

FERNANDA KAREN SOUSA DE OLIVEIRA

Ensinando álgebra no ensino fundamental com jogos

Fernanda Karen Sousa de Oliveira

Ensinando álgebra no ensino fundamental com jogos

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosa Monteiro Paulo

O48e	Oliveira, Fernanda Karen Sousa de Ensinando álgebra no ensino fundamental com jogos / Fernanda Karen Sousa de oliveira – Guaratinguetá, 2020. 41 f. : il. Bibliografia: f. 40-41 Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2020. Orientadora: Prof^a Dr^a Rosa Monteiro Paulo 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Material didático. 4. Jogos educativos. I. Título.
------	---

CDU 51

FERNANDA KAREN SOUSA DE OLIVEIRA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA


Prof. Dra. Vivian Gomes Martins
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dra. Rosa Monteiro Paulo
Orientadora/UNESP-FEG


Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza
UNESP-FEG


Prof. Ms. Anderson Luis Pereira
UNESP/Rio Claro

Dezembro, 2019

Dedico este trabalho, de modo especial, a Deus, à minha família e amigos, que estiveram ao meu lado me dando forças.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por me proporcionar forças para superar todos os obstáculos enfrentados em minha vida acadêmica.

A minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Rosa Monteiro Paulo que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

Aos meus pais Claudete e Luiz que, apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos.

Ao meu namorado Altiéres que sempre me incentivou diante das frustrações e medos ocorridos durante a graduação.

Aos meus colegas de faculdade e amigos do Colégio Tableau pelo total apoio em minha pesquisa e pela ajuda no desenvolvimento das ideias.

“Só se pode alcançar um grande êxito quando
nos mantemos fiéis a nós mesmos.”

Friedrich Nietzsche

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise de como o material manipulativo e os jogos contribuem para a aprendizagem da Álgebra no 9º ano do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que considera a importância da experiência vivida pelos sujeitos. Os dados produzidos para a pesquisa foram oriundos de atividades desenvolvidas com um grupo de 6 alunos de 9º ano do ensino fundamental de um colégio da rede particular de ensino da cidade de Guaratinguetá/SP. A atividade proposta desencadeou discussões que foram analisadas permitindo-nos compreender o que era interrogado. Destacamos, na análise, o modo pelo qual os alunos resolvem equações do 2º grau com o auxílio de materiais manipulativos. Vimos que eles utilizam estratégias que envolvem “tentativa e erro”, mas também recorrem com frequência à fórmula de Bhaskara. O jogo tornou-se um recurso que favoreceu o diálogo dando-nos oportunidade de ver os modos pelos quais os alunos exploravam as situações problemas e sugeriam soluções.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de álgebra. Educação matemática. Materiais manipulativos. Jogos.

ABSTRACT

The objective of this completion of course work is to present an analysis of how manipulative material and games contribute to Álgebra learning in the ninth grade of elementary school. It is a qualitative research that considers the importance of the experience lived by the subjects. The data produced for the research came from activities developed with a group of six students from ninth grade of a private school in Guaratinguetá city, that were subjects of our research. The proposed activity triggered discussions that were analyzed allowing us to understand what was interrogated. We highlight the analysis how students solve degrees equations. We saw that they use strategies that involve “attempt and error”, but also frequently resort to the Bhaskara formula. The game became a resource that favored dialogue by giving us an opportunity to see the ways students exploited problem situation and suggest solutions.

KEYWORDS: Álgebra teaching. Mathematic education. Manipulative materials. Games.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Área de quadrado de lado 8	15
Figura 2: Quadrado perfeito	16
Figura 3: Situação de aprendizagem 5.....	20
Figura 4: Situação de aprendizagem 5.....	21
Figura 5: Situação de aprendizagem 5.....	22
Figura 6: Situação de aprendizagem 5.....	23
Figura 7: Atividade desenvolvida com os alunos.....	27
Figura 8: Atividade desenvolvida com os alunos.....	28
Figura 9: Atividade desenvolvida.....	29
Figura 10: Resolução dos alunos do grupo 2.....	30
Figura 11: Resolução dos alunos do grupo 1.....	31
Figura 12: Exercício resolvido pelos alunos do grupo 1	32
Figura 13: Exercício resolvido pelos alunos	33
Figura 14: Exercícios resolvidos pelos alunos	34
Quadro 1: Primeira pergunta	35
Quadro 2: Segunda pergunta.....	35
Quadro 3: Terceira pergunta.....	36
Quadro 4: Quarta pergunta.....	36
Quadro 5: Quinta pergunta	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO TEÓRICA.....	13
2.1	ASPECTOS HISTÓRICOS	13
2.2	A ÁLGEBRA NO BRASIL	17
3	METODOLOGIA DE PESQUISA.....	24
3.1	A PESQUISA QUALITATIVA	24
3.2	JUSTIFICATIVA DA PESQUISA.....	25
3.3	OBJETIVO DA PESQUISA.....	26
3.4	A PRODUÇÃO DE DADOS NA PESQUISA.....	26
4	ANÁLISE DOS DADOS.....	30
5	INTERPRETAÇÃO DAS CONVERGÊNCIAS	37
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	38
	REFERÊNCIAS.....	40

1 INTRODUÇÃO

As diferentes reações dos alunos revelam uma grande curiosidade, mas também muitas dificuldades com os conteúdos o que leva o professor a buscar modos de ensinar que possam favorecer a compreensão do conteúdo. Essa busca faz com que o professor reflita sobre sua postura em sala de aula, sobre as fragilidades de seus alunos, sobre o que lhes desperta a atenção, levando-o a querer ensinar a matemática de modo que ela seja entendida pelos alunos e não decorada.

Os jogos e materiais manipulativos contribuem para um ambiente em sala de aula que fuja do modelo tradicional de ensino com a transmissão de conteúdos pelo professor e a resolução de exercícios pelos alunos. Contribui, também, para que a turma seja disposta de modo que haja diálogo entre eles. Tal qual entendemos, o trabalho com jogos e recursos manipulativos, permite mudar o cenário da sala de aula na intenção de fazer com que o aluno busque aprender e demonstre interesse pelas atividades que lhes são propostas.

Nesta pesquisa, buscamos compreender como o aluno atribui significado a equação do 2º grau e qual o seu modo de pensar ao resolver tais equações. Para tanto elaboramos uma atividade com jogos cujo objetivo é auxiliar os alunos na compreensão desse conteúdo. O jogo envolvia algumas situações problemas sobre equações do 2º grau completas e incompletas cuja intenção era ver o modo pelo qual os alunos as resolviam, quais estratégias usavam, etc. considerando aspectos relevantes ao pensamento algébrico.

Em nossos estudos vimos que a Álgebra passou por vários estágios de desenvolvimento até chegar ao simbolismo com que a conhecemos hoje. Porém, no desenvolvimento dos conteúdos algébricos na escola prevalece a simbologia e isso nos fez buscar, nos jogos, uma possibilidade de trabalhar com situações problemas que possibilitassem compreender “*como os alunos resolvem equações do 2º grau?*”. Para dar conta de compreender o interrogado, optamos por desenvolver uma pesquisa de cunho qualitativo, ou seja, nosso foco está nos aspectos subjetivos.

Neste texto que expõe a pesquisa feita organizamos, na primeira seção esta introdução, na qual temos a intenção de expor ao leitor o que é feito na pesquisa e como ela está expressa neste texto.

Na segunda seção trazemos a revisão teórica onde tratamos os aspectos históricos da Álgebra e como cada autor contribuiu significativamente para seu desenvolvimento desde os primórdios até a Álgebra atual. Também consideramos a presença da Álgebra no currículo, na escola e no Caderno do Professor, material da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo.

Na terceira seção apresentamos a metodologia de pesquisa utilizada no decorrer deste trabalho, destacando aspectos fundamentais para a análise dos dados de nossa pesquisa. Apresentamos a pergunta orientadora da pesquisa e a atividade desenvolvida com os alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Na quarta seção apresentamos a análise dos dados. Na quinta seção, a partir de questões feitas aos alunos, apresentamos as convergências de significado de suas respostas destacando a opinião deles acerca do trabalho realizado.

Finalizamos com as considerações finais em que é esboçado o modo pelo qual compreendemos a interrogação da pesquisa.

2 REVISÃO TEÓRICA

Nesta seção traremos um estudo acerca do desenvolvimento da Álgebra e sobre a presença da Álgebra no currículo escolar.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA ÁLGEBRA

O desenvolvimento da Álgebra ocorreu ao longo de um período grande de tempo e passou por várias fases com características distintas até se tornar a Álgebra que conhecemos hoje. Vários matemáticos e filósofos fizeram parte desta evolução e cada um desenvolveu um aspecto da Álgebra e um método de resolver problemas. A notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios: o retórico (ou verbal), o sincopado (no qual eram usadas abreviações de palavras) e o simbólico.

