

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JÚLIA TORELLO VIEIRA

Estudo da dinâmica presente nos anéis da Falha de Encke e no anel principal de Júpiter

Guaratinguetá
2025

Júlia Torello Vieira

Estudo da dinâmica presente nos anéis da Falha de Encke e no anel principal de Júpiter

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

Orientadora: Prof^ª Dr.^a Silvia Maria Giuliatti Winter

Coorientador: Dr. Rafael Ribeiro

Guaratinguetá

2025

V658e	Vieira, Júlia Torello Estudo da dinâmica presente nos anéis da falha de Encke e no anel principal de Júpiter / Júlia Torello Vieira – Guaratinguetá, 2025. 57 f. : il. Bibliografia: f. 57 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025. Orientadora: Profª. Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter Coorientador: Prof. Dr. Rafael Ribeiro 1. Astronomia. 2. Planetas - Órbitas. 3. Radiação solar. I. Título. CDU 52(043)
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JÚLIA TORELLO VIEIRA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: MESTRADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientador - UNESP

Prof. Dr. GUSTAVO OLIVEIRA MADEIRA
Institut de Physique du Globe de Paris

Prof. Dr. JEAN PAULO DOS SANTOS CARVALHO
UFRB/CETENS

JANEIRO de 2025

DADOS CURRICULARES

JÚLIA TORELLO VIEIRA

NASCIMENTO 07/08/1997 - São José dos Campos / SP

FILIAÇÃO Ernesto Vieira Neto
Isis Aimée Torello

2015 / 2021 Formação acadêmica (Bacharelado em Física)
Faculdade de Engenharia e Ciências -
Câmpus de Guaratinguetá

RESUMO

A Falha de Encke, com 320 km de largura, se encontra no interior do anel A de Saturno. Esta falha possui quatro anéis, chamados de anel interno, anel central, quarto anel e anel externo, cujos centros são localizados em 133484 km, 133584 km, 133680 km, e 133720 km, respectivamente, a partir do planeta (HEDMAN et al., 2013), além de abrigar um satélite natural em seu interior co-orbital ao anel central, o satélite Pan. Nosso objetivo será analisar os efeitos que a força de radiação solar em conjunto com três dos coeficientes gravitacionais de Saturno (J_2 , J_4 , J_6) terão sobre os anéis da Falha de Encke com de simulações numéricas realizadas através do integrador *REBOUND*. Foi verificado que partículas de raio de $1\mu\text{m}$ são rapidamente removidas do sistema da Falha de Encke devido a força de radiação solar e que as partículas de raio de $50\mu\text{m}$ são as mais estáveis. Também verificamos como o anel principal de Júpiter se comporta considerando as perturbações devido a não esfericidade do corpo central, força de radiação solar, e o efeito gravitacional de um satélite, no caso, Métis. As partículas do anel principal de Júpiter são menores que as da Falha de Encke, possuindo raios entre $1\mu\text{m}$ e $18\mu\text{m}$ segundo Brooks et al. (2004). Nesse trabalho verificamos que as partículas do anel principal de Júpiter mais próximas ao limite interior do anel transitam entre o anel principal e o Halo. Além disso, verificamos que o satélite Métis perturba as partículas menores do anel até serem removidas para os anéis *Gossamer*.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica orbital. Anéis planetários. Simulação numérica. Força de radiação solar.

ABSTRACT

The Encke Gap is 320 km wide and is located inside Saturn's A ring. The Gap has four ringlets, called the inner ring, central ring, fourth ring and outer ring, whose centers are located at 133484 km, 133584 km, 133680 km, and 133720 km, respectively, from the planet (HEDMAN et al., 2013), in addition to housing a satellite in its interior co-orbital with the central ringlet, Pan. Our objective will be to analyze the effects that the force of solar radiation together with three of Saturn's gravitational coefficients (J_2 , J_4 , J_6) will have on the Encke Gap ringlets through numerical simulations carried out by the REBOUND integrator package. We will see that particles with a radius of $1\mu\text{m}$ are quickly removed from the Encke Gap system due to the solar radiation force, although that particles with a radius of $50\mu\text{m}$ are the most stable. We also look at how Jupiter's main ring system behaves considering the same perturbations (non-sphericity of the central body, solar radiation force, and a satellite, in this case, Metis). The particles in Jupiter's main ring are smaller than those in the Encke Gap, with radii between $1\mu\text{m}$ and $18\mu\text{m}$ according to the analysis by Brooks et al. (2004). In this work we verify that those particles from Jupiter's main ring closest to the inner edge of the ring transit between the main ring and the Halo. The satellite Métis disturbs the smaller particles of the ring, leading them to the Gossamer rings.

KEYWORDS: Orbital dynamics. Planetary rings. Numerical simulation. Solar radiation Force.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Arte representando Saturno, seus anéis e satélites.	11
Figura 2	Imagens dos anéis de Saturno acompanhada por um gráfico da profundidade óptica local τ em função da distância até o planeta.	12
Figura 3	Imagem do anel A de Saturno. A direita mostramos a borda do anel A, a falha de Keller está destacada em amarelo, e a Falha de Encke em vermelho. Dentro da Falha de Encke podemos observar dois <i>ringlets</i>	13
Figura 4	Imagem obtida pela sonda Voyager 2 da Falha de Encke localizada no anel A de Saturno. A imagem mostra o anel central da falha, onde há concentrações de material.	14
Figura 5	Representação de duas órbitas no sistema girante de uma partícula de $\mu_2 = 0,000953875$ ao redor dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 . Em (a) as condições iniciais da partícula são $x = -0,97668$, $y = \dot{x} = 0$, $\dot{y} = -0,6118$, e em (b), $x = -1,02745$, $y = \dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0,04032$	17
Figura 6	Representação de duas órbitas no sistema girante em regime de girino ao redor do ponto de equilíbrio L_4 . Em (a) as condições iniciais da partícula são $x = x_{L_4} + 0,0065$, $y = y_{L_4} + 0,0065$, $\dot{y} = \dot{x} = 0$, e em (b), $x = x_{L_4} + 0,008$, $y = y_{L_4} + 0,008$, $\dot{y} = \dot{x} = 0$	18
Figura 7	Imagem dos quatro anéis localizados na Falha de Encke. Do mais próximo ao mais distante de Saturno, temos: o anel interno, o anel central, o quarto anel, e o anel externo.	19
Figura 8	Resultados de simulação numérica mostrando o comportamento de partículas presentes no interior da Falha de Encke devido à interação gravitacional com o satélite Pan. Temos unidades de raio de Hill de Pan abaixo e a esquerda do esquema, que são convertidos em unidades físicas acima e a direita do esquema. O raio de Hill de Pan é 18km e seu semieixo maior é 133584km.	20
Figura 9	Gráficos mostrando a localização dos picos luminosos nos <i>ringlets</i> da Falha de Encke segundo dados observacionais obtidos pela sonda Cassini. Da esquerda para a direita temos as localizações no <i>ringlet</i> interno, central e externo. Os pontos pretos são dados da sonda Cassini e os pontos verdes foram obtidos através de observações complementares da SATELLORB (HEDMAN et al., 2013).	21
Figura 10	Esquema do evento descrito anteriormente. (a) mostra um raio de projéteis se movendo em direção a uma partícula em repouso. Uma colisão ocorre e em (b), fM' é absorvido pela partícula e imediatamente reemitido, enquanto gM' é espalhado para frente ou para trás. (c) mostra os eventos do referencial da partícula.	24
Figura 11	Esquema representando a passagem de uma partícula pela sombra planetária.	27

Figura 12	Esquema do sistema de coordenadas considerado para a obtenção da força de radiação solar no caso de uma partícula G de órbita planetocêntrica. O planeta P possui órbita circular constante ao redor da estrela S com velocidade V_p	28
Figura 13	Gráfico da variação da excentricidade em função do tempo de partículas localizadas nos anéis μ (a) e ν (b) de Urano. Os gráficos foram obtidos através de simulações numéricas com partículas de raios de $1\mu\text{m}$, $3\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, e $10\mu\text{m}$	31
Figura 14	Resultado da simulação numérica utilizando o <i>REBOUND</i> para um sistema formado por Saturno, Pan e 100 partículas, 50 partículas externas ao satélite e 50 internas à órbita do satélite. O tempo de simulação foi de 315 dias. O sistema do coordenadas é o girante em relação ao satélite Pan. Abaixo do gráfico principal, vemos um zoom das regiões de ferradura e caos (à esquerda), e a região de ondas (à direita). O gráfico inferior fornece uma visão de uma região mais próxima do satélite Pan.	35
Figura 15	Resultados da simulação de verificação do código para partículas sob os efeitos da força de radiação solar. O gráfico (a) contém a variação da excentricidade no tempo e o gráfico (b) traz a variação do semieixo maior Δa em km em relação a seu valor inicial. As linhas representam uma partícula de $1\mu\text{m}$	36
Figura 16	Variação no tempo do semieixo maior devido ao arrasto do efeito de <i>Poynting-Robertson</i> segundo as simulações de Sfair e Winter (2009).	37
Figura 17	Variação do semieixo maior, excentricidade e raio orbital de partículas de raio de $1\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $1\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 85352 anos, em 100 anos ela decai 167,55 km.	39
Figura 18	Variação do semieixo maior, excentricidade e raio orbital de partículas de $25\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $25\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 213381 anos, em 100 anos ela decai 67,17 km.	40
Figura 19	Variação do semieixo maior, excentricidade, e raio orbital de partículas de $50\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $50\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 213381 anos, em 100 anos ela decai 3,35km.	41

Figura 20	Variação do semieixo maior, excentricidade, e raio orbital de partículas de $100\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $100\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 8535205 anos, em 100 anos ela decai 1,67km.	42
Figura 21	Variação dos elementos orbitais de cada partícula de $50\mu\text{m}$ durante a simulação da Falha de Encke movida +70000 km. A partícula 1 está localizada no centro do anel interno, a 2 no anel central, 3 no quarto anel, e 4 no anel externo.	43
Figura 22	Variação dos elementos orbitais da Falha de Encke movida para +70000 km para 100 anos de simulação numérica.	44
Figura 23	Esquema do sistema de anéis de Júpiter. Na figura vemos os quatro anéis de Júpiter: o anel principal, o <i>Halo</i> , e os dois anéis " <i>Gossamer</i> "; além dos satélites: Métis, Adrastea, Amalthea e Thebe.	46
Figura 24	Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $1\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	47
Figura 25	Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $5\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	48
Figura 26	Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $10\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	49
Figura 27	Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $20\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	50
Figura 28	Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis com raio de $1\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	52
Figura 29	Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis de raio $5\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	53
Figura 30	Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis de raio $10\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	54
Figura 31	Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis de raio $20\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Localização dos anéis da Falha de Encke, o raio orbital médio, a largura, e as regiões dinâmicas em que estão inseridos.	20
Tabela 2	– Tabela contendo os valores dos coeficientes gravitacionais J_2 , J_4 e J_6 de Saturno.	33
Tabela 3	– Diferença da distância de Saturno (Δr), semieixo maior (Δa), e excentricidade (Δe) para partículas de $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$	42
Tabela 4	– Novos semieixos maiores para as novas simulações, os demais elementos orbitais permanecem os mesmos.	43
Tabela 5	– Sistema de Anéis de Júpiter.	45
Tabela 6	– Tabela apresentando os valores dos coeficientes gravitacionais J_2 , J_4 e J_6	46
Tabela 7	– Tabela apresentando os elementos orbitais de Métis: semieixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (I), longitude do nodo ascendente (Ω), argumento do pericentro (ω), e anomalia média (M); assim como raio (R) e massa (m).	51
Tabela 8	– Tabela contendo o percentual de colisões durante as simulações de partículas de raios de $1\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ e $20\mu\text{m}$ do anel principal de Júpiter.	51
Tabela 9	– Tabela contendo o percentual de colisões durante as simulações de partículas de raios de $1\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ e $20\mu\text{m}$ do anel principal de Júpiter localizadas próximas ao satélite Métis.	51

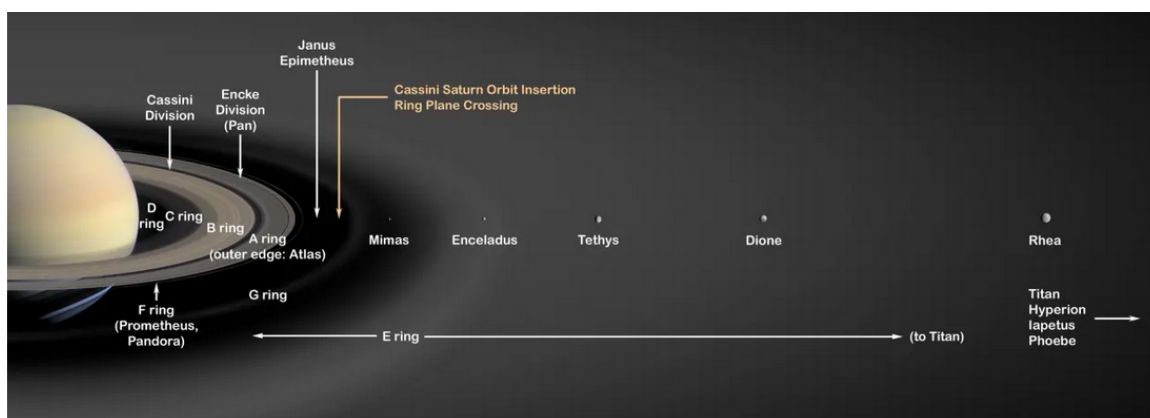
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ESTUDOS ANTERIORES	16
3	FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR	22
3.1	Partículas perfeitamente absorvedoras	22
3.1.1	Coeficiente de espalhamento e absorção	23
3.2	Partículas em órbitas planetárias	27
3.3	Taxa de variação dos elementos orbitais	28
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	32
4.1	Validação do código	32
4.2	Resultados das simulações numéricas contendo Saturno, Pan e um conjunto de partículas	38
5	ANEL PRINCIPAL DE JÚPITER	45
5.1	Simulações numéricas: Anel Principal de Júpiter	45
6	DISCUSSÃO E CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Anéis planetários correspondem a um conjunto de pequenas partículas que formam um disco ao redor de um objeto, que pode ser um planeta, um planeta anão, um centauro, ou até mesmo um satélite. Essas partículas podem ser constituídas de vários materiais, desde gelo até rochas, e possuem vários tamanhos, de pequenas partículas de poucos micrômetros até pedras de metros de diâmetro. Os conjuntos de anéis mais conhecidos são aqueles ao redor dos planetas gigantes do Sistema Solar: Júpiter, Saturno, Urano e Netuno (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Figura 1 – Arte representando Saturno, seus anéis e satélites.



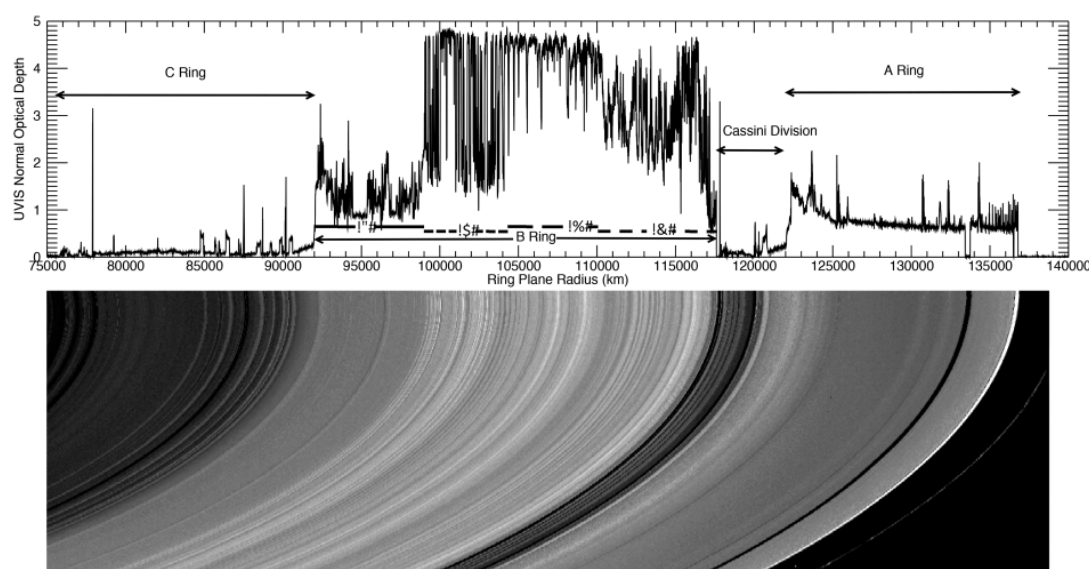
Fonte: <https://science.nasa.gov/resource/saturns-rings-2/>

O primeiro sistema de anéis observado foi o de Saturno (MURRAY; DERMOTT, 1999) em 1610, portanto esse sistema vem sendo estudado desde então. O sexto planeta do Sistema Solar possui anéis largos e brilhantes de fácil observação, tanto que já no século 17 sabíamos de sua existência através de observações por luneta. O sistema de anéis de Saturno consiste: i) dos anéis A e B, separados pela divisão de Cassini¹; ii) dos anéis ópticamente finos C e D; e iii) dos anéis F, G e E, que são os mais distantes ao planeta (MURRAY; DERMOTT, 1999).

A Figura 2 mostra uma imagem da face iluminada dos anéis de Saturno obtida pela sonda espacial Cassini. Esta imagem está alinhada com o gráfico da profundidade óptica normal dos anéis em função da distância radial de Saturno para os seus principais anéis: os anéis A, B, C e D (CUZZI; FILACCHIONE; MAROUF, 2018). A profundidade óptica normal presente na Figura 2 representa a luz que é bloqueada pelo material dos anéis, sendo definida por $\tau = -\sigma \ln(I/I_0)$, em que I_0 e I representam a intensidade de radiação incidente e transmitida e σ é o cosseno do ângulo de visão a partir do versor normal ao plano dos anéis. A profundidade óptica é uma função do comprimento de onda e da geometria, note que os maiores valores desta grandeza estão em cerca de 2/3 da borda interna do anel B e indica uma maior concentração de partículas. Os quatro anéis principais de Saturno cobrem um espaço de 274000 km, quase 2/3 da distância Terra-Lua, enquanto sua altura é de apenas algumas dezenas de metros.

¹ A divisão de Cassini é composta por bandas largas de material de baixa profundidade óptica divididos por segmentos de espaço vazios (CUZZI; FILACCHIONE; MAROUF, 2018).

Figura 2 – Imagens dos anéis de Saturno acompanhada por um gráfico da profundidade óptica local τ em função da distância até o planeta.



