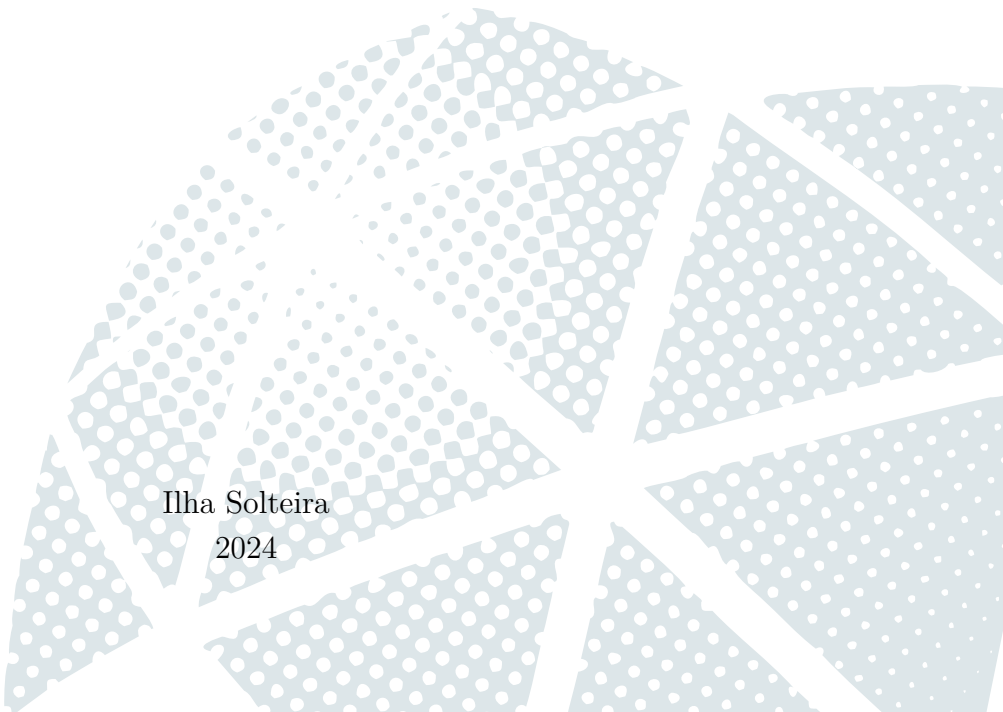
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

LUIS MIGUEL QUISPE VALENCIA

SENSOR ÓPTICO DE ALTA TENSÃO COM CHAVEAMENTO DE QUADRATURA E GRANDE PROFUNDIDADE DE MODULAÇÃO



Ilha Solteira
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

LUIS MIGUEL QUISPE VALENCIA

SENSOR ÓPTICO DE ALTA TENSÃO COM CHAVEAMENTO DE QUADRATURA E GRANDE PROFUNDIDADE DE MODULAÇÃO

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista–UNESP, Câmpus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de Conhecimento: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Kitano

Ilha Solteira
2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Q8s

Quispe-Valencia, Luis Miguel.
Sensor óptico de alta tensão com chaveamento de quadratura e grande profundidade de modulação / Luis Miguel Quispe-Valencia. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
143 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2024

Orientador: Cláudio Kitano

Inclui bibliografia

1. Sensor óptico de tensão elevada. 2. Efeito eletro-óptico. 3. Interferômetro polarimétrico. 4. Detecção de fase óptica. 5. Realimentação. 6. Controle com modos deslizantes.

Amanda Sertori dos Santos
Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Sensor Óptico de Alta Tensão com Chaveamento de Quadratura e Grande Profundidade de Modulação

AUTOR: LUIS MIGUEL QUISPE VALENCIA
ORIENTADOR: CLAUDIO KITANO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Claudio Kitano

Prof. Dr. CLAUDIO KITANO (Participaçao Presencial)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participaçao Presencial)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. ANDRÉS PABLO LÓPEZ BARBERO (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia de Telecomunicações / Universidade Federal Fluminense - UFF

Ilha Solteira, 12 de setembro de 2024

Dedico este trabalho à minha família,
e namorada Yosilin Yauyo
por seu apoio infinito

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me capacitou, deu me saúde e forças para que tudo isso fosse possível.

Aos meus pais amados, Bertha e Luis, e irmãs Gisella e Rosa que sempre acreditaram em mim e aos meus demais familiares.

Ao professor Dr. Cláudio Kitano por aceitar me orientar nesse trabalho, pelos ensinamentos, por compartilhar comigo seus conhecimentos acadêmicos, pela paciência, pelas sugestões a esse trabalho, por acreditar em mim e no meu potencial e tornar esse trabalho um aprendizado prazeroso. Se cheguei até aqui foi porque tive pessoas iguais a você que acreditaram em mim.

Aos técnicos de laboratório, Everaldo L. Moraes, Bruno, Valdemir Chaves e Wendel que me auxiliaram na realização dos experimentos.

Aos amigos do Laboratório de Optoeletrônica que de forma direta ou indiretamente me ajudaram, Murilo Caradini, Rodrigo Pazote, Sthephany. Ao pessoal de outros laboratórios como Hugo Yamanaka, Rafael Maximo, Vagner, Rafael Genuino. Aos moradores da Republica Intrusa Gabriel Paiola, Julius Igor, Wesller Paiva e todos os demais que em muitos momentos me ajudaram e apoiaram durante a pesquisa e com aprendizagem da língua portuguesa.

A todos os meus amigos que tive a oportunidade de conhecer durante a minha vida acadêmica, por terem me motivado a prosseguir, dividirem comigo seus conhecimentos e tornarem essa jornada mais alegre e prazerosa.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Si hasta los 30 años no lograste nada
no maldigas el dia que naciste
maldice el tiempo que has perdido."
(Alfredo Monge)

RESUMO

Nesta dissertação de mestrado é investigado um transdutor óptico de tensão para aplicações em sistemas elétricos de potência que apresenta várias vantagens sobre os transformadores eletromagnéticos e capacitivos tais como: facilidade de isolação, maiores largura de banda e faixa dinâmica, e imunidade contra interferência eletromagnética. Estes transformadores de potencial podem ser projetados em torno dos moduladores eletro-ópticos de amplitude que, por sua vez, são baseados no efeito Pockels em cristal como o Niobato de Lítio. O método a ser usado é o método chaveamento de quadratura, método desenvolvido no Laboratório de Optoeletrônica (LOE), para obter os dois sinais por realimentação por controle de fase. A condição de quadratura é atingida por um controlador PI. Logo os dois sinais obtidos serão analisados pela abordagem de controle de alto ganho e de modos deslizantes, também desenvolvido no LOE, a qual consiste em utilizar o sistema de controle para compensar completamente os deslocamentos de fase induzidos pela tensão aplicada no cristal sensor. O sensor de alta tensão com chaveamento de quadratura e realimentado por controle de fase é implementado e submetido a testes com aplicação de tensões entre 200 V e 7 kV (de pico) em 60 Hz, com objetivo de que apresente uma excelente linearidade na faixa de interesse e boa precisão na medição do conteúdo harmônico dos sinais.

Palavras-chave: sensor óptico de tensão elevada; efeito eletro-óptico; interferômetro polarimétrico; detecção de fase óptica; realimentação; controle com modos deslizantes.

ABSTRACT

This master's thesis presents an optical voltage transducer for applications in electrical power systems that has several advantages over electromagnetic and capacitive transformers, such as: ease of isolation, greater bandwidth and dynamic range, and immunity from electromagnetic interference. These voltage transformers can be designed around electro-optical amplitude modulators which, in turn, are based on the Pockels effect in crystals such as lithium niobate. The method to be used is quadrature switching, a method developed at LOE, to obtain two signals and then fed back by phase control. The quadrature condition is achieved by a PI controller. Then the two signals obtained will be analyzed by the high gain and sliding mode control approach, also developed at LOE, which consists of using the control system to completely compensate for the phase shifts induced by the voltage applied to the sensor crystal. The high-voltage sensor with quadrature switching and phase feedback is implemented and tested with voltages between 200 V and 7 kV (peak) at 60 Hz, whose target is get an excellent linearity in the range of interest and good accuracy in measuring the harmonic content of the signals.

Keywords: high voltage optical sensor; electro-optic effect; quadrature homodyne interferometry; polarimetric interferometer; optical phase detection; closed-loop feedback; sliding mode control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema de detecção da amplitude da potência da luz. 23
Figura 2 – Esquema do transformador óptico de tensão com divisor capacitivo. . . 24
Figura 3 – Vista sagital do TPO. 25
Figura 4 – Esquema do módulo de medição de dois caminhos ópticos baseados no efeito Pockels. 26
Figura 5 – Sistema de medição Pockels multi-segmentado. 27
Figura 6 – Diagrama do sistema de medição de alta tensão. 28
Figura 7 – Principio do novo sensor de tensão ressonante. 29
Figura 8 – Polarização linear. 32
Figura 9 – Polarização circular. 33
Figura 10 – Polarização elíptica. 33
Figura 11 – Polaroide com ângulo azimutal de Ψ. 36
Figura 12 – Feixe de luz polarizado passando pelo polarizador. 37
Figura 13 – Feixe de luz não polarizado passando pelo polarizador linear. 39
Figura 14 – Lâmina de atraso. 40
Figura 15 – Projeção estereográfica trigonal 3m. 45
Figura 16 – Meio uniaxial negativa com birrefringência $n_e \leq n_o$. 47
Figura 17 – Novo elipsoide de refração com campo elétrico externo paralelo a x_3. . 49
Figura 18 – Novo elipsoide de índices de refração com campo elétrico externo paralelo ao x_2. 52
Figura 19 – Cristal de niobato de lítio com campo elétrico paralelo ao eixo x_3. . . . 53
Figura 20 – Dependência de temperatura do índice de refração para dois comprimentos de onda. 54
Figura 21 – Derivada do índice de refração em função da temperatura. 55
Figura 22 – Gráfico de $d(n_e - n_o)/dT$ para o comprimento de onda $632,8$ nm. . . . 56
Figura 23 – Cristal de niobato de lítio com campo elétrico paralelo ao eixo x_2. . . . 57
Figura 24 – Modulador de intensidade com dois polarizadores. 58
Figura 25 – Modulador eletro-óptico transversal usando um cristal de $LiNbO_3$. . . . 59
Figura 26 – Modulador eletro-óptico transversal usando um cristal de $LiNbO_3$ com feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c. 61
Figura 27 – Ângulos de transmissão para o polarizador e analisador. 62
Figura 28 – Modulador eletro-óptico transversal com os eixos de transmissão dos polarizadores ortogonais. 63
Figura 29 – Padrão de interferência experimental devido ao espalhamento da luz no cristal. 64
Figura 30 – Padrão de interferência teórico devido ao espalhamento da luz no cristal (calculado com Matlab). 65

Figura 31 – Padrão de interferência experimental devido ao espalhamento da luz no cristal. 66
Figura 32 – Padrão de interferência teórico devido ao espalhamento da luz no cristal (calculado com Matlab). 66
Figura 33 – Diagrama esquemático do sistema proposto. 67
Figura 34 – Modulador eletro-óptico com duas células alinhadas. 69
Figura 35 – Índice modulação maior que π. 71
Figura 36 – (a) Sinal foto-detectado $v_{pd}(t)$. (b) Amostras de $v_{pd}(t)$. (c) $V_m(t)$ distorcida sincronizada com a aquisição de $v_{pd}(t)$, (d) Sinal de relógio utilizado para sincronização. 73
Figura 37 – Interpolação das amostras. 74
Figura 38 – Sistema genérico de interpolação. 75
Figura 39 – Figura de Lissajous Simulada e Medida. 76
Figura 40 – Funções de Bessel de primeira espécie. 78
Figura 41 – Figura de Lissajous filtrada. 79
Figura 42 – Sinais em quadratura pre-filtrados e post-filtrados. 80
Figura 43 – Diagrama de tolerâncias do filtro passa-baixas. 81
Figura 44 – Resposta em frequência do filtro Butterworth de ordem 7 transformado pela transformação bilinear. 81
Figura 45 – Figura de Lissajous para diferentes δ. 84
Figura 46 – Controle do ângulo δ. 85
Figura 47 – Diagrama de blocos do controle PI da fase óptica. 86
Figura 48 – Método do trapézio. 88
Figura 49 – Condição deslizante. 90
Figura 50 – Interpretação gráfica. 91
Figura 51 – Chattering como resultado do chaveamento imperfeito no controle. . . 92
Figura 52 – Diagrama completo do projeto. 93
Figura 53 – Estabilidade dos pontos $(2k+1)\pi/2$. 96
Figura 54 – Estabilidade dos pontos $k\pi$. 97
Figura 55 – Estabilidade dos pontos. 98
Figura 56 – Lei de controle. 99
Figura 57 – Funções sigmoides. 100
Figura 58 – Diagrama de blocos em malha fechada no Simulink. 101
Figura 59 – Sinal demodulado e original. 102
Figura 60 – Sinal demodulado com filtro passa-banda Butterworth com fase zero. . 103
Figura 61 – Sinal demodulado com filtro passa-alta Butterworth com fase zero. . . 104
Figura 62 – Variável deslizante com diferentes frequências de amostragem. 105
Figura 63 – Variável deslizante com constante C diferentes. 105
Figura 64 – Sinal demodulado simulado com forte chattering com C=50000 e filtro passa altas em 20 Hz. 106

Figura 65 – Variável deslizante com constante ϵ diferente. 107
Figura 66 – Montagem experimental do sistema óptico. 108
Figura 67 – Instrumentação eletrônica e montagem experimental do sistema elevador de tensão. 109
Figura 68 – Montagem experimental do sistema de processamento. 110
Figura 69 – Esquema do sensor de tensão polarimétrico com a eletrônica utilizada. 111
Figura 70 – Conector C do myRIO. 112
Figura 71 – Sinal fotodetectado original. 113
Figura 72 – Tensão de saída original e demodulado. 114
Figura 73 – Defasagem do sinal demodulado em relação ao sinal original. 115
Figura 74 – Análise dos harmônicos. 116
Figura 75 – Análise do sinal triangular. 117
Figura 76 – Análise do sinal quadrado. 118
Figura 77 – Sinal de controle. 119
Figura 78 – Diagrama do controle PI da fase óptica sem realimentação. 120
Figura 79 – Variações do sinal δ. 121
Figura 80 – Figura de Lissajous para uma amplitude $V_S(t)$ menor que a tensão de meia-onda do cristal sensor. 122
Figura 81 – Erro relativo de tensão pico-pico e THD(%) no tempo. 124
Figura 82 – Linearidade do sistema e erro relativo para uma tensão senoidal. 125
Figura 83 – THD(%) para $V_S(t)$ senoidal que usa função sinal no controlador de modos deslizantes. 125
Figura 84 – THD(%) para $V_S(t)$ senoidal que usa função sigmoide $\epsilon = 0,03$ no controlador de modos deslizantes. 126
Figura 85 – Linearidade do sistema e erro relativo para uma tensão triangular. 126
Figura 86 – THD(%) para $V_S(t)$ triangular que usa função sinal no controlador de modos deslizantes. 127
Figura 87 – THD(%) para $V_S(t)$ triangular que usa a função sigmoide $\epsilon = 0,03$ no controlador de modos deslizantes. 127
Figura 88 – Linearidade do sistema e erro relativo para uma tensão quadrado. 128
Figura 89 – THD(%) para $V_S(t)$ quadrado que usa a função sinal no controlador de modos deslizantes. 128
Figura 90 – THD(%) para $V_S(t)$ quadrado que usa a função sigmoide $\epsilon = 0,02$ no controlador de modos deslizantes. 129
Figura 91 – Resumo do erro relativo THD e tensão pico-pico. 130
Figura 92 – Variável deslizante s e variável auxiliar f no tempo. 131
Figura 93 – Pontos de estabilidade. 132
Figura 94 – Tempo de estabelecimento no sinal demodulado. 132
Figura 95 – Plano de fase. 133
Figura 96 – Sistema embarcado. 134

Figura 97 – Comunicação DMA baseado em FIFOs. 135
Figura 98 – Esquema montado. 136

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cristais Pockels representativos. 22
Tabela 2 – Especificações do projeto do filtro digital. 80
Tabela 3 – Limites de distorção de tensão 116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADC	Conversor analógico-digital (*Analog-to-Digital Converter*)
ADP	Di-hidrogeno fosfato de amônio (*Ammonium Dihydrogen Phosphate*)
AC	Corrente alternada (*Alternating Current*)
$Bi_{12}SiO_{20}$	Óxido de Silício de Bismuto
$Bi_{12}GeO_{20}$	Óxido de Germânio de Bismuto (conhecido como BGO)
$Bi_4Ge_3O_{12}$	Germanato de Bismuto (conhecido como BGO)
DC	Corrente contínua (*Direct Current*)
DAC	Conversão digital-analógico (*Digital-to-Analog Converter*)
FIFO	Primeiro a entrar, primeiro a sair (*First-In-First-Out*)
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
FPGA	Arranjo de Portas Programáveis em Campo (*Field Programmable Gate Array*)
GIS	Chave comutadora isolada a gás (*Gas Insulated Switchgear*)
He-Ne	Hélio-Neônio
IEC	Comissão Eletrotécnica Internacional (*International Electrotechnical Commission*)
KDP	Di-hidrogênio fosfato de potássio (*Potassium Dihydrogen Phosphate*)
$LiNbO_3$	Niobato de lítio
$LiTaO_3$	Tantalato de lítio
LOE	Laboratório de Optoeletrônica
MOF	Modulador Óptico de Fase
NI	National Instruments
OVS	Sensores de tensão óptico (*Optical Voltage Sensors*)
PI	Proporcional-Integral
PM	Modulado em fase (*Phase-Modulated*)
RT	Tempo-Real (*Real-Time*)
SAT	Sensor de Alta Tensão
SF_6	Hexafluoreto de enxofre
SLD	Diodo superluminescente (*Superluminescent diode*)
THD	Distorção harmônica total (*Total Harmonic Distortion*)

TP	Transformador de potencial
TPO	Transformador de potencial óptico
UHV	Ultra alta tensão (*Ultra High Voltage*)
UNESP	Universidade Estadual Paulista
ZnS	Sulfeto de zinco
ZnTe	Telureto de zinco

LISTA DE SÍMBOLOS

a, b, c, w	Eixos da célula unitária
A	Termo constante na tensão fotodetectado
$\vec{A}$	Vetor constante
A_i	Componente do vetor constante no eixo ($i = x$, y ou z)
B_{R_k}	Bola k de raio R
c_0	Velocidade da luz no vácuo
C	Ganho estritamente positivo da função sinal
d	Espessura do cristal de $LiNbO_3$
ϱ_i	Fase relacionada à componente de campo E_i ($i = x$, y)
δ	Variação de fase
$\vec{D}$	Vetor de deslocamento elétrico
ξ	Constante estritamente positiva
ε_{ij}	Tensor de permissividade
$\vec{E}$	Campo elétrico externo
$\vec{E}_{op}$	Campo elétrico óptico
$Er(\delta)$	Sinal de erro em função da variação de fase
$Er(s)$	Sinal de erro em função da variável de Laplace
E_i	Componente do campo elétrico no eixo ($i = x$, y ou z)
E_p	Energia de um fóton
$\vec{E}_{op}^{\dagger}$	Hermitiano de $\vec{E}_{op}$
f_0	Frequência aplicada ao cristal MOF
f_s	Frequência de amostragem
f	Variável auxiliar no controlador virtual VS/SM
h	Constante de Planck
Γ	Retardo de fase
Γ_{SAT}	Retardo de fase fornecido pelo cristal sensor (SAT).
Γ_{MOF}	Retardo de fase fornecido pelo cristal modulador (MOF)
$G_p(s)$	Planta
$G_s(s)$	Controlador
$\vec{H}$	Fasor do campo magnético

I_0	Intensidade óptica do laser semicondutor
I	Intensidade óptica
J_n	Função de Bessel de primeira espécie e ordem n
$\vec{J}$	Vetor de Jones
J_i	Componente do vetor de Jonas orientado ao longo do eixo $\hat{i}$ ($i = \hat{x}$, $\hat{y}$ ou $\hat{z}$)
$\vec{J}^*$	Conjugação complexa de $\vec{J}$
K_i	Constante integral
K_p	Constante proporcional
λ	Comprimento de onda
$\hat{L}$	Polarização circular esquerda
L	Comprimento do cristal de $LiNbO_3$
L_e	Taxa de expansão de amostragem
n	Variável independente numa sequência
n_i	Componente de índice de refração orientado ao eixo i ($i = x$, y ou z)
n_e	Índice de refração extraordinário
n_o	Índice de refração ordinário
n_x	Índice de refração a zero graus Celsius
n_T	Polinômio de índice de refração dependente da temperatura
η_{ij}	Tensor impermeabilidade dielétrica
θ_r	Ângulo de rotação
Θ_c	Fase de compensação
$p_1[n]$	Sequência par normalizada
$p_2[n]$	Sequência ímpar normalizada
$\vec{P}$	Vetor de polarização
r_{ijk}	Coeficiente eletro-óptico linear
$r(\theta)$	Magnitude do vetor ($p_1[n]$, $p_2[n]$)
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\hat{R}$	Polarização circular direita
$R(s)$	Sinal de referência
$\overline{R_I}$	Média dos quadrados das magnitudes dos vetores do primeiro quadrante

$\overline{R_{II}}$	Média dos quadrados das magnitudes dos vetores do segundo quadrante
$\overline{R_{III}}$	Média dos quadrados das magnitudes dos vetores do terceiro quadrante
$\overline{R_{IV}}$	Média dos quadrados das magnitudes dos vetores do quarto quadrante
t_{reach}	Tempo finito em chegar à superfície deslizante
T	Temperatura
T_r	Transmitância
T_i	Tempo integral
T_s	Período de amostragem
T_s'	Novo período de amostragem
Δv	Variação da amplitude do valor ideal de $V_m(t)$
v_{pd}	Sinal fotodetectado
v_{pdA}	Sinal fotodetectado subtraindo A
$v_{par}[n]$	Sequência de índice par de $v[n]$
$v_{impar}[n]$	Sequência de índice ímpar de $v[n]$
$v_{pe}[n]$	Sequência par após de expansor de taxa de amostragem
$v_{ie}[n]$	Sequência ímpar após um expansor de taxa de amostragem
$v_{pi}[n]$	Sequência par interpolada
$v_{ii}[n]$	Sequência ímpar interpolada
V	Visibilidade de franjas
$V(s)$	Função candidata de Lyapunov da variável deslizante s
$V(f)$	Função candidata de Lyapunov da variável auxiliar f
$V_m(t)$	Tensão de modulação principal aplicada à célula Pockels MOF
$V_S(t)$	Tensão aplicada à célula Pockels SAT
V_S	Amplitude da tensão aplicada à célula Pockels SAT
V_m	Amplitude da tensão de modulação principal aplicada à célula Pockels MOF
V_π	Tensão de meia-onda
$V_{\pi S}$	Tensão de meia-onda do cristal SAT
$V_{\pi m}$	Tensão de meia-onda do cristal MOF
$V_p(t)$	Tensão nos eletrodos do cristal

ν	Frequência de um fóton
$u(t)$	Lei de controle
$u(s)$	Sinal de controle
u_{PI}	Sinal de controle do controlador proporcional-integral
$\Phi(t)$	Fase induzida por $V_s(t)$
$\phi(t)$	Fase induzida por $V_m(t)$
ϕ_b	Fase absoluta acumulada
φ	Fase devido às derivas ambientais.
ϕ_0	Fase quase-estática
x, y, z	Eixos de laboratório
x_1, x_2, x_3	Eixos do cristal
χ	Susceptibilidade elétrica
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{x}^{(n)}$	n-ésima derivada do vetor de estados $\mathbf{x}$
$\mathbf{x(0)}_d$	Vetor de estados desejado
ω	Frequência angular
ω_{SAT}	Frequência angular do $V_S(t)$
$W(s)$	Sinal controlado
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 21
1.1 PROPRIEDADES FÍSICAS DOS CRISTAIS POCKELS 21
1.2 TRANSFORMADORES DE POTENCIAL ÓPTICOS 22
1.2.1 Desvantagens do uso de OVS 26
1.3 ESTRATÉGIAS NOVAS PARA MEDIÇÃO DE TENSÃO 27
1.4 OBJETIVOS 29
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO 30

2 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS: POLARIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO 31
2.1 ESTADOS DE POLARIZAÇÃO 31
2.1.1 Polarização linear 32
2.1.2 Polarização circular 32
2.1.3 Polarização elíptica 33
2.1.4 Luz não polarizada 34
2.2 REPRESENTAÇÃO DO VETOR DE JONES 34
2.3 POLARIZADORES 35
2.4 INTENSIDADE DO ESPECTRO DE TRANSMISSÃO 36
2.5 LEI DE MALUS 37
2.6 POLARIZAÇÃO LINEAR DE UM FEIXE DE LUZ NÃO POLARIZADO 38
2.7 MÉTODO DE MATRIZ DE JONES 39

3 EFEITO ELETRO-ÓPTICO LINEAR 42
3.1 EFEITO ELETRO-ÓPTICO 42
3.2 MODULAÇÃO ELETRO-ÓPTICA DE RETARDO DE FASE 52
3.2.1 Propagação do feixe de luz perpendicular ao eixo cristalino c . 52
3.2.2 Propagação do feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c 57
3.3 MODULAÇÃO ELETRO-ÓPTICA DE AMPLITUDE 58
3.3.1 Propagação do feixe de luz perpendicular ao eixo cristalino c . 58
3.3.2 Propagação do feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c 60
3.3.3 Generalização do cálculo da intensidade de saída 61
3.4 ALINHAMENTO ÓPTICO DAS CÉLULAS POCKELS 63

4 SENSOR ELETRO-ÓPTICO DE ALTA TENSÃO CHAVEADO 67
4.1 OBTENÇÃO DOS SINAIS EM QUADRATURA POR CHAVEAMENTO DE FASE 68
4.2 CONTROLE DE FASE DA CONDIÇÃO DE QUADRATURA 82
4.3 DISCRETIZAÇÃO DE UM CONTROLADOR PI 87

5 MODOS DESLIZANTES 89
5.1 SUPERFÍCIES DESLIZANTES 89
5.2 CONTROLE COM MODOS DESLIZANTES APLICADO AO SISTEMA POLARIMÉTRICO 92
5.2.1 ANÁLISE DE LYAPUNOV NOS PONTOS DE EQUILÍBRIO 95
5.3 CHATTERING 99
5.4 SIMULAÇÃO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA 100

6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS 108
6.1 SINAL FOTODETECTADO 111
6.2 SINAL DE SAÍDA COM FUNÇÃO SINAL E SIGMOIDE 113
6.3 DISTORÇÃO HARMÔNICA TOTAL 115
6.4 SINAIS NÃO SENOIDAIS 116
6.5 SINAL DE CONTROLE 118
6.6 EFEITO DAS DERIVAS AMBIENTAIS NO CONTROLADOR PI . . . 119
6.7 MEDIÇÕES DE TENSÃO ABAIXO DA TENSÃO DE MEIA-ONDA DO CRISTAL SENSOR 121
6.8 MEDIÇÕES DE TENSÃO E THD 122
6.9 CARACTERÍSTICA DA VARIÁVEL DESLIZANTE E PLANO DE FASE 130
6.10 FPGA VI E HOST VI USANDO myRIO 133

7 CONCLUSÕES 137
7.1 TRABALHOS FUTUROS 138

REFERÊNCIAS 139

1 INTRODUÇÃO

A medição de tensão com alta exatidão é essencial para vários equipamentos de alta sensibilidade e valor em sistemas elétricos de potência (Santos; Taplamacioglu; Hidaka, 2000, p. 1). A grande demanda e a longa distância de transmissão da energia elétrica em ultra alta-tensão estão sendo aceleradas. Logo, os equipamentos de transmissão e transformação aumentarão de capacidade. Proteção contra sobretensão tornou-se em um importante tópico de pesquisa. Em 1990, as plantas de energia e subestações empregavam transformadores de corrente indutivos e com núcleos e bobinas para medição de corrente, e transformadores de tensão com capacitor divisor de tensão. Com o desenvolvimento dos sistemas de potência em ultra alta-tensão e grande capacidade, o esquema de medição de tensão evidenciou algumas deficiências tais como: grande volume, esquema complexo, difícil isolamento, saturação magnética suscetível e alguns deles têm núcleo de ferro e problemas de ressonâncias (Guo *et al.*, 2021, p. 2). Além disso, as várias falhas catastróficas no transformador de corrente isolado em óleo foram a motivação para encontrar soluções alternativas para medição de tensão e corrente (Christensen, 1995, p. 1).

Os equipamentos convencionais para indicação de presença de alta tensão podem monitorizar e mostrar, em tempo real, a tensão de um equipamento elétrico e de linhas. Esses equipamentos podem ser tipo contato, indução e equipotencial. Uma das vantagens dos sensores indutivos é que podem ser montados fora da proximidade da linha para ter maior fator de segurança. Porém, eles podem ser afetados por outras linhas de alta tensão próximo ao ponto de medição. Os de tipo contato (conhecidos como sensor tipo isolador de porcelana), não precisam de fonte de alimentação, sendo montados em pontos com uma alta qualidade de anti-interferência. No entanto, quando o $flashover$ do isolamento ocorre na carcaça, a falha de aterramento de uma das fases ou descarga parcial poderia acontecer no local de instalação. Então, a solução óptica foi proposta nesta tecnologia em subestações do tipo *Gas Insulated Switchgear* (GIS).

Os sistemas GIS são equipamentos totalmente vedados, e, nesse caso, o jeito de poder fazer medidas muda. A detecção de alta tensão só precisa ser operada por um dispositivo com mostrador de alta tensão digital (Guo *et al.*, 2021, p. 1). Em comparação com o equipamento tradicional de distribuição aberto, as vantagens do equipamento GIS incluem pequeno volume, pequena influência de fatores externos, operação estável, alto fator de segurança, longo ciclo de manutenção, sendo muito popular entre os usuários.

1.1 PROPRIEDADES FÍSICAS DOS CRISTAIS POCKELS

Os cristais que produzem um grande efeito Pockels são naturalmente desejados para detectar campos elétricos. As seguintes propriedades devem ser também consideradas para medir os campos elétricos em dielétricos gasosos:

- A constante dielétrica do cristal é baixa para não distorcer o campo elétrico no ponto medido.
- As resistências de fuga específicas e de superfície são altas. Elas afetam a baixa frequência ou o componente DC do campo medido.
- A constante piezoelétrica do cristal é pequena. Um componente oscilatório é sobreposto a um sinal óptico de saída devido ao efeito piezoelétrico.
- Não se deseja obter a birrefringência natural do cristal porque ela muda com a temperatura.

Na Tabela 1, mostram-se alguns cristais importantes usados para medição de campo elétrico:

Tabela 1 – Cristais Pockels representativos.

Simetria de Grupo de Ponto	Material	Birrefringência Natural
$3m$	$LiNbO_3$, $LiTaO_3$	existe (na configuração transversal)
$\bar{4}2m$	ADP,KDP	existe
32	Quartz	existe mas pequeno
23	$Bi_{12}SiO_{20}$,$Bi_{12}GeO_{20}$	nenhum
$\bar{4}3m$	ZnS,ZnTe,$Bi_4Ge_3O_{12}$	nenhum

Fonte: adaptado de Hidaka (1996).

O efeito Pockels é presente somente em cristais não-centrossimétricos.

1.2 TRANSFORMADORES DE POTENCIAL ÓPTICOS

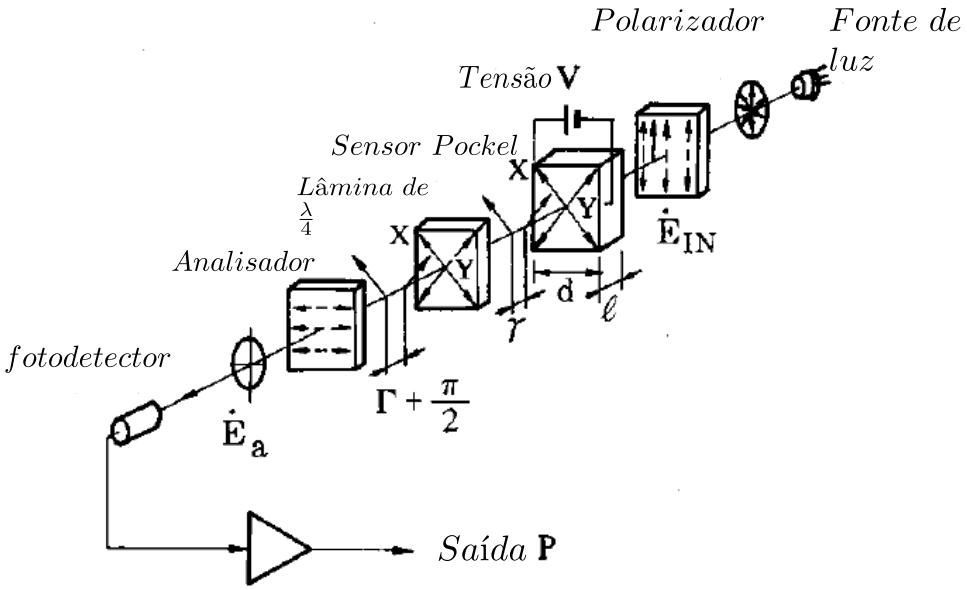
Em aplicações de instrumentos de medição de alta tensão, a faixa de frequência necessária é de DC a alguns MHz (Wackernagel *et al.*, 2023, p. 1).

O sensor óptico de tensão baseado no efeito Pockels tornou-se a principal direção de pesquisa de sensores de tensão para adaptar o desenvolvimento da rede inteligente pelas vantagens: maior faixa dinâmica, melhor capacidade anti-interferência, alta sensibilidade, resposta rápida, confiabilidade, compactação e assim por diante.

Em 1990, o transformador de instrumento óptico foi um sistema de medição de tensão baseado no efeito Pockel (Sawa *et al.*, 1990, p. 1). Na época, as medições de tensão eram baseados por transformadores de tensão do tipo indutivo eletromagnético, ou transformadores de tensão do tipo divisão de tensão de capacitor. Dessa forma, o sistema foi aplicado a um GIS de 300 kV trifásico, e uma subestação com isolamento de ar a 168 kV.

Na Figura 1, apresenta-se o sistema óptico. O feixe laser é linearmente polarizado pelo polarizador, em seguida o feixe de luz atravessa um cristal de $LiNbO_3$ uniaxial, onde é aplicada uma tensão. O feixe é dividido em dois feixes polarizados com orientação X e Y com diferentes velocidades e ortogonais. Com isso, uma polarização elíptica é gerada pela diferença de fase na saída do cristal, onde, a diferença de fase é proporcional ao produto da tensão aplicada, constante de Pockels e comprimento do cristal. A tensão pode ser calculada da diferença de fase. Na sequência, a lâmina de quarto de onda acrescenta 90°de bias óptico, e finalmente, o feixe passa pelo analisador para ser convertido em sinal de intensidade (W/m^2).

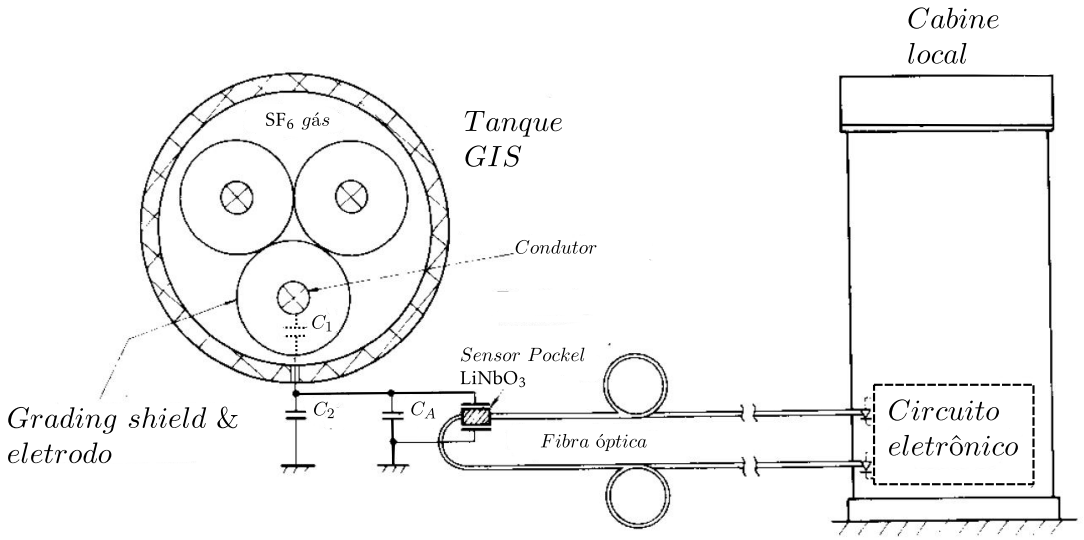
Figura 1 – Sistema de detecção da amplitude da potência da luz.



Fonte: adaptado de Sawa *et al.* (1990).

Na Figura 2, mostra-se o esquema do transformador de tensão óptico. A fonte laser é um LED com comprimento de onda de 850 nm, montado numa cabine local, o qual é guiado usando fibra óptica até o sensor de tensão alocado próximo ao tanque GIS. Uma tensão, dividida por capacitor da tensão de alta tensão, é aplicada no sensor óptico. A seguir, o feixe modulado pela tensão é enviado ao fotodetector alocado na mesma cabine, e convertido em sinal elétrico. Relativamente aos capacitores, C_1 é a capacitância eletroestática entre o condutor de alta tensão e o eletrodo intermediário. O capacitor C_2 é a capacitância eletroestática entre o eletrodo intermediário e a terra. Um capacitor C_A é acrescentado adequadamente, tal que a componente de tensão no lado de baixa seja $100/\sqrt{3}$.

Figura 2 – Esquema do transformador óptico de tensão com divisor capacitivo.



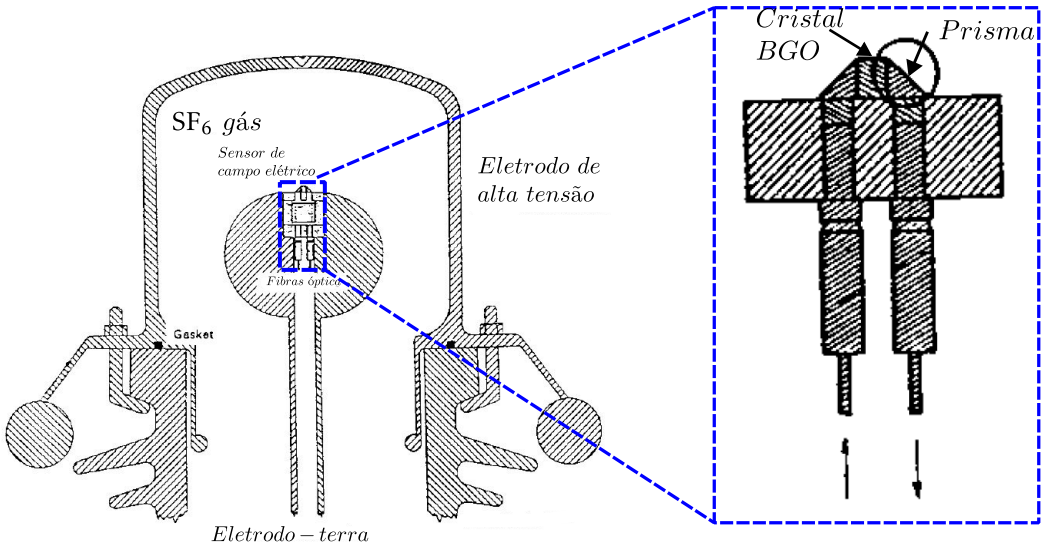
Fonte: adaptado de Sawa *et al.* (1990).

Em 1995, um Transformador de Potencial Óptico (TPO) baseado no efeito Pockels foi feito com um cristal Germanato de Bismuto (BGO). O transformador não precisava de um divisor de tensão capacitivo, tinha ligação direita entre linha de alta tensão e potencial de terra. Christensen (1995) apresentou o TPO para tensões na faixa 132–150 kV, onde o princípio do TPO é a modulação da irradiância conforme a diferença de potencial entre uma linha de alta tensão e terra.

A modulação da irradiância do feixe laser é conforme a intensidade do campo elétrico. O TPO projetado usa apenas dois eletrodos: um deles é terra e outro é ligado a um potencial de alta tensão. Assim, entre os eletrodos, cria-se um campo elétrico. Depois, o modulador óptico é colocado em configuração transversal no eletrodo de terra, sem montar o segundo eletrodo, tal como é mostrado no zoom da Figura 3. A intensidade e direção do campo elétrico no cristal são afetadas pela forma dos eletrodos e parcialmente pela permitividade relativa dos meios próximos (prisma e gás SF_6). Precisou-se de um método numérico para calcular a distribuição das linhas de campo entre os eletrodos. Finalmente, o TPO é baseado na medição da intensidade do campo elétrico alocado em cima de eletrodo terra, e com ele consegue-se a fase óptica.

Por outro lado, no sistema óptico, o feixe de luz passa pelo polarizador linear com 45° em relação ao plano do prisma. O prisma faz uma reflexão total do feixe, passando pelo cristal, chega no outro prisma e volta para o polarizador pela segunda vez. O polarizador é uma única lâmina utilizado como polarizador e analisador. Finalmente, o feixe laser modulado é processado eletronicamente.

Figura 3 – Vista sagital do TPO.

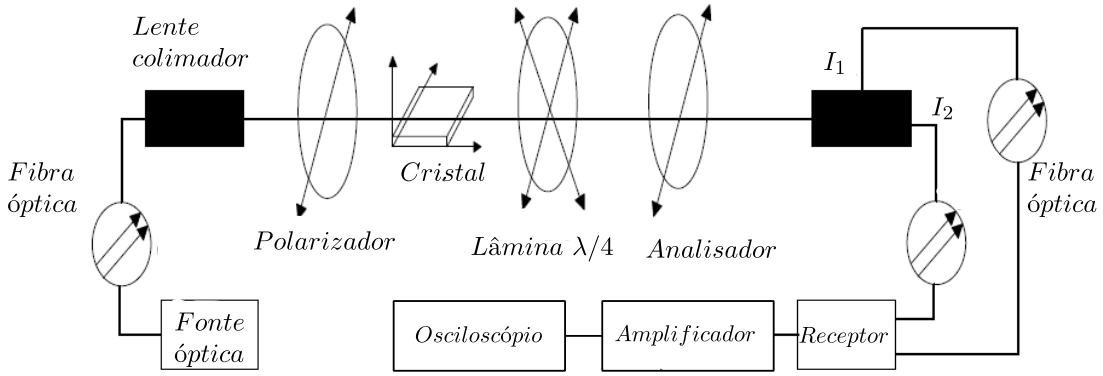


Fonte: adaptado de Christensen (1995).

Na área do monitoramento de sobre-tensões, os sensores precisam atender ao monitoramento de alta amplitude e ampla largura de banda. Os sensores podem ser: sensores de tensão por contato, ópticos e sem contato. No caso dos *Optical Voltage Sensor* (OVS) baseados no efeito eletro-óptico, têm-se: OVS ativos, OVS passivos, OVS totalmente em fibra, OVS baseados em eletrostrição, etc. Deng *et al.* (2018) apresentou um método sem contato baseado em efeito eletro-óptico. Primeiramente, precisa-se calcular a *stray capacitance* que existe entre o cabo energizado e o transdutor. Em seguida, é colocado em série com um capacitor de divisão, para reduzir a alta amplitude de sobre-tensão. Desse modo, o sinal de tensão reduzida é transmitido ao sistema de medição eletro-óptico.

Na Figura 4, mostra-se o circuito óptico, onde a diferença de fase óptica e a intensidade do campo externo têm uma relação linear conhecida como efeito Pockels. Entre os dispositivos ópticos têm-se: polarizador, cristal óptico, lâmina de quarto de onda e um analisador. O polarizador e o analisador agem como um sistema de detecção de interferência de polarização, usado para medir a diferença de fase após a modulação de fase do campo elétrico externo. Note-se que, é usada uma compensação de dois caminhos ópticos: I_1 representa a intensidade da luz perpendicular à orientação do polarizador e analisador, enquanto I_2, é paralelo à orientação da polarização. Finalmente, a diferença de fase dos dois caminhos ópticos pode ser medida, e consequentemente, o valor médio da intensidade do campo elétrico é calculado.

Figura 4 – Esquema do módulo de medição de dois caminhos ópticos baseados no efeito Pockels.



Fonte: adaptado de Deng *et al.* (2018).

1.2.1 Desvantagens do uso de OVS

A presença da birrefringência natural cria uma dependência da orientação dos eixos ópticos e os índices de refração com a temperatura. Pode-se estimar que, a dependência com a temperatura da birrefringência natural é maior que a birrefringência intrínseca por conta do estresse e imperfeições (Christensen, 1995, p. 1335). Após uma exclusão dos grupos com birrefringência natural, simetria centro-simétrico, com simetria piroelétrica, resta-se apenas o grupo de simetria $\overline{4}3m$ como, por exemplo, $Bi_4Ge_3O_{12}$, ZnS e ZnSe.

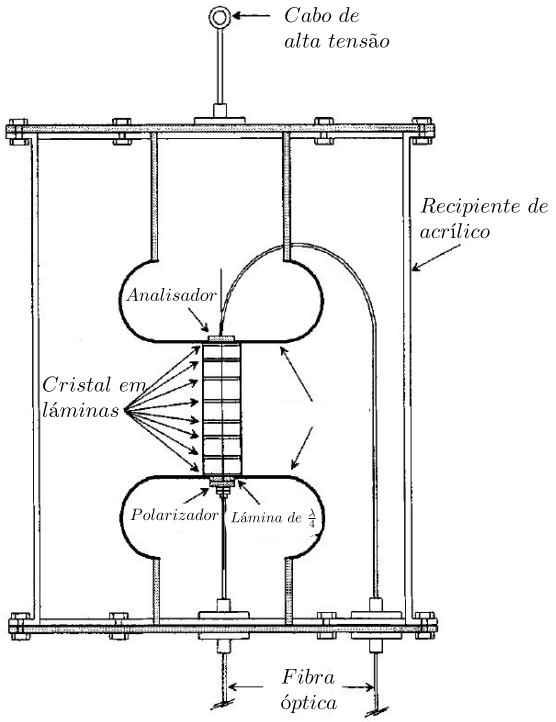
Além da temperatura, o estresse pode gerar instabilidade num sistema baseado em efeito eletro-óptico, exigindo então técnicas de compensação complicadas. As células Pockels não suportam tensões superiores a alguns kV e, portanto, precisam da adição de divisores capacitivos no sistema. A principal desvantagem desses sistemas, no entanto, é a necessidade de desligar a energia para a instalação e o alto custo dessa tecnologia ainda nova, não só para a aquisição, mas também para a manutenção. Esses problemas comentados, tornam difícil projetá-los e montá-los no campo (Werneck; Abrantes, 2004, p. 1).

Também, os cristais eletro-ópticos baseados em efeito Pockels são meios sensíveis usualmente usados em OVS, onde os produtos correspondentes da NxtPhase e da ABB foram aplicados no setor de energia. Contudo, o acoplamento das fibras nos cristais é susceptível à vibração e variação geométricas, resultando em baixa confiabilidade em operação de longo prazo (Zhao *et al.*, 2022, p. 1).

