

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia - Campus de São João da Boa Vista

GIOVANNA MENDES CRUZ ALVES

Detritos Espaciais:

Estudo da Dinâmica Orbital e Avaliação do Risco de Colisão

São João da Boa Vista

2025

Giovanna Mendes Cruz Alves

Detritos Espaciais:

Estudo da Dinâmica Orbital e Avaliação do Risco de Colisão

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Orientador: Profº Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

São João da Boa Vista

2025

A474d

Alves, Giovanna Mendes Cruz

Detritos espaciais: estudo da dinâmica orbital e avaliação do risco de colisão / Giovanna Mendes Cruz Alves. -- São João da Boa Vista, 2025

50 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista

Orientador: Denilson Paulo Souza dos Santos

1. Engenharia aeroespacial. 2. Satélites artificiais. 3. Órbita. I. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**DETRITOS ESPACIAIS:
ESTUDO DA DINÂMICA ORBITAL E AVALIAÇÃO DE RISCOS DE COLISÃO**

Aluno: Giovanna Mendes Cruz Alves

Orientador: Prof. Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

Banca Examinadora:

- Denilson Paulo Souza dos Santos (Orientador)
- Éder Luiz Oliveira (Examinador)
- Lucas Daniel Del Rosso Calache (Examinador)

Os formulários de avaliação e a ata da defesa, na qual consta a aprovação do trabalho, devidamente assinados pela banca encontram-se no prontuário eletrônico do aluno.

São João da Boa Vista, 10 de dezembro de 2025

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus, por tudo (...).

À UNESP, pela oportunidade de estudo.

À FAPESP, pela confiança depositada ao financiar essa pesquisa. O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo nº 2022/15075-5. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

A todos os meus professores que, com dedicação ao seu trabalho, me ajudaram a chegar até aqui. Agradeço também por todos os conselhos, por toda a ajuda e por todo o carinho.

Ao meu querido orientador, Denilson Paulo Souza dos Santos, que esteve ao meu lado durante alguns dos anos mais desafiadores da minha vida. Agradeço por fazer parte da minha trajetória, por toda a ajuda, pela influência que teve em mim e por todos os ensinamentos.

Aos professores com quem viajei em congressos, em especial aos professores Denilson, Juliano Antonio de Oliveira e Lucas Daniel Del Rosso Calache, por me incluírem e pelas preciosas lembranças, que levo em meu coração.

Aos meus pais, Dirce e Denilson, que, com amor, sempre trabalharam duro para me dar as melhores oportunidades.

À minha irmã, Letícia, por ser uma luz em minha vida, sempre me apoiando nos momentos mais difíceis.

Ao meu querido amigo, Matheus Zingra, pela amizade e pela oportunidade de crescermos juntos durante a graduação.

“All we have to decide is what to do with the time that is given us.”
(Tolkien, 2009, p. 67)

RESUMO

O acúmulo de lixo espacial na órbita terrestre tem se agravado rapidamente, tanto devido ao crescente número de lançamentos, quanto à recorrência de eventos de fragmentação significativos e à insuficiência das medidas mitigatórias em uso. Esse acúmulo aumenta o risco de colisão em órbita e compromete a sustentabilidade das atividades espaciais. Nesse contexto, as simulações de propagação orbital e as ferramentas de análise do risco de colisão têm se tornado cada vez mais essenciais para o planejamento de missões mais seguras e para a prevenção de colisões. Como as perturbações orbitais afetam significativamente a dinâmica de detritos, é fundamental incluí-las nas simulações e compreender os efeitos que produzem. Neste trabalho, modelou-se a explosão de um objeto em órbita e propagou-se a nuvem de detritos gerada, sujeita à atração gravitacional da Terra, da Lua, ao efeito da oblatividade terrestre e ao arrasto atmosférico. Investigaram-se os efeitos causados por cada perturbação sobre um detrito da nuvem e os parâmetros que influenciam a magnitude desses efeitos. Por fim, estimou-se a probabilidade e o risco de colisão por meio de uma abordagem simples, utilizando uma região no formato de toro. Verificou-se que cada perturbação afetou os elementos orbitais de maneira distinta. Enquanto os efeitos da atração da Lua foram pequenos, a oblatividade terrestre gerou variações de vários graus por dia no argumento do perigeu e na ascensão reta do nodo ascendente. Além disso, o arrasto foi a única perturbação que gerou diminuição contínua do semi-eixo maior, afetando também a excentricidade. Verificou-se também que a probabilidade de colisão foi maior para órbitas mais baixas e aumentou ao longo do tempo. No entanto, concluiu-se que, devido às limitações do modelo, esses resultados só seriam válidos pouco tempo após a explosão.

Palavras-Chave: detritos espaciais; perturbações orbitais; risco de colisão.

ABSTRACT

The accumulation of space junk in Earth's orbit has been increasing rapidly, due to the growing number of launches, the recurrence of significant fragmentation events and the insufficiency of the mitigation measures currently in place. This accumulation increases the risk of in-orbit collisions and compromises the sustainability of space activities. In this context, simulations of orbital propagation and collision risk analysis tools have become more essential for the planning of safer missions and for the prevention of collisions. Since orbital perturbations significantly influence the dynamics of space debris, it's essential to include them in the simulations and to understand the effects they produce. In this study, an in-orbit explosion was modeled and the resulting debris cloud was propagated, under the influence of Earth's and the Moon's gravitational attraction, Earth's oblateness, and atmospheric drag. The effects caused by each perturbation on a single cloud element were investigated, along with the parameters that influence the magnitude of these effects. Lastly, the probability and risk of collision were estimated by means of a simple approach based on a torus-shaped region. It was verified that each perturbation affected the orbital elements in a distinct manner. While the effects of the lunar attraction were small, Earth's oblateness caused variations of many degrees per day in the argument of perigee and in the right ascension of the ascending node. Additionally, atmospheric drag was the only perturbation that caused a continuous decrease in the semi-major axis, also affecting the eccentricity. Moreover, it was observed that the probability of collision was more significant in low orbits and increased over time. However, it was concluded that, due to the model's limitations, these results were only valid for a short time after the explosion.

Keywords: space debris; orbital perturbations; collision risk.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Evolução do número de objetos em órbita geocêntrica por regime orbital. . . .	14
Figura 2 – Esquema utilizado na condução deste trabalho.	20
Figura 3 – Representação dos elementos orbitais que localizam a órbita no espaço.	21
Figura 4 – Sistema de Referência utilizado para a formulação do Caso 2.	23
Figura 5 – Representação da região em forma de toro.	26
Figura 6 – Representação do sistema formado pela Terra, pelo toro e pela nuvem.	27
Figura 7 – Trajetória da partícula para o Caso 1 em um intervalo de 90 dias.	30
Figura 8 – Comportamento da excentricidade no Caso 1.	31
Figura 9 – Comportamento do argumento do perigeu no Caso 1.	31
Figura 10 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 1.	32
Figura 11 – Comparação das trajetórias da partícula nos Casos 1 e 2 durante 90 dias. . .	32
Figura 12 – Comportamento da excentricidade no Caso 2.	33
Figura 13 – Comportamento da inclinação no Caso 2.	33
Figura 14 – Comportamento do argumento do perigeu no Caso 2.	34
Figura 15 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 2.	34
Figura 16 – Influência da altitude na excentricidade para o Caso 2.	35
Figura 17 – Influência da altitude na inclinação para o Caso 2.	35
Figura 18 – Comportamento da RAAN no Caso 3.	36
Figura 19 – Rotação do semi-eixo maior no plano orbital causada pelo efeito J_2	37
Figura 20 – Comportamento do argumento do perigeu no Caso 3.	37
Figura 21 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 3.	38
Figura 22 – Comportamento da excentricidade no Caso 3.	38
Figura 23 – Comportamento da inclinação no Caso 3.	39
Figura 24 – Comportamento do argumento do perigeu para diferentes altitudes no Caso 3.	39
Figura 25 – Comportamento da RAAN para diferentes altitudes no Caso 3.	40
Figura 26 – Comportamento do raio orbital no Caso 4, para $H = 300 \text{ km}$	40
Figura 27 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 4.	41
Figura 28 – Comportamento da excentricidade no Caso 4.	41
Figura 29 – Comportamento do raio orbital para diferentes altitudes no Caso 4.	42
Figura 30 – Comportamento do raio orbital para diferentes razões área-massa no Caso 4.	43
Figura 31 – Evolução da nuvem de detritos com 100 elementos.	43
Figura 32 – Nuvem com 300 elementos 1h 45min após a explosão.	44
Figura 33 – Influência da altitude na probabilidade de colisão.	45
Figura 34 – Evolução da probabilidade de colisão ao longo do tempo.	46
Figura 35 – Evolução do volume da nuvem ao longo do tempo.	46
Figura 36 – Risco de colisão em função da massa e da velocidade para $H = 800 \text{ km}$. . .	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Perturbações consideradas em cada caso analisado.	22
Tabela 2 – Parâmetros considerados nas análises.	23
Tabela 3 – Valores dos elementos orbitais constantes no Caso 1.	31
Tabela 4 – Probabilidade de colisão para diferentes valores de H , no instante: 1h 45min.	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EGO	Extended Geostationary Orbit
ESA	European Space Agency
GEO	Geostationary Earth Orbit
GTO	Geostationary Transfer Orbit
HEO	Highly Eccentric Earth Orbit
IADC	Inter-Agency Space Debris Coordination Committee
LEO	Low Earth Orbit
LMO	LEO-MEO Crossing Orbits
MEO	Medium Earth Orbit
MGO	MEO-GEO Crossing Orbits
NSO	Navigation Satellites Orbit
RAAN	Right Ascension of the Ascending Node
RKF45	Runge–Kutta–Fehlberg 4(5)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{a}_D$	Aceleração da partícula causada pelo arrasto atmosférico $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
$\vec{a}_{J_2}$	Aceleração da partícula causada pelo J_2 $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
$\vec{a}_1$	Aceleração da partícula no Caso 1 $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
$\vec{a}_2$	Aceleração da partícula no Caso 2 $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
$\vec{a}_3$	Aceleração da partícula no Caso 3 $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
$\vec{a}_4$	Aceleração da partícula no Caso 4 $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
H	Altitude inicial da partícula $[km]$
S	Área efetiva da partícula $[m^2]$
ω	Argumento do perigeu $[^\circ]$
C_D	Coefficiente de arrasto
J_2	Coefficiente zonal de segunda ordem
G	Constante da gravitação universal $\left[\frac{km^3}{kg\ s^2}\right]$
ρ	Densidade do ar atmosférico $\left[\frac{kg}{km^3}\right]$
$R_{m\acute{a}x}$	Distância máxima atingida por uma partícula da nuvem $[km]$
$R_{m\acute{i}n}$	Distância mínima atingida por uma partícula da nuvem $[km]$
E_0	Energia cinética do objeto logo antes de sua explosão $[J]$
e	Excentricidade
t	Instante de tempo após a explosão $[s]$
M_2	Massa da Lua $[kg]$
m	Massa da partícula $[kg]$
M_1	Massa da Terra $[kg]$
n	Número de elementos da nuvem
η	Parâmetro aleatório
μ_2	Parâmetro gravitacional padrão da Lua $\left[\frac{km^3}{s^2}\right]$

μ_1	Parâmetro gravitacional padrão da Terra $\left[\frac{km^3}{s^2}\right]$
γ	Ponto vernal
$\vec{r}_2$	Posição da Lua em relação à Terra $[km]$
$\vec{r}_L$	Posição da partícula em relação à Lua $[km]$
$\vec{r}$	Posição da partícula em relação à Terra $[km]$
$\vec{r}_0$	Posição inicial da partícula em relação à Terra $[km]$
P_c	Probabilidade de colisão
P_{nuvem}	Probabilidade de um ponto aleatório dentro do toro estar dentro da nuvem
R_T	Raio da Terra $[km]$
R	Raio do toro $[km]$
r	Raio do tubo $[km]$
S/m	Relação área-massa $\left[\frac{m^2}{kg}\right]$
R_c	Risco de colisão $[J]$
ω_T	Velocidade angular de rotação da Terra $\left[\frac{rad}{s}\right]$
$\vec{v}$	Velocidade da partícula $\left[\frac{km}{s}\right]$
$\vec{v}_0$	Velocidade inicial da partícula $\left[\frac{km}{s}\right]$
$\vec{v}_{rel}$	Velocidade relativa entre a partícula e a atmosfera $\left[\frac{km}{s}\right]$
V_{nuvem}	Volume da nuvem $\left[\frac{km}{s}\right]$
V_{toro}	Volume do toro $[km^3]$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	O AMBIENTE ORBITAL ATUAL	14
1.2	MEDIDAS MITIGATÓRIAS	15
1.3	OBJETIVOS	16
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	PROPAGAÇÃO ORBITAL E EFEITOS DAS FORÇAS PERTURBADORAS	18
2.2	PROBABILIDADE DE COLISÃO	19
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	20
3.1	ELEMENTOS ORBITAIS	20
3.2	PROPAGAÇÃO DA NUVEM DE DETRITOS	21
3.3	INFLUÊNCIA DAS PERTURBAÇÕES NA DINÂMICA ORBITAL	22
3.3.1	Caso 1: Caso Não Perturbado	23
3.3.2	Caso 2: Inclusão do Efeito da Atração da Lua	23
3.3.3	Caso 3: Inclusão do Efeito J_2	24
3.3.4	Caso 4: Inclusão do Arrasto Atmosférico	24
3.4	PROBABILIDADE E RISCO DE COLISÃO: TORO CIRCULAR	26
3.4.1	Descrição do Sistema	26
3.4.2	Hipóteses Adotadas	27
3.4.3	Aplicação das Hipóteses nas Simulações	28
3.4.4	Risco de Colisão	28
4	RESULTADOS	30
4.1	CASO 1: SEM PERTURBAÇÕES	30
4.2	CASO 2: INCLUSÃO DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DA LUA	32
4.2.1	Influência da Altitude	35
4.3	CASO 3: INCLUSÃO DO EFEITO J_2	36
4.3.1	Influência da Altitude	39
4.4	CASO 4: INCLUSÃO DO ARRASTO ATMOSFÉRICO	40
4.4.1	Influência da Altitude	42
4.4.2	Influência da Relação Área-Massa	42
4.5	PROPAGAÇÃO DA NUVEM	43
4.6	PROBABILIDADE E RISCO DE COLISÃO: TORO CIRCULAR	44

5	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

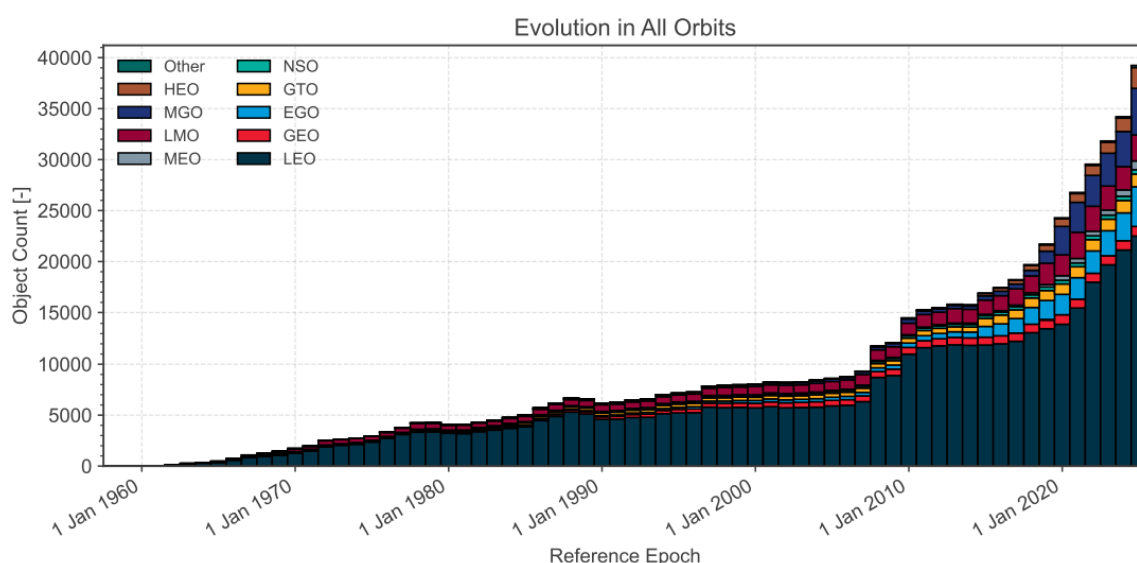
Em 4 de outubro de 1957, Sputnik-1 entrou para a história como o primeiro satélite artificial lançado ao espaço. Este evento marcou o início da Era Espacial, caracterizada pela exploração do espaço exterior e por importantes avanços tecnológicos. O desenvolvimento da indústria aeroespacial, no entanto, introduziu um novo problema ambiental: o acúmulo crescente de detritos espaciais na órbita terrestre.

