UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Resultados sobre existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear em $\mathbb{R}^N$

Ramon Batista de Campos

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, setembro de 2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Resultados sobre existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear em $\mathbb{R}^N$

Ramon Batista de Campos

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, setembro de 2026

C198r

Campos, Ramon Batista de
Resultados sobre existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear em RN / Ramon Batista de Campos. -- Presidente Prudente, 2026
60 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Método Variacional. 2. Variedade de Nehari-Pohozaev. 3. Equação de Schrödinger quasilinear. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Resultados sobre existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear em RN,

AUTOR: RAMON BATISTA DE CAMPOS
ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Prof. Dr. MATHEUS FREDERICO STAPENHORST (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Prof.Dr ALESSIO FISCELLA (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática / IMECC – Unicamp

Presidente Prudente, 28 de agosto de 2026.

À minha amada esposa, por caminhar ao meu lado em cada batalha e por toda a sua dedicação, tornando possível a realização deste trabalho.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela sabedoria e saúde concedidas ao longo de toda esta jornada acadêmica, me sustentando nos momentos em que mais precisei.

À minha esposa, o meu mais profundo agradecimento pelo incentivo incondicional, amor e por ser minha fonte de vigor e ânimo nos momentos de maior cansaço. Ao meu pai, pelo apoio imenso para que eu pudesse finalizar esta etapa, e à minha mãe que, mesmo distante, forneceu os recursos e o carinho essenciais para a conclusão deste trabalho. Aos meus sogros, por todo o auxílio e pelos valiosos ensinamentos que compartilharam comigo.

Aos colegas de faculdade e da pós-graduação, pelo incentivo, apoio mútuo e pelas ricas conversas que contribuíram para o meu desenvolvimento como pesquisador e ser humano. Agradeço também a todos que, de alguma forma, prestaram sua ajuda direta ou indireta ao longo deste caminho.

Expresso minha imensa gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, pela excelente orientação, paciência e por tudo o que fez por mim. Suas reuniões, conselhos e a disponibilidade para me acolher e sanar minhas dúvidas foram fundamentais, não apenas para o desenvolvimento deste trabalho, mas para o meu contínuo aprendizado e amadurecimento matemático.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo incentivo recebido.

Ó Senhor, quão variadas são as tuas obras! todas as coisas fizeste com sabedoria; cheia está a terra das tuas riquezas.

Salmos 104:24

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência de solução para a equação de Schrödinger quasilinear da forma

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u\Delta(u^2) = |u|^{p-1}u$$

em $\mathbb{R}^N$ onde $N \geq 3$ e $p \in (1, \frac{3N+2}{N-2})$. Usaremos o método de minimização na chamada Variedade de Nehari-Pohozaev, a qual é adequada para tratar de problemas com não-linearidades que são sub-lineares com respeito a um termo de maior ordem da parte principal do funcional energia. A falta de compacidade é contornada considerando condições adequadas sobre o potencial V e usando o Princípio de Concentração de Compacidade de Lions.

Palavras-chave: Método Variacional; Variedade de Nehari-Pohozaev; Equação de Schrödinger quasilinear.

Abstract

In this work, we study the existence of solutions for the quasilinear Schrödinger equation of the form

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u\Delta(u^2) = |u|^{p-1}u$$

in $\mathbb{R}^N$, where $N \geq 3$ and $p \in (1, \frac{3N+2}{N-2})$. We will use the minimization method on the so-called Nehari-Pohozaev manifold, which is suitable for treating problems with nonlinearities that are sublinear with respect to a higher-order term of the main part of the energy functional. The lack of compactness is overcome by considering suitable conditions on the potential V and using Lions' Concentration-Compactness Principle.

Keywords: Variational Methods; Nehari-Pohozaev Manifold; quasilinear Schrödinger Equation.

Índice de Notações

$\mathbb{R}^N$: Espaço Euclidiano N-dimensional.

Δu: Operador Laplaciano de u.

$H^1(\mathbb{R}^N)$: Espaço de Sobolev usual das funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ com derivadas fracas de primeira ordem em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$: Espaço definido por $\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < +\infty\}$.

$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$: Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

$L^p(\mathbb{R}^N)$: Espaço de Lebesgue de funções p-integráveis em $\mathbb{R}^N$, com norma $\|\cdot\|_{L^p}$.

2^*: Expoente crítico de Sobolev $\frac{2N}{N-2}$.

∇u: Gradiente da função u.

$div(\cdot)$: Operador divergência.

$\partial(A)$: Fronteira do conjunto A.

$\langle I'(u), \phi\rangle$: Derivada de Gateaux do funcional I na direção da função teste $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

$d_X(u, v)$: Métrica no espaço X, definida por $d_X(u, v) := \|u - v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla(u^2) - \nabla(v^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Sumário

Lista de Siglas **5**

Resumo **7**

Abstract **9**

Sumário **11**

1 Introdução **13**

2 Preliminares **17**
2.1 Espaços L^p 17
2.2 Espaços de Sobolev 20
2.2.1 Derivada fraca 20
2.2.2 O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ 20
2.2.3 Imersões de Sobolev 27

3 Resultados Principais **35**

Referências **57**

Capítulo

1

Introdução

As Equações Diferenciais Parciais tem despertado grande interesse por parte dos pesquisadores nas últimas décadas, como ferramentas fundamentais para solucionar problemas nas diversas áreas do conhecimento. Na Física-matemática, por exemplo, tais equações desempenham um papel fundamental no estudo de ondas estacionárias, filmes superfluidos e na teoria de plasmas (ver, por exemplo, [3, 10, 11]).

Uma classe de problemas quasilineares de Schrödinger de grande relevância foi estudada por Colin, Jeanjean e Squassina em [6]. Neste sentido, os autores investigaram o seguinte problema de evolução:

$$\begin{cases} i\phi_t + \Delta\phi + \phi\Delta(|\phi|^2) + |\phi|^{p-1}\phi = 0, & \text{em} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^N; \\ \phi(0,x) = a_0(x), & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.0.1}$$

A principal dificuldade no problema (1.0.1) está no termo quasilinear $\phi\Delta(|\phi|^2)$, o que impede a aplicação direta das técnicas usuais para o problema de Cauchy no espaço de energia natural definido por:

$$X_{\mathbb{C}} := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 |\nabla |u||^2 < +\infty \right\}.$$

Com efeito, a não-linearidade não satisfaz a condição $1 - 4\sigma\ell'^2(\sigma) > C_\ell \ell'^2(\sigma)$, para todo $\sigma \in \mathbb{R}_+$, com $C_\ell > 0$, não sendo possível, portanto, aplicar o resultado de Colin. Para contornar esse problema, é necessário introduzir transformadas de gauge, que atuam como variáveis de estado, viabilizando as estimativas de energia necessárias para a demonstração do problema de Cauchy. Por ondas estacionárias, entendemos soluções da forma $\phi_\omega(t,x) = u_\omega(x)e^{-i\omega t}$. Aqui, ω é um parâmetro fixo e $\phi_\omega(t,x)$ satisfaz o problema (1.0.1) se, e somente se, u_ω é solução da equação

$$-\Delta u - u\Delta(|u|^2) + \omega u = |u|^{p-1}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Posteriormente, no trabalho [13], Liu et al. provaram a existência de soluções de energia mínima (*ground states*) para o problema quasilinear:

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u\Delta(u^2) = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.0.2}$$

onde $4 \leq p+1 < \frac{4N}{N-2}$.

Mais especificamente, os autores obtiveram solução minimizando o funcional energia associado, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+u^2)|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx.$$

sobre o conjunto

$$S = \left\{u \in X\backslash\{0\} : \int_{\mathbb{R}^N}[(1+2u^2)|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - |u|^{p+1}]dx\right\},$$

onde X é o espaço de funções adequado para a definição de I e V satisfaz condições adequadas.

No entanto, essa abordagem direta com essa variedade só é capaz de fornecer as estimativas necessárias sob a forte restrição de que o expoente da não-linearidade satisfaça $p \geq 3$.

Em [16], o qual constitui a referência central para esse trabalho, Ruiz e Siciliano estudam a seguinte equação de Schrödinger quasilinear parabólica:

$$i\phi_t - \Delta\phi + W(x)\phi - \frac{1}{2}\Delta g(|\phi|^2)g'(|\phi|^2)\phi = f(x,\phi), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.0.3}$$

onde $N \geq 3$, $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e f é um termo não-linear. Nesse trabalho, os autores se restringem ao caso em que $g(\phi) = \phi$ e a uma não-linearidade dada por $f(x,\phi) = |\phi|^{p-1}\phi$. A fim de estudar as ondas estacionárias associadas a este problema, foi empregada a mudança de variável $\phi(t,x) = e^{-i\omega t}u(x)$. Dessa forma, a equação de evolução (1.0.3) se reduz à equação elíptica quasilinear (1.0.2) com potencial $V(x) = W(x) + \omega$.

Mais especificamente, no trabalho [16], foi provado o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1. *Suponha que $p \in (1, \frac{3N+2}{N-2})$ e $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz*

- $0 < V_0 \leq V(x) \leq \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty < +\infty$;
- *A função $x \mapsto x.\nabla V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$;*
- *A função $s \mapsto s^{\frac{N+2}{N+p+1}}V(s^{\frac{1}{N+p+1}}x)$ é côncava para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Então, existe $u \in X$ uma solução positiva de (1.0.2)*. Mais ainda, u é uma solução do tipo ground state (ou de estado fundamental), isto é, a energia é mínima com respeito ao conjunto das demais soluções não-triviais de* (1.0.2)*.*

Para a demonstração desse resultado, serão aplicados métodos variacionais baseados na análise do funcional energia $I : X \to \mathbb{R}$ associado ao problema (1.0.2), o qual é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx$$

onde

$$X := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx < +\infty\right\}.$$

As principais dificuldades técnicas do problema decorrem da perda de compacidade, devido ao domínio $\mathbb{R}^N$ ser ilimitado, e da presença do termo quasilinear $u\Delta(u^2)$. Vale ressaltar que o funcional I está definido em X, um espaço que não possui a estrutura de um espaço vetorial sob as operações usuais e, além disso, o termo $\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx$ não é

convexo. Desta forma, não podemos aplicar diretamente as técnicas minimax clássicas para I. No entanto, X é um espaço métrico completo, condição suficiente para que possamos trabalhar com convergência de sequências e, assim, aplicar métodos variacionais alternativos.

É interessante notar que, no caso em que $p \in (1,3)$, não é possível utilizar a abordagem baseada na minimização sobre a variedade de Nehari. Com efeito, neste caso, o funcional seria coercivo sobre fibras radiais do tipo $t \mapsto tu$. Por esse motivo, em [16], foi definida uma variedade que incorpora características da variedade de Nehari e da variedade de Pohozaev, dada a partir da análise do funcional sobre fibras do tipo $t \mapsto u(\frac{\cdot}{t})$. Isso motiva a definição da variedade

$$M := \left\{ u \in X \setminus \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \dfrac{N}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \dfrac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)u^2 + |\nabla u|^2 u^2)\,dx \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V(x)\cdot x)\,u^2\,dx - \dfrac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx = 0 \end{array} \right\}.$$

Diferente do cenário clássico, em que se restringe o funcional a funções radialmente simétricas (onde a imersão $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ é compacta para $2 < q < 2^*$), a falta de simetria do problema exige uma abordagem mais refinada para recuperar a compacidade perdida. Para isso, aplica-se o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions, o qual garante que a massa da sequência minimizante não escape para o infinito.

Neste trabalho, propomos um estudo aprofundado dos resultados de Ruiz e Siciliano [16], onde todos os detalhes serão apresentados. Diante deste contexto, este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, apresentamos as definições preliminares e os resultados clássicos de Análise Funcional e Espaços de Sobolev fundamentais para o desenvolvimento do texto. Já o Capítulo 3 é dedicado ao estudo detalhado do artigo principal que o fundamenta.

Capítulo

2

Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar alguns resultados preliminares que serão utilizados durante todo o texto. Inicialmente, falaremos sobre os espaços L^p e, em seguida, sobre espaços de Sobolev.

2.1 Espaços L^p

Definição 2.1.1. *Seja Ω um conjunto mensurável, $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < +\infty$. O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ é o espaço das classes de equivalências das funções f que satisfazem:*

- *$f = g$ quase sempre em Ω, isto é, existe um conjunto de medida nula $A \subset \Omega$ tal que $f(x) = g(x), \forall x \notin A$.*

Este espaço é definido por:

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^p dx < +\infty \right\}.$$

A norma em $L^p(\Omega)$ é dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, para $p = +\infty$, definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ é mensurável } \exists C : |f(x)| \leq C, \text{q.t.p. em } \Omega \}$$

onde a norma de $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{ C : |f(x)| \leq C, \text{q.t.p em } \Omega \}.$$

Dizemos ainda que p e q são expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Em particular, se $p = 1$, então convencionamos $q = +\infty$.

Teorema 2.1.1. *(Desigualdade de Young) Sejam $p, q > 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b > 0. \tag{2.1.1}$$

Demonstração. *Dados $a, b > 0$, e p e q expoentes conjugados, temos:*

$$\begin{aligned} ab &= e^{\log(ab)} = e^{\log(a)+\log(b)} \\ &= e^{p\frac{1}{p}\log(a)+q\frac{1}{q}\log(b)} \\ &= e^{\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{q}\log(b^q)} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\log(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\log(b^q)} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

□

Os próximos resultados são fundamentais para o estudo a seguir.

