometria do círculo; 4. Polígonos regulares em círculos; 5. Teoria geral de magnitudes em proporção; 6. Geometria plana de figuras semelhantes; 7. Aritmética básica; 8. Números em proporção continuada; 9. Números em proporção continuada, teoria dos números pares e ímpares e números perfeitos; 10. Segmentos de retas incomensuráveis; 11. Fundamentos de geometria espacial; 12. Áreas e volumes e o método de exaustão de Eudoxo; e 13. Os sólidos platônicos. Assim, o conjunto de conteúdo desses livros de *Os elementos* são o resultado da recopilação, ordenação, sistematização e exposição numa sequência lógica de trabalhos realizados por geômetras anteriores a Euclides.

Em especial, no livro VIII, as proposições de 1 a 27 tratam dos números em proporção contínua e de número médio em proporção. Assim, consideremos a: Proposição 1: *Caso números, em uma quantidade qualquer, estejam em proporção continuada, e os extremos deles sejam primos entre si, são os menores dos que têm a mesma razão com eles.* (Euclides, 2009, p. 299)

Segundo Heath (1981), o que denominamos de progressão geométrica é a expressão "*estejam em proporção continuada*". A proposição 1, demonstra que, se a_1,a_2, a_3, ... , a_k são termos de uma sequência de números em progressão geométrica, e se a_1 e a_k são primos entre si, e se a'_1, a'_2, a'_3, $\cdots$, a'_k é qualquer outra sequência de números em progressão geométrica com a mesma relação comum, então se tem a igualdade: $a_1 : a_k = a'_1 : a'_k$, em que a_1e a_k medem a'_1 e a'_k respectivamente, de modo que a'_1 e a'_k sejam maiores dos que a_1 e a_k respectivamente. Euclides considera os números α, β para os quais existe um γ tal que $\alpha : \gamma = \gamma : \beta$. Desse modo, quando Euclides escreve "*em uma quantidade qualquer, estejam em proporção continuada*", ele toma alguns números α, β, γ e δ e assume $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, então pode expressar $\beta = \alpha q$ e obtém-se $\alpha : \alpha q = \alpha q : \alpha q^2 = \alpha q^2 : \alpha q^3$;logo, tem-se uma sequência geométrica α, αq, αq^2, αq^3.

A trigonometria remonta a um período antigo da História da Matemática; de fato, os sábios babilônicos e egípcios, ao estudarem problemas relacionados à Astronomia ou astrologia, se depararam com elementos de trigonometria. Assim, esses eruditos acumularam uma quantidade considerável de informações astronômicas que permitiram aos geômetras gregos continuarem suas pesquisas.

> Além de acompanhar o calendário, os babilônios foram capazes de fazer previsões precisas da recorrência de vários fenômenos celestes, desde os mais simples como o momento do nascer e do pôr-do-sol até os mais complicados, por exemplo, os períodos dos eclipses lunares. Mas eles nunca aparentemente aplicaram mais do que aritmética e álgebra elementares nesse estudo, nem desenvolveram um modelo para conectar os vários fenômenos celestes. A criação inicial de tal modelo foi um produto da Grécia do século IV a.C., época da Academia de Platão. (KATZ, 2009, p. 136)

Assim, surgi um ramo da Geometria, a trigonometria, que experimenta um avanço com as pesquisas de Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.) ao utilizar razões trigonométricas, de Hiparco de Niceia (190 – 120 a.C.) na construção de tabelas de cordas de arcos de círculos, de Menelau de Alexandria (70 – 130 d.C.) com as fundamentações para uma trigonometria esférica e com os estudos de Cláudio Ptolomeu (85 – 165 d.C.).

> No processo de utilização da Matemática para estudar a Astronomia, os gregos criaram a trigonometria plana e esférica e, também, desenvolveram um modelo matemático do universo, um modelo que eles modificaram muitas vezes durante os cinco séculos entre os tempos de Platão e Ptolomeu. Entre aqueles que contribuíram para o desenvolvimento da astronomia matemática (...) são Eudoxo no século IV a.C., Apolônio no final do século III a.C., Hiparco no século II a.C., Menelau em torno de 100 e, finalmente, Ptolomeu. (KATZ, 2009, p. 134)

O geômetra Hiparco é considerado o fundador da Trigonometria. Ele construiu uma tabela com os comprimentos aproximados de cordas subtendidas por ângulos diferentes em um círculo padrão.

> O elemento básico da trigonometria de Hiparco (e também, mais tarde, de Ptolomeu) era a corda que subtendia um determinado arco (ou ângulo central) em um círculo de raio fixo. Nomeadamente, ambos os geômetras deram uma tabela listando α e a corda (α) para vários valores do arco α. Observe que a corda (α), doravante abreviada $crd(\alpha)$, é simplesmente um comprimento. Se o raio do círculo é denotado por R, então a corda está relacionada ao seno pelas equações $\frac{1}{2}crd(\alpha)/R = sen\frac{\alpha}{2}$ ou $crd(\alpha) = 2Rsen\frac{\alpha}{2}$. (KATZ, 2009, p. 143)

Na relação estabelecida acima é possível perceber indícios do conceito de função, pois existe uma maneira de associar a cada valor do ângulo α um valor para a corda.

Ptolomeu foi membro da Universidade de Alexandria que fez observações astronômicas e realizou pesquisas dessa natureza nesse instituto. Em conformidade com Katz (2009), ele é o autor de uma obra em treze livros, cujo nome original é *Sintaxe Mathematiki Syntaxis* ou *Coleção Matemática*. Nesse tratado, que foi referido pelos árabes como *Megisti Syntaxis* (A Grande Coleção), *al-Megisti* e finalmente *Almagesto*, Ptolomeu apresenta e estabelece uma conclusão às pesquisas apresentadas na obra de Hiparco e aos estudos realizados por Menelau em Trigonometria e Astronomia. No *Almagesto* encontram-se as tabelas trigonométricas e sua explicação e o método para construí-las.

> Ptolomeu começou o *Almagesto* com uma introdução básica ao conceito grego do cosmos, seguido de conteúdos estritamente matemático detalhando a trigonometria plana e esférica necessária para o cômputo das posições planetárias. A primeira empreitada de Ptolomeu foi a construção de uma tabela de cordas mais completa do que a de Hiparco. Para construir esta tabela de cordas de todos os arcos de $1/2°$ a $180°$ em intervalos de $1/2°$, bem como encontrar um esquema de interpolação entre os valores calculados, precisava de um pouco mais de Geometria do que Hiparco. Além disso, em vez de considerar $R = 57{,}18$, um valor bastante difícil de utilizar em cálculos, ele considerou $R = 60$, uma unidade no sistema sexagesimal no qual todos os cálculos de Ptolomeu foram efetuados. (KATZ, 2009, p. 146)

Em seu *Almagesto*, Ptolomeu desenvolve extensos métodos trigonométricos e, em especial, introduz a função cordas, que basicamente corresponde à função trigonométrica sen. A função cordas do ângulo α pode ser definida, utilizando a notação moderna, como $crd(\alpha) = 120\ sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Novamente, nessa relação, podem-se notar vestígios do conceito de função, pois existe uma maneira de associar a cada valor do ângulo α um valor para a corda.

2.4 Indícios da noção de função na Matemática da Índia e da Arábia

A trigonometria elaborada por Ptolomeu fundamenta-se na relação funcional entre as cordas de um círculo e o ângulo no centro que subtende cada uma das cordas. Todavia, a trigonometria elaborada pelos geômetras hindus emprega uma relação funcional entre uma semicorda e o semiângulo no centro que subtende essa semicorda.

> O primeiro tratado indiano conhecido que contém trigonometria é o Paitamahasiddhanta, escrito no início do século quinto. Este é o primeiro de vários tratados semelhantes que tratavam de Astronomia e de Matemática associada, escrita ao longo dos próximos séculos. Para fornecer uma base para os cálculos trigonométricos esféricos necessários para resolver problemas astronômicos, o Paitamahasiddhanta contém uma tabela de "semicordas", a tradução literal do termo sânscrito jya-ardha. Lembre-se de que Ptolomeu, para resolver triângulos utilizando uma tabela de cordas, muitas vezes teve de lidar com a metade da corda do dobro do ângulo. Provavelmente foi um matemático indiano desconhecido que decidiu que seria muito mais simples tabular as semicordas do dobro do ângulo ao invés das próprias cordas. Assim, neste trabalho, como em todas as obras astronômicas indianas mais recentes, é essa "função" de semicorda que é utilizada. Agora, Ptolomeu tabulou as suas cordas em um círculo de raio 60, ao passo que Hiparco, vários séculos antes, utilizara um raio de 3 438. Como este último raio foi utilizado como base da tabela na Paitamahasiddhanta, supomos que foi a trigonometria de Hiparco, ao invés de Ptolomeu que primeiro chegou à Índia. No que se segue, geralmente, utilizamos a palavra "Seno" (com S maiúsculo) para representar o comprimento da metade da corda indiana, dado que a semicorda é uma linha em um círculo de raio R, em que R sempre será especificada. Nós reservamos a palavra "seno" (com s minúsculo) para a função moderna (ou, de forma equivalente, quando o raio do círculo é 1). Assim, $Sen\,\theta = R\ sen\,\theta$. (KATZ, 2009, p. 252)

Os árabes, segundo Katz (2009), num primeiro momento, pouco interessados pelos assuntos intelectuais durante os primeiros séculos das conquistas mulçumanas e sob o poder dos primeiros califas, passam a ter gradualmente um interesse pela cultura e se mostram cada vez mais ávidos por conhecimento. Assim, durante o primeiro período dos califados, a partir do ano de 650 até 750, houve uma migração de eruditos para Bagdá e, por volta do século oitavo, os califas patrocinaram traduções de textos gregos e hindus.

> Um Siddhanta indiano foi levado a Bagdá no final do século oitavo e traduzido para o árabe. Assim, os eruditos islâmicos foram conscientizados do conhecimento trigonométrico dos hindus, que anteriormente foram adaptados da versão grega de Hiparco. Eles também ficaram cientes da trigonometria de Ptolomeu detalhada em seu Almagesto quando esse trabalho também foi traduzido para o árabe. Como em outras áreas da Matemática, os matemáticos islâmicos absorveram o que encontraram de outras culturas e, gradualmente, infundiram o assunto com novas ideias.
>
> Bem como a situação na Grécia e na Índia, a trigonometria no Islã estava intimamente ligada à Astronomia, então, em geral, os textos matemáticos sobre trigonometria foram escritos como capítulos de obras astronômicas mais extensas. Os matemáticos estavam particularmente interessados em utilizar a trigonometria para resolver triângulos esféricos, porque a lei islâmica exigia que os muçulmanos

> orientassem-se em direção de Meca quando orassem. Para determinar a direção correta e a própria localização exigiu um conhecimento extenso da solução de tais triângulos sobre a esfera da terra. A solução dos triângulos planos e esféricos também foi importante na determinação do tempo correto para as orações. Esses tempos eram geralmente definidos em relação ao início do alvorecer e ao final do crepúsculo, bem como a duração da luz do dia e a altitude do Sol em um determinado dia, noções que novamente exigiram a trigonometria esférica para determinar com precisão.
> Lembre-se que Ptolomeu utilizou apenas uma "função" trigonométrica, a corda, em seu trabalho trigonométrico, ao passo que os hindus modificavam-na para o mais conveniente seno. No início da trigonometria islâmica, tanto a corda como o seno foram utilizados simultaneamente, mas, eventualmente, estabeleceu-se o seno. (O seno islâmico de um arco, como o dos hindus, era o comprimento de uma linha particular em um círculo de raio R dado. Vamos manter a nossa notação de "Seno" para designar a função seno islâmica, com uma convenção similar para as outras funções.) Não está inteiramente explicito quem introduziu as outras funções, mas sabemos que Abu 'Abdallah Muhammad ibn Jabir al-Battani (855-929) utilizou o "seno do complemento de $90°$" (nosso cosseno) em seu trabalho astronômico projetado para ser um aperfeiçoamento do *Almagesto*. Como ele não utilizou números negativos, ele definiu o cosseno apenas para arcos até $90°$. Para arcos entre $90°$ e$180°$, ele utilizou o verseno, definido como $Versen\,\alpha = R + \,Sen(\alpha - 90°)$. Mas porque al-Battani não fazia uso da tangente, suas fórmulas não eram menos duvidosas do que as de Ptolomeu. (KATZ, 2009, p. 306-307)

As funções trigonométricas são introduzidas inicialmente como funções de um ângulo (mesmo considerando um ângulo agudo); a noção de função trigonométrica é generalizada quando as funções de um arco são consideradas e a história desse assunto evidencia a divisão numa revolução completa em 360 partes (graus), o que contempla uma tradição mesopotâmica.

2.5 Indícios da noção de função na Matemática da Europa Ocidental e a sua formalização

Conforme Katz (2009), no século doze, alguns eruditos da Europa Ocidental perceberam a necessidade de um contato direto com a civilização islâmica com o intuito de apreender para desenvolver seus saberes em várias áreas do conhecimento, em especial, a ciência matemática. Ainda segundo Katz (2009), o primeiro erudito desse período foi William Heytesbury (1313 – 1373), filósofo, teólogo, matemático e que a partir de 1330 se tornou professor da Faculdade de Merton de Oxford, com outros eruditos: Thomas Bradwardine (1295 – 1349), Richard Kilvington (1305 – 1361), John Dumbleton (1310 – 1349) e Richard Swineshead (1340 – ?).

As primeiras pesquisas sobre movimento de um corpo e suas conjecturas foram elaboradas sem qualquer experimentação física. Heytesbury trabalhou com problemas sobre o movimento de um corpo quando ele percorre uma distância durante um intervalo de tempo sob uma aceleração uniforme.

> Heytesbury, apenas alguns anos depois, em seu *Regule solvendi sophismata* (*Regras para Resolver Sofismos*, 1335), deu uma definição cuidadosa de velocidade instantânea de um corpo cujo movimento não é uniforme: “em movimento não uniforme [...] a velocidade em qualquer dado instante será medida pelo caminho que fosse descrito pelo [...] ponto, se num intervalo de tempo, se movesse uniformemente com o mesmo grau de velocidade com que se movesse nesse dado instante, qualquer que fosse o [instante] atribuído.” Tendo dado essa definição explícita, Heytesbury observou, por exemplo, que se dois pontos tivessem a mesma velocidade instantânea num instante particular, eles não percorrem necessariamente distâncias iguais em tempos iguais, pois as suas velocidades podem diferir em outros instantes.
> Heytesbury também tratou da aceleração nessa mesma seção: “Qualquer movimento é uniformemente acelerado se, em cada uma das partes iguais de tempo, adquira um aumento igual de velocidade [...]. Mas um movimento não é uniformemente acelerado [...] quando adquire [...] um maior incremento de velocidade numa parte do tempo do que em outra parte igual. [...] E, dado que qualquer grau de velocidade que se difere de uma quantidade finita da velocidade zero [...], portanto, qualquer corpo móvel pode ser uniformemente acelerado a partir do repouso até atingir qualquer grau de velocidade atribuído.” Esta afirmação fornece não apenas uma Definição muito clara de aceleração uniforme, mas também, pelo menos em forma nascente, a noção de mudança de velocidade com o tempo. Em outras palavras, a velocidade é descrita por Heytesbury como uma “função” do tempo. (KATZ, 2009, p. 355)

De acordo com Katz (2009), Heytesbury estabelece de forma retórica que quando um móvel é acelerado a partir do repouso com uma aceleração uniforme, sua velocidade final é a aceleração multiplicada pelo tempo, ou seja, que a distância percorrida por esse móvel é a metade da velocidade final multiplicada pelo tempo ou, ainda, a distância percorrida é a metade da aceleração pelo quadrado do tempo.

> Como determinar a distância percorrida por um corpo que está sendo acelerado uniformemente? A resposta, geralmente conhecida hoje como a **regra da velocidade média**, foi pela primeira vez declarada por Heytesbury nesse mesmo trabalho: “quando qualquer corpo móvel é uniformemente acelerado a partir do repouso para algum grau dado [de velocidade], nesse tempo, percorrerá a metade da distância que percorreria se, no mesmo tempo, fosse movida uniformemente para o grau [final] [da velocidade] [...]. Para esse movimento, como um todo, corresponderá a [...] precisamente metade desse grau que é a sua velocidade terminal”. Em notação moderna, se um corpo é acelerado a partir do repouso num tempo t com uma aceleração uniforme a, então sua velocidade final é $v_f = at$. O que a Heytesbury diz é que a distância percorrida por esse corpo é $s = \frac{1}{2}v_f t$. Substituindo a primeira fórmula na segunda, obtém-se a fórmula moderna padrão $s = \frac{1}{2}at^2$. (KATZ, 2009, p. 355-356)

Nicole Oresme (1323 – 1382) em sua obra *Tratactus de configurationibus qualitatum et motuum* – 1350 (*Tratado sobre a Configuração de Qualidades e Movimentos*), por meio da latitude das formas, elabora uma excelente ideia sobre a relação de variáveis dependentes e independentes produzida por um corpo que se move com aceleração constante. Ele esboçou um diagrama que contém longitude (sentido horizontal) e latitude (sentido vertical) e a variação da posição do corpo foi indicada por segmentos de retas dispostos na latitude e apoiadas na longitude, nos pontos correspondentes ao tempo registrado. Essas conceituações das linhas verticais e horizontais de Oresme são expressas por Katz:

> A partir dessas linhas retas, Oresme construiu o que ele denominou de **configuração**, uma figura geométrica constituída por todas as linhas perpendiculares desenhadas sobre a linha de base. No caso de velocidades, a linha de base representava o tempo, ao passo que as perpendiculares representavam as velocidades em cada instante. A figura toda representava a distribuição de velocidades, que Oresme interpretava como representando a distância total percorrida pelo objeto em movimento. Oresme não utilizou o que denominamos de coordenadas. Não havia um comprimento fixo específico pelo qual um determinado grau de velocidade fosse representado. A ideia importante era apenas que "as intensidades iguais são designadas por linhas iguais, uma intensidade dupla por uma linha dupla, e sempre da mesma maneira se uma progredir proporcionalmente". Para Oresme, então, uma qualidade uniforme, por exemplo, um corpo que se move com velocidade uniforme, é representado por um retângulo, pois em cada ponto a velocidade é a mesma. A área do retângulo representa a distância total percorrida. A distância percorrida por um corpo começando do repouso e depois se movendo com aceleração constante, representando o que Oresme denomina uma qualidade "uniformemente irregular", cuja intensidade varia uniformemente, é a área de um triângulo reto. (KATZ, 2009, p. 356-357)

Galileu Galilei (1564 –1642) e Johann Klepler (1571 – 1630), dois astrônomos, proporcionaram um desenvolvimento um pouco mais estruturado das ideias de funcionalidade, por meio da investigação experimental de fenômenos naturais. Klepler, ao estudar os movimentos dos planetas, enunciou leis do movimento planetário. De fato, conforme Kline (1998), sua inspiração para o cálculo veio dos esforços para compreender os movimentos dos planetas mediante a hipótese heliocêntrica estabelecida por Copérnico em seu tratado *De revolutionibus orbium coelestium* – 1543 (*Sobre as Revoluções das Esferas Celestiais*). Kepler, em seus esforços para simplificar a descrição de Copérnico sobre o movimento dos planetas, formulou três leis. Essas leis, que Kepler aceitou unicamente com base no fato de que se ajustavam aos seus dados, são as seguintes:

1. cada planeta move-se em uma órbita elíptica com o Sol em um foco de cada elipse;
2. a linha que une o Sol e qualquer dado planeta varre áreas iguais em tempos iguais;
3. o quadrado do período de revolução de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior do caminho elíptico do planeta em torno do Sol.

Na formulação das leis de Kepler podemos observar as relações entre as variáveis dependentes e as variáveis independentes.

Galileu Galilei focava os fenômenos naturais e conduziu estudos que envolvem variáveis dependentes e independentes presente em sua lei. Conforme Dugas,

> Graças a uma carta que Galileu escreveu a Paolo Sarpi, datada de 16 de outubro de 1604, sabemos que, Galileu, acreditava na lei agora clássica das distâncias $s = constante \times t^2$.
> "As distâncias percorridas em movimento natural estão em proporção quadrada com os tempos de queda. Consequentemente, as distâncias percorridas em tempos iguais estão relacionadas entre si como os números ímpares consecutivos a partir da unidade."
> No entanto, no início Galileo associou essa lei das distâncias com uma lei incorreta das velocidades, isto é, $v = k \cdot s$. Lembramos que, já no século XIV, Albert da Saxônia hesitou entre essa lei e a correta, $v = k \cdot t$. (DUGAS, 2011, p. 132)

Neste período surgem nomes como René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) que se destacaram por desenvolverem a base da Geometria Analítica. Neste sentido, explica Katz:

> Tanto a *Introdução* de Fermat como a *Geometria* de Descartes apresentam as mesmas técnicas básicas de relacionar álgebra e geometria, técnicas cujo desenvolvimento posterior culminou na disciplina moderna da geometria analítica. Ambos os homens chegaram ao desenvolvimento dessas técnicas como parte do esforço de redescobrir as técnicas gregas "perdidas" de análise. Ambos estavam intimamente familiarizados com os clássicos gregos, em particular com o *Domínio de Análise* de Pappus, e ambos testaram suas novas ideias com o problema do lugar geométrico de quatro linhas de Apolônio e suas generalizações. Mas Fermat e Descartes desenvolveram abordagens diferentes de seu assunto comum, diferenças enraizadas em seus diferentes pontos de vista em relação à Matemática. (KATZ, 2009, p. 473)

Descartes não elaborou um sistema de coordenadas que o permitia localizar pontos nesse sistema. De acordo com Katz (2009),

> Descartes decidiu sobre a característica definidora de curvas "geométricas" como as que se seguem por movimentos contínuos? Parece que sua razão básica para definir tais curvas foi que "todos os pontos dessas curvas (...) deve ter uma relação definida com todos os pontos de uma linha reta, e que essa relação deve ser expressa por meio de uma única equação". Em outras palavras, qualquer curva desse tipo é expressa como uma equação algébrica. (...) Finalmente, ele estava convencido de que uma curva para a qual qualquer ponto poderia ser construído também poderia ser gerada por movimento contínuo. (KATZ, 2009, p. 483)

No final do século XVII, Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) foram responsáveis pela criação do Cálculo e, dessa forma, contribuíram para que outros matemáticos refletissem sobre o conceito de função.

Os estudos de Newton eram voltados para a Física, porém utilizava-se da Matemática. De fato, segundo Katz (2009), em seu estudo sobre série de potência, Newton representou algumas funções em séries de potência e foi o primeiro a utilizar o termo "variáveis independentes” e, além disso, estabeleceu uma correlação entre as fluxões segundo uma correlação estabelecida entre as fluentes.

> Mas, naturalmente, havia muito mais em seu *Tratado sobre os Métodos*, começando com os problemas que ele apenas indicou em sua segunda carta a Leibniz mediante um anagrama, os dois problemas centrais, cujas soluções resolveriam todas as dificuldades sobre as curvas enfrentadas por seus predecessores:
> 1. Dado o comprimento do espaço continuamente [isto é, a cada tempo], para encontrar a velocidade de movimento em qualquer momento proposto.
> 2. Dada a velocidade do movimento continuamente, para encontrar o comprimento do espaço descrito em qualquer momento proposto.
> Para Newton, as ideias básicas do cálculo tinham de ver com o movimento. Toda variável em uma equação deveria ser considerada, pelo menos implicitamente, como uma distância dependente do tempo. Certamente, essa ideia não era nova em Newton, mas ele concebeu a ideia de movimento fundamental: “Considero as quantidades como se fossem geradas pelo aumento contínuo na maneira de um espaço sobre o qual um objeto em movimento descreve seu percurso”. O aumento constante do tempo em si, Newton considerou praticamente um axioma, pois não deu uma definição de tempo. O que ele definiu foi o conceito de fluxão: A **fluxão** $\dot{x}$ de uma quantidade x dependente do tempo (denominada de **fluente**) era a velocidade com que x aumentava por meio de seu movimento gerador. Em seus primeiros trabalhos, Newton não propôs qualquer outra definição de velocidade. O conceito de movimento continuamente variável era, segundo Newton, completamente intuitivo. Newton solucionou o problema 1 mediante um algoritmo perfeitamente direto que determinou a relação das fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ de dois fluentes x e y relacionadas mediante uma equação da forma $f(x, y) = 0$: “Organizar a equação pela qual a relação dada é expressa de acordo com as dimensões de alguma quantidade fluente, digamos x, e multiplica os seus termos por qualquer progressão aritmética e depois por $\frac{\dot{x}}{x}$. Execute essa operação separadamente para cada uma das quantidades fluentes e, em seguida, coloque a soma de todos os produtos igual a nada e você tem a equação desejada”. Como exemplo, Newton apresentou a equação $x^3 + ax^2 + axy - y^3 = 0$. Primeiro, considerando essa como um polinômio de grau 3 em x, Newton multiplicou utilizando a progressão 3, 2, 1, 0 para obter $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$. Em seguida, considerando a equação como um polinômio de grau 3 em y e utilizando a mesma progressão, ele calculou $ax\dot{y} - 3y^2\dot{y}$. Colocando a soma igual a nada resulta a relação desejada $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$. Em termos de uma proporção, esse resultado é $\dot{x}:\dot{y} = (3y^2 - ax):(3x^2 - 2ax + ay)$. (KATZ, 2009, p. 550-551)

Leibniz, segundo Katz (2009), utilizou em seus trabalhos os seguintes termos: coordenadas, abcissas, ordenadas, constantes e o próprio termo “função” que se encontra na obra *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* – 1673 (*O método inverso de tangentes, ou sobre funções*).

Leibniz elaborou sua versão de cálculo diferencial e integral por volta dos anos de 1675 a 1677. Em sua constituição optou por uma abordagem conceitual, muito diferente da proposta por Newton. Assim, em vez de conceituar as derivadas mediante o uso de um ponto material que se move ao longo de uma curva e com as taxas de mudança de suas coordenadas x e y, Leibniz, em sua apresentação dessas ideias, considerou alterações infinitesimais nessas coordenadas x e y, indicando-as pelos símbolos dx e dy e concebeu a reta tangente à curva como uma reta secante conectando esses dois pontos infinitesimamente próximos a essa curva e a derivada como a razão desses diferenciais dy e dx.

> Como parte de sua busca pela notação apropriada para representar suas ideias, Leibniz apresentou as duas notações d e $\int$ para representar a sua generalização da ideia de diferença e soma. A última é simplesmente uma forma alongada da letra S, a primeira letra da palavra latina *summa*, ao passo que a primeira é a primeira letra da palavra latina *differentia*. Para Leibniz, ambas dy e $\int y$ são variáveis. Em outras palavras, d e $\int$ são operadores que atribuem uma variável infinitamente pequena e uma variável infinitamente grande, respectivamente, à variável finita y. Mas dy sempre é pensada como uma diferença real, que entre dois valores próximos da variável y, ao mesmo tempo $\int y$ é concebido como uma soma real de todos os valores da variável y de um valor fixo determinado até um valor dado. Uma vez que dy é uma variável, também pode ser operado por d para dar um diferencial de segunda ordem, escrito como $d\,dy$, ou mesmo um de ordem superior. Talvez seja difícil para um leitor moderno conceber essas diferenças infinitesimais e somas infinitas, mas Leibniz e os seus seguidores tornaram-se extremamente habilidosos em utilizar esses conceitos no desenvolvimento de métodos para resolver muitos tipos de problemas. (KATZ, 2009, p. 567-568)

Podemos afirmar que esse período inaugural do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral no século dezessete proporcionou estudos que possibilitaram a realização de uma definição de função, que, evidentemente, passou por várias reformulações até chegar numa definição ampla e profunda. Vários matemáticos e filósofos se perguntaram: O que é uma fórmula? Qual a relação da fórmula com a representação gráfica? Ou com uma tabela de valores? Uma lei de dependência? Consequentemente, essas questões contribuíram para dificultar a compreensão e a conceituação do conceito de função. Entretanto, a ideia vaga de funcionalidade que até então causava hesitação por parte dos matemáticos e filósofos, parece que proporcionou, ainda mais, a ampliação desse tema.

Nesta perspectiva, na escola dos dias de hoje, como introduzir o conceito de função? Será como no desenvolvimento histórico desse conceito? Começando por tabela e incentivando a noção de funcionalidade? Falta algo? Ou, por si só, a ideia de funcionalidade se sustenta? Percebe-se que a história do conceito não acaba por aqui, mas a ideia de funcionalidade contribuiu para várias modificações da definição que hoje conhecemos.

A definição mais explícita do conceito de função no século dezessete, porém não com esse nome, foi proposta por James Gregory (1638 – 1675), em sua obra *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* – 1667 (*A Verdadeira Quadratura do Círculo e da Hipérbole*), segundo Siu (1995), denominou função da seguinte forma:

> Denominamos uma quantidade composta (*compositum*) de outras quantidades se essa quantidade resultar dessas outras quantidades por adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável. (SIU, 1995, p. 108)

Ainda conforme Siu (1995), Gregory referiu-se a uma quantidade obtida por meio das operações como "composta analiticamente", em que a palavra "analítica" foi utilizada conforme significado estabelecido por François Viète.

O termo função e sua definição assume um novo significado nos trabalhos de Jakob e Johan Bernoulli. De fato, conforme Siu:

> [...] o termo "função" assumiu um novo significado como um termo geral para várias quantidades geométricas associadas a um ponto variável na curva. (Isto também apareceu nos artigos posteriores de Leibniz em 1692 e 1694. A palavra também foi utilizada no mesmo sentido por Jakob Bernoulli em 1694). Em uma carta datada de 2 de setembro de 1694 de Johann Bernoulli a Leibniz, na qual Bernoulli expandiu a integral $\int n\,dz$ em uma série infinita $nz - \frac{1}{1\cdot 2}z^2\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\frac{d^2n}{dz^2} - \cdots$, ele disse que "por n entendi uma quantidade de alguma forma formada por quantidades indeterminadas e [quantidades] constantes". Em uma carta datada de 29 de julho de 1698 de Leibniz a Johann Bernoulli, ele disse que "eu estou satisfeito por utilizar o termo função em meu sentido". Bernoulli utilizou a notação φx, sem parênteses. Os parênteses, como sinal para a função foram empregados por Euler em seu artigo de 1734. (SUI, 1995, p. 108-109)

Johann Bernoulli definiu função da seguinte forma: *Denomina-se aqui uma função de uma variável uma quantidade composta de qualquer maneira com qualquer dessa variável e de constantes*.

O matemático mais proeminente do período da Histórica da Matemática que se estende de 1727 até sua morte é, obviamente, Leonhard Euler (1707 – 1783). As pesquisas desse erudito enriqueceram quase todos os ramos da Matemática, da Física e de outros ramos do conhecimento científico. Na verdade, seus estudos foram importantes para o desenvolvimento de vários ramos da Matemática, por exemplo: Análise Matemática Real e Complexa, Álgebra, Teoria dos Números, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais, Probabilidade, Cálculo Variacional, etc.