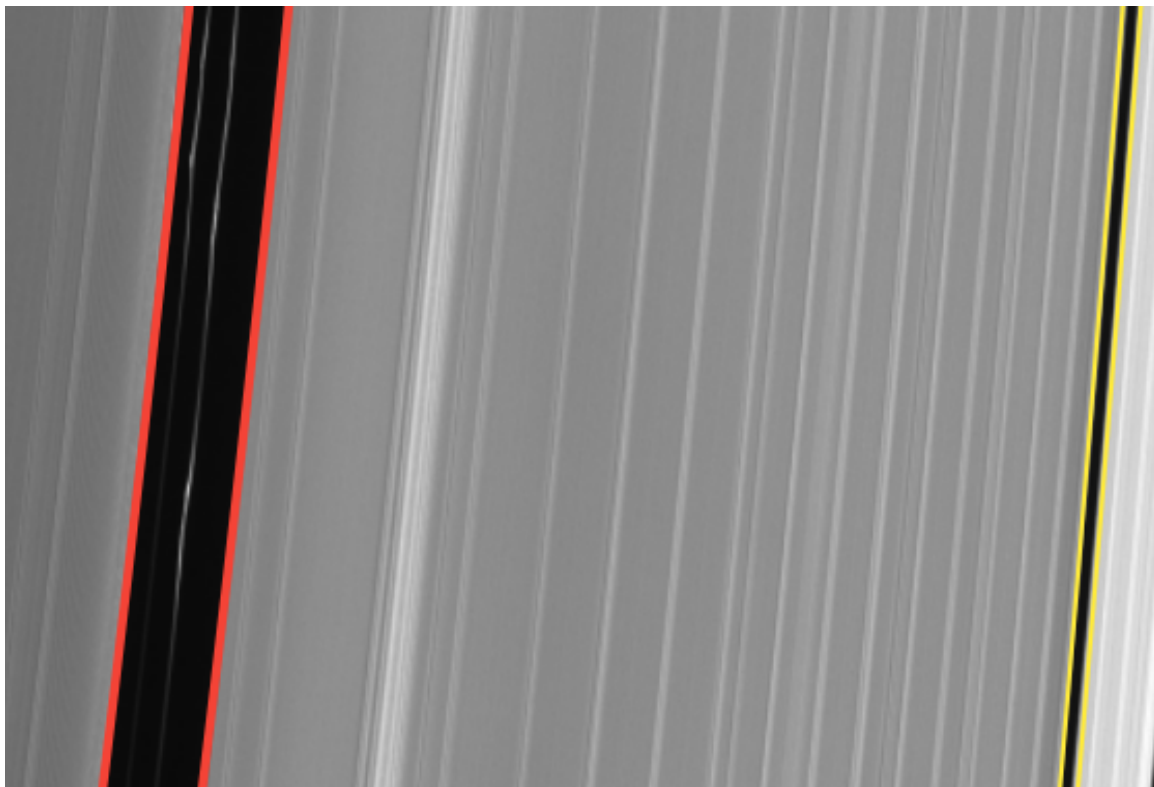
Fonte: CUZZI, FILACCHIONE e MAROUF (2018)

Em imagens da Cassini, em que o Sol ilumina o lado oposto dos anéis, nos 2/3 externos do anel B a região é escura e quase opaca. Mesmo assim, o anel B possui várias linhas finas de material ou vielas estreitas que podem ser percebidas quando se passa luz (Figura 2). A divisão de Cassini contém bandas de baixa luminosidade em sua primeira metade e mais uma faixa muito luminosa em sua outra metade. A diferença de luminosidade entre as regiões é causada pela presença de partículas relativamente mais reflexivas na segunda metade da divisão. Podemos observar estas partículas mais reflexivas no gráfico de profundidade óptica local na Figura 2, onde há dois picos de profundidade óptica por volta dos 120000 km. Um efeito similar ocorre no final do anel C, onde dois aumentos na profundidade óptica estão presentes antes do início do anel B (CUZZI; FILACCHIONE; MAROUF, 2018).

A Figura 2 mostra uma imagem desse anel e sua localização no sistema de anéis de Saturno, note que a Falha de Encke já é visível nessa figura como um declínio súbito na profundidade óptica. A Figura 3 também evidencia a Falha de Encke (a esquerda em vermelho) e a falha de Keeler (a direita). A Falha de Encke parece conter vários anéis irregulares, com a aparência de anéis estreitos e torcidos (chamaremos de "ringlets") (HORÁNYI et al., 2009; HEDMAN et al., 2013). Estes *ringlets* são similares a estruturas encontradas no anel F. O *ringlet* central da Falha de Encke compartilha a mesma órbita do satélite Pan (diâmetro de 30 km). Embora existam outros *ringlets* que são incompletos azimutalmente (pelo menos três) dentro da Falha de Encke, nenhum outro satélite que compartilhe a órbita destes *ringlets* foram encontrados até o momento. A falha de Keeler também contém um satélite em seu centro, Daphnis. Apesar das buscas da sonda Cassini, esses são os únicos exemplos de satélites formando falhas nos anéis de Saturno conhecidos até o momento (CUZZI; FILACCHIONE; MAROUF, 2018).

Apesar de ser nomeada em homenagem ao astrônomo alemão J. F. Encke, a Falha de Encke não foi observada por ele. Ao invés disso, ela foi detectada pela primeira vez em 7 de janeiro de 1888 pelo astrônomo James E. Keeler, enquanto observava os anéis de Saturno no observatório de Lick,

Figura 3 – Imagem do anel A de Saturno. A direita mostramos a borda do anel A, a falha de Keller está destacada em amarelo, e a Falha de Encke em vermelho. Dentro da Falha de Encke podemos observar dois *ringlets*.



Fonte: (CUZZI; FILACCHIONE; MAROUF, 2018)

Califórnia. Ele percebeu uma divisão escura na parte externa do anel A. Essa divisão só podia ser observada por telescópios de grande ampliação em noites de condições extremamente favoráveis, por se tratar de um objeto de difícil observação. Mais tarde, imagens obtidas pela missão Voyager 2 (Figura 4) mostraram uma divisão muito maior do que se esperava. As imagens mostraram uma falha de 320km de largura, contendo três *ringlets* em seu interior (OSTERBROCK; CRUIKSHANK, 1983).

As imagens da sonda também permitiram a descoberta do satélite Pan, o satélite situado no centro da Falha de Encke descoberto por Showalter e colaboradores (SHOWALTER et al., 1986). Em seu trabalho "*Satellite "wakes" and the orbit of the encke gap moonlet*", Showalter, Cuzzi, Marouf, e Esposito comprovam a existência do satélite Pan a partir da formação de ondas nas extremidades do anel A que contornam a falha.

Segundo os autores, para um satélite de semieixo maior a_s localizado dentro da falha, o material do anel que se aproxima deste satélite e que possui semieixo maior a sofre uma perturbação que resulta em uma soma vetorial das acelerações gravitacionais de Saturno e do satélite. Como consequência, no final do encontro, as partículas do anel sofrem uma aceleração na direção radial (em direção ao satélite) que faz com que elas ganhem uma pequena componente de velocidade radial v_r modificado lentamente sua excentricidade. No final de cada encontro com o satélite, a componente radial da velocidade adquirida resulta em uma pequena excentricidade para as partículas do anel vizinhas ao satélite.

A velocidade relativa da partícula em relação ao satélite é dada por (SHOWALTER et al., 1986):

Figura 4 – Imagem obtida pela sonda Voyager 2 da Falha de Encke localizada no anel A de Saturno. A imagem mostra o anel central da falha, onde há concentrações de material.



Fonte: NASA

$$v_{rel} = a \frac{d\omega}{da} s \approx -\frac{3}{2} \omega(a) s \quad (1)$$

onde $s \equiv a - a_s$.

A partir desses encontros com Pan, a partícula passa a apresentar variações radiais (ondas) em sua trajetória, que são espaçados de forma uniforme azimuthalmente pelo comprimento de onda azimuthal (SHOWALTER et al., 1986):

$$\lambda_\theta(a) = \frac{2\pi}{\omega(a)} |v_{rel}| \approx 3\pi |s| \quad (2)$$

As oscilações radiais resultantes dessas interações variam em amplitude ae (produto do semieixo maior e da excentricidade) e comprimento de onda λ_θ de acordo com a distância $|s|$ entre as partículas da falha e o satélite Pan. Próximo ao satélite, as oscilações induzidas ficam em fase, portanto as perturbações não são observáveis no material do anel. Entretanto, como λ_θ é proporcional a s , as linhas de fluxo vizinhas gradualmente saem de fase. Portanto, conforme a distância em relação ao satélite aumenta, essas linhas começam a variar, resultado em variações periódicas na densidade superficial das partículas do anel. Quando as linhas se interceptam, eventualmente, os padrões periódicos começam a serem amortecidos (SHOWALTER et al., 1986).

Já se passaram quase quarenta anos desde a observação da Falha de Encke pela sonda Voyager, durante este tempo vários trabalhos foram publicados sobre este sistema (GONÇALVES, 2001; FERRARI; BRAHIC, 1997; BECKER et al., 2016; HEDMAN et al., 2013). No próximo capítulo, discutiremos alguns textos relevantes ao trabalho. Mais tarde, iremos realizar simulações numéricas através do

pacote integrador *REBOUND*, contendo partículas dos três *ringlets* da Falha de Encke, Saturno e o satélite Pan. Essas partículas serão afetadas pela força de radiação solar e também consideraremos a não esfericidade do corpo central.

No capítulo 3, iremos discutir as componentes de uma das forças adicionadas ao sistema, a radiação solar, que é dividida entre a pressão de radiação solar e o arrasto de *Poynting-Robertson*. Começamos o capítulo apresentando os efeitos sofridos por uma partícula perfeitamente absorvedora sobre a influência de um raio de fótons. Depois, falaremos brevemente sobre a constante β , a razão entre a força gravitacional e de radiação, e analisaremos a força de radiação solar para o caso de uma partícula planetocêntrica. Finalizaremos a discussão analisando as consequências dinâmicas desta aceleração nos elementos orbitais das partículas.

O capítulo 4 contém a validação do código e resultados das simulações numéricas onde veremos os efeitos das forças de radiação solar e não esfericidade do corpo central para partículas no centro de cada um dos anéis da Falha de Encke. Em nossos resultados, veremos como o tamanho das partículas e suas distâncias a Saturno afetam a dominância dos efeitos perturbadores. Os diferentes resultados obtidos devido à mudança de tamanho das partículas nos motivará a investigar outros sistemas de anéis, e no capítulo 5 estudaremos o sistema de anéis de Júpiter.

No capítulo 5, primeiro será feita uma breve introdução ao sistema de anéis, depois analisaremos como a dinâmica de partículas imersas no anel principal de Júpiter são afetadas pela não esfericidade do planeta, e a força de radiação solar. O anel principal de Júpiter possui partículas menores de raios de $< 1\mu\text{m}$ a $18\mu\text{m}$ (BROOKS et al., 2004) de forma que elas são mais afetadas pelos efeitos estudados. Em nossas simulações, veremos que as menores partículas do sistema próximas ao satélite Métis colidem com a borda superior do anel principal. Finalmente, o capítulo 6 contém as conclusões deste trabalho.

2 ESTUDOS ANTERIORES

Neste capítulo, discutiremos alguns trabalhos que são relevantes ao nosso estudo. Primeiramente, usaremos a dissertação de GONÇALVES (2001) para descrever os diferentes regimes dinâmicos localizadas na Falha de Encke, analisaremos também os trabalhos de Ferrari e Brahic (1997) e Becker et al. (2016) que discutem o tamanho das partículas localizadas na falha, finalmente, Hedman et al. (2013) que traz uma análise detalhada dos dados obtidos pela sonda Cassini.

GONÇALVES (2001) analisa os regimes dinâmicos presentes na Falha de Encke. Quando há o encontro entre uma partícula do anel e um satélite em órbita circular. Nesta interação e durante o encontro próximo entre o satélite e a borda vizinha, há troca de momento angular entre o satélite e as partículas do anel. O momento angular do satélite diminui, causando diminuição de seu semieixo maior. Já as partículas dos anéis têm seu momento angular aumentado. Este processo causa a formação de ondas no anel após a passagem do satélite. Regiões onde este processo acontece são conhecidas como regiões de ondas. O comprimento de onda l é dado pela equação (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$l = \frac{aU}{n/2\pi} = 3\pi\Delta a_0 \quad (1)$$

onde $U = 3n\frac{\Delta a_0}{2a}$ é a velocidade angular relativa da partícula em relação ao satélite, n é o movimento médio e Δa_0 é a separação entre o semieixo maior da partícula entre o primeiro encontro com o satélite e seu semieixo maior inicial.

Outro regime dinâmico que ocorre no interior da Falha de Encke são as órbitas de ferradura, as órbitas de girino não são observadas na Falha de Encke, mas elas serão discutidas aqui também. No problema restrito de três corpos, essas órbitas ocorrem para partículas próximas aos pontos de equilíbrio de Lagrange L_4 e L_5 , enquanto o ponto L_3 exerce função de separatriz. Esses tipos de órbitas recebem seus nomes devido ao formato que possuem (Figura 5 e Figura 6), quando L_3 é interno ao caminho da partícula temos órbita de ferradura, caso contrário, obtemos uma órbita de girino. Para órbitas de girino, a constante de Jacobi é dada por $C_J = 3 - \beta\mu_2$, onde β , de acordo com Murray e Dermott (1999), é definido $3 \leq \beta \leq 5$ e $\mu_2 = Gm_2$ (produto da constante gravitacional e a massa do satélite); e para a formação de órbitas de ferradura, $C_J = 3 + \alpha\sqrt[3]{\mu_2} + O(\mu_2)$, onde α , de acordo com Murray e Dermott (1999), é assumido da forma $0 \leq \alpha \leq \sqrt[3]{3^4}$. A largura radial das órbitas de ferradura é dada por $\delta r = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\sqrt[3]{\mu_2}$, e a largura radial das órbitas de girino $\delta r = \sqrt{2[(\beta - H)/3]}\sqrt{\mu_2}$, onde H é uma função de r , $H = \frac{2}{r_2^2} + r_2^2 - 1$ (MURRAY; DERMOTT, 1999). A constante de Jacobi é a única grandeza que se mantém constante no problema restrito de três corpos. Ela é obtida a partir das equações de movimento da partícula desse problema (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4)$$

Onde x , y , e z são as coordenadas da partícula, n é o movimento médio, em nosso sistema de medidas consideramos ele igual a 1, e U é a função $U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$, onde r_1 é a distancia entre o corpo centra e a partícula e r_2 é a distancia entre o satélite e a partícula. Multiplicamos (2) por $\dot{x}$, (3) por $\dot{y}$ e (4) por $\dot{z}$ e somando as equações obtendo (MURRAY; DERMOTT, 1999):

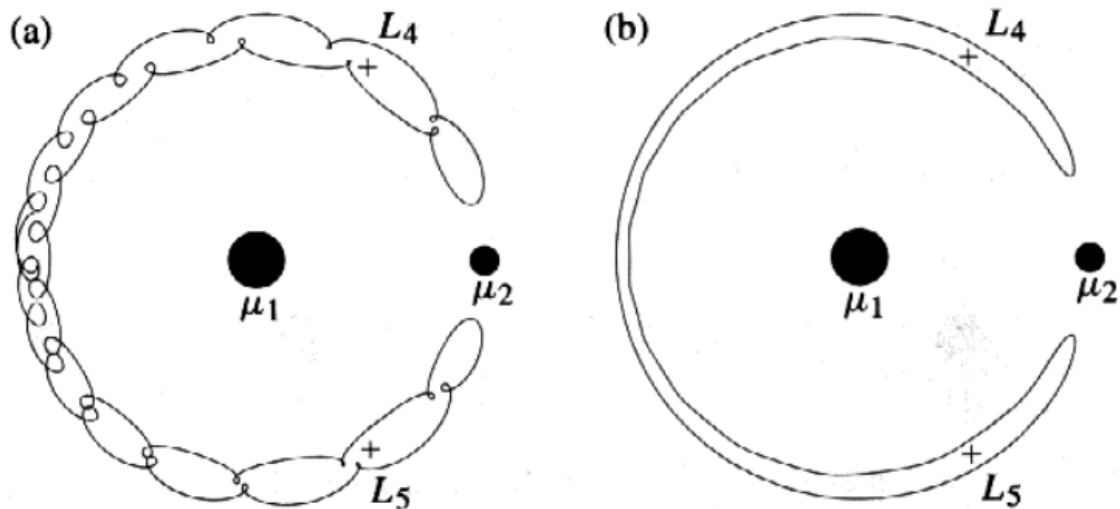
$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} \quad (5)$$

Integrando, obtemos a constante de integração a constante de Jacobi C_j :

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_j \quad (6)$$

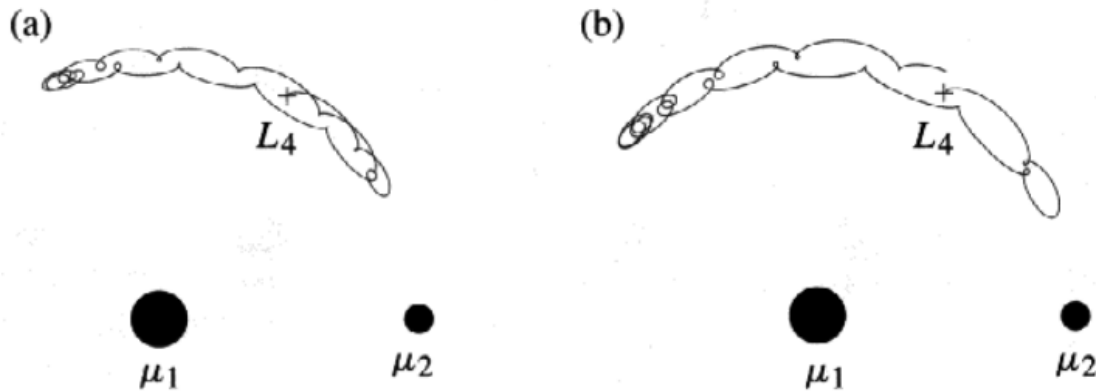
Para o sistema da falha de Encke, é possível fazer a comparação das larguras da região de ferradura e caótica entre os valores obtidos da teoria e das simulações numéricas com os dados obtidos através das imagens.

Figura 5 – Representação de duas órbitas no sistema girante de uma partícula de $\mu_2 = 0,000953875$ ao redor dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 . Em (a) as condições iniciais da partícula são $x = -0,97668$, $y = \dot{x} = 0$, $\dot{y} = -0,6118$, e em (b), $x = -1,02745$, $y = \dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0,04032$.



Fonte: Murray e Dermott (1999)

Figura 6 – Representação de duas órbitas no sistema girante em regime de girino ao redor do ponto de equilíbrio L_4 . Em (a) as condições iniciais da partícula são $x = x_{L_4} + 0,0065$, $y = y_{L_4} + 0,0065$, $\dot{y} = \dot{x} = 0$, e em (b), $x = x_{L_4} + 0,008$, $y = y_{L_4} + 0,008$, $\dot{y} = \dot{x} = 0$.



Fonte: Murray e Dermott (1999)

Finalmente, o regime caótico está próximo às órbitas de ferradura. A geração desse regime ocorre devido a sobreposição de ressonâncias entre as partículas do anel e o satélite. As partículas presentes na região caótica sofrem grandes variações em suas órbitas devido à proximidade com o satélite. A largura da região de caos é dada por $W = 2,6 \times 1,3\mu^{2/7}a_{Sat}$, onde μ é a razão de massa entre o satélite e o planeta (MURRAY; DERMOTT, 1999). Para a falha de Encke o regime de ferradura ocorre até 65km de Pan, depois temos regime caótico até 120m de Pan (HEDMAN et al., 2013).

Ferrari e Brahic (1997) analisaram a evolução e distribuição de partículas da Falha de Encke, usando observações da Voyager 2. Eles verificaram que os anéis da falha são predominantemente (80%) compostos por pequenas partículas de poeira com menos de $0,1\mu m$. Esse valor é muito menor que o tamanho das partículas no anel A de Saturno que envolve a falha. Becker et al. (2016) estimaram que o tamanho das partículas da borda externa do anel A está entre $1 - 10mm$, enquanto as partículas da borda externa da Falha de Encke contém partículas de $3 - 30mm$. Eles acreditam que a diferença de tamanhos das partículas entre as regiões ocorre devido a colisões com o satélite Pan. No estudo mais recente realizado por Hedman et al. (2013), o diâmetro das partículas foi estimado em $100\mu m$ de diâmetro. O diâmetro das partículas difere do trabalho apresentado por Ferrari e Brahic (1997), uma vez que os dados utilizados foram obtidos pela sonda Voyager em 1980, enquanto os dados de Hedman et al. (2013) são da Cassini em 2004.

