



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de São José do Rio Preto

João Victor Rodrigues da Silva

Métodos Geométricos para Perturbações Singulares

São José do Rio Preto
2024

João Victor Rodrigues da Silva

Métodos Geométricos para Perturbações Singulares

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. PAULO RICARDO DA SILVA

Financiadora: CNPq - 131254/2022-7

São José do Rio Preto
2024

S586m Silva, João Victor Rodrigues Da
Métodos Geométricos para Perturbações Singulares / João Victor Rodrigues Da Silva. -- São José do Rio Preto, 2024
85 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Paulo Ricardo Da Silva

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Perturbações Singulares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

João Victor Rodrigues da Silva

Métodos Geométricos para Perturbações Singulares

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq - 131254/2022-7

Comissão Examinadora

Prof. Dr. PAULO RICARDO DA SILVA
Orientador

Prof. Dr. DANIEL CANTERGIANI PANAZZOLO
Université de Haute-Alsace

Prof. Dr. CLAUDIO GOMES PESSOA
Departamento de Matemática - UNESP/Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
25 de junho de 2024

AGRADECIMENTOS

Aos meus professores, que tiveram parte em minha formação.

Aos meus colegas, que em muitas ocasiões me ajudaram.

Ao meu orientador, que teve parte nessa trajetória.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão de bolsa de pesquisa (processo 131254/2022-7).

RESUMO

Neste trabalho estudamos retratos de fase de sistemas singularmente perturbados em torno de singularidades típicas. Um sistema singularmente perturbado possui a característica peculiar de ser governado por mais de uma escala de tempo, esse fenômeno será estudado nos primeiros capítulos do texto, que tem como objetivo apresentar a teoria de Fenichel para sistemas singularmente perturbados. A teoria de Fenichel aqui apresentada fornece uma boa compreensão de um sistema em torno de variedades normalmente hiperbólicas, no entanto, não explica o que acontece em variedades que não possuem hiperbolicidade normal. O último capítulo é dedicado ao estudo de variedades críticas que possuem pontos de dobra (singularidades da variedade crítica), isso é, pontos que não possuem hiperbolicidade normal, mais especificamente estudaremos singularidades do tipo cúspide em sistemas cuja variável lenta (governada por uma escala de tempo lento) possui dimensão menor ou igual a dois. Todos os sistemas aqui possuirão duas escalas de tempo.

Palavras-chave: Perturbações singulares. Variedades invariantes. Normal hiperbolicidade. Sistemas lento-rápido.

ABSTRACT

In this work we study phase portraits of singularly perturbed systems around typical singularities. A singularly perturbed system has the peculiar characteristic of being governed by more than one time scale. This phenomenon will be studied in the first chapters of the text, which aims to present Fenichel's theory for singularly perturbed systems. Fenichel's theory presented here provides a good understanding of a system around normally hyperbolic manifolds, however, it does not explain what happens on manifolds that do not have normal hyperbolicity. The last chapter is dedicated to the study of critical manifolds that have bending points (singularities of the critical variety), that is, points that do not have normal hyperbolicity, more specifically we will study cusp-type singularities in systems whose slow variable (governed by a scale of slow time) has a dimension less than or equal to two. All systems here will have two time scales.

Keywords: Singular perturbation. Invariant manifolds. Normal hyperbolicity. System slow-fast.

Lista de Figuras

2.1	As soluções correm no sentido positivo de q em $\{(p, q); p > 0\}$, e no sentido negativo de q em $\{(p, q); p < 0\}$ conforme o tempo cresce. Fonte: autoria própria.	16
2.2	O sentido positivo das órbitas (tempo crescente) segue o esquema dado na Figura 2.1. Fonte: autoria própria.	17
3.1	Nesta figura, assim como ao longo deste texto, uma seta única indica que a direção é lenta, enquanto que a seta dupla indica que a direção é rápida. Fonte: autoria própria.	22
3.2	A geometria de (3.1) quando $\varepsilon = 0$. Fonte: autoria própria.	22
3.3	$\mathcal{M}_\varepsilon$ e a família invariante $\mathcal{F}^\varepsilon$ de fibras rápidas estáveis (linhas tracejadas) para (3.1) com $0 < \varepsilon \ll 1$. A evolução de uma trajetória pode ser decomposta em duas partes: uma componente ao longo da variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$, que é determinado pela evolução do ponto base $(0, z(0))$ da fibra $F_{z(0)}^\varepsilon$, e uma componente na direção ortogonal, ao longo da fibra $F_{z(0)}^\varepsilon$ e suas imagens $\phi_\tau(F_{z(0)}^\varepsilon) = F_{\phi_\tau(z(0))}^\varepsilon$ sob o fluxo ϕ_τ de (3.3). $\tau_i = \varepsilon t_i$, onde $i = 1, 2$. Fonte: autoria própria.	24
3.4	Ao lado esquerdo tem-se o espaço de fase com $\varepsilon = 0$. Ao lado direito o espaço de fase com $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 1$ e $\lambda = 0.5$. Fonte: autoria própria.	28
3.5	A geometria do exemplo (3.8) quando $\varepsilon = 0$. Fonte: autoria própria.	30
3.6	Esboço das fibras invariantes em Π_z para o sistema (3.8) com $\varepsilon = 0$ e ilustração da decomposição de uma trajetória representativa. Fonte: autoria própria.	31
3.7	Esboço das fibras invariantes, variedades e uma trajetória representativa para o sistema (3.8). Fonte: autoria própria.	32
3.8	O espaço de fase do sistema completo (3.8) com $0 < \varepsilon \ll 1$ é obtido cruzando os dos subsistemas rápido e lento. Fonte: autoria própria.	32
3.9	Uma variedade lenta $\mathcal{M}_\varepsilon$ e suas variedades estáveis e instáveis do sistema perturbado (3.8). Fonte: autoria própria.	33
3.10	Uma ilustração da decomposição ao longo das fibras rápidas e da variedade lenta no exemplo (3.8). Fonte: autoria própria.	34
3.11	Cada camada possui uma órbita homoclítica que se cruza em $\mathcal{M}_0$. Fonte: autoria própria.	35
4.1	Esboço das variedades invariantes presentes no sistema geral (1.1) quando $\varepsilon = 0$ e quando $0 < \varepsilon \ll 1$. Fonte: autoria própria.	38
4.2	Forma normal de Fenichel. Fonte: autoria própria.	42

4.3	Solução de (4.7) com $\varepsilon = 0.05$, mostrando uma solução rápida (interna, cuja condição de fronteira reside em $x = 0$) seguida por uma solução lenta (externa). Fonte: autoria própria.	43
4.4	$\mathcal{L}$, definida por (4.18), é levada para uma linha exponencialmente próxima do eixo v e com inclinação exponencialmente grande sob (4.16) em $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Fonte: autoria própria.	48
4.5	A curva integral de $\varepsilon \dot{b} = (-1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b$ (linha rígida) possui um crescimento sutilmente maior que a do sistema $\varepsilon \dot{b} = (-1 - \varepsilon L_1)b$ (linha tracejada) no tempo futuro. Fonte: autoria própria.	49
4.6	$\mathcal{R}$ (linha sólida), definida por (4.18), é $\mathcal{O}(\varepsilon)$ na horizontal e $\mathcal{O}(1)$ ao longo do eixo v sob (4.20) em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$. Fonte: autoria própria.	50
4.7	Ação do fluxo rápido sobre as condições de fronteira. Fonte: autoria própria.	51
4.8	(a) Os segmentos de órbita compreendendo as órbitas de transição singulares N -colisões que conectam a sela a si mesma. (b) A órbita de uma colisão correspondente à sequência $O_1 O_2 \Gamma_1^+ O_2 O_3 O_4 O_5$. (c) A órbita de uma colisão correspondente à sequência $O_1 O_2 O_3 \Gamma_2^+ O_5$. (d) A órbita de duas colisões correspondente à sequência $O_1 O_2 \Gamma_1^+ O_2 O_3 \Gamma_2^+ O_5$. (e) A órbita de duas colisões correspondente à sequência $O_1 O_2 \Gamma_1^+ O_2 \Gamma_1^+ O_2 O_3 O_4 O_5$. (f) A órbita de três colisões correspondente a $O_1 O_2 \Gamma_1^+ O_2 \Gamma_1^+ O_2 O_3 \Gamma_2^+ O_5$. Figura retirada de [5].	55
4.9	A órbita de Šilnikov de uma colisão que conecta a sela em espiral c_ε a si mesma. Figura retirada de [5].	56
4.10	A órbita se Šilnikov de duas colisões conectando a sela espiral c_ε à sequência $\Gamma^+ O \Gamma_-$. Figura retirada de [5].	57
5.1	Dinâmica da equação reduzida (5.4), com p_a denotando o equilíbrio estável. Figura retirada de [8].	59
5.2	Ponto de dobra simples, forma normal (5.14) com sinal de mais. Figura retirada de [8].	62
5.3	Sela dobrada. Figura retirada de [8].	63
5.4	Dinâmica de (5.16) com sinal de mais, mostrada no espaço tridimensional x, y, z , bem como em duas projeções diferentes. Figura retirada de [8].	64
5.5	Retrato de fase da equação reduzida (5.17). Figura retirada de [8].	65
5.6	A variedade S_0^a . Figura retirada de [8].	67
5.7	Retrato de fase da equação restrita (5.6) na conjunto de empasse e em duas projeções. Figura retirada de [8].	68
5.8	Gráfico do produto interno $G(z)$ em função de z . Figura retirada de [8].	69
5.9	Variedade crítica, variedade lenta e seções para uma dobra simples. Figura retirada de [8].	70
5.10	Linha de dobra simples	71
5.11	Dinâmica na carta K_{ex} . Figura retirada de [8].	73
5.12	The extremal sections $\Sigma^{[in]}$ and $\Sigma^{[out]}$. Figura retirada de [8].	75
5.13	Os domínios das cartas K_{en} , K , K_- , K_+ e K_{ex} nas variáveis originais. Figura retirada de [8].	76
5.14	As seções $\Sigma_{en}^{[in]}$ e $\Sigma_{en}^{[out]}$, com z_1 suprimido. Figura retirada de [8].	78
5.15	Dinâmica na carta K_{en} . Figura retirada de [8].	78

5.16 Dinâmica na carta K . No quadro superior, $y_2 > 0$, e no quadro inferior $y_2 < 0$. As curvas tracejadas denotam a linha crítica z_2 . Figura retirada de [8].	80
5.17 Dinâmica lenta-rápida de (5.51). Duas dobras subordinadas a uma cúspide. Figura retirada de [8].	82
5.18 Dinâmica na carta K_{ex} . Figura retirada de [8].	83
5.19 A trajetória de um ponto (x, y) próximo ao equilíbrio p_a . Figura retirada de [8].	85

Sumário

1	Introdução	12
2	Preliminares	14
2.1	Conceitos Fundamentais e Visão Geral	14
3	Introdução à Teoria de Fenichel	21
3.1	Exemplos de sistemas 2-dimensional	21
3.2	Exemplos com direções de contração rápida e expansão rápida	29
4	Teoria de Fenichel para sistemas singularmente perturbados	37
4.1	Variedades normalmente hiperbólicas em sistemas singularmente perturba- dos	37
4.2	Teoria da persistência de Fenichel	38
4.3	A forma normal de Fenichel para o sistema perturbado	39
4.4	Teoria da Perturbação para encontrar variedades localmente invariantes $\mathcal{M}_\varepsilon$	42
4.5	Condições de contorno para dois pontos: correspondência e transversali- dade	43
4.6	Fibras e geometria no problema de órbitas homoclínicas para bandas de ressonância em sistemas hamiltonianos Perturbados	51
5	Regularização geométrica de uma singularidade do tipo cúspide em sis- temas lentos-rápidos com aplicações para exemplos de Zeeman	58
5.1	Análise dos modelos de Zeeman como equações forçadas	59
5.1.1	O modelo de batimento cardíaco	59
5.1.2	O modelo do impulso nervoso	60
5.1.3	Uma regularização de equações forçadas	60
5.1.4	Dobras, selas dobradas e cúspide em equações forçadas com dois parâmetros	62
5.1.5	Equilíbrios para (5.6)	64
5.1.6	Retorno global singular para a equação de Zeeman (5.6)	66
5.2	Análise do sistema rápido-lento	68
5.2.1	Dobras e selas dobradas para $\varepsilon > 0$	68
5.2.2	Cúspides singularmente perturbadas - definição e enunciado do te- orema principal	73
5.3	Regularização geométrica de cúspide singularmente perturbada	75
5.3.1	Dinâmica na carta de entrada K_{en}	77
5.3.2	Dinâmica na carta de reescalonamento K	79

5.3.3	Dinâmica nas cartas de reescalonamento K_- e K_+	80
5.3.4	Dinâmica na carta de saída K_{ex}	81
5.3.5	Prova do Teorema 5.9	83
5.4	Fenichel em modelos de Zeeman	84
5.4.1	Os resultados para o modelo de batimento cardíaco (5.2) com $\varepsilon > 0$.	84
5.4.2	Os resultados para o modelo de impulso nervoso (5.5) com $\varepsilon > 0$.	84
Referências		86

1 Introdução

Esse texto tem o enfoque no desenvolvimento de algumas construções geométricas fundamentais e na teoria dos sistemas dinâmicos para sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, z, \varepsilon) \\z' &= \varepsilon g(x, z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e “ ’ ” representa a derivada com relação à variável independente t . Aqui, as funções f e g são tomadas como sendo $\mathcal{C}^\infty$, salvo menção em contrário, num aberto $U \times I \subset (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto contendo $\varepsilon = 0$. Nos interessaremos quando ε é positivo e pequeno. Nesse caso a variável x é chamada *variável rápida*, enquanto que z é chamada *variável lenta*. O motivo dessas nomenclaturas se deve ao fato que o crescimento da variável x depende apenas de f , enquanto que z se contrai numa taxa ε para se igualar ao crescimento de g . Para tornar mais formal essa terminologia, definimos o seguinte conceito da análise assintótica

Definição 1. Considere $u, v :] - \delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Diz-se que a **ordem assintótica** (ou simplesmente **ordem**) de v não é inferior à de u quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se existirem κ, ε_0 positivos tais que

$$|v(\varepsilon)| < \kappa |u(\varepsilon)| \quad \text{sempre que } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Em uma notação mais sucinta, diz-se “ $v(\varepsilon) = \mathcal{O}(u(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ ”, ou “ $v(\varepsilon)$ é um $\mathcal{O}$ -grande de $u(\varepsilon)$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ ”.

Verifica-se as seguintes propriedades de $\mathcal{O}$ abaixo

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(f) &= \mathcal{O}(g + f) \\ \mathcal{O}(g) \cdot \mathcal{O}(f) &= \mathcal{O}(g \cdot f) \end{aligned}.$$

Nessa terminologia, vê-se que $x' = \mathcal{O}(1)$ e $z' = \mathcal{O}(\varepsilon)$. De fato, estendendo f e g em potências de ε obtém-se

$$\begin{aligned}|x'| &= |f| \leq |f(x, z, 0)| + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(1) \\ |z'| &= \varepsilon |g| \leq \varepsilon (|g(x, z, 0)| + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}.$$

Agora, note que, aplicando a mudança de variável $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$, ocorre que

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{f}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{\varepsilon g}{\varepsilon} = g.$$

O sistema (1.1) toma, então, a forma equivalente

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, z, \varepsilon) \\ \dot{z} &= g(x, z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde “.” simboliza a derivada com relação à variável τ . Chamamos as variáveis independentes t e τ de *tempo rápido* e *tempo lento*, respectivamente. Aos sistemas (1.1) e (1.2) damos o nome de *sistema rápido* e *sistema lento*, respectivamente. Quando $\varepsilon > 0$ é pequeno esses dois sistemas ganham o nome *perturbação singular*.

A nomenclatura *singular* se deve ao comportamento descontínuo entre os sistemas rápido e lento quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por um lado, o sistema rápido (1.1), quando $\varepsilon = 0$, se reduz a um sistema m -dimensional em que a variável z se reduz a uma constante

$$\begin{aligned} x' &= f(x, z, \varepsilon) \\ z' &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nos referimos à (1.3) como *sistema rápido reduzido*. Por outro lado, o sistema lento (1.2), quando $\varepsilon = 0$, se reduz a uma combinação de uma equação algébrica com uma diferencial, que por isso chamamos de *algébrica-diferencial*

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, z, \varepsilon) \\ \dot{z} &= g(x, z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Aqui, a dimensão do sistema de equação diferencial reduz de $m+n$ para n , e nos referimos a (1.4) como *sistema lento reduzido*.

O foco nos primeiros capítulos desse trabalho será exclusivamente uma classe particular de métodos que aqui serão nomeados *métodos geométricos*. O que será posteriormente chamado *aproximação geométrica* de (1.1) surgirá de esforços na identificação da estrutura dinâmica central, tal como conjuntos e variedades invariantes presentes no espaço de fase de (1.1). Procuraremos também explorar suas propriedades, tal como suas decomposições nos sistemas rápido-lento e folheações de várias variedades, com o fim de solucionar vários problemas, que quando possível, será exposto no texto.

Os sistemas reduzidos, que nos referiremos também como sistemas não perturbados, oferecem diferentes intuições do comportamento de órbitas e estruturas geométricas nos seus respectivos sistemas associados rápido-lento. Algumas construções geométricas no espaço de fase de (1.1), quando $0 < \varepsilon \ll 1$, possuem seus análogos no sistema (1.3), que por ser mais simples, é mais fácil de localizar. Além disso, algumas outras construções geométricas de (1.1) (ou equivalentemente de (1.2)), quando $0 < \varepsilon \ll 1$, se encontra próximo de objetos no espaço de fase de (1.4). Ao explorar esta decomposição em sistemas rápido-lento, a abordagem geométrica reduz o sistema singularmente perturbado completo em perturbações regulares (perturbações contínuas no limite) de dimensão inferior.

Nos Capítulos 3 e 4 nos concentramos em uma classe de conjuntos que apresentam uma certa estabilidade sob a perturbação singular, os chamados conjuntos normalmente hiperbólicos, que na realidade serão *variedades normalmente hiperbólicas* devido a regularidade que supomos sob as funções f e g . No capítulo 5 estudamos alguns conjuntos que falham na normal hiperbolicidade, os chamados conjuntos de dobra. O capítulo 5 terá como principal objetivo o estudo em torno de um ponto de dobra especial, o chamado *ponto de cúspide* (ou *singularidade de cúspide*), aplicaremos parte da teoria geométrica desenvolvida nos capítulos 3 e 4 a fim de entender o comportamento local em torno dessa singularidade.

2 Preliminares

2.1 Conceitos Fundamentais e Visão Geral

Alguns Conceitos Fundamentais de EDO's

Alguns conjuntos de pontos que possuem propriedades especiais em relação a uma equação diferencial ordinária (EDO) são importantes para o estudo dos sistemas dinâmicos. O conjunto mais simples dentre esses é o conjunto dos pontos de equilíbrio. Para a equação $y' = h(y)$, onde $y \in \mathbb{R}^k$, y_0 é dito ponto de equilíbrio se $h(y_0) = 0$. Esses pontos correspondem ao estado de equilíbrio do sistema modelado pela EDO. São de interesse também conjuntos que, quando submetido ao campo h , preservam suas órbitas dentro de si, os assim chamados conjuntos invariantes. Então, $V \subset \mathbb{R}^k$ é dito *conjunto invariante* do sistema $y' = h(y)$ se, qualquer trajetória γ com $\gamma(t_0) \in V$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $\gamma(t) \in V$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto dos pontos de equilíbrio e órbitas periódicas são exemplos de conjuntos invariante. Finalmente, uma noção mais restritiva de invariância, chamada invariância local, é crucial na teoria de Fenichel. Um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^k$ é dito *localmente invariante* com respeito ao aberto $W \subset \mathbb{R}^k$ sob o sistema $y' = h(y)$ se, $V \subset W$ e qualquer trajetória saindo de V sai simultaneamente de W . No caso de existir W com essa propriedade, diremos simplesmente que V é localmente invariante.

Os conjuntos invariante (e localmente invariante) que serão estudados aqui são, em geral, variedades. Dizemos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ é uma *variedade suave de dimensão q* , onde $q \leq p$, se, cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança de M difeomorfa numa ordem $\mathcal{C}^\infty$ ($\mathcal{C}^\infty$ -difeomorfo) a um aberto de $\mathbb{R}^q$. Em outras palavras, para cada $x \in M$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^p$, com $x \in U$, e um difeomorfismo $\phi \in \mathcal{C}^\infty : U \cap M \rightarrow V$, onde $V \subset \mathbb{R}^q$ é um aberto. Pontos, curvas suaves e gráficos de funções suave são exemplos de variedades suaves.

As variedades que serão estudadas nesse texto serão compactas. Algumas possuirão “bordo”, enquanto outras não. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ é dito *variedade com bordo q -dimensional* se, cada $x \in M$ possuir uma vizinhança aberta de M $\mathcal{C}^\infty$ -difeomorfo a um aberto $V \subset H^q$, onde $H^q = \{(x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q : x_q \geq 0\}$. Além disso, o bordo de M , ∂M , é o conjunto de todos os pontos de M que são levados, pelo difeomorfismo associado, ao conjunto $\partial H^q := \{(x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q : x_q = 0\}$. Finalmente, uma variedade é dita *variedade localmente invariante* sob o sistema $y' = h(y)$ se, o conjunto de seus pontos for localmente invariante.

Uma segunda propriedade que desempenha um papel importante nesse texto é a de hiperbolicidade. Considere novamente o sistema $y' = h(y)$, juntamente com sua linearização $w' = J.w$, onde $J = J(x)$ é a matriz jacobiana $k \times k$ do campo h com respeito a variável y . Um ponto de equilíbrio $x \in \mathbb{R}^k$ desse sistema é dito *hiperbólico* se, todos os auto valores de $J(x)$ possuem parte real não nula. Um exemplo de ponto fixo hiperbólico

pode ser encontrado no equilíbrio da equação diferencial que descreve um pêndulo não linear clássico

$$\begin{aligned} q' &= p \\ p' &= -\sin q \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aqui, $(-\pi, 0)$ é ponto de equilíbrio, e o Jacobiano do campo nesse ponto é

$$J(-\pi, 0) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\cos q & 0 \end{array} \right] \Big|_{(-\pi, 0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right],$$

daí, o polinômio característico dessa matriz é

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\cos q & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Então, os autovalores de $J(-\pi, 0)$ são ± 1 . Por definição $(-\pi, 0)$ é ponto hiperbólico. Devido ao ponto ser hiperbólico, as órbitas que se aproximam de $(-\pi, 0)$ (ou se afastam) o fazem numa taxa exponencial conforme t cresce. Isso se deve ao teorema de Hartman-Grobman, que estabelece uma relação entre um campo e seu associado linear num ponto de equilíbrio hiperbólico.

Um outro exemplo, que terá relevância numa seção posterior, é dado pelo sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ z' &= -\varepsilon z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esse exemplo é um caso particular de (1.1) com $m, n = 1$. A matriz Jacobiana desse sistema é

$$J(x, z) = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{array} \right],$$

portanto, vê-se facilmente que os autovalores são -1 e $-\varepsilon$ em qualquer ponto (x, z) . Note que a origem é um ponto de equilíbrio, e pelo que foi visto, é também hiperbólico, isso para todo $\varepsilon \neq 0$. Além disso, nesse sistema todas as trajetórias se aproximam da origem conforme o tempo cresce. A taxa de aproximação na direção de x é maior que na direção de z . Para firmar essas afirmações, recorde-se de que as soluções desse sistema são do tipo $\varphi(t) = (c_1 e^{-t}, c_2 e^{-\varepsilon t})$. No entanto, quando $\varepsilon = 0$, o segundo autovalor é identicamente nulo. Portanto, este exemplo também ilustra uma situação em que o ponto hiperbólico não se conserva no sistema não perturbado, o que é uma característica comum nos sistemas singularmente perturbados da forma (1.1), esse fenômeno será um dos assuntos principais desse texto.

Quando linearizado num ponto hiperbólico y_0 , o sistema $y' = h(y)$ possui subespaços que chamamos de *subespaço estável* e *subespaço instável*, cujas respectivas dimensões são iguais ao número de autovalores com parte real negativa e positiva da Jacobiana $J(y_0)$. O subespaço estável é aquele em que, além de ser invariante e linear, todas as trajetórias nele contidas se aproximam do ponto de equilíbrio conforme o tempo cresce, enquanto que no instável, as trajetórias se afastam. Essa aproximação, ou afastamento, nesses subespaços, se dão numa taxa exponencial, isso devido a própria composição das soluções. Quando mudamos o sentido do tempo, as trajetórias no subespaço instável irão se aproximar de y_0 , também numa taxa exponencial. A teoria dos sistemas dinâmicos afirma que espaços análogos não linear podem ser encontrados no sistema $y' = h(y)$, esses espaços são conhecidos como *variedade local estável* e *instável* do ponto de equilíbrio hiperbólico

y_0 . A *variedade estável* do ponto de equilíbrio hiperbólico y_0 na vizinhança $V \subset R^k$, $y_0 \in V$, é definida por

$$W_{loc}^S(y_0) = \{y; \phi(y, t) \in V \forall t \geq 0, \phi(y, t) \rightarrow y_0 \text{ quando } t \rightarrow \infty\}, \quad (2.3)$$

onde $\phi(y, t)$ é o fluxo de $y' = h(y)$. Similarmente, a *variedade instável* do ponto de equilíbrio hiperbólico y_0 na vizinhança V é definida por

$$W_{loc}^U(y_0) = \{y; \phi(y, t) \in V \forall t \leq 0, \phi(y, t) \rightarrow y_0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}. \quad (2.4)$$

Mais geralmente, para um sistema cujo campo é de classe C^r , $r \geq 1$, o Teorema da Variedade Estável estabelece a existência dessas variedades com uma suavidade de ordem C^r (ou simplesmente variedade C^r). As variedades globais, estável e instável em y_0 , nomeadas $W^S(y_0)$ e $W^U(y_0)$ respectivamente, são aquelas obtidas sem a restrição da vizinhança, e que, portanto, permitem que o fluxo seja avaliado em todo domínio do campo em questão, não apenas em V .

No exemplo (2.1) do pêndulo não linear clássico, os pontos de equilíbrio hiperbólico em $(\pm\pi, 0)$ possuem variedades locais 1-dimensionais, estável e instável, numa suavidade de ordem C^∞ , uma vez que o campo associado é C^∞ . Pode-se verificar que as variedades locais são descritas implicitamente pela equação

$$p^2/2 + (1 - \cos q) = 2.$$

Para ver que esses conjuntos são invariantes pelo campo, basta notar que, se $F(q, p) = p^2/2 + (1 - \cos(q))$, então $\nabla F(q, p) = (\sin(q), p)$ é normal ao conjunto definido pela equação acima, e como $\langle \nabla F(q, p), (q', p') \rangle = 0$ segue que o vetor tangente ao conjunto $F^{-1}(2)$ é paralelo ao campo. Daí $F^{-1}(2)$ é invariante. A estabilidade e instabilidade se deve ao fato que $F(\pm\pi, 0) = 2$, ou seja, $(\pm\pi, 0) \in F^{-1}(2)$, junto ao comportamento do campo. Quando $p > 0$ a componente em q é positiva, por isso o campo vai da esquerda para a direita, quando $p < 0$ acontece o oposto

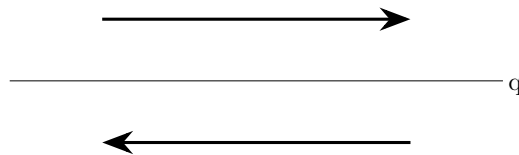


Figura 2.1: As soluções correm no sentido positivo de q em $\{(p, q); p > 0\}$, e no sentido negativo de q em $\{(p, q); p < 0\}$ conforme o tempo cresce. Fonte: autoria própria.

Sendo assim, a única possibilidade para o comportamento local do fluxo desse campo no conjunto $F^{-1}(2)$ em torno dos pontos de equilíbrio está ilustrado abaixo.

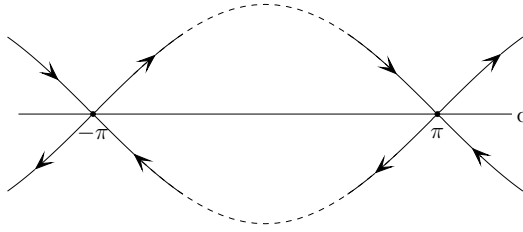


Figura 2.2: O sentido positivo das órbitas (tempo crescente) segue o esquema dado na Figura 2.1. Fonte: autoria própria.

Além disso, essas variedades locais são tangentes ao seu respectivo subespaço no ponto de equilíbrio. A verificação desse fato pode ser feita notando que os autovetores dos subespaços são tangentes às respectivas variedades locais no ponto de equilíbrio. Verificaremos para o ponto $(-\pi, 0)$, em $(\pi, 0)$ as contas são análogas. Note que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$

Então, $(1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor 1, do mesmo modo se verifica que $(1, -1)$ é autovetor associado ao autovalor -1 . Será feito aqui a verificação sobre a variedade estável, para a instável as contas são parecidas. Note que, a variedade estável em $(-\pi, 0)$ corresponde aos pontos da equação $F(q, p) = 2$ dentro do conjunto $\{q \leq -\pi \text{ e } p \geq 0\} \cup \{q \geq -\pi \text{ e } p \leq 0\}$ (Recorde que a variedade é local, por isso esses conjuntos são vistos localmente). Então, utilizando a equação $F = 2$, deduz-se que $W_{loc}^S(-\pi, 0)$ pode ser parametrizada por

$$\gamma(q) = \begin{cases} (q, \sqrt{2(1 + \cos q)}) & \text{se } q \leq -\pi \\ (q, -\sqrt{2(1 + \cos q)}) & \text{se } q \geq -\pi \end{cases}.$$

Como

$$\frac{\gamma(-\pi+h) - \gamma(-\pi)}{h} = \begin{cases} (1, \frac{\sqrt{2(1 + \cos(-\pi+h))}}{h}) & \text{se } h < 0 \\ (1, -\frac{\sqrt{2(1 + \cos(-\pi+h))}}{h}) & \text{se } h > 0 \end{cases},$$

então

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(-\pi+h) - \gamma(-\pi)}{h} = (1, \sqrt{2} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 + \cos(-\pi+h)}}{h}) = (1, -1),$$

uma vez que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 + \cos(-\pi+h)}}{h} = -\sqrt{\lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 + \cos(-\pi+h)}{h^2} \right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De forma análoga se verifica que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(-\pi+h) - \gamma(-\pi)}{h} = (1, -1)$.

Logo a tangência se verifica, pois o vetor tangente a variedade estável é paralelo ao gerador do subespaço estável.

Alguns conceitos fundamentais do sistema (1.1)

Olhando para a forma do sistema lento reduzido (1.4), somos naturalmente levados a estudar o conjunto que anula f . Tendo conhecimento da Forma local das Submersões, é razoável esperar que, localmente, este conjunto seja n -dimensional, e para os problemas que serão estudados aqui, é natural considerar os casos em que o conjunto $\{(x, z) : f(x, z, 0) = 0\}$ seja uma variedade $\mathcal{C}^\infty$ (que será denotada por $\mathcal{M}_0$). Além disso, será conveniente considerarmos tais variedades $\mathcal{M}_0$ sendo dadas por uma função $\mathcal{C}^\infty$ $x = X_0(z)$. Essa última suposição não é necessária, uma vez que, se não ocorrer para $\mathcal{M}_0$ na totalidade, localmente sempre será válida, e, portanto, podemos considerar $\mathcal{M}_0$ como a colagem suave de conjuntos com essa propriedade.

Para ilustrar a situação, considere o sistema (2.2). Reescrevendo o sistema no tempo lento obtém-se

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x \\ \dot{z} &= -z\end{aligned},$$

portanto, o conjunto dos pontos que anulam f é $\{x = 0\}$, ou seja, $\mathcal{M}_0$ nesse caso é o eixo z , e por isso $X_0 = 0$ é a função que descreve $\mathcal{M}_0$, aqui existe uma independência de z em X_0 .

