RESSALVA

Atendendo solicitação do autor, o texto completo desta tese será disponibilizado somente a partir de 30/11/2014.

Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Ruikson Sillas de Oliveira Nunes

Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon

São José do Rio Preto

2013

Ruikson Sillas de Oliveira Nunes

Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração- Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

São José do Rio Preto

2013

Ruikson Sillas de Oliveira Nunes

Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração- Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Waldemar Donizete Bastos
Professor Livre Docente - UNESP - Rio Preto
Orientador

Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular - UNESP - Rio Preto

Juliana Conceição Precioso Pereira
Professora Doutora - UNESP - Rio Preto

Olímpio Hiroshi Miyagaki
Professor Titular - UFJF- Juiz de Fora

Juan Amadeo Soriano Palomino
Professor Doutor - UEM- Maringá

São José do Rio Preto

28 de janeiro de 2013

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade de concluir mais uma etapa em minha formação acadêmica.

Também agradeço imensamente ao professor Waldemar Donizete Bastos por sua dedicada orientação e por sua paciência diante de minhas limitações.

Deixo aqui os meus agradecimentos a minha família, em especial a minha mãe (Marta) e minha esposa (Daniela) que sempre me apoiaram nesta caminhada.

Agradeço à banca examinadora: Waldemar Donizete Bastos, Dimitar Kolev Dimitrov, Juliana Conceição Precioso Pereira, Holímpio Hiroshi Miyagaki, Juan Amadeo Soriano Palomino, pela dedicação em avaliar este trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce que direto ou indiretamente contribuíram em minha formação, em especial agradeço ao professor Cláudio Aguinaldo Buzzi por ter me acolhido no início de minhas atividades no Ibilce.

Aos amigos de caminhada na pós-graduação, em especial Oyran(o chifrão), Rodiak e Eduardo. Ao meus amigos Domingos(Bullon) e Tiago por suas divertidas companhia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"A vida não entrega nada ao mortal se não em troca de grandes esforços."

(Horácio)

Resumo

Neste trabalho resolvemos o problema de controlabilidade exata na fronteira para a equação linear de Klein-Gordon em domínios limitados Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira suave por partes e sem cuspides. Para dados iniciais em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ obtemos controle do tipo Neuman, de quadrado integrável, atuando em toda a fronteira do domínio em tempo próximo ao diâmetro de Ω.

Inicialmente provamos que a energia da solução do problema de Cauchy para a referida equação decai localmente numa taxa polinomial. Em seguida, estendendo a solução do problema de Cauchy para tempo complexo provamos que o operador solução associado ao problema de Cauchy é analítico num setor adequado do plano complexo. Utilizando o decaimento de energia, a analitidade do operador solução e argumentos introduzidos por D. L. Russell e J. Lagnese nos anos setenta do século passado obtemos o resultado desejado.

Palavras chave: Equação Linear de Klein-Gordon, Controle Exato na Fronteira, Decaimento Local de Energia.

Abstract

In this work we solve the problem of exact controllability on the boundary for the linear Klein-Gordon equation in limited domains Ω *of* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, *with piecewise smooth boundary without cusps. For initial data in* $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *we get square integrable control of Neuman type, acting on the entire boundary, in a time near the diameter of* Ω.

Initially we prove that the energy of the solution of the Cauchy problem for this equation locally decays at a polynomial rate. Then extending the solution of the Cauchy problem for complex time we prove that the solution operator associated with the Cauchy problem is analytic in a suitable sector of the complex plane. Using the local decay of energy, the analiticity of the solution operator and arguments introduced by D. L. Russell and J. Lagnese in the seventies we obtain the desired result.

Keywords: Linear Klein-Gordon Equation, Exact Boundary Control, Local Energy Decay.

Introdução

Nos últimos quarenta anos tem havido um grande avanço no estudo de controle para equações diferênciais hiperbólicas (veja [3], [4], [5], [12], [16], [18], [22], [24], [25]). Diversas noções de controle são encontradas na literatura, como por exemplo, controle aproximado, controle exato, controle interno, controle na fronteira, etc.

Neste trabalho estudamos o problema de controle exato na fronteira para equação linear de Klein-Gordon, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2 u = 0$, em $\Omega \times \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio suave por partes de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$.

O problema de controle exato na fronteira para a equação acima consiste em encontrar um tempo $T > 0$ e uma maneira adequada de atuar na fronteira do domínio, de modo que o estado inicial do sistema $(u(.,0), \frac{\partial u}{\partial t}(.,0))$ seja conduzido a um estado final $(u(.,T), \frac{\partial u}{\partial t}(.,T))$ desejado. Em muitos casos, o estado final desejado é o de repouso, isto é, $u(.,T) = \frac{\partial u}{\partial t}(.,T) = 0$.