1.3 ESTRATÉGIAS NOVAS PARA MEDIÇÃO DE TENSÃO

O uso prático de sensores ópticos pode ser limitado pela alta sensibilidade. Nos anos 2000, uma técnica foi aplicada até níveis de 400 kV e com uma largura de banda na faixa de MHz. Foi usada uma técnica empregando cristais Pockel em um arranjo multi-segmentado. Uma fonte de luz de diodo super luminescente (SLD) e uma ligação de fibra óptica especial foram usadas. Boas linearidade e precisão foram obtidas para medir DC, AC, impulso de raio e medições de tensão de passo. Portanto, pode-se aplicar tensão direta ao sensor sem precisar de divisor resistivo ou capacitivo. Numa primeira versão, tentou-se colocar um único cristal com uma tensão de meia-onda em torno dos 34 kV, mas a sensibilidade ficou muito grande para tensões em torno de centenas de kV. Com isso, um novo arranjo multi-segmentado foi proposto, onde a nova tensão de meia-onda é 6,8 MV, reduzindo a sensibilidade do sensor e mantendo boas linearidades (Santos; Taplamacioglu; Hidaka, 2000, p. 2). Na Figura 5, mostra-se o sensor multi-segmentado em configuração longitudinal, onde lâminas de cristal Pockels são colocadas entre os espaçadores dielétricos (sem efeito eletro-óptico). Além disso, um gás de SF_6 é colocado no interior do recipiente para aumentar a resistência dielétrica do meio e reduzir o comprimento entre os eletrodos.

Figura 5 – Sistema de medição Pockels multi-segmentado.



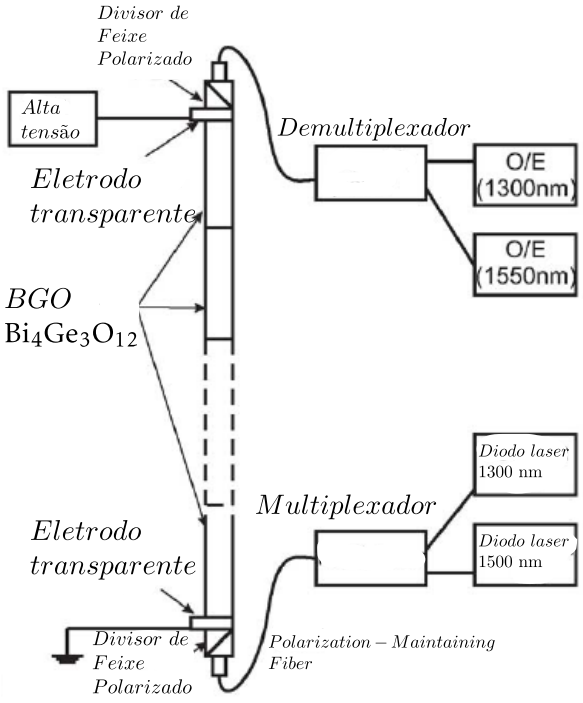
Fonte: adaptado de Santos, Taplamacioglu e Hidaka (2000).

Quanto ao sistema óptico, o feixe laser chega ao recipiente acrílico usando uma fibra óptica. Após o feixe laser passar pelo polarizador, ele é polarizado linearmente. A

seguir, passa por uma lâmina de quarto de onda, obtendo-se uma polarização circular. O cristal adiciona fase óptica e finalmente saí pelo analisador. A luz é guiada por uma fibra óptica até um fotodetector.

Em 2013, medições de tensão de 450 kV desde DC até a faixa de GHz foram desenvolvidas com um cristal em um arranjo longitudinal. O problema na época era que a tensão ficava limitada pelo valor de tensão de meia-onda (V_π). Isto significa que o valor da tensão de meia-onda fica muito abaixo da faixa das tensões a serem medidas. Com isso, um novo sistema foi proposto. Dois feixes laser (1300 nm e 1500 nm) foram usados para expandir a faixa de medição (Kumada; Hidaka, 2013, p. 1). Na Figura 6, apresenta-se que, antes de ingressar ao sistema eletro-óptico, são multiplexados. A seguir, o feixe multiplexado passa pelo divisor de feixe polarizado que polariza linearmente o feixe, e imediatamente pelo eletrodo transparente que deixa passar o feixe. O eletrodo transparente também aplica tensão entre um bloco de 8 cristais de BGO. Saindo do último divisor de feixe polarizado (com orientação do eixo transmissão paralela ao divisor de feixe na entrada), entra num demultiplexador que separa os feixes. Como o valor da tensão de meia-onda depende do comprimento de onda, então têm-se dois V_π diferentes. Dessa maneira, desenha-se a curva paramétrica a partir dos sinais fotodetectados. Assim, para calcular uma tensão desconhecida, calcula-se o ponto mais próximo àquela curva paramétrica e obtém-se a tensão.

Figura 6 – Diagrama do sistema de medição de alta tensão.



Fonte: adaptado de (Kumada; Hidaka, 2013, p. 1308)

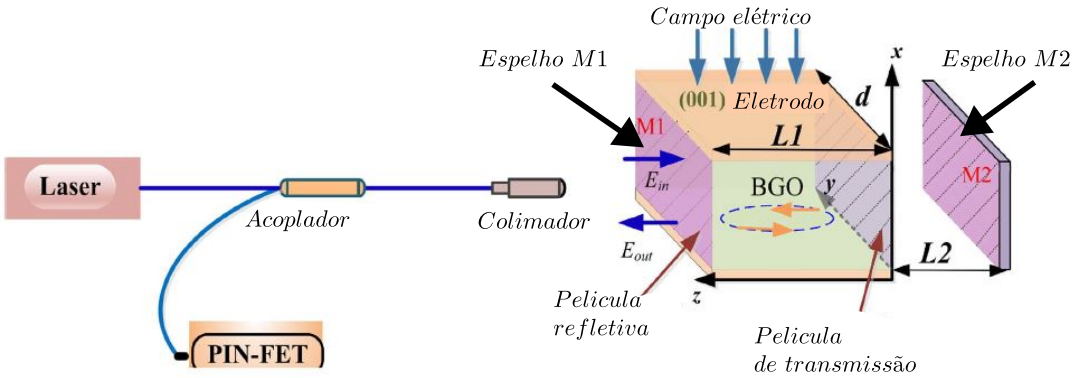
.

Em 2022, com objetivo da miniaturização, um sensor de tensão óptico ressoante foi

proposto (Zheng *et al.*, 2022), baseado na teoria da interferência de vários feixes múltiplos. O sensor foi montado e mostrou um limite de sensibilidade de $3,689 \times 10^{-5}$ V. Com essa nova proposta, alguns elementos ópticos foram removidos dos esquemas tradicionais, reduzindo a complexidade e o distúrbio de temperatura que afeta os elementos ópticos. O sistema considera dois parâmetros importantes: a perda de propagação e a refletividade dos espelhos. Onde, uma baixa perda de propagação e uma alta refletividade melhora a qualidade do sensor.

Na Figura 7, mostra-se o feixe de luz ingressando ao ressoador passando por um acoplador de fibra e um colimador. O feixe vai e volta entre os dois refletores do ressoador, composto por um cristal BGO. Após o feixe ser transmitido desde o ressoador, entra no PIN-FET (fotodetector). Quando uma tensão é aplicada nos eletrodos, o índice de refração muda, e isso leva a uma variação na frequência de ressonância. Assim, pode-se detectar as variações da frequência de ressonância do ressoador e conseguir fazer medições da tensão. Demostrou-se que, existe uma linearidade entre a frequência de ressonância do ressoador e a tensão aplicada nos eletrodos.

Figura 7 – Principio do novo sensor de tensão ressonante.



Fonte: adaptado de Zheng *et al.* (2022).

1.4 OBJETIVOS

O principal objetivo dessa dissertação é aplicar a abordagem de controle com alto ganho proposto por (Felão, 2019) num interferômetro polarimétrico em quadratura, a partir de um único sinal de saída de um sensor eletro-óptico de altas tensões, com base em células Pockels de $LiNbO_3$ usando o arranjo longitudinal de dois cristais, proposto por (Pereira, 2018).

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação de mestrado está dividida em sete capítulos, incluindo esta Introdução. No Capítulo 2 são descritas a polarização e algumas representações úteis para o desenvolvimento da modulação eletro-óptica. No Capítulo 3, o efeito eletro-óptico, a célula Pockels e o interferômetro polarimétrico são analisados. Em seguida, no Capítulo 4, apresenta-se o sensor eletro-óptico de altas tensões chaveado, aborda-se a obtenção dos sinais em quadradura, bem como a realimentação por controle de fase óptica. No Capítulo 5, uma breve teoria de modos deslizantes é desenvolvida e aplicada ao sistema polarimétrico. O procedimento experimental é então apresentado no Capítulo 6. Com os resultados do processamento dos sinais obtidos, é feita uma comparação entre o sinal de entrada e o sinal reconstruído. Por fim, no Capítulo 7 apresentam-se as conclusões e trabalhos futuros.

2 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS: POLARIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

As grandezas de campo $\vec{E}$ e $\vec{H}$ descrevem as ondas de luz como vetores. O vector de campo elétrico $\vec{E}$ é escolhido para definir o estado de polarização das ondas de luz. Essa escolha foi conveniente porque, na maioria dos meios ópticos, a interação física com a onda envolve o campo elétrico. O motivo deste capítulo é que, mais adiante, muitos meios anisotrópicos, onde os índices de refração dependem da direção de oscilação do vetor de campo elétrico, serão estudados.

2.1 ESTADOS DE POLARIZAÇÃO

Se as duas componentes de oscilação são totalmente não correlacionadas, a direção resultante de oscilação é aleatória e o feixe de luz é considerado como não polarizado. Um feixe de luz é considerado linearmente polarizado se seu campo elétrico oscila numa direção em particular.

A luz pode ser representada como:

$$\vec{E}_{op} = (E_x, E_y, E_z) = \vec{A}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}), \tag{1}$$

onde ω é frequência angular, $\vec{k}$ é vetor de onda, $\vec{A}$ é um vetor constante que representa a amplitude e $E_{x,y,z}$ é uma componente do vetor $\vec{E}_{op}$. A magnitude do vetor de onda é relacionada à frequência pela equação:

$$||\vec{k}|| = k = \frac{n\omega}{c_0} = \frac{n2\pi}{\lambda}, \tag{2}$$

onde n é o índice de refração, c_0 a velocidade da luz no vácuo e λ o comprimento da luz no vácuo. Em materiais com um pouco de absorção, o índice refração é complexo (Yariv; Yeh, 2006, p. 19). O campo elétrico é sempre perpendicular à direção de propagação, tal que:

$$\vec{k}.\vec{E}_{op} = 0. \tag{3}$$

Logo, por simplicidade matemática, o vetor de campo elétrico pode se mostrar do seguinte jeito:

$$\vec{E}_{op} = \vec{A}\exp(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})). \tag{4}$$

Suponha que feixe de luz se propaga ao longo do eixo z, dessa forma, as componentes transversais do campo elétrico podem ser definidas:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x\cos(\omega t - kz + \varrho_x) \\ E_y &= A_y\cos(\omega t - kz + \varrho_y), \end{aligned} \tag{5}$$

onde:

$$-\pi \leq \varrho_{x,y} \leq \pi. \tag{6}$$

2.1.1 Polarização linear

Considere-se a evolução no tempo do vetor de campo elétrico na origem $z = 0$:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t + \varrho_x) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t + \varrho_y). \end{aligned} \tag{7}$$

Seja a fase relativa:

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_y - \varrho_x \\ -\pi &\leq \varrho \leq \pi. \end{aligned} \tag{8}$$

Diz-se que um feixe é linear se o vetor de campo elétrico oscila numa direção constante no plano xy. Isto acontece se:

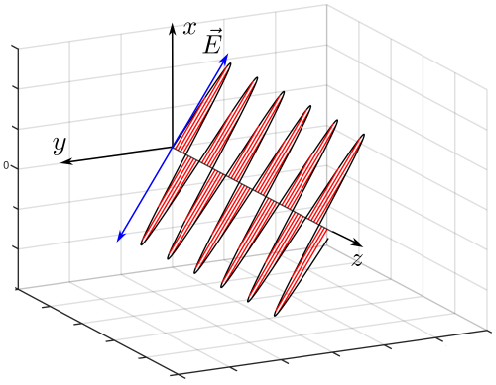
$$\varrho = 0, \pi. \tag{9}$$

O campo elétrico oscila em uma direção constante definida pela relação das duas componentes:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} \quad ou \quad -\frac{A_y}{A_x}. \tag{10}$$

O termo luz polarizado plano é igual a linearmente polarizado, e se o gráfico da onda plana for desenhado em $t = 0$, nota-se que a onda fica sobre um plano, como mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Polarização linear.



Fonte: Próprio autor.

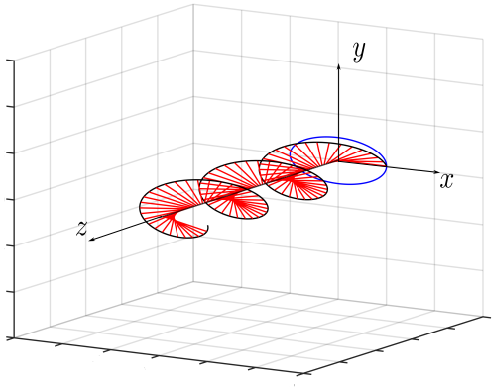
2.1.2 Polarização circular

Acontece quando $A_x = A_y$, quando o campo elétrico sofre uma rotação no plano xy, com:

$$\varrho = \varrho_y - \varrho_x = \pm\pi/2. \tag{11}$$

No caso $\varrho = \pi/2$, é circularmente polarizado para a direita. Se $\varrho = -\pi/2$, é circularmente polarizado para a esquerda. Na Figura 9, se consideramos o círculo azul como fonte e a onda se afasta na direção de $+z$, então a onda terá uma polarização circular esquerda.

Figura 9 – Polarização circular.



Fonte: Próprio autor.

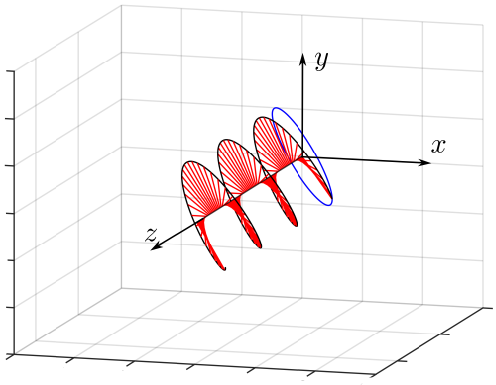
2.1.3 Polarização elíptica

Um feixe de luz propagando-se em z é considerado elipticamente polarizado se a curva traçada pelo extremo do vetor do campo elétrico é uma elipse no plano xy. A equação da elipse é obtida ao eliminar o termo temporal de (7):

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\cos(\varrho)}{A_x A_y} E_x E_y = \sin^2(\varrho). \tag{12}$$

De igual jeito ao caso circular, pode-se ter uma polarização elíptica para a direita ou esquerda. Na Figura 10, têm-se uma polarização elíptica para a esquerda quando a elipse azul é fonte e a onda propaga-se ao longo de $+z$.

Figura 10 – Polarização elíptica.



Fonte: Próprio autor.

2.1.4 Luz não polarizada

A maioria das fontes mais comuns de luz visível, incluindo-se luz de sol, a radiação térmica (corpo negro) e por fluorescência, produzem luz não coerente. A radiação é produzida independentemente por um grande número de átomos ou moléculas, cujas emissões são descorrelacionadas e, geralmente, polarizadas ao acaso.

O termo "não polarizada", de certa forma, é não exato, pois os fótons são polarizados, e assim, seria melhor empregar o termo polarização aleatória.

Os feixes de luz utilizados na prática contêm uma imensidade de fótons. Estatisticamente, a cada instante, metade da potência óptica encontra-se na projeção vertical e outra metade encontra-se na projeção horizontal.

Num laser de Hélio-Neônio de $\lambda = 632,8$ nm de 1 mW, pode-se calcular a quantidade de fótons emitidos usando a equação de efeito fotoelétrico (Young; Freedman; Ford, 2019, p. 1256) de Einstein:

$$E_p = h\nu, \tag{13}$$

onde h é constante de Planck:

$$h = 6,626069 \times 10^{-34} J.s \tag{14}$$

Deste modo, o número de fótons por segundo é $3,183 \times 10^{15}$.

2.2 REPRESENTAÇÃO DO VETOR DE JONES

O vetor de Jones é muito prático para a descrição do estado de polarização de uma onda plana. Nesta representação, a onda plana (4) é expressa em termos de suas amplitudes complexas como vetor coluna:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

O $\vec{J}$ é um vetor complexo, portanto, $\vec{J}$ não é um vetor no espaço físico real, em vez disso, é um vetor no espaço matemático abstrato. Pode-se escrever a componente em x do campo elétrico como:

$$E_x(t) = \mathbb{R}\left[J_x e^{i\omega t}\right] = \mathbb{R}\left[A_x e^{i(\omega t + \delta_x)}\right]. \tag{16}$$

O vetor de Jones contém a completa informação de amplitude e fase das componentes de campo elétrico. No caso de se ter interesse na fase, o vetor de Jones pode ser normalizado:

$$\vec{J}^*.\vec{J} = 1, \tag{17}$$

onde o asterisco denota uma conjugação complexa. Por conseguinte, um feixe de luz polarizado pode ser representado do seguinte jeito:

$$\begin{bmatrix} \cos(\Psi) \\ \sin(\Psi) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

onde Ψ é o ângulo azimutal da direção de oscilação em relação ao eixo x. O vetor ortogonal é:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\Psi) \\ \cos(\Psi) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Como situação especial, $\Psi = 0$, tem-se:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

No caso de polarização circular:

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Dessa forma, $\hat{R}$ e $\hat{L}$ são mutuamente ortogonais:

$$\hat{R}^*.\hat{L} = 0, \tag{22}$$

onde $(*)$ denota uma conjugação complexa. No caso elíptico, tem-se:

$$\vec{J}(\Psi, \varrho) = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) \\ e^{i\varrho}\sin(\Psi) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

2.3 POLARIZADORES

Um polarizador em lâmina é feito de um meio dicróico no qual um dos modos normais sofre uma atenuação por conta da absorção do material.

A matriz de Jones de polarizador laminar linear homogêneo, com seu eixo de transmissão paralelo ao eixo x, é:

$$P_0 = e^{-i\phi_b} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

onde ϕ_b é a fase absoluta acumulada devido à espessura óptica finita do polarizador.

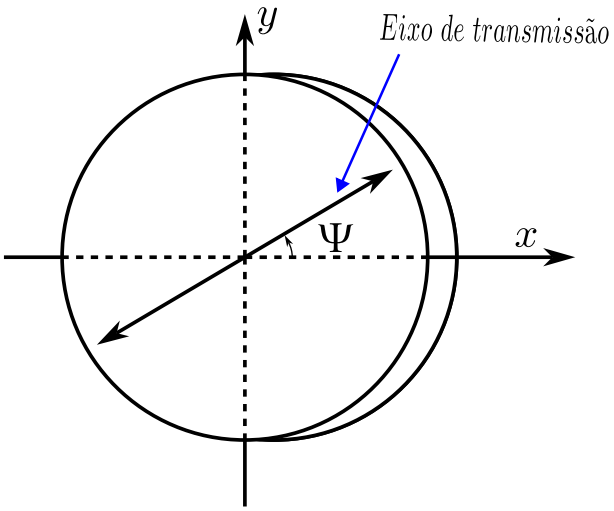
A matriz de Jones para um polarizador rodado, por um ângulo Ψ sobre o eixo z é dada por:

$$P = R(-\Psi)P_0R(\Psi). \tag{25}$$

O termo de $R(\Psi)$ é a matriz de rotação sobre o eixo de propagação:

$$\begin{bmatrix} \cos(\Psi) & \sin(\Psi) \\ -\sin(\Psi) & \cos(\Psi) \end{bmatrix} \equiv R(\Psi). \tag{26}$$

Figura 11 – Polaroide com ângulo azimutal de Ψ.



Fonte: Próprio autor.

Assim sendo, a matriz de Jones geral para um polaroide rodado Ψ do eixo x (Yariv; Yeh, 2006, p, 46) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\Psi) & \cos(\Psi)\sin(\Psi) \\ \sin(\Psi)\cos(\Psi) & \sin^2(\Psi) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Note-se que o termo $e^{-i\phi_b}$ não está presente na matriz de Jones equivalente, pois pode ser desprezado se os efeitos de interferência por conta de múltiplas reflexões não são importantes (Yariv; Yeh, 2006, p, 45).

Na Figura 11 pode ser visualizado o ângulo Ψ rodado referente ao eixo z e o eixo de transmissão, por onde um dos modos normais da luz terá um mínimo de absorção.

2.4 INTENSIDADE DO ESPECTRO DE TRANSMISSÃO

Em muitos casos, precisamos determinar a intensidade óptica transmitida. Para mudar a intensidade de um feixe transmitido, um analisador é preciso. Um analisador é um polarizador. É chamado de analisador simplesmente por conta de sua locação no sistema óptico. Costuma-se usar nos sistemas birrefringentes, um polarizador na entrada do sistema para preparar um feixe de luz linearmente polarizado, e um segundo polarizador (analisador) é colocado na saída, para analisar o estado de polarização do feixe emergente.

O vetor de Jones também tem informação da intensidade da luz. Considere-se um feixe de luz após de passar por um polarizador:

$$\vec{E}_{op} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \tag{28}$$

onde E_x e E_y são componentes no plano transversal xy. A intensidade pode ser calculada por:

$$I = \vec{E}^{\dagger}_{op}.\vec{E}_{op} = |E_x|^2 + |E_y|^2, \tag{29}$$

onde † indica a conjugado hermitiano do $\vec{E_{op}}$.

Se o vetor de Jones do feixe emergente, após passar ao longo de um analisador, é escrito como:

$$\vec{E_{op}}' = \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix}, \tag{30}$$

então a transmitância do sistema óptico birrefringente é:

$$T_r = \frac{|E'_x|^2 + |E'_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}. \tag{31}$$

2.5 LEI DE MALUS

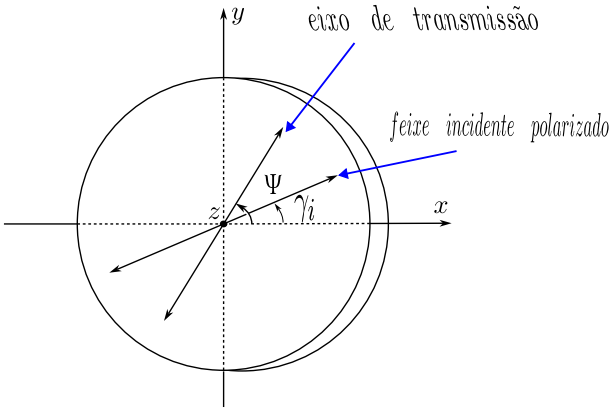
Para toda onda existem 3 propriedades fundamentais que são: polaridade, amplitude e fase. O controle da polarização pode ser descrito pela lei de Malus. Portanto, um feixe de entrada pode ser definido como (18):

$$\vec{E}_{op} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) \\ \sin(\gamma_i) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Usando-se (29), a intensidade de entrada resulta em:

$$I_0 = |E_x|^2 + |E_y|^2 = 1. \tag{33}$$

Figura 12 – Feixe de luz polarizado passando pelo polarizador.



Fonte: Próprio autor.

Segundo a Figura 12, a orientação do eixo de transmissão do polarizador fica a Ψ do eixo x. Posteriormente, pode-se calcular o vetor de Jones do campo elétrico após

passar pelo polarizador, pós multiplicando o vetor de entrada pela matriz (27):

$$\vec{E}'_{op} = \begin{bmatrix} \cos^2(\Psi) & \cos(\Psi)\sin(\Psi) \\ \sin(\Psi)\cos(\Psi) & \sin^2(\Psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) \\ \sin(\gamma_i) \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}'_{op} = \cos(\Psi - \gamma_i) \begin{bmatrix} \cos(\Psi) \\ \sin(\Psi) \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Em vista disso, a intensidade de saída será:

$$I_{out} = \vec{E'}^{\dagger}_{op}.\vec{E}'_{op} = \cos^2(\Psi - \gamma_i). \tag{35}$$

Num caso geral, se a intensidade de entrada é I_0:

$$I_{out} = I_0 \cos^2(\Psi - \gamma_i). \tag{36}$$

Como resultado particular, note que se a diferença for $\Psi - \gamma_i = 90°$, a intensidade é zero na saída. Então, se o eixo de transmissão de um polarizador é ortogonal a um feixe polarizado linearmente, na saída não haverá luz.

2.6 POLARIZAÇÃO LINEAR DE UM FEIXE DE LUZ NÃO POLARIZADO

Segundo a teoria eletromagnética clássica, a polarização de uma onda de luz é determinada pela característica transversal da vibração de um campo eletromagnético. Na teoria quântica, torna-se necessário dotar o fóton com uma propriedade de momentum angular, assim como para o elétron, mas também é necessário que esse conceito seja consistente com a descrição da onda da polarização. O fóton é um bóson e tem spin unitário; como o fóton não tem massa, ele não tem momento angular orbital, mas apenas seu spin intrínseco $s = 1$. Uma partícula spin-1 pode ter projeção $+1$, 0 e -1 com respeito a um eixo dado, porém, já que as ondas de luz são transversais, o componente-0 está descartado.

A partir da eletrodinâmica quântica, é conhecido que os fótons com helicidade de ± 1 são relacionados ao estado de polarização circular esquerda e direita (Träger, 2012, p. 20).

Segundo (Yariv; Yeh, 2006, p. 38) qualquer estado de polarização pode ser representado como uma superposição de dois estados de polarização mutuamente ortogonais, por exemplo, $\hat{R}$ e $\hat{L}$ de (21). Desta maneira, as polarizações nos eixos horizontal e vertical podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{R} + \hat{L}) \\ \hat{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{R} - \hat{L}). \end{aligned} \tag{37}$$

Do resultado (14), conhece-se que, para uma potência dada, um laser fornece uma certa quantidade de fótons por segundo. Por conseguinte, pode-se dizer então que, a cada segundo, uma certa quantidade desses fótons terá uma orientação aleatória linear, e o mesmo com outros grupos de fótons (terão uma orientação linear). Com isso, o feixe de luz não polarizado ficaria como um conjunto de feixes individuais linearmente polarizados.

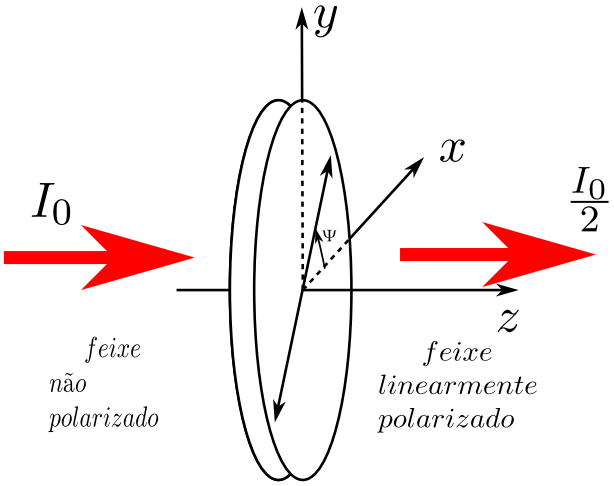
Com esse fato, segundo a lei de Malus a intensidade na saída do polarizador depende da diferença entre o ângulo do eixo de transmissão do polarizador Ψ e o ângulo azimutal γ_i da onda polarizada na entrada. Agora, considerando-se todos os possíveis ângulos de polarização, a intensidade na saída é a média da função de Malus sob o feixe de 0 até π.

Na Figura 13, o I_0 é a intensidade de entrada. Portanto, a média da função de Malus será:

$$\begin{aligned} I_{out} &= \langle I_0 \cos^2(\Psi - \gamma_i) \rangle = I_0 \frac{\int_0^\pi \cos^2(\Psi - \gamma_i) d\gamma_i}{\pi - 0} \\ I_{out} &= \frac{I_0}{2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Consegue-se demonstrar que, quando um feixe de luz não polarizada passa pelo polarizador linear, a intensidade fica reduzida à metade, sem importar o ângulo azimutal do eixo de transmissão.

Figura 13 – Feixe de luz não polarizado passando pelo polarizador linear.



Fonte: Próprio autor.

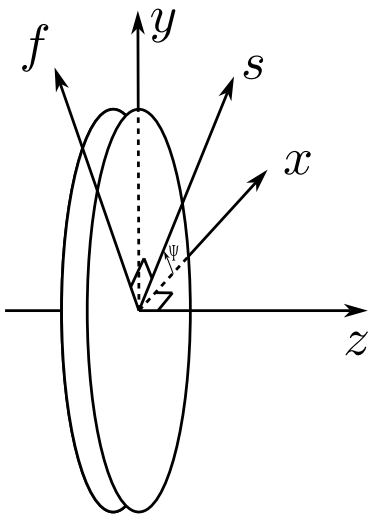
2.7 MÉTODO DE MATRIZ DE JONES

É preciso um método para tratar a propagação de um feixe de luz que passa pelos elementos birrefringentes.

Na óptica birrefringente tradicional, as lâminas de atraso são cortadas de um jeito que o eixo c fica na superfície do plano. Neste caso, a direção de propagação da luz

incidente é ortogonal ao eixo c, como na Figura 14.

Figura 14 – Lâmina de atraso.



Fonte: Próprio autor.

As lâminas de atraso e fibras ópticas birrefringentes são conversores de estado de polarização.

Na formulação do método de Jones, supõe-se que não exista reflexão da luz, e que ela é totalmente transmitida por meio das lâminas.

Um feixe de luz com estado polarizado é representado por:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \tag{39}$$

onde V_x e V_y podem ser complexos. Os eixos de laboratório são x e y.

Desse modo, será usada a matriz de rotação $R(\Psi)$ de (26) para que os eixos de laboratório fiquem colineares com os eixos birrefringentes:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix} = R(\Psi).\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Os eixos *slow* e $fast$ são fixos no meio, e V_s e V_f são modos normais da lâmina de atraso.

Após passar pela lâmina de atraso, cada componente sofre um atraso que depende do índice de refração e da espessura da lâmina:

$$\begin{bmatrix} V_s' \\ V_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-in_s\frac{2\pi}{\lambda}d} & 0 \\ 0 & e^{-in_f\frac{2\pi}{\lambda}d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Logo, o atraso de fase é:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)d. \tag{42}$$

O Γ é a medida da variação relativa em fase como resultado da propagação, ou seja, não é a variação absoluta. A birrefringência de uma lâmina costuma ser pequena:

$$|n_s - n_f| \ll n_s, n_f. \tag{43}$$

A variação de fase absoluta pode ser centenas de vezes maior que o atraso de fase.

Seja ϕ_b a mudança de fase absoluta:

$$\phi_b = \frac{1}{2}(n_s + n_f)\frac{2\pi}{\lambda}d, \tag{44}$$

então:

$$\begin{bmatrix} V'_s \\ V'_f \end{bmatrix} = e^{-i\phi_b} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Finalmente, o estado de polarização é obtido retornado ao eixo coordenado de laboratório:

$$\begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \end{bmatrix} = R(-\Psi) . \begin{bmatrix} V'_s \\ V'_f \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Agrupando todas as transformações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \end{bmatrix} = R(-\Psi) W_0 R(\Psi) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \tag{47}$$

onde W_0 é a matriz de Jones da lâmina de atraso. O termo $e^{-i\phi_b}$ pode ser desprezado se os efeitos devido às reflexões não são importantes.

3 EFEITO ELETRO-ÓPTICO LINEAR

3.1 EFEITO ELETRO-ÓPTICO

Considere-se o problema da propagação da radiação óptica em cristais na presença de um campo elétrico. Em determinados tipos de cristais é possível realizar uma mudança no índice de refração que é proporcional ao campo elétrico. Esse é o efeito eletro-óptico linear (Yariv; Yeh, 2006, p. 406) estudado pelo F. Pockels em 1893. Ele oferece uma maneira conveniente e amplamente utilizada no controle da intensidade ou fase da radiação de propagação.

Segundo a Teoria Quântica dos Sólidos, o tensor impermeabilidade dielétrica (η_{ij}) depende da distribuição de cargas no cristal (Yariv; Yeh, 1984, p. 221). A aplicação de um campo elétrico externo $\vec{E}$ ao cristal resulta numa distribuição das cargas ligadas e causa uma pequena deformação atômica. O resultado é uma variação no tensor impermeabilidade conhecido como efeito eletro-óptico, e descrito matematicamente como:

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}(\vec{E}) - \eta_{ij}(0), \tag{48}$$

onde $\eta_{ij}(0)$ é o tensor impermeabilidade (tensor de segunda ordem) do cristal quando não há campo externo aplicado, e $\eta_{ij}(\vec{E})$ é o tensor impermeabilidade quando um campo elétrico externo $\vec{E}$ é aplicado ao cristal.

Essa variação também pode ser expressa em uma série de Taylor, onde apenas os termos lineares importam, uma vez que correspondem ao efeito Pockels:

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk}E_k, \tag{49}$$

onde r_{ijk} é o coeficiente de Pockels ou coeficiente eletro-óptico linear e E_k é a componente de campo elétrico, onde cada um dos índices (i, j e k) pode assumir valores de 1, 2 e 3.

Relativamente ao sistema de coordenadas principal (x_1, x_2 e x_3) e na ausência do campo elétrico externo, tem-se:

$$\eta_{ij}(0)x_ix_j = \frac{x_1^2}{n_{x_1}^2} + \frac{x_2^2}{n_{x_2}^2} + \frac{x_3^2}{n_{x_3}^2} = 1, \tag{50}$$

onde n_{x_1}, n_{x_2} e n_{x_3} são os índices de refração principais.

Por outro lado, quando o campo elétrico externo $\vec{E}$ está presente, a impermeabilidade (η_{ij}) passa a ser função deste:

$$\eta_{ij}(\vec{E})x_ix_j = 1. \tag{51}$$

Na verdade, a variação na impermeabilidade dielétrica relativa, com relação ao campo elétrico, pode ser descrita como:

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk}E_k + s_{ijkl}E_kE_l + \cdots, \tag{52}$$

onde r_{ijk} e s_{ijkl} são os coeficientes eletro-ópticos linear e quadrático, respectivamente. A célula Pockels empregada neste trabalho é um cristal de $LiNbO_3$. O $LiNbO_3$ pertence ao sistema trigonal e é membro grupo de ponto $3m$ ($C3v$ em notação Schönflies) (Yariv; Yeh, 1984, p. 225). Segundo a literatura, as operações de simetria deste grupo de ponto $3m$ são $E2C_33\sigma_v$, onde E é uma operação de identidade, C_3, simetria de rotação com respeito ao eixo z de $360°/3$ e σ_v é a operação de reflexão ao plano de simetria.

Substituindo a (48) em (51), tem-se:

$$(\Delta\eta_{ij} + \eta_{ij}(0))x_ix_j = 1. \tag{53}$$

Em seguida, substituindo a parte linear de (52) em (53):

$$(\eta_{ij}(0) + r_{ijk}E_k)x_ix_j = 1, \tag{54}$$

o que corresponde a um novo elipsoide de índices de refração, modificado devido à presença do campo elétrico externo.

Em meios materiais e segundo (Yariv; Yeh, 1984, p. 14), é válido que:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E_{op}} + \vec{P} \tag{55}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E_{op}} + \varepsilon_0\chi_{ij}\vec{E_{op}} \tag{56}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_{ij})\vec{E_{op}} \tag{57}$$

$$\vec{D_i} = \varepsilon_{ij}\vec{E_j}, \tag{58}$$

onde o $\vec{D}$, $\vec{P}$ e χ_{ij} são o vetor de deslocamento elétrico, vetor de polarização e susceptibilidade elétrica respectivamente.

Em materiais não magnéticos e transparentes, o tensor permissividade dielétrica é real e simétrico (Yariv; Yeh, 2006, p. 30):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{59}$$

Um jeito formal de demonstrar a equação (59) é usando-se a densidade de energia armazenada no campo elétrico no meio anisotrópico e o princípio da conservação da energia eletromagnética (teorema de Poynting) (Yariv; Yeh, 1984, p. 70).

A magnitude dos 9 elementos do tensor permissividade depende da escolha dos eixos x_1, x_2 e x_3 relativos à estrutura do cristal. Consequentemente, devido à natureza real

e simétrica da permissividade, é sempre possível encontrar eixos mutuamente ortogonais de forma que os elementos fora da diagonal principal desapareçam. Têm-se:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{x_3} \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{x_3}^2 \end{bmatrix}, \tag{60}$$

onde ε_{x_1}, ε_{x_2} e ε_{x_3} são constantes dielétricas principais e n_{x_1}, n_{x_2} e n_{x_3} são índices de refração. As direções x_1, x_2 e x_3 são eixos dielétricos principais do cristal.

Porém, em geral, da equação (59) o tensor dielétrico é simétrico e tem 6 elementos diferentes.

A propagação da radiação óptica em um cristal pode ser descrita em termos do tensor impermeabilidade. Lembrando que:

$$\eta_{ij} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}^{-1}. \tag{61}$$

Dessa maneira:

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{-1} = I = I^T = (\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{-1})^T$$
$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{-1} = (\varepsilon_{ij}^{-1})^T(\varepsilon_{ij})^T$$
$$\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^{-1}\varepsilon_{ji},$$

use-se a propriedade (59) no termo da direita. Tem-se:

$$\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^{-1}\varepsilon_{ij},$$

Pós multiplicando ambos os lados por ε_{ij}^{-1} e por ε_0 à ambos lados:

$$\varepsilon_0\varepsilon_{ij}^{-1} = \varepsilon_0\varepsilon_{ji}^{-1}$$
$$\eta_{ij} = \eta_{ji}. \tag{62}$$

Demostrou-se que, se o tensor dielétrico é simétrico, então a impermeabilidade dielétrica também é simétrica. Logo, tem-se:

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\eta_{ji}.$$

Portanto, da relação linear (49), pode-se escrever:

$$r_{ijk}E_k = r_{jik}E_k. \tag{63}$$

A equação acima reduz o número de coeficientes independentes r_{ijk} de 27 para 18 (Nye JF, 1985, p. 247), e permite-se uma notação abreviada:

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_6 & \eta_5 \\ \eta_6 & \eta_2 & \eta_4 \\ \eta_5 & \eta_4 & \eta_3 \end{bmatrix}.$$

Os novos índices são definidos da seguinte forma (notação de Voit):

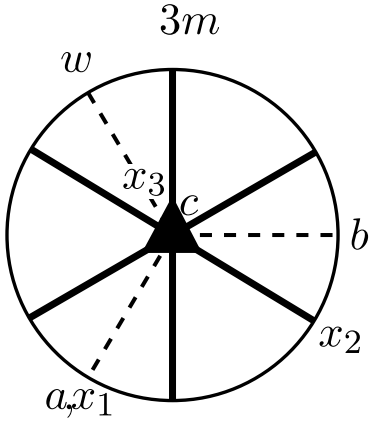
$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 1 \\ 22 &\rightarrow 2 \\ 33 &\rightarrow 3 \\ 23 = 32 &\rightarrow 4 \\ 13 = 31 &\rightarrow 5 \\ 12 = 21 &\rightarrow 6. \end{aligned}$$

Aplicando as considerações dos índices à equação (49), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} . \tag{64}$$

Até agora, a redução dos índices foi por conta da conservação da energia no material eletro-óptico. Ademais, por conta da simetria $3m$, o número de índices pode reduzir mais ainda.

Figura 15 – Projeção estereográfica trigonal 3m.



Fonte: Adaptado de Nye JF (1985).

Da Figura 15, pode-se olhar na linha tracejada os eixos a, b, c e w da célula unitária, e os eixos x_1, x_2 e x_3 do tensor que representa as propriedades físicas do cristal e são ortogonais. Note-se que em linha preta contínua são os planos de espelhos (por conta da operação de simetria de rotação 3-fold têm-se 3 planos espelhos). Também, note-se que, dependendo da locação do x_1, ele vai ou não ficar ortogonal a um dos planos de espelho. No caso que x_1 fique num plano espelho, x_2 ficaria ortogonal a um desses planos. Segundo (Chen *et al.*, 2021, p. 3) e (Sánchez-Dena *et al.*, 2020, p. 7), a estrutura cristalina

do $LiNbO_3$ pode ser descrita como hexagonal ou ortorrômbico, dessa forma, uma célula unitária hexagonal convencional apresenta um ângulo entre os eixos que ficam no plano perpendicular ao eixo c igual a 120°. Assim, o sistema coordenado definido pelos vetores da célula unitária não é ortogonal.

Uma convenção aceita relaciona os eixos hexagonais da célula unitária aos eixos x_1, x_2 e x_3 de propriedades físicas (sistema ortogonal). Eixo x_3 é paralelo ao eixo c, x_1 é escolhido para ficar sobre um dos eixos (a, b, w) localizados no plano perpendicular em relação ao eixo c. Após escolher x_1 e x_3, x_2 é escolhido tal que o sistema coordenado seja segundo a regra da mão direita (Weis; Gaylord, 1985, p. 193).

Ademais, tem-se 2 configurações para grupo de ponto trigonal $3m$. Yariv e Yeh (2006, p. 410) mostram as matrizes para as duas configurações. Para nosso caso, escolhe-se a primeira configuração, em vista das pesquisas feitas no LOE as quais estão sendo desenvolvidas com sucesso (Pereira, 2018), (Pereira, 2013), (Martins, 2006):

$$r_{pk} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{65}$$

sendo $p = 1, \ldots, 6$ e $k = 1, \ldots, 3$. Observam-se apenas oito coeficientes eletro-ópticos não nulos, sendo que apenas quatro deles são independentes: r_{13}, r_{22}, r_{33} e r_{51}.

A matriz acima pode ser obtida com ajuda das matrizes de transformação para elementos de simetria. Segundo (Newnham, 2005, p. 25) os cristais da classe $3m$ têm como elementos de simetria $3 \parallel x_3$ e $m \perp x_1$, onde x_3 é x_1 são os eixos do sistema coordenado que representa as propriedades físicas, e m é um plano espelho da Figura 15. Depois da transformação, a matriz de coeficientes eletro-ópticos deve permanecer igual (Lei de Neumann) (Newnham, 2005, p. 89). Primeiramente, compara-se termo a termo e se resolvem as equações lineares. Depois, nota-se que haverão termos nulos e outros independentes:

$$m \perp x_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 3 \parallel x_3 \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de (64) e (65), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Delta\eta_1 &= -r_{22}E_2 + r_{13}E_3 \\
\Delta\eta_2 &= r_{22}E_2 + r_{13}E_3 \\
\Delta\eta_3 &= r_{33}E_3 \\
\Delta\eta_4 &= r_{51}E_2 \\
\Delta\eta_5 &= r_{51}E_1 \\
\Delta\eta_6 &= -r_{22}E_1.
\end{aligned} \tag{66}$$

Expandindo (54) e usando-se a propriedade (62), tem-se:

$$\begin{aligned}
(\eta_{11} + \Delta\eta_{11})x_1^2 + (\eta_{22} + \Delta\eta_{22})x_2^2 + (\eta_{33} + \Delta\eta_{33})x_3^2 + \\
2(\eta_{23} + \Delta\eta_{23})x_2x_3 + 2(\eta_{13} + \Delta\eta_{13})x_1x_3 + 2(\eta_{12} + \Delta\eta_{12})x_1x_2 = 1,
\end{aligned} \tag{67}$$

onde as direções x_1, x_2 e x_3, são eixos dielétricos principais do cristal definidos em (60).

Agora é necessário calcular o tensor impermeabilidade dielétrica na ausência de um campo elétrico externo, $\eta(0)$. A partir de (60) e de (61) tem-se que a impermeabilidade fica:

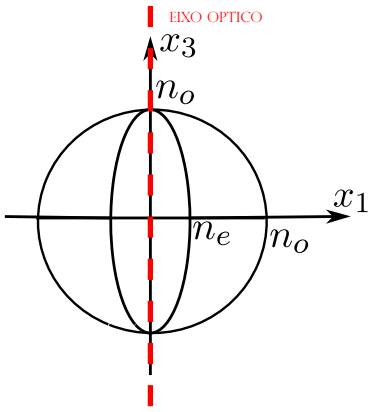
$$\eta_{ij}(0) = \begin{bmatrix} 1/n_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_{x_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}, \tag{68}$$

sendo $n_o = n_{x_1} = n_{x_2}$ e $n_e = n_{x_3}$. Desta maneira, o cristal de $LiNbO_3$, segundo o (Yariv; Yeh, 1984, p. 232), é um cristal uniaxial negativo, porque o índice de refração ordinário $n_o = 2.286$ é maior que o extraordinário, de $n_e = 2.200$, sendo:

$$n_e = n_{x_3} \leq n_o = n_{x_1} = n_{x_2}. \tag{69}$$

Nesta convenção, o eixo óptico está no plano x_1x_3.

Figura 16 – Meio uniaxial negativa com birrefringência $n_e \leq n_o$.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 16 é uma interseção da superfície normal com o plano x_1x_3. A superfície normal para um cristal uniaxial como o $LiNbO_3$ tem a seguinte equação (Yariv; Yeh, 2006, p. 34):

$$\left(\frac{k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2}{n_e^2} + \frac{k_{x_3}^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right)\left(\frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) = 0, \tag{70}$$

onde k é o vector de onda, e k_{x_1}, k_{x_2} e k_{x_3} são os componentes do vetor de onda com orientação nos eixos dielétricos principais. Note-se da equação (70), que o primeiro fator da esquerda é um elipsoide cujo eixo maior $2n_o$ está relacionado ao eixo x_3. O segundo fator da esquerda é uma esfera de diâmetro $2n_o$. Portanto, a linha que passa pela origem e intercepta os pontos onde as duas superfícies têm contato é o eixo óptico. Neste caso, é colinear ao eixo x_3.

A seguir combinamos (68), (69) e (66) em (67), para obter:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_2 + r_{13}E_3\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_2 + r_{13}E_3\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E_3\right)x_3^2 + 2(r_{51}E_2)x_2x_3 + 2(r_{51}E_1)x_1x_3 + 2(-r_{22}E_1)x_1x_2 = 1. \tag{71}$$

Vamos analisar duas situações: a primeira, quando o campo elétrico externo é paralelo ao eixo x_3 e o feixe laser propaga-se paralelo x_1 ou x_2. A segunda, quando o campo elétrico externo é paralelo ao eixo x_2 e o feixe óptico propaga-se paralelo ao eixo x_3 ou x_1.