Para sistemas gerais (1.1) com $\varepsilon = 0$, as soluções com condição inicial em $\mathcal{M}_0$ evoluem na escala de tempo lenta, conforme o sistema lento (1.4) com $x = X_0(z)$

$$\dot{z} = g(X_0(z), z, 0).$$

Por outro lado, quando visto da perspectiva do sistema rápido (1.1), com $\varepsilon = 0$, $\mathcal{M}_0$ é uma variedade de pontos de equilíbrio, uma vez que, por definição, $x' = 0$ em todos os pontos $(X_0(z), z, 0)$ que anulam f . Portanto, $\mathcal{M}_0$ é invariante. O fato de $\mathcal{M}_0$ consistir de pontos de equilíbrio no sistema rápido reduzido contrasta com a dinâmica existente em $\mathcal{M}_0$ sobre o sistema lento reduzido. Em exemplos posteriores ficará evidente que as duas perspectivas são necessárias.

Finalmente, entre todos os sistemas do tipo (1.1) com variedades localmente invariantes, nos concentraremos exclusivamente naqueles em que, quando $\varepsilon = 0$, cada ponto $(X_0(z), z)$ em $\mathcal{M}_0$ é ponto de equilíbrio hiperbólico na direção normal à z , ou seja, do sistema rápido reduzido (1.3). Nestes sistemas, diz-se que a variedade invariante $\mathcal{M}_0$ é normalmente hiperbólica, e são essas variedades que ocupam lugar central na teoria da perturbação singular.

No exemplo (2.2), o eixo z é uma variedade invariante normalmente hiperbólica. Outro exemplo é fornecido pela equação de um pêndulo, que pode ser escrito na forma de sistema como

$$\begin{aligned}q' &= p \\ p' &= -(1 + \alpha \sin z) \sin q, \\ z' &= \varepsilon\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde $0 < \alpha < 1$. Esse modelo surge, por exemplo, quando o comprimento do pêndulo varia de forma lenta e periódica. Para cada $z \in [0, 2\pi[$, os pontos $(q = \pm\pi, p = 0)$ são pontos de equilíbrio hiperbólicos do sistema rápido reduzido

$$\begin{aligned}q' &= p \\ p' &= -(1 + \alpha \sin z) \sin q, \\ z' &= 0\end{aligned}$$

onde z é um parâmetro fixo. No espaço de fase estendido $\{(q, p, z)\}$, a união

$$M_0^\pm = \bigcup_{z \in [0, 2\pi[} \{(\pm\pi, 0, z)\}$$

é uma variedade invariante normalmente hiperbólica de (2.5) quando $\varepsilon = 0$.

Finalmente, para um campo vetorial $\mathcal{C}^r$, uma variedade invariante normalmente hiperbólica $\mathcal{M}_0$ possui variedades locais $\mathcal{C}^r$ estável e instável, $W_{loc}^S(\mathcal{M}_0)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_0)$ respectivamente. Essas são às uniões sobre todos $z \in M_0$ das variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio hiperbólicos do sistema rápido reduzido $(X_0(z), z)$. Além disso, pode-se mostrar que essas variedades são também $\mathcal{C}^r$.

Uma visão geral dos exemplos tratados

Nas seguintes seções serão discutidos exemplos elementares e de baixa dimensão da classe geral de sistemas da forma (1.1). Os exemplos estudados fornecerão um contexto no qual será possível introduzir os vários objetos geométricos e terminologia de sistemas dinâmicos que serão encontrados na teoria geral.

Pode-se pensar que exemplos no plano são triviais, no entanto, um exemplo planar não linear também é dado na seção 3.1, o da cinética enzimática

$$\begin{aligned} x' &= z - (z + \kappa)x \\ z' &= \varepsilon(-z + (z + \kappa - \lambda)x) \end{aligned}$$

A dinâmica deste exemplo, bem como a de outros não-lineares no plano, podem ser decompostas em termos dos mesmos tipos de estruturas geométricas, que serão identificadas no primeiro exemplo.

O terceiro exemplo, dado na seção 3.2, é novamente linear

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ z' &= \varepsilon z \end{aligned}$$

Sua dimensão é maior que a do primeiro exemplo e nos permite mostrar que resultados análogos aos que obtemos para o primeiro e segundo exemplos (sistemas com apenas uma direção de decaimento exponencial rápido) também são válidos quando o sistema apresenta ambas direções (x_1 e x_2) de decaimento e crescimento exponencial.

Além disso, na seção 3.2, uma aplicação do movimento ressoante de águas rasas em um tanque é dado

$$\begin{aligned} q' &= p \\ p' &= q^2 - F(z) \\ z' &= \varepsilon \end{aligned}$$

onde $F(z) = 1 + c + \cos(z)$ onde $c > 0$. Este quarto exemplo ilustra as características geométricas gerais em sistemas não-lineares, de ordem 3, singularmente perturbados. Esse exemplo faz parte de uma classe de sistemas hamiltonianos, que inclui o pêndulo de variação lenta (2.5).

Uma vez concluída a introdução das principais construções e conceitos geométricos no contexto destes exemplos sucessivamente mais complexos, voltamos a nossa atenção no capítulo 4 para sistemas gerais (1.1) que tem uma variedade invariante normalmente hiperbólica $\mathcal{M}_0$ quando $\varepsilon = 0$. Um teorema devido a Fenichel é enunciado fornecendo as condições sob as quais variedades invariantes normalmente hiperbólica em (1.1) persistem quando $0 < \varepsilon \ll 1$. Este teorema também foi estabelecido independentemente por Hirsch,

Pugh e Shub. Variedades persistentes são nomeadas *variedades lentas*, e a prova de sua persistência é feita demonstrando que as variedades locais estáveis e instáveis de M_0 também persistem como variedades localmente invariantes no sistema perturbado. Em outras palavras, mostra-se que a estrutura hiperbólica local persiste, e então a variedade lenta está imediatamente disponível como uma variedade localmente invariante na interseção transversal dessas variedades persistentes locais estáveis e instáveis. A imagem local completa que emerge é crucial para estabelecer uma forma normal para o campo vetorial na vizinhança da variedade lenta, que contém todas as informações sobre a dinâmica lenta nas variedades lentas e a dinâmica rápida nas direções normais às variedades lentas.

3 Introdução à Teoria de Fenichel

3.1 Exemplos de sistemas 2-dimensional

Nesta seção estudamos dois exemplos planares de sistemas (1.1). Começamos com o par desacoplado de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{aligned}x' &= -x \\z' &= -\varepsilon z\end{aligned}\quad (3.1)$$

Então, voltamos a um exemplo da cinética enzimática

$$\begin{aligned}x' &= z - (z + \kappa)x \\z' &= \varepsilon(-z + (z + \kappa - \lambda)x)\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde κ e λ são constantes positivas. Ambos os sistemas são casos especiais de (1.1) em que $m, n = 1$, e são singularmente perturbados quando $0 < \varepsilon \ll 1$. O sistema (3.1) foi escolhido porque facilita nossa exploração inicial da teoria de Fenichel. O sistema (3.2) exibe fenômenos gerais comuns a sistemas planares singularmente perturbados, e ilustra o fato de que problemas não lineares podem ser decompostos usando os mesmos métodos geométricos.

Soluções exatas do sistema (3.1)

Devido ao fato que o sistema linear (3.1) é desacoplado, a solução geral com condição inicial $(x(0), z(0), \varepsilon)$ é facilmente vista como sendo

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0)e^{-t} \\z(t) &= z(0)e^{-\varepsilon t}\end{aligned}$$

No plano de fase (x, z) as trajetórias são dadas explicitamente em termos da família de funções de um parâmetro: $x = Cz^{\frac{1}{\varepsilon}}$. A Figura 3.1 mostra o esboço no plano de fase desse sistema para $0 < \varepsilon \ll 1$.

Além disso, a origem é o único ponto de equilíbrio quando $\varepsilon \neq 0$. Todas as trajetórias se aproximam dele conforme o tempo cresce, umas horizontalmente (com condição inicial no eixo x) enquanto que, todas as outras (que não estão no eixo z) se aproximam tangenciando o eixo z numa ordem de suavidade $\mathcal{C}^{r(\varepsilon)}$, onde $r(\varepsilon)$ é menor ou igual ao maior número inteiro que é menor ou igual a $\frac{1}{\varepsilon}$. A suavidade dessa tangência tem ordem infinita quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Tendo revisado brevemente soluções exatas e diretas, agora voltamos nossa atenção para a discussão dos objetos geométricos relevantes do ponto de vista de sistemas dinâmicos. Começamos com o sistema mais simples $\varepsilon = 0$ e então consideramos o sistema completo.

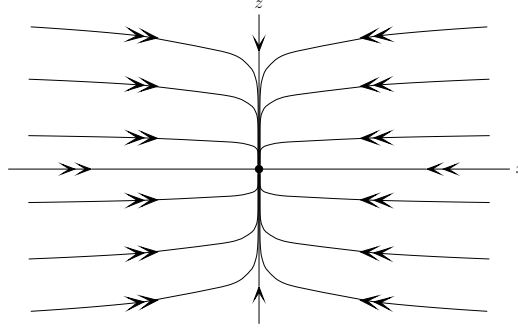


Figura 3.1: Nesta figura, assim como ao longo deste texto, uma seta única indica que a direção é lenta, enquanto que a seta dupla indica que a direção é rápida. Fonte: autoria própria.

Estrutura geométrica do sistema (3.1) quando $\varepsilon = 0$

O sistema rápido reduzido associado a (3.1) é

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ z' &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

no plano de fase (x, z) (veja Figura 3.2), o eixo z é uma linha de pontos de equilíbrio e, portanto, um conjunto invariante. Além disso, como uma reta em $\mathbb{R}^2$ é uma variedade, sabemos que o eixo z é uma variedade invariante de (3.1) com $\varepsilon = 0$. Para cada z , a componente rápida do campo vetorial (3.1), $f(x, z, 0) = -x$, linearizado no ponto de equilíbrio $x = 0$ tem apenas um autovalor, que é negativo, a saber -1 . Portanto, o eixo z é uma variedade invariante normalmente hiperbólica de (3.1) com $\varepsilon = 0$. Denotamos essa variedade de $\mathcal{M}_0$. Finalmente, devido ao fato de que todas as trajetórias se aproximam de pontos de $\mathcal{M}_0$ a uma taxa exponencial conforme o tempo cresce, a variedade estável de $\mathcal{M}_0$ é todo o plano (x, y) . Denotamos a variedade estável de $\mathcal{M}_0$ por $W^S(\mathcal{M}_0)$, e observamos que não existem pontos de equilíbrio com direções instáveis.

As linhas $z = c$, c constante, são conjuntos invariantes para cada $c \in \mathbb{R}$ quando $\varepsilon = 0$. Essas linhas também são chamadas fibras unidimensionais, e as denominamos por F_z^0 , onde o zero no índice superior indica $\varepsilon = 0$ e z denota o valor constante.

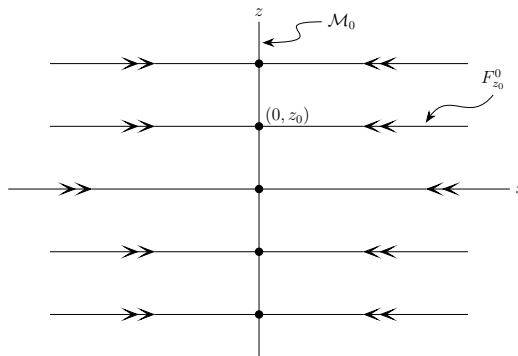


Figura 3.2: A geometria de (3.1) quando $\varepsilon = 0$. Fonte: autoria própria.

Essas linhas podem ainda ser classificadas como fibras rápidas, porque a taxa exponencial de contração ao longo delas em direção a $x = 0$ é $\mathcal{O}(1)$ na variável de tempo t , e os pontos $(0, z)$ nos quais essas linhas são ligados à variedade $\mathcal{M}_0$ são chamados de pontos base das fibras. Finalmente, tomando a união sobre todos z das fibras rápidas produz-se uma família invariante de fibras (linhas) que denotamos $\mathcal{F}^0$.

Observação 3.1. Neste exemplo, diz-se que a família de fibras rápidas é uma folheação do plano (x, z) (e, portanto, também $W^S(\mathcal{M}_0)$), uma vez que existe uma linha para cada z , e as linhas preenchem completamente o plano.

Estruturas geométricas presente em (3.1) quando $0 < \varepsilon \ll 1$

Pela construção deste exemplo, todas as estruturas geométricas identificadas para o sistema $\varepsilon = 0$ também estão presentes, mas com propriedades modificadas, no espaço de fase de (3.1) com $0 < \varepsilon \ll 1$, isto é, eles persistem quando o sistema $\varepsilon = 0$ é perturbado e inclui o termo $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Além disso, verifica-se que este é apenas um dos exemplos mais simples da teoria da persistência geral para variedades invariantes normalmente hiperbólicas, dos sistemas gerais (1.1), como será visto no capítulo 4.

O eixo z é novamente uma variedade invariante quando $0 < \varepsilon \ll 1$. Veja a Figura 3.3 abaixo. Agora o denotamos como $\mathcal{M}_\varepsilon$. O fluxo em $\mathcal{M}_\varepsilon$ é lento, governado pela componente lenta (segunda componente) do sistema

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = -x \quad \text{e} \quad \frac{dz}{d\tau} = -z. \quad (3.3)$$

Além disso, nas retas horizontais, a taxa de contração continua sendo exponencialmente grande e $\mathcal{O}(1)$ com relação ao tempo rápido. Por isso a família de linhas $z = \text{constante}$ ainda constitui uma família de fibras rápidas, no sentido que, pontos numa mesma fibra se aproximam exponencialmente na taxa de tempo rápida. Mais formalmente, considerando trajetórias com condições iniciais $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$ respectivamente, ocorre que

$$\|(p_1 e^{-t}, p_2 e^{-\varepsilon t}) - (q_1 e^{-t}, q_2 e^{-\varepsilon t})\| \leq |p_1 - q_1| e^{-t} + |p_2 - q_2| e^{-\varepsilon t},$$

no caso em que $p_2 = q_2$ a taxa de aproximação depende somente do tempo rápido, e por isso $\{z = \text{constante}\}$ são ditas fibras rápidas. Essas fibras são estruturas herdadas do sistema rápido reduzido. Os pontos bases dessas fibras são precisamente os pontos em $\mathcal{M}_\varepsilon$. Denotamos as fibras individuais por F_z^ε , onde z denota a coordenada z do ponto base da fibra, e a família das fibras denotamos $\mathcal{F}^\varepsilon$. Do que foi visto, o fluxo lento que atua sobre as fibras depende apenas do ponto base de cada fibra. Pode-se concluir então, que as fibras agora são invariantes em relação a (3.3) apenas como uma família, não individualmente, como era o caso quando $\varepsilon = 0$. Mais formalmente, o fluxo ϕ do sistema atua sobre as fibras do seguinte modo

$$\phi_\tau(F_{z(0)}^\varepsilon) \subset F_{\phi_\tau(z(0))}^\varepsilon, \text{ para quaisquer } z(0) \text{ e } \tau.$$

No sentido acima, a evolução de qualquer trajetória com $(x(0), z(0)) \neq (0, 0)$ pode ser decomposta em duas partes, uma componente ao longo da variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$, que é governada pela evolução $(0, z(\tau))$ do ponto base da fibra em que está, e uma segunda componente na direção normal, que é governada pela taxa exponencial da contração ao longo das fibras.

$\mathcal{M}_\varepsilon$ não é uma variedade lenta única. Como mostramos agora, o sistema (3.1) possui uma família de variedades lentas invariantes ao longo das quais as soluções se aproximam da origem em uma tangência $\mathcal{C}^\infty$ e a uma taxa $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Na verdade, a não singularidade e a proximidade das variedades lentas são fenômenos gerais e estão intimamente ligados a noção de variedade central. Portanto, antes de mostrar isso para o exemplo (3.1), revisamos brevemente a definição de uma variedade central. Considere novamente um sistema geral $y' = h(y)$, onde h é $\mathcal{C}^r$. Suponha que esse sistema tenha um ponto de equilíbrio em y_0 no qual o Jacobiano do campo vetorial tem pelo menos um autovalor com parte real nula. O sistema linearizado terá então um subespaço central, que é precisamente a extensão dos autovetores generalizados associados aos autovalores com parte real nula. Qualquer variedade localmente invariante que seja tangente ao subespaço central em y_0 é considerada uma *variedade central* de y_0 . Do mesmo modo se faz para variedades estáveis e instáveis, ou seja, são variedades localmente invariantes que tangenciam os subespaços estável e instável, respectivamente.

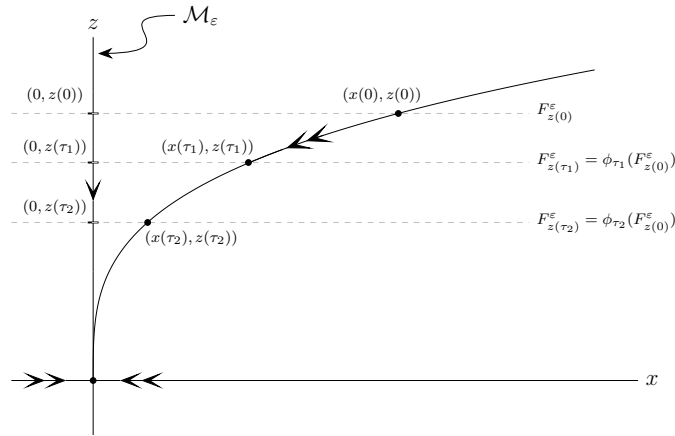


Figura 3.3: $\mathcal{M}_\varepsilon$ e a família invariante $\mathcal{F}^\varepsilon$ de fibras rápidas estáveis (linhas tracejadas) para (3.1) com $0 < \varepsilon \ll 1$. A evolução de uma trajetória pode ser decomposta em duas partes: uma componente ao longo da variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$, que é determinado pela evolução do ponto base $(0, z(0))$ da fibra $F_{z(0)}^\varepsilon$, e uma componente na direção ortogonal, ao longo da fibra $F_{z(0)}^\varepsilon$ e suas imagens $\phi_\tau(F_{z(0)}^\varepsilon) = F_{\phi_\tau(z(0))}^\varepsilon$ sob o fluxo ϕ_τ de (3.3). $\tau_i = \varepsilon t_i$, onde $i = 1, 2$. Fonte: autoria própria.

Nesse sistema, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é não hiperbólico no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. O sistema linearizado tem um subespaço estável unidimensional, gerado pelo vetor $(1, 0)$, e um subespaço central unidimensional, gerado pelo vetor $(1, 0)$. O eixo z é uma variedade central da origem, por definição. Além disso, o eixo z não é a única variedade central do sistema linearizado no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Tanto no semi plano inferior quanto no superior, existem famílias de trajetórias que se aproximam da origem tangenciando o eixo z , ou seja, o subespaço central. Portanto, existe uma família de variedades centrais, cada uma obtida pela concatenação da parte negativa do eixo z ou uma trajetória do semiplano inferior com a parte positiva do eixo z ou uma trajetória do semiplano superior.

Finalmente, cada variedade central construída desta forma é $\mathcal{C}^\infty$ no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ (apenas o eixo z é uma variedade central analítica), e cada variedade central é exponencialmente próxima de todas as outras em intervalos compactos. Em termos ilustrativos, se restringirmos a um intervalo aberto $J \subset \{\text{eixo } z\}$ que contém a origem, então, essas

variedades centrais só podem ser distinguidas pela localização fora de J na qual elas “se separa” (sai de uma vizinhança tubular fixa) do eixo z .

Método das expansões assintóticas combinadas aplicado às soluções de (3.1)

Antes de introduzir o método definiremos mais alguns conceitos de análise assintótica que serão úteis

Definição 2. Considere $u, v : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in U'$. Diz-se que a **ordem assintótica** (ou simplesmente **ordem**) de v é superior a de u quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se existir ε_0 positivo tal que, para qualquer $\kappa > 0$

$$|v(\varepsilon)| < \kappa |u(\varepsilon)| \quad \text{sempre que } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Em uma notação mais sucinta, diz-se “ $v(\varepsilon) = o(u(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ ”, ou “ $v(\varepsilon)$ é um o-pequeno de $u(\varepsilon)$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ ”.

Utilizando o o-pequeno podemos generalizar expansões com resto pequeno de uma função. Para isso, precisaremos de mais uma definição

Definição 3. Considere $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções onde cada $\delta_n \in \mathcal{C}^1$ é decrescente para $\varepsilon \rightarrow 0$ e positiva num intervalo do tipo $]0, \varepsilon_0[$. Dizemos que $\{\delta_n\}$ é uma **sequência assintótica** com $\varepsilon \rightarrow 0$, se

$$\delta_{n+1} = o(\delta_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Estamos agora em condições de definir expansão assintótica, conceito que generaliza a ideia de expansão com resto pequeno de uma função

Definição 4. Considere $u(x, \varepsilon)$ definido em $D \times]0, \varepsilon_0[$ e seja $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência assintótica com $\varepsilon \rightarrow 0$. Se existir funções $b_N(x)$ e $\{a_n(x)\}_{n=0}^N$, limitadas em $x_0 \in D$, tal que

$$u(x_0, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n(x_0) \delta_n(\varepsilon) + b_N(x_0) \cdot o(\delta_N(\varepsilon)),$$

então, o lado direito da igualdade acima é dita **expansão assintótica** de u em x_0 até a ordem δ_N , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se b_n for uniformemente limitada, então

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n(x_0) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_N(\varepsilon))$$

é uma **expansão uniformemente válida** de u até a ordem δ_N .

É comum escrever expansões assintóticas utilizando O-grande

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n(x_0) \delta_n(\varepsilon) + O(\delta_{N+1}(\varepsilon)),$$

assim pode-se obter informações adicionais sobre o restante de ordem superior. Quando a expansão for válida para todo $n \in \mathbb{N}$ escrevemos simplesmente

$$u(x, \varepsilon) \sim \sum a_n(x_0) \delta_n(\varepsilon),$$

que é denominada **série assintótica** de u . Podemos agora introduzir o método das expansões assintóticas combinadas.

Fixamos uma condição inicial $(x(0), z(0))$ com ambas as componentes positivas e $\mathcal{O}(1)$, isto é, independente de ε . Usando o método de expansões assintóticas combinadas, tenta-se escrever a solução através desta condição inicial como uma série de potências em ε

$$\begin{aligned} x^{[\text{in}]}(t, \varepsilon) &= x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ z^{[\text{in}]}(t, \varepsilon) &= z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \varepsilon^2 z_2(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad .$$

Conectando essas expansões ordem por ordem na equação governante (3.1) produz-se a seguinte expansão para $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} x^{[\text{in}]}(t, \varepsilon) &= x(0)e^{-t} \\ z^{[\text{in}]}(t, \varepsilon) &= z(0)(1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) \end{aligned} \quad , \quad (3.4)$$

por exemplo, $z' = -\varepsilon z$ produz

$$(z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \varepsilon^2 z_2(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3))' = -\varepsilon(z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \varepsilon^2 z_2(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3))$$

disso decorre que

$$z'_0 = 0, \quad z'_1 = -\varepsilon z_0, \quad z'_2 = -z_1 \Rightarrow z_0 = z(0), \quad z_1 = -\varepsilon t z(0), \quad z_2 = \varepsilon^2 \frac{t^2}{2} z(0).$$

Claramente, a componente x muda numa taxa $\mathcal{O}(1)$ sobre intervalos de tempo $\mathcal{O}(1)$, enquanto que z muda lentamente. Por esse motivo, na linguagem das expansões assintóticas combinadas, esta expansão é uma expansão interna (ou rápida), e (3.1) é chamada equação interna.

Existe uma restrição natural no intervalo de tempo em que a expansão interna é válida. Com base apenas no tempo de ordem principal, pode-se dizer que a priori, o regimento interno é um intervalo $[0, t_1[$ do tempo t , onde $t_1 > 0$ é qualquer quantidade $\mathcal{O}(1)$. No entanto, com o conhecimento mais preciso da expansão interna que está disponível em (3.4), especificamente os termos na expansão $z^{[\text{in}]}$ permanecem ordenados apenas enquanto $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$, vê-se então que o intervalo de validade é $[0, t_1(\varepsilon)[$ para qualquer função $t_1(\varepsilon) \ll \frac{1}{\varepsilon}$ (muito maior que no caso $t = \mathcal{O}(1)$), uma vez que z só pode mudar em uma quantidade $\mathcal{O}(1)$ após tempos superiores a $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$.

Também é natural olhar para as equações governantes (3.3) escritas em termos da variável lenta. Novamente procura-se uma expansão em série de potências da solução, mas agora com os coeficientes sendo funções de τ

$$\begin{aligned} x^{[ex]}(\tau, \varepsilon) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ z^{[ex]}(\tau, \varepsilon) &= z_0(\tau) + \text{h.o.t} \end{aligned} \quad ,$$

onde h.o.t denota termos de ordem superior. Juntando esses termos ordem por ordem no sistema lento obtém-se

$$\begin{aligned} x^{[ex]}(\tau, \varepsilon) &= 0 + \varepsilon \cdot 0 + \varepsilon^2 \cdot 0 + \dots + x(0)e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}} \\ z^{[ex]}(\tau, \varepsilon) &= z(0)e^{-\tau} \end{aligned} \quad , \quad (3.5)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A variável lenta z evolui uma quantidade $\mathcal{O}(1)$ durante intervalos $\mathcal{O}(1)$ de tempo lento, enquanto a componente x permanece exponencialmente pequena. Observe que incluímos o termo exponencialmente pequeno aqui porque todos os coeficientes das potências de ε se anulam na expansão externa.

As equações (3.3) são denominadas equações externa e (3.5) de expansão externa. A expansão assintótica (3.5) é claramente válida para a solução completa no intervalo de tempo lento (τ, ∞) para qualquer valor $\mathcal{O}(1)$ de τ . Além disso, a partir da expansão completa (3.5) vê-se também que este intervalo de tempo pode ser ampliado para ser

$(\tau_1(\varepsilon), \infty)$, onde τ_1 é qualquer função positiva que se anula quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e satisfaz $\varepsilon \ll \tau_1(\varepsilon)$.

O domínio externo ampliado se sobrepõe ao domínio interno. As soluções interna e externa (3.4) e (3.5) são idênticas sob uma mudança de coordenadas para todo $\varepsilon \neq 0$, devido à simplicidade do sistema. Consequentemente, eles têm trivialmente a mesma forma funcional e, portanto, coincidem no domínio de sobreposição. Esse não é normalmente o caso dos sistemas gerais (1.1).

Relacionando as abordagens geométricas e de correspondência para (3.1)

Nesta seção, finalizamos nossa discussão do exemplo (3.1) descrevendo alguns aspectos da relação entre a teoria geométrica, desenvolvidas nessa seção, e o método de expansões assintóticas combinadas.

Geometricamente, a decomposição natural da evolução de uma condição inicial arbitrária em

- (i) uma componente rápida governada pela contração exponencial ao longo das fibras rápidas estáveis e
- (ii) uma componente lenta dada pelo movimento lento dos pontos de base das fibras ao longo de $\mathcal{M}_\varepsilon$

faz essa conexão entre os regimes rápido e lento explicitamente visíveis. O termo de ordem principal na expansão interna ($x(t) = e^{-t}, z(t) = z(0)$) é precisamente a solução ao longo da $F_{z(0)}^0$ onde se encontra a condição inicial. Além disso, o termo de ordem principal na expansão externa ($x(\tau) = 0, z(\tau) = z(0)e^{-\tau}$) corresponde à evolução do ponto base daquela fibra ao longo da variedade $\mathcal{M}_0$. Então, termos de ordem superior em cada uma das expansões descreve os termos de ordem superior nas expansões das funções cujos gráficos são as fibras invariantes e variedades lentas. A expansão interna estendida descreve não apenas a evolução inicial dos pontos na fibra $F_{z(0)}^\varepsilon$, mas também o movimento no canto quando os pontos nas fibras já estão muito próximos da variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$. Da mesma forma, a expansão externa estendida agora descreve a evolução dos pontos base em $\mathcal{M}_\varepsilon$ e outros pontos em uma vizinhança de $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Um exemplo planar não linear da cinética enzimática

No exemplo (3.1), a variedade não perturbada $\mathcal{M}_0$ e a variedade perturbada específica que denominamos $\mathcal{M}_\varepsilon$ coincidem por construção. Isso foi conveniente para entender a geometria do problema, mas em geral isso não ocorre em sistemas da forma (1.1), mesmo nos planares, as variedades perturbada e não perturbada, não coincidem. Ilustramos fenômenos mais gerais e uma técnica para localizar variedades lentas no modelo não linear (3.2) a partir da cinética enzimática.

Esse modelo surge aplicando a lei da ação das massas ao sistema de duas reações em que um substrato e uma enzima reagem reversivelmente para produzir um complexo substrato-enzima e, por sua vez, esse complexo é convertido irreversivelmente em produto, liberando a enzima no processo.

O exemplo (3.2) é um caso especial do sistema geral (1.1) com $f(x, z, \varepsilon) = z - (z + \kappa)x$, e $g(x, z, \varepsilon) = -z + (z + \kappa - \lambda)x$. Quando $\varepsilon = 0$, o sistema possui uma variedade invariante normalmente hiperbólica

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (x, z, \varepsilon) : x = X_0(z) = \frac{z}{z + \kappa} \right\}$$

(A notação $\mathcal{M}_0$ será padrão para denotar as variedades invariantes para $\varepsilon = 0$ em cada exemplo.). Em termos da variável de tempo lento, a dinâmica em $\mathcal{M}_0$ é governada pela equação reduzida $\dot{z} = -\lambda z/(z + \kappa)$. Além disso, localmente, as fibras rápidas e estáveis F_z^0 são linhas horizontais. Para cada z , há contração exponencial ao longo da fibra F_z^0 em direção a $x = X_0(z)$, quando $t \rightarrow \infty$.

Em seguida, voltamos para a geometria quando $0 < \varepsilon \ll 1$. O espaço de fase com $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 1$ e $\lambda = 0.5$ é mostrado na Figura 3.4. Como, aplicando a regra da cadeia, tem-se que

$$x' = \frac{d}{dz} X_0(z) \cdot z' = \frac{\kappa}{(z+\kappa)^2} \varepsilon (-z + (z + \kappa - \lambda)x) = \varepsilon \left(\frac{-\kappa\lambda z}{(z+\kappa)^3} \right),$$

vê-se que $x' = \mathcal{O}(\varepsilon)$, e não nulo em pontos de $\mathcal{M}_0$. Portanto, o conjunto $\mathcal{M}_0$ não é mais invariante no sistema quando $0 < \varepsilon \ll 1$. No entanto, sabemos pelo nosso primeiro exemplo (3.1) que uma variedade invariante normalmente hiperbólica é uma estrutura robusta que deve persistir sob perturbação. Afinal, as trajetórias ainda sofrem contração exponencial rápida nas direções normais, enquanto a taxa de crescimento na direção tangencial é fraca. Na verdade, esperamos que haja uma família inteira de variedades invariantes lentas neste exemplo quando $0 < \varepsilon \ll 1$, tal como para o sistema linear (3.1).

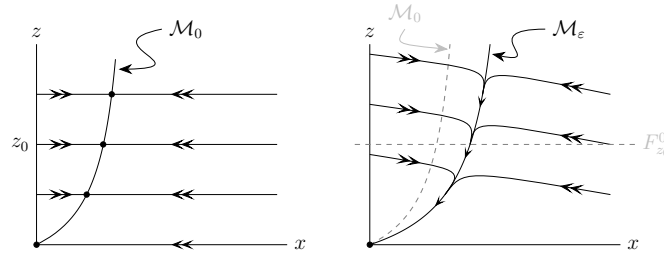


Figura 3.4: Ao lado esquerdo tem-se o espaço de fase com $\varepsilon = 0$. Ao lado direito o espaço de fase com $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 1$ e $\lambda = 0.5$. Fonte: autoria própria.