Teorema 2.1.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $1 \leq p, q \leq +\infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. *Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \neq 0 \neq \|g\|_{L^q(\Omega)}$. Considerando $a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}$ e $b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}$ e usando a Desigualdade de Young (2.1.1), temos:*

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\right)^q}{q}.$$

Isso implica em

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}\right).$$

Integrando em ambos os membros sobre Ω, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_\Omega |f(x)g(x)| &\leq \frac{1}{p\|f\|_{L^p(\Omega)}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right) + \frac{1}{q\|g\|_{L^q(\Omega)}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx\right) \\ &= \frac{1}{p\|f\|_{L^p(\Omega)}}\|f\|_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q\|g\|_{L^q(\Omega)}}\|g\|_{L^q(\Omega)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Teorema 2.1.3. *(Desigualdade de Hölder generalizada) Se $f_1, \cdots, f_k$ satisfaz $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, para $1 \leq i \leq k$ e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

então o produto $f = \prod_{i=1}^k f_i$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}. \tag{2.1.3}$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e vale a seguinte fórmula de interpolação:

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|^\alpha_{L^p}\|f\|^{1-\alpha}_{L^q} \, com \, \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{2.1.4}$$

Demonstração. *Ver [7], p. 707.* □.

Teorema 2.1.4. *(Lema de Fatou) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

1. *$f_n(x) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω;*
2. *$\sup_n \int_\Omega f_n dx < +\infty$.*

Para quase todo $x \in \Omega$, considere $f(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \leq +\infty$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n dx. \tag{2.1.5}$$

Demonstração. *Ver [9], pg. 52.* □

Teorema 2.1.5. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

1. *$f_n(x) \to f(x)$, q.t.p. em Ω;*
2. *$\exists g \in L^1(\Omega) : |f_n(x)| \leq g(x), \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Demonstração. *Note que $(g+f_n)$ é uma sequência de funções não negativas e integráveis. Pelo Lema de Fatou* (2.1.5)

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g + f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n)d\mu,$$

e então

$$\int g d\mu + \int f d\mu \leq \int g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Como $\int g d\mu$ é finito, temos

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Por outro lado, $(g - f_n)$ é também uma sequência de funções não negativas integráveis. Pelo Lema de Fatou (2.1.5)

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g - f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)d\mu,$$

donde

$$\int g d\mu - \int f d\mu \leq \int g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

o que prova o resultado. □

Lema 2.1.1. *(Lema de Tietze) Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto fechado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Então, existe $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínua tal que $F|_X = f$.*

Vamos apresentar a Derivada de Gateaux, uma ferramenta importante no que segue.

Definição 2.1.2. *(Derivada de Gâteaux) Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto e $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é* ***Gâteaux diferenciável*** *em $u \in U$ se existe $A \in X'$ tal que, para todo $v \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = A(v). \tag{2.1.6}$$

Se I é Gâteaux diferenciável em u, existe um único funcional linear A satisfazendo (2.1.6). Neste caso, dizemos que I é Gâteaux-diferenciavel em u e denotamos por $\langle I'(u), v\rangle$.

Definição 2.1.3. *(Notação de Landau - Big-O e Little-O) Sejam $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^N \cup \{\pm\infty\}$. Dizemos que:*

(i) $f(x) = O(g(x))$ quando $x \to a$ se existem $C > 0$ e uma vizinhança V de a tais que:

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x \in V.$$

(ii) $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to a$ se:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2.2 Espaços de Sobolev

Começaremos falando sobre os espaços de Sobolev que são os espaços adequados para o problema. Para isso, precisamos lembrar antes da noção de funções localmente integráveis e de derivada fraca.

2.2.1 Derivada fraca

Definição 2.2.1. *Seja Ω um aberto. Dizemos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^1(K)$, para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Agora, vamos definir o que é a derivada fraca.

Definição 2.2.2. *Seja Ω um aberto. Dizemos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada fraca se*

$$\exists g_i \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i\, \phi\, dx, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observação: Quando uma função u admitir derivada fraca com respeito a x_i, vamos denotá-la sem perda de generalidade por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2.2.2 O espaço $W^{k,p}(\Omega)$

Os espaços de Sobolev são os mais adequados para tratar problemas envolvendo EDPs elípticas, pois as soluções podem não possuir derivadas no sentido clássico. Primeiramente, definiremos os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e, em seguida, particularizaremos para os espaços de interesse.

Definição 2.2.3. *Seja Ω um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada distribucional de u, associada ao multi-índice α. Lembramos que para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, definimos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

com $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. Este espaço é munido da norma

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leq p < +\infty \ .$$

Para $k = 1$, obtemos um espaço particularmente importante, denotado por $W^{1,p}(\Omega)$, que será abordado na sequência.

Definição 2.2.4. *Seja Ω um aberto e $1 \leq p \leq +\infty$. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega)\}$$

onde novamente cada derivada parcial é vista no sentido fraco. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.2.5. *O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ é definido por*

$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \cdots, N \right\}.$$

O Espaço $H^1(\Omega)$ será munido com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

e a norma correspondente

$$||v||_{H^1(\Omega)} := \left[\int_\Omega \left(|v|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Quando $p = 2$, usamos a notação

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

para enfatizar que são espaços de Hilbert.
A seguir, vamos definir alguns espaços importantes para o nosso estudo.

Definição 2.2.6. *Denotemos $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Definimos*

$$H_0^1(\Omega) := \{\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ em } H^1(\Omega)\};$$
$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ em } W^{1,p}(\Omega)\};$$
$$W_0^{k,p}(\Omega) := \{\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ em } W^{k,p}(\Omega)\}.$$

Os elementos de $H_0^1(\Omega)$ são funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em $\partial\Omega$ no sentido do traço.
Exemplo: Consideremos o caso $N = 1$ onde $\Omega =]-1, 1[$ e $v(x) = |x|$. Claramente, v não é diferenciável em $x = 0$ no sentido clássico. Vamos calcular a derivada distribucional de v. Dada uma função teste $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, por integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} v(x)\phi'(x)dx &= \int_{-1}^{0}(-x)\phi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\phi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0}\phi(x)dx - \int_{0}^{1}\phi(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{1} sgn(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

onde

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Então, $v'(x) = sgn(x) \in L^\infty(\Omega)$ e v pertence a $W^{1,\infty}(-1, 1)$ e portanto a $W^{1,p}(-1, 1)$, para todo $1 \leq p \leq +\infty$, onde por v' denotamos a derivada fraca de v.
Á partir de agora, nosso conjunto universo será o $\mathbb{R}^N$ ou um subconjunto deste, buscando particularizar nossos resultados para os espaços de interesse. Vamos definir o conceito de convolução no espaço $W^{1,p}$.

Definição 2.2.7. *Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < +\infty$ e $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. A convolução $u * \rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é definida por:*

$$u * \rho(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\,\rho(x - y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(x - y)\,\rho(y)\,dy. \tag{2.2.1}$$

Lema 2.2.1. *(Diferenciação nos Espaços de Sobolev) Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $M \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função. Defina $v = M \cdot u$. Então, $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, para cada $i = 1, \ldots, N$, vale:*

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = M\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial M}{\partial x_i}u. \tag{2.2.2}$$

Demonstração. *Ver [5], p. 159.* □

Teorema 2.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Para qualquer inteiro não negativo k e qualquer número real p com $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. *Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Para qualquer multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ com $|\alpha| \leq m$ temos*

$$||D^\alpha v_n - D^\alpha v_m||_{L^p(\Omega)} \leq ||v_n - v_m||_{W^{k,p}(\Omega)} \to +\infty,$$

se $m, n \to +\infty$. Logo, a sequência $(D^\alpha v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^p(\Omega)$, o qual é um espaço de Banach [ver [4]]. Como $L^p(\Omega)$ é completo, para cada α, com $|\alpha| \leq k$, existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha u_n \longrightarrow v_\alpha \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Em particular, para $\alpha = 0$, existe $u := v_0 \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Resta provar que $v_\alpha = D^\alpha u$ no sentido das distribuições. Seja α um multi-índice com $|\alpha| \leq k$ e seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $u_n \in W^{k,p}(\Omega)$, temos por definição:

$$\int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx.$$

Passando ao limite, temos, pela desigualdade de Hölder (2.1.2), com expoentes conjugados p e q:

$$\left| \int_\Omega (D^\alpha u_n - v_\alpha)\varphi \, dx \right| \leq \int_\Omega |(D^\alpha u_n - v_\alpha)||\varphi| \, dx = \|(D^\alpha u_n - v_\alpha)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \to 0.$$

Analogamente:

$$\left| \int_\Omega (u_n - u) D^\alpha \varphi \, dx \right| \leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^q(\Omega)} \to 0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx.$$

Logo, pela definição

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{para todo } |\alpha| \leq k,$$

e, portanto,

$$u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Além disso, como $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ em $L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$, segue que

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0.$$

Assim, toda sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$ converge em $W^{k,p}(\Omega)$, e, consequentemente, $W^{k,p}(\Omega)$ é completo. □

Teorema 2.2.2. *Para todo $1 \leq p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^\mathcal{N})$ é um subespaço denso de $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. *Faremos a demonstração para $m = 1$, isto é, provemos que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^\mathcal{N})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N), 1 \leq p < +\infty$. Podemos realizar um processo de dois passos por aproximação, a saber:*
(a) Truncamento do domínio ($\mathbb{R}^N$): Denotando a bola aberta de centro em x_0 e raio r por $B_{x_0}(R)$, defina a função $M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq M \leq 1$ e

$$M(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_0(\frac{1}{2}) \\ 0, & x \notin B_0(1) \end{cases}.$$

Então $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\mathcal{N})$. Tal função existe pelo Lema de Tietze 2.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, definamos também $M_n(\xi) = M(\frac{\xi}{n})$. Então, $M_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\mathcal{N})$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Além disso:

$$\lim_{n \to +\infty} M_n(\xi) = \lim_{n \to +\infty} M\left(\frac{\xi}{n}\right) = M(0) = 1.$$

Agora, para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, definamos
$v_n(x) = M_n(x)v(x)$. Note que v_n tem suporte compacto, pois

$$supp v_n \subset supp M_n \subset n supp M.$$

Verifiquemos que $v_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. *De fato*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |M_n \cdot v|^p dx \leq ||M||_\infty^p \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx < +\infty.$$

Aplicando a diferenciação em Espaços de Sobolev (2.2.2), *teremos*

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} = M_n \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial M_n}{\partial x_i} v.$$

Como $M_n, \frac{\partial M_n}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$, *temos* $\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
Mostremos que a sequência (v_n) *converge em norma para* v *em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. *Temos:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |1 - M_n|^p |v|^p dx.$$

Note que

1. $|1 - M_n|^p |v|^p \to 0$ *pontualmente;*
2. $|1 - M_n|^p |v|^p \leq (1 + ||M||_\infty)^p |v|^p, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 2.1.5, concluímos que $v_n \to v$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$. *Analogamente,*

$$M_n \frac{\partial v}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} em\ L^p(\mathbb{R}^N).$$

Para mostrar $\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i}$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$, *é suficiente mostrar que*

$$\frac{\partial M_n v}{\partial x_i} \to 0.$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial M_n(x) v(x)}{\partial x_i} \right| &= \frac{1}{n} \left| \frac{\partial M(x) v(x)}{\partial x_i} \left(\frac{x}{n} \right) \right| |v(x)| \\ &\leq \frac{1}{n} \left\| \frac{\partial M}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |v(x)|, \end{aligned}$$

e portanto, integrando em $L^p(\mathbb{R}^N)$, *temos:*

$$\left\| \frac{\partial M_n v}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{n} \left\| \frac{\partial M}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

(b) Regularização. O segundo passo consiste em provar que qualquer $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *com suporte compacto pode ser aproximado em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *por uma sequência* (u_n) *de elementos de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$. *Para este fim, usamos a regularização pelo método da convolução. Introduzimos* $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$, $\rho \geq 0$ *com* $supp(\rho) \subset B_0(1)$ *e* $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$ *e defina para cada* $n \in \mathbb{N}^*$

$$\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$$

satisfazendo

1. $\rho_n \in D(\mathbb{R}^N), \rho_n \geq 0$;
2. $supp(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$;

3. $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = 1$.

Para este passo, convém voltar à definição 2.2.7. Dado $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *definamos para todo* $n \in \mathbb{N}, u_n := u * \rho_n$. *Vamos verificar que para cada* $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$. *Para isso, vamos provar duas coisas:*

- u_n *tem suporte compacto;*
- $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente, considere $R > 0$ *tal que* $u(x) = 0$ *para* $|x| > R$. *Por construção, para cada* $n \in \mathbb{N}^*$, *temos* $\rho_n(x) = 0$ *para* $|x| > \frac{1}{n}$.