A) No primeiro caso, o campo elétrico externo $\vec{E} = (0, 0, E)$. Usando este novo valor de campo em (71), obtém-se:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E\right)x_3^2 = 1. \tag{72}$$

Nota-se que em (72) não há ocorrência de produtos cruzados de coordenadas, e assim, conclui-se que as direções dos eixos principais do novo elipsoide de índices permanecem inalteradas (não há rotação dos eixos). Porém, ocorrem novos índices de refração: n'_{x_1}, n'_{x_2} e n'_{x_3}. Por conseguinte, (72) pode ser escrita como:

$$\frac{x_1^2}{n_{x_1}'^2} + \frac{x_2^2}{n_{x_2}'^2} + \frac{x_3^2}{n_{x_3}'^2} = 1. \tag{73}$$

Comparando-se (72) com (73), conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{x_1}'^2} &= \frac{1}{n_o^2} + r_{13}E = \frac{1}{n_{x_2}'^2} \\ \frac{1}{n_{x_3}'^2} &= \frac{1}{n_e^2} + r_{33}E, \end{aligned} \tag{74}$$

a partir das quais se obtém:

$$\begin{aligned} n'_{x_1} = n'_{x_2} &= \frac{n_o}{\sqrt{1 + n_o^2 r_{13} E}} \\ n'_{x_3} &= \frac{n_e}{\sqrt{1 + n_e^2 r_{33} E}}. \end{aligned} \tag{75}$$

Conforme a literatura (Yariv; Yeh, 2006, p. 412) os valores dos coeficientes electro-óptico para o $LiNbO_3$, no comprimento de onda de 632,8 nm, até uma temperatura máxima de 1230°C e para a frequência do campo externo na faixa de áudio, são:

$$\begin{aligned} r_{13} &= 9,6 \times 10^{-12} \text{ m/V} \\ r_{22} &= 6,8 \times 10^{-12} \text{ m/V} \\ r_{33} &= 30,9 \times 10^{-12} \text{ m/V} \\ r_{51} &= 32,6 \times 10^{-12} \text{ m/V}. \end{aligned} \tag{76}$$

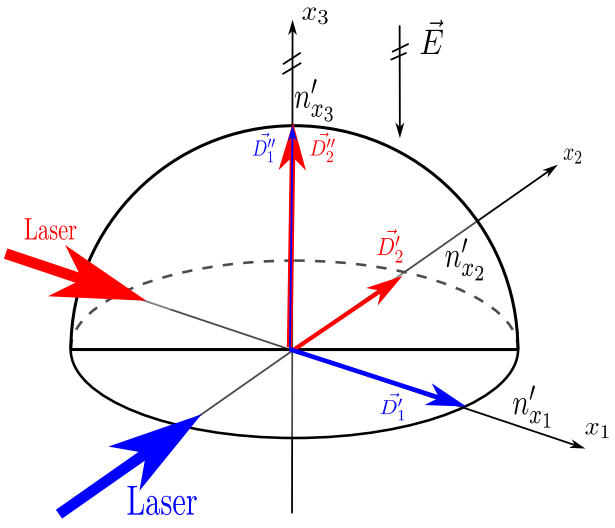
Note-se que, em (75), para um valor de E entorno das dezenas de kV o termo $n_o^2 r_{13} E << 1$ e $n_e^2 r_{33} E << 1$ (são muito menores que 1). Pode-se usar o Taylor (Stewart, 2007, p. 749) em torno de zero na seguinte expansão:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \cdots . \tag{77}$$

Desse modo, com ajuda de (77), (75) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} n'_{x_1} = n'_{x_2} &= n_o \left(1 - \frac{n_o^2 r_{13} E}{2}\right) \\ n'_{x_3} &= n_e \left(1 - \frac{n_e^2 r_{33} E}{2}\right). \end{aligned} \tag{78}$$

Figura 17 – Novo elipsoide de refração com campo elétrico externo paralelo a x_3.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 17 desenhou-se o novo elipsoide de índices de refração (ou indicatrix) que, por conta da igualdade dos índices n'_{x_1} e n'_{x_2}, a interseção com o plano x_1x_2 é uma circunferência. Na condição de modulação eletro-óptica transversal, note-se que, no caso em que o feixe óptico propaga-se paralelo ao eixo x_1 ou x_2, com uma polarização linear, as componentes do campo elétrico terão velocidades de fase diferentes entre si. Também, que os eixos principais não mudaram de posição, ou seja, o elipsoide não sofreu rotação em relação ao sistema de eixos coordenados inicial. Adicionalmente, mostram-se os vetores deslocamentos elétricos para cada componente segundo o eixo de propagação do feixe óptico. Então, para a mesma magnitude do laser, os vetores $\vec{D}'_1$ e $\vec{D}'_2$ são iguais, e o mesmo acontece com $\vec{D}''_1$ e $\vec{D}''_2$. Finalmente, por conta que $n'_{x_3} \neq n'_{x_1} = n'_{x_2}$ o elipsoide perturbado é uniaxial.

B) Na segunda situação, o campo elétrico externo é paralelo ao eixo x_2 e o feixe óptico propaga-se paralelo ao eixo x_1 ou x_3. Dessa forma, fazemos o cálculo similar ao caso anterior, mas com $\vec{E} = (0, E, 0)$ em (71):

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2}\right)x_3^2 + 2r_{51}Ex_2x_3 = 1. \tag{79}$$

Nota-se que em (79) temos um termo de produto cruzado de coordenadas. Para poder comparar os índices de refração com o novo elipsoide gerado, é preciso ficar na forma similar a (73), dessa maneira, uma rotação de eixos é preciso fazer em (79) para zerar o termo cruzado.

Pode-se aproveitar a matriz de rotação de (Nye JF, 1985, p. 43) para girar o elipsoide respeito ao eixo x_1:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ 0 & \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \tag{80}$$

$$x = M(\theta_r)x',$$

onde x' é o vetor no novo eixo coordenado. A seguir, o (79) pode se expressar como matriz:

$$x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E & 2r_{51}E \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_e^2} \end{bmatrix} x = 1, \tag{81}$$

onde x^T é a transposta da matriz. Então, com ajuda de (80) em (81), tem-se:

$$x'^T M(\theta_r)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E & 2r_{51}E \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_e^2} \end{bmatrix} M(\theta_r)x' = 1 \tag{82}$$

$$x'^T R(\theta_r) x' = 1.$$

Assim, deve-se notar que a matriz resultante R do produto das 3 matrizes (no lado esquerdo), é uma matriz diagonal para zerar o termo cruzado. Somando os termos $R(2,3)$ e $R(3,2)$, obtém-se:

$$\theta_r = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2r_{51}E}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + r_{22}E}\right). \tag{83}$$

A seguir, para uma tensão da ordem de dezenas de kV, o valor de θ fica muito pequeno:

$$\lim_{\theta_r \to 0} R(\theta_r) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_e^2} \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Para efeitos práticos, os eixos novos coordenados ficam na mesma posição do eixo coordenado original para nosso projeto de pesquisa.

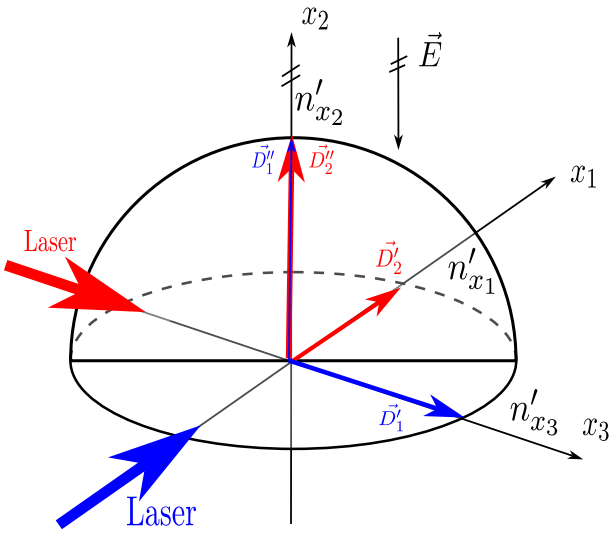
Os novos índices de refração do sistema são:

$$\begin{aligned} n'_{x_1} &= \frac{n_o}{\sqrt{1 - n_o^2 r_{22} E}} \\ n'_{x_2} &= \frac{n_o}{\sqrt{1 + n_o^2 r_{22} E}} \\ n'_{x_3} &= n_e. \end{aligned} \tag{85}$$

Tal como no caso anterior, usa-se série de Taylor torno a zero para obter:

$$\begin{aligned} n'_{x_1} &= n_o \left(1 + \frac{n_o^2 r_{22} E}{2}\right) \\ n'_{x_2} &= n_o \left(1 - \frac{n_o^2 r_{22} E}{2}\right) \\ n'_{x_3} &= n_e. \end{aligned} \tag{86}$$

Figura 18 – Novo elipsoide de índices de refração com campo elétrico externo paralelo ao x_2.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 18, os eixos coordenados não mudam. A figura gerada pela interseção do elipsoide de índices e o plano x_1x_3 é uma elipse, porque $n'_{x_1} \neq n'_{x_3}$. Na condição de modulação eletro-óptica transversal, as componentes do campo elétrico de um feixe laser linearmente polarizado terão uma velocidade de fase diferente, por conta dos diferentes índices de refração. Note-se que, ao ter os 3 índices de refração diferentes, o elipsoide de índices de refração perturbado refere-se a um meio biaxial.

3.2 MODULAÇÃO ELETRO-ÓPTICA DE RETARDO DE FASE

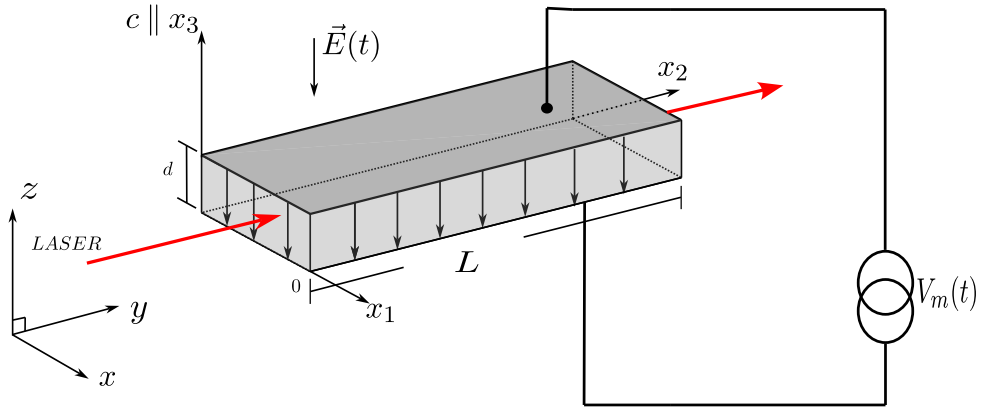
Demostrou-se que um campo elétrico externo pode mudar o elipsoide de índices de refração em certos cristais. As características de propagação do feixe óptico são governadas pelo elipsoide de índices. Pode-se usar o efeito eletro-óptico para manipular a propagação das ondas, principalmente sua fase e estado de polarização. Essa modulação pode, se desejar, ser modulação de amplitude.

Como foi explicado na seção anterior, por convenção, o eixo c da célula unitária hexagonal tem a mesma direção do eixo x_3 do sistema principal do cristal. Assim, pode-se assumir o eixo c como referência em nosso estudo.

3.2.1 Propagação do feixe de luz perpendicular ao eixo cristalino c

Nesta primeira situação, considere-se a propagação de um feixe polarizado em um cristal de $LiNbO_3$ sob influência de um campo elétrico. Na Figura 19, mostra-se um desenho esquemático de um cristal de niobato de lítio com um campo elétrico $\vec{E}(t)$ paralelo ao eixo x_3 (paralelo ao eixo cristalino c).

Figura 19 – Cristal de niobato de lítio com campo elétrico paralelo ao eixo x_3.



Fonte: Próprio autor.

Pela seção anterior, os novos eixos principais com campo elétrico externo aplicado paralelo ao eixo x_3 não mudam em relação ao sistema (x_1, x_2, x_3) da Figura 19. Considerando a propagação ao longo do eixo x_2, precisamos determinar a elipse gerada pela interseção do plano $x_2 = 0$ e o elipsoide de índices. A equação dessa elipse é obtida de (72), colocando $x_2 = 0$, e resulta em:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right) x_1^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E\right) x_3^2 = 1. \tag{87}$$

A partir do elipsoide de índices de refração, segue-se que os dois modos normais são polarizados ao longo de x_1 e x_3, e, que seus índices de refração n'_{x_1} e n'_{x_3} são dados por (78).

Para essa direção de propagação, usa-se o resultado de (78), dessa forma, a birrefringência é dada por:

$$n'_{x_3} - n'_{x_1} = (n_e - n_o) - \frac{E}{2}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}). \tag{88}$$

Sendo L o comprimento do cristal, o retardo de fase para este cristal é então dado por:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\omega}{c_0}(n'_{x_3} - n'_{x_1})L \\
\Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda}(n'_{x_3} - n'_{x_1})L \\
\Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda}((n_e - n_o) - \frac{E}{2}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}))L \\
\Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)L - \frac{V_m L\pi}{\lambda d}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}),
\end{aligned} \tag{89}$$

onde V_m é a tensão aplicada, calculada por $V_m = Ed$. Note-se que o atraso eletro-óptico de fase é proporcional ao comprimento do cristal, em uma tensão determinada. O atraso de fase total (89) tem um termo que não depende da tensão aplicada, que se refere

à birrefringência natural do cristal. Assim, o desvio de fase associado a birrefringência natural do cristal é:

$$\phi_o = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)L. \tag{90}$$

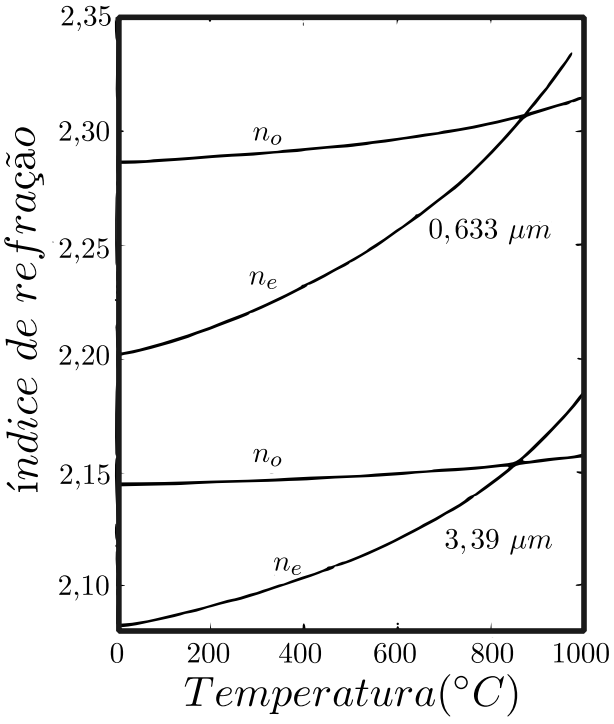
Devido à birrefringência natural do cristal, o arranjo fica muito susceptível às variações de temperatura ambiente, causando o fenômeno chamado desvanecimento de sinal ($fading$) (Pereira, 2018, p. 38). Segundo (Smith; Riccius; Edwin, 1976, p. 334), os índices de refração ordinário e extraordinário dependem da temperatura segundo o polinômio de quarta ordem:

$$n_T = n_x(1 + d_1T + d_2T^2 + d_3T^3 + d_4T^4), \tag{91}$$

onde $d_1, \cdots d_4$ são os coeficientes polinomiais para o ajuste de mínimos quadrados dos dados experimentais e T é a temperatura em graus Celsius. O termo n_x é o índice de refração ordinário ou extraordinário à 0°C.

Na Figura 20, mostra-se a variação dos índices de refração ordinário e extraordinário do $LiNbO_3$ com a temperatura, para os comprimentos de onda de $0,633\ \mu m$ (laser He−Ne) e $3,39\ \mu m$. A birrefringência negativa diminui em magnitude à medida que a temperatura aumenta, tornando-se zero a $882°C$ $(0,633\ \mu m)$; acima dessas temperaturas o niobato de lítio tem birrefringência positiva (Hobden; Warner, 1966, p. 243).

Figura 20 – Dependência de temperatura do índice de refração para dois comprimentos de onda.

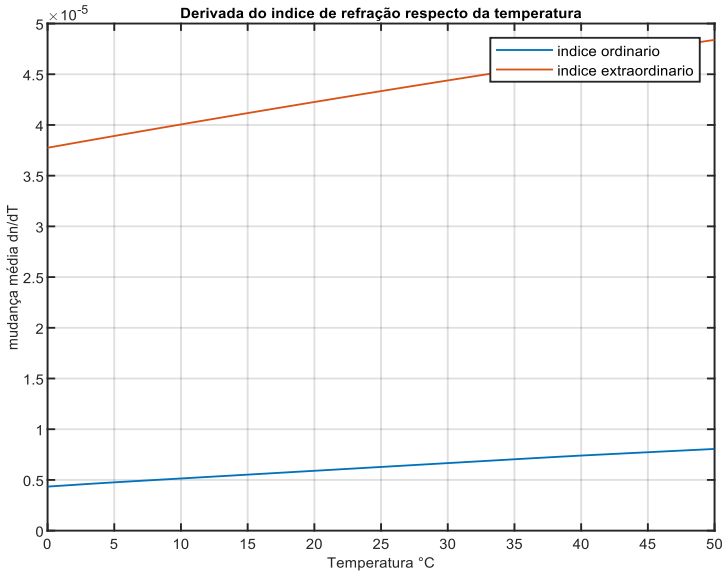


Fonte: Adaptado de Smith, Riccius e Edwin (1976).

Logo, derivando-se (91) e usando-se o Matlab desenha-se a Figura 21. Note-se na

mesma figura, no eixo vertical, que a variação média de dn/dT é da ordem de 10^{-5}, o qual concorda com o dito por (Bodnar; Yarunichev, 2001, p. 359).

Figura 21 – Derivada do índice de refração em função da temperatura.

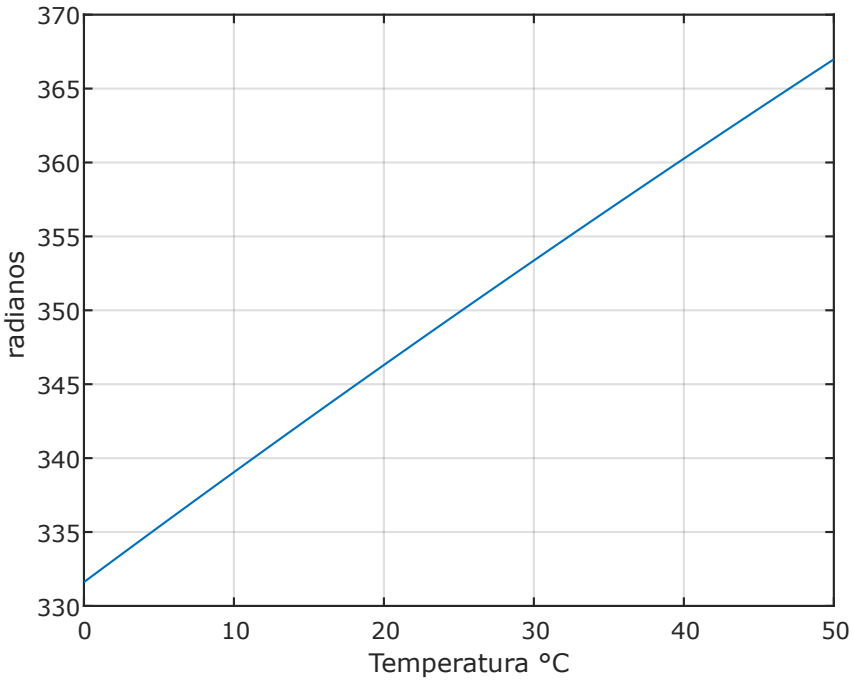


Fonte: Próprio autor.

Com ajuda de (91), desenha-se o gráfico da variação em radianos de (90) em relação à temperatura:

$$\frac{d}{dT}(\phi_o) = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{dT}(n_e - n_o). \tag{92}$$

Figura 22 – Gráfico de $d(n_e - n_o)/dT$ para o comprimento de onda $632,8$ nm.



Fonte: Próprio autor.

Assim, da Figura 22 tem-se que a variação é de 1 rad por °C aproximadamente, o qual é muito grande relativamente aos valores de fase induzida que se desejam medir, em torno de mrad.

O termo que depende da tensão aplicada em (89), é dado por:

$$\phi(t) = \frac{V_m(t)L\pi}{\lambda d}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}). \tag{93}$$

Portanto, a tensão de meia-onda, que fornece um índice de modulação de fase de π neste caso, é dada por:

$$V_\pi = \frac{\lambda d}{L(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13})}. \tag{94}$$

Da relação direta e inversamente proporcional com os comprimentos d e L respectivamente, a tensão de meia-onda é menor quanto menor for d e maior, L. Na prática, o espaço entre os eletrodos é limitado pelo diâmetro do feixe laser e o problema de difração (Yariv; Yeh, 2006, p. 425). Nesta situação, uma onda guiada pode ser importante na modulação eletro-óptica.

O valor de V_π pode ser estimado para um caso particular que será usado em nossa pesquisa, onde um dos cristais terá a configuração da Figura 19. Para um comprimento de onda de $\lambda = 632,8$ nm, $n_o = 2,286$, $n_e = 2,2$, $L = 50,025$ mm e $d = 1,1$ mm e os valores de (76), obtém-se de (94):

$$V_\pi = 64,92 \text{ V}. \tag{95}$$

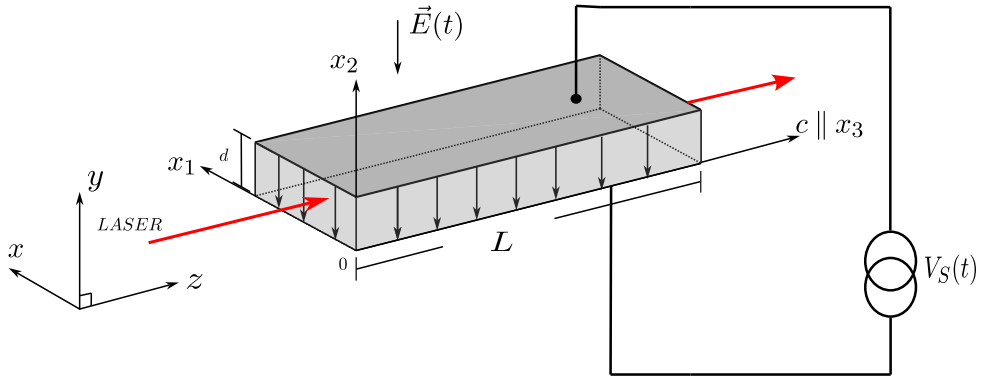
Fazendo-se $\phi(t) = \pi$ em (93), e, combinando com (94), mostra-se também que $\phi(t)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\phi(t) = \frac{\pi V_m(t)}{V_\pi}. \tag{96}$$

3.2.2 Propagação do feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c

Na segunda situação, considere-se a Figura 23, onde o campo elétrico externo é paralelo ao eixo x_2 e o feixe óptico propaga-se paralelo ao eixo x_3. Lembre-se, da seção anterior, que nesta configuração existe uma rotação de eixos muito pequena, caso a tensão entre os eletrodos fique na faixa das dezenas dos kV.

Figura 23 – Cristal de niobato de lítio com campo elétrico paralelo ao eixo x_2.



Fonte: Próprio autor.

Então, considera-se que a rotação é zero, e que os eixos coordenados (x_1, x_2, x_3) serão os mesmos quando o campo externo $\vec{E}(t)$ for aplicado. Daí, a elipse gerada pela interseção do plano $x_3 = 0$ e o elipsoide de índices é:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E\right) x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E\right) x_2^2 = 1. \tag{97}$$

A partir do elipsoide de índices de refração, segue-se que os dois modos normais são polarizados ao longo de x_1 e x_2, e, que seus índices de refração n'_{x_1} e n'_{x_2} são dados por (86). Dessa maneira, a birrefringência é dada por:

$$n'_{x_1} - n'_{x_2} = n_o^3 r_{22} E. \tag{98}$$

Seja L o comprimento do cristal, o retardo de fase para este cristal é então dado por:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\omega}{c_0}(n'_{x_1} - n'_{x_2})L \\ \Gamma(t) &= \frac{2\pi L}{\lambda d} n_o^3 r_{22} V_S(t). \end{aligned} \tag{99}$$

Note-se do resultado (99), que o retardo de fase não tem termos independentes da tensão aplicada. Portanto, esta nova configuração possui maior imunidade ao desvanecimento do sinal devido às variações de temperatura ambiental.

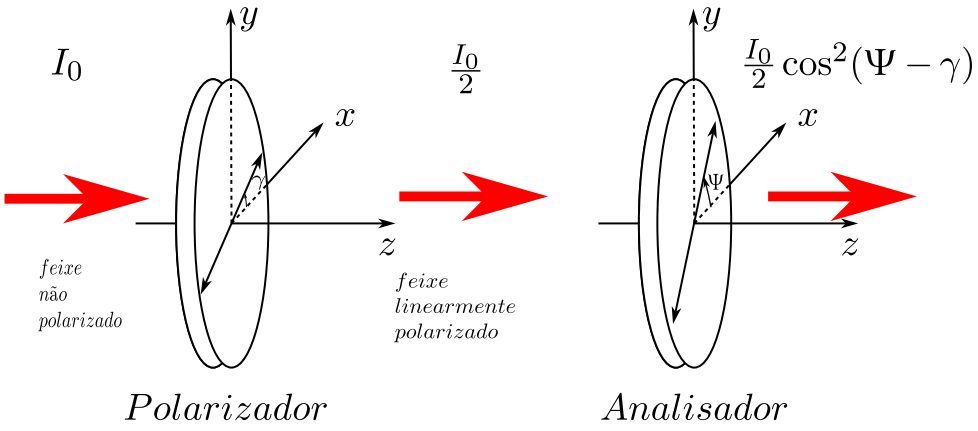
O valor de V_π pode ser estimado para um caso particular, onde um dos cristais que vai se usar nesta pesquisa tem configuração segundo a Figura 23. Para um comprimento de onda de $\lambda = 632,8$ nm, $n_o = 2,286$, $n_e = 2,2$, $L = 10,258$ mm e $d = 9,924$ mm e os valores de (76), obtém-se (99):

$$V_\pi = 3,768 \text{ kV}. \tag{100}$$

3.3 MODULAÇÃO ELETRO-ÓPTICA DE AMPLITUDE

A lei de Malus, estudada na seção 2.5, estabelece que podemos controlar a intensidade na saída de um feixe de luz polarizado linearmente. Depois, a luz polarizada, segundo a seção 2.6, pode ser obtida de um feixe de luz não polarizada que passa através de um polarizador linear. Conforme esquematizado na Figura 24, com dois polarizadores, pode-se modular a intensidade de um feixe não polarizado.

Figura 24 – Modulador de intensidade com dois polarizadores.



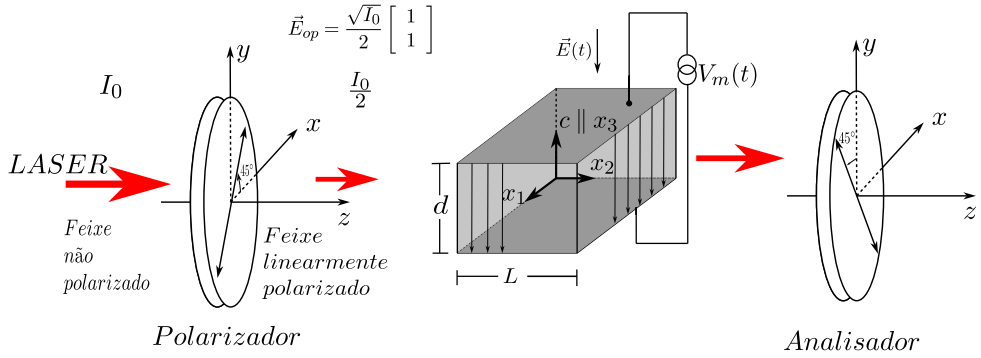
Fonte: Próprio autor.

Note-se que, caso o argumento do cosseno seja 90°, a intensidade de saída é zero. O controle do fluxo da energia óptica é a base da modulação eletro-óptica de luz.

3.3.1 Propagação do feixe de luz perpendicular ao eixo cristalino c

Costuma-se usar o arranjo de modulador eletro-óptico de amplitude, colocando um cristal entre dois polarizadores. Analisaremos aqui o caso de um modulador eletro-óptico transversal entre polarizadores cruzados (90° de diferença entre seus eixos de transmissão).

Figura 25 – Modulador eletro-óptico transversal usando um cristal de $LiNbO_3$.



Fonte: Próprio autor.

Note-se, da Figura 25, que o polarizador tem um ângulo de 45° em relação ao eixo x, e, que o analisador tem um ângulo de 45° em relação ao eixo y. Logo, entre os polarizadores tem-se um cristal de $LiNbO_3$, onde o feixe de luz é perpendicular ao eixo cristalino c, como no caso estudado na subseção 3.2.1.

Suponhamos então, como se mostra na Figura 25, que nosso feixe de entrada tenha uma intensidade de I_0 e seja não polarizado. Após passar pelo polarizador, sua intensidade é reduzida a $I_0/2$. Nesse ponto, com ajuda de (29), pode-se calcular o vetor de Jones $\vec{E}_{op}$ tal que, multiplicado pelo conjugado hermitiano, dê como resposta $I_0/2$. No momento após passar pelo polarizador, o vetor de Jones do campo elétrico tem componentes iguais:

$$\vec{E}_{op} = \begin{bmatrix} E_0 \\ E_0 \end{bmatrix}. \tag{101}$$

Portanto, a amplitude pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} |E_0|^2 + |E_0|^2 &= \frac{I_0}{2} \\ E_0 &= \frac{\sqrt{I_0}}{2}. \end{aligned} \tag{102}$$

Nessa configuração, o campo elétrico externo não muda os eixos coordenados. Então, os modos normais ficam polarizados ao longo dos eixos coordenados x e y da Figura 25. O vetor de Jones depois do polarizador fica como:

$$\vec{E}_{op} = \frac{\sqrt{I_0}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{103}$$

Dado que eixos ficam sem rotação, a matriz de atraso (45), gerada pelo cristal, é:

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix}, \tag{104}$$

onde o Γ é dado por (89). Finalmente, o feixe passa pelo analisador e, segundo a Figura 25 ele tem 45° em relação ao eixo y, sendo o mesmo que 135° em relação ao eixo x. Com ajuda de (27), a matriz Jones do analisador é:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{105}$$

Finalmente, as matrizes são multiplicadas:

$$\vec{E'}_{op} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix}.\frac{\sqrt{I_0}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{E'}_{op} = \frac{\sqrt{I_0}}{2} i \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, o conjugado hermitiano de $\vec{E'}_{op}$ será:

$$\vec{E'}^{\dagger}_{op} = \frac{\sqrt{I_0}}{2}(-i)\sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{106}$$

Então, a intensidade de saída é:

$$I_{out} = \vec{E'}^{\dagger}_{op}.\vec{E'}_{op} = \frac{I_0}{2}\sin^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right). \tag{107}$$

Usando-se propriedades trigonométricas, (107) pode ser escrita como:

$$I_{out} = \frac{I_0}{4}(1-\cos(\Gamma)). \tag{108}$$

Costuma-se calcular a transmitância (31), como a razão entre a intensidade após analisador e a intensidade após polarizador:

$$T_r = \frac{I_{out}}{I_0/2} = \frac{1}{2}(1-\cos(\Gamma)). \tag{109}$$

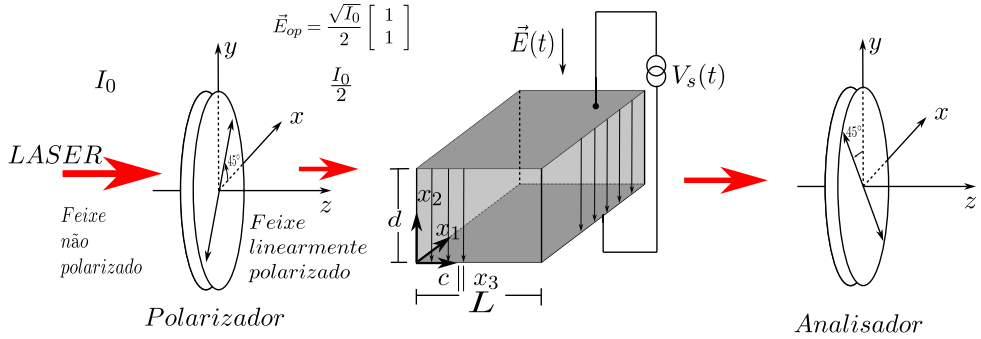
Nesta configuração, o atraso de fase (89) é composto por um termo independente (90) e outro dependente (93) da tensão:

$$\Gamma(t) = \phi_0 + \phi(t). \tag{110}$$

3.3.2 Propagação do feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c

Consideramos agora a segunda configuração da subseção 3.2.2, com o feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c. Usando a mesma configuração dos polarizadores do caso anterior, tem-se o desenho da Figura 26:

Figura 26 – Modulador eletro-óptico transversal usando um cristal de $LiNbO_3$ com feixe de luz paralelo ao eixo cristalino c.



Fonte: Próprio autor.

Lembre-se que nesta configuração, para uma tensão da ordem de dezenas de kV, pode-se considerar que não há rotação dos eixos coordenados por conta de tensão, logo os eixos principais do cristal x_1, x_2 e x_3 não mudam. Não existindo rotação, o cálculo da intensidade é similar ao do caso anterior:

$$I_{out} = \frac{I_0}{4}(1 - \cos(\Gamma)), \tag{111}$$

sendo que o retardo eletro-óptico agora é dado por (99). A transmitância é a mesma do caso anterior:

$$T_r = \frac{I_{out}}{I_0/2} = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Gamma)). \tag{112}$$

Ao contrário do anterior, o atraso de fase por conta do cristal difere, uma vez que (99) não tem parcela devido à birrefringência natural:

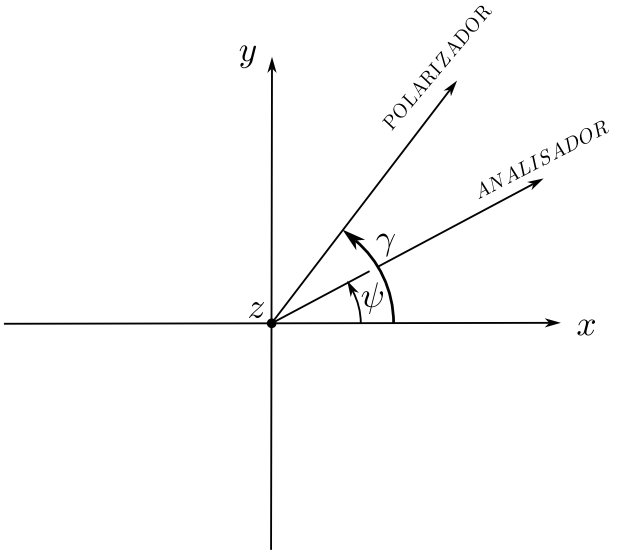
$$\Gamma(t) = \Phi(t), \tag{113}$$

onde $\Phi(t)$ é própria equação (99).

3.3.3 Generalização do cálculo da intensidade de saída

O cálculo da intensidade de saída pode ser generalizado para uma diferença de ângulos qualquer entre o polarizador e o analisador.

Figura 27 – Ângulos de transmissão para o polarizador e analisador.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 27, o ângulo azimutal do eixo de transmissão do polarizador é γ, e, o ângulo azimutal do analisador é ψ. Considerando que a luz não polarizada de entrada tem uma intensidade I_0, na saída do polarizador a intensidade é polarizada linearmente e com uma intensidade $I_0/2$. Primeiro, vamos calcular o vetor de Jones para o campo elétrico. Neste caso, cada componente vai depender do ângulo azimutal:

$$\vec{E}_{op} = \begin{bmatrix} E_0\cos(\gamma) \\ E_0\sin(\gamma) \end{bmatrix}. \tag{114}$$

Portanto, a intensidade pode ser calculada como:

$$|E_0\cos(\gamma)|^2 + |E_0\sin(\gamma)|^2 = \frac{I_0}{2}, \tag{115}$$

assim, o vetor campo elétrico após o polarizador é:

$$\vec{E}_{op} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{bmatrix}. \tag{116}$$

Note-se que, para ambos casos estudados, ou não há rotação de eixos, ou então, o ângulo é tão pequeno que pode ser considerado fixo.

No caso do analisador, será usada a matriz de Jones geral para um polarizador com ângulo azimutal qualquer (27).

Consequentemente, o campo elétrico na saída do analisador fica como:

$$\begin{aligned} \vec{E'}_{op} &= \begin{bmatrix} \cos^2(\psi) & \cos(\psi)\sin(\psi) \\ \sin(\psi)\cos(\psi) & \sin^2(\psi) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} . \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{bmatrix} \\ \vec{E'}_{op} &= \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{2}} (e^{-i\frac{\Gamma}{2}}\cos(\psi)\cos(\phi) + e^{i\frac{\Gamma}{2}}\sin(\psi)\sin(\phi)) \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{117}$$

Então, o conjugado hermitiano de $\vec{E'}_{op}$ será:

$$\vec{E'}_{op}^{\dagger} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\Gamma}{2}}\cos(\psi)\cos(\phi) + e^{-i\frac{\Gamma}{2}}\sin(\psi)\sin(\phi))\begin{bmatrix}\cos(\psi) & \sin(\psi)\end{bmatrix}. \tag{118}$$

Na Figura 27 definimos como nova variável a diferença entre os ângulos:

$$\chi = \gamma - \psi, \tag{119}$$

e então

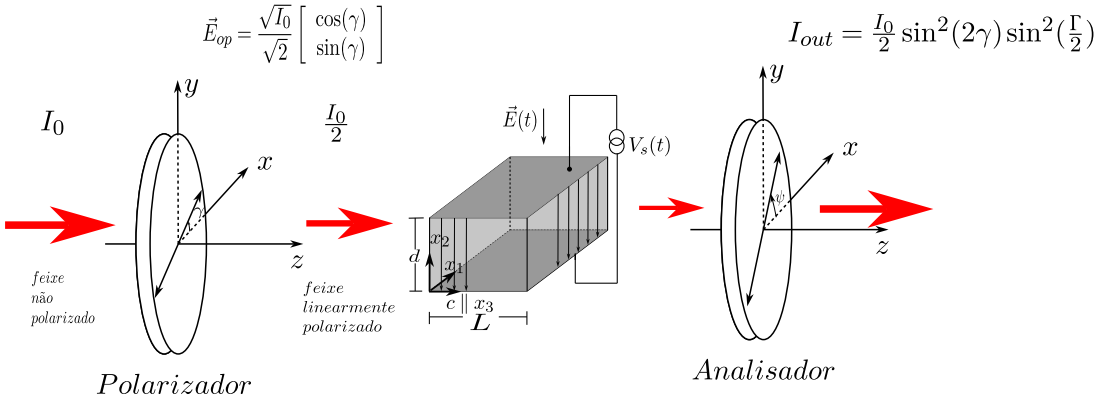
$$\psi = \gamma - \chi. \tag{120}$$

Assim, substituindo ψ no cálculo de intensidade, e considerado $\chi = 90°$ por condição de ortogonalidade entre os eixos de transmissão entre polarizador e analisador, a intensidade fica como:

$$I_{out} = \vec{E'}_{op}^{\dagger}\vec{E'}_{op} = \frac{I_0}{2}\sin^2(2\gamma)\sin^2(\frac{\Gamma}{2}). \tag{121}$$

O resultado pode ser comparado com ao método gráfico feito por (Martins, 2006, p. 64), onde se verifica que ambos são iguais.

Figura 28 – Modulador eletro-óptico transversal com os eixos de transmissão dos polarizadores ortogonais.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 28, a direção da propagação do laser é paralela ao eixo cristalino c. Além disso, se os eixos de transmissão dos polarizadores têm uma diferença de 90°, I_{out} é igual a (121).

Note-se que, para o caso particular $\gamma = 45°$, I_{out} é igual à (107).

3.4 ALINHAMENTO ÓPTICO DAS CÉLULAS POCKELS

No alinhamento do sistema óptico do modulador de amplitude transversal, primeiro é necessário colocar o polarizador à 45° de ângulo azimutal em relação ao eixo x (paralelo

ao plano da mesa óptica), segundo a Figura 25. Depois, o analisador deve estar cruzado com um ângulo de 90°. Na prática do laboratório, o cruzamento dos polarizadores é conseguido quando o feixe laser se apaga após passar pelo analisador. Lembrando da lei de Malus, quando a diferença angular entre os eixos de transmissão dos polarizadores é 90°, a intensidade é zero na saída.

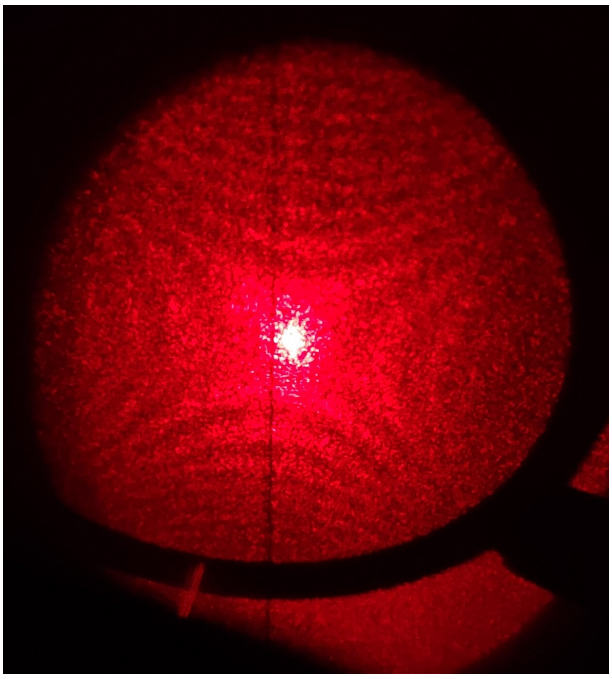
Ao inserir o cristal $LiNbO_3$, como foi desenhado na Figura 25, e conforme o estudado na subseção 3.3.1, a intensidade difere de zero.

Ao se apagar completamente a iluminação do laboratório, observa-se que a célula Pockels fica iluminada, evidenciando um intenso espalhamento de luz no interior do cristal de $LiNbO_3$. Assim, o feixe de saída (após o analisador) é composto pelo feixe de laser propriamente dito, e por luz espalhada ao redor de seu eixo longitudinal (Martins, 2006, p. 105).

Projetando-se essa luminosidade de saída sobre um anteparo, obtém-se uma imagem (padrão de franjas). O espalhamento faz com que uma parcela da luz se propague pelo cristal em direções diferentes do feixe principal, equivalente a uma emissão secundária de luz, segundo uma abertura angular na forma de cone divergente em torno do eixo longitudinal.

Dessa forma, quando o feixe laser é perpendicular ao eixo cristalino c, conforme a configuração estudada na seção 3.3.1, o padrão de interferência que se forma é o mostrado na Figura 29.

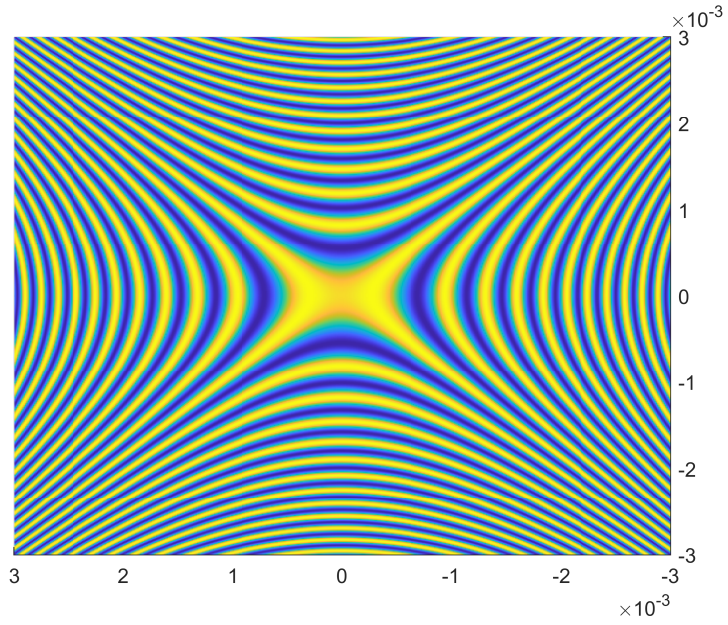
Figura 29 – Padrão de interferência experimental devido ao espalhamento da luz no cristal.



Fonte: Próprio autor.

Com a ajuda das equações de (Martins, 2006, p. 102), consegue-se desenhar no Matlab as franjas, usando-se os dados $\lambda = 632,8$ nm, $L = 50,025$ mm, $n_o = 2,286$ e $n_e = 2,2$. O resultado está mostrado na Figura 30:

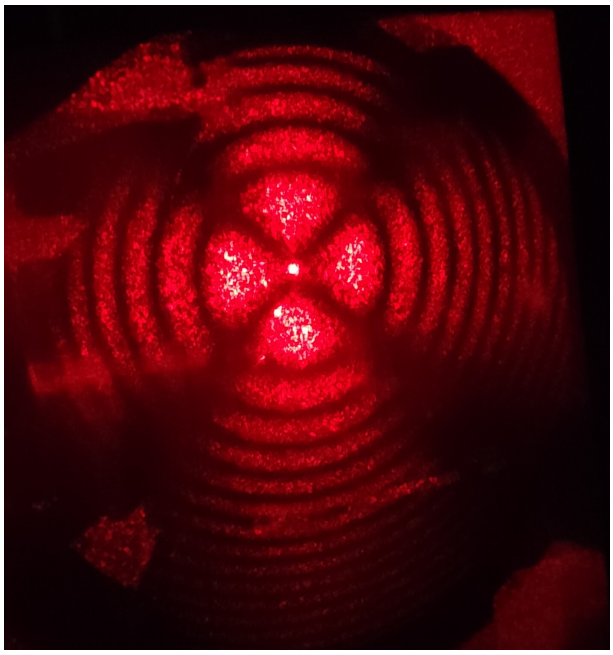
Figura 30 – Padrão de interferência teórico devido ao espalhamento da luz no cristal (calculado com Matlab).



Fonte: Próprio autor.

No segundo caso, quando o feixe laser é paralelo ao eixo cristalino c, e com a mesma configuração estudada na seção 3.3.2, o padrão de interferência que se forma é o mostrado na Figura 31:

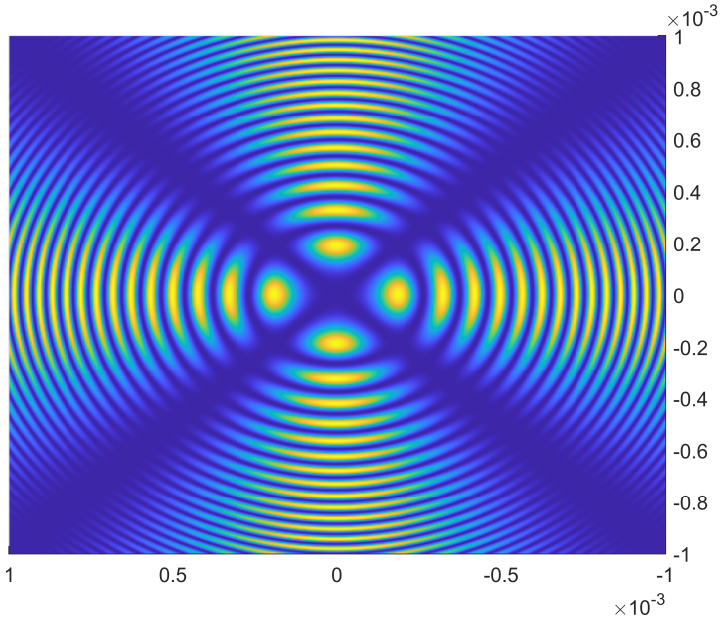
Figura 31 – Padrão de interferência experimental devido ao espalhamento da luz no cristal.



Fonte: Próprio autor.