Assim, perguntamos se, perto da origem, existem funções $X(z, \varepsilon)$ cujos gráficos são variedades lentas localmente invariantes do sistema completo. Além disso, uma vez que tais variedades $\mathcal{M}_\varepsilon$ ficarão próximas de $\mathcal{M}_0$ (sua contraparte $\varepsilon = 0$), expandimos essas funções em séries de potências em ε em torno da função não perturbada X_0

$$X(z, \varepsilon) = X_0(z) + \varepsilon X_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.6)$$

A invariância local da variedade implica que a taxa de variação no tempo de nossas funções $X(z, \varepsilon)$ é determinada de forma consistente pelo sistema (3.2). Primeiro, a substituição direta no primeiro componente do sistema (3.2) produz

$$\frac{d}{dt} X(z, \varepsilon) = f(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon).$$

Em segundo lugar, a aplicação da regra da cadeia e uma substituição envolvendo a segunda componente do sistema mostram

$$\frac{d}{dt}X(z, \varepsilon) = \frac{\partial X}{\partial z}(z, \varepsilon) \cdot z' = \varepsilon \frac{\partial X}{\partial z}(z, \varepsilon) \cdot g(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon).$$

Então, a invariância da variedade significa que essas duas expressões são iguais, ou seja

$$\varepsilon \frac{\partial X}{\partial z}(z, \varepsilon) \cdot g(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon) = f(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon), \quad (3.7)$$

e portanto temos a equação que determina $X(z, \varepsilon)$.

Substituindo (3.6) em (3.7) e igualando os termos de mesma potência obtêm-se

$$\varepsilon \left(\frac{\partial X_0}{\partial z}(z) + \varepsilon \frac{\partial X_1}{\partial z}(z) + \dots \right) g(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon) = z - (z + \kappa) (X_0(z) + \varepsilon X_1(z) + \dots).$$

Daí, para $\mathcal{O}(1)$ obtemos que $X_0(z) = z/(z + \kappa)$, como já era de se esperar. Em $\mathcal{O}(\varepsilon)$, a equação é (recorde que $h(\varepsilon) = h(0) + \varepsilon h'(0) + \dots$)

$$\frac{\partial X_0}{\partial z} g(X_0(z), z, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0(z), z, 0) X_1(z) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0(z), z, 0).$$

Portanto, isolando X_1 , encontramos $X_1(z) = \lambda \kappa z / (z + \kappa)^4$. Pode-se continuar a obter termos de ordem cada vez maior. Para os objetivos aqui, uma expansão até a ordem ε é suficiente

$$X(z, \varepsilon) = \frac{z}{z + \kappa} + \varepsilon \frac{\lambda \kappa z}{(z + \kappa)^4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Todas as variedades lentas $\mathcal{M}_\varepsilon$ são dadas pela mesma expansão até a ordem ε^n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Essas expansões e, portanto, as variedades lentas, diferem apenas nos termos exponencialmente pequenos.

Além disso, cada fibra da família das fibras rápidas e estáveis persiste. Localmente perto de $\mathcal{M}_\varepsilon$, as fibras individuais persistentes são $\mathcal{C}^r \mathcal{O}(\varepsilon)$ próximas para qualquer $r < \infty$ de suas contrapartes não perturbada F_z^0 . Com $\mathcal{C}^r \mathcal{O}(\varepsilon)$ próxima queremos dizer que a distância na topologia $\mathcal{C}^k$ é $\mathcal{O}(\varepsilon)$. A ordem principal da solução ao longo das fibras rápidas é dada por $x(t) = x(0)e^{-(z+\kappa)t} + \frac{z}{z+\kappa}(1 - e^{-(z+\kappa)t})$. Isso está de acordo com a solução interna de ordem principal (camada rápida).

Concluimos essa seção observando que o Teorema 1 (o Teorema de Fenichel para variedades compactas com borda) enunciado no capítulo 4 garante a existência de variedades lentas invariantes perturbadas $\mathcal{M}_\varepsilon$ e, portanto justificam os resultados formais obtidos para esse exemplo.

3.2 Exemplos com direções de contração rápida e expansão rápida

Geometria de um sistema linear simples quando $\varepsilon = 0$

Vamos aumentar o exemplo (3.1) para incluir uma equação linear com uma variável de crescimento exponencial

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ z' &= -\varepsilon z \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aqui $m = 2$ e $n = 1$, e este campo vetorial também é desacoplado por construção. Na verdade, o espaço de fase deste sistema é obtido cruzando o do sistema (3.1) no plano (x_2, z) com a linha de fase unidimensional $x_1' = x_1$. Seja ϕ_t o fluxo de (3.8). O fluxo

leva pontos $(x_1(t_0), x_2(t_0), z(t_0))$ para suas imagens $(x_1(t_0 + t), x_2(t_0 + t), z(t_0 + t))$ após o tempo t .

Quando $\varepsilon = 0$, o eixo z é uma variedade invariante de (3.8) que consiste inteiramente de pontos de equilíbrio. Veja a Figura 3.5. Além disso, o subsistema rápido é $f_1(x_1, x_2, z, 0) = x_1$ e $f_2(x_1, x_2, z, 0) = -x_2$. Para cada z , o Jacobiano de $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ no ponto de equilíbrio $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ possui autovalores ± 1 , ou seja, nenhum dos autovalores tem parte real nula. Consequentemente, $\mathcal{M}_0$ também é normalmente hiperbólica por construção.

O plano (x_1, z) é o conjunto de pontos que se aproximam de $\mathcal{M}_0$ conforme o tempo decresce, essa aproximação se dá numa taxa exponencial. Da mesma forma, o plano (x_2, z) é precisamente o conjunto de pontos que se aproximam de $\mathcal{M}_0$ numa taxa exponencial conforme o tempo cresce. Portanto, o plano (x_1, z) é a variedade instável de $\mathcal{M}_0$, e o plano (x_2, z) é a variedade estável de $\mathcal{M}_0$. Essas variedades, como já mencionado anteriormente, são denotadas por $W^U(\mathcal{M}_0)$ e $W^S(\mathcal{M}_0)$, respectivamente. Considere os conjuntos $F_z^{0,u} = \{(x_1, x_2, z) : x_2 = 0\}$ e $F_z^{0,s} = \{(x_1, x_2, z) : x_1 = 0\}$. As linhas $F_z^{0,u}$ e $F_z^{0,s}$ são as fibras rápidas instáveis sobre $\mathcal{M}_0$, e as uniões dessas fibras sobre todo z são as variedades $W^U(\mathcal{M}_0)$ e $W^S(\mathcal{M}_0)$, respectivamente.

Tal como na seção 3.1, estamos agora numa boa posição para introduzir a terminologia geométrica apropriada para estas linhas. O salto de duas dimensões (exemplo 1) para três dimensões (exemplo acima) revela novas características importantes para a compreensão dos sistemas gerais. Em Π_z , cada linha horizontal de constante x_2 é uma fibra rápida e instável, denotada por $F_{(x_2,z)}^{0,u}$. O ponto base de $F_{(x_2,z)}^{0,u}$ é o ponto $(x_1 = 0, x_2)$ no eixo x_2 . Este ponto base evolui de acordo com a componente de contração rápida $x'_2 = -x_2$.

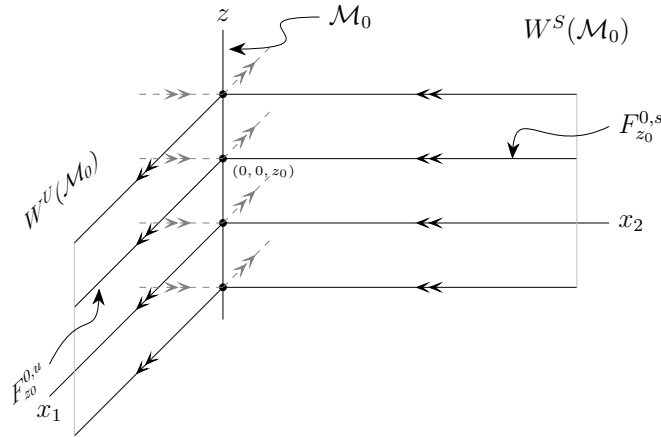


Figura 3.5: A geometria do exemplo (3.8) quando $\varepsilon = 0$. Fonte: autoria própria.

O restante desta seção é dedicado à análise da geometria relevante para todas as órbitas fora da variedade invariante $\mathcal{M}_0$ e suas variedades estáveis e instáveis $W^S(\mathcal{M}_0)$ e $W^U(\mathcal{M}_0)$. No espaço de fase tridimensional (x_1, x_2, z) , cada plano $z = \text{constante}$ é um conjunto invariante de (3.8) com $\varepsilon = 0$. Denotamos esses planos por Π_z . A dinâmica em Π_z é dada, para cada z , pelo sistema rápido $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$. Veja a Figura 3.6. No plano bidimensional (x_1, x_2) , a família de linhas verticais $x_1 = \text{constante}$ e a família de linhas horizontais $x_2 = \text{constante}$ compartilham uma propriedade especial neste exemplo. Num determinado período de tempo rápido t_2 , todos os pontos na linha vertical $x_1 = x_1(0)$

fluem para a linha vertical $x_1 = x_1(t_2)$. Da mesma forma, todos os pontos na linha horizontal $x_2 = x_2(0)$ fluem para a linha horizontal $x_2 = x_2(t_2)$. Assim, ambas são famílias invariantes de (3.8).

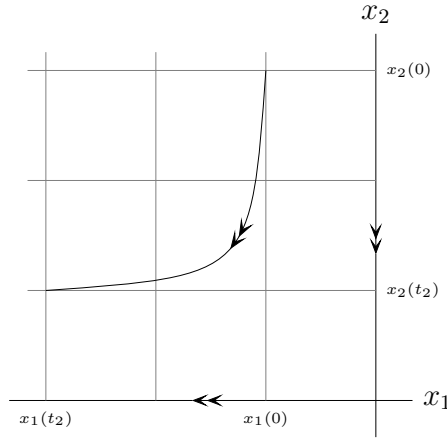


Figura 3.6: Esboço das fibras invariantes em Π_z para o sistema (3.8) com $\varepsilon = 0$ e ilustração da decomposição de uma trajetória representativa. Fonte: autoria própria.

Por exemplo, para a trajetória esboçada nas Figuras 3.6 e 3.7, o ponto $(0, x_2(0))$ é o ponto base da fibra $F_{(x_2(0), z)}^{0, u}$ sobre a qual se encontra a nossa condição inicial, e a imagem deste ponto após o tempo rápido t_2 é $(0, x_2(t_2))$. Além disso, a fibra $F_{(x_2(t_2), z)}^{0, u}$ é precisamente a imagem da fibra inicial $F_{(x_2(0), z)}^{0, u}$, e $(0, x_2(t_2))$ é seu ponto base, ou seja

$$F_{(x_2(t_2), z)}^{0, u} = \phi_{t_2} F_{(x_2(0), z)}^{0, u}.$$

Desta forma, a evolução de qualquer condição inicial em Π_z é decomposta em dois componentes, um correspondente à expansão exponencial ao longo das fibras instáveis e o segundo correspondente à contração exponencial do movimento na direção x_2 dos pontos base das fibras. Veja as Figuras 3.6 e a 3.7. Além disso, tomando a união sobre todos z das fibras $F_{(x_2, z)}^{0, u}$ obtém-se uma família $\mathcal{F}^{0, u}$ que é invariante em relação a (3.8) e que é transversal (mesmo normal) a $W^S(\mathcal{M}_0)$. Cada ponto em $W^S(\mathcal{M}_0)$ é o ponto base de uma fibra desta família e, inversamente, todos os pontos base estão em $W^S(\mathcal{M}_0)$. Esta família fornece uma folheação para o espaço tridimensional.

Uma interpretação geométrica análoga pode ser dada para as linhas verticais invariantes (fibras estáveis). Resumidamente, cada linha vertical definida pela constante x_1 é uma fibra estável $F_{(x_1, z)}^{0, s}$. Seu ponto base $(x_1, 0, z)$ evolui de acordo com o componente de expansão rápida $x_1' = x_1$, e tem-se a propriedade de invariância desejada

$$F_{(x_1(t_2), z)}^{0, s} = \phi_{t_2} F_{(x_1(0), z)}^{0, s}.$$

A união de $F_{(x_1, z)}^{0, s}$ sobre todos x_1 e z é uma família $\mathcal{F}^{0, s}$ de fibras estáveis e invariantes em relação a (3.8) quando $\varepsilon = 0$. Todos os pontos base estão em $W^U(\mathcal{M}_0)$ e, inversamente, cada ponto em $W^U(\mathcal{M}_0)$ é o ponto base de uma fibra desta família.

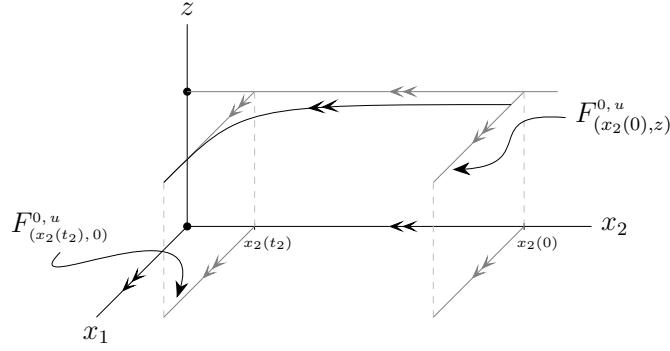


Figura 3.7: Esboço das fibras invariantes, variedades e uma trajetória representativa para o sistema (3.8). Fonte: autoria própria.

Geometria do exemplo (3.8) quando $0 < \varepsilon \ll 1$

Pela construção deste exemplo, o espaço de fase pode ser obtido diretamente cruzando o dos subsistemas rápidos e lento, veja a Figura 3.8 abaixo

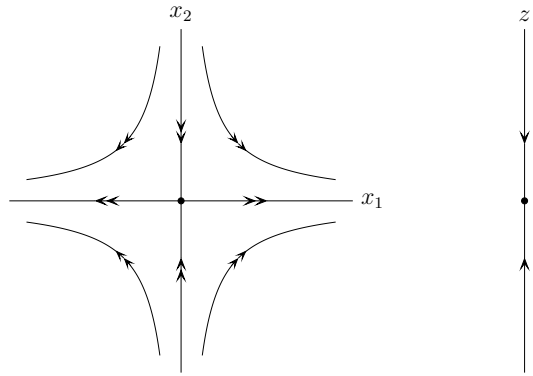


Figura 3.8: O espaço de fase do sistema completo (3.8) com $0 < \varepsilon \ll 1$ é obtido cruzando os dos subsistemas rápido e lento. Fonte: autoria própria.

As estruturas geométricas quando $\varepsilon = 0$ persistem no sistema completo (3.8) quando $0 < \varepsilon \ll 1$. O eixo z ainda é uma variedade invariante, e nós o denotamos por $\mathcal{M}_\varepsilon$. As condições iniciais em $\mathcal{M}_\varepsilon$ permanecem nele em ambos os sentidos do tempo, e estão sujeitos a uma contração exponencial de ordem fraca em direção à origem, como está ilustrado abaixo (Figura 3.9). Além disso, $\mathcal{M}_\varepsilon$ é apenas um membro de uma família contínua de variedades centrais, pela mesma razão discutida na seção 3.1. O plano (x_2, z) e o plano (x_1, z) são agora as variedades perturbadas estáveis e instáveis, $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$, respectivamente. Cada linha horizontal de constante z no plano (x_2, z) (ou plano (x_1, z)) é uma fibra persistente rápida estável (ou instável) $F_z^{\varepsilon, s}$ ($F_z^{\varepsilon, u}$, respectivamente), e seu ponto base é o ponto $(0, 0, z)$ em $\mathcal{M}_\varepsilon$. As fibras individuais estáveis (ou instáveis) não são mais invariantes, apenas como uma família. Além disso, por existir uma fibra de cada tipo para cada z , dizemos que essas famílias são folheações de $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$.

respectivamente. Além disso, neste exemplo, como em geral, a existência das variedades lentas perturbadas $\mathcal{M}_\varepsilon$ pode ser vista como uma consequência da persistência e interseção transversal das variedades locais estáveis e instáveis.

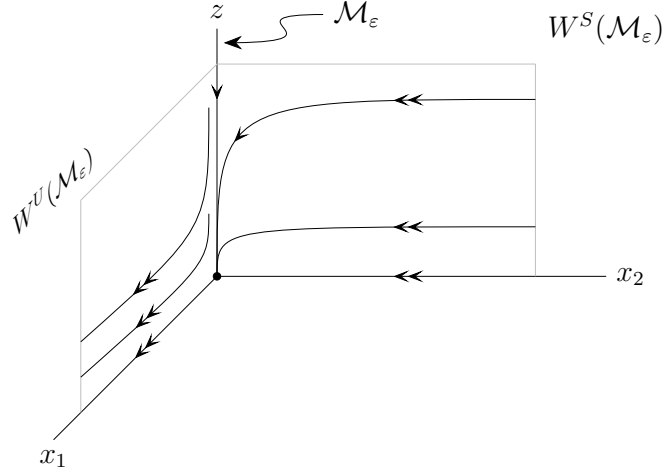


Figura 3.9: Uma variedade lenta $\mathcal{M}_\varepsilon$ e suas variedades estáveis e instáveis do sistema perturbado (3.8). Fonte: autoria própria.

As fibras que não estão nos planos (x_2, z) e (x_1, z) também persistem. No espaço de fase tridimensional, cada linha horizontal paralela ao eixo x_2 é novamente uma fibra rápida estável $F_{(x_1, z)}^{\varepsilon, s}$ com ponto base $(x_1, 0, z)$ em $W^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$, e da mesma forma, cada linha horizontal paralela ao eixo x_1 é novamente uma fibra rápida e instável $F_{(x_2, z)}^{\varepsilon, u}$ com ponto base $(0, x_2, z)$ em $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$. Veja a Figura 3.10. Essas fibras formam novamente duas famílias invariantes

$$\mathcal{F}^{\varepsilon, u} \equiv \bigcup_{(x_2, z_0)} F_{(x_2, z)}^{\varepsilon, u} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{\varepsilon, s} \equiv \bigcup_{(x_1, z_0)} F_{(x_1, z)}^{\varepsilon, s}.$$

Para completar, notamos que as variedades estáveis e instáveis de $\mathcal{M}_\varepsilon$ agora também podem ser expressas como

$$W^S(\mathcal{M}_\varepsilon) = \bigcup_{z \in \mathcal{M}_\varepsilon} F_{(0, z)}^{\varepsilon, s} \quad \text{e} \quad W^U(\mathcal{M}_\varepsilon) = \bigcup_{z \in \mathcal{M}_\varepsilon} F_{(0, z)}^{\varepsilon, u}.$$

A evolução das condições iniciais gerais fora de $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ pode ser decomposta da seguinte forma. Ver Figura 3.10 abaixo. Fixado arbitrariamente valores não nulos $x_1(0)$, $x_2(0)$ e $z(0)$, todos $\mathcal{O}(1)$. Esta condição inicial reside em ambas as fibras $F_{(x_2(0), z(0))}^{\varepsilon, u}$ e $F_{(x_1(0), z(0))}^{\varepsilon, s}$. A órbita através deste ponto evolui de modo que a qualquer tempo τ , o ponto $(x_1(\tau), x_2(\tau), z(\tau))$ se encontra na fibra instável $F_{\phi_\tau(x_2(0), z(0))}^{\varepsilon, u}$ e na fibra estável $F_{\phi_\tau(x_1(0), z(0))}^{\varepsilon, s}$. Além disso, ele se move para dentro em direção a $\mathcal{M}_\varepsilon$ numa taxa exponencial -1 ao longo das fibras da família $\mathcal{F}^{\varepsilon, s}$ e para fora, afastando-se de $\mathcal{M}_\varepsilon$ à taxa exponencial +1 ao longo das fibras da família $\mathcal{F}^{\varepsilon, u}$, uma vez que suas componentes x_1 e x_2 estão aumentando e diminuindo exponencialmente, respectivamente. Sua componente lenta evolui de acordo com o movimento do ponto base da fibra $(0, 0, z)$. Portanto, dentro do contexto deste exemplo, a dinâmica do sistema pode ser naturalmente decomposta em componentes rápidos nos quais a dinâmica é governada pelas taxas exponenciais de crescimento e decrescimento ao longo das fibras rápidas estáveis e instáveis e também

num componente lento governado pelo movimento dos pontos de base das fibras ao longo da variedade lenta (ou central).

Concluimos esta seção observando que os resultados do exemplo linear (3.8) se estendem de maneira direta a

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda(z)x_1 \\ x'_2 &= \gamma(z)x_2 \quad . \\ z' &= -\varepsilon z \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde λ e γ são $\mathcal{C}^\infty$, $\lambda(z) > C_1 > 0$ para todo z , e $\gamma(z) < -C_1 < 0$ para todo z . As estruturas geométricas, incluindo $\mathcal{M}_\varepsilon$ e suas variedades estáveis e instáveis, são os mesmos. No entanto, as taxas de contração e expansão exponenciais nas direções normais a uma variedade lenta agora varia com z .

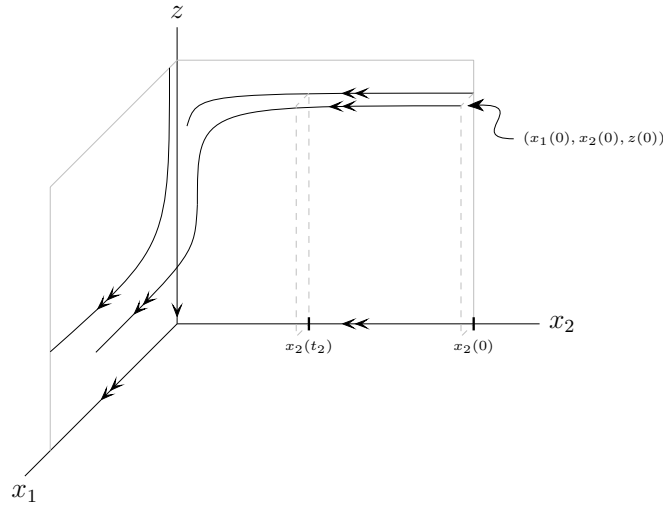


Figura 3.10: Uma ilustração da decomposição ao longo das fibras rápidas e da variedade lenta no exemplo (3.8). Fonte: autoria própria.

Variedades invariantes em um sistema não linear de terceira ordem

Nesta seção analisamos aspectos de um sistema de terceira ordem que surge como um modelo para o movimento de águas rasas em um tanque agitado em uma frequência quase ressoante para ondas de superfície, ver Hastings e McLeod[1991]. As equações reduzem-se a um sistema hamiltoniano planar com potencial cúbico dependente de um parâmetro de variação lenta

$$\begin{aligned} q' &= p \\ p' &= q^2 - F(z) \quad , \\ z' &= \varepsilon \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $F(z) = 1 + c + \cos(z)$, $c > 0$, e o Hamiltoniano é $H(q, p, z) = p^2/2 - q^3/3 + F(z)q - (2/3)F^{3/2}(z)$.

O sistema (3.10) é um dos exemplos de sistemas gerais slow-fast (1.1) com $m = 2$, $x = (q, p)$, e $n = 1$ com $z \in S^1$. Quando $\varepsilon = 0$, $z \in [0, 2\pi[$ é um parâmetro fixo, e para cada z o sistema possui um ponto de equilíbrio hiperbólico em $(q = \sqrt{F(z)}, p = 0)$ que é do tipo sela, já que os autovalores do sistema linearizado é o par de números reais positivo e negativo $\pm\sqrt{2}F^{1/4}(z)$. Além disso, o fator $-(2/3)F^{3/2}(z)$ em H implica que $H = 0$ no ponto de equilíbrio hiperbólico para cada z . Este ponto de equilíbrio hiperbólico está

ligado a si mesmo por uma órbita homoclínica (uma órbita que se aproxima do ponto de equilíbrio tanto quando $t \rightarrow \infty$ quanto $t \rightarrow -\infty$) que se encontra no semiplano $q \leq \sqrt{F(z)}$. Esta órbita é comumente chamada de separatriz, porque divide a família de órbitas periódicas dentro dela da família de órbitas ilimitadas fora dela, e notamos que $H \equiv 0$ ao longo dela. Existem também curvas ilimitadas no semiplano $q \geq \sqrt{F(z)}$ que consistem em todas as condições iniciais que se aproximam (para $p < 0$) ou se afastam (para $p > 0$) do ponto fixo de sela. Essas curvas também estão no conjunto de nível $H = 0$, e também podem ser chamadas de separatrizes.

Consideremos agora a variedade $\mathcal{M}_0$ obtida pela união sobre z desses pontos de equilíbrio hiperbólicos

$$\mathcal{M}_0 \equiv \bigcup_{z \in [0, 2\pi[} (\sqrt{F(z)}, 0) .$$

Por definição, $\mathcal{M}_0$ é uma variedade invariante normalmente hiperbólica.

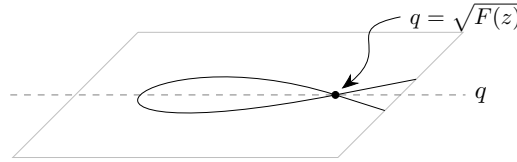


Figura 3.11: Cada camada possui uma órbita homoclínica que se cruza em $\mathcal{M}_0$. Fonte: autoria própria.

Para cada z , a restrição da separatriz unidimensional ($H = 0$) a uma vizinhança do ponto fixo da sela produz uma fibra local estável (a variedade local estável da sela) e uma fibra local instável (a variedade instável da sela). Para um z fixo, o conjunto de condições iniciais no nível $H = 0$ definido nos quadrantes $q < \sqrt{F(z)}$, $p > 0$ e $q > \sqrt{F(z)}$, $p < 0$, juntos compõem a variedade estável da sela. Todas essas condições iniciais se aproximam de $(\sqrt{F(z)}, 0)$ exponencialmente no tempo, e o fazem tangencialmente ao subespaço estável do sistema linearizado, como pode ser verificado usando a regra de L'Hopital. Essas constituem uma fibra estável, cujo ponto base é o de sela $(\sqrt{F(z)}, 0, z)$. Dessa forma, cada ponto em $\mathcal{M}_0$ é o ponto base tanto de uma fibra estável unidimensional $F_z^{0,s}$ quanto de uma fibra instável unidimensional $F_z^{0,u}$.

As uniões sobre $z \in [0, 2\pi[$ das fibras locais estáveis e instáveis (ou equivalentemente das variedades locais estáveis e instáveis das selas) então fornece precisamente as variedades locais estáveis e instáveis de $\mathcal{M}_0$

$$W_{loc}^S(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{z \in [0, 2\pi[} F_z^{0,s} \text{ e } W_{loc}^U(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{z \in [0, 2\pi[} F_z^{0,u} .$$

Finalmente, fora de $\mathcal{M}_0$, $W_{loc}^S(\mathcal{M}_0)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_0)$ existem duas outras famílias de fibras que são relevantes. Em particular, cada ponto em $W_{loc}^S(\mathcal{M}_0)$ ($W_{loc}^U(\mathcal{M}_0)$ respectivamente) é o ponto base de uma fibra unidimensional rápida instável (estável). Essas fibras estáveis (e instáveis) formam famílias de fibras invariantes e de dois parâmetros, cada um folheando uma vizinhança de $\mathcal{M}_0$.

O sistema perturbado, (3.10) com $0 < \varepsilon \ll 0$, tem uma variedade lenta invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$ que é $\mathcal{C}^r \mathcal{O}(\varepsilon)$ próxima de $\mathcal{M}_0$ para todo $r < \infty$ e todo z . Esta variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$ é o gráfico de uma função $X(z, \varepsilon)$ que é $\mathcal{O}(\varepsilon)$ próxima de $(\sqrt{F(z)}, 0)$ para cada z . Uma ligeira generalização do procedimento utilizado na seção 3.1 (ver também seção 5.5) leva à expansão assintótica para esta função

$$X(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \sqrt{F(z)} \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ (1/2)F^{-1/2}(z) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Além disso, $\mathcal{M}_\varepsilon$ não é única, uma vez que em qualquer z -intervalo compacto existe uma família de variedades lentas, todas com a mesma expansão em potências de ε , mas diferem em termos exponencialmente pequenos. Observamos que, como $F(z)$ é periódico, os resultados acima são para ε fixo e também podem ser obtidos pela função de Poincaré para (3.10).

Cada ponto em $\mathcal{M}_\varepsilon$ é ponto base de uma fibra persistente rápida e estável $F_z^{\varepsilon, s}$ e de uma fibra persistente rápida e instável $F_z^{\varepsilon, u}$. As uniões dessas fibras sobre $z \in [0, 2\pi[$ são as variedades bidimensionais, locais estáveis e instáveis de $\mathcal{M}_\varepsilon$, $W_{loc}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$, respectivamente. Além disso, cada um dos pontos na variedade estável (respectivamente instável) é um ponto base para uma fibra unidimensional rápida instável (respectivamente estável), e estes formam duas famílias invariantes de parâmetros do tipo $\mathcal{F}^{\varepsilon, u}$ e $\mathcal{F}^{\varepsilon, s}$, também encontrado no exemplo anterior, exceto que aqui cada fibra é não linear. Portanto, a dinâmica de todas as órbitas em uma vizinhança de $\mathcal{M}_\varepsilon$ pode ser decomposta em movimento ao longo de $\mathcal{M}_\varepsilon$ e movimento nas direções normais.

Observação 3.2. O exemplo do pêndulo de variação lenta (2.5) tem essencialmente os mesmos tipos de estruturas geométricas do exemplo (3.10). Também é um pouco mais simples porque existe uma variedade central distinta, na família de variedades centrais que são todas exponencialmente próximas umas das outras em intervalos compactos, para os quais $X(z, \varepsilon) = X_0(z)$ para todo z e ε . Isso ocorre porque as órbitas $(\pm\pi, 0, z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$ são órbitas periódicas de (2.5).

4 Teoria de Fenichel para sistemas singularmente perturbados

Tendo introduzido as várias construções e conceitos geométricos que estudamos na sequência de exemplos elementares de baixa dimensão nas seções 3.1 e 3.2, estamos agora em boa posição para enunciar a teoria geométrica de Fenichel para sistemas gerais (1.1). Enunciamos primeiro o teorema para variedades compactas com bordo e, em seguida, enunciamos brevemente também o teorema correspondente para variedades compactas sem bordo.

4.1 Variedades normalmente hiperbólicas em sistemas singularmente perturbados

Fazemos as seguintes suposições sobre (1.1):

- (H1) As funções f e g são $\mathcal{C}^\infty$ em $U \times I$, onde U é subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e I é um intervalo aberto contendo $\varepsilon = 0$.
- (H2) Existe um conjunto $\mathcal{M}_0$ que está contido em $\{(x, z) : f(x, z, 0) = 0\}$ tal que $\mathcal{M}_0$ é uma variedade compacta com fronteira dada pelo gráfico de uma função $\mathcal{C}^\infty$, $x = X_0(z)$, para $z \in D$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio compacto e simplesmente conexo e a fronteira de D é uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional $\mathcal{C}^\infty$. Finalmente, o conjunto D é negativamente invariante em relação a (1.2) quando $\varepsilon = 0$.

Aqui notamos que a definição dada subseção 2.1 de uma variedade com bordo (fronteira) implica que a fronteira é $(n-1)$ -dimensional e $\mathcal{C}^\infty$, e lembramos que uma variedade compacta com bordo é considerada negativamente invariante quando

- (i) em cada ponto dentro da variedade o campo vetorial é tangente à variedade.
- (ii) em cada ponto na fronteira da variedade o campo vetorial aponta para fora.

Portanto, precisamos que $\mathcal{M}_0$ seja negativamente invariante em relação ao sistema lento reduzido $\dot{z} = g(X_0(z), z, 0)$.

A hipótese final (e central) de que precisamos é:

- (H3) $\mathcal{M}_0$ é normalmente hiperbólica em relação a (1.3), e em particular exigimos que, para todos os pontos $p \in \mathcal{M}_0$, existam k (respectivamente l) autovalores de $D_x f(p, 0)$ com parte real positiva (respectivamente negativa), onde $k + l = m$.