Euler publicou seu primeiro tratado em dois volumes sobre Análise Matemática, intitulado *Introductio in analysis infinitorum* – 1748 (*Introdução à Análise do Infinito*). Neste trabalho, Euler está essencialmente preocupado com processos infinitos da análise, isto é, expansão de funções em séries infinitas, produtos infinitos, frações contínuas, estudo de uma ampla variedade de funções algébricas, trigonométricas e hiperbólicas. Assim, em virtude desses estudos, ele estabeleceu a ideia de uma função como um conceito fundamental para a análise matemática. Já no prefácio do Livro I, daquele tratado, apresentou a definição de função e salientou sua importância para o estudo da Análise Infinitesimal. De fato, Euler define função da seguinte forma:

> 1. Uma quantidade constante é uma quantidade determinada mantendo o mesmo valor permanentemente. [...] 2. Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada ou quantidade universal que compreende em si todos os valores determinados. [...] 4. Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira a partir dessa quantidade variável e números ou quantidades constantes. (SUI, 1995, p. 108-109)

Ainda em conformidade com Sui (1995), observamos que Euler utiliza em sua definição alguns termos como expressão analítica com série de potência com uma forma universal e generalidade da variável. No livro II de sua *Introdução à Análise do Infinito*, Euler estendeu sua noção de função com o intuito de incluir as denominadas "funções descontínuas".

O matemático Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), em sua obra *Théorie des fonctions analytique* – 1797 (*Teoria das funções analíticas*), definiu função da seguinte maneira:

> Denomina-se função de uma ou várias quantidades qualquer expressão de cálculo em que essas quantidades entram de qualquer maneira, misturadas ou não com algumas outras quantidades que são consideradas dadas e valores invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem tomar todos os valores possíveis. [...] Denotamos, em geral, pela letra f ou F colocada diante de uma variável qualquer função dessa variável, ou seja, qualquer quantidade dependente dessa variável e que varia com ela de acordo com uma determinada lei. (SUI, 1995, p. 109)

Assim como Lagrange, o matemático Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843), em sua obra *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* – 1797 (*Tratado do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral*), define o que entende por função:

> Toda quantidade cujo valor depende de uma ou mais quantidades é denominada uma função dessas últimas, sabendo-se ou ignorando-se que operações são necessárias para chegar nestas últimas à primeira. (SUI, 1995, p. 109)

Lagrange e Lacroix definem o conceito de função de forma bem geral, no entanto, percebe-se a semelhança com relação à ideia de quantidades variáveis de Euler. Lagrange também afirma que qualquer função pode ser expandida como uma série de potência.

Segundo Sui (1995), o principal impulso para o desenvolvimento do conceito de função no século dezoito surgiu em virtude de uma controvérsia sobre um problema de física-matemática, ou seja, sobre o movimento de vibração de uma corda tensa fixada em duas extremidades. O estudo desse problema resultou importante para o progresso da Análise Matemática. Em poucas palavras, as discussões sobre esse assunto diziam respeito às classes de funções que poderiam ser permitidas na Análise Matemática na perspectiva do matemático, do físico e físico-matemático, carreira que surgia nesse período. O problema da corda vibrante foi apresentado por Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783), que o deduziu e chegou à seguinte equação: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, y(0,t) = y(L,t) = 0$ cuja solução é $y(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$. As únicas restrições que ele impôs sobre a função f foram que seja periódica, ímpar e em todos os pontos (duas vezes) diferenciáveis. Continuando as pesquisas sobre o problema da corda vibrante, Daniel Bernoulli (1700 – 1782) encontrou uma solução expressa por meio de uma série infinita de funções trigonométricas. De fato, em conformidade com Katz:

> A solução mais física do problema de Bernoulli era explorar a ideia de que uma corda vibrante representa potencialmente uma infinidade de tons, cada sobreposto aos outros e cada um sendo representada separadamente como uma curva de seno. Seguiu-se, embora Bernoulli não tenha escrito o resultado nessa generalidade, que o movimento de uma corda vibrante pode ser representado pela função $y = \alpha\, sen\, \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi t}{l} + \beta\, sen\, \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{l} + \gamma\, sen\, \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi t}{l} + \cdots$, em que a soma é infinita. A função de posição inicial, sobre a qual Euler e d'Alembert discordaram, é então representada pela soma infinita $y(0,x) = \alpha\, sen\, \frac{\pi x}{l} + \beta\, sen\, \frac{2\pi x}{l} + \gamma\, sen\, \frac{3\pi x}{l} + \cdots$. (KATZ, 2009, p. 610)

Em 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) apresentou um artigo à Academia de Ciências da França que trata do problema da propagação do calor em chapas metálicas. Segundo Eves (2007), Fourier afirmou que uma função qualquer no intervalo $(-\pi, \pi)$ pode ser representada nesse intervalo numa soma de funções seno e cosseno, ou seja,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen\, nx)$$

em que os coeficientes a e b são números reais convenientes.

> Essa série é conhecida como *série trigonométrica* e não era novidade para os matemáticos daquela época. De fato, já se provara que muitas das funções mais ou menos "bem comportadas" podiam ser representadas por meio dessas séries. Mas Fourier afirmou que toda função definida em $(-\pi, \pi)$ pode ser representada dessa maneira. Os sábios da Academia encararam com muito ceticismo a afirmação de Fourier e o artigo, julgado por Lagrange, Laplace e Legendre, foi rejeitado. Todavia, para encorajar Fourier a desenvolver suas ideias mais cuidadosamente, a Academia institui um grande prêmio, tendo como tema a propagação do calor, a ser outorgado em 1812. Fourier submeteu um artigo revisado à Academia em 1811, artigo esse que, julgado por uma comissão que incluía, entre outros, os mesmos juízes da

> oportunidade anterior, acabou ganhando o prêmio, mas devido às críticas recebidas pela falta de rigor, não foi recomendado para publicação nas *Mémoires* da Academia.
> Ressentido, Fourier continuou suas pesquisas sobre o calor e em 1822, posteriormente a sua mudança para Paris (em 1816), publicou um dos grandes clássicos da Matemática, a *Théorie Analytique de la Chaleur* (*Teoria Analítica do Calor*). Dois anos depois da publicação dessa grande obra, Fourier tornou-se secretário da Academia e, nessa condição, pôde fazer que seu artigo de 1811 fosse publicado na forma original nas *Mémoires* da Academia. (EVES, 2007, p. 527)

Assim, em virtude dessas pesquisas, surgiu a pergunta: que espécies de funções podem ser representadas por séries trigonométricas? Nesse contexto, Fourier definiu o que entendia sobre função:

> Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas arbitrárias. Dada uma infinidade de valores atribuídos à abscissa x quando há igual número de ordenadas $f(x)$. [...] Não supomos que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas sucedem-se de qualquer maneira, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade. (SUI, 1995, p. 112)

Embora essa exposição apresente semelhança com a definição moderna, Fourier, em sua afirmação, parece estar preocupado com as funções descontínuas e os resultados de suas pesquisas mostram que a função não precisava ser bem-comportada como os matemáticos estavam acostumados.

Na escola Politécnica, um contemporâneo de Fourier, Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) proferiu suas conferências sobre análise matemática; os cursos dessas conferências foram publicados em três livros: *Cours d'analyse de L'ecole Royale Polytechnique* – 1821 (*Curso de Análise da Escola Real Politécnica*), *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* – 1823 (*Compêndio das Lições sobre o Cálculo infinitesimal*) e *Leçons sur le calcul différentiel* – 1829 (*Lições sobre o Cálculo Diferencial*). Estes tratados têm uma importância especial para o desenvolvimento posterior da Matemática, porque nessas obras, pela primeira vez, construiu a análise matemática sobre o conceito da teoria de limites. Em especial, o *Cours d'analyse* está dedicado aos estudos das funções elementares de variável real e variável complexa. Por sua vez, Cauchy, em seu livro *Cours d'analyse*, definiu função como:

> Quando as quantidades variáveis estão ligadas de tal forma que, quando o valor de uma delas é dado, podemos inferir os valores das outras, normalmente concebemos que essas várias quantidades são expressas por meio delas, então toma o nome de variável independente; e as quantidades remanescentes, expressas por meio da variável independente, são aquelas que se denominam funções dessa variável. (SUI, 1995, p. 112)

Ainda que novas definições surgissem, o conceito euleriano de função foi mantido por muito tempo, mesmo que inadequado. A resistência em aceitar as ideias modernas foi algo doloroso para os matemáticos e filósofos da época.

Segundo Boyer (1974), o século dezenove foi um período de avanço no desenvolvimento da Matemática e da aritmetização da Análise Matemática que ganhou foco com os trabalhos de: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Niels Henrik Abel (1802 – 1829), Bernard Bolzano (1781 – 1848), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Um estudo mais aprofundado sobre esse tema foi estabelecido por Karl Weierstrass (1815 – 1897), Richard Dedekind (1831 – 1916), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) e Georg Cantor (1845 – 1918). Com essa nova orientação da aritmetização da Análise Matemática, novos conceitos de função surgiram no interior da Matemática. De fato, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856), em seu trabalho *On the convergence of trigonometric series* – 1838 (*Sobre a convergência de séries trigonométricas*), definiu função da seguinte forma:

> A concepção geral exige que uma função de x seja denominada um número que é dado para cada x e que muda gradualmente junto com x. O valor da função pode ser dado por uma expressão analítica ou por uma condição que oferece um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou por fim, a dependência pode existir, mas permanece desconhecida. (Sui, 1995, p. 113)

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), depois de demonstrar a convergência da série de Fourier, definiu de forma generalizada o conceito de função na sua obra (*Über die Darstellung ganz wilkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen*, 1837). Assim, nesse trabalho, Dirichlet definiu função:

> Consideram-se a eb como dois valores fixos e x como uma quantidade variável que pode levar progressivamente todos os valores entre a e b. Agora, se a cada x corresponde um único y finito, de tal forma que, como x passa continuamente pelo intervalo de a até b, $y = f(x)$ também muda gradualmente, então y é denominada função contínua de x nesse intervalo. Não é aqui absolutamente necessário que y dependa de x de acordo com a mesma lei ao longo de todo o intervalo; na verdade, nem sequer é preciso pensar em uma dependência expressa por operações matemáticas. Apresentada geometricamente, isto é, com x ey considerados como a abscissa e a ordenada, uma função contínua aparece como uma curva conectada que para cada valor da abscissa contida entre a e b tem apenas um ponto. [...] Ao passo que se determina a função para apenas uma parte do intervalo, a maneira de sua extensão ao resto do intervalo permanece completamente arbitrária. (SUI, 1995, p. 113)

A definição de Dirichlet é muito mais ampla do que as demais, pois é acentuada pela ideia de relação entre conjuntos numéricos. Definição que foi seguida também por Georg

Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), no ano de 1851, na publicação de seu artigo *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse*,

> Suponhamos que z seja uma quantidade variável que possa assumir gradualmente todos os valores reais possíveis; então, se a cada um de seus valores corresponde um único valor da quantidade indeterminada w, w é denominada função de z; e se, como z passa continuamente por todos os valores entre dois valores fixos, w também muda continuamente, então essa função é dita contínua dentro de seu intervalo. (SUI, 1995, p. 112-113)

Hermann Hankel (1839 – 1873), aluno de Riemann, publicou em sua obra *Untersuchungenüber die unendlichoftoszillierendenundunstetigen Funktionen* sua concepção de função:

> y é denominada função de x quando a cada valor da quantidade variável x dentro de certo intervalo corresponde um valor definido de y, independentemente se y depende de x de acordo com a mesma lei em todo o intervalo ou não, ou se a dependência pode ser expressa por uma operação matemática ou não. (...) Esta definição puramente nominal, que, a seguir, associarei ao nome de Dirichlet, porque ela reverte fundamentalmente às suas obras sobre as séries de Fourier, que demonstra claramente a indefensabilidade de todos os conceitos mais antigos, não é mais suficiente para as necessidades da Análise Matemática, em que as funções desse tipo não possuem propriedades gerais e, com isso, todas as relações entre os valores da função e os vários valores do argumento se desfazem. (SUI, 1995, p. 114)

No final do século dezenove, segundo Eves (2004), a teoria de conjuntos de Cantor ampliou o conceito de função de maneira a abranger a relação entre dois conjuntos de elementos quaisquer, em que a noção de função desempenha um papel de aplicação ou mapeamento. Assim, vários matemáticos aderiram ao conceito de aplicação para tentar formalizar o conceito de função. Dentre eles, Richard Dedekind (1831 – 1916), em sua obra *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*Que são e para que servem os números naturais?*), publicada em 1887, define função como um mapeamento, ou seja, uma aplicação:

> Por um mapeamento de um sistema S, uma lei é entendida de acordo com a qual a cada um dos elementos determinados s de S associa-se um determinado objeto, que é denominado a imagem de s e é denotado por $\varphi(s)$. (SUI, 1995, p. 116)

Também Giuseppe Peano (1858 – 1932), em seu trabalho *Sulla definizione di funzione* – 1911 (*Sobre a definição de função*), definiu função deste modo:

> A função é uma relação especial, pela qual a cada valor da variável corresponde a um único valor. Pode-se definir em símbolos:
> $Functio = Relatio \cap u \ni [y; x \in u, z; x \in u \cdot \mathfrak{D}_{x,y,z} \cdot y = x]$,
> Que se traduz como: uma função é uma relação u tal que, se dois pares y; x e z; x, tendo o mesmo segundo elemento, satisfazem a relação u, necessariamente segue que $y = x$ qualquer que seja x, y, z. (SUI, 1995, p. 116)

Peano desenvolveu, pela primeira vez, uma linguagem com puro simbolismo formal. O conceito moderno de função já estava preparado para sua formalização. Foi nessa perspectiva que Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980) definiu função em suas obras *Topologie* – 1933 (*Topologia*) e *Introduction to Set Theory and Topology* – 1961 (*Introdução à Teoria de Conjuntos e Topologia*):

> Sejam X e Y dois conjuntos dados. Por uma função cujos argumentos operam sobre o conjunto X (domínio) e cujos valores pertencem ao conjunto Y (imagem) concebemos o subconjunto f do produto cartesiano $X \times Y$ com a propriedade que para todo $x \in X$ existe um e somente um Y tal que $\langle x, y \rangle \in f$. O conjunto de todas essas funções f é denotado por Y^X. Normalmente escrevemos $y = f(x)$ em vez de $\langle x, y \rangle \in f$. (SUI, 1995, p. 116)

Nicolas Bourbaki, um pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos (J. Delsarte, H. Cartan, A. Weil, J. Dieudonné, C. Chevalley, entre outros), escreveu várias obras sobre alguns ramos da Matemática, entre elas, *Théorie des ensembles* – 1939 (*Teoria dos Conjuntos*). Nessa obra definiu função deste modo:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ou não serem distintos. Uma relação entre um elemento variável x de$E$ e um elemento variável y de F é denominada relação funcional em y se, para todo $x \in E$, existe um único $y \in F$ que está dado na relação com x. Damos o nome de função à operação que associa a cada elemento $x \in E$ com o elemento $y \in F$ que está dado na relação com x; y é dito ser o valor da função pelo elemento x, e a função é dita ser determinada pela relação dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (SUI, 1995, p. 116)

A evolução do conceito de função fica explicita ao analisarmos as obras de cada matemático que se dedicou a buscar uma definição para esse conceito. O século vinte foi marcado por definições que tinham como base a teoria dos conjuntos. Nos anos de 1960 houve discussões em fundamentar o conceito de função na teoria das categorias, criada em 1942 por Samuel Eilenberg (1913 – 1998) e Leslie Saunders Mac Lane (1909 – 2005).

No século vinte e um, nos livros-texto utilizados em várias universidades, podemos verificar que há diferentes maneiras de descrever o conceito de função. Por exemplo: no livro *Mathematical Analysis I*, publicado em 2004 por Vladimir A. Zorich, a definição de função é sucinta:

> O termo “função” tem uma variedade de sinónimos úteis em diferentes domínios da Matemática, dependendo da natureza dos conjuntos X e Y: mapeamento, transformação, morfismo, operador, funcional. (ZORICH, 2004, p. 12)

Embora resumida, a definição de Vladimir A. Zorich nos mostra o quanto é complexa a formalização do conceito. Já no livro *Analysis I*, publicado em 2006, de Herbert Amann e Joachim Escher, temos,

> Seja G um subconjunto de $X \times Y$ tendo a propriedade que, para cada $x \in X$, existe exatamente um $y \in Y$ com $(x, y) \in G$. Assim, podemos definir função $f: X \longrightarrow Y$ utilizando a regra de que, para cada $x \in X$, $f(x) \coloneqq y$, em que $y \in Y$ é o único elemento tal que $(x, y) \in G$. Claramente, $graf(f) = G$. Desse modo, essa observação motiva a seguinte definição: Uma função $f: X \longrightarrow Y$ é uma terna ordenada (X, G, Y) com $G \subseteq X \times Y$ tal que, para cada $x \in X$, existe exatamente um $y \in Y$ com $(x, y) \in G$. Assim, essa definição, evita a útil, mas a imprecisa expressão “regra” e só utiliza a definição de conceitos teóricos. (ESCHER; AMANN, 2006, p. 16)

Saminathan Ponnusamy, no livro *Foundations of Mathematical Analysis*, publicado em 2012, elabora uma definição do conceito de função extensa, abordando a teoria dos conjuntos e uma linguagem matemática caracterizada. Desse modo, define:

> Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de um conjunto universal, por exemplo, $\mathbb{R}$. A função ou mapeamento f de X para Y é uma regra, ou fórmula, ou atribuição, ou relação de associação que atribui a cada $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. Escrevemos $f: X \longrightarrow Y$ para denotar o mapeamento f de X para Y. Para ser mais preciso sobre a regra de associação, dizemos que uma função de X para Y é um conjunto f de pares ordenados em $X \times Y$ de tal forma que para cada $x \in X$ existe um único elemento $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$; isto é, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y'$. O conjunto X em que a função f é definida é denominado o domínio de f, e escrevemos $dom(f)$ para X. Denominamos o conjunto Y do contradomínio de f. Quando definimos uma função descrevendo seu efeito sobre os elementos individuais, utilizamos o símbolo $\longmapsto$; assim, “a função $x \longmapsto y$ de X para Y” significa que f é uma função de X para Y, tendo cada elemento x de X para um único elemento y de Y. Na prática, denotamos o único y por$f(x)$ e dizemos que $f(x)$ é a imagem de x em f, ou o valor de f em x. Assim, quando utilizamos a notação $(x, y) \in f$, podemos escrever $y = f(x)$. (PONNUSAMY, 2012, p. 14)

Para Jewgeni H. Dshalalow, no livro *Foundations of Abstract Analysis*, publicado em 2013, função é definida da seguinte forma:

> (i) Sejam X e Y dois conjuntos. O conjunto $\{(x, y): x \in X, y \in Y\}$ de todos os pares ordenados de elementos de X e Y é denominado o *produto cartesiano* ou *produto direto* de X e Y e é denotado por $X \times Y$. Quando $X = Y$ escrevemos $X \times X = X^2$.
> (ii) Qualquer subconjunto f de $X \times Y$ é denominado uma *relação binária*.

(iii) Uma relação binária $f \subseteq X \times Y$ é denominada uma função de valor único (ou apenas uma função) sempre que se (x, y_1) e (x, y_2) são elementos de f, então $y_1 = y_2$. Dizemos, também, que a função f é um mapa (ou mapeamento ou transformação) a partir X para Y e denotamos isso com mais frequência pela tripla $[X, Y, f]$ ou por $f: X \longrightarrow Y$ ou $(x, f(x))$ ou por $y = f(x)$ ou por $x \longmapsto f(x)$.
Note que, embora ambos X eY são componentes das ternas$[X, Y, f]$, alguns pares (x, y) de $X \times Y$ não precisam pertencer a f, se f é uma função ou uma relação binária.
(iv) Para uma função f (como um subconjunto de $X \times Y$) denotamos $D_f = \{x \in X: (x, y) \in f\}$ e denominamos de domínio da f. Quando uma função $[X, Y, f]$ é dada, seu domínio é geralmente não especificado. Este último exige uma rigorosa motivação. Por exemplo, vamos considerar $X = Y = \mathbb{R}$ e $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Assim, $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e para qualquer $x \in (-1,1)$, não há elemento a partir de Y sob f. Podemos dizer que f é definida apenas para $x \in D_f$.
(v) Outro componente de uma função é a sua imagem, $R_f = \{y \in Y: \exists x \in D_f, f(x) = y\}$.
Um superconjunto de R_f (tal como Y) é referido como um contradomínio. Em outras palavras, R_f é o subconjunto de todos esses elementos de Y, que toma parte na relação $f \subseteq D_f \times Y$.
(vi) Se $x \in D_f$, então $f(x)$ $(\in R_f)$ é denominado a imagem de x sob f. Pela definição acima de uma função de valor único, para cada x existe uma imagem única $f(x)$. (Um conceito "ampliado" de uma função permite mais de uma imagem de cada ponto x sob$f$. Qualquer função f é denominada de valor múltiplo. O leitor está definitivamente familiarizado com os princípios da Análise Complexa, em que as funções são comuns nessa teoria. Sabe-se também, que nesse caso, a imagem de uma função de valores múltiplos pode ser dividida em subconjuntos disjuntos dois a dois, de modo que a função é então dividida em certo número de funções de um valor, denominados ramos.)
Note-se que na definição principal $[X, Y, f]$ de uma função, na maioria das vezes, Y é um contradomínio e X é um domínio de f. No entanto, em alguns casos, X não é um domínio de f, o que significa que, para alguns $x \in X$, não há elementos $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Neste último caso, denominamos $[X, Y, f]$ *inconsistente*. Por exemplo, no exemplo acima, a função $\left[\mathbb{R}, \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1}\right]$ é inconsistente, porque não existem elementos $y \in Y$ para todo $x \in (-1,1)$.
(vii) Se $A \subseteq D_f$ então o conjunto das imagens de todos os pontos de A sob f é denominado a imagem de A sob f e, seguindo a notação da maioria dos livros textos de Análise Real, pode ser denotada por $f(A) = \{y \in Y: \exists x \in A; f(x) = y\}$. (DSHALALOW, 2013, p. 14-16)

Dshalalow (2013), em sua definição, além de usar também uma expressiva linguagem matemática por meio da teoria dos conjuntos, explora o uso de exemplos e contraexemplos.

Já Niels Jacob e Kristian P. Evans, em sua obra *A Course in Analysis Volume I: Introductory Calculus, Analysis of Functions of One Real Variable*, publicada em 2016, definem:

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Uma função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma regra que atribui a cada $x \in D$ exatamente um valor real $f(x)$. Para isso, escrevemos $x \longmapsto f(x)$ e dizemos que x é mapeado sobre $f(x)$ ou $f(x)$ é o valor de f em x.
É conveniente introduzir a notação

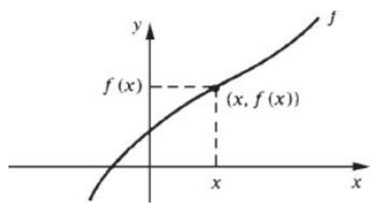
$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Nesse livro, observa-se que na definição, o domínio da função e sua imagem ficam evidentes para que não haja confusão e também é ressaltado o estudo de funções definidas em um subconjunto de $\mathbb{R}$,

> Quando $D \subset \mathbb{R}$ podemos definir um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ por $D \times \mathbb{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2) | x \in D \ e \ y \in \mathbb{R}\}$, e, certamente, isso se estende facilmente a $D \subset \mathbb{R}$ e $R \subset \mathbb{R}$: $D \times R := \{(x, y \in \mathbb{R}^2) | x \in D \ e \ y \in R\}$.
> Agora, dada a função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ conclui-se que $\{(x, f(x)) | x \in D\} \subset D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. (JACOB; EVANS, 2016, p. 57)

No curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas da UNESP de São José do Rio Preto, a primeira disciplina que aborda o conceito de função é *Calculo Diferencial e Integral I*, logo no primeiro ano do curso. Desse modo, recorremos aos conceitos dos livros usados para apoio na disciplina, como o livro *Um Curso de Cálculo* – Volume I de Hamilton Luiz Guidorizzi, que define:

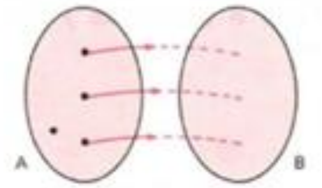
> Entendemos por uma função f uma terna $(A, B, a \longmapsto b)$ em que A e B são dois conjuntos e $a \longmapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B. O conjunto A é o domínio de f e indica-se por Df, assim $A = Df$. O conjunto B é o contradomínio de f. O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$ (leia: f de a); diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associa a a.
> Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f: A \longmapsto B$ (leia: f de A em B).
> Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f: A \longmapsto B$, em que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Até menção em contrário, só trataremos com funções de uma variável real a valores reais.
> Seja $f: A \longmapsto B$ uma função. O conjunto $Gf = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ denomina-se gráfico de f; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.



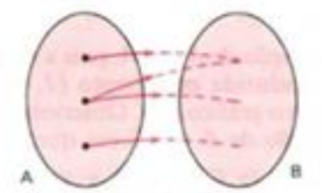
> **Observação**. Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faz sentido a regra em questão.
> É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por $y = f(x)$, $x \in A$. Neste caso, diremos que x é a variável independente, e y, a variável dependente. É usual, ainda, dizer que y é função de x. (GUIDORIZZI, 2001, p. 65)

Já no livro *Fundamentos de Matemática Elementar* Vol. 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, também usado no curso de Matemática, podemos perceber a evolução da formalização do conceito de função em diferentes representações. Os autores definem função como:

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
> f é aplicação de A em $B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A, \exists| \; y \in B \mid (x, y) \in f)$.
> Vejamos agora com o auxílio do esquema das flechas, que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicação (ou função).
> 1º) é necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha.
> 2º) é necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.
> Uma relação f, não é aplicação (ou função) se não satisfazer uma das condições acima, isto é:
> 1º) se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou
> 2º) se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

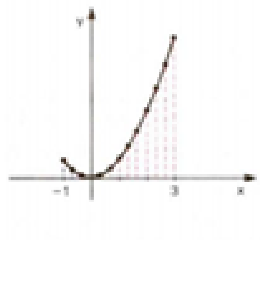


f não é função

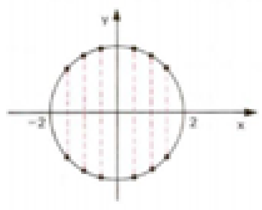


f não é função.

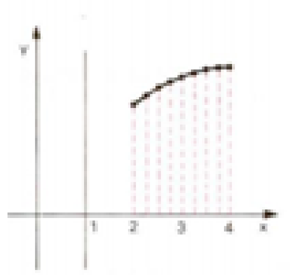
> Podemos verificar através da representação cartesiana da relação f de A em B se f é ou não função: basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto $(x, 0)$, onde $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.
>
> Exemplos
>
> 1º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, representada abaixo é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abcissas $x \in A$ encontra sempre o gráfico de f num só ponto.



2º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, representada abaixo, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.



3º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, representada abaixo, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, não é função de A em $\mathbb{R}$, pois toda reta vertical conduzida pelo ponto $(1,0)$ não encontra o gráfico de f.



Observemos que f é função de B em $\mathbb{R}$ onde $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. (IEZZI, MURAKAMI, 1985, p. 74-76)

A constante evolução do conceito de função proporciona diversos estudos em várias áreas da Matemática, além do Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática. Percebe-se a extensa influência do conceito de função que pairou sobre a Geometria e a Álgebra no decorrer do tempo. Sabendo disso, constata-se que conceito de função passou por várias modificações com a influência de vários conceitos e teorias que foram descobertas no transcorrer da História da Matemática. Nesta perspectiva, quando se ensina o conceito de função, tem-se de ter certa cautela, pois historicamente podemos perceber essa evolução ininterrupta do conceito de função, caracterizada pela necessidade de superar, acrescentar e modificar a definição sob a luz das novas teorias que surgem no interior da Matemática.

3 FORMAÇÃO INICIAL E O CONCEITO DE FUNÇÃO

3.1 A Formação Inicial do Professor de Matemática e os Conhecimentos Mobilizados

Dentre os diversos aspectos da profissão docente que são alvo de estudos e pesquisas, a busca em delinear os conhecimentos necessários ao professor para que ele esteja apto a exercer sua profissão com êxito e promover a aprendizagem dos alunos é uma das ênfases. Na literatura sobre os conhecimentos necessários aos professores, a importância da formação inicial é destaque. São inúmeros também os estudos que discutem quais os conhecimentos que devem ser trabalhados na formação inicial do professor de Matemática, nos cursos de licenciatura.

Ponte (2002) afirma que muitas são as críticas em relação à formação inicial do professor, pois até os professores consideram que:

> Os jovens professores não saem devidamente preparados nas matérias que irão ensinar. Os professores da área de educação lamentam que tudo o que ensinam acaba por ser "varrido" pelo conservadorismo da prática de ensino. Os novos professores lamentam que nada do que aprendem na formação inicial lhes serviu para alguma coisa e que só na prática profissional aprenderam o que é importante. Os professores já em serviço também acham, muitas vezes, que os jovens professores não vêm devidamente preparados no que seria mais necessário. Na sociedade, em geral, parece existir uma grande desconfiança em relação à qualidade da formação inicial de professores. (PONTE, 2002, p. 3).

Quando a qualidade da educação dos alunos do Ensino Fundamental e Médio é colocada em discussão, a maior parte da responsabilidade pelo fracasso da aprendizagem dos alunos é atribuída ao professor. Com isso, a formação inicial do professor, desde a década de 1990, vem assumindo um papel central nas políticas públicas, como na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9394/96 e no Plano Nacional de Educação que afirma:

> A qualificação do pessoal docente se apresenta hoje como um dos maiores desafios para o Plano Nacional de Educação, e o Poder Público precisa se dedicar prioritariamente à solução deste problema. A implementação de políticas públicas de formação inicial e continuada dos profissionais da educação é uma condição e um meio para o avanço científico e tecnológico em nossa sociedade e, portanto, para o desenvolvimento do País, uma vez que a produção do conhecimento e a criação de novas tecnologias dependem do nível e da qualidade da formação das pessoas. (BRASIL, 2001, p. 65).

As instituições de ensino superior (Faculdades, Universidades e Centros Universitários) são as responsáveis por oferecer os cursos de formação inicial de professor e estão incumbidas de formar profissionais aptos para o exercício da profissão docente por meio de um processo de formação que articule teoria e prática. Entretanto, as críticas voltadas à formação inicial, muitas vezes, são constantes entre os próprios educadores, que apontam que os alunos saem dos cursos sem o preparo suficiente para ministrar uma aula. Mas quais as mudanças que devem ser feitas para que a formação inicial seja completa?

O Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2001, p. 66) afirma que "*na formação inicial é preciso superar a histórica dicotomia entre teoria e prática e o divórcio entre a formação pedagógica e a formação no campo dos conhecimentos específicos que serão trabalhados na sala de aula"*. Ao voltarmos nosso olhar para o histórico dos currículos dos cursos de formação inicial, percebe-se que a estrutura curricular rígida e pouco flexível, de tempos atrás, vem sendo estudada e aprimorada, para promover a confluência entre a teoria e prática. Essa dicotomia era perceptível nos cursos de licenciatura da área de exatas, em especial, na Matemática. Assim, conforme a Resolução CNE/CP 1/2002 do Conselho Nacional de Educação e a Resolução CNE/CP 2/2002 do Conselho Nacional de Educação, os cursos de licenciatura têm reestruturado os seus currículos com ênfase na prática pedagógica, passando de 300 horas, determinadas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei nº 9394/96, para 800 horas, com 400 horas de Prática como Componente Curricular ao longo do curso e 400 horas de Estágio Curricular Supervisionado na segunda metade do curso, conforme afirma o documento:

> Art. 1º A carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, será efetivada mediante a integralização de, no mínimo, 2800 (duas mil e oitocentas) horas, nas quais a articulação teoria-prática garanta, nos termos dos seus projetos pedagógicos, as seguintes dimensões dos componentes comuns: I - 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso; II - 400 (quatrocentas) horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso; III - 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos curriculares de natureza científico cultural; IV - 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais. (CNE/CP, 2002, p. 1)

O conteúdo das Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática também destacam a importância do Estágio Curricular Supervisionado, como atividade que proporciona a aproximação entre a universidade e a escola.