Com a ajuda das equações de (Martins, 2006, p. 114), consegue-se desenhar no Matlab as franjas, usando-se os dados $\lambda = 632,8$ nm, $L = 10,258$ mm, $n_o = 2,286$ e $n_e = 2,2$, onde o resultado é mostrado na Figura 32.

Figura 32 – Padrão de interferência teórico devido ao espalhamento da luz no cristal (calculado com Matlab).



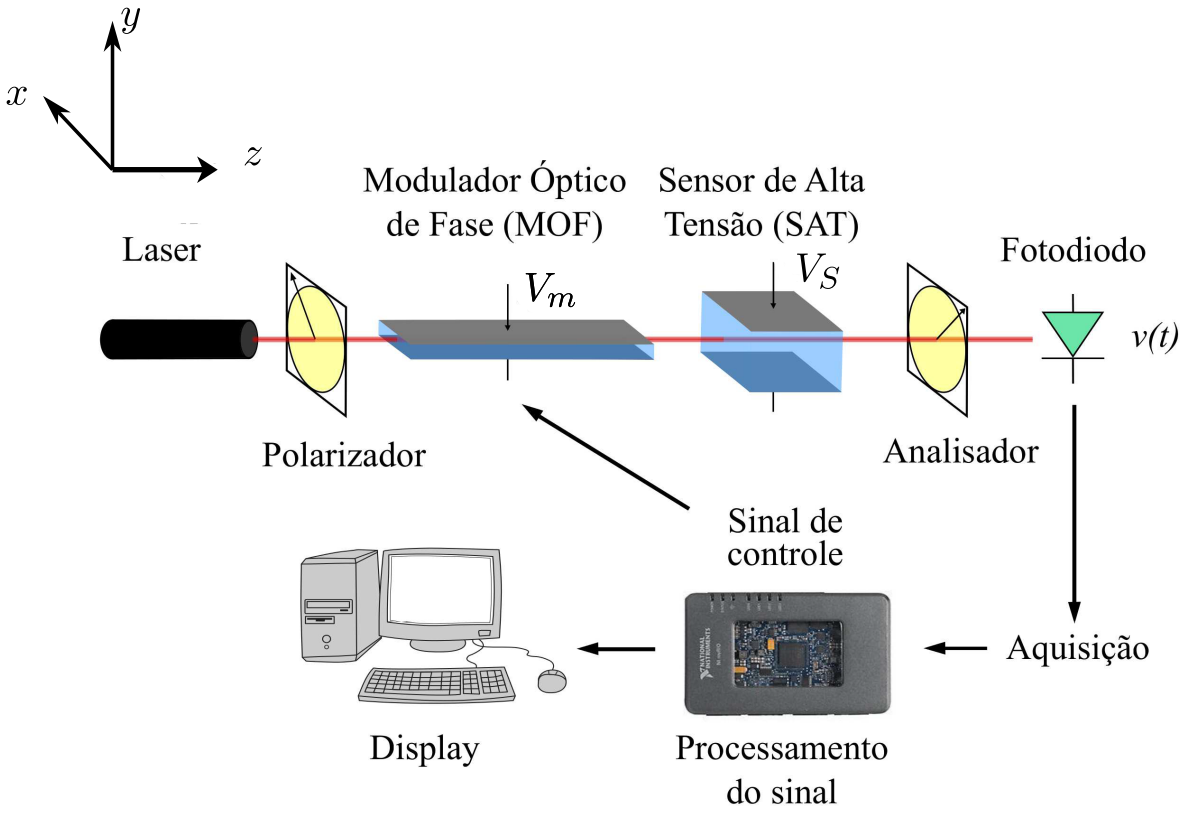
Fonte: Próprio autor.

4 SENSOR ELETRO-ÓPTICO DE ALTA TENSÃO CHAVEADO

Para a obtenção dos sinais em quadratura de fase em interferometria óptica, os interferômetros necessitam, em um modo geral, de componentes ópticos adicionais, tornando-os volumosos, relativamente caros e cujo alinhamento dos seus componentes constitui um processo minucioso e demorado.

Neste capítulo será apresentada um sensor eletro-óptico de amplitude para a obtenção de sinais em quadratura de fase que emprega um único fotodiodo e dispensa o uso da rotina de correção de quadratura por intermédio da técnica de mínimos quadrados (Lemes, 2014, p. 66).

Figura 33 – Diagrama esquemático do sistema proposto.



Fonte: adaptado de Pereira (2018, p. 66).

Na Figura 33, mostra-se a distribuição dos elementos ópticos, proposto por (Pereira, 2018, p. 68). A fonte óptica é um laser de He-Ne de comprimento de onda 632,8 nm com uma potência de saída de 20 mW. O feixe do laser é polarizado em um ângulo de 45° com relação ao eixo y, de modo a acoplar amplitudes iguais de campo elétrico aos modos ortogonais ordinário e extraordinário dos cristais eletro-ópticos. Estes dois feixes se propagam através do modulador de fase óptica (MOF), que é conectado em cascata com o sensor de alta tensão (SAT), e são analisados por um polarizador com um ângulo de $-45°$ com relação ao eixo y. O feixe de luz resultante é então detectado por um fotodi-

odo PIN com amplificador de saída (Thorlabs, PDA 55), e, o sinal elétrico é digitalizado e processado usando-se a placa embarcada myRIO (National Instruments). Uma forma de onda senoidal de realimentação $V_m(t)$, de amplitude ajustável, é aplicada ao MOF usando-se uma das saídas analógicas do dispositivo myRIO. Por outro lado, um sinal de tensão $V_S(t)$ é aplicado ao SAT usando um sistema de elevação de tensão baseado em um transformador de alta tensão e um amplificador em cascata como sinal de interesse a ser demodulado.

O procedimento de alinhamento dos componentes ópticos do sistema é o seguinte: primeiramente, posiciona-se a fonte de laser de modo que a sua polarização esteja orientada a 45° em relação ao plano horizontal da mesa óptica (eixo x do sistema). Depois, posiciona-se o polarizador também orientado a 45° a fim de se obter a máxima potência luminosa, e, em seguida, posiciona-se o analisador orientado a 90° em relação ao polarizador até que suprima a luminosidade de saída.

A seguir, insere-se a célula SAT entre o polarizador e analisador (como o esquematizado na Figura 33), fazendo com que a intensidade luminosa de saída não seja mais nula devido à birrefringência. Projetando-se essa luz em um anteparo, obtém-se o padrão de franjas da Figura 31, e dessa forma, procede-se com o alinhamento da célula SAT.

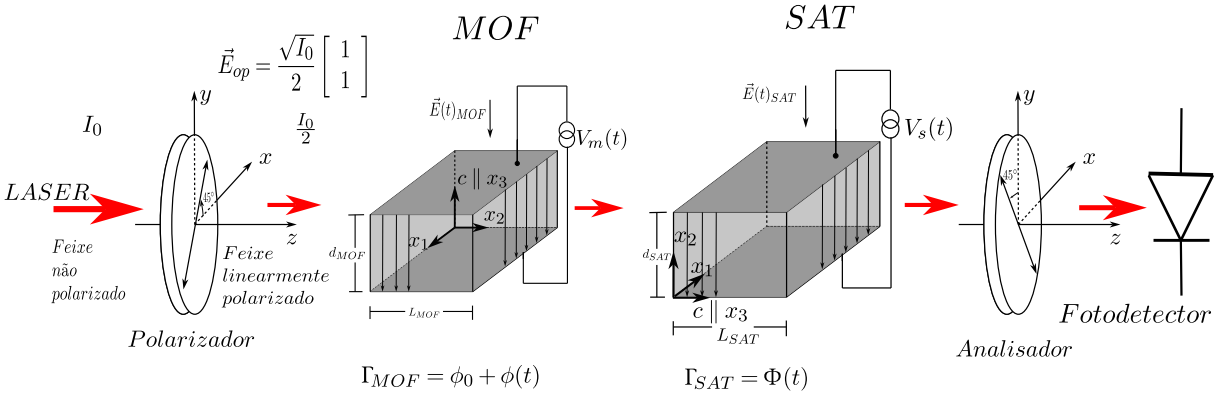
Ao inserir a célula MOF entre o polarizador e a célula SAT, será notado que não há mais formação de figuras de interferências na saída do analisador. Desta forma, com o auxílio de um espelho (não desenhado na figura) posicionado após a célula MOF, obriga-se o feixe a sair perpendicular à célula e paralelo ao eixo x. Em seguida, posiciona-se um analisador auxiliar orientado a 90° em relação ao polarizador obtendo, com isso, as figuras de interferência (Figura 29), e dessa maneira, conclui-se com o alinhamento da célula MOF. Por fim, retira-se o analisador e o espelho auxiliares do sistema.

A seguir será apresentado o método para a obtenção dos sinais em quadratura de fase por meio da técnica de chaveamento de fase.

4.1 OBTENÇÃO DOS SINAIS EM QUADRATURA POR CHAVEAMENTO DE FASE

Com ajuda das análises feitas nas seções 3.3.1 e 3.3.2, pode-se obter uma expressão matemática para a intensidade na saída do analisador, após o feixe óptico atravessar as duas células alinhadas, conforme mostrado na Figura 33.

Figura 34 – Modulador eletro-óptico com duas células alinhadas.



Fonte: Próprio autor

A Figura 34 é uma representação com maior detalhe que mostra os eixos principais do cristal (x_1, x_2, x_3) em relação aos eixos do laboratório (x, y, z). Na célula MOF, note-se que o eixo cristalino c é perpendicular ao feixe óptico, portanto o atraso de fase é:

$$\Gamma_{MOF} = \phi_0 + \phi(t). \tag{122}$$

Na outra célula (SAT), o eixo cristalino c é paralelo ao feixe óptico, e seu atraso de fase gerada pela tensão $V_S(t)$ é dada por:

$$\Gamma_{SAT} = \Phi(t). \tag{123}$$

Note-se que as duas expressões são similares aos anteriormente desenvolvidos em (110) e (113).

Dessa maneira, para obter o campo elétrico é preciso multiplicar as matrizes de Jones associado as células, polarizador e analisador:

$$\vec{E'}_{op} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}e^{-i\frac{\Gamma_{SAT}}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\Gamma_{SAT}}{2}}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}e^{-i\frac{\Gamma_{MOF}}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\Gamma_{MOF}}{2}}\end{bmatrix}.\frac{\sqrt{I_0}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}. \tag{124}$$

Da equação (124), as duas matrizes de Jones do centro representam as matrizes de atraso das células. Desta maneira, tem-se:

$$\vec{E'}_{op} = \frac{\sqrt{I_0}}{2} i \sin\left(\frac{\Gamma_{SAT} + \Gamma_{MOF}}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}. \tag{125}$$

Então, o conjugado hermitiano de $\vec{E'}_{op}$ será:

$$\vec{E'}^{\dagger}_{op} = \frac{\sqrt{I_0}}{2}(-i)\sin\left(\frac{\Gamma_{SAT} + \Gamma_{MOF}}{2}\right)\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}, \tag{126}$$

enquanto a intensidade de saída é:

$$I_{out} = \vec{E'}^{\dagger}_{op}.\vec{E'}_{op} = \frac{I_0}{2}\sin^2\left(\frac{\Gamma_{SAT} + \Gamma_{MOF}}{2}\right). \tag{127}$$

Usando-se propriedades trigonométricas, partindo-se de (127) pode-se mostrar que:

$$I_{out} = \frac{I_0}{4}(1 - \cos(\Gamma_{SAT} + \Gamma_{MOF})). \tag{128}$$

Da equação (128) pode-se deduzir que, caso fossem agregados outros cristais entre o polarizador e analisador, o efeito do atraso se somaria ao argumento da função cosseno.

Supondo que não haja atraso de fase na conversão de sinal óptico para elétrico, o sinal fotodetectado pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} v_{pd}(t) &= A\{1 - V\cos(\Gamma_{SAT} + \Gamma_{MOF})\} \\ v_{pd}(t) &= A\{1 - V\cos(\Phi(t) + \phi_0 + \phi(t) + \varphi(t))\}, \end{aligned} \tag{129}$$

onde A é uma tensão de *bias*, que leva em conta a responsividade do fotodiodo, e V é o fator referente à visibilidade ($0 < V < 1$), sendo incorporado à expressão de forma "ad-hoc" para levar em consideração qualquer desalinhamento entre a polarização do laser e/ou a direção da propagação da luz e os eixos do cristal. O termo $\Phi(t)$ refere-se a variação da fase induzida por $V_S(t)$, $\phi(t)$ corresponde a variação da fase induzida por $V_m(t)$, ϕ_0 é a variação da fase quase-estática, e $\varphi(t)$ é a variação de fase que oscila lentamente devido às derivas ambientais.

Por exemplo, no sistema mostrado na Figura 34, observa-se que num sistema polarizador-célula-analisador com polarizador desalinhado é gerado um termo adicional no cálculo da intensidade óptica. Na prática, ajustar uma defasagem relativa de 90°, entre um polarizador e um analisador pode ser realizado com ajuda de um laser, bastando providenciar que a intensidade no anteparo seja a menor possível. Porém, colocar um polarizador num certo ângulo $\gamma \neq 45°$ com respeito aos eixos do laboratório é possível de se cometer erro, de acordo com o fator multiplicativo:

$$\sin^2(2\gamma).$$

Na prática isso pode acontecer, e a intensidade de saída I_{out} ficaria como:

$$I_{out} = \frac{I_0}{4}(1 - \cos(\Gamma_{SAT} + \Gamma_{MOF}))\sin^2(2\gamma). \tag{130}$$

No momento da conversão para tensão elétrica, tal fator de erro vai aparecer dentro do termo A na equação (129).

A equação (129) é um sinal modulado em fase PM (do inglês, *Phase-Modulated Signal*), onde o objetivo é obter $\Phi(t)$ por meio do método de demodulação.

A relação entre $\Phi(t)$ e $V_S(t)$ é dada por:

$$\Phi(t) = \frac{\pi}{V_{\pi S}}V_S(t), \tag{131}$$

onde o $V_{\pi S}$ é a tensão de meia-onda do SAT, que possui valor teórico $V_{\pi S} = 3,768$ kV, como calculado em (100).

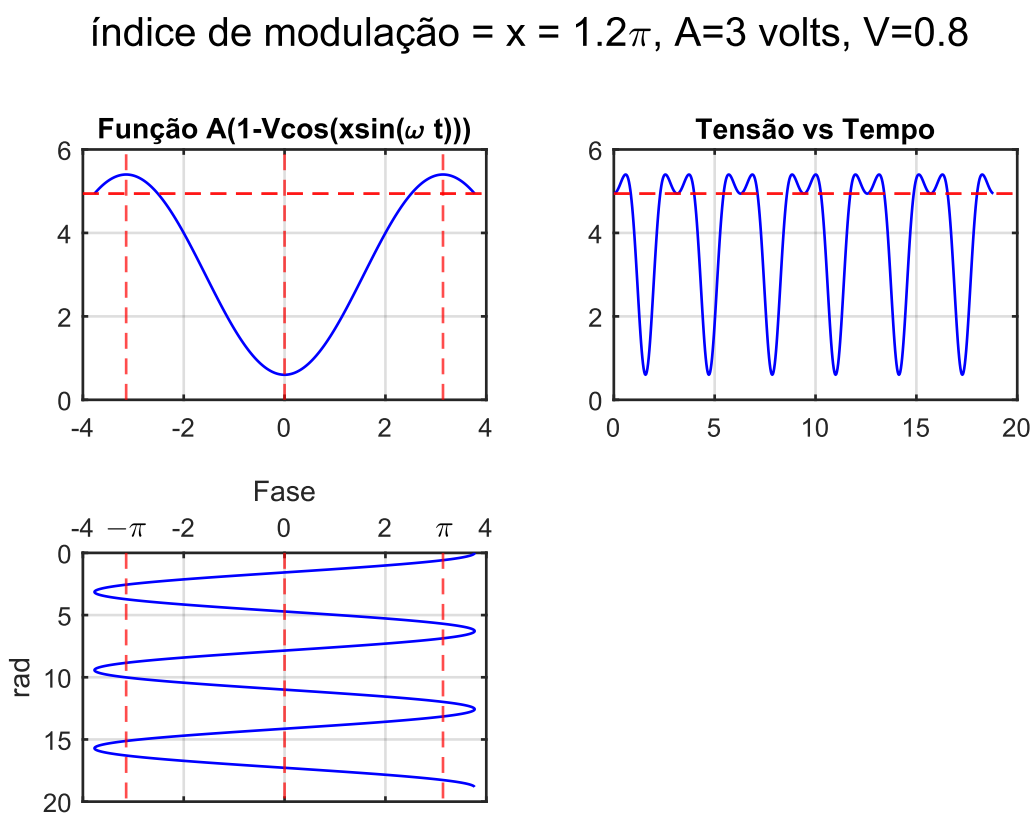
Por outro lado, considerando-se que $V_m(t) = V_m \cos(2\pi f_0 t)$, com uma frequência f_0 aplicada à célula MOF, e cuja amplitude satisfaz à condição $V_m = V_{\pi m}/4$, pode-se concluir que:

$$\phi(t) = \frac{\pi}{V_{\pi m}} V_m(t) = \frac{\pi}{4} \cos(2\pi f_0 t), \tag{132}$$

onde o $V_{\pi m}$ é a tensão de meia-onda do MOF, que possui valor teórico $V_{\pi m} = 64,92$ V como calculado em (95). O sinal $V_{\pi m}$ poderia ser qualquer sinal com simetria de meia-onda como, por exemplo, um sinal senoidal, quadrado ou triangular. Uma vez que o controle de fase óptica está ativo, sempre ajustará sua amplitude para garantir uma diferença de tensão de $V_{\pi m}/2$ entre dois pontos de aquisição sucessivos. Neste trabalho, um sinal quadrado foi gerado com uma taxa de duas amostras por ciclo.

Segundo a norma brasileira (International-Electrotechnical-Commission, 2011, p. 4) os erros de tensão e defasagem angular para transformadores de potencial indutivos são classificados e devem ser válidos para qualquer tensão entre 80% e 120% da tensão nominal e com cargas. Em vista disso, para nosso cristal sensor SAT, o valor da tensão de meia-onda deve ser 80% da tensão a medir. Sendo $V_{\pi S} = 3,768$ kV, o mínimo valor da tensão nominal a medir é $4,7$ kV. Com este valor, pode-se assegurar que a fase $\Phi(t) > \pi$ e operar sempre em regime de alto índice de modulação.

Figura 35 – Índice modulação maior que π.



Fonte: Próprio autor

Note-se da Figura 35 que, quando o índice de modulação é maior que π, o cosseno percorre toda sua faixa de valores, desde -1 até 1 ao longo do tempo, e com o mesmo valor de pico, permitindo, medir a constante A a partir da média aritmética dos valores de máximos e mínimos do sinal fotodetectado v_{pd}. Portanto, tem-se:

$$\frac{max[v_{pd}(t)] + min[v_{pd}(t)]}{2} = A. \tag{133}$$

O sistema trabalhará melhor quando o índice de modulação for maior que π.

Designando a fase $\theta(t)$ como:

$$\theta(t) = \Phi(t) + \phi_0 + \varphi(t) + \frac{\pi}{4}, \tag{134}$$

em (129), substituindo (133) e subtraindo o valor de A calculado em (133), obtém-se um novo sinal:

$$\begin{aligned} v_{pdA}(t) &= -AV \cos\left(\phi(t) + \theta(t) - \frac{\pi}{4}\right) \\ v_{pdA}(t) &= -AV \cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\left(2\pi f_0 t\right) + \theta(t) - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{135}$$

Neste caso, aplica-se um sinal $V_m(t)$ na célula MOF com um valor pico de $\pi/4$, onde a essência do chaveamento é por conta que $V_m(t)$, assumirá valores de $\pm\pi/4$ nos instantes de amostragem, nos quais se obtêm os termos em quadratura em múltiplos inteiros n do período de amostragem T_s:

$$v_{pdA}(nT_s) = -AV \cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\left(2\pi f_0 nT_s\right) + \theta(nT_s) - \frac{\pi}{4}\right). \tag{136}$$

Na Figura 36(d), mostra-se o sinal de *clock* que conduz à mesma frequência de amostragem. Note-se que na Figura 36(c), o sinal $V_m(t)$ é amostrado no pico e no vale, com valores de $\pm\pi/4$, e que sua frequência de amostragem é:

$$f_{amostragem} = f_s = \frac{1}{T_s} = 2f_0. \tag{137}$$

Desse modo, pode-se substituir (137) em (136), obtendo-se:

$$v_{pdA}(nT_s) = -AV \cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\left(n\pi\right) + \theta(nT_s) - \frac{\pi}{4}\right). \tag{138}$$

Note-se que, se n é par ou ímpar, têm-se:

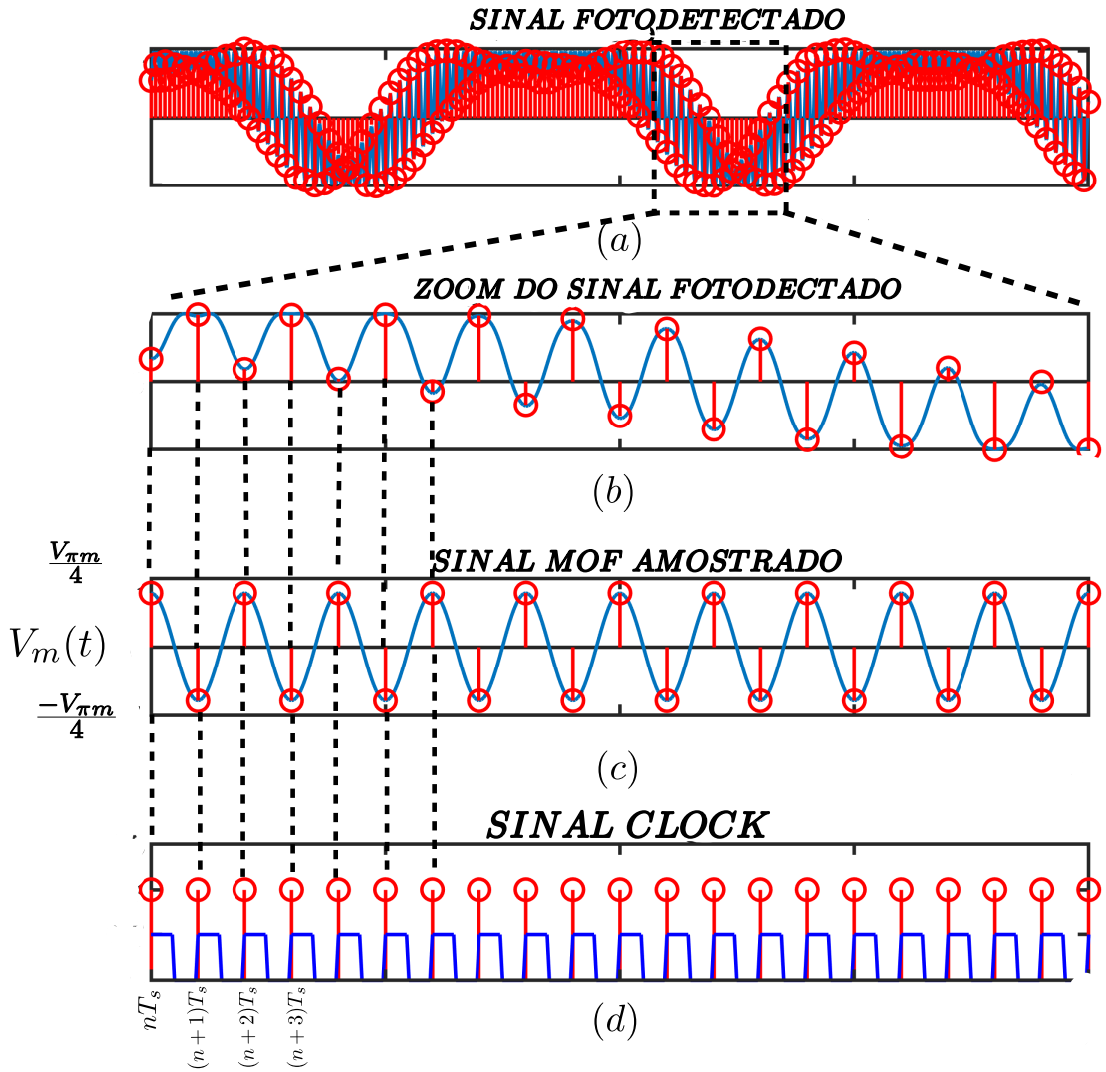
$$v_{pdA}(nT_s) = \begin{cases} -AV\cos\left(\theta(nT_s)\right) & \text{Se } n \text{ é par} \\ -AV\sin\left(\theta(nT_s)\right) & \text{Se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{139}$$

Como pode ser observado na Figura 36(c), os valores de n par ficam nos picos, e, os valores ímpares, nos vales. Percebe-se que, entre dois picos consecutivos, existe um comprimento

temporal de $2T_s$, e o mesmo acontece entre dois vales. Então, a frequência de amostragem entre dados pares é $f_s/2$, e o mesmo acontece com os termos impares:

$$f_{pares} = f_{ímpares} = \frac{f_s}{2}. \tag{140}$$

Figura 36 – (a) Sinal foto-detectado $v_{pd}(t)$. (b) Amostras de $v_{pd}(t)$. (c) $V_m(t)$ distorcida sincronizada com a aquisição de $v_{pd}(t)$, (d) Sinal de relógio utilizado para sincronização.



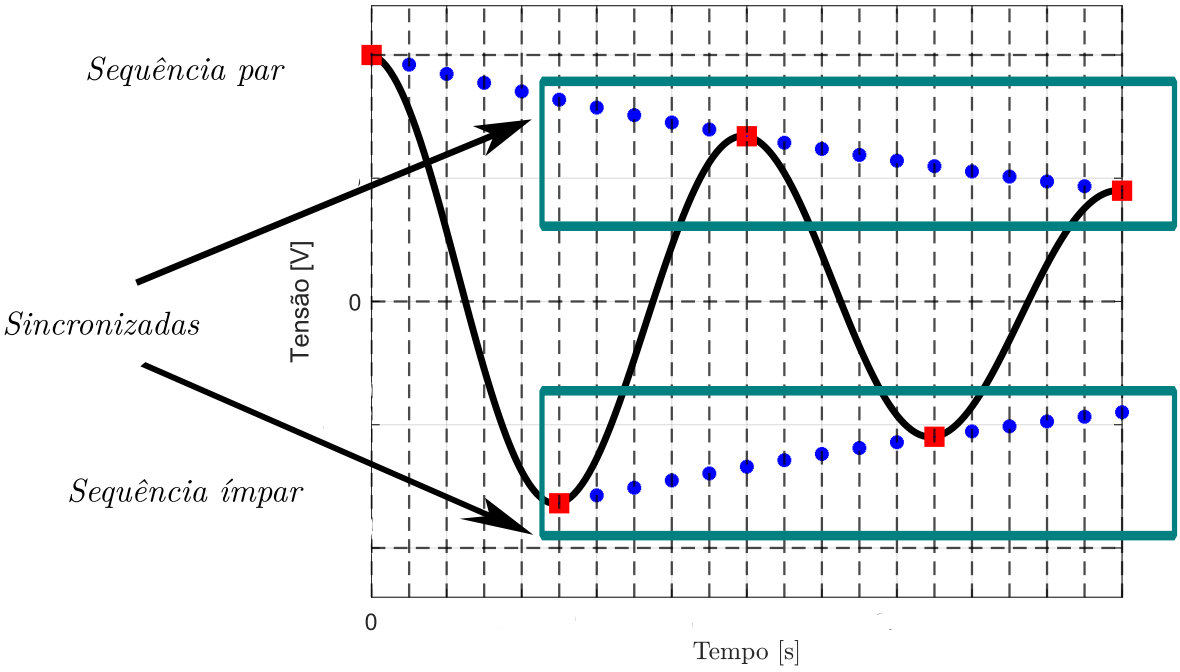
Fonte: Próprio autor

Os sinais adquiridos em (139) não são adquiridos simultaneamente. Note-se na Figura 36 que, para o instante nT_s só o sinal par é adquirido, e, depois de um tempo equivalente a um período de amostragem T_s, o sinal ímpar é adquirido. Depois, os sinais (par e ímpar) são submetidos a um processo de interpolação no qual, entre dois pontos

consecutivos, vão se gerar nove amostras. Perceba-se que, entre duas amostras originais, têm-se dez unidades de tempo $T_s/5$, então a nova frequência de amostragem para cada sequência é 5 vezes a frequência de amostragem do sinal fotodetectado:

$$\begin{aligned} f_{\text{novo par}} &= 10 f_{\text{par}} = 10\left(\frac{f_s}{2}\right) = 5f_s \\ f_{\text{novo ímpar}} &= 10 f_{\text{ímpar}} = 10\left(\frac{f_s}{2}\right) = 5f_s. \end{aligned} \tag{141}$$

Figura 37 – Interpolação das amostras.



Fonte: Próprio autor

Na Figura 37, mostra-se em linha preta contínua um sinal no domínio do tempo. Os pontos vermelhos são as amostras obtidas pelo nosso equipamento de aquisição myRIO, e em azul, os pontos acrescentados após a interpolação em cada sequência. Note-se que, as sequências ficam em sincronismo se fazermos um *delay* de cinco amostras da sequência par. Dessa maneira, pode-se assegurar que nossos sinais obtidos em (139) fiquem em condição de quadratura.

Num caso geral, perceba-se que para conseguir a sincronização dos sinais (139), cada sequência precisaria acrescentar (L_e-1) amostras entre duas amostras originais, onde L_e é par e mínimo 2. Dessa forma, as sequências ficam em sincronismo após um *delay* de $L_e/2$ amostras. Logo, ambas sequências terão uma nova frequência de amostragem de $L_e f_s/2$. No projeto, foi escolhido um valor de $L_e = 10$ porque, como será estudado no próximo capítulo, uma maior frequência de amostragem melhora a qualidade de nosso método de demodulação baseado em modos deslizantes.

Segundo a literatura (Oppenheim; Schafer, 2012, p. 112) os procedimentos de interpolação linear são frequentemente empregados, consistindo em interpolar duas amostras originais. Em geral, tem o esquema da Figura 38. Primeiro, realiza-se um processo chamado *expansor de taxa de amostragem*, onde os elementos entre duas amostras originais ficam em zero, e em seguida passa por um filtro passa-baixas para concluir com a interpolação. Existem outros filtros com maior exatidão, como os filtros polinomiais de determinado grau, fórmula de interpolação de Lagrange e *spline* cúbico, que envolvem maior quantidade de amostras originais para os cálculos. Neste trabalho, note-se que o sinal gerado está quase na frequência de Nyquist, sendo um interpolador linear não ótimo para esta situação, sendo necessário um filtro de maior ordem ou os mencionados anteriormente.

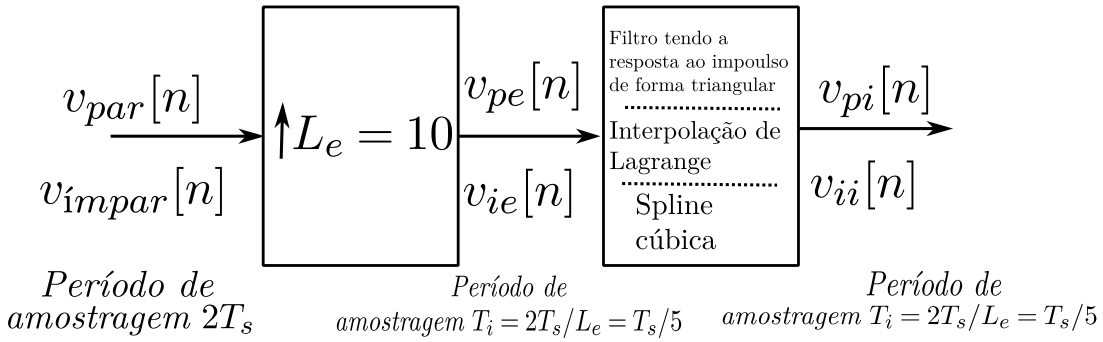
Logo, tem-se de (139):

$$v[n] = v_{pdA}(nT_s) \tag{142}$$

$$\begin{aligned} v_{par}[n] &= v[2n] = -AV\cos\left(\theta(nT_s)\right) \\ v_{impar}[n] &= v[2n+1] = -AV\sin\left(\theta(nT_s)\right). \end{aligned} \tag{143}$$

Na Figura 38, $v_{pe}[n]$ e $v_{ie}[n]$ correspondem a $v_{par}[n/L_e]$ e $v_{impar}[n/L_e]$, respectivamente, para valores de n múltiplos inteiros de L_e, e zero caso contrário. Posteriormente, o sistema passará pelo filtro e os termos zerados serão completados ao concluir o processo de interpolação.

Figura 38 – Sistema genérico de interpolação.



Fonte: Próprio autor

Na prática, se separam as amostras pares e a ímpares, ato contínuo, uma interpolação *spline* é usada, e os cálculos foram feitos por um bloco disponível na biblioteca do software Labview. Labview também fornece a opção de projetar seus blocos de interpolação com características específicas.

Após a interpolação, as sequências ficam como:

$$\begin{aligned} v_{pi}[n] &= -AV\cos\left(\theta(nT_s')\right) \\ v_{ii}[n] &= -AV\sin\left(\theta(nT_s')\right), \end{aligned} \tag{144}$$

onde o T_s' é $T_s/5$, e n pode assumir qualquer valor inteiro.

Imediatamente, pode-se calcular o valor de AV como uma média aritmética do mínimo e máximo da equação (144), a partir de $v_{pi}[n]$ ou $v_{ii}[n]$:

$$AV = \frac{max[v_{pi}[n]] - min[v_{pi}[n]]}{2}. \tag{145}$$

Logo, procede-se à seguinte normalização:

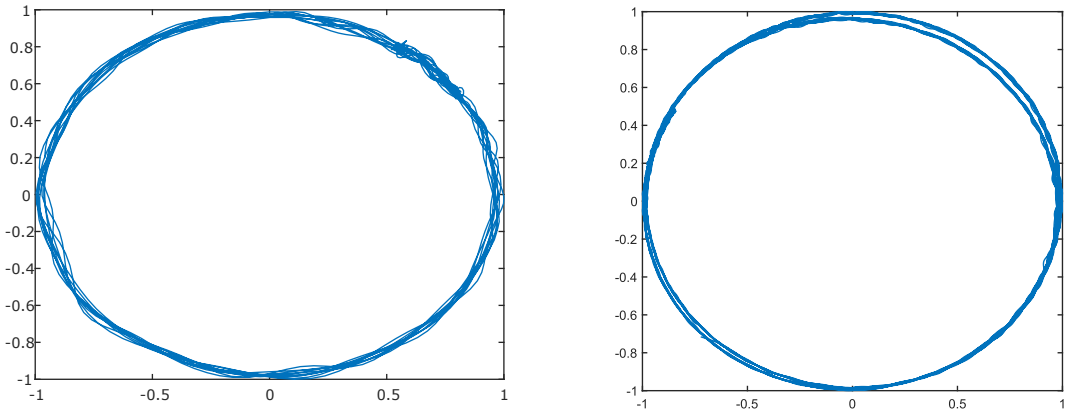
$$\begin{aligned} p_1[n] &= \frac{v_{pi}[n]}{AV} = -\cos\left(\theta(nT_s')\right) \\ p_2[n] &= \frac{v_{ii}[n]}{AV} = -\sin\left(\theta(nT_s')\right). \end{aligned} \tag{146}$$

De acordo com (146), conclui-se que a figura de Lissajous mostrada na Figura 39, correspondente aos pontos $(p_1[n], p_2[n])$, é um círculo de raio unitário, dado que:

$$p_1^2[n] + p_2^2[n] = 1. \tag{147}$$

Figura 39 – Figura de Lissajous Simulada e Medida.

(a) Simulada (b) Medida



Fonte: Próprio autor

Lembre-se, de (134), que o $\theta(t)$ é composto por um conjunto de elementos que estão se somando ao sinal de interesse $\Phi(t)$. Em particular, o índice de modulação da componente de interesse é maior que π, e portanto não pode ser analisado como uma aproximação de largura de banda estreita. Porém, existe uma expressão matemática mencionado em (Carlson; Crilly, 2009, p. 215) que permite utilizar as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \cos(\beta\sin(\omega_m t)) &= J_0(\beta) + \sum_{n=par}^{\infty} 2J_n(\beta)\cos(n\omega_m t) \\ \sin(\beta\sin(\omega_m t)) &= \sum_{n=impar}^{\infty} 2J_n(\beta)\sin(n\omega_m t), \end{aligned} \tag{148}$$

sendo os $J_n(\beta)$ a função de Bessel de primeira espécie, ordem n e argumento β.

Além disso, vamos supor nesta análise que o sinal a ser demodulado é constituído por um sinal senoidal em (134):

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \Phi(t) + \phi_0 + \varphi(t) + \frac{\pi}{4} \\ \theta(t) &= \frac{\pi V_S \sin(\omega_{SAT} t)}{V_{\pi S}} + \Omega(t). \end{aligned} \tag{149}$$

Note-se que os sinais sem interesse foram agrupados (os 3 últimos termos da direita) em $\Omega(t)$, e costumam ser de baixas frequências.

Usando (148) para expandir $\cos(\theta(t))$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \cos(\theta(t)) &= \cos\left(\frac{\pi V_S \sin(\omega_{SAT} t)}{V_{\pi S}} + \Omega(t)\right) \\ \cos(\theta(t)) &= \cos(M \sin(\omega_{SAT} t)) \cos(\Omega(t)) - \sin(M \sin(\omega_{SAT} t)) \sin(\Omega(t)) \end{aligned} \tag{150}$$

$$\cos(\theta(t)) = J_0(M)\cos(\Omega) + \left(\sum_{n=par}^{\infty} 2J_n(M)\cos(n\omega_{SAT} t)\right)\cos(\Omega) - \left(\sum_{n=impar}^{\infty} 2J_n(M)\sin(n\omega_{SAT} t)\right)\sin(\Omega), \tag{151}$$

onde o índice de modulação é $M = \frac{\pi V_S}{V_{\pi S}}$ e V_S é a amplitude do sinal senoidal. Continuando com a expansão, podem-se expandir os produtos de seno e cosseno como:

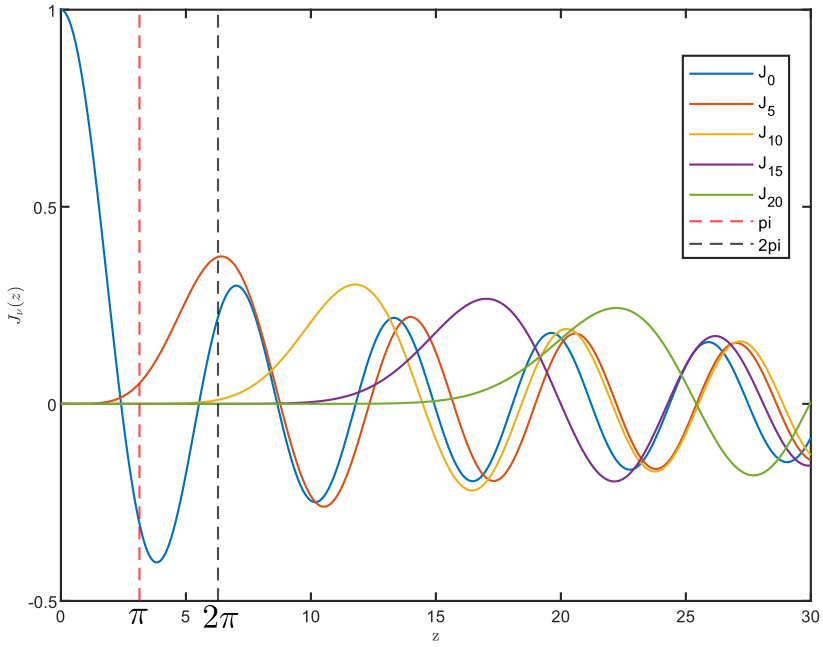
$$\begin{aligned} \cos(\theta(t)) = J_0(M)\cos(\Omega) &+ \sum_{n=par}^{\infty} J_n(M)[\cos(n\omega_{SAT} t - \Omega(t)) + \cos(n\omega_{SAT} t + \Omega(t))] \\ &- \sum_{n=impar}^{\infty} J_n(M)[\cos(n\omega_{SAT} t - \Omega(t)) - \cos(n\omega_{SAT} t + \Omega(t))]. \end{aligned} \tag{152}$$

No caso de $\sin(\theta(t))$, a expansão e a seguinte:

$$\begin{aligned} \sin(\theta(t)) = J_0(M)\sin(\Omega) &+ \sum_{n=par}^{\infty} J_n(M)[\sin(n\omega_{SAT} t - \Omega(t)) + \sin(n\omega_{SAT} t + \Omega(t))] \\ &+ \sum_{n=impar}^{\infty} J_n(M)[\sin(n\omega_{SAT} t + \Omega(t)) - \sin(n\omega_{SAT} t - \Omega(t))]. \end{aligned} \tag{153}$$

Percebe-se que o espectro de frequências de (152) e (153) tem um termo modulado em fase e bandas laterais centradas nas frequências que são múltiplos inteiros de f_{SAT}. Logo, devido às limitações do cristal SAT às altas tensões, e a fim de evitar gerar um arco elétrico que rompa a resistência do cristal, restringiremos o índice de modulação M à banda de π até 2π.

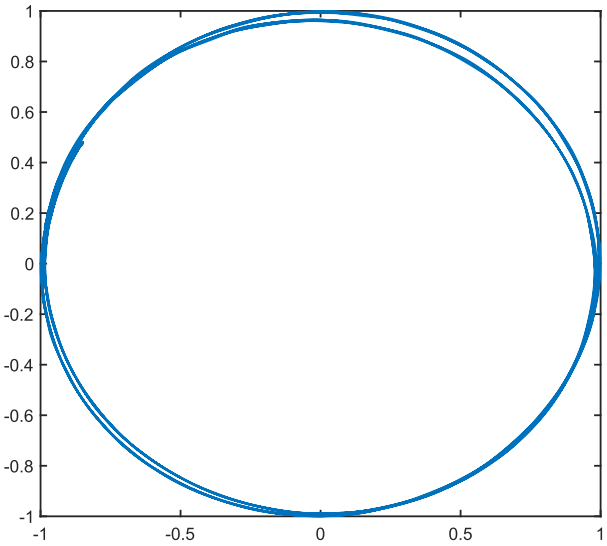
Figura 40 – Funções de Bessel de primeira espécie.



Fonte: Próprio autor

Note-se que, da Figura 40, quanto maior a ordem do harmônico, o valor de $J_n(M)$ tende à zero para valores dentro de faixa (região entre as linhas tracejadas). Para uma função senoidal, o conteúdo harmônico é baixo, mas se fosse uma onda triangular ou quadrada, o conteúdo seria maior. Considerando que a frequência da rede elétrica comercial brasileira é de 60 Hz, filtraremos até 50 vezes a frequência da fundamental. Então, nosso filtro passa baixas terá um corte em 3 kHz, que consideramos ser suficiente para esta análise.

Figura 41 – Figura de Lissajous filtrada.

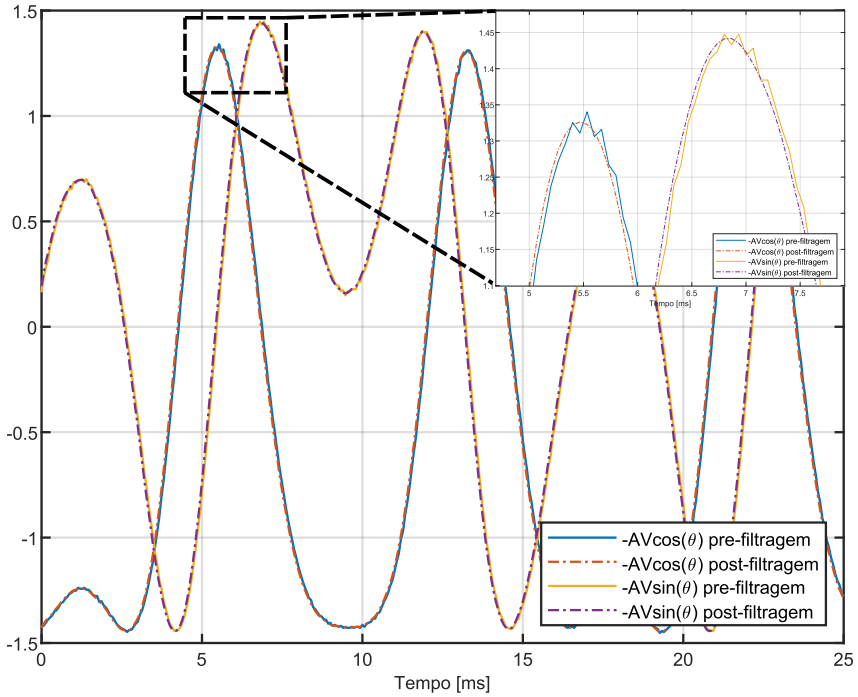


Fonte: Próprio autor

Na Figura 41, note-se que, em comparação com a Figura 39(b), é mais suave porque o ruído de alta frequência foi removido.

Na Figura 42, mostram-se os sinais (143) antes e depois da filtragem. Em linha contínua, os sinais sem filtragem, e, em tracejada, com filtragem. Ademais, note-se que a filtragem se aplica sobre os sinais antes da interpolação para evitar projetar um filtro com uma frequência de amostragem 10 vezes a frequência de amostragem original de cada sequência.

Figura 42 – Sinais em quadratura pre-filtrados e post-filtrados.



Fonte: Próprio autor

Se escolheu projetar um filtro Butterworth IIR por transformação bilinear com as seguintes especificações:

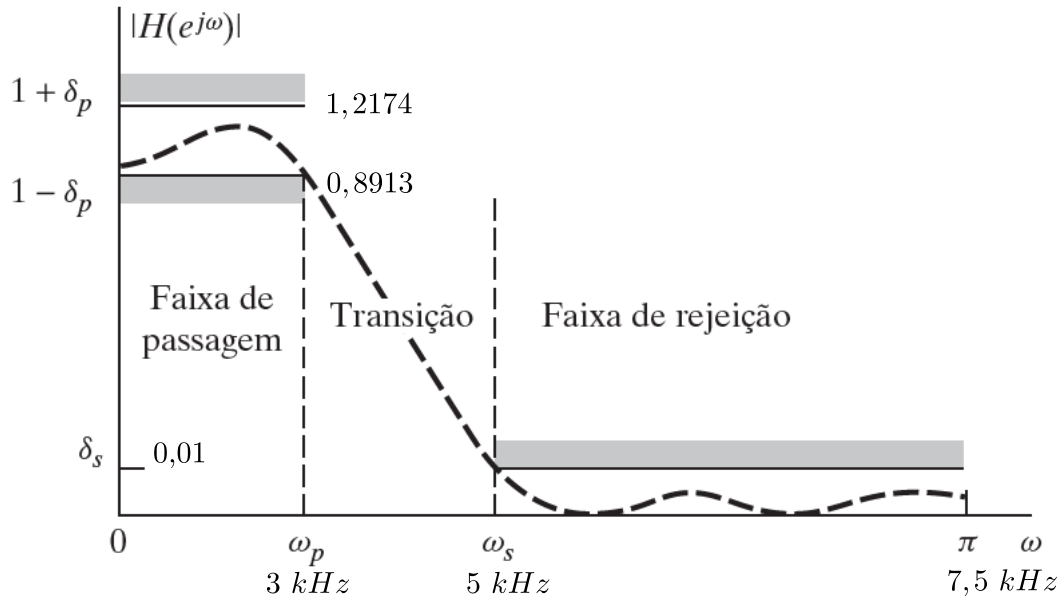
Tabela 2 – Especificações do projeto do filtro digital.