Hedman et al. (2013) detalha a dinâmica das partículas e a arquitetura dos *ringlets* da Falha de Encke (Figura 7), a partir dos dados enviados pela sonda Cassini. Segundo eles, há um quarto *ringlet* localizado na Falha de Encke entre o anel central e o externo. Esse anel é muito mais largo que os demais, além de parecer mais homogêneo que os outros. Conhecido como quarto anel, esse anel também é extremamente tênue e de difícil observação.

Os quatro anéis da Falha de Encke existem em um ambiente de dinâmica complexa, sofrendo principalmente os efeitos gravitacionais de Saturno e Pan. O pequeno satélite percorre uma órbita quase circular com semieixo maior de 133584 km e período orbital de 0,575 dias. Devido a pequena largura da falha, encontros com Pan são relativamente infrequentes, partículas localizadas nas bordas

Figura 7 – Imagem dos quatro anéis localizados na Falha de Encke. Do mais próximo ao mais distante de Saturno, temos: o anel interno, o anel central, o quarto anel, e o anel externo.

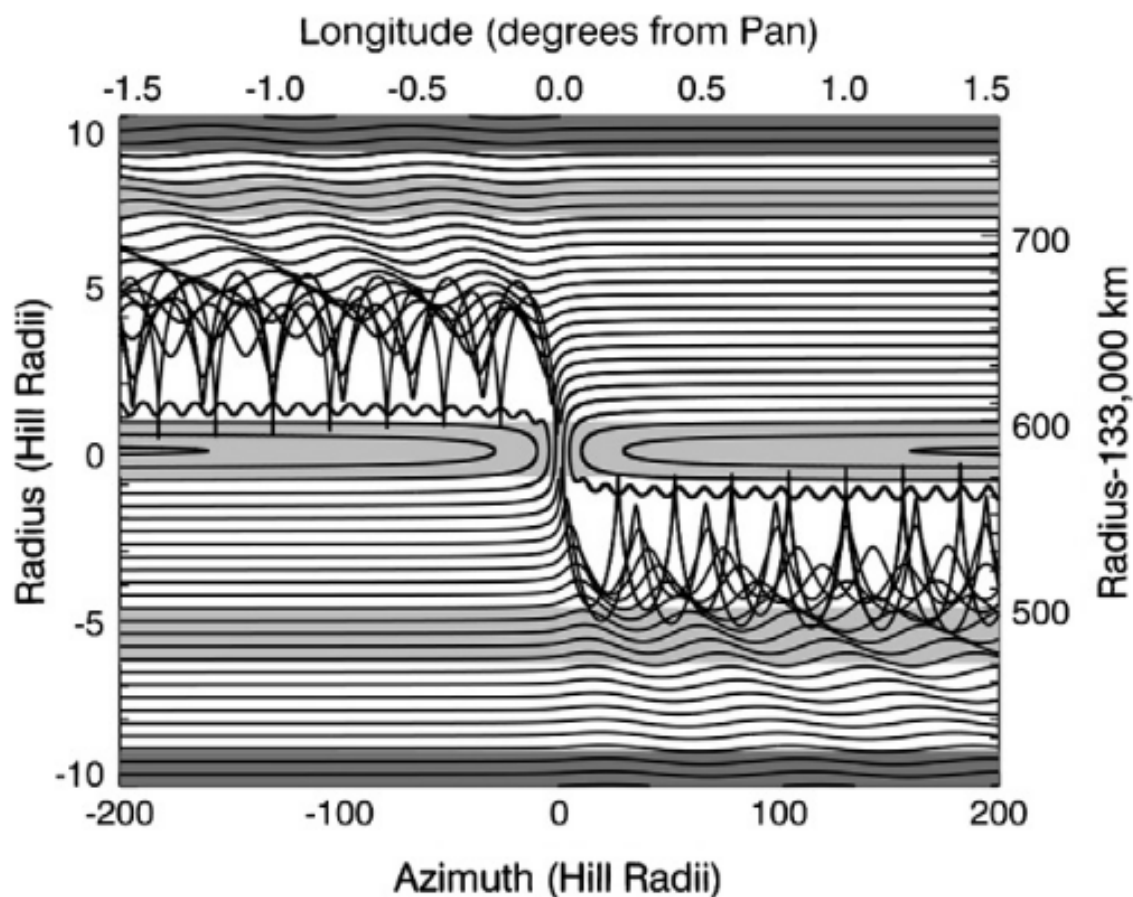


Fonte: Hedman et al. (2013)

da falha (de raio orbital de 133423km e 133745km) encontram com o satélite a cada 543 órbitas de Pan ou 315 dias. Quando esse encontro ocorre, os elementos orbitais da partícula são perturbados mais intensamente pela gravidade de Pan.

A Figura 8 mostra o comportamento encontrado por Hedman et al. (2013) para partículas no interior da Falha de Encke interagindo gravitacionalmente com o satélite Pan. Partículas orbitando próximo ao satélite ($\simeq 65$ km do satélite Pan) realizam órbitas do tipo ferradura (não foram observadas órbitas de girino), sendo que as órbitas mais estáveis se encontram por volta de $\simeq 15$ km de Pan. Partículas a uma distância maior que $\simeq 120$ km sofrem uma perturbação gravitacional menor que se manifesta em forma de um regime de ondas (Figura 8). Enquanto isso, partículas entre as regiões de ferradura e ondas apresentam comportamento "caótico", ou seja, órbitas extremamente instáveis com frequentes encontros próximos com Pan, produzindo grandes mudanças em suas órbitas. A Tabela 1 apresenta as posições dos *ringlets* na Falha de Encke, assim como suas larguras e regiões dinâmicas. Note que, tanto o anel interno quanto o quarto anel estão localizados na região de caos.

Figura 8 – Resultados de simulação numérica mostrando o comportamento de partículas presentes no interior da Falha de Encke devido à interação gravitacional com o satélite Pan. Temos unidades de raio de Hill de Pan abaixo e a esquerda do esquema, que são convertidos em unidades físicas acima e a direita do esquema. O raio de Hill de Pan é 18km e seu semieixo maior é 133584km.



Fonte: Hedman et al. (2013)

Tabela 1 – Localização dos anéis da Falha de Encke, o raio orbital médio, a largura, e as regiões dinâmicas em que estão inseridos.

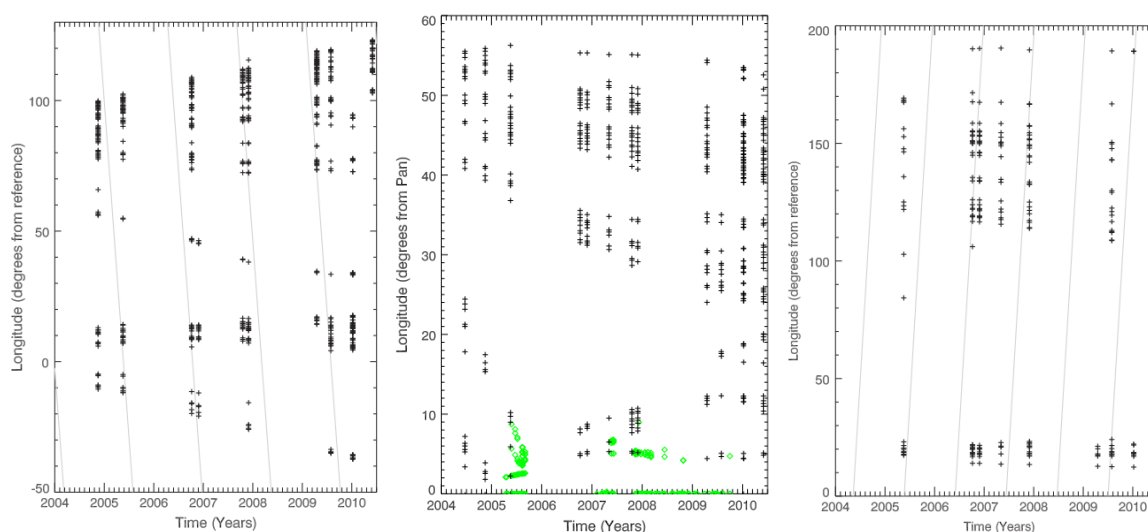
Anel	Raio orbital médio (km)	Largura (km)	Região
Interno	133484	60	Caos
Central	133584	50	Ferradura
Quarto	133680	-	Caos
Externo	133720	20	Ondas

Fonte: Hedman et al. (2013).

Hedman et al. (2013) também discutiram os dados observacionais da Falha de Encke, documentando a distribuição e movimento dos aglomerados mais brilhantes (visíveis nas duas figuras inferiores da Figura 3) nos anéis da Falha de Encke, através de dados coletados pela sonda Cassini. É notável que essas concentrações de partículas não estão espalhadas pela falha de forma aleatória.

A Figura 9 traz as localizações dessas acumulações de material luminoso e seu comportamento em função do tempo. No *ringlet* interno (Figura 9) temos uma concentração próxima ao satélite Pan (0°) e

Figura 9 – Gráficos mostrando a localização dos picos luminosos nos *ringlets* da Falha de Encke segundo dados observacionais obtidos pela sonda Cassini. Da esquerda para a direita temos as localizações no *ringlet* interno, central e externo. Os pontos pretos são dados da sonda Cassini e os pontos verdes foram obtidos através de observações complementares da SATELLORB (HEDMAN et al., 2013).



Fonte: Hedman et al. (2013)

outra entre 50° e 100° de Pan. Com o passar do tempo, esses aglomerados se espalham, de forma que em 2008 o aglomerado superior e inferior se quebram e observamos quatro grupos a -20° , 10° , 40° , e um maior de 70° a 110° . O *ringlet* central (Figura 9) é observado contendo três grupos luminosos em 2007 localizados por volta dos 5° , 20° e 50° de Pan. Novamente, notamos o comportamento de espalhamento desses aglomerados, porém ao invés dos grupos se separarem, observamos uma distribuição de aglomerados luminosos por toda a região entre 5° e 60° do satélite. O último *ringlet* (Figura 9) observado é o externo, inicialmente ele apresenta um aglomerado denso perto de 20° e um grupo largo entre 80° e 170° . Com o passar do tempo, o aglomerado inferior permanece relativamente estável, enquanto o grupo maior se faz mais estreito e se move de forma que, em 2009, está entre 100° e 200° de Pan.

Segundo Hedman et al. (2013) os blocos de material brilhante presentes nos *ringlets* da Falha de Encke não seguem a trajetória de partículas somente perturbadas pelo efeito gravitacional de Saturno e Pan, portanto outras forças devem estar envolvidas nesse movimento. Eles observam variações de excentricidades consistentes com a presença de força de radiação solar, mas essa força ainda não é suficiente para explicar as dinâmicas presentes nos *ringlets*. Durante esse trabalho, adicionaremos a força de radiação solar ao sistema da Falha de Encke, contendo o satélite Pan e Quatro partículas de raio orbital médio de cada anel (Tabela 1), também consideramos o formato de Saturno a fim de verificar seus efeitos nas partículas localizadas na Falha de Encke. Veremos se essas quatro partículas permanecerão dentro da falha ou serão removidas.

3 FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR

Como vimos no capítulo anterior, a dinâmica das partículas da Falha de Encke não pode ser explicada exclusivamente pela interação gravitacional entre elas e o planeta Saturno e o satélite Pan (HEDMAN et al., 2013). Um dos nossos objetivos é estudar os efeitos de outras forças agindo no sistema.

Uma das forças que atua no sistema de anéis da Falha de Encke é a força de radiação solar. Burns, Lamy e Soter (1979) apresentam o modelo físico que usaremos para escrever as componentes associadas à força de radiação solar.

A derivação da força de radiação possui duas etapas, primeiro, consideramos apenas partículas perfeitamente absorvedoras de radiação,¹ a fim de obter um modelo ideal para a força de radiação solar contendo a pressão de radiação e o efeito de *Poynting-Robertson*. Para a segunda fase aplicamos um modelo físico descrito em Burns, Lamy e Soter (1979) para encontrar a expressão geral da força de radiação, quando há colisões entre a partícula e um feixe de fótons. Neste modelo uma partícula pode espalhar, transmitir e absorver luz.

Depois, iremos analisar a força devido a radiação para partículas em órbita planetocêntrica com o auxílio do trabalho de Mignard (1984). Por fim, veremos os efeitos dinâmicos da força de radiação solar.

3.1 PARTÍCULAS PERFEITAMENTE ABSORVEDORAS

Burns, Lamy e Soter (1979) dizem que a força sobre uma partícula perfeitamente absorvedora pode ser separada em duas partes: um termo para a pressão de radiação, devido a colisão entre a radiação solar (fótons) incidente e a partícula; e um arrasto, devido a taxa efetiva de perda de massa causada pelo movimento da partícula enquanto irradia energia incidente.

O fluxo de radiação solar, ou módulo do vetor de *Poynting* multiplicado pela área, S (ergs cm⁻² sec⁻¹) interceptado por uma partícula perfeitamente absorvedora estacionária com área de corte transversal A é SA . Se a partícula apresenta movimento relativo ao Sol com velocidade v , escrevemos (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\vec{S}' = \vec{S} \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \quad (1)$$

onde $\dot{r} = \vec{v} \cdot \hat{S}$ é a velocidade radial da partícula em relação ao Sol, $\hat{S}$ é o vetor unitário na direção do raio incidente, e c é a velocidade da luz (BURNS; LAMY; SOTER, 1979). O fator em parênteses representa o efeito Doppler, a mudança dos comprimentos de ondas causado por ele altera o fluxo de energia incidente. Quando o raio de fótons se encontra com a partícula há uma troca de momento entre eles, de forma análoga a uma colisão entre dois objetos, no caso estudado, consideramos o referencial da partícula. O momento removido por segundo pelo feixe de fótons que incidente na partícula é

¹ isto é, um absorvedor ideal ou um corpo negro que absorve toda a radiação e não apresenta qualquer componente de reflexão desta radiação.

$(S'A/c)\hat{S}$, é o que chamamos de força de pressão de radiação solar. Esta força pode ser entendida como a variação do momento da partícula no tempo devido a influência de feixes de fótons.

O fluxo de energia absorvido $\vec{S}'A$ é irradiado pela partícula. Como essa irradiação é quase isotrópica, não há força resultante exercida sobre a partícula em seu próprio referencial, onde ela permanece em repouso enquanto os fótons incidentes colidem com ela, a energia incidente é completamente absorvida e irradiada. No referencial solar, onde a partícula está em movimento com velocidade $\vec{v}$, a irradiação é equivalente ao ritmo de perda de massa de $\vec{S}'A/c^2$. Isso gera um fluxo de momento para a partícula de $-(S'A/c^2)\vec{v}$. Como a partícula perde momento enquanto sua massa é conservada, ela é desacelerada e sofre um arrasto dinâmico. A perda de momento por unidade de tempo é chamada de arrasto de *Poynting-Robertson*.

A força total sobre as partículas é a soma das forças devido ao impulso exercido pelo raio incidente (pressão de radiação solar) e a perda de momento mencionado no parágrafo anterior. Para uma partícula de massa m , a força é dada por (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$m\dot{\vec{v}} = (\vec{S}'A/c)\hat{S} - (\vec{S}'A/c^2)\vec{v} \quad (2)$$

$$\simeq (\vec{S}A/c)[(1 - \dot{r}/c)\hat{S} - \vec{v}/c] \quad (3)$$

3.1.1 Coeficiente de espalhamento e absorção

Burns, Lamy e Soter (1979) escrevem a força de radiação solar de maneira mais simples usando os coeficientes de absorção e espalhamento. Geralmente, uma partícula esférica de seção transversal A espalha uma quantidade de luz equivalente à radiação incidente em uma área de AQ_{esp} , e absorve uma quantidade AQ_{abs} , onde Q_{esp} e Q_{abs} são definidos como coeficientes de espalhamento e absorção, respectivamente. Esses coeficientes correspondem à quantidades fracionárias de energia espalhada e absorvida, Q_{esp} e Q_{abs} dependem do comprimento de onda.

A intensidade da luz espalhada depende somente do ângulo α do raio incidente (onde $\alpha = 0$ corresponde a espalhamento frontal). A energia espalhada no anel de ângulo sólido incremental $d\chi = 2\pi \sin(\alpha)d\alpha$ na direção α é proporcional a $f(\alpha)d\chi$, onde $f(\alpha)$ é função de fase, função que descreve o brilho de um corpo, da partícula de espalhamento, normalizada de forma que $f(\alpha)d\chi$ integrado em todas as direções é unitário (Figura 10). Então o fluxo de energia espalhada anisotropicamente por segundo na direção frontal é $S'AQ_{esp} \langle \cos(\alpha) \rangle \hat{S}$, onde o parâmetro de anisotropia é dado por (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

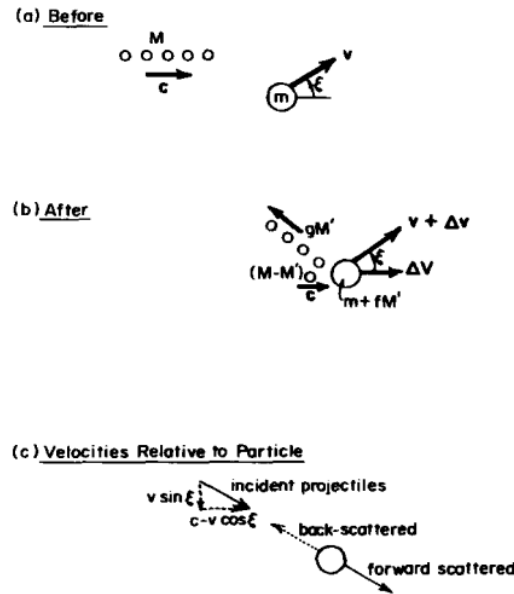
$$\langle \cos \alpha \rangle \equiv \int_{4\pi} f(\alpha) \cos(\alpha) d\chi \quad (4)$$

Quando o espalhamento ocorre na direção do raio incidente, $\langle \cos(\alpha) \rangle$ é um número positivo, enquanto radiação refletida é negativa.

O coeficiente de pressão de radiação Q_{pr} (BURNS; LAMY; SOTER, 1979)

$$Q_{pr} \equiv Q_{abs} + Q_{esp}(1 - \langle \cos(\alpha) \rangle), \quad (5)$$

Figura 10 – Esquema do evento descrito anteriormente. (a) mostra um raio de projéteis se movendo em direção a uma partícula em repouso. Uma colisão ocorre e em (b), fM' é absorvido pela partícula e imediatamente reemitido, enquanto gM' é espalhado para frente ou para trás. (c) mostra os eventos do referencial da partícula.



Fonte: Burns, Lamy e Soter (1979)

aparece em expressões para forças sentidas por partículas com propriedades ópticas gerais (absorção, espalhamento, refração e luminescência). Para uma partícula estacionária esse fator multiplica o fluxo de momento incidente e traz efeitos para força de radiação. Para espalhamento frontal perfeito, $Q_{pr} = Q_{abs}$, para espalhamento isotrópico, $Q_{pr} = Q_{abs} + Q_{esp}$, já para espalhamento perfeito para trás, $Q_{pr} = Q_{abs} + 2Q_{esp}$. De forma geral, podemos considerar a porção de Q_{esp} como espalhada isotropicamente, enquanto o resto tem $\langle \cos(\alpha) \rangle = \pm 1$ (BURNS; LAMY; SOTER, 1979).

Para calcular a força de radiação solar sentida pelas partículas que espalham e absorvem radiação, consideramos um modelo contendo colisão de partículas e troca de massa (BURNS; LAMY; SOTER, 1979). Esse modelo contém duas características importantes para o caso de absorção perfeita: um arrasto, devido ao aumento da massa, ao longo da velocidade da partícula, e uma pressão na direção do raio incidente de fótons.