Verifiquemos que

$$u_n(x) = (u * \rho_n)(x) = 0, \quad \forall |x| > R + \frac{1}{n}.$$

De fato, pela definição da convolução (2.2.7),

$$(u * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\rho_n(y)\, dy.$$

Analisemos o integrando. Se $|y| > \frac{1}{n}$, *então* $\rho_n(y) = 0$ *e o integrando se anula. Se* $|y| \leq \frac{1}{n}$, *então, para* $|x| > R + \frac{1}{n}$, *temos*

$$|x-y| \geq |x| - |y| > R + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = R,$$

e portanto $u(x-y) = 0$. *Em ambos os casos, o integrando é identicamente nulo, o que implica* $u_n(x) = 0$ *para* $|x| > R + \frac{1}{n}$. *Agora, para mostrar* $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, *precisamos usar* (2.2.7) *onde a variável* x, *com a qual queremos derivar, aparece em* ρ_n.
Note que para cada $i = 1, \cdots, N$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)$ *existe e*

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} * \rho_n\right)(x).$$

Para evitar confusão de notação, preferimos escrever $\frac{\partial u_n}{\partial e_i}(x)$, *onde* e_i *é o* i*-ésimo vetor da base canônica do* $\mathbb{R}^N$. *Para qualquer* $t \neq 0$, *consideremos o quociente*

$$\frac{1}{t}[u_n(x + te_i) - u_n(x)] = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\frac{\rho_n(x-y+te_i) - \rho_n(x-y)}{t} dy$$

Claramente

$$u(y)\frac{\rho_n(x-y+te_i) - \rho_n(x-y)}{t} \to u(y)\frac{\partial \rho_n}{\partial e_i}(x-y) \quad \textit{quando} \quad t \to 0$$

e

$$\left| u(y)\frac{\rho_n(x-y+te_i) - \rho_n(x-y)}{t} \right| \leq |u(y)| \left| \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \partial \rho_n \partial e_i(z) \right| \leq M|u(y)|$$

o qual pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$. *Usando o Teorema da Convergência Dominada 2.1.5, obtemos*

$$\frac{\partial u_n}{\partial e_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial e_i}\right)(x-y) dy.$$

Perceba que para x fixo, a função $y \mapsto (\frac{\partial \rho_n}{\partial e_i})(x-y)$ pode ser escrita como a derivada parcial de uma função de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$. Tome $\xi_n(y) = -\rho_n(x-y)$. Assim

$$\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial e_i}\right)(y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\xi_n(y+te_i)-\xi_n(y)] = \lim_{t\to 0}\frac{\rho_n(x-y-te_i)-\rho_n(x-y)}{-t} \quad = \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial e_i}\right)(x-y)$$

Logo

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial e_i}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial e_i}\right)(y)dy.$$

Como $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e pela definição da derivada no sentido das distribuições

$$\frac{\partial u_n}{\partial e_i}(x) = -\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial u}{\partial e_i}(y)\xi_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial u}{\partial e_i}(y)\rho_n(x-y)dy$$

isto é,

$$\frac{\partial u_n}{\partial e_i} = \frac{\partial u}{\partial e_i} * \rho_n.$$

Voltando a notação usual $\frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} * \rho_n.$$

Como $u * \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$, logo $u * \rho_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Portanto $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Teorema 2.2.3. *(Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ o qual é limitado em uma direção, isto é, existem $i \in \{1,\dots,N\}$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que:*

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : a \le x_i \le b\}.$$

Então, para todo $1 \le p < +\infty$, existe uma constante $C_{p,N}(\Omega)$ tal que

$$\left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{p,N}(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. *Escrevemos $x = (x', x_N)$ com $x' := (x_1, \cdots, x_{N-1})$. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$, pelo Teorema 2.2.2, consideremos primeiramente $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Estenderemos o resultado por argumentos de continuidade e densidade. Definamos*

$$\bar{v} := \begin{cases} v, & em \quad \Omega \\ 0, & \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^N$ com $a \le x_i \le b, x' \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$\bar{v}(x) = \bar{v}(x', x_N) = \bar{v}(x', a) + \int_a^{x_N}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N}(x', t)dt.$$

Como $\bar{v}(x', a) = 0$

$$\bar{v}(x', x_N) = \int_a^{x_N}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N}(x', t)dt.$$

Seja agora $q \in \mathbb{R}_*^+$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos*

$$|\bar{v}(x', x_N)|^p \leq (x_N - a)^{\frac{p}{q}} \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N}(x', t) \right|^p dt$$
$$\leq (x_N - a)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N}(x', t) \right|^p dt.$$

Primeiro, integramos com respeito a $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, *obtendo*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\bar{v}(x', x_N)|^p dx' \leq (x_N - a)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N}(x) \right|^p dx.$$

Agora, integramos com respeito a $x_N, (a \leq x_N \leq b)$ *para obter*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{v}(x)^p| dx \leq \left(\frac{(b-a)^{1+\frac{p}{q}}}{1 + \frac{p}{q}} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N}(x) \right|^p dx.$$

Como $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N} = \nabla v \cdot n$, *onde* n *é a normal unitária em relação a faixa contendo* Ω, *teremos*

$$\left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_N} \right|^p = \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} n_i \right|^p \leq \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right|^p \right) \left(\sum_{i=1}^N n_i^q \right)^{\frac{p}{q}} \leq N^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right|^p.$$

Notando que $1 + \frac{p}{q} = p$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{v}(x)|^p dx \leq \frac{(b-a)^p}{p} N^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right|^p dx.$$

Haja vista que $\bar{v}$ *e todas as suas derivadas parciais são zero fora de* Ω *e são* v *e* $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}$, *respectivamente, em* Ω, *obtemos*

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,N}(\Omega) \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall v \in D(\Omega)$$

Com $C_{p,N}(\Omega) = (b-a) \frac{N^{\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{p}}}$.
Como $D(\Omega)$ *é denso em* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *essa desigualdade pode ser diretamente estendida para* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

2.2.3 Imersões de Sobolev

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.2.8. *Sejam* A *e* B *espaços de Banach tais que* $A \subset B$. *Dizemos que a imersão de* A *em* B *é contínua, se o operador identidade* $i : A \to B$ *é contínuo, isto é,*

$$\exists C > 0 : \|i(u)\|_B \leq C \|u\|_A, \forall u \in A.$$

Se a imersão $i : A \to B$ *é* ***contínua****, escrevemos* $A \hookrightarrow B$. *Dizemos que a imersão é* ***compacta*** *se o operador identidade i leva cada sequência limitada* (x_n) *em* A *a uma sequência que possui uma subsequência* (x_{n_k}) *convergente em* B. *Nesse caso, escrevemos* $A \hookrightarrow\hookrightarrow B$.

Teorema 2.2.4. *Seja Ω um subconjunto aberto, limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

i) $1 \leq p < N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, *com* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$;

ii) $p = N \Rightarrow W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall 1 \leq q < +\infty$;

iii) $p > N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$.

Para provar o item (i) deste teorema, vamos usar o seguinte lema, devido a Gagliardo.

Lema 2.2.2. *Seja $N \geq 2$ e $g_1, \ldots, g_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Para cada $i = 1, \ldots, N$, defina:*

$$\bar{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N).$$

Então, a função g tal que $g(x) := g_1(\bar{x}_1) \cdots g_N(\bar{x}_N)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$ e vale:

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Demonstração. *A desigualdade é óbvia quando $N = 2$. Então, vamos argumentar por indução, supondo que o resultado foi provado até N e mostremos que ele vale para $N+1$. Consideremos $N+1$ funções $g_1, ..., g_{N+1}$ pertencentes a $L^N(\mathbb{R}^N)$ e considere a função g definida para qualquer $x' := (x_1, \cdots, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ por*

$$g(x) := g_1(\bar{x}_1) \cdots g_{N+1}(\bar{x}_{N+1}) = [g_1(\bar{x}_1) \cdots g_N(\bar{x}_N)] g_{N+1}(\bar{x}_{N+1}).$$

Fixemos x_{N+1} e apliquemos a desigualdade de Hölder (2.1.2) obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)| dx_1 \cdots dx_N \leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g_1(\bar{x}_1) \cdots g_N(\bar{x}_N)|^{N'} dx_1 \cdots dx_N \right)^{\frac{1}{N'}} \quad (2.2.3)$$

com $N' := \frac{N}{N-1}$. Note que as funções $|g_1(\bar{x}_1)|^{N'}, \cdots, |g_N(\bar{x}_N)|^{N'}$ pertencem a $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Pela hipótese de indução,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_1(\bar{x}_1) \cdots g_N(\bar{x}_N)|^{N'} dx_1 \cdots dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|g_i(., x_{N+1})\|^{N'}_{L^N(R^{N-1})}. \quad (2.2.4)$$

Combinando (2.2.3) e (2.2.4), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)| dx_1 \cdots dx_N \leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|g_i(., x_{N+1})\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}. \quad (2.2.5)$$

Vamos fazer x_{N+1} variar e integrar (2.2.5) sobre $\mathbb{R}$. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} |g(x)| dx_1 \cdots dx_{N+1} \leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \|g_i(., x_{N+1})\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} dx_{N+1}.$$

Repare que, para todo $i = 1, \cdots, N$ a função $\|g_i(., x_{N+1})\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ pertence a $L^N(\mathbb{R})$. Aplicando novamente a desigualdade de Hölder (2.1.2) com $\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = 1$ (N vezes) temos

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} |g(x)| dx_1 \cdots dx_{N+1} \leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|g_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja,

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|g_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)},$$

o que completa a indução e a prova. □

Teorema 2.2.5. *(Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Seja $1 \leq p < N$. Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

com $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Mais precisamente, existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Antes de provar o teorema de SGN, vale a pena salientar que, por meio de um argumento elementar de homogeneidade, obtém-se o valor preciso de $p^* := \frac{pN}{N-p}$.

Demonstração. *(a) Vamos usar um argumento de densidade e mostrar que é equivalente provar que a desigualdade*

$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

vale para todo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ e para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Dado $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, usando o teorema 2.2.2, podemos encontrar uma sequência (v_n) de elementos $v_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ tal que

$$v_n \to v \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ e } v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Escrevamos

$$\|v_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Pelo Lema de Fatou (2.1.5)*, temos*

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \lim_{n\to+\infty} \|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

(b) Verifiquemos primeiramente que é suficiente mostrar quando $p = 1$. Para isso, suponha que vale para $p = 1$, ou seja

$$\forall v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N), ||v||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1(N)||\nabla v||_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.2.6}$$

e mostremos que é verdadeiro para $1 \leq p < N$. Primeiramente, note que se $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$, então $|v|^{\frac{p^*}{1^*}}$ pertence a $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. De fato, como $p > 1$, temos $p^* > 1^*$ e a função $|v|^{\frac{p^*}{1^*}}$ é infinitamente diferenciável com suporte compacto. Logo, $|v|^{\frac{p^*}{1^*}} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\nabla(|v|^{\frac{p^*}{1^*}}) = \frac{p^*}{1*} sign(v)|v|^{\frac{p^*}{1^*}-1}\nabla v. \tag{2.2.7}$$

Trocando v por $|v|^{\frac{p^*}{1^*}}$ em (2.2.6) *e aplicando em* (2.2.7)*, teremos:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_1(N)\frac{p^*}{1^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{p^*}{1^*}-1}|\nabla v| dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder (2.1.2)*, obtemos:*

$$\left(\int |v|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_1(N)\frac{p^*}{1^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\left(\frac{p^*}{1^*}-1\right)q} dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ou seja,

$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1(N)\frac{p^*}{1^*}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

como queríamos. Note que, neste caso

$$C(p,N) = C_1(N)\frac{p^*}{1^*}.$$

(c) Agora, basta provar que para todo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$,

$$\|v\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1(N)\|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Com efeito, para todo $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, *temos*

$$|v(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_N)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_N)\right| dt. \tag{2.2.8}$$

Simetricamente

$$|v(x)| \leq \int_{x_i}^{+\infty} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_N)\right| dt. \tag{2.2.9}$$

Somando as desigualdades (2.2.8) *e* (2.2.9), *obtemos*

$$|v(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_N)dt\right|.$$

Adotemos a seguinte notação. Para todo $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $i = 1, \cdots, N$

$$\bar{x}_i := (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N),$$

$$f_i(\bar{x}_i) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_N)\right| dt.$$

Assim, podemos reescrever a expressão acima como $|v(x)| \leq \frac{1}{2}f_i(\bar{x}_i), \forall i = 1, \cdots, N$, *o que implica,*

$$|v(x)|^N \leq \frac{1}{2^N}\prod_{i=1}^{N} f_i(\bar{x}_i).$$

Notando que $1^* = \frac{N}{N-1}$, *temos*

$$|v(x)|^{1^*} \leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}}\prod_{i=1}^{N} f_i(\bar{x}_i)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Repare que, para cada $i = 1, \cdots, N$ *a função* $g_i(\bar{x}_i) := f_i(\bar{x}_i)^{\frac{1}{N-1}}$ *pertence a* $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ *e*

$$\|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.$$

Aplicando o lema 2.2.2, vem:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{1^*} dx \leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}}\left\|\prod_{i=1}^{N} g_i(\bar{x}_i)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}}\prod_{i=1}^{N}||g_i||_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}}\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.\end{aligned}$$

Desta forma, segue-se que

$$||v||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.$$

Pela desigualdade convexa $(\prod_{i=1}^{N} a_i)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$ *finalmente, obtemos*

$$||v||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2N}\left\|\nabla v\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

o que finaliza a demonstração. □

Agora, vamos provar um caso particular do item (iii) do teorema 2.2.4.

