



Letícia Sanches Silva

Coincidência de pares de aplicações entre fibrados sobre o círculo com fibra toro

São José do Rio Preto/Rio Claro
2017

Letícia Sanches Silva

Coincidência de pares de aplicações entre fibrados sobre o círculo com fibra
toro

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Topologia Algébrica, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto/Rio Claro.

Orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

São José do Rio Preto/Rio Claro
2017

Silva, Letícia Sanches.

Coincidência de pares de aplicações entre fibrados sobre o círculo com fibra toro / Letícia Sanches Silva. – São José do Rio Preto, 2017.

132 f. : il.

Orientador: João Peres Vieira

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia Algébrica. 3. Grupos de Homotopia. 4. Espaços Fibrados (Matemática) I. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU - 513.831

Letícia Sanches Silva

Coincidência de pares de aplicações entre fibrados sobre o círculo com fibra toro

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Topologia Algébrica, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto/Rio Claro.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Peres Vieira
UNESP - Rio Claro
Orientador

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar - São Carlos

Profa. Dra. Denise de Mattos
USP - São Carlos

Prof. Dr. Weslem Liberato Silva
UESC - Ilhéus

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP - São José do Rio Preto

Rio Claro, 17 de fevereiro de 2017.

À minha mãe, Neuza,
por viabilizar todos os meus sonhos
dedico.

Agradecimentos

Agradeço primordialmente a Deus, por me conceder a graça de viver e fazer-me capaz de concluir esta etapa tão estimada.

Especialmente, agradeço ao Prof. Dr. João Peres Vieira, por sua dedicada orientação, pelo incentivo, atenção, confiança, disponibilidade e por todo conhecimento transmitido.

Aos professores que contribuíram para minha formação acadêmica, sobretudo às professoras Ermínia e Maria Gorete, pela motivação e apoio inestimáveis.

Aos professores Pedro Pergher, Ermínia Fanti e Weslem Sila, pelas sugestões dadas durante a elaboração desta tese, principalmente no Exame de Qualificação e nos congressos de Topologia Algébrica.

À Banca Examinadora, por terem aceito o nosso convite.

À minha família e namorado, pela paciência, compreensão e pelo amor incondicional.

Aos meus queridos amigos, pelo carinho, respeito, apoio e torcida.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Registro aqui minha sincera gratidão a todos que estiveram ao meu lado durante estes anos. A concretização deste projeto só tornou-se possível devido a generosa contribuição de vocês. Muito obrigada!

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do
homem foram conquistadas do que parecia impossível.”*

(Charles Chaplin)

Resumo

Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações que preservam fibra sobre o círculo, S^1 , onde $M(\phi_1)$ e $M(\phi_2)$ são fibrados sobre S^1 com fibra toro, T . O principal objetivo deste trabalho é classificar os pares de aplicações (f, g) que podem ser deformados por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par de aplicações (f', g') , $f', g' : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$, livre de coincidência. Em suma, classificar tais pares de aplicações consiste em encontrar soluções para uma equação no grupo livre $\pi_2(T, T - 1)$, denominada equação principal. Em algumas situações é conveniente estudar a equação principal na abelianização de $\pi_2(T, T - 1)$ ou sobre alguns quocientes deste grupo, uma vez que, se a equação em um desses quocientes não admite solução, então a equação original também não admite solução. Neste caso, conclui-se que não é possível obter a deformabilidade desejada.

Palavras-chave: coincidência, T -fibrados, aplicação que preserva fibra.

Abstract

Let $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ be fiber preserving maps over the circle, S^1 , where $M(\phi_1)$ and $M(\phi_2)$ are fiber bundles over S^1 and the fiber is the torus, T . The main purpose of this work is to classify the pairs of maps (f, g) which can be deformed by fiberwise homotopy over S^1 to a coincidence free pair (f', g') , $f', g' : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$. In general classify such pairs of maps consists in finding solutions for an equation in the free group $\pi_2(T, T - 1)$, called the main equation. In certain situations it is appropriate to study the main equation in the abelianization of $\pi_2(T, T - 1)$ or on some quotients of this group, since, if the equation in one of these quotients not admit solution, then the original equation also does not admit solution. In this case, it is not possible to obtain the desired deformability.

Keywords: coincidence, T -fiber bundles, fiber preserving maps.

Sumário

Introdução	11
1 Uma versão geral do problema proposto	13
1.1 T -fibrados sobre S^1	15
1.1.1 Sobre o Toro	16
1.2 O problema do ponto de vista algébrico	17
2 Reduções no toro e um sistema algébrico de equações	26
2.1 Teoria de coincidência e o número de Nielsen de aplicações do toro.	26
2.2 Redução dos fibrados $M(\phi_1)$, $M(\phi_2)$ e das funções $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$	27
2.3 Os geradores dos grupos fundamentais envolvidos no problema	40
3 Propriedades da equação principal	47
3.1 Formas da equação principal	47
3.2 Equação na abelianização	48
4 Solução do problema proposto através da resolução da equação principal	51
Referências	130

Introdução

O conjunto dos pontos fixos de uma aplicação fibrada juntamente com a teoria de coincidência de Nielsen tem sido objetos de estudo de vários autores no âmbito da topologia algébrica. Uma questão inicial que motivou a formulação de diversos problemas neste contexto é a seguinte pergunta: dada uma fibração $p : M \rightarrow S^1$ e aplicações $f, g : M \rightarrow M$, que preservam fibra sobre S^1 , sendo $f = Id$, é possível deformar a aplicação g por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a uma aplicação g' livre de ponto fixo?

Uma situação mais geral foi considerada pelos autores E. Fadell e S. Husseine, em [3](1981), para fibrados $F \rightarrow M \xrightarrow{p} B$, onde F, M e B são variedades fechadas e pelo autor D. Gonçalves, em [5](1987), no caso em que $F = S^1$.

Considerando $\phi : S \rightarrow S$ um homeomorfismo de uma superfície fechada S , $M(\phi)$ o fibrado dado pelo espaço quociente obtido do espaço $S \times [0, 1]$ identificando os pontos $(x, 0)$ com $(\phi(x), 1)$ e $f, g : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$, sendo $f = Id$, a pergunta anterior foi completamente respondida pelos autores D. L. Gonçalves, D. Penteado e J. P. Vieira, nos casos em que $S = T$, toro, ou $S = K$, garrafa de Klein, em [7](2004) e [8](2009), respectivamente. Em [15](2012), W. L. Silva e J. P. Vieira investigaram este problema no caso em que f e g são aplicações em fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein.

Posteriormente, em [11](2015), o autor J. Vieira considerou aplicações em fibrados sobre o círculo, S^1 , com fibra toro, T , $f, g : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$ e investigou quando o par (f, g) pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') , $f', g' : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$, livre de coincidência.

O problema proposto neste trabalho se fundamenta em avaliar esta questão considerando, agora, dois homeomorfismos do toro $\phi_1, \phi_2 : T \rightarrow T$ e aplicações $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$.

Para cumprir com os objetivos aqui apresentados segue a relação dos principais objetos de estudo de cada um dos quatro capítulos que compõem esta tese.

O primeiro capítulo consiste em analisar uma versão mais geral do problema proposto e relacioná-lo com um diagrama algébrico envolvendo certos grupos fundamentais. Para tal, é necessário o estudo de tópicos que fazem parte dos pré requisitos indispensáveis para o desenvolvimento do trabalho, tais como: grupos de homotopia de ordem superior, apresentação de grupos, ação de grupos e teoria básica de fibrações e fibrados. Para compreensão destes assuntos as principais referências utilizadas são: [9], [13] e [10]. Na seção 1.1 utiliza-se alguns

homeomorfismos do toro, para se obter modelos de fibrados com base S^1 e fibra T . Além disso, apresenta-se uma condição algébrica necessária e suficiente para um par de aplicações (f, g) ser deformável por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência (Corolário 1.2.1).

No capítulo 2 defini-se o número de Nielsen coincidência de aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ entre CW -complexos finitos, $N(f, g)$. Quando f e g são aplicações do toro, pode-se caracterizar $N(f, g)$ (Teorema 2.1.1) e relacioná-lo com o problema proposto (Proposição 2.1.1). Este capítulo se resume em classificar todos os T -fibrados sobre S^1 (Proposição 2.2.2), descrever os grupos e homomorfismos envolvidos no problema proposto, e associar este problema com um sistema algébrico de equações afim de se obter a denominada equação principal.

O terceiro capítulo é destinado a investigar de forma mais específica a equação principal. Primeiramente, observa-se que essa pode ser interpretada como uma equação no grupo livre $\pi_2(T, T-1)$ e que uma solução desta implica na existência de uma solução de outras equações. A seguir, estuda-se a equação principal na abelianização de $\pi_2(T, T-1)$ e sobre alguns quocientes deste grupo. Por fim, apresenta-se uma forma da equação principal denominada condição necessária.

O capítulo 4 é dedicado à solução do problema proposto. Neste capítulo classifica-se todos os pares de aplicações (f, g) que podem ser deformados por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência. Muitas das ideias utilizadas na resolução deste problema foram inspiradas nas soluções apresentadas em [11], que constitui a principal referência desta tese. Em suma, resolver o problema proposto se reduz a encontrar soluções para a equação principal. Quando há dificuldade em encontrar tais soluções, a ideia é abelianizar o sistema de equações e avaliar se há ou não solução nesta situação. Se o sistema de equações abelianizado não possui solução, infere-se que o sistema original também não possui solução, consequentemente, não é possível obter a deformabilidade desejada. Caso seja encontrada solução para o sistema abelianizado, não se pode concluir que o sistema original também admite solução, mas a partir das soluções encontradas no sistema abelianizado se induz as soluções para o sistema original e deste modo soluciona-se o problema.

Uma versão geral do problema proposto

Este capítulo introduz a principal questão abordada neste trabalho. A princípio, analisa-se uma versão mais geral do problema proposto relacionando-o com um diagrama algébrico envolvendo certos grupos fundamentais.

Esta tese objetiva, principalmente, resolver a seguinte questão:

Problema proposto: Sejam $\phi_1, \phi_2 : T \rightarrow T$ homeomorfismos do toro T . Denotemos por $M(\phi_1)$ e $M(\phi_2)$ os espaços quocientes obtidos do espaço $T \times [0, 1]$ identificando os pontos $(x, 0)$ com $(\phi_1(x), 1)$ e $(\phi_2(x), 1)$, respectivamente e consideremos $p_i : M(\phi_i) \rightarrow S^1 = \frac{[0,1]}{0 \sim 1}$ a projeção dada por $p_i(\langle x, t \rangle) = \langle t \rangle$, $i = 1, 2$. Temos que $M(\phi_1)$ e $M(\phi_2)$ são fibrados sobre o círculo S^1 com fibra toro. Dadas aplicações $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ que preservam fibra sobre S^1 , ou seja, tais que $p_2 \circ f = p_1$ e $p_2 \circ g = p_1$, vamos investigar quando o par (f, g) pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência.

Afim de solucionar o problema específico investiga-se a seguinte pergunta:

Problema geral: Sejam (F_i, M_i, B, p_i) , $i = 1, 2$, fibrados e $f, g : M_1 \rightarrow M_2$ aplicações que preservam fibra sobre B . Quando o par (f, g) pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibras a um par (f', g') livre de coincidência?

Este problema pode ser formulado através de um diagrama geométrico. Para tal, precisa-se dos seguintes conceitos:

Define-se o pullback de $p_2 : M_2 \rightarrow B$ por $p_1 : M_1 \rightarrow B$, como sendo o espaço

$$M_1 \times_B M_2 := \{(x, y) \in M_1 \times M_2; p_1(x) = p_2(y)\},$$

representado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times_B M_2 & \xrightarrow{\tilde{\pi}_2 \circ j} & M_2 \\ \tilde{\pi}_1 \circ j \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M_1 & \xrightarrow{p_1} & B \end{array}$$

sendo $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$ as projeções na primeira e segunda coordenada, respectivamente e $j : M_1 \times_B M_2 \hookrightarrow M_1 \times M_2$ a inclusão.

Considere Δ a diagonal em $X = M_2 \times_B M_2$, $A = M_2 \times_B M_2 - \Delta$ e $E_B(M_2) := \{(x, w) \in A \times X^I; i(x) = w(0)\}$, onde $q(x, w) = w(1)$. Temos que a inclusão $M_2 \times_B M_2 - \Delta \xrightarrow{i} M_2 \times_B M_2$ pode ser trocada por uma fibração $q : E_B(M_2) \rightarrow M_2 \times_B M_2$, cuja fibra sobre um ponto $b_0 \in B$ será denotada por $\mathcal{F}_2$ e $E_B(M_2)$ tem o mesmo tipo de homotopia de A (veja [3]).

Seja $E_B(f, g) := \{(m, (x, w)) \in M_1 \times_B E_B(M_2); q(x, w) = (f, g)(m)\}$. Uma equivalência do problema geral é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 1.0.1 ([11], Theorem 1.2) *Um par de aplicações (f, g) , $f, g : M_1 \rightarrow M_2$, sobre B pode ser deformado a um par (f', g') , livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre B se, e somente se, existir uma secção σ no diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}_2 & & \mathcal{F}_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & E_B(f, g) & \xrightarrow{\bar{q}(f, g)} & E_B(M_2) \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow q_{(f, g)} & & \downarrow q \\
 M_1 & \xrightarrow{Id} & M_1 & \xrightarrow{(f, g)} & M_2 \times_B M_2
 \end{array} \tag{1.1}$$

onde $q_{(f, g)} : E_B(f, g) \rightarrow M_1$ é a fibração induzida de q por (f, g) . ■

O próximo resultado relaciona o problema geral com um diagrama geométrico.

Proposição 1.0.1 ([11], Proposition 2.3) *Um par de aplicações (f, g) pode ser deformado a um par de aplicações (f', g') livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre B se, e somente se, existir uma aplicação*

$$h : M_1 \rightarrow M_2 \times_B M_2 - \Delta$$

que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & M_2 \times_B M_2 - \Delta & \\
 & \downarrow i & \\
 M_1 & \xrightarrow{(f, g)} & M_2 \times_B M_2
 \end{array}$$

homotópico comutativo, ou seja, tal que $i \circ h$ é homotópico a (f, g) . ■

Observação 1.0.1 (1) ([4]) *A fibra $\mathcal{F}_2$ tem grupos de homotopia*

$$\pi_{j-1}(\mathcal{F}_2) \cong \pi_j(M_2 \times_B M_2, M_2 \times_B M_2 - \Delta) = \pi_j(X, A).$$

(2) *Se a fibra $\mathcal{F}_2$, e os espaços M_2 e B são variedades fechadas, então*

$$\pi_{j-1}(\mathcal{F}_2) \cong \pi_j(X, A) \cong \pi_j(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2 - x),$$

onde x é um ponto qualquer em F_2 . (Veja [3], Proposição 2.1, p. 53).

(3) Nas condições de (2), se $\dim F_2 = k > 2$, a teoria de obstrução clássica pode ser usada para encontrar obstruções. A primeira obstrução ocorre para estendermos a secção do $(k-1)$ -esqueleto ao k -esqueleto e essa obstrução $\mathcal{O}_B(f, g) \in H^k(M_1; \{\pi_{k-1}(\mathcal{F}_2)\})$ (cohomologia com coeficientes locais). Podem ocorrer outras obstruções e a razão essencial para se aplicar a teoria de obstrução é que $\pi_1(M_1)$ atua nos $\pi_{k-1}(\mathcal{F}_2)$ independente do ponto base de $\mathcal{F}_2$, pois $\pi_1(\mathcal{F}_2) = 0$. (Veja [3], Proposição 2.2, p. 54).

(4) Nas condições de (2), quando a dimensão da fibra é 2 e $F_2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$, existe um sistema de coeficientes local, bem definido, dado pela ação de $\pi_1(M_1)$ em $H_1(\mathcal{F}_2)$ e assim podemos definir a obstrução abelianizada $\mathcal{A}_B(f, g) \in H^2(M_1; \{H_1(\mathcal{F}_2)\})$. (Veja [12]).

(5) Quando a fibra é a esfera S^2 , então $\pi_2(S^2, S^2 - x)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e a teoria de obstrução se aplica porque $\pi_1(M_1)$ atua em $\pi_1(\mathcal{F}_2) \simeq \mathbb{Z}$ independente do ponto base de $\mathcal{F}_2$. No caso em que a fibra é $\mathbb{R}P^2$, a teoria clássica de obstrução também pode ser usada. (Veja [7]).