A Figura 10 apresenta um diagrama da discussão que será explicada a seguir. Considere uma partícula de massa m se movendo com velocidade $\vec{v}$ preste a ser interceptada por um raio de fótons M , M é o número de partículas, por segundo (Figura 10.a), se movendo em relação ao referencial estacionário com velocidade c , não necessariamente a velocidade da luz (Figura 10.a). Passado um segundo depois do primeiro fóton colidir com a partícula, uma porção $M' = M(1 - v \cos(\xi)/c)$ do raio colide com m , onde ξ é o ângulo entre v e c (Figura 10.b) (BURNS; LAMY; SOTER, 1979). Uma parcela fM' é absorvida pela partícula, mas é continuamente reemitida para que a massa da partícula continue constante. O restante, gM' , que atinge uma partícula sai com a mesma velocidade vetorial relativa com que atingiu m (Figura 10.c).

Esperamos que a velocidade da partícula seja modificada após a interação com o raio de fótons

de duas maneiras: ΔV por segundo na direção do momento original do raio de fótons é a aceleração devido a pressão de radiação, e Δv por segundo na direção do vetor velocidade da partícula é a desaceleração devido ao acréscimo de massa. Apesar desses componentes não serem ortogonais, eles dão uma descrição da reação da partícula, por se tratar de um problema bidimensional. Em outras palavras, a colisão da partícula com o raio de fótons, assim como a reemissão da radiação absorvida, causam acelerações na partícula.

A conservação de momento nas direções x e y irá provocar Δv e ΔV . Para tanto, consideramos que fM' continua contido em m (Figura 10.b). Igualando o momento na direção y antes e depois da interação (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$mv \sin(\xi) = (m + fM')(v + \Delta v) \sin(\xi) + gM'[\mp v \sin(\xi) + v \sin(\xi)] \quad (6)$$

onde, aqui e nas próximas equações, o sinal superior corresponde ao espalhamento para frente e o inferior, para trás. O primeiro termo entre colchetes ($\mp v \sin(\xi)$) é a velocidade vertical do raio de fótons espalhado, medido pelo referencial da partícula. O segundo ($v \sin(\xi)$), considera o fato que a medição anterior é realizada em relação a um referencial em movimento de velocidade $v \sin(\xi)$, desconsideramos mudanças em v durante a interação. Sabendo que $f + g = 1$ e assumindo que $\Delta v \ll v, c$ e que $M \ll m$, temos que (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\Delta v = -(1 \mp g)M'v/m \quad (7)$$

interpretamos que essa desaceleração da partícula é causada pelo arrasto de acréscimo de massa.

Podemos determinar ΔV da mesma forma pela conservação do momento em x (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\begin{aligned} Mc + mv \cos(\xi) &= (m + fM')[(v + \Delta v) \cos(\xi) + \Delta V] \\ &+ gM'[\pm(c - v \cos(\xi)) + v \cos(\xi)] + (M - M')c \end{aligned} \quad (8)$$

O terceiro termo representa o momento quando o raio incidente ainda não colidiu com a partícula. O segundo termo assume que os fótons saem com a mesma velocidade que entraram no sistema. Fazendo a aproximação $\Delta V \ll V, c$ e $M \ll m$, e substituindo Δv em 8, temos que (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\Delta V = (1 \mp g)M'c/m \quad (9)$$

esse efeito é causado pelo momento do fóton. Ele é a pressão de radiação no caso em que o raio incidente é composto por fótons.

O efeito total do fóton sobre o corpo pode ser calculado pela soma das duas mudanças de velocidades (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\Delta \vec{V} + \Delta \vec{v} = (1 \mp g)(M'/m)(c\hat{S} - \vec{v}) \quad (10)$$

A transferência desse resultado da colisão entre materiais no caso onde radiação atinge uma partícula é direta, já que podemos associar $\mp g$ com $-Q_{esp} < \cos \alpha >$ e $f + g = 1$ com $Q_{abs} + Q_{esp}$. Mas notamos que, devido à difração, $Q_{abs} + Q_{esp}$ não é necessariamente unitário para partículas microscópicas. Qualquer radiação transmitida diretamente é a mesma que a radiação espalhada, com $< \cos \alpha > = 1$. Portanto de (5), temos que (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\vec{F}_{rad} = m\dot{\vec{v}} = Q_{pr}M'(\vec{c} - \vec{v}) \quad (11)$$

onde M' é a "massa" dos fótons que colidem com a partícula ou $(S'A/c^2)$. Na equação acima, a força de radiação pode ser vista como uma força de arrasto causada pela velocidade relativa, $c - v$, da partícula em relação ao feixe de fótons.

Finalmente, escrevemos a força de radiação solar em função de v/c como (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$m\dot{\vec{v}} = (SA/c)Q_{pr}[(1 - \dot{r}/c)\hat{S} - \vec{v}/c] \quad (12)$$

chamamos o termo independente da velocidade de força de pressão de radiação, enquanto os outros estão relacionados com o efeito de *Poynting-Robertson*.

Para partículas heliocêntricas de velocidade $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, com $\hat{r} = \hat{S}$ (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$m\dot{\vec{v}} = (SA/c)Q_{pr}[(1 - 2\dot{r}/c)\hat{r} - (r\dot{\theta}/c)\hat{\theta}] \quad (13)$$

Podemos simplificar as equações acima através do uso da constante β , Burns, Lamy e Soter (1979) que define como a razão entre a força gravitacional sofrida pela partícula devido à estrela e a força de pressão de radiação. A atração gravitacional do Sol (massa M e distância r) sob uma partícula esférica de raio s e densidade ρ é (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$F_g = \frac{4}{3}\pi s^3 \rho GM/r^2 \quad (14)$$

onde G é a constante gravitacional. De (12), o módulo da força de pressão de radiação devido à radiação solar é (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$F_r = (SA/c)Q_{pr} \quad (15)$$

considerando $S = L/4\pi r^2$ a densidade de fluxo de radiação a uma distância r e L é a luminosidade solar. Comparamos a força de radiação com a força gravitacional e definimos a constante β como (BURNS; LAMY; SOTER, 1979)

$$\beta \equiv F_r/F_g = (3L/16\pi CMc)(Q_{pr}/\rho s) = 5.7 \times 10^{-5} Q_{pr}/\rho s \quad (16)$$

onde Q_{pr} é calculado sobre a média do espectro solar, e ρ e s estão em unidades cgs. Com isso em mente, podemos reescrever (12) como:

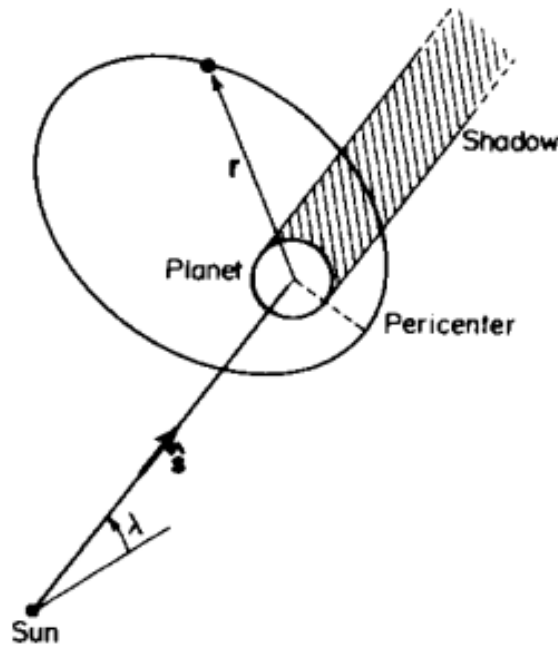
$$\vec{F}_r = \beta \vec{F}_g \left[\left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \hat{S} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (17)$$

3.2 PARTÍCULAS EM ÓRBITAS PLANETÁRIAS

Até agora, tratamos de uma partícula sendo afetada pela força de radiação. Entretanto esse trabalho se concentra na dinâmica de partículas em órbita ao redor de um planeta, portanto será necessário adaptar a equação 12 para a força de radiação nesse cenário. Com esse fim, passamos a utilizar o trabalho de Mignard (1984) fazemos as seguintes suposições:

- Negligenciamos pequenas variações entre as distâncias ao Sol, ou seja, consideramos que a partícula e o planeta estão à mesma distância da estrela e que o fluxo de radiação é constante e igual ao da superfície do planeta;
- Assumimos que a órbita do planeta é circular;
- Desconsideramos a sombra planetária (Figura 11), ou seja, supomos que a partícula está sempre recebendo radiação.

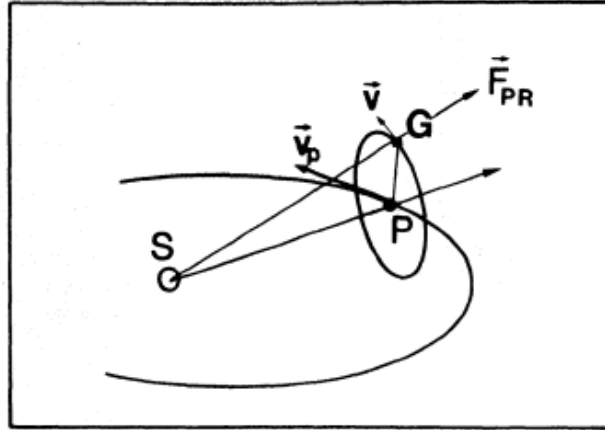
Figura 11 – Esquema representando a passagem de uma partícula pela sombra planetária.



Fonte: Burns, Lamy e Soter (1979)

Com essas suposições, consideramos a distância entre o Sol e o centro de massa do planeta P como o vetor (x_s, y_s, z_s) (Figura 12). Uma vez que desconsideramos pequenas variações entre distâncias ao Sol, podemos dizer que tanto o planeta quanto a partícula analisada apresentam a mesma distância ao Sol, o planeta apresenta velocidade V_p relativa ao Sol e a partícula $V_p + V$, onde V é a velocidade da partícula ao redor do planeta como vemos na Figura 12.

Figura 12 – Esquema do sistema de coordenadas considerado para a obtenção da força de radiação solar no caso de uma partícula G de órbita planetocêntrica. O planeta P possui órbita circular constante ao redor da estrela S com velocidade V_p .



Fonte: Mignard (1984)

Posto isso, podemos escrever a equação da força de radiação solar sofrida por uma partícula em órbita planetária como (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F}_{rad} = \beta \vec{F}_g \left\{ \left[1 - \frac{\vec{r}_s}{r_s} \left(\frac{\vec{V}_p}{c} + \frac{\vec{V}}{c} \right) \right] \frac{\vec{r}_s}{r_s} - \left(\frac{\vec{V}_p}{c} + \frac{\vec{V}}{c} \right) \right\} \quad (18)$$

Podemos ainda separar os componentes da força como (SFAIR; WINTER, 2009):

$$F_x = \frac{\beta GM}{r_s^2} \left[\cos(n_s t) - \left(\frac{x_s}{r_s} \right)^2 \left(\frac{v_{xs} + v_x}{c} \right) - \left(\frac{v_{xs} + v_x}{c} \right) \right] \quad (19)$$

$$F_y = \frac{\beta GM}{r_s^2} \left[\cos(\gamma) \sin(n_s t) - \left(\frac{y_s}{r_s} \right)^2 \left(\frac{v_{ys} + v_y}{c} \right) - \left(\frac{v_{ys} + v_y}{c} \right) \right] \quad (20)$$

$$F_z = \frac{\beta GM}{r_s^2} \left[\sin(\gamma) \sin(n_s t) - \left(\frac{z_s}{r_s} \right)^2 \left(\frac{v_{zs} + v_z}{c} \right) - \left(\frac{v_{zs} + v_z}{c} \right) \right] \quad (21)$$

onde M é a massa do Sol, n_s é o momento angular do planeta ao redor do Sol, o vetor (x_s, y_s, z_s) é o vetor da distância entre o Sol e o planeta, (v_x, v_y, v_z) é o vetor velocidade da partícula em relação ao planeta, e γ é a obliquidade do planeta.

3.3 TAXA DE VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Agora que temos as componentes da força de radiação solar, calculamos a taxa de variação secular dos elementos orbitais. Para isso usamos as equações dadas em Murray e Dermott (1999):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} [Re \sin(f) + T(1 + e \cos(f))] \quad (22)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} (1-e^2) [R \sin(f) + T(\cos(f) + \cos(E))] \quad (23)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{rN \cos(\omega + f)}{h} \quad (24)$$

onde N , R e T são as componentes normal, radial e tangencial da força $\vec{F} = R\hat{r} + T\hat{\theta} + N\hat{z}$ e h é o momento angular do sistema por unidade de massa. Com isso, podemos calcular a taxa de variação dos elementos orbitais de uma partícula sob a influência da força de radiação substituindo a equação (13) nas equações (22) a (24):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{3/2}SAQ_{pr}}{c\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left[\left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right) e \sin(f) - \frac{r\dot{\theta}}{c} (1 + e \cos(f)) \right] \quad (25)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{SAQ_{pr}\sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)}}{c} \left[\left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right) e \sin(f) - \frac{r\dot{\theta}}{c} (\cos(f) + \cos(E)) \right] \quad (26)$$

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad (27)$$

Se Δa é a perturbação sofrida pela partícula após uma revolução:

$$\Delta a = \frac{2a^{3/2}SAQ_{pr}}{c\sqrt{\mu(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} \left[\left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right) e \sin(f) - \frac{r\dot{\theta}}{c} (1 + e \cos(f)) \right] df \quad (28)$$

$$\Delta a = -\frac{2a^{3/2}SAQ_{pr}}{c\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left(\frac{r\dot{\theta}2\pi}{c} \right) \quad (29)$$

De forma similar encontramos a variação da excentricidade Δe após uma revolução:

$$\Delta e = \frac{SAQ_{pr}\sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)}}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right) e \sin(f) - \frac{r\dot{\theta}}{c} (\cos(f) + \cos(E)) \right] df dE \quad (30)$$

$$\Delta e = 0 \quad (31)$$

A variação da inclinação Δi será nula, pois o Sol e a partícula estão no mesmo plano, portanto não há força normal no sistema. Podemos concluir que uma partícula em órbita heliocêntrica perturbada pela força de radiação solar possui inclinação e excentricidade secularmente estáveis, ou seja, sofrem pouca ou nenhuma variação. Enquanto seu semieixo maior decresce com o tempo.

Para o caso de uma partícula orbitando um planeta, utilizaremos a equação (18) para definir as componentes normal, radial e tangencial. Repetindo os cálculos anteriores para a obtenção de Δa

(equação (29)) e Δe (equação (31)) temos que:

$$\Delta a = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} T_p \quad (32)$$

$$= \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left[-\frac{\beta GM}{r_s^2} \left(\frac{V_{pT} + V_T}{c} \right) \right] \quad (33)$$

$$\Delta e = 0 \quad (34)$$

$$\Delta i = \frac{r N_p}{h} [\sin(\omega + 2\pi) - \sin \omega] \quad (35)$$

Os resultados não são muito diferentes dos anteriores (equações (29) e (31)), o semieixo maior diminui (note que a componente transversal da força T_p é negativa na equação (33)) com o tempo de forma proporcional à componente tangente da força de radiação solar, enquanto a excentricidade continua estável. Porém a inclinação passa a sofrer alteração agora que há a possibilidade da componente normal.

Burns, Lamy e Soter (1979) definem o tempo de decaimento para partículas heliocêntricas (t_{pr}) e planetocêntricas (τ_{pr}):

$$t_{pr} = 7 \times 10^6 s \rho R^2 / Q_{pr} \text{ anos} \quad (36)$$

$$\tau_{pr} = 9,3 \times 10^6 s \rho R^2 / Q_{pr} \text{ anos} \quad (37)$$

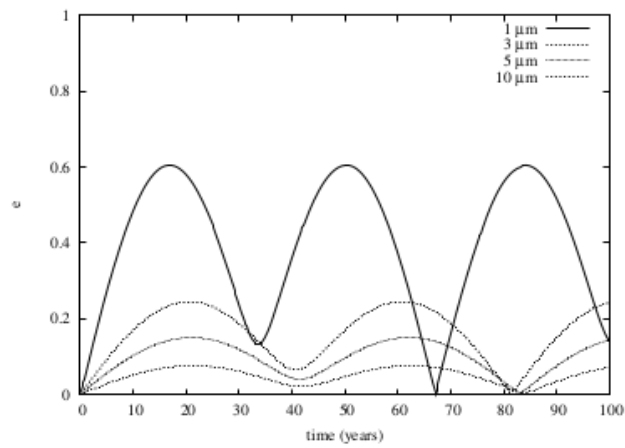
onde s e ρ são o raio e a densidade da partícula em unidades *cgs*, respectivamente, e R é a distância partícula-Sol em unidades astronômicas.

Entretanto, a fonte de radiação para o caso planetocêntrico não está necessariamente no plano de órbita da partícula. Isso introduz uma componente normal à força, o que permite que a inclinação varie. Com isso, ela passa a diminuir ou aumentar dependendo da direção incidente dessa força normal.

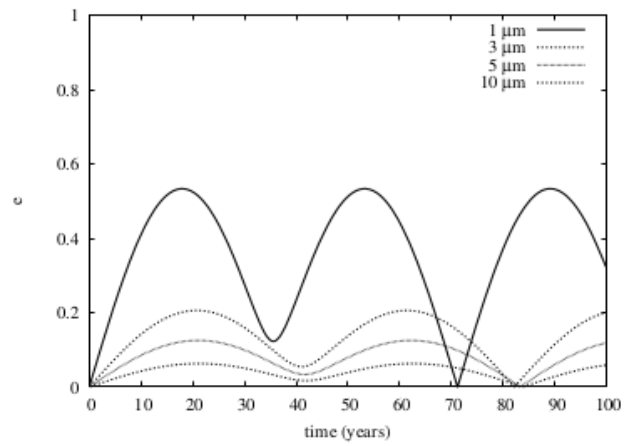
Os efeitos da obliquidade da órbita não é limitado à inclinação, Sfair e Winter (2009) discutem outras consequências desse ângulo. Em seu trabalho eles verificam os efeitos da força de radiação para os anéis μ e ν de Urano. O planeta possui alta obliquidade ($\gamma \simeq 98^\circ$), o que facilita a observação dos efeitos da obliquidade nas órbitas das partículas. Os gráficos obtidos por eles (Figura 13) mostram um amortecimento da excentricidade.

Agora que temos uma base teórica para a força de radiação solar e como ela afeta a dinâmica de partículas em órbitas planetocêntricas, podemos dar início às nossas simulações numéricas utilizando o *REBOUND*.

Figura 13 – Gráfico da variação da excentricidade em função do tempo de partículas localizadas nos anéis μ (a) e ν (b) de Urano. Os gráficos foram obtidos através de simulações numéricas com partículas de raios de $1\mu\text{m}$, $3\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, e $10\mu\text{m}$.



(a)



(b)

Fonte: Sfair e Winter (2009)

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Agora que vimos a teoria que será utilizada nesse trabalho, discutiremos brevemente o método utilizado para a realização das simulações numéricas. No desenvolvimento de nosso trabalho utilizamos o integrador *REBOUND*. O *site* oficial (<https://rebound.readthedocs.io/en/latest/>), contém diversos integradores gravitacionais de N corpos, ou seja, um pacote computacional que pode integrar numericamente o movimento de partículas que interagem gravitacionalmente. As partículas podem representar estrelas, planetas, satélites, anéis, ou poeira espacial. *REBOUND* pode ser escrito em linguagem C ou *python*.

Esse pacote de integração pode ser utilizado no estudo da dinâmica de anéis e formação planetária, e é modular o que permite alta flexibilidade e customização. O *REBOUND* é capaz de integrar as equações de movimento de partículas sobre efeitos gravitacionais através de integradores clássicos como o mapa simplético de Wisdom-Holman, *Leap-Frog*, SEI (*Symplectic Epiycle Integrator*).