4.2 Teoria da persistência de Fenichel

Para Variedades compactas com bordo, a teoria da persistência de Fenichel afirma que, desde que as hipóteses (H1)-(H3) sejam satisfeitas, (1.1) possui uma variedade lenta (ou central), e esta variedade lenta tem variedades rápidas estáveis e instáveis.

Teorema 1 (Fenichel em variedades compactas com fronteira). [1] *Suponha que (1.1) satisfaça as condições (H1)-(H3). Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então, existe uma função $X(z, \varepsilon)$ definida em D tal que a variedade*

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, z) : x = X(z, \varepsilon)\}$$

é localmente invariante em (1.1). Além disso, $X(z, \varepsilon)$ é $\mathcal{C}^r$ para qualquer $r < \infty$, e $\mathcal{M}_\varepsilon$ é $\mathcal{C}^r \mathcal{O}(\varepsilon)$ próximo de $\mathcal{M}_0$. Além disso, existem variedades locais estáveis e instáveis perturbadas de $\mathcal{M}_\varepsilon$. Essas variedades locais são as respectivas uniões das fibras rápidas estáveis e instáveis de dimensões ℓ e k , respectivamente, e são $\mathcal{C}^r \mathcal{O}(\varepsilon)$ próximas, para todo $r < \infty$, de suas contrapartes não perturbadas.

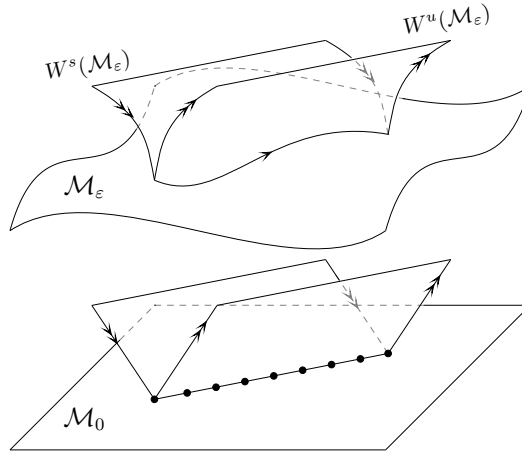


Figura 4.1: Esboço das variedades invariantes presentes no sistema geral (1.1) quando $\varepsilon = 0$ e quando $0 < \varepsilon \ll 1$. Fonte: autoria própria.

O nome variedade lenta é atribuído a $\mathcal{M}_\varepsilon$ porque a magnitude do campo vetorial restrito a $\mathcal{M}_\varepsilon$ é $\mathcal{O}(\varepsilon)$, em termos da variável independente rápida t , como vimos nos exemplos. Além disso, a função $X(z, \varepsilon)$ geralmente não é única, como já observamos na subseção 3.1. Geralmente existe uma família de funções $X(z, \varepsilon)$ (e, portanto, variedades lentas), e elas são exponencialmente próximas em ε umas das outras em conjuntos compactos, como foi ilustrado nos exemplos das seções 3 e 4.

Neste caso, quando $\mathcal{M}_0$ tem fronteira, $\mathcal{M}_\varepsilon$ é geralmente apenas localmente invariante porque as trajetórias nela podem cruzar a fronteira e possivelmente até reentrar no domínio. Nesses casos, as fibras locais rápidas estáveis e instáveis, e portanto também as variedades locais estáveis e instáveis, são definidas apenas enquanto os pontos de base permanecem dentro da fronteira.

As fibras individuais estáveis e instáveis com pontos base em $\mathcal{M}_\varepsilon$ têm dimensão ℓ e k . Portanto, as variedades estáveis e instáveis $W_{loc}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ têm dimensão $\ell + n$ e $k + n$, respectivamente.

Observação 4.1. Em aplicações para as quais a variedade compacta com bordo $\mathcal{M}_0$ não é negativamente invariante em relação ao sistema lento reduzido $\dot{z} = g(X_0(z), z, 0)$, uma técnica padrão pode ser usada para tornar a variedade negativamente invariante e portanto, facilita a aplicação da teoria de Fenichel. Primeiro, amplia-se o conjunto D . Em particular, como D é compacto e como $\mathcal{M}_0$ é dado pela função $X_0 \in \mathcal{C}^\infty$ em D , um conjunto $\hat{D}$ pode ser encontrado de modo que $D \subset \hat{D}$ e tal que X_0 é também definido e $\mathcal{C}^\infty$ em $\hat{D}$. O conjunto $\hat{\mathcal{M}}_0 = \{(x, z) : x = X_0(z), z \in \hat{D}\}$ é um conjunto de pontos de equilíbrio para o campo vetorial com $\varepsilon = 0$, e pode-se escolher $\hat{D}$ tal que $\hat{\mathcal{M}}_0$ seja normalmente hiperbólico. Além disso, o conjunto $\hat{D}$ pode ser escolhido de modo que seu bordo seja dada pela condição $\hat{\nu}(z) = 0$, para alguma função $\hat{\nu} \in \mathcal{C}^\infty$ que satisfaça $\nabla \hat{\nu}(z) \neq 0$, onde $\hat{\nu}$ é normalizado de modo que $\nabla \hat{\nu}(z) = n_z$ é o vetor normal externo em $\partial \hat{D}$. Em seguida, seja $\rho(z)$ uma função $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 1 \text{ se } z \in \hat{D}^c \\ \rho(z) &= 0 \text{ se } z \in \hat{D} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde c no índice superior denota o complemento do conjunto. Tal função ρ sempre pode ser construída usando uma função *bump* localmente $\mathcal{C}^\infty$ e uma partição da unidade. Finalmente, somamos a função $\delta \rho(z) n_z$ à componente z do campo vetorial, onde δ é escolhido de modo a fazer com que o campo vetorial aponte para fora da fronteira.

A adição da função *bump* ao campo vetorial não altera nada dentro de D , que é o domínio no qual se está interessado. Ela apenas modifica o campo vetorial fora de D . Claro, a variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$ obtida na prova dependerá da escolha da função *bump*, mas como cada variedade lenta persistente $\mathcal{M}_\varepsilon$ é exponencialmente próxima em ε de qualquer outra variedade lenta persistente, isso não tem consequências em aplicações onde os termos algébricos $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots$ na expansão de $X(z, \varepsilon)$ são necessários.

Concluimos esta subseção afirmando a teoria de Fenichel relevante para o caso em que o conjunto zero de f dá origem a uma variedade lenta $\mathcal{M}_0$ que é compacta e sem bordo. Teremos de modificar ligeiramente a segunda hipótese

(H2)' Existe um conjunto $\mathcal{M}_0$ que está contido em $\{(x, z); f(x, z, 0) = 0\}$ tal que $\mathcal{M}_0$ é uma variedade compacta sem bordo.

Teorema 2 (Fenichel em variedades compactas sem bordo). [1] *Suponha que (1.1) satisfaça (H1), (H2)' e (H3). Se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno, então existe uma variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$ que é $\mathcal{C}^r$ para qualquer $r < \infty$, localmente invariante sob (1.1), e $\mathcal{O}(\varepsilon)$ próxima de $\mathcal{M}_0$ na topologia $\mathcal{C}^r$. Além disso, existem variedades locais estáveis e instáveis perturbadas de $\mathcal{M}_\varepsilon$. Elas são as uniões de famílias invariantes de fibras rápidas estáveis e instáveis de dimensão ℓ e k , respectivamente, e são $\mathcal{O}(\varepsilon)$ próximas, para todos $r < \infty$, de suas contrapartes não perturbadas na topologia $\mathcal{C}^r$.*

Neste caso, um atlas com um número finito de cartas X_0 sobrepostas suavemente pode ser usado se necessário para representar a variedade $\mathcal{M}_0$ a fim de realizar os cálculos.

4.3 A forma normal de Fenichel para o sistema perturbado

A teoria da persistência citada acima nos permite fornecer uma construção explícita da forma normal de Fenichel do sistema (1.1) que é válida na vizinhança de uma variedade

lenta persistente $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Começamos fazendo uma transformação preliminar do campo vetorial em (1.1) para que as partes lineares da componente rápida se tornem explicitamente visíveis. Além disso, a partir da estrutura do sistema transformado, veremos que os exemplos estudados nas seções 3 e 4 foram escolhidos porque capturam as características essenciais de crescimento exponencial nas direções normais a variedades invariantes e crescimento lento nas direções tangenciais.

Suponha que a função $X_0(z) = 0$ para todo z em D . Isso pode ser feito sem perda de generalidade porque sempre se pode alterar variáveis de x para $x - X_0(z)$. Agora, para cada z , o sistema obtido pela linearização em $\mathcal{M}_0$ tem subespaços estáveis e instáveis (correspondendo aos vãos de todas as autodireções de contração e expansão exponencial, respectivamente) que variam suavemente com z , e cujas dimensões são k e ℓ para todo z por (H3). Assim, podemos dividir a variável rápida x em dois componentes: (x_1, x_2) correspondentes às bases desses subespaços, onde $x_1 \in \mathbb{R}^k$ e $x_2 \in \mathbb{R}^\ell$. Nessa componentes o campo linear simplifica consideravelmente. Sendo os subespaços gerados por x_1 e x_2 invariantes, $D_x f$ toma uma forma em blocos (Forma de jordan)

$$D_{(x_1, x_2)} f(0, y, 0) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(z) & 0 \\ 0 & \Lambda_2(z) \end{bmatrix}.$$

As equações são dadas então como abaixo

$$\begin{aligned} x'_1 &= \Lambda_1(z)x_1 + \tilde{f}_1(x_1, x_2, z, \varepsilon) \\ x'_2 &= \Lambda_2(z)x_2 + \tilde{f}_2(x_1, x_2, z, \varepsilon) \\ z' &= \varepsilon g(x_1, x_2, z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aqui, os autovalores da matriz $\Lambda_1(z)$ de ordem k têm partes reais positivas, enquanto que, aqueles da matriz $\Lambda_2(z)$ de ordem ℓ têm partes reais negativas, ambas uniformemente delimitadas por zero, isto é, para todo $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, onde $\tilde{\varepsilon}$ é suficientemente pequeno, as partes reais desses auto valores estão distante de zero (existe $\delta > 0$ tal que as partes reais desses auto valores são maiores que δ). Estes termos lineares são uma generalização natural do exemplo (3.9). Além disso, as funções $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ satisfazem os limites

$$\|\tilde{f}_i\| = \mathcal{O}(\|x\|^2, \varepsilon, \varepsilon \|x\|)$$

quando $x \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, tanto para $i = 1$ quanto para 2, ou seja, eles contêm apenas termos que são não lineares em x_1 e x_2 , bem como termos de ordem superior em ε .

Em termos das novas variáveis x_1 e x_2 introduzidas acima na transformação do campo vetorial para (4.2), as funções cujos gráficos são as variedades locais estáveis e instáveis de $\mathcal{M}_\varepsilon$ podem ser expressas como: $m^s(x_2, z, \varepsilon)$ e $m^u(x_1, z, \varepsilon)$. As variedades locais são dadas por

$$x_1 = m^s(x_2, z, \varepsilon) \quad \text{e} \quad x_2 = m^u(x_1, z, \varepsilon).$$

Por sua vez, isso sugere naturalmente uma mudança invertível de coordenadas para

$$a \equiv x_1 - m^s(x_2, z, \varepsilon) \quad \text{e} \quad b \equiv x_2 - m^u(x_1, z, \varepsilon) \quad (4.3)$$

onde $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^\ell$ e $k + \ell = m$. As variedades locais estáveis e instáveis perturbadas correspondem aos conjuntos $\{a = 0\}$ e $\{b = 0\}$, respectivamente. Além disso, como essas variedades são invariantes, devemos ter $a' = 0$ ao longo do conjunto $\{a = 0\}$ e $b' = 0$ em

todos pontos do conjunto $\{b = 0\}$. Finalmente, alterando a coordenada z se necessário, as fibras individuais k e ℓ dimensional $F_z^{\varepsilon,s}$ e $F_z^{\varepsilon,u}$ com pontos base $z \in \mathcal{M}_\varepsilon$, também podem ser endireitadas. As coordenadas a, b, z resultantes foram denominadas coordenadas de Fenichel.

Na transformação preeliminar (4.2) tomamos a parte linear do campo em $\mathcal{M}_0$ e em seguida somamos o resto não linear. As variáveis a e b correspondem justamente a esse resto não linear, portanto, como em (a, b) não existe a parte não linear, numa vizinhança de $\mathcal{M}_\varepsilon$, as equações de (1.1) podem então ser reescritas como (recorde que $h(p+v) - h(p) = h'(p)v + \dots = H(p, v)v$)

$$\begin{aligned} a' &= \Lambda(a, b, z, \varepsilon)a \\ b' &= \Gamma(a, b, z, \varepsilon)b \\ z' &= \varepsilon g(a, b, z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde as funções com valor matricial Λ e Γ são tão suaves quanto o campo vetorial original. Além disso, todos os autovalores de $\Lambda(0, 0, z, 0)$ têm partes reais positivas, delimitadas por zero, e todos os autovalores de $\Gamma(0, 0, z, 0)$ têm partes reais negativas também delimitadas por zero. Agora, o próximo passo é endireitar as fibras nas variedades locais (estável e instável). Em $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ ($a = 0$), considere a função p^s , que atua sobre $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ da seguinte forma, $p^s(0, b, z, \varepsilon) = \hat{z}$, onde $\hat{z}$ é o ponto base da fibra passando por $(0, b, z)$. Da mesma forma, considere a função p^u que atua sobre $W^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ como a projeção das fibras em seus pontos base. Fazendo a mudança de coordenadas $z = p^u(a, p^s, z, \varepsilon)$ teremos que, nas fibras das variedades locais, y será constante, isso tem o efeito de “endireitar” as fibras. Decorre daí que, nas novas coordenadas (a, b, z) , g dependerá apenas de z e ε nas variedades locais ($\{a = 0\}$ ou $\{b = 0\}$), e portando temos que

$$g(a, b, z, \varepsilon) = h_1(y, \varepsilon) + h_2(a, b, z, \varepsilon)(a, b),$$

onde h_1 e h_2 são $\mathcal{C}^\infty$ e $h_2(a, b, z, \varepsilon)$ é uma aplicação bilinear sobre (a, b) . Pode-se alternativamente usar notação do cálculo tensorial, escrevendo

$$g(a, b, z, \varepsilon) = h_1(y, \varepsilon) + h_2(a, b, z, \varepsilon) \otimes a \otimes b.$$

Essa notação enfatiza que H é um tensor de rank 3 que atua sobre a e b . Temos então a expressão final

$$\begin{aligned} a' &= \Lambda(a, b, z, \varepsilon)a \\ b' &= \Gamma(a, b, z, \varepsilon)b \\ z' &= \varepsilon h_1(z, \varepsilon) + \varepsilon h_2(a, b, z, \varepsilon) \otimes a \otimes b \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em termos de coordenadas, z é expresso como abaixo

$$z'_i = \varepsilon (h_1)_i(z, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^k \sum_{p=1}^\ell (h_2)_{ijp} a_j b_p.$$

Este sistema foi apelidado de forma normal de Fenichel para o sistema (1.1) e é extremamente útil para analisar a dinâmica de órbitas gerais próximas de $\mathcal{M}_\varepsilon$, bem como para localizar variedades invariantes quando as órbitas nelas estão próximas de $\mathcal{M}_\varepsilon$.

A estrutura da forma normal reflete a geometria rígida. Como dito acima, as variedades $\mathcal{M}_\varepsilon$ correspondem ao conjunto $\{a, b = 0\}$, e as variedades $W^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ são dadas pelos conjuntos $\{a = 0\}$ e $\{b = 0\}$, respectivamente. Consequentemente, a forma normal revela diretamente que todas essas três variedades são invariantes. Além disso, a evolução dos componentes lentos z é ainda decomposta em movimento estritamente devido às variáveis lentas (em termos da função h_1) e a um termo que tem o produto ab

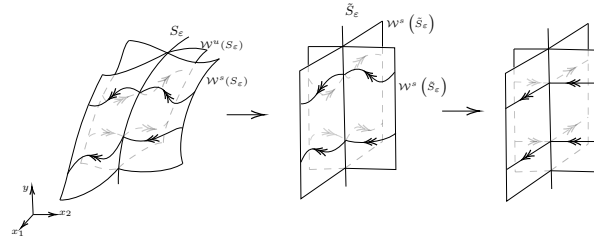


Figura 4.2: Forma normal de Fenichel. Fonte: autoria própria.

fatorado devido à presença das variedades estáveis e instáveis. Finalmente, este último termo é pequeno para órbitas próximas de $\mathcal{M}_\varepsilon$, onde pelo menos uma das variáveis a ou b é pequena.

Observação 4.2. Uma forma normal também pode ser dada para o sistema não perturbado (1.1) com $\varepsilon = 0$. À luz da suposição de que $\mathcal{M}_0$ é normalmente hiperbólico, podemos explorar a estrutura do campo vetorial não perturbado próximo a $\mathcal{M}_0$ para obter uma forma útil (e final) do campo vetorial não perturbado. Para um z fixo, as variedades locais estáveis e instáveis de $\mathcal{M}_0$ dão origem a um novo sistema de coordenadas no qual a dinâmica próxima de $\mathcal{M}_0$ é melhor estudada. Sejam $a \in \mathbb{R}^k$ e $b \in \mathbb{R}^\ell$, onde $k + \ell = m$, um novo sistema de coordenadas tal que as variedades locais estáveis e instáveis de $\mathcal{M}_0$ são os eixos $a = 0$ e $b = 0$, respectivamente. Então, numa vizinhança de $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_0$, a forma normal do sistema não perturbado é

$$\begin{aligned} a' &= \Lambda(a, b, z)a \\ b' &= \Gamma(a, b, z)b \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

onde Λ e Γ são funções com valor de matriz. A hiperbolicidade normal de $\mathcal{M}_0$ implica que para qualquer $\Delta > 0$ suficientemente pequeno, existem constantes λ_0 e γ_0 tais que para qualquer autovalor $\tilde{\lambda}_i$ de $\Lambda(0, 0, z)$ ou qualquer autovalor $\tilde{\gamma}_i$ de $\Gamma(0, 0, z)$, tem-se: $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i) > \lambda_0 > 0$ e $\text{Re}(\tilde{\gamma}_i) < \gamma_0 < 0$ para todos os pontos do bloco $\mathcal{B} \equiv \{(a, b, z); |a|, |b| < \Delta\}$, onde $z \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{K}$ compacto. É claro que, apesar de serem denotadas pelas mesmas letras, as variáveis aqui são diferentes daquelas da forma normal de Fenichel no sistema perturbado ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Existem muitos exemplos de sistemas que possuem múltiplas variedades lentas ou variedades lentas quando $\varepsilon = 0$ cujas contrapartes são dadas por relações multivaloradas $X_0(z)$ em vez de funções, como assumimos nesse texto. Para esses problemas, trabalha-se separadamente com cada componente conectada no qual $X_0(z)$ assume valor único.

4.4 Teoria da Perturbação para encontrar variedades localmente invariantes $\mathcal{M}_\varepsilon$

Como vimos nas seções 3.1 e 3.2, a teoria de Fenichel nos permite transformar o problema de encontrar explicitamente funções X_ε cujos gráficos são variedades lentas localmente invariantes $\mathcal{M}_\varepsilon$ de (1.1) em um problema de perturbação regular. A invariância

da variedade $\mathcal{M}_\varepsilon$ implica que $X(z, \varepsilon)$ satisfaz

$$\varepsilon D_z X(z, \varepsilon) \cdot g(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon) = f(X(z, \varepsilon), z, \varepsilon). \quad (4.6)$$

Esta é a versão vetorial de (3.7) válida para sistemas gerais (1.1). Então, impõe-se a expansão de perturbação $X(z, \varepsilon) = X_0(z) + \varepsilon X_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ em (4.6) para resolver ordem por ordem em $X(z, \varepsilon)$. Na ordem ε^0 , encontra-se $0 = f(X_0(z), z, 0)$, que define $X_0(z)$ devido à invertibilidade de $D_x f$ e ao teorema da função implícita. Então, na próxima ordem, ε , obtém-se

$$D_z X_0(z) \cdot g(X_0(z), z, 0) = D_x f(X_0(z), z, 0) \cdot X_1(z) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0(z), z, 0),$$

que produz $X_1(z)$, e assim por diante.

4.5 Condições de contorno para dois pontos: correspondência e transversalidade

Nesta seção, estudamos o problema simples e linear de condições de contorno em dois pontos para $y = y(x)$ em $[0, 1]$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{onde } 0 < \varepsilon \ll 1, y(0) = 1 \text{ e } y(1) = -1. \quad (4.7)$$

É um exemplo padrão do uso de expansões assintóticas combinadas, e a solução exibe uma condição de contorno em $x = 0$. Veja a Figura 4.3 abaixo. Não deve haver qualquer confusão com o uso de x aqui para variável independente (e como variável dependente nas seções anteriores).

Nosso objetivo nesta seção é usar este problema elementar para ilustrar como a teoria geométrica da perturbação singular complementa a abordagem assintótica combinada.

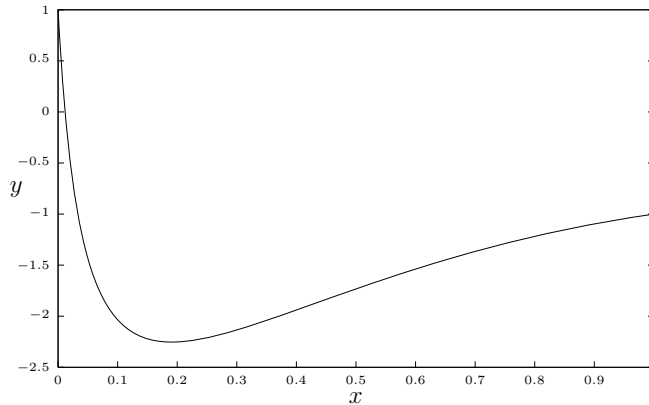


Figura 4.3: Solução de (4.7) com $\varepsilon = 0.05$, mostrando uma solução rápida (interna, cuja condição de fronteira reside em $x = 0$) seguida por uma solução lenta (externa). Fonte: autoria própria.

Solução de (4.7) pelo método das expansões assintóticas combinadas.

Expandindo a solução de (4.7) em uma série de potências

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.8)$$

encontra-se a seguinte equação para $y_0(x)$

$$\frac{dy_0}{dx} + y_0 = 0. \quad (4.9)$$

Esta equação é conhecida como equação externa de ordem principal. Sua solução é $y_0(x) = Ke^{-x}$, para alguma constante K . No entanto, observa-se que é impossível escolher K de modo que uma única função $y_0(x)$ satisfaça as condições de contorno em $x = 0$ e $x = 1$. Na melhor das hipóteses, $y_0(x)$ satisfaz alguma dessas duas condições. Na verdade, neste caso, a suposição de que a solução pode ser escrita na forma (4.8) para todo $x \in [0, 1]$ não é válida. Em vez disso, uma vez que uma única expansão não é capaz de descrever a solução em todo intervalo, é razoável supor que exista um subintervalo de $[0, 1]$ no qual a solução possui um crescimento grande, em outras palavras, a derivada de y se torna grande (e poderíamos deduzir diretamente da solução exata nesta equação linear simples). Para encontrar este subintervalo (sem recorrer à solução exata), suponha que ele esteja centrado em algum ponto desconhecido x_0 e introduza a *variável esticada* $\xi \equiv (x - x_0)/\varepsilon$. A equação completa (4.7) torna-se

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} + \varepsilon y = 0.$$

Imponhando a expansão

$$y(\xi, \varepsilon) = y_i(\xi) + \varepsilon y^1(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

produz-se a ordem principal

$$\frac{d^2 y_i}{d\xi^2} + \frac{dy_i}{d\xi} = 0. \quad (4.10)$$

Esta equação, referida como equação de ordem principal, tem a solução $y_i(\xi) = Ce^{-\xi} + D$, para constantes C e D . Observamos que o primeiro termo desaparece exponencialmente quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para $\xi > 0$ (isto é, para $x > x_0$), enquanto cresce exponencialmente sem limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para $\xi < 0$ (isto é, $x < x_0$). Portanto, considere uma solução que esteja próxima de $y_i(\xi)$ para x em uma vizinhança de x_0 e próxima das soluções de ordem principal $y_0(x)$ fora dessa vizinhança. Se $x_0 > 0$, então é impossível que tal solução satisfaça a condição de contorno em $x = 0$, devido a explosão em y_i .

Portanto, deve ser o caso que $x_0 = 0$, ou seja, a solução de (4.7) satisfaz a condição em $x = 0$. Como consequência, podemos construir, usando uma concatenação das soluções interna e externa, uma solução do problema completo que está próximo de $y_0(x)$ em $]x, 1]$, para todo $x > 0$, e próximo de $y_i(\xi)$ no pequeno intervalo $[0, \varepsilon]$. Tomamos a solução externa de ordem principal com $K = -e$ para que a condição de contorno à direita ($x = 1$) seja satisfeita, e tomamos a solução interna de ordem principal com $D = 1 - C$ para satisfazer a condição de contorno à esquerda ($x = 0$).

Para resumir os resultados obtidos até agora: a solução externa de ordem principal $y_0(x) = -e^{1-x}$, é a expansão assintótica da solução completa, válida até a ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$, no intervalo $]x, 1]$, para qualquer $x > 0$. Além disso, a função $y_i(\xi) = 1 + C(e^{-\xi} - 1)$,

onde C é uma constante ainda desconhecida, é a expansão assintótica de ordem principal da solução completa ao longo do intervalo $[0, \varepsilon]$.

Os Teoremas de Extensão (confira cap.1 de [2]) sugere que os domínios nos quais as expansões acima são expansões assintóticas válidas da solução completa podem ser ampliados. Neste exemplo, descobre-se que o domínio externo pode ser estendido para qualquer intervalo $[\eta_0(\varepsilon), 1]$, onde $\eta_0(\varepsilon)$ é qualquer função que tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, mas que satisfaz $\eta_0(\varepsilon) \ll \varepsilon$. O domínio interno pode ser ampliado para qualquer intervalo $[0, \eta_i(\varepsilon)[$, onde $\eta_i(\varepsilon)$ é qualquer função tal que $\eta_i(\varepsilon) \ll 1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por exemplo, $\eta_0(\varepsilon)$ pode ser considerado como ε^α para qualquer $0 < \alpha < 1$, assim como também para $\eta_i(\varepsilon)$. Portanto, esses domínios estendidos se sobrepõem para todos os pontos $x = \mathcal{O}(\eta)$, com $\varepsilon \ll \eta \ll 1$.

A etapa final na aplicação do método da expansão assintótica combinada envolve combinar as expansões interna e externa neste intervalo de sobreposição. Ver capítulo 2 de [3].

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} y_i(\xi) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_0(x). \quad (4.11)$$

A constante desconhecida é, portanto, $C = 1 + e$. Para concluir, o método das expansões assintóticas combinadas gerou expansões assintóticas da solução completa que são válidas em partes diferentes, mas sobrepostas, no intervalo $[0, 1]$. Além disso, observamos que uma expansão de ordem principal uniformemente válida também pode ser escrita, e este procedimento pode ser repetido para obter termos de ordem superior em ambas as expansões.

Breve esboço do método geométrico.

A teoria geométrica da perturbação singular baseia-se nas equações externas e internas de ordem principal (4.9) e (4.10). Nenhuma informação explícita sobre as soluções das equações externas e internas de ordem principal é necessária nesta abordagem geométrica. Um bom conjunto de variáveis dependentes é introduzido com base nessas equações. Estas novas variáveis dependentes permitem-nos então exibir explicitamente a geometria rápido-lenta do problema e colocar a equação (4.7) na forma normal de Fenichel perto das suas variedades lentas (soluções externas). As variedades lentas são assintoticamente estáveis. A forma normal de Fenichel então nos permite conectar a dinâmica lenta (centro) com a contração exponencial de soluções no tempo futuro ao longo da família invariante de fibras rápidas e estáveis que folheiam as variedades estáveis das variedades lentas. Daqui em diante usamos as letras τ e t no lugar das letras x e ξ para denotar a variável independente, uma vez que empregamos técnicas de sistemas dinâmicos. A introdução destas coordenadas lentas e rápidas implicará que as condições de contorno são linhas nos planos $\tau = 0$ e $\tau = 1$ no espaço de fase estendido tridimensional, isto é, com a variável independente τ incluída. As soluções que satisfazem as condições de contorno em $\tau = 0$ e $\tau = 1$ fluem (para frente e para trás, respectivamente) para o interior do espaço de fases tridimensional estendido, produzindo um par de variedades bidimensionais. A imagem da linha correspondente a $y(0) = 1$ é levada sob o fluxo até instante futuro $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$ ($\tau = \sqrt{\varepsilon}$). Além disso, a imagem da linha correspondente a $y(\tau = 1) = -1$ é levada sob o fluxo negativo até o mesmo ponto. Então, a partir dos resultados da ação do fluxo, concluiremos que as imagens se cruzam transversalmente em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$ e, portanto, que, no espaço de fase estendido tridimensional, as variedades produzidas pela ação do fluxo se cruzam transversalmente em uma órbita que é precisamente a solução desejada do problema de contorno.

A seguir apresentamos as boas coordenadas. O estudo da ação do fluxo sobre os conjuntos de contorno é realizado posteriormente. Comentamos também a relação entre as abordagens de expansão geométrica assintótica combinada.

Boas coordenadas e a forma normal de Fenichel de (4.7).

A estrutura das equações externas e internas de ordem principal (4.9) e (4.10), respectivamente, para este problema com condições de contorno linear motiva a introdução de novas variáveis

$$u \equiv \varepsilon \left(\frac{dy}{dx} + y \right) \quad \text{e} \quad v \equiv \varepsilon \frac{dy}{dx} + y. \quad (4.12)$$

Com esta escolha de novas variáveis dependentes, temos

(i) $u = 0$ é a equação externa de ordem principal.

$$\varepsilon \left(\frac{dy}{dx} + y \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

(ii) $dv/dx = 0$ é a equação interna de ordem principal.

$$v = \varepsilon \frac{dy}{dx} + y = \frac{dy}{d\xi} + y \Rightarrow \left[0 = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} \right) \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} = 0 \right].$$

(iii) u é escalonado de modo que seja finito na borda e $\mathcal{O}(\varepsilon)$ no regime externo.

(iv) Nesse novo sistema, u é uma variável rápida, enquanto v é uma variável lenta.

Finalmente, é útil registrar como y e dy/dx são expressos em termos de u e v

$$y = \left(\frac{-1}{1-\varepsilon} \right) u + \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right) v \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right) u + \left(\frac{-1}{1-\varepsilon} \right) v. \quad (4.13)$$

Determinamos agora $\dot{u}$ ($\equiv \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\tau}$) e $\dot{v}$ derivando (4.12), depois usando (4.7) para substituir as segundas derivadas e, finalmente, usando (4.13)

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) & -\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) & -1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde o ponto sobre a variável significa a derivada com relação à τ . Equivalentemente, (4.14) poderia ser escrito em termos da variável de tempo rápido $t = \tau/\varepsilon$ (derivando com relação à t)

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & -\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & -\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

A equação (4.15) tem a forma (1.1) à qual a teoria de Fenichel se aplica, com $f(u, v, \varepsilon) = A_\varepsilon u + \varepsilon^2 V_\varepsilon v$ (onde $A_\varepsilon = -1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e $V_\varepsilon = -\frac{1}{1-\varepsilon}$) e $g(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon}(u - v)$. Quando $\varepsilon = 0$ a equação (4.15) possui uma variedade invariante normalmente hiperbólica $\mathcal{M}_0 \equiv \{(u, v); f(u, v, 0) = -u = 0\}$. Restringindo nossa consideração para aquela parte de $\mathcal{M}_0$ na qual a coordenada está em um intervalo fechado e suficientemente grande de comprimento $\mathcal{O}(1)$ em torno da origem, a variedade invariante é compacta. Portanto, para $0 < \varepsilon \ll 1$, (4.15) satisfaz as condições (H1)-(H3), e, pelo teorema da persistência

de Fenichel, existe uma função (não única) $m_\varepsilon(v)$ satisfazendo $m_\varepsilon(0) = 0$ cujo gráfico $\mathcal{M}_\varepsilon \equiv \{(u, v); u = m_\varepsilon(v)\}$ é uma variedade lenta (ou central, não única) para o sistema (4.15) que é tangente ao eixo v em $(0, 0)$. Além disso, a variedade estável da variedade lenta existe e é $\mathcal{C}^r\mathcal{O}(\varepsilon)$ próximo de sua contraparte quando $\varepsilon = 0$, além de ser da mesma dimensão.