Parâmetro	Valor
R_p	-1 dB
R_s	-40 dB
ω_p	1,2566
ω_s	2,0944

Fonte: Próprio autor.

A Tabela 2 indica um ganho na faixa de passagem (R_p) entre 0 dB e -1 dB e atenuação na faixa de rejeição (R_s) de pelo menos -40 dB. ω_p e ω_s indicam as frequências normalizadas na faixa de 0 até π, onde π é equivalente à metade de frequência de amostragem da sequência par (ou ímpar) antes de interpolação. Como nosso sinal fotodetectado é amostrado a 30 kHz, os sinais par e ímpar têm uma frequência de 15 kHz cada, logo π é equivalente a $7,5$ kHz.

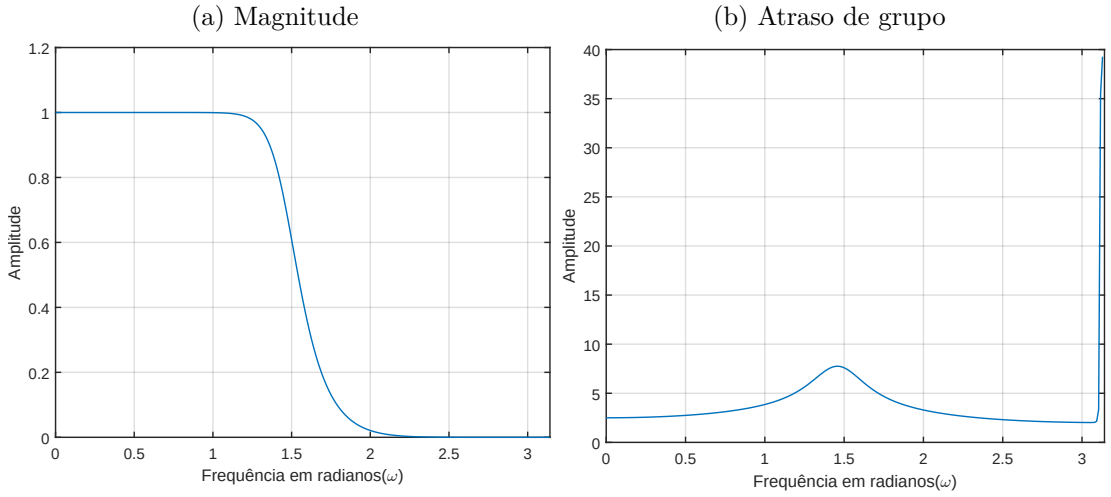
Figura 43 – Diagrama de tolerâncias do filtro passa-baixas.



Fonte: Próprio autor

Na Figura 43 mostra-se o diagrama de tolerância do filtro passa-baixos, onde os valores da Tabela 2 foram considerados. Note-se que o eixo vertical não está em dB, logo δ_p e δ_s são os equivalentes em magnitude de R_p e R_s respectivamente.

Figura 44 – Resposta em frequência do filtro Butterworth de ordem 7 transformado pela transformação bilinear.



Fonte: Próprio autor

Seguindo os passos do projeto de um filtro de (Oppenheim; Schafer, 2012, p. 304), consegue-se calcular que a ordem do filtro é 7. Além disso, para uma frequência de operação de 60 Hz, tem-se um retardo de grupo de 3 amostras.

Na Figura 44, mostra-se a magnitude e atraso de grupo do filtro projetado com transformação bilinear. Ademais, nos dois desenhos, a faixa da frequência é normalizada de 0 até π.

Dessa maneira, com ajuda de Matlab consegue-se calcular os coeficientes do numerador e denominador da função de transferência discreta ($H(z)$) do filtro:

$$\begin{aligned} numerador &= [0{,}0112\ 0{,}0783\ 0{,}2348\ 0{,}3914\ 0{,}3914\ 0{,}2348\ 0{,}0783\ 0{,}0112] \\ denominador &= [1{,}0000\ -0{,}4790\ 1{,}0096\ -0{,}2995\ 0{,}2268\ -0{,}0356\ 0{,}0095\ -0{,}0004]. \end{aligned} \tag{154}$$

Os coeficientes calculados em (154) são inseridos num bloco de Labview que tem como variáveis de entrada os coeficientes da função de transferência. Com este filtro projetado, consegue-se obter o sinal filtrada de Figura 42.

4.2 CONTROLE DE FASE DA CONDIÇÃO DE QUADRATURA

O método mostrado na seção anterior é proposto considerando que (132) seja satisfeita, ou seja, $V_m = V_{\pi m}/4$. Contudo, na prática, $V_{\pi m}$ varia com a temperatura. Compensação dos problemas devido às variações em $V_{\pi m}$ ou aquisição síncrona, deve ser ajustada pelo sistema de controle.

Portanto, em (132) será adicionado um termo denominado de variação Δv:

$$\phi_m(t) = \frac{\pi}{V_{\pi m}} \left(\frac{V_{\pi m}}{4} + \Delta v \right) \cos(2\pi f_0 t), \tag{155}$$

assim, amplitude de $\phi_m(t)$ será:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi \Delta v}{V_{\pi m}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2}, \tag{156}$$

tal que:

$$\delta = \frac{2\pi \Delta v}{V_{\pi m}}. \tag{157}$$

Usando (156) como nova amplitude em (135), a equação (146) ficaria como:

$$\begin{aligned} p_1[n] &= -\cos\left(\theta(nT_s') + \frac{\delta}{2} \right) \\ p_2[n] &= -\sin\left(\theta(nT_s') - \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned} \tag{158}$$

Pode-se mostrar, como segue, que a figura de Lissajous obtida a partir dos pontos ($p_1[n]$, $p_2[n]$) não é mais um círculo de raio unitário, mas sim uma elipse. Para mostrar isto, basta proceder no seguinte equacionamento:

$$p_1^2[n] = \cos^2(\theta)\cos^2(\frac{\delta}{2}) + \sin^2(\theta)\sin^2(\frac{\delta}{2}) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\frac{\delta}{2})\sin(\frac{\delta}{2}), \tag{159}$$

$$p_2^2[n] = \sin^2(\theta)\cos^2(\frac{\delta}{2}) + \cos^2(\theta)\sin^2(\frac{\delta}{2}) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\frac{\delta}{2})\sin(\frac{\delta}{2}), \tag{160}$$

$$\begin{aligned} p_1[n]p_2[n] = \sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\frac{\delta}{2}) - \cos^2(\theta)\cos(\frac{\delta}{2})\sin(\frac{\delta}{2}) \\ - \sin^2(\theta)\cos(\frac{\delta}{2})\sin(\frac{\delta}{2}) + \sin(\theta)\cos(\theta)\sin^2(\frac{\delta}{2}), \end{aligned} \tag{161}$$

então:

$$p_1^2[n] + p_2^2[n] + 2p_1[n]p_2[n]\sin(\delta) = \cos^2(\delta), \tag{162}$$

a qual corresponde à equação de uma elipse. Se $\delta = 0$, obtém-se:

$$p_1^2[n] + p_2^2[n] = 1, \tag{163}$$

a equação do círculo.

Note-se que, (162) tem um termo envolvendo o produto cruzado entre coordenadas, e então, procede-se a uma rotação de eixos de β rad para eliminar esse termo, similar à matriz usada em (80):

$$\begin{bmatrix} p_1[n] \\ p_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p'_1[n] \\ p'_2[n] \end{bmatrix} . \tag{164}$$

Substituindo (164) em (162), conclui-se que:

$$\begin{aligned} p_1'^2[n](1 + \sin(2\beta)\sin(\delta)) + p_2'^2[n](1 - \sin(2\beta)\sin(\delta)) \\ + 2\cos(2\beta)\sin(\delta)p'_1[n]p'_2[n] = \cos^2(\delta). \end{aligned} \tag{165}$$

Note-se que, o elemento com termo envolvendo um produto cruzado deve ser zero, então:

$$2\cos(2\beta)\sin(\delta)p'_1[n]p'_2[n] = 0 \tag{166}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\beta) &= 0 \\ \beta &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{167}$$

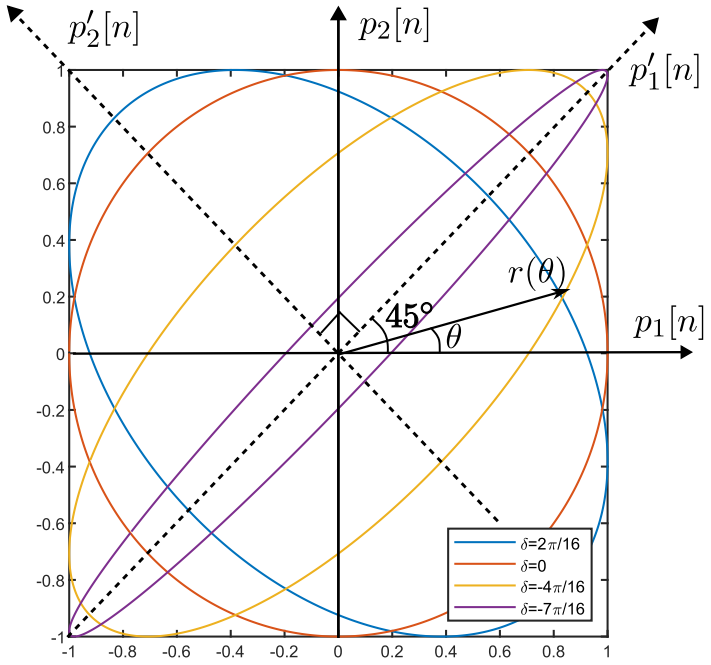
Retornando com este valor de β em (165), mostra-se que:

$$p_1'^2[n](1 + \sin(\delta)) + p_2'^2[n](1 - \sin(\delta)) = \cos^2(\delta). \tag{168}$$

Lembre-se que, o objetivo é manter a equação anterior como um círculo de raio unitário, então os valores de δ que permitem atingir a condição de quadratura são:

$$\delta = K\pi \quad \forall K \in \mathbb{Z}. \tag{169}$$

Figura 45 – Figura de Lissajous para diferentes δ.



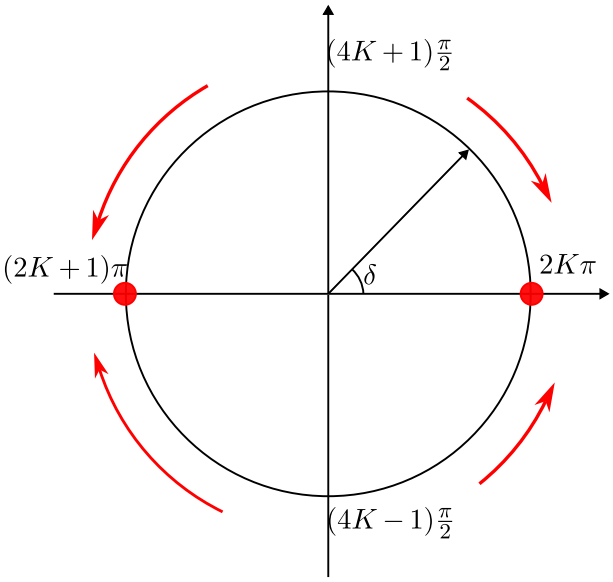
Fonte: Próprio autor.

Tomando como referência $\delta = 0$ como solução, note-se na Figura 45 que, quanto mais se afasta o valor de δ de zero, a elipse fica com o eixo menor bem pequeno. No caso:

$$\delta = (2K + 1)\pi/2 \quad \forall K \in \mathbb{Z}, \tag{170}$$

a figura de Lissajous torna-se uma linha reta orientada ao longo do eixo $p_1'[n]$ ou $p_2'[n]$. A ideia do controle é aproximar δ ao ponto mais próximo de se atingir a condição de quadratura do sistema. Logo o $r(\theta)$ é comprimento entre o centro de coordenadas e um punto da figura de Lissajous definido pela equação (171), onde θ é definido em (134).

Figura 46 – Controle do ângulo δ.



Fonte: Próprio autor

Sendo K qualquer inteiro, mostra-se graficamente na Figura 46, que controlando δ, deve-se se aproximar ao dos pontos vermelhos para se atingir a condição de quadratura. Note-se como exemplo que, se δ estiver associado a um ponto localizado no lado direito da circunferência, ele deve-se chegar até o ponto vermelho $2K\pi$, que é o ponto mais próximo que atinge a condição de quadratura.

Logo, é preciso criar uma variável tal que, dependendo da posição de $(p_1[n], p_2[n])$, pode-se ter noção do quão longe o sistema localiza-se da condição de quadratura. Então, tomando como referência a Figura 45, escolhe-se $r(\theta)$ de tal forma que os resultados de (158), sejam satisfeitos:

$$\begin{aligned} r(\theta)^2 &= p_1^2[n] + p_2^2[n] \\ r(\theta)^2 &= \cos^2\left(\theta + \frac{\delta}{2}\right) + \sin^2\left(\theta - \frac{\delta}{2}\right) \\ r(\theta)^2 &= 1 - \sin(2\theta)\sin(\delta). \end{aligned} \tag{171}$$

Note-se que, caso a nossa elipse tenha orientação predominante ao longo do eixo $p_1'[n]$, a média dos valores de $r(\theta)$ localizados no primeiro e terceiro quadrantes será maior que a média dos valores de $r(\theta)$ localizados no segundo e quarto quadrantes. Caso a orientação predominante seja no eixo $p_2'[n]$, o contrário acontece.

Na sequência, calculam-se as integrais abaixo, em cada quadrante, para obter a

média de $r(\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
\overline{R_I} &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2\, d\theta\right) \\
\overline{R_{II}} &= \frac{2}{\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r(\theta)^2\, d\theta\right) \\
\overline{R_{III}} &= \frac{2}{\pi}\left(\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r(\theta)^2\, d\theta\right) \\
\overline{R_{IV}} &= \frac{2}{\pi}\left(\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r(\theta)^2\, d\theta\right).
\end{aligned} \tag{172}$$

Seja um distúrbio δ positivo, então a orientação da elipse de Lissajous predomina na direção de $p_2'[n]$ (como a elipse em cor azul na Figura 45). Assim, cria-se a função:

$$W(\delta) = (\overline{R_{II}} + \overline{R_{IV}}) - (\overline{R_I} + \overline{R_{III}}). \tag{173}$$

Note-se que, a condição de quadratura é satisfeita quando o valor $W(\delta) = 0$, for atingido. As integrais resultantes de (172) conduzem a:

$$\begin{aligned}
W(\delta) &= \left(2 + \frac{4\sin(\delta)}{\pi}\right) - \left(2 - \frac{4\sin(\delta)}{\pi}\right) \\
W(\delta) &= \frac{8\sin(\delta)}{\pi}.
\end{aligned} \tag{174}$$

Dessa maneira, para pequenas variações de δ, uma boa aproximação é:

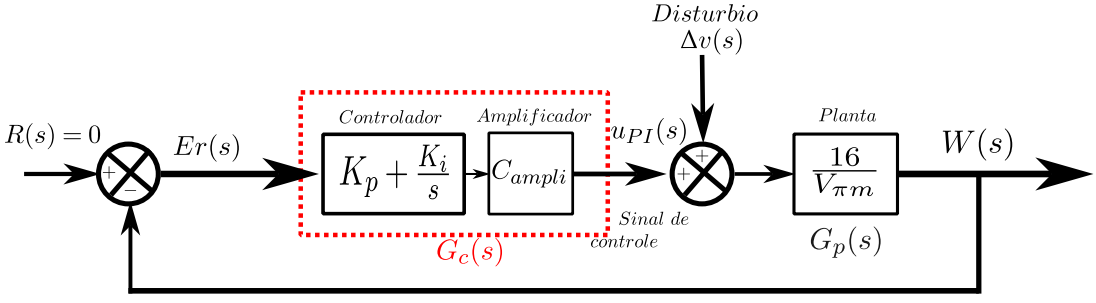
$$W(\delta) = \frac{8\delta}{\pi}. \tag{175}$$

Escrevendo (174) como uma função da variação da amplitude (157), tem-se:

$$W(\Delta v) = \frac{16\Delta v}{V_{\pi m}}. \tag{176}$$

Note-se que, se uma perturbação conduzir a $\Delta v \neq 0$, então a condição de quadratura não é satisfeita, e, quanto maior for o seu valor, a excentricidade da elipse ficará mais próximo de 1. Dessa forma, um sistema de controle com referência zero e com uma entrada de perturbação fica proposto, similar ao discutido em (Ogata, 2010, p. 221).

Figura 47 – Diagrama de blocos do controle PI da fase óptica.



Fonte: Próprio autor

Segundo a teoria de controle, um controlador PI é uma boa proposta porque permite eliminar o erro de estado estacionário (*offset*). Na Figura 47, a referência $R(s)$ é igual a zero. Então, calcularemos o efeito da perturbação sob a saída de interesse W. Abordaremos o sistema em termos de transformada de Laplace. Seja então nosso controlador $G_c(s)$ e nossa planta $G_p(s)$, tal que a função de transferência de $W(s)$ em relação à perturbação Δv seja:

$$\frac{W(s)}{\Delta v(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}. \tag{177}$$

Além disso, o erro $Er(s)$ com respeito à perturbação é:

$$\frac{Er(s)}{\Delta v(s)} = \frac{R(s) - W(s)}{\Delta v(s)} = -\frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}. \tag{178}$$

Considerando-se uma perturbação $\Delta v(s)$ em forma de degrau, então:

$$Er(s) = \left(-\frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}\right)\frac{1}{s}. \tag{179}$$

Pode-se calcular o erro de estado estacionário com ajuda da fórmula abaixo (Ogata, 2010, p. 219), para entender o seu comportamento quando o sistema fica muito tempo em operação:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sEr(s) \tag{180}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{-16s}{s(V_{\pi m} + 16C_{ampli}K_p) + 16C_{ampli}K_i} = 0. \tag{181}$$

Logo, pelo resultado anterior, $Er(s) = 0$ depois de um longo tempo, e então, o sinal de interesse $W(s)$ tende a zero, o que é o necessário para obter a quadratura do sistema. Desse modo, o sinal de controle $u_{PI}(s)$ compensará o valor de $\Delta v(s)$ tal que a soma seja zero. Note-se que, sempre que a perturbação tenha um sinal num instante de tempo, o compensador terá o sinal oposto para compensar seu efeito.

Finalmente, os valores $K_i = 0,1$, $K_p = 0,01$ e $C_{ampli} = 2,67$ satisfazem a perturbação do sistema. Também, pode-se calcular o pólo do sistema controlado fazendo $1 + G_p(s)G_c(s) = 0$. Substituindo os valores usados no projeto, tem-se um pólo em $s = -0,06$. Portanto, com a parte real negativa, o sistema é estável para entradas forma degrau.

4.3 DISCRETIZAÇÃO DE UM CONTROLADOR PI

Segundo (Ogata, 1996, p 115), um sistema PI pode ser apresentado da seguinte forma:

$$u_{PI}(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt\right], \tag{182}$$

onde $e(t)$ é a entrada do controlador (erro), $u_{PI}(t)$ é a saída do controlador (sinal controlável), K_p (ganho proporcional) e T_i é o tempo integral (reset time).

Em seguida, procede-se ao cálculo da integral usando o método do trapézio, como a soma de pequenas áreas em forma de trapézio, segundo a Figura 48:

$$u_{PI}(K\tau) = K_p e(K\tau) + \frac{K_p}{T_i}\tau\left[\frac{e(0)+e(\tau)}{2} + \frac{e(\tau)+e(2\tau)}{2} + \cdots + \frac{e((K-1)\tau)+e(K\tau)}{2}\right], \quad (183)$$

$$u_{PI}((K-1)\tau) = K_p e((K-1)\tau) + \frac{K_p}{T_i}\tau\left[\frac{e(0)+e(\tau)}{2} + \frac{e(\tau)+e(2\tau)}{2} + \cdots + \frac{e((K-2)\tau)+e((K-1)\tau)}{2}\right]. \quad (184)$$

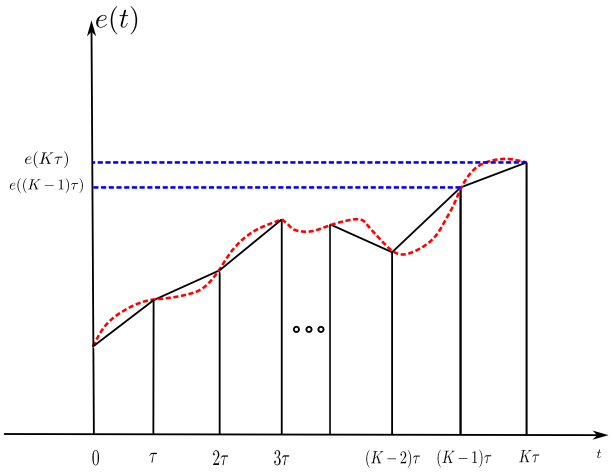
Além disso, subtraindo (184) de (183):

$$u_{PI}(K\tau) - u_{PI}((K-1)\tau) = K_p(e(K\tau) - e((K-1)\tau)) + \frac{K_p}{T_i}\tau\left[\frac{e((K-1)\tau)+e(K\tau)}{2}\right], \quad (185)$$

$$u_{PI}(K\tau) = u_{PI}((K-1)\tau) + K_p(e(K\tau) - e((K-1)\tau)) + K_i\tau\left[\frac{e((K-1)\tau)+e(K\tau)}{2}\right]. \quad (186)$$

onde $K_i = K_p/T_i$. Importante comentar que τ não é o mesmo valor de T_s (período de amostragem do sinal fotodetectado) da seção 4.1; o τ é aquele tempo que o sistema demora em calcular o sinal de error em cada iteração. Sendo assim, implementa-se a equação de diferenciação no myRIO.

Figura 48 – Método do trapézio.



Fonte: Próprio autor

No próximo capítulo, pretende-se fazer uma análise do controlador virtual para obter as variáveis desejadas.

5 MODOS DESLIZANTES

A formulação de qualquer problema de controle prático sempre apresenta discrepância entre a planta atual e o modelo matemático usado para projeto do controlador. Essas incompatibilidades compreendem desde perturbações externas, parâmetros da planta e dinâmicas não modeladas. O interesse no desenvolvimento de métodos de controle robusto existe porque se consegue resolver os problemas de incertezas e perturbações num sistema. Uma abordagem de controlador robusto é a técnica de controle de modo deslizante.

Neste capítulo, será apresentado um breve fundamento teórico da técnica de controle por modos deslizantes. Simulações em malha fechada, e fenômeno de *chattering* serão apresentados. Ao final, se apresentará a técnica de demodulação, baseado na lei de controle, por modos deslizantes.

Em 2019, (Felão, 2019) propôs usar o método de controle por modos deslizantes com uma abordagem de alto ganho sobre um interferômetro de dos feixes onde se compensa os deslocamentos de fase induzidos pelo braço sensor. A vantagem deste método é que não precisa de algoritmos de desdobramento de fase, os quais costumam consumir tempo de processamento e memória. Um novo método de demodulação de fase óptica é proposto, aliando esta estratégia de controle implementada digitalmente com um interferômetro operando em malha aberta. Isto permite operar com um algoritmo de detecção virtualmente controlado que compensa todos os deslocamentos de fase introduzidos no sistema, trazendo considerável simplificação à instrumentação requerida. Trabalhos que usaram a ideia foram publicados, tais como (Felão *et al.*, 2019), (Felão *et al.*, 2022) e (Martin *et al.*, 2017), contudo, esta é a primeira vez que será aplicado a um sensor de alta tensão.

As principais vantagens deste controlador é a robustez, convergência em tempo finito e dinâmica compensada de ordem reduzida (Shtessel *et al.*, 2014, p. 1). Projetar um controlador por modo deslizante fornece uma abordagem sistemática ao problema de manter estabilidade e qualidade frente a perturbações. Além disso, permite quantificar o compromisso (*trade-off*) entre a modelagem e desempenho de uma maneira simples.

5.1 SUPERFÍCIES DESLIZANTES

Em (Slotine; Li, 1991, p. 278) comenta-se sobre um sistema dinâmico de entrada única, onde existe um problema de controle que consiste de se acompanhar uma variável no tempo, chamado $\mathbf{x}_d$ (estado desejado). Seja:

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \tag{187}$$

onde u é a entrada de controle escalar, x é a saída de interesse e $\mathbf{x}$ é o vetor de estados. A entrada u é quem leva as variáveis dentro de $\mathbf{x}$ para alcançar a superfície deslizante.

Logo, para conseguir atingir o estado desejado $\mathbf{x}_d$, a condição inicial é a seguinte:

$$\mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}(0). \tag{188}$$

Consegue-se demostrar que, um sistema de ordem n pode ser reduzido a um problema de estabilização de primeira ordem. O problema de primeira ordem de manter um escalar s zerado pode agora ser atingido escolhendo a lei de controle u, tal que, fora da $S(t)$ (S(t) é uma superfície no espaço de estados $\mathbb{R}^{(n)}$), ocorra:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\xi|s|, \tag{189}$$

tal que ξ é uma constante estritamente positiva. Esta equação também é conhecida como critério de alcançabilidade. Note-se que, a equação (189) também satisfaz o critério de Lyapunov para uma função candidata $V(\mathbf{x}) = (1/2)s^2$. Como esta é estritamente positiva (positiva definida), pelo critério de alcançabilidade, sua derivada é negativa, e então $V = (1/2)s^2$ é uma função de Lyapunov.

Considere-se a seguir a seguinte definição (Slotine; Li, 1991, p. 61):

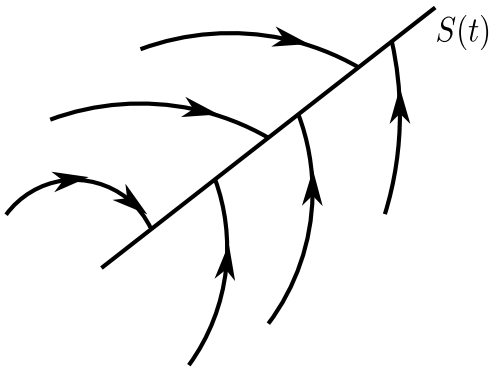
Definition 5.1.1. *Se, em uma bola $\boldsymbol{B}_{R_o}$, a função V(**x**) é positiva definida e tem derivadas parciais contínuas, e, se sua derivada temporal ao longo de qualquer trajetória do sistema é negativa semi-definida, como por exemplo:*

$$\dot{V}(x) \leq 0, \tag{190}$$

*então V(**x**) é chamada de função de Lyapunov para o sistema*

A desigualdade (189) informa que o quadrado da *distância* à superfície (s^2) diminui ao longo de todas as trajetórias do sistema. Dessa forma, restringe as trajetórias a apontar para superfície $S(t)$. Equação (189) é conhecida como critério deslizante (*sliding condition*), constituindo um conjunto invariante.

Figura 49 – Condição deslizante.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 49, as trajetórias fora de superfície deslizante podem se *mover* enquanto ainda apontam para $S(t)$. Finalmente, se (189) for atingido, e o critério inicial (188) não, a superfície $S(t)$ ainda assim é atingida num tempo finito menor que $|s(t=0)|/\xi$, o qual é facilmente calculado integrando (189), desde $t=0$ até $t=t_{reach}$, para $s(t=0)>0$:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &\leq -\xi \\ \int_{t=0}^{t=t_{reach}} ds &\leq -\xi \int_{t=0}^{t=t_{reach}} dt, \end{aligned} \tag{191}$$

então:

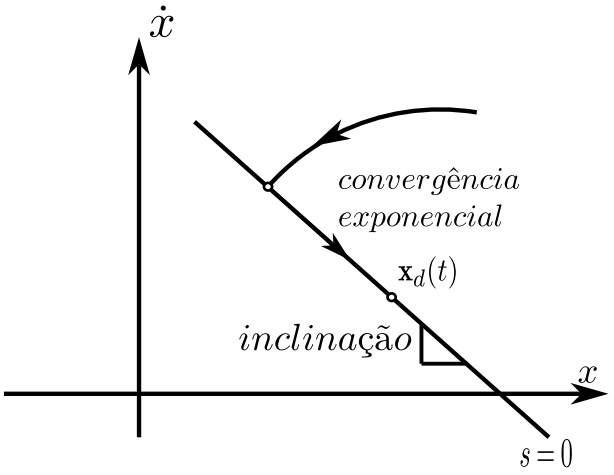
$$\begin{aligned} s(t=t_{reach}) - s(t=0) &\leq -\xi(t_{teach} - 0) \\ \frac{s(t=0)}{\xi} &\geq t_{teach}. \end{aligned} \tag{192}$$

Da mesma forma, pode-se proceder para $s(t=0)<0$, obtendo-se:

$$t_{reach} \leq \frac{|s(t=0)|}{\xi}. \tag{193}$$

Portanto, o erro na própria superfície tende a zero exponencialmente.

Figura 50 – Interpretação gráfica.



Fonte: Próprio autor.

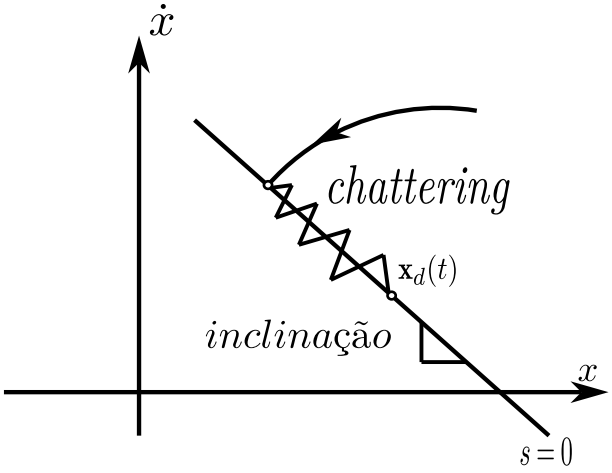
Para fins de ilustração, considere-se um sistema de segunda ordem como, por exemplo, aquele onde a superfície deslizante é uma linha no plano de fase como mostrado na Figura 50. Note-se que a condição inicial pode ser qualquer, e ao chegar até a superfície desliza-se exponencialmente até alcançar o estado desejado $\mathbf{x}_d$.

Em resumo, a principal ideia por traz das equações anteriores é escolher uma função com boas características para rastrear o erro, s, e depois, selecionar a lei de controle de realimentação u. O projeto de controlador tem duas etapas: primeiro, a lei de controle realimentado u tem que verificar a condição de deslizante, (189). A lei de controle deve ser descontínua entre $S(t)$.

Desde que a implementação do controle chaveado é necessariamente imperfeita, os valores de s não são conhecidos, e isso leva ao efeito chamado *chattering*. Na prática, o *chattering* é indesejável porque ele envolve alta atividade de controle, e poderia estimular dinâmicas de alta frequência. Na Figura 51, mostra-se o efeito do *chattering* agir no sistema de segunda ordem, onde após chegar na superfície deslizante, os estados ficam oscilando entorno dela até chegar a um estado desejado, $\mathbf{x}_d$.

Assim, na segunda etapa, a lei de controle descontínua u é adequadamente suavizada até atingir uma compensação ótima entre largura de banda do controle e precisão do rastreio. Enquanto a primeira etapa é responsável pelas incertezas paramétricas, a segunda alcança robustez para dinâmicas não modeladas em alta frequência.

Figura 51 – Chattering como resultado do chaveamento imperfeito no controle.



Fonte: Próprio autor.

5.2 CONTROLE COM MODOS DESLIZANTES APLICADO AO SISTEMA POLARIMÉTRICO

Segundo (146), quando a condição de quadratura for satisfeita, são gerados dois sinais:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\cos(\theta) \\ p_2 &= -\sin(\theta). \end{aligned} \tag{194}$$

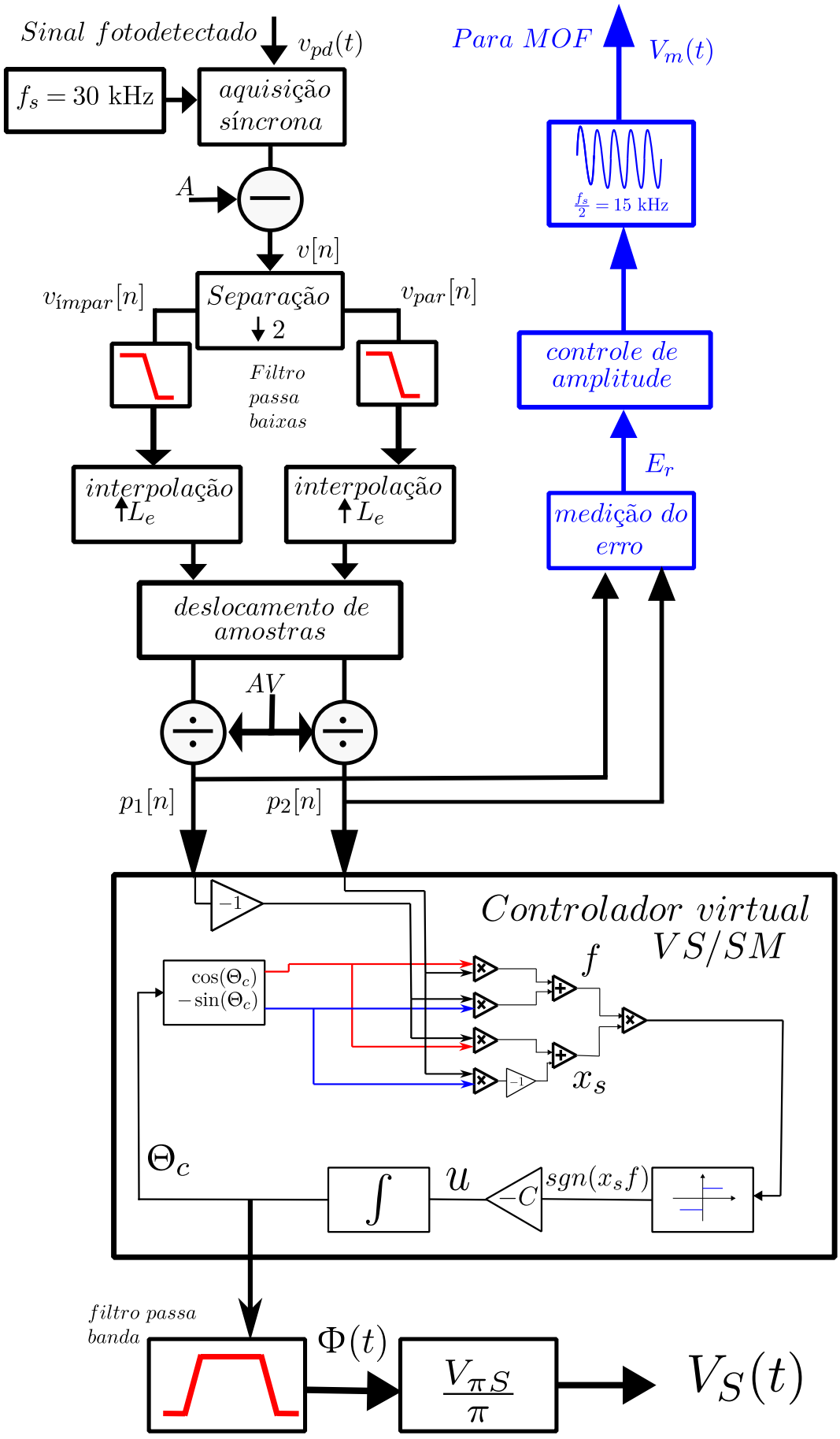
Esses sinais vão alimentar o compensador de alto ganho constituído pelo sistema VS/SM de malha fechada gerando um deslocamento de fase total, como segue:

$$\Theta_t(t) = \theta + \Theta_c = \Phi(t) + \phi_0 + \varphi(t) + \frac{\pi}{4} + \Theta_c(t), \tag{195}$$

onde θ é dada por (149) e Θ_c é a compensação de deslocamento fase. Logo, da Figura 52 têm-se os valores de f e x_s:

$$\begin{aligned} f &= (p_2)(\cos(\Theta_c)) + (-p_1)(-\sin(\Theta_c)) \\ x_s &= (-p_1)(\cos(\Theta_c)) - (p_2)(-\sin(\Theta_c)). \end{aligned} \tag{196}$$

Figura 52 – Diagrama completo do projeto.



Fonte: Próprio autor.

A partir de (196) obtém-se:

$$\begin{aligned} f &= -\sin(\theta + \Theta_c) \\ x_s &= \cos(\theta + \Theta_c). \end{aligned} \tag{197}$$

Com isso, o objetivo do controle não linear é determinar Θ_c para manter o sistema virtual em um ponto de quadratura de fase estável, como, por exemplo $x_s = 0$. Note-se que nesta situação é preciso atingir o seguinte:

$$\theta + \Theta_c = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \tag{198}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Caso seja atingida esta situação, Θ_c compensaria o valor de θ a menos de um valor constante. Conforme explicado anteriormente, tem que se escolher uma boa função $s(\mathbf{x})$ que ajude a rastrear o erro. Tomando a mesma função aplicada em (Felão *et al.*, 2022, p. 2), escolhe-se a seguinte superfície deslizante $\{x(t)|s(x) = 0\}$:

$$x_s(t) = s(\mathbf{x}) = \cos(\theta + \Theta_c), \tag{199}$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor de espaço n-dimensional. Em seguida, calcula-se a derivada de x_s:

$$\dot{s} = -(\dot{\theta} + \dot{\Theta}_c)\sin(\theta + \Theta_c). \tag{200}$$

Posteriormente, de (197), pode-se usar f em (200):

$$\dot{s} = f\dot{\theta} + f\dot{\Theta}_c. \tag{201}$$

Desse modo, deve-se escolher a lei de controle que vai levar às trajetórias (variáveis de estado), num tempo t_{reach}, à superfície deslizante e, além disso, mantê-las dentro da superfície por todo o tempo. Lembre-se de que para a escolha desta lei de controle deve-se atingir a condição de alcançabilidade, a qual deve ser levada em conta na etapa do projeto (Shtessel *et al.*, 2014, p. 6). Considere-se a lei de controle como:

$$u = -Csgn(x_s f) = \dot{\Theta}_c, \tag{202}$$

onde C é uma constante estritamente positiva e $sgn(.)$ é a função sinal algébrica. A seguir, como em (201), tem-se a derivada de Θ_c, então, será necessário aplicar a integral após o sinal de controle, tal como mostrado na Figura 52, resultando em:

$$\dot{s} = f\dot{\theta} + fu. \tag{203}$$

Depois, multiplica-se (199) por (203), obtendo-se:

$$s\dot{s} = x_s(f\dot{\theta} - fCsgn(x_s f)). \tag{204}$$

Em seguida, pode-se usar as seguintes propriedades: $|x| = xsgn(x)$ e $x = |x|sgn(x)$, em (204):

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= -C(x_s f)sgn(x_s f) + (x_s f)sgn^2(x_s f)\dot{\theta} \\ s\dot{s} &= (-C + \dot{\theta}sgn(x_s f))|x_s f|. \end{aligned} \tag{205}$$

Escolhendo $C \geq C_n + |\dot{\theta}|$, para um dado C_n estritamente positivo.

$$s\dot{s} \leq -C_n|x_s f| - |\dot{\theta}||x_s f| + \dot{\theta}(x_s f). \tag{206}$$

Note-se que o limite superior ocorre quando $\dot{\theta}$ e $x_s f$ têm o mesmo sinal, e, usando a propriedade dos números reais $|xy| = |x||y|$, então:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}s^2\right) = s\dot{s} \leq -C_n|f||x_s| = -C_n|f||s| = -\xi|s|. \tag{207}$$

Neste caso, tem-se que o critério de alcançabilidade é atingido, o que indica que qualquer trajetória cai na superfície deslizante num tempo finito e se mantém nela por um tempo infinito. Repare-se que o critério de alcançabilidade é uma condição débil e pode ser conferida em (Slotine; Li, 1991, p. 280) e (Shtessel *et al.*, 2014, p. 5).

5.2.1 ANÁLISE DE LYAPUNOV NOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

Seja a função escalar candidata $V(s) = 1/2(s^2)$, onde $s = \cos(\theta + \Theta_c)$. Segundo (Slotine; Li, 1991, p. 62) tem-se o seguinte teorema:

[Estabilidade local] *Se, em uma bola B_{R_k}, existe uma função escalar V(x) com derivadas parciais contínuas de primeira ordem tal que:*

- *V(x) é definida positiva (localmente em B_{R_k})*
- *$\dot{V}(x)$ é semi-definida negativa (localmente em B_{R_k})*

*então, o ponto de equilíbrio **0** é estável. Se, a derivada $\dot{V}(x)$ é localmente definida negativa em B_{R_k}, então a estabilidade é assintótica.*

Logo, uma função é localmente positiva se dentro da bola B_{R_k}, tem-se $V(s) > 0$ para $s \neq 0$ e $V(s = 0) = 0$. Note-se que, em nosso espaço de estados, $V(s)$ pode ser zero em múltiplos pontos devido à periodicidade da função $\cos(\theta + \Theta_c)$. Então, analisando-se localmente os pontos, onde substituídos em $V(s)$ resulta zero para cada bola, tem-se:

$$\theta + \Theta_c = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \tag{208}$$

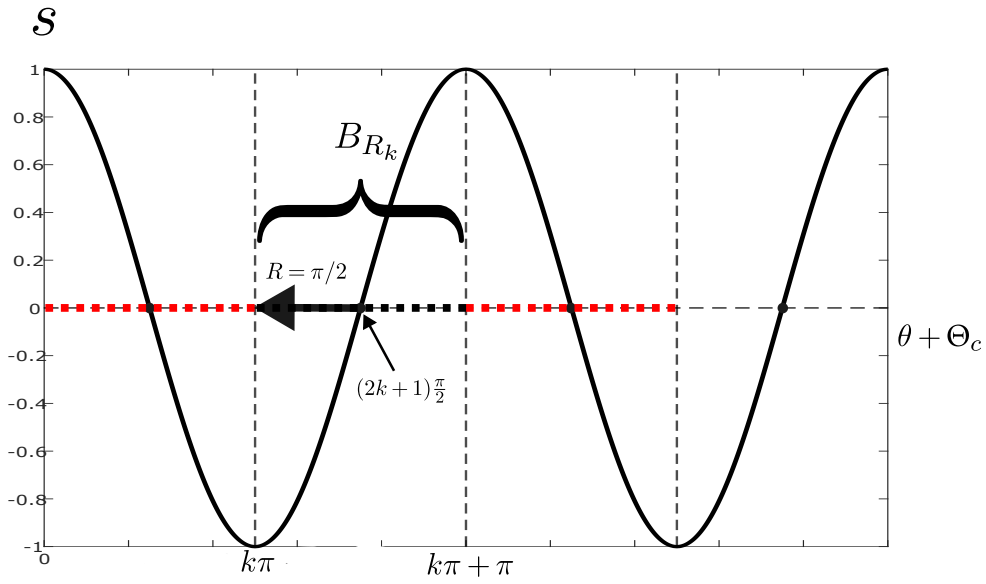
onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se escolhe uma bola aberta de raio $\pi/2$, tal que, para qualquer k, a função V é definida em:

$$B_{R_k} = \{\theta + \Theta_c | k\pi < \theta + \Theta_c < k\pi + \pi\}. \tag{209}$$

Como para qualquer valor numa bola, o valor da função candidata é $V > 0$, e, é igual a $V = 0$ quando $s = \cos((2k+1)\pi/2)$, então, **V(s) é localmente positiva definida** para cada uma das bolas.

Na Figura 53, apresentam-se as bolas centradas em $(2k+1)\pi/2$ com raio $R = \pi/2$, sendo que o conceito da bola neste caso unidimensional refere-se ao domínio s.

Figura 53 – Estabilidade dos pontos $(2k+1)\pi/2$.



Fonte: Próprio autor.

A seguir, derivando-se função candidata no tempo, resulta:

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= -(\dot{\theta} + \dot{\Theta}_c)\cos(\theta + \Theta_c)\sin(\theta + \Theta_c) \\ s\dot{s} &= (\dot{\theta} + \dot{\Theta}_c)sf \\ s\dot{s} &= \dot{\theta}sf - Csgn(sf)sf \\ s\dot{s} &= (\dot{\theta}sgn(sf) - C)|sf|. \end{aligned} \tag{210}$$

Escolhendo $C > C_n + |\dot{\theta}|$, tem-se:

$$s\dot{s} < -C_n|sf| - |\dot{\theta}||sf| + \dot{\theta}(sf), \tag{211}$$

onde o limite superior ocorre quando sf e $\dot{\theta}$ têm o mesmo sinal, e portanto:

$$s\dot{s} < -C_n|f||s|. \tag{212}$$

Note-se que, para uma bola escolhida ocorre $\dot{V} < 0$, portanto a função candidata é uma função de Lyapunov que é localmente estável, assintoticamente, nos pontos $(2k+1)\pi/2$.

Agora se analisam os pontos de estabilidade de uma nova função candidata em função da variável $f = -\sin(\theta + \Theta_c)$. Então, tem-se $V(f) = 1/2(f^2)$, e, tal qual o caso anterior, têm-se múltiplos pontos onde a função candidata pode ser zero, e dessa forma, se analisará localmente no entorno desses pontos. Portanto, os pontos que tornam V igual a zero são:

$$\theta + \Theta_c = k\pi, \tag{213}$$

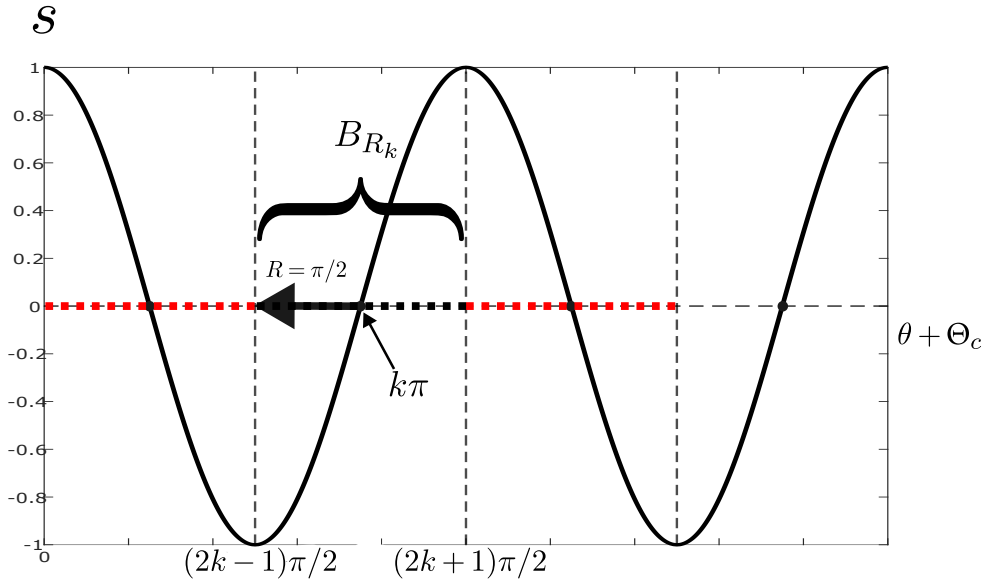
onde $k \in \mathbb{Z}$. Aqui também foi escolhida uma bola de raio $\pi/2$, tal que, para qualquer k, a função candidata estará definida em:

$$B_{R_k} = \{\theta + \Theta_c | (2k-1)\pi/2 < \theta + \Theta_c < (2k+1)\pi/2\}\,. \tag{214}$$

Como, para qualquer valor dentro de uma bola, o valor da nossa função candidata é $V > 0$, e, é igual a $V = 0$ quando $f = \sin(k\pi)$, então **V(f) é localmente positiva definida para cada uma das bolas**.