Além de tudo isso, o *REBOUND* possui versões aprimoradas de integradores clássicos (SOUSA, 2019) como o WHFAST, uma versão do mapa simplético de Wisdom-Holman ideal para simulações numéricas de longo período, e o integrador de nossa escolha: IAS15. É um integrador numérico baseado no método de Gauß-Radau capaz de lidar com forças conservativas e não-conservativas, além de colisões e órbitas de grande excentricidade (REIN; SPIEGEL, 2015). O IAS15 é um integrador numérico poderoso tanto em velocidade quanto em precisão, por isso será usado neste trabalho.

4.1 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

No *REBOUND* criamos módulos para a implementação da não esfericidade do corpo central e a força de radiação solar. O módulo força de radiação solar implementa numericamente as equações (19) - (21). O módulo achatamento planetário implementa as equações (1).

Antes de realizarmos as simulações numéricas para nosso sistema, devemos primeiro comprovar a fidelidade do código. Para isso, começamos realizando algumas simulações simples e comparamos essas simulações com a teoria e outros resultados já validados.

Daremos início à validação com um sistema simples sem forças adicionadas além da força gravitacional, contendo apenas Saturno e o satélite Pan, mais 100 partículas localizadas na Falha de Encke. Os semieixos maiores iniciais dessas partículas foram determinados aleatoriamente e uma distribuição uniforme já implementada nas ferramentas do *REBOUND*. Também usamos anomalia média de 5° para partículas externas à órbita de Pan e -5° , para aquelas localizadas em órbitas internas ao satélite. Nosso objetivo é obter um gráfico similar à Figura 8 de Hedman et al. (2013).

Os resultados da simulação estão apresentados na Figura 14. Podemos verificar o quanto as partículas são afetadas pela força gravitacional de Pan. Partículas à 30km de distância do satélite apresentam órbita de ferradura, órbitas caóticas ocorrem de 30km até 60km de Pan, deste ponto em diante, notamos o regime de ondas. Com isso, obtemos resultados semelhantes aos de Hedman et al. (2013) e validamos a implementação a fim de reproduzir o efeito gravitacional sofrido por partículas orbitando um planeta enquanto são perturbadas por um satélite.

Em seguida, temos o efeito da não esfericidade de Saturno. O potencial gravitacional de um corpo não esférico é (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$V = -\frac{Gm_p}{r} \left[1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i (R/r)^i P_i(\sin \alpha) \right] \quad (1)$$

onde r é a distância entre a partícula e o centro de massa do planeta, m_p é a massa do planeta, R é o raio do planeta, $P_i(\sin \alpha)$ é o polinômio de Legendre de grau i , e J_i são coeficientes adimensionais que caracterizam as dimensões de um corpo não esférico (MURRAY; DERMOTT, 1999). Durante esse trabalho nos referimos a esses coeficientes como coeficientes gravitacionais. Os valores das constantes gravitacionais J_2 , J_4 e J_6 de Saturno estão escritos na Tabela 2.

Tabela 2 – Tabela contendo os valores dos coeficientes gravitacionais J_2 , J_4 e J_6 de Saturno.

J_2	$1,6290573 \times 10^{-02}$
J_4	$-9,35314 \times 10^{-04}$
J_6	$8,6340 \times 10^{-05}$

Fonte: Muñoz-Gutiérrez et al. (2022)

Para essa força foi usado um dos exemplos do rebound como base e adaptamos a força para incluir os termos J_4 e J_6 . Assim o código para a força fica:

$$\begin{aligned} Fj_x = & \frac{GR^2}{r^5} \left[J_2 \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{15}{2} z^2 \right) / r^2 \right) \right. \\ & + J_4 \left(\left(\frac{-15}{8} R^2 \right) / r^2 + \left(\frac{210}{8} R^2 z^2 \right) / r^4 - \left(\frac{315}{8} R^2 z^4 \right) / r^6 \right) \\ & \left. + J_6 \left(\left(\frac{105}{16} R^4 \right) / r^4 \left(\frac{1}{3} + (9z^2)/r^2 - ((33z^4)/r^4) + \left(\frac{143}{5} z^6 \right) / r^6 \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Fj_y = & \frac{GR^2}{r^5} \left[J_2 \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{15}{2} z^2 \right) / r^2 \right) \right. \\ & + J_4 \left(\left(\frac{-15}{8} R^2 \right) / r^2 + \left(\frac{210}{8} R^2 z^2 \right) / r^4 - \left(\frac{315}{8} R^2 z^4 \right) / r^6 \right) \\ & \left. + J_6 \left(\frac{105}{16} R^4 \right) / r^4 \left(\frac{1}{3} + (9z^2)/r^2 - (33z^4)/r^4 + \left(\frac{143}{5} z^6 \right) / r^6 \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Fj_z = & \frac{GR^2}{r^5} \left[J_2 \left(\frac{9}{2} - \left(\frac{15}{2} z^2 \right) / r^2 \right) \right. \\ & + J_4 \left(\left(\frac{-75}{8} R^2 \right) / r^2 + \left(\frac{350}{8} R^2 z^2 \right) / r^4 - \left(\frac{315}{8} R^2 z^4 \right) / r^6 \right) \\ & \left. + J_6 \left(\frac{105}{16} R^4 \right) / r^4 * \left(\frac{7}{3} + (21z^2)/r^2 - \left(\frac{231}{5} z^4 \right) / r^4 + \left(\frac{143}{5} z^6 \right) / r^6 \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Finalmente, utilizaremos os resultados obtidos em Sfair e Winter (2009) para verificar o código referente à força de radiação solar: pressão de radiação e efeito de *Poynting-Robertson*. Simulamos uma partícula interior ao anel μ com semieixo maior de 97700 km, densidade $1g/cm^{-3}$ e raios de $1\mu m$,

$3\mu\text{m}$ e $15\mu\text{m}$. Essa partícula orbita o planeta Urano de obliquidade $97,8^\circ$, massa $5,68319 \times 10^{26} \text{kg}$ e raio 69911 km .

Os resultados da simulação estão presentes na Figura 15, a variação da excentricidade segundo as simulações de Sfair e Winter (2009) estão na Figura 13 e Figura 16. Podemos verificar a precisão de nosso código comparando aos resultados das duas simulações.

Figura 14 – Resultado da simulação numérica utilizando o *REBOUND* para um sistema formado por Saturno, Pan e 100 partículas, 50 partículas externas ao satélite e 50 internas à órbita do satélite. O tempo de simulação foi de 315 dias. O sistema de coordenadas é o girante em relação ao satélite Pan. Abaixo do gráfico principal, vemos um zoom das regiões de ferradura e caos (à esquerda), e a região de ondas (à direita). O gráfico inferior fornece uma visão de uma região mais próxima do satélite Pan.

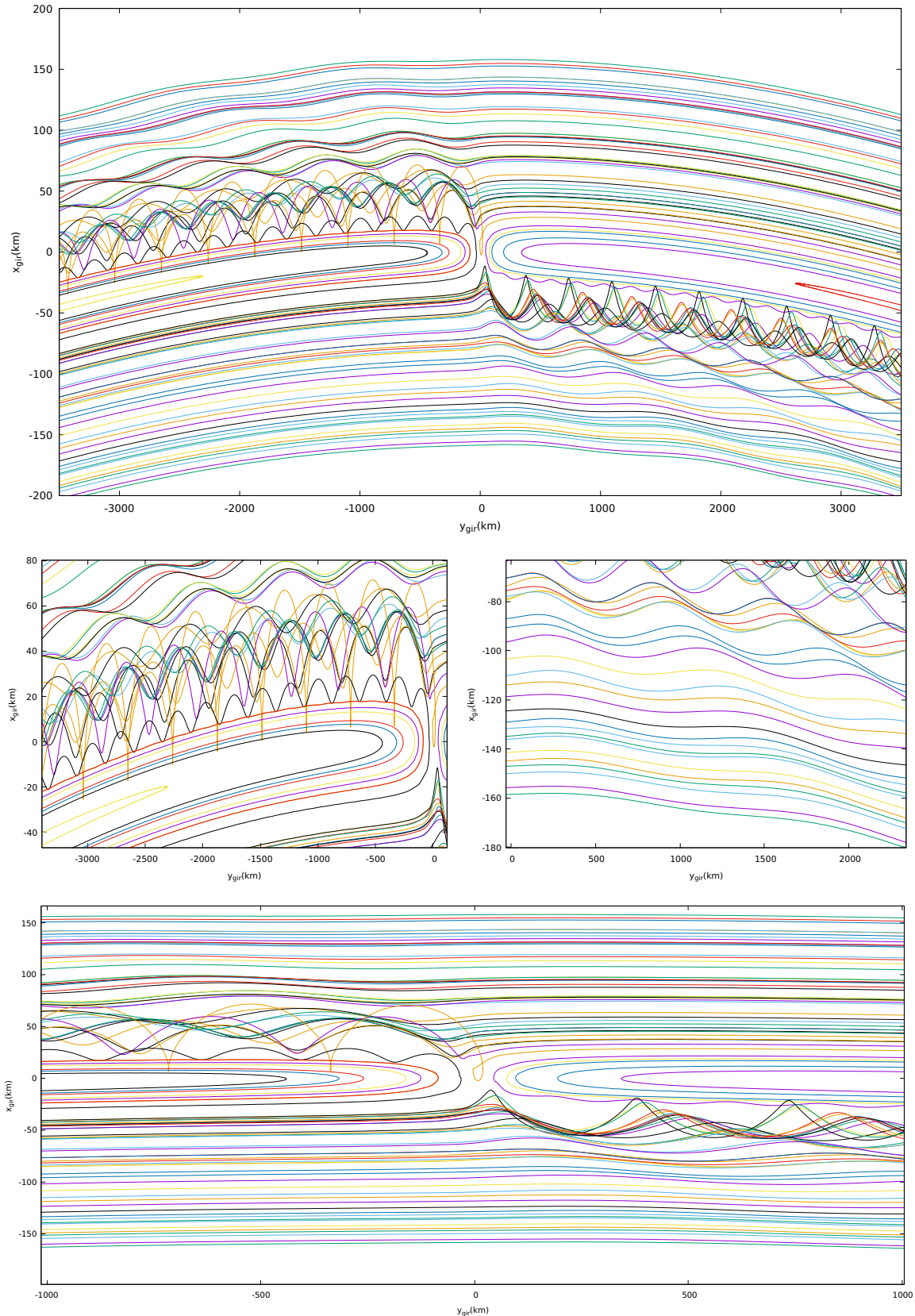


Figura 15 – Resultados da simulação de verificação do código para partículas sob os efeitos da força de radiação solar. O gráfico (a) contém a variação da excentricidade no tempo e o gráfico (b) traz a variação do semieixo maior Δa em km em relação a seu valor inicial. As linhas representam uma partícula de $1\mu\text{m}$.

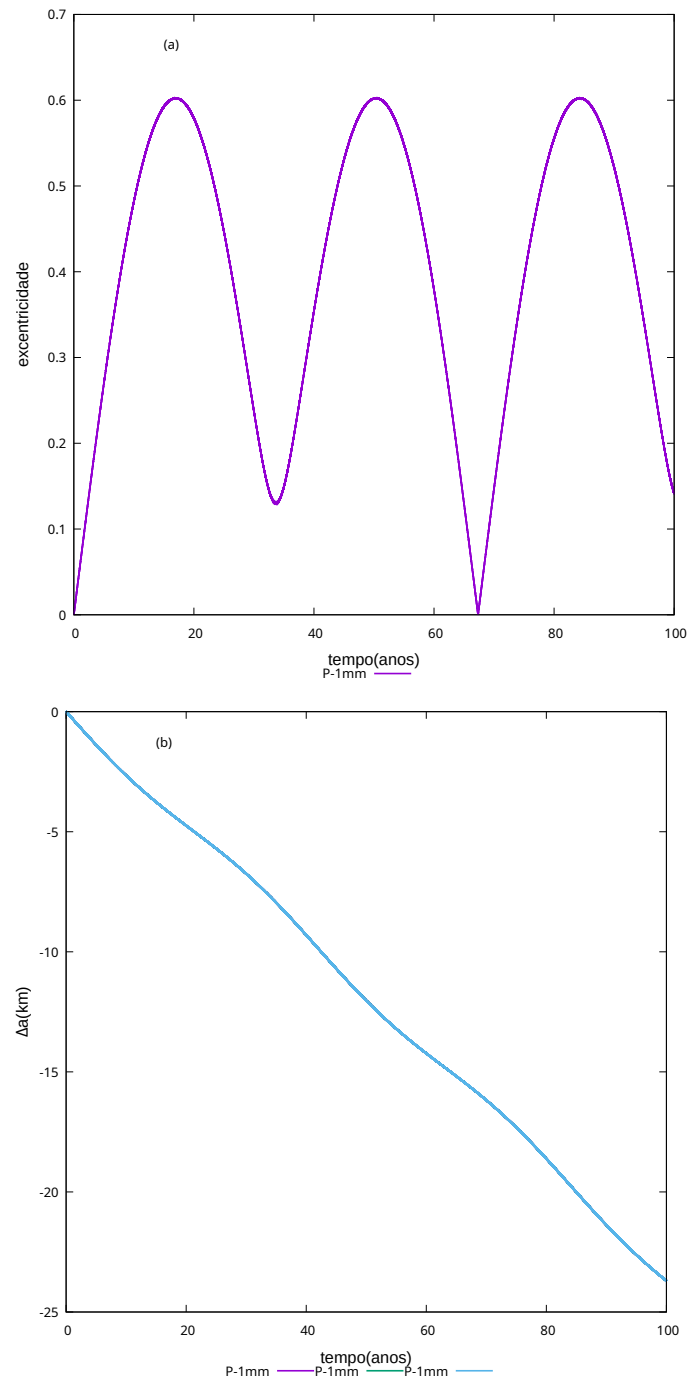
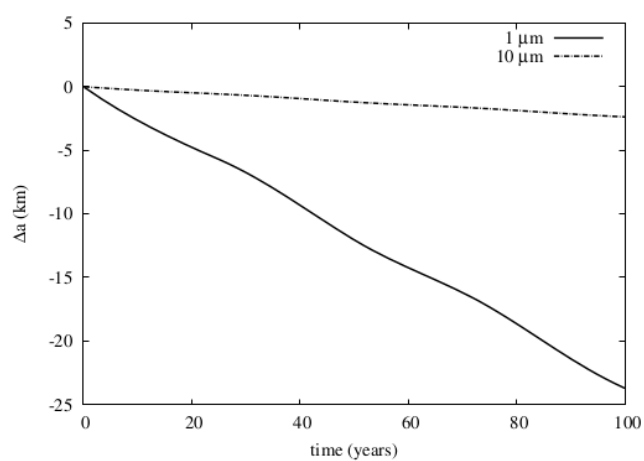


Figura 16 – Variação no tempo do semieixo maior devido ao arrasto do efeito de *Poynting-Robertson* segundo as simulações de Sfair e Winter (2009).



Fonte: Sfair e Winter (2009)

4.2 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS CONTENDO SATURNO, PAN E UM CONJUNTO DE PARTÍCULAS

Agora que validamos o código, podemos realizar as simulações numéricas para partículas localizadas na Falha de Encke. Vamos analisar os efeitos da não esfericidade de Saturno e a força de radiação solar em partículas no centro de cada *ringlet* da Falha de Encke. Para isso, iniciamos com quatro partículas orbitando o planeta Saturno e sofrendo perturbações gravitacionais devido ao satélite Pan e à força de radiação solar, com semieixo maior igual aos da Tabela 1, anomalia média igual a 15° e excentricidade, inclinação, argumento do pericentro, e longitude do nodo ascendente iguais a 10^{-6} . Realizamos essa simulação para partículas de raio de $1\mu\text{m}$, $25\mu\text{m}$, $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$ (lembrando que as partículas da Falha de Encke têm raio até $50\mu\text{m}$ (HEDMAN et al., 2013)).

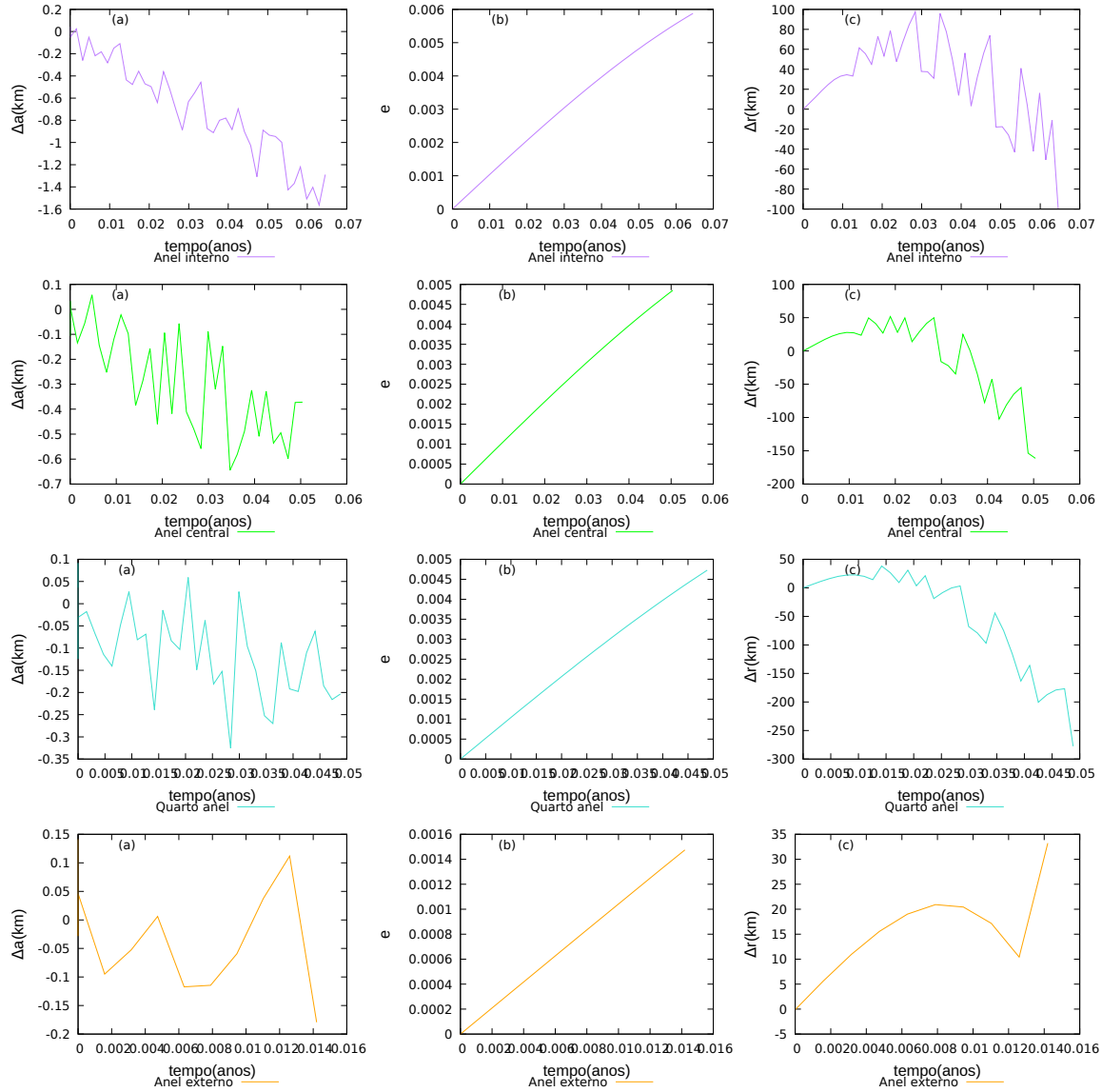
Os resultados das simulações numéricas estão representados da Figura 17 a Figura 20. Notamos que as partículas de $1\mu\text{m}$ (Figura 17) são quase imediatamente removidas da falha, seus raios orbitais decaem rapidamente devido a força de radiação solar e colidem com o limite inferior da falha em menos de 30 dias. Já as partículas de $25\mu\text{m}$ (Figura 18) do anel interno e quarto anel permanecem dentro da falha com excentricidade próxima a 3×10^{-4} . Notamos que elas não sofrem o decaimento de semieixo maior previsto pela teoria de acordo com a equação (37). A força gravitacional do satélite Pan e a não esfericidade de Saturno alteram esse movimento, as partículas não chegam a 15km de decaimento. A partícula central ao anel externo colide com a borda externa da falha sendo removida da simulação em menos de um ano (~ 292 dias). A partícula do anel central sempre colide com Pan nas quatro simulações.