Pesquisadores têm enfatizado a relevância do Estágio Supervisionado na formação inicial docente como eixo articulador entre a teoria e a prática. Pipitone, Zuffi e Rivas (2010), por exemplo, relatam a implantação do Programa de Formação de Professores da

Universidade de São Paulo (USP) enfatizando a importância do Estágio Curricular Supervisionado dentro dos cursos de formação.

> [...] o estágio supervisionado tem um papel de elemento integrador na formação do professor, oferecendo ao estudante de licenciatura oportunidades de ampliar e utilizar as habilidades e os conhecimentos adquiridos no curso para responder às necessidades e aos desafios da realidade escolar. O estágio supervisionado é distribuído entre diversas disciplinas que integram o Programa de Formação de Professores – sejam elas ligadas aos institutos de origem ou aos departamentos responsáveis pelas disciplinas pedagógicas. Suas atividades não devem ser fragmentadas e justapostas, mas ligadas aos projetos de formação de professores em vigência nas unidades da USP. (PIPITONE, ZUFFI, RIVAS, 2010, p.150)

Meneghetti e Dias (2011) também destacam em sua pesquisa a importância dos estágios, em que os próprios professores julgam fundamentais para a formação docente.

> Destarte, concluímos que os professores, sejam os universitários ou os da Educação Básica, defendem o estágio como parte fundamental na formação do futuro professor de matemática, porque é nesse momento que o aluno começa a passar pelo processo de deixar de ver as coisas como aluno e enxerga-las como professor. Além disso, eles consideram que é nesta oportunidade que o aluno conhece a realidade escolar e começa a desenvolver sua própria prática, com base na reflexão. (MENEGHETTI; DIAS, 2011, p. 21).

Mas as autoras não deixaram de citar a forma como o Estágio Curricular Supervisionado deve ser desenvolvido para contribuir na formação do professor, visto que esse Estágio, às vezes, é considerado *apêndice do currículo,* ou seja, é abordado de forma desvinculada da teoria. Elas concluem que o Estágio Curricular Supervisionado somente será eficaz se o conhecimento teórico apreendido na universidade for aplicado, concomitantemente, em sala de aula, abordando de forma significativa a diversidade e problemática da prática. Nesta perspectiva, o Estágio Curricular Supervisionado pode contribuir na formação do professor diminuindo a dicotomia entre a teoria e prática. Por outro lado, as autoras também afirmam que os cursos de Licenciatura ocupam um espaço menor na hierarquia científica das universidades o que tem prejudicado a valorização da profissão,

> É imperioso registrar que os cursos de licenciatura ocupam menor espaço na hierarquia científica das universidades, o que tem comprometido sua identidade cultural e política. Os cursos de graduação, na modalidade bacharelado, têm sido hegemônicos, pois contemplam "os saberes científicos", enquanto que os de licenciatura, por incluírem em seus currículos os denominados "saberes pedagógicos", têm ficado relegados ao segundo plano. (PIPITONE; ZUFFI; RIVAS, 2010, p. 146)

No entanto, a valorização culmina em um amplo processo de reestruturação dos cursos de licenciaturas.

Pipitone, Zuffi e Rivas (2010) citam Lambert e Ball (1998), educadoras matemáticas norte-americanas, que traçam um diagnóstico problemático na formação inicial de professores e enumeram alguns fatores, descritos por Lambert e Ball, que contribuem para o quadro apontado:

> 1) a pouca atenção dada, nessa formação, às crenças, às concepções e aos conhecimentos que os futuros professores trazem para o curso; 2) o fato de esse curso, geralmente, dar a impressão de que para ensinar é preciso pouco mais que o senso comum, isto é, de não mostrar a necessidade de um conhecimento profissional;3) não dar a devida atenção ao conhecimento didático; 4) separarem teoria e prática, tanto temporal quanto conceitualmente; 5) darem reduzida importância à prática profissional. (PIPITONE; ZUFFI; RIVAS apud LAMBERT; BALL, 1998, p. 153)

Mas, quais os conhecimentos que um professor necessita para conduzir a aprendizagem de seus alunos? Práticas? Teorias? Estágios? Como os professores aprendem a ensinar? Qual conhecimento um professor deve saber para ensinar? Shulman (1986) busca responder a essas perguntas e inicia seu trabalho com a frase, que pode ser considerada insultante aos professores, de George Bernard Shaw: *Quem sabe, faz. Quem não sabe, ensina.* Por conseguinte, Shulman (1986) sugere que o conhecimento do professor é ramificado e composto tanto pelo conhecimento do conteúdo, como pelo conhecimento didático do conteúdo.

Petrou e Goulding (2011), que tomaram por base o estudo de Shulman (1986, 1987), descrevem sete categorias de conhecimento que julgam fundamentais para o conhecimento do professor de Matemática.

– Conhecimento pedagógico geral;

– Conhecimento dos alunos e das suas características;

– Conhecimento do contexto educativo;

– Conhecimento das metas, finalidades e valores da educação;

– Conhecimento do conteúdo;

– Conhecimento do currículo;

– Conhecimento pedagógico (didático) do conteúdo.

Shulman focou seus trabalhos apenas nos três últimos tipos de conhecimentos e Petrou e Goulding (2011) defendem que esses são fundamentais para a formação do professor. Para

Shulman (1986) o conhecimento pedagógico do conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*) envolve:

> Dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo, incluo, para os assuntos mais frequentemente ensinados em determinadas áreas do conhecimento, as formas mais úteis de representação dessas ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos e demonstrações – em resumo, as formas de representar e formular o assunto de modo que o torne compreensível aos demais. Uma vez que não existem formas mais poderosas de representação, o professor tem de ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, com algumas que derivam da pesquisa e outras que têm sua origem no saber da prática. (SHULMAN, 1986, p. 9).

Desse modo, o conhecimento pedagógico do conteúdo é uma categoria específica do conhecimento dentro da prática, ou seja, Shulman valoriza o conteúdo em si, sem deixar de lado o pedagógico. Portanto, o conhecimento pedagógico do conteúdo é uma junção do conteúdo e da pedagogia, o qual permite que o professor tenha a capacidade de transformar o conteúdo por meio das abordagens pedagógicas e adaptá-las para a aprendizagem do aluno.

Na década de 1990, a conceptualização do conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman tornou-se popular entre pesquisadores, entre eles, Liping Ma (2010), que desenvolveu uma importante pesquisa ao comparar o conhecimento pedagógico do conteúdo dos professores de Matemática chineses e o dos professores americanos. Tal comparação foi motivada pelo destaque das crianças chinesas, em relação às americanas, na aprendizagem da Matemática Elementar. A pesquisa de Liping Ma revela dois pontos importantes sobre o trabalho dos professores chineses. O primeiro é que os professores chineses são especialistas e ensinam apenas a Matemática, ao passo que os professores americanos são submetidos a abordar uma variedade de assuntos diversos. O segundo é que na China os professores têm uma boa quantidade de tempo para a preparação das aulas e operam dentro de um currículo nacional que oferece diretrizes claras e materiais didáticos relevantes. Por outro lado, os professores americanos passam o dia inteiro ensinando em sala de aula.

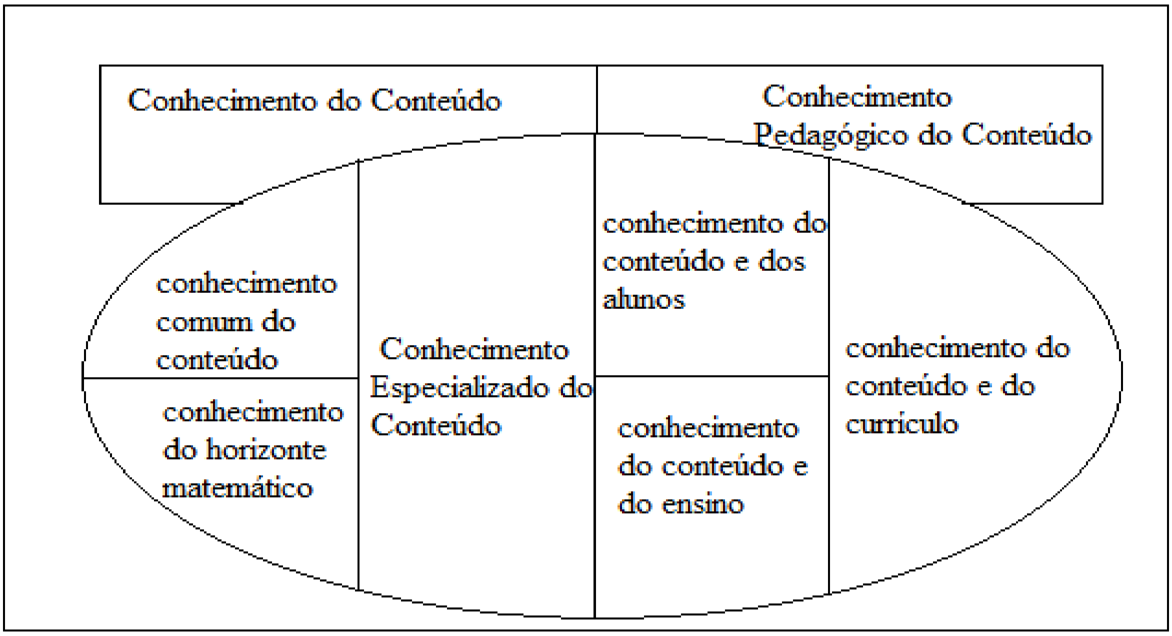
Liping Ma pesquisou também sobre a formação dos professores em ambos os países e percebeu que, por mais que tenham sua formação mais compactada e em curto prazo em relação aos americanos, os chineses se saíram melhor na pesquisa em relação à compreensão dos conceitos básicos de Matemática. A pesquisa também destacou a importância do conteúdo na formação dos professores de Matemática.

Mas apenas com o conhecimento especifico e pedagógico, o professor é considerado bom? Essas foram as principais críticas que Petrou e Goulding (2011) fizeram em seu trabalho sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman (1986). Os autores citam

Ball e Hill (2009), que argumentam que o conhecimento do conteúdo normativo é insatisfatório para ministrar uma aula efetivamente, mas que isso não abrevia sua importância. A questão que eles abordam é a incompletude do conhecimento pedagógico do conteúdo e assim sugerem uma observação nas salas de aulas das atitudes dos professores em relação ao conteúdo.

No mesmo trabalho, Petrou e Goulding (2011) abordam as ideias de Ball, Thames e Phelps (2008) que introduzem o modelo do Conhecimento Matemático para Ensinar – MKT (Mathematical Knowledge for Teaching), propondo uma reorganização dos conhecimentos sugeridos por Shulman (1987). (Figura1).

Figura 1- Conhecimento matemático para o ensino

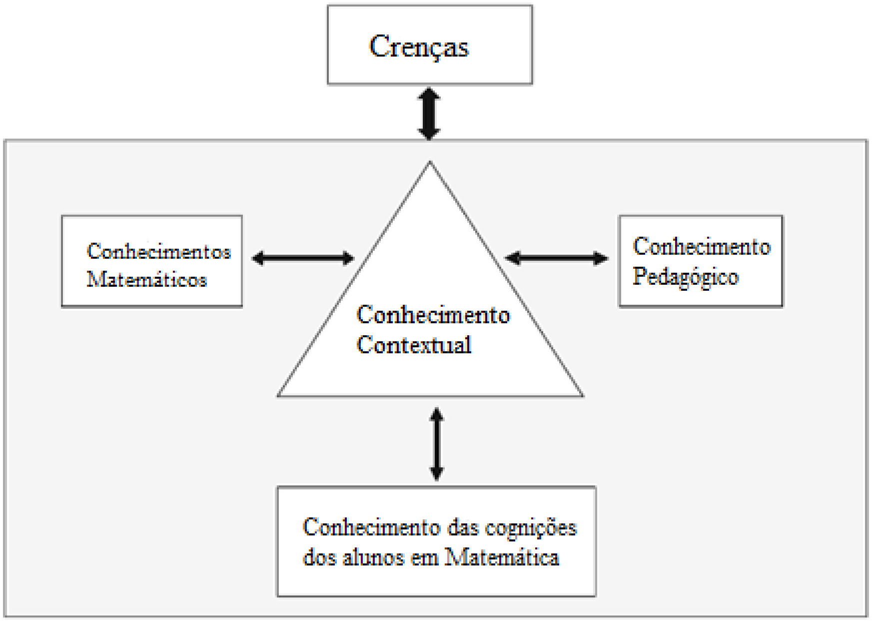


Fonte: (PETROU; GOULDING; 2011, p. 16 apud BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403).

Ball, Thames e Phelps (2008) reorganizam o conhecimento do conteúdo em outros três conhecimentos: conhecimento do horizonte matemático (HCK); conhecimento comum do conteúdo (CCK); e conhecimento especializado do conteúdo (SCK). O conhecimento do horizonte matemático está relacionado com a compreensão das conexões entre os diferentes tópicos matemáticos dos currículos com seu desenvolvimento escolar, o conhecimento comum do conteúdo é um conhecimento comum a todos que sabem e que usam matemática e o conhecimento especializado do conteúdo é o próprio conhecimento especifico matemático juntamente com competências especificas para o ensino. Assim, os autores propõem essa caracterização que refina o Conhecimento do Conteúdo Pedagógico de Shulman. Entretanto, é notável que o modelo apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008) não considere as concepções psicológicas do professor, o que para Petrou e Goulding (2011) destoam da linha de investigação que propõe que elas podem estar relacionadas ao conhecimento do professor. Mas, por outro lado, o modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) fornece um refinamento razoável em relação ao Conhecimento do Conteúdo de Shulman.

Em seu trabalho, Petrou e Goulding (2011) também apresentam a conceptualização de Fennema e Franke (1992) que sugerem que o conhecimento necessário para o ensino tem de ser participativo e dinâmico e que as pesquisas sobre os conhecimentos precisam se concentrar em compreender a relação entre os domínios do conhecimento teórico. Dessa forma, expõem o esquema a seguir (Figura 2).

Figura 2- Conhecimento do professor: desenvolvimento em contexto



Fonte: (PETROU; GOULDING, 2011, p. 13 apud FENNEMA; FRANKE, 1992, p. 162).

Petrou e Goulding (2011) não julgam apenas os conhecimentos dos professores definidos acima como fundamentais, seja conhecimento específico, pedagógico e prático, mas também levam em consideração as concepções e crenças dos professores de fundamental importância. Segundo os autores, essas crenças e concepções dos professores influenciam seus comportamentos em sala de aula, sendo compreensível estudar as estruturas das crenças desses professores para melhorar a formação profissional sob a prática de ensino.

Guimarães (2010) considera pertinente conhecer os pensamentos dos professores, pois defende que os pensamentos do professor influenciam de forma significativa o que ele faz.

> Existe, na verdade, um consenso crescente sobre a importância em ter acesso à 'vida mental' dos professores, em conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento, bem como as relações desses aspectos com a sua actuação ou comportamento. Por detrás deste interesse, está a convicção de que aquilo que o professor pensa influencia de maneira significativa aquilo que o professor faz. (GUIMARÃES, 2010, p. 82)

E, para Llinares (1996),

> Assim, a análise desses componentes do conhecimento profissional do professor de Matemática deve considerar a "maneira" em que a Matemática é comunicada aos alunos por meio das atividades que o professor escolhe, as características da interação didática na sala de aula, os aspectos em que é avaliada, etc. Por conseguinte, desde que nenhuma questão seja levantada diretamente sobre o conteúdo matemático, as pesquisas tentarão descrever o "conhecimento situado" do professor sobre a Matemática. Esta situação, portanto, explícita a integração de diferentes componentes do conhecimento e "orientações" para o conteúdo matemático, que em um extremo são as crenças do professor. (LLINARES, 1996, p. 8).

Nesta perspectiva, a rotulação do conhecimento do professor sem considerar fatores psicológicos na sua formação é uma pesquisa falha, pois a organização e a aplicabilidade do conteúdo de Matemática sofrem influências das estruturas cognitiva do professor. Ball (1988) aborda a importância do conhecimento do professor de Matemática sobre o conteúdo, mas enfatiza a necessidade de consideramos os pressupostos e as crenças explícitas sobre ensino e aprendizagem. Para ela *"foi ao estudar o pensamento e a tomada de decisões do professor que os conhecimentos e crenças dos professores sobre o assunto começaram a reaparecer como variáveis potencialmente significativas."* (BALL, 1988, p. 6).

Llinares (1996), ao estudar o conhecimento dos professores sobre o conceito de função, também percebeu as influências que as concepções e crenças têm no conhecimento profissional do professor de Matemática e como elas se concretizam mediante a prática em sala de aula.

> Ou seja, um tipo de crenças relacionadas com conteúdo disciplinar que parece influenciar o que eles escolhem para ensinar e como eles escolhem para ensinar. E um segundo tipo que denominam "orientação" para o assunto curricular ("orientação" para o assunto) que inclua suas concepções sobre o que é importante saber e como se conhece (orientações para a Matemática como conteúdo a ser ensinado e orientações para a Matemática como conteúdo para ser aprendido). Em relação às "orientações" ao conteúdo matemático, Bromme (1994), ao falar de "áreas" do conhecimento profissional do professor, aponta como uma delas a

> Filosofia da Matemática Escolar como um conteúdo implícito na formação de professores. O significado dado a essa componente do conhecimento parece referir-se as crenças e concepções do professor sobre a Matemática escolar que são transmitidas por meio de sua prática, o tipo de atividades escolhidas, a avaliação proposta, etc. (LLINARES, 1996, p. 10, Tradução minha).

Para Llinares (1996), a construção do conhecimento do professor constitui-se no que o professor sabe sobre o conteúdo e como ele apresenta esse conteúdo na sala de aula. Lima (2008) argumenta que os professores utilizam

> Muitas teorias, concepções, técnicas, em busca de diferentes objetivos ao mesmo tempo. São heterogêneos pelo fato de os professores utilizarem uma variedade de habilidades ou competências para gerência de sala de aula e uma diversidade de objetivos: emocionais, sociais, cognitivos, coletivos. Como os saberes estão na ação, a serviço dela, e nela assumem significado e utilidade, o autor atribui também a característica de unicidade ao saber docente. (LIMA, 2008, p. 23)

Para ministrar uma aula, o professor recorre a diversas habilidades ou competência para ensinar um conteúdo e organizar a amplitude que é uma sala de aula e, assim, a articulação dos conhecimentos do conteúdo, dos conhecimentos didáticos pedagógicos, do conhecimento curricular, do conhecimento dos alunos e das suas características, do conhecimento do contexto educativo, do conhecimento das metas, finalidades e valores da educação, entre outros, está vinculada ao pensamento do professor. Assim, como afirmam Clark e Yinger (1979), são as teorias implícitas que definem um professor.

> O pensamento, o planejamento e a tomada de decisões dos professores constituem uma grande parte do contexto psicológico do ensino. Está dentro deste contexto, esse currículo que é interpretado e atuado pelo professor, o comportamento é substancialmente influenciado e até mesmo determinado pelos processos pensados pelos professores. Estes são os pressupostos fundamentais por trás da literatura que passou a ser chamada de pesquisa sobre o pensamento dos professores. (CLARK; YINGER, 1979, p. 6)

Nestas condições, os conhecimentos dos professores envolvem muito mais que os conhecimentos do conteúdo, pedagógico e da prática, sendo necessário completar esses conhecimentos. Nesse sentido, considerar as crenças e concepções pode ser significativo na formação inicial para compreender as ações de um professor dentro da sala de aula e, consequentemente, buscar promover mudanças que possam contribuir para melhorar a atuação do professor.

Superar as dificuldades da educação em relação à formação inicial de professores e desenvolver modelos para avaliar o quanto um professor precisa de um determinado conhecimento para ser bem-sucedido em sua profissão, às vezes, se torna dispensável se não considerarmos suas concepções e crenças.

Ponte (2002) argumenta que para termos uma formação inicial completa e eficaz na perspectiva integral do profissional na atualidade, além de considerar todos os conhecimentos necessários, também é preciso que os novos professores ensinem de acordo com as novas perspectivas curriculares, ou seja,

> De uma forma viva e desafiante, mais difícil ainda se torna a organização da formação inicial. Na verdade, um ensino deste tipo é cheio de incertezas. Em primeiro lugar, porque quando se visam objetivos mais complexos a evidência da aprendizagem dos alunos é menos visível. Em segundo lugar, porque um ensino dinâmico tem de ser concebido em resposta aos alunos, ou seja, é impossível prever num plano previamente elaborado tudo o que vai acontecer numa aula. E, em terceiro lugar, porque neste tipo de ensino as coisas a que o professor tem de atender são múltiplas e estão muitas vezes em conflito umas com as outras. (PONTE, 2012, p. 4).

Em geral, o principal enfoque que se encontra em relação às ideias de quais os conhecimentos necessários para que um professor ensine Matemática, efetivamente, é multidimensional, ou seja, todos os conhecimentos estudados por Shulman (1986), quando combinados, geram um conjunto de conhecimentos que compreendem o comportamento do professor em sala de aula. Nesta perspectiva, o saber docente não é formado exclusivamente pelas teorias da educação e da área especifica, mas também pelas práticas do professor em sala de aula, pelas suas concepções e suas crenças.

Nos cursos de Licenciatura, a problemática que muitos autores apontam é que o conhecimento de conteúdo e o conhecimento pedagógico são distantes da prática da sala de aula e do próprio professor. A formação inicial de professores tem muitos aspectos a considerar para que se possa ter uma formação que prepare nossos professores para lidar com o conceito, a organização curricular e a promoção de uma aprendizagem de forma efetiva.

3.2 Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função

A formação inicial de professores é um fator chave para a solução de alguns problemas da educação. Nesse contexto, consideramos necessário argumentar sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática em relação ao conceito de função.

O conceito de função é fundamental para a organização dos ramos e dos conhecimentos específicos da Matemática, desempenhando também um papel importante em outras áreas do conhecimento, em virtude de sua aplicabilidade. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio apontam a importância do conceito de função e relatam sua importância para outras áreas:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 43).

Assim, o conceito de função é considerado como um conteúdo unificador em currículos de Matemática (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013). No entanto, as pesquisas que estudam o tema destacam especialmente as dificuldades do processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo. O próprio panorama histórico do desenvolvimento do conceito de função, apresentado no Capítulo 1, nos leva a afirmar que o ensino e a aprendizagem do conceito de função na formação do professor são processos evolutivos trabalhosos e que tais dificuldades perpassam por todos os níveis de escolaridade. De fato, conforme Lima (2008):

> A dificuldade na compreensão do conceito de função perpassa por todos os níveis que retratam a relação ensino-aprendizagem e em diferentes aspectos do conhecimento do conceito. Os matemáticos historicamente superam obstáculos para alcance, depois de séculos, da formalização do conceito de função. Os professores de Matemática, por sua vez, também apresentam dificuldades em compreender, interpretar e atribuir significados ao conceito. (LIMA, 2008, p. 52).

A questão que emerge é que os próprios professores precisam compreender de forma abrangente e aprofundada o conceito de função, pois para ensinar é preciso aprender. (BALL, 1988, p.13) alega que: *"os professores não podem ajudar as crianças a aprender coisas que eles mesmos não entendem. Mais sutil e menos compreendido, é o modo como o conhecimento dos professores moldam as oportunidades de aprendizagem dos alunos"*. Portanto, o conteúdo bem compreendido não é singular, como visto na sessão 2.1. No entanto, no processo de ensino, as dificuldades do conteúdo de função, presentes em todos os níveis de escolaridade, são sugestivamente decorrentes da formação do sujeito.

No ensino superior, nos Cursos de Licenciatura em Matemática, muitas vezes, o conceito de função é considerado como um conteúdo básico e, portanto, os professores consideram que os alunos já o compreendem e não aprofundam as discussões sobre o conceito, o que não os leva a superar as lacunas do conceito construído no processo da formação do indivíduo. E, dessa forma, como apontam Barufi (1999) e Rezende (2003), há um baixo nível de aprendizagem e um alto nível de reprovações na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, que tem como base o conceito de função. A "crise do Cálculo" pode estar relacionada com uma mediana compreensão de conceitos básicos. Com efeito, Costa (2008) assegura que,

> O conceito de função exemplifica bem o que foi exposto; pesquisas mostram que as dificuldades do professor em relação a este conceito têm origem anterior à sua graduação e nesta nem sempre ele é aprofundado. Algumas destas dificuldades advêm dos obstáculos de natureza epistemológica que são inerentes ao conceito e devem ser transpostos na medida em que são aceitos e compreendidos. (COSTA, 2008, p. 10).

As dificuldades de compreensão do conceito de função não constituem apenas uma problemática da Educação Superior, muito menos somente da Educação Básica. Ao considerarmos o desenvolvimento histórico do conceito de função, podemos observar que as ideias sobre esse conceito foram sofrendo mudanças e a sua definição foi sendo aprimorada. Sierpinska (1992), em sua pesquisa sobre a dificuldade de compreensão do conceito de função, aprofunda-se nos estudos epistemológicos do conceito e considera que os obstáculos epistemológicos contribuem para uma imperfeita compreensão do conceito de função ao longo de sua formação. Bem como mencionamos na sessão 2.1 deste capítulo, Sierpinska (1992) afirma que as crenças de um professor podem levar aos obstáculos,

> Ao passo que nossas crenças são crenças cegas, e nossos esquemas de pensamento inconsciente, eles podem muito bem funcionar como obstáculos ao nosso pensamento no nível técnico. Um obstáculo é superado se somos capazes de nos distanciar de nossa crença ou esquema de pensamento, se vemos suas consequências e somos capazes de considerar outros pontos de vista. Uma crença pode então tornar-se um engano epistemológico consciente; um esquema de pensamento – um método útil para resolver certos problemas ou uma possível maneira de interpretar uma situação. (SIERPINSKA, 1992, p. 28).

Assim, segundo a perspectiva epistemológica, o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função no processo de formação do educando está nitidamente relacionado com os obstáculos. O filósofo Gaston Bachelard (1996) foi o primeiro a definir uma noção de obstáculos epistemológicos, apontando-os como uma luta mental para libertar-se das ilusões e alcançar o conhecimento,

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a

> fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. O real nunca é "o que se poderia achar", mas é sempre o que se deveria ter pensado. O pensamento empírico torna-se claro depois, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido. Ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (BACHELARD, 1996, p. 17)

Dessa forma, Bachelard aborda a importância do espírito científico e seus estágios de formação, apresentando a noção de obstáculo epistemológico, que passou a fazer parte das concepções epistemológicas discutidas na ciência. Para ele, os obstáculos epistemológicos são barreiras para a formação de um espírito científico, pois levam a estagnação ao processo do pensamento. Além disso, Bachelard enfatiza a importância de detectar os obstáculos epistemológicos surgidos ao longo da construção da ciência, que foram omitidos ou desconhecidos pela história, destruindo o que foi insatisfatoriamente estabelecido e construindo novas ideias. No entanto, detectar os obstáculos epistemológicos na construção histórica do conceito de função é um trabalho complexo que deve ser realizado com detalhe, imparcialidade e com o estudo minucioso de cada cultura e época específica, estudando o trabalho de diversos matemáticos.

> A meu ver, para identificar obstáculos na história, não se pode restringir os estudos a poucos matemáticos famosos – no entanto, precisa-se estudar como os conceitos matemáticos foram apresentados, discutidos, recebidos e mudados na grande comunidade Matemática numa certa época e cultura mais além, comparativamente para culturas diferentes. (SCHUBRING, 2002, p. 24-25).

Tendo como base as concepções de 'obstáculo epistemológico' de Bachelard, Pais (2002) também considera complexo detectar obstáculos entre o ensino e o desenvolvimento da ciência no decorrer do tempo, pois os registros históricos apresentam o conhecimento formalizado e omitem as dificuldades encontradas no processo de criação e assim, no processo de ensino, pode parecer para o aluno que a Matemática é linear e absoluta.

> De fato, o tipo de ruptura encontrada na evolução das ciências experimentais não aparece com clareza no registro histórico da matemática. Entretanto, isso não quer dizer que haja uma linearidade absoluta na fase da descoberta da matemática. Esse é um problema que relaciona o desafio da descoberta do conhecimento e sua sistematização por meio de uma demonstração, pois esse registro formal não deixa explícitas as dificuldades encontradas no transcorrer do processo de criação. (...) Tal como acontece na etapa de criação da matemática, durante a experiência da

> aprendizagem escolar há também um processo correspondente a uma redescoberta do saber, de onde os obstáculos podem, analogamente, intervir diretamente no fenômeno cognitivo. No desenvolvimento da matemática, observa-se a existência de períodos em que os conhecimentos são formalizados e aperfeiçoados do ponto de vista metodológico. (PAIS, 2002, p. 41-42)

Anna Sierpinska (1992) pesquisa os obstáculos epistemológicos ligados propriamente ao conceito de função. A autora relata que a maioria das dificuldades são consequências do processo de ensino e de aprendizagem do conceito, uma vez que os obstáculos são concretizados pelo professor. Esses obstáculos epistemológicos na educação exercem papel fundamental, em que possibilita a relação entre a epistemologia e a didática. No âmbito escolar, Pais (2002) define os "obstáculos didáticos" como,

> [...] conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar. No que se refere ao estudo dos obstáculos didáticos, permanece o interesse de estabelecer os limites do paralelismo possível entre o plano histórico do desenvolvimento das ciências e cognitivo da aprendizagem escolar. Se a didática se dispõe a estudar o aspecto evolutivo da formação de conceitos, é conveniente admitir a flexibilização de que os obstáculos não dizem respeito somente às dificuldades históricas e externas ao plano da aprendizagem. (PAIS, 2002, p. 14)

As ações educativas escolhidas para serem trabalhadas com um determinado conceito podem originar obstáculos e, em consequência, a construção de um conceito errôneo por parte dos alunos. Assim, as ações educativas podem ser cruciais para uma compreensão do conteúdo, já que a dificuldade na compreensão do conceito de função pode estar relacionada com a forma como ela é apresentada pelo professor. Sierpinska (1992, p. 28), afirma que *"se o obstáculo não for apenas nosso ou de algumas outras pessoas, mas for mais generalizado, ou foi generalizado em alguma época ou em alguma cultura, então ele é conhecido como um obstáculo epistemológico"* e defende que obstáculos epistemológicos acabavam facilitando o aparecimento de obstáculos didáticos. Deste modo, é evidente a importância que se dá as concepções e as crenças dos professores para superação dos obstáculos epistemológicos.

Para ela, a compreensão de conceitos matemáticos exige uma maior atenção nos "saltos", ou seja, na transição entre o velho e o novo conhecimento, para que haja significado para o aluno. No conceito de função, as dificuldades na aprendizagem são: o bloqueio em associar as diferentes formas de representações da função como: tabelas, gráficos, diagramas e fórmulas; dificuldade em entender o significado de variável; não compreensão das manipulações simbólicas como: $f(x)$, $x \to y$, $sen(x + t)$, entre outras.

Sierpinska (1992, p. 31-56) relatou dezesseis obstáculos epistemológicos e dezenove ações importantes para a compreensão do conceito de função. Os obstáculos epistemológicos (OE) são:

OE (f) – 1: a Matemática não se preocupa com problemas práticos.