Para concluir esta discussão, derivamos uma forma normal útil para o campo vetorial (4.14). Usamos a função $m_\varepsilon(v)$ para mudar para as coordenadas de Fenichel $b = u - m_\varepsilon(v)$, e v . O sistema (4.15) tem então a forma normal de Fenichel dada abaixo

$$\begin{aligned} b' &= B_\varepsilon(b, v)b \\ v' &= \varepsilon \tilde{g}(b, v, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(b, v) &= A_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \tilde{g}(b, v, \varepsilon) &= g(b + m_\varepsilon(v), v, \varepsilon) = (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b - (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))v \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vamos abandonar o “ $\sim$ ” de agora em diante.

Condição à esquerda sob a ação do fluxo.

As condições de fronteira em (4.7) podem ser traduzidas em termos das variáveis u e v usando (4.13) do seguinte modo

$$\frac{u(\tau = 0) - v(\tau = 0)}{\varepsilon - 1} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{u(\tau = 1/\varepsilon) - v(\tau = 1/\varepsilon)}{\varepsilon - 1} = -1. \quad (4.18)$$

Como observado acima, essas são agora as equações para linhas no plano (u, v) em $t = 0$ ($\tau = 0$) e $t = 1$ ($\tau = 1$), respectivamente. Nós restringimos v a um intervalo fechado de comprimento $\mathcal{O}(1)$ e chamamos esses segmentos de linha $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Nesta subseção, identificaremos $\mathcal{L}$ no tempo futuro de $t = 0$ para $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$, e na próxima subseção, identificaremos $\mathcal{R}$ no tempo passado de $t = 1/\varepsilon$ para $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$.

A imagem de $\mathcal{L}$ sob ação do fluxo até $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$ é uma curva que fica exponencialmente próxima do eixo v . Isto pode ser visto da seguinte forma. Assuma que $|v(t)| \leq K_1$, para algum $K_1 = \mathcal{O}(1)$ e todo $t \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$. Integrando a primeira equação em 4.16) obtemos

$$b = b(0)e^{B_\varepsilon t}.$$

Disso, decorre que

$$|b(0)|e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})} \leq |b(1/\sqrt{\varepsilon})| \leq |b(0)|e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathcal{O}(\varepsilon)}, \quad (4.19)$$

onde, por definição, $b(0) = u(0) - m_\varepsilon(v(0)) = u(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ (pois $\mathcal{M}_\varepsilon$ tangencia a variedade central $u = 0$). Vê-se então que $b(1/\sqrt{\varepsilon})$ é exponencialmente pequeno para todas as condições iniciais em $\mathcal{L}$. Da mesma forma, sob a suposição de que $|b(t)| \leq K_2$, para algum $K_2 = \mathcal{O}(1)$ e todo $t \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$, integrando a segunda equação de (4.16) obtem-se que

$$v(1/\sqrt{\varepsilon}) - v(0) = \varepsilon \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} g.$$

Daí, decorre que (note que $\varepsilon \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} g = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$)

$$v(0) - \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \leq v(1/\sqrt{\varepsilon}) \leq v(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

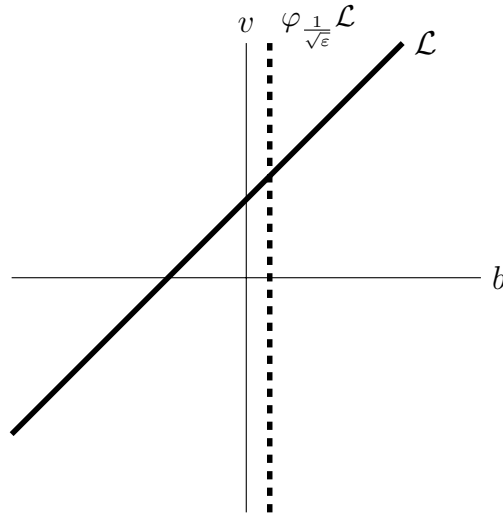


Figura 4.4: $\mathcal{L}$, definida por (4.18), é levada para uma linha exponencialmente próxima do eixo v e com inclinação exponencialmente grande sob (4.16) em $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Fonte: autoria própria.

Ao integrar (4.16) a um $t \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ geral, vemos que u e v nunca podem diferir dos seus valores iniciais (conforme determinado pelas condições de contorno $\mathcal{O}(1)$ em $t = 0$) em mais que um valor $\mathcal{O}(1)$. Consequentemente, ambas as condições a priori são válidos no intervalo de tempo indicado, e estabelecemos que $\varphi_{1/\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}$, a imagem futura de $\mathcal{L}$ no tempo $t = 1/\sqrt{\varepsilon}$, está exponencialmente próxima do eixo v .

Observação 4.3. A análise das equações variacionais de (4.16) mostra que a inclinação de $\varphi_{1/\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}$ é exponencialmente grande no plano (b, v) . A magnitude da inclinação é $\mathcal{O}(e^{1/\sqrt{\varepsilon}})$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ver seção 3.2 de [4].

Ação do fluxo negativo sobre $\mathcal{R}$.

Aqui identificamos a imagem da condição de contorno à direita $\mathcal{R}$ no tempo passado de $\tau = 1$ ($t = 1/\varepsilon$) para $\tau = \sqrt{\varepsilon}$ ($t = 1/\sqrt{\varepsilon}$). No tempo τ , a equação (4.16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{b} &= B_\varepsilon(b, v)b \\ \dot{v} &= g(b, v, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Usando (4.17) para $B_\varepsilon(b, v)$ e $g(b, v, \varepsilon)$, (4.20) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{b} &= (-1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b \\ \dot{v} &= (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b + (-1 + \mathcal{O}(\varepsilon))v \end{aligned} \quad (4.21)$$

Mostraremos que, no plano (b, v) , a imagem de $\mathcal{R}$ em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$ é uma curva quase horizontal. A componente b é esticada exponencialmente, enquanto a coordenada v se move lentamente uma distância $\mathcal{O}(1)$ à medida que τ diminui de 1 para $\sqrt{\varepsilon}$. Então, traçando as imagens de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ obtidas no plano (b, v) em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$, vemos que elas se cruzam transversalmente, e esta interseção contém a solução localmente única para o valor do problema de contorno (4.7).

Ao longo desta discussão, fazemos a suposição a priori de que b e v permanecem $\mathcal{O}(1)$. Provaremos que esta suposição permanece válida à medida que localizamos soluções no tempo passado de $\tau = 1$ para $\tau = \sqrt{\varepsilon}$.

Primeiro trabalhamos com a equação $\dot{b}$. Se $\varepsilon L_1 > 0$ limita os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ($L_1 = \mathcal{O}(1)$), então obtemos as desigualdades diferenciais

$$\left(\frac{-1}{\varepsilon} - L_1\right) |b| \leq \frac{d|b|}{d\tau} \leq \left(\frac{-1}{\varepsilon} + L_1\right) |b|. \quad (4.22)$$

Integrando a primeira desigualdade sobre $[\sqrt{\varepsilon}, 1]$, obtemos um limite superior para $|b(\sqrt{\varepsilon})|$ a seguir

$$|b(\sqrt{\varepsilon})| e^{(\frac{-1}{\varepsilon} - L_1)(1 - \sqrt{\varepsilon})} \leq |b(1)| \Rightarrow |b(\sqrt{\varepsilon})| \leq |b(1)| e^{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + L_1 - L_1 \sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.23)$$

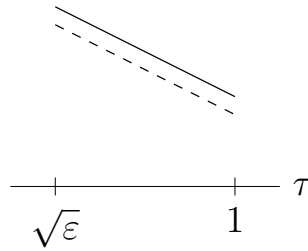


Figura 4.5: A curva integral de $\varepsilon \dot{b} = (-1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b$ (linha rígida) possui um crescimento sutilmente maior que a do sistema $\varepsilon \dot{b} = (-1 - \varepsilon L_1)b$ (linha tracejada) no tempo futuro. Fonte: autoria própria.

Enquanto isso, a segunda desigualdade de (4.22) pode ser integrada em $[\tau, 1]$ para fornecer um limite inferior para os termos b

$$|b(\tau)| \geq |b(1)| e^{(\frac{1}{\varepsilon} - L_1)(1 - \tau)}, \quad (4.24)$$

para todo $\tau \in [\sqrt{\varepsilon}, 1]$. Todas as condições se afastam da variedade central (lenta) $b = 0$ exponencialmente no tempo passado com uma grande constante de taxa. Portanto, de (4.23) e (4.24), concluímos que $\mathcal{R}$ é esticado exponencialmente na direção b , mas $|b(1)|$ pode ser escolhido pequeno o suficiente para permanecer próximo, como gostaríamos, de $b = 0$ sob a integração no tempo passado. Além disso, para que $|b(\sqrt{\varepsilon})|$ seja $\mathcal{O}(w(\varepsilon))$, para qualquer $w(\varepsilon)$ pequeno, é necessário que $|b(1)| = \mathcal{O}(w(\varepsilon)e^{-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})$. É claro que estaremos interessados em $|b(1)|$ pequeno para que a imagem de $\mathcal{R}$ se intercepte com $\varphi_{1/\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}$, que está situado próximo ao eixo b .

Introduzindo o fator de integração $e^{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\tau}$ na equação $\dot{v}$ em (4.21) obtem-se

$$\left(v e^{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\tau}\right)' = (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b e^{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\tau} + \mathcal{O}(\varepsilon) \sim (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))b e^{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\tau},$$

e usando (4.24) para integrar sobre $[\sqrt{\varepsilon}, 1]$ conclui-se que

$$|v(1)| e^{1+\mathcal{O}(\varepsilon)} - |v(\sqrt{\varepsilon})| e^{\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})} \geq \varepsilon \Xi |b(1)| (e^{1+\mathcal{O}(\varepsilon)} - e^{\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{q}{\sqrt{\varepsilon}} - L_1 + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})})$$

onde

$$\Xi = \frac{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)}{-1 + (L_1 + 1)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \mathcal{O}(1).$$

Econtra-se assim um limite superior para o crescimento de v conforme o fluxo negativo atua sobre $\mathcal{R}$

$$|v(\sqrt{\varepsilon})| \leq |v(1)|e^{1-\sqrt{\varepsilon}+\mathcal{O}(\varepsilon)} + \varepsilon\Xi|b(1)|(e^{1-\sqrt{\varepsilon}+\mathcal{O}(\varepsilon)} - e^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-L_1+\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})}).$$

Novamente, se $|b(1)|$ for suficientemente pequeno ($\mathcal{O}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})$), então v muda no máximo um valor $\mathcal{O}(1)$ conforme o fluxo negativo atua em $\mathcal{R}$

$$|v(\sqrt{\varepsilon})| \leq |v(1)|e^{1+\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.25)$$

Portanto, na direção v , o movimento é limitado a $\mathcal{O}(1)$ ao longo da variedade central. Notamos também que as estimativas a priori de que v e b permanecem $\mathcal{O}(1)$ continuam valendo.

Assim, obtivemos o resultado desejado de que a imagem de $\mathcal{R}$ em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$ é uma curva quase horizontal no plano (b, v) . Além disso, como já foi afirmado no início desta discussão, os resultados obtidos até aqui combinam-se para demonstrar que as imagens de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ se cruzam transversalmente no plano (b, v) em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$, e esta interseção contém uma solução localmente única para o problema de condição de contorno (4.7).

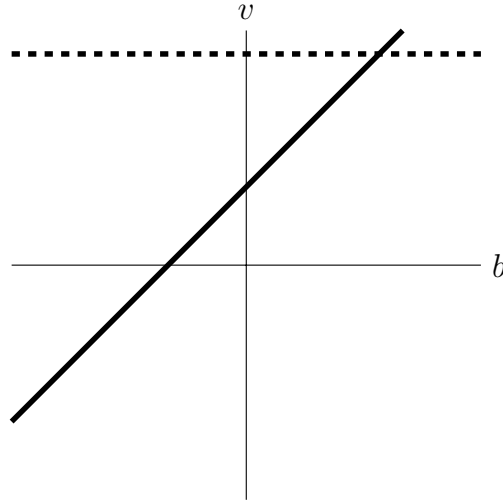


Figura 4.6: $\mathcal{R}$ (linha sólida), definida por (4.18), é $\mathcal{O}(\varepsilon)$ na horizontal e $\mathcal{O}(1)$ ao longo do eixo v sob (4.20) em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$. Fonte: autoria própria.

Observação 4.4. Usando a equação de variações de (4.20), pode-se mostrar que a imagem inversa de $\mathcal{R}$ em $\tau = \sqrt{\varepsilon}$ é na verdade $\mathcal{C}^1\mathcal{O}(\varepsilon)$ pequena, ou seja, a inclinação da imagem inversa $\mathcal{R}$ é $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pequena. Consulte a seção 3.3 de [4].

Na primeira abordagem do problema (4.7) a combinação entre as dinâmicas foi realizada porque o limite $\lim_{\xi \rightarrow \infty} y_i(\xi)$ varia (com derivada exponencialmente grande) com $\frac{dy}{dx}(0)$, isso permite combinarmos as soluções em cada camada (interna e externa) em um intervalo de sobreposição. No método geométrico isso se manifesta pelo fato de que a imagem no tempo futuro de $\mathcal{L}$ é espalhada sobre a imagem no tempo passado de $\mathcal{R}$, criando a interseção transversal que contém a solução do problema do valor limite.

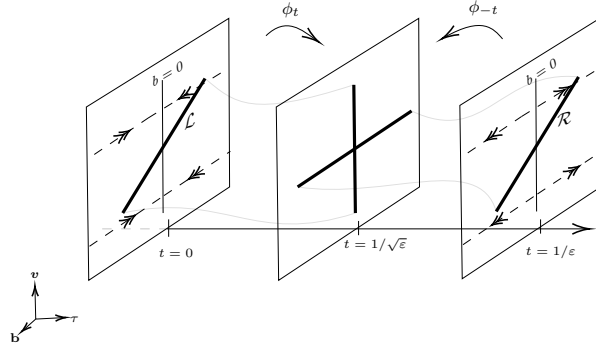


Figura 4.7: Ação do fluxo rápido sobre as condições de fronteira.
Fonte: autoria própria.

Para concluir esta seção, comentamos brevemente o papel de um domínio de sobreposição. A combinação assintótica para uma equação de segunda ordem produz soluções presuntivas nas regiões externa e interna que têm o mesmo valor de y no ponto da troca de dinâmica. Em cada região, o valor de $\frac{dy}{dx}$ no ponto da combinação pode ser calculado (em termos exponencialmente pequenos) dessas soluções. Em particular, se houver um domínio de sobreposição, então o fato de as soluções externa e interna satisfazerem as mesmas expansões assintóticas nesse domínio significa que a correspondência dos valores de y implica automaticamente a correspondência de valores $\frac{dy}{dx}$ (até erros exponencialmente pequenos). O método geométrico, por outro lado, segue diretamente $\frac{dy}{dx}$, assim como y , e não depende de um domínio de sobreposição. Em problemas sem domínios de sobreposição, o ponto comum até o qual as variedades são rastreadas (e a transversalidade é verificada) estaria justamente na fronteira dos dois domínios de validade.

4.6 Fibras e geometria no problema de órbitas homoclínicas para bandas de ressonância em sistemas hamiltonianos Perturbados

Nesta seção estudamos um sistema não linear que consiste em um oscilador Duffing fortemente acoplado a um oscilador anarmônico

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \mu^2 q(I - q^2) - \varepsilon \alpha p \\ \dot{I} &= -\varepsilon I \sin \theta - \varepsilon \beta I - \varepsilon \gamma p^2 \\ \dot{\theta} &= I - 1 - \frac{1}{2} \mu^2 q^2 - \varepsilon \cos \theta \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aqui, q e p são as variáveis canonicamente conjugadas de posição e momento do oscilador de Duffing, e $I \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^1$ são as variáveis do ângulo de ação do oscilador anarmônico. Os parâmetros μ , α , β e γ são positivos e $0 < \varepsilon \ll 1$ é um pequeno parâmetro positivo. Embora este exemplo não tenha a forma geral (1.1), veremos que ele pode ser colocado nesta forma nas vizinhanças das bandas de ressonância.

Este exemplo foi estudado em [5], e é um protótipo de sistemas hamiltonianos completamente integráveis sujeitos a pequenas perturbações de amplitude. Quando $\varepsilon = 0$, o sistema (4.26) é hamiltoniano de dois graus de liberdade com duas constantes de movimento funcionalmente independentes I e

$$H_0(q, p, I) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}\mu^2 q^2(I - \frac{1}{2}q^2) + \frac{1}{2}I^2 - I.$$

Portanto, é completamente integrável quando $\varepsilon = 0$.

Persistência de variedades normalmente hiperbólicas para $0 < \varepsilon \ll 1$.

Quando $\varepsilon = 0$, o sistema (4.26) simplifica consideravelmente para

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \mu^2 q(I - q^2) \\ \dot{q} &= p \\ \dot{I} &= 0 \\ \dot{\theta} &= I - 1 - \frac{1}{2}\mu^2 q^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para cada $I > 0$, o oscilador de Duffing com parâmetro I possui um ponto de equilíbrio de sela $(0, 0)$ que é conectado a si mesmo por um par de órbitas homoclínicas

$$\begin{aligned} p &= p^h(t, I) = \mp \sqrt{2}\mu I \operatorname{sech}(\mu\sqrt{I}t) \operatorname{tgh}(\mu\sqrt{I}t) \\ q &= q^h(t, I) = \pm \sqrt{2I} \operatorname{sech}(\mu\sqrt{I}t) \\ I &= I \\ \theta &= \theta^h(t, I) + \theta_0 = (I - 1)t - \mu\sqrt{I} \operatorname{tgh}(\mu\sqrt{I}t) + \theta_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde o sobrescrito h denota homoclínica, e $\pm$ corresponde às órbitas direita e esquerda, respectivamente. Estas soluções explícitas são bem conhecidas, ver por exemplo o capítulo 4.5 de [6]. Além disso, como o ângulo θ é desacoplado, ele é determinado pela quadratura.

No sistema tridimensional $q - p - I$, a união dos pontos $(q = 0, p = 0)$ para todo I em qualquer intervalo aberto $]I_1, I_2[$ constitui uma variedade invariante normalmente hiperbólica pela definição da seção 2.1. Além disso, se considerarmos esta variedade (agora cruzada com $\theta \in S^1$) no espaço de fase quadridimensional completo (q, p, I, θ) , ainda é normalmente hiperbólica, mas agora é necessária a definição para mais sistemas genéricos dada em [1], porque há dinâmica nisso mesmo quando $\varepsilon = 0$.

Além disso, no espaço de fase quadridimensional, as variedades tridimensionais estáveis e instáveis de tal variedade são as uniões das variedades individuais estáveis e instáveis dos sistemas planares com parâmetro I fixado na mesma faixa de valores I , cruzando com $\theta \in S^1$. As ramificações destas variedades em $q \geq 0$ ($q \leq 0$, respectivamente) coincidem.

Agora, quando $0 < \varepsilon \ll 1$, o plano $\{(q, p, I, \theta); q = p = 0\}$ é novamente invariante, uma vez que os componentes q e p do campo vetorial se anulam nele. Além disso, possui variedades tridimensionais estáveis e instáveis pela teoria geral de persistência desenvolvida em [1], e existem famílias invariantes de fibras rapidamente estáveis e instáveis com pontos de base nas variedades locais estáveis e instáveis que folheam a vizinhança do plano. Estas estruturas geométricas podem então ser usadas para decompor a dinâmica do sistema em termos dos movimentos ao longo da variedade invariante e movimento nas direções normais.

No entanto, antes de analisar esta decomposição, focamos especificamente num intervalo pequeno $]I_1, I_2[$ em torno de $I = 1$. É neste intervalo que o sistema completo pode ser reformulado como um sistema rápido-lento da forma (1.1).

Quando $\varepsilon = 0$, o círculo $I = 1$ é constituído de pontos de equilíbrio no plano invariante, pois $\dot{\theta} = 0$ quando $q = p = 0$. Além disso, $\dot{\theta} < 0$ ao longo dessas órbitas periódicas com $I < 1$ (dentro do círculo), e $\dot{\theta} > 0$ ao longo dessas órbitas periódicas com $I > 1$ (fora do círculo). Denominamos o anel em torno de $I = 1$ por $\mathcal{M}_0$. Esse mesmo é uma variedade invariante normalmente hiperbólica.

O círculo $I = 1$ em $\mathcal{M}_0$ é uma estrutura delicada que corresponde a uma degeneração significativa no sistema. Devido à natureza da bifurcação linear em uma vizinhança anular dele, este círculo é destruído quando os termos de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ são adicionados à equação. Para analisar essas dinâmicas, é necessário redimensionar a degeneração significativa definindo $I = 1 + \sqrt{\varepsilon}h$, onde $h \in \mathbb{R}$ é uma nova variável dependente, e a potência ligada a ε segue do requisito de que h e θ varie na mesma taxa, $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, em relação a ε nesta vizinhança. O sistema completo se torna

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \mu^2 q(1 - q^2) + \sqrt{\varepsilon} \mu^2 q h - \varepsilon \alpha p \\ \dot{h} &= -\sqrt{\varepsilon}(\sin \theta + \beta + \gamma p^2) - \varepsilon h(\sin \theta + \beta) \\ \dot{\theta} &= \sqrt{\varepsilon} h - \frac{1}{2} \mu^2 q^2 - \varepsilon \cos \theta\end{aligned}\quad (4.29)$$

onde $\sqrt{\varepsilon}$ é o parâmetro pequeno, em vez de ε .

O plano $\mathcal{M}_\varepsilon \equiv \{(p, q, h, \theta); q = p = 0\}$ é uma variedade invariante lenta. Em termos do tempo lento $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$, o sistema lento em $\mathcal{M}_\varepsilon$ é

$$\begin{aligned}h' &= -(1 + \sqrt{\varepsilon}h) \sin \theta - \beta(1 + \sqrt{\varepsilon}h) \\ \theta' &= h - \sqrt{\varepsilon} \cos \theta\end{aligned}\quad (4.30)$$

Ela está definida no cilindro $\mathbb{R} \times S^1$, e denominamos este cilindro por $\mathcal{M}_\varepsilon$, pois é precisamente uma variedade invariante lenta do tipo que estudamos anteriormente.

Para a ordem principal, este sistema externo em $\mathcal{M}_\varepsilon$ é o pêndulo não linear clássico com variável de ângulo θ e variável de momento h , constante de torque β , e com Hamiltonian $\mathcal{H}(h, \theta) = \frac{1}{2}h^2 + 1 - \cos \theta + \beta\theta$. Os termos de ordem superior, $\mathcal{O}(\varepsilon)$, representam perturbações, tanto hamiltonianas quanto dissipativas, que quebram as órbitas homoclínicas para o equilíbrio de sela e que transformam os centros em $\mathcal{M}_\varepsilon$ em pontos de equilíbrio espirais estáveis.

Finalmente, $\mathcal{M}_\varepsilon$ possui variedades locais estáveis e instáveis $W_{loc}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ pela teoria de Fenichel, e estas são tridimensionais. Isto completa nossa breve discussão do sistema lento (externo) que governa a dinâmica em $\mathcal{M}_\varepsilon$, e nos voltamos agora para o sistema rápido (interno) que governa a dinâmica das órbitas nas direções normais à $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Quando $I = 1$, o sistema (4.27) simplifica ainda mais para

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \mu^2 q(1 - q^2) \\ \dot{h} &= 0 \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{2} \mu^2 q^2\end{aligned}\quad (4.31)$$

Cada ponto do cilindro não perturbado está conectado a outro ponto por uma órbita heteroclínica. De (4.28), a diferença angular $\Delta\theta$ entre os pontos finais de qualquer órbita heteroclínica conectando pares de equilíbrio em $\mathcal{M}_0$ em $I = 1$ é -2μ , que é um resultado direto da integração de $\dot{\theta}^h(t, I = 1)$ ao longo de toda reta real $t \in \mathbb{R}$. Portanto pode-se construir órbitas singulares usando essas conexões heteroclínicas rápidas não perturbadas intercaladas com segmentos de órbita do sistema lento reduzido em $\mathcal{M}_0$, e há uma família inteira de heteroclínicas de dois parâmetros para escolher.

Para o caso em que $0 < \varepsilon \ll 1$, apenas algumas órbitas heteroclínicas rápidas isoladas $\varepsilon = 0$, órbitas singulares, sobrevivem à perturbação. Em particular, as órbitas homoclínicas que persistem são precisamente aquelas que se encontram nas interseções transversais bidimensionais das variedades locais estáveis e instáveis $W_{loc}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$, de modo

que eles são assintóticos no passado e no futuro para $\mathcal{M}_\varepsilon$. Como a função de Melnikov mede a distância de divisão entre essas variedades, suas interseções podem ser calculadas pelos zeros simples desta função

$$M(1, \theta_0, \mu, \alpha, \beta, \gamma) = 2 \sin \mu \sin \theta_0 - \frac{4}{3} \alpha \mu + 2 \beta \mu + \frac{8}{15} \gamma \mu^3. \quad (4.32)$$

Quando μ não é múltiplo de π , esta função de Melnikov possui zeros simples em θ_0 em algum $\theta_0 = \bar{\theta}_{0.1}$ e $\theta_0 = \bar{\theta}_{0.2} = \pi - \bar{\theta}_{0.1}$, desde que

$$\left| \frac{\mu}{\sin \mu} \left(\frac{2}{3} \alpha - \beta - \frac{4}{15} \gamma \mu^2 \right) \right| < 1. \quad (4.33)$$

Portanto, para todos α , β e γ admissíveis, as variedades estáveis e instáveis $W_{loc}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ e $W_{loc}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ se intersectam transversalmente ao longo de dois pares simétricos de superfícies bidimensionais. No caso Hamiltoniano, encontramos $\bar{\theta}_{0.1} = 0$ e $\bar{\theta}_{0.2} = \pi$.

A beleza do método geométrico é que ele decompõe a dinâmica do sistema em sub-sistemas de dimensão inferior, que são individualmente muito mais fáceis de analisar do que o sistema completo. Desta forma, pode-se determinar explicitamente quais soluções internas e externas podem ser conectadas entre si, o que é difícil de fazer em um sistema quadridimensional.

Algumas órbitas homoclínicas com múltiplas colisões (*bumb*).

A existência de vários tipos de soluções de transição simples e múltiplas foi demonstrado em Kaper and Kovačič [5]. Cada colisão é uma excursão rápida para longe do cilindro invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$, e as saliências são intercaladas com segmentos lentos próximos a uma variedade lenta. As órbitas homoclínicas, que incluem órbitas de Šilnikov com múltiplas colisões, conectam vários equilíbrios e órbitas periódicas na variedade lenta. As colisões são camadas de transição rápida (interna), enquanto os segmentos longos próximos às variedades lentas são soluções externas.

O Teorema 1 de [5] produz, de acordo com [7], os seguintes tipos de órbitas homoclínicas com múltiplas colisões neste exemplo. Fixe $0 < \mu \ll \beta < 1$ e $\tilde{\gamma} = \mu\gamma = \mathcal{O}(1)$. Se $5\alpha - 2\tilde{\gamma} = 0$, então existem dois pares simétricos de órbitas heteroclínicas que conectam dois pares de pontos na separatriz no cilindro $\mathcal{M}_0$, como mostrado na Figura 4.8.

Esses dois pares de pontos cortam a separatriz em cinco segmentos disjuntos, denotados $O_1, \dots, O_5$, onde os números aumentam na direção positiva tempo lento τ (tempo futuro) ao longo da separatriz. Denotamos o par de órbitas heteroclínicas que conectam as extremidades do segmento O_2 por $\Gamma_1^\pm$, e o par que conecta as extremidades do segmento O_4 por $\Gamma_2^\pm$.

Podemos agora formar uma infinidade contável de órbitas homoclínicas singulares como segue. Considere qualquer sequência finita σ_1 de pares $\Gamma_1^+ O_2$ e $\Gamma_1^- O_2$, incluindo possivelmente a sequência vazia. Além disso, seja σ_2 a sequência O_4, Γ_2^+ ou Γ_2^- . Defina a sequência S como $S = O_1 O_2 \sigma_1 O_3 \sigma_2 O_5$ e exclua a sequência $O_1 O_2 O_3 O_4 O_5$ desta definição. Se conectarmos os segmentos da órbita $O_1, \dots, O_5, \Gamma_1^\pm$ e $\Gamma_2^\pm$ de acordo com a sequência S , obtemos uma órbita singular homoclínica para o ponto s_0 , que denotamos por Γ_0^S . Se denotarmos por $-S$ a sequência obtida de S pela troca de sinais $+$ e $-$, então a órbita homoclínica singular correspondente Γ_0^{-S} é a imagem espelhada da órbita singular Γ_0^S sob a transformação $(p, q) \mapsto (-p, -q)$, que preserva equações (4.26). Para ser mais preciso, o Teorema 1 de [5] agora implica o seguinte

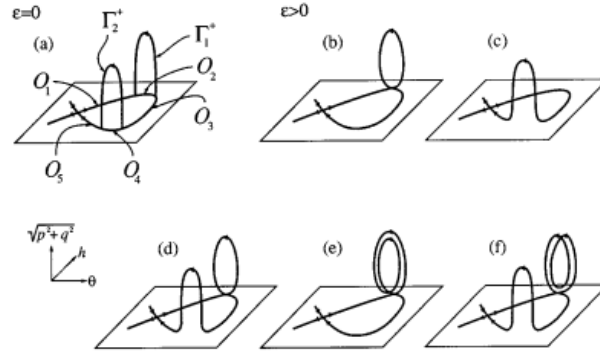


Figura 4.8: (a) Os segmentos de órbita compreendendo as órbitas de transição singulares N -colisões que conectam a sela a si mesma. (b) A órbita de uma colisão correspondente à sequência $O_1O_2\Gamma_1^+O_2O_3O_4O_5$. (c) A órbita de uma colisão correspondente à sequência $O_1O_2O_3\Gamma_2^+O_5$. (d) A órbita de duas colisões correspondente à sequência $O_1O_2\Gamma_1^+O_2O_3\Gamma_2^+O_5$. (e) A órbita de duas colisões correspondente à sequência $O_1O_2\Gamma_1^+O_2\Gamma_1^+O_2O_3O_4O_5$. (f) A órbita de três colisões correspondente a $O_1O_2\Gamma_1^+O_2\Gamma_1^+O_2O_3\Gamma_2^+O_5$. Figura retirada de [5].

Proposição 4.1. [7] Fixe $0 < \mu \ll \beta < 1$ e $\tilde{\gamma} = \mu^2\beta = \mathcal{O}(1)$. Seja a sequência S como no parágrafo anterior, e Γ_0^S sua órbita singular correspondente homoclínica ao ponto s_0 . Então, existe uma função contínua $\alpha_S(\varepsilon)$ com $5\alpha_S(0) - 2\tilde{\gamma} = 0$, tal que para ε positivo pequeno e $\alpha = \alpha_S(\varepsilon)$, existe uma órbita Γ_ε^S , homoclínica à sela s_ε . A órbita Γ_ε^S é $\mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ próxima à órbita singular Γ_0^S , onde $\delta(\varepsilon)$ é uma função com $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, $\alpha_S(\varepsilon) = \alpha_{-S}(\varepsilon)$, e a órbita Γ_ε^{-S} é a imagem espelhada da órbita Γ_ε^S sob a transformação $(p, q) \mapsto (-p, -q)$.