É interessante compararmos os resultados para as partículas de $50\mu\text{m}$ (Figura 19) e $100\mu\text{m}$ (Figura 20), que representam o limite do tamanho observado das partículas da Falha de Encke e o dobro deste tamanho. Três partículas dos anéis sobrevivem durante todo o período da simulação numérica, porém, apesar de serem maiores, as partículas de $100\mu\text{m}$ parecem ser menos estáveis do que as de $50\mu\text{m}$ no anel central, apresentando maiores oscilações no semieixo maior. Também notamos que a partícula do anel central sobrevive por mais tempo até colidir com Pan no caso das partículas de $50\mu\text{m}$. Também é interessante apontarmos o decaimento do semieixo maior das partículas de $50\mu\text{m}$, os gráficos mostram decaimentos superiores a 10km, enquanto que a teoria prevê apenas 3,35km (equação (37)). Os efeitos gravitacionais de Pan e Saturno podem estar afetando a partícula de modo a aumentar este decaimento.

A Tabela 3 mostra a diferença destas distâncias vistas nos gráficos da Figura 19 e da Figura 20 para cada partícula para as simulações de $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$, respectivamente. Vemos as maiores diferenças na comparação dos raios orbitais e dos semieixos maiores, as partículas de $50\mu\text{m}$ apresentam maior diferença de raio orbital, enquanto as partículas de $100\mu\text{m}$ apresentem maior diferença em seus semieixos maiores.

As partículas de $50\mu\text{m}$ sofrem um decréscimo perceptível (Figura 19) no semieixo maior devido ao efeito da força de radiação solar. Enquanto essa força é pequena para partículas de raio de $100\mu\text{m}$, não sendo tão visível nos gráficos (Figura 20). É possível que as forças gravitacional e de radiação solar possam apresentar um equilíbrio de forma que as partículas sejam capazes de ficar estáveis em suas órbitas.

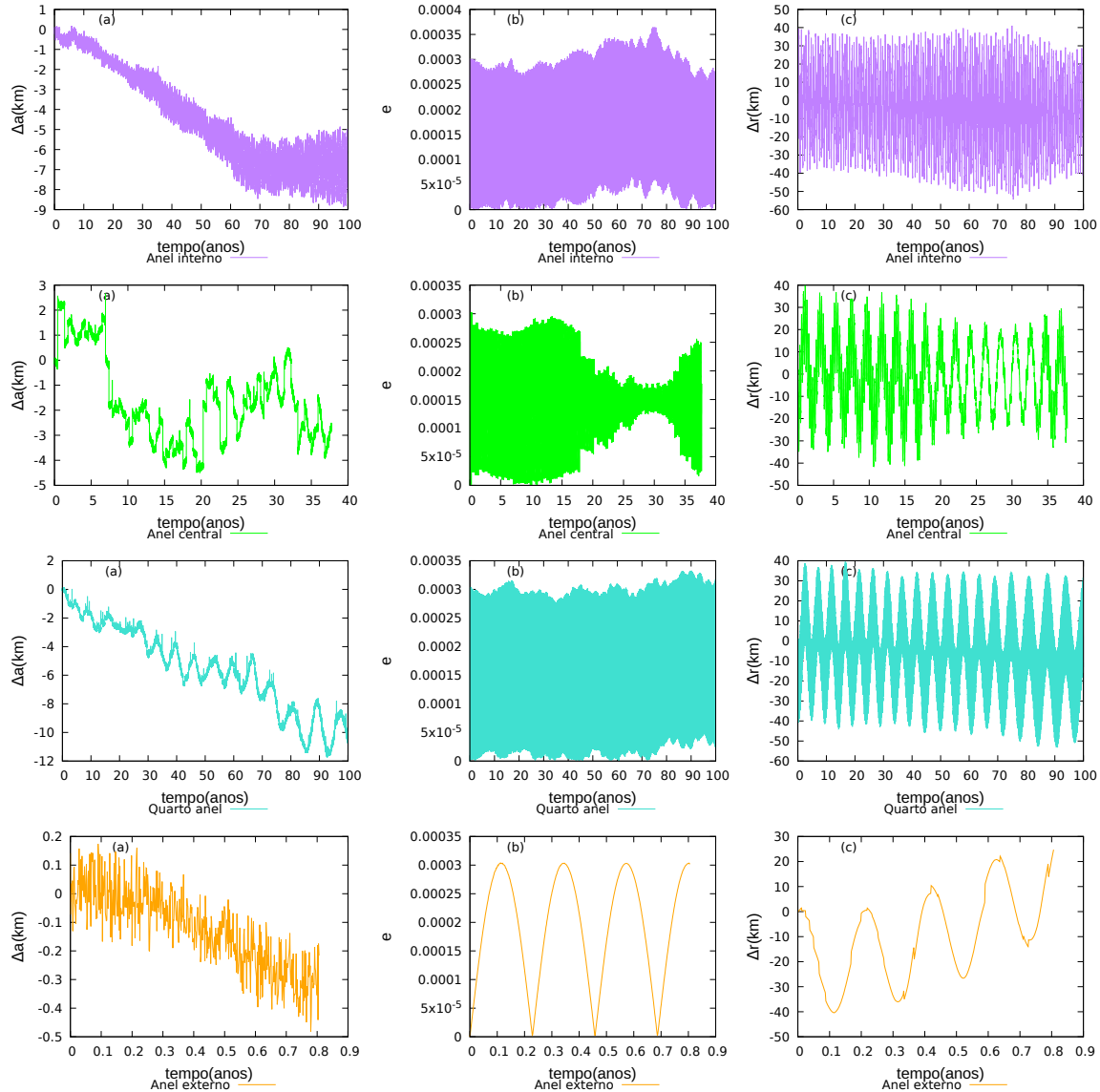
Figura 17 – Variação do semieixo maior, excentricidade e raio orbital de partículas de raio de $1\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $1\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 85352 anos, em 100 anos ela decai 167,55 km.



Vamos investigar essa hipótese a partir de um novo conjunto de simulações: vamos mover a Falha de Encke aumentando e diminuindo sua localização em 70000km para partículas de $50\mu\text{m}$ (os semieixos maiores para as novas simulações estão listados na Tabela 4, o satélite Pan também está presente na simulação e tem o mesmo semieixo maior que o anel central). Faremos isso para verificar como os efeitos das duas forças afetarão as órbitas das partículas.

A Figura 21 mostra os gráficos resultantes da simulação numérica que move o sistema da Falha de Encke em 70000 km distante de Saturno. Quando aumentamos a distância do sistema do corpo central, as partículas não permanecem no sistema por muito tempo. Como queremos analisar os efeitos das forças no sistema, vamos ignorar os limites da falha e examinar o que ocorre com as partículas quando essas sofrem os efeitos por um período de 100 anos.

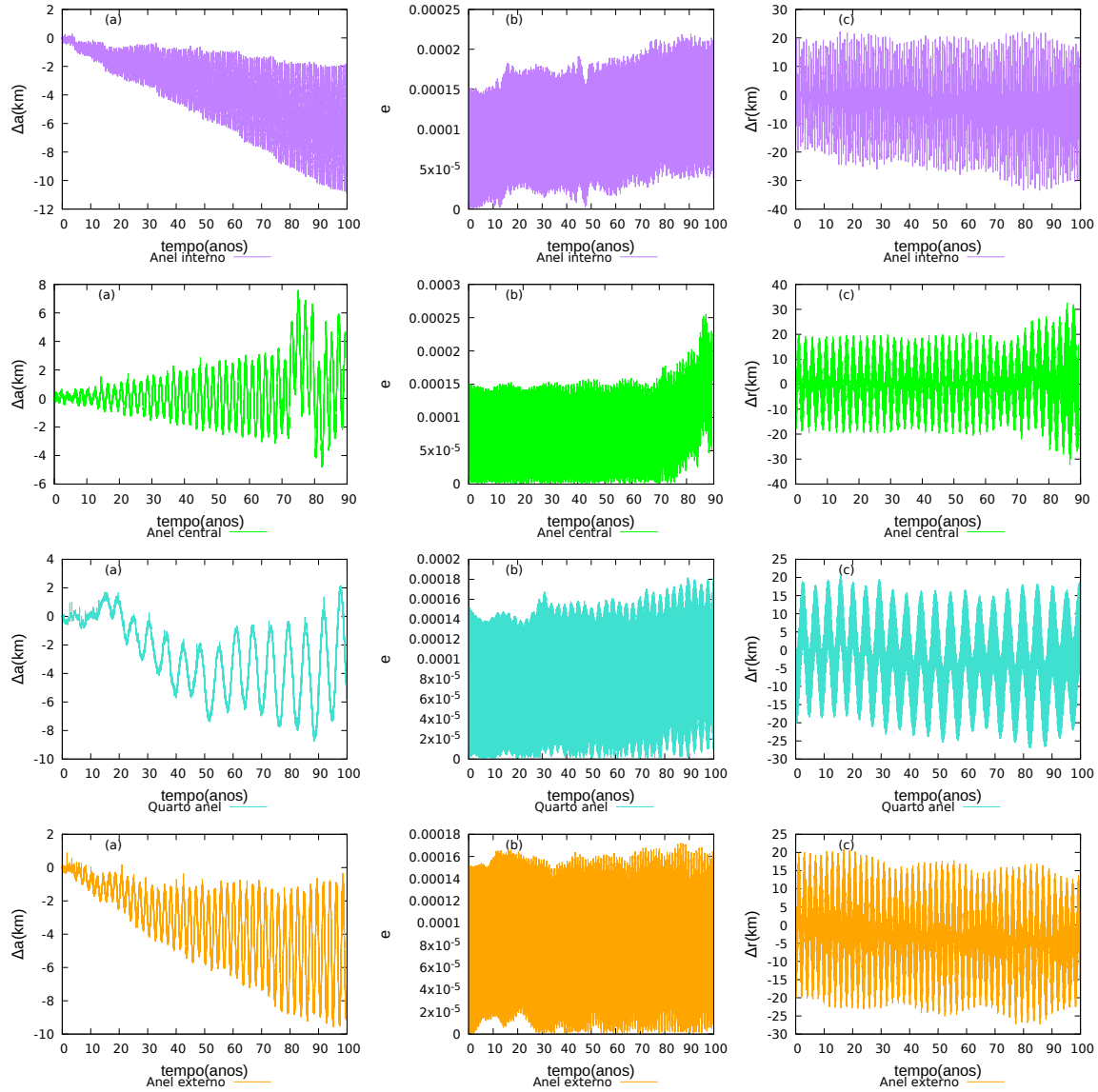
Figura 18 – Variação do semieixo maior, excentricidade e raio orbital de partículas de $25\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $25\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 213381 anos, em 100 anos ela decai 67,17 km.



A Figura 22 mostra a variação do semieixo maior, excentricidade e distância à Saturno durante um período de 100 anos. A variação da excentricidade é a maior entre as simulações realizadas até agora, chegando a $1. \times 10^{-3}$ no caso do anel central. Também notamos o decaimento do semieixo maior devido à força de radiação em todas as partículas, sendo interrompido devido a encontros próximos com o satélite Pan. Outro diferencial é o fato de que esta é a única simulação em que a partícula do anel central não colide com Pan.

Em seguida tentamos mover a partícula para mais perto do corpo central, porém a simulação não gerou dados úteis para a nossa análise uma vez que Pan colidiu com Saturno. No próximo capítulo analisaremos o anel principal do sistema de Júpiter, que apresenta similaridades aos anéis na Falha de Encke: partículas pequenas próximas ao corpo principal e a um satélite pequeno.

Figura 19 – Variação do semieixo maior, excentricidade, e raio orbital de partículas de $50\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $50\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 213381 anos, em 100 anos ela decai 3,35km.



Em suma, nesse capítulo simulamos quatro partículas no centro de cada um dos quatro anéis da Falha de Encke com raios de $1\mu\text{m}$, $25\mu\text{m}$, $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$ sendo perturbadas pelo satélite Pan, Saturno não esférico e a força de radiação solar. Em nossas simulações, as partículas de raio de $1\mu\text{m}$ são as únicas que são rapidamente removidas do sistema, no caso de partículas de $25\mu\text{m}$ a partícula do anel central colide com Pan em menos de 40 anos de simulação e a partícula do anel externo colide com a borda superior da falha em menos de um ano. As partículas de $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$ sobrevivem aos 100 anos de simulação, exceto as partículas do anel central que colidem com Pan. Porém a partícula do anel central de $50\mu\text{m}$ sobrevive por mais tempo que a de $100\mu\text{m}$. Outra observação importante é que nas simulações numéricas de $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$ a variação do raio orbital está dentro dos limites das larguras observadas dos anéis (Tabela 1), com exceção das partículas do anel externo.

Figura 20 – Variação do semieixo maior, excentricidade, e raio orbital de partículas de $100\mu\text{m}$. A partícula 1 está no centro do anel interno da Falha de Encke, a 2 no anel central, a 3 no quarto anel e a 4 no anel externo. As partículas são removidas quando ultrapassam os limites da falha ou quando colidem com o satélite Pan. O tempo de decaimento do semieixo maior de uma partícula de raio de $100\mu\text{m}$ segundo a equação (37) é de 8535205 anos, em 100 anos ela decai 1,67km.

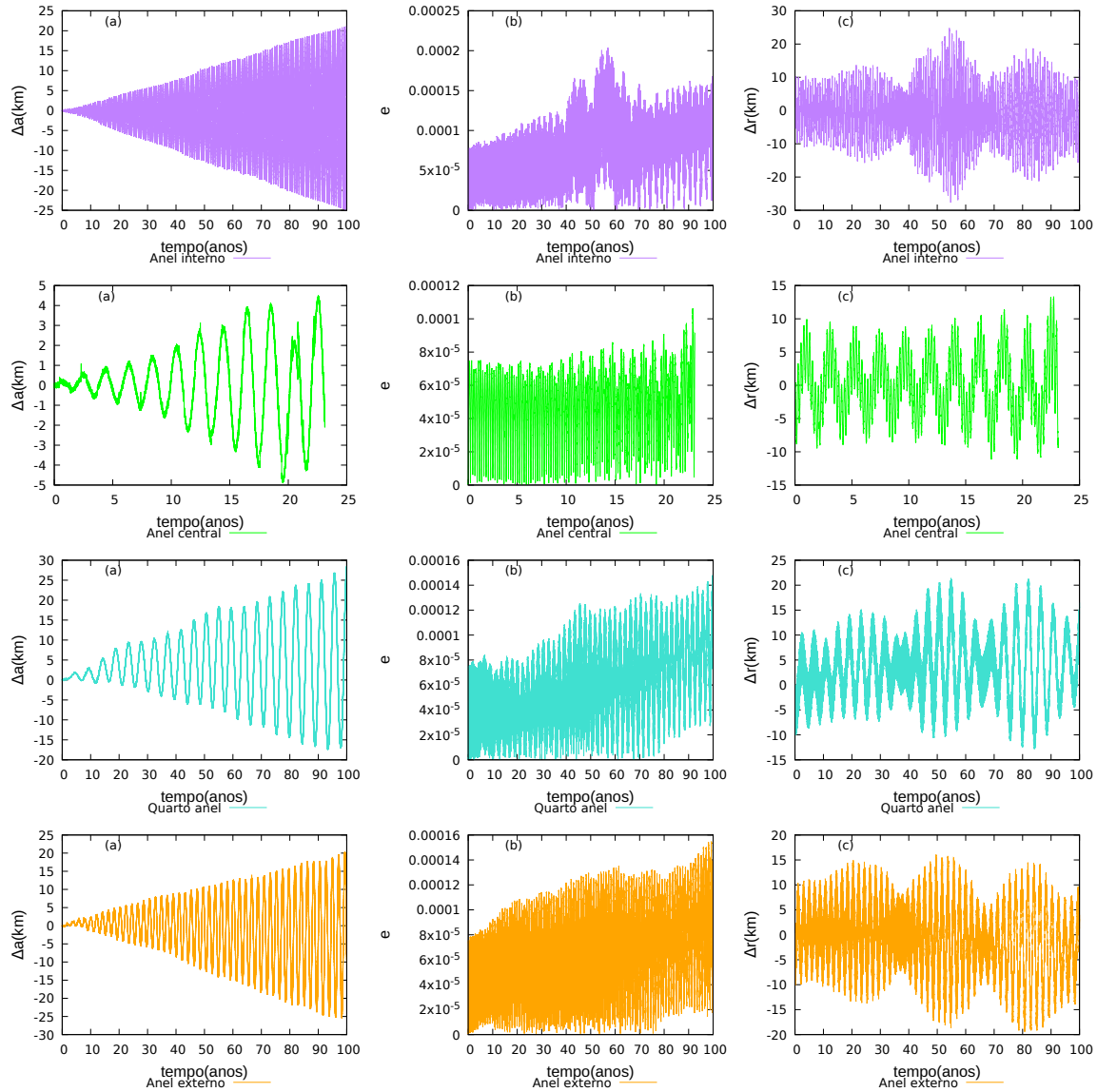


Tabela 3 – Diferença da distância de Saturno (Δr), semieixo maior (Δa), e excentricidade (Δe) para partículas de $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$.

Anel	Δr ($50\mu\text{m}$)	Δr ($100\mu\text{m}$)	Δa ($50\mu\text{m}$)	Δa ($100\mu\text{m}$)	Δe ($50\mu\text{m}$)	Δe ($100\mu\text{m}$)
interno	50 km	45 km	12 km	45 km	2×10^{-4}	2×10^{-4}
central	60 km	20 km	12 km	9 km	$2,5 \times 10^{-4}$	1×10^{-4}
quarto	45 km	35 km	10 km	40 km	$1,8 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-4}$
externo	45 km	35 km	10 km	45 km	$1,6 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-4}$

Tabela 4 – Novos semieixos maiores para as novas simulações, os demais elementos orbitais permanecem os mesmos.

Anel	original	-70000km	+70000km
interno	133484 km	63484 km	203484 km
central	133584 km	63584 km	203584 km
quarto	133680 km	63680 km	203680 km
externo	133720 km	63720 km	203720 km

Figura 21 – Variação dos elementos orbitais de cada partícula de $50\mu\text{m}$ durante a simulação da Falha de Encke movida +70000 km. A partícula 1 está localizada no centro do anel interno, a 2 no anel central, 3 no quarto anel, e 4 no anel externo.