Embora existam variações na definição de detritos espaciais, a mais adotada, inclusive pela Agência Espacial Europeia (ESA), é a fornecida pelo Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (IADC). Por essa razão, essa definição foi adotada para este trabalho. De acordo com o Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (2025, p. 8, tradução nossa), "detritos espaciais são todos os objetos feitos pelo homem, incluindo fragmentos e elementos desses objetos, localizados na órbita da Terra ou reentrando na atmosfera, que não estão funcionais".

1.1 O AMBIENTE ORBITAL ATUAL

O crescimento da população orbital, embora seja um fenômeno observado desde o início da Era Espacial, tem se agravado ao longo dos anos, configurando um problema atual de crescente relevância. De acordo com a versão final do Relatório Anual do Ambiente Espacial, publicado em 2024 pela Agência Espacial Europeia (ESA), a quantidade de objetos em órbita ao redor da Terra atingiu níveis sem precedentes naquele ano, repetindo a tendência observada nos anos anteriores. A Figura 1 mostra esse padrão, apresentando a evolução do número de objetos para diferentes regimes orbitais.

Figura 1 – Evolução do número de objetos em órbita geocêntrica por regime orbital.



Fonte: European Space Agency (2025, p. 22).

Na Figura 1, os dados apresentados abrangem tanto os objetos catalogados quanto fragmentos cuja existência é conhecida com base no design dos objetos que os originaram, embora ainda não tenham sido identificados pelos sistemas de vigilância.

Observa-se que a maioria dos objetos está concentrada na região da Low Earth Orbit (LEO), que se estende até aproximadamente 2.000 km de altitude (INTER AGENCY SPACE DEBRIS COORDINATION COMMITTEE, 2025). Esse acúmulo está intimamente relacionado à proximidade dessa região com o planeta, o que lhe confere grande importância estratégica e econômica. Além disso, avanços recentes nas técnicas de miniaturização e padronização tecnológica têm impulsionado o lançamento de grandes constelações de satélites na LEO, contribuindo significativamente para o agravamento do congestionamento nessa região. Apenas em 2024, dos 7.473 objetos adicionados na órbita terrestre, 3.470 foram inseridos na LEO, o que representa aproximadamente 46% do total (EUROPEAN SPACE AGENCY, 2025).

O crescimento acelerado da população orbital não se deve apenas ao aumento do número de lançamentos, mas também à ocorrência de fragmentações em órbita, que representam um problema persistente. Apenas em 2024, mais de 3.000 novos fragmentos foram catalogados em decorrência de eventos de fragmentação significativos (EUROPEAN SPACE AGENCY, 2025). Dentre as diferentes causas desses eventos, as explosões em órbita se destacam como a principal fonte de detritos espaciais, de modo que uma única explosão é capaz de gerar milhares de novos fragmentos com alto poder destrutivo (Klinkrad, 2006).

Como resultado de décadas de exploração, os detritos compõem a maior parte da população orbital, dividindo o espaço limitado da órbita terrestre com os satélites ativos. Isso aumenta a probabilidade de colisão, podendo ocasionar grandes prejuízos econômicos e sociais, caso um satélite ativo seja danificado. No entanto, o risco mais preocupante associado às colisões em órbita reside na possibilidade do desenvolvimento de um fenômeno conhecido como Síndrome de Kessler. Segundo o trabalho original publicado por Kessler e Cour-Palais (1978), esse fenômeno pode se desenvolver a partir da colisão entre objetos espaciais, de modo que os fragmentos gerados colidiriam com outros fragmentos, desencadeando um efeito de colisões em cascata que inviabilizaria o uso de determinados regimes orbitais por muito tempo.

1.2 MEDIDAS MITIGATÓRIAS

Devido à crescente preocupação em preservar a sustentabilidade orbital, diversas medidas mitigatórias foram desenvolvidas ao longo dos anos com o objetivo de diminuir a geração e o impacto de detritos espaciais no espaço exterior. Essas medidas atuam como orientações para a realização de atividades espaciais mais sustentáveis e, como seu cumprimento não é obrigatório, são categorizadas como *soft law*.

Em especial, as diretrizes elaboradas pelo IADC são amplamente utilizadas como referência por diversas agências do setor espacial na condução de seus projetos e missões. Essas orientações abrangem: técnicas para minimizar a geração de detritos durante as missões, procedimentos de

descarte após o fim de vida útil do satélite, técnicas de prevenção de colisões em órbita, entre outros aspectos (IADC, 2025). As técnicas de prevenção de colisões, por sua vez, incluem análises do risco de colisão para detecção de situações potencialmente perigosas, e realização de manobras de evasão, quando necessário.

Nesse contexto, simulações de propagação orbital assumem um papel fundamental para o desenvolvimento dessas operações, assim como para a melhor compreensão do ambiente orbital e para o planejamento de missões mais seguras. Além disso, considerando que detritos são significativamente afetados pelas perturbações orbitais (Letizia *et al.*, 2013), é essencial incluí-las nas simulações e compreender os efeitos que exercem na dinâmica dos detritos.

A inclusão das perturbações, no entanto, aumenta a complexidade das análises e o custo computacional. Assim, uma forma de simplificar a simulação e melhorar seu desempenho, importante em situações que exijam tomada rápida de decisão, é considerar apenas as forças perturbadoras mais relevantes. Para isso, é necessário entender os parâmetros que influenciam a magnitude dos efeitos perturbativos, a fim de identificar em que condições uma perturbação pode ser desprezada.

Por fim, embora as medidas mitigatórias existentes não sejam suficientes para assegurar a sustentabilidade do espaço exterior (Letizia *et al.*, 2023), elas são essenciais para retardar o aparecimento de regiões orbitais altamente densas, prolongando o tempo disponível para utilização dos recursos orbitais e para desenvolvimento e implementação de medidas sustentáveis mais eficazes.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é analisar o comportamento de detritos espaciais sujeitos às perturbações da atração gravitacional da Lua, da oblatividade terrestre e do arrasto atmosférico, além de verificar o impacto causado por uma nuvem de detritos sobre o ambiente orbital.

Os objetivos específicos incluem:

1. Desenvolver um propagador, capaz de fornecer as posições dos elementos da nuvem ao longo do tempo;
2. Implementar as perturbações no propagador;
3. Investigar os efeitos causados na dinâmica orbital por cada perturbação e a dependência desses efeitos com a altitude e a relação área-massa do objeto;
4. Verificar o comportamento da nuvem como um todo;
5. Propor um método simplificado para estimar a probabilidade e o risco de colisão em órbitas circulares, utilizando uma região no formato de toro;
6. Analisar a variação temporal da probabilidade de colisão e sua dependência com a altitude, além de estimar o risco de colisão, com base no método proposto.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O **Capítulo 2**, intitulado "Revisão Bibliográfica", apresenta, de forma resumida, os principais trabalhos publicados que têm relação com os temas estudados.

O **Capítulo 3**, intitulado "Formulação Matemática", descreve o método adotado para condução deste estudo, incluindo as equações utilizadas, as hipóteses assumidas e os valores dos parâmetros considerados.

O **Capítulo 4**, intitulado "Resultados", apresenta os resultados obtidos das simulações realizadas, assim como a discussão de suas implicações.

Por fim, o **Capítulo 5**, intitulado "Conclusão", sintetiza as principais ideias desenvolvidas e os principais resultados obtidos neste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Devido ao rápido agravamento do problema dos detritos espaciais e crescente conscientização pública sobre o tema, existem vários estudos dedicados a compreender melhor a dinâmica orbital de objetos espaciais, melhorar a precisão e o desempenho das simulações de propagação e desenvolver ferramentas para análise do risco de colisão.

2.1 PROPAGAÇÃO ORBITAL E EFEITOS DAS FORÇAS PERTURBADORAS

Em seu trabalho, Carrara, Kuga e Rao (2012) descreveram a natureza das diferentes perturbações que afetam a dinâmica orbital, bem como as formulações dessas perturbações e os efeitos que elas causam nos elementos orbitais, que são parâmetros que descrevem completamente a forma e a orientação da órbita de um corpo no espaço e sua posição ao longo dessa órbita.

Martynenko (1967) estudou os efeitos das perturbações luni-solares nos elementos orbitais, considerando dois casos. No primeiro caso, a órbita do objeto está no plano equatorial, que é o plano que contém o equador de um corpo celeste (Terra) e é perpendicular ao seu eixo de rotação. No segundo caso, a órbita do objeto está em um plano perpendicular ao plano eclíptico, o qual contém a órbita da Terra ao redor do Sol.

Brito (2019) avaliou os efeitos das perturbações do potencial terrestre (J_2 e J_{22}), das atrações da Lua e do Sol, da pressão de radiação e do arrasto atmosférico sobre a dinâmica orbital de um detrito espacial. As análises foram realizadas para diferentes razões área-massa e regimes orbitais.

Letizia *et al.* (2013) utilizaram uma abordagem analítica para modelar a propagação de uma nuvem de detritos gerada por uma colisão em órbita baixa. Considerou-se que a nuvem apresentava propriedades constantes, semelhante a um fluido. Foram consideradas as perturbações do efeito J_2 e do arrasto atmosférico.

Nie, Gurfil e Zhang (2019) utilizaram um modelo semi-analítico para avaliar os efeitos da perturbação de um terceiro corpo sobre a dinâmica de um satélite. Assumiu-se que o corpo perturbador apresenta uma órbita elíptica e inclinada.

Kim e Vukovich (2019) desenvolveram algoritmos para modelar o efeito do arrasto sobre a dinâmica orbital de um satélite em órbita baixa, aplicáveis tanto para órbitas circulares quanto para órbitas elípticas. Verificou-se a taxa do decaimento causado pelo arrasto e os fatores que a influenciam, como o formato da órbita, o coeficiente de arrasto e a altitude.

Cook (1962) investigou os efeitos da atração da Lua sobre os elementos orbitais de um satélite utilizando as equações de Lagrange. As taxas de variação dos elementos foram obtidas para uma revolução do satélite ao redor da Terra.

2.2 PROBABILIDADE DE COLISÃO

Em seu trabalho, Letizia, Colombo e Lewis (2016) estimaram a probabilidade de colisão entre os elementos de uma nuvem de detritos e um objeto operante ao cruzá-la. Para isso, a densidade espacial da nuvem foi definida como a chance de encontrar um objeto a uma certa latitude e a uma certa distância da Terra. Assumindo apenas as perturbações causadas pelo J_2 e pelo arrasto atmosférico, e que os fragmentos descrevem órbitas circulares, a probabilidade de colisão foi calculada usando uma analogia com a teoria cinética dos gases.

Formiga *et al.* (2020) utilizaram uma formulação semelhante para estimar a probabilidade de colisão entre um satélite e uma nuvem de detritos cujos elementos orbitais foram modificados após uma aproximação com a Terra. Dado que a nuvem orbita o Sol, após a aproximação com a Terra, a densidade de probabilidade foi calculada como a chance de encontrar um objeto a uma determinada distância do Sol.

Kessler (1990) estudou a probabilidade de colisão aplicada a órbitas elípticas, utilizando um modelo semi-analítico. Utilizou-se uma abordagem semelhante à analogia com a teoria cinética dos gases.

Alfriend *et al.* (1999) estimaram a probabilidade de colisão utilizando uma abordagem probabilística, a qual considera as incertezas nas posições dos objetos representadas por distribuições gaussianas.

Ostrogovich *et al.* (2024) utilizaram o método Ucube para estimar o risco de colisão entre uma nuvem de detritos e uma megaconstelação de satélites. Nesse método, a região analisada é dividida em cubos e uma potencial colisão é detectada quando dois objetos estão no mesmo cubo, considerando as incertezas de posição. Foram incluídas as perturbações da atração da Lua, da não-esfericidade terrestre, do arrasto atmosférico e da pressão de radiação.

Stevenson *et al.* (2025) estudaram o impacto do tempo de descarte após o fim de vida útil do satélite sobre a geração de detritos. Investigaram como esse tempo e a altitude do perigeu influenciam a probabilidade cumulativa de colisão, definida como a probabilidade de pelo menos uma colisão acontecer após o fim de vida útil.

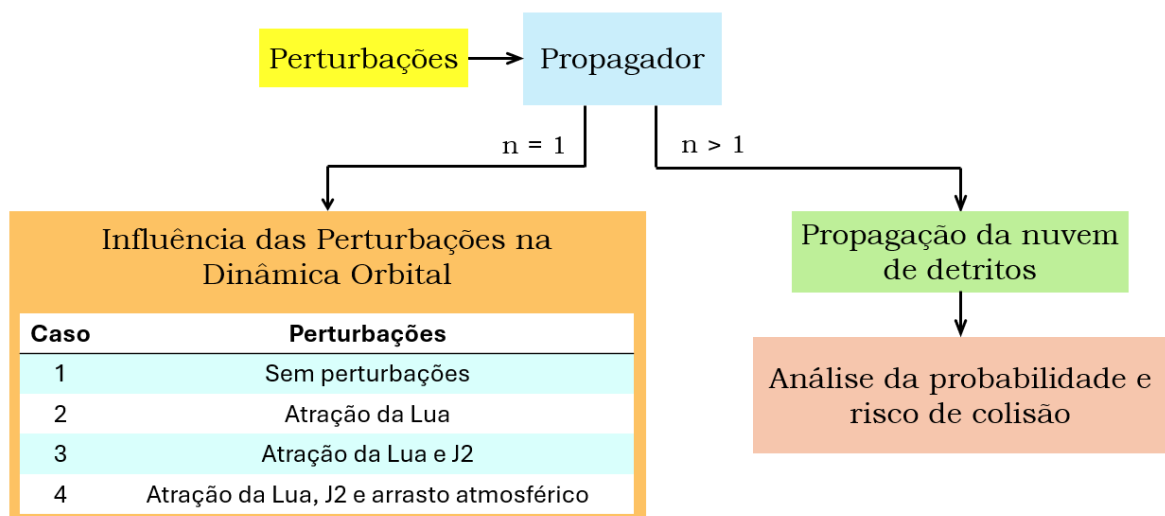
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Modelou-se a propagação de uma nuvem de detritos gerada a partir da explosão de um objeto espacial, considerando as atrações gravitacionais da Terra e da Lua, o efeito da oblatividade terrestre e o arrasto atmosférico. Para isso, foi implementado, em Matlab, um propagador de órbita, que é um modelo (analítico ou numérico) que calcula a evolução da trajetória de um corpo no tempo, a partir de condições iniciais e forças atuantes ou perturbações.