No livro Elementos de Euclides era inadequado considerar o que era feito por ele como Álgebra, pois, não era usado nenhum tipo de notação algébrica, o que evidencia que a Álgebra só seria representada através de uma determinada notação.

Pode-se considerar que a primeira ocorrência da notação simbólica foi vista no livro Aritmético que foi escrito pelo grego Diofanto. Conta-se que este autor viveu no século III E.C¹, ainda que tal data seja contestada. Diofanto introduziu formas de representar valores desconhecidos em um problema, que designou como *arithmos*, que é de onde surgiu o nome “aritmético”. No livro I, ele introduz símbolos que chama de “designações abreviadas” e, na resolução de seus problemas, eles aparecem de maneira significativa. Diofanto utilizava símbolos que eram representados com a primeira ou última letra das palavras do alfabeto grego. Abaixo exemplificamos tais notações, de acordo com (ROQUE 2012, p. 232).

ς (última letra da palavra *arithmos*, a quantidade desconhecida)

ΔY (primeira letra de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida)

KY (primeira letra de *kybos*, o cubo)

$\Delta Y \Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]

ΔKY (o quadrado-cubo) [quinta potência]

KYK (o cubo-cubo) [sexta potência]

¹ Era Comum é o período que mede o tempo a partir do ano primeiro no calendário gregoriano. É um termo alternativo para Anno Domini, latim para "no ano do (Nosso) Senhor", também traduzido como a Era Cristã.

Para exemplificar o modo pelo qual era representada a quantidade desconhecida Roque (2012), traz a resolução do problema 27 do livro I de Diofanto, conforme apresentamos a seguir.

Problema I-27: Encontrar dois números com soma e produto dados.

Roque (2012) descreve a solução de dois modos distintos: usando palavras como se fosse utilizado o método retórico que acima descrevemos e, em seguida, usando abreviações de Diofanto e símbolos atuais.

“Descrição da solução: Ele considera que a soma é 20 e o produto, 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 *arithmoi*, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um *arithmos* somado a, e subtraído de, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída de 1 *arithmos* mais a metade acrescentada de 1 *arithmos* obtemos 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos essas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do *arithmos* (um *dynamis*). Chegamos, assim, à conclusão de que o *dynamis* deve ser 4, logo, o valor do *arithmos* é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 12 e 8” (ROQUE, 2012, p. 232-233).

Segundo modo:

“Queremos encontrar dois números com soma 20 e produto 96. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ς , ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ς de um destes 10 e adicionando ς ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos $10 - \varsigma + 10 + \varsigma = 20$. Mas sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever $(10 - \varsigma)(10 + \varsigma) = 96$. Observamos, então, que $10^2 - \Delta Y = 10^2 - \varsigma^2 = 96$, e concluímos que o valor de ς deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \varsigma$ e $10 + \varsigma$ são, respectivamente, 8 e 12”. (ROQUE, 2012, 233).

Continuando o percurso de desenvolvimento da Álgebra tem-se Al-Khwarizmi. Sua contribuição foi fundamental, pois deu origem aos estudos sistemáticos dos métodos para classificar e resolver equações.

“Segundo Vitrac, a maioria dos ingredientes para o desenvolvimento desta teoria das equações já existia nos trabalhos gregos e indianos, com sua explicitação só abriu uma nova perspectiva com os árabes” (ROQUE, 2012, p. 248).

Os árabes conquistaram emancipação ao expandir os seus conhecimentos algébricos, criaram a teoria das equações, o cálculo algébrico sobre as expressões polinomiais e

estenderam as operações aritméticas para essas expressões e, ainda, consideraram o caso dos números irracionais que, pelos antigos, não eram considerados números. A partir do livro *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, de Al-Khwarizmi, surgiu o termo “Álgebra”. Diferentemente de Diofanto, Al-Khwarizmi não utilizou simbolismo em suas explicações algébricas, sua linguagem era a retórica. Ele utilizava um vocabulário padrão como as palavras *Mal*, *Adad* e *Jidhr* que significavam Raiz, Número ou quantidade e Possessão. Em nossa simbologia moderna, podemos classificar o *Adad* como um número qualquer conhecido, *Jidhr* como uma quantidade desconhecida e *Mal* como o Quadrado de uma quantidade desconhecida.

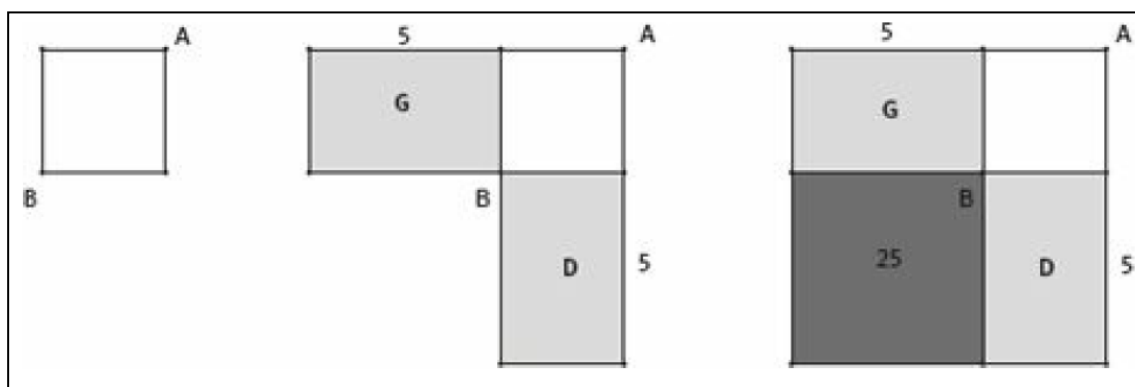
Para exemplificar o processo de Al-Khwarizmi trazemos uma situação problema na qual se deseja determinar o lado do quadrado.

“A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos.” Deve-se construir um quadrado de diagonal *AB* que represente o *Mal*, ou o quadrado da raiz procurada e dois retângulos iguais, *G* e *D*, cujos lados são a raiz procurada e 5, metade de 10. A figura obtida é um *gnomon* de área 39.

Completando essa figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área 64 ($64 = 39 + 25$). O lado desse quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é 3 ($3 = 8 - 5$). (ROQUE, 2012, p. 253).

Geometricamente, pode-se representar a situação acima pelas seguintes figuras:

Figura 1: Área de quadrado de lado 8



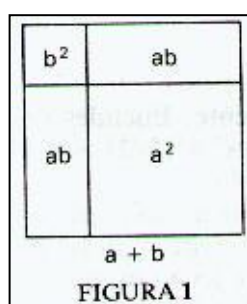
Fonte: Roque (2012).

Vê-se que no processo histórico, no Egito, a Álgebra surgiu quase que ao mesmo tempo em que na Babilônia, mas à Álgebra do Egito faltava a sofisticação existente na Álgebra Babilônica, sua numeração era primitiva e sua Álgebra era retórica.

Por outro lado, a Álgebra Grega, formulada por Euclides e pelos pitagóricos, era essencialmente geométrica. Para exemplificar trazemos a representação da equação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ que os gregos construíam através de diagramas, como a seguir:

Euclides enunciou esta equação em seu livro II de Os Elementos, na proposição 4:

Figura 2: Quadrado perfeito



Fonte: Roque (2012).

“Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos”. (BICUDO, 2009, p. 137).

Nota-se que Euclides assumia que certo valor ao quadrado (ou, na linguagem atual, o quadrado de um número qualquer) representava a área de um quadrado cujo lado tivesse aquela medida (do valor desconhecido).

François Viète, no período de (1540-1603), teve sua contribuição para o desenvolvimento da Álgebra introduzindo o uso das letras para indicar números desconhecidos da forma como são utilizados até os dias atuais. Viète escreveu equações e suas propriedades e também foi o pioneiro da geometria analítica. Acredita-se que a Álgebra teve seu surgimento junto com a escrita que também é considerada uma forma simbólica de representar ideias e acontecimentos.

Há pesquisas atuais que mostram a relevância de se explorar esses aspectos históricos do conhecimento da álgebra na formação do professor. Vamos destacar o trabalho de Ribeiro (2015).

Segundo esse autor, o interesse em Álgebra e sua importância na educação básica considerando-se os resultados das avaliações em larga escala, mostra que há deficiências dos

alunos na aprendizagem dos conteúdos. Para compreender o que se faz em termos de ensino, o autor realiza uma investigação com professores procurando identificar as concepções mais comuns entre eles. Os professores pesquisados pelo autor ensinam Álgebra a licenciandos e a professores formados que já atuam na educação básica (RIBEIRO, 2015).