Na Figura 54, apresentam-se as bolas centradas em $k\pi$ com raio $R = \pi/2$.

Figura 54 – Estabilidade dos pontos $k\pi$.



Fonte: Próprio autor.

A seguir, derivando-se a função candidata no tempo, resulta:

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= (\dot{\theta} + \dot{\Theta}_c)\cos(\theta + \Theta_c)\sin(\theta + \Theta_c) \\ s\dot{s} &= -(\dot{\theta} + \dot{\Theta}_c)sf \\ s\dot{s} &= -\dot{\theta}sf + Csgn(sf)sf \\ s\dot{s} &= (-\dot{\theta}sgn(sf) + C)|sf|. \end{aligned} \tag{215}$$

Escolhendo $C > C_n + |\dot{\theta}|$, têm-se:

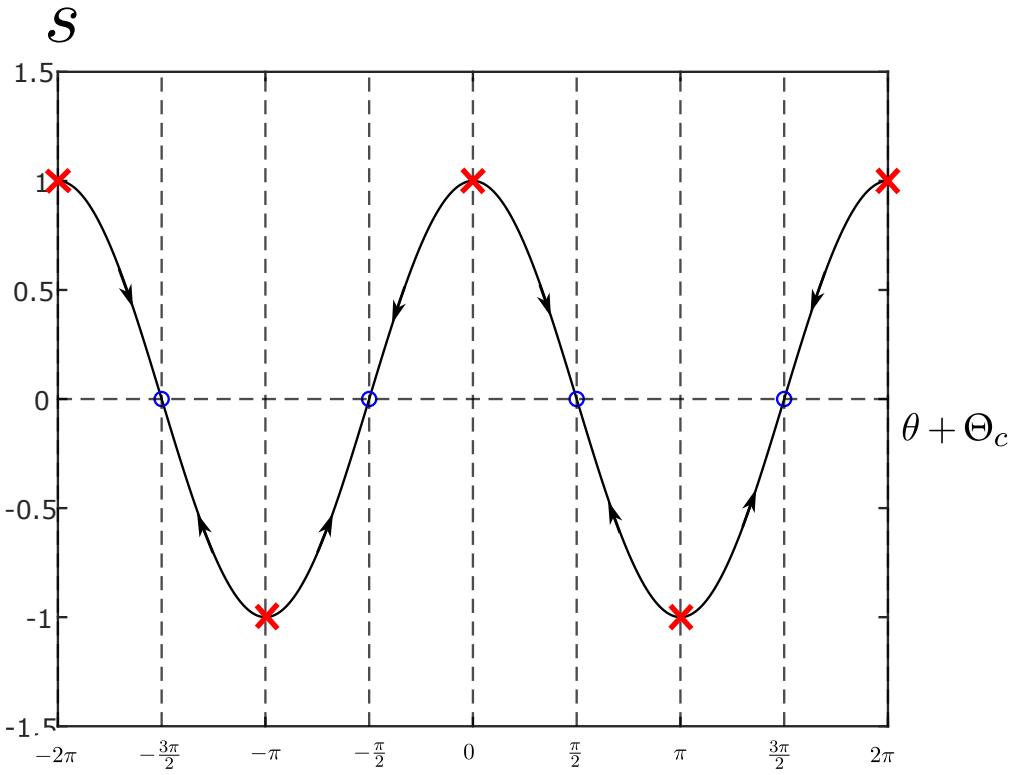
$$s\dot{s} > C_n|sf| - |\dot{\theta}||sf| - (\dot{\theta})(sf), \tag{216}$$

onde o mínimo acontece quando (sf) e $\dot{\theta}$ têm o mesmo sinal, e portanto,

$$s\dot{s} > C_n|s||f|. \tag{217}$$

Note-se que, para a bola escolhida ocorre $\dot{V} > 0$, portanto a função candidata não é uma função de Lyapunov, e, os pontos $k\pi$ são pontos de repulsão.

Figura 55 – Estabilidade dos pontos.



Fonte: Próprio autor.

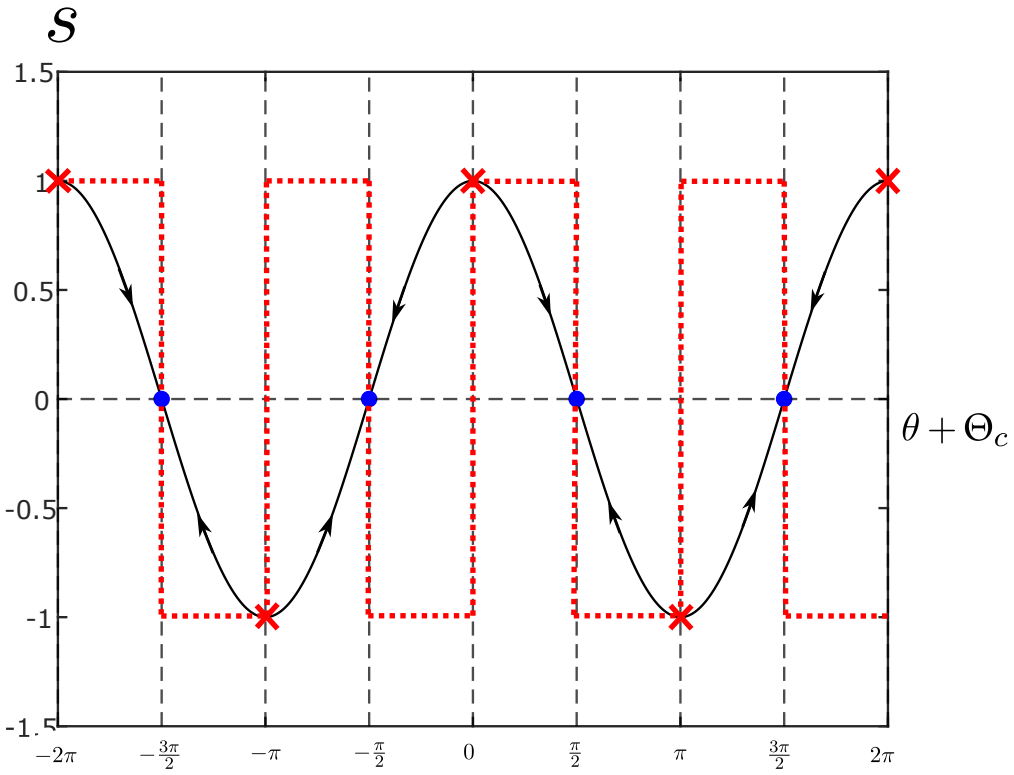
Lembre-se de que o objetivo da condição de alcançabilidade é sempre manter o escalar s em zero, e, a lei de controle u é quem puxa as trajetórias no plano de fase para chegar até a superfície deslizante e permanecer ali. Repare-se que na Figura 55, $s = 0$ correspondem aos pontos de atração e, como demostrado anteriormente, caem nesses pontos assintoticamente. Isso implica que, quando o sistema fica na superfície deslizante, as perturbações e incertezas podem ser toleradas.

Desse modo, pode-se analisar como a lei de controle puxa o sistema para levar as trajetórias ao ponto de estabilidade. Dado que

$$u = -Csgn(sf) = -Csgn(-\frac{1}{2}\sin(2(\theta + \Theta_c))), \tag{218}$$

nota-se que, a equação (218) tem uma frequência equivalente ao dobro da superfície deslizante.

Figura 56 – Lei de controle.



Fonte: Próprio autor.

Repare-se que, a Figura 56 foi desenhada da equação (218) da seguinte forma: $u/C = -sgn(sf)$, e que, quando o sinal de controle (linha vermelha tracejada) assume um valor positivo, o sistema exerce atração para à direita, enquanto, se o valor de u é negativo, o sistema exerce atração para à esquerda. Portanto, sempre conduz o sistema para os pontos de equilíbrio estável.

5.3 CHATTERING

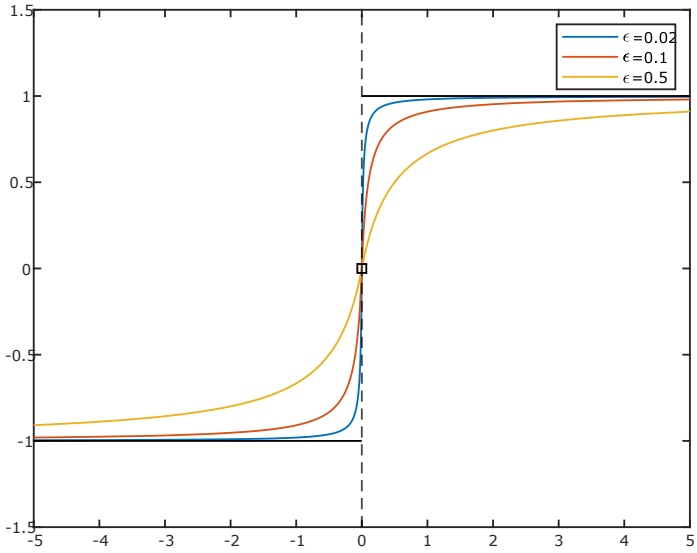
Em muitos sistemas, é importante evitar o *chattering*. Isso pode ser conseguido fornecendo sinais de controle contínuos ou suaves. Note-se que o sinal de controle é descontínuo se $u = -Csgn(sf)$, então a ideia é substituí-lo por uma função contínua e suave, por exemplo, pela sigmoide:

$$sgm(sf) = \frac{sf}{|sf| + \epsilon}, \tag{219}$$

onde ϵ é um valor escalar pequeno e positivo. Pode-se notar que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{sf}{|sf| + \epsilon} = sgn(sf). \tag{220}$$

Figura 57 – Funções sigmoides.



Fonte: Próprio autor.

Para $sf \neq 0$, o valor de ϵ deve-se ser escolhido para compensar a necessidade de manter um desempenho ideal juntamente com a necessidade de garantir uma ação de controle suave. Na Figura 57, mostra-se a função sigmoide para diferentes valores de ϵ.

A variável deslizante (s) não pode chegar até zero em absoluto, porém, pode chegar bem perto no domínio da vizinhança de $s = 0$. Contudo, uma função equivalente suave, pode tirar exatidão ou gerar perda de robustez. Estritamente falando, o controle não é mais um controle deslizante, uma vez que a variável deslizante não chega até zero, além de que o tempo finito para chegar até zero não poderia ser calculado. No entanto, a qualidade do sistema com uma função contínua não se afasta muito de uma descontínua. Como os efeitos são quase-parecidos, então, o termo adequado seria um *quasi-sliding mode* (Shtessel *et al.*, 2014, p. 10).

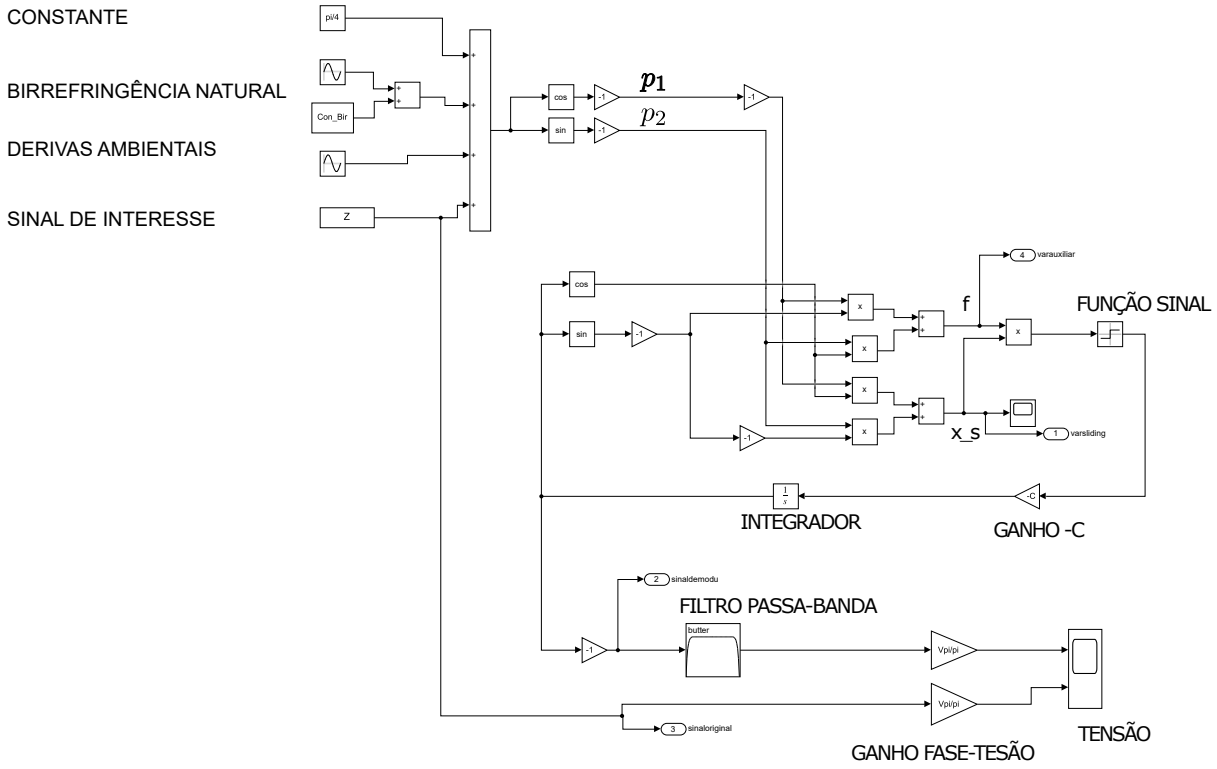
5.4 SIMULAÇÃO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

Na simulação, será considerado que o sistema está em quadradura e que nossos sinais p_1 e p_2 dependem de θ, conforme (146). Além disso, segundo (134), θ é composto pelos seguintes termos:

- Constante $\pi/4$.
- Birrefringência natural, que tem uma parte fixa ϕ_0, que pode ser calculada usando (90) e resultando um valor de $42,000$ rad, e outra variável, simulada com amplitude de 1 rad e frequência 10 Hz.

- Derivas ambientais ($\varphi(t)$), geradas por turbulências do ar, flutuações térmicas e ruído do local de medição do interferômetro. A simulação usou uma onda senoidal de amplitude 1 rad e frequência de 3 Hz.
- Sinal de interesse ($\Phi(t)$), com tensão de $4,7$ kV e uma frequência de 60 Hz, e com um valor de tensão de meia-onda de $V_{\pi S} = 3,77$ kV.

Figura 58 – Diagrama de blocos em malha fechada no Simulink.



Fonte: Próprio autor.

Note-se que na Figura 58, torna-se necessário conhecer o valor do ganho $-C$ da função sinal dentro do controle deslizante. Da equação (206), lembre-se da desigualdade $C \geq C_n + |\dot{\theta}|$, na qual, usando-se os valores fornecidos, têm-se:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \Phi(t) + \phi_0 + \varphi(t) + \frac{\pi}{4} \\ \theta(t) &= \frac{\pi 4700}{3770}\sin(2\pi 60t) + 42000 + \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 3t) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{221}$$

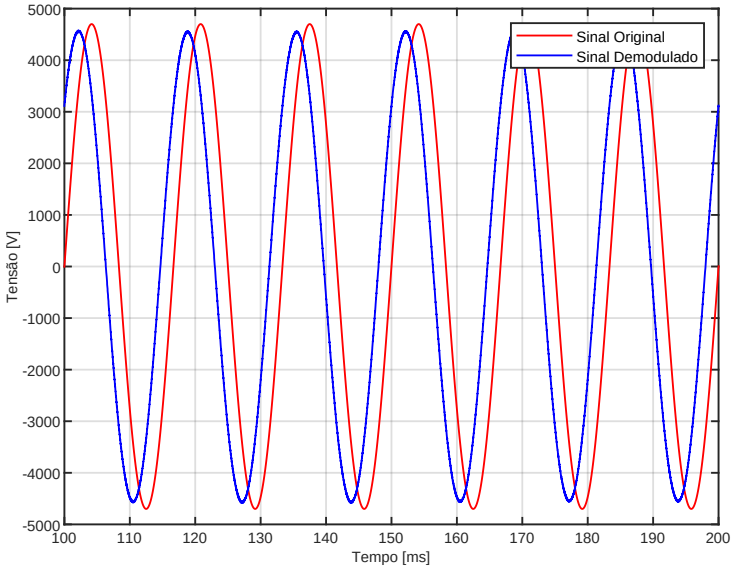
Dessa forma, o primeiro termo está relacionado ao sinal de interesse. Lembrando que a tensão pode variar até que a fase chegue a 2π, então, o maior valor para $\dot{\theta}$ é:

$$|\dot{\theta}|_{max} = 4\pi^2 60 + 20\pi + 6\pi \approx 2450. \tag{222}$$

Assim, adicionando um valor aleatório positivo para C_n pode-se se escolher um valor para C. Em nosso, caso escolhemos $C = 5000$.

Quanto ao filtro na saída, é um filtro passa-banda *Butterworth* de segunda ordem, com uma faixa entre 20 Hz e 3 kHz.

Figura 59 – Sinal demodulado e original.

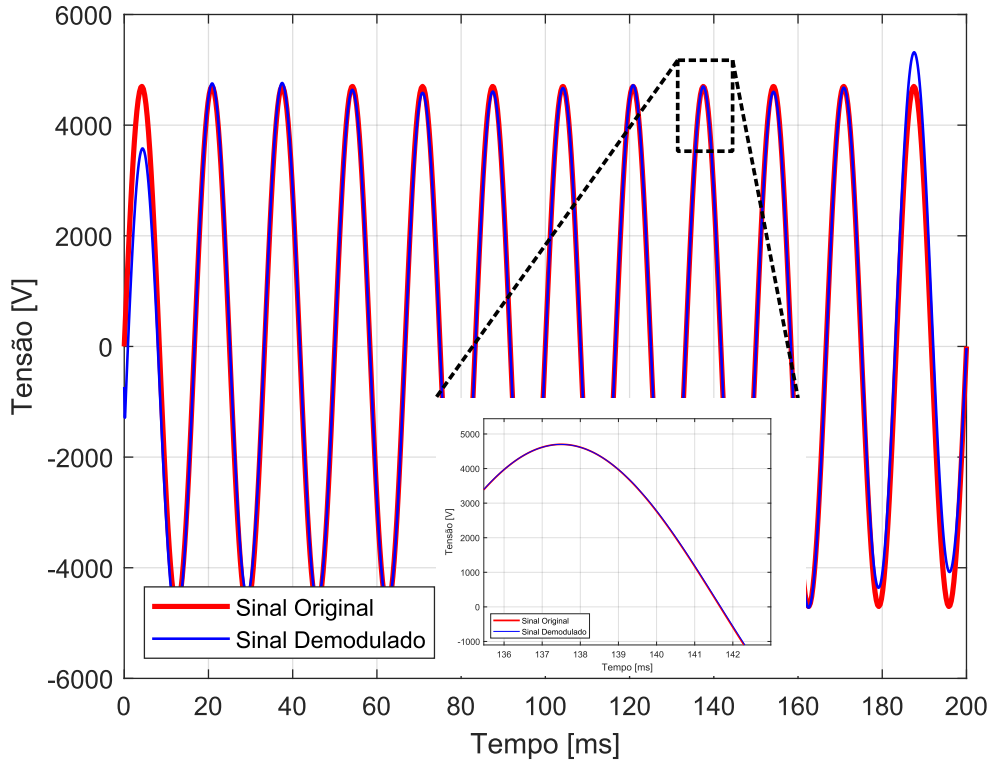


Fonte: Próprio autor.

Note-se da Figura 59 dois sinais: o azul é o sinal demodulado e o vermelho é o sinal fornecido ao sistema. Note-se a semelhança nas amplitudes dos sinais, porém existe uma defasagem, produzida por conta do próprio filtro que adiciona fase. Então, uma possível solução é usar um filtro que não adiciona fase, mas que ainda filtra o sinal. Como mostrado na Figura 58, antes de passar pelo filtro existe um ponto de saída para enviar os dados ao *workspace* do Matlab, onde serão usados os comandos *butter* e *filtfilt* para projetar um filtro Butterworth de segundo ordem, e assim, usar os coeficientes gerados pelo *butter* para criar um filtro digital de defasagem zero, conforme o script:

```
%Etapa de demodulação
[b,a] = butter(2,[20 3000]/75000);%filtro passa-banda
y = filtfilt(b,a,SaidaDemodu);%ordem zero filter
```

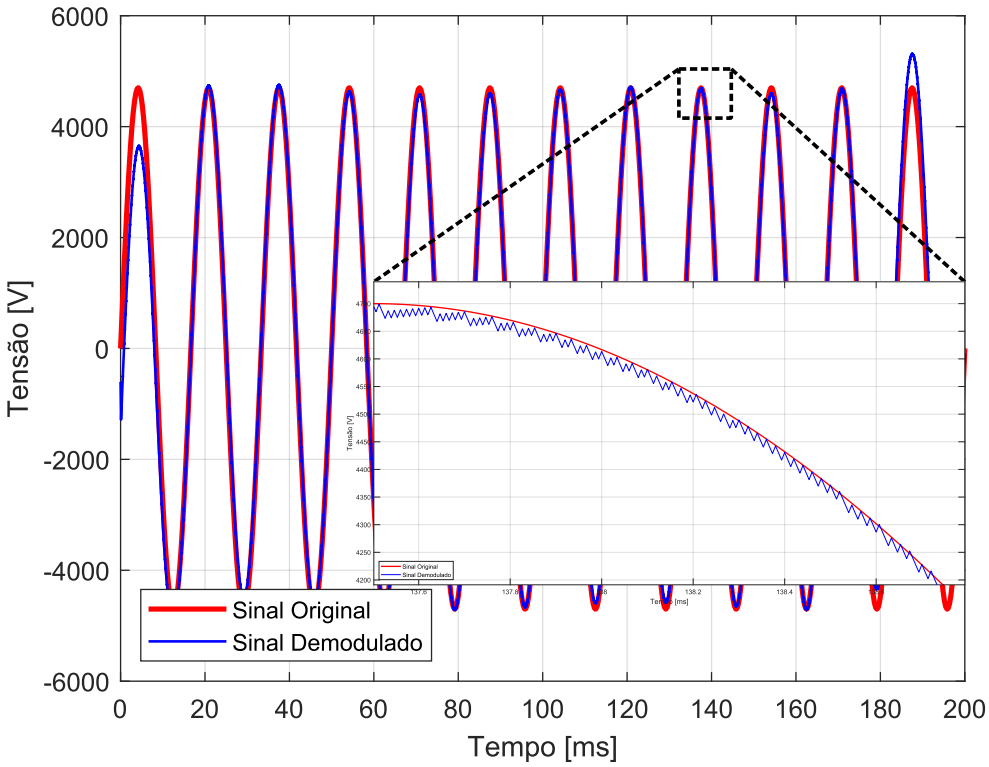
Figura 60 – Sinal demodulado com filtro passa-banda Butterworth com fase zero.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 60, têm-se em azul o sinal demodulado e, em vermelho, o sinal original. Repare-se que o sinal demodulado segue perfeitamente o sinal original, depois de um tempo de transição. Observe-se, também, que existe uma distorção ao início e ao final do sinal demodulado, isto é, porque o filtro de fase zero processa os dados em direção direta e inversa. Além disso, é um filtro não-causal, sendo bom para aplicações *offline*, como, por exemplo: filtragem de arquivos de áudio salvos num disco. Estas características do filtro não são benéficas para o projeto, porque, de um conjunto de dados, tem que se remover a transição do início e do final, deixando a parte do centro como ondas filtradas. Na seção seguinte, uma razão adicional será citada, do porque não usar um filtro de fase zero. Por outro lado, fazendo um zoom consegue-se observar que o filtro passa-banda rejeita as oscilações relacionadas ao *chattering* do sistema. Na prática, também é preciso usar um filtro passa-banda que rejeite o efeito do *chattering*.

Figura 61 – Sinal demodulado com filtro passa-alta Butterworth com fase zero.



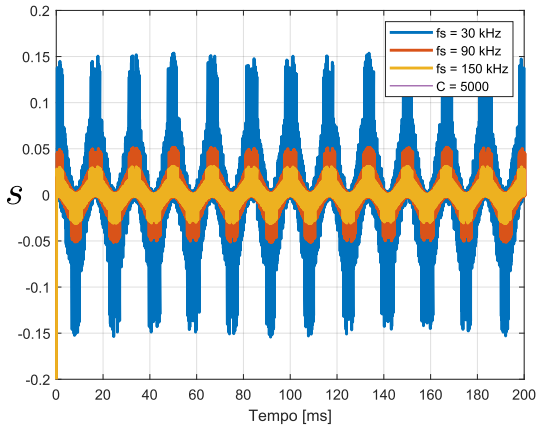
Fonte: Próprio autor.

Na Figura 61, mostra-se o sinal de tensão demodulada e original, com a diferença da Figura 60, que se está usando um filtro passa-alta acima de 20 Hz. No zoom, consegue-se ver o efeito do *chattering* em forma de oscilações.

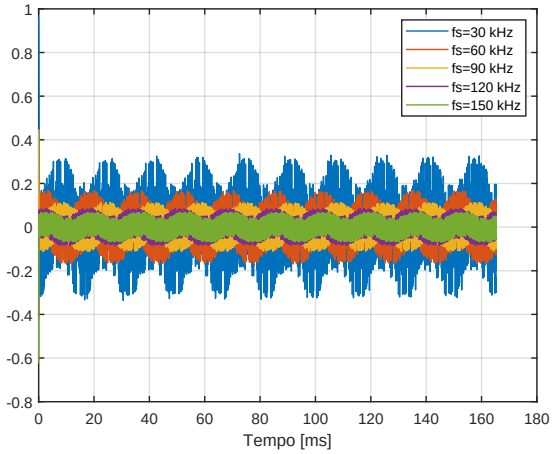
Na Figura 62, mostra-se o valor de s com diferentes frequências de amostragem. Observando-se a amplitude de s para um valor de $C = 5000$ constante, verifica-se que uma maior frequência de amostragem tem um efeito positivo (idealmente s deve ficar perto do zero). Note-se que a amplitude de s em 30 kHz é maior nas medições (Figura 62(b)) em relação ao simulado (Figura 62(a)).

Figura 62 – Variável deslizante com diferentes frequências de amostragem.

(a) Simulado



(b) Medido

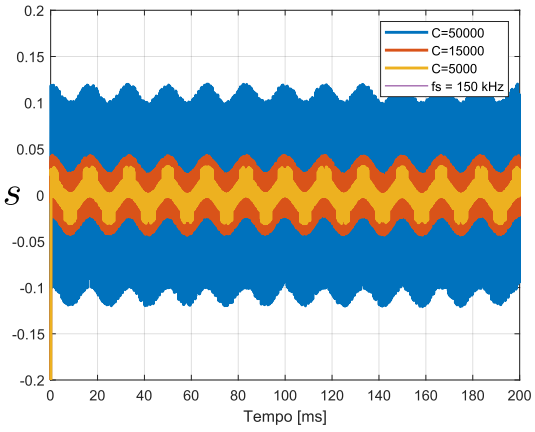


Fonte: Próprio autor

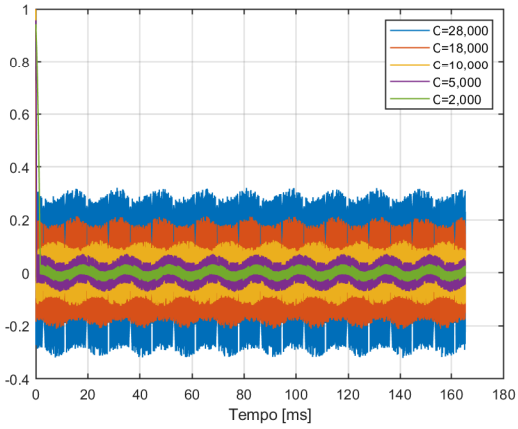
Do mesmo modo, analisa-se o sistema quando o valor de C é variável, com uma frequência de amostragem de 150 kHz. Na Figura 63 observa-se que, quanto maior é o valor de C, maior é o valor de s (sua amplitude fica maior), e que, quanto menor o valor de C, melhor é para o sistema, porque o fenômeno de *chattering* é reduzido. O efeito pode ser observado nas medições.

Figura 63 – Variável deslizante com constante C diferentes.

(a) Simulado



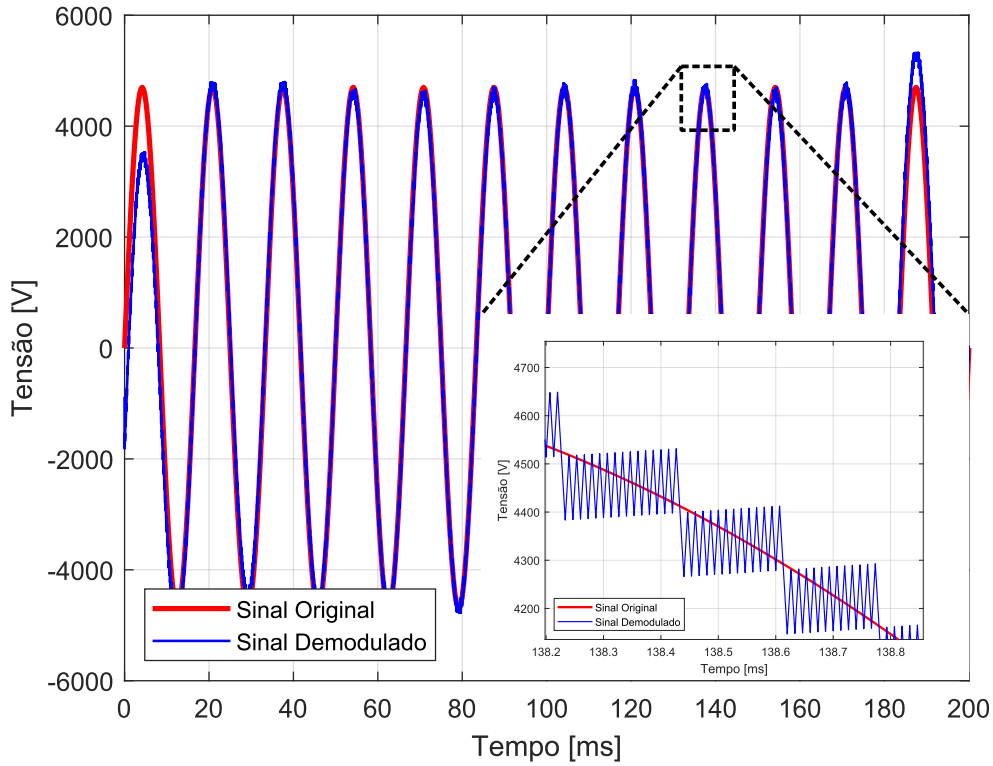
(b) Medido



Fonte: Próprio autor

Na Figura 64, note-se como o efeito *chattering* aumenta quanto maior é o valor do C. Lembra-se que o valor de C deve-se ser maior que $C_n + |\dot{\theta}|$.

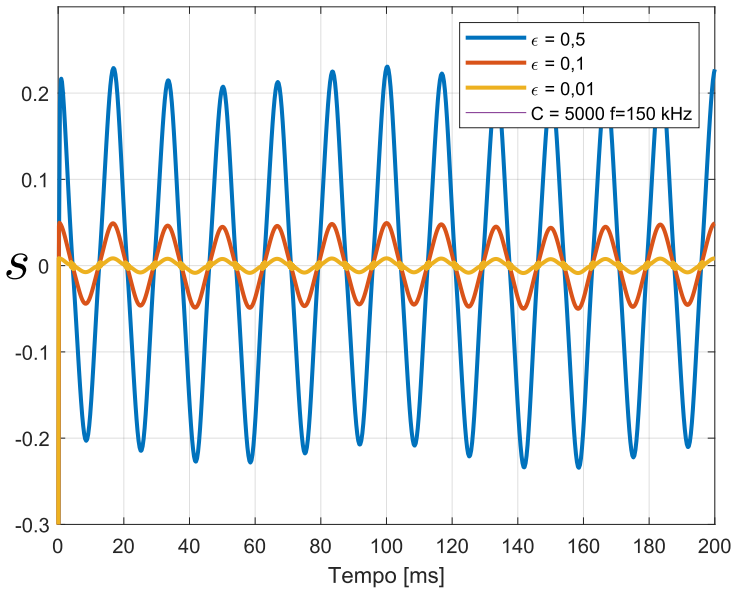
Figura 64 – Sinal demodulado simulado com forte chattering com C=50000 e filtro passa altas em 20 Hz.



Fonte: Próprio autor.

Trocamos a função sinal da Figura 58 pela função sigmoide, para um valor de $C = 5000$ e $f_s = 150$ kHz fixos. Na Figura 65, observa-se que o valor da variável deslizante (s) se afasta do zero quando maior é o valor de ϵ, sendo negativo para o controlador de modos deslizantes.

Figura 65 – Variável deslizante com constante ϵ diferente.



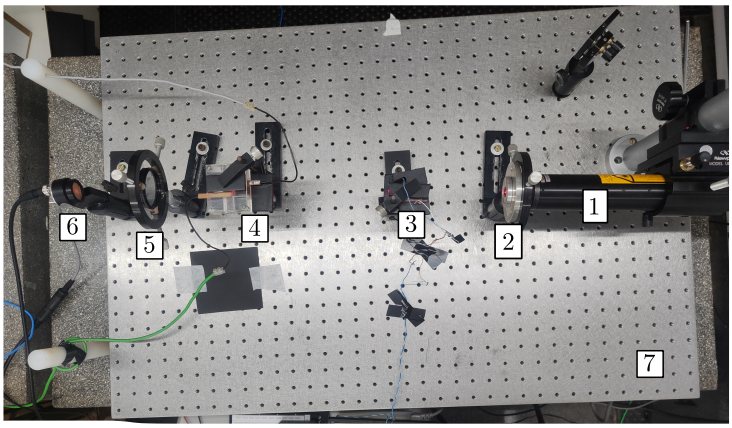
Fonte: Próprio autor.

No próximo capítulo serão mostrados alguns resultados obtidos experimentalmente.

6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O experimento mostrado na Figura 66 foi montado no LOE. A parte óptica foi implementada num *breadboard* da marca Newport. A montagem do sistema óptico foi explicada com detalhe ao começo do capítulo 4.

Figura 66 – Montagem experimental do sistema óptico.



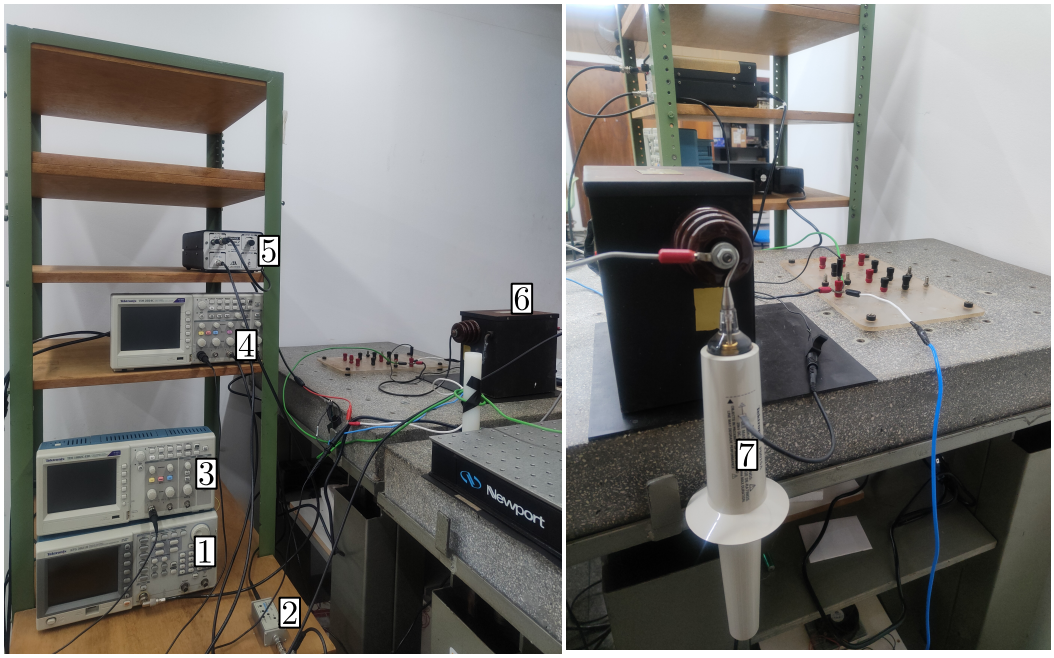
Fonte: Próprio autor.

Os principais elementos da Figura 66 são:

1. Laser 632,8 nm, 20 mW
2. Polarizador
3. Cristal MOF
4. Cristal SAT
5. Analisador
6. Fotodetector PDA55 Thorlabs
7. Breadboard Newport

Figura 67 – Instrumentação eletrônica e montagem experimental do sistema elevador de tensão.

(a) Parte 1 (b) Parte 2



Fonte: Próprio autor.

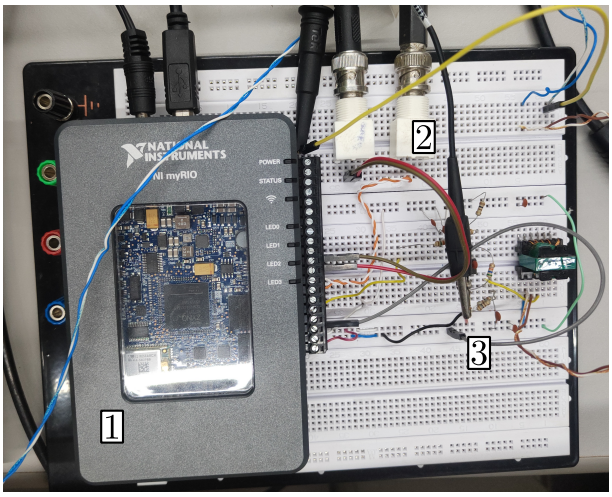
Os principais equipamentos de medição estão mostrados na Figura 67

1. Gerador de sinais AFG-3021B
2. Caixa de compensação Textronix P6015A
3. Osciloscópio Textronix TDS 1002C-EDU
4. Osciloscópio Textronix TDS 2024C
5. Amplificador A-301 HS
6. Transformador de alta tensão a seco 220/15000 V
7. Ponta de prova alta tensão P6015A Tektronix 1000X

Na Figura 67 a elevação de tensão começa no gerador de sinais, quem tem uma saída máxima de 10 V, usando-se um cabo com os extremos BNC conectado à saída do gerador com a entrada do amplificador A-301 HS. A seguir, a saída do amplificador é ligada à entrada de baixa tensão (220 V) do transformador de alta tensão, e sua saída é ligada aos eletrodos do cristal SAT. Para reduzir o ruído elétrico, um dos extremos do transformador de alta tensão é ligado ao sistema de aterramento do LOE e a ponta de prova para medição de alta tensão é ligada ao outro extremo deste transformador. Um

detalhe importante é que o sistema tem uma elevação boa para baixas frequências, porém, nas altas frequências, a elevação se atenua. Um detalhe adicional é que não se pode elevar a tensão por acima de 14 kV pico-pico de tensão sob o risco de romper o dielétrico do cristal SAT. Outro elemento importante é a caixa de compensação, cuja tensão de saída é proporcional ao indicado pela ponta de prova, e menor que 10 V. Esta saída pode ser ligada diretamente a uma entrada analógica MSP C da placa myRIO 1900 (National Instruments).

Figura 68 – Montagem experimental do sistema de processamento.



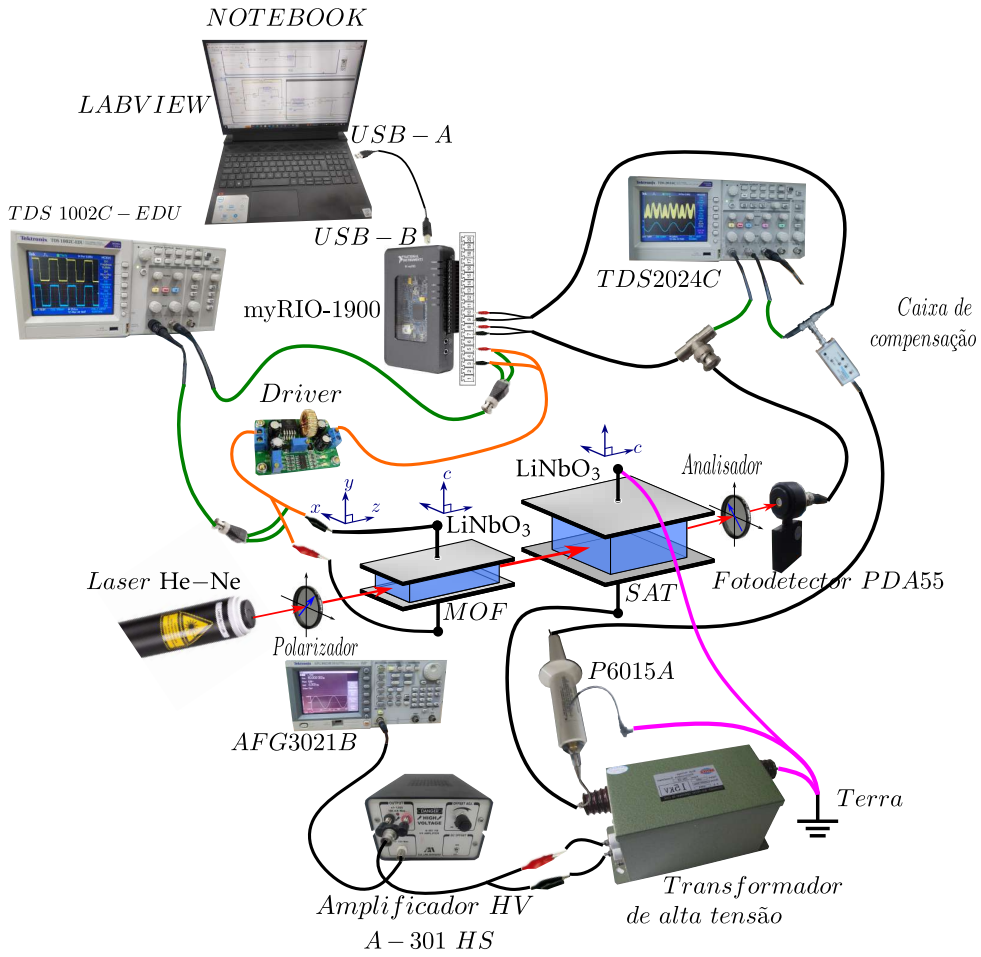
Fonte: Próprio autor.

Na Figura 68 estão indicados os seguintes destaques:

1. NI myRIO 1900 National Instruments.
2. Entradas BNC.
3. Circuito elevador de tensão para alimentar o cristal MOF.

Na Figura 68, o NI myRIO é o elemento de processamento que vai adquirir os sinais e processá-los. Nessa montagem, o item (2) indica duas entradas BNC: uma delas vem da caixa de compensação da ponta de prova, e a outra, vem do fotodetector. Segundo (National-Instruments, 2021, p. 6) a faixa de tensão para uma entrada analógica esta entre -10 V até 10 V. No item (3) mostra-se um pequeno circuito elevador de tensão, necessário porque a saída máxima analógica do myRIO seja ± 10 V.

Figura 69 – Esquema do sensor de tensão polarimétrico com a eletrônica utilizada.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 69, mostra-se o esquema total desta dissertação. Juntou-se montagem óptico, sistema elevador de tensão, sistema de processamento e instrumentação indicados na Figura 66, Figura 67 e Figura 68. Além disso, é importante mencionar que o *Driver* da Figura 69 representa o circuito elevador de tensão, onde o sinal de saída é aplicado nos eletrodos do cristal modulador (MOF).

6.1 SINAL FOTODETECTADO

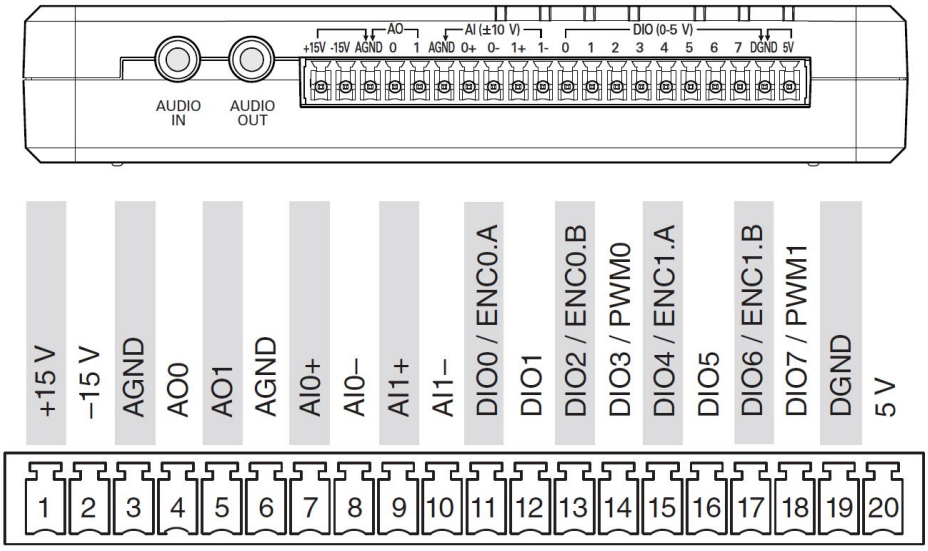
O sinal fotodetectado é amostrado a uma frequência de 30 kHz pelo myRIO. O sinal ingressa pelo conector tipo C, na entrada analógica AI0. Esta porta permite adquirir sinais em modo diferencial de ±10 V.

Usou-se uma transferência de dados baseada em FIFO (*First-in-First-out*). O FIFO é uma estrutura de dados que mantém os elementos na ordem em que são recebidos e fornece acesso a esses elementos usando o princípio "primeiro a entrar, primeiro a sair". Usa-se *Direct Memory Access* (DMA) FIFO, o qual é um tipo de FIFO, que realiza uma transferência de dados entre o FPGA VI e processador host (National-Instruments, 2020,

p. 22). Na seção 6.10, se explicará com detalhe a parte da comunicação. Se configura em Labview, no lado da recepção, para conseguir ler pacotes de 5000 dados do fotodetector. Como o sinal de tensão tem uma frequência de 60 Hz, cada período está composto por $30000/60 = 500$ pontos. Portanto, pode-se visualizar $5000/500 = 10$ ciclos por cada pacote de dados.

Na Figura 70, pode-se observar que a porta AI0 está relacionada aos números 7 e 8.