Como segundo exemplo obtemos a existência de órbitas de Šilnikov com múltiplas colisões aplicando o teorema 2 de [5]. A demonstração deste fato procede da seguinte forma. Quando $0 < \beta < 1$ e a equação

$$\alpha = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\mu}{2\mu} \right) \beta - \frac{3}{2} \frac{(1 - \cos 2\mu)}{2\mu} \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{2}{5} \tilde{\gamma} \quad (4.34)$$

for satisfeita, a reta $\theta = \bar{\theta}_{0.1} + \mu$ passa pelo centro c_0 . A órbita heteroclínica emergente de c_0 pousa dentro da região delimitada pela separatriz homoclínica até a sela, por exemplo, quando $0 < \mu < \frac{\pi}{2} - \arcsin \beta$. Quando $\mu \ll 1$, a equação (4.34) torna-se $\alpha = \frac{2}{5} \tilde{\gamma} - \frac{3}{2} \mu \sqrt{1 - \beta^2} + \mathcal{O}(\mu^2)$. Para um valor pequeno e não nulo de $\sqrt{\varepsilon}$, esta situação dá origem a um par de órbitas Šilnikov de colisão única homoclínica à sela espiral c_ε . Ver Figura abaixo.

Lembre-se de que cada órbita periódica de tempo lento, que fica dentro da região delimitada pela separatriz homoclínica à sela s_0 e intesecta a reta $\theta = \bar{\theta}_{0.1} + \mu$, intersecta essa reta em dois pontos, um com h positivo e outro com h negativo. Portanto, existem dois pares de órbita heteroclínicas que emanam desta órbita periódica, de modo que a coordenada h ao longo das duas órbitas de um desses pares é positiva e a outra negativa. Denotamos cada uma dessas órbitas por um dos quatro símbolos $\Gamma_\pm^\pm$, onde o sinal no

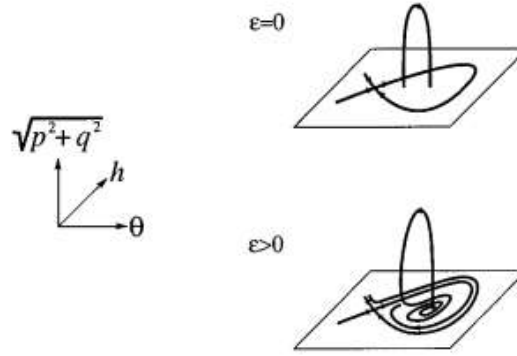


Figura 4.9: A órbita de Šilnikov de uma colisão que conecta a sela em espiral c_ε a si mesma. Figura retirada de [5].

índice inferior denota o sinal da coordenada h ao longo da órbita, e o índice superior denota a superfície de interseção em que esta órbita se encontra.

Para obter a existência de órbitas de Šilnikov com múltiplas colisões, formamos o seguinte tipo de órbita de transição singular modificada. Seu primeiro segmento é uma órbita heteroclínica Γ_1 decolando no centro $c_0 \equiv c_1$, e pousando dentro da região delimitada pela separatriz homoclínica até a sela s_0 no ponto d_2 . O segundo segmento é composto por N_1 revoluções em torno da órbita periódica lenta O_2 que passa pelo ponto d_2 . O último ponto do segmento é c_2 da reta $\theta = \bar{\theta}_{0,1} + \mu$, de onde decola o próximo segmento, a órbita heteroclínica Γ_2 . Esta órbita pousa no ponto d_3 que novamente se assume estar dentro da região delimitada pela separatriz homoclínica à sela s_0 . Esta construção pode continuar enquanto o ponto de aterrissagem d_{i+1} da i -ésima órbita heteroclínica Γ_i estiver contido dentro da região delimitada pela separatriz homoclínica à sela s_0 . Denotamos o maior i por K . Órbitas de transição singulares modificadas do tipo descrito com k colisões existem para todos os números inteiros k , com $1 \leq k \leq K$. Cada uma das órbitas heteroclínicas Γ_i pode estar em qualquer uma das superfícies de interseção singulares e, se $i > 1$, pode ter coordenadas h positivas ou negativas.

O número máximo de colisões, K , das órbitas de transição singulares modificadas descritas no parágrafo anterior pode ser calculado em função dos parâmetros μ e β . Ver seção 11 de [5]. Para ser mais preciso, o teorema 2 de [5] agora implica a seguinte proposição.

Proposição 4.2. [7] *Fixe $0 < \beta < 1$, $0 < \mu < \frac{\pi}{2} - \arcsen \beta$, e $\tilde{\gamma} = \mu^2 \gamma$. Seja a sequência S de comprimento k , com $1 \leq k \leq K$, como no parágrafo anterior, e seja Γ_0^S sua órbita de transição singular modificada correspondente. Então, existe uma função $\alpha_S(\varepsilon)$, com $\alpha_S(0)$ satisfazendo a equação (4.34), tal que para $\varepsilon > 0$ pequeno e $\alpha = \alpha_S(\varepsilon)$, existe uma órbita Γ_ε^S homoclínica à sela espiral c_ε . Além da parte que espirala em direção ao ponto c_ε próximo ao anel $\mathcal{M}_\varepsilon$, a órbita é $\mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ próxima à órbita de transição singular modificada Γ_0^S , onde $\delta(\varepsilon)$ é uma função tal que $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Em particular, a órbita Γ_ε^S faz N_i revoluções completas em torno do ponto c_ε entre suas $(i-1)$ e i -ésimas colisões. Além disso, $\alpha_S(\varepsilon) = \alpha_{-S}(\varepsilon)$, e a órbita Γ_ε^{-S} é imagem espelhada da órbita Γ_ε^S sob a transformação $(p, q) \mapsto (-p, -q)$.*

Uma órbita de duas colisões é mostrada na Figura 4.10. Observamos que, se substituirmos o lado direito da equação (4.34) por α na desigualdade (4.33), esta desigualdade

é sempre satisfeita.

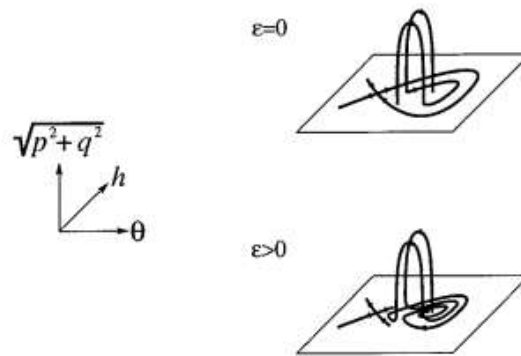


Figura 4.10: A órbita se Šilnikov de duas colisões conectando a sela espiral c_ε à sequência $\Gamma^+0\Gamma_-^+$. Figura retirada de [5].

5 Regularização geométrica de uma singularidade do tipo cúspide em sistemas lentos-rápidos com aplicações para exemplos de Zeeman

É comum problemas de perturbação singular serem introduzidos pela equação do sistema lento (na variável lenta) por conta de sua expressão não familiar em EDO's

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, z, \varepsilon) \\ \dot{y} &= g(x, z, \varepsilon)\end{aligned}.$$

Isso não deve causar nenhuma confusão, uma vez que sistemas rápidos e lentos são equivalentes quando $\varepsilon \neq 0$. É comum também se referir ao sistema rápido reduzido como “sistema de camadas” e ao sistema lento reduzido como “sistema reduzido”, e as vezes chamamos a variedade crítica ($\{f(x, y, 0) = 0\}$) de “conjunto de empasse”, e daqui em diante a denotamos por S_0 . Essas mudanças não afetam no estudo, uma vez que a mudança é apenas em suas nomenclaturas ou símbolos que as representam. Os sistemas que estudamos nesse capítulo possuem o formato

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{5.1}$$

Nos capítulos anteriores estudamos conjuntos compactos normalmente hiperbólicos contido na variedade crítica. Pontos da variedade crítica que não são normalmente hiperbólicos, chamados pontos singulares, não foram abordados.

Neste capítulo será feita uma análise completa da singularidade do tipo cúspide para sistemas (5.1) de duas dimensões lentas e uma rápida, com $0 < \varepsilon \ll 1$. Além de apresentarmos este resultado principal, devido a T.J. Kaper ([8]), sobre a singularidade das cúspides, também mostramos uma aplicação, também retirada de [8], para obter a descrição completa da dinâmica do modelo de impulso nervoso dado por E.C. Zeeman, no qual a singularidade das cúspides desempenha um papel central. Além disso, este modelo também possui uma singularidade de sela dobrada e, portanto, também empregaremos resultados conhecidos em dobras e selas dobradas. Finalmente, para completar, apresentamos também a análise do modelo de batimento cardíaco introduzido também por E.C. Zeeman.

Esse capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 5.1 apresentamos a análise dos modelos de Zeeman no cenário das equações restritas. Na seção 5.2, revisamos os resultados relevantes da teoria da perturbação singular e apresentamos nosso principal

resultado sobre cúspides (Teorema 5.9). Este teorema principal é então provado na seção 5.3. Finalmente, na seção 5.4, provamos teoremas sobre a dinâmica do modelo de batimento cardíaco (Teorema 5.10) e sobre a dinâmica do modelo de impulso nervoso (Teorema 5.11), com base nos resultados da seção 5.2.

5.1 Análise dos modelos de Zeeman como equações forçadas

5.1.1 O modelo de batimento cardíaco

E.C. Zeeman introduziu o seguinte modelo elementar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - y_0 \\ \varepsilon \dot{y} &= -(y^3 - y + x)\end{aligned}\quad , \quad (5.2)$$

onde y_0 é uma constante maior que $1/\sqrt{3}$. Zeeman construiu o modelo de modo que o equilíbrio estável tivesse uma bacia de atração relativamente pequena. Uma perturbação adequada (pequena em tamanho) faz o sistema saltar para uma variedade lenta diferente, mas eventualmente a trajetória retorna ao equilíbrio estável por meio de um salto de retorno.

Fazendo $\varepsilon = 0$ em (5.2), obtemos as seguintes equações restritas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - y_0 \\ 0 &= -(y^3 - y + x)\end{aligned}\quad . \quad (5.3)$$

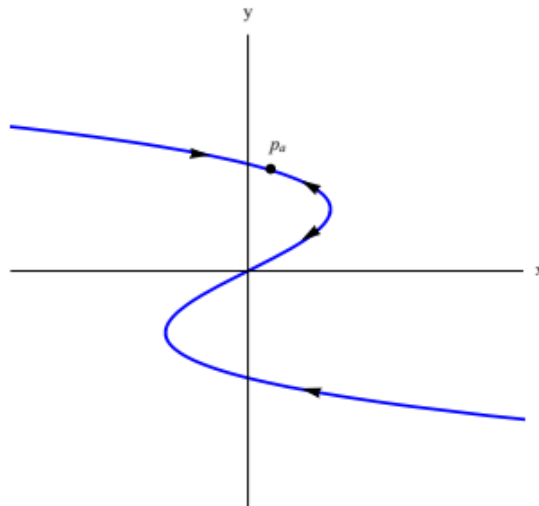


Figura 5.1: Dinâmica da equação reduzida (5.4), com p_a denotando o equilíbrio estável. Figura retirada de [8].

A variedade crítica (lenta) S_0 é definida pela condição $y^3 - y + x = 0$. Esta curva tem dois pontos de dobra, $y = \pm 1/\sqrt{3}$. Podemos eliminar a restrição usando o fato de que S_0 é um gráfico de x em função de y , ou seja, $x = -y^3 + y$. Derivando esta relação em t ,

obtemos $\dot{x} = (1 - 3y^2)\dot{y}$. Substituindo em (5.3) e dividindo pelo fator $1 - 3y^2$, obtemos a equação reduzida

$$\dot{y} = \frac{1}{1 - 3y^2}(y - y_0). \quad (5.4)$$

A equação (5.4) possui um ponto de equilíbrio nos pontos de dobra $y = \pm 1/\sqrt{3}$, e o fluxo é mostrado na Figura 5.1. A análise da equação (5.2) com $0 < \varepsilon \ll 1$ é apresentada na seção 5.4.

5.1.2 O modelo do impulso nervoso

E.C. Zeeman também introduziu o seguinte modelo elementar para voltagem transmembrana em uma célula nervosa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 - y \\ \dot{y} &= -2(y + z) \\ \varepsilon \dot{z} &= -(x + yz + z^3) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Uma característica importante de (5.5) é a possibilidade de retorno suave, ou seja, após o salto para longe do equilíbrio a trajetória retorna permanecendo o tempo todo na variedade lenta. Nesta subseção estudamos a versão restrita de (5.5)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 - y \\ \dot{y} &= -2(y + z) \\ 0 &= x + yz + z^3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Na seção 5.4, estendemos nossa análise para equação (5.5).

A característica central da superfície de restrição $0 = x + yz + z^3$ é o equilíbrio do tipo cúspide na origem, da qual bifurcam duas linhas de dobra. Acontece que uma das linhas de dobra também contém um equilíbrio de sela dobrada. Nas próximas duas subseções (5.1.3 e 5.1.4), revisamos os resultados e a análise desses equilíbrios no cenário de equações restritas. Posteriormente, nas subseções 5.1.5 e 5.1.6, voltamos a (5.6) e analisamos suas singularidades em mais detalhes.

5.1.3 Uma regularização de equações forçadas

Consideramos equações restritas da forma geral

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, z) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z) \\ 0 &= g(x, y, z) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Consideramos o fluxo de (5.7) próximo a um ponto (x_0, y_0, z_0) satisfazendo as condições

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (5.8)$$

e também

$$g_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (5.9)$$

Além disso, assuma uma condição de regularidade, denotada por (A)

$$(A) \quad g_{(x,y)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Aqui, o sub índice (x, y) significa a derivada com relação à (x, y) . Sob essas considerações, vale o seguinte resultado.

Lema 5.1. *Assuma (5.8) e (A). Então, a equação forçada (5.7) pode ser escrita na forma*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_2(\varphi(y, z), y, z) \\ -g_z(\varphi(y, z), y, z)\dot{z} &= f(\varphi(y, z), y, z) \cdot g_{(x,y)}(\varphi(y, z), y, z), \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde $x = \varphi(y, z)$ é tal que $g(\varphi(y, z), y, z) = 0$.

Demonstração. Observe que (A) implica que $g_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ou $g_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $g_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Disso decorre que existe φ , com o mesmo grau de regularidade de g , de modo que

$$x = \varphi(y, z), \quad (5.11)$$

satisfazendo

$$g(\varphi(y, z), y, z) = 0.$$

Diferenciando (5.11) em relação a t , obtemos a expressão

$$\dot{x} = \varphi_y \dot{y} + \varphi_z \dot{z}.$$

Usando diferenciação implícita, chegamos às equações

$$\varphi_z = -\frac{g_z}{g_x}, \quad \varphi_y = -\frac{g_y}{g_x}$$

e isso implica que

$$-\frac{g_z}{g_x} \dot{z} = f_1 + \frac{g_y}{g_x} f_2,$$

ou, em outros termos

$$-g_z \dot{z} = g_{(x,y)} \cdot f.$$

Disso obtemos (5.10). ■

Observe que (5.10) possui equilíbrio ao longo da linha de dobra $\{g_z = 0\}$. Usando a regra de Cramer para encontrar $(\dot{y}, \dot{z})$, podemos reescrever (5.10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{g_z} \end{pmatrix} (-g_z f_2) \\ \dot{z} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{g_z} \end{pmatrix} g_{(x,y)} \cdot f. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Cancelando o fator $(-1/g_z)$, obtemos a equação regularizada

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -g_z f_2 \\ \dot{z} &= g_{(x,y)} \cdot f, \end{aligned} \quad (5.13)$$

com x determinado pela equação $x = \varphi(y, z)$. Fora da linha de dobra, as trajetórias de (5.10) e (5.13) diferem apenas pela parametrização do tempo. A direção do tempo é invertida na região onde $-g_z < 0$.

Introduzimos condições adicionais para manter regularidade

$$(B) \quad g_{(x,y)}(x_0, y_0, z_0) \cdot f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

e

$$(C) \quad g_{zz}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 .$$

Classificação de pontos singulares

Pontos de dobra simples são pontos para os quais (B) e (C) são válidos. Equilíbrios dobrados são pontos para os quais (B) falha, mas (C) se mantém. Os equilíbrios dobrados ocorrem genericamente em pontos isolados de uma linha de dobra. Condições adicionais de não degeneração podem ser aplicadas, mas não as discutiremos aqui. Os pontos de cúspide são os pontos para os quais (B) é válido, mas (C) falha. Os pontos de cúspide ocorrem genericamente de maneira isolada em um conjunto de dobra onde duas linhas se encontram. Para um ponto de cúspide não degenerado, a seguinte condição de regularidade é exigida

$$(D) \quad g_{zzz}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 .$$

5.1.4 Dobras, selas dobradas e cúspide em equações forçadas com dois parâmetros

F. Takens [9] encontrou formas normais simples para uma série de equações restritas e provou um resultado afirmando a conjugação topológica entre equilíbrios na posição geral e as formas normais correspondentes. Nesta subseção, revisamos as formas normais fornecidas para os três casos relevantes no modelo de impulso nervoso (5.5) cujas equilíbrios são do tipo dobra, selas dobradas e cúspides.

Pontos (x_0, y_0, z_0) para os quais valem (5.8) e (5.9) são chamados *singularidade do tipo dobra*, ou apenas *pontos de dobra*. Para a classificação das singularidades dobradas, suporemos que (A) seja válido, e será utilizado o Lema 5.1.

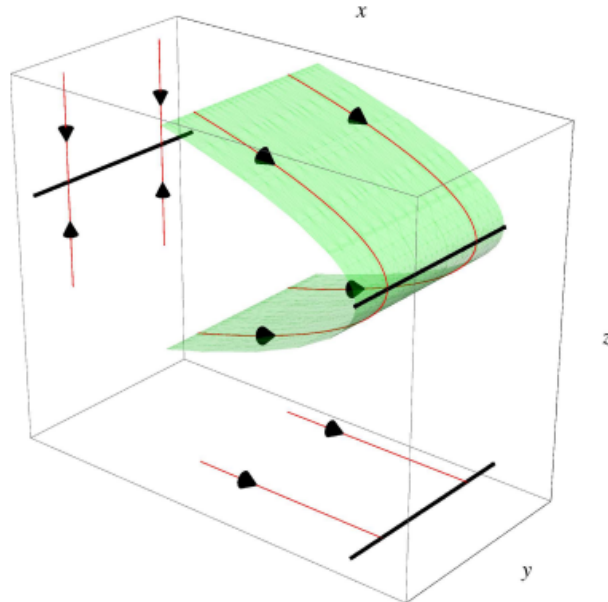


Figura 5.2: Ponto de dobra simples, forma normal (5.14) com sinal de mais. Figura retirada de [8].

Dobra Simples

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de dobra satisfazendo (A), (B) e (C), então, de acordo com [9], a forma normal de sua equação reduzida é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm 1 \\ \dot{y} &= 0 \\ 0 &= -(z^2 + x) \end{aligned} \quad (5.14)$$

(A forma normal para uma dobra com uma variável lenta é obtida eliminando a variável y). Observe que tanto (B) quanto (C) são satisfeitos para (5.14). A dinâmica pode ser compreendida usando o método descrito na subseção 5.1.3. O retrato de fase, correspondente ao sinal de mais na equação x , é mostrado na Figura 5.2.

Equilíbrio Dobrado (sela)

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de dobra satisfazendo (A) e (C) que falha em (B), cujo campo regularizado 5.13 possui uma sela em (x_0, y_0, z_0) , então, de acordo com [9], a forma normal de sua equação reduzida é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= 1 \\ 0 &= z^2 + x \end{aligned} \quad (5.15)$$

Observe que a condição (B) falha, mas (C) é válida. A dinâmica pode ser compreendida usando o método descrito na subseção 5.1.3. O retrato de fase é mostrado na Figura 5.3.

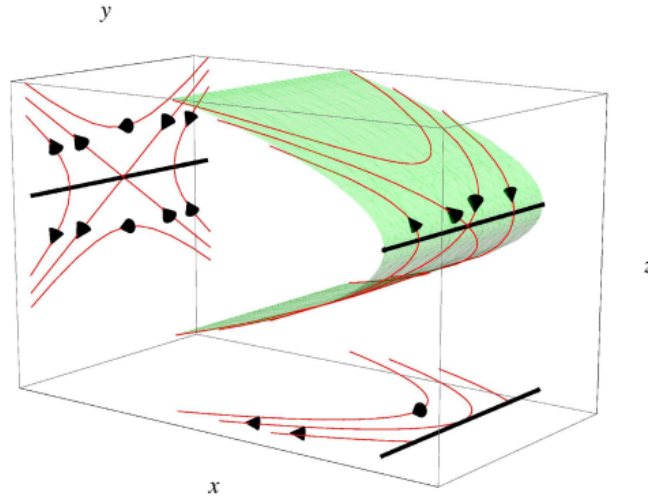


Figura 5.3: Sela dobrada. Figura retirada de [8].

Ponto de Cúspide

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de dobra satisfazendo (A), (B) e (D) que falha em (C), então, de acordo com [9], a forma normal de sua equação reduzida é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 0 \\ 0 &= \pm(z^3 + yz + x) \end{aligned} \quad (5.16)$$

A escolha do sinal em (5.16) determina a estabilidade das folhas de $g(x, y, z) = 0$ para a dinâmica da folheação rápida, mais especificamente as folhas para as quais $g_z < 0$ são definidas como estáveis e as folhas para as quais $g_z > 0$ são definidas como instáveis. A superfície da cúspide $x = x(y, z)$ é dada pelo gráfico de $z^3 + yz + x = 0$, com x em função das variáveis y e z . Essa equação possui três raízes de x quando $y < 0$ e um único valor de x para $y > 0$. Além disso, no caso de valor triplo, dois dos ramos são estáveis, enquanto o do meio é instável. A forma normal obtida alterando o sinal na última equação de (5.16) corresponde ao ramo médio no caso de valor triplo sendo estável e os ramos inferior e superior instáveis. Esta forma normal não é de interesse para nossos propósitos. A dinâmica de (5.16) está representada na Figura 5.4, na superfície da cúspide e em duas projeções. Observe que (B) é válido, (C) falha e (D) é válido.

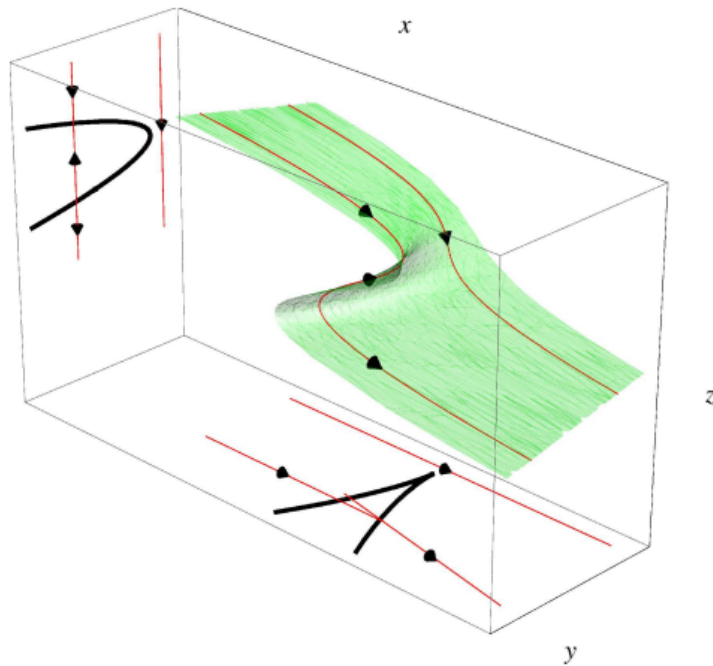


Figura 5.4: Dinâmica de (5.16) com sinal de mais, mostrada no espaço tridimensional x, y, z , bem como em duas projeções diferentes. Figura retirada de [8].

5.1.5 Equilíbrios para (5.6)

Voltamos agora a (5.6) e analisamos os equilíbrios que possui. Resolvendo a equação $z^3 + yz + x = 0$ em x , obtemos $x = -(z^3 + yz)$. Diferenciando em relação a t e substituindo $-1 - y$ por x , obtemos

$$-(3z^2 + y)\dot{z} - \dot{y}z = -1 - y.$$

Substituindo $\dot{y}$, obtemos

$$(3z^2 + y)\dot{z} = (y + 1) + 2(y + z)z.$$

Em combinação com a equação $\dot{y}$, obtemos o sistema reduzido

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2(y + z) \\ (3z^2 + y)\dot{z} &= (y + 1) + 2(y + z)z \end{aligned} \quad (5.17)$$

Finalmente, a regularização produz

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2(y + z)(3z^2 + y) \\ \dot{z} &= (y + 1) + 2(y + z)z \end{aligned} \quad (5.18)$$

A linha de dobra é a parábola $y = -3z^2$. Singularidades dobradas são os equilíbrios de (5.18) na linha de dobra, isto é, pontos que satisfazem o conjunto de equações

$$\begin{aligned} 0 &= y + 3z^2 \\ 0 &= (y + 1) + 2(y + z)z \end{aligned}$$

Eliminando y , obtemos $-6z^3 - z^2 + 1 = 0$. Verifica-se, então, que $z = 1/2$ é a única raiz, com o valor correspondente de $y = -3/4$. Por conta disso, existe uma singularidade dobrada, dada por $p_f = (-3/4, 1/2)$. Linearizando (5.18) em p_f , obtemos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como $\det A < 0$ o ponto p_f é uma sela dobrada. A Figura 5.5 mostra um retrato de fase gerado por um computador de (5.17).

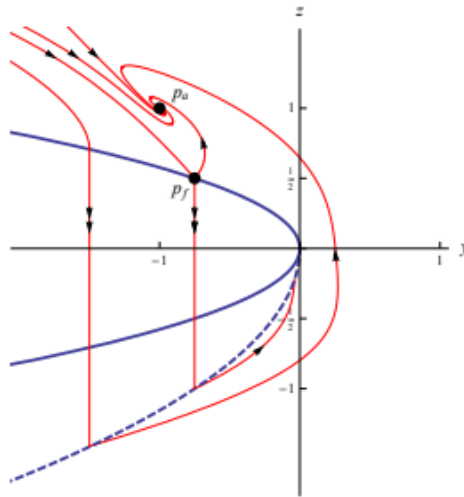


Figura 5.5: Retrato de fase da equação reduzida (5.17). Figura retirada de [8].

5.1.6 Retorno global singular para a equação de Zeeman (5.6)

A linha de dobra completa F da equação (5.6) pode ser parametrizada da seguinte forma

$$F = \{(x, y, z) = (2\sigma^3, -3\sigma^2, \sigma); \sigma \in \mathbb{R}\}. \quad (5.19)$$

O ramo superior, denotado por F_+ , corresponde a valores positivos de z , e o ramo inferior, F_- , corresponde a valores negativos de z . Nesta subseção, nos atemos para a projeção de F_+ em F_- .

A projeção de F_+ em S_0 é obtida de (5.19) como curva única na folha inferior, F_- , de S_0 com a propriedade de que as coordenadas x e y permaneçam inalteradas. Esta curva tem a seguinte representação paramétrica

$$PF_+ = \{(x, y, z) = (2\sigma^3, -3\sigma^2, -2\sigma); \sigma > 0\}. \quad (5.20)$$

As coordenadas y e z em PF_+ satisfazem a equação $y = -\frac{3}{4}z^2$.

O retorno singular é determinado pelas trajetórias de (5.18) começando em PF_+ . A Figura 5.5 mostra algumas dessas trajetórias, e a curva tracejada representa PF_+ . Algumas das trajetórias atingem a linha de dobra F e não podem mais permanecer na superfície restrita. Outras trajetórias passam à direita da cúspide, fazendo um retorno suave. Muito importante é a trajetória direita da projeção de p_f , que denotamos por q_f . Observe que $q_f = (-\frac{3}{4}, -1)$. Na sequência caracterizaremos a dinâmica de (5.18). Em particular, mostraremos que a trajetória de q_f passa pelo ramo inferior da linha de dobra F_- (ver Figura 5.5) e, portanto, não corresponde a um retorno suave.

Seja S_0 a variedade crítica para (5.5), e seja

$$S_0^a = \{(x, y, z) \in S_0; \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) < 0\}.$$

Além disso, seja $S_{0-}^a = S_0^a \cap \{(x, y, z); z < 0\}$ (respec. $S_{0+}^a = S_0^a \cap \{(x, y, z); z \geq 0\}$). A variedade S_0^a é mostrada na Figura 5.6.

Teorema 5.2. *Existem conjuntos V_{01} , V_{02} e V_{03} contidos em S_{0+}^a com as seguintes propriedades:*

- (i) *Todas as trajetórias de (5.17) começando em V_{01} permanecem em V_{01} e são atraídas para o equilíbrio estável p_a .*
- (ii) *Todas as trajetórias de (5.17) começando em V_{02} chegam a F_+ , saltam para PF_+ seguem para F_- e saltam para V_{01} .*
- (iii) *Todas as trajetórias de (5.17) começando em V_{03} chegam a F_+ , saltam para PF_+ e seguem para V_{01} .*

O Teorema 5.2 é uma consequência da seguinte proposição.

Proposição 5.3. *Existe um ponto $q_* = (y_*, z_*) \in PF_+$, com $z_* < -1$ cuja trajetória direta em (5.18) passa por 0. Se $q \in \{(y, z) \in PF_+; z \leq -1\}$ e $q \neq q_*$, então um dos seguintes casos é válido:*

- $z_* < z < -1$, então a trajetória com ponto inicial q sob o fluxo de (5.18) passa por F_- .

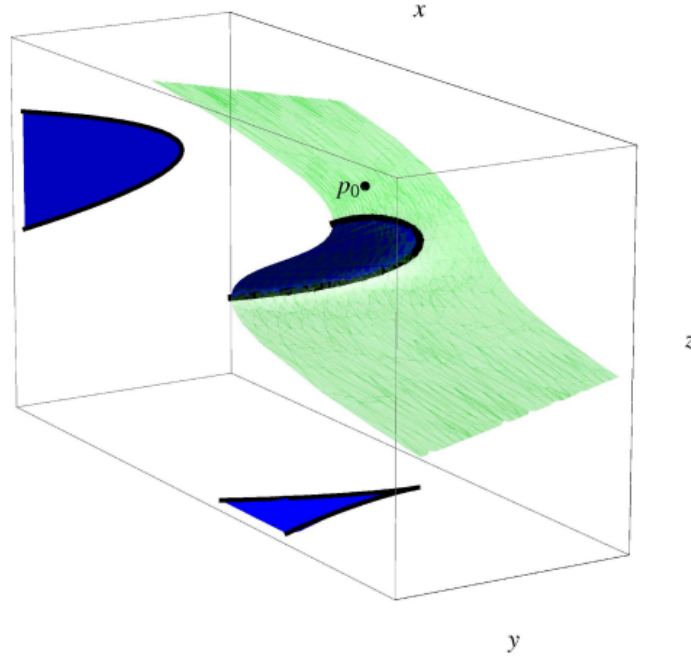


Figura 5.6: A variedade S_0^a . Figura retirada de [8].

- $z < z_*$, então a trajetória com ponto inicial q em (5.18) passa à direita da origem e entra no segundo quadrante através do eixo z positivo.

Para a prova da Proposição 5.3 nos basearemos no seguinte fato.

Lema 5.4. A função

$$G(z) = -\frac{27}{4}z^4(1 - \frac{3}{4}z) - \frac{3}{2}z^3 + \frac{5}{4}z^2 + 1$$

é negativa para $z < -1$.