O problema acima tem sido estudado por diversos autores. Em [3] e [25] os autores utilizaram o HUM-(Hilbert Uniqueness Method) descrito em [18], mostrando que em domínios suaves de $\mathbb{R}^N$ o estado final nulo é obtido a partir de um tempo maior ou igual ao diâmetro do domínio. Em [25] a força de controle atuante é do tipo Neumann e em [3] é do tipo Dirichlet.

A maioria dos trabalhos que lidam com o problema de controlabilidade exata na fronteira consideram os domínios suaves. Em [12], Grisvard estudou o problema de controle exato na fronteira para a equação da onda em polígonos e poliédros. Este parece ser o primeiro trabalho sobre controle em domínios não suaves. Nesse trabalho nota-se a grande dificuldade em utilizar o HUM para domínios não suave, mesmo tendo o domínio uma simples geometria.

Por outro lado, em [4], os autores estudaram o problema de controle exato na fronteira para equação da onda em domínios planos suave por partes utilizando o método de controlabilidade introduzido por D. L. Russell [24] na primeira metade dos anos 70. A aplicação do método de Russell requer do sistema em questão linearidade, reversibilidade em relação ao tempo, decaimento local da energia e uma teoria de traço adequada. Por isso o método de Russell é mais limitado que o HUM. No entanto, o método de Russell é mais facilmente aplicado em casos de domínios não suave.

Neste trabalho estudamos o problema de controle para a equação de Klein-Gordon $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2 u = 0$ com dados iniciais em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave por partes e sem cúspides em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Aqui H^m, $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ denota o espaço de Sobolev usual. A verificação de que a energia da solução desta equação decai localmente é a primeira contribuição deste trabalho ([22], [23]).

No capítulo 2, obtemos a fórmula explícita da solução u do problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u + c^2 u = 0 \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \tag{1}$$

$$u(.,0) = u_0 \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^N \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(.,0) = u_1 \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

onde $u_0, u_1 \in C_0^\infty(U)$ e U é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$.

A representação da solução u muda com a paridade de N. No caso em que N é ímpar a fórmula de u envolve as funções de Bessel de primeira espécie J_0 e J_1. Quando N é par a representação de u envolve as funções seno e cosseno. No capítulo 3, usando resultados clássicos sobre o comportamento assintótico das funções de Bessel ([11], [28]), mostramos que a solução u do problema $(1) - (3)$ satisfaz, para $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq 1$, a desigualdade

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x \partial t)^\alpha} u(x,t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|^2_{H^1(U)} + \|u_1\|^2_{L^2(U)} \right\}, \tag{4}$$

para todo $x \in U$, $t > 0$ suficientemente grande e alguma constante $K > 0$ que não depende dos dados iniciais. Como consequência da estimativa (4) obtemos

$$\|u(.,t)\|^2_{H^1(U)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}(.,t)\|^2_{L^2(U)} \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|^2_{H^1(U)} + \|u_1\|^2_{L^2(U)} \right\} \tag{5}$$

válida para t suficientemente grande e solução u de (1)-(3) com dados iniciais com energia finita. A estimativa (4) estende um resultado obtido por L. Hörmander [13], pois fazendo uso da análise de Fourier ele mostrou a estimativa

$$|u(x,t)| \leq C\ |t|^{-N/2} \sum_{|\alpha|+j\leq (N+3)/2} \int \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial y)^{\alpha}} u_j(y) \right| dy, \tag{6}$$

para $|t|$ suficientemente grande e uma constante $C > 0$ que não depende de u_j, $j = 0, 1$. Aqui usamos a notação $(\partial y)^{\alpha} = \partial y_N^{\alpha_N} ... \partial y_1^{\alpha_1}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$.

Assumindo que $u_0, u_1 \in C_0^{\infty}(U)$, em que U é um domínio limitado segue:

$$|u(x,t)|^2 \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|^2_{H^m(U)} + \|u_1\|^2_{H^{m-1}(U)} \right\}, \tag{7}$$

para $|t|$ suficientemente grande e todo inteiro $m \geq \frac{N+3}{2} \geq 2$ contrastando com (4), onde $m = 1$.

A estimativa (7), para $m = 1$ e $N = 1, 2, 3$ já é conhecida a algum tempo (veja [19], [20]) e até onde sabemos, a literatura não dispõe de uma estimativa como (4) para todos as dimensões N, como temos feito aqui.