Para ter acesso às concepções, foram realizadas entrevistas semiestruturadas em que os sujeitos pudessem expressar a compreensão da Álgebra e de seu ensino. Foi feito um contato com os professores que atuavam em diferentes instituições para agendar o dia da entrevista sendo que estas seriam gravadas e transcritas.

Os resultados apresentados pelos professores de nível superior e os de educação básica foram bem diferenciados, relativamente a como eles a entendem e de como a ensinam no curso de licenciatura e na educação básica. A maioria destacou que para aprender Álgebra é necessária uma base sólida na prática aritmética e que a Álgebra é uma atividade que exige do aluno saber como usar as estruturas algébricas, suas técnicas e manipulações. Com isso o autor conclui que, na formação de professores, é preciso que o graduando tenha um debate acerca do conhecimento do conteúdo que é exigido para o ensino. (RIBEIRO, 2015).

Da pesquisa, o autor destaca que as concepções de Álgebra que mais emergiram foram as seguintes:

- (i) **álgebra como estudo de estruturas**, relacionando às concepções “fundamentalista-estrutural” (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993) – “estudo das estruturas” (Usiskin, 1995);
- (ii) **álgebra como forma de resolver problemas**, na qual parece-nos relacionar as concepções “linguístico pragmática” e – “fundamentalista-analógica” (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993), aos “estudos de procedimentos para resolver certos tipos de problemas” (Usiskin, 1995) e à – “letrista facilitadora” (Lins e Gimenez, 1997);
- (iii) **álgebra como uma extensão da aritmética**, a qual relacionamos às concepções “aritmética generalizada” (Usiskin, 1995; Lee, 2001). (RIBEIRO, 2015, p.03)

De modo geral o autor destaca que a visão da Álgebra como linguagem está bastante presente entre os professores, o que indica que a linguagem é uma característica do fazer algébrico que precisa ser tratada em sala de aula seja de qualquer nível escolar.

2.2 A ÁLGEBRA NO BRASIL

Atualmente a Álgebra, em seus diversos ramos, está presente inteiramente na sociedade moderna através da resolução de problemas em contextos do mundo físico e social. Está presente, também, nos cálculos e nas previsões de empresas e indústrias de diversos ramos, no trabalho dos economistas, de analistas políticos, em órgãos de governo etc.

No Brasil a Álgebra é recomendada por pesquisadores em Educação Matemática e está presente nos programas curriculares como os PCN. Vê-se, nas pesquisas, que ela é considerada pelos alunos como grande obstáculo à aprendizagem e à resolução de exercícios devido à falta de compreensão advinda da simbologia que ela utiliza. Porém, é relevante estar presente no contexto escolar uma vez que o estudo da Álgebra possibilita o desenvolvimento do pensamento abstrato, contribuindo para a resolução de situações-problemas. Segundo os PCN.

“[...] do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático”. (BRASIL, 1998 p. 116).

Falta aos alunos uma melhor compreensão do cálculo com letras que deve ser tratado como uma forma de raciocínio que envolve ideias próprias. Uma das propostas para que as dificuldades dos alunos sejam superadas é colocá-lo como centro do processo educativo, assumindo papel ativo na construção do seu conhecimento. Também é importante, como salienta Roque (2012), nas aulas, inserir o processo histórico de desenvolvimento da matemática, mostrando como foi a trajetória do conhecimento que é apresentado aos alunos. Isso poderá contribuir para que eles vejam que o ponto de partida de todo conhecimento é o levantamento de hipóteses que, não necessariamente se começa pelo simbólico. Com isso, entende-se que trabalhar com a história da Matemática poderá auxiliar o aluno a compreender fatores sociais, históricos e políticos despertando-lhe a vontade de descobrir os conceitos matemáticos, colocando-o como responsável juntamente com o professor por sua aprendizagem.

As pesquisas em Educação Matemática mostram que, além da motivação, envolver os alunos com a história da Matemática permite conhecer o desenvolvimento humano que há por trás dela (ou do que é apresentado na escola). Com isso, entendemos que o significado da Álgebra deve ser explorado na sala de aula, ir além da simples mecanização de fórmulas ou a reprodução de cálculos algébricos.

2.3 A ÁLGEBRA E O CURRÍCULO ESCOLAR

A Álgebra é considerada um dos principais tópicos da matemática, sendo um fio condutor do currículo escolar uma vez que, através dela, se podem desenvolver atividades que possibilitem um tipo de pensamento diferenciado do numérico ou mesmo do geométrico.

Logo, a Álgebra ou o pensamento algébrico, deveria ser trabalhado em todas as etapas da Educação Básica. Ela é também uma ótima ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio na solução de problemas matemáticos. Além disso, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

“[...] o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização”. (BRASIL, 1998, p. 115).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Álgebra tem por finalidade expor a necessidade de o aluno desenvolver o pensamento algébrico para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e a estrutura matemática, fazendo o uso de letras e outros símbolos que são característicos dessa área.

Ao especificar as ideias essenciais que devem ser tratadas no estudo da Álgebra, a BNCC, indica a

equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática [a álgebra] deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2018, 270).

A intenção é que, nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudos de Álgebra retomem, aprofundem e ampliem o que foi tratado nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isso porque,

“nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e funções e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos”. (BRASIL, 2018, 271).

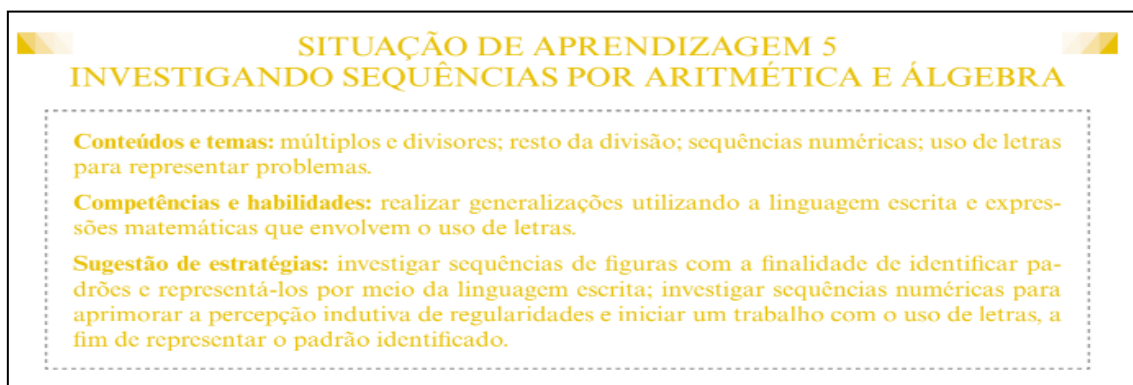
2.4 O CADERNO DO PROFESSOR E AS ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA

O Estado de São Paulo, desde o ano de 2011 até final de 2018, adotou um material vinculado ao Projeto denominado “São Paulo Faz Escola²” que contém o Caderno para o Aluno e Caderno e para o Professor com atividades que subsidiam o trabalho em sala de aula e complementam o livro didático.

O Currículo se completa com um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores e aos alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina/serie (ano) /bimestre. Neles, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por serie/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação. Oferecem também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividade extraclasse e estudos interdisciplinares. (SÃO PAULO, 2011, p.08).

O Caderno do Professor traz situações de aprendizagem que trabalham por etapas de acordo com o conteúdo abordado em denominado ano e segundo o nível de escolaridade. Com isto, ao trazer a situação, o Caderno também é específico, pois tem uma introdução ao capítulo abordando os conteúdos e temas, as competências e habilidades e apresenta sugestões de estratégias que auxiliam o professor a trabalhar determinado assunto orientando-o acerca do que se esperar dos alunos. Exemplificamos abaixo com uma situação para o 7º ano.

Figura 3: Situação de aprendizagem 5



Fonte: Caderno do Professor (2014-2017).

A edição 2014-2017 do Caderno do Professor da 6ª Série/7ºAno, na situação de aprendizagem 5 aborda uma possibilidade de, através de uma análise aritmética e algébrica de

² Maiores informações sobre este projeto podem ser obtidas no site da Secretaria do Estado da Educação no link <https://www.educacao.sp.gov.br/sao-paulo-faz-escola>.

uma dada situação, introduzir o uso de letras para abordar expressões numéricas. Ao introduzir o assunto, o caderno do aluno traz um roteiro para expor o conteúdo e introduzir a Álgebra como ela será trabalhada através do uso de letras em sequências, seguido de exercícios do conteúdo.

Figura 4: Situação de aprendizagem 5



1. Observe com atenção a sequência a seguir:



Qual é o próximo símbolo que deve ser colocado na sequência para que seja mantido seu padrão?