OE (f) – 2: (Uma Filosofia da Matemática). As técnicas computacionais utilizadas na produção de tabelas de relações numéricas não merecem ser objeto de estudo em Matemática.

OE (f) – 3: Tomar as dependências como fenômenos, focar em como as coisas mudam, ignorando o que muda.

OE (f) – 4: (Esquema inconsciente do pensamento) Pensando em equação de termos e incógnitas para serem extraídos deles.

OE (f) – 5: (Esquema inconsciente do pensamento) Quanto à ordem das variáveis como irrelevante.

OE (f) – 6: (Uma atitude em relação ao conceito de número) Uma concepção heterogênea de número.

OE (f) – 7: (Uma atitude em relação à noção de número) Uma filosofia pitagórica do número: tudo é número.

OE (f) – 8: Leis da Física e funções em Matemática não têm nada em comum, pertencem a diferentes domínios de pensamento.

OE (f) – 9: Proporção é um tipo privilegiado de relação.

OE (f) – 10: Forte crença no poder das operações formais sobre a expressão algébrica.

OE (f) – 11: Apenas as relações que podem ser descritas por fórmulas analíticas são dignas de receber o nome de funções.

OE (f) – 12: (Uma concepção de definição) A definição é uma descrição de um objeto conhecido por sentidos ou visão clara. A definição não determina o objeto; em vez disso, o objeto determina a definição. Uma definição não é vinculativa logicamente.

OE (f) – 13: (Concepção de função). As funções são sequências.

OE (f) – 14: (Concepção de coordenadas). As coordenadas de um ponto são segmentos de linha (não números).

OE (f) – 15: (Concepção do gráfico da função) A representação gráfica de uma função é um modelo geométrico da relação funcional. Não precisa ser fiel, pode conter pontos (x, y) de modo que a função não seja definida em x.

OE (f) – 16: (Uma concepção de variável). As mudanças de uma variável são mudanças no tempo.

Na perspectiva epistemológica de Sierpinska (1992), a aprendizagem ocorre quando há mudanças cognitivas na formação do indivíduo, que geram uma ruptura de determinados conhecimentos, entre o velho e o novo, e resulta na superação dos obstáculos. Neste aspecto, Costa (2008) assume a importância dos obstáculos epistemológicos para a aprendizagem dos conceitos, como uma forma de compreender os erros e superá-los, e concorda com a relação que se deve ter entre o velho conceito e novo. A importância que se deve dar aos obstáculos epistemológicos é tão fundamental quanto à formalização do conceito.

> Os obstáculos epistemológicos são algo negativo para o desenvolvimento de um conceito. Contudo, eles fazem parte de seu aprendizado, e a discussão não deveria estigmatizá-los como negativos ou positivos, na medida em que estes não podem ser evitados. Não existe aprendizado sem confronto, geralmente, não se aceita algo novo sem efetuar conexões ou pré-julgamentos. As nossas convicções são a base inicial sobre a qual assentamos novos conhecimentos. Por outro lado, para avançarmos no domínio de um novo conteúdo, é necessário ultrapassar tais obstáculos e esta tarefa nem sempre é fácil, resistir às nossas convicções e rever nossos pontos de vista requer estratégias e tempo. (COSTA, 2008, p. 11).

Entretanto, Sierpinska (1992) também expõe as ações importantes para a compreensão do conceito de função como:

U (f) – 4: Discriminação entre dois modos de matemática: um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, o outro – em termos de quantidades variáveis e constantes.

U (f) – 5: Discriminação entre a variável independente e a variável dependente.

U (f) – 9: Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas (algébricas) utilizadas para descrever essas leis.

U (f) – 12: Discriminação entre os conceitos de função e relação. Assim, para que haja uma compreensão do conceito de função, ler a definição não é suficiente; é necessário que o professor utilize exemplos, contraexemplos e aplicabilidade, dando significado ao conceito abordado.

O estudo do conceito de função deve envolver diferentes representações, como tabelas, gráficos, diagramas, expressões algébricas (expressões analíticas ou fórmulas). As diferentes linguagens do conceito de função são fundamentais para o seu ensino e, portanto, devem ser abordadas ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Trindade e Moretti (2000) enfatizam a importância das diversas formas de representações de função como forma para superar os obstáculos epistemológicos de Sierpinska (1992):

> A articulação dessas diversas formas de representar funções e o emprego constante de representação verbal para a identificação dos objetos de mudanças no estudo de

> mudanças são condições necessárias para que os obstáculos epistemológicos de identificar com apenas uma de suas representações e de considerar mudanças como fenômenos sejam superados. (TRINDADE; MORETTI, 2000, p. 44).

Dessa maneira, trabalhar com os diferentes modos de representação de função possibilita romper os obstáculos, como por exemplo, o uso de tabelas em que existe uma relação funcional entre os elementos da linha de entrada correlacionados com os elementos da coluna de saída. Segundo Steele, Hillen e Smith (2013), o uso de tabelas propicia uma melhor perspectiva da particularidade do conceito de função, em que os dados que entram e saem da tabela podem possibilitar a compreensão quando duas grandezas são proporcionais ou não proporcionais, isto é, uma proporcionalidade (numérica) é uma função $p\colon \mathbb{R}_{+} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$ com as seguintes propriedades: a) p é uma função crescente, ou seja, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{+}$, $\alpha < \beta$ implica que $p(\alpha) < p(\beta)$; b) para todo $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$ e para todo $\gamma \in \mathbb{N}$ tem-se $p(\gamma\alpha) = \gamma p(\alpha)$. Sierpinska (1992) concorda com a importância da visualização da relação entre os pares ordenados (x, y) por meio de tabelas e a construção de sequências numéricas e Lima (2008) afirma que:

> As tabelas, para a ressignificação do conceito de função, podem auxiliar os professores na visualização das regularidades numéricas, associando os resultados às representações gráficas, integrando, assim, os tipos de conhecimento de função. (LIMA, 2008, p. 54).

Assim como a tabela, o uso do diagrama para representar a relação entre os pares ordenados pode auxiliar o aluno a visualizar a transformação do elemento de um conjunto em outro elemento de outro conjunto e, também, associar a lei que define a função. Outro aspecto do conceito de função é a compreender as variáveis e saber distinguir a dependência que há entre elas. De acordo com Rezende (2003), é fundamental entender a variação dentro do conceito de função, pois este aspecto exerce papel de completa concepção epistemológica,

> [...] o conceito de função se estabelece como uma ferramenta da matemática que ajuda o homem a entender os processos de *fluência* e de *interdependência* que são intrínsecos às coisas e aos seres do nosso Universo. Portanto, saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudamos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. (REZENDE, 2003, p. 20)

Do ponto de vista formal do conceito, uma dependência funcional é representada como $f(x) = y$, ou seja, x é variável independente e y a variável que depende de x.

Ainda outro modo de comunicação por meio do uso de representações gráficas é uma linguagem do conceito de função que permite visualizar melhor o comportamento da função, o crescimento e os máximos e mínimos, continuidade e linearidade, entre outros. No gráfico, composto por pares ordenados (x, y), x pertencerá ao conjunto domínio da função e y pertencerá ao conjunto contradomínio da função ou ao subconjunto desse contradomínio denominado de imagem da função.

> O estudo das representações gráficas de funções é, também, de fundamental importância para o aprendizado desse conceito. Representações gráficas são talvez a forma mais utilizada de representação de funções e a maneira mais adequada para apresentar informações sobre linearidade, intervalos de crescimento, máximos e mínimos, taxa de variação, regularidade e continuidade. A partir desses conceitos os alunos podem fazer previsões interpolar e extrapolar. Aprendendo gráficos eles se preparam para relacionar diversos tipos de funções. (TRINDADE; MORETTI, 2000, p. 45).

O conceito de função é apresentado, em geral, como expressão analítica, depois a partir da construção de uma tabela e, por fim, pela construção da representação gráfica. Consequentemente, os alunos têm a imagem do conceito de função apenas como uma expressão analítica e não percebem as outras como representação de função. Trindade e Moretti (2000) não desconsideram a importância das expressões algébricas, que por si só já são notórias, porém sugerem que se inicie a apresentação do conceito por meio de representações numéricas e gráficas, pois possibilitam uma melhor compreensão, *“Trata-se de primeiro desenvolver o conceito intuitivo de função, para depois formalizá-lo”*. (Trindade; Moretti, 2000, p. 44).

O conceito de função é fundamental, porém para que os alunos possam compreender esse conceito, é preciso que, em seu ensino, haja uma organização nas representações de funções de acordo com os níveis de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades apropriadas e sistematizadas para estruturar esse conceito.

4 ANÁLISE DOS PLANOS DE ENSINO DAS DISCIPLINAS QUE ABORDAM O CONCEITO DE FUNÇÃO DO CURSO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – UNESP/IBILCE

Neste capítulo, analisamos os planos de ensino de algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas – UNESP de São José do Rio Preto. Foram selecionados para análise os planos de ensino que, em seu conteúdo programático, tratam do conceito de função.

O Projeto Político Pedagógico foi reestruturado pelo Conselho de Curso de Graduação em Matemática e, a partir de 2015, entrou em vigência uma nova estrutura curricular. Nossa análise tomou como referência a estrutura curricular para ingressantes a partir de 2012, pois foram aplicados questionários, em 2017, para alunos do 4º ano e que, portanto, ingressaram em 2014.

As disciplinas específicas e obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática que tratam do conceito de função se iniciam logo no primeiro ano. Tais disciplinas são comuns tanto para os alunos da licenciatura quanto para os alunos do bacharelado, como podemos observar no quadro abaixo, extraído do Projeto Político Pedagógico, para ingressantes de 2012.

Quadro 1 – Disciplinas Obrigatórias do 1º ano do curso de Matemática

Primeiro Ano
1. Aritmética e Álgebra Elementares 2. Cálculo Diferencial e Integral I 3. Geometria Analítica e Vetores 4. Geometria Euclidiana 5. Introdução a Ciência da Computação

Fonte: UNESP, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto. **Projeto Político Pedagógico de Matemática.** Modalidade Licenciatura (Diurno/Noturno), 2012, p. 1.

A disciplina *Aritmética e Álgebra Elementar* tem como objetivo retomar os conceitos abordados na formação básica e desenvolver o raciocínio dedutivo por meio da resolução de problemas e apresentar soluções usando a simbologia algébrica. Nessa disciplina, os conteúdos programáticos que abordam o conceito de função são,

> [...] 2. Funções: Domínio e Imagem, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, composições de funções, funções inversíveis, restrição e prolongamento de uma aplicação. 3. Trigonometria do Triângulo Retângulo e Aplicações: Definição de ângulo. Grau e radiano. Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Leis do seno e do cosseno. 4. Funções trigonométricas: O ciclo trigonométrico. Funções trigonométricas e aplicações. Identidades, equações, inequações e sistemas de equações trigonométricas. Estudo das funções trigonométricas inversas. 5. Indução Finita: Princípios de Indução Finita; primeira e segunda forma do princípio de indução. Aplicações elementares. 6. Funções exponencial e logarítmica: Definição de função exponencial e propriedades. Definição de logaritmo e propriedades. Equações e inequações exponenciais e logarítmicas. 7. Números complexos: Definição e operações elementares. Forma trigonométrica de um número complexo e sua representação no plano de Argand – Gauss. Potenciação, radiciação e respectivos significados geométricos. 8. Polinômios em uma variável: Definição, grau, igualdade de polinômios. Operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios e suas propriedades. Função polinomial, operações e suas propriedades. 9. Divisão de Polinômios: Algoritmo Euclidiano da Divisão, fatoração de polinômios. Métodos de divisão, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, Dispositivo de Briot-Ruffini. Equações algébricas: número de raízes; raízes complexas, reais, racionais, raízes múltiplas e simples, relação entre coeficientes e raízes. Máximo divisor comum e algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum de dois polinômios. 10. Progressões Aritmética e Geométrica: Padrões e Progressões Aritmética e Geométrica e algumas aplicações. 11. Contagem: Regras de contagem. O Princípio Fundamental. Contagem por particionamento. Contagem do complementar. Corrigindo contagem múltipla. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 5)

Essa é a disciplina que mais aborda as especificidades do conceito de função: o conteúdo previsto se inicia com o conceito de função, domínio, contradomínio e imagem de uma função, anuncia o estudo das qualidades das funções, prevê o estudo de algumas funções especiais e assegura o estudo de progressões aritmética e geométricas que são casos particulares de funções. A metodologia de ensino da disciplina consiste em aulas expositivas, seminários e resolução de listas de exercícios e as referências bibliográficas utilizadas são:

1. CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 1992.
2. CARVALHO, P. C. P. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2012, http://www.obmep.org.br/docs/Apostila2-contagem.pdf.
3. LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática no Ensino Médio*. Vol. 1, 2 e 3. SBM, Rio de Janeiro, 1999.
4. ÁVILA, G. S. S. A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia Antiga. Revista do Professor de Matemática, nº. 01, 1982, p. 9-13.
5. ÁVILA, G. S. S. Geometria e Astronomia. Revista do Professor de Matemática. nº. 13, 1988, p. 5-12.
6. ÁVILA, G. S. S. Aristarco e as Dimensões Astronômicas. Revista do Professor de Matemática, nº. 55, 2004, p. 1-10.
7. ARAÚJO, F. H. A; PASTOR, A. L. P. Ângulos entre Ponteiros de um Relógio. Revista do Professor de Matemática, nº. 72, 2010, p. 19-21.

8. ARCONCHER, C. O Conceito de Ângulo. Revista do Professor de Matemática, nº. 37, 1988, p. 22-24.
9. BATSCHELET, E. *Introdução à Matemática para Biocientistas*. São Paulo: Edusp, 1998.
10. HEFEZ, A. *Indução Matemática*. Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007, http://www.obmep.org.br/docs/Apostila4-Inducao.pdf
11. IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 1. São Paulo: Atual, 1985.
12. KLEMAIS, A. Marcando Ângulos sem Transferidor. Revista do Professor de Matemática, nº. 11, 1987, p. 45-46.
13. Coleção de Vídeos do Laboratório de Matemática – IBILCE: Project Mathematics, Caltech, 1992, Arte e Matemática, MEC, 1999, Série Matemática e Estatística, PUC Rio, 2006, Série – História da Matemática, Paed Vídeo Educativo, 2003. Série A História da Matemática, BBC, 2008.
14.http://www.uff.br/cdme/fqa/fqa-html/fqa-br.html 15.http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/
16.http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf
17.http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ28/erast.htm
18.http://www.uff.br/cdme/#audio#experimentos#softwares

A disciplina *Aritmética e Álgebra Elementar* tem uma carga horária de 150 horas anuais, com 90 horas de Conteúdo Específico/Formação Científico-Cultural e 60 horas de Prática como Componente Curricular.

Outra disciplina que aborda de forma ampla o conceito de função e o aprofunda é o *Cálculo Diferencial e Integral I*, que tem como base o estudo das funções. Os conteúdos programáticos da disciplina são:

> 1. Números reais: operações, ordem, inequações envolvendo módulo. 2. Funções reais de uma variável real: conceito de função, funções afim e quadrática, funções polinomiais, funções racionais, gráficos e exemplos, composição de funções. 3. Limite e continuidade: conceitos e principais propriedades, limites laterais, limites infinitos, limites no infinito, propriedades de funções contínuas em intervalos fechados, limites fundamentais. 4. Derivadas: conceito e interpretação geométrica, derivadas das funções elementares, regras de derivação, regra da cadeia, derivada da função inversa, reta tangente e reta normal a um gráfico, teoremas de Rolle, do valor médio (Lagrange) e de Cauchy. 5. Aplicações: estudo da variação das funções, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos críticos, máximos e mínimos, concavidade, assíntotas, regra de L'Hôpital. 6. Fórmula de Taylor: aproximação de uma função por seu polinômio de Taylor, aproximação linear, diferenciais. 7. Primitiva de uma função: relação entre funções com derivadas iguais, integral indefinida. 8. Integral definida: soma e integral de Riemann, propriedades da integral, Teorema fundamental do cálculo, cálculo de área, mudança de variável na integral definida. 9. Técnicas de integração: primitivas imediatas, tabela de primitivas, integração por partes e por substituição (mudança de variável), integração de algumas funções racionais, substituições trigonométricas, funções dadas por uma integral, teorema do valor médio para a integral. 10. Integrais impróprias: convergência e divergência, critério da comparação. (Projeto Político-Pedagógico do Curso de Matemática, 2012, p. 2)

O *Cálculo Diferencial e Integral I* é a disciplina que possibilita ao aluno conhecer as múltiplas representações de funções, das quais podemos enfatizar a verbal, a numérica, a visual e a algébrica, além do estudo das propriedades, dos comportamentos e das aplicações dos vários tipos de funções em várias áreas do conhecimento. Como argumenta Barufi (1999), a disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral I* tem um papel fundamental no estudo das funções e está presente não somente no curso de Matemática, como também nas Engenharias, Economia, Física, Química, Biologia, etc., sendo uma disciplina de carácter integrador. E completa:

> Além disso, uma das especificidades do Cálculo, ao desenvolver os estudos de funções, é a de estudar a taxa de variação de uma função, ou seja, diferentes maneiras pela qual uma função cresce ou decresce num intervalo ou num determinado ponto de um intervalo. A ideia fundamental é de que uma curva, localmente, pode ser aproximada por uma reta, onde as características de proporcionalidades constituem um elemento facilitador na análise e compreensão dos processos envolvidos. (BARUFI, 1999, p. 2)

Consequentemente, a importância do conceito de função para estudar os conceitos de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de uma variável real e discutir algumas aplicações desses conceitos são aspectos desenvolvidos no curso de Cálculo Diferencial e Integral. Para essa disciplina, no Plano de Ensino, constam as seguintes referências bibliográficas:

1. GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
2. STEWART, J. *Cálculo*. Vol. 1. São Paulo: Thompson, 2004.
3. THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo*. Vol. 1. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2012.

Dentre os livros indicados na Bibliografia Básica, podemos afirmar que o livro de Stewart (2004) apresenta mais aplicações do que o livro de Guidorizzi (2001). No Plano de Ensino da disciplina *Cálculo Diferencial e Integral I* consta como objetivo:

> Ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de: avaliar as funções a partir de várias perspectivas: fórmulas, gráficos, dados numéricos e relações entre quantidades; usar recursos didáticos e/ou computacionais aplicados no ensino de funções e limite; compreender e aplicar os conceitos de limite, continuidade, derivada e integral para funções reais de uma variável real, tanto em problemas teóricos quanto práticos; analisar problemas e saber distinguir as ferramentas a serem aplicadas na sua resolução. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 2)

A disciplina *Cálculo Diferencial e Integral I* tem uma carga horária de 150 horas anuais e, com a nova reestruturação, 30 horas são destinadas a Prática como Componente Curricular.

As disciplinas *Geometria Analítica e Vetores*, *Geometria Euclidiana* e *Introdução a Ciência da Computação* são disciplinas do primeiro ano que também, provavelmente, trabalham o conceito de função, porém, na ementa, esse conteúdo não aparece de forma explícita.

Quadro 2 – Disciplinas Obrigatórias do 2º ano do curso de Matemática

Segundo Ano
6. Álgebra Linear da Licenciatura 7. Cálculo Diferencial e Integral II 8. Desenho Geométrico e Geometria Descritiva 9. Estruturas Algébricas 10. Introdução a Análise Matemática 11. Introdução ao Cálculo Numérico 12. Política Educacional Brasileira

Fonte: UNESP, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto. **Projeto Político Pedagógico de Matemática.** Modalidade Licenciatura (Diurno/Noturno), 2012.p.1.

No segundo ano de curso, temos a disciplina *Cálculo Diferencial e Integral II*, que é continuação da disciplina *Cálculo Diferencial e Integral I* do primeiro ano de curso e abrange um pouco mais os estudos em funções. De fato, nos conteúdos programáticos da disciplina aparecem funções com várias variáveis e todas as noções fundamentais e qualidades referentes às funções de uma variável, ou seja, conceito, domínios, contradomínio, imagem, representações gráficas, limites, continuidade, derivada e integral têm generalizações para funções de várias variáveis são retomados. Os conteúdos da disciplina *Cálculo Diferencial e Integral II* são:

> 1. Superfícies Especiais: planos, cilindros e quádricas. 2. Curvas Parametrizadas: vetores tangentes, comprimento de arco. 3. Funções reais de duas variáveis reais: domínio, gráfico e curvas de nível. 4. Funções reais de três variáveis reais: domínio e superfícies de nível. 5. Noções topológicas no plano e no espaço. 6. Limites e continuidade: definição e propriedades. 7. Derivadas parciais: definição e interpretação geométrica. Diferenciabilidade. Vetor gradiente. Regra de Cadeia. Derivações de funções definidas implicitamente. Derivada Direcional. Derivadas parciais de ordem superior. Generalização do teorema do Valor Médio. Fórmula de Taylor com resto de Lagrange. Aproximação Linear. Diferenciais. Extremos Locais. Máximos e mínimos. Multiplicadores de Lagrange. Aplicações. 8. Integral Dupla: Definição, Propriedades, Teorema de Fubini, Mudança de variáveis. Aplicações. 9. Integral Tripla: Definição, Propriedades, Mudança de variáveis, Aplicações. 10. Funções Vetoriais: Definição, Operações, Limite e continuidade, Derivada. 11. Integral de linha: Independência de caminhos, diferenciais exatas, função potencial. Teorema de Green. 12. Integral de Superfície: Teorema de Gauss e Stokes.

> Aplicações. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012,p. 17)

Na disciplina *Cálculo Diferencial e Integral II*, todo o rol de conteúdos envolve funções com aprofundamentos específicos. Assim, se o conceito de função não é bem compreendido nas disciplinas do primeiro ano, as dificuldades de aprendizagem dos alunos tendem a aumentar.

A metodologia e avaliações são as mesmas, ou seja, aulas expositivas, seminários e resolução de listas de exercícios. Os livros usados são:

1. GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 2 e Vol. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
2. PINTO, D.; CÂNDIDA, F. M. *Cálculo Diferencial e Integral de Varias Variáveis*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2003.
3. STEWART, J. *Cálculo*. Vol. 2. São Paulo: Thompson, 2004.

A disciplina apresenta como objetivo que o aluno, ao final do semestre, saiba calcular limites, derivadas e integrais de até três variáveis reais, utilizar os principais teoremas e calcular integrais de linha e integrais de superfícies. A disciplina *Cálculo Diferencial e Integral II* é composta por uma carga horária de 100 horas de Conteúdo Específico e 20 horas de Prática como Componente Curricular.

No segundo ano também encontramos a disciplina *Estruturas Algébricas* que, em conformidade com o Plano de Ensino, trata o conceito de função iniciando-o por meio de relação binária, isto é, define relação binária, apresenta exemplos e representações de uma relação, operações com relações, domínio e imagem de uma relação, relação funcional e a definição de função.

> 1. Conjuntos: noção de conjunto, relação de pertinência e inclusão, operações entre conjuntos. 2. Relações: definição, exemplos e representações. Domínio, contradomínio, imagem e inversa de uma relação. Composição de relações. Propriedades de uma relação definida sobre um conjunto. 3. Relações de equivalência: definição, exemplos. Conjunto quociente. O conjunto das classes de equivalência módulo m. A construção dos conjuntos dos números inteiros e racionais. 4. Relações de ordem: definição e exemplos. Conjuntos totalmente e parcialmente ordenados. Elementos especiais em conjuntos parcialmente ordenados. 5. Funções: definição e exemplos; funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras; conjunto imagem direta e imagem inversa e suas propriedades em relação às operações entre conjuntos. 6. Aritmética dos números: Números Naturais e o Axioma da Boa Ordem. Princípio de Indução Finita, Sistema de Numeração Decimal, Divisibilidade, Números Primos, Algoritmo da Divisão de Euclides e Teorema Fundamental da Aritmética. Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum, Aritmética Modular, Pequeno teorema de Fermat. 7. Operações binárias: definição, exemplos, propriedades de uma operação e tábua de uma operação definida sobre um conjunto finito [...]. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 19)

Podemos perceber que o conceito de função é desenvolvido depois do conceito de relação e apresentado de forma conjuntista. Em conformidade com o Plano de Ensino, a bibliografia utilizada para essa disciplina é composta por três livros:

1. BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. *Algebra Moderna*. Barcelona: Vicens, 1970.
2. DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual, 2003.
3. HEFEZ, A. *Curso de Álgebra*. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

A metodologia também é estruturada em aulas expositivas, listas de exercícios e seminários.

A disciplina *Estruturas Algébricas* tem 40 horas de Conteúdo Específico e 50 horas de Prática como Componente Curricular. O objetivo da disciplina é levar o aluno a compreender a linguagem dos conjuntos, relações, funções, aritmética dos números e operações binárias.

Na disciplina *Introdução à Análise Matemática* o conceito de função está implícito ao se trabalhar com sequências. O conteúdo programático da disciplina é:

> 1. Conjuntos Finitos, Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis: Números naturais, Boa ordenação, Princípio de Indução Finita, Conjuntos Finitos e Infinitos, Conjuntos. 2. Introdução geométrica dos números reais: segmentos comensuráveis e incomensuráveis. A reta real. 3. Números reais apresentados de forma axiomática: corpos, corpos ordenados, desigualdade de Bernoulli, Intervalos, Axioma fundamental da análise matemática (existência de um corpo ordenado completo), Princípio dos Intervalos Encaixantes, a não inumerabilidade dos Reais. 4. Sequencias de números reais: sequências, limites, propriedades operatórias, subsequências, sequências monótonas, sequências definidas recursivamente, método de aproximações sucessivas, sequências de Cauchy, o número e. 5. Séries de Números reais: convergência e divergência, convergência absoluta, testes da comparação, da razão e da raiz, Teorema de Dirichlet, Critério de Abel, Critério de Leibniz, Séries Comutativamente convergentes e reindexação. Representação decimal. 6. Noções e propriedades de séries de Potências: Séries de Potencias, convergência, raio e intervalo de convergência, derivação e integração termo a termo. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 20)

A bibliografia básica é:

1. LIMA, E. L. Análise Real Volume 1. Funções de Uma Variável. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.
2. LIMA, E. L. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

A disciplina *Introdução à Análise Matemática* tem carga horária de 60 horas semestrais, com 45 horas de Conteúdo Específico e 15 horas de Prática como Componente Curricular. O objetivo da disciplina é que o aluno saiba utilizar as propriedades básicas dos números reais, das sequências e das séries de números reais, e assim identificar e resolver problemas matemáticos de acordo com o conteúdo programático desenvolvido e organizar, comparar e aplicar esses conhecimentos na disciplina *Análise Real* e relacionar seus conteúdos com os de outras disciplinas do curso.

Por fim, temos as disciplinas *Desenho Geométrico e Geometria Descritiva*, *Política Educacional Brasileira*, *Álgebra Linear* e *Introdução ao Cálculo Numérico*. Nas duas últimas disciplinas, o conceito de função não está previsto em seus conteúdos programáticos. Porém, sabemos que em *Álgebra Linear* o conceito de aplicação (função) está presente em: espaço vetorial, produto interno, transformação linear, determinantes, e autovalor, forma bilinear, etc., e em *Introdução ao Cálculo Numérico* a noção de função está presente em: cálculo de valores de funções, resolução aproximada de equações algébricas e transcendentes, interpolação de funções, integração aproximada de funções, etc.

Quadro 3 – Disciplinas Obrigatórias do 3º ano do curso de Matemática

Terceiro Ano
13. Análise na Reta 14. Combinatória e Grafos 15. Didática da Matemática 16. Física Geral I 17. Introdução a Probabilidade 18. Matemática do Ensino Fundamental e Médio 19. Metodologias de Ensino de Matemática e Estágio Curricular Supervisionado I 20. Programação Matemática 21. Psicologia da Educação

Fonte: UNESP, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto. **Projeto Político Pedagógico de Matemática.** Modalidade Licenciatura (Diurno/Noturno), 2012.p.1.

No terceiro ano, a disciplina *Análise na Reta* aborda o conceito de função e suas especificidades. A disciplina é uma continuidade da disciplina *Introdução à Análise Matemática* e seu conteúdo programático é:

> 1. Noções de Topologia na Reta: conjuntos abertos, conjuntos fechados, conjuntos compactos, pontos de acumulação. 2. Limites de funções reais de uma variável real: conceito, propriedades, limites laterais, limites infinitos, limites no infinito. 3. Continuidade de funções reais de uma variável real: conceito, propriedades, continuidade em conjuntos compactos e intervalos, continuidade uniforme. 4. Derivada de funções reais de uma variável real: conceito, regras de derivação, derivada da função composta, Teorema do Valor Médio, máximos e mínimos locais, estudo da variação de funções, fórmula de Taylor. 5. A integral de Riemann de funções reais de uma variável real: somas superiores e inferiores, funções integráveis, critérios de integração, propriedades, soma de Riemann, conjuntos de

> medida nula e integrabilidade. 6. Práticas como Componentes Curriculares: A prática como componente curricular será realizada através de atividades, nas quais, os futuros professores articularão os conteúdos da disciplina com a prática pedagógica colocando em uso os conhecimentos adquiridos, na forma de elaboração de planos de aula, apresentação de oficinas de trabalhos, apresentação de seminários e realização de trabalho em grupo. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 47)

A bibliografia básica utilizada na disciplina é:

1. ÁVILA, G. S. S. *Análise Matemática para a Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.
2. LIMA, E. L. *Análise Real Volume 1. Funções de Uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.
3. FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

A disciplina *Análise na Reta* tem carga horária de 40 horas em Conteúdo Específico e 20 horas para Prática como Componente Curricular. O desenvolvimento da disciplina busca que o aluno tenha capacidade de compreender os principais resultados relacionados à topologia da reta real, limite, continuidade, derivada e integral de Riemann de funções reais de uma variável real e identificar e resolver problemas matemáticos de acordo com o conteúdo abordado. Desse modo, o aluno terá a oportunidade de retomar o conceito de função quando se estuda os seguintes temas da disciplina *Análise na Reta*: limites de funções – definição e primeiras propriedades, limites laterais, limites no infinito e limites infinitos, funções contínuas: definição e primeiras propriedades, funções contínuas num intervalo, funções contínuas em conjuntos compactos, função derivada, funções deriváveis num intervalo, função de classe C^n, funções integráveis, sequencias, séries de funções, etc.