O impacto de cada perturbação sobre os elementos orbitais, explicados a seguir, foi avaliado propagando-se a órbita de uma única partícula da nuvem em diferentes casos, considerando perturbações diferentes. Também foi desenvolvido um método simplificado para estimar a probabilidade e o risco de colisão entre um objeto ativo e a nuvem, aplicável a órbitas circulares.

A Figura 2 apresenta o esquema utilizado na condução deste trabalho, tal que n é o número de elementos da nuvem.

Figura 2 – Esquema utilizado na condução deste trabalho.



Fonte: Elaboração própria.

3.1 ELEMENTOS ORBITAIS

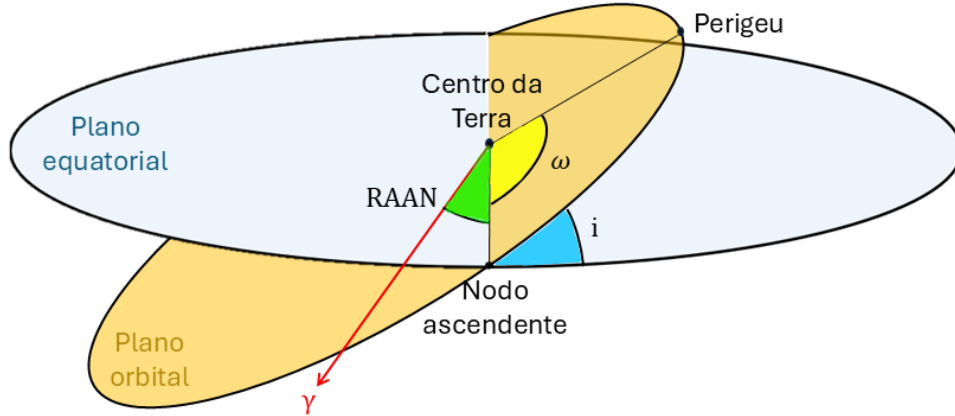
Os elementos orbitais ou keplerianos são parâmetros utilizados para descrever a órbita e sua orientação no espaço, além da posição do corpo ao longo dela.

A anomalia média localiza o satélite no plano da elipse. O semi-eixo maior e a excentricidade definem a elipse. O semi-eixo maior corresponde à metade do comprimento do maior eixo da elipse. Já a excentricidade (e) determina o seu formato, de forma que uma órbita circular apresenta $e = 0$, ao passo que $e = 1$ corresponde a uma órbita parabólica.

Os demais elementos orbitais, representados na Figura 3, localizam a órbita no espaço. A inclinação é o ângulo que o plano no qual a órbita está inserida (plano orbital) faz com o plano

que passa pelo equador (plano equatorial). A ascensão reta do nodo ascendente (RAAN) é o ângulo entre um ponto de referência, chamado ponto vernal γ , e o nodo ascendente, ponto onde a órbita cruza o plano do equador (Kuga; Carrara; Rao, 2012). Já o argumento do perigeu (ω) é o ângulo entre a direção do nodo ascendente e o perigeu, que é o ponto da elipse onde a distância até o foco (centro da Terra) é mínima.

Figura 3 – Representação dos elementos orbitais que localizam a órbita no espaço.



Fonte: Elaboração própria.

3.2 PROPAGAÇÃO DA NUVEM DE DETRITOS

Sejam $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, respectivamente, a posição (em km) e a velocidade (em km/s) de um objeto no momento de sua explosão em órbita, considerando um referencial inercial com origem no centro da Terra. Exceto quando indicado o contrário, assumiu-se:

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} R_T + 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 0,2672 \\ 8,2 \\ 0,4873 \end{bmatrix}$$

No instante logo após a explosão, cada um dos n fragmentos gerados apresenta posição inicial $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, e velocidade inicial $\vec{v}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$, tal que $1 \leq i \leq n$. O propagador atribui $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ para cada detrito, adicionando pequenas perturbações de caráter aleatório a $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$, como indicado a seguir:

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_0 + 10\eta \\ y_0 + 10\eta \\ z_0 + 10\eta \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 + 0, 1\eta \\ \dot{y}_0 + 0, 1\eta \\ \dot{z}_0 + 0, 1\eta \end{bmatrix}$$

O termo η corresponde a um número aleatório obtido a partir de uma distribuição gaussiana com média igual a 0, e desvio padrão igual a 1.

Em seguida, $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ são utilizados como entradas para o cálculo da aceleração resultante do detrito naquele instante. Esse cálculo depende das perturbações consideradas na análise, de modo que a aceleração resultante corresponde à soma das acelerações provocadas por cada efeito significativo que influencia a dinâmica orbital. Os cálculos das perturbações e os parâmetros adotados, assumidos iguais para todas as partículas da nuvem, estão detalhados na sessão a seguir.

Por fim, a velocidade e a aceleração da partícula são integradas numericamente para obter sua posição e sua velocidade após um determinado período de tempo. O integrador numérico utilizado foi o Runge–Kutta–Fehlberg 4(5) (RKF45), escolhido devido ao seu bom desempenho nos casos de propagações em órbita baixa com tolerâncias menos rigorosas (Rocha, 2018). Essa característica foi considerada vantajosa, uma vez que as análises realizadas envolvem principalmente a região LEO.

3.3 INFLUÊNCIA DAS PERTURBAÇÕES NA DINÂMICA ORBITAL

A influência de cada perturbação na dinâmica orbital foi analisada propagando-se a órbita de apenas um elemento da nuvem ($n = 1$) sob condições iniciais semelhantes porém perturbações distintas. Para essas análises, assumiu-se que a posição e a velocidade iniciais da partícula são iguais a $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$, a menos que informado o contrário. A Tabela 1 mostra os diferentes casos simulados, referentes às perturbações consideradas em cada simulação.

Tabela 1 – Perturbações consideradas em cada caso analisado.

Caso	Perturbações consideradas
1	Caso não perturbado
2	Atração da Lua
3	Atração da Lua e efeito J_2
4	Atração da Lua, efeito J_2 e arrasto atmosférico

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 2 reúne os parâmetros invariáveis considerados nos cálculos, assim como os símbolos utilizados para representá-los e seus respectivos valores.

Tabela 2 – Parâmetros considerados nas análises.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Coefficiente de arrasto	C_D	1,5
Coefficiente zonal de segunda ordem	J_2	0,0010826269
Constante da gravitação universal	G	$6,6742 \times 10^{-20} \frac{km^3}{kg \cdot s^2}$
Massa da Terra	M_1	$5974 \times 10^{21} kg$
Parâmetro gravitacional padrão da Lua	μ_2	$4903,02 \frac{km^3}{s^2}$
Parâmetro gravitacional padrão da Terra	μ_1	$398.600 \frac{km^3}{s^2}$
Raio médio da Terra	R_T	$6.371 km$
Velocidade angular de rotação da Terra	ω_T	$7,2921 \times 10^{-5} \frac{rad}{s}$

Fonte: Elaboração própria.

3.3.1 Caso 1: Caso Não Perturbado

O primeiro caso analisado foi o caso não perturbado, considerando o sistema formado apenas por uma partícula da nuvem e a Terra. Assumindo que a massa do detrito é desprezável em relação à massa da Terra, aplicou-se o Problema dos Dois Corpos reduzido para encontrar a aceleração resultante da partícula ($\vec{a}_1$).

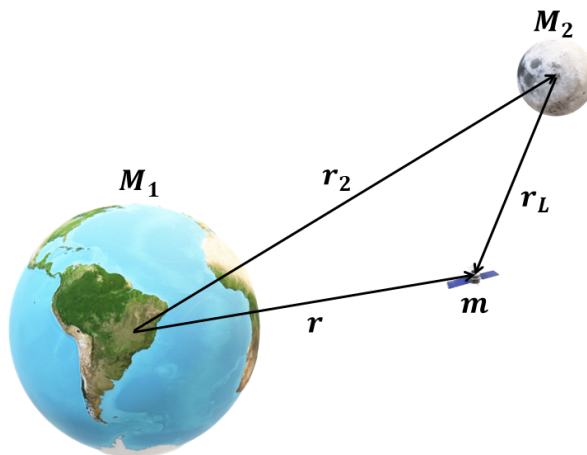
A aceleração pode ser obtida por meio da equação 1 (Carrara; Kuga; Rao, 2012), na qual $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ representa o vetor posição da partícula em relação ao centro da Terra, e $r = \|\vec{r}\|$.

$$\vec{a}_1 = -GM_1 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

3.3.2 Caso 2: Inclusão do Efeito da Atração da Lua

O segundo caso inclui o efeito da atração gravitacional da Lua sobre a dinâmica da partícula, sem considerar o efeito de maré. A Figura 4 mostra o sistema nesse caso.

Figura 4 – Sistema de Referência utilizado para a formulação do Caso 2.



Fonte: Elaboração própria.

A aceleração resultante da partícula ($\vec{a}_2$) corresponde à soma das acelerações causadas sobre ela pela Terra e pela Lua. Assumindo que a massa da partícula é muito menor do que as massas da Terra e da Lua, a aceleração do detrito foi encontrada considerando o Problema Restrito de 3 Corpos:

$$\vec{a}_2 = -\mu_1 \frac{\vec{r}}{r^3} - \mu_2 \frac{\vec{r}_L}{r_L^3} \quad (2)$$

Conforme mostrado na Figura 4, $\vec{r}_L$ representa a posição da partícula em relação à Lua. Para calculá-la, utilizou-se um modelo de efemérides para obter a posição da Lua em relação à Terra, representada por: $\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$. Então, $\vec{r}_L$ foi calculada da seguinte forma:

$$\vec{r}_L = \begin{bmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \\ z - z_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.3.3 Caso 3: Inclusão do Efeito J_2

O planeta Terra não é perfeitamente esférico, e sim, oblato, o que significa que ele é achatado nos polos e mais largo no equador. A distribuição não uniforme de massa causada pela oblatividade terrestre causa irregularidades no campo gravitacional, que perturba as órbitas dos satélites e detritos. O coeficiente zonal de segunda ordem (J_2) reflete o efeito do achatamento dos polos da Terra.

No terceiro caso, a perturbação causada pelo J_2 foi incluída ao sistema considerado no Caso 2. Ou seja, no Caso 3, foram consideradas: a aceleração da partícula provocada pelas atrações da Terra e da Lua, além da perturbação na aceleração provocada pelo achatamento dos polos terrestres.

A perturbação na aceleração da partícula associada ao J_2 é dada por:

$$\vec{a}_{J_2} = -\frac{\mu_1 R_T^2 J_2}{2r^5} \begin{bmatrix} x \left(3 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \\ y \left(3 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \\ z \left(9 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Assim, tem-se que a aceleração resultante, no Caso 3, é:

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_{J_2} \quad (5)$$

3.3.4 Caso 4: Inclusão do Arrasto Atmosférico

O quarto caso adiciona o efeito do arrasto atmosférico aos efeitos considerados no Caso 3, de modo que a perturbação na aceleração causada pelo arrasto é dada por:

$$a_D = -\frac{1}{2} \rho C_D \frac{S}{m} v_{rel} \vec{v}_{rel} \quad (6)$$

A densidade local do ar (ρ) foi estimada a partir de valores tabelados em diferentes altitudes, variando de 0 a 1000 km em intervalos de 20 km. Esses valores foram obtidos utilizando o modelo atmosférico Jacchia 77.

O coeficiente de arrasto (C_D) foi assumido constante e igual a 1,5 durante as análises. Essa simplificação despreza o fato de que C_D depende de diversos fatores, como: a geometria do objeto, o material, o acabamento e a temperatura de sua superfície, seu ângulo de incidência, e a velocidade das moléculas do fluido. O valor de $C_D = 1,5$ foi escolhido por representar um valor típico para esse parâmetro, que normalmente compreende valores no intervalo de 1,2 a 3,8 (Carrara; Kuga; Rao, 2012).

O termo S/m representa a relação área-massa, obtida pela divisão da área efetiva (S) pela massa da partícula (m), sendo a área efetiva definida por Carrara, Kuga e Rao (2012, p. 40) como a "área externa do satélite projetada na direção da velocidade relativa com a atmosfera". Por praticidade, as análises foram conduzidas em termos da relação área-massa, ao invés de considerar S e m separadamente. Considerando-se que valores mais comuns para esse parâmetro encontram-se no intervalo de $0,001 \frac{m^2}{kg}$ a $0,1 \frac{m^2}{kg}$, assumiu-se $S/m = 0,1 \frac{m^2}{kg}$, exceto quando informado o contrário.

Já o termo $\vec{v}_{rel}$ representa a velocidade relativa entre a partícula e a atmosfera, tal que $v_{rel} = \|\vec{v}_{rel}\|$. Para calculá-lo, assumiu-se a hipótese simplificadora de que a atmosfera está estática em relação à Terra, ou seja, desprezou-se a existência de ventos nas altitudes orbitais. Isso significa que o sistema formado pela Terra e sua atmosfera rotaciona em uma mesma velocidade angular ω_T em torno do eixo do planeta.

Considerando que a velocidade da partícula, em relação ao referencial não-rotacional fixo no centro da Terra, é $\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$, a velocidade relativa da partícula em relação à atmosfera terrestre, segundo Carrara, Kuga e Rao (2012, p. 40), é dada por:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{\omega}_T \times \vec{r} \quad (7)$$

Assumindo-se $\vec{\omega}_T = \omega_T \hat{k}$, logo:

$$\vec{v}_{rel} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \omega_T y \\ \dot{y} - \omega_T x \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Assim, a aceleração causada pelo arrasto atmosférico pode ser obtida substituindo a equação 8 na equação 6, obtendo-se:

$$\vec{a}_D = -\frac{1}{2} \rho C_D \frac{S}{m} v_{rel} \begin{bmatrix} \dot{x} + \omega_T y \\ \dot{y} - \omega_T x \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Por fim, nesse caso, a aceleração resultante da partícula é:

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_2 + \vec{a}_{J_2} + \vec{a}_D \quad (10)$$

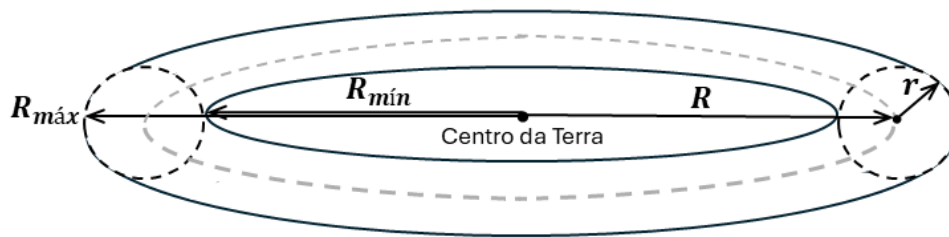
3.4 PROBABILIDADE E RISCO DE COLISÃO: TORO CIRCULAR

Desenvolveu-se um método para estimar a probabilidade de colisão entre uma nuvem de detritos e um objeto ativo, que se encontram dentro de uma região no formato de toro circular. Trata-se de um método mais simples, distinto dos métodos adotados nas bibliografias revisadas.