1.1 T -fibrados sobre S^1

O objetivo desta seção é descrever todos os fibrados com base S^1 e fibra toro, T .

Deste modo, vamos considerar alguns homeomorfismos de T e também utilizar a sua estrutura de grupo para simplificar a análise algébrica do problema proposto.

Sejam $\phi_1, \phi_2 : T \rightarrow T$ homeomorfismos. Sem perda de generalidade, podemos supor que ϕ_1 e ϕ_2 possuem pontos fixos x_1 e x_2 , respectivamente, uma vez que todo homeomorfismo $\phi : T \rightarrow T$ é isotópico a um homeomorfismo que preserva ponto base. De fato, suponhamos que $\phi : T \rightarrow T$ é um homeomorfismo com $\phi(x_0) = y_0$. Então existe um homeomorfismo $h : T \rightarrow T$ isotópico à aplicação identidade, tal que $h(y_0) = x_0$ (veja o comentário após a demonstração do Lema 5.4 do capítulo 5 de [13]). Seja $H : T \times [0, 1] \rightarrow T$ uma isotopia entre h e Id com $H_0 = h$ e $H_1 = Id$. Defina

$$G : T \times [0, 1] \rightarrow T; G_t(x) = H_t(\phi(x)).$$

G é uma homotopia entre $h \circ \phi$ e ϕ . Além disso, temos que

$$(h \circ \phi)(x_0) = h(y_0) = x_0,$$

ou seja, $h \circ \phi$ preserva ponto base.

Denotemos por $M(\phi_i)$, o espaço quociente de $T \times [0, 1]$ pela relação $(x, 0) \sim (\phi_i(x), 1)$, e por $\langle x, t \rangle$ um elemento de $M(\phi_i)$, $i = 1, 2$. Temos que

$$T \rightarrow M(\phi_i) \xrightarrow{p_i} S^1,$$

é um fibrado localmente trivial, onde $p_i : M(\phi_i) \rightarrow S^1$ é a projeção $p_i(\langle x, t \rangle) = \langle t \rangle$, $i = 1, 2$.

Aqui, estamos considerando $\langle t \rangle \in S^1 \simeq \frac{[0,1]}{0 \sim 1}$.

Proposição 1.1.1 ([11], Proposition 2.5.) *Sejam $\phi, \psi : T \rightarrow T$ dois homeomorfismos que preservam ponto base. Temos que $M(\phi)$ é homeomorfo a $M(\psi)$, por um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, ϕ é isotópico a um conjugado de ψ .* ■

Como consequência da proposição anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.1.1 *As classes de T -fibrados sobre S^1 são classificadas por classes de conjugação de classes de isotopia de homeomorfismos que preservam ponto base.* ■

1.1.1 Sobre o Toro

Podemos definir o toro, T , como sendo o espaço quociente $\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Neste caso, denota-se por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ os elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e T , respectivamente.

Sejam $\phi_1, \phi_2 : T \rightarrow T$ homeomorfismos induzidos por operadores lineares L_1 e L_2 em $\mathbb{R}^2$, respectivamente, que preservam $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{L_i} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} & \xrightarrow{\phi_i} & \frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \end{array}$$

Temos que ϕ_1 e ϕ_2 pode ser identificados com matrizes de coeficientes inteiros e determinante 1 ou -1.

Denotamos por $M(\phi_i)$, $i = 1, 2$, os espaços quocientes de $T \times [0, 1]$ pela relação

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 0 \right) \sim \left(\phi_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 1 \right) = \left(\left[L_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right], 1 \right).$$

A classe de $\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right)$ no espaço quociente $M(\phi_i)$ será denotada por $\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle$.

Os espaços $M(\phi_i)$, $i = 1, 2$, são fibrados sobre o círculo S^1 , onde a fibra é o toro, T , e as projeções

$$p_i : M(\phi_i) \rightarrow S^1$$

são dadas por

$$p_i \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle \right) = \langle t \rangle \in \frac{[0, 1]}{0 \sim 1} \simeq S^1, \quad i = 1, 2.$$

1.2 O problema do ponto de vista algébrico

Como a fibra toro, T , é um espaço $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$, veremos, pelos próximos resultados, que o problema proposto se reduzirá a construir uma secção sobre o 2-esqueleto de $M(\phi_1)$. Observe que $M(\phi_1)$ é um CW -complexo, pois é o quociente do CW -complexo $T \times [0, 1]$ pelo sub CW -complexo $Q = \{(x, 0) \sim (\phi_1(x), 1); x \in T\}$.

Seja $f : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ uma aplicação que preserva fibra sobre S^1 , que referimos simplesmente como uma aplicação sobre S^1 . Note que, dado $\langle x, t \rangle \in M(\phi_1)$

$$\begin{aligned} f(\langle x, 0 \rangle) &= \langle y, 0 \rangle, \text{ para algum } y, \\ f(\langle x, 1 \rangle) &= \langle y, 1 \rangle, \text{ para algum } y \text{ e} \\ f(\langle x, t \rangle) &= \langle y, t \rangle, \text{ para algum } y. \end{aligned}$$

Assim, define-se $f_0 : T \rightarrow T$ por

$$f_0(x) = y, \text{ se } f(\langle x, 0 \rangle) = \langle y, 0 \rangle.$$

Esta aplicação é bem definida desde que

$$\langle y_1, 0 \rangle = \langle y_2, 0 \rangle \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Aliás, note que

$$\langle y_1, 0 \rangle = \{(y_1, 0), (\phi_2(y_1), 1)\}, \langle y_2, 0 \rangle = \{(y_2, 0), (\phi_2(y_2), 1)\}.$$

Logo,

$$\langle y_1, 0 \rangle = \langle y_2, 0 \rangle \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Observação 1.2.1 *Por definição temos que f_0 é a aplicação f restrita a T , isto é, $f_0 = f|_T$, onde estamos identificando T com $\{\langle x, 0 \rangle; x \in T\} \subset M(\phi_1)$.*

Proposição 1.2.1 *A aplicação $\phi_2 \circ f_0 \circ \phi_1^{-1}$ é homotópica à aplicação f_0 . Reciprocamente, se $f_0 : T \rightarrow T$ é uma aplicação com $\phi_2 \circ f_0 \circ \phi_1^{-1}$ homotópica à f_0 , então existe $f : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ sobre S^1 tal que f restrita a fibra T é f_0 .*

Demonstração: Defina $f_1 : T \rightarrow T$ por $f_1(x) = y$, se $f(\langle x, 1 \rangle) = \langle y, 1 \rangle$. Note que f_1 está bem definida. De fato,

$$\langle y_1, 1 \rangle = \langle y_2, 1 \rangle \Leftrightarrow \{(y_1, 1), (\phi_2^{-1}(y_1), 0)\} = \{(y_2, 1), (\phi_2^{-1}(y_2), 0)\} \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

Além disso, temos

- (1) $\langle x, 0 \rangle = \langle \phi_1(x), 1 \rangle$.
- (2) $f(\langle x, 0 \rangle) = \langle f_0(x), 0 \rangle$.
- (3) $f(\langle x, 1 \rangle) = \langle f_1(x), 1 \rangle$.
- (4) $\langle f_0(x), 0 \rangle = \langle (\phi_2 \circ f_0)(x), 1 \rangle$.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\phi_2 \circ f_0)(x), 1 \rangle &\stackrel{(4)}{=} \langle f_0(x), 0 \rangle \stackrel{(2)}{=} f(\langle x, 0 \rangle) \stackrel{(1)}{=} f(\langle \phi_1(x), 1 \rangle) \stackrel{(3)}{=} \langle (f_1 \circ \phi_1)(x), 1 \rangle. \text{ Logo,} \\ f_1 \circ \phi_1 &= \phi_2 \circ f_0, \text{ ou seja, } f_1 = \phi_2 \circ f_0 \circ \phi_1^{-1}. \end{aligned}$$

Ainda, observe que se $t \notin \{0, 1\}$, então $f(\langle x, t \rangle) = \langle g(x, t), t \rangle$, onde $g(x, t) \in T$. Estendendo g a uma aplicação $\bar{g} : T \times I \rightarrow T$, por continuidade, temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, 0) &= f_0(x), \text{ pois } \langle f_0(x), 0 \rangle = f(\langle x, 0 \rangle) = \langle \bar{g}(x, 0), 0 \rangle \text{ e} \\ \bar{g}(x, 1) &= f_1(x), \text{ pois } \langle f_1(x), 1 \rangle = f(\langle x, 1 \rangle) = \langle \bar{g}(x, 1), 1 \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, f_0 é homotópica a $f_1 = \phi_2 \circ f_0 \circ \phi_1^{-1}$.

Reciprocamente, se H é uma homotopia entre f_0 e $\phi_2 \circ f_0 \circ \phi_1^{-1}$, defina $f : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ por $f(\langle x, t \rangle) = \langle H(x, t), t \rangle$. Então,

$$f(\langle x, 0 \rangle) = \langle H(x, 0), 0 \rangle = \langle f_0(x), 0 \rangle.$$

■

Proposição 1.2.2 *Existe uma secção σ no diagrama (1.1) se, e somente se, ela existir sobre o 2-esqueleto de $M(\phi_1)$.*

Demonstração: Esta afirmação decorre do fato que nessas condições, a fibra teórica $\mathcal{F}_2$ tem grupos de homotopia iguais a zero, exceto no nível 1. Aliás, pela Observação 1.0.1 (2), e pela sequência exata longa de homotopia dada para um par (veja [10]), temos

$$\pi_j(\mathcal{F}_2) \simeq \pi_{j+1}(T, T - x) = 0.$$

Portanto, para a construção da secção conforme o Teorema 1.0.1, uma vez construída no 2-esqueleto, todas as demais obstruções se anulam. ■

Teorema 1.2.1 *(Critério para 2-extendabilidade, [1], Teorema 4.3.1, p.265) Sejam (X, L) um CW-complexo relativo e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma fibração com fibra $F \subset \tilde{X}$. Consideremos X , L e F conexos por caminho. Uma secção $u : L \rightarrow \tilde{L}$, onde $\tilde{L} = p^{-1}(L)$, pode ser estendida a uma secção u' sobre o 2-esqueleto $X_2 = L \cup X^2$ exatamente quando $i_{\#} : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(\tilde{X})$ é injetor e*

quando existir um homomorfismo $\theta : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\tilde{X})$ que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{L}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}) \\ u_{\#} \uparrow & & \uparrow \theta \\ \pi_1(L) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{p_{\#}} \\ \xrightarrow{Id} \end{array} \pi_1(X)$$

Podemos escolher $u' : X_2 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $u'_{\#} = \theta$. ■

Definição 1.2.1 Dados uma fibração $q : E \rightarrow Y$ com fibra F , conexa por caminhos, e uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, podemos formar o pullback geométrico:

$$E^* = \{(x, z) \in X \times E; f(x) = q(z)\}.$$

$$\begin{array}{ccc} F & & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^* & \xrightarrow{q_2} & E \\ q_1 \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

e o pullback algébrico:

$$\pi_1(X) \bigsqcup \pi_1(E) = \{(\alpha, \beta) \in \pi_1(X) \times \pi_1(E); f_{\#}(\alpha) = q_{\#}(\beta)\}.$$

Observação 1.2.2 Considere a sequência exata de homotopia da fibração q

$$\cdots \pi_1(F) \xrightarrow{i_1} \pi_1(E) \xrightarrow{q_{\#}} \pi_1(Y) \rightarrow \cdots$$

Se i_1 é injetora, então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(F) & \xrightarrow{j} & \pi_1(E^*) & \xrightarrow{q_{1\#}} & \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_0(F) \simeq 1 \\ \downarrow & & \downarrow Id & & \downarrow (q_{1\#}, q_{2\#}) & & \downarrow Id & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(F) & \xrightarrow{i_2} & \pi_1(X) \bigsqcup \pi_1(E) & \xrightarrow{p_1} & \pi_1(X) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

onde $i_2(\beta) = (1, i_1(\beta))$, $p_1(\alpha, \beta) = \alpha$ e $j(\beta) = \beta$. Logo, pelo Lema dos cinco

$$\pi_1(E^*) \simeq \pi_1(X) \bigsqcup \pi_1(E).$$

Note que i_2 é injetora, j é injetora, p_1 é sobrejetora e $\pi_0(F) \simeq 1$, uma vez que F é conexa por caminhos.

Proposição 1.2.3 *Para $M_1 = M(\phi_1)$ e $M_2 = M(\phi_2)$, existe uma secção σ no diagrama (1.1) sobre o 2-esqueleto de M_1 se, e somente se, o diagrama de grupos fundamentais admite um levantamento ψ :*

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\text{Obs. 1.0.1(2)}} \pi_2(T, T-1) & \\
 & \downarrow & \\
 & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi_2))) \simeq \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta) & \\
 \nearrow \psi & \downarrow q_{\#} & \\
 \pi_1(M(\phi_1)) \xrightarrow{(f,g)_{\#}} \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) & &
 \end{array} \tag{1.2}$$

Demonstração: A princípio, observe que existe um homomorfismo ψ que torna o diagrama de grupos fundamentais comutativo se, e somente se, existe um homomorfismo θ que torna o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccccc}
 & \pi_1(E_{S^1}(f, g)) & \xrightarrow{\bar{q}_{(f,g)_{\#}}} & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi_2))) & \\
 \nearrow \theta & \downarrow q_{(f,g)_{\#}} & & \downarrow q_{\#} & \\
 \pi_1(M(\phi_1)) & \xrightarrow{Id} \pi_1(M(\phi_1)) & \xrightarrow{(f,g)_{\#}} & \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) &
 \end{array} \tag{1.3}$$

comutativo.

De fato, se existir θ , então basta definir

$$\psi = \bar{q}_{(f,g)_{\#}} \circ \theta.$$

Por outro lado, temos uma fibração

$$q : E_{S^1}(M(\phi_2)) \rightarrow M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)$$

com fibra $\mathcal{F}_2$, cuja sequência exata de homotopia é dada por

$$\cdots \pi_2(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{i_1} \pi_1(E_{S^1}(M(\phi_2))) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) \rightarrow \cdots$$

Observe que $\pi_2(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2))$ é trivial. De fato, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T & & T \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) & \longrightarrow & M(\phi_2) \\
 \downarrow & & \downarrow p_2 \\
 M(\phi_2) & \xrightarrow{p_2} & S^1
 \end{array}$$

Temos a seguinte sequência exata de homotopia:

$$\cdots \rightarrow \pi_2(T) \simeq 1 \rightarrow \pi_2(M(\phi_2)) \rightarrow \pi_2(S^1) \simeq 1 \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow \cdots$$

logo $\pi_2(M(\phi_2)) \simeq 1$. Ainda pela sequência exata de homotopia:

$$\cdots \rightarrow \pi_2(T) \simeq 1 \rightarrow \pi_2(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) \rightarrow \pi_2(M(\phi_2)) \simeq 1 \rightarrow \cdots$$

segue que $\pi_2(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) \simeq 1$. Assim, i_1 é injetora. Além disso,

$$E_{S^1}^*(M(\phi_2)) = \{(m, (x, w) \in M(\phi_1) \times E_{S^1}(M(\phi_2)); (f, g)(m) = q(x, w)\} = E_{S^1}(f, g).$$

Daí, pela Observação 1.2.2 segue que

$$\pi_1(E_{S^1}(f, g)) \simeq \pi_1(M(\phi_1)) \bigsqcup \pi_1(E_{S^1}(M(\phi_2))).$$

Logo, se existir ψ basta definir $\theta(x) = (x, \psi(x))$. Dessa forma, existir uma secção σ no diagrama (1.1), implica que existe $\theta = \sigma_\#$ no diagrama 1.3. Consequentemente, como observamos, existe ψ .