Teorema 2.2.6. *(Morrey) Suponha que $p > N$. Então existe uma imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ com $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Mais precisamente, existe uma constante $C(p,N)$ tal que para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,*

$$|v(y) - v(x)| \leq C(p,N)||\nabla v||_{L^p(\mathbb{R}^N)}|y-x|^{\alpha} \ \ q.t.p.\ \ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. *Consideremos $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$. Seja Q um cubo contendo a origem e cujas arestas sejam paralelas aos eixos coordenados em $\mathbb{R}^N$ e tem um comprimento em comum igual a $r > 0$. Para cada $x \in Q$, temos*

$$v(x) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} v(tx)dt.$$

Á partir disso, temos que

$$|v(x) - v(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} |x_i|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| dt \leq r\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| dt. \tag{2.2.10}$$

Defina $\bar{v} := \frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)dx$ denotando o valor médio de v em Q. Integrando (2.2.10) *em Q, obtemos*

$$|\bar{v} - v(0)| \leq \frac{r}{|Q|}\int_Q dx \sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| dt.$$

Usando o teorema de Fubini, obtemos:

$$|\bar{v} - v(0)| \leq \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_Q \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| dx.$$

Fazendo uma mudança de variável $y = tx$, obtemos

$$|\bar{v} - v(0)| \leq \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_{tQ} \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right| \frac{dy}{t^N}. \tag{2.2.11}$$

Agora, usamos a desigualdade de Hölder (2.1.2) *e majoramos essa última integral como segue:*

$$\int_{tQ}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right| dy \leq |tQ|^{\frac{1}{q}}\left(\int_{tQ}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.12}$$

Como $0 \in Q$, *temos* $tQ \subset Q, \forall 0 \leq t \leq 1$. *Por* (2.2.11) *e* (2.2.12), *segue-se que*

$$|\bar{v} - v(0)| \leq \frac{r^{\frac{N}{q}}}{r^{N-1}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{q}}}{t^N} dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_Q \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} ||\nabla v||_{L^p(Q)}.$$

Por translação, essa desigualdade permanece verdadeira para qualquer cubo Q *cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados e tem comprimento comum e igual a* r. *Logo, para todo* $x \in Q$,

$$|\bar{v} - v(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} ||\nabla v||_{L^p(Q)}.$$

Usando a desigualdade triangular, temos

$$|v(y) - v(x)| \leq |v(y) - \bar{v})| + |\bar{v} - v(x)|$$

e desta forma

$$|v(y) - v(x)| \leq \frac{2r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} ||\nabla v||_{L^p(Q)}, \forall x, y \in Q.$$

Note que para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, *existe um cubo aberto* Q, *como construído acima, com* $r = 2|y - x|$. *Segue que para todo* $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$|v(y) - v(x)| \leq C(p, N) ||\nabla v||_{L^p(Q)} |y - x|^{1-\frac{N}{p}},$$

onde $C(p, N)$ *depende apenas de* p *e* N. *Aqui, obtemos* $C(p, N) = \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}$. *Para finalizar a prova, usamos o teorema 2.2.2, juntamente com argumento de passagem ao limite.* □

Na sequência, vamos estudar as imersões compactas.

Teorema 2.2.7. *(Teorema de Rellich-Kondrachov) Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *com fronteira suave e* $1 \leq p < N$. *Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \tag{2.2.13}$$

para todo $1 \leq q < p^*$.

Vamos terminar essa seção enunciando o Teorema de imersão com compacidade.

Teorema 2.2.8. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *suave. Então, temos as seguintes imersões compactas:*
(i) Se $p < N, W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall 1 < q < p^*$ *com* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$;
(ii) Se $p = N, W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall 1 \leq q < +\infty$;
(iii) Se $p > N, W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Demonstração. *Provaremos apenas o item (i). Para isso, consideremos uma sequência* (v_n) *limitada em* $W^{1,p}(\Omega)$. *Pelo Teorema 2.2.4 (i), a sequência* (v_n) *é limitada em* $L^{p^*}(\Omega)$. *Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov 2.2.13, podemos extrair uma subsequência* (v_{n_k}) *tal que* $v_{n_k} \to v$ *em* $L^p(\Omega)$. *Vamos mostrar que, de fato, a convergência de* v_{n_k} *para* v *vale em* L^q, *para todo* $1 \leq q < p^*$. *Considerando* $p \leq q < p^*$ *e aplicando a Desigualdade de Interpolação de Hölder* (2.1.4) *com* $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$ *e* $\alpha > 0$ *(pois* $q < p^*$*), temos:*

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^q(\Omega)} \leq \|v_{n_k} - v\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|v_{n_k} - v\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\alpha}$$

$$\leq C\|v_{n_k} - v\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}$$

pois (v_{n_k}) *é limitada em* $L^{p^*}(\Omega)$. *Pelo Lema de Fatou* (2.1.1), *tem-se que também que* $v \in L^{p^*}(\Omega)$. *Como* $\alpha > 0$ *e* $v_{n_k} \to v$ *em* $L^p(\Omega)$, *segue-se que* $v_{n_k} \to v$ *em* $L^q(\Omega)$ *para todo* $p \leq q < p^*$ *e portanto para todo* $1 \leq q < p^*$ □

Agora, vamos enunciar um Teorema muito importante para o estudo da EDP elíptica.

Teorema 2.2.9. *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) Seja* $1 \leq q, r \leq +\infty$, j *e* m *inteiros não negativos tais que* $j < m, , p \geq 1$ *e* $\theta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q}, \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Se $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *e suas derivadas* $D^m u \in L^r(\mathbb{R}^N)$, *então para as derivadas* $D^j u$ *valem as seguintes desigualdades:*

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|D^m u\|^{\theta}_{L^r(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.2.14}$$

com dois casos particulares:

- *Se* $j = 0, q = +\infty$ *e* $rm < n$, *então acrescenta-se uma hipótese adicional: ou* u *tende a* 0 *no infinito, ou* $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$, *para algum valor finito de* s;
- *Se* $r < 1 < +\infty$ *e* $m - j - \frac{n}{r}$ *é um inteiro não negativo, então* (2.2.14) *vale se* $\frac{j}{m} \leq \theta < 1$.

Demonstração. *Ver [14], p. 125.* □

Na sequência, enunciaremos um lema muito importante para o capítulo seguinte, devido a Lions.

Lema 2.2.3. *[Lemma* 1.1 *de [12]] Seja* $1 < r \leq +\infty, 1 \leq q < +\infty$ *com* $q \neq \frac{Nr}{N-r}$ *se* $r < N$. *Suponha que* ψ_n *seja limitada em* $L^q(\mathbb{R}^N)$, $\nabla\psi_n$ *seja limitada em* $L^r(\mathbb{R}^N)$ *e que, para algum* $R > 0$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_y(R)} |\psi_n|^q \, dx \to 0.$$

Então $\psi_n \to 0$ *em* $L^{\alpha}(\mathbb{R}^N), \forall\alpha \in (q, \frac{Nr}{N-r})$.

Demonstração. *Ver [12], p. 231.* □

Vamos agora, enunciar o Princípio do Máximo Forte, o qual será importante para a prova do teorema principal.

Teorema 2.2.10 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Suponha que* $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, *com* U *conexo, aberto e limitado. Defina*

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n}\left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Suponha ainda que $c \equiv 0$ *em* U.

(i) Se $Lu \leq 0$ *em* U *e* u *atinge seu máximo sobre* $\overline{U}$ *em um ponto interior a* $\overline{U}$, *então* u *é constante em* U.

(ii) Analogamente, se $Lu \geq 0$ *em* U *e* u *atinge seu mínimo sobre* $\overline{U}$ *em um ponto interior a* $\overline{U}$, *então* u *é constante em* U.

Demonstração. *Ver [7], p. 349.* □

Capítulo

3

Resultados Principais

Neste capítulo, estudaremos os principais resultados, baseados no artigo [16]. Nesta parte, estudaremos com detalhes a existência de solução da equação de Schrödinger não-linear. Para isso, consideremos a Equação Diferencial Parcial Parabólica:

$$i\phi_t - \Delta\phi + W(x)\phi - \frac{1}{2}\phi\Delta(|\phi|^2) = |\phi|^{p-1}\phi, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Tal equação modela diversos fenômenos como por exemplo o de ondas estacionárias, plasma e filmes superfluidos. Seja agora a função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Usando a mudança de variável $\phi = e^{-i\omega t}u(x)$, transformamo-na em uma EDP elíptica. Temos:

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u\Delta(u^2) = |u|^{p-1}u;\ x \in \mathbb{R}^N, N \geq 3, \tag{3.0.1}$$

onde $V(x) := W(x) + \omega$ é uma função potencial com algumas condições pré-estabelecidas. Além disso, esta equação se encontra na forma divergente. O espaço adequado para buscar por soluções para a equação (3.0.1) é definido por

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Para determinar as soluções de (3.0.1), devemos associá-las aos pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange (ou funcional Energia). Vamos determinar a forma fraca da equação (3.0.1). Suponha que u seja uma função suave, solução clássica de (3.0.1). Então, multiplicando (3.0.1) por uma função teste $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e integrando, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(-\Delta u\psi + V(x)u\psi - \frac{1}{2}u\Delta(u^2)\psi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\,\psi\,dx.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} div(\psi\nabla u)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\psi\nabla u + \psi\Delta u)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\psi\nabla u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi\Delta u\,dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da divergência, $\int_{\mathbb{R}^N} div(\psi\nabla u)\,dx = \int_{\partial(supp\psi)} \psi\nabla u\nu\,dS = 0$, pois $\psi = 0$ em $\partial(supp\psi)$. Logo:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\psi\nabla u\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi\Delta u\,dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\psi\Delta u\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\psi\nabla u\,dx. \tag{3.0.2}$$

Analogamente, mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta(u^2)\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u^2|\psi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2\nabla u\nabla\psi\,dx.$$

Com efeito, integrando $div(u\nabla(u^2))\psi$, obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} div(u\nabla(u^2))\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla(u^2)\psi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} u\Delta(u^2)\psi\,dx.$$

Pela integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta u^2\psi\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} div(u\nabla(u^2))\psi\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla(u^2)\psi\,dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^N} u^2\nabla u\nabla\psi\,dx - 2\int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2\psi\,dx.\end{aligned}$$

Desta forma

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta u^2\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2\psi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2\nabla u\nabla\psi\,dx. \tag{3.0.3}$$

Juntando as equações (3.0.2) e (3.0.3), temos a forma fraca da equação (3.0.1), dada por:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left((1+u^2)\nabla u\nabla\psi + V(x)u\psi + u|\nabla u^2|\psi - |u|^{p-1}u\psi\right)\,dx = 0, \forall\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.0.4}$$

Assim, as soluções de (3.0.1) são associadas aos pontos críticos do funcional $I : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx.$$

Por ponto crítico de I, queremos dizer um elemento u de X, para o qual $\langle I'(u), \phi\rangle = 0$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde definimos

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left((1+u^2)\nabla u\nabla\psi + V(x)u\psi + u|\nabla u^2|\psi - |u|^{p-1}u\psi\right)\,dx.$$

Neste trabalho o foco principal é a prova do teorema a seguir:

Teorema 3.0.1. *Suponha que* $p \in (1, \frac{3N+2}{N-2})$ *e* $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz*

(V_1) $0 < V_0 \leq V(x) \leq \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty < +\infty$, *q.t.p.* $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) *A função* $x \mapsto x \cdot \nabla V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(V_3) *A função* $s \mapsto s^{\frac{N+2}{N+p+1}} V(s^{\frac{1}{N+p+1}}x)$ *é côncava para todo* $x \in \mathbb{R}^N$.

Então, existe $u \in X$ *uma solução positiva de* (3.0.1). *Mais ainda,* u *é uma solução do tipo ground state (ou de estado fundamental), isto é, a energia* $I(u)$ *é mínima com respeito ao conjunto das demais soluções não-triviais de* (3.0.1).