I. \ II. / III. \ / IV. / \ V. \ / \

a) O símbolo I.
b) O símbolo II.
c) Os símbolos II ou III.
d) Os símbolos I ou IV.
e) Os símbolos II ou IV.

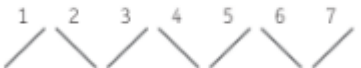
Em geral, os alunos identificam com facilidade que o próximo símbolo será . Contudo, é possível que alguns alunos digam que o próximo símbolo será apenas , o que não deixa de fazer sentido se identificarmos a sequência com a alternância das barras e . Mesmo que esse tipo de identificação não apareça de forma natural, é interessante que o professor problematize-o, o que pode ser feito por meio de perguntas como: será que podemos afirmar que a sequência é formada pelas figuras e em alternância? O que nos impede de dizer que as figuras indicadas em cada posição da sequência são do tipo ?

Essas perguntas têm o objetivo de problematizar a importância do uso de algum marcador claro que identifique cada uma das posições da sequência. Ao solicitar que os alunos pensem sobre como a dúvida levantada pelo professor poderia ser eliminada, é provável que apareçam respostas como:

- podemos separar os símbolos por um espaço ou por vírgula:



- podemos numerar cada posição:



A vantagem da 2ª alternativa em relação à 1ª é que podemos nos referir de forma clara e precisa a qualquer termo da sequência.

O item b da atividade já faz uso da numeração ordinal, portanto, é bem provável que sejam induzidos naturalmente os alunos a pensar na opção de numeração dos termos da sequência.

2. Por que é possível escolher mais de um símbolo para continuar o padrão da sequência?

Não há um marcador claro que identifique cada uma das posições dos símbolos na sequência.

3. Desenhe uma sequência usando como padrão o símbolo da figura III, apresentado na atividade 1.



Fonte: Caderno do Professor (2014-2017).

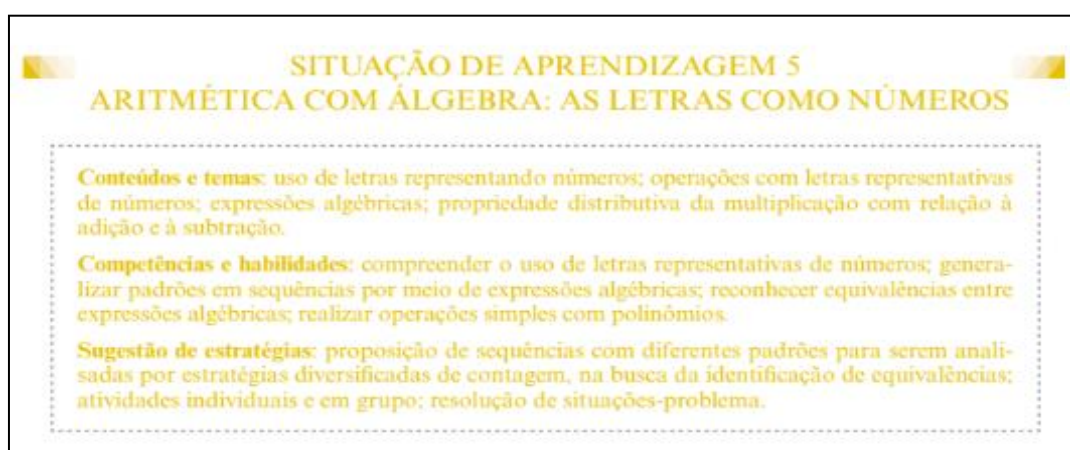
A partir do contato do aluno com o uso de letras o Caderno segue com a situação de aprendizagem 6 em que se inicia a exploração da resolução de equações e uso de fórmulas. O Caderno orienta uma possível continuidade do trabalho com o conteúdo para que o professor explore as competências e habilidades esperadas em determinadas situações de aprendizagem. Ao final de cada situação traz as considerações de avaliação e a expectativa de aprendizagem dos alunos.

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo, os

materiais de apoio oferecidos aos professores (Cadernos do Professor), busca apresentar cada tema de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo e construir uma articulação entre os diversos temas, de modo que se auxiliem mutuamente, ao mesmo tempo em que propiciem interfaces amigáveis com as outras disciplinas. (SÃO PAULO, 2011, p. 52)

O Caderno do Professor referente ao 8º ano, traz, na situação de aprendizagem 5, o conteúdo de Álgebra já discutido no caderno do 7ºano e introduz o trabalho com polinômios. Este trabalho será feito por meio de atividades que possibilitem a discussão das propriedades das operações algébricas com base na equivalência entre as expressões. Abaixo trazemos um exemplo desta situação de aprendizagem do Caderno do 8º ano.

Figura 5: Situação de aprendizagem 5



Fonte: Caderno do Professor (2014-2017).

Após esta situação de aprendizagem 5, as demais seguiram as mesmas estratégias visando a aprendizagem dos conteúdos de produtos notáveis (significados geométricos), a fatoração e as equações. Ao final é avaliado se o aluno consegue fazer transformações em uma expressão algébrica através de fatorações, simplificações e cancelamentos.

Figura 6: Situação de aprendizagem 5



1. Observe a sequência de bolinhas e crie uma fórmula que

número da figura. (**Observação:** chame o número da figura de **n**.)

1	2	3	4	5	...
•	•• •	••• ••	•••• •••	••••• ••••	...

Propondo um problema como esse aos alunos, é possível que eles apresentem mais de uma solução, o que deve ser usado como recurso para se verificar a equivalência entre expressões. Uma possível solução é a seguinte:

1	2	3	4	5	...
• □	•• •□	••• ••□	•••• •••□	••••• ••••□	...

Nesse caso, note que na primeira linha sempre teremos o número de bolinhas igual ao número que representa a figura e, na segunda linha, o total de bolinhas será sempre um a menos que o número da figura. Usando a letra **n** para representar o número da figura, o total de bolinhas pode ser representado por $n + (n - 1)$.

Fonte: Caderno do Professor (2014-2017).

Conhecendo a região de inquérito de nossa pesquisa, isto é, como as ideias relacionadas ao contexto da Álgebra foram desenvolvidas ao longo dos tempos, o que é previsto e sugerido como trabalho com alunos do ensino fundamental segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo e o que se espera que o aluno compreenda sobre Álgebra, optamos por trabalhar com alunos do 9º ano do ensino fundamental explorando situações problemas que foquem o conteúdo equações do 2º grau. Tal opção se deve a possibilidade que a escola nos deu de trabalhar com esses alunos em um projeto desenvolvido no contra turno, isto é, em período contrário ao das suas aulas regulares.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Consideramos relevante, antes de apresentar nossa proposta para o trabalho com os alunos envolvendo atividades do contexto algébrico, expor a opção metodológica da pesquisa. Isso nos leva a, nesta seção, discutir aspectos da pesquisa qualitativa para, em seguida, expor a justificativa e o objetivo de nossa pesquisa, bem como os procedimentos para a produção de dados.

3.1 A PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa busca analisar fatos e situações, procurando compreender o que se mostra sem a preocupação com valores numéricos, ou seja, com dados que sejam quantificáveis. O pesquisador qualitativo não tem a finalidade de provar informações ou explicar o porquê das coisas, ele apenas visa compreender o que, no decorrer da pesquisa, vai se mostrando a partir de um foco de investigação ou um objetivo. Da pesquisa qualitativa são válidas informações vistas durante todo o andamento da pesquisa, ou seja, não são desprezadas nenhuma informação que tenha relação com o objeto de estudo e o pesquisador não deve fazer julgamentos e nem expor sua opinião para não “contaminar” os dados que deverão ser analisados com rigor.

De modo geral, o pesquisador qualitativo, se preocupa com informações reais que não podem ser quantificadas. A pesquisa qualitativa tornou-se algo interdisciplinar e, cada vez mais ampla, sendo valorizada especialmente nas Ciências Humanas por permitir focar as relações sociais. Com a ampliação de meios e estilos de se fazer pesquisa qualitativa muitos pesquisadores, mesmo acostumados com a pesquisa convencional ou quantitativa que se vale de procedimentos estatísticos, interessam-se cada vez mais pelas questões qualitativas, atendendo novas demandas e interrogando questões que são essencialmente qualitativas.

Para a coleta de dados na pesquisa qualitativa deve-se levar em conta fatores que podem interferir no objeto estudado. Assim, ao observar os resultados da pesquisa, o pesquisador deve estar atento aos detalhes e não levar em consideração somente as conclusões a que chegou, desprezando o percurso. Ao fazermos uma comparação entre pesquisa qualitativa e quantitativa vemos claramente os fundamentos que levam o pesquisador a escolher uma ou outra abordagem. A pesquisa qualitativa busca um maior enfoque na interpretação do objeto de estudo, permitindo que o pesquisador interaja com o ambiente pesquisado. Já os aspectos

quantitativos têm um menor enfoque nas relações sociais e uma menor importância no contexto no qual está o objeto pesquisado.