Por fim, suponha que exista o levantamento ψ como no enunciado. Então existe um homomorfismo θ que torna o diagrama (1.3) comutativo. Considerando a fibração

$$p = q_{(f,g)} : E_{S^1}(f, g) \rightarrow M(\phi_1),$$

com fibra $\mathcal{F}_2$, cuja sequência exata de homotopia é dada por

$$\cdots \rightarrow \pi_2(M(\phi_1)) \simeq 1 \rightarrow \pi_2(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(E_{S^1}(f, g)) \rightarrow \cdots$$

segue que $i_\#$ é injetora. Além disso, dada uma secção $u : L \rightarrow \tilde{L}$, onde $L \subset X$ e $\tilde{L} = p^{-1}(L)$, temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\tilde{L}) & \longrightarrow & \pi_1(E_{S^1}(f, g)) & & \\ \uparrow u_\# & & \uparrow \theta & \searrow p_\# & \\ \pi_1(L) & \longrightarrow & \pi_1(M(\phi_1)) & \xrightarrow{Id} & \pi_1(M(\phi_1)) \end{array}$$

comuta. Portanto, pelo Teorema 1.2.1, u pode ser estendida a uma secção σ sobre o 2-esqueleto de $M(\phi_1) = X$, $X_2 = L \cup X^2$, de modo que $\sigma_\# = \theta$. ■

A proposição anterior fornece uma equivalência entre o problema proposto e encontrar um levantamento no diagrama algébrico (1.2). Deste modo, deve-se calcular os homomorfismos e

grupos fundamentais do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & (1.4) \\
 & \downarrow & \\
 & \pi_1(\mathcal{F}_2) \simeq \pi_2(T, T-1) & \\
 & \downarrow & \\
 & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi_2))) \simeq \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta) & \\
 \nearrow \psi & \downarrow q_{\#} & \\
 \pi_1(M(\phi_1)) & \xrightarrow{(f,g)_{\#}} \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) & \\
 & \downarrow & \\
 & 1 &
 \end{array}$$

Para isso, considere $M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)$ o pullback de $p_2 : M(\phi_2) \rightarrow S^1$ por $p_2 : M(\phi_2) \rightarrow S^1$ e $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 : M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) \rightarrow M(\phi_2)$, as projeções nas primeira e segunda coordenadas, respectivamente. Note que

$$(\langle x, t_1 \rangle, \langle y, t_2 \rangle) \in M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) \Rightarrow p_2(\langle x, t_1 \rangle) = p_2(\langle y, t_2 \rangle) \Rightarrow \langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle.$$

Ainda,

1. $t_i \notin \{0, 1\} \Rightarrow \langle t_i \rangle = \{t_i\}$, $i = 1, 2$ e neste caso, $\langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle \Rightarrow t_1 = t_2$.
2. $t_i \in \{0, 1\} \Rightarrow \langle t_i \rangle = \{0, 1\}$, $i = 1, 2$. Mas em $M(\phi_2)$, temos que $\langle x, 0 \rangle = \langle \phi_2(x), 1 \rangle$, portanto podemos considerar $t_1 = t_2$.

Assim, $M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)$ é dado pelos pares $(\langle x, t \rangle, \langle y, t \rangle)$, tais que $x, y \in T$ e $t \in I = [0, 1]$.

Os próximos resultados exibem os grupos fundamentais dados no diagrama (1.4).

Proposição 1.2.4 ([11], Proposition 1.10) *O grupo fundamental $\pi_1(M(\phi_i))$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(T) \rtimes \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$. Além disso a ação $\mathbb{Z} \xrightarrow{\Gamma} \text{Aut}(\pi_1(T))$ que vem da secção $s_i : S^1 \rightarrow M(\phi_i)$ definida por $s_i(t) = \langle x_i, t \rangle$ é dada por $c_i \cdot \alpha = c_i \alpha c_i^{-1} = \phi_{i\#}(\alpha)$, onde $c_i = p_{i\#} \langle s_i \rangle$ é o gerador de $\pi_1(S^1)$. ■*

Denotando $\mathbf{0} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right\rangle$ e $\mathbf{q} = \left\langle \begin{bmatrix} q \\ q \end{bmatrix}, 0 \right\rangle \in M(\phi_2)$, $0 \neq q$, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.5 ([11], Proposition 1.11) *O grupo fundamental $\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q}))$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(T) \rtimes \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$. Além disso, a ação de $\pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$*

sobre $\text{Aut}(\pi_1(T))$, que vem da secção $s : \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q}))$ onde $s = (s_2 \circ p_2, 1_{M(\phi_2)})_{\#}$, é dada por $\beta \cdot \alpha = \beta \alpha \beta^{-1} = p_{2\#}(\beta) \cdot \alpha$, e a última ação é aquela que vem do fibrado $p_2 : (M(\phi_2), \mathbf{q}) \rightarrow S^1$, isto é, a ação é dada pela composição:

$$\pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}) \xrightarrow{p_{2\#}} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\Gamma} \text{Aut}(\pi_1(T))$$

onde, se denotamos por c o gerador de $\pi_1(S^1)$, então $\Gamma(c) = \phi_{2\#}$, tal que se $p_{2\#}(\beta) = c^k$, então $p_{2\#}(\beta) \cdot \alpha = \phi_{2\#}^k(\alpha)$. ■

Observação 1.2.3 Para o cálculo de $\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta)$, inicialmente se define o homeomorfismo fibrado $h : M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) \rightarrow M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)$ sobre $M(\phi_2)$:

$$h \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, t \right\rangle \right) := \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle \right).$$

Temos que h aplica $M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta$ homeomorficamente em $M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1)$ sobre $M(\phi_2)$, sendo $M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1)$ o espaço total do pullback de $p_2 : M(\phi_2) \rightarrow S^1$ por $p_2|_{M(\phi_2) - S^1} : M(\phi_2) - S^1 \rightarrow S^1$. Além disso, o círculo S^1 em $M(\phi_2)$ é a imagem de

$$c_0(t) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \right\rangle, \forall t \in [0, 1].$$

Assim $\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta)$ é isomorfo a $\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1))$, e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T \times T - \Delta & \xrightarrow{\quad} & T \times (T - 1) \\
 & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{\quad} & T \times T & \xrightarrow{\quad} & T \times T \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta & \xrightarrow{\quad} & M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1) \\
 & \swarrow \iota & \downarrow & \swarrow \gamma & \downarrow (1,i) \\
 M(\phi_1) & \xrightarrow[(f,g)]{\quad} & M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) & \xrightarrow{h} & M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)
 \end{array} \tag{1.5}$$

Portanto, o problema de existência da secção $\sigma : M(\phi_1) \rightarrow E_{S^1}(f, g)$ no diagrama (1.1) é equivalente à existência de um levantamento $\gamma : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1)$ no diagrama (1.5).

Proposição 1.2.6 ([11], Proposition 2.13) O grupo fundamental $\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1), (\mathbf{0}, \mathbf{q}))$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(T) \rtimes \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q})$. Além disso, a ação

de $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q})$ sobre $\text{Aut}(\pi_1(T))$ é dada por $\beta \cdot \alpha = \beta \alpha \beta^{-1} = (p_2|_{M(\phi_2) - S^1})_{\#}(\beta) \cdot \alpha$, onde a última ação é aquela que vem do fibrado $p_2|_{M(\phi_2) - S^1} : M(\phi_2) - S^1 \rightarrow S^1$, como na Proposição 1.2.5. ■

Proposição 1.2.7 *A existência de γ no diagrama (1.5) é equivalente à existência de Γ no diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 & & 1 \\
 & & \downarrow \\
 & & \pi_1(\mathcal{F}_2(M(\phi_2) - S^1)) \simeq \pi_2(T, T - 1) \\
 & & \downarrow \\
 & & \pi_1(M(\phi_2) - S^1) \\
 \nearrow \Gamma & & \downarrow \\
 \pi_1(M(\phi_1)) & \longrightarrow & \pi_1(M(\phi_2)) \\
 & & \downarrow \\
 & & 1
 \end{array} \tag{1.6}$$

onde a seta horizontal indica a aplicação

$$(\tilde{\pi}_2 \circ h \circ (f, g))_{\#} : \pi_1(M(\phi_1)) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2)).$$

Demonstração: A princípio observe que, com o mesmo argumento usado na Proposição 1.2.3, a existência de um levantamento $\gamma : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1)$ no diagrama (1.5) é equivalente à existência de um certo homomorfismo, a nível de grupos fundamentais, $\tilde{\Gamma} : \pi_1(M(\phi_1)) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1))$. Agora, considere

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 : \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) &\rightarrow \pi_1(T) \rtimes \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}) \\
 \eta &\mapsto (i_{1\#}^{-1}(\eta(s \circ \pi_{2\#})(\eta^{-1})), \tilde{\pi}_{2\#}(\eta)),
 \end{aligned}$$

onde $i_{1\#}$ e $\tilde{\pi}_{2\#}$ são as aplicações dadas na sequência exata curta

$$1 \rightarrow \pi_1(T) \xrightarrow{i_{1\#}} \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) \xrightarrow{\tilde{\pi}_{2\#}} \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}) \rightarrow 1,$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 : \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) &\rightarrow \pi_1(T) \rtimes \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) \\
 \eta &\mapsto (\tilde{i}_{1\#}^{-1}(\eta(\tilde{s} \circ \tilde{\pi}_{2\#})(\eta^{-1})), \tilde{\pi}_{2\#}(\eta)),
 \end{aligned}$$

sendo $\tilde{i}_{1\#}$ e $\tilde{\pi}_{2\#}$ as aplicações dadas na sequência exata curta

$$1 \rightarrow \pi_1(T) \xrightarrow{\tilde{i}_{1\#}} \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) \xrightarrow{\tilde{\pi}_{2\#}} \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) \rightarrow 1$$

e $\tilde{s} = (s_2 \circ p_2|_{M(\phi_2)-S^1}, 1_{M(\phi_2)-S^1})_{\#}$.

Temos que $\Phi_1 :: \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) \rightarrow \pi_1(T) \rtimes \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$ e $\Phi_2 : \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) \rightarrow \pi_1(T) \rtimes \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q})$ são isomorfismos dados pelas Proposições 1.2.5 e 1.2.6, respectivamente. Supondo que existe um levantamento $\gamma : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1)$ no diagrama (1.5), temos a existência de um homomorfismo $\tilde{\Gamma} : \pi_1(M(\phi_1)) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} (M(\phi_2) - S^1))$, a nível de grupos fundamentais, assim basta definir $\Gamma(\delta) = \tilde{\pi}_{2\#}(\tilde{\Gamma}(\delta))$. Por outro lado, dado Γ como no diagrama 1.6, defina

$$\tilde{\Gamma}(\delta) = \Phi_2^{-1}(\tilde{i}_{1\#}^{-1}(\tilde{\pi}_{2\#}(\Gamma(\delta))(\tilde{s} \circ \Gamma(\delta^{-1}))), \Gamma(\delta)).$$

Note que escolhido $\tilde{\pi}_{2\#}^{-1}(\Gamma(\delta))$, como $\tilde{i}_{1\#}$ é injetora, segue que $\tilde{i}_{1\#}^{-1}(\tilde{\pi}_{2\#}(\Gamma(\delta))(\tilde{s} \circ \Gamma(\delta^{-1})))$ é unicamente determinado, de modo que $\tilde{\Gamma}(\delta)$ está bem definido. ■

Observação 1.2.4 *Vimos que a existência de σ no diagrama (1.1) é equivalente à existência de γ no diagrama (1.5) que, por sua vez, é equivalente à existência de Γ no diagrama (1.6). Portanto, segue do Teorema 1.0.1 o seguinte resultado:*

Corolário 1.2.1 *Um par de aplicações (f, g) , sobre S^1 , pode ser deformado a um par (f', g') livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, existir Γ no diagrama (1.6). ■*

Reduções no toro e um sistema algébrico de equações

Este capítulo trata brevemente sobre o número de Nielsen, o qual se relaciona com o problema proposto, vide Proposição 2.1.1. O objetivo aqui é classificar todos os T -fibrados sobre S^1 , descrever os grupos e homomorfismos envolvidos no problema proposto, dados no diagrama (1.6) e apresentar uma condição algébrica necessária para um par de aplicações (f, g) ser deformável por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência. Tal condição provém de um sistema algébrico de equações e é denominada equação principal.

2.1 Teoria de coincidência e o número de Nielsen de aplicações do toro.

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações entre CW -complexos finitos. Denotemos

$$\text{Coin}(f, g) = \{x \in X; f(x) = g(x)\}.$$

Considere $x_1, x_2 \in \text{Coin}(f, g)$. Dizemos que x_1 e x_2 são Nielsen equivalentes com respeito a f e g se existe um caminho $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$ e $f \circ \sigma$ é homotópica a $g \circ \sigma$ relativo aos pontos $\{0, 1\}$.

A relação descrita acima é uma relação de equivalência. Deste modo, $\text{Coin}(f, g)$ está particionado em classes de equivalência dessa relação, chamadas classes de coincidência. Uma classe de coincidência $\mathcal{F}$ é dita essencial se dado $x \in \mathcal{F}$ e homotopias $\{f_t\}$, $\{g_t\}$ de $f = f_0$ e $g = g_0$, existir x' pertencente a $\text{Coin}(f_1, g_1)$ e um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ com $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = x'$, tal que $f_t \circ \gamma$ é homotópico a $g_t \circ \gamma$ relativo aos pontos $\{0, 1\}$.

O número de Nielsen coincidência de f e g , $N(f, g)$, é definido como sendo o número de classes de coincidência essenciais. Tal número é um invariante homotópico finito e é um limitante

inferior para o conjunto $Coin(f', g')$ das aplicações f', g' , homotópicas a f e g respectivamente. Para uma melhor descrição do assunto, veja [6] e [14].

Se f e g são aplicações do toro, existe uma caracterização para $N(f, g)$. A saber, seja o toro $T = S^1 \times S^1$. Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência

$$(x_1, y_1) \simeq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \equiv x_2, \text{ e } y_1 \equiv y_2 \text{ mod } (\mathbb{Z}).$$

O conjunto dessas classes de equivalência pode ser identificado com T e a projeção $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ é o revestimento universal. Ademais, temos que $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e duas funções $f_1, f_2 : T \rightarrow T$ são homotópicas se, e somente se, $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$ coincidem. Fixemos um ponto $1 \in T$. Temos que $\pi_1(T, 1)$ é um grupo com dois geradores a e b , que satisfaz a relação $aba^{-1}b^{-1} = 1$, isto é, $ab = ba$. Assim, segue que cada elemento de $\pi_1(T, 1)$ pode ser representado por uma palavra da forma $a^m b^n$; $m, n \in \mathbb{Z}$.

Seja $f : T \rightarrow T$ uma aplicação contínua. Então, $f_{\#} : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$ é um homomorfismo da forma $f_{\#}(a) = a^m b^n$ e $f_{\#}(b) = a^p b^q$. Equivalentemente, olhando $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ com geradores $a = (1, 0)$ e $b = (0, 1)$, temos que $f_{\#} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é um homomorfismo cuja matriz em relação á base canônica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é dada por $\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$.

Vamos denotar $f_{\#}$ por $f(m, n, p, q)$, onde m, n, p, q são as entradas da matriz anterior. Feito essas considerações, temos os seguintes resultados:

Teorema 2.1.1 ([2], p. 122-125) *Se $f_1, f_2 : T \rightarrow T$ são aplicações contínuas com $f_{i\#} = f_i(m_i, n_i, p_i, q_i)$, $i = 1, 2$, então o número de Nielsen coincidência de f_1 e f_2 é dado por*

$$N(f_1, f_2) = \left| \det \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & p_1 - p_2 \\ n_1 - n_2 & q_1 - q_2 \end{pmatrix} \right|.$$

■

Proposição 2.1.1 ([11], Proposition 2.2) *Se $f_1, f_2 : T \rightarrow T$ são aplicações contínuas tais que $N(f_1, f_2) = 0$, então podemos deformar o par (f_1, f_2) a um par (g_1, g_2) livre de coincidência.*

■

2.2 Redução dos fibrados $M(\phi_1)$, $M(\phi_2)$ e das funções

$$f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$$

Nesta seção classifica-se os T -fibrados sobre S^1 (Proposição 2.2.2) e também os pares de aplicações (f, g) , $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ (Teorema 2.2.1).

Retome a questão levantada no capítulo 1, a saber: dadas $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações sobre S^1 , isto é, tais que $p_2 \circ f = p_1$ e $p_2 \circ g = p_1$, almeja-se investigar quando o par (f, g)

pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência.