Outra disciplina do terceiro ano é a *Física Geral I*. Os conteúdos programáticos dessa disciplina são:

> 1. Movimento em uma dimensão: Deslocamento, velocidade (escalar, instantânea e relativa); aceleração; movimento com aceleração constante. 2. Movimento em duas e em Três dimensões: o vetor deslocamento; posição, velocidade e aceleração; movimento dos projéteis. 3. Leis de Newton: primeira, segunda e terceira leis de Newton; a força da gravidade; as forças da natureza. Aplicações das leis de Newton: atrito, movimento circular; forças de arraste. 4. Trabalho e Energia: trabalho e energia cinética; trabalho e energia em três dimensões; potência e energia potencial. 5. Conservação de Energia: conservação da energia mecânica, massa e energia; quantização da energia. 6. Sistemas de Partículas e Conservação do Momento: o centro de massa; conservação do momento; energia cinética de um sistema; colisões. 7. Rotação: velocidade e aceleração angulares; Torque, momento de inércia e segunda lei de Newton; aplicações da segunda lei de Newton; energia cinética de rotação. 8. Conservação do Momento Angular: a natureza vetorial da rotação; momento angular; torque e momento angular; conservação e quantização do momento angular. 9. Gravidade: as leis de Kepler, lei da gravitação de Newton; Energia potencial gravitacional; o campo gravitacional. 10. Equilíbrio Estático e Elasticidade: condições de equilíbrio; centro de gravidade; exemplos de equilíbrio estático; equilíbrio estático em um referencial acelerado; estabilidade do equilíbrio

> de rotação; Tensão e Deformação. 11. Mecânica Clássica na Educação Básica: Identificação e análise crítica do conteúdo didático em livros de Ciências e de Física da Educação Básica, Identificação e análise crítica do conteúdo do Caderno do Aluno de Física da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. PRÁTICA COMO COMPONENTE CURRICULAR Pesquisa bibliográfica na sala de aula, na biblioteca, ou em sala ambiente de informática, usando inclusive o telemóvel (smartphone). Exposição pelos alunos do conteúdo pesquisado e discussão com a classe de conceitos pré-formados e conteúdo de Física, relacionados com a temática da disciplina. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 49)

No rol de conteúdos da disciplina *Física Geral I* é possível percebermos a abrangência do uso do conceito de função nos vários temas previstos nesse conteúdo programático. Os livros básicos utilizados nessa disciplina são:

1. TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para Cientistas e Engenheiros*. Vol. I. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
2. HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; *Fundamentos de Física*. Vol. I. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
3. NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. Vol. I. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
4. FEYNMAN, R. P. *Lições de Física*. Vol. 1. Porto Alegre: Bookman, 2008.
5. GIBILISCO, S. Física sem Mistério. Rio de Janeiro: Alta Books Editora, 2013.
6. Professores do GREF do IFUSP. *Física 1: Mecânica*. São Paulo: Edusp, 2011.
7. ESCOVAL, M. T. *A Ação da Física na Nossa Vida*. Lisboa: Presença, 2012.
8. SANTOS, C. S. *Ensino de Ciências: Abordagem Histórico-Crítica*. Campinas: Autores Associados, 2005.
9. SOUZA, P. H. *Física Lúdica*. São Paulo: Cortez Editora, 2011.
10. ROONEY, A. *A História da Física*. São Paulo: M. Books do Brasil, 2013.
11. TAKIMOTO, E. *História da Física na Sala de Aula*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
12. SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA (SBF). *Pensando o Futuro. O Desenvolvimento da Física e sua Inserção na Vida Social e Econômica do País*. São Paulo: SBF, 2005.
13. SÃO PAULO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino de Física*. São Paulo: Secretaria da Educação, 2008.

A carga horária da disciplina *Física Geral I* é de 40 horas de conteúdos específicos e 20 horas para Prática como Componente Curricular. O objetivo da disciplina é que o aluno compreenda os fundamentos da Mecânica Newtoniana e sua importância para a Física.

Outra disciplina que aborda o conceito de função em seus conteúdos programáticos é a *Matemática do Ensino Fundamental e Médio*:

> O conteúdo programático a ser desenvolvido será escolhido em comum acordo entre professor e alunos dentre os tópicos do ensino médio (listados a seguir) sobre o qual haja maior interesse por parte dos alunos: 1. Números 2. Conjuntos 3. Progressões 4. Funções Reais de uma variável real (estudadas sob o ponto de vista elementar, sem o uso do Cálculo Infinitesimal). 5. Matrizes e determinantes. 6. Sistemas Lineares 7. Geometria Analítica 8. Trigonometria 9. Posições Relativas de Retas e Planos, projeção ortogonal e distancias 10. Medidas de áreas e volumes 11. Poliedros e

> Corpos Redondos 12. Análise Combinatória 13. Números Complexos 14. Polinômios 15. Probabilidade 16. Estatística (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 145)

A disciplina tem como objetivos adaptar o formalismo matemático para uma linguagem adequada ao Ensino Médio e interpretar problemas e associar aos conteúdos estudados os modelos matemáticos adequados para representar situações específicas. É oferecida no segundo semestre, com uma carga horária de 60 horas e toda a carga horária é de Prática como Componente Curricular.

As disciplinas *Combinatória e Grafos*, *Psicologia da Educação*, *Didática da Matemática*, *Metodologias de Ensino de Matemática e Estágio Curricular Supervisionado*, *Introdução a Probabilidade* e *Programação Matemática* também são do terceiro ano, mas não abordam o conceito de função no conteúdo programático.

Quadro 4 – Disciplinas Obrigatórias do 4º ano do curso de Matemática.

Quarto Ano
22. Equações Diferenciais Ordinárias
23. Estatística Básica
24. Física Experimental
25. Física Geral II
26. Física Geral III
27. Funções de Variável Complexa
28. Introdução a Matemática Financeira
29. Metodologias de Ensino de Matemática e Estágio Curricular Supervisionado II

Fonte: UNESP, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto. **Projeto Político Pedagógico de Matemática.** Modalidade Licenciatura (Diurno/Noturno), 2012.p.1.

No quarto ano de curso temos a disciplina *Equações Diferenciais Ordinárias*, que tem como pré-requisitos o *Cálculo Diferencial e Integral II e Álgebra Linear*, que são disciplinas que estudam o conceito de função e, assim, fundamentais para o desenvolvimento dos conteúdos da disciplina *Equações Diferenciais Ordinárias*, que são:

> Preliminares: Problemas onde surgem EDOs, ordem e grau de uma EDO, EDOs lineares e não-lineares. 2. Equações lineares de primeira ordem: EDOs lineares com coeficientes constantes, EDO homogênea e não-homogênea. Eq. De Bernoulli. 3. Equações não-lineares de primeira ordem: teorema de existência e unicidade, Interpretação geométrica. O método de Picard, equações separáveis, equações homogêneas, equações exatas, fator integrante, aplicações das EDOs não-lineares de primeira ordem. 4. Equações lineares de segunda ordem: Teoria básica, redução de ordem, equação homogênea com coeficientes constantes, equação não-homogênea,

> método dos coeficientes a determinar, método de variação dos parâmetros, equações diferenciais de ordem superior, aplicações. 5. Sistemas de equações diferenciais: Sistemas lineares com coeficientes constantes, Sistemas lineares não homogêneos com coeficientes constantes, Fórmula de variação dos parâmetros. 6. Solução de EDOs usando séries de potências: Séries de potências, soluções analíticas, pontos singulares regulares. Equação de Euler. Método de Frobenius. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 65)

As equações diferenciais ordinárias são usadas para construir modelos matemáticos de fenômenos físicos e naturais. De fato, nessa disciplina, podem-se estudar vários tipos distintos de equações diferenciais que surgem no estudo de fenômenos dos mais variados, ou seja, em problemas que surgem de várias áreas do conhecimento: Física, Química, Biologia, Economia, Engenharia, etc. Assim, nessa disciplina, o aluno tem a oportunidade de estudar diferentes modelos de equações diferenciais que envolvem derivadas de uma função de uma variável denominada de equação diferencial ordinária; desse modo, o conceito de função também é fundamental para a resolução de problemas aplicados em que aparecem equações diferenciais, o que leva o aluno a revisitar o conceito de função numa nova perspectiva. A bibliografia básica da disciplina contém os seguintes livros:

1. BRAUN, M. *Equações Diferencias e suas aplicações*. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
2. BOYCE, W. F.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
3. LEIGHTON, W. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: LTC, 1978.
4. LIMA, E. L.; P. CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *Temas e Problemas Elementares*. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

A disciplina *Equações Diferenciais Ordinárias* é oferecida no segundo semestre do quarto ano do curso e tem carga horaria de 60 horas, com 50 horas de conteúdo especifico e 10 horas de Práticas como Componente Curricular.

Funções de Variáveis Complexa é uma disciplina oferecida no primeiro semestre do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática, com carga horária de 60 horas, sendo 45 horas destinadas a conteúdo específico e 15 horas de Práticas como Componente Curricular. Os conteúdos abordados na disciplina são:

> 1. Revisão de números complexos enfatizando a geometria do plano complexo, operações, potências e raízes de números complexos. 2. Funções de uma variável complexa, transformações do plano complexo. As funções elementares: potência, raiz, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Limites e continuidade. 3. Diferenciabilidade: interpretação geométrica, equações de Cauchy-Riemann, funções analíticas e inteiras. 4. Integrais: caminhos, integral de linha, Teorema de Cauchy, primitivas, Fórmula Integral de Cauchy, Teorema de Morera, Teorema de

> Liouville, Teorema Fundamental da Álgebra. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 163)

O Plano de Ensino da disciplina *Funções de Variável Complexa* aborda as funções complexas, ou seja, o estudo das funções de um conjunto de números complexos para outro conjunto de números complexos. Neste estudo, o aluno tem a oportunidade de rever o conceito de função sobre outro aspecto. Na verdade, ao contrário das funções estudadas nas disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral* e *Análise na Reta*, o aluno observará que não se pode desenhar ou esboçar graficamente o comportamento de uma função complexa como se procedia em funções reais. Consequentemente, o aluno pode ser conduzido para uma noção de um mapeamento, isto é, uma forma alternativa de representar graficamente uma função complexa. De fato, de modo geral, uma função complexa definida por $w = f(z)$ pode ser considerada como a atribuição de um ponto (x, y) no plano cartesiano x e y para outro ponto (u, v) no plano cartesiano u e v, em que $z = x + iy$ e $w = u + iv$. Neste sentido, não é possível sobrepor esses dois planos com o intuito de visualizar a representação gráfica de $f(z)$. Assim, para examinar como $f(z)$ funciona, colocamos aqueles dois planos um ao lado do outro, selecionamos algumas curvas ou conjuntos de valores convenientes no plano cartesiano x e y e plotamos a imagem das curvas ou conjuntos de valores imagens correspondentes no plano cartesiano u e v. Dessa maneira, podemos considerar $w = f(z)$ como um mapeamento do plano cartesiano x e y para o plano cartesiano u e v. Portanto, esse procedimento de considerar uma função complexa como mapeamento pode ser considerado um conceito de função conveniente à teoria de variáveis complexas. Além disso, o aluno é apresentado às várias funções elementares (polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, etc.) de variável complexa.

As referências bibliográficas básicas da disciplina *Funções de Variável Complexa* são:

1. SOARES, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
2. CHURCHIL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill, Edusp, 1978.

O objetivo da disciplina é que o aluno possa:

> Estudar as funções de variável complexa, enfocando os aspectos geométricos por meio das transformações do plano complexo. Dar a fundamentação teórica de alguns tópicos do ensino médio; explorar as particularidades das funções de variável complexa em relação às funções reais. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p.163)

No quarto ano também são oferecidas as disciplinas *Física Geral II* e *Física Geral III*. Os conteúdos da disciplina *Física Geral II* são:

> 1. Movimento Ondulatório: ondas transversais e longitudinais; ondas harmônicas; ondas em três dimensões; ondas contra obstáculos. 2. Superposição de ondas e ondas estacionárias. 3. A dualidade Onda-Partícula: a natureza corpuscular da luz; quantização da energia dos átomos; elétrons e ondas de De Broglie; a interpretação da função de onda; partícula numa caixa; quantização da energia em outros sistemas. 4. Temperatura e Teoria Cinética dos gases: equilíbrio térmico e temperatura; as escalas Celsius e Fahrenheit; termômetros a gás e escala de temperatura absoluta; a lei dos gases ideais, teoria cinética dos gases. 5. Calor e a Primeira Lei da Termodinâmica: capacidade calorífica e calor específico; mudança de fase e calor latente; a experiência de Joule e a primeira lei da Termodinâmica; energia interna de um gás ideal; trabalho e diagrama PV de um gás; capacidades caloríficas de sólidos e gases. 6. Segunda Lei da Termodinâmica: máquinas térmicas, refrigeradores e a Segunda Lei da Termodinâmica; a máquina de Carnot; Bomba de Calor; Irreversibilidade e Desordem; Entropia. 7. Propriedades e Processos Térmicos: expansão térmica, equação de Vander Waals e as Isotermas Líquido-Vapor; Diagramas de Fase; Transferência de Energia Térmica. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 157)

E a disciplina *Física Geral III* aborda os seguintes conteúdos:

> 1. Campo elétrico e distribuição de cargas: carga elétrica; condutores e isolantes; lei de Coulomb; linhas de campo elétrico; movimento de cargas puntiformes em campos elétricos; Lei de Gauss; cargas e campos nas superfícies condutoras. 2. O potencial elétrico: diferença de potencial; potencial de um sistema de cargas puntiforme; calculo do campo elétrico a partir do potencial; calculo do potencial V de distribuições contínuas de carga; superfícies equipotenciais. 3. Energia Eletrostática e Capacitância: energia potencial eletrostática; capacitância; armazenamento de energia elétrica; combinações de capacitores; dielétricos. 4. Corrente Elétrica e Circuitos de Corrente Contínua: corrente e movimento de cargas; resistência e lei de Ohm; energia nos circuitos elétricos; combinação de resistores; regras de Kirchhoff; circuitos RC. 5. A teoria microscópica da Condução de Eletricidade: modelo microscópico da condução; o gás de elétrons de Fermi; Teoria Quântica da condução elétrica; teoria das bandas dos sólidos; supercondutividade; distribuição de Fermi-Dirac. 6. Campo Magnético: a forca exercida por um campo magnético; movimento de carga puntiforme em campo magnético; torques sobre espiras com correntes e sobre imãs, o efeito Hall. 7. Fontes de Campo Magnético: campo magnético produzido por cargas em movimento; campo magnético produzido por correntes; Lei de Gauss para o magnetismo; Lei de Ampère, magnetismo da matéria. 8. Indução Magnética: fluxo magnético; tensão induzida e a lei de Faraday; lei de Lenz; correntes parasitas; Indutância; Energia magnética; propriedades magnéticas dos supercondutores. 9. Circuitos de corrente alternada: geradores ca; resistores; indutores e capacitores em circuitos de corrente alternada; fasores; transformador. 10. Equação de Maxwell e Ondas: a corrente de deslocamento de Maxwell e suas equações; ondas eletromagnéticas; equação de onda das ondas. (PROJETO POLÍTICO-PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMÁTICA, 2012, p. 160)

A bibliografia básica contida no Projeto Político Pedagógico para as duas disciplinas contém um único livro:

1. TIPLER, P. A. *Física*. Vol. 1. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984.

As disciplinas são oferecidas no quarto ano de curso, com *Física Geral II* no primeiro semestre e *Física Geral III* no segundo semestre. As cargas horárias das disciplinas consistem em 60 horas, todas de conteúdo específico.

A disciplina *Física Experimental* também é uma disciplina que aborda o conceito de função. O conteúdo programático da disciplina contém todos os conteúdos das disciplinas *Física Geral I* e *Física Geral II*, mas com a proposta de desenvolvê-los de forma experimental.

As demais disciplinas do quarto ano (*Estatística Básica*, *Introdução a Matemática Financeira* e *Metodologias de Ensino de Matemática e Estágio Curricular Supervisionado*) não abordam o conceito de função no conteúdo programático.

Observando a grade curricular do Curso, é possível perceber um equilíbrio entre disciplinas pedagógicas, específicas e de prática como componente curricular. No entanto, o Projeto Político Pedagógico foi reestruturado pelo Conselho de Curso de Graduação em Matemática e, dessa forma, a partir de 2015, entrou em vigência uma nova estrutura curricular.

Considerando as disciplinas que abordam o conceito de função dentro da estruturação curricular analisada, percebe-se que a maioria das disciplinas específicas se fundamenta no conceito de função, o que evidencia sua importância. Portanto, na estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de São José do Rio Preto há várias disciplinas que abordam o conceito de função e aprofundam seu estudo.

5 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS AOS ALUNOS DO ÚLTIMO ANO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNESP/IBILCE

Neste capítulo serão discutidos os dados obtidos por meio do questionário (ver Anexo) aplicado aos alunos do último ano do Curso de Licenciatura em Matemática da UNESP/IBILCE, com o intuito de investigar o conhecimento dos futuros professores de Matemática sobre o conceito de função e sobre o seu ensino e a aprendizagem. As atividades abordadas no questionário e os aspectos a serem observados, segundo os obstáculos epistemológicos de Sierpinska (1992) em relação ao conceito de função, permitiu obter informações pertinentes à pesquisa.

A opção em aplicar o questionário para alunos do último ano do curso de Licenciatura em Matemática se deve ao fato de termos como objetivo discutir o conhecimento de futuros professores de Matemática e o papel da formação inicial na construção do conceito de função.

Durante o Mestrado, no primeiro semestre de 2017, realizei *estágio de docência* na disciplina *Introdução à Análise*. Além de acompanhar as aulas da turma, eu fiquei responsável em oferecer 3 horas semanais de monitoria aos alunos matriculados naquela disciplina. Essas atividades permitiram um contato mais próximo com os alunos do Curso e, em especial, do último ano.

No final do semestre, apliquei o questionário aos alunos do último ano do Curso que se voluntariaram em colaborar com minha pesquisa. Esses alunos, que estavam no último ano do Curso, já haviam cursado a maioria das disciplinas da Estrutura Curricular que abordam o conceito de Função (conforme os quadros 1, 2, 3 e 4 que constam no Capítulo 3).

Nesta perspectiva, apresentamos os dados obtidos com a aplicação do questionário, que foi composto por nove questões elaboradas em conformidade com o objetivo da pesquisa e considerando alguns dos obstáculos apontados por Sierpinska (1992), ou seja, as dificuldades em relação ao conceito de função, como o bloqueio em associar as diferentes formas de representações da função (como, por exemplo: tabelas, gráficos, diagramas e fórmulas), dificuldade de entender o significado de variável e a não compreensão nas manipulações simbólicas como: $f(x)$, $x \rightarrow y$, $sen(x+t)$. Desse modo, o questionário foi elaborado buscando explorar as diferentes representações de função.

Consoante prévio acordo, foram preservadas as identidades dos participantes desta pesquisa. Assim, identificaremos os alunos que responderam ao questionário como: *aluno 1*, *aluno 2*, *aluno 3*, ... , *aluno 15*. O questionário foi respondido por 15 alunos. Os alunos têm entre 20 e 29 anos, a maioria é do sexo feminino (12 alunos) e 2 alunas já lecionavam.

- **Percentual de erros**

Para uma análise do questionário, inicialmente, foi feito um estudo geral dos erros dos alunos (tabela 4). Em seguida, passamos a analisar as justificativas e os procedimentos que levaram os alunos a escolher a alternativa dada como resposta.

Tabela 4 – Percentual de erros

Questões	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Erros	14%	14%	20%	20%	67%	40%	34%	0%	27%

Fonte: Próprio autor

A tabela mostra que os alunos tiveram mais dificuldades nas questões 5, 6, 7 e 9. As questões do questionário abordavam o conceito de função de diferentes formas: representação de função por tabelas (Questão 1), representação de função por diagramas (Questão 2), relação de variável dependente e independente dentro de uma situação problema (Questão 3), definição de função por meio de conjuntos (Questões 4 e 8), representação gráfica de função no plano cartesiano (Questões 5, 6 e 7) e notação simbólica para representar função (Questões 4, 8 e 9).

Assim, a primeira questão do questionário aborda a representação mediante tabelas, a segunda questão é apresentada por meio do uso de diagramas, a terceira tem o intuito de analisar a variação (variáveis independentes e dependentes), a quarta questão aborda a representação do conceito de função por meio da linguagem matemática, as questões cinco e seis utilizam a representação gráfica para abordar a definição de função, a questão sete também utiliza a representação gráfica, mas para tratar do domínio e do contradomínio da função e as questões oito e nove apresentam a formalização do conceito de função, do ponto de vista da notação.

1º Questão: Os dados das tabelas abaixo poderiam representar uma função? Justifique sua resposta.

a)

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Y	*5*	*9*	*13*	*17*	*21*

b)

x	0	-1	1	-2	2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

A primeira questão teve como propósito avaliar o nível de conhecimento dos alunos sobre a representação do conceito de função por meio de tabelas. Uma tabela é uma lista dos valores que a função assume para determinados valores da variável independente. Foram elaboradas duas tabelas e solicitado que fosse identificado se elas poderiam representar uma função. Dessa forma, esperava-se que os alunos percebessem a relação funcional correspondente entre as linhas e as colunas dessas tabelas. Em geral, o primeiro contato que os alunos do Ensino Básico têm com o conceito de função é por meio da representação por tabela.

Nesta questão apenas 14% dos alunos erraram a resposta ou não souberam responder. Na alternativa (a) os alunos não tiveram dificuldade em perceber a relação funcional entre os números das linhas e das colunas, por se tratar de uma função afim, ou seja, definida por $f(x) = 4x + 5$, o que permitiu uma visualização mais clara de correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função de outra). Já na alternativa (b), por se tratar de uma função quadrática, em alguns casos, os alunos se confundiram ao tentar relacionar a definição de função com os valores apresentados na tabela. Assim, segundo Sierpinska (1992), trata-se de um obstáculo epistemológico em que o inconsciente do pensamento acredita que uma função só se apresenta quando se consegue extrair incógnitas e equações de termos – OE (f) – 4 e OE (f) – 11. Já em um dos questionários, o aluno respondeu que os dados (valores numéricos) presentes na tabela não poderiam representar uma função, uma vez que existiam valores distintos de x com imagens iguais (Figura 3).

Figura 3 – Questionário do Aluno 9

Conteúdo Matemático: Funções

01. Os dados das tabelas abaixo poderiam representar uma função? Justifique sua resposta.

a) sim, pois para cada $x \in D(f)$, obtém-se, $\exists! y$ tq $f(x) = y$

x	0	1	2	3	4
y	5	9	13	17	21

b) não é função, pois existem valores distintos de x com imagens iguais

x	0	-1	1	-2	2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

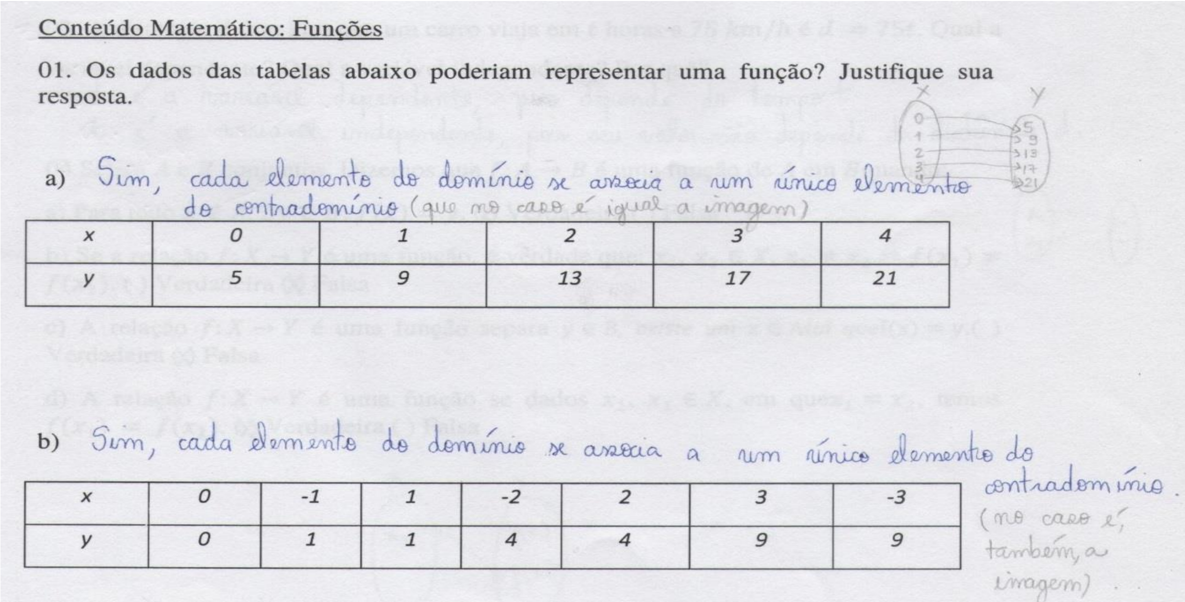
Fonte: Elaborado pelo autor

O aluno, ao justificar a resposta ao item (b), parece ter se equivocado quando se lembrou da noção ou da definição de função – Para todo elemento x do domínio existe um único elemento y do contradomínio tal que o par ordenado $(x, y) \in f$ – não compreendendo a definição. No entanto, ao responder à questão 2 – com diagramas – marca como correta uma alternativa em que todo elemento do domínio está relacionado a um único elemento do contradomínio. Ou seja, ele não compreendeu devidamente o conceito de função em diferentes representações.

A representação de função por meio de tabelas, como visto no Capítulo 1, surgiu historicamente muito antes da definição formalizada do conceito. Porém, a sequência didática para o ensino de funções, usualmente apresentada nos livros e seguida pelos professores, faz o caminho inverso, ou seja, a representação de função por meio de tabelas é apresentada após a formalização do conceito. Segundo Trindade e Moretti (2000), a apresentação do conceito de função é desenvolvida, em um primeiro momento, pela representação simbólica, em seguida, pela construção de tabelas e, por fim, por meio de representação gráfica.

A Figura 4 e a Figura 5 apresentam as respostas de dois alunos que responderam as questões de forma correta.

Figura 4 – Questionário do Aluno 2



Conteúdo Matemático: Funções

01. Os dados das tabelas abaixo poderiam representar uma função? Justifique sua resposta.

a) Sim, cada elemento do domínio se associa a um único elemento do contradomínio (que no caso é igual a imagem)

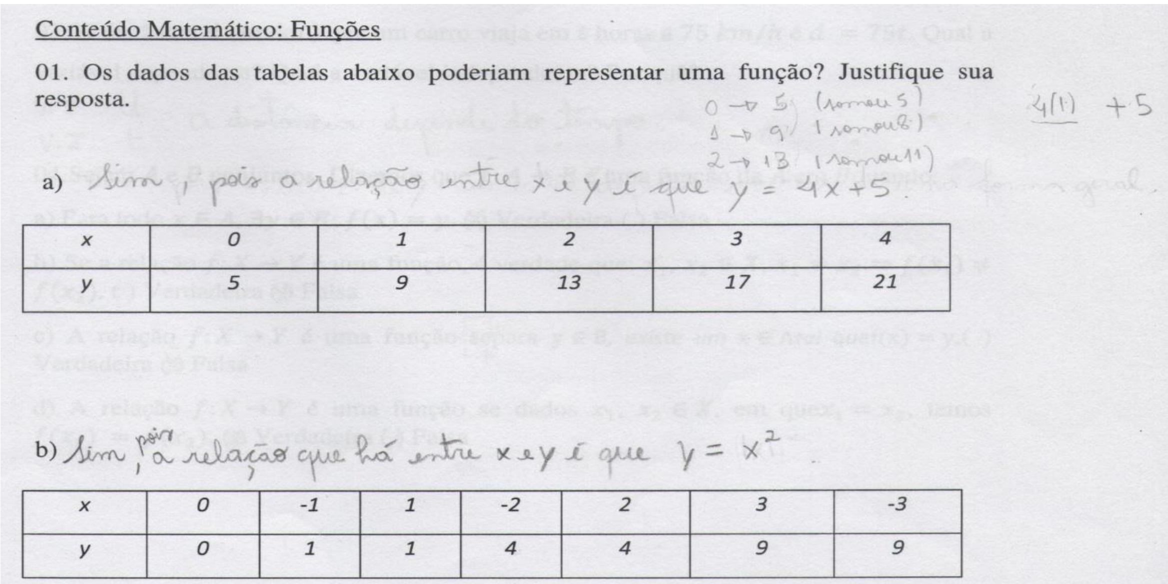
x	0	1	2	3	4
y	5	9	13	17	21

b) Sim, cada elemento do domínio se associa a um único elemento do contradomínio. (no caso é, também, a imagem).

x	0	-1	1	-2	2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5 – Questionário do Aluno 4



Conteúdo Matemático: Funções

01. Os dados das tabelas abaixo poderiam representar uma função? Justifique sua resposta.

a) Sim, pois a relação entre x e y é que $y = 4x + 5$

x	0	1	2	3	4
y	5	9	13	17	21

b) Sim, pois a relação que há entre x e y é que $y = x^2$.

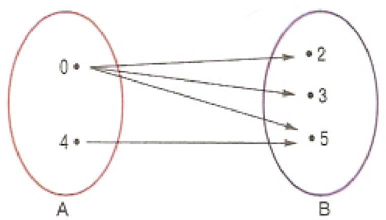
x	0	-1	1	-2	2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

Fonte: Elaborado pelo autor

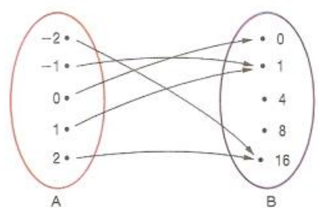
Dos 15 questionários respondidos, 13 alunos, além de responder o que foi solicitado na questão, também encontraram as expressões algébricas que representavam as funções. De fato, segundo Sierpinska (1992), parece haver uma ênfase na abordagem sobre as expressões algébricas, pois ao analisar a representação gráfica ou a tabela de valores para encontrar a resposta, o aluno escreve a lei da função, ou seja, há uma forte associação, por parte dos alunos, entre o conceito de função e as relações que podem ser descritas por fórmulas analíticas.

2° Questão: Quais dos seguintes diagramas representam uma função f de A em B?

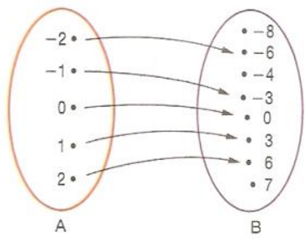
a)



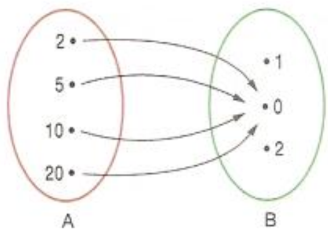
b)



c)

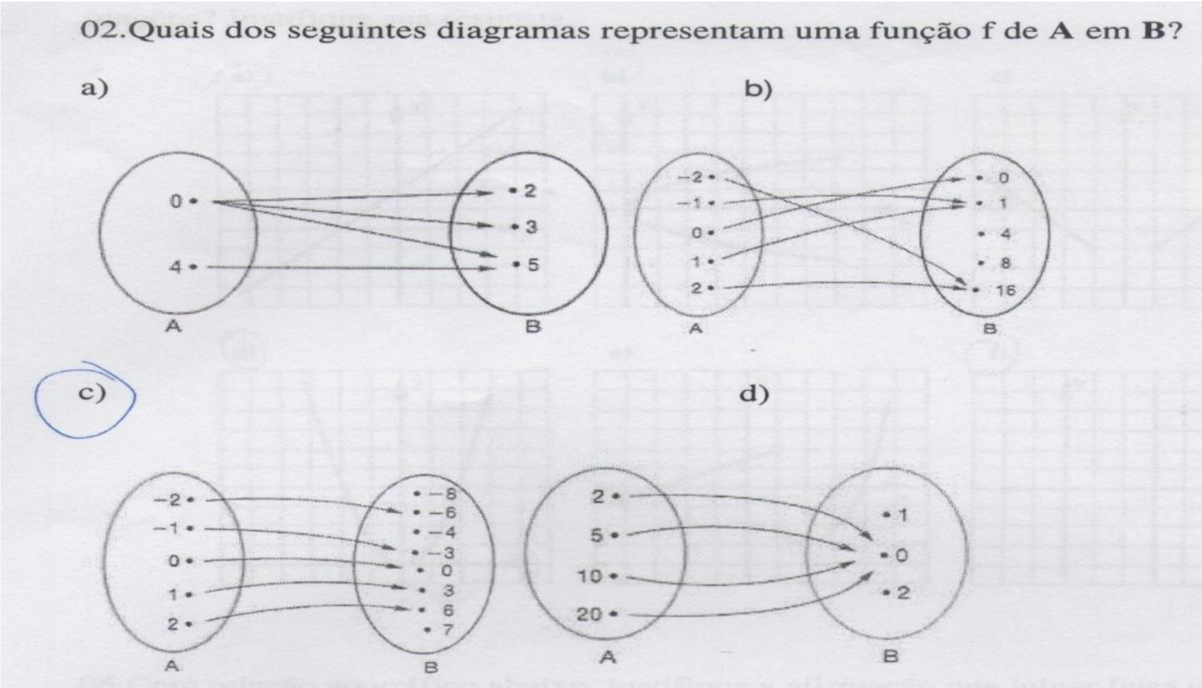


d)



Assim como a representação tabular da função, a representação em diagrama pode auxiliar o aluno a visualizar a transformação entre um elemento de um conjunto em outro elemento de outro conjunto e, além disso, associar a relação funcional que define a função. A escolha da segunda questão foi proposital, pelo fato de que a representação em diagrama exerce uma linguagem compreensível do movimento aparente do conceito de função, o que auxilia em detectar se o diagrama representa função ou não, além de que no Ensino Básico a definição de função é abordada juntamente com a forma de diagrama. Vemos que 86% dos alunos acertaram a resposta. Parece haver uma melhor compreensão do conceito de função quando a representação utilizada é o diagrama, já que os 2 alunos que erraram a primeira questão acertaram a segunda. Com isso, percebemos um obstáculo entre a representação de função por meio de tabela e de diagrama. Nesse sentido, podemos conjecturar que o uso do diagrama para representar uma função é mais compreendido pelos alunos do que as outras representações. Apesar de parecer uma questão simples, nem todos os alunos acertaram a resposta. A alternativa (c) foi a única que não trouxe dúvidas, talvez em razão da esquematização linear. Já as alternativas que também são corretas, alternativa (b) e alternativa (d), trouxeram dúvidas para alguns alunos (Figura 6; *Aluno 15*).