Note que X não é um espaço vetorial, pois não é fechado pela soma. Com efeito, considere $u, v \in X$. Devemos verificar se $u+v \in X$. Como

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v,$$

temos

$$(u+v)^2|\nabla(u+v)|^2 = (u+v)^2|\nabla u + \nabla v|^2.$$

Expandindo, temos

$$(u+v)^2|\nabla(u+v)|^2 = (u+v)^2\left(|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla v + |\nabla v|^2\right).$$

Assim, surgem termos cruzados, como

$$u^2|\nabla v|^2 \qquad \text{e} \qquad v^2|\nabla u|^2,$$

os quais não podem ser controlados diretamente, pelas condições

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla v|^2\,dx < +\infty.$$

Vamos construir um contraexemplo em $\mathbb{R}^3$. Considere $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\chi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e defina

$$u(x) = \chi(x)|x|^{-1/5}, \qquad v(x) = \chi(x)\sin(|x|^{-2/5}).$$

Temos

$$u, v \in H^1(\mathbb{R}^3)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^2|\nabla u|^2\,dx < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} v^2|\nabla v|^2\,dx < +\infty.$$

Assim, $u, v \in X$.

$$u, v \in X.$$

Por outro lado, próximo de $x = 0$, usando a notação da definição 2.1.3, temos

$$u^2 = O(|x|^{-2/5})$$

e

$$|\nabla v|^2 = O(|x|^{-14/5}),$$

de modo que

$$u^2|\nabla v|^2 = O(|x|^{-16/5}).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^2|\nabla v|^2\,dx = O\left(\int_0^1 r^2 r^{-16/5}\,dr\right) = O\left(\int_0^1 r^{-6/5}\,dr\right) = +\infty.$$

Logo, $u^2|\nabla v|^2$ não é integrável e, portanto, $u+v \notin X$. Note, no entanto que X se torna um espaço métrico completo munido da seguinte métrica:

$$d_X(u,v) := ||u-v||_{H^1(\mathbb{R}^N)} + ||\nabla(u^2) - \nabla(v^2)||_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \forall u, v \in X.$$

Lema 3.0.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}}\,dx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{2N}{2N-4}}, \forall u \in X.$$

Demonstração. *Sendo $u \in X$, usamos o Teorema 2.2.9 com $j = 0$, $p = 2^*$, $m = 1$,$r = 2$ e $q = 1$. Como $u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla(u^2) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, temos:*

$$\|u^2\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla(u^2)\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|u^2\|^{1-\theta}_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.0.5}$$

onde

$$\frac{1}{2^*} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + (1-\theta). \tag{3.0.6}$$

Note que a igualdade (3.0.6) *é satisfeita se, e somente se, $\theta = 1$. Desta forma,* (3.0.5) *torna-se:*

$$||u^2||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\nabla(u^2)||_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

o que implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}}\,dx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{2N}{2N-4}}. \qquad \square$$

Além disso, note que u é solução fraca de (3.0.1) se

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\psi\nabla u + u^2\nabla\psi\nabla u + V(x)u\psi + u|\nabla u|^2\psi - |u|^{p-1}u\psi\right)dx = 0, \forall\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Para obtermos pontos críticos do funcional I, usaremos o chamado método de fibração. Para isso, dado $u \in X$, denotemos por u_t a função

$$\mathbb{R}^+ \in t \mapsto u_t(x) = tu\left(\frac{x}{t}\right).$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\nabla u_t(x) &= \nabla\left(tu\left(\frac{x}{t}\right)\right) \\
&= t\nabla_x\left(u\left(\frac{x}{t}\right)\right) \\
&= t\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t} \\
&= \nabla u\left(\frac{x}{t}\right).
\end{aligned} \tag{3.0.7}$$

Assim, aplicando I à função u_t e usando (3.0.7), temos

$$\begin{aligned}
I(u_t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_t^2|\nabla u_t|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u_t|^{p+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)t^2u\left(\frac{x}{t}\right)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} t^2u\left(\frac{x}{t}\right)^2\left|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} t^{p+1}\left|u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^{p+1} dx
\end{aligned}$$

Usando a mudança de variável $y = \frac{x}{t}, x = yt$, $dx = t^N\,dy$, temos

$$\begin{aligned}
I(u_t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(y)|^2t^N\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)t^2u(y)^2t^N\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} t^2u(y)^2|\nabla u(y)|^2t^N\,dy \\
&\quad - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} t^{p+1}|u(y)|^{p+1}t^N\,dy,
\end{aligned}$$

o que implica

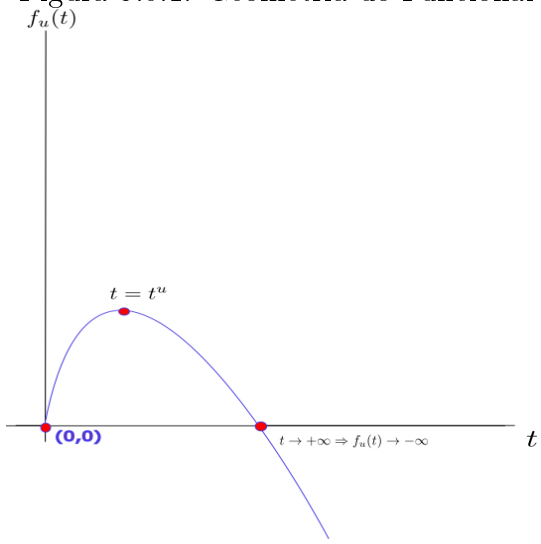
$$I(u_t) = \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx.$$

Agora defina

$$f_u(t) := I(u_t) = \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx$$

e note que que $f_u(\cdot)$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^+)$. Podemos interpretar o funcional f_u da seguinte maneira:

Figura 3.0.1: Geometria do Funcional



Observando a fig. 3.0.1 e a expressão de $f_u(t)$, grosso modo vemos que perto da origem o termo dominante é t^N e, a partir daí, o termo de maior expoente domina, fazendo com que o funcional tenda a $-\infty$ quando $t \to +\infty$. Como $p > 1$, temos $p + 1 > 2$, logo

$$f_u(t) > 0, \forall t \text{ suficientemente pequeno.}$$

Além disso,

$$\lim_{t\to+\infty} f_u(t) = -\infty.$$

Isso implica que f_u atinge seu máximo (veja 3.0.1).
Agora definamos

$$M := \{u \in X \setminus \{0\} : J(u) = 0\}$$

onde $J : X \to \mathbb{R}$ tal que $J(u) := f_u'(1)$. Desta forma, temos a variedade:

$$M := \left\{ u \in X \setminus \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{r} \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)u^2 + |\nabla u|^2 u^2)\,dx \\ + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V(x)\cdot x)\,u^2\,dx - \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx = 0 \end{array} \right\}.$$

Observe que, pela definição, M é o conjunto das $u \in X$ para os quais a seguinte versão da Identidade de Pohozaev vale para $a = -1$,

$$\left(\frac{2-N}{2} + a\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \left(a - \frac{N}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x)\cdot x u^2\,dx$$
$$+ \left(2a + \frac{2-N}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 u^2\,dx + \left(\frac{N}{p+1} - a\right)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx = 0.$$

Assim, todas as soluções v não-triviais pertencem a M e satisfazem a Identidade de Pohozaev.
Se $s,t \in \mathbb{R}^+$, considere $(u_t)_s = u_{ts}$ e note que pela definição

$$f_{u_t}(s) = I((u_t)_s) = I(u_{ts}) = f_u(ts), \forall s,t > 0.$$

Aplicando a derivada em $s = 1$ e usando a Regra da Cadeia:

$$f'_{u_t}(1) = tf'_u(t), \forall t > 0. \tag{3.0.8}$$

Agora, vamos enunciar dois resultados importantes.

Teorema 3.0.2. *Defina $m := \inf_M I$. Então $m > 0$ e é atingido para algum $u \in M$.*

Teorema 3.0.3. *O minimizante dado no teorema anterior é uma solução do tipo ground state, ou seja, uma solução de energia mínima. Mais ainda, u é uma solução que não troca de sinal.*

Por uma solução de energia mínima entendemos uma solução $u \in X, u \neq 0$, tal que $I(u) \leq I(v), \forall v \in X, v \neq 0$, com v solução de (3.0.1).
Antes de demonstrar esses teoremas, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 3.0.1. *Existe $c > 0$ tal que para todo $u \in M$*

$$I(u) \geq c \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2 + |\nabla u|^2 + u^2|\nabla u|^2\right) dx.$$

Demonstração. *Considere $u \in M$ e escolha $t \in (0,1)$. Então, calculamos:*

$$\begin{aligned} I(u_t) - t^{N+p+1}I(u) = {} & \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx \\ & - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx - t^{N+p+1}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx\right) \\ = {} & \left(\frac{t^N}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \left(\frac{t^{N+2}}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{t^{N+2}}{2}V(tx) - \frac{t^{N+p+1}}{2}V(x)\right)u^2\,dx\,. \end{aligned}$$

Além disso, existe $\delta > 0$ tal que valem as seguintes desigualdades:

$$V(tx) \geq V_0 \geq \delta V_\infty \geq \delta V(x), \forall t \in (0,1).$$

Sejam $t_1, t_2, t_3 \in (0,1)$ tais que

- $\frac{t_1^N}{2} - \frac{t_1^{N+p+1}}{2} > 0$;
- $\frac{t_2^{N+2}}{2} - \frac{t_2^{N+p+1}}{p+1} > 0$;
- $\frac{\delta t_3^{N+2}}{2} - \frac{t_3^{N+p+1}}{p+1} > 0$.

Escolhendo $\bar{t} := min\{t_1, t_2, t_3\}$, vemos que

- $\gamma_1 := \frac{\bar{t}^N}{2} - \frac{\bar{t}^{N+p+1}}{2} > 0$;
- $\gamma_2 = \frac{\bar{t}^{N+2}}{2} - \frac{\bar{t}^{N+p+1}}{2} > 0$;
- $\gamma_3 = \frac{\delta\bar{t}^{N+2}}{2} - \frac{\bar{t}^{N+p+1}}{p+1} > 0$.

Pelo Lema 3.0.2, $I(u_t) \leq I(u)$. Escolhendo $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, segue que

$$\left(1 - t^{N+p+1}\right) I(u) = I(u) - t^{N+p+1} I(u) \geq \gamma \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2 + u^2|\nabla u|^2\right) dx.$$

Definindo $c := \frac{\gamma}{1-t^{N+p+1}}$ resulta

$$I(u) \geq c \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2 + |\nabla u|^2 + u^2|\nabla u|^2\right) dx. \qquad \square$$

Pelo resultado anterior, vemos que o funcional I, quando restrito a M, é limitado inferiormente e coercivo. Dessa forma, m está bem definido. No próximo resultado, vamos caracterizar o número m de uma forma diferente, usando o chamado método de fibração.

Lema 3.0.2. *Para todo $u \in X \setminus \{0\}$, a função f_u atinge seu máximo em exatamente um ponto t^u. Mais ainda, f_u é positiva e crescente para $t \in [0, t^u]$ e f_u é decrescente para $t \in (t^u, +\infty)$. Finalmente:*

$$m = \inf_{u \in X; u \neq 0} \max_{t>0} I(u_t).$$

Demonstração. *Temos:*

$$f_u(t) = \frac{t^N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{t^{N+2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(tx) u^2 \, dx + \frac{t^{N+2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \, dx - \frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \, dx.$$

Fazendo a mudança de variável $s = s(t) = t^{N+p+1}$, obtemos:

$$f_u(s) = \frac{s^{\frac{N}{N+p+1}}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(s^{\frac{1}{N+p+1}} x) u^2 \, dx + \frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \, dx - \frac{s}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \, dx.$$

Observe que

$$\frac{d}{dt} f_u(s(t)) = \frac{d}{ds} f_u(s) . s'(t).$$

Porém, $s'(t) = (N+p+1)t^{N+p} > 0$, para todo $t > 0$. Dessa forma, é fácil ver que $\frac{d}{dt} f_u(t) = 0$ se, e somente se, $\frac{d}{ds} f_u(s(t)) = 0$. Além disso, as derivadas $\frac{d}{dt} f_u(t)$ e $\frac{d}{ds} f_u(s(t))$ tem o mesmo sinal. Logo, passaremos a estudar o comportamento de $f_u(s)$. Pelas desigualdades $N + p + 1 > N + 2 > N$, as funções

- $s \mapsto \frac{s^{\frac{N}{N+p+1}}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx$;
- $s \mapsto \frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \, dx$;
- $s \mapsto \frac{s}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \, dx$

são côncavas. Resta mostrar que

$$\frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(s^{\frac{1}{N+p+1}}x)u^2\,dx$$

é côncava. Note que o integrando é uma função côncava, pela hipótese (V_3)*. Como a integral é um operador monótono, segue-se que*

$$s \mapsto \frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(s^{\frac{1}{N+p+1}}x)u^2\,dx$$

é côncava. Isso mostra que $f_u(s)$ *é uma função côncava e, como consequência,* $t \mapsto f_u(t)$ *é também côncava. Como* $f_u(0) = 0$ *e* $\lim_{t\to+\infty} f_u(t) = -\infty$*, sabemos que* f_u *admite um único ponto de máximo, o qual denotaremos por* $t^u > 0$*. Então* t^u *é o único ponto crítico de* f_u *e* f_u *é positiva e crescente para todo* $t \in [0, t^u]$ *e decrescente para* $t \in (t^u, +\infty)$*. Em particular, para todo* $u \in X, u \neq 0$*,* t^u *é o único valor tal que* $u_{t^u} \in M$*. Com efeito, devemos mostrar que*

$$f'_{u_{t^u}}(1) = 0, \forall u \in X\backslash\{0\}.$$

Por (3.0.8)*, sabemos que*

$$f'_{u_t}(1) = tf'_u(t), \forall t > 0.$$

Aplicando para $t = t^u$*, temos*

$$f'_{u_{t^u}}(1) = t^u f'_u(t^u).$$

Como t^u *é ponto crítico de* f_u*, então* $f'_u(t^u) = 0$ *e portanto:*

$$f'_{u_{t^u}}(1) = 0,$$

donde $u_{t^u} \in M$*. Finalmente,* $I(u_t)$ *atinge seu máximo global em* $t = t^u$*. Dessa forma, para finalizar a prova, basta observarmos que pelo que foi demonstrado, ou seja, que para cada* $u \in X$*,* $u \neq 0$*, existe um único* $t^u > 0$ *tal que* $u_{t_u} \in M$*, segue que*

$$m = \inf_M I = \inf_{u\in X; u\neq 0} I(u_{t^u}) = \inf_{u\in X; u\neq 0} \max I(u_t). \qquad \square$$