Pela Proposição 1.2.3, segue que este problema é equivalente a encontrar um levantamento ψ no seguinte diagrama algébrico:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\mathcal{F}_2) \simeq \pi_2(T, T-1) & \\
 & \downarrow & \\
 & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi_2))) \simeq \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2) - \Delta) & \\
 \nearrow \psi & \downarrow q_{\#} & \\
 \pi_1(M(\phi_1)) & \xrightarrow{(f,g)_{\#}} \pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2)) &
 \end{array}$$

com pontos base adequados. O ponto base do domínio de f e g é

$$\mathbf{0} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right\rangle \text{ e pode-se supor que } f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ e } g(\mathbf{0}) = \mathbf{q}, \text{ onde } \mathbf{q} = \left\langle \begin{bmatrix} q \\ q \end{bmatrix}, 0 \right\rangle.$$

Caso contrário, troca-se g por uma aplicação g' homotópica a g que tem a propriedade descrita acima. De fato, isto pode ser feito usando a propriedade do levantamento de homotopia da fibração $p_2 : M(\phi_2) \rightarrow S^1$, com relação ao diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M(\phi_1) \times \{0\} \cup \mathbf{0} \times I & \xrightarrow{\iota} & M(\phi_2) \\
 j \downarrow & \nearrow L & \downarrow p_2 \\
 M(\phi_1) \times I & \xrightarrow{p_1 \circ \mu_1} & S^1
 \end{array}$$

onde $\mu_1 : M(\phi_1) \times I \rightarrow M(\phi_1)$ é a projeção na primeira coordenada, $j : M(\phi_1) \times \{0\} \cup \mathbf{0} \times I \rightarrow M(\phi_1) \times I$ é a inclusão, $\iota|_{M(\phi_1) \times \{0\}} = g$ e $\iota|_{\mathbf{0} \times I}$ é um caminho $c : I \rightarrow M(\phi_2)$ tal que $c(0) = \mathbf{0}$ e $c(1) = \mathbf{q}$. Note que $g' = L_1(L(1))$, satisfaz $g'(0) = L_1(0) = L(0, 1) = \mathbf{q}$.

Denote por

$$B_i = \begin{pmatrix} m_i & p_i \\ n_i & q_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

a matriz dos homomorfismos induzidos sobre o grupo fundamental pela restrição de f e g à fibra T , respectivamente, isto é,

$$(f|_T)_{\#} = f|_T(m_1, n_1, p_1, q_1), \quad (g|_T)_{\#} = g|_T(m_2, n_2, p_2, q_2).$$

Proposição 2.2.1 *Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações tais que $(f|_T)_{\#} = f|_T(m_1, n_1, p_1, q_1)$ e $(g|_T)_{\#} = g|_T(m_2, n_2, p_2, q_2)$. Se o par de aplicações (f, g) pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par de aplicações (f', g')*

livre de coincidência, então $N(f|_T, g|_T) = 0$. Neste caso, decorre que $(m_1 - m_2, p_1 - p_2)$ e $(n_1 - n_2, q_1 - q_2)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Se o par (f, g) pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência, então o par $(f|_T, g|_T)$ pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par $(f'|_T, g'|_T)$ livre de coincidência. Suponha que $N(f|_T, g|_T)$ é diferente de zero, então como $(f'|_T, g'|_T)$ é uma deformação de $(f|_T, g|_T)$, pela definição do número de Nielsen, $(f'|_T, g'|_T)$ deveria possuir pelo menos um ponto de coincidência, o que é um absurdo. Logo, pelo Teorema 2.1.1, segue que

$$\det \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & p_1 - p_2 \\ n_1 - n_2 & q_1 - q_2 \end{pmatrix} = 0,$$

consequentemente, $(m_1 - m_2, p_1 - p_2)$ e $(n_1 - n_2, q_1 - q_2)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$. ■

Observação 2.2.1 *Segue da proposição anterior que se o número de Nielsen de $f|_T$ e $g|_T$, $N(f|_T, g|_T)$, é diferente de zero, então não é possível deformar o par de aplicações (f, g) a um par de aplicações (f', g') livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 .*

O resultado seguinte fornece uma relação entre as matrizes

$$\phi_i = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{3i} \\ a_{2i} & a_{4i} \end{pmatrix} \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} m_i & p_i \\ n_i & q_i \end{pmatrix},$$

onde ϕ_i denota a matriz associada ao homomorfismo induzido $\phi_{i\#} : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$, ou seja, $\phi_{i\#}(a) = a^{a_{1i}}b^{a_{2i}}$ e $\phi_{i\#}(b) = a^{a_{3i}}b^{a_{4i}}$, $i = 1, 2$.

Proposição 2.2.2 (1) $\pi_1(M(\phi_i), \mathbf{0}) = \langle a, b, c_0; [a, b] = 1, c_0ac_0^{-1} = a^{a_{1i}}b^{a_{2i}}, c_0bc_0^{-1} = a^{a_{3i}}b^{a_{4i}} \rangle$, $i = 1, 2$, sendo $c_0 = p_{i\#} \langle s_i \rangle$, onde $s_i : S^1 \rightarrow M(\phi_i)$ é tal que $s_i(t) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \right\rangle = c_0(t)$.

(2) $\phi_2 B_i = B_i \phi_1$, $i = 1, 2$.

(3) Se $N(f|_T, g|_T) = 0$, então $B_2 - B_1$ tem autovalor 0 e autovetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ associado a 0, tal que $\text{mdc}(v_1, v_2) = 1$.

(4) Se v é um autovetor de $B_2 - B_1$ associado a 0, então $\phi_1(v)$ também é um autovetor de $B_2 - B_1$ associado a 0.

(5) Considere w de modo que o par (v, w) gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, onde v é um autovetor de $B_2 - B_1$ associado a 0. Defina o operador linear $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $P(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Considere o homeomorfismo de fibrados (também denotado por P)

$$P : M(\phi_i) \rightarrow M(\phi_i^1), i = 1, 2; P \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle \right) = \left\langle \begin{bmatrix} P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ t \end{bmatrix}, t \right\rangle,$$

onde $\phi_i^1 = P \circ \phi_i \circ P^{-1}$. Então para $B_i^1 = P \circ B_i \circ P^{-1}$, $i = 1, 2$, temos:

(a) Se podemos tomar $w = \phi_1(v)$ de modo que $(v, \phi_1(v))$ gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então

$$B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}, \text{ para } i = 1, 2,$$

é a matriz de $\phi_i^1 : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$.

(b) Se os pares $(v, \phi_1(v))$, $(v, \phi_2(v))$ não geram $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ou seja, $\phi_i(v) = \lambda_i v$ com $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, então

$$B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}, \phi_i^1 = \begin{pmatrix} \lambda_i & a_{3i} \\ 0 & a_{4i} \end{pmatrix}, \text{ com } \lambda_i a_{4i} = \pm 1 \text{ e } \phi_2^1 B_i^1 = B_i^1 \phi_1^1.$$

(c) Se o par $(v, \phi_1(v))$ não gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e o par $(v, \phi_2(v))$ gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ então

$$B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}, \phi_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{31} \\ 0 & a_{41} \end{pmatrix}, \text{ com } \lambda_1 a_{41} = \pm 1,$$

$$\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{32} \\ 1 & a_{42} \end{pmatrix}; a_{32} = \pm 1, \text{ e } \phi_2^1 B_i^1 = B_i^1 \phi_1^1.$$

(d) As condições (a) e (b) determinam os seguintes casos:

Caso I: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{21} & a_{41} \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{22} & a_{42} \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$;
 $\det(\phi_i^1) = \pm 1$ e $\phi_2^1 B_i^1 = B_i^1 \phi_1^1$.

Caso II: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$.

Caso III: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 $a_{32} \neq 0$.

Caso IV: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Caso V: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{32}n = 2m$ e $a_{32}q_i = 2p_i$.

Caso VI: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31} \neq 0$.

Caso VII: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$ e $a_{31}m = a_{32}q_i$.

Caso VIII: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 $a_{31} \neq 0$.

Caso IX: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31} \neq 0$ e $a_{32}q_i = 2p_i$.

Caso X: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31}m - a_{32}q_i = 2p_i$.

Caso XI: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{32}q_i = 0$.

Caso XII: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31}n = 2q_i$ e $a_{32}n = 2m$.

Caso XIII: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31}n = 0$, $a_{32}n = -2m$ e $2p_i = -a_{32}q_i$.

Caso XIV: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31}n = 0$, $a_{32}n = 0$ e $a_{31}m = a_{32}q_i$.

Caso XV: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 $a_{31}m = 0$.

Caso XVI: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$.

Caso XVII: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 $a_{32} \neq 0$.

Caso XVIII: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{31}n = -2q_i$ e $a_{32}n = -2m$.

Caso XIX: $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{32}q_i - a_{31}m = 2p_i$.

(e) As condições dadas em (c) determinam os seguintes casos:

Caso XX: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ m & p_i \end{pmatrix}$.

Caso XXI: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ -m & -p_i \end{pmatrix}$.

Caso XXII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & p_i \end{pmatrix}$; $a_{31} \neq 0$.

Caso XXIII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ -m & -a_{31}m - p_i \end{pmatrix}$; $a_{31} \neq 0$.

Caso XXIV: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ m & a_{31}m - p_i \end{pmatrix}$.

Caso XXV: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & p_i \end{pmatrix}$.

Caso XXVI: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ -m & -p_i \end{pmatrix}$, se $a_{31} = 0$,
 $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & -p_i \end{pmatrix}$, se $a_{31} \neq 0$.

Caso XXVII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ m & p_i - a_{31}m \end{pmatrix}$.

Caso XXVIII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ -m & a_{31}m + p_i \end{pmatrix}$.

Caso XXIX: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & -p_i \end{pmatrix}$.

O Caso I segue de (a). Note que nesta situação, $(p_2 - p_1, q_2 - q_1) = (0, 0)$. Os demais casos seguem de (b) e nestes casos $(p_2 - p_1, q_2 - q_1) \neq (0, 0)$.

Demonstração: Considere os laços em $M(\phi_i)$, $i = 1, 2$, com ponto base $\mathbf{0}$:

$$a(t) = \left\langle \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right\rangle, b(t) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, 0 \right\rangle, c_0(t) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \right\rangle.$$

(1) Pela Proposição 1.2.4 temos que $\pi_1(M(\phi_i)) \simeq \pi_1(T) \rtimes \mathbb{Z}$ e daí temos uma apresentação $\pi_1(M(\phi_i), \mathbf{0}) = \langle a, b, c_0; [a, b] = 1, c_0 a c_0^{-1} = a^{a_{1i}} b^{a_{2i}}, c_0 b c_0^{-1} = a^{a_{3i}} b^{a_{4i}} \rangle$, $i = 1, 2$.

(2) Lembre que $B_i = \begin{pmatrix} m_i & p_i \\ n_i & q_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, denota a matriz do homomorfismo induzido sobre o grupo fundamental pela restrição de f e g à fibra T , respectivamente, sendo f, g aplicações (fibradas) sobre S^1 , ou seja, os homomorfismos induzidos $f_\#$ e $g_\#$ sobre $\pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0})$ e $\pi_1(M(\phi_2), \mathbf{0})$, respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} f_\#(a) &= a^{m_1} b^{n_1}, f_\#(b) = a^{p_1} b^{q_1}, f_\#(c_0) = a^{c_{11}} b^{c_{21}} c_0 \text{ e} \\ g_\#(a) &= a^{m_2} b^{n_2}, g_\#(b) = a^{p_2} b^{q_2}, g_\#(c_0) = a^{c_{12}} b^{c_{22}} c_0. \end{aligned}$$

Como $f : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ é uma aplicação sobre S^1 , segue pela Proposição 1.2.1 que $\phi_2 \circ f|_T \circ \phi_1^{-1}$ é homotópica a $f|_T$. Logo, $\phi_2 \circ f|_T$ é homotópica a $f|_T \circ \phi_1$, consequentemente, $\phi_{2\#} \circ (f|_T)_\# = (f|_T)_\# \circ \phi_{1\#}$. Portanto, $\phi_2 B_1 = B_1 \phi_1$.

Analogamente, como $g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ é uma aplicação sobre S^1 , temos que $\phi_2 B_2 = B_2 \phi_1$.

(3) Se $N(f|_T, g|_T) = 0$, então pelo Teorema 2.1.1, segue que $(m_1 - m_2, p_1 - p_2)$ e $(n_1 - n_2, q_1 - q_2)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$, ou seja, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r(n_2 - n_1, q_2 - q_1) = (m_2 - m_1, p_2 - p_1)$. Assim,

$$B_2 - B_1 = \begin{pmatrix} r(n_2 - n_1) & r(q_2 - q_1) \\ n_2 - n_1 & q_2 - q_1 \end{pmatrix}.$$

Calculando $\det((B_2 - B_1) - \lambda I_2)$, obtemos o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(-rn_2 + rn_1 - q_2 + q_1)$, cujo 0 é raiz. Portanto, 0 é um autovalor de $B_2 - B_1$ e $v = \left(\frac{q_1 - q_2}{L}, \frac{n_2 - n_1}{L}\right)$ é um autovetor associado ao autovalor 0, que satisfaz $\text{mdc}\left(\frac{q_1 - q_2}{L}, \frac{n_2 - n_1}{L}\right) = 1$, onde $L = \text{mdc}(q_1 - q_2, n_2 - n_1)$.

(4) Pelo item (2) temos que $\phi_2 B_1 = B_1 \phi_1$ e $\phi_2 B_2 = B_2 \phi_1$. Supondo que $(B_2 - B_1)v = 0$, temos

$$(B_2 - B_1)\phi_1 v = B_2 \phi_1 v - B_1 \phi_1 v = \phi_2 B_2 v - \phi_2 B_1 v = \phi_2 (B_2 - B_1)v = 0.$$

Portanto o resultado segue.

(5) (a) Suponhamos que o par $(v, w = \phi_1(v))$ gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, onde v é um autovetor de $B_2 - B_1$

associado a 0. Temos que

$$B_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \circ B_1 \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \circ B_1(v) = P \circ B_2(v) = P \circ B_2 \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, usando que $w = \phi_1(v)$ também é um autovetor de $B_2 - B_1$ associado a 0, temos

$$B_1^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \circ B_1(w) = P \circ B_2(w) = B_2^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$, para $i = 1, 2$.

(b) Suponhamos agora que o par (v, w) gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com $w \neq \phi_i(v)$; $i = 1, 2$, sendo v um autovetor de $B_2 - B_1$ associado a 0. Como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned} B_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= B_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \text{ e} \\ B_i^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= P \circ B_i \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \circ B_i(w) = \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Assim, $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$.

Além disso, como o par $(v, \phi_i(v))$ não gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ temos que v e $\phi_i(v)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Z}$, ou seja, $\phi_i(v) = \lambda_i v$; $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$\begin{aligned} \phi_i^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= P \circ \phi_i \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \circ \phi_i(v) = P(\lambda_i v) = \lambda_i P(v) = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e} \\ \phi_i^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= P \circ \phi_i \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \circ \phi_i(w) = \begin{pmatrix} a_{3i} \\ a_{4i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deste modo, $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_i & a_{3i} \\ 0 & a_{4i} \end{pmatrix}$, com $\lambda_i a_{4i} = \pm 1$. Por fim, como

$$B_i^1 = P \circ B_i \circ P^{-1}, \phi_i^1 = P \circ \phi_i \circ P^{-1} \text{ e } \phi_2 B_i = B_i \phi_1, i = 1, 2,$$

temos

$$\begin{aligned} \phi_2^1 B_i^1 &= (P \circ \phi_2 \circ P^{-1})(P \circ B_i \circ P^{-1}) = P \circ \phi_2 \circ B_i \circ P^{-1} = P \circ B_i \circ \phi_1 \circ P^{-1} \\ &= (P \circ B_i \circ P^{-1})(P \circ \phi_1 \circ P^{-1}) = B_i^1 \phi_1^1. \end{aligned}$$

(c) Como em (b), temos que $B_i^1 = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$, $\phi_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{31} \\ 0 & a_{41} \end{pmatrix}$, com $\lambda_1 a_{41} = \pm 1$ e $\phi_2^1 B_i^1 = B_i^1 \phi_1^1$, $i = 1, 2$. Agora,

$$\begin{aligned} \phi_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= P \circ \phi_2 \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \circ \phi_2(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e} \\ \phi_2^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= P \circ \phi_2 \circ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \circ \phi_2 \phi_2(v) = \begin{pmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $\phi_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{32} \\ 1 & a_{42} \end{pmatrix}$, com $a_{32} = \pm 1$.