Em educação, a pesquisa qualitativa mostra-se como importante por ser um campo em constante desenvolvimento, procurando produzir novos conhecimentos, constituindo-se uma abordagem de pesquisa que contribui para que haja uma reflexão que não deixe de lado aspectos sociais e culturais.

A pesquisa qualitativa em Educação Matemática enfrenta algumas barreiras, pois, apesar de a pesquisa nessa área ser interdisciplinar, tudo é bastante recente e, portanto, inserida no contexto da pesquisa a pouco tempo. Na Educação Matemática a busca é bastante variada, envolvendo tanto dados qualitativos quanto quantitativos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), embora os dados quantitativos recolhidos por outras pessoas (avaliadores, administradores e outros investigadores) possam ser convencionalmente úteis na pesquisa em Educação, os investigadores qualitativos se dispõem a trabalhar com dados quantitativos de forma crítica. Isso, segundo os autores, indica que “não é que os números por si não tenham valor”. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a questionar o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os compilam, “[...]”

Estudos cujo foco seja a sala de aula levantam dúvidas se os dados coletados por pesquisadores qualitativos são válidos, uma vez que as observações são pessoais, ou seja, ficam restritas a sala de aula ou a escola. Logo, não podem ser generalizadas. Com esta restrição, os dados coletados quando exploradas terão um entendimento detalhado, e, antes da coleta de dados, possibilitará uma formulação de hipóteses que, após esta formulação, poderá fazer uma comparação do material pesquisado dando condições de compreender o contexto investigado de forma mais abrangente, porém, não generalizável.

Trabalhando com a pesquisa qualitativa tem-se uma maior interação com o ambiente que iremos analisar, maior contato com o público a ser investigado. A análise dos dados, pelo fato de se estar lidando diretamente com pessoas, no caso em sala de aula, valoriza o aspecto emocional, intelectual e social, levando em consideração opiniões, sentimentos, atitudes, comentários, aprendizagens, etc.

3.2 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

Neste trabalho, o material manipulativo e o jogo serão utilizados como uma possibilidade para auxiliar a aprendizagem dos alunos em conteúdos de Álgebra. Na matemática, a busca por diferentes formas que possam auxiliar a aprendizagem dos alunos é

extremamente importante, pois, a partir disso, o professor poderá vir a conhecer distintos modos de trabalhar os conteúdos em sala de aula, ampliando as possibilidades de compreensão dos alunos.

Para entender essa possibilidade de ensinar foi desenvolvido um trabalho de campo com alunos do 9º ano de uma escola particular do município de Guaratinguetá. O jogo elaborado para a atividade explora a resolução de equação do 2º grau. Vale destacar que na escola, nenhum dos professores utiliza jogos para o ensino de matemática, o que caracteriza algo diferente do que habitualmente se faz para o trabalho com os conteúdos de Álgebra. Por esse motivo, embora o nosso foco seja a aprendizagem do aluno, entendemos que a pesquisa poderá contribuir para a formação do professor.

3.3 OBJETIVO DA PESQUISA

Nesta pesquisa buscamos compreender “*como os alunos constroem estratégias para a resolução de equações do 2º grau?*”. Portanto, nos voltamos para os alunos, atentos ao seu modo de se envolver com as situações propostas, buscando resolvê-las. O que nos interessou foi considerar a forma pela qual eles expressam compreensões sobre o que fazem, o significado que atribuem às equações do 2º grau.

3.4 A PRODUÇÃO DE DADOS NA PESQUISA

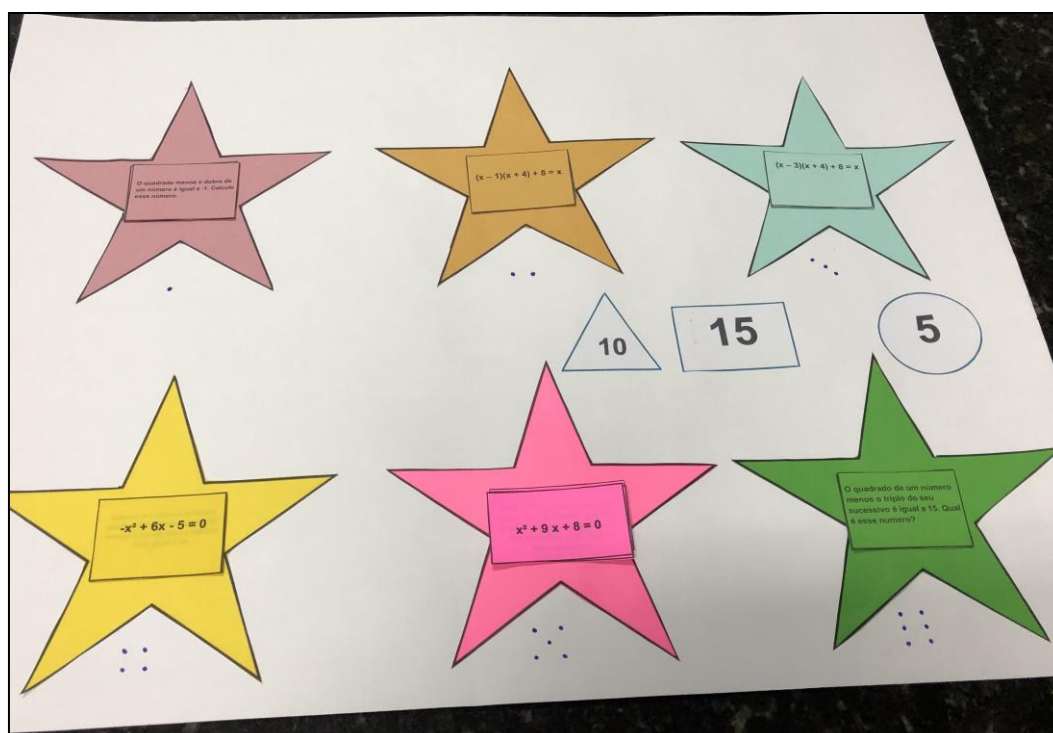
O jogo foi pensado de acordo com o conteúdo estudado pelos alunos do 9º ano relativamente à Álgebra, conforme o Caderno do Professor. Para sua elaboração realizamos um estudo sobre as possibilidades de se trabalhar o tema com materiais manipulativos ou jogos. Em diferentes sites encontramos sugestões variadas e, dentre elas, chamou-nos a atenção as que defendem os jogos e, particularmente, uma proposta de jogo para o ensino das operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão). Fizemos uma adaptação no jogo para a resolução de situações problemas (e equações) do 2º grau, tema proposto aos alunos.

O jogo era de fácil confecção, pois utilizava apenas cartolina, folhas coloridas e um dado. Elaboramos as fichas com equações e problemas do 2º grau e providenciamos o dado. Convidamos os alunos do 9º ano a participarem da atividade que seria realizada fora do seu horário regular de aula.

Um grupo de 06 alunos se dispôs a participar da atividade e se constituiu sujeitos de nossa pesquisa. Para o jogo sugerimos que eles trabalhassem em duplas, o que nos daria possibilidade de acompanhar as discussões e ver o que pensavam para resolver os problemas propostos. Destaca-se que não houve nenhuma sondagem com os alunos da turma sobre seus conhecimentos prévios acerca do tema. Sabíamos apenas, pela conversa com o professor, que o conteúdo abordado já havia sido estudado no semestre anterior. Assim, todos os alunos já conheciam o conteúdo equação do 2º grau. No decorrer do jogo, acompanhamos os participantes que trabalharam em duplas, registrando as discussões.

Para a atividade fizemos, em uma cartolina, desenhos de estrelas coloridas, com finalidade meramente ilustrativa. A intenção era chamar a atenção dos alunos e despertar sua curiosidade. Cada cor escolhida tinha três tipos de exercícios representados em fichas, totalizando 18 fichas para cada dupla. As fichas, além de terem um exercício para resolução, apresentavam, no verso, uma figura geométrica desenhada no centro (triângulo, retângulo ou círculo) na qual havia a pontuação relativa à carta: 5, 10 ou 15 pontos. Para escolher a ficha com a situação problema que iria resolver, a dupla lançava o dado. Os pontos atribuídos às figuras geométricas foram pensados para gerar envolvimento dos alunos, levando-os a resolver a atividade proposta no tempo que tínhamos disponível que era de 20 minutos para cada rodada. Na figura 6 trazemos uma imagem da cartolina construída para o jogo.