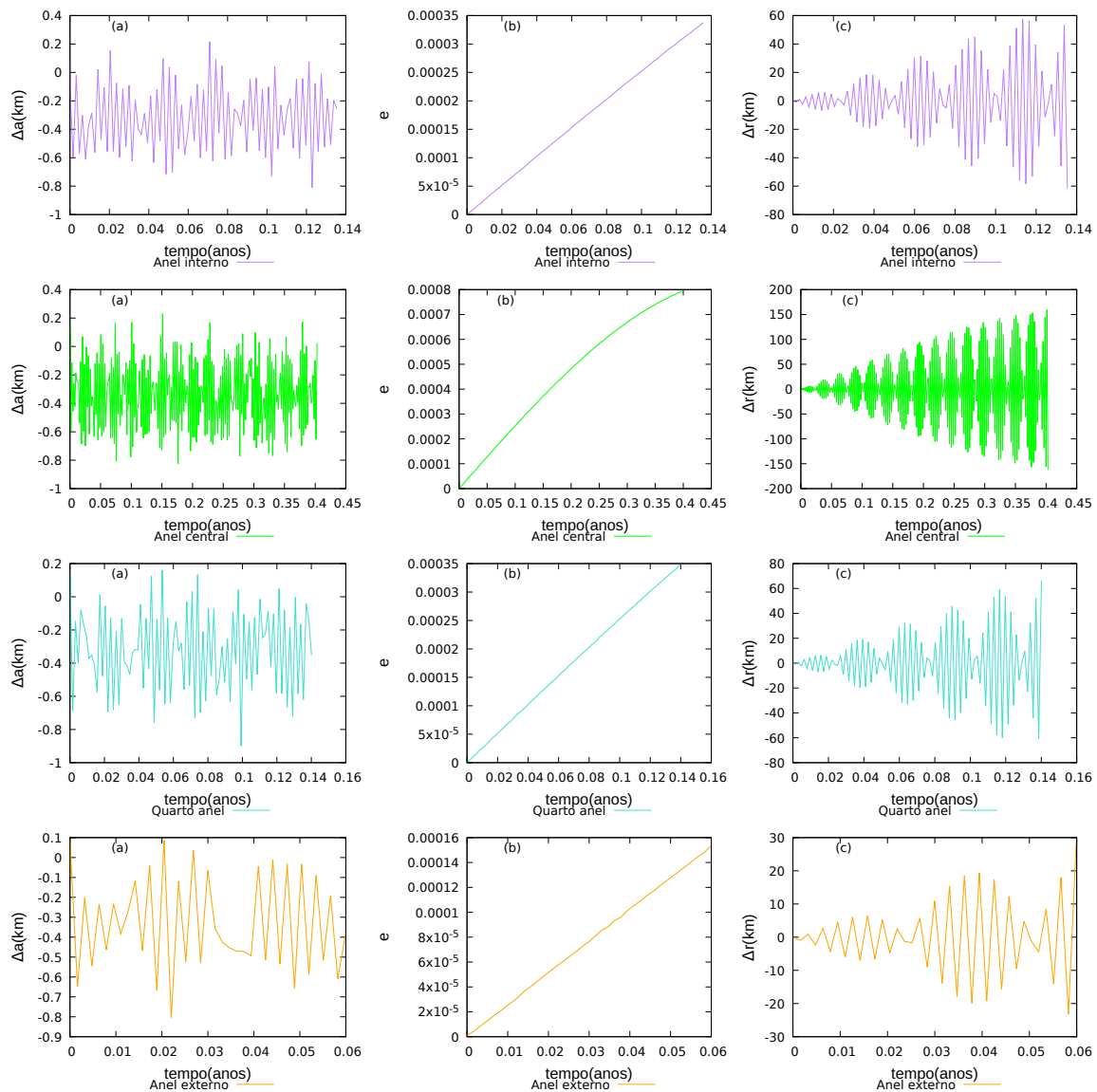
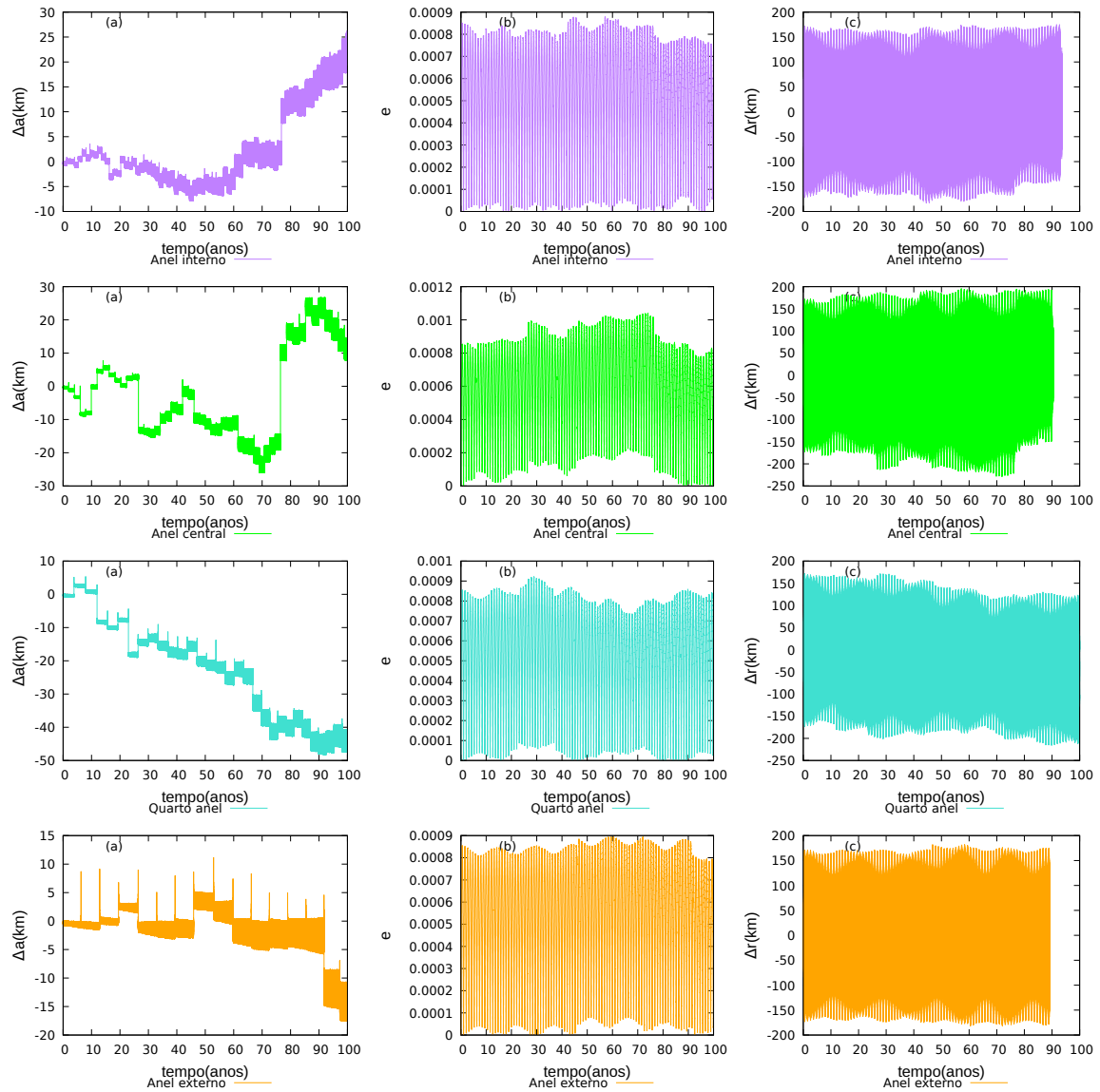


Figura 22 – Variação dos elementos orbitais da Falha de Encke movida para +70000 km para 100 anos de simulação numérica.



5 ANEL PRINCIPAL DE JÚPITER

Para a próxima etapa de nosso trabalho, estudaremos a força de radiação solar e gravitacional em outro sistema: as partículas localizadas no anel principal de Júpiter. Esse sistema também possui partículas orbitando um planeta não esférico, pequenas o suficiente para serem perturbadas pela força de radiação solar. Pater et al. (2017) descrevem que esses anéis foram observados pela primeira vez pela sonda Voyager 1 em 4 de março de 1979. Foi determinado que o sistema de anéis do planeta é composto por quatro estruturas principais: o anel principal, o *Halo*, e os dois anéis "*Gossamer*". A Tabela 5 apresenta algumas das características dos anéis e a Figura 23 mostra um esquema com os anéis e os satélites internos de Júpiter.

Tabela 5 – Sistema de Anéis de Júpiter.

	<i>Halo</i>	Anel principal	Anel de Amalthea	Anel de Thebe	Extensão de Thebe
Localização (km)	100000-122400	122400-129100	122400-181350	122400-221900	221900-270000
Largura vertical (km)	$\sim 5 \times 10^4$	30-100	~ 2300	~ 8500	9000

Fonte: Pater et al. (2017)

Os anéis são principalmente compostos por poeira resultante de impactos meteóricos nos 4 satélites de Júpiter: Thebe, Amalthea, Metis e Adrastea; assim como colisões de corpos no anel principal. Esses objetos ainda não foram observados, mas suas existências podem ser inferidas indiretamente devido à presença dos próprios anéis, e diretamente através de medições da curva de fase e espectro dos anéis.

O anel principal é o anel notável do sistema, há indícios de que ele contenha mais material macroscópico em seu interior em relação aos outros anéis. Com largura de aproximadamente 7000km e está localizado a 125750km de Júpiter.

O *Halo* é um toro de material interior ao satélite Metis. A profundidade óptica do anel diminui com a distância a Júpiter, contendo brilho mais intenso próximo ao satélite. Ele desaparece por volta de 101200km de Júpiter.

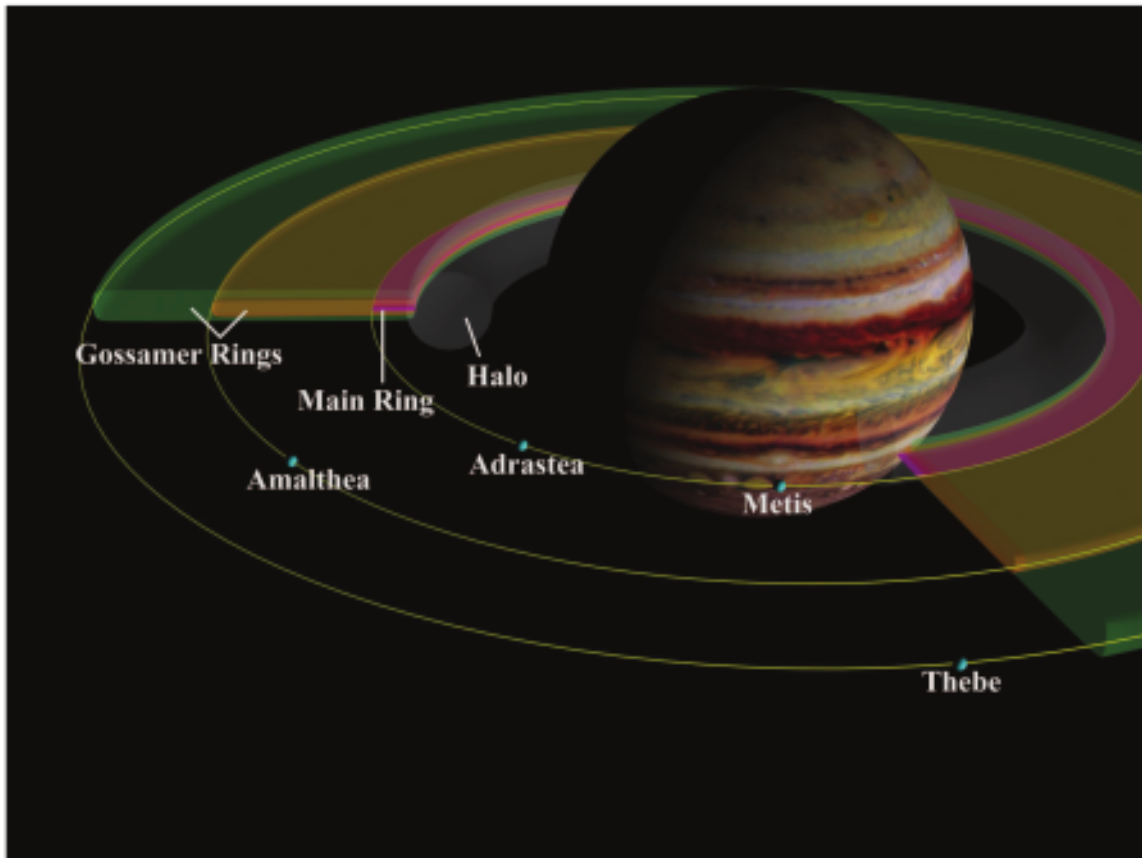
Finalmente, temos os anéis *Gossamer* que são as estruturas mais tênues dos anéis de Júpiter, sendo divididos em duas partes: os anéis de Amalthea e Thebe. O primeiro possui pouco brilho sendo quase uniforme, o outro é ainda mais tênue, mas possui largura vertical superior ao anterior. O primeiro anel se sobrepõe ao anel de Amalthea, além de se estender externo à órbita do satélite Thebe.

5.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: ANEL PRINCIPAL DE JÚPITER

Continuaremos a análise dos efeitos da força de radiação solar e da não esfericidade do corpo central simulando numericamente partículas localizadas no anel principal de Júpiter. Neste sistema as partículas são pequenas o suficiente ($< 1\mu\text{m}$ a $18\mu\text{m}$ (BROOKS et al., 2004)) para serem afetadas pela força de radiação solar. Assumiremos também os coeficientes gravitacionais não nulos cujos valores estão apresentados na Tabela 6.

Realizaremos as simulações considerando um sistema contendo Júpiter e 68 partículas-teste, espaçadas a cada 100km nos limites do anel central (Tabela 5), sendo perturbadas pela força de

Figura 23 – Esquema do sistema de anéis de Júpiter. Na figura vemos os quatro anéis de Júpiter: o anel principal, o *Halo*, e os dois anéis "*Gossamer*"; além dos satélites: Métis, Adrastea, Amalthea e Thebe.



Fonte: Pater et al. (2017)

Tabela 6 – Tabela apresentando os valores dos coeficientes gravitacionais J_2 , J_4 e J_6

J_2	$14696,43 \times 10^{-6}$
J_4	$-596,05 \times 10^{-6}$
J_6	$35,15 \times 10^{-6}$

Fonte: Hubbard e Militzer (2016)

radiação solar, a não esfericidade do corpo central e o satélite Métis (Tabela 7), satélite interior ao anel central. Neste sistema as partículas são menores e estão mais próximas ao corpo central em relação ao caso anterior, a Falha de Encke. Realizaremos quatro simulações numéricas por um período de 100 anos, uma para partículas de raios de $1\mu\text{m}$ (Figura 24), $5\mu\text{m}$ (Figura 25), $10\mu\text{m}$ (Figura 26) e $20\mu\text{m}$ (Figura 27).

Analizando as variações dos elementos orbitais verificamos comportamentos similares aos observados na Falha de Encke, partículas de $1\mu\text{m}$ são mais afetadas pela força de radiação solar (note o decaimento do semieixo maior na Figura 24). O efeito dessa força diminui conforme os raios (tamanhos) das partículas aumentam.

Uma partícula é removida quando: i) existem colisões físicas com Métis, ii) há colisão com a borda superior do anel principal em 129100 km e com a borda inferior do *Halo* localizada em 100000 km.

Figura 24 – Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $1\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.

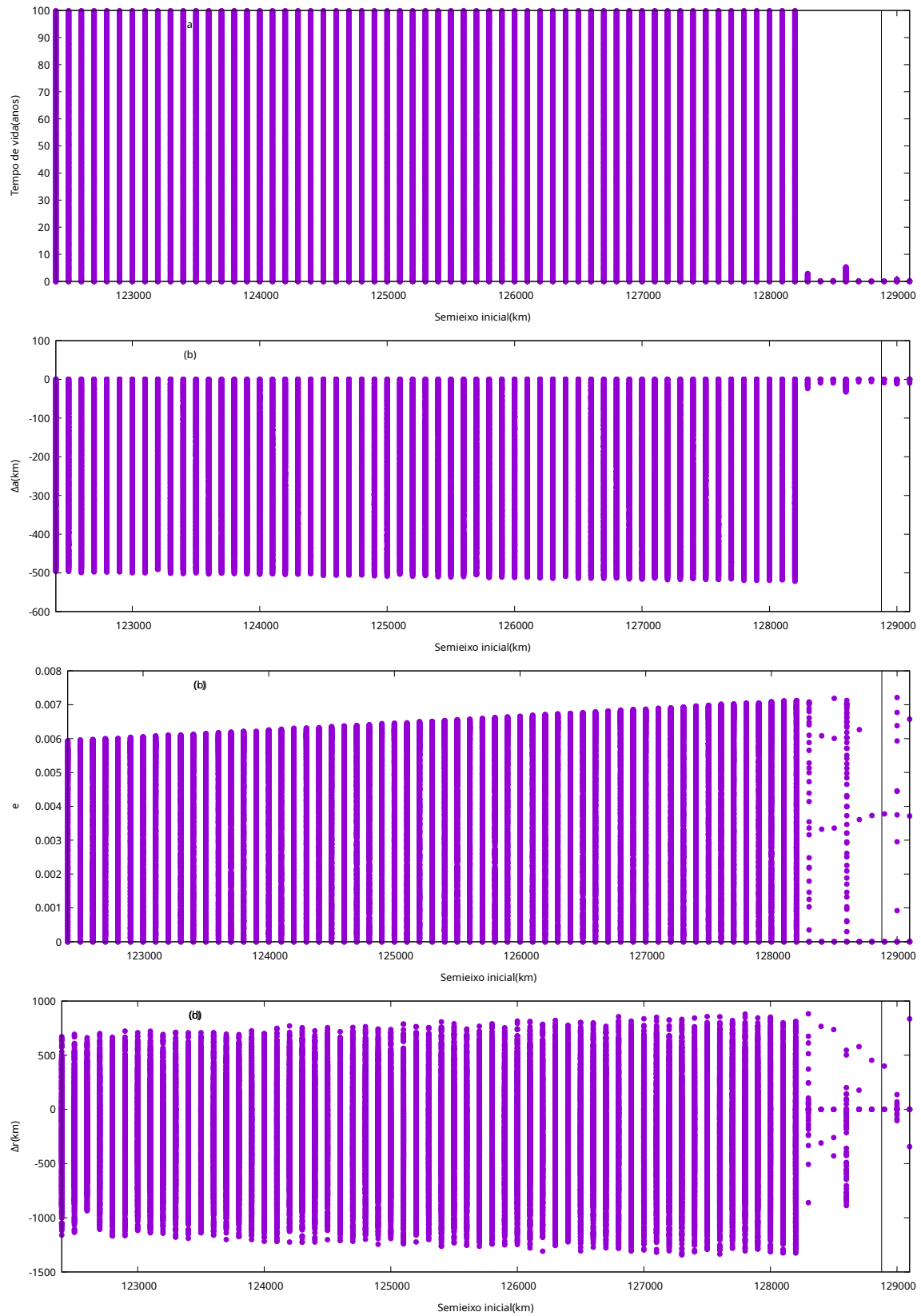


Figura 25 – Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $5\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.



Figura 26 – Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $10\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.



Figura 27 – Variação dos elementos orbitais de partículas interiores ao anel principal de Júpiter de raio $20\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.