(d) Todos os casos seguem de (a) e (b). Observamos que o caso I ocorre quando o par $(v, \phi_1(v))$ gera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Neste caso tomamos $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_1(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\phi_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{3i} \\ a_{2i} & a_{4i} \end{pmatrix}$, uma vez que P é a matriz identidade.

(e) Estes casos seguem de (c). ■

Pela Observação 2.2.1 segue que se $N(f|_T, g|_T) \neq 0$, então o par (f, g) não pode ser deformado a um par de aplicações (f', g') livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 . A partir de agora, assume-se sempre que $N(f|_T, g|_T) = 0$. Denote por

$$\begin{aligned} f_{\#} &= f(m_1, n_1, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e} \\ g_{\#} &= g(m_2, n_2, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}), \end{aligned}$$

os homomorfismos que levam

$$\begin{aligned} a &\mapsto a^{m_1} b^{n_1}, b \mapsto a^{p_1} b^{q_1}, c_0 \mapsto a^{c_{11}} b^{c_{21}} c_0 \text{ e} \\ a &\mapsto \bar{e}^{m_2} \bar{d}^{n_2}, b \mapsto \bar{e}^{p_2} \bar{d}^{q_2}, c_0 \mapsto \bar{e}^{c_{12}} \bar{d}^{c_{22}} \bar{c}, \end{aligned}$$

respectivamente, onde $\bar{e}$, $\bar{d}$ e $\bar{c}$ denotam as classes de homotopia de laços em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ ou $\pi_1(M(\phi_2))$ com ponto base $\mathbf{q}$, sendo $\mathbf{q}$ pequeno, positivo.

Devido as relações no grupo $\pi_1(M(\phi_i, \mathbf{0}))$, $m_i, n_i, p_i, q_i, c_{1i}, c_{2i}$, $i = 1, 2$, devem satisfazer as equações, dadas pela seguinte proposição:

Proposição 2.2.3 *Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações sobre S^1 , onde ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem um dos casos dados na Proposição 2.2.2 (5). Se $N(f|_T, g|_T) = 0$, então*

- (i) $(m_1 - m_2, p_1 - p_2)$ e $(n_1 - n_2, q_1 - q_2)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$.
- (ii) $m_i(a_{12} - a_{11}) = a_{21}p_i - a_{32}n_i$ e $n_i(a_{42} - a_{41}) = a_{21}q_i - a_{22}m_i$.
- (iii) $p_i(a_{12} - a_{41}) = a_{31}m_i - a_{32}q_i$ e $q_i(a_{42} - a_{41}) = a_{31}n_i - a_{22}p_i$.

Reciprocamente, dados homomorfismos

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_1(m_1, n_1, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e} \\ \eta_2 &= \eta_2(m_2, n_2, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}),\end{aligned}$$

onde

$$\phi_i \stackrel{\text{notao}}{=} \phi_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{3i} \\ a_{2i} & a_{4i} \end{pmatrix},$$

pertence a um dos casos da Proposição 2.2.2, com $(m_i, n_i, p_i, q_i, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i})$, $i = 1, 2$, satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii), dadas anteriormente, então existem aplicações $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ sobre S^1 , tais que $f_\# = \eta_1$, $g_\# = \eta_2$ e $N(f|_T, g|_T) = 0$.

Demonstração: (i) Segue do Teorema 2.1.1.

As equações (ii) e (iii) seguem do fato que $\phi_2 B_i = B_i \phi_1$ (Proposição 2.2.2 (2)).

Reciprocamente, dados os homomorfismos

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_1(m_1, n_1, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e} \\ \eta_2 &= \eta_2(m_2, n_2, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}),\end{aligned}$$

onde $\phi_i = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{3i} \\ a_{2i} & a_{4i} \end{pmatrix}$ pertence a um dos casos da proposição anterior, com

$$(m_i, n_i, p_i, q_i, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}), i = 1, 2,$$

satisfazendo as equações (i), (ii) e (iii), temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(T) & \xrightarrow{i_1\#} & \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) & \xrightarrow{p_1\#} & \pi_1(S^1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \eta_i | & & \downarrow \eta_i & & \downarrow Id \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(T) & \xrightarrow{i_2\#} & \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{z}_i) & \xrightarrow{p_2\#} & \pi_1(S^1) \longrightarrow 1 \end{array}$$

onde $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{z}_2 = \mathbf{q}$. Assim, $p_{2\#} \circ \eta_i = p_{1\#}$. Agora, como todos os espaços são $K(\pi, 1)$, então existe uma bijeção entre $[M(\phi_1), \mathbf{0}; M(\phi_2), \mathbf{z}_i]$ e $Hom(\pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{z}_i))$, $i = 1, 2$. (Veja [10], Teorema (4.3), cap. V). Portanto, existem

$$f' : (M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow (M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e } g' : (M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}),$$

de modo que

$$[f'] \leftrightarrow \eta_1 \text{ e } [g'] \leftrightarrow \eta_2.$$

Analogamente, da bijeção entre os espaços $[M(\phi_1), \mathbf{0}; S^1, \langle 0 \rangle]$ e $Hom(\pi_1(M(\phi_1) \times I, \mathbf{0} \times I) \rightarrow$

$\pi_1(S^1, \langle \mathbf{0} \rangle)$), segue que existem homotopias

$$H_1, H_2 : (M(\phi_1) \times I, \mathbf{0} \times I) \rightarrow (S^1, \langle 0 \rangle)$$

tais que

$$\begin{aligned} H_1 \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, 0 \right) &= p_2 \circ f' \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, H_1 \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, 1 \right) = p_1 \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, \\ H_2 \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, 0 \right) &= p_2 \circ g' \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, H_2 \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, 1 \right) = p_1 \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, \\ f'_\# &= \eta_1 \quad \text{e} \quad g'_\# = \eta_2. \end{aligned}$$

Ainda, tem-se que $G_i : (M(\phi_1) \times 0, \mathbf{0} \times I) \rightarrow (M(\phi_2), z_i)$, definida por

$$\begin{aligned} G_1 \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, 0 \right) &= f' \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle \right), \\ G_2 \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle, 0 \right) &= g' \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \right\rangle \right) \text{ e} \\ G_i(\mathbf{0} \times I) &= z_i, \end{aligned}$$

torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (M(\phi_1) \times 0, \mathbf{0} \times I) & \xrightarrow{G_i} & (M(\phi_2), z_i) \\ \downarrow j & \nearrow L_i & \downarrow p_2 \\ (M(\phi_1) \times I, \mathbf{0} \times I) & \xrightarrow{H_i} & (S^1, \langle 0 \rangle) \end{array}$$

Como $p_2 : (M(\phi_2), z_i) \rightarrow (S^1, \langle 0 \rangle = \langle 1 \rangle)$ é uma fibração, então existe um levantamento de H_i , $L_i : (M(\phi_1) \times I, \mathbf{0} \times I) \rightarrow (M(\phi_2), z_i)$, isto é, $p_2 \circ L_i = H_i$ e $L_i \circ j = G_i$, $i = 1, 2$. Daí,

$$f = L_1(-, 1) : (M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow (M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e } g = L_2(-, 1) : (M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow (M(\phi_2), \mathbf{q})$$

são aplicações sobre S^1 tais que os homomorfismos induzidos no grupo fundamental coincidem com $\eta_1(m_1, n_1, p_1, q_1, c_{11}, c_{21})$ e $\eta_2(m_2, n_2, p_2, q_2, c_{12}, c_{22})$, respectivamente, pois

$$\begin{aligned} p_2 \circ f &= p_2 \circ L_1(-, 1) = H_1(-, 1) = p_1, \\ p_2 \circ g &= p_2 \circ L_2(-, 1) = H_2(-, 1) = p_1 \text{ e} \\ f_\# &= L_1(-, 1)_\# = L_1(-, 0)_\# = G_1(-, 0)_\# = f'_\# = \eta_1, \\ g_\# &= L_2(-, 1)_\# = L_2(-, 0)_\# = G_2(-, 0)_\# = g'_\# = \eta_2. \end{aligned}$$

Como (m_i, n_i, p_i, q_i) , $i = 1, 2$, satisfazem (i), segue do Teorema 2.1.1 que $N(f|_T, g|_T) = 0$. ■

Teorema 2.2.1 *Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações sobre S^1 , onde ϕ_1 e ϕ_2 pertencem a um dos casos da Proposição 2.2.2 (5). Se $N(f|_T, g|_T) = 0$, então*

$$f_{\#} : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e } g_{\#} : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}),$$

são dadas da seguinte forma:

Caso I: $f(m, n, p, q, c_{11}, c_{21}), g(m, n, p, q, c_{12}, c_{22}), a_{1i}a_{4i} - a_{3i}a_{2i} = \pm 1$,

$$\begin{aligned} m(a_{12} - a_{11}) &= a_{21}p - a_{32}n, \quad n(a_{42} - a_{11}) = a_{21}q - a_{22}m, \\ p(a_{12} - a_{41}) &= a_{31}m - a_{32}q \text{ e } q(a_{42} - a_{41}) = a_{31}n - a_{22}p. \end{aligned}$$

Caso II: $f(m, n, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}), g(m, n, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}); (p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$.

Caso III: $f(m, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(m, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{32} \neq 0$.

Caso IV: $f(m, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(m, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$.

Caso V: $f\left(\frac{a_{32}}{2}n, n, \frac{a_{32}}{2}q_1, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(\frac{a_{32}}{2}n, n, \frac{a_{32}}{2}q_2, q_2, c_{12}, c_{22}\right), q_1 \neq q_2$, se a_{32} é par.

$f\left(a_{32}\frac{n}{2}, n, a_{32}\frac{q_1}{2}, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(a_{32}\frac{n}{2}, n, a_{32}\frac{q_2}{2}, q_2, c_{12}, c_{22}\right); q_1 \neq q_2$, com n par e q_i par, se a_{32} é ímpar.

Caso VI: $f(0, 0, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}); a_{31} \neq 0$ e $(p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$.

Caso VII: $f\left(m, 0, p_1, \frac{a_{31}m}{a_{32}}, c_{11}, c_{21}\right), g\left(m, 0, p_2, \frac{a_{31}m}{a_{32}}, c_{12}, c_{22}\right); a_{31}, a_{32} \neq 0, a_{32}|a_{31}$ ou $a_{32}|m$ e $p_1 \neq p_2$.

Caso VIII: $f(0, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); a_{31} \neq 0$ e $p_1 \neq p_2$.

Caso IX: $f\left(0, 0, \frac{a_{32}}{2}q_1, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(0, 0, \frac{a_{32}}{2}q_2, q_2, c_{12}, c_{22}\right); a_{31} \neq 0$ e $q_1 \neq q_2$, se a_{32} é par.

$f\left(0, 0, a_{32}\frac{q_1}{2}, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(0, 0, a_{32}\frac{q_2}{2}, q_2, c_{12}, c_{22}\right); a_{31} \neq 0, q_1 \neq q_2$ e q_i é par, se a_{32} é ímpar.

Caso X: $f\left(m, 0, \frac{a_{31}m - a_{32}q_1}{2}, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(m, 0, \frac{a_{31}m - a_{32}q_2}{2}, q_2, c_{12}, c_{22}\right); q_1 \neq q_2$ e $a_{31}m - a_{32}q_i$ é par.

Caso XI: $f(0, 0, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}); (p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$, se $a_{32} = 0$.

$f(0, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$, se $a_{32} \neq 0$.

Caso XII: $f\left(a_{32}\frac{n}{2}, n, p_1, a_{31}\frac{n}{2}, c_{11}, c_{21}\right), g\left(a_{32}\frac{n}{2}, n, p_2, a_{31}\frac{n}{2}, c_{12}, c_{22}\right); p_1 \neq p_2$, se n é par.

$f\left(\frac{a_{32}}{2}n, n, p_1, \frac{a_{31}}{2}n, c_{11}, c_{21}\right), g\left(\frac{a_{32}}{2}n, n, p_2, \frac{a_{31}}{2}n, c_{12}, c_{22}\right); p_1 \neq p_2$ e a_{3i} é par, se n é ímpar.

Caso XIII: $f\left(0, 0, -\frac{a_{32}}{2}q_1, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(0, 0, -\frac{a_{32}}{2}q_2, q_2, c_{12}, c_{22}\right); q_1 \neq q_2$, se a_{32} é par e $n = 0$.

$f\left(0, 0, -a_{32}\frac{q_1}{2}, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(0, 0, -a_{32}\frac{q_2}{2}, q_2, c_{12}, c_{22}\right); q_1 \neq q_2$ e q_i é par, se a_{32} é ímpar e $n = 0$.

$f\left(-\frac{a_{32}}{2}n, n, -\frac{a_{32}}{2}q_1, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(-\frac{a_{32}}{2}n, n, -\frac{a_{32}}{2}q_2, q_2, c_{12}, c_{22}\right); a_{31} = 0, q_1 \neq q_2$, se a_{32} é par e $n \neq 0$.

$f\left(-a_{32}\frac{n}{2}, n, -a_{32}\frac{q_1}{2}, q_1, c_{11}, c_{21}\right), g\left(-a_{32}\frac{n}{2}, n, -a_{32}\frac{q_2}{2}, q_2, c_{12}, c_{22}\right); a_{31} = 0, q_1 \neq q_2, n$ é par e q_i é par, se a_{32} é ímpar e $n \neq 0$.

Caso XIV: $f(m, n, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}), g(m, n, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}); (p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$, se $a_{31} = a_{32} = 0$.

$f(m, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(m, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$, se $a_{31} = 0$ e $a_{32} \neq 0$.

$f(0, 0, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}); (p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$, se $a_{31} \neq 0$ e $a_{32} = 0$.

$f\left(m, 0, p_1, \frac{a_{31}m}{a_{32}}, c_{11}, c_{21}\right), g\left(m, 0, p_2, \frac{a_{31}m}{a_{32}}, c_{12}, c_{22}\right); p_1 \neq p_2$ e $a_{32} | a_{31}m$, se $a_{31}, a_{32} \neq 0$.

Caso XV: $f(m, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(m, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$, se $a_{31} = 0$.

$f(0, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$, se $a_{31} \neq 0$.

Caso XVI: $f(0, 0, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}); (p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$.

Caso XVII: $f(0, 0, p_1, 0, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, 0, c_{12}, c_{22}); a_{32} \neq 0$ e $p_1 \neq p_2$.

Caso XVIII: $f\left(\frac{-a_{32}}{2}n, n, p_1, \frac{-a_{31}}{2}n, c_{11}, c_{21}\right), g\left(\frac{-a_{32}}{2}n, n, p_2, \frac{-a_{31}}{2}n, c_{12}, c_{22}\right); p_1 \neq p_2$, se a_{31} é par e a_{32} é par.

$f\left(-a_{32}\frac{n}{2}, n, p_1, -a_{31}\frac{n}{2}, c_{11}, c_{21}\right), g\left(-a_{32}\frac{n}{2}, n, p_2, -a_{31}\frac{n}{2}, c_{12}, c_{22}\right); p_1 \neq p_2$ e n é par, se a_{31} é ímpar e a_{32} é par, ou a_{31} é par e a_{32} é ímpar ou se a_{31} é ímpar e a_{32} é ímpar.

Caso XIX: $f(m, 0, \frac{a_{32}q_1 - a_{31}m}{2}, q_1, c_{11}, c_{21}), g(m, 0, \frac{a_{32}q_2 - a_{31}m}{2}, q_2, c_{12}, c_{22}); q_1 \neq q_2$ e $a_{32}q_1 - a_{31}m$ é par.

Caso XX: $f(m, m, p_1, p_1, c_{11}, c_{21}), g(m, m, p_2, p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 0$.

Caso XXI: $f(m, -m, p_1, -p_1, c_{11}, c_{21}), g(m, -m, p_2, -p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 2$.

Caso XXII: $f(0, 0, p_1, p_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, p_2, c_{12}, c_{22}); a_{31} \neq 0, p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 0$.

Caso XXIII: $f(m, -m, p_1, a_{31}m - p_1, c_{11}, c_{21}), g(m, -m, p_2, a_{31}m - p_2, c_{12}, c_{22}); a_{31} \neq 0, p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 2$.

Caso XXIV: $f(m, m, p_1, a_{31}m - p_1, c_{11}, c_{21}), g(m, m, p_2, a_{31}m - p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 0$.