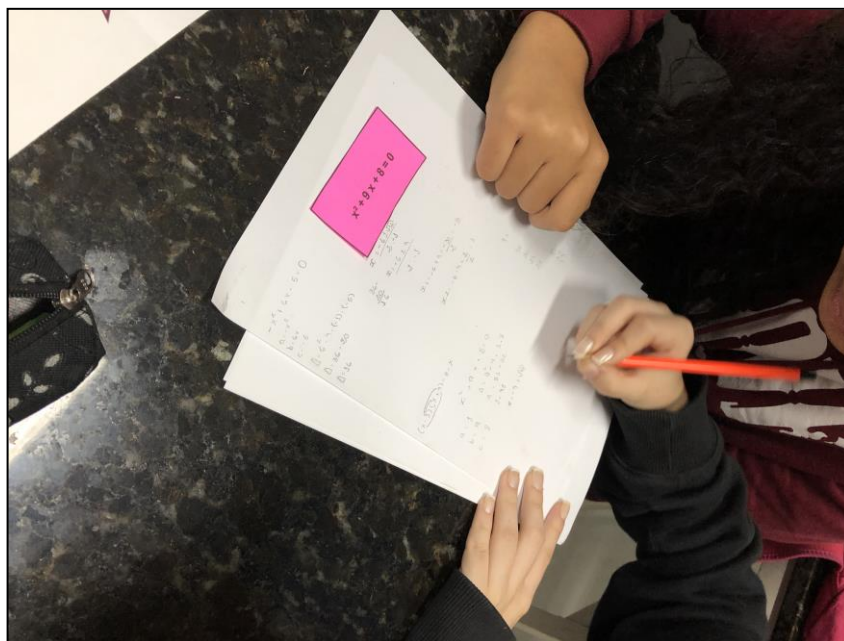
Figura 7: Atividade desenvolvida com os alunos



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Escrevemos na lousa a forma genérica da equação do 2º grau e a fórmula de Bhaskara. Os alunos jogaram realizando os cálculos e, após os 20 minutos da rodada, fizemos a checagem das respostas com as duplas e a contagem da pontuação. A atividade teve duração de 1 hora e 30 minutos, considerando-se a explicação da atividade, as duas rodadas do jogo, conferência e resolução dos exercícios. A figura 7 ilustra o trabalho dos alunos.

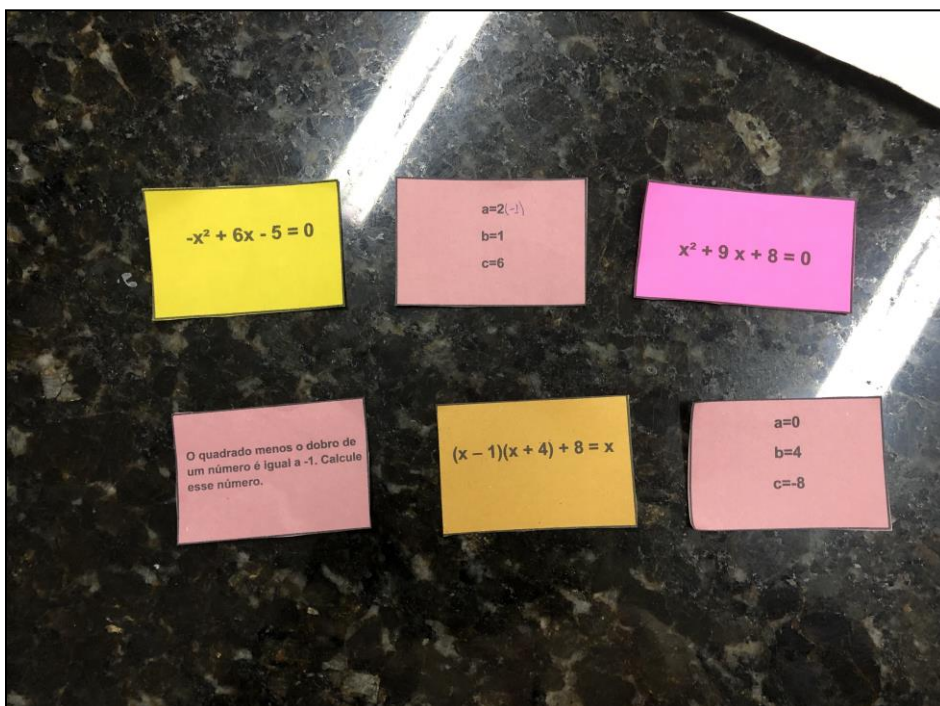
Figura 8: Atividade desenvolvida com os alunos



Fonte: Arquivo da pesquisadora

As questões trabalhadas se basearam na resolução da equação do 2º grau. Exigia-se dos alunos que, ao resolver as equações, interpretassem o significado das raízes. Outras questões procediam de modo inverso, ou seja, ao serem dados os valores de “a”, “b” e “c”, coeficientes, os alunos deveriam montar a equação. Em algumas cartas havia problemas que deveriam ser interpretados e transcritos para a linguagem matemática.

Figura 9: Atividade desenvolvida



Fonte: Arquivo da pesquisadora

4 ANÁLISE DOS DADOS

Ao analisar as respostas dos alunos vimos que alguns conceitos básicos de equação do 2º grau, e até mesmo conceitos anteriores como regras de sinais ou simplificação de frações, não estavam claros para eles. Isso os levou a apresentar dificuldades durante a resolução das atividades.

As fichas escolhidas pelos alunos nem sempre tinham as equações na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Em algumas fichas elas precisavam ser “descobertas” usando, por exemplo, a propriedade distributiva em um produto notável.

Dos três grupos formados, 2 resolveram as equações sempre da mesma maneira, ou seja, caso encontrassem para o valor de delta (discriminante da equação) um número que não tivesse raiz exata, davam a questão por encerrada, demonstrando que os conceitos básicos relativos a extração de raízes e a fatoração não haviam sido entendidos. Notou-se que os alunos consideram que se deve sempre encontrar um valor para o delta que tenha raiz exata de modo que seja possível determinar as raízes da equação.

Para exemplificar o que interpretamos na resolução dos alunos, vamos considerar um exemplo de solução dada pelo grupo 1 e outro pelo grupo 2. A solução descrita é para a ficha que contém a equação $x^2 + 3x - 48 = 0$.

Figura 10: Resolução dos alunos do grupo 2

Handwritten student work for solving quadratic equations. The work is organized into three columns, each showing a different equation and its solution process.

Column 1 (Left):

$$x^2 + 3x - 48 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)$$

$$\Delta = 9 + 192$$

$$\Delta = 201$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-20)$$

$$\Delta = 1 + 80$$

$$\Delta = 81$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{2}$$

Column 2 (Middle):

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)$$

$$\Delta = 36 + 4 \cdot (-5)$$

$$\Delta = 36 - 20$$

$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{1+9}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2} \rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-9}{2}$$

$$x_2 = \frac{-8}{2} \rightarrow x_2 = -4$$

Column 3 (Right):

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$x = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-6-4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-10}{-2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{-6+4}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-2}{-2} \rightarrow x_2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 4 - 4$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2-1}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x = \frac{2+0}{2} \rightarrow x = 1$$

At the bottom of the page, it says: 2ª partida: 35 pontos

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 11: Resolução dos alunos do grupo 1

2ª Rodada:

$$1) x + x^2 + 2x = 48$$

$$x^2 + 3x - 48 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)$$

$$\Delta = 9 + 192$$

$$\Delta = 201$$

O Δ não tem raiz

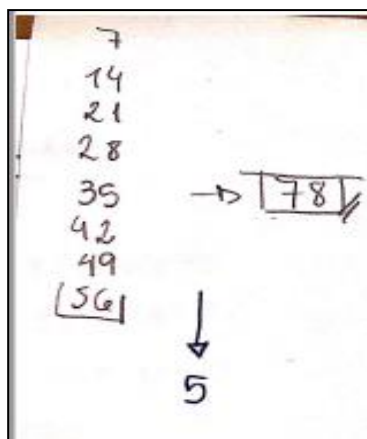
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Na solução do grupo 2, vê-se que ao encontrar o valor 201 para o discriminante, o grupo não continua a resolução, como faz com as demais sentenças, inclusive quando $\Delta=0$. Na solução do grupo 1, os alunos chegam a escrever que não há raiz para 201. Interpretamos que os alunos não compreendem o significado de “raiz” de um determinado valor. Ou seja, o que significa determinar a raiz do número 201? Para eles através da finalização dos dados obtidos na resolução significa encontrar um número racional.

Outra questão que nos chamou a atenção na resolução dos alunos foi a forma pela qual eles procuraram resolver os problemas propostos, sem montar a equação. Para discutir isso, vamos considerar a solução do grupo 1 para o problema seguinte: “Paulo pensou em um número maior que 10 e menor que 100. A soma de seus algarismos é 15 e o produto é 56. Qual é esse número?”