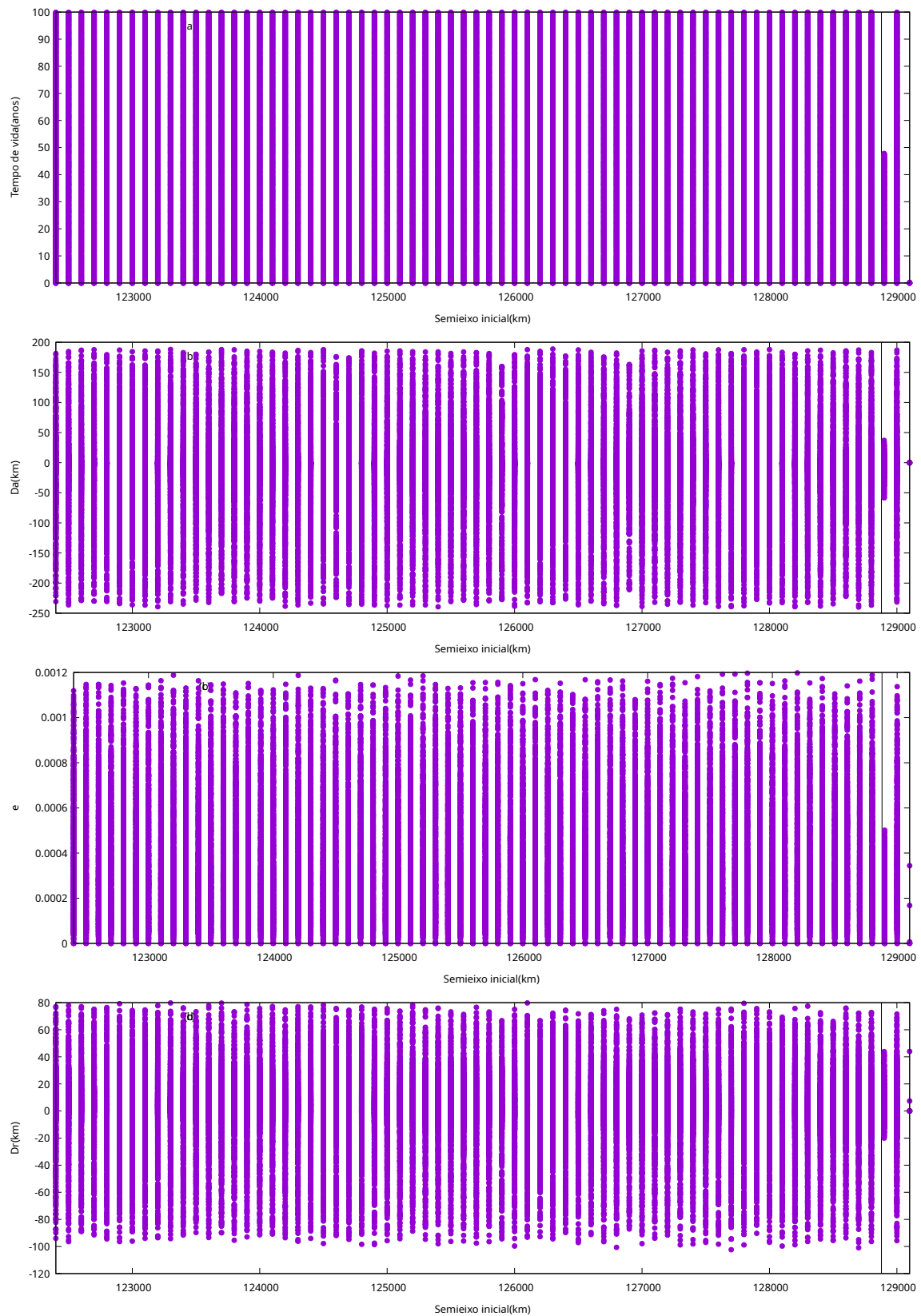


Tabela 7 – Tabela apresentando os elementos orbitais de Métis: semieixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (I), longitude do nodo ascendente (Ω), argumento do pericentro (ω), e anomalia média (M); assim como raio (R) e massa (m).

$a(\text{km})$	e	$I(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$M(^{\circ})$	$R(\text{km})$	$m \text{ (kg)}$
128878,7	$6,4878 \times 10^{-3}$	2,21587	337,65	284,293	6,2098	21,5	$3,7458 \times 10^{16}$

Fonte: Nasa

Tabela 8 – Tabela contendo o percentual de colisões durante as simulações de partículas de raios de $1\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ e $20\mu\text{m}$ do anel principal de Júpiter.

Tamanho da partícula (μm)	1	5	10	20
Percentual de colisões	13,2	4,41	2,94	2,94
Percentual de colisões com Métis	0	1,47	1,47	1,47
Percentual de colisões com a borda superior do anel principal de Júpiter	13,2	2,94	1,47	1,47

Tabela 9 – Tabela contendo o percentual de colisões durante as simulações de partículas de raios de $1\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ e $20\mu\text{m}$ do anel principal de Júpiter localizadas próximas ao satélite Métis.

Tamanho da partícula (μm)	1	5	10	20
Percentual de colisões	100	31,83	18,18	9,08
Percentual de colisões com Métis	13,64	13,64	9,09	4,54
Percentual de colisões com a borda superior do anel principal de Júpiter	86,36	18,19	9,09	4,54

Quando simulamos o anel principal de Júpiter, 9 partículas de $1\mu\text{m}$ são removidas do sistema, colidindo com a borda superior do anel; para as partículas de $5\mu\text{m}$ duas colidem com a borda superior do anel principal e uma colide com Métis. Nos casos de partículas de $10\mu\text{m}$ e $20\mu\text{m}$ de raio uma partícula excede a borda do anel principal e uma colide com Métis. A Tabela 8 apresenta o percentual de colisões para cada tamanho de partícula.

É de nosso interesse analisarmos a área próxima ao satélite Métis para observar o efeito do satélite nas partículas mais próximas. Para isso, usaremos as últimas simulações como guia, a Figura 24 mostra que partículas com semieixo maior inicial maior que 128300 km são removidas do anel principal. Na nossa próxima simulação, analisaremos 21 partículas espaçadas a cada 40 km sendo perturbadas por Júpiter não-esférico, Métis e a força de radiação solar. Os resultados dessas novas simulações estão apresentados nas Figura 28 a Figura 31.

Examinando a região próxima ao satélite Métis, notamos que as partículas de $1\mu\text{m}$ são todas removidas da área antes dos 3 anos. As partículas com semieixo maior inicial de 129020 km, 128540 km e 128780 km colidem com Métis. Entre as partículas de $5\mu\text{m}$, aquelas localizadas em 128860 km, 128900 km, e 128820 km colidem com o satélite, e quatro outras partículas colidem com a borda superior do anel. No caso das partículas de $10\mu\text{m}$, aquelas localizadas em 128900 km e 128940 km colidem com Métis e duas partículas são removidas do sistema. Finalmente, as partículas de $20\mu\text{m}$ sofrem apenas 2 remoções: uma colisão com Métis e uma ultrapassagem de borda. A Tabela 9 traz os percentuais de colisões das simulações.

Em conclusão, as partículas de $1\mu\text{m}$ apresentam maior mobilidade dentro do anel principal de Júpiter, o satélite Métis desloca essas partículas para além do anel principal (Figura 28), enquanto a

Figura 28 – Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis com raio de $1\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.

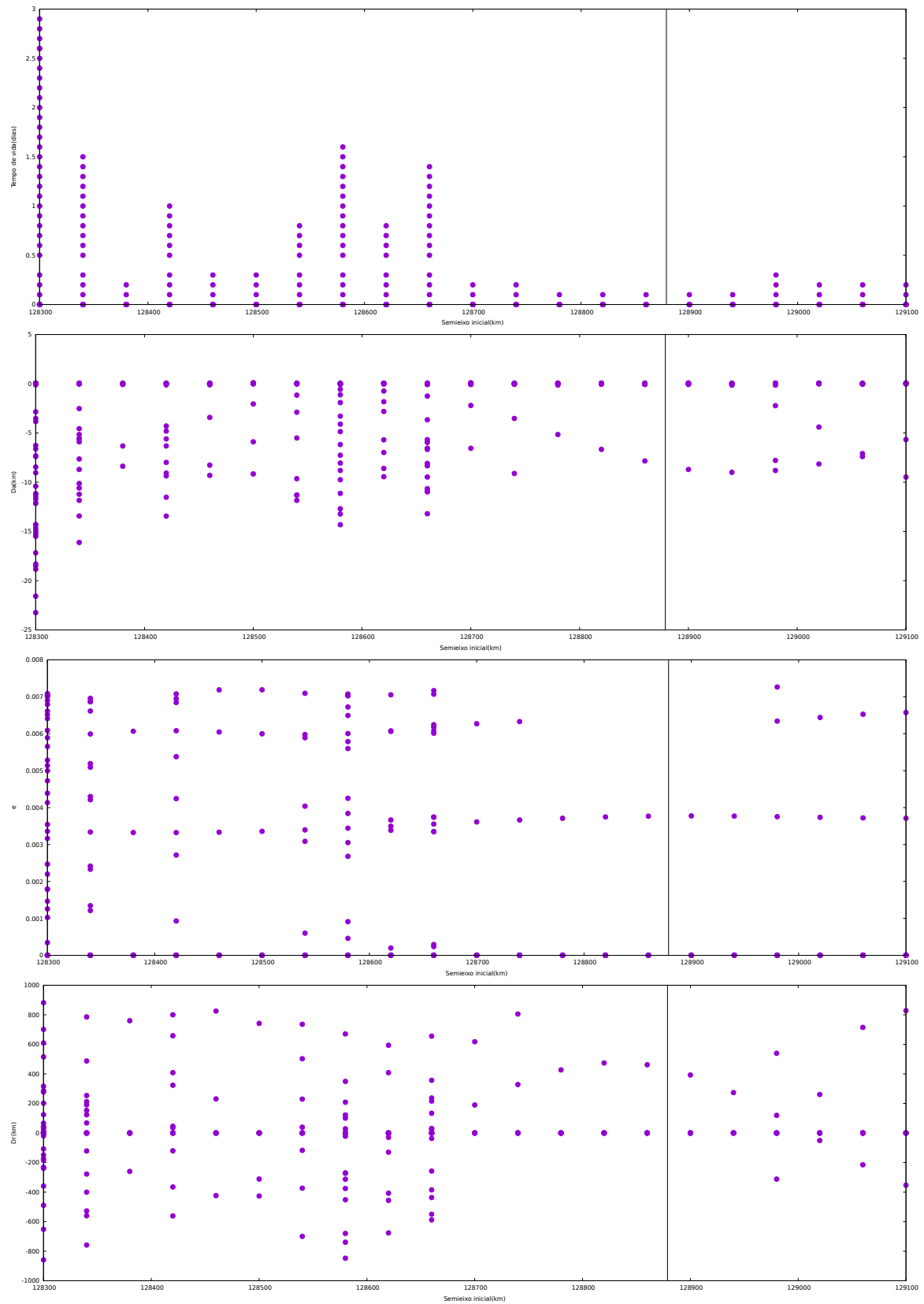


Figura 29 – Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis de raio $5\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.

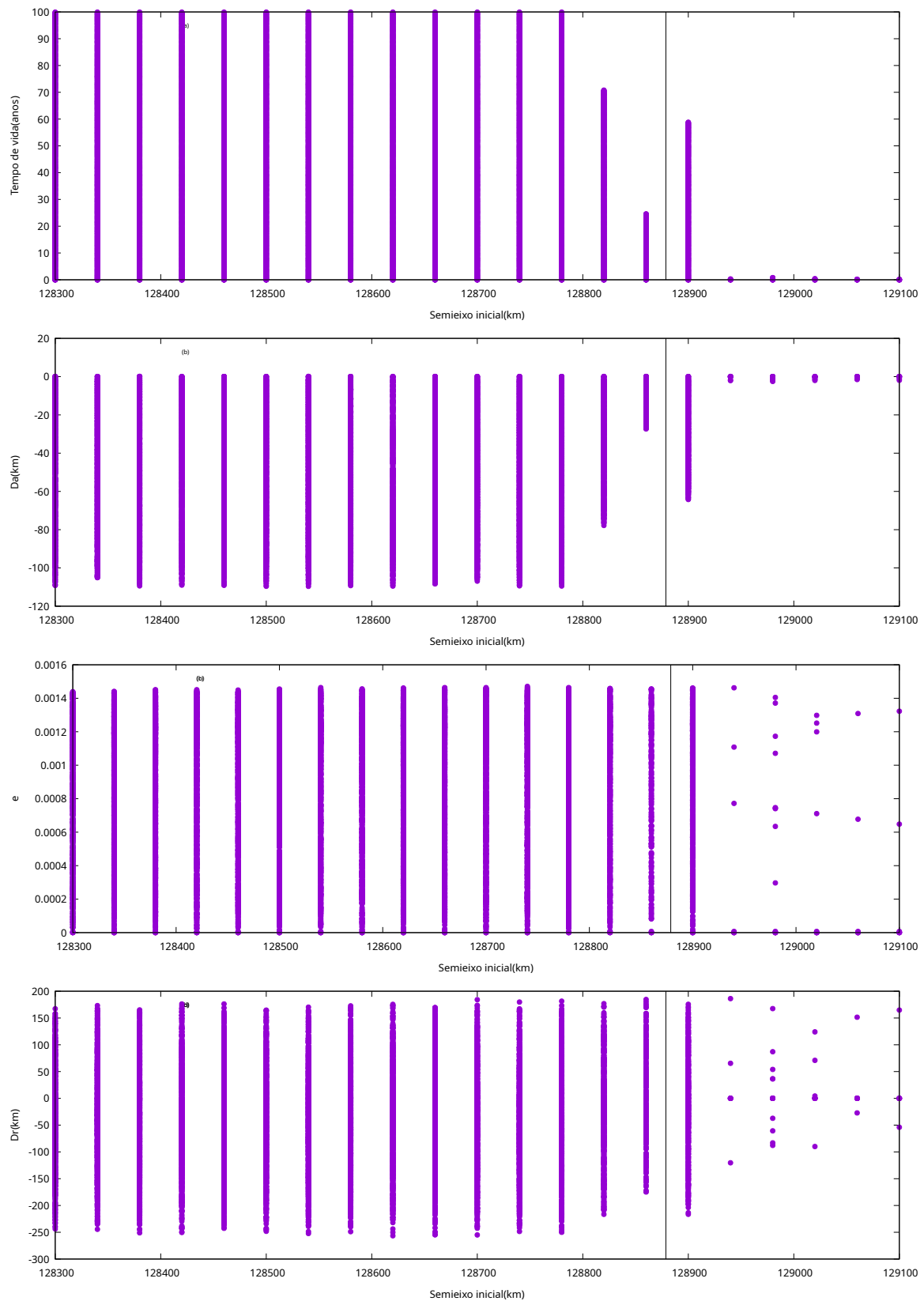


Figura 30 – Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis de raio $10\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.



Figura 31 – Variação dos elementos orbitais de partículas próximas a Métis de raio $20\mu\text{m}$. O eixo x fornece o semieixo maior inicial das partículas e a linha preta representa a localização do satélite Métis.



força de radiação solar as leva para o *Halo*, como vemos na variação de raio orbital de partículas de semieixo inicial de até 123400km na Figura 24. As partículas de tamanhos maiores tem um pouco de mobilidade, mas não se comparam a instabilidade das partículas de $1\mu\text{m}$.

6 DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Nesta dissertação de mestrado analisamos os efeitos da não esfericidade do corpo central e da força de radiação solar para partículas de um anel perturbadas por um satélite através de simulações numéricas utilizando o integrador *REBOUND*. Inicialmente, analisamos o sistema de anéis localizados na Falha de Encke, no interior do anel A de Saturno. Dadas as similaridades (anéis formados por pequenas partículas afetadas pela força de radiação solar e um planeta não esférico e um satélite) desses anéis com o anel principal de Júpiter, estudamos o comportamento das partículas localizadas no anel principal sob a influência de Métis, da não esfericidade de Júpiter e da pressão de radiação solar.

Na Falha de Encke, os resultados das simulações numéricas contendo partículas de raio igual a $50\mu\text{m}$, observado por Hedman et al. (2013), apresentam maior estabilidade (Figura 19), ou seja, as partículas permanecem no interior da Falha de Encke e mantêm uma variação do raio orbital de forma que a partícula não saí dos limites das larguras de seus anéis. As demais partículas são menos estáveis que as de $50\mu\text{m}$. As partículas com raio de $1\mu\text{m}$ são removidas rapidamente (menos de 30 dias) da Falha de Encke devido a força de radiação solar, entre as de $25\mu\text{m}$ duas partículas são removidas. Porém a partícula do anel externo é a única que permanece instável tanto para partículas de $50\mu\text{m}$ quanto para aquelas de $100\mu\text{m}$. Lembramos que o anel externo tem largura de 20km (HEDMAN et al., 2013) enquanto nas simulações as partículas de $50\mu\text{m}$ apresentam variação de raio orbital de 45km, e as de 100km apresentam variação de 35km.

No anel principal de Júpiter as partículas são menores ($1\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ e $20\mu\text{m}$) e, portanto mais afetadas pela força de radiação solar. Vemos que partículas próximas a borda inferior do anel principal têm seus raios orbitais diminuídos de forma que saem de seu anel de origem e passam a adentrar o *Halo*. Na extremidade mais distante do anel, o satélite Métis atua gravitacionalmente de forma que as partículas menores do anel principal são movidas para os anéis *Gossamer*. Os percentuais de colisão na área próxima ao satélite (Tabela 9) são altos, chegando a 100% no caso de partículas de $1\mu\text{m}$.

REFERÊNCIAS

- BECKER, T. M. et al. Characterizing the particle size distribution of saturn's a ring with cassini uvis occultation data. **Icarus**, Elsevier, v. 279, p. 20–35, 2016.
- BROOKS, S. M. et al. The size distribution of jupiter's main ring from galileo imaging and spectroscopy. **Icarus**, Elsevier, v. 170, n. 1, p. 35–57, 2004.
- BURNS, J. A.; LAMY, P. L.; SOTER, S. Radiation forces on small particles in the solar system. **Icarus**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 1–48, 1979.
- CUZZI, J.; FILACCHIONE, G.; MAROUF, E. The rings of saturn. 2018.
- FERRARI, C.; BRAHIC, A. Arcs and clumps in the encke division of saturn's rings. **Planetary and space science**, Elsevier, v. 45, n. 9, p. 1051–1067, 1997.
- GONÇALVES, M. A. F. **O efeito do satélite Pan nos anéis da Falha de Encke**. 110 p. Monografia (Dissertação (Mestrado em Física)) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2001.
- HEDMAN, M. M. et al. Of horseshoes and heliotropes: Dynamics of dust in the encke gap. **Icarus**, Elsevier, v. 223, n. 1, p. 252–276, 2013.
- HORÁNYI, M. et al. Diffuse rings. In: **Saturn from Cassini-Huygens**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 511–536.
- HUBBARD, W. B.; MILITZER, B. A preliminary jupiter model. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 820, n. 1, p. 80, 2016.
- MIGNARD, F. Effects of radiation forces on dust particles in planetary rings. In: **IAU Colloq. 75: Planetary Rings**. [S.l.: s.n.], 1984. p. 333–366.
- MUÑOZ-GUTIÉRREZ, M. A. et al. Long-term dynamical evolution of pallene (saturn xxxiii) and its diffuse, dusty ring. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 511, n. 3, p. 4202–4222, 2022.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.
- OSTERBROCK, D. E.; CRUIKSHANK, D. P. Je keeler's discovery of a gap in the outer part of the a ring. **Icarus**, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 165–173, 1983.
- PATER, I. de et al. The rings of jupiter. **arXiv preprint arXiv:1707.00806**, 2017.
- REIN, H.; SPIEGEL, D. S. Ias15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 446, n. 2, p. 1424–1437, 2015.
- SFAIR, R.; WINTER, S. G. Orbital evolution of the μ and ν dust ring particles of uranus. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 505, n. 2, p. 845–852, 2009.
- SHOWALTER, M. R. et al. Satellite “wakes” and the orbit of the encke gap moonlet. **Icarus**, Elsevier, v. 66, n. 2, p. 297–323, 1986.
- SOUSA, R. R. d. A instabilidade na evolução dinâmica do sistema solar: considerações sobre o tempo de instabilidade e a formação dinâmica do cinturão de kuiper. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2019.