Caso XXV: $f(0, 0, p_1, p_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = -2$.

Caso XXVI: $f(m, -m, p_1, -p_1, c_{11}, c_{21}), g(m, -m, p_2, -p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2, a_{42} = 0$ e $a_{31} = 0$.

$f(0, 0, p_1, -p_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, -p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2, a_{42} = 0$ e $a_{31} \neq 0$.

Caso XXVII: $f(m, m, p_1, p_1 - a_{31}m, c_{11}, c_{21}), g(m, m, p_2, p_2 - a_{31}m, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = -2$.

Caso XXVIII: $f(m, -m, p_1, a_{31}m + p_1, c_{11}, c_{21}), g(m, -m, p_2, a_{31}m + p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 0$.

Caso XXIX: $f(0, 0, p_1, -p_1, c_{11}, c_{21}), g(0, 0, p_2, -p_2, c_{12}, c_{22}); p_1 \neq p_2$ e $a_{42} = 2$.

Demonstração: A prova segue direto das relações (i), (ii) e (iii) dadas na Proposição 2.2.3. ■

2.3 Os geradores dos grupos fundamentais envolvidos no problema

Nosso objetivo agora é descrever os grupos e homomorfismos dados no diagrama (1.6):

$$\begin{array}{ccc}
 & & 1 \\
 & & \downarrow \\
 & & \pi_1(\mathcal{F}_2(M(\phi_2) - S^1)) \simeq \pi_2(T, T-1) \\
 & & \downarrow \\
 & & \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) \\
 \nearrow \Gamma & & \downarrow i_{\#} \\
 \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) & \xrightarrow{(\tilde{\pi}_2 \circ h \circ (f, g))_{\#}} & \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}) \\
 & & \downarrow \\
 & & 1
 \end{array}$$

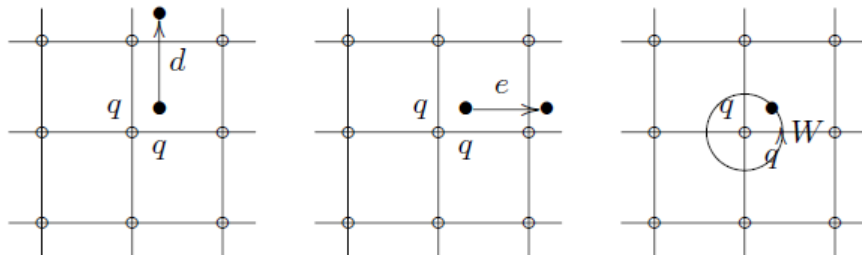
Considere os laços em $\pi_1(M(\phi_1))$, com ponto base $\mathbf{0}$, e os laços em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ ou $\pi_1(M(\phi_2))$ com ponto base $\mathbf{q}$, sendo $\mathbf{q}$ pequeno, positivo e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} q \\ q \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \left\langle \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right\rangle, \quad b(t) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, 0 \right\rangle, \quad c_0(t) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \right\rangle, \\
 e(t) &= \left\langle \begin{bmatrix} q+t \\ q \end{bmatrix}, 0 \right\rangle, \quad d(t) = \left\langle \begin{bmatrix} q \\ q+t \end{bmatrix}, 0 \right\rangle, \quad c(t) = \langle [\gamma(t)], t \rangle, \text{ onde}
 \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t) \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} + t \left(\phi_2 \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} \right), & \text{se } \phi_2 \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -q \\ -q \end{pmatrix}, \\ \text{um arco no sentido anti-horário ao redor da origem de } \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} -q \\ -q \end{pmatrix}, & \\ \text{caso contrário.} & \end{cases}$$

Aqui, supõe-se que $\phi_2 \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix}$ pertence ao quadrado centrado na origem $(0, 0)$ com lado dois.

Considere também $W(t)$ o círculo ao redor da origem, orientado no sentido anti-horário e tendo (q, q) como ponto base.



Denote as classes de homotopia dos laços $a(t)$, $b(t)$ e $c_0(t)$ em $\pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0})$, por a , b e c_0 e as classes de homotopia dos laços $e(t)$, $d(t)$ e $c(t)$ em $\pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$ por $\bar{e}$, $\bar{d}$ e $\bar{c}$, nesta ordem.

Como já observado anteriormente, os homomorfismos

$$\begin{aligned} f_{\#} &= f(m_1, n_1, p_1, q_1, c_{11}, c_{21}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{0}) \text{ e} \\ g_{\#} &= g(m_2, n_2, p_2, q_2, c_{12}, c_{22}) : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}), \end{aligned}$$

levam

$$\begin{aligned} a &\mapsto a^{m_1} b^{n_1}, \quad b \mapsto a^{p_1} b^{q_1}, \quad c_0 \mapsto a^{c_{11}} b^{c_{21}} c_0 \text{ e} \\ a &\mapsto \bar{e}^{m_2} \bar{d}^{n_2}, \quad b \mapsto \bar{e}^{p_2} \bar{d}^{q_2}, \quad c_0 \mapsto \bar{e}^{c_{12}} \bar{d}^{c_{22}} \bar{c}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Teorema 2.3.1 *Sejam ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$, como em um dos casos dados pela Proposição 2.2.2 (5) e seja $(f, g)_{\#}$ o homomorfismo induzido por (f, g) no grupo fundamental. Então:*

(1) $\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) = \langle a, b, \bar{e}, \bar{d}, \hat{c}; [a, b] = 1, [a, \bar{e}] = 1, [a, \bar{d}] = 1, [b, \bar{e}] = 1, [b, \bar{d}] = 1, [\bar{e}, \bar{d}] = 1, \hat{c}a\hat{c}^{-1} = a^{a_{12}}b^{a_{22}}, \hat{c}b\hat{c}^{-1} = a^{a_{32}}b^{a_{42}}, \hat{c}\bar{e}\hat{c}^{-1} = \bar{e}^{a_{12}}\bar{d}^{a_{22}}, \hat{c}\bar{d}\hat{c}^{-1} = \bar{e}^{a_{32}}\bar{d}^{a_{42}} \rangle$, onde $\hat{c}$ é a classe de homotopia do laço dado pelo par de laços $(c_0(t), c(t))$, $\bar{d}$ é a classe de homotopia do laço $(\mathbf{0}, d(t))$, $\bar{e}$ é a classe de homotopia do laço $(\mathbf{0}, e(t))$, b é a classe de homotopia do laço $(b(t), \mathbf{q})$ e a é a classe de homotopia do laço $(a(t), \mathbf{q})$.

(2) $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q})$ é determinado da seguinte forma:

(i) $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = e, cdc^{-1} = d \rangle$.

(ii) $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $a_{32} \neq 0$, $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = e, cdc^{-1} = e^{a_{32}}d \rangle$.

(iii) $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = d^{-1}ed, cdc^{-1} = d^{-1}e^{a_{32}} \rangle$, se $a_{32} \geq -1$.

- $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}d^{-1}(e)de, cdc^{-1} = e^{-1}d^{-1}e(e^{a_{32}}d^{-1})e^{-1}de \rangle$, se $a_{32} \leq -2$.

(iv) $\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = d^{-1}e^{-1}d, cdc^{-1} = d^{-1}e^{-1}(e^{a_{32}}d^{-1})ed \rangle$, se $a_{32} \geq 1$.

- $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}d^{-1}(e^{-1})de, cdc^{-1} = e^{-1}(d^{-1}e^{a_{32}}e) \rangle$, se $a_{32} \leq 0$.

$$\begin{aligned}
(v) \quad \phi_2 &= \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}(e^{a_{32}}d)e \rangle. \\
(vi) \quad \phi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{42} \end{pmatrix}, \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = d, cdc^{-1} = d^{a_{42}}e \rangle. \\
(vii) \quad \phi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_{42} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

- $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}de, cdc^{-1} = e^{-1}d^{a_{42}} \rangle$, se $a_{42} \geq -1$.
- $\pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = d^{-1}e^{-1}ded, cdc^{-1} = d^{-1}e^{-1}d(d^{a_{42}}e^{-1})d^{-1}ed \rangle$, se $a_{42} \leq -2$.

(3) O homomorfismo $\tilde{\pi}_2 \circ h \circ (f, g)_\# : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$ é dado por

$$a \mapsto (\bar{e})^{m_2-m_1}(\bar{d})^{n_2-n_1}, b \mapsto (\bar{e})^{p_2-p_1}(\bar{d})^{q_2-q_1}, c_0 \mapsto (\bar{e})^{c_{12}-c_{11}}(\bar{d})^{c_{22}-c_{21}}\bar{c}.$$

(4) O homomorfismo $i_\# : \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$ é dado por

$$e \mapsto \bar{e}, d \mapsto \bar{d}, c \mapsto \bar{c}.$$

(5) Existe o homomorfismo $\Gamma : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q})$ no diagrama (1.6) se, e somente se, podemos encontrar elementos $X_1, X_2, X_3 \in \pi_2(T, T-1) = \ker(\pi_1(T-1) \rightarrow \pi_1(T))$ tais que:

$$\Gamma(a) = X_1 e^{m_2-m_1} d^{n_2-n_1}, \Gamma(b) = X_2 e^{p_2-p_1} d^{q_2-q_1}, \Gamma(c_0) = X_3 e^{c_{12}-c_{11}} d^{c_{22}-c_{21}} c e$$

$$[\Gamma(a), \Gamma(b)] = 1, \Gamma(c_0)\Gamma(a)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(a^{a_{11}}b^{a_{21}}), \Gamma(c_0)\Gamma(b)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(a^{a_{31}}b^{a_{41}}).$$

Demonstração: (1) Pela Proposição 1.2.5, temos que

$$\pi_1(M(\phi_2) \times_{S^1} M(\phi_2), (\mathbf{0}, \mathbf{q})) \simeq \pi_1(T, \mathbf{0}) \rtimes \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q}) \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
\langle a, b, \bar{e}, \bar{d}, \hat{c}; [a, b] = 1, [a, \bar{e}] = 1, [a, \bar{d}] = 1, [b, \bar{e}] = 1, [b, \bar{d}] = 1, [\bar{e}, \bar{d}] = 1, \hat{c}a\hat{c}^{-1} = \\
a^{a_{12}}b^{a_{22}}, \hat{c}b\hat{c}^{-1} = a^{a_{32}}b^{a_{42}}, \hat{c}\bar{e}\hat{c}^{-1} = \bar{e}^{a_{12}}\bar{d}^{a_{22}}, \hat{c}\bar{d}\hat{c}^{-1} = \bar{e}^{a_{32}}\bar{d}^{a_{42}} \rangle
\end{aligned}$$

é uma apresentação para $\pi_1(T, \mathbf{0}) \rtimes \pi_1(M(\phi_2), \mathbf{q})$.

(2) Os grupos dados de (i) a (v) seguem de [7], Theorem 2.2, p.10. Ainda, se

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ então } \pi_1(M(\phi) - S^1, \mathbf{q}) = \langle e, d, c; cec^{-1} = d, cdc^{-1} = e \rangle.$$

De fato, constrói-se levantamentos dos caminhos c , e e c^{-1} em $(\mathbb{R}^2 - (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) \times I$, denotados por $\tilde{c}$, $\tilde{e}$ e $\tilde{c}^{-1}$, respectivamente, tal que a projeção do caminho justaposto $\tilde{c}\tilde{e}\tilde{c}^{-1}$ em $M(\phi) - S^1$ é cec^{-1} . A saber, considere

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) &= (\gamma(t), t), \\ \tilde{e}(t) &= \left(\phi \begin{pmatrix} q+t \\ q \end{pmatrix}, 1 \right) e \\ \tilde{c}^{-1}(t) &= \left(\gamma(1-t) + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, 1-t \right).\end{aligned}$$

Note que

$$\phi \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -q \\ -q \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\gamma(t) = (1-t) \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix}. \text{ Daí,}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) &= \left(\begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix}, t \right), \\ \tilde{e}(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q+t \\ q \end{pmatrix}, 1 \right) e \\ \tilde{c}^{-1}(t) &= \left(\begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, 1-t \right).\end{aligned}$$

Mas,

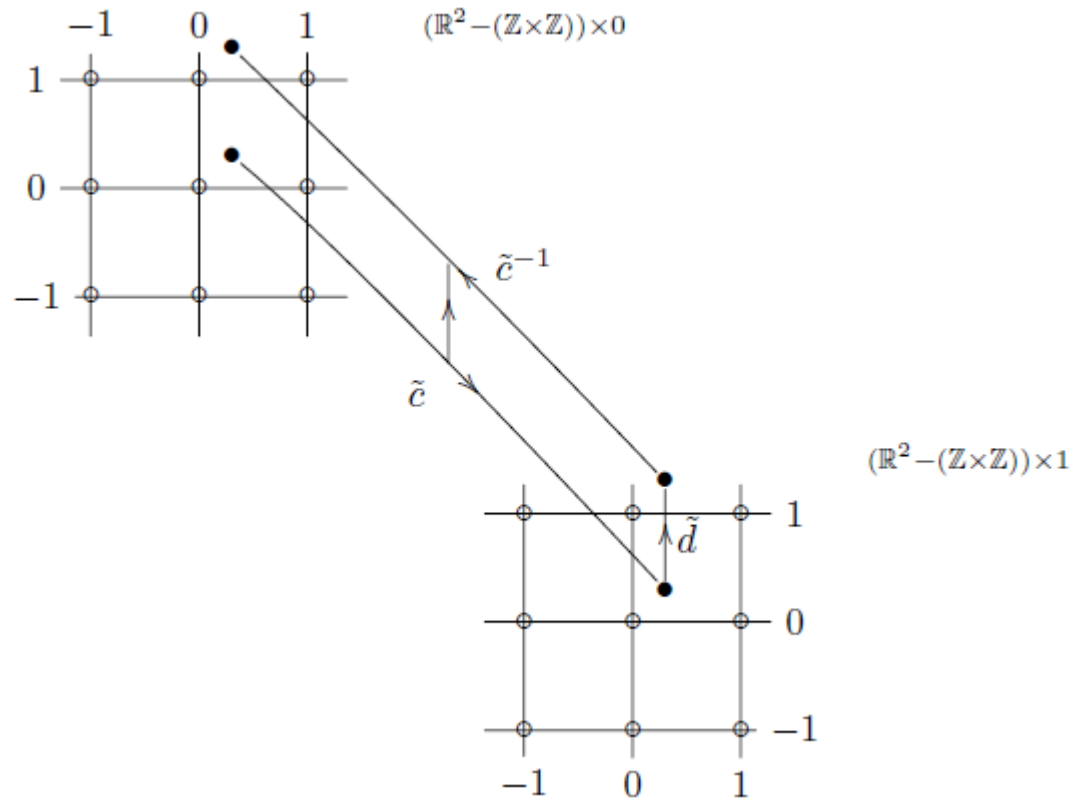
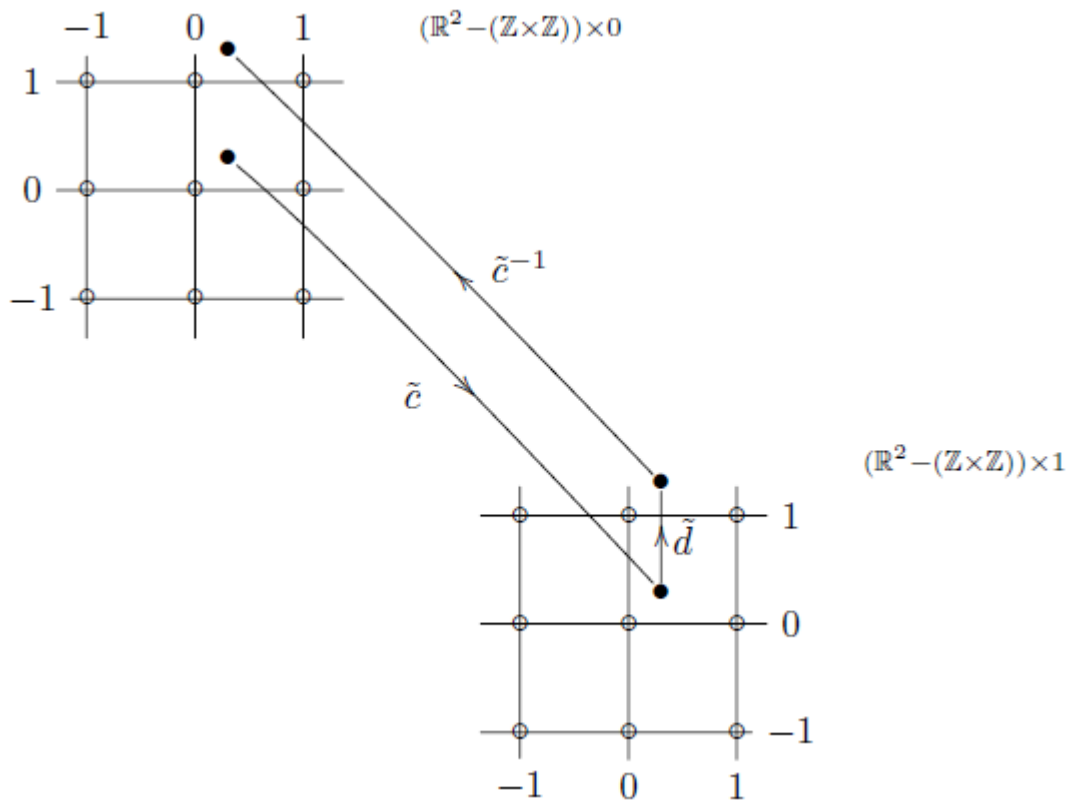
$$\tilde{e}(1) = \left(\begin{pmatrix} q \\ q+1 \end{pmatrix}, 1 \right) e \tilde{c}^{-1}(0) = \left(\begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, 1 \right).$$