O grupo 1 pensou, primeiramente, em encontrar, na tabuada, os valores que satisfizessem as condições dadas no problema. Ou seja, buscaram dois números que multiplicados resultasse em 56. Percebemos, pela resolução apresentada, que eles focam a tabuada do 7, já que $7 \times 8 = 56$.

Figura 12: Exercício resolvido pelos alunos do grupo 1



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Para entender o modo pelo qual os alunos pensaram na solução do problema foi gravado em vídeo a atividade sendo desenvolvida, com isto vamos trazer o trecho da transcrição que retrata o ocorrido.

Aluna 1: Tem que ser maior que 7. 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56. Acho que o número é 78. A soma de seus algarismos é 15, $7+8$ e fazendo a multiplicação, 7×8 é igual a 56.

Aluna 2: Pode ser.

Aluna 1: eu acho que é 78, não tenho certeza. Você quer tentar de outro jeito?

Aluna 2: Não sei o que fazer.

Pesquisadora: Vocês já tentaram montar a equação?

Aluna 1: Eu não sei montar a equação. Foi por tentativa mesmo.

Pesquisadora: Lembra de sistemas?

Aluna 1 e 2: A gente não lembra de sistemas.

Aluna 1: Nossa ... você deve estar pensando: “que bela turma que veio”. Eu não sei nem o que é sistema.

Aluna 2: Eu acho que essa resposta está certa.

Apesar das alunas dizerem que não se lembravam do conteúdo, elas utilizaram a “tentativa e erro” para resolver a questão. O processo de solução buscou uma alternativa na sequência de múltiplos de 7 conciliando as informações do problema. Nota-se em sua fala que elas reconhecem que deveriam saber esse conteúdo – “que bela turma que veio”. No entanto, se dispõem a buscar um modo para resolver a atividade por mais que seja por tentativa e erro.

No registro escrito não se tem informações suficientes sobre o que fazem, mas em sua fala justificam que buscam dois números cuja soma seja 15 e o produto 56. Embora não tenham recorrido à resolução de uma equação do 2º grau, levantam hipóteses e buscam, no que conhecem, argumentos para validá-las.

Dando continuidade à interpretação dos dados da pesquisa, temos uma terceira atividade proposta aos alunos em que se explorava a propriedade distributiva, visando compreender como eles lidavam com a redução de termos semelhantes e organização da sentença matemática que expressa a equação de segundo grau. No entanto, eles não sabiam iniciar o processo de propriedade distributiva e demonstraram dúvidas com relação às regras de sinais. Inicialmente pensaram que deveriam somar os valores que estavam entre parênteses, depois viram que não poderiam somar a incógnita “x” a um número (constante). Percebendo as dúvidas iniciais, a pesquisadora resolveu “dar uma dica”: vocês se lembram da propriedade distributiva da multiplicação?

Figura 13: Exercício resolvido pelos alunos

Handwritten student work for solving a quadratic equation:

$$(x-3)(x+4) + 8 = x$$

$$x^2 + 4x - 3x - 12 + 8 = x$$

$$x^2 + x - 4 = x$$

$$0 = -x^2 - x + 4 - x$$

$$0 = -x^2 - 2x + 4$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 4 + 16$$

$$\Delta = 20$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{20}}{-2}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{20}}{-2}$$

$$x = -2$$

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Vamos acompanhar o diálogo entre os alunos do grupo 2 para compreender o modo pelo qual eles pensaram na atividade proposta.

Aluna 3: Faz distributiva? Não lembro como faz. Quando não tem nada na frente é 1.

Aluna 3: Mais com menos da menos.

Aluna 4: Mais com mais menos ... não, é mais.

Aluna 3: Aí junta o x.

Pesquisadora: Meninas lembrem-se do “chuveirinho”.

Aluna 3: Ahhhhh. Entendi.

Pesquisadora: Distributiva. X com x e x com 4. Lembram?

Aluna 4: x vezes x, seria 2x?

Pesquisadora: 2x seria se fosse soma.

Aluna 4: Entendi.

Aluna 3: x^2 e não 2x.

Aluna 3: Menos com mais

Aluna 4: é mais. Não, é menos.

Aluna 3: 3+4, é assim?

Pesquisadora: Distributiva.

Aluna 3: Não sei o que é isso.

Figura 14: Exercícios resolvidos pelos alunos

Handwritten work showing the solution of a quadratic equation:

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

Identifying coefficients:

$$a = 1, \quad b = -9, \quad c = 8$$

Calculating the discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 32 = 49$$

Using the quadratic formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm 7}{2}$$

Roots found:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 8$$

Other visible work includes a multiplication table for 9x and a calculation of $x^2 = -9 - 7 = -16 \Rightarrow x = -4$.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Nas resoluções os alunos mostram que a propriedade distributiva lhes é um “obstáculo”. Para além da propriedade distributiva vê-se que eles também confundem as “regras de sinais”.

Percebe-se que eles tentam buscar valores que possam resolver a equação, mas abandonam o raciocínio e não dão a resposta. Nota-se que eles buscam a solução usando o que conhecem: a fórmula de Bhaskara. No caso em que a equação está na forma $ax^2 + bx + c = 0$, eles resolvem corretamente. Porém, não é possível dizer que para eles isso tem algum sentido para além da “aplicação da fórmula”.

Ao final das atividades solicitamos aos alunos que respondessem por escrito individualmente 5 perguntas que foram criadas pela pesquisadora anteriormente relativas à sua opinião sobre a experiência vivenciada por eles ao realizarem a atividade.

Respostas dos alunos

Quadro 1: Primeira pergunta

Pergunta 1: Qual era seu resultado esperado para este jogo?
Aluno 1: Pensei que iria ter muita dificuldade
Aluno 2: Pensei que não iria conseguir
Aluno 3: Ter muita dificuldade
Aluna 4: Bons resultados
Aluna 5: Bons resultados
Aluna 6: Eu esperava ir pior do que eu realmente fui
Convergência: De modo geral, os alunos, consideravam que teriam muita dificuldade.

Fonte: arquivo da pesquisadora

Quadro 2: Segunda pergunta

Pergunta 2: Você considera ter tido um bom desenvolvimento neste trabalho?
Aluno 1: Sim, me surpreendi.
Aluno 2: Sim.
Aluno 3: Sim, porque mesmo tendo dificuldade com alguns exercícios, consegui resolvê-los.
Aluna 4: Poderia ter sido melhor, pois não tirei as minhas dúvidas em sala de aula.
Aluna 5: Poderia ter sido melhor, pois não tirei as minhas dúvidas em sala de aula.
Aluna 6: Sim, me surpreendi por ter conseguido resolver bastante questões.
Convergência: Os alunos consideram que tiveram um bom desempenho na atividade, inclusive se surpreendendo.

Fonte: arquivo da pesquisadora

Quadro 3: Terceira pergunta

Pergunta 3: Este jogo contribuiu para sua aprendizagem em Equação do 2º grau?
Aluno 1: Muito, é uma forma mais fácil e mais divertida de aprender.
Aluno 2: Sim, por ser uma forma mais fácil de aprender.
Aluno 3: Sim, porque me fez lembrar de algumas que tinha dificuldade.
Aluna 4: Sim, entendi melhor.
Aluna 5: Sim, muito.
Aluna 6: Sim, porque contribuiu para uma aprendizagem mais rápida.
Convergência: Os alunos consideraram o jogo como algo facilitador na aprendizagem de equação

Fonte: arquivo da pesquisadora

Quadro 4: Quarta pergunta

Pergunta 4: Você acha importante a aplicação de Materiais Manipulativos?
Aluno 1: Sim, muda a rotina e facilita na hora do aprendizado.
Aluno 2: Sim, muda a rotina e aprende do mesmo jeito e de forma divertida.
Aluno 3: Sim, pois é um modo de ensinar divertido e que pode ajudar os alunos a ter mais conhecimento.
Aluna 4: Sim, acho que seria bem melhor.
Aluna 5: Sim, isso facilita o aprendizado dos jovens.
Aluna 6: Sim, porque contribuiu para uma aprendizagem mais rápida.
Convergência: As alunas consideraram importante o uso de material manipulativo, pois saiu da rotina.

Fonte: arquivo da pesquisadora

Quadro 5: Quinta pergunta

Pergunta 5: Você tem alguma sugestão a respeito desse jogo?
Aluno 1: Não, acho que ele foi muito bem aplicado e explicado, várias pessoas com dificuldade conseguem aprender mais rápido com ele.
Aluno 2: Não.
Aluno 3: Deveria ser passado em sala de aula e haver mais tempo.
Aluna 4: Deveria ter mais tempo para resolver as questões.
Aluna 5: Deveria ter mais tempo para resolver as contas.
Aluna 6: Deveria ter questões sobre outros conteúdos de matemática também.
Convergência: Os alunos dizem que deveria haver um tempo maior para o desenvolvimento do trabalho.