Demonstração. Primeiro, observe que $G(-1) = -\frac{129}{16} < 0$. Agora, como

$$G'(z) = \frac{405}{16}z^4 - \frac{z}{2}(54z^2 + 9z - 5).$$

Nesta expressão, o primeiro termo é positivo para todo $z < -1$. Além disso, o termo entre parenteses é positivo para todo $z < -1$, porque ambas as raízes desta expressão quadrática estão à direita de -1 . Portanto, $G'(z) > 0$ para todo $z < -1$, logo o lema vale. O gráfico de G é mostrado na Figura 5.8. ■

Demonstração da Proposição 5.3. A equação (5.18) restrita a PF_+ , ou seja, em um ponto $(-\frac{3}{4}z^2, z)$, é dada por

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{9}{2}z^3(1 - \frac{3}{4}z) \\ \dot{z} &= -\frac{3}{2}z^3 + \frac{5}{4}z^2 + 1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Um vetor normal para PF_+ em um ponto $(-\frac{3}{4}z^2, z)$ é $(1, \frac{3}{2}z)$. Calculando o produto interno de $(1, \frac{3}{2}z)$ com o campo vetorial (5.21), encontramos a função $G(z)$ introduzida no enunciado do Lema 5.4. Pelo Lema 5.4 $G(z) < 0$ para $z < -1$. Segue-se que todas as trajetórias começando nos pontos $q = (y, z) \in PF_+$ devem entrar na região delimitada

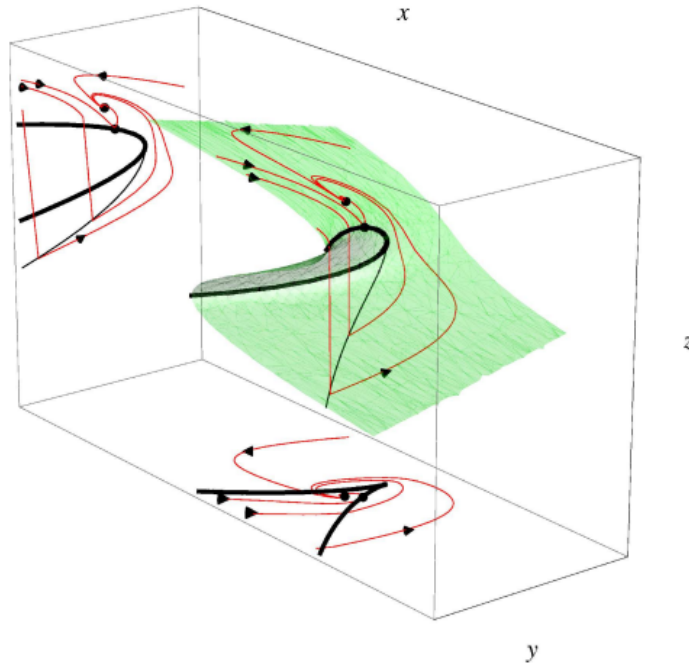


Figura 5.7: Retrato de fase da equação restrita (5.6) na conjunto de empasse e em duas projeções. Figura retirada de [8].

por $\{(y, z) \in PF_+; z \leq -1\}$, o segmento da trajetória de q_f ao eixo y (ver Figura 5.5) e o eixo y . Considere a trajetória começando em $\{(y, z) \in PF_+; z \leq 1\}$. Nosso objetivo é provar que essa trajetória atinge o eixo y . Observe que $\dot{y} > 0$ desde que $y + z < 0$, de modo que y inicialmente continue aumentando, eventualmente passando pela reta $y + 1 = 0$. Então, ou z também deve aumentar até o eixo y ou a linha $y + z = 0$ é alcançada. Depois que a trajetória cruzou a linha $y + z = 0$, a coordenada y deve estar diminuindo, mas $y + z$ deve permanecer positiva enquanto z for negativo. Segue-se que eventualmente a trajetória deve atingir o eixo y . O resultado segue pela monotonicidade do fluxo. ■

5.2 Análise do sistema rápido-lento

5.2.1 Dobras e selas dobradas para $\varepsilon > 0$

Dobras simples

Neste texto precisaremos da dinâmica para dobras com uma variável rápida e outra lenta (para o modelo de batimento cardíaco) e para dobras com uma variável rápida e duas lentas (para o modelo de impulso nervoso). Começamos enunciando o resultado para o caso de uma variável lenta e depois introduzimos o teorema para duas variáveis lentas como sua generalização. Considere a equação

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= g(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon' &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (5.22)$$

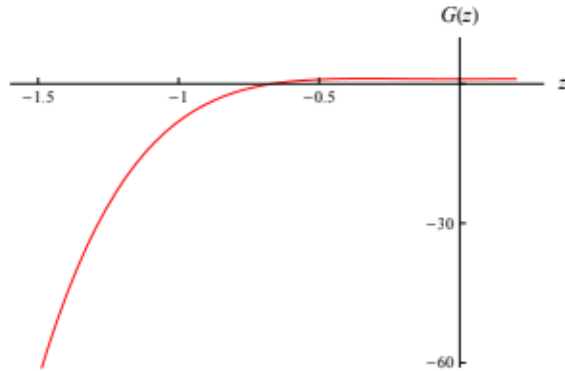


Figura 5.8: Gráfico do produto interno $G(z)$ em função de z . Figura retirada de [8].

e suponha que

$$g(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 0) = 0. \quad (5.23)$$

Além disso, fazemos suposições de regularidade

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 0) \neq 0, \quad f(0, 0, 0) \neq 0. \quad (5.24)$$

Em particular, assumimos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0, 0) > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 0) > 0, \quad f(0, 0, 0) < 0.$$

Estas hipóteses podem ser feitas sem perda de generalidade, e a última determina que a direção do fluxo é em direção à dobra (o ponto de dobra é um ponto de salto). As informações acima estão resumidas na Figura 5.9.

Definimos as seguintes seções do fluxo

$$\Sigma^{[in]} = \{(\rho^2, y); y \in \mathbb{R}\} \text{ e } \Sigma^{[out]} = \{(x, \rho); x \in \mathbb{R}\}.$$

Considere também a aplicação de transição para o fluxo de (5.22) $\Pi : \Sigma^{[in]} \rightarrow \Sigma^{[out]}$.

Teorema 5.5 (dobra simples com uma variedade lenta). [10] *Sob as hipóteses feitas nesta seção, existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma vizinhança U de $(0, 0)$ tal que as seguintes afirmações são válidas para $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$*

- (i) *A variedade S_a^ε passa por $\Sigma^{[out]}$ em um ponto $(h(\varepsilon), p)$, onde $h(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$.*
- (ii) *A aplicação de transição $\Pi : \Sigma^{[in]} \cap U \rightarrow \Sigma^{[out]}$ é uma contração com taxa $\mathcal{O}(\varepsilon^{-c/\varepsilon})$, onde c é uma constante positiva.*

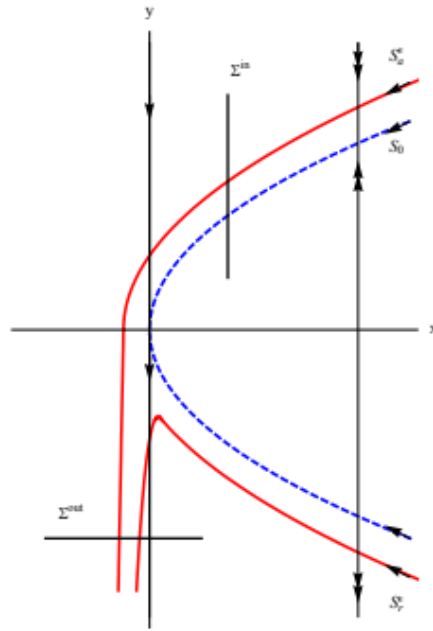


Figura 5.9: Variedade crítica, variedade lenta e seções para uma dobra simples. Figura retirada de [8].

Dobras simples em problemas com duas dimensões lentas

Considere a equação

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon f_1(x, y, z, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon f_2(x, y, z, \varepsilon) \\ z' &= g(x, y, z, \varepsilon) \end{aligned} \quad x, y, z \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5.25)$$

Seja S_0 a variedade crítica e defina a linha de dobra

$$F = \{(x, y, z) \in S_0; \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z, 0) \neq 0\}.$$

Suponha que $(0, 0, 0) \in F$ e as condições (B) e (C) sejam satisfeitas. Além disso, assumimos, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(0, 0, 0, 0) > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 0, 0) > 0.$$

Definimos as seções do fluxo de forma análoga ao caso de uma dobra simples. Ou seja, definimos

$$\Sigma^{[in]} = \{(x, y, z); (x, y, z) = (\rho^2, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

e

$$\Sigma^{[out]} = \{(x, y, z); (x, y, z) = (x, y, \rho), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Teorema 5.6 (dobras simples em problemas com duas dimensões lentas). [11] *Sob as hipóteses feitas nesta seção, existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma vizinhança U de $(0, 0, 0)$ tal que as seguintes afirmações valem para $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$.*

(i) A aplicação de transição $\Pi : \Sigma^{[in]} \cap U \rightarrow \Sigma^{[out]}$ induzida pelo fluxo de (5.25) é um difeomorfismo que leva uma vizinhança de $S_0 \cap U$ para $\Sigma^{[ex]}$. Qualquer trajetória começando em $S_{a,\varepsilon} \cap \Sigma^{[in]}$ passa por um ponto cuja distância ao conjunto $\{(x, y, z + \rho); (x, y, z) \in F \cap U\}$ é $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$.

(ii) A aplicação Π se contrai exponencialmente na direção z . Mais precisamente

$$\left\| \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right\| = \mathcal{O}(e^{-c/\varepsilon}),$$

onde c é uma constante positiva.

(iii) A contração/expansão de Π na direção da dobra é uniformemente limitada, ou seja, se v é o vetor tangente à dobra em algum ponto $(x, y, z) \in F \cap U$, então, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K} \leq |\nabla \Pi(x, y, z) \cdot v| \leq K.$$

Aqui $\nabla \Pi(x, y, z) \cdot v$ denota a derivada direcional de Π em (x, y, z) na direção de v .

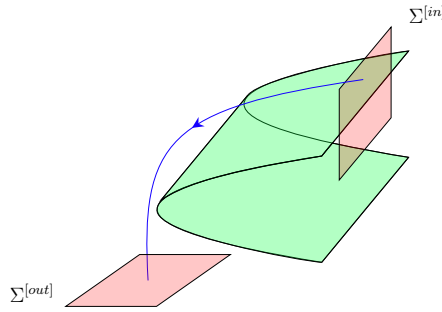


Figura 5.10: Linha de dobra simples .

Selas dobradas

Usamos a notação e a definição das seções do fluxo como anteriormente com uma diferença, assumimos aqui que (B) não é satisfeito, ou seja, assumimos que

$$f(0, 0, 0, 0) \cdot \nabla g(0, 0, 0, 0) = 0. \quad (5.26)$$

A condição definidora para uma sela dobrada é expressa usando a equação regularizada (5.13) obtida na subseção 5.1.3. Observe que a condição (5.26) implica que $(0, 0)$ é um equilíbrio de (5.13). Então, $(0, 0, 0, 0)$ é uma sela dobrada e $(0, 0)$ é um equilíbrio do tipo sela de (5.13). Além disso, uma condição de regularidade é necessária sobre a função

$$F(x, y, z, \varepsilon) = f(x, y, z, \varepsilon) \cdot \nabla g(x, y, z, \varepsilon),$$

a saber, se v é um vetor tangente à linha de dobra F em $(0, 0, 0, 0)$, então

$$\nabla F(0, 0, 0, 0) \cdot v \neq 0. \quad (5.27)$$

Nota-se que, para ρ suficientemente pequeno, $\Sigma^{[in]}$ é agora naturalmente dividido nas duas seguintes regiões

$$\Sigma_+^{[in]} = \{(x, y, z) \in \Sigma^{[in]}; F(x, y, z, \varepsilon) > 0\} \text{ e } \Sigma_-^{[in]} = \{(x, y, z) \in \Sigma^{[in]}; F(x, y, z, \varepsilon) < 0\}.$$

Então temos o seguinte teorema.

Teorema 5.7 (Sela dobrada). [12] *Sob as suposições feitas nesta seção, existem $\varepsilon_0 > 0$, uma vizinhança U de $(0, 0, 0, 0)$ e abertos U_1 , U_2 e U_3 tais que as seguintes afirmações valem para $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$*

- (i) $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, $U_1 \cap U_3 = \emptyset$, $\Sigma^{[in]} \cap (U_1 \cup U_2) \subset \Sigma_+^{[in]}$ e U_2 é exponencialmente fino, ou seja, existe $c > 0$ tal que para cada $p \in U_2$ o comprimento do segmento de reta $\{q \in U_2; q = p + sv \text{ para algum } s \in \mathbb{R}\}$ é limitado por $e^{-c/\varepsilon}$.
- (ii) A aplicação $\Pi : \Sigma^{[in]} \cap U_1 \rightarrow \Sigma^{[out]}$ introduzida pelo fluxo de (5.25) é um difeomorfismo que leva uma vizinhança de $S_0 \cap U$ em $\Sigma^{[out]}$. Qualquer trajetória começando em $S_{a,\varepsilon} \cap \Sigma^{[in]}$ passa por $\Sigma^{[out]}$ em um ponto cuja distância ao conjunto $\{(x, y, z + \rho); (x, y, z) \in F \cap U\}$ é $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$.
- (iii) A aplicação Π se contrai exponencialmente na direção z . Mais precisamente,

$$\left\| \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right\| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\tilde{c}/\varepsilon}),$$

onde $\tilde{c}$ é uma constante positiva.

- (iv) A contração/expansão de Π na direção da dobra é algébrica em ε , ou seja, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que, se v é o vetor tangente num ponto de dobra em $(x, y, z) \in F \cap U$, então

$$\varepsilon^\alpha \leq |\nabla \Pi(x, y, z) \cdot v| \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha}.$$

- (v) Trajetórias começando em U_2 giram antes de chegar a $\Sigma^{[out]}$ e retornam para $S_{a,\varepsilon}$.

Os conjuntos U_1 , U_2 e U_3 são mostrados na Figura 5.11.

Neste texto, esboçamos a prova do resultado. Seja S_0 a variedade crítica para (5.25), e sejam

$$S_0^a = \{(x, y, z) \in S_0; \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z, 0) < 0\} \text{ e } S_0^r = \{(x, y, z) \in S_0; \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z, 0) > 0\}.$$

Removendo uma pequena vizinhança da dobra, construímos variedades lentas normalmente hiperbólicas (Fenichel) S_ε^a e S_ε^r . Em [12] P. Szmolyan e M. Wechselberger provam que para uma escolha fixa das variedades de Fenichel S_ε^a e S_ε^r existe uma *solução canard* única, ou seja, uma solução conectando $S_{a,\varepsilon}$ e $S_{r,\varepsilon}$. A solução de canard divide S_ε^a em regiões com dois tipos de dinâmicas, as soluções de um lado passam por $\Sigma^{[out]}$ e continuam na direção rápida e do outro lado as soluções retornam para S_ε^a . Essas regiões correspondem a U_1 e U_3 . No meio há uma região exponencialmente fina centrada na solução canard que consiste em trajetórias que seguem S_ε^a de maneira semelhante ao fenômeno canard clássico (explosão canard). Esta região corresponde a U_2 . Notamos que o fluxo na direção da linha de dobra é mais complicado devido à estrutura em sela, que é responsável pela versão mais fraca da afirmação (iii) em comparação ao Teorema 5.6.

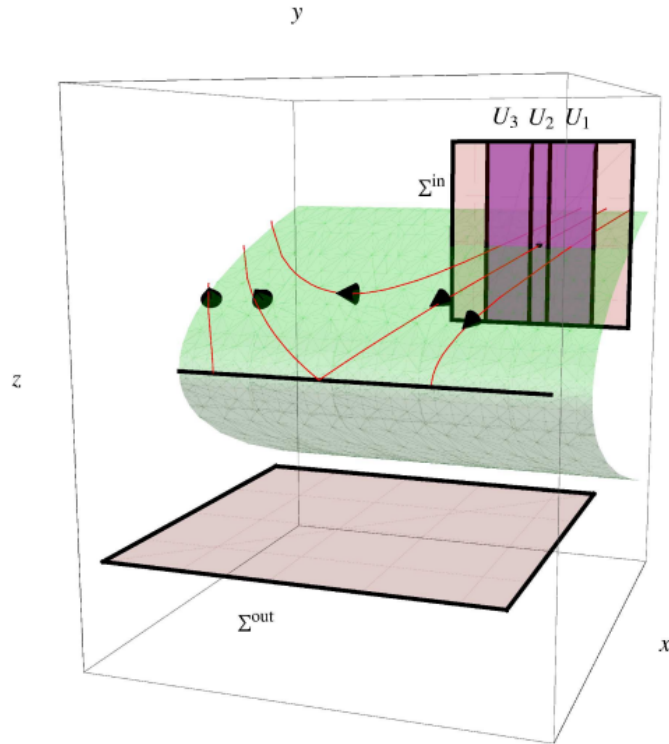


Figura 5.11: Dinâmica na carta K_{ex} . Figura retirada de [8].

5.2.2 Cúspides singularmente perturbadas - definição e enunciado do teorema principal

Conforme mencionado, o principal conteúdo técnico deste texto é o estudo da passagem lenta pela cúspide para $0 < \varepsilon \ll 1$ por meio da teoria geométrica da perturbação singular. Em vez de considerar a forma normal de Fenichel para este estudo, consideramos um sistema geral para a singularidade do tipo cúspide e estudamos sua dinâmica. Consideramos sistemas da formulação rápida e adicionamos a equação $\varepsilon' = 0$ (isto é padrão na teoria geométrica de perturbação singular)

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon f_1(x, y, z, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon f_2(x, y, z, \varepsilon) \\ z' &= g(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon' &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

satisfazendo as condições (5.8), a condição (B), a condição $g_{zz}(x_0, y_0, z_0) = 0$, que é uma violação de (C), e a condição (D). Assumimos, sem perda de generalidade, que $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. As condições de regularidade são, então, dadas por

$$\begin{aligned} g(0, 0, 0, 0) &= 0 \\ g_z(0, 0, 0, 0) &= 0 \quad , \\ g_{zz}(0, 0, 0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

e as condições

$$\begin{aligned} g_{zzz}(0, 0, 0, 0) &\neq 0 \\ (g_x(0, 0, 0, 0), g_y(0, 0, 0, 0)) \cdot f(0, 0, 0, 0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Provamos o seguinte resultado.

Proposição 5.8. *Suponha (5.29) e (5.30). Então, em uma vizinhança suficientemente grande da origem, (5.28) pode ser transformada em novas variáveis nas quais $f_1(0, 0, 0, 0) \neq 0$, $f_2(0, 0, 0, 0) = 0$ e*

$$g(x, y, z, \varepsilon) = -x + a_1(x, y, \varepsilon)z + a_2(x, y, \varepsilon)z^3 + \mathcal{O}(z^4). \quad (5.31)$$

Demonstração. Primeiro, modificamos a variável z eliminando o termo z^2 em g . A seguir, notamos que (5.30) implica que $(g_x(0, 0, 0, 0), g_y(0, 0, 0, 0)) \neq (0, 0)$. Para fixar as ideias, assumimos que $g_x(0, 0, 0, 0) \neq 0$. Substituindo x por uma nova variável

$$w = -g(x, y, 0, \varepsilon).$$

Após essas transformações, (5.28) torna-se

$$\begin{aligned} w' &= -\varepsilon(g_x(w, y, 0, \varepsilon), g_y(w, y, 0, \varepsilon)) \cdot f(w, y, z, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon f_2(w, y, z, \varepsilon) \\ z' &= g(w, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon' &= 0 \end{aligned}, \quad (5.32)$$

com g tendo a forma (5.31). Concluimos a prova fazendo

$$y \rightarrow y + \frac{f_2(0,0,0,0)}{(g_x(0,0,0,0), g_y(0,0,0,0)) \cdot f(0,0,0,0)} w.$$

O sistema transformado (5.32) possui agora as propriedades desejadas. ■

Uma condição adicional de regularidade é necessária em relação a (5.28) para nossa análise posterior, assumimos que

$$a_{1,y}(0, 0, 0) \neq 0. \quad (5.33)$$

Além disso, assumimos também

$$a_2(0, 0, 0) < 0, (g_x(0, 0, 0, 0), g_y(0, 0, 0, 0)) \cdot f(0, 0, 0, 0) < 0. \quad (5.34)$$

Essas hipóteses definem um dos casos genéricos, que é o que ocorre para a equação do impulso nervoso. Além disso, sem perda de generalidade, assumimos $a_{1,y}(0, 0, 0) < 0$ (caso contrário, fazemos $y \rightarrow -y$). Escalonando as variáveis, fazemos $f_1 = (0, 0, 0, 0) = 1$, $a_{1,y}(0, 0, 0) = -1$ e $g_{zzz}(0, 0, 0, 0) = -1$.

Observe que, após todas as transformações e hipóteses, (5.28) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon(1 + \mathcal{O}(x, y, z, \varepsilon)) \\ y' &= \varepsilon \mathcal{O}(x, y, z, \varepsilon) \\ z' &= -(z^3 + yz + x) + \mathcal{O}(\varepsilon, xz, z^4) \end{aligned}. \quad (5.35)$$

Esta é a forma do sistema com a qual trabalharemos no restante desta seção, e notamos que, na ordem principal, (5.35) é igual à versão rápida de (5.16).

Estamos interessados em descrever a transição entre as seções

$$\Sigma^{[in]} = \{(x, y, z); x = -x_0, z > 0\} \text{ e } \Sigma^{[out]} = \{(x, y, z); x = x_0\},$$

onde $x_0 > 0$ é uma constante pequena. Como queremos estudar a passagem próxima ao ponto de cúspide, consideramos apenas as condições iniciais que, antes da chegada a $\Sigma^{[in]}$, foram atraídas pela variedade lenta $S_{a,\varepsilon}$. Isso justifica a condição $z > 0$ na definição de $\Sigma^{[in]}$. As seções de interesse são mostradas na Figura 5.12 (ver também Figura 5.4). Observe que pelo Teorema de Fenichel (capítulo 4) existem variedades lentas S_ε^- e S_ε^+ obtidas como pequenas perturbações dos conjuntos

$$\{(x, y, z) \in S_0; x \leq -x_0 < 0\} \text{ e } \{(x, y, z) \in S_0; x \geq -x_0 > 0\}$$

respectivamente, com x_0 uma constante arbitrária.

O seguinte teorema é o resultado principal desse capítulo.

Teorema 5.9 (Cúspide). *Sob as hipóteses desta seção, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, as seguintes afirmações são válidas.*

- (i) *A aplicação $\Pi : \Sigma^{[in]} \rightarrow \Sigma^{[out]}$ introduzida pelo fluxo de (5.35) é um difeomorfismo que leva uma vizinhança retangular de S_0 em $\Sigma^{[out]}$.*
- (ii) *A escolha de S_ε^+ pode ser feita de tal forma que $\Pi(\Sigma^{[in]} \cap S_\varepsilon^-) \subset S_\varepsilon^+$.*
- (iii) *A aplicação Π se contrai exponencialmente na direção z e a derivada na direção y é limitada acima e abaixo. Mais precisamente,*

$$\left| \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right| = \mathcal{O}(e^{-c/\varepsilon})$$

para alguma constante positiva c , e existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K} \leq \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right| \leq K.$$

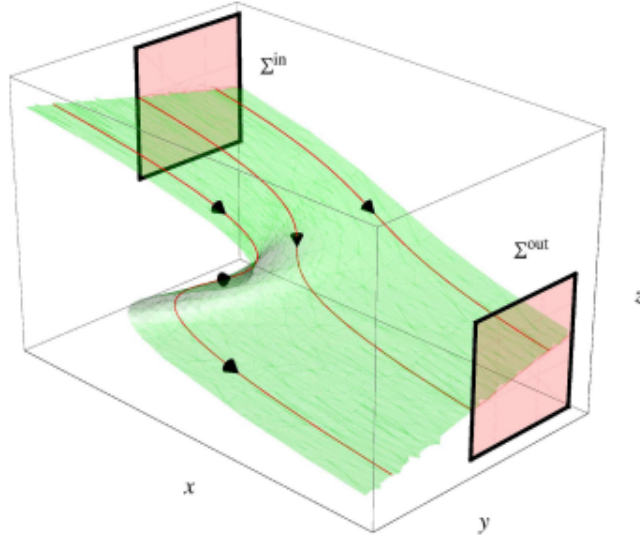


Figura 5.12: The extremal sections $\Sigma^{[in]}$ and $\Sigma^{[out]}$. Figura retirada de [8].

A prova do Teorema 5.9 será dada na subseção 5.3.5.

5.3 Regularização geométrica de cúspide singularmente perturbada

Observe que $(x, y, z, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0)$ é um equilíbrio degenerado com zero como auto valor triplo de (5.35). Na vizinhança deste equilíbrio, a distinção entre variáveis rápidas e

lentas é perdida, e a análise é ainda mais complicada pelo fato de que as duas linhas de dobra da superfície da cúspide, que já não são normalmente hiperbólicas, se encontram num ponto de cúspide. No entanto, a dinâmica do sistema pode ser analisada utilizando o método blowup (cap.7 de [13]). Aqui, a origem é ampliada em uma hiper-esfera e os equilíbrios induzidos são hiperbólicos ou semi-hiperbólicos. Como resultado, a teoria padrão da variedade invariante pode ser usada para analisar a dinâmica do campo vetorial transformado.

Seja $\Phi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definido por

$$x = r^3 \bar{x}, \quad y = r^2 \bar{y}, \quad z = r \bar{z}, \quad \varepsilon = r^5 \bar{\varepsilon}. \quad (5.36)$$

Seja $S^3 = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\varepsilon}); \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{\varepsilon}^2 = 1\}$, e seja ρ_0 determinado pela relação $\varepsilon_0 = \rho_0^5$. Então, defina $B = S^3 \times [0, \rho_0]$. A transformação de blowup (5.36) é a restrição de Φ à B . Seja X o campo vetorial original (5.28) e $\tilde{X}$ tal que $\Phi_* \tilde{X} = X$, onde Φ_* é induzido por Φ . O campo vetorial $\tilde{X}$ é (suavemente) conjugado a X em $S^3 \times (0, \varepsilon_0]$ e é nulo em $S^3 \times \{0\}$. A essência do método blow-up é redimensionar $\tilde{X}$ de tal forma que o limite da versão redimensionada de $\tilde{X}$ em $S^3 \times \{0\}$ não é trivial e contém informações vitais sobre o fluxo de X . Na verdade, para destacar diferentes características do fluxo, utilizam-se diferentes escalas em diferentes partes de B . Por esta razão, a explosão de X (blow-up de X) as vezes é chamado de campo vetorial local.

Nosso principal objetivo é estudar o blow-up de X em B . Como é comum em geometria diferencial quando se trabalha com esferas, é conveniente empregar cartas, em vez de coordenadas esféricas. Assim, introduzimos os seguintes hiperplanos em $\mathbb{R}^5$, que servirão como cartas de diferentes partes de B

$$\begin{aligned} K_{en} &: \{\bar{x} = -1\} \\ K &: \{\bar{\varepsilon} = 1\} \\ K_- &: \{\bar{y} = -1\} \\ K_+ &: \{\bar{y} = 1\} \\ K_{ex} &: \{\bar{x} = 1\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

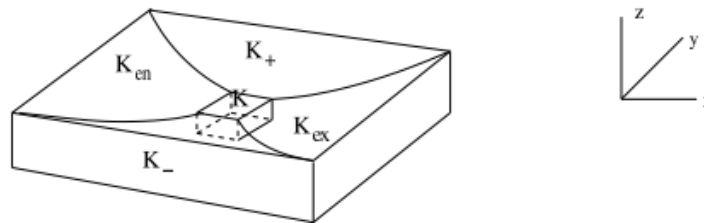


Figura 5.13: Os domínios das cartas K_{en} , K , K_- , K_+ e K_{ex} nas variáveis originais. Figura retirada de [8].

Nessas cartas, estudamos trajetórias à medida que elas entram em uma vizinhança da origem, passam por ela e saem dela. Portanto, nos referimos a eles como carta de entrada, reescalonamento e saída. Na Figura 5.13 mostramos o domínio das cartas K_{en} , K , K_- , K_+ e K_{ex} nas variáveis originais. A união desses domínios é uma vizinhança do ponto de cúspide, que é uniforme (independente de ε) nas direções x e y , mas na direção z diminui para $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ próximo à cúspide. Todas as trajetórias que são atraídas para o ramo esquerdo da variedade lenta para ε e y suficientemente pequeno (com o limite em y

independente de ε) devem passar por esta vizinhança, entrando pelo domínio da carta de entrada e saindo pelo domínio da carta de saída.

Definiremos uma série de seções do fluxo nas cartas, o primeiro sendo o equivalente a $\Sigma^{[in]}$ em K_{en} . Todas as seções definidas posteriormente são determinadas pelo fluxo nas cartas. Primeiro, definimos uma seção “externa” em K_{en} , que fornece uma seção “interna” em K . Em seguida, definimos uma seção “externa” em K , etc...

Começamos na subseção 5.3.1 onde estudamos a passagem de trajetórias pela carta K_{en} , que em termos do campo vetorial original corresponde a entrar em uma pequena vizinhança fixa do ponto de cúspide e continuar até $x = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$, $y = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ e $z = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Em seguida, nas subseções 5.3.2 e 5.3.3, estudamos a dinâmica na carta K , que corresponde à dinâmica em uma vizinhança de tamanho $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) \times \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \times \mathcal{O}(\varepsilon)$ para (5.35), o limite distinto da dinâmica próximo ao ponto de cúspide é identificado aqui. Finalmente, na subseção 5.3.4, analisamos a dinâmica do sistema na carta de saída K_{ex} , que corresponde a passar de $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) \times \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \times \mathcal{O}(\varepsilon)$ para uma distância uniformemente limitada da origem (para as variáveis (x, y, z)), e na subseção 5.3.5 provamos o teorema 5.9.

Observação 5.1. As escalas em (5.36) foram encontradas exigindo que todos os termos no campo vetorial transformado envolvesse a mesma potência de r .

5.3.1 Dinâmica na carta de entrada K_{en}

Nesta seção analisamos a dinâmica de (5.35) na carta de entrada K_{en} , utilizando o índice 1 nas variáveis (descartando as barras superiores) para indicar que a análise é para esta carta. Essa convenção na notação estende-se às variáveis das outras cartas, como é habitual.

Lembre-se da definição da carta K_{en} dada por (5.37). Segue-se que os reescalamentos (5.36) tornam-se

$$x = -r_1^3, y = r_1^2 y_1, z = r_1 z_1, \varepsilon = r_1^5 \varepsilon_1. \quad (5.38)$$

Transformamos (5.35) nas variáveis (5.38) e aplicamos um reescalamento temporal, cancelando um fator de r_1^2 . O sistema resultante é

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= -\frac{1}{3} \varepsilon_1 r_1 (1 + \mathcal{O}(r_1)) \\ \dot{y}_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon_1 y_1 + \mathcal{O}(r_1 \varepsilon_1) \\ \dot{z}_1 &= -(z_1^3 + y_1 z_1 - 1 - \frac{1}{3} \varepsilon_1 z_1) + \mathcal{O}(r_1) \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{5}{3} \varepsilon_1^2 (1 + \mathcal{O}(r_1)) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Notamos que, embora a variável tempo tenha sido redimensionada, por conveniência preservamos a notação da derivada com relação à t .

Agora definimos as seguintes seções do fluxo

$$\Sigma_{en}^{[in]} \equiv \{(r_1, y_1, z_1, \varepsilon_1); r_1 = \rho, z_1 > 0\} \quad (5.40)$$

e

$$\Sigma_{en}^{[out]} \equiv \{(r_1, y_1, z_1, \varepsilon_1); \varepsilon_1 = \delta\}, \quad (5.41)$$

onde $\rho = \sqrt[3]{x_0}$ e δ são constantes suficientemente pequenas. Notamos que $\Sigma_{en}^{[in]}$ é equivalente a $\Sigma^{[in]}$. Na Figura 5.14, mostramos as seções $\Sigma_{en}^{[in]}$ e $\Sigma_{en}^{[out]}$, suprimindo a variável z_1 .