3.4.1 Descrição do Sistema

Considerou-se uma região em forma de toro circular ao redor do planeta Terra, como representado na Figura 5.

Figura 5 – Representação da região em forma de toro.



Fonte: Elaboração própria.

$R_{máx}$ e $R_{mín}$ são, respectivamente, as distâncias máxima e mínima, na direção radial, ocupadas por partículas da nuvem em um determinado instante. A inclinação do toro foi determinada propagando-se a órbita que o objeto seguiria caso não tivesse explodido (correspondente ao movimento do centro de massa da nuvem), e obtendo sua inclinação no instante analisado. Assim, tem-se que a nuvem está contida dentro do toro a todos os momentos.

Como pode-se observar pela Figura 5, o raio do tubo (r) é dado por:

$$r = \frac{R_{máx} - R_{mín}}{2}$$

Já a distância R do centro da Terra até a metade do tubo é igual a:

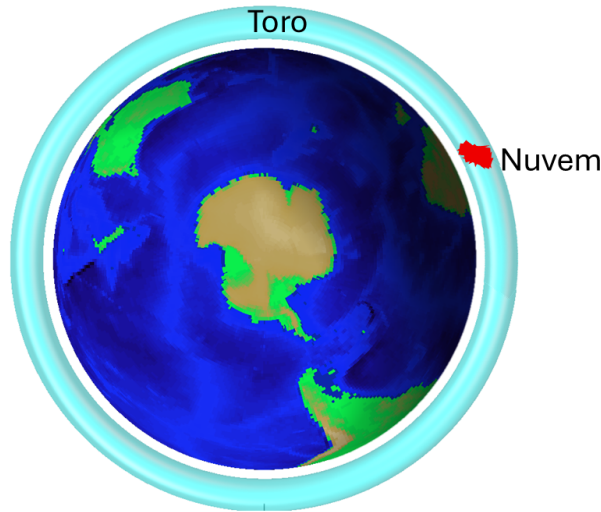
$$R = \frac{R_{máx} + R_{mín}}{2}$$

A partir desses dados, o volume do toro pode ser calculado da seguinte forma:

$$V_{toro} = 2\pi^2 r^2 R \quad (11)$$

A Figura 6 mostra uma representação do sistema formado pela Terra, pelo toro e pela nuvem, cujo volume (V_{nuvem}) foi encontrado aplicando-se uma triangulação de Delaunay para construir sua malha e, em seguida, utilizando-se a função *convexHull* do Matlab, que fornece o volume.

Figura 6 – Representação do sistema formado pela Terra, pelo toro e pela nuvem.



Fonte: Elaboração própria.

3.4.2 Hipóteses Adotadas

Para o desenvolvimento da formulação, as seguintes hipóteses simplificadoras foram adotadas:

1. A nuvem descreve uma órbita circular sem perturbações;
2. A nuvem se comporta como um fluido com propriedades uniformes e contantes;
3. O objeto ativo dentro do toro não apresenta trajetória preferencial.

Pela Hipótese 1, como a órbita da nuvem é circular, não existe uma região dentro do toro na qual ela permaneça por mais tempo. Consequentemente, a probabilidade P_{nuvem} de que um ponto aleatório dentro do toro esteja dentro da nuvem é constante em toda a região. Como a distribuição de probabilidade é uniforme, tem-se:

$$P_{nuvem} = \frac{V_{nuvem}}{V_{toro}} \quad (12)$$

Caso as perturbações fossem consideradas, os elementos da nuvem se dispersariam mais rapidamente, dificultando a análise do movimento da nuvem como um todo. Além disso, as excentricidades das órbitas dos elementos variariam ao longo do tempo, de forma que, mesmo que suas órbitas fossem circulares inicialmente, elas se tornariam elípticas posteriormente. Para uma órbita elíptica, a probabilidade de encontrar a nuvem próxima ao apogeu seria maior, pois,

conforme a Segunda Lei de Kepler, a nuvem passaria mais tempo naquela região do que próxima ao planeta. Nesse caso, a distribuição de probabilidade não poderia ser considerada uniforme e a equação 12 não poderia ser utilizada.

A Hipótese 2 implica que a densidade de fragmentos é uniforme e constante em toda a nuvem. Como consequência, se um objeto operante intercepta a nuvem em algum momento, a probabilidade de colisão (P_c) entre o objeto e os fragmentos da nuvem é 100% (colisão garantida).

Se a distribuição de fragmentos não fosse uniforme, o cruzamento de um objeto operante com a nuvem poderia não resultar em colisão, dependendo do tempo de interação, distribuição dos detritos, trajetória do objeto, entre outros. Nesse caso, esses fatores deveriam ser considerados, tornando o problema mais complexo.

A partir da Hipótese 3, tem-se que o objeto operante não apresenta uma trajetória preferencial, podendo percorrer igualmente toda a região do toro. Assim, pode-se afirmar que a probabilidade de o objeto ativo estar dentro da nuvem é igual à probabilidade de um ponto aleatório dentro do toro estar dentro da nuvem (P_{nuvem}). Como o fato de o satélite estar dentro da nuvem implica em colisão garantida (Hipótese 2), logo, a probabilidade de colisão (P_c) é:

$$P_c = P_{nuvem} \quad (13)$$

3.4.3 Aplicação das Hipóteses nas Simulações

As simulações foram realizadas de forma a satisfazer as hipóteses adotadas no problema. Assim, para satisfazer a Hipótese 1, assumiu-se que a órbita descrita pelo objeto, antes de explodir, era circular e não perturbada. Na ausência de perturbações (Caso 1), as órbitas dos detritos gerados não se alteram ao longo do tempo e os únicos fatores que contribuem para a dissipação dos fragmentos são suas posições e velocidades iniciais distintas.

Diante disso, as velocidades iniciais dos detritos foram definidas visando uma grande proximidade à velocidade do objeto antes da explosão, a fim de que a dissipação ocorresse de forma lenta e as trajetórias das partículas se desviassem pouco da órbita circular original. Como resultado, para um intervalo curto de tempo após a fragmentação, tem-se que: o comportamento da nuvem pode ser analisado como se fosse um único corpo, podendo-se dizer que a nuvem como um todo descreve uma trajetória circular.

Considerou-se também uma nuvem com uma grande quantidade de fragmentos ($n = 300$) muito próximos uns aos outros, a fim de minimizar a quantidade de espaços vazios na nuvem e torná-la mais próxima de um fluido, satisfazendo a Hipótese 2.

3.4.4 Risco de Colisão

O risco de colisão (R_c) é a probabilidade do evento ocorrer multiplicado pela consequência daquele evento (McKnight *et al.*, 2022), de modo que R_c pode ser utilizado para melhor avaliar o

impacto que a colisão teria sobre o ambiente orbital. Para isso, assumiu-se que o risco de colisão é dado pelo produto entre a probabilidade de colisão e a energia cinética do objeto logo antes da explosão (E_0), conforme a equação 14.

$$R_c = P_c E_0 \quad (14)$$

A energia cinética E_0 foi adotada como medida de severidade do evento, pois ela está diretamente associada à classificação da colisão em catastrófica ou não-catastrófica (Ostrogovich *et al.*, 2024). Tal associação decorre do fato de que, em geral, quanto maior é a energia envolvida na colisão, maiores são os danos para o satélite e maior é a gravidade da fragmentação.

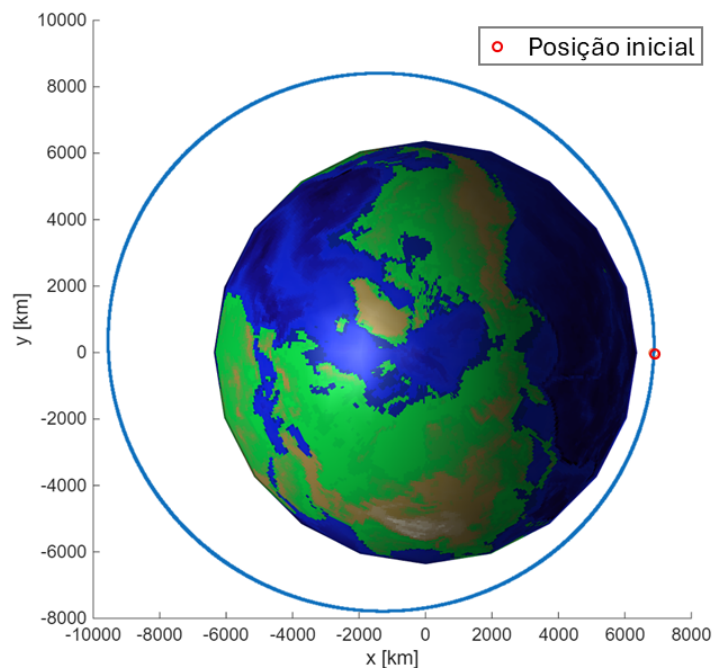
4 RESULTADOS

Simulou-se a dinâmica da partícula para cada caso da Tabela 1 e analisou-se como a adição de cada perturbação influenciou o comportamento dos elementos orbitais. Os resultados estão descritos a seguir.

4.1 CASO 1: SEM PERTURBAÇÕES

A simulação do caso não perturbado resultou em uma órbita constante ao longo do tempo, como pode ser observado na Figura 7, que mostra a trajetória percorrida pelo satélite ao longo de 90 dias.

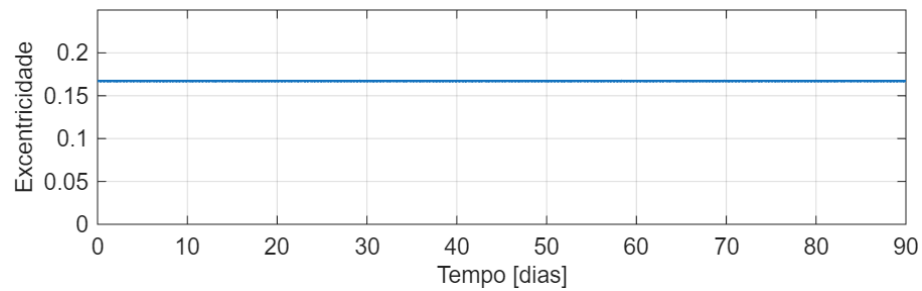
Figura 7 – Trajetória da partícula para o Caso 1 em um intervalo de 90 dias.



Fonte: Elaboração própria.

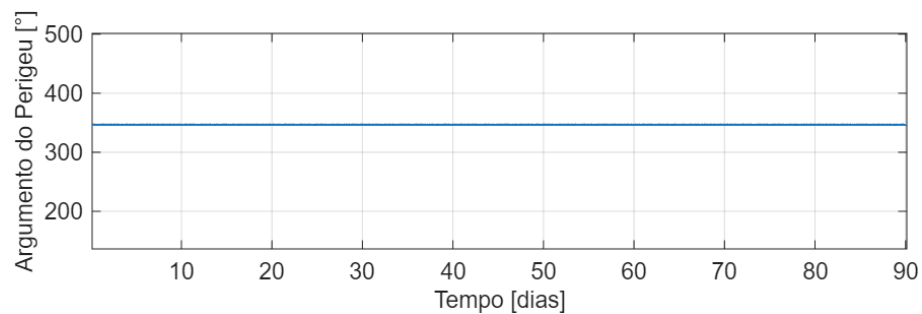
As análises dos elementos orbitais mostraram que estes permaneceram constantes ao longo do intervalo, com exceção apenas da anomalia média, associada à posição do satélite na órbita. A Figura 8 e a Figura 9 mostram o comportamento da excentricidade e do argumento do perigeu, respectivamente. Já a Tabela 3 reúne os valores dos elementos orbitais constantes obtidos.

Figura 8 – Comportamento da excentricidade no Caso 1.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 9 – Comportamento do argumento do perigeu no Caso 1.



Fonte: Elaboração própria.

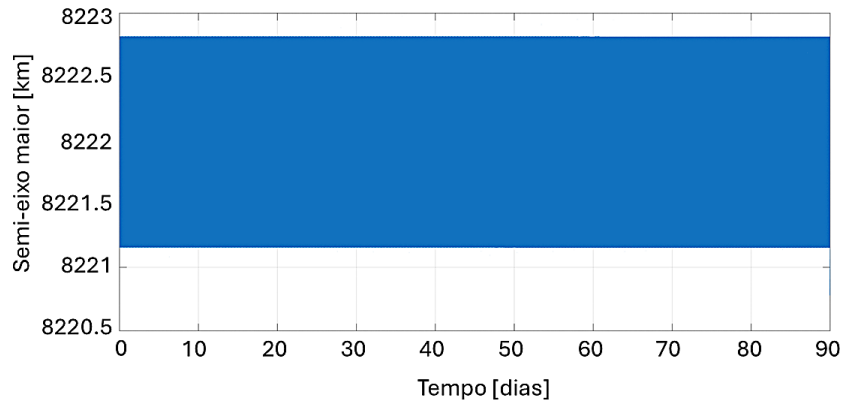
Tabela 3 – Valores dos elementos orbitais constantes no Caso 1.

Elemento orbital	Valor constante
Semi-eixo maior	8221 <i>km</i>
Excentricidade	0,1669
Inclinação	3,401°
Ascensão reta do nodo ascendente	0°
Argumento do perigeu	346,8°

Fonte: Elaboração própria.

A partir de uma análise mais detalhada, observou-se pequenas variações nos elementos orbitais, provavelmente causadas por erros numéricos. Ao diminuir o valor da tolerância usada na integração numérica, observou-se menor variação dos elementos, porém o custo computacional aumentou significativamente. Essa variação pode ser observada mais nitidamente na Figura 10, que mostra o comportamento do semi-eixo maior ao longo do tempo, para uma tolerância igual a 10^{-11} .

Figura 10 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 1.



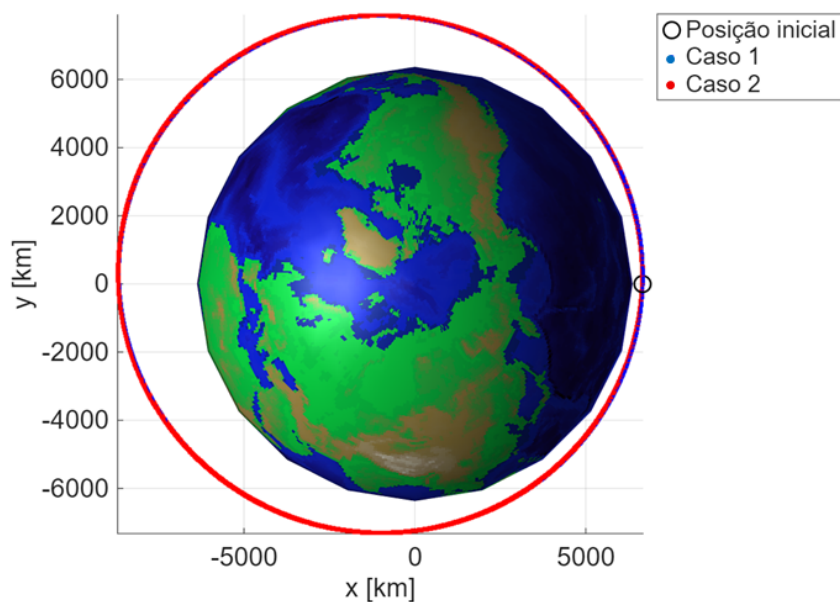
Fonte: Elaboração própria.