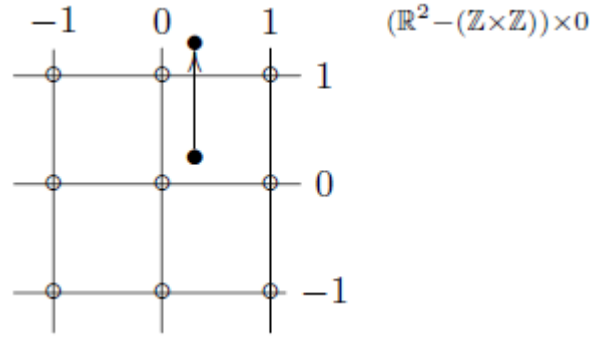
Como $\tilde{e}(1) = \tilde{c}^{-1}(0)$, segue que

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que}$$

$$\tilde{c}^{-1}(t) = \left(\begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1-t \right).$$

A sequência de diagramas dada a seguir mostra uma homotopia entre $\tilde{c}\tilde{e}\tilde{c}^{-1}$ e um caminho na face $(\mathbb{R}^2 - (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) \times 0$ de $(\mathbb{R}^2 - (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) \times I$.





Assim, em $(\mathbb{R}^2 - (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) \times I$ damos uma homotopia do caminho $\tilde{c}\tilde{e}\tilde{c}^{-1}$ a um novo caminho que projeta em d . Portanto, $cec^{-1} = d$. Da mesma forma, mostra-se que $cdc^{-1} = e$.

Além disso,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{42} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Assim, por (ii)} \\ e \mapsto e \mapsto d, d \mapsto e^{a_{42}}d \mapsto d^{a_{42}}e,$$

logo, segue (vi). Tem-se, também que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{42} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Assim, por (iii)} \\ e \mapsto d^{-1}ed \mapsto e^{-1}de, d \mapsto d^{-1}e^{a_{42}} \mapsto e^{-1}d^{a_{42}}, \text{ se } a_{42} \geq -1, \\ e \mapsto e^{-1}d^{-1}ede \mapsto d^{-1}e^{-1}ded \\ d \mapsto e^{-1}d^{-1}e(e^{a_{42}}d^{-1})e^{-1}de \mapsto d^{-1}e^{-1}d(d^{a_{42}}e^{-1})d^{-1}ed, \text{ se } a_{42} \leq -2,$$

deste modo, segue (vii).

Os resultados (3) e (5) estão demonstrados em [11], Theorem 2.7. Para (4), veja [7], Theorem 2.2, p.11. ■

Proposição 2.3.1 *Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações sobre S^1 tais que f e g correspondem ao caso I do Teorema 2.2.1 onde a matriz B_i^1 é fixa, isto é, $B_1^1 = B_2^1$. Então o par (f, g) sempre pode ser deformado a um par (f', g') livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 .*

Demonstração: Neste caso, basta definir um levantamento $\Gamma : \pi_1(M(\phi_1), \mathbf{0}) \rightarrow \pi_1(M(\phi_2) - S^1, \mathbf{q})$ para $(\tilde{\pi}_2 \circ h \circ (f, g))_{\#}$ do seguinte modo:

$$\Gamma(a) = 1, \Gamma(b) = 1 \text{ e } \Gamma(c_0) = e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}c.$$

O próximo resultado deduz uma condição algébrica necessária para um par de aplicações (f, g) ser deformável a um par de aplicações (f', g') livre de coincidência. ■

Proposição 2.3.2 *Se $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ correspondem aos casos Teorema 2.2.1, exceto o caso I, onde $(p_1 - p_2, q_1 - q_2) \neq (0, 0)$ e além disso, se o par (f, g) pode ser deformado a um par (f', g') , livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 , então $X_1 = 1$. Nesta situação, para existir o homomorfismo Γ no diagrama 1.6 é necessário e suficiente resolver apenas a equação*

$$\Gamma(c_0)\Gamma(b)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(a^{a_{31}}b^{a_{41}}) = \Gamma(a^{a_{31}})\Gamma(b^{a_{41}}) = \Gamma(b^{a_{41}}).$$

Demonstração: Nestes casos temos que $(m_2 - m_1, n_2 - n_1) = (0, 0)$, daí pelo Teorema 2.3.1 (5), segue que $\Gamma(a) = X_1 e^{m_2 - m_1} d^{n_2 - n_1} = X_1$, e $[X_1, \Gamma(b)] = 1$. Se $X_1 \neq 1$, então devemos ter $X_1 = u^\alpha$ e $\Gamma(b) = u^\beta$, com $u \in \pi_2(T, T - 1) = \ker i_\#$. Assim $i_\# \circ \Gamma(b) = i_\#(u^\beta) = 1$. Mas, por outro lado, $i_\# \circ \Gamma(b) = (\tilde{\pi}_2 \circ h \circ (f, g))_\#(b) \stackrel{Teo 2.3.1(3)}{=} (\bar{e})^{p_2 - p_1} (\bar{d})^{q_2 - q_1} \neq 1$, uma vez que $(p_2 - p_1, q_2 - q_1) \neq (0, 0)$. Portanto $X_1 = 1$, consequentemente, $\Gamma(a) = 1$.

Além disso, em todos os casos tem-se $a_{21} = 0$, logo as equações $[\Gamma(a), \Gamma(b)] = 1$ e $\Gamma(c_0)\Gamma(a)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(a^{a_{11}}b^{a_{21}})$ estão sempre satisfeitas. Deste modo, segue do Teorema 2.3.1 (5) que para existir o homomorfismo Γ no diagrama 1.6 é necessário e suficiente resolver apenas a equação

$$\Gamma(c_0)\Gamma(b)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(a^{a_{31}}b^{a_{41}}) = \Gamma(a^{a_{31}})\Gamma(b^{a_{41}}) = \Gamma(b^{a_{41}}).$$

■

A equação

$$\Gamma(c_0)\Gamma(b)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(a^{a_{31}}b^{a_{41}}) = \Gamma(a^{a_{31}})\Gamma(b^{a_{41}}) = \Gamma(b^{a_{41}})$$

é denominada equação principal. Note que resolver esta equação significa encontrar X_1, X_2 e $X_3 \in \pi_2(T, T - 1)$ tais que

$$X_3 e^{c_{12} - c_{11}} d^{c_{22} - c_{21}} c \cdot X_2 e^{p_2 - p_1} d^{q_2 - q_1} \cdot c^{-1} d^{c_{21} - c_{22}} e^{c_{11} - c_{12}} X_3^{-1} = (X_2 e^{p_2 - p_1} d^{q_2 - q_1})^{a_{41}}.$$

Propriedades da equação principal

O objetivo deste capítulo é analisar de forma mais específica a equação principal dada pela Proposição 2.3.2. Inicialmente, observamos que essa equação pode ser interpretada como uma equação no grupo livre $\pi_2(T, T-1)$ e que uma solução desta implica na existência de uma solução de outras equações. Também estudamos a equação principal na abelianização de $\pi_2(T, T-1)$ e sobre alguns quocientes deste grupo. Quando a equação em um desses quocientes não tem solução, podemos inferir que a equação original também não tem solução. Por fim, exibimos uma forma da equação principal que é denominada condição necessária.

3.1 Formas da equação principal

Considere a equação principal

$$\Gamma(c_0)\Gamma(b)\Gamma(c_0^{-1}) = \Gamma(b^{a_{41}}).$$

Sejam E e $D \in \pi_1(T-1)$ elementos arbitrários, tais que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1}),$$

onde $j_{\#} : \pi_1(T-1) \rightarrow \pi_1(T)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão $j : T-1 \rightarrow T$. Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.1.1 ([11], Proposition 3.1) *Se E e D satisfazem as condições dadas anteriormente, então a equação principal possui uma das seguintes formas:*

- (1) $X_3EcX_2Dc^{-1}E^{-1}X_3^{-1} = (X_2D)^{a_{41}}$, ou
- (2) $X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D^{-a_{41}})E^{-1} \cdot [E, D^{a_{41}}] \cdot D^{a_{41}}X_3^{-1}D^{-a_{41}} \cdot D^{\frac{a_{41}-1}{2}}X_2^{-a_{41}}D^{\frac{1-a_{41}}{2}} = 1$.

Além disso, $cDc^{-1}D^{-a_{41}} \in \ker j_{\#}$ e a existência de uma solução de uma das equações acima é independente das escolhas de E e D , para $X_2, X_3 \in \ker j_{\#}$. ■

Observe que se $EcDc^{-1}E^{-1}D^{-a_{41}} = 1$, então a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$. Além disso, a proposição anterior motiva a seguinte definição:

Definição 3.1.1 *Um input data para a equação principal é uma quádrupla (ϕ_i, B_i, E, D) , $i = 1, 2$, tal que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1})$.*

Pela Proposição 3.1.1 temos que a existência de uma solução da equação principal depende apenas do input. Observe também que o input define as funções f e g .

Denote por $||_e, ||_d : \pi_1(T-1) \rightarrow \mathbb{Z}$, os homomorfismos que levam uma palavra $w \in \pi_1(T-1)$ na soma dos expoentes de e e na soma dos expoentes de d , respectivamente.

O próximo resultado verifica que fixados ϕ_i , $i = 1, 2$, a existência de uma solução para uma equação dada na Proposição 3.1.1 é equivalente a existência de uma solução de outras equações. A saber:

Teorema 3.1.1 ([7], Theorem 3.3, p.21) *Fixados ϕ_i , B_i , $i = 1, 2$, tem-se:*

- (1) *A equação dada pela Proposição 3.1.1 tem uma solução para dados E e D se, e somente se, tem uma solução para $wEcw^{-1}c^{-1}$ e wDw^{-1} , onde $w \in \pi_1(T-1)$.*
- (2)

$$\begin{aligned} |wEcw^{-1}c^{-1}|_e &= |E|_e + |wEcw^{-1}c^{-1}|_e \\ |wEcw^{-1}c^{-1}|_d &= |E|_d + |wEcw^{-1}c^{-1}|_d. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.1.1 ([11], Corollary 3.4) *Seja H a imagem do homomorfismo:*

$$\begin{aligned} (||_e, ||_d) : \pi_1(T-1) &\rightarrow \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha\alpha^{-1}c^{-1}|_e, |\alpha\alpha^{-1}c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Se dois input datas (ϕ_i, B_i, E, D) e (ϕ_i, B_i, E', D') , $i = 1, 2$, tem a propriedade que os pares $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21})$ e $(c'_{12} - c'_{11}, c'_{22} - c'_{21})$ pertencem à mesma classe de equivalência em $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}$, então existe uma solução para a equação principal com um dos inputs se, e somente se, existe uma solução para o outro.

■

Observação 3.1.1 *Dados ϕ_i , B_i , $i = 1, 2$, e $\mathcal{C}$ um conjunto de representantes das classes de equivalência em $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}$, tem-se que: estudar a equação principal consiste em analisá-la para o conjunto de inputs (ϕ_i, B_i, E, D) tais que $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21})$ percorre $\mathcal{C}$.*

3.2 Equação na abelianização

Como no Teorema 2.3.1(5), denote por $\pi_2 = \pi_2(T, T-1)$ o kernel da aplicação

$$j_{\#} : \pi_1(T-1) = \langle e, d \rangle \rightarrow \pi_1(T) = \langle e, d; [e, d] = 1 \rangle$$

e $B = [e, d]$. Nesta seção estuda-se a equação principal, dada pela Proposição 2.3.2, sobre a abelianização de π_2 :

$$(\pi_2)_{ab} = \frac{\pi_2}{[\pi_2, \pi_2]} = \mathbb{Z}\pi_1(T),$$

e também sobre alguns quocientes deste grupo. Quando a equação em um destes quocientes não tem solução, podemos concluir que a equação original também não tem solução. O grupo π_2 é isomorfo a $\pi_1(\mathcal{F})$, onde $\mathcal{F} \rightarrow E(T-1) \rightarrow T$ é a fibração obtida tornando-se a inclusão $T-1 \xrightarrow{j} T$ numa fibração. Assim o grupo $\pi_1(T)$ atua sobre $H_1(\mathcal{F}) = \frac{\pi_2}{[\pi_2, \pi_2]}$.

Os próximos resultados foram apresentados em [7] e serão utilizados para encontrar soluções da equação principal em alguns casos específicos.

Proposição 3.2.1 ([7], Proposição 3.5, p.22) (1) *Temos*

$$H_1(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}\pi_1(T) \simeq \bigoplus_{x,y \in \mathbb{Z}} B_{e^x d^y},$$

onde $B_{e^x d^y} = B_{(x,y)} = \mathcal{A}(e^x d^y [e, d] d^{-y} e^{-x})$ é um gerador de uma cópia de $\mathbb{Z}$. Aqui

$\mathcal{A} : \pi_2(T, T-1) = \pi_2 \rightarrow \frac{\pi_2}{[\pi_2, \pi_2]} = \mathbb{Z}\pi_1(T)$ é a projeção natural.

(2) Se, por meio deste isomorfismo, um elemento de $H_1(\mathcal{F})$ corresponde ao gerador 1_w da cópia de $\mathbb{Z}$, indexado por um elemento $w \in \pi_1(T)$, então a ação de $\alpha \in \pi_1(T)$ sobre B_w é o gerador da cópia de $\mathbb{Z}$ indexado pelo produto αw , a saber $B_{\alpha w}$. ■

Teorema 3.2.1 ([7], Teorema 3.6, p.23) *Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}\pi_1(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo aumentação, isto é, $\varepsilon(B_w) = 1 \in \mathbb{Z}, \forall w \in \pi_1(T)$. Temos que o homomorfismo $\varepsilon \circ \mathcal{A}$ satisfaz:*

(1) $\varepsilon \circ \mathcal{A}(\alpha X \alpha^{-1}) = \varepsilon \circ \mathcal{A}(X), \forall \alpha \in \pi_1(T-1), \forall X \in \pi_2(T, T-1)$.

(2) $\varepsilon \circ \mathcal{A}([e^{x_1} d^{y_1}, e^{x_2} d^{y_2}]) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

(3) $\varepsilon \circ \mathcal{A}([X e^{x_1} d^{y_1}, W e^{x_2} d^{y_2}]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([e^{x_1} d^{y_1}, e^{x_2} d^{y_2}]), \forall X, W \in \pi_2(T, T-1)$.

(4) Se $c \in \pi_1(M(\phi_2) - S^1)$, então

$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cXc^{-1}) = [\text{sgn det}(\phi_2)] \varepsilon \circ \mathcal{A}(X), \forall X \in \pi_2(T, T-1)$. ■

Observação 3.2.1 $\mathcal{A}(\alpha X \alpha^{-1}) = j_{\#}(\alpha) \cdot \mathcal{A}(X)$, onde $j_{\#} : \pi_1(T-1) \rightarrow \pi_1(T)$. Se $j_{\#}(\alpha) = e^m b^n$ e $\mathcal{A}(X) = B_{(x_1, y_1)}^{t_1}$, então $j_{\#}(\alpha) \cdot \mathcal{A}(X) = B_{(x_1+m, y_1+n)}^{t_1}$.