Seja u a solução do problema (1)-(3), onde os dados iniciais são extensões nulas fora de U, de pares tomados em $H_0^1(U) \times L^2(U)$. Considere o operador

$$S_T : H_0^1(U) \times L^2(U) \longrightarrow H_0^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N),$$

definido por $S_T(u(.,0), \frac{\partial u}{\partial t}(.,0)) = (u(.,T), \frac{\partial u}{\partial t}(.,T))$. Seja R o operador restrição ao conjunto U. Da estimativa (5) segue

$$\begin{aligned} \|RS_T(u(.,0), \tfrac{\partial u}{\partial t}(.,0))\|^2_{H^1(U)\times L^2(U)} &= \|S_T(u(.,0)\ |_U, \tfrac{\partial u}{\partial t}(.,0)\ |_U)\|^2_{H^1(U)\times L^2(U)} \\ &\leq \tfrac{K'}{T^N} \|(u(.,0), \tfrac{\partial u}{\partial t}(.,0))\|^2_{H_0^1(U)\times L^2(U)}. \end{aligned} \tag{8}$$

A desigualdade (8) mostra que, para valores de T suficientemente grande, RS_T é uma contração. Este fato é importante no estudo da controlabilidade para a equação de Klein-Gordon.

Outra contribuição que apresentamos neste trabalho é a prova de que a família de operadores lineares compactos $\{S_T\}_{T\geq T_0}$, $T_0 = diam(\Omega) + \epsilon$, se estende analiticamente a uma família de operadores lineares compactos $\{S_\zeta\}_{\zeta\in\Sigma_0}$, em que Σ_0 é o setor do plano complexo dado por

$$\Sigma_0 = \{\zeta = T_0 + z, \quad |arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Este resultado é provado no Teorema 4.2.1 do capítulo 4. Tal resultado tem uma importante aplicação na obtenção do controle exato na fronteira em tempo próximo ao valor ótimo para equação linear de Klein-Gordon.

Por fim, o capítulo 5 é dedicado efetivamente ao estudo do problema de controle anteriormente mencionado. O método de controlabilidade de Russell nos mostra que o problema de controle em questão é equivalente a resolver uma equação da forma

$$(I - K_T)(w_0, w_1) = (u_0, u_1). \tag{9}$$

nas variáveis $(w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde $(u_0, u_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ são os dados iniciais do problema de controle original. O operador K_T, obtido a partir de S_T, é linear, limitado, compacto e além disso satisfaz

$$\|K_T(w_0, w_1)\|^2_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \frac{Const.}{T^N}\|(w_0, w_1)\|^2_{H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}, \text{ para } T > T_0.$$

Assim, para um T suficientemente grande garantimos que o operador K_T é contração e portanto, resolve-se (9). Resolver (9) significa encontrar extensão dos dados iniciais para o espaço todo, de forma que a solução do problema de Cauchy se anule juntamente com sua derivada em relação a t, sobre o domínio Ω. Para concluir a controlabilidade restringe-se essa solução ao cilindro $\Omega \times [0, T]$ e usa-se um teorema adequado de traço para obter o controle à partir do traço da solução do problema de Cauchy em $\partial\Omega \times [0, T]$. Aqui usamos um teorema de traço para a derivada normal, devido a D. Tataru [26].

O tempo de controle obtido no Teorema 5.2.1 não é ótimo. Ainda no capítulo 5 mostramos que podemos controlar a equação de Klein-Gordon em qualquer instante maior que o valor do diâmetro de Ω. Este resultado é provado no Teorema 5.3.1. Usando o fato de que a família de operadores lineares e compactos $\{S_T\}_{T\geq T_0}$, acima definidos, se estende analiticamente a uma família de operadores lineares limitados e compactos $\{S_\zeta\}_{\zeta\in\Sigma_0}$, garantimos que a família de operadores lineares limitados e compactos $\{K_T\}_{T\geq T_0}$ se estende analiticamente a uma família de operadores lineares compactos $\{K_\zeta\}_{\zeta\in\Sigma_0}$. Daí, usando um teorema de alternativa devido a F. V. Atkinson ([14], pág. 370) garantimos que a equação (9) é solúvel em qualquer instante maior que o valor do diâmetro de Ω. E assim, podemos controlar a equação de Klein-Gordon por meio de um força $h = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ atuante na fronteira de Ω, qualquer que seja o instante $T > diam(\Omega)$.