Visando um menor tempo de simulação, optou-se por utilizar uma tolerância igual a 10^{-9} nas simulações dos casos perturbados. Adicionalmente, o passo de tempo variável no integrador também pode contribuir para a variação observada. No entanto, a utilização de um passo fixo pequeno seria mais custoso computacionalmente, não havendo tempo viável para sua utilização.

4.2 CASO 2: INCLUSÃO DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DA LUA

No Caso 2, a inclusão da atração gravitacional da Lua gerou um pequeno desvio na trajetória da partícula em relação ao Caso 1, como pode ser observado na Figura 11, simulada para um período de 90 dias.

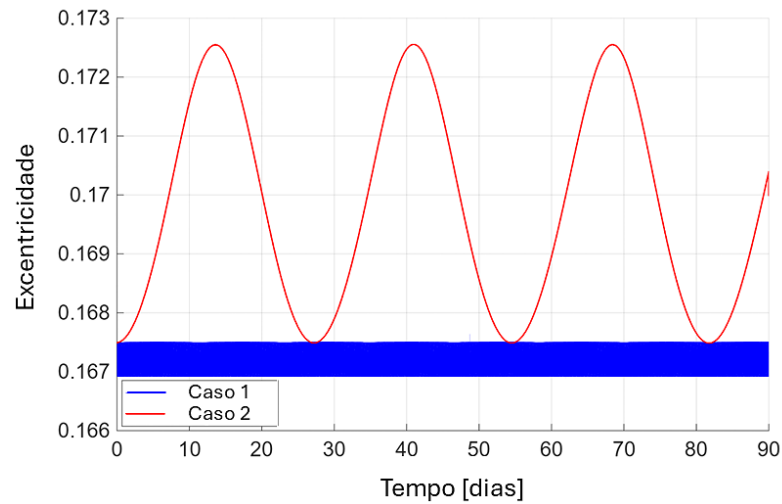
Figura 11 – Comparação das trajetórias da partícula nos Casos 1 e 2 durante 90 dias.



Fonte: Elaboração própria.

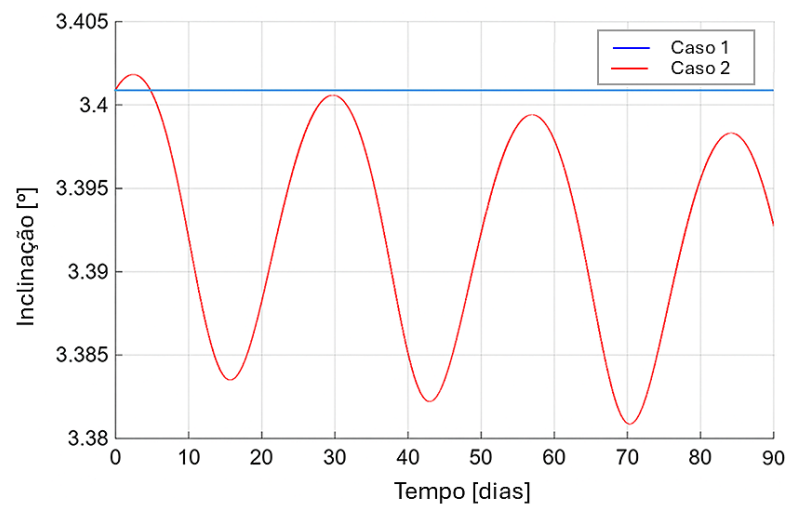
Segundo Carrara, Kuga e Rao (2012, p. 36), a atração da Lua deve gerar perturbações pequenas e periódicas em todos os elementos orbitais, exceto no semi-eixo maior. A Figura 12, a Figura 13 e a Figura 14 mostram essas variações. A ascensão reta do nodo ascendente (RAAN) não variou, pois seu valor inicial foi igual a 0° .

Figura 12 – Comportamento da excentricidade no Caso 2.



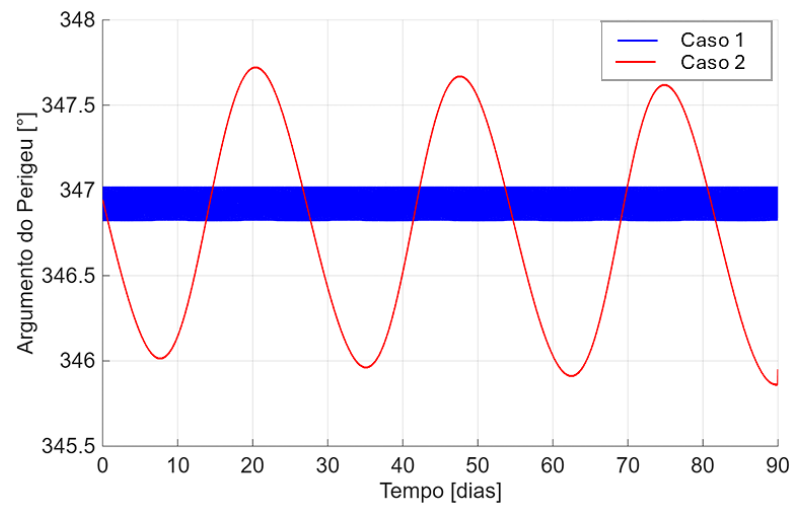
Fonte: Elaboração própria.

Figura 13 – Comportamento da inclinação no Caso 2.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 14 – Comportamento do argumento do perigeu no Caso 2.

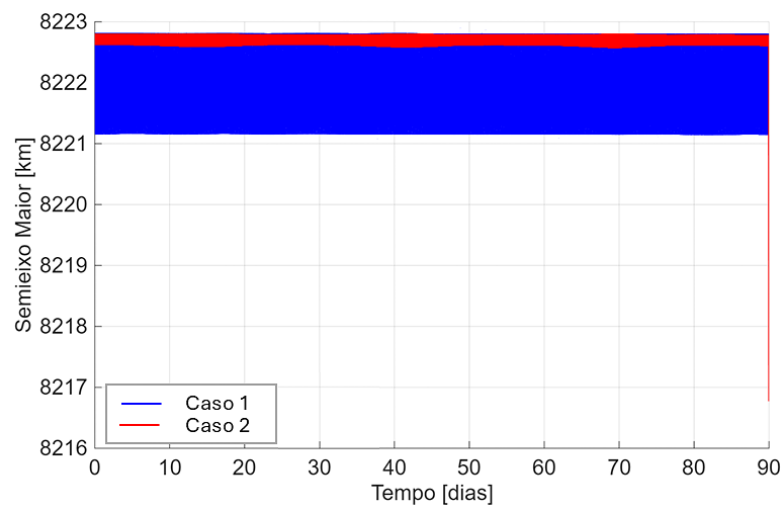


Fonte: Elaboração própria.

Além das variações periódicas, a atração da Lua gerou variações seculares na inclinação e no argumento do perigeu, que são variações graduais e de caráter acumulativo. A diminuição desses elementos orbitais ao longo do tempo está relacionada à posição da Lua em relação à partícula. Caso efemérides distintas fossem consideradas, poderiam ser observados efeitos seculares diferentes, como nos resultados obtidos por Martynenko (1967), por exemplo.

Conforme esperado, o semi-eixo maior permaneceu aproximadamente constante, como mostra a Figura 15. Observa-se que a inclusão da atração lunar resultou na diminuição das variações do semi-eixo maior associadas aos erros numéricos.

Figura 15 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 2.

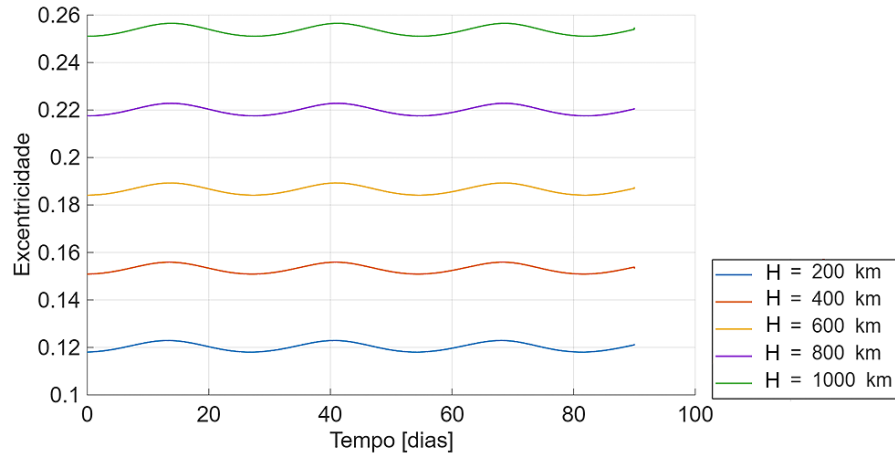


Fonte: Elaboração própria.

4.2.1 Influência da Altitude

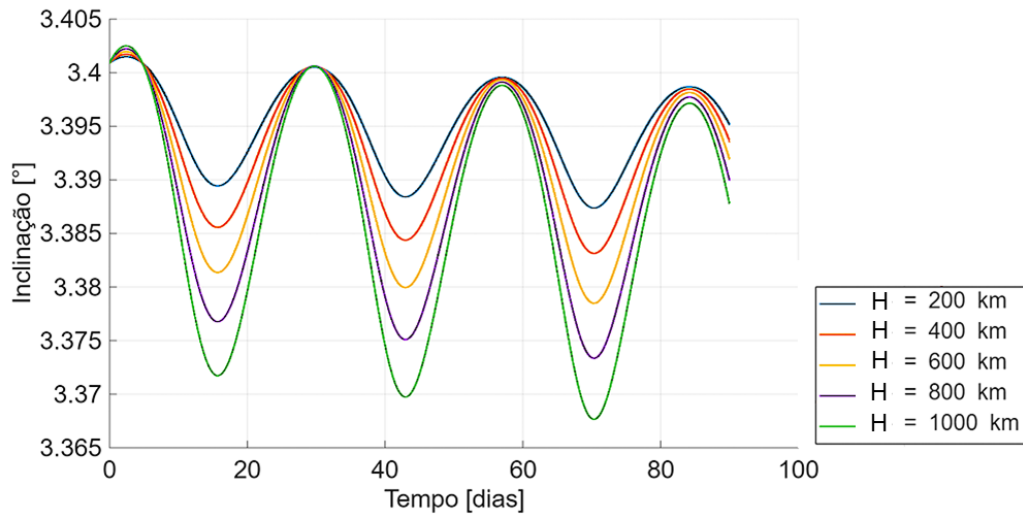
Considerando que a posição inicial da partícula é $\vec{r}_0 = (R_T + H) \hat{i}$, a influência da altitude no Caso 2 foi analisada considerando $H = [200; 400; 600; 800; 1000] \text{ km}$. A Figura 16 e a Figura 17 mostram, respectivamente, os comportamentos da excentricidade e da inclinação para essas altitudes.

Figura 16 – Influência da altitude na excentricidade para o Caso 2.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 17 – Influência da altitude na inclinação para o Caso 2.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que o aumento da altitude inicial da partícula resultou no aumento da excentricidade média e numa maior variação da inclinação. Isso ocorre pois, em órbitas mais altas, a partícula está mais próxima da Lua e, portanto, sofre mais sua influência.

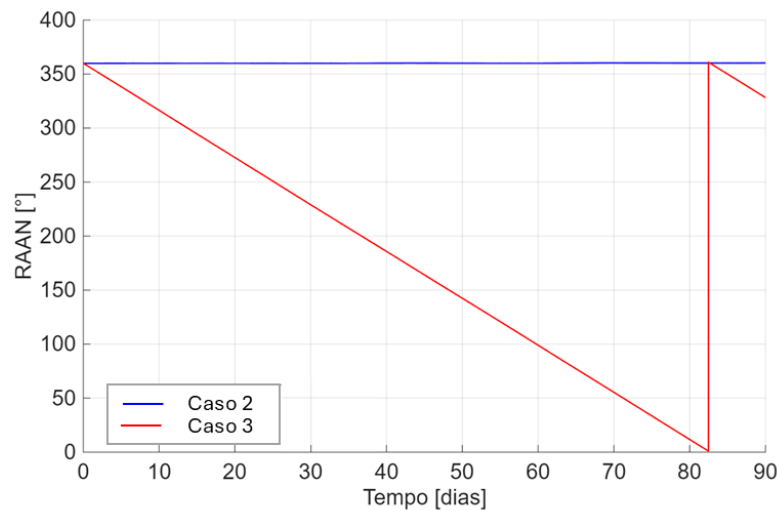
4.3 CASO 3: INCLUSÃO DO EFEITO J_2

Para órbitas com baixa inclinação, o J_2 causa dois efeitos principais:

1. Rotação do plano orbital ao redor do eixo de rotação da Terra (no sentido oposto ao movimento da partícula);
2. Rotação da órbita no plano orbital (no mesmo sentido do movimento da partícula).

O primeiro efeito tem como consequência a diminuição gradual do ângulo de ascensão reta do nodo ascendente, como mostra a Figura 18.

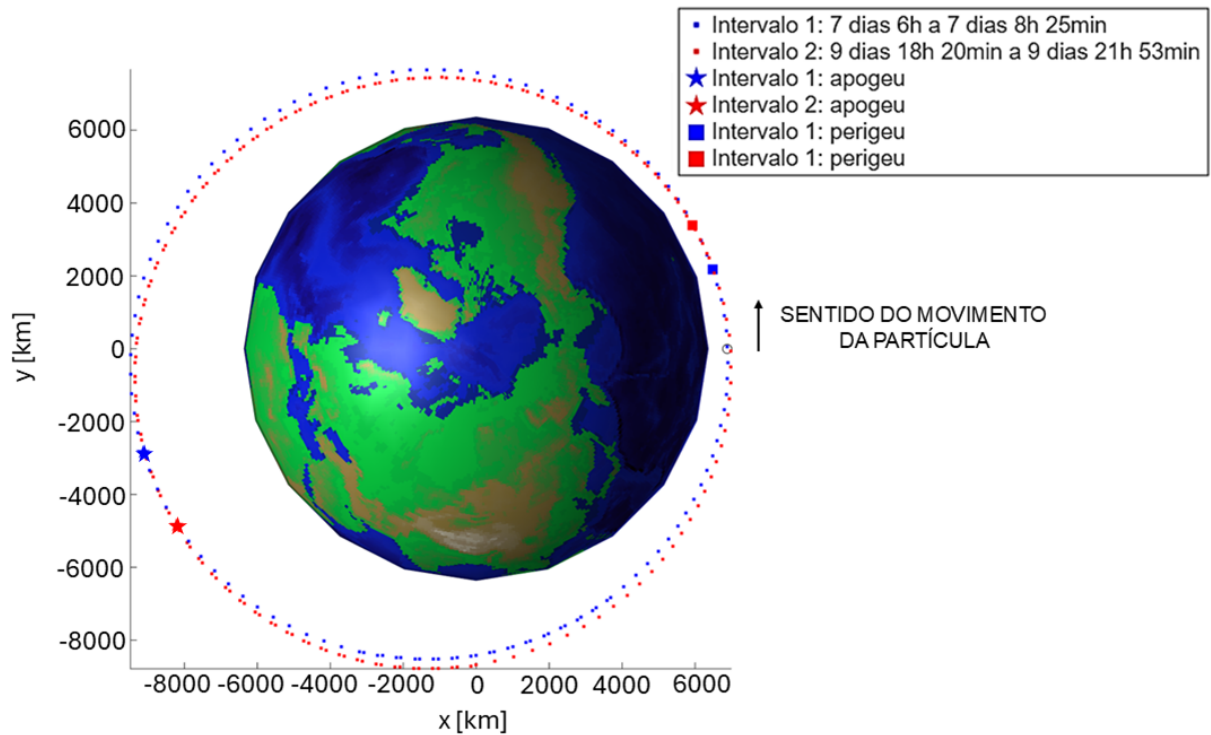
Figura 18 – Comportamento da RAAN no Caso 3.