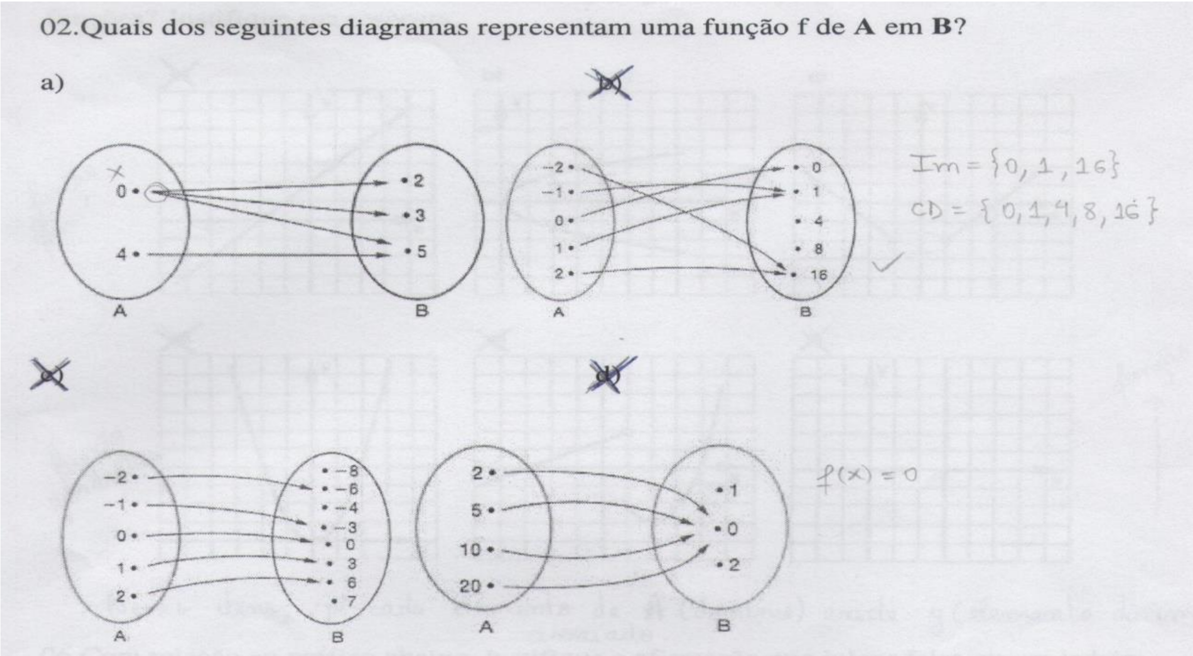
Figura 6 – Questionário do Aluno 15



Fonte: Elaborado pelo autor

A representação por meio de diagramas geralmente é abordada concomitante com a expressão analítica, pois de forma intuitiva, auxilia na compreensão da relação funcional ou "lei de formação", ou melhor, instrui como obter o valor $f(x) \in B$ quando é fornecido $x \in A$, com o propósito que a função f tenha o conjunto A como seu domínio e a "lei de formação" produza o valor $f(x) \in B$ para todo elemento do conjunto A e, ainda, para cada elemento do conjunto A do domínio da função f a "lei de formação" deve fazer corresponder um único elemento $f(x)$ do conjunto B do contradomínio da função f. E, quando é apresentada dessa forma, as setas auxiliam na identificação se o diagrama representa uma função ou não, facilitando também determinar o domínio, contradomínio e a imagem da função. A figura abaixo apresenta o questionário de um dos alunos que acertou e atingiu o objetivo da questão.

Figura 7 – Questionário do Aluno 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que para termos uma função, todos os elementos do conjunto A devem possuir setas em direção a um único elemento do conjunto B.

Percebemos que há uma utilização excessiva, no uso de diagramas para representar a relação das funções, de números inteiros. Isso pode levar o aluno, quando ele começar a estudar a representação gráfica de funções, a não encontrar conexão entre essa representação e a representação com diagramas, já que, na representação gráfica, passa-se a utilizar números reais. Além disso, ao comparar tais representações, o aluno poderia compreender a diferença entre conjunto discreto e conjunto contínuo.

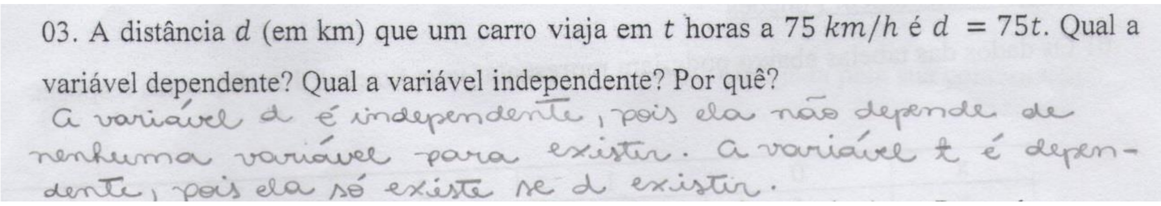
3º Questão: A distância d (em km) que um carro viaja em t horas a $75\ km/h$ é $d = 75t$. Qual a variável dependente? Qual a variável independente? Por quê?

A terceira questão teve como objetivo compreender a relação de dependência – que as duas questões anteriores trabalharam de forma implícita – e avaliar se o aluno tem uma visão clara da dependência funcional (variável dependente) que se apresenta no conceito de função. Abordamos na questão um problema prático que envolve o entendimento de dependência funcional e variável independente. Segundo Cotret (1988),

> É interessante notar que, nas primeiras definições do conceito de função, as noções centrais são variação e dependência; a correspondência está presente, mas de forma implícita. Então, quanto mais nos aproximamos das definições modernas, o desaparecimento mais gradual da variação, então a dependência, que podemos encontrar alguns traços com a regra de correspondência, levando eventualmente a uma correspondência pura. (COTRET, 1988, p. 8).

A conexão da definição matemática com problemas do “mundo” é um dos quesitos do próprio conceito de função, pois matematicamente uma função $f: A \to B$, cujo conjunto A denomina-se o domínio de f, cujo x um elemento de A é designado como a variável independente ou argumento da função f, ao passo que o elemento genérico $y = f(x)$ do conjunto B, no qual a função f toma valores, denomina-se contradomínio de f, segundo elemento dos pares ordenados $(x, y) \in f$, tal que y é denominado variável dependente da função f. O elemento dependente vai variar de acordo com o elemento do qual ele depende, ou seja, o elemento independente. Assim, a distância d depende do tempo t.

O percentual de erros da questão foi de 14%, que segundo Sierpinska (1992), consiste no primeiro obstáculo, ou seja, há uma dificuldade de se reconhecer a presença da Matemática em uma atividade do cotidiano. Outro obstáculo envolvido é o oitavo, no qual Matemática e Física não têm nada em comum, pertencendo a diferentes domínios de pensamento. Observemos a Figura 8, em que o *Aluno 1* encontra dificuldades em detectar a variável que depende, pois, o tempo é uma variável independente o que está dependendo é a distância.


03. A distância d (em km) que um carro viaja em t horas a 75 km/h é $d = 75t$. Qual a variável dependente? Qual a variável independente? Por quê?

A variável d é independente, pois ela não depende de nenhuma variável para existir. A variável t é dependente, pois ela só existe se d existir.

Figura 8 – Questionário do Aluno 1

Fonte: Elaborado pelo autor

Muitas vezes, a confusão feita entre variável dependente e independente pode estar também ligada ao terceiro obstáculo epistemológico de Sierpinska (1992), em que se tomam as dependências como fenômenos, focando em como as coisas mudam e ignorando o que muda.

> Muito frequentemente, ao observar variações, os estudantes têm dificuldades de identificar o que estar variando ou o que são os objetos sendo modificados que eles

> processam. Eles não analisam a situação, mas a tornam como um todo, como um fenômeno como a chuva ou a neve. (SIERPINSKA, 1992, p. 9).

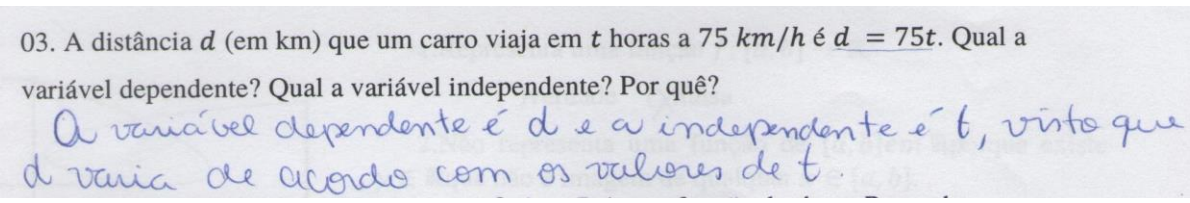
As leis físicas estabelecem-se mediante a generalização de dados obtidos por meio de experimentos e sua veracidade comprova-se quando há uma correspondência entre as conclusões com a prática. Assim, as leis físicas expressam a relação interna e objetiva entre os fenômenos físicos e a dependência real entre as grandezas físicas. Nesse sentido, os conteúdos das leis físicas expressam-se matematicamente como uma dependência dos valores numéricos α e β das grandezas físicas dadas A e B. Nesta perspectiva, o professor pode trabalhar com situações do cotidiano e criar problemas cuja solução envolva a compreensão das relações de dependência e de independência presentes nas leis físicas. No entanto, os problemas do cotidiano são intuitivos e não abordam as fórmulas, talvez isso gere dúvida para o aluno, pois a definição de função é dada de forma "pronta", sem estimular o aluno a pensar no conceito de variação, podendo surgir uma barreira entre fórmulas e os conceitos envolvidos de dependência e independência.

> Os problemas do cotidiano ou das ciências que podem ser resolvidos matematicamente em geral não trazem fórmulas em seus enunciados. Trazem sim "quantidades variáveis" como tempo, lucro, temperatura, peso, população, demanda, preço ou qualquer outra grandeza. Não existem grandes vantagens em saber apenas que "o preço da gasolina vai subir" ou que "as taxas de juros no varejo caíram". O exercício da cidadania envolve também o conhecimento sobre *como* e *o quanto* variam as grandezas presentes em problemas que nos são apresentados em nossa vida cotidiana. (REZENDE, 2010, p. 6-7)

Assim, entendemos que alguns alunos ainda têm dificuldades em detectar as variáveis em situações que envolvem fenômenos da natureza e ter um olhar matemático para um problema da física.

Na resolução abaixo, percebe-se que o aluno compreendeu a relação entre a distância e o tempo nesta situação.

Figura 9 – Questionário Aluno 11



03. A distância d (em km) que um carro viaja em t horas a 75 km/h é $d = 75t$. Qual a variável dependente? Qual a variável independente? Por quê?

A variável dependente é d e a independente é t, visto que d varia de acordo com os valores de t.

Fonte: Elaborado pelo autor

Mediante essa análise e na sequência em que o conceito de função é apresentado, percebe-se que o conceito é usado como objeto de estudo e não como ferramenta para resolver problemas, que sejam empíricos ou não.

4º Questão: Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $f: A \to B$ é uma função de A em B quando:

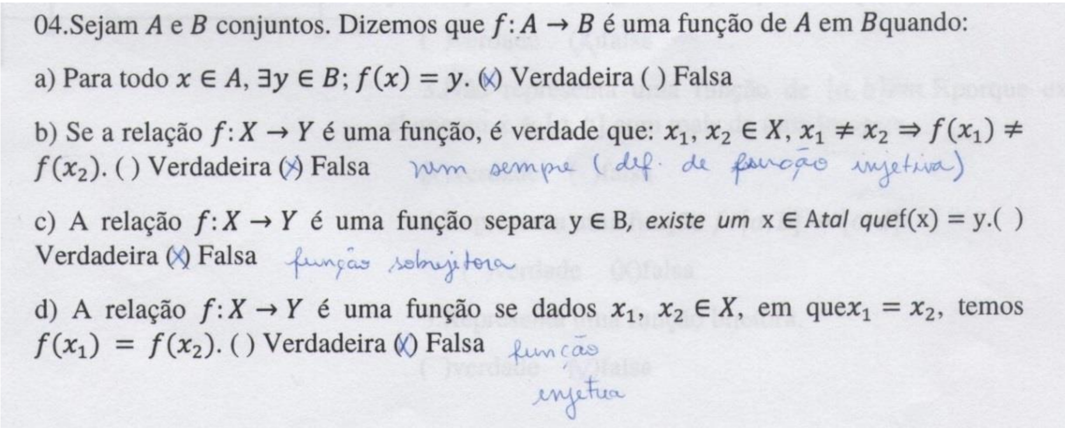
a) Para todo $x \in A$,$\exists y \in B$; $f(x) = y$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa
b) Se a relação $f: X \to Y$ é uma função, é verdade que: x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa
c) A relação $f: X \to Y$ é uma função se para y ∈ B, *existe um* x ∈ A *tal que*f(x) = y.( ) Verdadeira ( ) Falsa
d) A relação $f: X \to Y$ é uma função se dados x_1, $x_2 \in X$, em que$x_1 = x_2$, temos $f(x_1) = f(x_2)$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa

A quarta questão teve o objetivo de avaliar a compreensão da linguagem em símbolos da matemática, de maneira a reconhecer uma função por meios da escrita matemática. Assim, diz-se que uma função $f: X \to Y$ é sobrejetora quando para todo elemento y de Y existe ao menos um elemento x de X tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, uma função f de X em Y é sobrejetora quando a sua imagem $f(X)$ coincide com seu contradomínio Y, isto é, $f(X) = Y$. Ou ainda, quando uma função $f: X \to Y$ é sobrejetora também significa que f é uma sobrejeção de X em Y ou que f é uma função de X sobre Y. Desse modo, em símbolos, essa qualidade da função, exprime-se da seguinte forma: $f: X \to Y$ é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X: y = f(x)$.

E, que uma função $f: X \to Y$ é injetora quando dois elementos distintos quaisquer x_1 e x_2 de X têm sempre imagens pela função f também distintas $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Em outras palavras, uma função injetora $f: X \to Y$ transforma elementos distintos do conjunto X em elementos também distintos do conjunto Y. Assim, em símbolos, essa qualidade da função, exprime-se da seguinte forma: $f: X \to Y$é injetora $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, de forma equivalente: $f: X \to Y$ é injetora $\Leftrightarrow \big(\forall x_1, x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2)\big) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Na questão 4 houve um percentual de 80% dos alunos que julgaram a alternativa a) verdadeira, porém, nas outras alternativas consideradas falsas, nem todos os alunos apresentaram um argumento para sua escolha. Na alternativa b) 12 alunos responderam que era falsa, 4 alunos que era verdadeira e 1 aluno não soube responder. Já na alternativa c), que corresponde a definição de função sobrejetora, 7 alunos responderam como falsa, 4 alunos responderam verdadeira e 4 alunos não souberam responder. Na alternativa d) 10 alunos julgaram como verdadeira e 4 alunos como falsa, 1 não respondeu.

Figura 10 – Questionário do Aluno 9



04.Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $f: A \to B$ é uma função de A em Bquando:

a) Para todo $x \in A, \exists y \in B; f(x) = y$. (X) Verdadeira ( ) Falsa

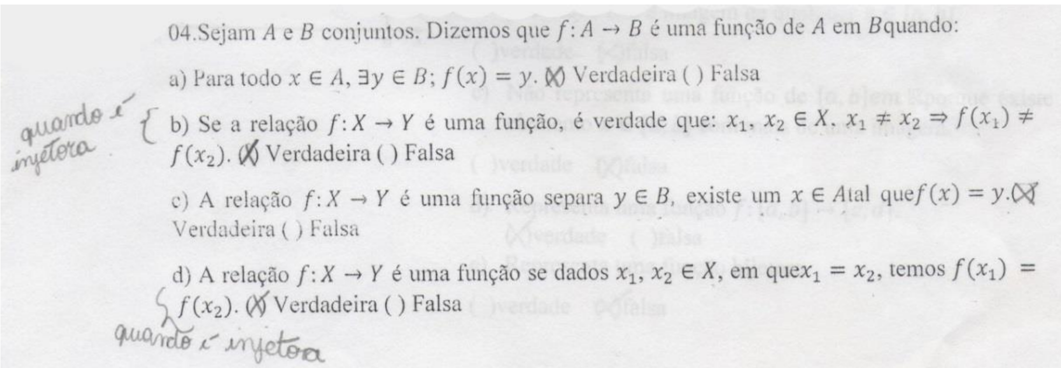
b) Se a relação $f: X \to Y$ é uma função, é verdade que: $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. ( ) Verdadeira (X) Falsa nem sempre (def. de função injetiva)

c) A relação $f: X \to Y$ é uma função separa $y \in B$, *existe um* $x \in A$*tal que*$f(x) = y$.( ) Verdadeira (X) Falsa função sobrejetora

d) A relação $f: X \to Y$ é uma função se dados $x_1, x_2 \in X$, em que$x_1 = x_2$, temos $f(x_1) = f(x_2)$. ( ) Verdadeira (X) Falsa função injetora

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 11 – Questionário do Aluno 12



04.Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $f: A \to B$ é uma função de A em Bquando:

a) Para todo $x \in A, \exists y \in B; f(x) = y$. (X) Verdadeira ( ) Falsa

quando é injetora { b) Se a relação $f: X \to Y$ é uma função, é verdade que: $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. (X) Verdadeira ( ) Falsa

c) A relação $f: X \to Y$ é uma função separa $y \in B$, existe um $x \in A$tal que$f(x) = y$.(X) Verdadeira ( ) Falsa

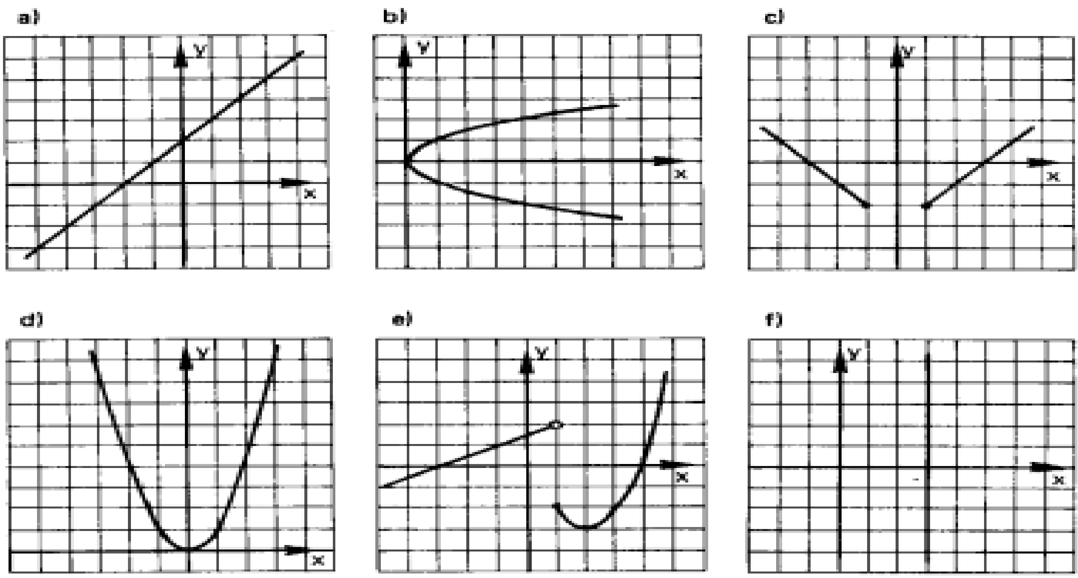
d) A relação $f: X \to Y$ é uma função se dados $x_1, x_2 \in X$, em que$x_1 = x_2$, temos $f(x_1) = f(x_2)$. (X) Verdadeira ( ) Falsa

quando é injetora

Fonte: Elaborado pelo autor

O desempenho dos alunos na questão mostra certa dificuldade em relação à definição formal do conceito de função que utiliza uma linguagem matemática simbólica, gerando dúvidas quanto a definição de função injetora ou sobrejetora. A interpretação da linguagem matemática por meio dos símbolos é enfatizada no ensino do conceito de função e, desse modo, os alunos não conseguem relacionar a expressão analítica de uma função com as outras representações, ou seja, acreditam que se a função não é dada por uma "expressão analítica", então, não é uma função. Esse aspecto reforça o obstáculo epistemológico da concepção de que a definição é a forma correta e única de representar uma função. OE(f) – 10: A forte crença no poder das operações formais como expressões algébricas.

5º Questão: Quais das relações de ℝ em ℝ, cujos gráficos aparecem abaixo, representam funções? Justifique sua resposta.



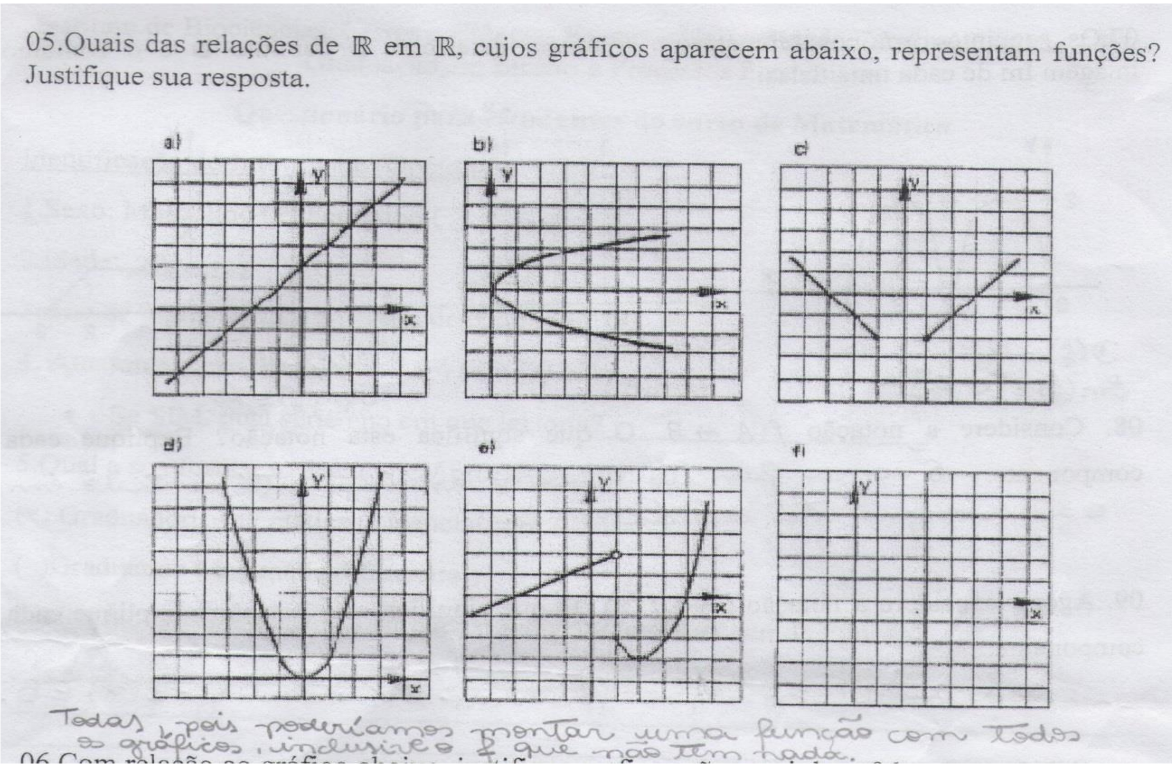
A quinta questão foi a que teve o maior número de erros. Mais de 60% dos alunos erraram a questão, não a responderam ou deixaram-na incompleta. Com o objetivo de trazer diferentes formas de se representar o conceito de função, a quinta questão abordou as representações gráficas. Assim, nesta situação, foi usado o plano cartesiano para representar função. O estudo das representações gráficas, segundo Trindade e Moretti (2000), é fundamental para a compreensão do conceito de função. Os autores enfatizam que o uso da representação gráfica de função é o melhor meio para se trabalhar a linearidade, os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos, a taxa de variação, regularidade e a continuidade.

O gráfico da função $f: X \to Y$ é o subconjunto G do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados relacionados mediante uma correspondência entre os elementos do conjunto domínio e do conjunto imagem. Assim, em símbolos, exprime-se da seguinte forma: $G = \{(x, y) \in X \times Y: y = f(x)\} = \{(x, f(x): x \in X)\}$. Assim, esse conjunto é denominado de gráfico de f porque permite estabelecer uma representação gráfica no caso em que X e Y são conjuntos de números reais. Na prática, podem-se representar os elementos dos conjuntos X e Y em dois eixos ortogonais, cada par ordenado de elementos de G pode ser representado por um ponto no plano cartesiano referente a esses dois eixos.

O cuidado no ensino da representação gráfica de uma função é importante para uma compreensão ampla do conceito, pois, muitas vezes, até nos livros didáticos os gráficos são apresentados sem escalas e sem papel quadriculado. Dessa forma, a construção do gráfico sem escala ou sem o uso de papel milimetrado pode causar uma distorção do gráfico e, consequentemente, torná-lo apenas um modelo da relação funcional, mas que não a representa, constituindo um obstáculo epistemológico (OE(f) – 15).

Na questão proposta, foram apresentadas seis representações gráficas e foi solicitado que os alunos determinassem quais representavam funções. Ao analisar as respostas, uma que chamou a atenção foi a do *Aluno 1* que respondeu que todas as representações são funções, sem compreender que a representação gráfica apresentada no item (b) é um contraexemplo claro para a definição de função.

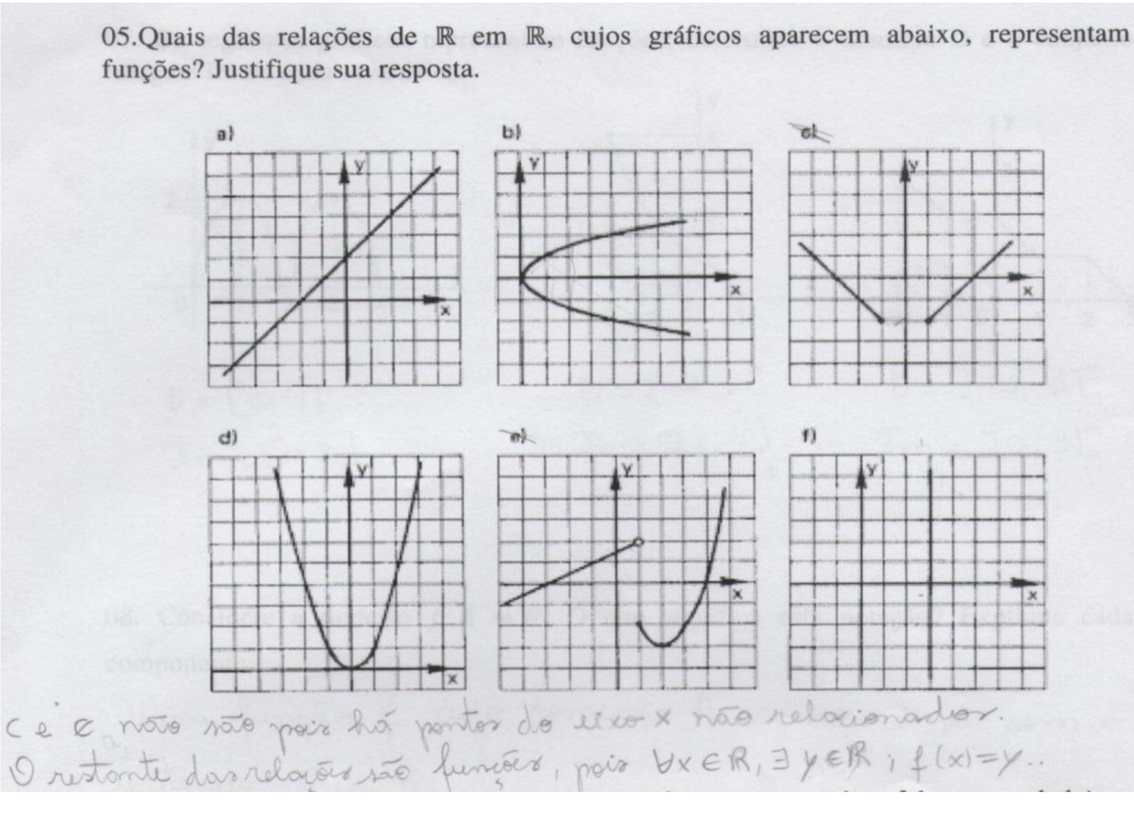
Figura 12 – Questionário do Aluno *1*



Fonte: Elaborado pelo autor

Nessa questão, as respostas foram variadas e as representações gráficas (c) e (e) geraram mais dúvida do que a (b). O fato de aparecerem intervalos abertos e fechados nos itens (c) e (e) podem ter motivado os alunos a marcarem essas alternativas como não sendo a representação gráfica de uma função. Para identificar se uma curva representa ou não o gráfico de uma função, podemos traçar retas paralelas ao eixo y e verificar quantas vezes essas retas interceptam o gráfico: se interceptam mais de uma vez a curva, então não se trata de gráfico de função, contrapondo a definição. Além disso, podemos perceber que os alunos não tiveram dificuldade em enunciar a definição de função formal usando a simbologia matemática nas questões 8 e 9 seguintes, no entanto ao impormos questões que apresentam diferentes representações, houve conflitos. Vejamos a resposta do *Aluno 4* na Figura 13.