Lema 3.0.3. *Temos que* $m > 0$*, onde* m *é definido no Teorema 3.0.2.*

Demonstração. *Considere o funcional*

$$\bar{I}(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx$$

onde V_0 *é dado na hipótese* (V_1)*. Claramente* $\bar{I}(u_t) \leq I(u_t)$ *o que implica*

$$\max_{t>0} \bar{I}(u_t) \leq \max_{t>0} I(u_t).$$

Agora, considere $u \in X, u \neq 0$*. Aplicando resultados análogos ao Lema 3.0.2 para* $\overline{I}$ *com o respectivo valor minimax* $\overline{m}$*, verifica-se que:*

$$\bar{m} := \inf_{u\in X; u\neq 0} \max_{t>0} \bar{I}(u_t) \leq \inf_{u\in X; u\neq 0} \max_{t>0} I(u_t) = m.$$

Logo, é suficiente mostrar que $\bar{m} > 0$*. Defina*

$$\overline{M} := \{u \in X : g'_u(1) = 0\},$$

onde $g_u(t) := \bar{I}(u_t)$. *Pelo Lema 3.0.2, aplicado a* $V = V_0$, *segue-se que*

$$\bar{m} = inf_{\overline{M}}\bar{I}.$$

Além disso, cálculos análogos a f_u *resultam*

$$g_u(t) = \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_0u^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} g_u'(t) = {} & \frac{N}{2}t^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx + \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N}V_0u^2\,dx + \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx \\ & - \frac{N+p+1}{p+1}t^{N+p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} g_u'(1) = {} & \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_0u^2\,dx + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx \\ & - \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx. \end{aligned}$$

Agora note que, dado $u \in \overline{M}$, *segue que* $g_u'(1) = 0$. *Logo, pelo Lema 3.0.1, valem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned} \frac{N+2}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N}u^2\,dx + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx &\leq \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{N+2}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N}u^2\,dx + C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}\,dx \end{aligned}$$

para algum $C > 0$.
Afirmamos que:

$$\frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2u^2dx \overset{A}{\leq} C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}dx \overset{B}{\leq} C'\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2u^2dx\right)^{\frac{N}{N-2}}. \tag{3.0.9}$$

Com efeito, pelas desigualdades anteriores, temos:

$$\frac{N+2}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N}u^2\,dx + \frac{N+2}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2u^2\,dx \leq \frac{N+2}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N}u^2\,dx + C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}\,dx$$

o que implica na desigualdade (A). Para a desigualdade (B), usando novamente o Lema 3.0.1, temos:

$$\begin{aligned} C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}\,dx &= C\int_{\mathbb{R}^N}|u^2|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx \\ &= C\|u^2\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\bar{C}\|u^2\|^{2^*}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\ &= C\bar{C}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(u^2)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}\frac{2N}{N-2}} \\ &= C\bar{C}4^{\frac{N}{N-2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{N}{N-2}}. \end{aligned}$$

Fazendo $C' = 4^{\frac{N}{N-2}} C\bar{C}$, *obtemos o resultado. Isso mostra que*

$$C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}}\, dx \leq C' \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 u^2 dx \right)^{\frac{N}{N-2}}. \tag{3.0.10}$$

Logo, por (3.0.9) *e* (3.0.10), *temos:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{N}{N-2}-1} \geq \frac{N+2}{2C} =: C_1.$$

Então, existe $C > 0$ *tal que para todo* $u \in \overline{M}$*:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx \geq C.$$

Isso mostra, em particular, que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx$ *é limitado inferiormente por 0 em* $\overline{M}$. *Note que a restrição de* I *em* $\overline{M}$ *é dada por:*

$$\bar{I}(u) = \frac{1}{2}\frac{(p+1)}{(N+p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{V_0}{2}\frac{(p-1)}{(N+p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{(p-1)}{(N+p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx.$$

Com efeito, considere $u \in \overline{M}$. *Note que*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\, dx = {} & \frac{(p+1)}{(N+p+1)} \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{(p+1)}{(N+p+1)} \frac{(N+2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2\, dx \\ & + \frac{(p+1)}{(N+p+1)} \frac{(N+2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx. \end{aligned} \tag{3.0.11}$$

Substituindo (3.0.11) *em* $\bar{I}$, *temos:*

$$\begin{aligned} \bar{I}(u) = {} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{(p+1)} \left(\frac{(p+1)}{(N+p+1)} \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \right. \\ & \left. + \frac{(p+1)}{(N+p+1)} \frac{(N+2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2\, dx + \frac{(p+1)}{(N+p+1)} \frac{(N+2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx \right) \\ = {} & \left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2(N+p+1)} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{(N+2)}{2(N+p+1)} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2\, dx \\ & + \left(\frac{1}{2} - \frac{(N+2)}{2(N+p+1)} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx \\ = {} & \frac{p+1}{2(N+p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{p-1}{2(N+p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2\, dx + \frac{p-1}{2(N+p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx, \end{aligned}$$

para todo $u \in \overline{M}$. *Isso implica que* $\overline{m} > 0$. *Finalmente* $m > 0$, *como queríamos demonstrar.* □

Demonstração. ***(do Teorema*** (3.0.2)***)***
Seja $u_n \in M$ *tal que* $I(u_n) \to m$, *quando* $n \to +\infty$. *Pela Proposição 3.0.1,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\, dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 |\nabla u_n|^2 \, dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, (u_n) *é limitada em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* (u_n^2) *é limitada em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. *Logo, existem* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, *tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n^2 \rightharpoonup v \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Como $u_n \to u$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$, *segue que* $v = u^2$ *e então*

$$u_n^2 \rightharpoonup u^2 \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Dividiremos a prova em quatro etapas.
Etapa 1:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \, dx \nrightarrow 0.$$

Primeiramente, note que

$$||u_n||_{H^1(\mathbb{R}^N)} + ||\nabla (u_n)^2||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0. \tag{3.0.12}$$

De fato, supondo por contradição que $||u_n||_{H^1(\mathbb{R}^N)} + ||\nabla (u_n^2)||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$, *então:*

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^2(\mathbb{R}^N) \tag{3.0.13}$$

e

$$u_n^2 \to 0 \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{3.0.14}$$

Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$, *segue que*

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^{\frac{4N}{N-2}}(\mathbb{R}^N). \tag{3.0.15}$$

De (3.0.13) *e* (3.0.15), *como* $2 < p+1 < \frac{4N}{N-2}$, *(ver [4]), segue-se que*

$$||u_n||_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u_n||^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^N)} ||u_n||^{1-\alpha}_{L^{\frac{4N}{N-2}}} \to 0,$$

para algum $\alpha \in [0,1]$. *Assim,*

$$I(u_n) \leq C(||u_n||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + ||\nabla (u_n^2)||_{L^2(\mathbb{R}^N)}) - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \, dx \to 0$$

quando $n \to +\infty$. *Mas isso contradiz o fato de que* $I(u_n) \to m > 0$. *Logo, vale* (3.0.12). *Pelo Lema 3.0.2, para qualquer* $t > 1$, *temos*

$$\begin{aligned} m + o_n(1) = I(u_n) \geq I((u_n)_t) &= \frac{t^N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx + \frac{t^{N+2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(tx) u_n^2 \, dx + \frac{t^{N+2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 \, dx \\ &\quad - \frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \, dx \\ &\geq \frac{t^N}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + V_0 u_n^2 + u_n^2 |\nabla u_n|^2 \right) dx - \frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \, dx \\ &\geq \frac{t^N \delta}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \, dx \end{aligned}$$

onde δ *é uma constante tal que* $0 < \delta < \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V_0 u_n^2 + u_n^2 |\nabla u_n|^2)\, dx$. *Seja agora* $t > 1$, *tal que* $\frac{t^N \delta}{2} > 2m$ *e assim obtemos*

$$m + o_n(1) = I(u_n) \geq 2m - \frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx,$$

o que implica

$$\frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx \geq 2m - m + o_n(1),$$

o que resulta em

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx \geq \frac{m}{\frac{t^{N+p+1}}{p+1}} + o_n(1),$$

isto é

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx > C, C > 0.$$

Logo, obtemos uma cota inferior para $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx$, *provando assim a primeira etapa. Note que essa sequência é também limitada. Então, a menos de subsequência*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx \to A \in (0, +\infty).$$

Etapa 2: Splitting pelo Princípio de Concentração de Compacidade de Lions.
Para essa etapa, usaremos o lema 2.2.3 para $\psi_n = u_n^2, q = \frac{p+1}{2}, r = 2$. *Pela Etapa 1, vemos que* $\psi_n \nrightarrow 0$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$. *Pela Desigualdade de interpolação 2.1.4,* $\psi_n \nrightarrow 0$ *em* $L^s(\mathbb{R}^N), \forall s \in (1, 2^*)$. *Então pela forma contra-recíproca do lema 2.2.3, existe* $\delta > 0, (x_n) \subset \mathbb{R}^N$ *tal que*

$$\int_{B_{x_n}(1)} |\psi_n|^q\, dx = \int_{B_{x_n}(1)} |u_n^2|^q\, dx = \int_{B_{x_n}(1)} |u_n|^{p+1}\, dx > \delta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, fixe $\epsilon > 0$ *e consideremos* $R > \max\{1, \frac{1}{\epsilon}\}$ *e* $\eta_R(t)$ *uma função suave definida em* $[0, +\infty)$ *tal que*

$$\eta_R(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq R \\ 0, & t \geq 2R \end{cases}$$

e $\eta_R'(t) < \frac{2}{R}$. *Defina*

$$v_n(x) = \eta_R(|x - x_n|) u_n(x)$$

e

$$w_n(x) = (1 - \eta_R(|x - x_n|)) u_n(x).$$

Claramente v_n *e* w_n *pertencem a* X *e* $u_n = v_n + w_n$. *Observe também que, como* $v_n(x) = \eta_R(|x - x_n|) u_n(x)$, *por sua caracterização, temos:*

$$\int_{B_{x_n}(R)} |v_n|^{p+1}\, dx = \int_{B_{x_n}(R)} |u_n|^{p+1}\, dx \geq \int_{B_{x_n}(1)} |u_n|^{p+1}\, dx > \delta,$$

o que implica em

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_{x_n}(R)} |v_n|^{p+1}\, dx \geq \delta. \tag{3.0.16}$$

Etapa 3: Existem constantes $C, \tau > 0$ *e* $n_0(\epsilon)$ *tais que*

$$\|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla(w_n^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\epsilon^\tau, \forall n \geq n_0.$$

Com efeito, defina $z_n = u_n(\cdot + x_n)$. *Por invariancia de translação,* $z_n \in X$. *Além disso, claramente* $z_n \rightharpoonup z$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $z_n^2 \rightharpoonup z^2$ *em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. *Pela integrabilidade de* $|z|^{p+1}$ *em* $\mathbb{R}^N$, *existe* $R > 0$ *suficientemente grande, tal que*

$$\int_{A_0(R,2R)} |z|^{p+1}\,dx < \epsilon, \tag{3.0.17}$$

onde $A_0(R, 2R)$ *representa o anel centrado na origem e raios* R *e* $2R$. *Note que*

$$\eta_R(|x - x_n|) = \begin{cases} 1, & x \in B_{x_n}(R) \\ 0, & x \in B_{x_n}(2R)^c \\ \in [0,1], & x \in A_{x_n}(R, 2R) \end{cases}.$$

Então v_n *é igual a* u_n *dentro da bola de raio* R *e* w_n *é igual a* u_n *fora da bola de raio* $2R$. *Isso implica em:*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1}\right)\,dx\right| &= \left|\int_{B_{x_n}(R)} \left(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1}\right)\,dx\right. \\ &\quad + \int_{A_{x_n}(R,2R)} \left(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1}\right)\,dx \\ &\quad \left. + \int_{B_{x_n}(2R)^c} \left(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1}\right)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{A_{x_n}(R,2R)} \left(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1}\right)dx\right| + o_n(1).\end{aligned}$$

Usando a mudança de variável $y = x - x_n$,(3.0.17) *e as imersões compactas de Sobolev, obtemos:*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1}\right)\,dx\right| &= \left|\int_{A_0(R,2R)} \left(|z_n|^{p+1} - |\eta_R(|y|)z_n|^{p+1} - |(1 - \eta_R(|y|))z_n|^{p+1}\right)\,dy\right| \\ &\to \int_{A_0(R,2R)} \left(|z|^{p+1} - |\eta_R(|y|)z|^{p+1} - |(1 - \eta_R(|y|))z|^{p+1}\right)\,dy \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon \\ &= 3\epsilon.\end{aligned}$$