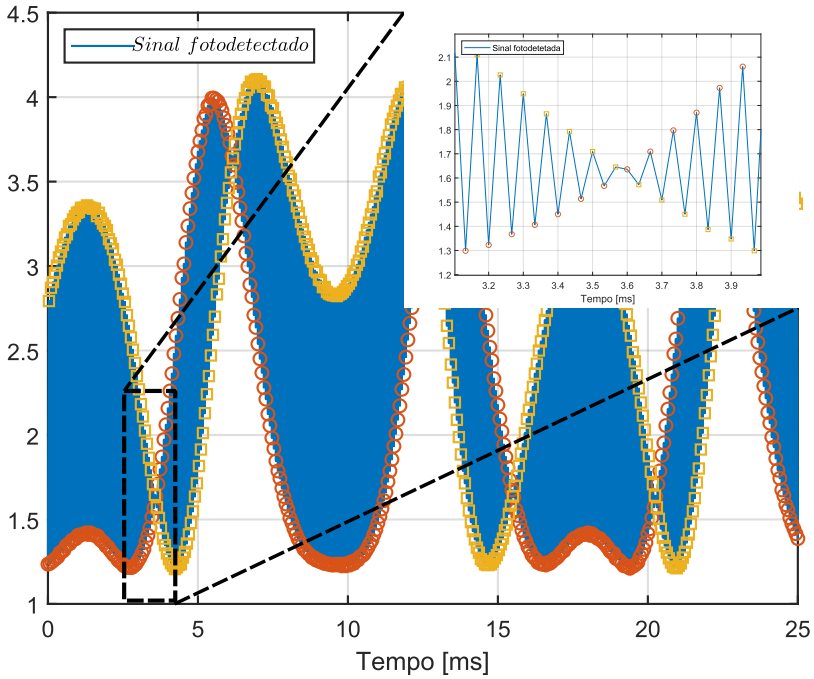
Figura 70 – Conector C do myRIO.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 71, mostra-se o sinal fotodetectado obtido no Labview e desenhado em Matlab. Repare-se que tem um conjunto de pontos em cor amarelo e outros em cor laranja que indicam o chaveamento feito pelo cristal MOF. Perceba no zoom, que o tempo entre dois pontos amarelos consecutivos é o mesmo tempo entre dois em cor laranja, e igual a 2/30000 segundos.

Figura 71 – Sinal fotodetectado original.



Fonte: Próprio autor.

6.2 SINAL DE SAÍDA COM FUNÇÃO SINAL E SIGMOIDE

Nesta seção, se analisará o sinal de tensão demodulado antes e depois do último filtro passa-banda, em relação ao sinal original senoidal. O sinal senoidal é configurado no gerador AFG3021B da Figura 69. Em seguida, o sinal passa pelo amplificador A-301 HS, e finalmente, saí pelo transformador de alta tensão. Idealmente, a forma de onda não deve mudar na saída do transformador, mas, por conta da largura de banda limitada e da não-linearidade dos equipamentos, a tensão na saída é distorcida.

Como foi estudado na seção 5.4, um filtro de fase zero tem uma etapa de transição, ao começo e final, que não pode ser considerada nos cálculos. Poderíamos considerar usar o filtro de fase zero se conseguimos remover aquele conjunto de pontos, porém isso reduz o número de ciclos efetivos para estudo do espectro. Segundo (International-Electrotechnical-Commission, 2012, p. 20), o estudo do espectro precisa de um número de ciclos maior que 10 e com 50 harmônicas de faixa.

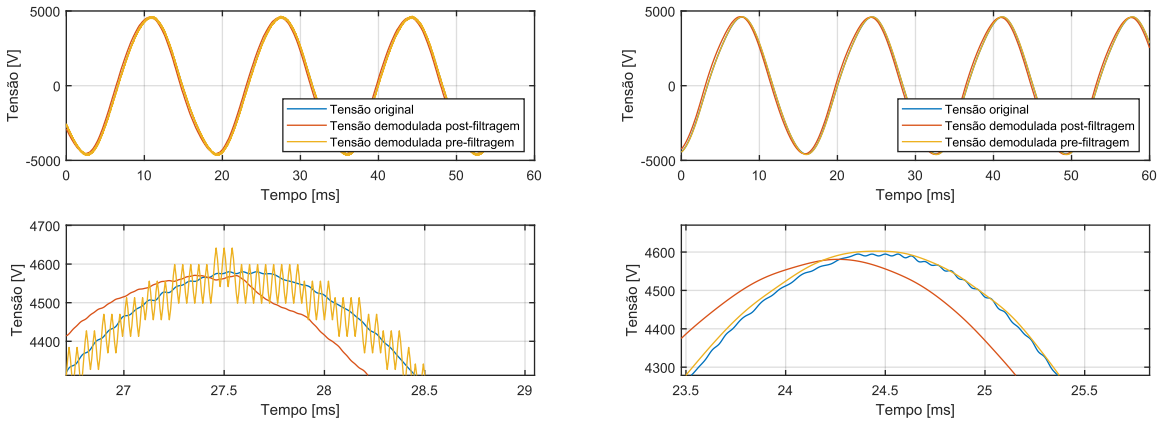
Assim, neste projeto, se escolhe um filtro passa-banda Butterworth de segunda ordem, com uma faixa de 10 Hz até 3 kHz. O filtro é projetado com um bloco pronto do Labview (disponível na sua biblioteca) que tem como entrada as frequências de corte, ordem e tipo do filtro.

Na Figura 72, apresenta-se o sinal demodulado usando a função sinal e função

sigmoide. Na Figura 72(a), mostra-se em azul o sinal original, em amarelo o sinal demodulado sem filtragem, e em vermelho o sinal com filtragem. No zoom, observa-se o efeito do *chattering* como oscilações por conta de usar a função sinal. Porém, após a filtragem, o *chattering* é subtraído do sinal de interesse. Por outro lado, na Figura 72(b), a função sigmoide reduz em grande proporção as oscilações antes de passar pelo filtro. Finalmente, após passar pelo filtro, o sinal é suavizado.

Figura 72 – Tensão de saída original e demodulado.

(a) Com função sinal. (b) Com função sigmoide $\epsilon = 0,03$.



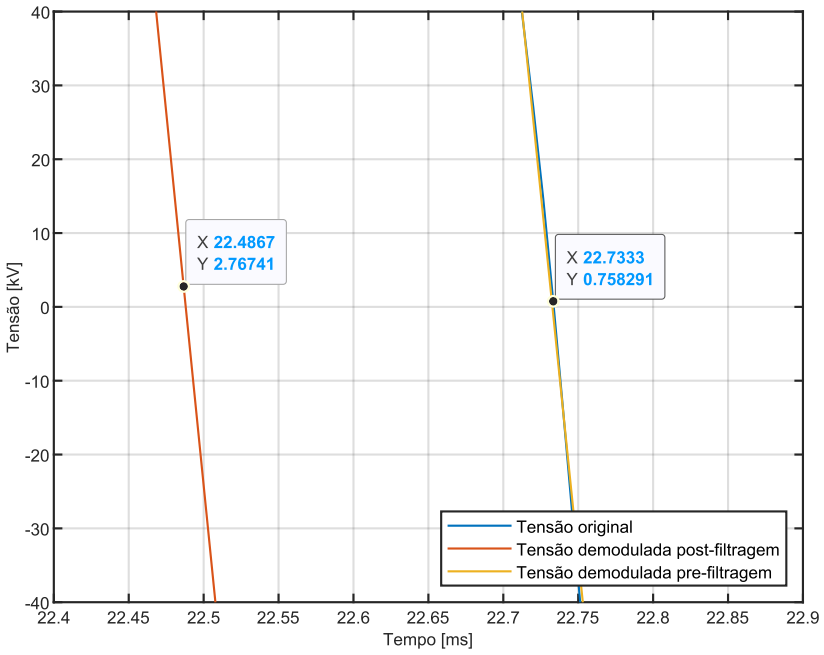
Fonte: Próprio autor.

Na Figura 72, note-se que existe um retardo do sinal filtrado em relação ao sinal original. Na Figura 73, pode-se observar com clareza que existe uma defasagem. A seguir, pode-se calcular a defasagem em graus, entre os sinais quando passam por zero. Lembre-se de que $1/60 = 16,66$ ms é equivalente a 360°. Tem-se:

$$\frac{22,733 - 22,4867}{16,66} \times 360° = 5,32°. \tag{223}$$

Assim, a defasagem do sinal filtrado é $5,32°$ em relação ao sinal original.

Figura 73 – Defasagem do sinal demodulado em relação ao sinal original.



Fonte: Próprio autor.

6.3 DISTORÇÃO HARMÔNICA TOTAL

Como se comentou na seção anterior, dentro das boas práticas para estudo de espectro e THD (do inglês, *Total Harmonic Distortion*), precisa-se de pelo menos 10 períodos do sinal de interesse, e uma faixa em frequência das primeiras 50 harmônicas. Assim, para um sistema operando em 60 Hz, teremos uma faixa de 3 kHz. Então, THD pode ser calculado como:

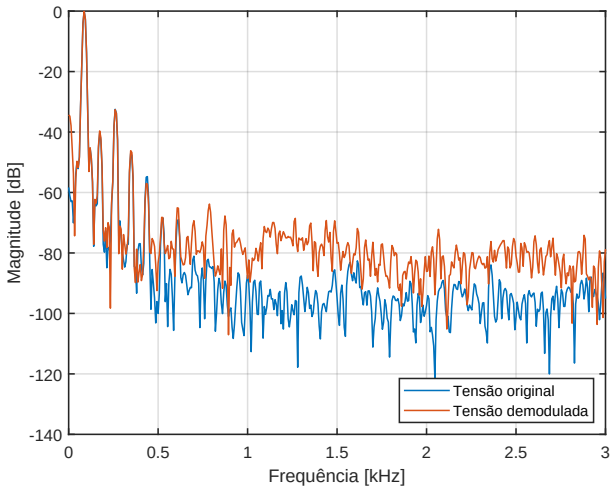
$$THD(\%) = 100\sqrt{\sum_{n=2}^{50}(V_n^2/V_1^2)}, \tag{224}$$

onde V_1 e V_n referem-se à raiz quadrada média (do inglês, *Root Mean Square*) da amplitude da tensão para a frequência fundamental e harmônicas de ordem n da frequência fundamental, respectivamente.

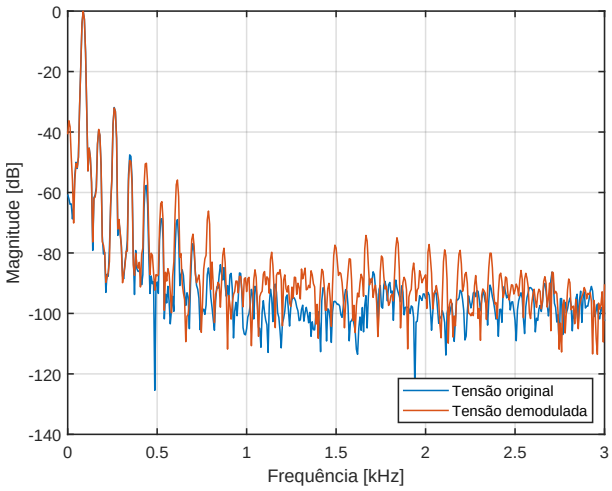
Os gráficos de espectro foram elaborados em Labview, onde foi aplicada uma transformada de Fourier discreta (DFT) com $N = 2^{15}$ pontos e uma janela Hanning para análise dos sinais demodulado e original.

Figura 74 – Análise dos harmônicos.

(a) Com função sinal



(b) Com função sigmoide $\epsilon = 0,03$



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 74, mostram-se os espectros dos sinais demodulados em relação ao sinal original, quando se usa a função sinal e sigmoide (com $\epsilon = 0,03$).

No primeiro caso, Figura 74(a), uma tensão senoidal de 9184 V pico-pico foi aplicada nos eletrodos do cristal sensor. O THD do sinal original foi de $2,6582\%$, enquanto, o THD do sinal demodulado foi $2,6816\%$. Assim, o erro relativo foi de $0,87\%$.

No segundo caso, Figura 74(b), uma tensão senoidal de 9746 V pico-pico foi aplicada nos eletrodos do cristal SAT. O THD do sinal original foi de $2,8832\%$, enquanto, o THD do sinal demodulado foi $2,8995\%$. O erro relativo foi calculado, como $0,5678\%$.

Tabela 3 – Limites de distorção de tensão

Tensão V	THD (%)
$1 \leq 1$ kV	$8,0$
1 kV $< V \leq 69$ kV	$5,0$
69 kV $< V \leq 161$ kV	$2,5$
161 kV $< V$	$1,5$ até 2

Fonte: adaptado de Langella *et al.* (2014).

A vista disso, a distorção harmônica da fonte e da tensão demodulada cai na faixa de 1 kV até 69 kV, segundo a Tabela 3.

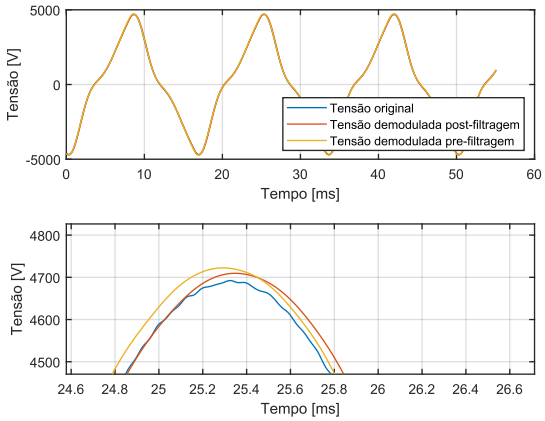
6.4 SINAIS NÃO SENOIDAIS

Nesta seção, o sinal de saída do gerador AFG3021B é ajustado para se ter sinais triangular e quadrado a 60 Hz.

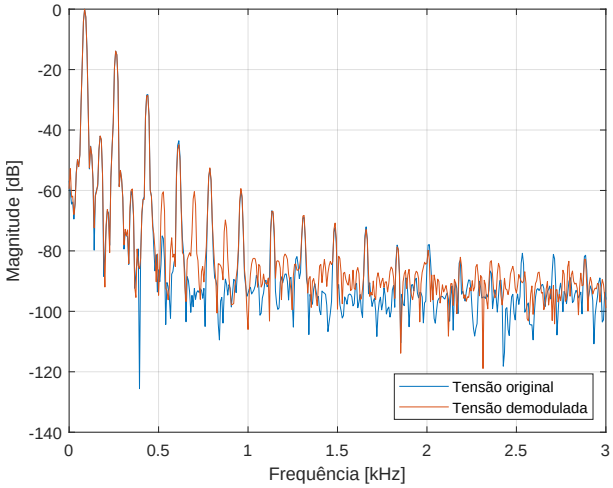
Na Figura 75(a), mostra-se a saída da tensão para um sinal triangular configurado no gerador. O sinal detectado pela ponta de prova P6015A tem uma tensão de $9,38$ kV pico-pico, e a tensão demodulada, usando-se uma função sigmoide, é $9,42$ kV. Dessa forma, o erro relativo é $0,37\%$. O espectro da tensão original e demodulado é mostrado na Figura 75(b), onde se nota uma maior presença dos harmônicos ímpares. O THD do sinal original é $21,32\%$, e do sinal demodulado é $21,36\%$. Portanto, o erro relativo entre os sinais é $0,17\%$.

Figura 75 – Análise do sinal triangular.

(a) Com função sigmoide $\epsilon = 0,03$.



(b) Espectro do sinal triangular.

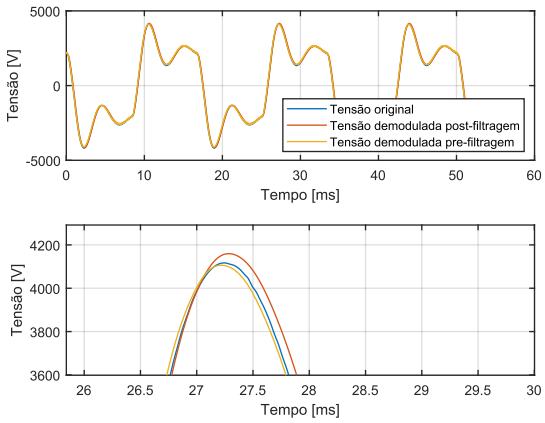


Fonte: Próprio autor.

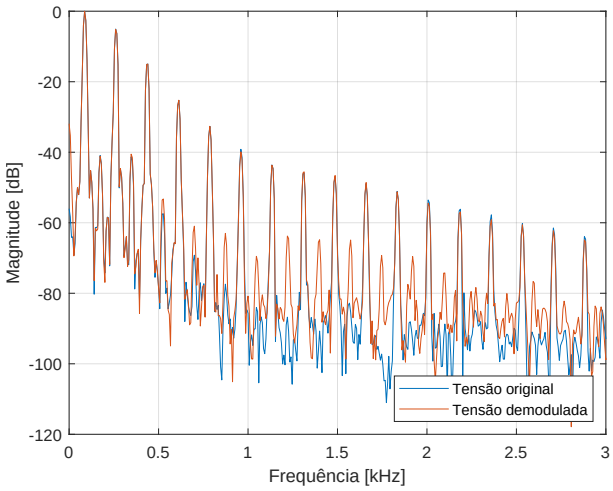
Na Figura 76(a), apresenta-se a forma de onda da tensão de saída do transformador após configurar um sinal quadrado no gerador. Uma tensão de $8,3$ kV pico-pico é detectado pela ponta de prova, enquanto a tensão demodulada, uma tensão $8,32$ kV. Desse modo, o erro relativo é de $0,16\%$. O espectro do sinal original em relação ao demodulado mostra-se na Figura 76(b). Note-se uma forte presença dos harmônicos ímpares, inclusive maior que do sinal triangular. Ademais, o THD do sinal original é $61,19\%$, enquanto o THD do sinal demodulado é $60,62\%$. Com isso, o erro relativo entre os sinais é $0,94\%$.

Figura 76 – Análise do sinal quadrado.

(a) Com função sigmoide $\epsilon = 0,02$



(b) Espectro do sinal quadrada.



Fonte: Próprio autor.

6.5 SINAL DE CONTROLE

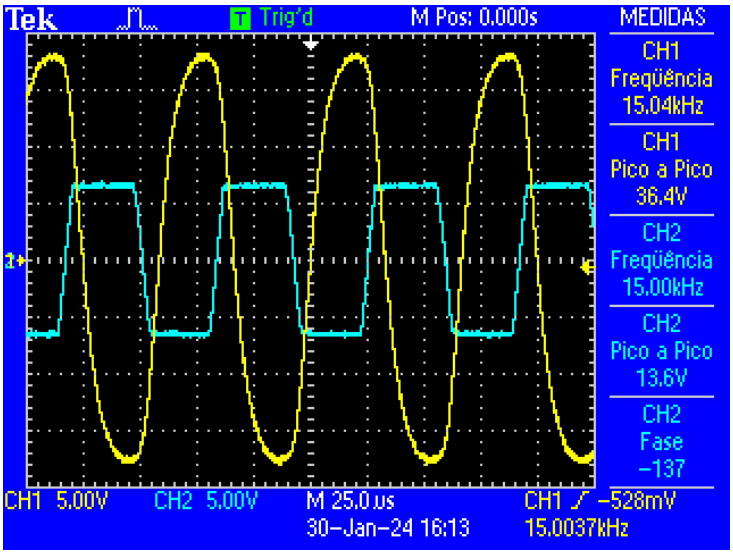
Como foi apresentado na seção 4.2, após montar o controle, obtém-se o sinal de controle, que vai sair por uma das saídas analógicas da placa myRIO. Em nosso caso, usa-se a porta AO1 (terminal de conexão número 8 da Figura 70) do conector C da placa, que tem saída máxima de ±10 V. Então, é preciso elevar a tensão para atingir o valor teórico de aproximadamente de $V_{\pi m}/4 \approx 16,23$ V de tensão pico do sinal de controle. Lembre-se de que, o sinal de controle pode ser qualquer sinal com simetria de meia-onda (por exemplo: senoidal, quadrado ou triangular). Em nosso caso, o myRIO fornece a opção de poder trabalhar com maior frequência quando ele é gerado desde o FPGA, onde a amplitude controlada é dada por um sinal de controle. Também, o ganho de um amplificador depende da banda projetada. No LOE temos duas opções, usar o amplificador A-301 HS, que tem uma banda de 200 kHz e um ganho quase fixo de 21 V/V, ou projetar um amplificador com resistências, um amplificador operacional de alta velocidade LM6171 e um transformador de áudio, para uma banda específica de operação. No projeto, escolhe-se projetar um amplificador e usar o A-301 HS no sistema de elevação de tensão, como na Figura 69.

Note-se na Figura 77 em linha amarela, o circuito projetado trabalhando em 15 kHz (metade da frequência de amostragem de 30 kHz) com uma distorção, perdendo a forma quadrada da entrada do circuito amplificador (Figura 77 em linha turquesa). Mesmo assim, o sinal de saída tem simetria de meia-onda, e consegue atingir a condição de quadratura.

Deve-se ficar atento com a largura de banda do amplificador, já que pode atenuar o sinal de saída na hora de elevar a frequência. Então, o controle pode não atingir a

condição de quadratura, pois o myRIO tem um limite máximo de 10 V.

Figura 77 – Sinal de controle.



Fonte: Próprio autor.

Além disso, na Figura 77, percebe-se que a tensão pico-pico do sinal de controle é $36,4$ V. Segundo a equação (155), a fase óptica do cristal MOF precisa que a amplitude da tensão seja $V_{\pi m}/4 + \Delta v$. Porém, o sistema de controle fica compensando em todo momento Δv, ficando $V_{\pi m}/4$ como amplitude da tensão do sinal de controle. Dessa maneira, consegue-se calcular a tensão de meia-onda prática do cristal MOF, como:

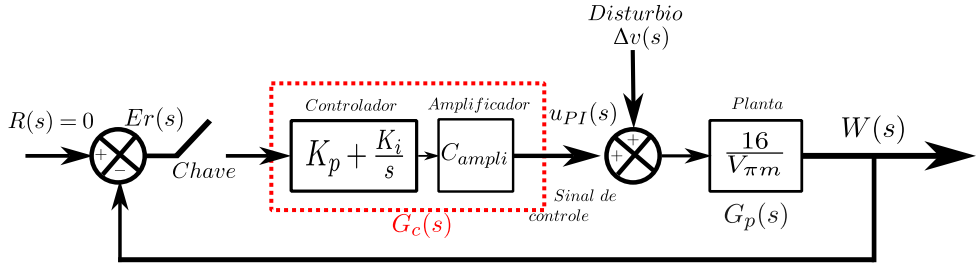
$$\begin{aligned} \frac{V_{\pi m}}{4} &= \frac{36,4}{2} \\ V_{\pi m} &= 72{,}8 \text{ V}. \end{aligned} \tag{225}$$

O valor teórico da tensão de meia-onda do cristal modulador foi calculado em (95).

6.6 EFEITO DAS DERIVAS AMBIENTAIS NO CONTROLADOR PI

Nesta seção, planeja-se estimar a defasagem gerada pelas derivas ambientais no local do interferômetro. Para conseguir monitorar o sinal de interesse δ, precisamos analisar a equação (155), onde se configura um valor constante próximo ao valor prático de $V_{\pi m}/4$, o qual é a amplitude que será fornecida ao cristal modulador (MOF). Em seguida, como se mostra na Figura 78, abre-se o sistema na chave localizada antes do bloco de controle. Assim, as variações do sinal de distúrbio $\Delta v(s)$ (derivas ambientais) serão refletidas no sinal de erro $Er(s)$.

Figura 78 – Diagrama do controle PI da fase óptica sem realimentação.



Fonte: Próprio autor.

Procede-se a calcular o sinal de interesse δ como:

$$\begin{aligned} Er(s) &= R(s) - W(s) \\ Er(s) &= 0 - \frac{16\Delta v(s)}{V_{\pi m}}. \end{aligned} \tag{226}$$

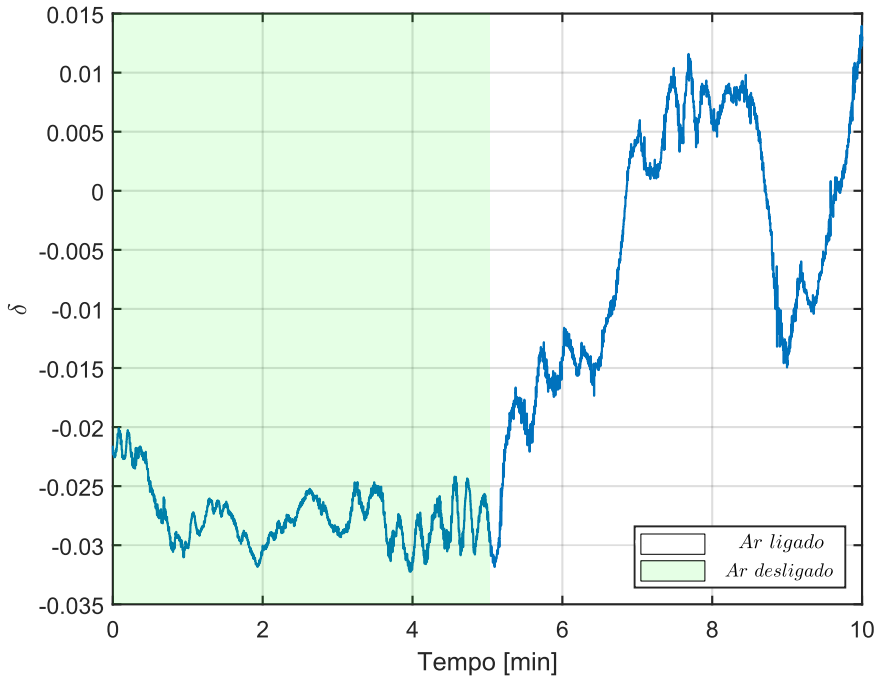
Usa-se igualdade (157), têm-se:

$$\begin{aligned} Er(s) &= \frac{8\delta}{\pi} \\ \delta &= \frac{8Er(s)}{\pi}. \end{aligned} \tag{227}$$

Consegue-se monitorar o sinal δ por 10 min, cujo resultado é mostrado na Figura 79. Note-se que o sinal δ tem uma característica errática. As medições foram feitas no laboratório, num ambiente calmo numa tarde de final de semana. Em fundo verde, as variações do δ durante 5 minutos com ar condicionado desligado. Em fundo branco, os 5 minutos restantes, ligou-se o ar condicionado e observou-se que o valor do δ aumentou.

Note-se que, as variações do δ com ar desligado ficam oscilando entorno $0,015$, e as variações com ar ligado quase $0,05$, podendo chegar a mais se continuamos monitorando o sinal. Então, se comparamos as mudanças na Figura 45 em relação ao δ, as mudanças da figura de Lissajous por conta das derivas ambientais num ambiente de laboratório com ar condicionado desligado são quase nulas. Por outro lado, com ar condicionado ligado, a mudança da figura de Lissajous por conta do ambiente já é visualmente perceptível.

Figura 79 – Variações do sinal δ.



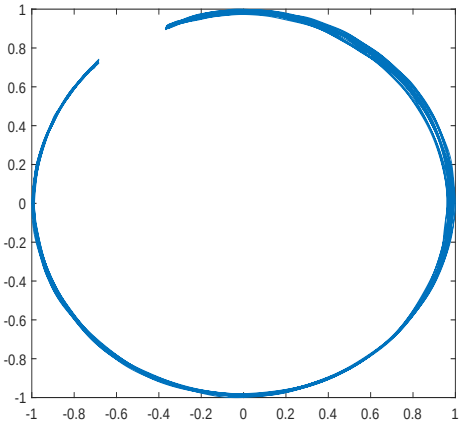
Fonte: Próprio autor.

6.7 MEDIÇÕES DE TENSÃO ABAIXO DA TENSÃO DE MEIA-ONDA DO CRISTAL SENSOR

Como foi estudado na seção 4.1, após amostrar o sinal $v_{pd}(t)$ (sinal do fotodetector), a primeira operação é subtrair o valor do A. Porém, A é calculado quando o índice de modulação da fase óptica do cristal sensor é maior a π, ou seja, quando a amplitude da tensão $V_S(t)$ é maior que a tensão de meia-onda do cristal sensor.

Quando o valor da amplitude $V_S(t)$ é menor que a tensão de meia-onda, o cálculo feito em (133), não é valido. Isso acontece porque o domínio de alcance da função cosseno é menor a 2π. Com isso, ao desenhar a figura de Lissajous dos sinais $p_1[n]$ e $p_2[n]$ da equação (146), mostra-se uma circunferência sem fechar como na Figura 80.

Figura 80 – Figura de Lissajous para uma amplitude $V_S(t)$ menor que a tensão de meia-onda do cristal sensor.



Fonte: Próprio autor.

Da mesma forma, o cálculo do produto AV mostrado na equação (145), não é valido. Como o valor de A calculado com (133) não é certo, o produto de AV também não é um valor certo. Por outro lado, com uma circunferência aberta, não é possível aplicar o método de controle de áreas, estudado na seção 4.2. Isso porque, quando menor for a amplitude da tensão $V_S(t)$, alguns quadrantes vão ficar sem valor para aplicar o algoritmo.

Contudo, os valores da A (dependente do fotodetector) e V (dependente do alinhamento dos elementos ópticos) são valores que não mudam ao longo do projeto. Assim, calculam-se primeiro os valores de A e AV para uma amplitude de $V_S(t)$ maior a $V_{\pi S}$, e após isso, salvam-se tais valores e usam-se em tensões menores de $V_{\pi S}$.

Adicionalmente, desligou-se o controle de áreas, deixando em malha aberta o controle PI, como na Figura 78, mas salvando o último valor do $V_m(t)$ e deixando esse valor entre os eletrodos do cristal modulador (MOF).

Como foi apresentado na seção 6.6, o laboratório com o mínimo de distúrbios ambientais gera uma defasagem δ aceitável. Então, é possível fazer medições de tensão abaixo do $V_{\pi S}$ com o sistema de controle PI desligado.

Importante comentar que o projeto não foi desenhado para trabalhar em tensões $V_S(t)$ inferiores a $V_{\pi S}$, porém a tensão demodulada pode ser obtida em condições de mínimo distúrbio no laboratório.

Na seção seguinte, apresentam-se as tensões demoduladas em relação às originais.

6.8 MEDIÇÕES DE TENSÃO E THD

As medições de tensão são feitas da seguinte forma: primeiro, a tensão de entrada é ajustada tal que a circunferência formada pelos sinais $p_1[n]$ e $p_2[n]$ (146) fique fechada. Dessa maneira, essa é a nossa tensão experimental $V_{\pi S}$, lembrando que o valor teórico foi

calculado em (100). Mas, segundo a equação (134):

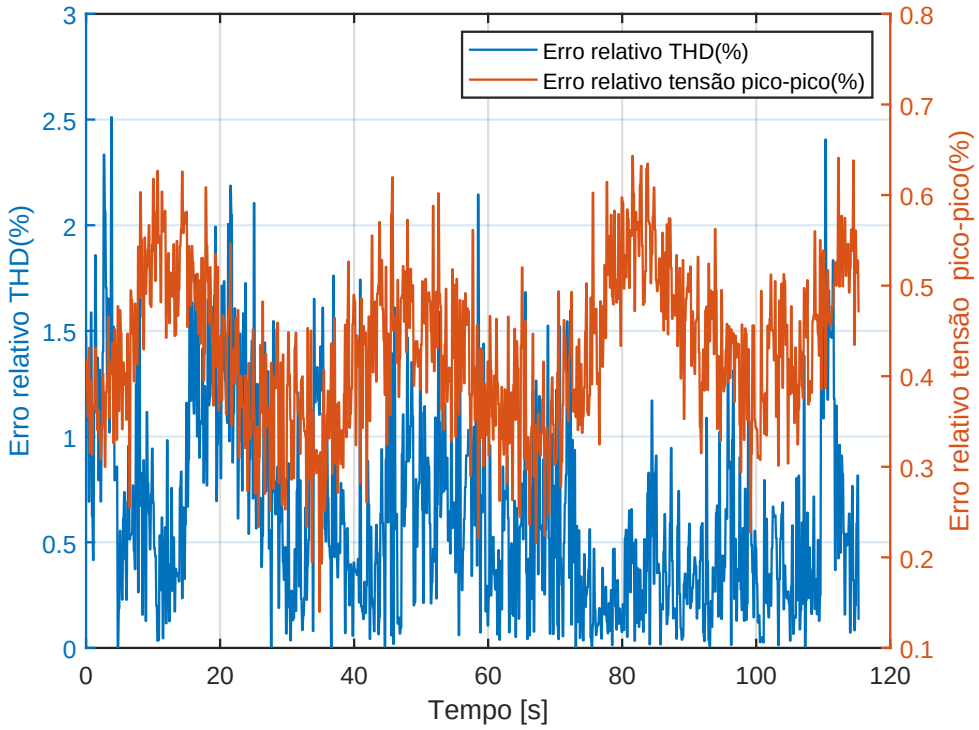
$$\begin{aligned} \theta(t) &= \Phi(t) + \phi_0 + \varphi(t) + \frac{\pi}{4} \\ \theta(t) &= \frac{\pi V_S}{V_{\pi S}} \sin(\omega_{SAT} t) + \phi_0 + \varphi(t) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{228}$$

Note-se que os termos de baixa frequência, $\phi_0 + \varphi(t)$, costumam ter amplitudes baixas, e, $\pi/4$ em condição de um bom controle de quadratura pode ser considerado fixo. Portanto, o domínio preciso para obter uma circunferência fechada ocorre quando a amplitude da tensão de entrada é igual a $V_{\pi S}$. Pode-se concluir que a amplitude da tensão de entrada que gera a circunferência é o valor de $V_{\pi S}$ experimental. O valor experimental de $V_{\pi S}$ é $4,065 \pm 0,015$ kV, cujo valor fica na faixa de valores calculados por (Tobal, 2020, p. 97).

Após isso, lembre-se da Figura 52, que o ganho após o filtro passa-banda vai precisar ser multiplicado pelo $V_{\pi S}$ experimental, e dividido por π para obter o sinal de tensão.

Nas seções 6.2 e 6.4, as figuras da tensão demodulada foram obtidas num instante aleatório, e da mesma forma os cálculos do erro relativo em relação à tensão pico-pico e THD. Na prática, é percebido que o erro relativo em relação à tensão pico-pico e o erro relativo em relação ao THD variam no tempo. Agora, usando-se um sinal senoidal de tensão pico-pico $9,74$ kV e $2,65\%$ de THD (calculado com dados fornecidos pela ponta de prova), com a função sinal no controlador de modos deslizantes, os sinais de erro relativo de tensão pico-pico e THD foram monitorizados por um período de 120 segundos. Na Figura 81, apresenta-se o resultado do monitoramentos dos errores relativos.

Figura 81 – Erro relativo de tensão pico-pico e THD(%) no tempo.



Fonte: Próprio autor.

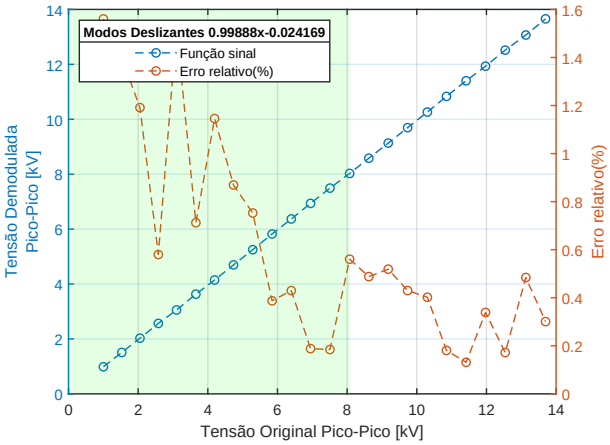
Assim, calcula-se a média da tensão pico-pico e THD demodulado durante um intervalo de 120 segundos, com um passo de 80 ms entre um dado e outro. Finalmente, calcula-se o erro relativo usando-se tensão pico-pico e THD médio do sinal demodulado em relação ao sinal da ponta de prova.

Após isso, a mesma operação é feita em uma faixa de tensões de 500 V até 14,0 kV pico-pico para três formas de onda configuradas no gerador (senoidal, triangular e quadrado) em 60 Hz. Na Figura 82, mostra-se a linearidade do sistema em relação tensão pico-pico para duas situações. Na Figura 82(a), apresenta-se o sistema quando o controlador de modos deslizantes usa uma função sinal. Em fundo branco, as tensões com amplitude maior a $V_{\pi S}$ e com controle PI ativo, o erro relativo é menor a $0,6\%$, e em fundo verde, as tensões com amplitude $V_S(t)$ menor a $V_{\pi S}$ (cuja análise foi estudada em 6.7), o erro menor a $1,6\%$. Além disso, com ajuda de Matlab consegue-se obter os coeficientes de um polinômio de tendência de primeira ordem dos pontos envolvidos, onde se nota que a inclinação é quase 1.

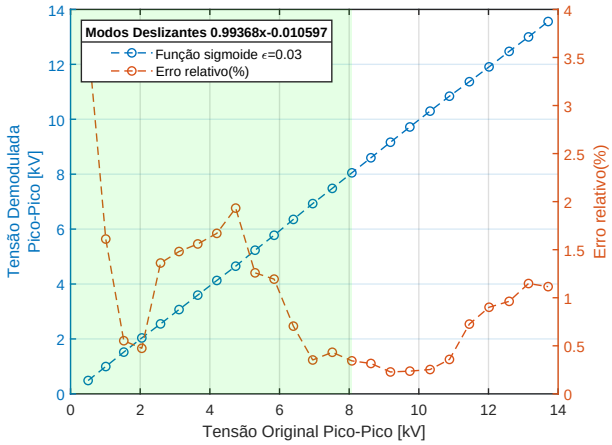
No segundo caso, na Figura 82(b), mostra-se o sistema usando uma função sigmoide com $\epsilon = 0,03$, onde o erro relativo para tensões maiores a $V_{\pi S}$ é menor a 1%, e para tensões menores de $V_{\pi S}$, é menor a 4%. Além disso, o sistema mostra uma linearidade boa por conta de uma inclinação próxima de 1.

Figura 82 – Linearidade do sistema e erro relativo para uma tensão senoidal.

(a) Com função sinal



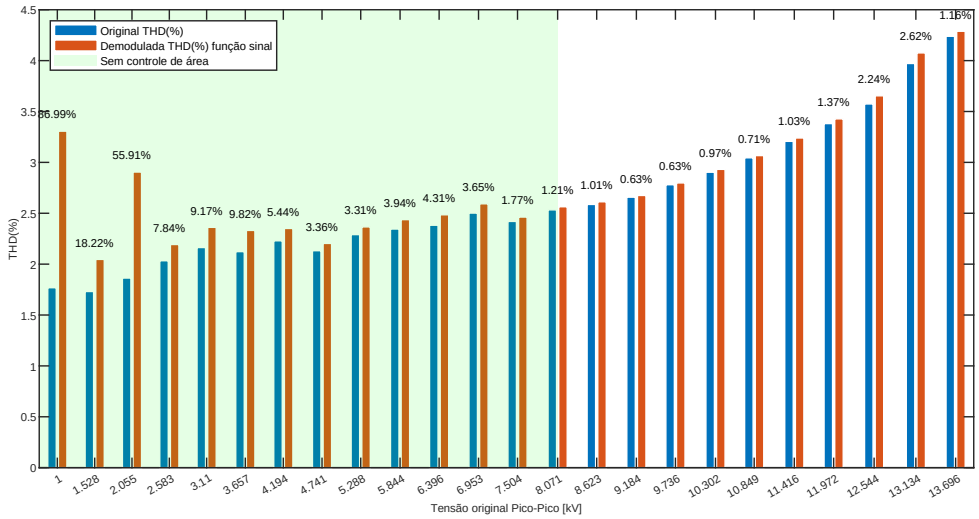
(b) Com função sigmoide $\epsilon = 0,03$.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 83, mostra-se o THD do sinal demodulado em relação ao sinal original, quando é usada uma função sinal no controlador de modos deslizantes. Os números acima das barras representam o valor do erro relativo do sinal. Repare-se que, o erro relativo é menor a 3% na área de fundo branco. Enquanto na área de fundo verde, para tensões com amplitude abaixo do $V_{\pi S}$, supera o 3%.

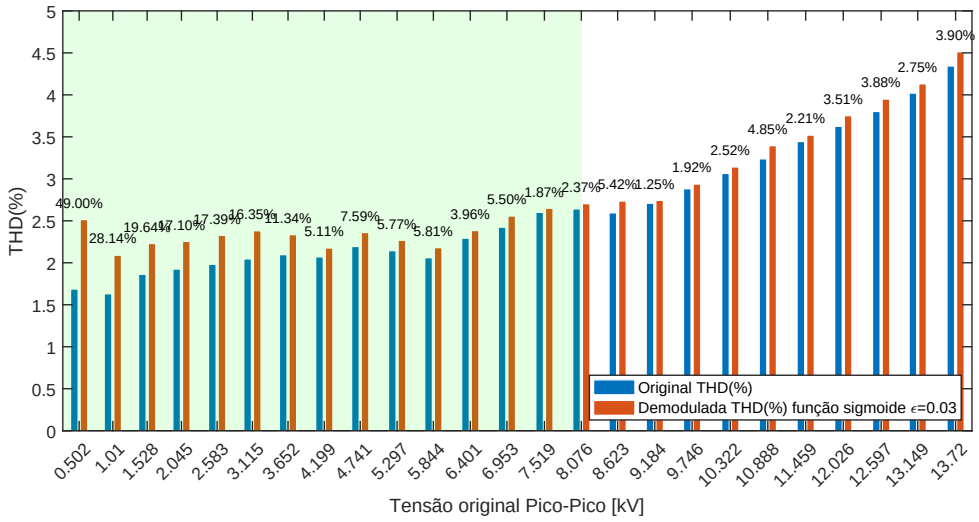
Figura 83 – THD(%) para $V_S(t)$ senoidal que usa função sinal no controlador de modos deslizantes.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 84, mostra-se o THD do sinal demodulado em relação ao sinal original, quando é usada uma função sigmoide com $\epsilon = 0,03$ no controlador de modos deslizantes. Repare-se que, o erro relativo é menor a 5% na área de fundo branco. Enquanto para tensões abaixo do $V_{\pi S}$, supera o 5%.

Figura 84 – THD(%) para $V_S(t)$ senoidal que usa função sigmoide $\epsilon = 0,03$ no controlador de modos deslizantes.

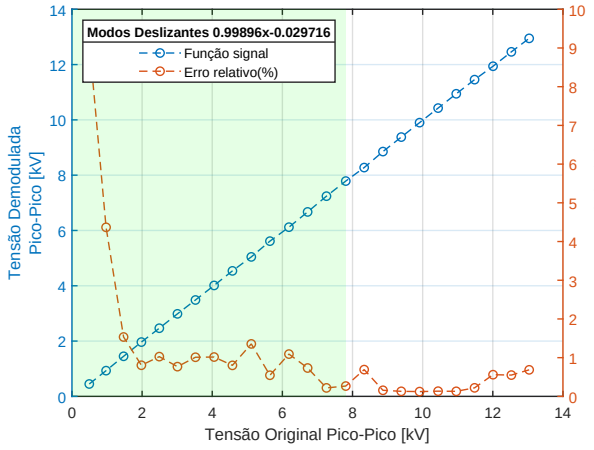


Fonte: Próprio autor.

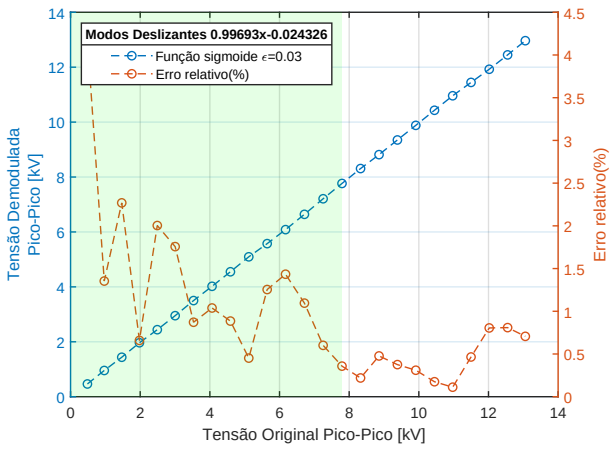
Na Figura 85, para ambas situações note-se um erro menor a 1% para tensões maiores a $V_{\pi S}$. Além disso, a inclinação da função linear, é próximo a 1 em ambos casos.

Figura 85 – Linearidade do sistema e erro relativo para uma tensão triangular.

(a) Com função sinal



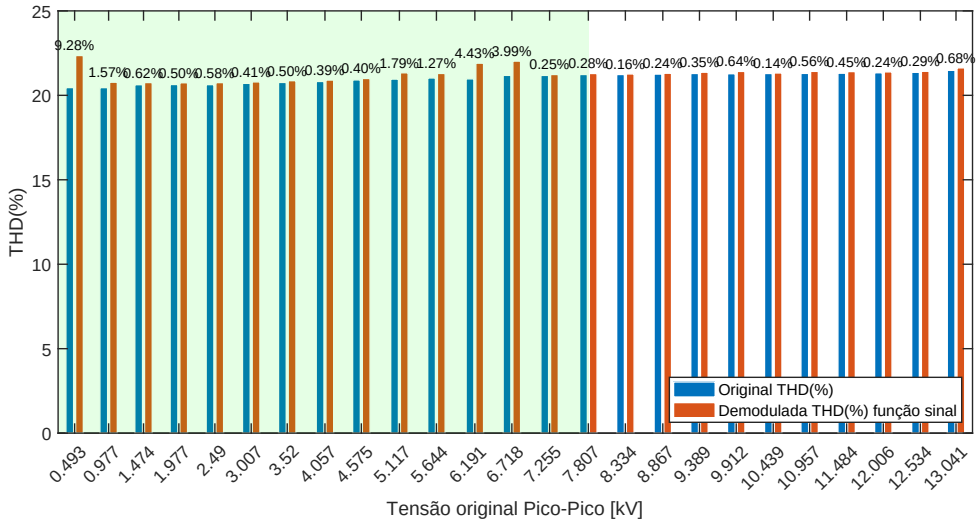
(b) Com função sigmoide $\epsilon = 0,03$.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 86, mostra-se o THD para um sinal triangular, trabalhando com uma função sinal no controlador de modos deslizantes. Perceba-se que, o erro relativo na área de fundo branco é inferior a $0,8\%$. Além isso, o THD do sinal original, fica entorno de 21%.

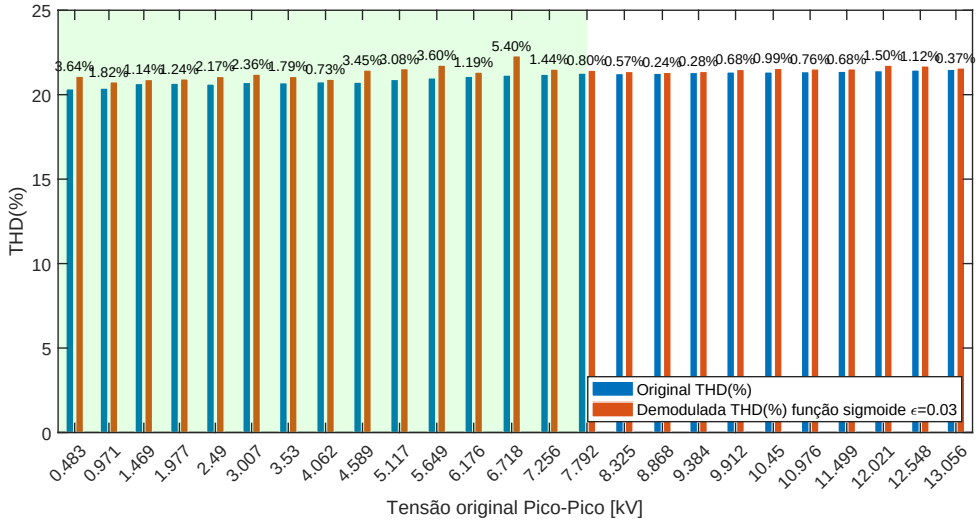
Figura 86 – THD(%) para $V_S(t)$ triangular que usa função sinal no controlador de modos deslizantes.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 87, mostra-se o THD para um sinal triangular, trabalhando com uma função sigmoide no controlador de modos deslizantes. O erro de THD na área onde o controle PI é ativo, fica menor a 2%.