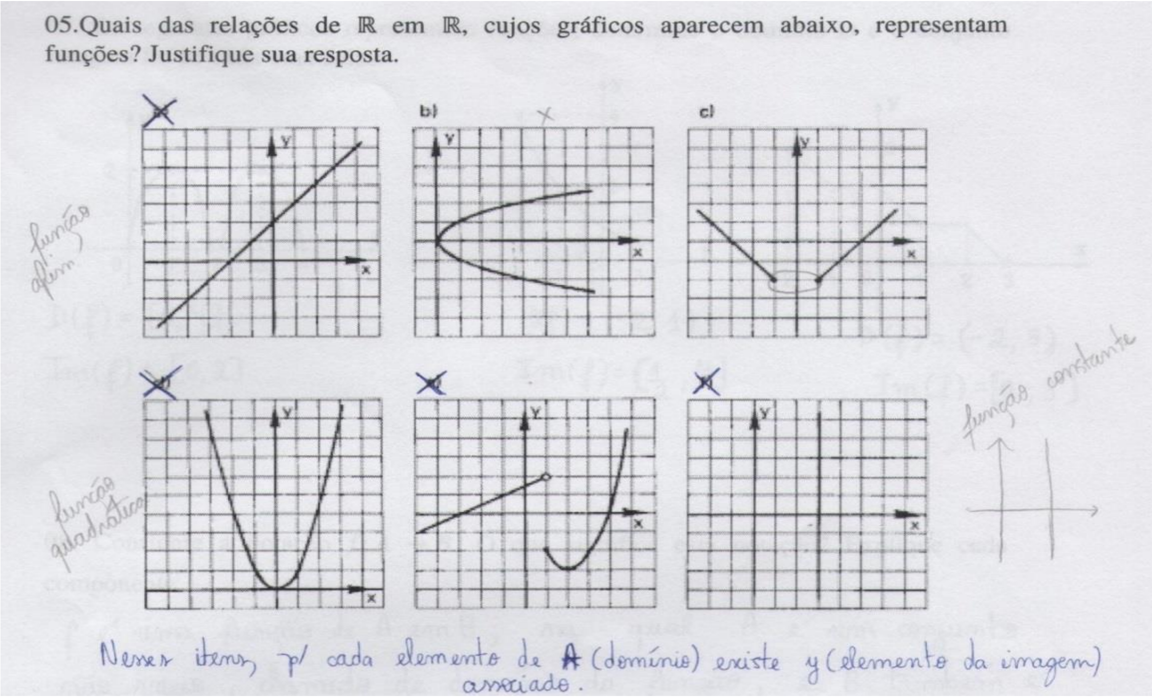
Figura 13 – Questionário do Aluno 4


05.Quais das relações de ℝ em ℝ, cujos gráficos aparecem abaixo, representam funções? Justifique sua resposta.

c e e não são pois há pontos do eixo x não relacionados.
O restante das relações são funções, pois $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} ; f(x)=y$..

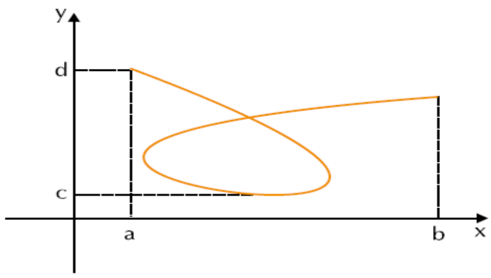
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14 – Questionário do Aluno 2



Fonte: Elaborado pelo autor

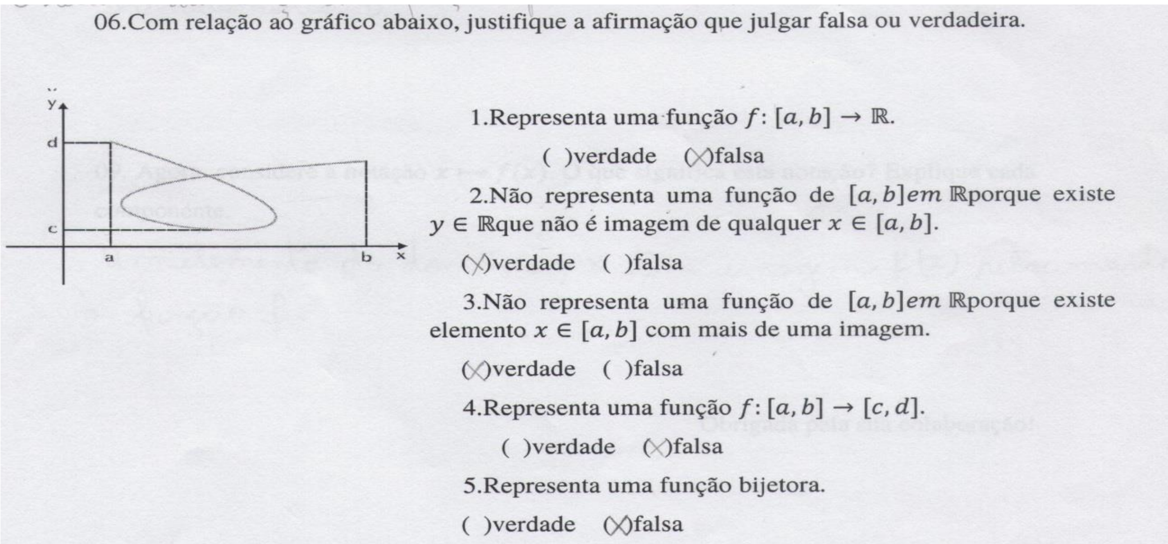
6º Questão: Com relação ao gráfico abaixo, justifique a afirmação que julgar falsa ou verdadeira.



1. Representa uma função $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. **Verdade ( ) Falsa ( )**
2. Não representa uma função de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe $y \in \mathbb{R}$ que não é imagem de qualquer $x \in [a, b]$. **Verdade ( ) Falsa ( )**
3. Não representa uma função de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe elemento $x \in [a, b]$, com mais de uma imagem. **Verdade ( ) Falsa ( )**
4. Representa uma função $f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$. **Verdade ( ) Falsa ( )**
5. Representa uma função bijetora. **Verdade ( ) Falsa ( )**

A questão de número seis faz uma conexão entre a representação gráfica e a linguagem matemática de uma função. Nas respostas dadas, observamos que os alunos fizeram confusão com as alternativas apresentadas.

Figura 15 – Questionário do Aluno 4



06.Com relação ao gráfico abaixo, justifique a afirmação que julgar falsa ou verdadeira.

1.Representa uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

( )verdade (X)falsa

2.Não representa uma função de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe $y \in \mathbb{R}$ que não é imagem de qualquer $x \in [a,b]$.

(X)verdade ( )falsa

3.Não representa uma função de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe elemento $x \in [a,b]$ com mais de uma imagem.

(X)verdade ( )falsa

4.Representa uma função $f: [a,b] \to [c,d]$.

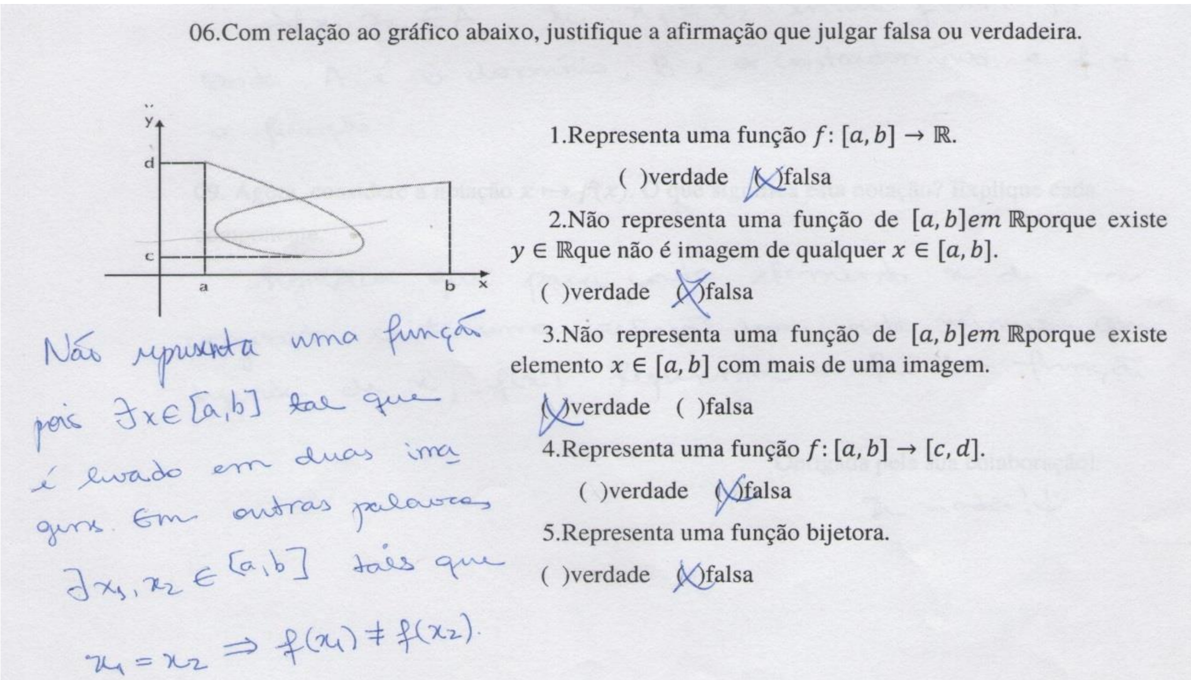
( )verdade (X)falsa

5.Representa uma função bijetora.

( )verdade (X)falsa

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 16 – Questionário do Aluno 10



06.Com relação ao gráfico abaixo, justifique a afirmação que julgar falsa ou verdadeira.

1.Representa uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

( )verdade (X)falsa

2.Não representa uma função de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe $y \in \mathbb{R}$ que não é imagem de qualquer $x \in [a,b]$.

( )verdade (X)falsa

3.Não representa uma função de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe elemento $x \in [a,b]$ com mais de uma imagem.

(X)verdade ( )falsa

4.Representa uma função $f: [a,b] \to [c,d]$.

( )verdade (X)falsa

5.Representa uma função bijetora.

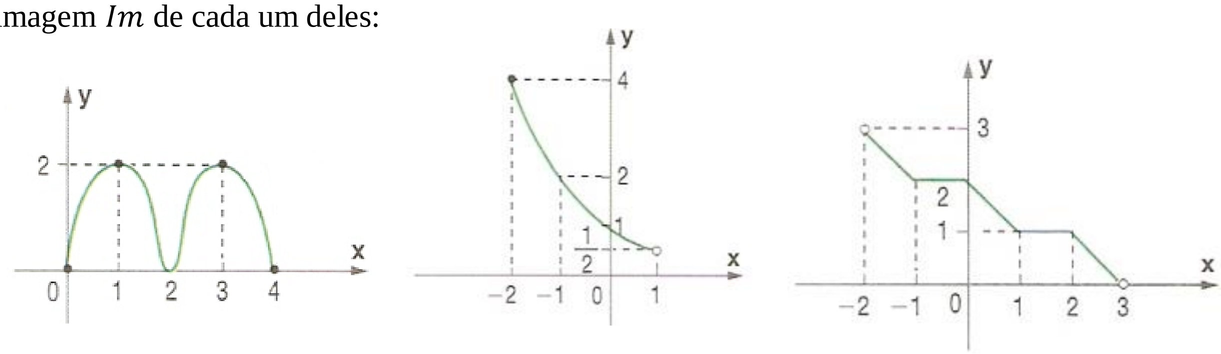
( )verdade (X)falsa

Não representa uma função pois $\exists x \in [a,b]$ tal que é levado em duas imagens. Em outras palavras $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Fonte: Elaborado pelo autor

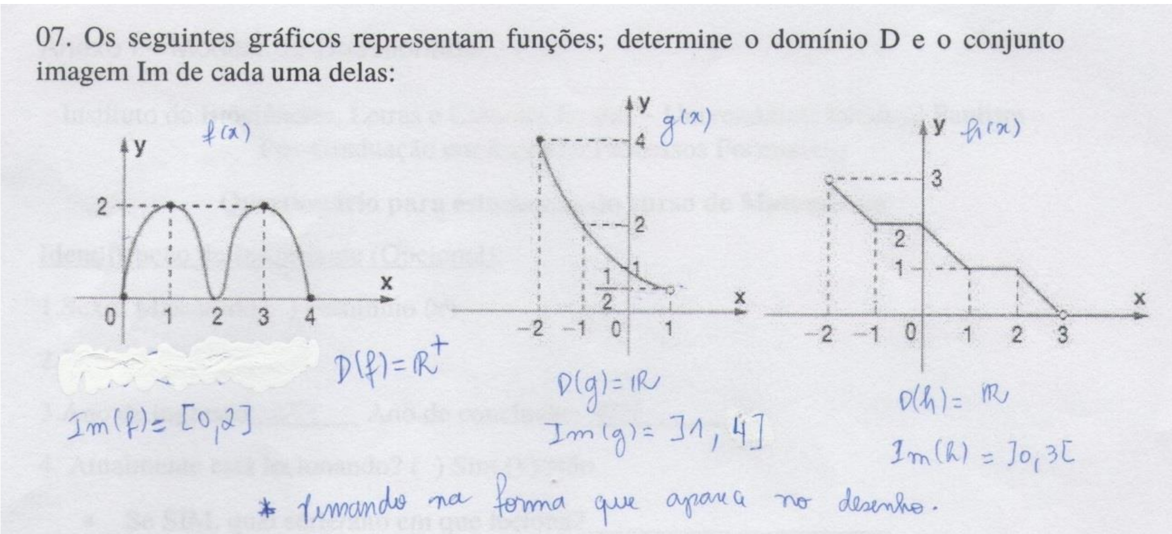
A Figura 16 mostra que o *Aluno 10* atingiu o objetivo esperado com a questão abordada e pela mesma articulação da questão anterior, de traçar retas paralelas ao eixo y, percebe-se que interceptam a curva do gráfico em mais de um lugar.

7º Questão: Os seguintes gráficos representam funções; determine o domínio D e o conjunto imagem Im de cada um deles:



O objetivo da sétima questão era avaliar a compreensão da linguagem gráfica, ou seja, analisar os intervalos em que a função está compreendida. Para a resolução da questão era necessário determinar o domínio e a imagem de cada função. Na imagem abaixo, o *Aluno 9* (Figura 17) acerta os conjuntos imagem de cada função, mas se confunde quanto ao domínio da função.

Figura 17 – Questionário do Aluno 9


07. Os seguintes gráficos representam funções; determine o domínio D e o conjunto imagem Im de cada uma delas:

$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$

$D(f) = \mathbb{R}^+$

$Im(f) = [0,2]$

$D(g) = \mathbb{R}$

$Im(g) =]1, 4]$

$D(h) = \mathbb{R}$

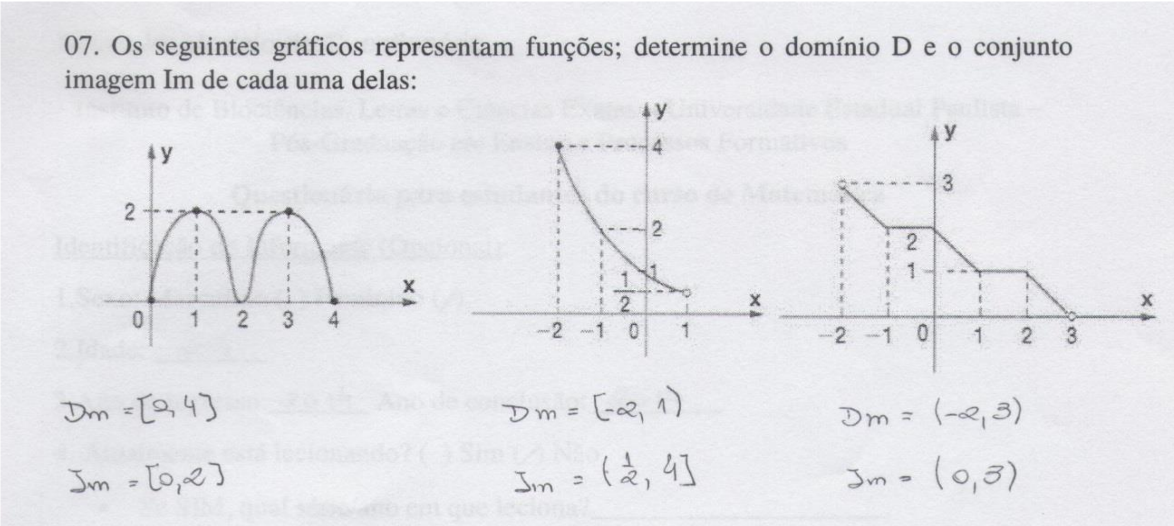
$Im(h) =]0,3[$

* tomando na forma que aparece no desenho.

Fonte: Elaborado pelo autor

Examinar o gráfico pode nos fornecer várias informações sobre uma dada função, mesmo sem conhecermos a expressão algébrica da função. O *Aluno 10* (Figura 18) analisou cada intervalo e determinou corretamente os conjuntos que se pedia.

Figura 18 – Questionário do Aluno 14



Fonte: Elaborado pelo autor

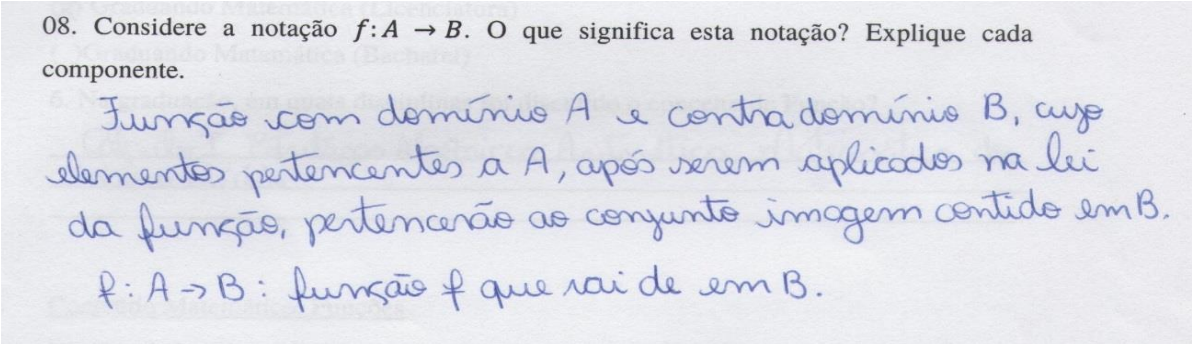
8º Questão: Considere a notação $f: A \to B$. O que significa essa notação? Explique cada componente dessa notação.

9º Questão: Agora, considere a notação $x \mapsto f(x)$. O que significa essa notação? Explique cada componente dessa notação.

As escolhas das questões oito e nove tiveram como propósito analisar a compreensão dos alunos sobre as notações muito usadas nos livros, e se esperava o reconhecimento de cada uma delas. A compreensão da notação de função parece não ser uma dificuldade dos alunos, tendo em vista as respostas obtidas por meio do questionário. Pelo contrário, percebemos uma habilidade por parte dos alunos em compreender as notações usadas, provavelmente, em razão da ênfase dada a esse aspecto no decorrer do curso. Entretanto, não podemos afirmar que a compreensão da notação implica na compreensão do conceito, pois percebemos dificuldades nas questões anteriores por parte de alguns alunos.

A maioria dos *alunos* (70%) soube responder de forma satisfatória as questões 8 e 9.

Figura 19 – Questionário do Aluno 7



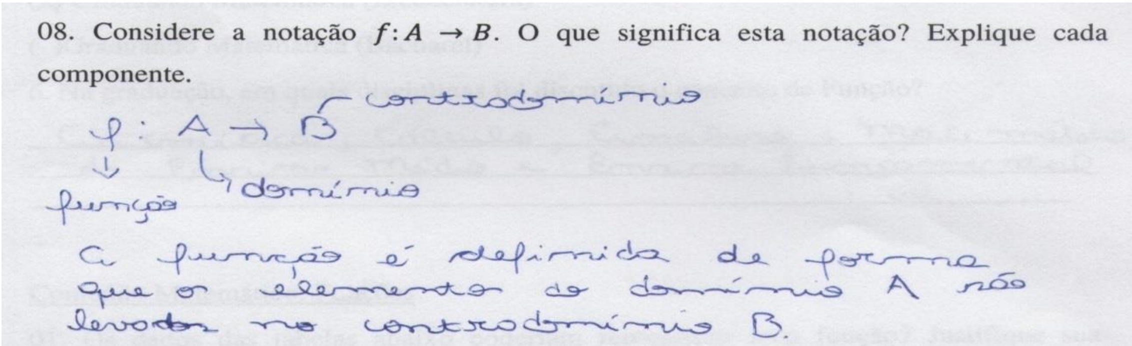
08. Considere a notação $f: A \to B$. O que significa esta notação? Explique cada componente.

Função com domínio A e contradomínio B, cujo elementos pertencentes a A, após serem aplicados na lei da função, pertencerão ao conjunto imagem contido em B.

f: A → B: função f que vai de em B.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 20 – Questionário do Aluno 3



08. Considere a notação $f: A \to B$. O que significa esta notação? Explique cada componente.

contradomínio

f : A → B

função

domínio

A função é definida de forma que os elementos do domínio A são levados no contradomínio B.

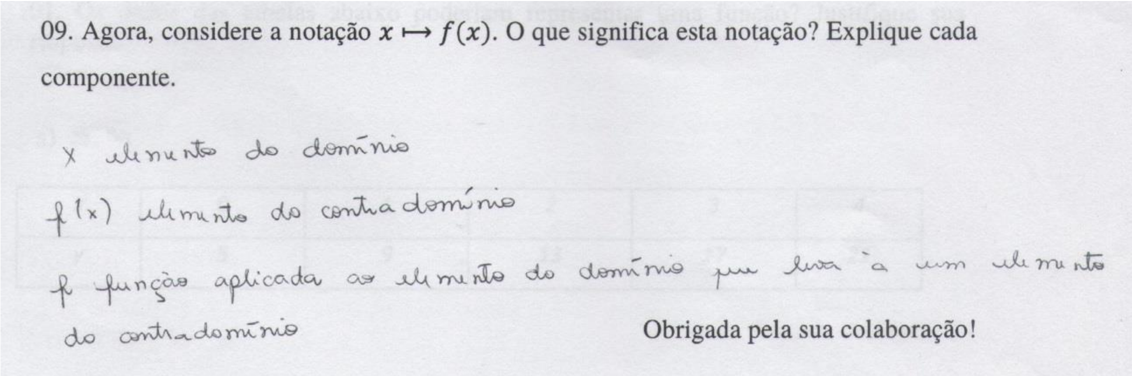
Fonte: Elaborado pelo autor

O conceito de função representado por expressão matemática de uma função em que f associa cada ponto x de um conjunto A a um ponto ou valor $f(x)$ de um conjunto B é dada por:

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

Assim, A é o domínio da f e o contradomínio é B. Nesta situação, observamos nos questionário que estas notações são compreendidas pelos alunos.

Figura 21 – Questionário do Aluno 14


09. Agora, considere a notação $x \longmapsto f(x)$. O que significa esta notação? Explique cada componente.

x elemento do domínio

f(x) elemento do contradomínio

f função aplicada ao elemento do domínio que leva à um elemento do contradomínio

Obrigada pela sua colaboração!

Fonte: Elaborado pelo autor

De modo geral, observamos que os alunos tiveram mais dificuldades nas questões que envolviam a representação de função por gráficos e tabela e na questão sobre a definição de função. Por outro lado, os alunos tiveram facilidade nas questões que envolviam notação e diagramas. Tais resultados podem estar relacionados às ênfases que são dadas ao estudo das funções na graduação.

Outro ponto que destacamos é a associação que os alunos fazem entre “função” e “expressão algébrica para representar uma função”. Essa associação leva os alunos a não considerarem como uma função os exemplos em que a expressão algébrica não é única ou em que a função não pode ser representada algebricamente.

6 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS POR DUAS PROFESSORAS DO CURSO

Neste capítulo comentaremos as entrevistas realizadas com duas professoras do Departamento de Matemática da UNESP de São José do Rio Preto, que atuam no Curso de Licenciatura em Matemática. Uma das docentes trabalha na área de Análise e a outra na área de Ensino de Matemática. Ambas têm formação na área de Matemática Pura. O objetivo das entrevistas foi compreender como os professores que atuam na formação inicial de professores de Matemática desenvolvem o ensino do conceito de função.

6.1 Sobre o Processo de Coleta de Dados

A coleta de dados foi realizada por meio de um questionário com seis questões. De início, solicitamos, via e-mail, que pudéssemos realizar entrevistas presenciais ou via Skype, que seriam agendadas conforme a disposição de cada professor. Porém, não houve resposta. Assim, optamos por enviar diretamente as questões, que seriam usadas na entrevista do tipo semiestruturada, via e-mail, para 8 professores do Curso. Esses professores foram escolhidos por estarem ministrando disciplinas que, em seus Programas de Ensino, tratavam do conceito de função. Os questionários foram enviados no dia 19 de abril de 2018 e apenas uma professora nos retornou. Em virtude disso, o questionário foi reenviado no dia 07 de maio de 2018 e então mais uma professora respondeu. Novamente, reenviamos o questionário no dia 14 de maio de 2018, porém não obtivemos resposta.

As questões do questionário tinham o intuito de buscar compreender de que forma o ensino de função é desenvolvido em sala de aula. As questões foram propostas de acordo com o objetivo da pesquisa, no entanto, buscamos elaborar as questões de forma que os professores se sentissem à vontade para responder. A identidade das docentes será preservada e por isso não há identificação dos nomes. Portanto, serão analisadas as respostas dadas pelas duas professoras ao questionário enviado.

A primeira questão propunha que relatassem a disciplina que ministravam no curso. Na segunda questão, nosso intuito era saber se nas disciplinas ministradas foi abordado o conceito de função. A terceira questão teve como objetivo conhecer a bibliografia utilizada na disciplina ministrada, já que esse é um importante aspecto para compreender como o desenvolvimento da disciplina é estruturado. A quarta e a quinta questão foram ao foco da nossa pesquisa, ou seja, como o conceito de função é abordado pelas docentes nas disciplinas ministradas. A sexta questão teve como objetivo compreender as dificuldades no ensino do conceito de função.

As questões foram:

- Qual disciplina a professora ministra ou ministrou no Curso de Licenciatura em Matemática?
- O conceito de função é ou foi abordado nas disciplinas ministradas?
- Qual foi a bibliografia adotada na disciplina ministrada?
- De que forma foi desenvolvido, em sala de aula, o conceito de função?
- Quais aspectos do conceito de função foram trabalhados?
- Qual sua maior dificuldade para o ensino do conceito de função?

6.2 Metodologia de Análise dos Dados Obtidos

Os dados coletados na pesquisa foram analisados segundo a Análise de Conteúdo de Bardin (2011). Para Bardin (2011), a análise de conteúdo consiste em

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2011, p. 48).

A opção pela análise categorial de Bardin (2011) é uma boa alternativa quando se quer estudar os comportamentos, as concepções e crenças, mediante dados qualitativos. Assim, a categorização foi usada na pesquisa por meio da análise temática. A análise de conteúdo é fracionada em três etapas fundamentais.

A Pré-análise é o primeiro contato com o material a ser analisado, constituída por: Leitura flutuante: primeiro contato com os discursos; sem muitas preocupações técnicas; Constituição do corpus: seguir normas de validade como exaustividade, representatividade, homogeneidade e pertinência. E traçar os objetivos e elaborar hipóteses para sustentar sua análise.

Já feita à constituição do *corpus* da pesquisa, encontramos a segunda fase da análise, *a exploração do material*, etapa que consiste em detalhamento e cautela, para que a interpretação se torne clara e precisa. E, então se fragmenta o material em unidades/categoria, em que as unidades de contextos são frases que são recortadas das respostas a serem analisadas e reagrupadas conforme as unidades de registro e cada categoria escolhida. Já as categorias são classes que agrupam elementos com determinadas características comuns.

E, para finalizar a análise, depois de explorar minuciosamente os dados, iniciam-se as inferências decorrentes dos fatos. Nesta etapa, o pesquisador volta ao referencial teórico e analisa a relação com os fatos e confere sentido a interpretação.

6.3 Análise e Discussão dos Dados Obtidos

Considerando que a pesquisa proposta tem como objetivo investigar quais os conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre o conceito de função e sobre o ensino e a aprendizagem desse conceito, pretendemos responder as seguintes perguntas: Como o conceito de função é abordado nos Cursos de Licenciatura em Matemática? Quais os conhecimentos dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função? Quais as implicações dos conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre função para a atividade docente? Assim, optamos por uma abordagem qualitativa e, neste enfoque, a Análise de Conteúdo é uma metodologia adequada para analisar as respostas obtidas por meio dos questionários enviados aos professores.

O questionário tinha o intuito de buscar compreender de que forma o ensino de função é desenvolvido em sala de aula. Inicialmente, apresentamos um breve resumo da formação das professoras entrevistadas, obtida por meio do Currículo *Lattes*.

A professora 1 é bacharel em Matemática, com mestrado em Matemática e Doutorado em Engenharia. A professora 2 é bacharel em Matemática, com mestrado e doutorado em Matemática.

As respostas obtidas às questões foram:

- Qual disciplina a professora ministra ou ministrou no Curso de Licenciatura em Matemática?

> P1- As disciplinas que ministrei na Licenciatura foram: Cálculo Diferencial e Integral I e II, Geometria Analítica, Geometria Euclidiana, Introdução à Análise, Resolução de Problemas, Jogos no Ensino de Matemática, Equações Diferenciais Ordinárias, Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

P2- Este ano: Matemática do Ensino Fundamental. Outros anos: Cálculo Diferencial e Integral I e II, Funções de Variáveis Complexas e Análise Real.

- O conceito de função é ou foi abordado nas disciplinas ministradas?

P1- Sim. Principalmente em Cálculo Diferencial e Integral I e II, Matemática do Ensino Fundamental e Médio e Introdução a Análise.
P2- Sim, exceto em Matemática do Ensino Fundamental.

- Qual foi a bibliografia adotada na disciplina ministrada?

P1- Cálculo Diferencial e Integral I e II: Guidorizzi, H. L. – Um Curso de Cálculo. Vols. 1, 2 e 3. Livros Técnicos e Científicos, 1987.
P2- Cálculos: Guidorizzi, H. L. – Um Curso de Cálculo, 5ª ed. v. 1, v. 2 e v. 3. Rio de Janeiro: LTC Ed., 2001. Stewart, J. Cálculo, v. 1, 4ª ed. São Paulo: Thompson, 2004. Funções de Variáveis Complexas: Churchil, R. V. – Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: McGraw-Hill, Edusp, 1978. Análise na Reta: Lima, E. L. Análise Real, vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 1993.

- De que forma foi desenvolvido, em sala de aula, o conceito de função?

P1- Não respondeu.
P2- Foi apresentado o conceito, vistos exemplos, construção de gráficos e propriedades.

- Quais aspectos do conceito de função foram trabalhados?

P1- Tanto os aspectos algébricos como os geométricos. O aluno aprende não somente a definição de função e trabalha algebricamente para obter os pontos de máximo, mínimo, concavidade, crescimento e decrescimento, ponto de inflexão, para obtenção do seu gráfico, mas também aprende a interpretar o gráfico e tirar todas essas informações, além de aplicá-las.
P2- Foi apresentado o conceito, vistos exemplos, construção de gráficos e propriedades. Em especial, os conceitos de limite, derivadas e integrais de funções.

- Qual sua maior dificuldade para o ensino do conceito de função?

> P1- Os alunos apresentam dificuldade na parte de encontrar o domínio, imagem da função e limite. Observo que os erros são, em geral, devido à falta de pré-requisito como: resolução de inequação, e fatoração de polinômios”.
> P2- Como atuo no ensino superior, espera-se que o aluno já tenha algum conhecimento sobre funções, mas muitos chegam à universidade sem preparo algum. Uma das dificuldades apresentadas é com relação à construção dos gráficos das funções”.