Fonte: Elaboração própria.

O segundo efeito pode ser observado a partir da Figura 19, que mostra a trajetória descrita pela partícula em dois intervalos de tempo diferentes. O primeiro intervalo começa 7 dias e 6 horas após o início da propagação e termina no mesmo dia, às 8 horas e 25 minutos. Já o segundo intervalo começa 9 dias, 18 horas e 20 minutos após o início da propagação e termina no mesmo dia, às 21 horas e 53 minutos.

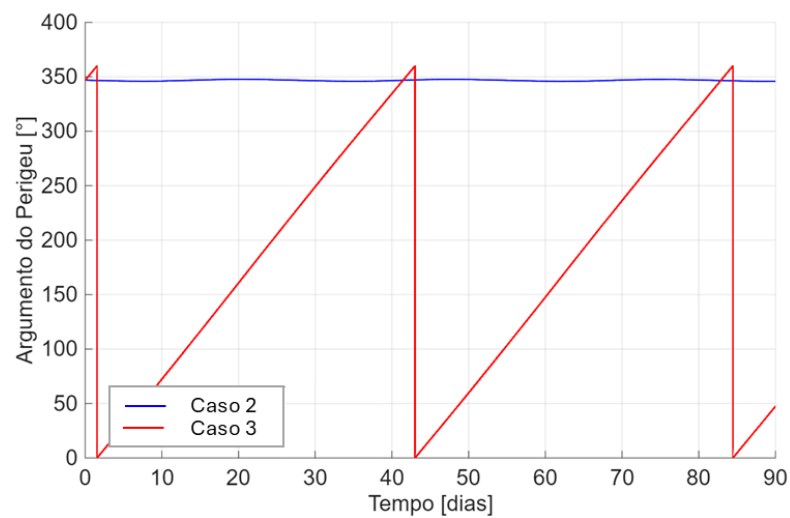
Figura 19 – Rotação do semi-eixo maior no plano orbital causada pelo efeito J_2



Fonte: Elaboração própria.

A rotação do apogeu e do perigeu observadas na Figura 19 tem como consequência o aumento gradual do argumento do perigeu, mostrado na Figura 20.

Figura 20 – Comportamento do argumento do perigeu no Caso 3.



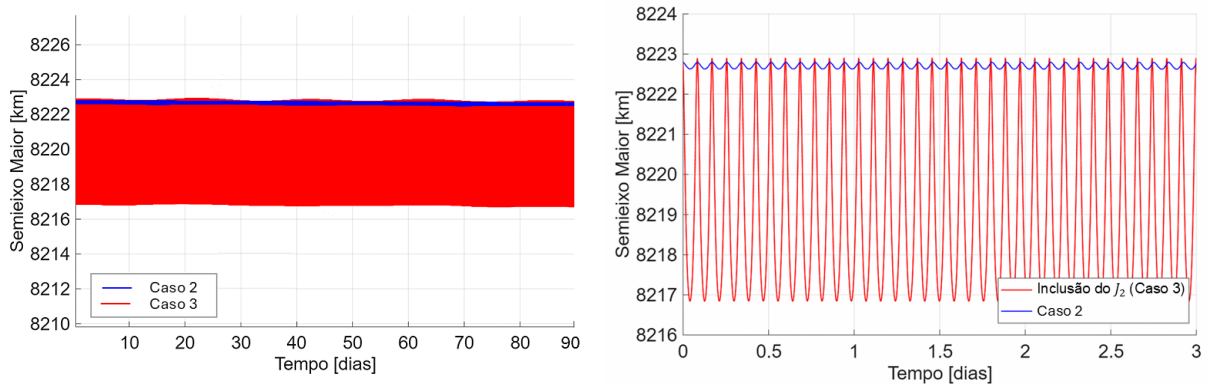
Fonte: Elaboração própria.

Estimou-se que a RAAN variou cerca de $4,4^\circ$ por dia, enquanto o argumento do perigeu variou em torno de 9° por dia, concluindo-se que o J_2 causou variações diárias significativas

nesses elementos.

Além disso, assim como a atração gravitacional da Lua, o efeito J_2 não causa perda de energia da partícula, de modo que o semi-eixo maior deveria permanecer constante. No entanto, na Figura 21, observa-se que a inclusão do J_2 gerou uma variação no semi-eixo maior de aproximadamente 6 km. Assim como nos casos anteriores, essas variações podem estar relacionadas a erros numéricos.

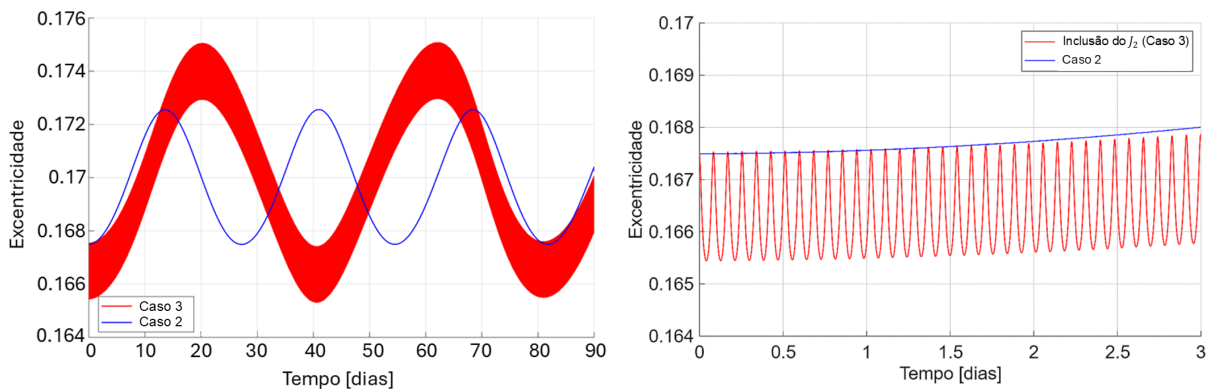
Figura 21 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 3.



Fonte: Elaboração própria.

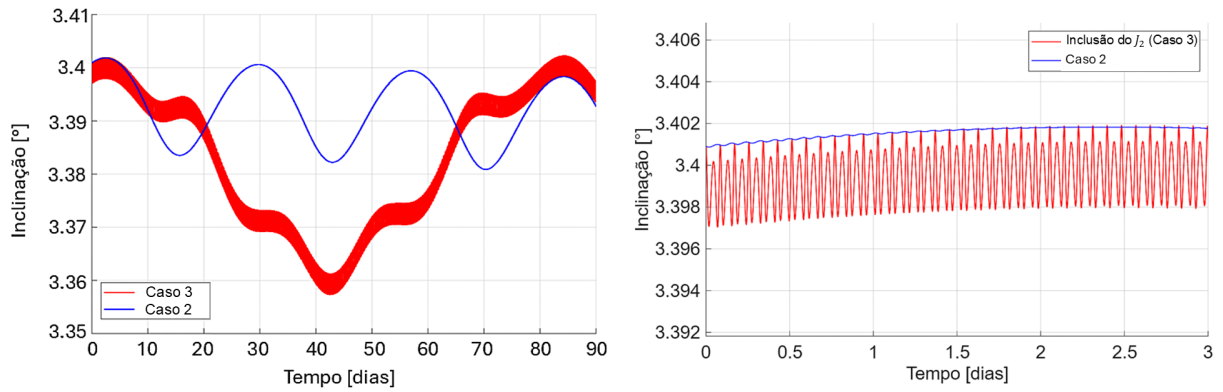
A Figura 22 e a Figura 23 mostram, respectivamente, a mudança de comportamento da excentricidade e da inclinação quando o efeito J_2 foi incluído nas análises. As imagens obtidas para um período de 90 dias mostram de forma mais nítida os resultados da interação entre os efeitos da atração gravitacional da Lua e do J_2 . Por outro lado, as imagens obtidas para um período de 3 dias mostram mais nitidamente as variações periódicas causadas pelo J_2 nos elementos orbitais.

Figura 22 – Comportamento da excentricidade no Caso 3.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 23 – Comportamento da inclinação no Caso 3.

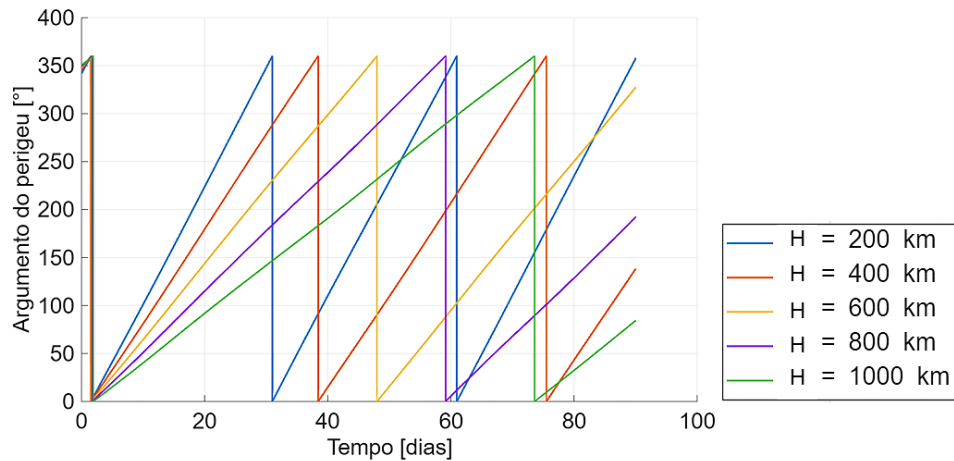


Fonte: Elaboração própria.

4.3.1 Influência da Altitude

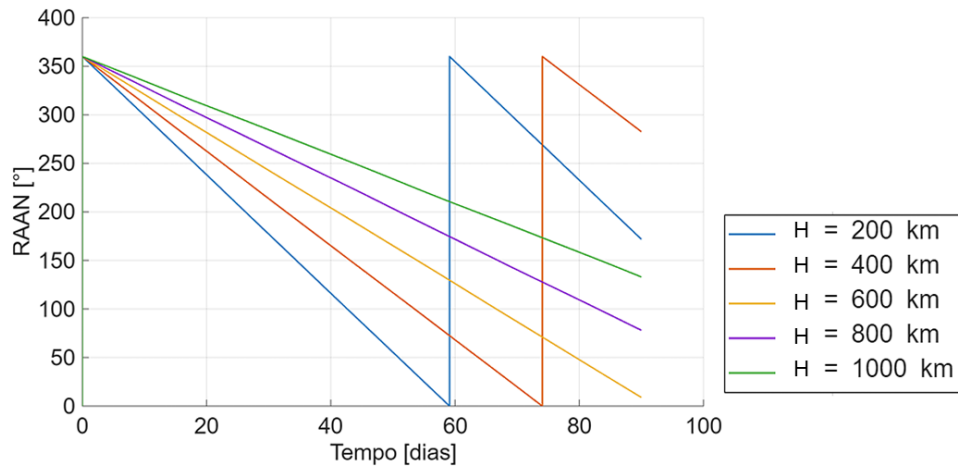
Variando-se a altitude inicial da partícula, concluiu-se que, ao contrário da atração da Lua, a influência do J_2 sobre a dinâmica orbital é maior quando o objeto está mais próximo do planeta, como mostram a Figura 24 e a Figura 25. Isso ocorre pois, como a atração gravitacional é mais forte em órbitas mais baixas, quaisquer variações no campo gravitacional são percebidas de forma mais significativa pela partícula.

Figura 24 – Comportamento do argumento do perigeu para diferentes altitudes no Caso 3.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 25 – Comportamento da RAAN para diferentes altitudes no Caso 3.

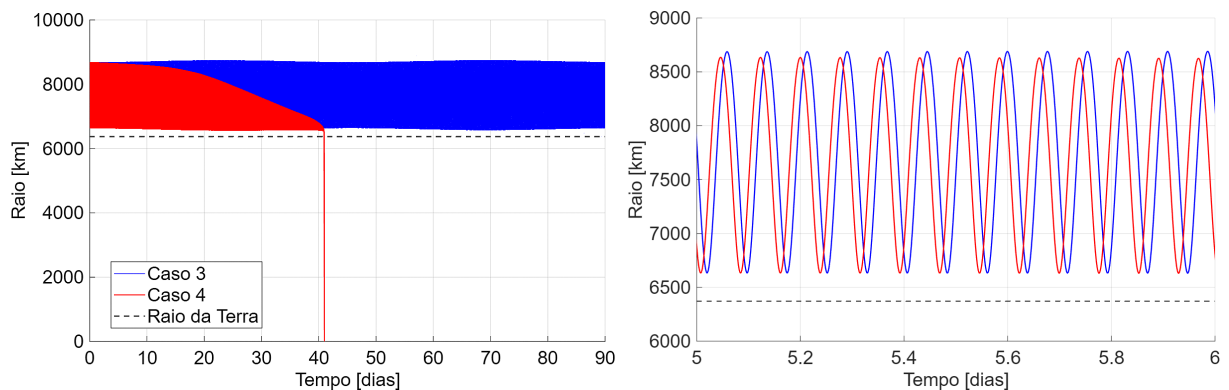


Fonte: Elaboração própria.

4.4 CASO 4: INCLUSÃO DO ARRASTO ATMOSFÉRICO

A densidade do ar diminui com o aumento da altitude, de modo que, para $H = 500 \text{ km}$, a influência do arrasto atmosférico é muito baixa. Assim, para melhor visualizar os efeitos causados por essa perturbação, a simulação desse caso foi realizada considerando-se $H = 300 \text{ km}$. Nessas condições, tem-se que a distância da partícula ao centro da Terra (raio orbital) varia conforme mostrado na Figura 26.

Figura 26 – Comportamento do raio orbital no Caso 4, para $H = 300 \text{ km}$.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 26, o valor máximo do raio orbital a cada ciclo corresponde à distância do apogeu, enquanto o valor mínimo corresponde à distância do perigeu. Dessa forma, verifica-se que a inclusão do arrasto causou a diminuição da distância do apogeu, enquanto a distância do perigeu permaneceu aproximadamente constante.