Denotaremos, por simplicidade, de agora em diante, o anel $A_0(R, 2R)$ *por* A_0. *Como* $|\nabla z_n|^2$ *é uniformemente limitada em* $L^1(\mathbb{R}^N)$, *a menos de subsequência,* $|\nabla z_n|^2$ *converge (em medida) para uma certa medida* μ *tal que* $\mu(\mathbb{R}^N) < +\infty$. *Aumentando* R *caso necessário, podemos supor que* $\mu(A_0) \leq \epsilon$. *Logo, para* n *suficientemente grande, temos:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta_R(|y|)(1 - \eta_R(|y|))\,dy \leq \epsilon. \tag{3.0.18}$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\,dx\right| &= 2\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \cdot \nabla v_n\,dx\right| \\ &= 2\left|\int_{\mathbb{R}^N} (-\nabla\eta_R(|x - x_n|)u_n + (1 - \eta_R(|x - x_n|))\nabla u_n)\right. \\ &\qquad \left.(\nabla\eta_R(|x - x_n|)u_n + \eta_R(|x - x_n|)\nabla u_n)\,dx\right| \\ &= 2\left|\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R(1 - \eta_R)|\nabla u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 - 2\eta_R)\nabla u_n \nabla\eta_R\,dx\right. \\ &\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta_R|^2 |u_n|^2\,dx\right|.\end{aligned}$$

Fazendo novamente a mudança de variável $y = x - x_n$, temos:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2\,dx\right| = 2\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|y|)(1-\eta_R(|y|))|\nabla z_n|^2\,dy + \int_{\mathbb{R}^N}(1-2\eta_R(|y|))\nabla z_n z_n \nabla\eta_R(|y|)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta_R(|y|)|^2|z_n|^2\,dy\Big|. \tag{3.0.19}$$

Estimando o segundo termo de (3.0.19)*, escolhendo R grande, usando a Desigualdade de Hölder Generalizada* (2.1.3)*, temos:*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(1-2\eta_R)(|y|)\nabla z_n z_n\nabla\eta_R(|y|)\,dy\right| &\le \int_{A_0}|1-2\eta_R(|y|)||\nabla z_n||z_n||\nabla\eta_R(|y|)|\,dy\\ &\le \|(1-2\eta_R)\nabla\eta_R\nabla z_n z_n\|_{L^1(A_0)}\\ &\le \|(1-2\eta_R)\|_{L^\infty(A_0)}\|\nabla\eta_R\|_{L^\infty(A_0)}\|\nabla z_n\|_{L^2(A_0)}\|z_n\|_{L^2(A_0)}\\ &\le \frac{2C}{R}\end{aligned} \tag{3.0.20}$$

Estimando agora o último termo de (3.0.19)*, teremos:*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta_R(|y|)|^2|z_n|^2\,dy\right| &\le \frac{4}{R^2}\int_{A_0(R,2R)}|z_n|^2\,dy\\ &= \frac{4}{R^2}\|z_n\|^2_{L^2(A_0)}\end{aligned} \tag{3.0.21}$$

Juntando as desigualdades (3.0.18),(3.0.20) *e* (3.0.21)*, obtemos assim*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2\,dx\right| &\le 2\Big(\left|\int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|y|)(1-\eta_R(|y|))|\nabla z_n|^2\,dy\right|\\ &\quad + \left|\int_{\mathbb{R}^N}(1-2\eta_R(|y|))\nabla z_n z_n\nabla\eta_R(|y|)\,dy\right|\\ &\quad - \left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta_R(|y|)|^2|z_n|^2\,dy\right|\Big)\\ &\le 2\left(\epsilon + \frac{2C}{R} + \frac{4K}{R^2}\right)\\ &\le 2(\epsilon+\epsilon+\epsilon)\\ &= C\epsilon.\end{aligned} \tag{3.0.22}$$

Por outro lado, por um raciocínio semelhante, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2|\nabla u_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|v_n^2\nabla v_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}w_n^2|\nabla w_n|^2\,dx\right| \le C\epsilon \tag{3.0.23}$$

e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(tx)u_n^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}V(tx)v_n^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}V(tx)w_n^2\,dx\right| \le C\epsilon. \tag{3.0.24}$$

Juntando as desigualdades (3.0.22),(3.0.23) *e* (3.0.24), *temos para todo n suficientemente grande e* $t > 0$*:*

$$\begin{aligned}|I((u_n)_t) - I((v_n)_t) - I((w_n)_t)| &\leq \frac{t^N}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2\,dx\right| \\ &+ \frac{t^{N+2}}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)(u_n^2 - v_n^2 - w_n^2)\,dx\right| \\ &+ \frac{t^{N+2}}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2u_n^2 - |\nabla v_n|^2v_n^2 - |\nabla w_n|^2w_n^2)\,dx\right| \\ &+ \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1})\,dx\right| \\ &\leq C\epsilon(t^N + t^{N+p+1}). \end{aligned} \tag{3.0.25}$$

Agora, sejam t^{v_n} *e* t^{w_n} *os valores positivos que maximizam* $f_{v_n}(t)$ *e* $f_{w_n}(t)$*, respectivamente, isto é:*

$$I((v_n)_{t^{v_n}}) = \max_{t>0} I((v_n)_t)$$

e

$$I((w_n)_{t^{w_n}}) = \max_{t>0} I((w_n)_t).$$

Suponha inicialmente que $t^{v_n} \leq t^{w_n}$*. Então:*

$$I((w_n)_t) \geq 0, \forall t \leq t^{v_n}. \tag{3.0.26}$$

Afirmamos que existem $0 < \tilde{t} < 1 < \bar{t}$ *independentes de* ϵ*, tais que* $t^{v_n} \in (\tilde{t}, \bar{t})$*.*
De fato, considere $\bar{t} := ((p+1)A^{-1}B)^{\frac{1}{p-1}}$ *onde* A *é o número não-negativo tal que* A *é limite da sequência* $(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}dx)$ *e* B *é suficientemente grande e satisfaz*

$$B \geq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2u_n^2\,dx.$$

Logo:

$$\begin{aligned} I((u_n)_{\bar{t}}) &= \frac{\bar{t}^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx + \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\bar{t}x)u_n^2\,dx + \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n^2|u_n^2\,dx - \frac{\bar{t}^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx + \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\bar{t}x)u_n^2\,dx + \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n^2|u_n^2\,dx - \frac{\bar{t}^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n^2|u_n^2\,dx - \frac{2}{p+1}\bar{t}^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}\,dx\right) \\ &\leq \frac{-B\bar{t}^{N+2}}{2} + o_n(1) < 0. \end{aligned} \tag{3.0.27}$$

Usando (3.0.25), *encontramos*

$$I((u_n)_t) \geq I((v_n)_t) + I((w_n)_t) - C\epsilon, \forall t \in (0, \bar{t}]. \tag{3.0.28}$$

Em particular, para $t = \bar{t}$*, temos:*

$$I((u_n)_{\bar{t}}) \geq I((v_n)_{\bar{t}}) + I((w_n)_{\bar{t}}) - C\epsilon. \tag{3.0.29}$$

Então, considerando ϵ *pequeno se necessário, pelas desigualdades* (3.0.27) *e* (3.0.29) *obtemos*

$$I((v_n)_{\bar{t}}) + I((w_n)_{\bar{t}}) < 0.$$

Logo, $I((v_n)_{\bar{t}}) < 0$ *ou* $I((w_n)_{\bar{t}}) < 0$. *Em qualquer caso, o Lema 3.0.2 implica* $t^{v_n} < \bar{t}$. *Para a cota inferior, escolha* $\tilde{t} = \left(\frac{m}{B}\right)^{\frac{1}{N}}$. *Note que, para* B *escolhido grande o suficiente,* $\tilde{t} < 1$. *Desta forma, para todo* $t \leq \tilde{t}$, *por* (V_1)*:*

$$\begin{aligned} I((u_n)_t) &= \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u_n^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2\,dx \\ &\quad - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u_n^2\,dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2\,dx \\ &\leq \frac{\tilde{t}^N}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2\,dx\right) \\ &\leq \frac{m}{2B}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2\,dx\right) \\ &\leq \frac{m}{2B}B = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Usando (3.0.28) *e* (3.0.26), *obtemos*

$$I((u_n)_{t^{v_n}}) \geq I((v_n)_{t^{v_n}}) + I((w_n)_{t^{v_n}}) - C\epsilon \geq m - C\epsilon > \frac{m}{2} \tag{3.0.30}$$

desde que escolhamos $\epsilon \leq \frac{m}{2C}$. *Concluímos que* $t^{v_n} > \tilde{t}$ *e a prova está concluída. Como* $u_n \in M$, f_{u_n} *atinge seu máximo em* $t = 1$. *Então:*

$$m + o_n(1) = I(u_n) \geq I((u_n)_{t^{v_n}}).$$

Usando (3.0.30), *deduzimos para* n *grande que* $I((w_n)_t) \leq 2C\epsilon, \forall t \in (0, t^{v_n})$. *Mais ainda, para qualquer* $t \in (0, \tilde{t})$*:*

$$\begin{aligned} 2C\epsilon \geq I((w_n)_t) &\geq \frac{t^{N+2}}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(tx)w_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 w_n^2\,dx\right) \\ &\quad - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1}\,dx \\ &\geq \frac{t^{N+2}}{2}q_n - Dt^{N+p+1} \end{aligned}$$

onde

$$q_n := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_0 w_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 w_n^2\,dx$$

é limitado e independente de ϵ *e* $D := A + 1 > A$. *Notando que*

$$\frac{t^{N+2}}{2}q_n - Dt^{N+p+1} = t^{N+2}\left(\frac{q_n}{2} - Dt^{p-1}\right),$$

forçamos $\frac{q_n}{2} - Dt^{p-1} \geq \frac{q_n}{4}$. *Para isso, devemos escolher* $t \leq (\frac{q_n}{4D})^{\frac{1}{p-1}}$. *Então:*

$$\begin{aligned} \frac{t^{N+2}}{2}q_n - Dt^{N+p+1} &= t^{N+2}\left(\frac{q_n}{2} - Dt^{p-1}\right) \\ &\geq \frac{t^{N+2}}{4}q_n. \end{aligned}$$

Agora, tomando um D suficientemente grande, podemos supor que $t = (\frac{q_n}{4D})^{\frac{1}{p-1}} \leq \tilde{t}$. Com essa escolha, temos:

$$2C\epsilon \geq I((w_n)_t) \geq \left(\frac{q_n}{4D}\right)^{\frac{N+2}{p-1}} \frac{q_n}{4} \geq C q_n^{\frac{N+p+1}{p-1}},$$

ou seja:

$$\|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla (w_n)^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}} \tag{3.0.31}$$

para algum $C > 0$ independente de ϵ. O caso $t^{v_n} > t^{w_n}$ é análogo. Isso completa a prova da Etapa 3.
Etapa 4: O ínfimo de $I|_M$ é atingido.
Recordemos que $z_n = u_n(\cdot + x_n)$ e, por compacidade, $z_n \to z$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Observe que $z \neq 0$, pois usando a definição de η_R e (3.0.16), obtemos:

$$0 < \delta < \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1}\, dx \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{B_0(2R)} |z_n|^{p+1}\, dx = \int_{B_0(2R)} |z|^{p+1}\, dx.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$ e n suficientemente grande, por (3.0.31):

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq ||w_n^2||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq ||w_n||_{H^1(\mathbb{R}^N)} + ||w_n^2||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}. \tag{3.0.32}$$

Além disso, como $\eta_R \in [0,1]$, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| + |v_n|)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| + |\eta_R(|x - x_n|)u_n|)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| + |u_n|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} 4|u_n^2|\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2||u_n^2||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= C_1.
\end{aligned} \tag{3.0.33}$$

Juntando (3.0.32), (3.0.33) e usando a desigualdade de Hölder (2.1.2), teremos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^2 - v_n^2|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n + v_n||u_n - v_n|\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |w_n||u_n + v_n|\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|(|u_n| + |v_n|)\, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| + |v_n|)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}} C_1 \\
&= C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}.
\end{aligned} \tag{3.0.34}$$

Em particular, isso significa que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2\, dx + C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}. \tag{3.0.35}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2\,dx \le \int_{B_0(2R)} z_n^2\,dx \to \int_{B_0(2R)} z^2\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} z^2\,dx. \tag{3.0.36}$$

Utilizando as duas estimativas (3.0.35) *e* (3.0.36)*, e passando o* $\liminf$*, obtemos*

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} z_n^2\,dx &= \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\,dx\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2\,dx + C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} z^2\,dx + C\epsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}.\end{aligned}$$

Como ϵ *é arbritrário,* $z_n \to z$ *em* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *e, pela Desigualdade de interpolação* (2.1.4)*,* $z_n \to z$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$*,*
$\forall q \in [2, 22^*)$.
Temos dois casos a considerar:
Caso 1: x_n *é limitada. Neste caso, a menos de subsequência,* $x_n \to x_0$*. Assim,* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*,* $u_n^2 \rightharpoonup u^2$ *em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *e* $u_n \to u$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [2, 22^*)$*, onde* $u = z(\cdot - x_0)$*. Dessa forma:*

$$\begin{aligned}m &= \lim_{n\to+\infty} I(u_n)\\ &\ge \liminf_{n\to+\infty} I((u_n)_t)\\ &\ge \liminf_{n\to\infty}\frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx + \liminf_{n\to\infty}\frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u_n^2\,dx + \liminf_{n\to\infty}\frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2\,dx\\ &\quad - \limsup_{n\to\infty}\frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}\,dx\\ &\ge I(u_t), \forall t > 0.\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$m \le I(u_{t^u}) = f_u(t^u) = \max_{t>0} f_u(t) = \max_{t>0} I(u_t) \le m.$$