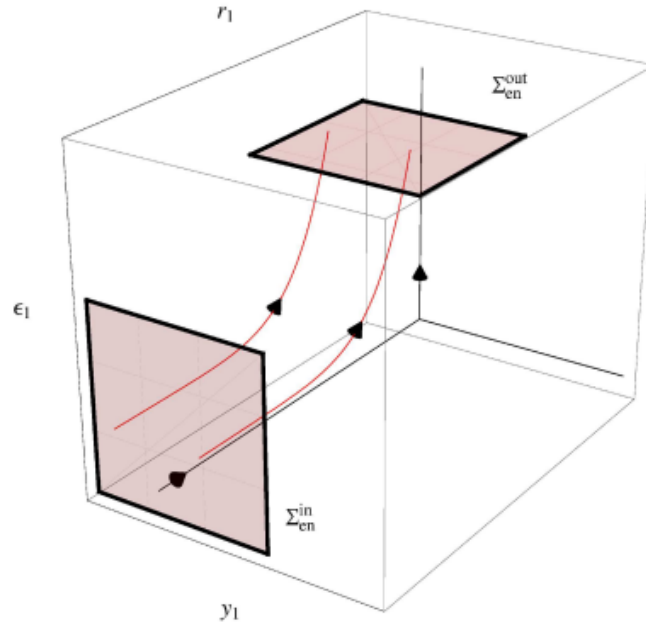


Figura 5.14: As seções $\Sigma_{en}^{[in]}$ e $\Sigma_{en}^{[out]}$, com z_1 suprimido. Figura retirada de [8].

O objetivo da análise nesta seção é descrever a transição de $\Sigma_{en}^{[in]}$ para $\Sigma_{en}^{[out]}$. O sistema (5.39) possui diversas propriedades. Os hiperplanos $\{r_1 = 0\}$ e $\{\varepsilon_1 = 0\}$ são invariantes. Consequentemente, o espaço 2-dimensional $\{r_1 = \varepsilon_1 = 0\}$ é também invariante. A dinâmica neste espaço organiza a dinâmica de todo o sistema. Restrito ao espaço $\{r_1 = \varepsilon_1 = 0\}$, o sistema (5.39) torna-se o seguinte sistema planar com fluxo horizontal

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{z}_1 &= -(z_1^3 + y_1 z_1 - 1) \end{aligned} \quad (5.42)$$

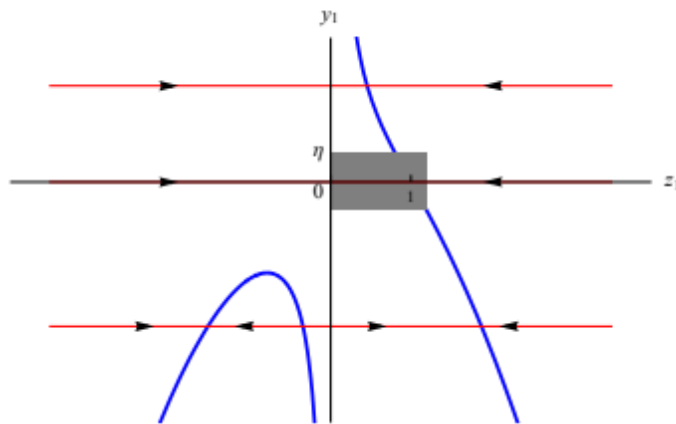


Figura 5.15: Dinâmica na carta K_{en} . Figura retirada de [8].

Agora podemos entender a dinâmica de (5.39) com base no retrato de fase do fluxo horizontal de (5.42). Notamos que existem duas curvas de equilíbrio (mostradas em azul)

determinadas pela equação $z_1^3 + y_1 z_1 - 1 = 0$. Além disso, o fluxo nas linhas horizontais invariantes é como mostrado na Figura 5.15. A dinâmica de (5.39) depende do sinal de y_1 , veja a segunda equação de (5.39) e a Figura 5.15. A medida que ε_1 aumenta ao longo das trajetórias, cada trajetória começando em $\Sigma_{en}^{[in]}$ finalmente chega a $\Sigma_{en}^{[out]}$. Podemos obter que, se y_0 é o valor de y em $\Sigma_{en}^{[in]}$, então, $y_1 = (\delta/\varepsilon)^{2/5} y_0$ em $\Sigma_{en}^{[out]}$. De fato, na ordem principal, obtemos que

$$\frac{dy_1}{d\varepsilon_1} = \frac{dy_1}{dt} \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} \right)^{-1} = \frac{2}{5} \frac{y_1}{\varepsilon_1} \Rightarrow y_1 = \varepsilon_1^{2/5} C, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Por outro lado $y_0 = y = \rho^2 y_1$ em $\Sigma_{en}^{[in]}$, daí obtemos que, sendo $\varepsilon = \rho^5 \varepsilon_1$, então

$$\frac{y_0}{\rho^2} = y_1 = \varepsilon_1^{2/5} C \Rightarrow C = \frac{y_0}{\rho^2 \varepsilon_1^{2/5}} = \frac{y_0}{\varepsilon^{2/5}} \Rightarrow y_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^{2/5} y_0.$$

Decorre disso que, se $\varepsilon_1 = \delta$, então, $y_1 = (\delta/\varepsilon)^{2/5} y_0$. Claramente, se y_0 não satisfaz a estimativa $y_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/5})$, então o valor de y_1 em $\Sigma_{en}^{[out]}$ explode. Neste caso, utilizamos diferentes seções de saída, dependendo do sinal de y

$$\Sigma_{\pm}^{[out]} \equiv \{(r_1, y_1, z_1, \varepsilon_1); y_1 = \pm \eta\}, \quad (5.43)$$

onde $\eta > 0$ é um número arbitrário.

5.3.2 Dinâmica na carta de reescalonamento K

Nesta seção, examinamos a dinâmica na carta de reescalonamento K e usamos o índice 2 nas variáveis. Os reescalonamentos (5.36) tornam-se

$$x = r_2^3 x_2, y = r_2^2 y_2, z = r_2 z_2, \varepsilon = r_2^5. \quad (5.44)$$

Transformamos (5.35) usando as variáveis (5.44) e aplicamos um reescalonamento temporal (por um fator de r_2^2). O sistema resultante é

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 1 + \mathcal{O}(r_2) \\ \dot{y}_2 &= \mathcal{O}(r_2^2) \\ \dot{z}_2 &= -(z_2^3 + y_2 z_2 + x_2) + \mathcal{O}(r_2) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Definimos as seguintes seções

$$\Sigma_2^{[in]} \equiv \{(r_2, x_2, z_2, y_2); x_2 = -\tilde{k}, z_2 > 0\} \quad (5.46)$$

e

$$\Sigma_2^{[out]} \equiv \{(r_2, x_2, z_2, y_2); x_2 = \tilde{k}, z_2 < 0\}, \quad (5.47)$$

onde $\tilde{k}$ é um número suficientemente grande. O objetivo desta seção é descrever a transição de $\Sigma_2^{[in]}$ para $\Sigma_2^{[out]}$.

No sistema (5.45), a variável r_2 é constante ao longo das órbitas e y_2 varia muito lentamente. Consequentemente, pode-se entender a dinâmica desenhando o retrato de fase no plano (x_2, z_2) , com r_2 e y_2 tratados como parâmetros, $r_2 \approx 0$. Para cada valor real fixo de y_2 , a linha crítica de z_2 é dada no plano (x_2, z_2) pela curva cúbica

$$x_2 = -y_2 z_2 - z_2^3. \quad (5.48)$$

Para qualquer $y_2 < 0$, a linha crítica cúbica intercecta o eixo z_2 em três pontos distintos, enquanto o faz exatamente uma vez para qualquer $y_2 \geq 0$, com uma tangência vertical no caso de $y_2 = 0$. Na verdade, a união dessas linhas cúbicas críticas (5.48) sobre todo $y_2 \in \mathbb{R}$ é precisamente a fórmula de ordem principal para superfície de cúspide.

Nesta carta, x_2 e z_2 evoluem na mesma escala de tempo. Isto reflete o fato de que z_2 é mais rápido perto do ponto de cúspide e que o limite distinto é aquele em que x_2 e z_2 são igualmente lentos. As trajetórias cruzam a superfície da cúspide com uma tangência horizontal (paralela ao eixo x_2) à medida que se movem da esquerda para a direita. Além disso, a variável z_2 aumenta à esquerda da cúbica associada, enquanto diminui à direita dela. Como resultado, para o conjunto dobrado de superfície da cúspide correspondente a $y_2 < 0$, as órbitas perfuram os ramos superior e inferior de baixo para cima, localmente. A dinâmica no plano (z_2, x_2) é ilustrada para $y_2 > 0$ e $y_2 < 0$ na Figura 5.16. Concluímos que todas as trajetórias começando em $\Sigma_2^{[in]}$ chegam em $\Sigma_2^{[out]}$ (teorema do fluxo tubular).

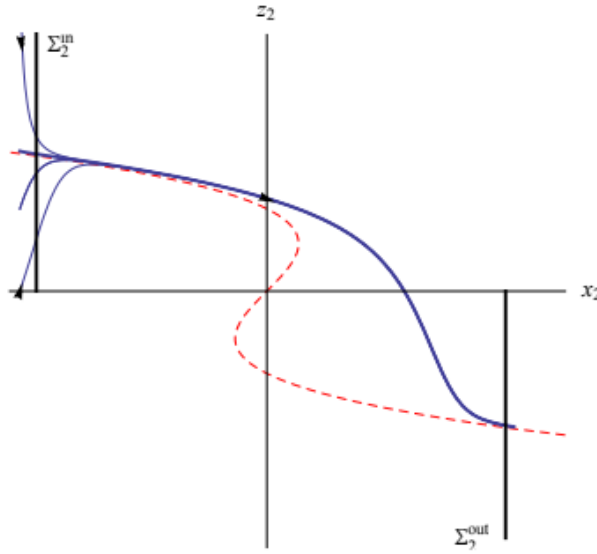


Figura 5.16: Dinâmica na carta K . No quadro superior, $y_2 > 0$, e no quadro inferior $y_2 < 0$. As curvas tracejadas denotam a linha crítica z_2 . Figura retirada de [8].

Finalmente, discutimos a relação entre as seções $\Sigma_{en}^{[out]}$ e $\Sigma_2^{[in]}$. Para descrever a transição entre essas duas seções precisamos da mudança de coordenada κ_{12} de K_{en} para K e seu inverso, $\kappa_{21} = \kappa_{12}^{-1}$. Essas transformações são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_{12} : x_2 &= -\varepsilon_1^{-3/5}, y_2 = y_1 \varepsilon_1^{-2/5}, z_2 = z_1 \varepsilon_1^{-1/5}, r_2 = r_1 \varepsilon_1^{1/5}; \\ \kappa_{21} : y_1 &= y_2 x_2^{-2/3}, z_1 = -z_2 x_2^{-1/3}, \varepsilon_1 = -x_2^{-5/3}, r_1 = -r_2 x_2^{1/3}. \end{aligned}$$

Segue-se então que, se definirmos

$$\Sigma_2^{[in]} = \kappa_{12}(\Sigma_{en}^{[out]}),$$

então $\tilde{k} = \delta^{-3/5}$.

5.3.3 Dinâmica nas cartas de reescalonamento K_- e K_+

Nesta seção examinamos a dinâmica na carta de reescalonamento K_- . Para a dinâmica em K_+ é possível usar uma abordagem semelhante à que usamos para K_- nesta seção.

Usamos o índice 2 nas variáveis (eliminando as barras superiores), como na subseção 5.3.2. Aqui os reescalamentos (5.36) tornam-se

$$x = r_2^3 x_2, y = -r_2^2, z = r_2 z_2, \varepsilon = r_2^5 \varepsilon_2. \quad (5.49)$$

Transformamos (5.35) usando as variáveis (5.49) e aplicamos um reescalamento temporal (por um fator de r_2^2). O sistema resultante é

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \varepsilon_2(1 + \mathcal{O}(r_2)) + \frac{3}{2}r_2 x_2 \varepsilon_2 \mathcal{O}(r_2) \\ \dot{r}_2 &= -\frac{1}{2}r_2^2 \varepsilon_2 \mathcal{O}(r_2) \\ \dot{z}_2 &= -(z_2^3 - z_2 + x_2) + \frac{1}{2}r_2 z_2 \varepsilon_2 \mathcal{O}(r_2) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{5}{2}r_2 \varepsilon_2^2 \mathcal{O}(r_2) \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde a derivada é feita em relação ao tempo reescalado. Observe que $r_2 = 0$ define um espaço invariante no qual a dinâmica é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \varepsilon_2 \\ \dot{z}_2 &= -(z_2^3 - z_2 + x_2) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

Assumimos que $|y| \leq \rho^2$, o que implica $\eta^{1/2}(\varepsilon/\delta)^{1/5} < r_2 < \rho$. Como consequência, derivamos um limitante $0 < \varepsilon_2 < \delta/\eta^{5/2}$ para ε_2 . Como podemos escolher a constante $\delta/\eta^{5/2}$ sendo arbitrariamente pequena, (5.51) pode ser tratado como um problema singularmente perturbado com uma variável lenta x_2 , uma variável rápida z_2 e um parâmetro singular ε_2 . A variedade crítica é em forma de S , e é dado pela equação $x_2 = -z_2^3 + z_2$. A dinâmica da equação reduzida e da equação de camada é mostrada na Figura 5.17. M. Krupa e P. Szmolyan estudaram a dinâmica de (5.51) em [10]. Sejam $\Sigma_2^{[in]}$ e $\Sigma_2^{[out]}$ seções definidas usando as fórmulas (5.46) e (5.47), ver Figura 5.17. As trajetórias começando em $\Sigma_2^{[in]}$ seguem o ramo superior da variedade lenta até chegarem ao ponto de dobra $z_2 = 1/\sqrt{3}$. Posteriormente, elas saltam para o ramo inferior da variedade lenta e avançam ao longo dela até chegarem a $\Sigma_2^{[out]}$. É provar que a dinâmica do sistema completo (5.50) segue de perto a dinâmica de (5.51).

Finalmente, discutimos a relação entre as seções $\Sigma_-^{[out]}$ e $\Sigma_2^{[in]}$. Para descrever a transição entre essas duas seções, precisamos da mudança de κ_{12} de K_{en} para K_- e seu inverso, $\kappa_{21} = \kappa_{12}^{-1}$. Essas transformações são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_{12} : x_2 &= -(-y_1)^{-3/2}, r_2 = (-y_1)^{1/2} r_1, z_2 = z_1(-y_1)^{-1/2}, \varepsilon_2 = \varepsilon_1(-y_1)^{-5/2}; \\ \kappa_{21} : r_1 &= r_2(-x_2)^{1/3}, y_1 = -(-x_2)^{-2/3}, z_1 = z_2(-x_2)^{-1/3}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2(-x_2)^{-5/3}. \end{aligned}$$

Segue-se agora que, se definirmos

$$\Sigma_2^{[in]} = \kappa_{12}(\Sigma_-^{[out]}),$$

então $\tilde{k} = \eta^{-3/2}$.

A análise para a seção K_+ é muito semelhante, com as fórmulas diferindo apenas em alguns sinais. A dinâmica em K_+ é análoga à dinâmica em K com $\bar{y}_2 = 1$.

5.3.4 Dinâmica na carta de saída K_{ex}

Nessa seção, analisamos a dinâmica de (5.35) na carta de saída K_{ex} . Aqui, os reescalamentos (5.36) tornam-se

$$x = r_1^3, y = r_1^2 y_1, z = r_1 z_1, \varepsilon = r_1^5 \varepsilon_1. \quad (5.52)$$

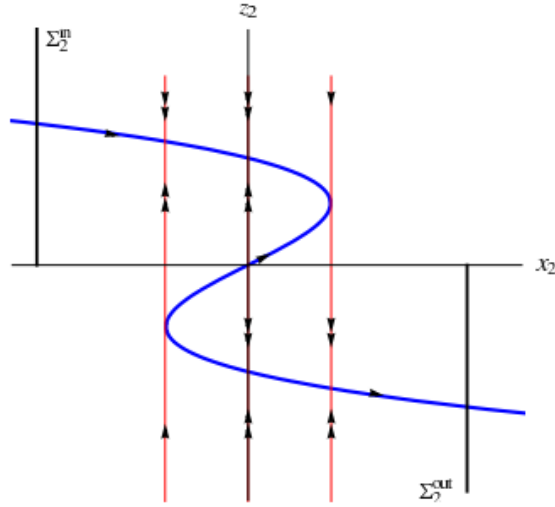


Figura 5.17: Dinâmica lenta-rápida de (5.51). Duas dobras subordinadas a uma cúspide. Figura retirada de [8].

Transformamos (5.35) usando as variáveis (5.52) e aplicamos um reescalonamento temporal, cancelando um fator de r_1^2 . O sistema resultante é

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \frac{1}{3}\varepsilon_1 r_1 (1 + \mathcal{O}(r_1)) \\ \dot{y}_1 &= -\frac{2}{3}\varepsilon_1 y_1 + \mathcal{O}(r_1 \varepsilon_1^2) \\ \dot{z}_1 &= -(z_1^3 + y_1 z_1 + 1 + \frac{1}{3}\varepsilon_1 z_1) + \mathcal{O}(r_1) \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\frac{5}{3}\varepsilon_1^2 (1 + \mathcal{O}(r_1)) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Como antes, t e o ponto superior são mantidos como variável independente e a derivada em relação a esta variável, respectivamente.

Sejam $\tilde{\kappa}_{12}$ e $\tilde{\kappa}_{21}$ transições de cartas entre K e K_{ex} análogo a κ_{12} e κ_{21} . Nesta seção estudamos a transição pelo fluxo entre $\Sigma_{ex}^{[in]} = \tilde{\kappa}_{21}(\Sigma_2^{[out]})$ e

$$\Sigma_{ex}^{[out]} \equiv \{(r_1, y_1, z_1, \varepsilon_1) : r_1 = \rho\}.$$

Observe que (5.52) difere apenas ligeiramente de (5.38), a única diferença é o sinal na frente de r_1 . Da mesma forma, as transformações $\tilde{\kappa}_{12}$ e $\tilde{\kappa}_{21}$ difere muito pouco de κ_{12} e κ_{21} , de fato, $\tilde{\kappa}_{12}$ pode ser obtido de κ_{12} excluindo o sinal “-” antes de $\varepsilon_1^{-3/5}$ e $\tilde{\kappa}_{21}$ pode ser obtido de κ_{21} excluindo o sinal “-” antes dos termos $z_2 x_2^{-1/3}$, $x_2^{-5/3}$ e $r_2 x_2^{1/3}$. É possível verificar que $\Sigma_{ex}^{[in]}$ é alternativamente definido por

$$\Sigma_{ex}^{[in]} \equiv \{(r_1, y_1, z_1, \varepsilon_1); \varepsilon_1 = \delta\}.$$

O sistema (5.53) tem propriedades análogas a (5.39), os hiperplanos $\{r_1 = 0\}$ e $\{\varepsilon_1 = 0\}$ e o espaço 2-dimensional $\{r_1 = \varepsilon_1 = 0\}$ também são invariantes. O sistema (5.53) restrito ao espaço $\{r_1 = \varepsilon_1 = 0\}$ torna-se

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{z}_1 &= -(z_1^3 + y_1 z_1 + 1) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Existem duas curvas de equilíbrio determinadas pela equação $z_1^3 + y_1 z_1 + 1 = 0$. O retrato de fase é o seguinte. Qualquer condição inicial começando em $\Sigma_{ex}^{[in]}$ chega em $\Sigma_{ex}^{[out]}$ e as trajetórias são atraídas para uma variedade de codimensão um próxima ao ramo esquerdo da curva $z_1^3 + y_1 z_1 + 1 = 0$, ver Figura 5.18.

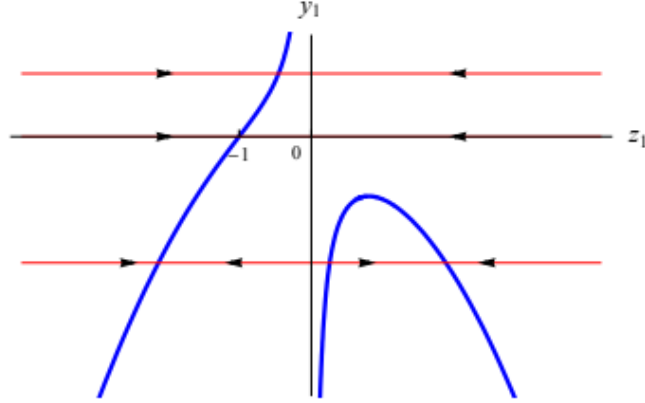


Figura 5.18: Dinâmica na carta K_{ex} . Figura retirada de [8].

5.3.5 Prova do Teorema 5.9

(i) Definimos aplicações de transição para o fluxo nas cartas e escrevemos $\Pi : \Sigma^{[in]} \rightarrow \Sigma^{[out]}$ como uma composição de tais aplicações. A sequência de aplicações de transição necessária depende das condições iniciais. Vamos considerar uma tal escolha com algum detalhe e delinear a prova para os outros casos. Seja $\Pi_{in \rightarrow 2} : \Sigma_{en}^{[in]} \rightarrow \Sigma_2^{[in]}$ a composição do blow-up restrito a $\Sigma^{[in]}$ e a aplicação de transição de $\Sigma_{en}^{[in]}$ para $\Sigma_{en}^{[out]}$ e a transformação da carta κ_{12} . Seja $\Pi_2 : \Sigma_2^{[in]} \rightarrow \Sigma_2^{[out]}$ a aplicação de transição em K . Seja $\Pi_{2 \rightarrow ex} : \Sigma_2^{[out]} \rightarrow \Sigma_{ex}^{[out]}$ a composição da transformação da carta $\tilde{\kappa}_{21}$ com a aplicação de $\Sigma_{ex}^{[in]}$ para $\Sigma_{ex}^{[out]}$ e o “blow down” restrito a $\Sigma_{ex}^{[out]}$. As aplicações intermediárias $\Pi_{in \rightarrow 2}$, Π_2 e $\Pi_{2 \rightarrow ex}$ são suaves. Os argumentos da subseção 5.3.1 implicam que $\Pi = \Pi_{in \rightarrow 2} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{2 \rightarrow ex}$ para condições iniciais que satisfaçam $y_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/5})$. O domínio de $\Pi_{in \rightarrow 2} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{2 \rightarrow ex}$ é um conjunto aberto em $\Sigma^{[in]}$ obtido como uma interseção de uma vizinhança da cúspide com $\Sigma^{[in]}$ e com o conjunto definido pela condição $|y_0| < K\varepsilon^{2/5}$, para $K > 0$ uma constante arbitrária fixa. Combinando as informações nas subseções 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.4 concluímos que $\Pi_{in \rightarrow 2} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{2 \rightarrow ex}$ é um difeomorfismo suave em seu domínio e sua imagem está contida em uma pequena vizinhança da cúspide intersectada com $\Sigma^{[out]}$.

Da mesma forma, definimos aplicações $\Pi_{in \rightarrow +}$, Π_+ , $\Pi_{+ \rightarrow ex}$, $\Pi_{in \rightarrow -}$, Π_- e $\Pi_{- \rightarrow ex}$. Argumentando como no caso de $\Pi_{in \rightarrow 2} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{2 \rightarrow ex}$ concluímos que $\Pi_{in \rightarrow +} \circ \Pi_+ \circ \Pi_{+ \rightarrow ex}$ e $\Pi_{in \rightarrow -} \circ \Pi_- \circ \Pi_{- \rightarrow ex}$ são difeomorfismos suaves em seus domínios e suas imagens estão contidas em uma pequena vizinhança da cúspide com $\Sigma^{[out]}$. Além disso, segue-se da análise nas seções 5.3.1-5.3.4 que os domínios da composição das três aplicações podem ser escolhidos de modo que eles se sobreponham e sua união seja uma interseção de uma vizinhança da cúspide intersectada com $\Sigma^{[in]}$. Assim provamos o item (i).

(ii) A variedade S_ε^+ não é única. Ela pode ser definida exclusivamente especificando seu limitante em $\Sigma^{[out]}$. Este limitante pode ser considerado $\Pi(S_\varepsilon^- \cap \Sigma^{[in]})$.

(iii) Consideramos o caso em que Π é dado por $\Pi_{in \rightarrow 2} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{2 \rightarrow ex}$, os outros casos são feitos de maneira semelhante. Observe que Π_2 é neutro em todas as direções, enquanto que $\Pi_{in \rightarrow 2}$ e $\Pi_{2 \rightarrow ex}$ se contraem esponencialmente na direção z_1 e são neutros na direção

y_1 (ver Figura 5.15 e 5.18). ■

5.4 Fenichel em modelos de Zeeman

5.4.1 Os resultados para o modelo de batimento cardíaco (5.2) com $\varepsilon > 0$

Sejam $S_{a,+} = \{(x, y) \in S_0; y > 1/\sqrt{3}\}$ e $S_{a,-} = \{(x, y) \in S_0; y < -1/\sqrt{3}\}$.

Teorema 5.10. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o sistema (5.2) possui as seguintes propriedades*

- (i) *Existe um equilíbrio único p_a , que eventualmente atrai todas as trajetórias.*
- (ii) *Existe um conjunto aberto V tal que toda trajetória começando em V é atraída por uma variedade lenta perto de $S_{a,-}$, passa perto da dobra $(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e é atraída por uma variedade lenta perto de $S_{a,+}$. A distância do equilíbrio estável até V (o limite) é igual a $\frac{2}{3\sqrt{\varepsilon}} - y_0 + y_0^3 + o(1)$.*

Demonstração. Considere uma trajetória com condição inicial (x, y) satisfazendo $x > \frac{2}{3\sqrt{3}} + \delta$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Então, por um tempo suficientemente pequeno, essa trajetória é atraída por uma variedade lenta de Fenichel S_ε^- , próxima a $S_{a,-}$ e deve entrar em uma vizinhança da dobra. De acordo com o Teorema 5.5, esta trajetória deve sair ao longo da fibra rápida e se mover em direção a uma variedade lenta de Fenichel S_ε^+ , próxima a $S_{a,+}$, que contém o equilíbrio estável. O limite é claramente limitado acima por $\frac{2}{3\sqrt{3}} + \delta - x_0$, onde $x_0 = y_0 - y_0^3$ é a coordenada x de p_a . A trajetória de (x, y) é mostrada na Figura 5.19. ■

5.4.2 Os resultados para o modelo de impulso nervoso (5.5) com $\varepsilon > 0$

Teorema 5.11 (Retorno suave). *Para a equação (5.5) existe uma variedade lenta $S_\varepsilon = S_\varepsilon^+ \cup S_\varepsilon^-$, com S_ε^+ contendo o equilíbrio estável e $S_\varepsilon^- = S_\varepsilon \cap \{(x, y, z); z < 0\}$. A variedade S_ε^+ é a união de conjuntos abertos não vazios (em topologia relativa) V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 tais que as seguintes afirmações são válidas.*

- (i) *S_ε possui fecho compacto e todas as trajetórias do sistema são eventualmente atraídas por ela.*
- (ii) *As trajetórias começando em V_1 permanecem em S_ε^+ e são atraídas para o equilíbrio estável.*
- (iii) *As trajetórias começando em V_2 saem de S_ε^+ através da vizinhança da linha de dobra F_+ , são atraídas para S_ε^- , e subsequentemente seguem o fluxo lento de S_ε^- para S_ε^+ (retorno suave) e são atraídas para o equilíbrio estável.*
- (iv) *As trajetórias começando em V_4 saem de S_ε^+ através da vizinhança da linha de dobra F_+ , são atraídas para S_ε^- , subsequentemente deixam S_ε^- através da vizinhança de F_- , são atraídas para S_ε^+ (salto retorno) e finalmente se aproximam do equilíbrio estável.*

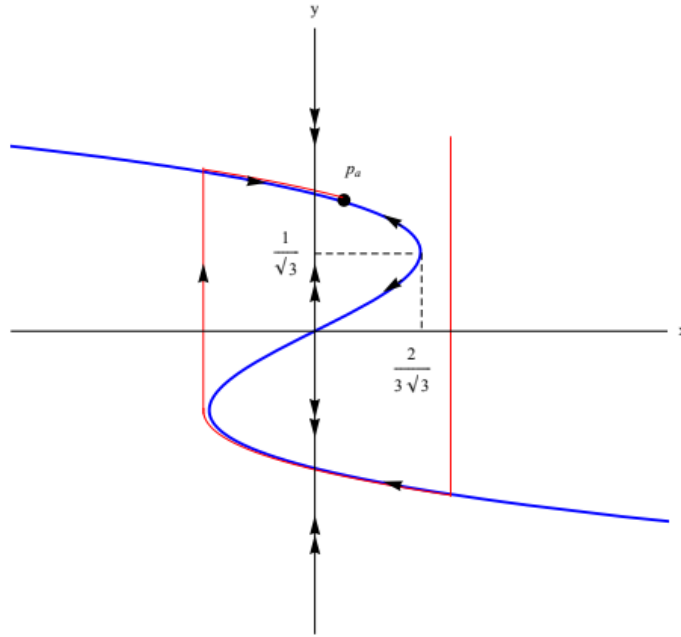


Figura 5.19: A trajetória de um ponto (x, y) próximo ao equilíbrio p_a . Figura retirada de [8].

- (v) As trajetórias começando em V_3 saem de S_ε^- através da vizinhança da linha de dobra F_+ , são atraídas por S_ε^- , e posteriormente passam de S_ε^- para S_ε^+ através de uma pequena vizinhança da cúspide (transição através da cúspide) e são atraídas para o equilíbrio estável.
- (vi) A medida de V_5 é exponencialmente pequena (sua existência é causada pela solução canard que ocorre para sela dobrada, ver enunciado e prova do Teorema 5.7).

Demonstração. Recorde do Teorema 5.2 e das variedades S_0^a , S_{0+}^a e S_{0-}^a (ver também Figura 5.6). É possível provar usando métodos do plano de fase (métodos do tipo Poincaré-Bendixson) que (5.17) possui um conjunto atrator compacto $R \subset S_0^a$, contendo o ponto p_f , tal que qualquer trajetória singular eventualmente entra em R e converge para o equilíbrio estável.

Removemos uma faixa fina em torno de F de R e construímos uma variedade lenta normalmente hiperbólica (Fenichel) aproximando o restante de R . Este é S_ε , com os conjuntos S_ε^+ e S_ε^- , definindo como no enunciado do Teorema 5.11, aproximando $S_{0+}^a \cap R$ e $S_{0-}^a \cap R$. Agora os Teoremas 5.6, 5.7 e 5.9 junto com o teorema de Fenichel, descrevem como as trajetórias viajam de S_ε^+ para S_ε^- e vice-versa. Os conjuntos V_1 , V_2 , V_3 e V_4 são definidos pelas propriedades das trajetórias que passam por eles, por exemplo V_2 é definido como o conjunto de pontos cujas trajetórias saem de S_ε^+ pela vizinhança da linha de dobra F_+ , são atraídos por S_ε^- , e subsequentemente seguem o fluxo lento da S_ε para S_ε^+ e são atraídos para o equilíbrio estável. O Teorema 5.2 implica que os conjuntos V_3 e V_4 não são vazios. O conjunto V_5 é definido por todas as trajetórias que entram em U_2 do Teorema 5.7. ■

Referências

- [1] FENICHEL, F. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Ind. Univ. Math.*, v. 21, p. 193–225, 1971.
- [2] LAGERSTROM, P. A. *Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques*. New York: Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 1998.
- [3] HOLMES, M. H. *Introduction to Perturbation Methods*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [4] HAYES, M. et al. On the application of geometric singular perturbation theory to some classical two-point boundary value problems. *Intl. J. Bif. Chaos*, p. 189–209, 1998.
- [5] KAPER, T.; KOVACIC, G. Multibump orbits homoclinic to resonance bands. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 348, p. 3835–3887, 1996.
- [6] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [7] KAPER, T. An introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 56, p. 85–131, 1999.
- [8] BROER, H. W.; KAPER, T. J.; KRUPA, M. Geometric desingularization of a cusp singularity in slow-fast systems with applications to zeeman’s examples. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, p. 1–46, 2013.
- [9] TAKENS, F. Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions, in structural stability, the theory of catastrophes, and applications in the sciences. Springer-Verlag, Berlin, p. 144–234, 1976.
- [10] KRUPA, M.; SZMOLYAN, P. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points: fold and canard points in two dimensions. *SIAM J. MATH. ANAL.*, p. 286–314, 2001.
- [11] SZMOLYAN, P.; WECHSELBERGER, M. Relaxation oscillations in $\mathbb{R}^3$. *JDE*, p. 69–104, 2004.
- [12] SZMOLYAN, P.; WECHSELBERGER, M. Canards in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Differential Equations*, p. 419–453, 2001.
- [13] KUEHN, K. *Multiple time scale dynamics*. Austria: Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015.