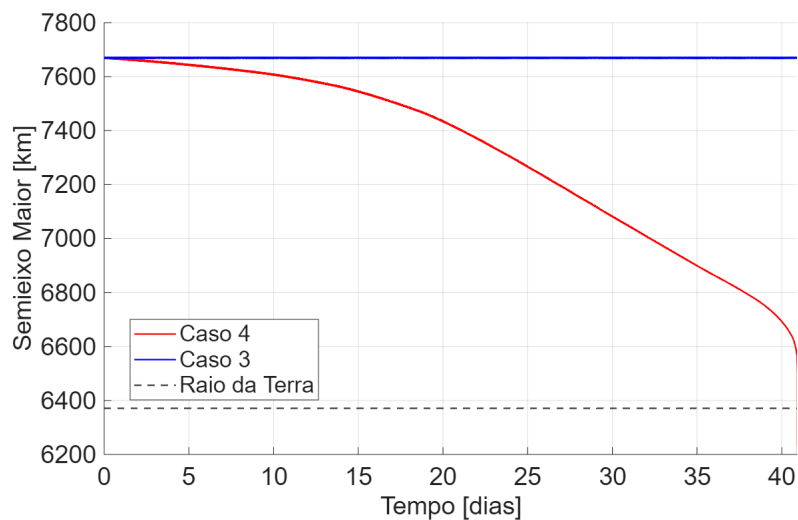
O fenômeno observado ocorre pois o atrito do detrito com as partículas de ar da atmosfera faz com que ele perca energia mecânica. Essa perda de energia é mais significativa no perigeu,

devido à maior densidade do ar naquela região e à alta velocidade do objeto ao passar, como consequência da Segunda Lei de Kepler. Desse modo, após passar pelo perigeu, a partícula possui menos energia mecânica do que ela tinha antes, sendo capaz de alcançar uma distância menor, o que resulta na diminuição da distância do apogeu observada.

Ademais, conforme a distância do apogeu diminui, ela se aproxima da distância do perigeu e a órbita tende a ficar mais circular ao longo do tempo (Kim; Vukovich, 2019). Quando essas distâncias se igualam, a perda de energia devido ao arrasto é tão significativa que o objeto rapidamente reentra na atmosfera. Na Figura 26, observa-se que a reentrada ocorre em aproximadamente 41 dias.

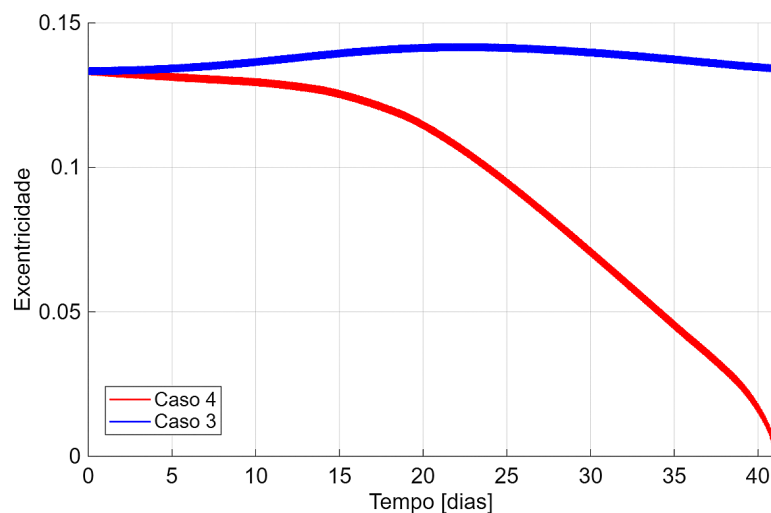
Esse é o principal efeito causado pelo arrasto e afeta diretamente o semi-eixo maior e a excentricidade orbital, como mostram a Figura 27 e a Figura 28, respectivamente.

Figura 27 – Comportamento do semi-eixo maior no Caso 4.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 28 – Comportamento da excentricidade no Caso 4.



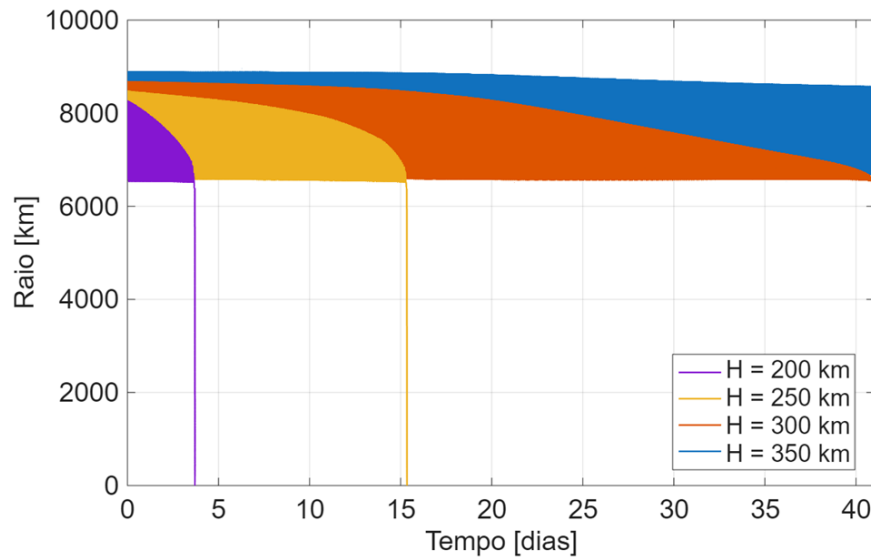
Fonte: Elaboração própria.

A alteração do semi-eixo maior, por si só, afeta os outros elementos orbitais. Porém, como outras perturbações também estão sendo consideradas, ao alterar o semi-eixo maior, o arrasto muda a forma como essas outras perturbações atuam sobre a órbita, resultando em diferenças adicionais na sua evolução.

4.4.1 Influência da Altitude

A Figura 29 mostra a variação do raio orbital para $H = [200; 250; 300; 350] \text{ km}$. Observa-se que o efeito do arrasto é maior em altitudes mais baixas, devido à densidade do ar mais elevada, o que ocasiona uma reentrada mais rápida.

Figura 29 – Comportamento do raio orbital para diferentes altitudes no Caso 4.



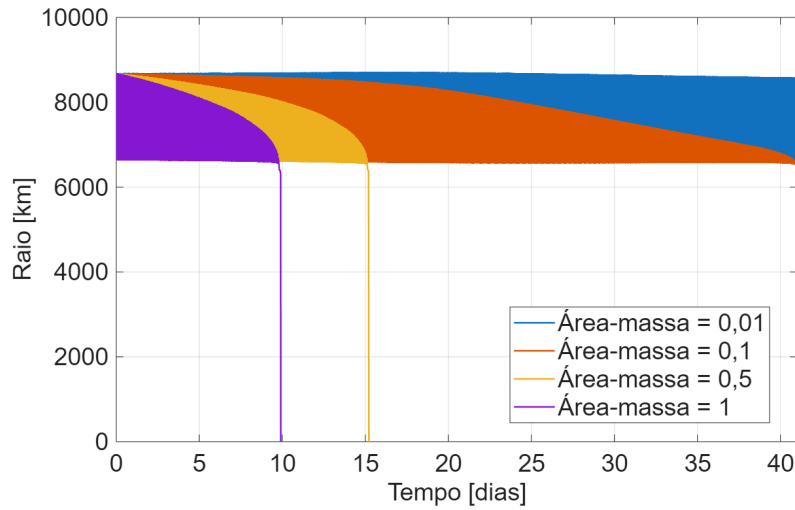
Fonte: Elaboração própria.

4.4.2 Influência da Relação Área-Massa

A influência da relação área-massa no Caso 4 foi avaliada mantendo $H = 300 \text{ km}$ e considerando $S/m = [0, 01; 0, 1; 0, 5; 1] \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$, como mostra a Figura 30.

Verificou-se que o objeto tende a reentrar mais rapidamente, sob efeito do arrasto, para maiores valores de S/m . Isso ocorre pois, uma área S maior aumenta a superfície de contato entre o objeto e as partículas do ar que colidem com ele, resultando em uma maior perda de energia. Além disso, uma massa menor reduz a inércia do corpo, permitindo que ele seja desacelerado com maior facilidade e reentre mais rapidamente.

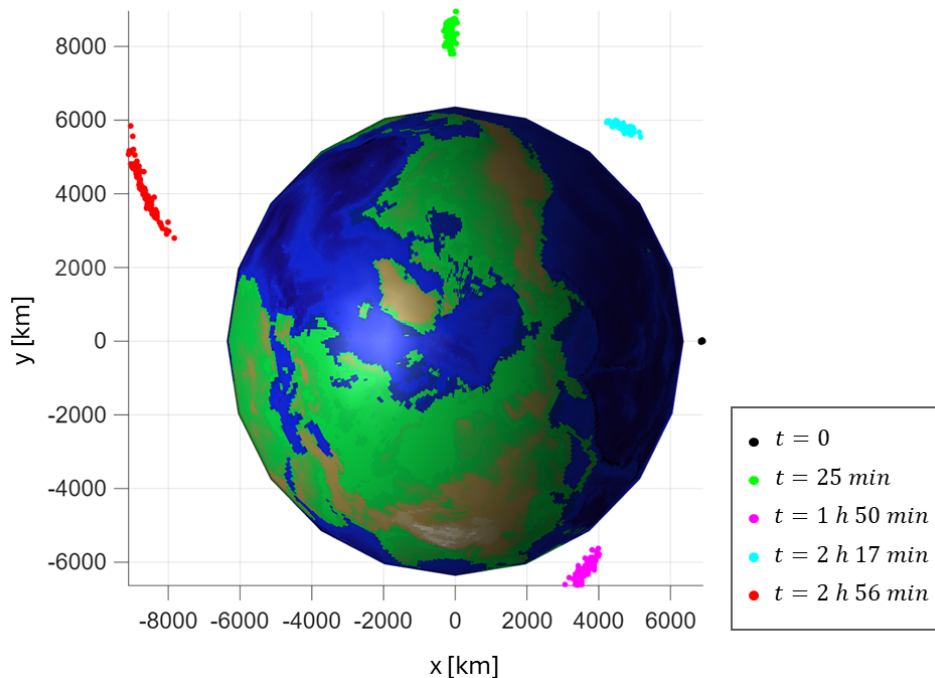
Figura 30 – Comportamento do raio orbital para diferentes razões área-massa no Caso 4.



4.5 PROPAGAÇÃO DA NUVEM

A propagação de uma nuvem de detritos com 100 elementos pode ser observada na Figura 31, considerando as perturbações do Caso 4.

Figura 31 – Evolução da nuvem de detritos com 100 elementos.



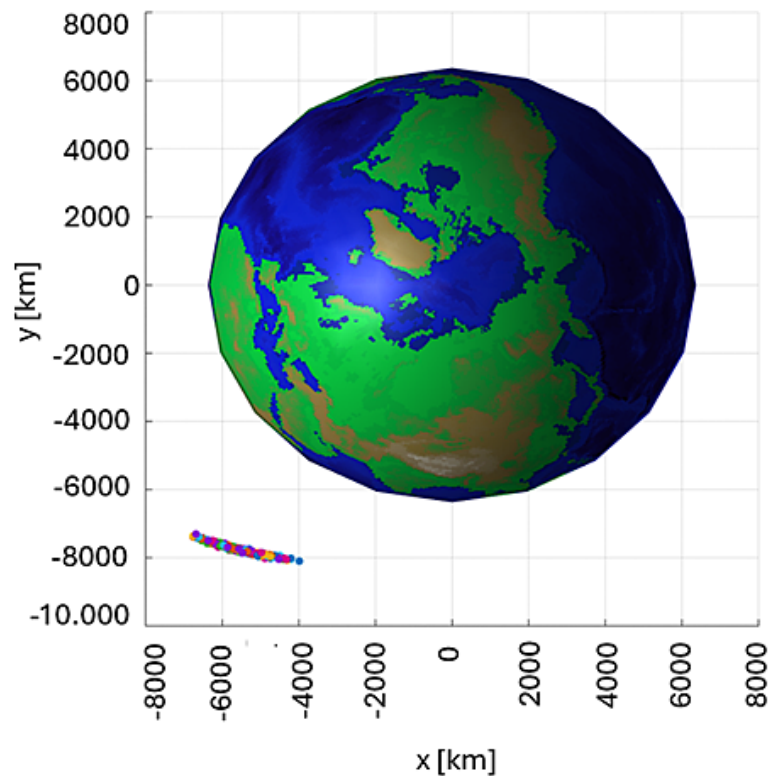
Nota-se que os elementos da nuvem tendem a se dissipar ao longo do tempo, devido às forças perturbadoras agindo sobre eles e às suas velocidades iniciais distintas. Verifica-se também que

essa dissipação fica mais nítida conforme a nuvem se afasta do planeta. Isso ocorre pois as pequenas diferenças nas excentricidades orbitais de cada partícula resultam em espaçamentos radiais mais perceptíveis no apogeu. Além disso, como os objetos permanecem mais tempo próximos ao apogeu do que ao perigeu, qualquer diferença nas velocidades dos objetos atua por um intervalo maior, resultando em uma separação angular mais pronunciada entre os fragmentos.

4.6 PROBABILIDADE E RISCO DE COLISÃO: TORO CIRCULAR

A Figura 32 mostra uma nuvem de 300 detritos em movimento não perturbado, 1 hora e 45 minutos após a explosão do objeto. Nesse instante, os detritos ainda estão muito próximos uns aos outros, satisfazendo as condições para aplicação da Hipótese 2.

Figura 32 – Nuvem com 300 elementos 1h 45min após a explosão.



Fonte: Elaboração própria.

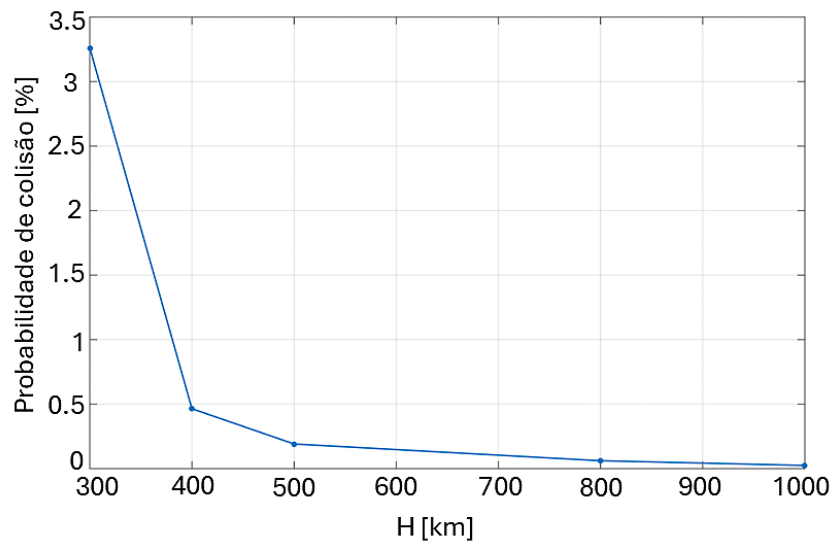
A influência da altitude inicial (H) sobre a probabilidade de colisão foi avaliada, considerando: $H = [300, 400, 500, 800, 1000] \text{ km}$. Os resultados, no instante de tempo igual a 1 hora e 45 minutos após a explosão, são mostrados na Tabela 4 e na Figura 33.

Tabela 4 – Probabilidade de colisão para diferentes valores de H , no instante: 1h 45min.

$H[km]$	$P_c [\%]$
300	3,26
400	0,465
500	0,191
800	0,0614
1000	0,0250

Fonte: Elaboração própria.