Inicialmente, foi feita a análise geral do material coletado. Tínhamos como hipótese que os professores compreendem a importância do conceito de função e atentam para as dificuldades em relação a sua aprendizagem, considerando que a compreensão significativa do conceito é importante para a formação do futuro professor. Continuando a análise, de acordo com as respostas, selecionamos palavras ou locuções que representam um resumo de suas respectivas respostas. Assim, a codificação foi feita em função da repetição das palavras e concretizada em unidades de registro.

Dessa forma, as respostas foram agrupadas e rearranjadas para constituir as categorias abordadas em cada questão. Para isso, foi feita a análise textual que busca compreender cada conteúdo da cada frase ou palavra encontrada nos discursos selecionados que julgamos importantes para o objetivo da pesquisa. Então, foram registradas ao lado de todas as respostas as ideias centrais de cada pergunta. As palavras-chaves das entrevistas foram: Cálculo Diferencial e Integral I e II, Construção de gráficos, Sim, conceito, dificuldades, Aprender. As expressões selecionadas: *Sim; Cálculo Diferencial e Integral I e II; Guidorizzi, H. L; Construção de gráficos e propriedades; Espera-se que o aluno já tenha algum conhecimento sobre funções; Dificuldades; pré-requisito;* entre outras expressões, auxiliaram o processo de codificação. Para a construção das categorias foram selecionados os vocabulários: Dificuldade, Cálculo Diferencial, Matemática, gráfico e Ensino.

De acordo com as relações e evidências textuais em conjunto com as referências teóricas da pesquisa, elaboramos o processo de interpretação, que a exploração de dados nos permitiu desenvolver. Consolidaram-se então, as definições das categorias e a composição final no quadro abaixo:

Quadro 5 – Categorias

Unidades de registro	**Unidades de contexto**	**Categorias**
	Cálculo Diferencial e Integral I e II	Docência
	Matemática do Ensino Fundamental	

Matemática/ Geometria/ Cálculo/ Sim/ Ensino Fundamental/ Guidorizzi/ Análise na Reta/ Conceito/ Construção de gráficos e propriedades/ Definição de função/ Algébrico/ Dificuldade/ Falta de pré-requisito/ Funções.	Funções	Conteúdo
	Definição de função e trabalha algebricamente propriedades para a obtenção de gráficos.	Processo pedagógico no ensino do conceito de função.
	O conceito, vistos exemplos, construção de gráficos e propriedades.	
	Cálculo Diferencial e Integral I e II: GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo.	Referência
	Os alunos apresentam dificuldade na parte de encontrar o domínio, imagem da função e limite. Devido a falta de pré-requisito.	Dificuldade de aprendizagem do conceito
	Uma das dificuldades apresentadas é com relação à construção dos gráficos das funções,	

Fonte: Elaborado pelo autor

As primeiras categorias foram criadas e denominadas conforme os dados que constituem o *corpus* da pesquisa. Infere-se aqui a subjetividade do pesquisador ao conceder a identificação das categorias. A escolha da primeira categoria é referente à docência no ensino superior, pois são professoras do corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática, que ministram aulas de Cálculo Diferencial e Integral. A docência, primeira categoria, é uma atividade complexa que, em seu exercício, exige questões especificas/pedagógicas dentro da prática, conforme visto no capítulo 3. A distinção entre a docência do Ensino Básico e a docência no Ensino Superior é feita em razão do público alvo, uma vez que no ensino superior o aluno é adulto, o que lhe permite a autonomia de escolha. Nesta perspectiva, a maioria dos docentes universitários considera que os alunos já sabem o conteúdo (o conceito de função) ou que deveriam saber.

As disciplinas *Cálculo Diferencial e Integral I e II* são disciplinas comuns entre as duas professoras entrevistadas, em que basicamente, como visto no capítulo 2, são fundamentadas no conceito de função. Portanto, são disciplinas que exigem uma compreensão significativa do conceito de função para que o andamento da disciplina seja eficaz e pertinente. E, como já comentado, as disciplinas Cálculo I e II têm sido a causa de desmotivação, reprovação e desistência do curso, segundo Barufi (1999). E, de acordo com a análise dos questionários dos alunos do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática do capítulo anterior, observamos que houve um bom desempenho dos alunos, com poucos erros. Entretanto, há alguns obstáculos epistemológicos que não foram superados durante o curso. Talvez, podemos conjecturar que os professores do curso considerem o conceito de função como algo básico, o que os leva a não explorar uma ampla compreensão desse conceito.

A segunda categoria escolhida é o próprio conteúdo, que segundo Lopes (2012) é um conjunto de assuntos que constituem determinada matéria. Para ela,

> A palavra conteúdo, na tradição das instituições escolares, significa elementos de disciplina, matérias, informações diversas, os resumos da cultura acadêmica, reflete a visão dos que decidem o que ensinar e dos que ensinam, o que se pretende transmitir e o que deve ser assimilado. Essa concepção é diversa dos resultados dos conteúdos não específicos que o aluno obtém. (LOPES, 2012, p. 34)

O conceito de função é fundamental para um número considerável de disciplinas do Curso de Licenciatura Matemática e fundamental para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Santos e Barbosa (2017).

> O conceito de função tornou-se uma das noções fundamentais da matemática contemporânea. Por esse motivo, ele tem um papel central na estruturação dos conteúdos da matemática escolar, perpassando vários níveis de ensino. (SANTOS, BARBOSA, 2017, p. 28)

Também concordamos com os autores acima citados e nos conteúdos programáticos do curso de Licenciatura em Matemática observamos a importância desse conceito. No entanto, os aspectos fundamentais do conceito de função, muitas vezes, não são retomados na educação superior, pois os docentes os consideram como básicos demais.

A terceira categoria empregada foi o processo pedagógico no ensino do conceito de função, o que também discutimos no capítulo dois, em que a profissão docente exige um planejamento para o ensino de algum conteúdo. Assim, nos preocupamos em entender como o conceito de função é desenvolvido em sala de aula. Para Garcia (1992), o processo de ensino de qualquer conteúdo começa na reflexão e criação de metas para estruturar o conteúdo, afirmando:

> Todo processo de ensino começa com uma reflexão e elaboração (conhecimento abrangente) dos propósitos, estrutura do conteúdo a ser desenvolvido, idéias e relacionamentos que é possível desenvolver dentro do próprio sujeito e com outras disciplinas. Em paralelo, os professores iniciem a transformação do conteúdo que irão desenvolver, incluindo seleção e organização dos materiais a serem utilizados; a seleção de analogias, metáforas, exemplos, demonstrações, explicações, etc., para

> adaptar o conteúdo às características dos alunos, levando em conta concepções, preconceitos, erros conceituais, dificuldades, linguagem, cultura, motivações, classe social, sexo, idade, capacidade, aptidão, interesses, autoconceito e atenção do aluno. (GARCIA, 1992, p. 9-10)

Em relação ao conceito de função, como já mencionado segundo Sierpinska (1992), as dificuldades na aprendizagem são o bloqueio em associar as diferentes formas de representações da função, seja como tabelas, gráficos, diagramas ou fórmulas; dificuldade em entender o significado de variável; não compreensão das manipulações simbólicas como: $f(x)$, $x \to y$, $sen(x+t)$, entre outras. Uma das docentes que respondeu ao questionário relatou um processo pedagógico do ensino do conceito de função por meio do uso de exemplos e da construção de gráfico. Os aspectos do conceito de função que foram trabalhados pelas professoras, foram tantos os aspectos algébricos como os geométricos.

O estudo de pontos de máximo, mínimo, concavidade, crescimento e decrescimento e ponto de inflexão estão relacionados com a construção de gráficos que, segundo as respostas da professora 1, parece ser usado para introduzir o conceito de função. A professora 2 não parece proceder de forma diferente. A construção de gráficos está presente em todo o desenvolvimento do conceito. Segundo Trindade e Moretti (2000), o estudo das representações gráficas é essencial para o ensino/aprendizagem do aluno e a representação geométrica é a maneira mais adequada para desenvolver as propriedades da função.

A referência é a quarta categoria da nossa análise. Segundo o dicionário online, o termo referência, em linguística, tem o seguinte sentido: "Ação de demonstrar, através de um signo linguístico, o que pertence ao âmbito extralinguístico, concreto ou imaginário; análise da mediação entre signo e referente". A referência é o que temos em mãos para supor de que forma o conceito de função é desenvolvido em sala de aula. As respostas foram unânimes em relação ao livro utilizado na disciplina: "Um Curso de Cálculo" de Hamilton Luiz Guidorizzi. A última categoria é a dificuldade de aprendizagem do conceito, que envolvia a última pergunta do questionário. A dificuldade de aprendizagem em alguns conceitos, especialmente, no conceito de função, como já discutimos nos dois capítulos anteriores, exige uma superação dos obstáculos epistemológicos. A professora 1 considera que a dificuldade do conceito de função está na falta de pré-requisito, por parte do aluno.

Nesta perspectiva, a falta de pré-requisito nos sugere que a professora reconhece que existe dificuldade na compreensão do conceito de função, no entanto, ela justifica que a dificuldade de compreensão está relacionada a não compreensão da resolução de inequação e fatoração de polinômios. Assim, consideramos a justificativa no âmbito de determinar domínio e imagem de expressões algébricas e concluímos que nas outras representações não há dificuldade. Já a professora 2 considera que a maior dificuldade está na construção de gráficos, o que nos leva de volta à categoria da docência, pois a professora refere-se como professora universitária e acredita que o aluno já tenha compreendido o conceito.

Em síntese, observamos que o conhecimento das professoras em relação ao conteúdo é significativo e eficiente, e os questionários dos alunos, analisados no capítulo anterior, mostram um bom desempenho dos alunos e uma boa compreensão do conceito de função. Entretanto, pelas respostas dadas pelas professoras, também podemos conjecturar que o processo de ensino é tradicional e tecnicista. Quando as professoras falam das dificuldades de aprendizagem dos alunos, a justificativa é que tais dificuldades são consequências de conceitos não apreendidos anteriormente.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi investigar os conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre o conceito de função. Para isso, foram propostas as seguintes questões: Como o conceito de função é abordado nos Cursos de Licenciatura em Matemática? Quais os conhecimentos dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função? Quais as implicações dos conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre função para a atividade docente?

Assim, para buscar discutir as questões propostas, inicialmente, foi realizada uma revisão histórica do desenvolvimento do conceito de função. Nesse panorama histórico podemos observar que o conceito de função passou por alguns estágios, a saber: emprego de tabelas, representações gráficas, fórmulas algébricas, sendo observado que o conceito de função está sendo adaptado e reformulado gradativamente com o desenvolvimento da ciência.

A revisão teórica que apresentamos no Capítulo 2, mostra que são necessários diversos conhecimentos para que um professor possa desenvolver a atividade docente de forma efetiva. Esses conhecimentos são multidimensionais e, conforme Shulman (1986) e Petrou, Gouldin (2011), envolvem: conhecimento pedagógico geral, conhecimento dos alunos e das suas características, conhecimento do contexto educativo, conhecimento das metas, finalidades e valores da educação, conhecimento do conteúdo, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico (didático) do conteúdo. A combinação de todos esses conhecimentos gera um conjunto de novos conhecimentos que auxiliam a atividade docente. Nesta perspectiva, o saber docente não é formado exclusivamente por teorias da Educação e do conhecimento do conteúdo da área especifica, mas também pelas práticas do professor em sala de aula, pelas suas concepções e suas crenças. Llinares (1996), Lima (2008), Ball (1988), Petrou e Goulding (2011), Guimarães (2010), Sierpinska (1992), entre outros, defendem a importância de considerar as crenças e concepções dos alunos na formação inicial, na tentativa de codificar os conhecimentos necessários para formar um professor apto a exercer sua profissão.

O professor precisa mobilizar diversos saberes para que articule o ensino de um conteúdo tendo como objetivo a aprendizagem de seu aluno. Optamos por discutir o conhecimento do conceito de função dos futuros professores, por esse ser um conteúdo fundamental e unificador na Matemática, mas que, no entanto, representa um obstáculo na aprendizagem dos alunos, em diferentes níveis de escolaridade. Sierpinska (1992), ao estudar as dificuldades que envolvem a aprendizagem do conceito de função, conclui que este bloqueio na aprendizagem se dá em razão de "*obstáculos epistemológicos*". A autora detectou dezesseis obstáculos epistemológicos que estão por trás das dificuldades de aprendizagem do conceito de função.

A análise dos planos de ensino das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de São José do Rio Preto, que apresentamos no Capítulo 3, buscou investigar em quais disciplinas e de que forma o conceito de função é tratado durante o Curso. Observamos que a estrutura curricular do curso se baseia em disciplinas especificas, pedagógicas e de práticas como componente curricular a partir do segundo ano de curso. Nossa análise mostrou que a maioria das disciplinas especificas do curso de Licenciatura em Matemática aborda o conceito de função ou utiliza o conceito para o desenvolvimento de outros conteúdos.

Para discutir quais os conhecimentos dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função, foi aplicado um questionário para os alunos do último ano do curso de Licenciatura de Matemática da UNESP – São José do Rio Preto, envolvendo questões das diversificadas representações do conceito de função, com o propósito de detectar os obstáculos epistemológicos que os alunos apresentam em relação ao conceito de função. Observamos, por meio dos dados obtidos, que os alunos tiveram mais dificuldades nas questões que envolviam a representação de função por gráficos e tabela e na questão sobre a definição de função. Por outro lado, os alunos tiveram facilidade nas questões que envolviam notação e diagramas. Tais resultados podem estar relacionados às ênfases que são dadas ao estudo das funções na graduação. Outro ponto que destacamos é a associação que os alunos fazem entre "função" e "expressão algébrica para representar uma função". Essa associação leva os alunos a não considerarem como uma função os exemplos em que a expressão algébrica não é única ou em que a função não pode ser representada algebricamente.

A nossa análise das respostas dadas pelos alunos do 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática mostra que eles tiveram um bom desempenho, mas que alguns obstáculos epistemológicos necessitam de atenção. Podemos afirmar que alguns alunos acreditam que uma função deve envolver incógnitas e equações de termos, conforme os obstáculos OE (f) – 4 e OE (f) – 11, apontados por Sierpinska (1992); há também uma dificuldade de se reconhecer a presença da Matemática em uma atividade do cotidiano. Outro obstáculo envolvido é a visão de que Matemática e Física não têm nada em comum. Também parece haver uma ênfase na abordagem sobre as expressões algébricas, pois ao analisar a representação gráfica ou a tabela de valores para encontrar uma resposta a uma dada questão, há alunos que escrevem a lei da função antes de apontar uma resposta, ou seja, há uma forte associação, por parte dos alunos, entre o conceito de função e as relações que podem ser descritas por fórmulas analíticas. Outro obstáculo é tomar dependências como fenômenos, focando em como as coisas mudam e ignorando o que muda.

Também notamos que a interpretação da linguagem matemática por meio dos símbolos é enfatizada no ensino do conceito de função e, desse modo, os alunos não conseguem relacionar a expressão analítica de uma função com as outras representações, ou seja, acreditam que se a função não é dada por uma "expressão analítica", então, não é uma função. Esse aspecto reforça o obstáculo epistemológico da concepção de que a definição é a forma correta e única de representar uma função. Tais resultados podem estar relacionados às ênfases que são dadas ao estudo das funções na graduação, que em síntese abordam significantemente o uso de expressões analíticas como representação de função, e desviam a importância dos estudos das demais representações de função.

Para compreender de que forma o ensino de função é desenvolvido em sala de aula, foi aplicado um questionário para duas professoras do curso de Licenciatura em Matemática da mesma unidade. Ao analisar as respostas das professoras, podemos afirmar que o conceito de função é desenvolvido concomitantemente com a representação gráfica, em especial, nas disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral I e II*. Para aprofundarmos nossas considerações seria necessário entrevistar todos os professores do Curso que são responsáveis por disciplinas em que o conceito de função é tratado. Entretanto, só obtivemos resposta de 2 dentre os 8 docentes contatados e, ainda assim, as duas docentes só concordaram em responder ao questionário via e-mail, mas não concordaram com a realização das entrevistas.

Por meio da análise das respostas das professoras do Curso ao questionário que foi proposto, notamos que há uma crença de que os alunos já têm um conhecimento prévio do conceito de função, mas não é realizado um trabalho em sala de aula que busque investigar quais são esses conhecimentos para utilizá-los como ponto de partida para o desenvolvimento de novas ideias. O conhecimento prévio do conceito de função é tomado como algo que os alunos já deveriam saber e, dessa forma, são considerados como pré-requisitos para o desenvolvimento dos conteúdos das disciplinas que abordam esse conceito.

Apesar disso, a formação das docentes e a utilização de bons livros textos (ou seja, que apresentam a definição do conceito de função e exemplos variados das diferentes representações de função) na bibliografia básica de suas disciplinas contribuem para que os alunos tenham uma melhor compreensão desse conceito.

O conceito de função apresenta em seu ensino *"obstáculos epistemológicos"* que precisam ser superados. Pelos resultados obtidos em nossa pesquisa, percebemos que os obstáculos estão presentes e não foram totalmente superados, mesmo por alunos do último ano do curso.

Diante dos resultados obtidos, podemos apontar quatro implicações dos conhecimentos dos futuros professores de Matemática sobre função para a atividade docente: a primeira é que é provável que, em sua prática docente, ao abordar o conceito de função, o professor enfatize exemplos de função que envolvam incógnitas e equações de termos; a segunda é a dificuldade de desenvolver estratégias de ensino que mostrem a presença da Matemática em atividades do cotidiano; a terceira é a dificuldade em promover um ensino de Matemática interdisciplinar com outras áreas de conhecimento, como, por exemplo, com a Física; a quarta é a possibilidade de haver uma ênfase no trabalho com expressões algébricas, reforçando nos alunos uma ideia errônea de associação entre o conceito de função e as relações que podem ser descritas por fórmulas analíticas, em detrimento de um trabalho que envolva também, por exemplo, representação gráfica ou tabela de valores.

Conforme atesta a história, o conceito de função é fundamental para a organização dos ramos e dos conhecimentos específicos da Matemática, desempenhando também um papel importante em outras áreas do conhecimento, em virtude de sua aplicabilidade. De fato, o conceito de função está presente no currículo da Educação Básica, em nível fundamental e médio, bem como em diferentes cursos de graduação. Em especial, no Curso de Licenciatura em Matemática o conceito de função é fundamental para a compreensão de muitos conceitos e para a formação do professor de Matemática.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Francisco Ferreira dos Santos. **Dicionário analógico da língua portuguesa: ideias afins/thesaurus**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2010.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALL, D. L. Research on teaching mathematics: making subject-matter knowledge part of the equation. In: BROPHY, J. (Ed.). **Advances in research on teaching**. Greenwich: JAI Press, 1988.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, [S. l.], v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARUFI, B. C. M. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Calculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BOYER. C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação. **Plano Nacional de Educação – PNE.** Brasília, DF: INEP, 2001.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação/ Conselho Pleno. Resolução nº 2, de 19 de fevereiro de 2002. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 19 fev 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf>. Acesso em: 13 maio 2018.

______, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2000.

CLAGETT, M. **Ancient Egyptian Science: A Source Book**. v. 3. Philadelphia: American Philosophical Society, 1999.

CLARK, C.; YINGER, R. Teachers' thinking. In P. L. Peterson and H. Walberg (Eds.), **Research on teaching**: Concepts, findings, and implications (pp. 231-263). Berkeley: McCutchan, 1979.

COSTA, C. B. J. **O Conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de Função**. 2008. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

COTRET, S. R. Une experimentation sur les conceptions de la notion de fonction a travers les representations graphiques du mouvement. In: SEMINAIRE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE L´INFORMATIQUE. Année 1986-1987, Année 1987-1988, Grenoble. LSD- IMAG. p. 115-138.

DUGAS, R. **A History of Mechanics**. New York: Dover, 2011.

DSHALALOW, J. H. **Foundations of Abstract Analysis**. New York: Springer, 2013.

EL AMRANI, M. **Suites et séries numériques. suites et séries de fonctions**. Paris: Elipses, 2011.

ESCHER, J.; AMANN, H. **Analysis I**. Berlin: Birkhäuser, 2005.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2007.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GARCIA, M. C. Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didacto del contenido. In: CONGRESSO LAS DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO, 1., 1992, Santiago. **Anais...** Santiago: CDEFP, 1992. p. 1-25.

GUIMARÃES, M. H. Concepções, crenças e conhecimento – afinidades e distinções essenciais. **Revista Quadrante**, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, v. XIX, n. 2, 2010.

HEATH, T. **A History of greek mathematics**. New York: Dover, 1981.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1985.

JACOB, N.; EVANS, K. P. **A course in analysis:** introductory calculus, analysis of functions of one real variable. London: World Scientific, 2016.

JOSEPH, G. G. **The crest of the peacock**: non-european roots of mathematics. New Jersey: Princeton University, 2011.

KATZ, V. J. **A History of mathematics**: an Introduction. Boston: Pearson Education, 2009.

KLINE, M. **Calculus**: an intuitive and physical approach. new York: Dover, 1998.

LIMA, L. **A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática**. 2008. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2008.

LLINARES, S. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina y C. Loureiro (Ed.), **Desenvolvimento Profissional dos professores de Matemática. Que Formação?** (pp. 47-82). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1996.

LOPES, I. M. Como selecionar conteúdo do ensino. **De Magistro de Filosofia**, Anápolis, ano 5, n. 9, p. 30-43, 2012.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics**: teachers' understandings of fundamental mathematics in china and the united states. Washington: Routledge, 1999.

MENEGHETTI, R. C. G.; DIAS, M. S. F. O Estágio Supervisionado em Matemática: concepções, obstáculos e perspectivas de professores da Educação Básica e da Universidade. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 4, p. 9-24, 2011.

PIPITONE, M. A. P.; ZUFFI, E. M.; RIVAS, N. P. Um Programa de Formação de Professores em Constituição e Ação: o caso da Universidade de São Paulo. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, DF, v. 91, p. 144-160, 2010.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma influência Francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PETROU, M.; GOULDIN, M. Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. Em: Rowland, T.; Ruthven, K. (Ed.) **Mathematical Knowledge In Teaching**. New York: Springer, 2011.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 11A, p. 3-8, 2002. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte%20(SBEM).pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017.

PONNUSAMY, S. **Foundations of mathematical analysis**. New York: Springer, 2012.

REZENDE, W. M. **O Ensino de cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, D. L. G; BARBOSA, C. J. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**. Brasília, DF, v. 22, n. 53, p. 27-37, 2017.

SCARRE, C,; FAGAN, B. M. **Ancient civilizations**. New York: Routledge, 2016.

SCHUBRING, G. A noção de multiplicação: um "obstáculo" desconhecido na História da Matemática. **Bolema,** Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 1-24, 2002.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. Em: DUBINSKY, E; HAREL, G. (Ed.) **The Concept of Function:** aspects of epistemology and pedagogics. Washington: Mathematical Association of America, 1992.

SIU, M. K. Concept of function: its history and teaching. In: SWETZ, F. et al (Ed.) **Learn from the masters**. Washington: Mathematical Association of America, 1995.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, {S. l.], v. 16, I. 6, p. 451-483. 2013.

TRINDADE, J. A. de; MORETTI, M. T. Uma relação entre a teoria histórico cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de funções: a mediação. **Revista Zetetiké**, CEPEMFE/UNICAMP, n. 13-14, p. 29-49, 2000.

UNESP, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto. **Projeto Político Pedagógico de Matemática**. Modalidade Licenciatura (Diurno/Noturno), 2012. Disponível em: <http://www.ibilce.unesp.br/Home/Graduacao450/LicenciaturaemMatematica/projeto-pedagogico2012.pdf >. Acesso em: 12 maio 2018.

ZORICH, V. A. **Mathematical analysis**. Berlin: Springer, 2004.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Universidade Estadual Paulista – Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos

Questionário para estudantes do curso de Matemática

Identificação do Informante (Opcional):

1. Sexo: Masculino ( ) Feminino ( )

2. Idade: ________

3. Ano de ingresso:_______ Ano de conclusão: _________

4. Atualmente está lecionando? ( ) Sim ( ) Não
   - Se SIM, qual série/ano em que leciona?_____________________

5. Qual a sua formação acadêmica/ profissional?
( ) Graduando Matemática (Licenciatura)
( )Graduando Matemática (Bacharel)

6. Na graduação, em quais disciplinas foi discutido o conceito de Função?
____
____
____

Conteúdo Matemático: Funções

01. Os dados das tabelas abaixo poderiam representar uma função? Justifique sua resposta.

a)

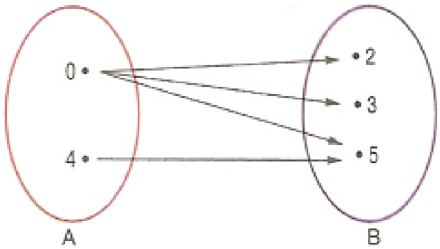
x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
y	*5*	*9*	*13*	*17*	*21*

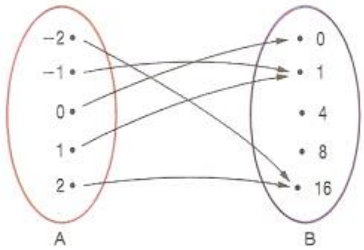
b)

x	*0*	*-1*	*1*	*-2*	*2*	*3*	*-3*
y	*0*	*1*	*1*	*4*	*4*	*9*	*9*

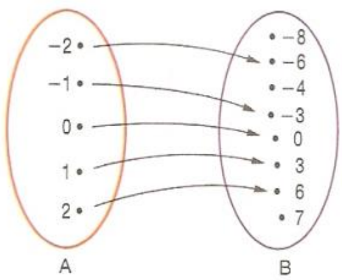
02. Quais dos seguintes diagramas representam uma função f de A em B?

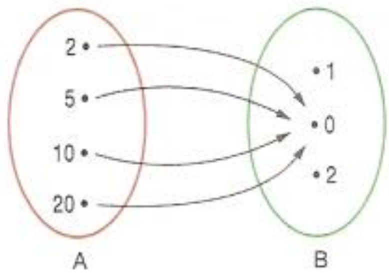
a) b)





c) d)





03. A distância d (em km) que um carro viaja em t horas a $75\ km/h$ é $d\ = 75t$. Qual a variável dependente? Qual a variável independente? Por quê?

04. Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $f: A \to B$ é uma função de A em Bquando:

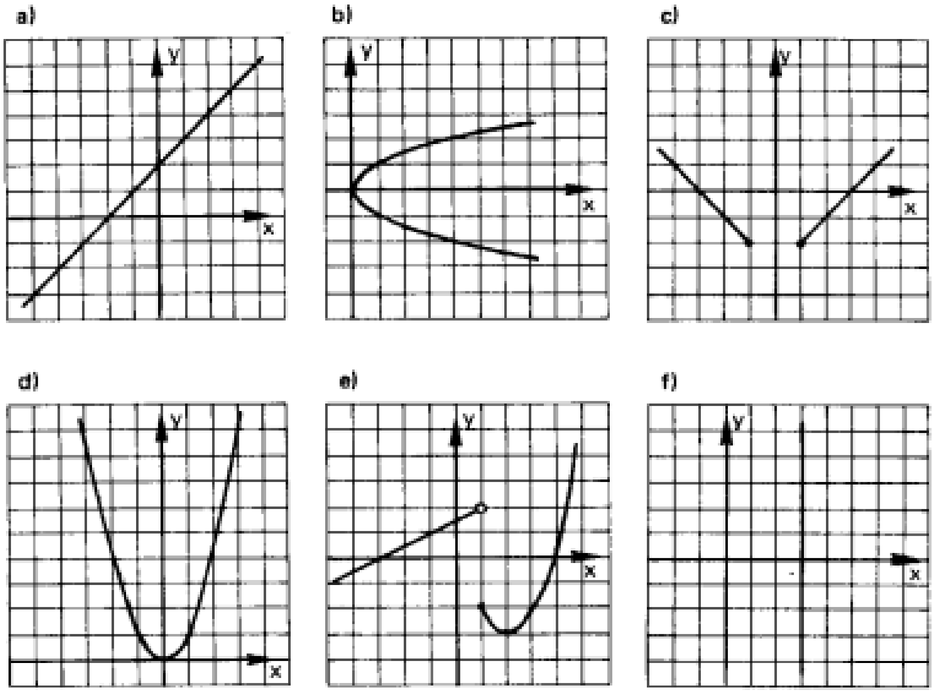
a) Para todo $x \in A$, $\exists y \in B$; $f(x) = y$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa

b) Se a relação $f: X \to Y$ é uma função, é verdade que: x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa

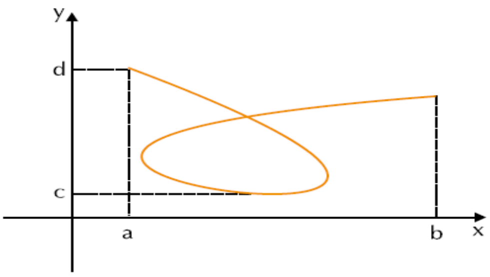
c) A relação $f: X \to Y$ é uma função separa $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa

d) A relação $f: X \to Y$ é uma função se dados x_1, $x_2 \in X$, em que $x_1 = x_2$, temos $f(x_1)\ = f(x_2)$. ( ) Verdadeira ( ) Falsa

05. Quais das relações de ℝ em ℝ, cujos gráficos aparecem abaixo, representam funções? Justifique sua resposta.



06. Com relação ao gráfico abaixo, justifique a afirmação que julgar falsa ou verdadeira.



a) Representa uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

( )verdade ( )falsa

b) Não representa uma função de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe $y \in \mathbb{R}$ que não é imagem de qualquer $x \in [a, b]$.

( )verdade ( )falsa

c) Não representa uma função de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ porque existe elemento $x \in [a, b]$ com mais de uma imagem.

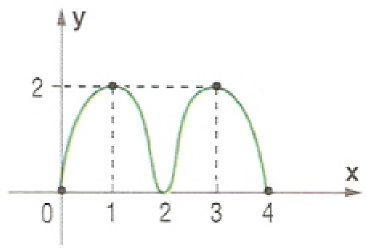
( )verdade ( )falsa

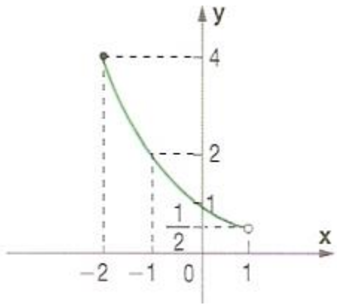
d) Representa uma função $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$.
( )verdade ( )falsa

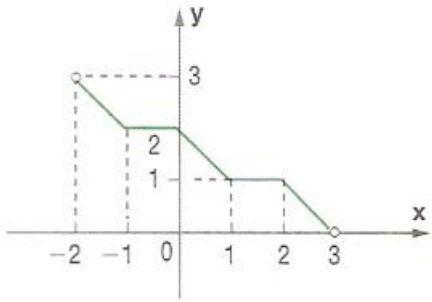
e) Representa uma função bijetora.

( )verdade ( )falsa

07. Os seguintes gráficos representam funções; determine o domínio D e o conjunto imagem Im de cada uma delas:







08. Considere a notação $f: A \rightarrow B$. O que significa essa notação? Explique cada componente dessa notação.

09. Agora, considere a notação $x \longmapsto f(x)$. O que significa essa notação? Explique cada componente dessa notação.

Obrigada pela sua colaboração!