Portanto $I(u_{t^u}) = \max_{t>0} I(u_t) = m$*,* $u_n \to u$ *e* $u_n^2 \to u^2$*. Em particular,* $u_{t^u} \in M$ *é um minimizante de* $I|_M$*.*
Caso 2: x_n *não é limitada. Neste caso, usando a condição (V1), a mudança de variável* $y = x - x_n$ *e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 2.1.5, resulta:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(t(y+x_n))u_n^2(y+x_n)\,dy &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(t(x+x_n))z_n^2(y)\,dy\\ &= V_\infty\int_{\mathbb{R}^N} z^2(y)\,dy\\ &\ge \int_{\mathbb{R}^N} V(ty)z^2(y)\,dy\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)z_n^2(y)\,dy, \forall t > 0.\end{aligned}$$

Logo:

$$m = \lim_{n\to+\infty} I(u_n) \ge \liminf_{n\to+\infty} I((u_n)_t) \ge \liminf_{n\to+\infty} I((z_n)_t) \ge I(z_t), \forall t > 0.$$

Analogamente:

$$m \leq I(z_{t^z}) = f_z(t^z) = \max_{t>0} f_z(t) = \max_{t>0} I(z_t) \leq m.$$

Então, obtemos $z_{t^z} \in M$ é um minimizante de $I|_M$. □

Demonstração. ***(do Teorema 3.0.3)***
Seja $u \in M$ um minimizante de $I|_M$. Sabemos, do Lema 3.0.2 que

$$I(u) = \inf_{v \in X; v \neq 0} \max_{t>0} I(v_t) = m.$$

Logo, é suficiente mostrar que u satisfaz a forma fraca de (3.0.4). *Suponha por contradição que u não seja uma solução fraca de* (3.0.4). *Então, existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla \psi + u|\nabla u|^2\psi + V(x)u\psi - |u|^{p-1}u\psi \, dx = L \neq 0. \tag{3.0.37}$$

Defina $\phi := t\psi, t \in \mathbb{R}$. Assim, multiplicando ambos os membros de (3.0.37) *por t, temos:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} t(1+u^2)\nabla u \nabla \psi + tu|\nabla u|^2\psi + tV(x)u\psi - t|u|^{p-1}u\psi \, dx = tL.$$

Isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2\phi + V(x)u\phi - |u|^{p-1}u\phi \, dx = tL.$$

Escolha $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{t}L < -1$ e defina $\phi := \bar{t}\psi$. Desta forma, existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2\phi + V(x)u\phi - |u|^{p-1}u\phi \, dx < -1. \tag{3.0.38}$$

Agora, será conveniente escrever a expressão acima da seguinte forma:

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi + V(x)u\phi + \frac{1}{2}\nabla(u^2)\nabla(u\phi) - |u|^{p-1}u\phi \, dx < -1.$$

Note que a função $u \mapsto \langle I(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi + V(x)u\phi + \frac{1}{2}\nabla(u^2)\nabla(u\phi) - |u|^{p-1}u\phi \, dx$ é contínua em (X, d_X). De fato, seja $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \to u$ em X. Então, por definição:

$$d_X(u_n, u) = \|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_n^2 - \nabla u^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Logo:

$$\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

e

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0. \tag{3.0.39}$$

Assim, por (3.0.39) *e pela continuidade do produto interno, segue-se que:*

$$\langle \nabla u_n, \nabla \phi \rangle \to \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \phi \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx. \tag{3.0.40}$$

De maneira análoga,

$$\langle V(x)\phi, u_n \rangle \to \langle V(x)\phi, u \rangle \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n\phi \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi \, dx. \tag{3.0.41}$$

Mais ainda, como

$$\nabla(u_n^2) \to \nabla(u^2) \quad em \quad L^2(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n \to u \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$

segue que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n^2)\nabla(u_n\phi)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u^2)\nabla(u\phi)\,dx,$$

o que implica:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n^2)\nabla(u_n\phi) \to \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u^2)\nabla(u\phi). \tag{3.0.42}$$

Ademais, pelas imersões compactas de Sobolev, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}u_n\phi\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi\,dx. \tag{3.0.43}$$

Portanto, por (3.0.40),(3.0.41),(3.0.42) *e* (3.0.43)*:*

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n),\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n\nabla\phi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n\phi\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n^2)\nabla(u_n\phi)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}u_n\phi\,dx\\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla\phi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u^2)\nabla(u\phi)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi\,dx\\ &= \langle I'(u),\phi\rangle.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{(t,\sigma)\to(1,0)} u_t + \sigma\phi = u_1 + 0.\phi = u, \tag{3.0.44}$$

pois $(t,\sigma) \mapsto u_t + \sigma\phi$ *é contínua de* $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ *em* (X, d_X)*. Por* (3.0.38), (3.0.44) *e pelo teorema da conservação do sinal, como* $-1 < -\frac{1}{2}$*, existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\langle I'(u_t + \sigma\phi),\phi\rangle \leq -\frac{1}{2}, \forall |t-1|, |\sigma| \leq \epsilon. \tag{3.0.45}$$

Agora defina a função corte $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & |t-1| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0, & |t-1| > \epsilon \end{cases}$$

e perturbe a curva u_t*, definindo*

$$\gamma(t) = \begin{cases} u_t, & |t-1| \geq \epsilon \\ u_t + \epsilon\eta(t)\phi, & |t-1| < \epsilon \end{cases}.$$

Note que $\gamma(t)$ *é contínua em* (X, d_X)*, pois* $\eta(t)$ *é contínua em* t*. Além disso, eventualmente escolhendo um* ϵ *pequeno o suficiente, afirmamos que* $d_X(\gamma(t), 0) > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, |t-1| < \epsilon$*. Com efeito, observe que, em particular,* $\gamma(t)$ *é contínua em* $t = 1$*. Mais ainda:*

$$\gamma(1) = u_1 + \epsilon\eta(1)\phi = u + \epsilon\phi.$$

Seja $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno de modo que* $u + \epsilon\phi \neq 0$*. Como* $\delta \mapsto u + \delta\phi$ *é contínua em* (X, d_X)*, o resultado segue pelo Teorema da Conservação do Sinal.*
Afirmação:

$$\sup_{t\geq 0} I(\gamma(t)) < m.$$

De fato, se $|t-1|<\epsilon$, *definindo a função* $g:[0,\epsilon]\to\mathbb{R}$ *de modo que* $g(\sigma):=I(u_t+\sigma\eta(t)\phi)$ *e usando o Teorema do Valor Médio para* g, *existe* $\bar{\sigma}\in(0,\epsilon)$ *tal que*

$$g'(\bar{\sigma})=\frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon-0}.$$

De (3.0.45) *e da definição de* η, *temos:*

$$\begin{aligned} I(u_t+\epsilon\eta(t)\phi)-I(u_t) &= \epsilon\langle I'(u_t+\bar{\sigma}\eta(t)\phi),\eta(t)\phi\rangle \\ &= \epsilon\langle I'(u_t+\bar{\sigma}\phi),\phi\rangle \\ &\leq -\frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} I(\gamma(t))=I(u_t+\epsilon\eta(t)\phi) &\leq I(u_t)-\frac{\epsilon}{2} \\ &\leq I(u)-\frac{\epsilon}{2} \\ &= m-\frac{\epsilon}{2} \\ &< m. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(\gamma(t))<m. \tag{3.0.46}$$

Assim, como $[1-\epsilon,1+\epsilon]$ *é compacto:*

$$\sup_{t\in[1-\epsilon,1+\epsilon]} I(\gamma(t))<m. \tag{3.0.47}$$

Por outro lado, se $|t-1|\geq\epsilon$, *então:*

$$t\in[0,1-\epsilon)\cup(1+\epsilon,+\infty)\Rightarrow I(\gamma(t))<m-\frac{\epsilon}{2}<m.$$

Como $I(\gamma(t))=I(u_t),\forall t\in[0,1-\epsilon)\cup(1+\epsilon,+\infty)$ *e* $\lim_{t\to+\infty}I(u_t)=-\infty$, *então existe* $\bar{t}>0$ *tal que* $I(u_t)<0,\forall t>\bar{t}$. *Logo:*

$$\begin{aligned} \sup_{[0,1-\epsilon)\cup(1+\epsilon,+\infty)} I(\gamma(t)) &= \sup_{[0,1-\epsilon)\cup(1+\epsilon,\bar{t}]} I(\gamma(t)) \\ &\leq \sup_{[0,1-\epsilon]\cup[1+\epsilon,\bar{t}]} I(\gamma(t)) \\ &< m-\frac{\epsilon}{2} \\ &< m. \end{aligned} \tag{3.0.48}$$

Assim, por (3.0.47) *e* (3.0.48),

$$\sup_{t\geq 0} I(\gamma(t))<m.$$

Agora note que, $J(\gamma(1-\epsilon))=J(u_{1-\epsilon})>0$, *pois* $1-\epsilon<1$. *Analogamente, como* $1+\epsilon>1$, *segue-se que* $J(\gamma(1+\epsilon))=J(u_{1+\epsilon})<0$. *Pela continuidade da função* $t\mapsto J(\gamma(t))$ *e pelo Teorema do Valor Intermediário, existe* $t_0\in(1-\epsilon,1+\epsilon)$ *tal que* $J(\gamma(t_0))=0$. *Considerando* $\gamma(t_0)=u_{t_0}+\epsilon\eta(t_0)\phi\in M$, *segue que* $I(\gamma(t_0))<m$, *o que resulta numa contradição, tendo em vista a definição de supremo. Portanto,* u *é uma solução fraca para* (3.0.1). *Mais ainda, se* $u\in M$ *é um minimizante de* $I|_M$, *então* $|u|$ *também é um*

minimizante de $I|_M$. *Dessa forma, podemos supor sem perda de generalidade que* $u \geq 0$. *Afirmação:*

$$u > 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N.$$

De fato, suponha que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$, *tal que* $u(x_0) = 0$. *Provemos então que*

$$-\Delta u + V(x)u \geq 0, \quad em \quad B_r(x_0), \quad para\ todo \quad r > 0. \tag{3.0.49}$$

De fato, dado $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, *temos:*

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u\Delta(u^2) = |u|^{p-1}u. \tag{3.0.50}$$

Note que:

$$\Delta(u^2) := div(\nabla(u^2)) = div(2u\nabla u) = 2|\nabla u|^2 + 2u\Delta u$$

o que implica

$$-\frac{1}{2}\Delta(u^2) = -u|\nabla u|^2 - u^2\Delta u. \tag{3.0.51}$$

Substituindo (3.0.51) *em* (3.0.50), *resulta:*

$$-(1+u^2)\Delta u + V(x)u = u|\nabla u|^2 + u^2 + |u|^{p-1}u \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

ou seja

$$-\Delta u + \frac{V(x)u}{1+u^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto:

$$-\Delta u + V(x)u \geq -\Delta u + \frac{V(x)u}{1+u^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Em particular, vale (3.0.49). *Além disso, como* $u \geq 0$ *em* $\overline{B_r(x_0)}$, *segue-se que* x_0 *é um ponto de mínimo de* u, *interior a* $\overline{B_r(x_0)}$. *Pelo Princípio do Máximo Forte (cf. [7, p. 333]),* u *é constante em* $B_r(x_0)$. *Como* $r > 0$ *é arbitrário, segue que* $u \equiv 0$, *o que é uma contradição, pois* $u \in M$ *e* $0 \notin M$. *Portanto* $u > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$.

Referências

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces*, Pure and applied mathematics series, First Edition, Academic Press, Inc., Cambridge, 1975.

[2] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. *Nonlinear Analysis with Applications to Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007.

[3] BOROVSKII, A. V.; GALKIN A. L. *Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter*. Journal of Experimental and Theoretical Physics v. 77, p. 562–573, 1993.

[4] BREZIS, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2010.

[5] BUTAZZO, G.; ATTOUCH, H. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces - Applications to PDEs and Optimization* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.

[6] COLIN M.; JEANJEAN L.; SQUASSINA M. *Stability and instability results for standing waves of quasi-linear Schrödinger equations.*

[7] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2.ed. Graduate Studies in Mathematics, v.19, 2010.

[8] FIGUEIREDO, G. M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*. Notas de aula na UnB, 2016.

[9] FOLLAND G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2 ed.*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley e Sons, 2013.

[10] KOSEVICH, A. M.; IVANOV B.; KOVALEV A. S. *Magnetic solitons*. Phys. Rep. 194 117–238, 1990.

[11] KURIHURA S. *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*. J. Phys. Soc. Japan, v. 50, p. 3262–3267, 1981.

[12] LIONS, P.L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case Part 2*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, v.4, 1984.

[13] LIU J.; WANG Y.; WANG Z-Q *Solutions for quasilinear Schrodinger equations via the Nehari method*. Commun. Partial Diff. Eqns v.29, p. 879-901, 2004.

[14] NIRENBERG, L. *On elliptic partial differential equations*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, v.13, n.2, p.115–162, 1959.

[15] PUCCI P.; SERRIN J. *A general variational identity*. Indiana Univ. Math. J., v.35, p.681–703, 1986.

[16] RUIZ, D.; SICILIANO, G.*Existence of ground states for a modified nonlinear Schrödinger equation* Nolinearity v.23, p.1221-1232, 2010.