Fonte: arquivo da pesquisadora

5 INTERPRETAÇÃO DAS CONVERGÊNCIAS

Diante das respostas dos alunos após a experiência vivenciada ao participarem da atividade proposta, foram constituídas convergências. Elas nos mostram que os alunos se sentem inseguros relativamente à resolução de equações do 2º grau. Na primeira questão, em que se perguntava o que eles esperavam do jogo, a maioria escreveu que esperava “ir muito mal” e “não ter um bom desenvolvimento”, demonstrando um sentimento negativo em relação ao seu próprio desempenho na disciplina.

Após o desenvolvimento das atividades perguntamos novamente para eles o que consideravam de seu rendimento. Os alunos declararam que se sentiram capazes de resolver as questões, embora considerassem não ir “muito bem”; também demonstraram que se surpreenderam com o resultado, pois eram capazes de resolver a maioria das questões propostas.

Para eles, o uso do jogo foi algo que lhes despertou curiosidade e interesse sendo importante, principalmente, por modificar a dinâmica característica de uma aula de matemática e da própria proposta da resolução das atividades o que favoreceu a aproximação com o conteúdo. Como sugestão para o desenvolvimento do jogo, a maioria julgou que o tempo da atividade deveria ser maior. Isso porque, considerando a atividade, foi previsto para a “competição” 20 minutos para cada rodada (sendo duas rodadas no total). O tempo, em termos de pesquisa, foi considerado suficiente, mas para os alunos ele deveria ser prolongado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo o objetivo foi analisar o jogo como uma possibilidade de auxiliar a aprendizagem dos alunos no conteúdo de Álgebra. Para tanto, as referências utilizadas para o desenvolvimento do trabalho permitiram compreender vários aspectos da Álgebra, como a contribuição de Diofanto para formas de representar um valor desconhecido ou as de Al-Khwarizmi, que deu origem aos estudos sistemáticos dos métodos para classificar e resolver equações. Através das leituras foi possível pensar em um trabalho de campo com alunos do ensino fundamental no qual fosse possível desenvolver atividades, fora do cotidiano da sala de aula e com resolução de atividades, analisando como isto poderia contribuir para a formação do pensamento algébrico desses alunos.

Elaboramos um jogo com situações problemas e o trabalhamos com 6 alunos do 9º ano. Organizados em duplas e, com questões acerca do conteúdo de equações do 2º grau, o objetivo foi analisar como os alunos construíam estratégias e atribuíam significados para resolver o proposto. A análise de dados nos permitiu compreender que os alunos conhecem uma equação do 2º grau e a fórmula de Bhaskara. No entanto, a partir do momento em que as questões não apresentam uma resolução previamente esperada, por exemplo, um valor do discriminante que não possui raiz quadrada exata, os alunos acabam tendo várias dúvidas e “desistem” da solução – afirmando que a equação não tem solução. Em outros casos, eles recorrem a “tentativa e erro” para encontrar uma resposta coerente com a situação, desprezando o modo como vinham calculando as raízes de uma equação e que poderia os auxiliar nestas situações.

Após o jogo fizemos algumas perguntas para compreender como eles consideravam a sua participação nas atividades e se eles consideravam que a atividade havia sido importante para a sua aprendizagem. Na convergência 1, vê-se que os alunos não se sentem capazes de resolver questões matemáticas, tem baixa expectativa com relação ao seu êxito. Porém, na convergência 2, eles já se sentem surpresos com o modo pelo qual enfrentam as situações propostas, pois, o modo pelo qual as questões eram expostas, dava-lhes possibilidades de recorrer a conhecimentos anteriores – como a tabuada, por exemplo – para buscar alternativas e chegar na solução. Os alunos dizem que se percebem capazes de resolver situações problemas do contexto das equações do 2º grau.

Segundo nossa interpretação, os alunos têm maior envolvimento com a atividade por se tratar de algo “diferente” do que estão acostumados a fazer. Essa “diferença” é expressa

apenas pela forma como a proposta é feita. Ou seja, eles continuam resolvendo equação do 2º grau utilizando a fórmula de Bhaskara. Se ao finalizarmos o texto desta pesquisa retomamos o que interrogamos, isto é, a questão “*como os alunos resolvem equações do 2º grau?*” podemos dizer que os alunos resolvem equações do 2º grau tomando, inicialmente, as fórmulas conhecidas. Isso revela um modo de fazer escolar que é dirigido pela ideia de que aprender matemática é “seguir regras”. Porém, essas regras que são seguidas nem sempre são compreendidas. Os alunos não investigam, por exemplo, o que é possível fazer para dar continuidade ao problema quando o valor do discriminante é 201. Afirmam que “não tem raiz”, dando a entender que, para eles, apenas os números quadrados perfeitos têm raiz quadrada. Não se atentam para erros como, na figura 13, $(-2)^2$ resultar em (-4) ou, ao procurar escrever a sentença na forma $ax^2 + bx + c = 0$ (ainda na figura 13), tomarem $x^2 + x - 4 = x$ e escrever $0 = -x^2 - x + 4 - x$, resultando em $0 = -x^2 - 2x + 4$.

Finalizando a pesquisa e considerando o que foi possível compreender, interpretamos que os alunos resolvem equações do 2º grau sem considerar o significado do que fazem. No entanto, a pesquisa nos revela modos de esse aluno fazer matemática, mostra suas fragilidades, dificuldades com o conteúdo, mas que há uma disposição. Assim, no contexto da sala de aula, seria relevante retomar determinados modos de fazer e colocar em discussão o que é expresso, levando-os a compreender os equívocos cometidos e incentivando-os a buscar alternativas para soluções.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Flávia Maria; BORGES Marcos Francisco. A construção do pensamento algébrico utilizando atividades de investigação em sala de aula: o ensino de sequências. *In: ENCONTRO NACIONAL DA EDUCAÇÃO*, 13., 2019, Cuiába, MT. **Anais [...]**. Cuiabá, 2019. Disponível em: <https://docplayer.com.br/179701700-A-construcao-do-pensamento-algebrico-utilizando-atividades-de-investigacao-em-sala-de-aula-o-ensino-de-sequencias.html>. Acesso em: 17 maio 2019.

BAUMGART, John K. **Tópicos de história da matemática**. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/algebra.php>. Acesso em: 20 abr. 2019.

BORBA, M. A pesquisa qualitativa em educação matemática. *In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED*, 27., 2004, Caxambu, MG. **Anais [...]**. Caxambu: ANPED, 2004. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf . Acesso em: 20 jul. 2019

BRASIL. **Base nacional comum curricular: ensino fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, v .16, n. 002, 2003.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da; POLONI, Marinês Yole. **Design based research: uma metodologia para pesquisa em formação de professores que ensinam matemática**. 2011. Disponível em: <https://mcmuab2012.files.wordpress.com/2013/06/artigo-escolhido-para-anc3a1lise-dbr.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2017.

FIORENTINI, Dario; ÂNGELA, Maria M. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, n. 7, jul./ago. 1990.

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto**. 2005. Disponível em: <https://pactuando.files.wordpress.com/2014/08/eu-trabalho-primeiro-no-concreto.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2017.

PASQUETTI, Camila. **Proposta de aprendizagem de polinômios através de materiais concretos**. 2008. Disponível em: http://www.uri.com.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/845.pdf. Acesso em: 27 nov. 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo: Caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental, 7ª série/8º ano**. São Paulo: Secretaria da Educação, 2014-2017. v.1.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo: caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental, 6ª série/7º ano.** São Paulo: Secretaria da Educação, 2014-2017. v. 1.

SILVA, Francisca Marlene; CUNHA, Déborah Almeida; SILVA, Aline Araújo; HAISASHIDA, Keila Andrade. **O uso do material concreto no ensino da matemática.** Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbfmadadm/http://www.editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito_947_7fc2304382477fcd9bed7819c1fb39e8.pdf. Acesso em: 03 dez. 2019.

SILVA, W. A pesquisa qualitativa em educação. **Revista de Educação**, Dourados/MS, n. 3, v. 2, jan./jun. 2014.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto (org.). A pesquisa científica. In: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: UFRGS, 2009. cap. 2. p. 9-113. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2017.

UNIVERSIDADE SEM FRONTEIRAS (Maringá-SP). **Atividades de laboratório de ensino de matemática**, p. 35-39, 1 mar. 2009. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/0B65xmAIB-Kr6YmIyNGplZ0RoMHc/view>. Acesso em: 03 dez. 2019.