Figura 33 – Influência da altitude na probabilidade de colisão.

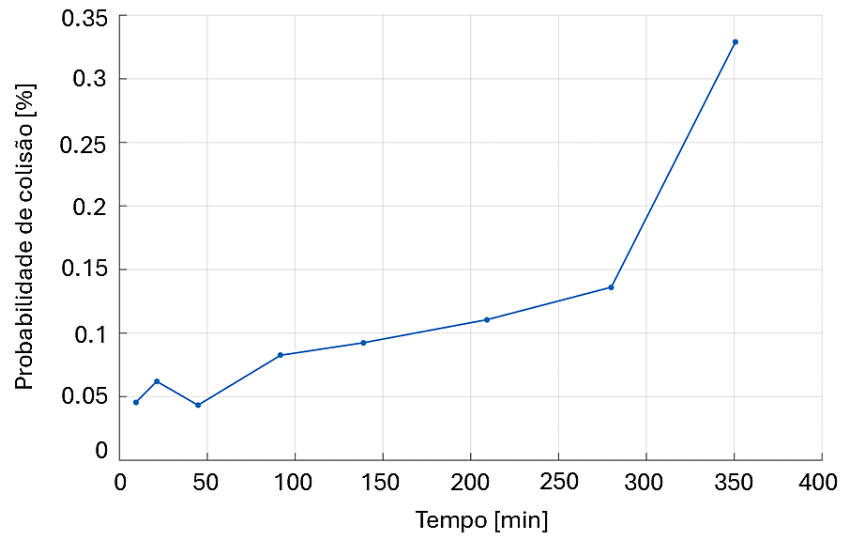


Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que a probabilidade de colisão tende a diminuir com o aumento da altitude. Isso ocorre devido ao aumento do raio do toro R e, consequentemente, seu volume. Como a probabilidade de colisão é a razão entre o volume da nuvem e o volume do toro (equação 13), logo, P_c tende a diminuir. Isso significa que explosões mais próximas do planeta são mais perigosas, uma vez que há uma maior chance de colisão entre os fragmentos e os satélites ativos presentes naquela órbita. Na realidade, no entanto, as forças perturbadoras, principalmente o arrasto atmosférico, provocam a reentrada de vários fragmentos em baixas altitudes, o que reduz a probabilidade de colisão (Stevenson *et al.*, 2025).

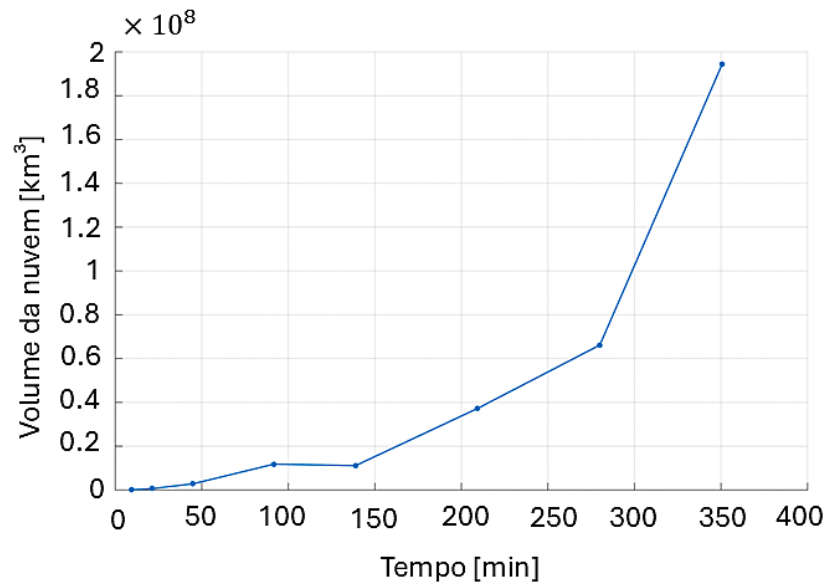
A Figura 34 mostra a variação de P_c ao longo do tempo, para $H = 800 \text{ km}$. Essa variação é ocasionada pelo aumento do volume da nuvem, mostrado na Figura 35, que ocorre à medida que os fragmentos de dissipam.

Figura 34 – Evolução da probabilidade de colisão ao longo do tempo.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 35 – Evolução do volume da nuvem ao longo do tempo.

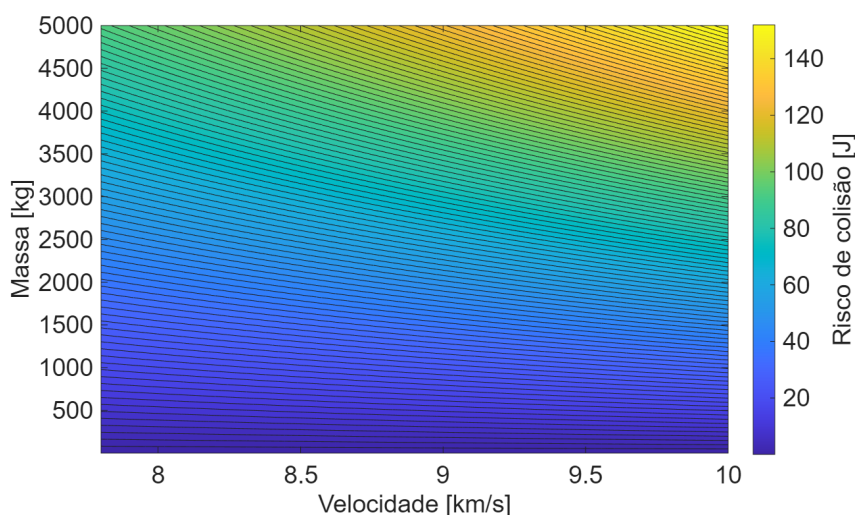


Fonte: Elaboração própria.

Considerando que o valor máximo admitido de P_c para realização de manobras de evasão é 10^{-4} ou 0, 01% (McKnight *et al.*, 2022), logo, uma explosão nessas condições implicaria que um objeto ativo dentro do toro deveria realizar uma manobra de evasão. Na realidade, no entanto, a ocorrência de reentradas e a dissipação mais acelerada dos fragmentos, devido às perturbações, devem diminuir a probabilidade de colisão após um certo período de tempo, de modo os resultados obtidos só seriam uma aproximação aceitável durante pouco tempo após a explosão, antes da dissipação se tornar muito significativa.

Por fim, a Figura 36 mostra a variação do risco de colisão em função da massa e da velocidade do objeto logo antes da explosão. A massa abrange valores de $1,33 \text{ kg}$, correspondente à massa de um módulo de cubesat, até 5000 kg , correspondente à massa de um estágio de foguete ou um satélite grande. Já a velocidade abrange valores considerados típicos para um objeto em órbita, variando entre $7,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ e $10 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Figura 36 – Risco de colisão em função da massa e da velocidade para $H = 800 \text{ km}$.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que, quanto mais massivo é o objeto, maior é o risco de colisão resultante de sua explosão. Por isso, estágios de foguetes e satélites grandes inativos normalmente têm prioridade para serem removidos de órbitas economicamente importantes, como a Low Earth Orbit. O risco também é maior quando o objeto está orbitando em velocidades mais altas, o que normalmente ocorre em órbitas mais baixas.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi possível verificar os efeitos causados pelas perturbações da atração da Lua, oblatividade terrestre e arrasto atmosférico sobre a dinâmica orbital de uma partícula, além de identificar os fatores que influenciam a magnitude desses efeitos.

Verificou-se que a atração da Lua causou variações periódicas pequenas nos elementos orbitais, além de perturbações seculares em alguns elementos devido às efemérides lunares consideradas. O efeito J_2 causou a diminuição gradativa da ascensão reta do nodo ascendente, o aumento gradativo do argumento do perigeu, além de variações periódicas nos outros elementos orbitais. O arrasto atmosférico foi a única perturbação, dentre as consideradas, que alterou o comprimento do semi-eixo maior de forma secular, resultando na diminuição desse comprimento e da excentricidade orbital.

A partir dos resultados obtidos, concluiu-se que, se a partícula está em uma órbita baixa, o arrasto atmosférico e o efeito J_2 são mais significativos, e a atração da Lua pode ser desprezada, por simplicidade. No entanto, se a relação área-massa do objeto for muito pequena, o arrasto também pode ser desconsiderado.

Para altitudes mais altas (por exemplo, acima de 400 km), o efeito do arrasto pode ser desprezado, de modo que poderiam ser considerados apenas o J_2 e a atração da Lua. No entanto, como a atração da Lua causa efeitos pequenos, em comparação com o J_2 , para um período relativamente curto, o efeito da atração lunar também poderia ser desconsiderado. Para um período longo, no entanto, os efeitos seculares tendem a se tornar mais significativos. Dessa forma, a inclusão das perturbações nas simulações de propagação depende não só da altitude em que o objeto está ou de sua relação área-massa, mas também do período considerado.

Foram analisados os impactos de uma explosão no ambiente orbital por meio da propagação de uma nuvem de detritos e análise do risco de colisão. Para isso, foram assumidas as hipóteses de que a nuvem descreve uma órbita circular não perturbada, apresenta uma distribuição uniforme de detritos e está contida numa região em formato de toro.

Verificou-se que o aumento do volume da nuvem, causado pela dispersão das partículas ao longo do tempo, elevou a probabilidade de colisão em órbita. A probabilidade também foi maior para altitudes mais baixas, de modo que pode-se dizer que explosões em órbitas mais baixas são mais danosas devido ao maior volume ocupado pelos fragmentos em relação ao volume disponível (volume do toro). Concluiu-se, no entanto, que os resultados obtidos são válidos apenas por um curto período de tempo após a explosão, devido à reentrada dos detritos na atmosfera e à sua tendência de se dispersarem e formarem anéis em torno da Terra, fenômeno análogo ao observado em Saturno. Adicionalmente, em órbitas baixas, a maior velocidade dos objetos envolvidos aumenta a energia liberada durante a explosão, resultando em um risco de colisão mais elevado.

REFERÊNCIAS

- ALFRIEND, K. *et al.* Probability of collision error analysis. **Space Debris**, [s. l.], v. 1, p. 21–35, jan. 1999.
- BRITO, T. P. **Estudo da evolução de detritos espaciais sujeitos às perturbações do potencial terrestre, J_2 e J_{22} , luni-solar, pressão de radiação solar e do arrasto atmosférico.** 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2019. Disponível em: http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=121603&midiaext=78245. Acesso em: 10 ago. 2025.
- CARRARA, V.; KUGA, H.; RAO, K. **Satélites artificiais: movimento orbital.** São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2012. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/274065539_SATELITES_ARTIFICIAIS_-_MOVIMENTO_ORBITAL. Acesso em: 4 ago. 2025.
- COOK, G. E. Luni-solar perturbations of the orbit of an earth satellite. **The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**, [s. l.], v. 6, p. 271–291, abr. 1962.
- EUROPEAN SPACE AGENCY. **ESA's annual space environment report.** Darmstadt, Germany, 2025. Issue/Revision 9.0. Disponível em: https://www.sdo.esoc.esa.int/environment_report/Space_Environment_Report_latest.pdf. Acesso em: 26 jul. 2025.
- FORMIGA, J. K. S. *et al.* Study of collision probability considering a non-uniform cloud of space debris. **Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 39, mar. 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40314-019-0997-z>. Acesso em: 20 set. 2025.
- INTER-AGENCY SPACE DEBRIS COORDINATION COMMITTEE. **IADC space debris mitigation guidelines.** Vienna, 2025. Disponível em: https://www.unoosa.org/res/oosadoc/data/documents/2025/aac_105c_12025crp/aac_105c_12025crp_9_0_html/AC105_C1_2025_CRP09E.pdf. Acesso em: 31 jul. 2025.
- KESSLER, D. J. Collision probability at low altitudes resulting from elliptical orbits. **Advances in Space Research**, Oxford, v. 10, n. 3-4, p. (3)393–(3)396, 1990.
- KESSLER, D. J.; COUR-PALAIS, B. G. Collision frequency of artificial satellites: the creation of a debris belt. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, [s. l.], v. 83, p. 2637–2646, 1978.
- KIM, Y.; VUKOVICH, G. Satellite orbit decay due to atmospheric drag. **International Journal of Space Science and Engineering**, [s. l.], v. 5, jan. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/330402042_Satellite_orbit_decay_due_to_atmospheric_drag. Acesso em: 10 set. 2025.
- KLINKRAD, H. **Space debris: models and risk analysis.** [S. l.]: Springer, 2006.
- KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. **Introdução à mecânica orbital.** São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2012.

LETIZIA, F. *et al.* Long-term environment simulations and risk characterization in support of a zero debris policy. *In: INTERNATIONAL ORBITAL DEBRIS CONFERENCE*, 2., 2023, Sugar Land, Texas. **Papers** [...]. Houston: Lunar and Planetary Institute, 2023. Disponível em: <https://www.hou.usra.edu/meetings/orbitaldebris2023/pdf/6029.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2025.

LETIZIA, F. *et al.* Debris cloud evolution in low Earth orbit. *In: INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS*, 64., 2013, Beijing. **Proceedings** [...]. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/257603878_Debris_cloud_evolution_in_Low_Earth_Orbit. Acesso em: 17 set. 2025.

LETIZIA, F.; COLOMBO, C.; LEWIS, H. G. Collision probability due to space debris clouds through a continuum approach. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, [s. l.], v. 39, p. 2240–2249, out. 2016.

MARTYNENKO, B. K. Lunar-solar perturbations of a 24-hour satellite. **Institut Teoreticheskoi Astrotmii Biulleten'**, Saint Petersburg, v. 11, p. 33-47, 1967.

MCKNIGHT, D. *et al.* A map of the statistical collision risk in LEO. *In: ADVANCED MAUI OPTICAL AND SPACE SURVEILLANCE TECHNOLOGIES CONFERENCE (AMOS)*, 23., 2022, Maui, Hawaii. **Proceedings** [...]. Maui: Maui Economic Development Board, 2022. Disponível em: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2022/Poster/McKnight.pdf>. Acesso em: 14 set. 2025.

NIE, T.; GURFIL, P.; ZHANG, S. Semi-analytical model for third-body perturbations including the inclination and eccentricity of the perturbing body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, [s. l.], v. 131, jun. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/333732475_Semi-analytical_model_for_third-body_perturbations_including_the_inclination_and_eccentricity_of_the_perturbing_body. Acesso em: 28 out. 2025.

OSTROGOVICH, L. *et al.* Fragmentation modeling and risk assessment for low Earth orbits. *In: DIGITAL AVIONICS SYSTEMS CONFERENCE (DASC)*, 43., 2024, San Diego. **Proceedings** [...]. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2024. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10749401>. Acesso em: 28 jul. 2025.

ROCHA, A. **Numerical methods and tolerance analysis for orbit propagation**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeroespacial) - San José State University, San José, 2018. Disponível em: <https://www.sjsu.edu/ae/docs/project-thesis/Angel.Rocha.Sp18.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2025.

STEVENSON, E. *et al.* Status of the space environment: towards zero debris through orbital clearance. *In: EUROPEAN CONFERENCE ON SPACE DEBRIS*, 9., 2025, Bonn, Germany. **Proceedings** [...]. Darmstadt: ESA Space Debris Office, 2025. Disponível em: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc9/paper/330/SDC9-paper330.pdf>. Acesso em: 26 jul. 2025.