Figura 87 – THD(%) para $V_S(t)$ triangular que usa a função sigmoide $\epsilon = 0,03$ no controlador de modos deslizantes.

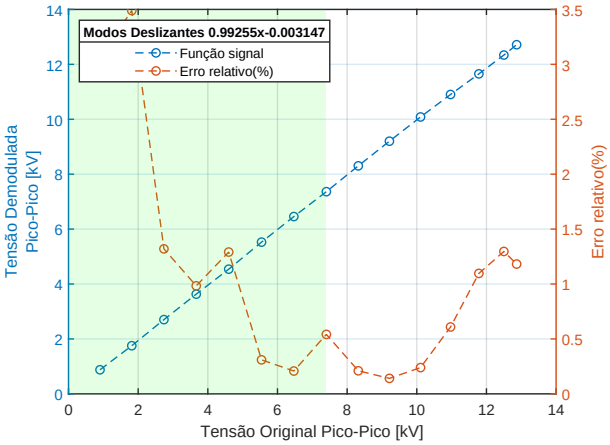


Fonte: Próprio autor.

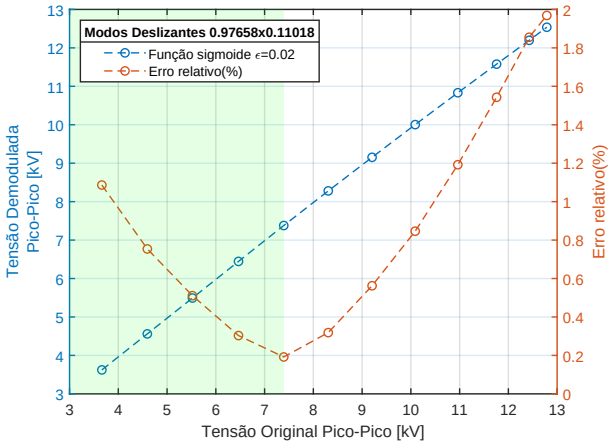
Na Figura 88, mostra-se a linearidade do sistema em relação ao sinal quadrado configurado no gerador. Percebe-se nas figuras que, o erro relativo quando o controle PI é ativo é menor a 2%. Além disso, a inclinação do polinômio de tendência é próxima do 1.

Figura 88 – Linearidade do sistema e erro relativo para uma tensão quadrado.

(a) Com função sinal



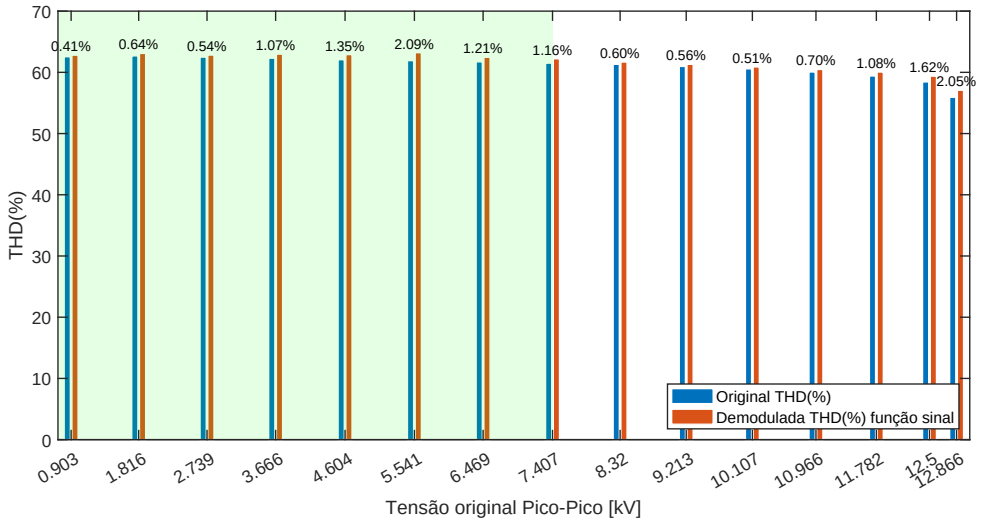
(b) Com função sigmoide $\epsilon = 0,02$.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 89, o valor do THD do sinal original fica entorno de 60%. Note-se que, em geral, o erro fica menor a 2%.

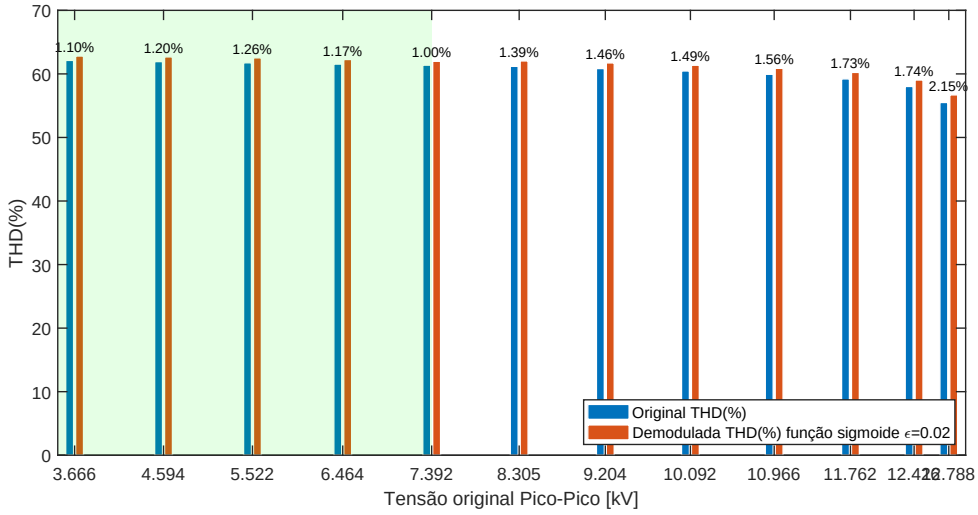
Figura 89 – THD(%) para $V_S(t)$ quadrado que usa a função sinal no controlador de modos deslizantes.



Fonte: Próprio autor.

Finalmente, na Figura 90, cujo controlador de modos deslizantes usa uma função sigmoide com $\epsilon = 0,02$, apresenta um erro relativo menor a 2% em toda a faixa.

Figura 90 – THD(%) para $V_S(t)$ quadrado que usa a função sigmoide $\epsilon = 0,02$ no controlador de modos deslizantes.



Fonte: Próprio autor.

Como resumo da análise das três formas de onda em uma faixa de 500 V a 14,0 kV pode-se comentar:

1. O erro relativo da tensão pico-pico e THD, é maior quando a tensão V_S é menor que a tensão de meia-onda do cristal sensor em todos os casos.

2. Quando o controle PI do sistema é ativo, o erro relativo em relação à tensão pico-pico é menor a 1% para uma forma de onda senoidal e triangular configurada no gerador. No caso de um sinal quadrado, é menor a 2%.

3. O sistema operando com uma tensão senoidal tem menor erro relativo de tensão pico-pico, quando o controlador de modos deslizantes opera com uma função sinal.

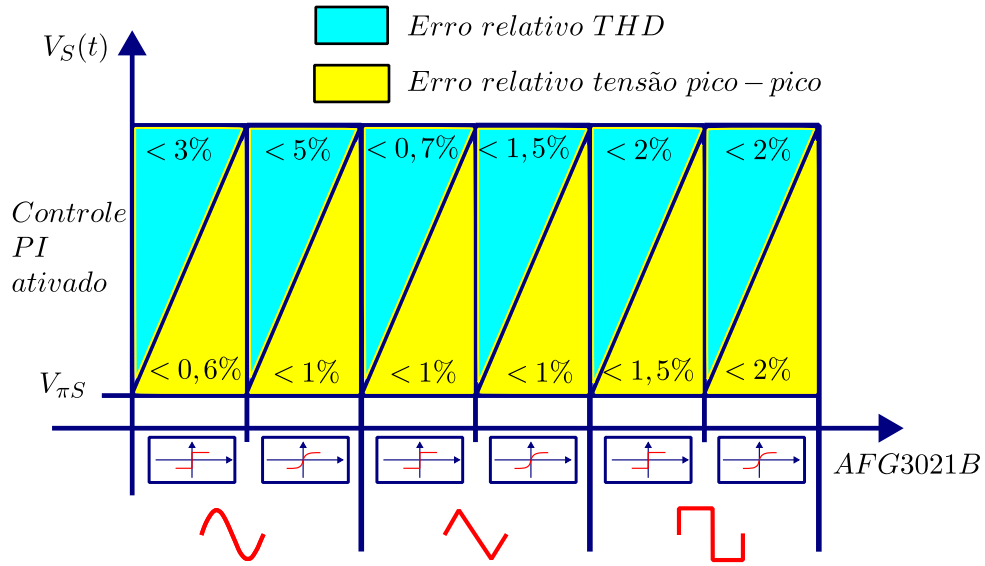
4. No sistema com controle PI ativo, o erro relativo de THD é menor quando as formas de onda têm maior conteúdo harmônico (onda triangular e quadrado).

5. A inclinação do polinômio de tendência de primeira ordem, das 3 formas de onda, considerando a primeira e segunda casas decimal, é $0,99$.

6. O erro relativo de THD do sinal triangular e quadrado tem pouca diferença se o controlador de modos deslizantes trabalhar como função sinal ou sigmoide.

Se nos concentrarmos nos erros relativos, na faixa onde o controle PI é ativo, tem-se a Figura 91. Os triângulos em cor água indicam os erros relativos máximos de THD, enquanto os triângulos em amarelo indicam os erros relativos de tensão pico-pico máximos, analisados em três formas de onda que usarem uma função sinal ou sigmoide no controlador de modo deslizante.

Figura 91 – Resumo do erro relativo THD e tensão pico-pico.



Fonte: Próprio autor.

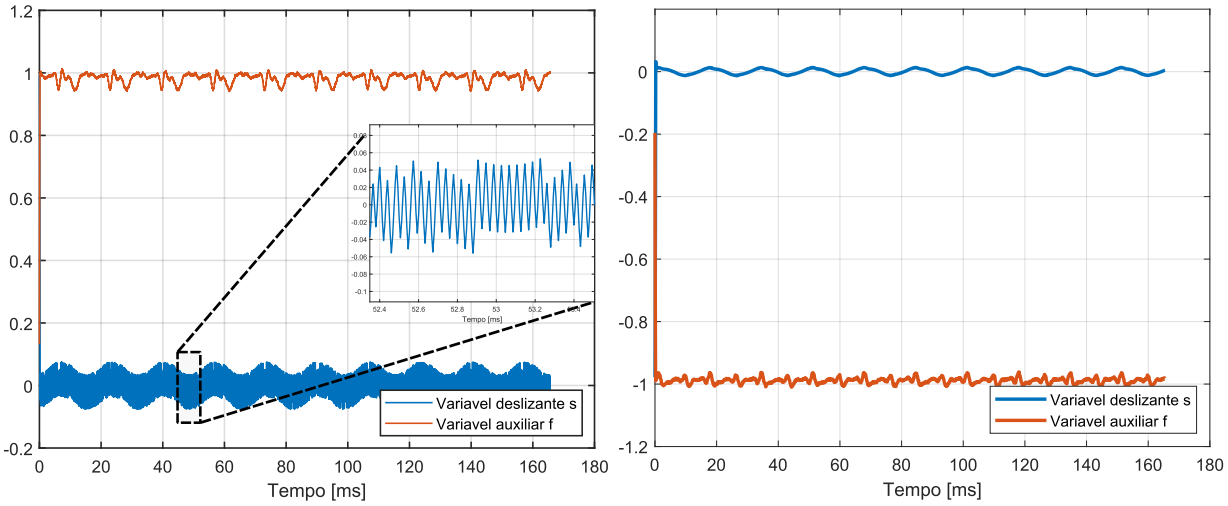
Na seção seguinte, será estudada a característica da variável de estrutura.

6.9 CARACTERÍSTICA DA VARIÁVEL DESLIZANTE E PLANO DE FASE

Tal como foi estudado na seção 5.2, a superfície deslizante $x_s = s$ e a variável auxiliar f podem ser estudados no tempo. Na Figura 92, mostra-se em azul o sinal $x_s = s$ e em vermelho o sinal f para uma tensão senoidal usando uma função sinal e função sigmoide no controlador de modos deslizantes. Caso se use a função sinal, note-se que o sinal x_s fica oscilando próximo de zero. Por outro lado, se for uma função sigmoide, x_s fica suavizado em relação ao caso anterior. Lembrando a equação (208), os pontos de equilíbrio ficam em $\theta + \Theta_c = (2k+1)\pi/2$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $f = -\sin(\theta + \Theta_c)$ pode oscilar em torno de valores de 1 e -1, quando o critério de alcançabilidade é atingido. Essa característica é percebida na Figura 92(a) e 92(b).

Figura 92 – Variável deslizante s e variável auxiliar f no tempo.

(a) Com função sinal (b) Com função sigmoide $\epsilon = 0,03$.



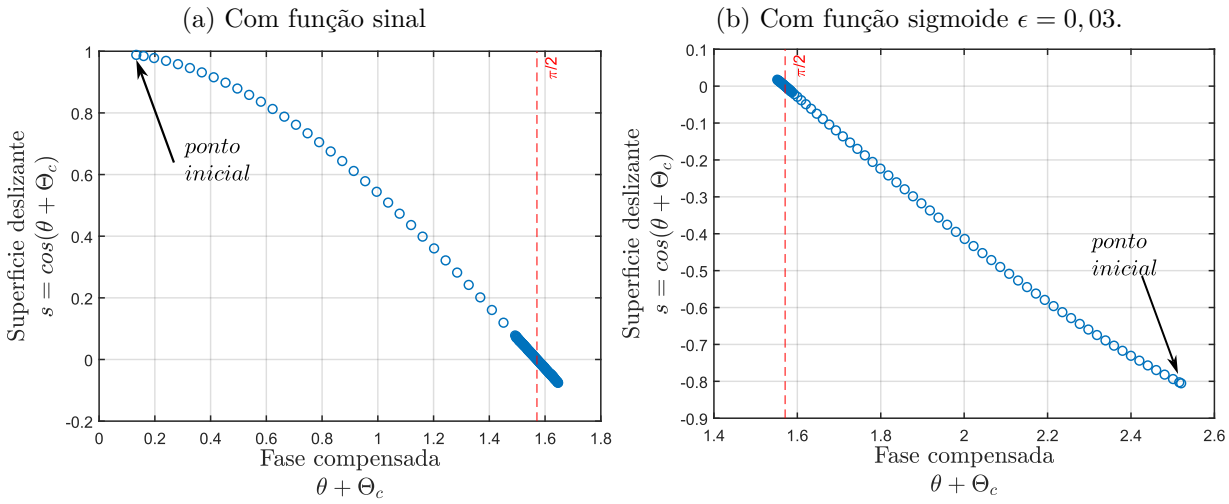
Fonte: Próprio autor.

Na Figura 93, mostra-se a variável deslizante em relação à $\theta+\Theta_c$ obtida do Labview. Na Figura 53, foi mostrado de forma teórica. Em forma prática, a fase $\theta+\Theta_c$ foi calculada como:

$$\theta + \Theta_c = -\arctan\left(\frac{f}{x_s}\right). \tag{229}$$

Após isso, os dados foram enviados e desenhados em Matlab. Na Figura 93(a), mostra-se que o ponto inicial fica afastado do ponto de equilíbrio mais próximo em $(0, \pi/2)$. Dessa forma, pode-se estimar o tempo que demora em chegar ao ponto de equilíbrio, lembrando que após a interpolação, cada sinal é amostrado a 150 kHz, então o período é 6,66 μs. Consequentemente, no cálculo do tempo aproximado para se chegar próximo ao ponto de equilíbrio é preciso multiplicar 35 pontos que ficam fora do ponto de equilíbrio vezes o período, que dá como resultado $0,233$ ms. Na Figura 93(b), conta-se 52 pontos, portanto o tempo para ficar próximo ao ponto de equilíbrio é $0,333$ ms. Lembrando que cada pacote de dados por interação tem 10 ciclos para um sinal operando em 60 Hz, significa um $(0,233/166,66) \times 100 = 0.14\%$ do sinal é afetado pelo tempo de estabelecimento para o primeiro caso, e $0,2\%$ para o segundo caso.

Figura 93 – Pontos de estabilidade.

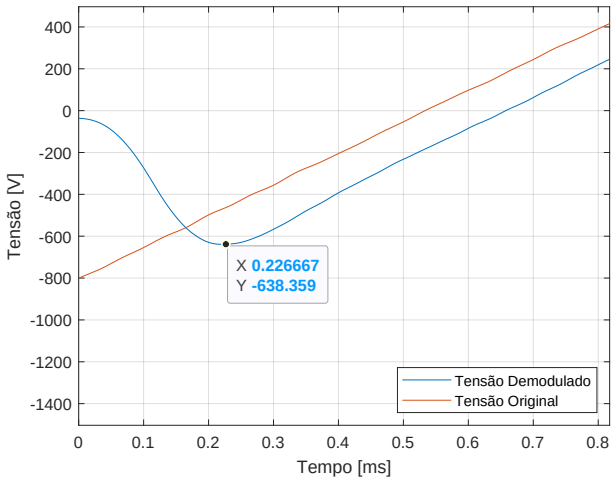


Fonte: Próprio autor.

O tempo de estabelecimento pode ser visualizado também, fazendo um zoom nos primeiros instantes do sinal demodulado. Note-se que na Figura 94, existe uma etapa na qual o sinal demodulado não segue o sinal original, isso por conta de que a ponto inicial começa num ponto afastado de um dos pontos de equilíbrio.

Importante comentar que, a cada iteração, o ponto inicial muda de locação. Assim, pode começar próximo de um dos pontos de equilíbrio, reduzindo o tempo de estabelecimento. Também se notou que o ponto de equilíbrio pode pular a outros pontos de equilíbrio, enquanto o sistema fica operando.

Figura 94 – Tempo de estabelecimento no sinal demodulado.



Fonte: Próprio autor.

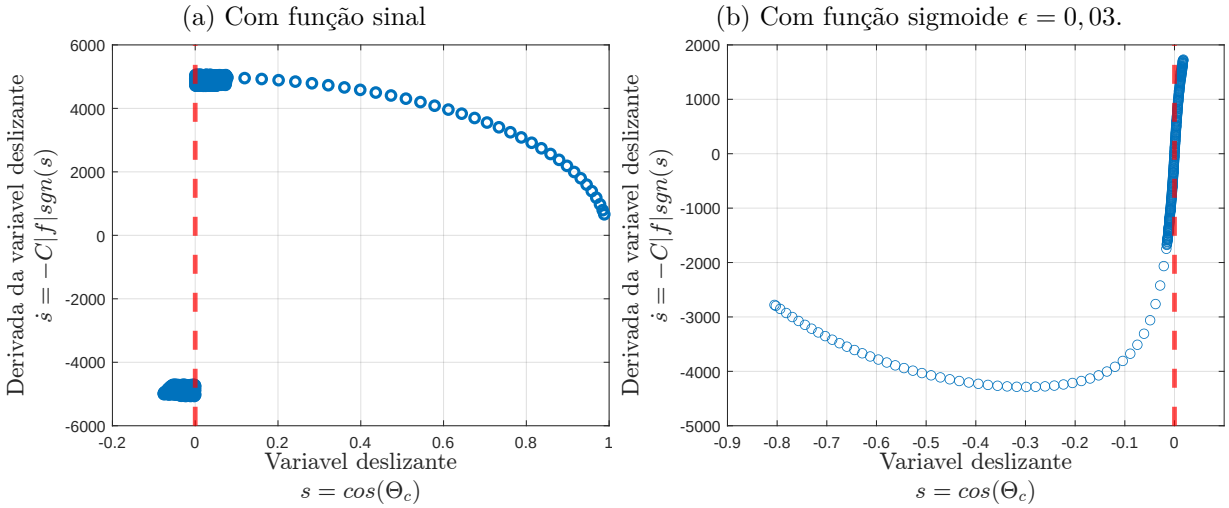
Para se conseguir observar o plano de fase em relação à variável deslizante $x_s = s$, precisa-se de conhecer a derivada de s. Dessa forma, para melhor clareza, o sistema pode

assumir que não existem distúrbios na entrada do controlador de modos deslizantes, ou seja, $\theta = 0$. Logo, com ajuda das equações (202) e (203), tem-se:

$$\dot{s} = f\dot{\theta} + fu = -Cfsgn(x_s f). \tag{230}$$

Na Figura 95(a), apresenta-se o sistema operando com uma função sinal no controlador de modos deslizantes, que quando o variável de estrutura fica perto de zero, $\dot{s}$ começa a oscilar entre os valores de 5000 e -5000, o qual é o valor de C. Por outro lado, na Figura 95(b), quando o sistema é compilado com um sigmoide, o sistema atrai o estado à $s = 0$, onde $\dot{s}$ fica oscilando num intervalo menor a $C = 5000$.

Figura 95 – Plano de fase.



Fonte: Próprio autor.

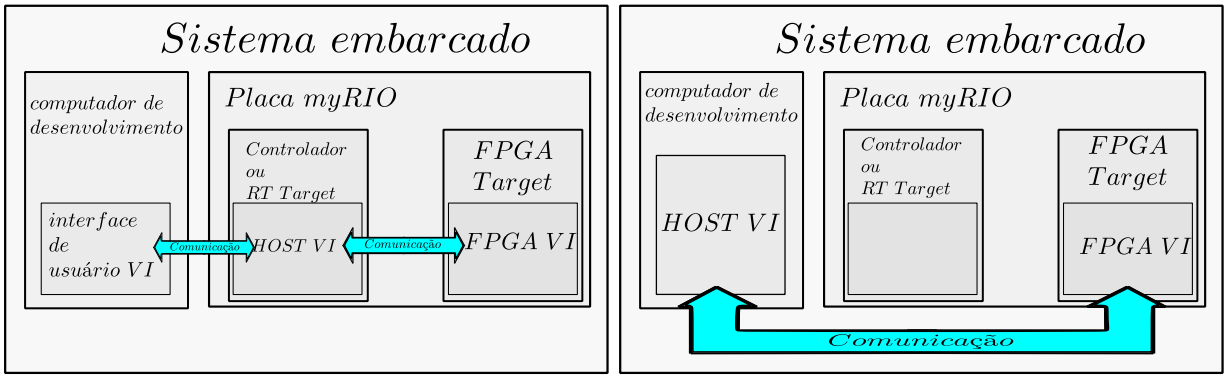
6.10 FPGA VI E HOST VI USANDO myRIO

Quando um projeto precisa de uma aquisição de alta confiabilidade, costuma-se criar uma aplicação (FPGA VI) é compilá-la no FPGA target.

O HOST VI é comumente compilado no controlador (também conhecido como RT target), mas ele pode ser compilado no computador de desenvolvimento. O HOST VI com ajuda da programação, consegue comunicar com o FPGA VI. Então, baseado na locação do HOST VI, existem dois tipos de sistemas embarcados usando myRIO. Na Figura 96(a), mostra-se o HOST VI no RT target, dentro do myRIO. Por sua vez, na Figura 96(b), mostra-se o HOST VI no computador de desenvolvimento. Assim, no projeto é usado o segundo caso, devido à sua facilidade de obter dados e exportar arquivos ao Matlab.

Figura 96 – Sistema embarcado.

(a) HOST VI no RT target. (b) HOST VI no computador de desenvolvimento.



Fonte: Próprio autor.

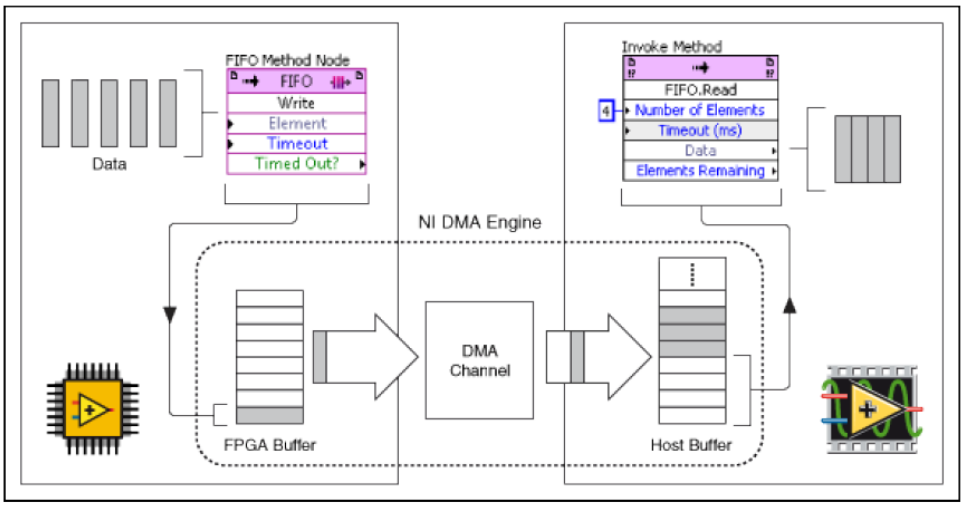
O projeto utiliza o FIFO para montar a comunicação entre HOST VI e FPGA VI. FIFO é uma estrutura de dados que mantém os elementos na ordem em que são recebidos e fornece acesso a esses elementos usando o princípio "primeiro a entrar, primeiro a sair". Além disso, usa-se o *Direct Memory Access* (DMA), o qual é um tipo de FIFO, para transferir uma quantidade grande de dados ou formas de onda.

Entre as vantagens de utilizar DMA FIFO, têm-se:

- Liberdade do processador Host para fazer outros cálculos durante transferência.
- Poupa os recursos do FPGA durante a transferência.
- Sincronização automática entre o HOST VI e FPGA VI.

Na Figura 97, mostra-se, no lado direito, que a aquisição de dados é feita no lado do FPGA, e seguidamente é enviada à Host. O DMA aloca memória (*buffers*) no lado do Host e FPGA, mas age como um único FIFO para aproveitar os recursos de cada dispositivo. Note-se que, no bloco da direita *Invoke Method*, na linha *Number of Elements*, tem-se um 4 que indica o comprimento do vetor de dados. O projeto desenvolvido é configurado com 5000 dados para o sinal fotodetectado e 5000 dados para o sinal da ponta de prova.

Figura 97 – Comunicação DMA baseado em FIFOs.



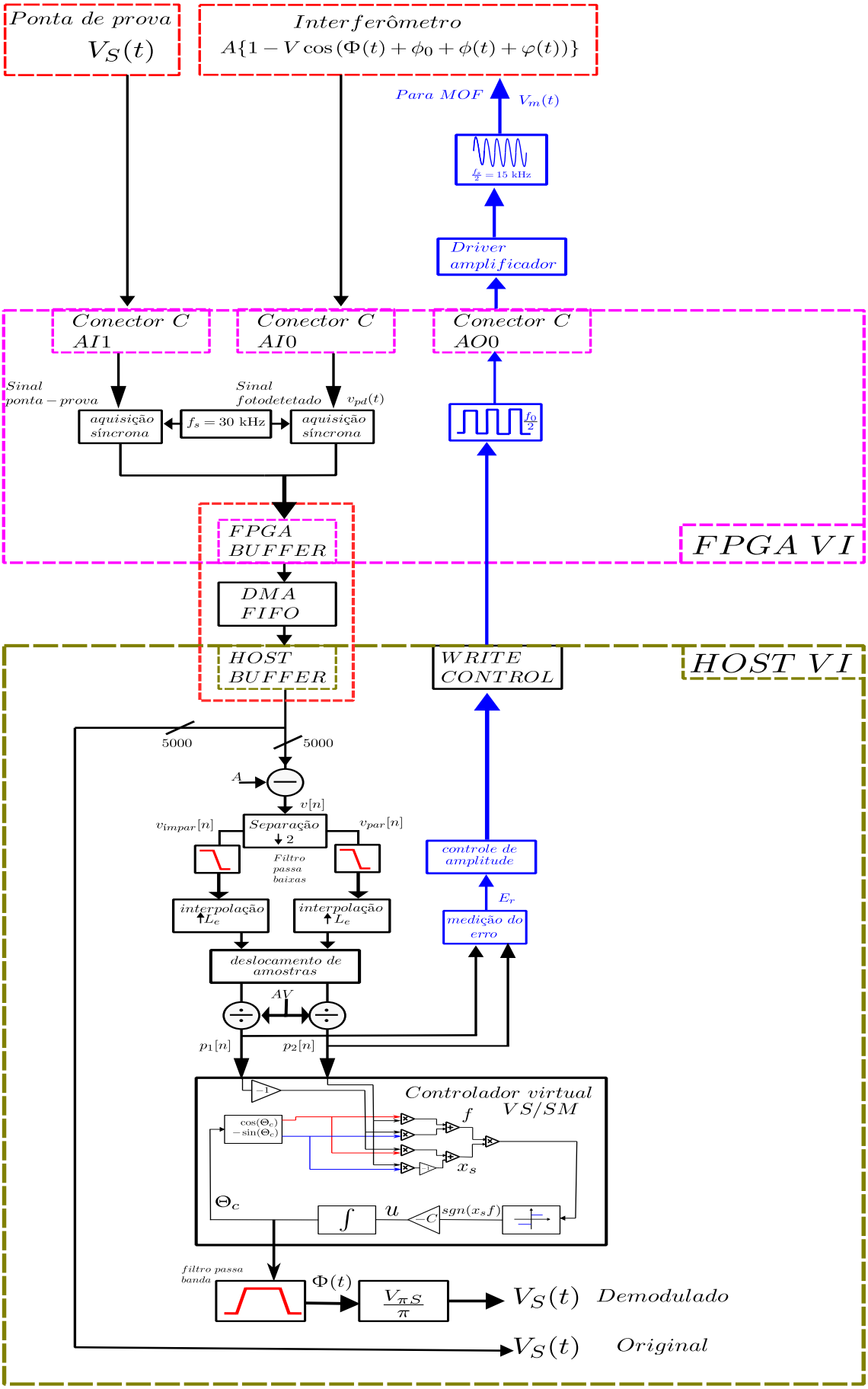
Fonte: (National-Instruments, 2020, p. 240).

Na Figura 98, mostram-se as aplicações montadas no FPGA VI e HOST VI, e que em conjunto completam o projeto total. Note-se que a parte de aquisição de dados do sinal fotodetectado e o sinal de ponta de prova são programados no FPGA VI, e compilados no FPGA target. Os sinais ingressam pelas portas analógicos AI0 à AI1 do myRIO, e são transmitidos ao HOST VI usando uma comunicação montada em DMA FIFO.

No HOST VI ingressa um pacote de 10000 dados, onde 5000 deles são do sinal fotodetectado, e os outros 5000 são da ponta de prova. Imediatamente, são feitas as operações estudadas nos capítulos anteriores, para comparar o sinal $V_S(t)$ original e demodulado. Repare-se que o sinal do controle PI sai do HOST VI usando *write control*, o qual é um bloco que permite escrever num controle alocado no FPGA VI, e consegue mudar a amplitude do sinal quadrado. O sinal quadrado sai pela porta de saída analógica AO0. Em seguida, o sinal quadrado é amplificado e colocado nos eletrodos do cristal modulador. Lembre-se de que HOST VI fica no computador de desenvolvimento e FPGA VI no myRIO.

Por outro lado, quando o HOST VI foi montado no RT target do myRIO tal como a Figura 96(a), o projeto total foi compilado com sucesso. Porém, a armazenagem de dados e compartilhamento de arquivos com Matlab ficou complicado de fazer. Não foi analisado com profundidade se existe algum método que permita compartilhar os arquivos com Matlab de uma forma fácil, por isso o problema fica aberto. Devido a isso, escolhe-se colocar o HOST VI no computador. A seguir, serão apresentadas algumas conclusões sobre os resultados obtidos.

Figura 98 – Esquema montado.



Fonte: Próprio autor.

7 CONCLUSÕES

Um método de demodulação de sinal interferométrico proposto por (Felão, 2019), de compensação da fase total usando-se controle pelos modos deslizantes, foi testado para obter o sinal de tensão a partir de uma única saída interferométrica do sistema de alta tensão chaveado proposto por (Pereira, 2018).

O entendimento do método de vetor de Jones na análise do sistema com dois cristais foi importante para obter a equação matemática do sistema com cristais alinhados num arranjo longitudinal, que poderia ser usado para estudos com múltiplos cristais alinhados.

A dependência principalmente da temperatura do cristal modulador, por conta da orientação do eixo cristalino c respeito ao feixe laser, foi verificado quando a figura de Lissajous mostrada tornou-se em uma elipse. Os resultados após o controle PI ser montado, com o método do trapézio, para controlar a quadratura dos sinais $p_1[n]$ e $p_2[n]$, foram verificados. Assim, consegue-se gerar uma figura de Lissajous circular de raio 1, demonstrando a qualidade do controle.

A importância de um bom amplificador de sinais, com uma largura de banda ampla, foi verificada. Um amplificador com uma largura de banda comparável com a frequência de amostragem poderia limitar o sinal de controle, podendo não atingir a condição de quadratura. O circuito montado na Figura 68, consegue trabalhar bem até uma largura de 40 kHz, sendo suficiente para nosso projeto. No caso de se dispor de um amplificador linear A-301 HS adicional, pode-se aproveitar sua largura de banda de 200 kHz para amostrar sinais com frequências acima de 30 kHz. Em nosso projeto, o amplificador A-301 HS foi usado no sistema de elevação de tensão.

O sistema não precisa de filtros *anti-aliasing* porque o sinal de interesse, com frequência fundamental de 60 Hz, fica muito abaixo da frequência de amostragem de 30 kHz. Por outro lado, o sinal quadrado que sai da porta AO0 do myRIO, não precisa de um filtro na saída, porque o circuito amplificador (*Driver* da Figura 69) tem uma largura de banda de 40 kHz, trabalhando também como um filtro.

O filtro digital passa-baixas de faixa de 0 até 3 kHz, alocado após separar o sinal fotodectado, permite remover o ruído após passar pela amostragem. Por outro lado, o filtro passa-banda na faixa de 10 Hz até 3 kHz na saída é importante por que permite remover em grande proporção o *chattering*, em sinais demodulados que trabalham com a função sinal no controlador de modos deslizantes.

As simulações do sistema de compensação de alto ganho mostram que, quanto maior a frequência de amostragem, a variável deslizante s fica perto do zero, o qual é a condição a que se deseja chegar. Logo, o ganho muito elevado de C ou a montagem da função sinal descontínua gera o indesejável *chattering*. Deve-se escolher valores adequados

para evitar esse fenômeno de alta frequência e evitar respostas não modeladas.

A existência de múltiplos pontos de equilíbrio no controlador de modos deslizantes, por conta da periodicidade da função candidata na seção 5.2.1 foi verificada. Durante a operação, o sistema fica num ponto de atração mais próximo, dependendo do ponto inicial, podendo pular de um ponto de atração a outro. Calculou-se o tempo de estabelecimento ao ponto de equilíbrio em dois instantes como sendo $0,223$ ms e $0,333$ ms.

A recuperação do sinal de tensão deve considerar o valor de $V_{\pi S}$ experimental, e, o filtro Butterworth de segunda ordem passa-banda com uma faixa de 10 Hz até 3 kHz, que adiciona uma defasagem de $5,32°$. Logo, para um sinal senoidal com a tensão $V_S(t) > V_{\pi S}$, tem-se um erro de tensão pico-pico menor a 1%, enquanto seu THD é menor a 5%. No caso de um sinal triangular ou quadrado, o erro relativo pico-pico é menor que 2%, e o erro de THD é menor que 2%.

As medições de tensão abaixo de tensão $V_{\pi S}$ podem ser feitas em condições do mínimo distúrbio no local de interferômetro, isso por conta de que o controle PI é desligado. Os resultados vão perdendo qualidade quanto menor for a tensão $V_S(t)$, pois o erro relativo de THD fica acima de 50% para uma senoide com THD menor a 5%. Assim, para uma tensão da rede elétrica comercial de 110 V com um THD menor a 4%, seria quase impossível obter bons resultados, porque o THD da tensão demodulada terá quase o dobro do valor original. O sistema deve trabalhar acima do valor $V_{\pi S}$ para obter os melhores resultados para qualquer forma de onda em frequência de 60 Hz.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

- Implementar o algoritmo de *Super-twisting* no controlador de modos deslizantes, para evitar *chattering*.
- Trocar o método de controle PI por um método de controle robusto, com objetivo de reduzir os distúrbios externos que atrapalham o controle PI.
- Deixar de usar os dois sinais obtidos da modulação, e, em lugar de isso, usar um deles e gerar um sinal ortogonal usando o método descrito em (Ma *et al.*, 2018), que em resumo analisa por seções o sinal fotodetectado baseado em alguns *thresholds*, retornando o sinal ortogonal. Assim pode-se dispensar do controlador PI.
- Fazer um *downsampling* após calcular o sinal Θ_c, para evitar usar um bloco pronto de Labview. Projetando-se um filtro, pode melhorar os resultados de defasagem por conta do filtro passa-banda colocado na saída.

REFERÊNCIAS

BODNAR, I. T.; YARUNICHEV, V. P. Temperature dependence of refractive indices of $LiNbO_3$, $LiTaO_3$ and $(Ba, Na)NbO_3$ relative crystals: similarity and difference. *In*: **Complex Mediums II: Beyond Linear Isotropic Dielectrics**. SPIE, 2001. v. 4467, p. 357 – 365. Disponível em: https://doi.org/10.1117/12.432948. Acesso em: 23 mai. 2024.

CARLSON, A. B.; CRILLY, P. **Communication systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication**. 5. ed. New York, NY: McGraw-Hill Professional, 2009. ISBN 978–0–07–338040–7.

CHEN, K.; ZHU, Y.; LIU, Z.; XUE, D. State of the Art in Crystallization of $LiNbO_3$ and Their Applications. **Molecules**, v. 26, n. 22, 2021. ISSN 1420-3049. Disponível em: https://www.mdpi.com/1420-3049/26/22/7044. Acesso em: 25 set. 2024.

CHRISTENSEN, L. Design, construction, and test of a passive optical prototype high voltage instrument transformer. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, NY,United States, v. 10, n. 3, p. 1332–1337, 1995.

DENG, J.; QIAN, H.; CHU, J.; LU, Z.; ZHANG, L.; XIE, Z.; ZOU, Z. Non-contact monitoring method for overvoltage based on Pockels effect. *In*: **2018 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility and 2018 IEEE Asia-Pacific Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC/APEMC)**. Suntec City, Singapore: IEEE, 2018. p. 1261–1266.

FELÃO, L. H. V. **High gain approach and sliding mode control applied to quadrature interferometer**. 2019. 113 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2019.

FELÃO, L. H. V.; MARTIN, R. I.; MARTINEZ, G. A.; SAKAMOTO, J. M. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; KITANO, C. All digital sliding mode observer of a feedback-free interferometer for high dynamic range detection. **Opt. Lett.**, Optica Publishing Group, United States, v. 47, n. 15, p. 3852–3855, Aug 2022.

FELÃO, L. H. V.; MARTIN, R. I.; SAKAMOTO, J. M. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; KITANO, C. Wide dynamic range quadrature interferometer with high-gain approach and sliding mode control. **Opt. Express**, Optica Publishing Group, United State, v. 27, n. 18, p. 25031–25045, Sep 2019.

GUO, L.; NIU, L.; NING, Q.; WANG, L.; LI, H.; GUO, D.; MA, Z. Design of GIS High Voltage Measurement System Based on Pockels Electro-Optic Effect. *In*: **2021 International Conference on Advanced Electrical Equipment and Reliable Operation (AEERO)**. Beijing, China: IEEE, 2021. p. 1–5.

HIDAKA, K. Progress in Japan of space charge field measurement in gaseous dielectrics using a Pockels sensor. **IEEE Electrical Insulation Magazine**, IEEE, United States, v. 12, n. 1, p. 17–28, 1996.

HOBDEN, M.; WARNER, J. The temperature dependence of the refractive indices of pure lithium niobate. **Physics Letters**, Netherlands, v. 22, n. 3, p. 243–244, 1966. ISSN 0031-9163. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916366905919. Acesso em: 23 mai. 2024.

INTERNATIONAL-ELECTROTECHNICAL-COMMISSION. **IEC-61869-3: Instrument Transformers - Part 3: Additional Requirements for Inductive Voltage Transformers**. Switzerland, 2011.

INTERNATIONAL-ELECTROTECHNICAL-COMMISSION. **IEC-61869-103: Instrument transformers – The use of instrument transformers for power quality measurement**. Switzerland, 2012.

KUMADA, A.; HIDAKA, K. Directly High-Voltage Measuring System Based on Pockels Effect. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, United States, v. 28, n. 3, p. 1306–1313, 2013.

LANGELLA, R.; TESTA, A.; ALII, E. *et al.* IEEE recommended practice and requirements for harmonic control in electric power systems. *In*: **IEEE Recommended Practice**. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014. ISBN 978-0-7381-9005-1. Disponível em: https://ieeexplore.ieee.org/servlet/opac?punumber=6826457. Acesso em: 24 mai. 2024.

LEMES, A. d. S. **Novas configurações de interferômetros de quadratura e de técnicas de detecção de fase óptica baseadas em phase-unwrapping**. 2014. 143 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2014.

MA, R.; LI, X.; DONG, X.; XIA, Y. Wavelength scanning distance interferometry using inflection point retrieval for phase unwrapping. **Optics Communications**, v. 410, p. 292–296, 2018. ISSN 0030-4018. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401817309379. Acesso em: 25 set. 2024.

MARTIN, R. I.; SAKAMOTO, J. ao M. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; MARTINEZ, G. A.; PEREIRA, F. C.; KITANO, C. Nonlinear control system for optical interferometry based on variable structure control and sliding modes. **Opt. Express**, Optica Publishing Group, United States, v. 25, n. 6, p. 6335–6348, Mar 2017. Disponível em: https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-25-6-6335. Acesso em: 24 mai. 2024.

MARTINS, W. W. M. **Sensores ópticos de tensão baseados no efeito eletro-óptico em cristais de niobato de lítio.** 2006. 163 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

NATIONAL-INSTRUMENTS. **Programming with an FPGA Target**. [*S.l.*], 2020. 88 p. Disponível em: https://www.ni.com/docs/en-US/bundle/labview-nxg-fpga-targets/page/data-transfer-using-fifos.html. Acesso em: 20 jul. 2024.

NATIONAL-INSTRUMENTS. **User guide and specifications NI myRIO-1900**. NI, 2021. 32 p. Disponível em: https://www.ni.com/docs/en-US/bundle/myrio-1900-getting-started/resource/376047d.pdf. Acesso em: 24 mai. 2024.

NEWNHAM, R. E. **Properties of materials: anisotropy, symmetry, structure**. Oxford, England: Oxford University Press, 2005. ISBN 0-19-852075-1.

NYE JF, F. **Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices**. London, England: Oxford University Press, 1985. ISBN 0-19-851165-5.

OGATA, K. **Sistemas control tiempo discreto**. 2. ed. Mexico: PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S.A., 1996. ISBN 968-880-539-4.

OGATA, K. **Ingeniería de control moderna**. 5. ed. Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A., 2010. ISBN 978-84-8322-660-5.

OPPENHEIM, A.; SCHAFER, R. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São paulo, Brasil: Pearson Education do Brasil Ltda, 2012. ISBN 978-85-8143-102-4.

PEREIRA, F. d. C. **Demodulação de sinais interferométricos de saída de sensor eletro-óptico de tensões elevadas utilizando processador digital de sinais**. 2013. 125 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.

PEREIRA, F. d. C. **Sensor óptico de alta tensão com chaveamento de quadratura e realimentado por controle de fase**. 2018. 106 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2018.

SÁNCHEZ-DENA, O.; FIERRO-RUIZ, C. D.; VILLALOBOS-MENDOZA, S. D.; FLORES, D. M. C.; ELIZALDE-GALINDO, J. T.; FARíAS, R. Lithium Niobate Single Crystals and Powders Reviewed—Part I. **Crystals**, v. 10, n. 11, 2020. ISSN 2073-4352. Disponível em: https://www.mdpi.com/2073-4352/10/11/973. Acesso em: 25 set. 2024.

SANTOS, J.; TAPLAMACIOGLU, M.; HIDAKA, K. Pockels high-voltage measurement system. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, United States, v. 15, n. 1, p. 8–13, 2000.

SAWA, T.; KUROSAWA, K.; KAMINISHI, T.; YOKOTA, T. Development of optical instrument transformers. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, United States, v. 5, n. 2, p. 884–891, 1990.

SHTESSEL, Y.; EDWARDS, C.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A. **Sliding mode control and observation**. New York, NY: Birkhäuser, 2014. v. 10. ISBN 978-0-8176-4893-0.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied nonlinear control**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1991. ISBN 0-13-040890-5.

SMITH, D.; RICCIUS, H.; EDWIN, R. Refractive indices of lithium niobate. **Optics Communications**, Netherlands, v. 17, n. 3, p. 332–335, 1976. ISSN 0030-4018. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003040187690273X. Acesso em: 23 mai. 2024.

STEWART, J. **Calculus Early Transcendentals**. 6. ed. Florence, KY, United States: Thomson Brooks/Cole, 2007. ISBN 978-0-495-01166-8.

TOBAL, F. H. F. **Método de Detecção de Fase Óptica Aplicado a Calibração de Sensor de Tensão Polarimétrico**. 2020. 103 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2020.

TRÄGER, F. **Springer handbook of lasers and optics**. New York, NY: Springer, 2012. v. 2. ISBN 978-0-387-95579-7.

WACKERNAGEL, D.; KAUFMANN, F.; MAEDER, A.; GRANGE, R.; FRANCK, C. M. Integration of an Optical Electric Field Sensor in Lithium Niobate on Insulator. **IEEE Access**, IEEE, United States, v. 11, p. 90715–90723, 2023. ISSN 2169-3536.

WEIS, R.; GAYLORD, T. Lithium niobate: Summary of physical properties and crystal structure. **Applied Physics A**, Springer, v. 37, p. 191–203, 1985.

WERNECK, M.; ABRANTES, A. Fiber-optic-based current and Voltage measuring system for high-Voltage distribution lines. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, United States, v. 19, n. 3, p. 947–951, 2004. ISSN 0885-8977.

YARIV, A.; YEH, P. **Optical Waves in Crystal: Propagation and Control of Laser Radiation**. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1984. ISBN 0-471-09142-1.

YARIV, A.; YEH, P. **Photonics: Optical Electronics in Modern Communications**. 6. ed. New York: Oxford University Press, 2006. ISBN 978-0-19-517946-0.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. **University physics with modern physics**. 15. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2019. ISBN 978-0-135-15970-5.

ZHAO, J.; YAN, M.; XU, S.; SUN, X. Fiber Optic Voltage Sensor Based on Capacitance Current Measurement With Temperature and Wavelength Error Correction Capability. **IEEE Sensors Journal**, IEEE, United States, v. 22, n. 24, p. 23829–23836, 2022.

ZHENG, W.; LI, H.; FENG, C.; WEN, C.; ZENG, X. Design of Novel Resonant Optical Voltage Sensor Based on Pockels Effect. **IEEE Sensors Journal**, IEEE, United States, v. 22, n. 22, p. 21694–21698, 2022. ISSN 1558-1748.