Agora, vamos olhar a equação principal na abelianização de $\pi_2(T, T-1)$, que é $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ e em um quociente de $\mathbb{Z}\pi_1(T)$, $\mathbb{Z}\tilde{H}$, onde $\tilde{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}$, sendo $\tilde{H} = \langle (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}), (p_2 - p_1, q_2 - q_1) \rangle$.

Denote por $\bar{\mathcal{A}}(x)$ a imagem de $x \in \pi_2(T, T-1)$ em $\mathbb{Z}\tilde{H}$.

Proposição 3.2.2 ([7], Proposição 3.7, p.24) *Sejam E e D tais que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}} d^{c_{22}-c_{21}})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1} d^{q_2-q_1})$. Então,*

(1) *A equação principal é da forma:*

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1}) \cdot \mathcal{A}(E(cDc^{-1}D^{-a_{41}})E^{-1}) \cdot \mathcal{A}([E, D^{a_{41}}]) \cdot \mathcal{A}(D^{a_{41}}X_3^{-1}D^{-a_{41}}) \cdot \mathcal{A}(D^{\frac{a_{41}-1}{2}}X_2^{-a_{41}}D^{\frac{1-a_{41}}{2}}) = 1,$$

na abelianização $\mathbb{Z}\pi_1(T)$, onde $X_2, X_3 \in \pi_2(T, T-1)$.

(2) A equação principal é da forma:

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D^{-a_{41}}) \cdot \bar{\mathcal{A}}([E, D^{a_{41}}]) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-a_{41}}) = 1,$$

em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, onde $X_2 \in \pi_2(T, T-1)$.

■

Corolário 3.2.1 *Aplicando o homomorfismo $\varepsilon : \mathbb{Z}\pi_1(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ ao lado esquerdo da equação dada em (1) na proposição anterior, obtém-se a seguinte equação*

$$[\text{sgn det}(\phi_2)]\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-a_{41}}) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})([E, D^{a_{41}}]) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2^{-a_{41}}) = 0.$$

■

Note que encontrar uma solução para a equação principal da forma como está no corolário anterior é uma condição necessária para que um par de aplicações (f, g) possa ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') livre de coincidência, onde $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ correspondem aos casos do Teorema 2.2.1, exceto no caso I (veja a Proposição 2.3.2), deste modo, a condição dada pelo corolário anterior será denominada condição necessária.

Solução do problema proposto através da resolução da equação principal

Este capítulo apresenta a solução do problema proposto nesta tese, classificando todos os pares de aplicações (f, g) , $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ que podem ser deformados por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') , $f', g' : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$, livre de coincidência. Muitas das ideias abordadas para resolver este problema foram inspiradas nas ideias dadas em [11] que investiga esta questão para pares (f, g) , $f, g : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$. Dos capítulos anteriores inferimos que solucionar este problema consiste em encontrar soluções para a equação principal. Uma vez encontrado um sistema qualquer de solução, temos que a equação principal admite a solução trivial, desta forma, sempre que for possível resolver a equação principal, apresenta-se sua solução trivial. Nas situações em que não existe solução para esta equação, conclui-se que não é possível obter a deformabilidade desejada. Uma breve descrição da técnica utilizada para decidir se a equação principal admite, ou não, solução é dada do seguinte modo:

- Primeiramente verifica-se qual é a condição necessária dada pelo Corolário 3.2.1 e o conjunto $\mathcal{C}$ de classes de equivalência em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/H$, dado no Corolário 3.1.1. Este conjunto irá determinar o input data a ser considerado.
- Então, procura-se adequadamente algum par $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) \in \mathcal{C}$ de modo que os elementos E e D que correspondem ao input data (ϕ_i, B_i, E, D) , $i = 1, 2$, satisfaçam

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-a_{41}} = 1.$$

Isso significa que a equação principal, dada pela Proposição 3.1.1(2), admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

- Em algumas situações, há uma grande dificuldade em encontrar E e D de modo a resolverem a equação acima. Nestes casos, a ideia é tentar mostrar que para algumas classes $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) \in \mathcal{C}$, a equação principal não admite

solução em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ ou em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ e daí usar o Corolário 3.1.1 e a Proposição 3.2.2 para concluir que não é possível obter a deformabilidade desejada. Durante a análise deste problema, ocorreram situações em a equação em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ ou em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ admitiram soluções. Nestes casos, foi possível deduzir, através destas soluções, E e D de modo a induzirem a solução trivial para a equação original.

Segue o principal resultado deste trabalho:

Teorema 4.0.2 *Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações que preservam fibra sobre S^1 . Então, o par (f, g) pode ser deformado a um par (f', g') livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, ocorrer uma das seguintes situações:*

- (1) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem ao caso I.
- (2) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem a um dos casos II, III, VI, VII, X, XII, XIII, XV, XVI, XVII, XXI, XXIII, XXIV, XXVI ou XXIX e $\det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & q_2 - q_1 \end{pmatrix} = 0$.
- (3) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem a um dos casos IV, VIII ou XVIII e

$$(p_2 - p_1)[1 - (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2},$$

exceto quando

- $a_{32} = 2r + 1$ e $2 \nmid y = c_{22} - c_{21}$ é par, ou
- $a_{32} = 2r$, $y = c_{22} - c_{21} = 0$ e $x = c_{11} - c_{12} = 0$, ou
- $a_{32} = 2r$, $y = c_{22} - c_{21} = 0$, $0 \neq x = c_{11} - c_{12} = 2^a(2k + 1)$; $a \in \mathbb{N}^*$ (x é par, diferente de zero) e $s \neq 2^at$.

- (4) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem a um dos casos V, IX ou XIX e

$$(a) \ a_{32} = 2r,$$

$(q_2 - q_1)[(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) - 1] \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando $q_2 - q_1 = 2^{r_1}d_1$, onde d_1 é ímpar e $c_{22} - c_{21} = 2^{r_2}d_2$, com d_2 ímpar, $1 < r_1 \leq r_2$ e $(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) \equiv 0 \pmod{2}$, ou

$$(b) \ a_{32} = 2r + 1,$$

$(t_2 - t_1)[1 + (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2}$, onde $t_i = \frac{q_i}{2}$, exceto quando $\frac{2(t_2 - t_1)}{L} = 2u + 1$ e $c_{22} - c_{21} = 2l$, onde $L = \text{mdc}(2(t_2 - t_1), c_{22} - c_{21})$.

- (5) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem a um dos casos XI ou XIV e

$$(p_2 - p_1)[1 + (q_1 - q_2) + (c_{21} - c_{22})] + (q_2 - q_1)[1 + (c_{11} - c_{12})] \equiv 0 \pmod{2},$$

exceto quando $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

(6) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem a um dos casos XXV ou XXVII e $(p_2 - p_1)[(c_{22} - c_{21}) - (c_{12} - c_{11}) - 1] \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

(7) ϕ_i e B_i , $i = 1, 2$ pertencem a um dos casos XX, XXII ou XXVIII e $(p_2 - p_1)[(c_{12} - c_{11}) - (c_{22} - c_{21}) - (p_2 - p_1)] \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando

- $c_{22} - c_{21} = 0$ ou
- $c_{22} - c_{21} = 2^a(2k - 1)$; $a, k \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ e $p_2 - p_1 \neq 2^a s$.

Demonstração:

(1) Foi resolvido na Proposição 2.3.1. Observe que nestes casos temos

$$(p_2 - p_1, q_2 - q_1) = (0, 0).$$

Nas próximas situações assume-se que $(p_2 - p_1, q_2 - q_1) \neq (0, 0)$.

(2) A princípio considere os seguintes casos:

Caso II: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$,

Caso VI: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$; $a_{31} \neq 0$ e

Caso XVI: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$.

Nestes casos temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1})$, logo $E = Ze^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}$, $D = We^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1}$; $Z, W \in \pi_2(T, T-1)$. As relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$cec^{-1} = e, \text{ e } cdc^{-1} = d.$$

Note que em todos os casos temos que $a_{41} = 1$. Logo, a equação a ser resolvida (equação principal), dada pela Proposição 3.1.1 (2) é:

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1} \cdot [E, D] \cdot DX_3^{-1}D^{-1} \cdot X_2^{-1} = 1.$$

Além disso, temos a condição necessária (dada pelo Corolário 3.2.1):

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0.$$

Mas $cDc^{-1}D^{-1} = 1$, pois c atua como a identidade. Assim, a condição necessária é $\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0$. Ainda, temos que

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) \stackrel{Teo 3.2.1(3)}{=} \varepsilon \circ \mathcal{A}([e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}, e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1}]) \stackrel{Teo 3.2.1(2)}{=} \det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & q_2 - q_1 \end{pmatrix},$$

consequentemente, a condição necessária é $\det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & q_2 - q_1 \end{pmatrix} = 0$.

Por outro lado, verifiquemos se esta condição é suficiente. Considere $L = \text{mdc}(p_2 - p_1, q_2 - q_1)$ e sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $(p_2 - p_1, q_2 - q_1) = L(k_1, k_2)$. Se o determinante dado anteriormente é 0, então existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = t(k_1, k_2)$. Tome $v = e^{k_1} d^{k_2}$, $E = v^t$ e $D = v^L$. Deste modo,

$$cDc^{-1}D^{-1} = cv^t c^{-1} v^{-t} = v^t v^{-t} = 1 \text{ e } [E, D] = v^t v^L v^{-t} v^{-L} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

Agora, considere os casos:

Caso III: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a_{32} \neq 0$,

Caso VII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$; $a_{31} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$, $a_{32}q_i = a_{31}m$ e

Caso XVII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a_{32} \neq 0$.

Note que no caso VII, $q_1 = q_2 = \frac{a_{31}m}{a_{32}}$. Assim, nestes casos temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$ e as relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$cec^{-1} = e, \text{ e } cdc^{-1} = e^{a_{32}}d.$$

Além disso, em todos os casos temos que $a_{41} = 1$. Logo, a equação principal é dada por:

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1} \cdot [E, D] \cdot DX_3^{-1}D^{-1} \cdot X_2^{-1} = 1,$$

e a condição necessária é:

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0.$$

Mas $\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) = \varepsilon \circ \mathcal{A}(ce^{p_2-p_1}c^{-1}e^{p_1-p_2}) = \varepsilon \circ \mathcal{A}(e^{p_2-p_1}e^{p_1-p_2}) = 0$ e $\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}, e^{p_2-p_1}]) = \det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & 0 \end{pmatrix} = (p_1 - p_2)(c_{22} - c_{21})$, consequentemente, como $p_1 \neq p_2$, a condição necessária é $c_{22} = c_{21}$.

Por outro lado, se $c_{22} = c_{21}$, tome $E = e^{c_{12}-c_{11}}$ e $D = e^{p_2-p_1}$. Deste modo,

$$[E, D] = e^{c_{12}-c_{11}}e^{p_2-p_1}e^{c_{11}-c_{12}}e^{p_1-p_2} = 1,$$

portanto a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

Para os casos:

Caso X: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$; $a_{31}m - a_{32}q_i = 2p_i$ e

Caso XIII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$; $a_{31}n = 0$, $a_{32}n = -2m$ e $2p_i = -a_{32}q_i$.

Temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}})$, $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1})$ e as relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} cec^{-1} &= d^{-1}ed, \quad cdc^{-1} = d^{-1}e^{a_{32}}, \quad \text{se } a_{32} \geq -1, \\ cec^{-1} &= e^{-1}d^{-1}(e)de, \quad cdc^{-1} = e^{-1}d^{-1}e(e^{a_{32}}d^{-1})e^{-1}de, \quad \text{se } a_{32} \leq -2. \end{aligned}$$

Nestes casos temos $a_{41} = -1$, daí a equação principal é da forma:

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D)E^{-1} \cdot [E, D^{-1}] \cdot D^{-1}X_3^{-1}D \cdot D^{-1}X_2D = 1, \quad (4.1)$$

e a condição necessária é:

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = 0.$$

Além disso, $2(p_2 - p_1) = -a_{32}(q_2 - q_1)$. Deste modo, $2|a_{32}$ ou $2|(q_2 - q_1)$. Se $2|a_{32}$, tome $v = e^{-a_{32}/2}d$, caso contrário, se $2|(q_2 - q_1)$, tome $v = de^{-a_{32}}d$.

(I) Considere $a_{32} \geq -1$. Temos

$$ce^{-a_{32}/2}dc^{-1} = d^{-1}e^{a_{32}/2}, \quad cde^{-a_{32}}dc^{-1} = d^{-1}e^{a_{32}}d^{-1}.$$

Assim, se $2|a_{32}$ ou $2|(q_2 - q_1)$, temos que $cvc^{-1} = v^{-1}$. Dessa forma,

- Se $2|a_{32}$, tome $D = v^{q_2-q_1} = (e^{-a_{32}/2}d)^{q_2-q_1}$. Daí,

$$cDc^{-1}D = cv^{q_2-q_1}c^{-1}v^{q_2-q_1} = v^{q_1-q_2}v^{q_2-q_1} = 1.$$

- Se $2|(q_2 - q_1)$, tome $D = v^{(q_2-q_1)/2} = (de^{-a_{32}}d)^{(q_2-q_1)/2}$. Daí,

$$cDc^{-1}D = cv^{(q_2-q_1)/2}c^{-1}v^{(q_2-q_1)/2} = v^{(q_1-q_2)/2}v^{(q_2-q_1)/2} = 1.$$

Portanto, nas duas situações tem-se $\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) = 0$.

Ainda, como $[E, D^{-1}]D^{-1}[E, D]D = 1$, segue pelo Teorema 3.2.1(1) que

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) &= -\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = -\det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & \frac{-a_{32}(q_2 - q_1)}{2} \\ c_{22} - c_{21} & q_2 - q_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} -(q_2 - q_1)[(c_{12} - c_{11}) + \frac{a_{32}}{2}(c_{22} - c_{21})], & \text{se } 2|a_{32}, \\ -\frac{(q_2 - q_1)}{2}[2(c_{12} - c_{11}) + a_{32}(c_{22} - c_{21})], & \text{se } 2|(q_2 - q_1). \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, se $2|a_{32}$ ou $2|(q_2 - q_1)$, temos que a condição necessária é

$$\frac{-(q_2 - q_1)[2(c_{12} - c_{11}) + a_{32}(c_{22} - c_{21})]}{2} = 0,$$

como $q_1 \neq q_2$, isto significa que

$$2(c_{12} - c_{11}) + a_{32}(c_{22} - c_{21}) = 0.$$

Seja H a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} (| |e, | |d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e &\mapsto (|ece^{-1}c^{-1}|_e, |ece^{-1}c^{-1}|_d) = (|ed^{-1}e^{-1}d|_e, |ed^{-1}e^{-1}d|_d) = (0, 0), \\ d &\mapsto (|dcd^{-1}c^{-1}|_e, |dcd^{-1}c^{-1}|_d) = (|de^{-a_{32}}d|_e, |de^{-a_{32}}d|_d) = (-a_{32}, 2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (a_{32}, -2) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (a_{32}, -2), (-r, 1) \rangle}{\langle (a_{32}, -2) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } a_{32} = 2r + 1, \\ \frac{\langle (-1, 0), (r, -1) \rangle}{\langle (a_{32}, -2) \rangle} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } a_{32} = 2r. \end{cases}$$

Deste modo, temos as seguintes possibilidades:

(a) $a_{32} = 2r + 1$.

Neste caso, um conjunto de representantes de E é dado pelos elementos da forma $(0, y)$, onde as coordenadas são relativas à base $\{(a_{32}, -2), (-r, 1)\}$ e assim

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = 0(a_{32}, -2) + y(-r, 1) = (-yr, y).$$

Logo, a condição necessária é:

$$2(-yr) + (2r + 1)(y) = 0, \text{ ou seja, } y = 0. \text{ Daí,}$$

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0) \text{ e } j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0).$$

Observe ainda que, neste caso, $2|(q_2 - q_1)$, assim $j_{\#}(D) = j_{\#}(de^{-(2r+1)}d)^{\frac{(q_2-q_1)}{2}}$. Então, tomando $E = 1$ e $D = v^{(q_2-q_1)/2}$, onde $v = de^{-a_{32}}d$, segue que $EcDc^{-1}E^{-1}D = 1$. Portanto a equação principal admite a solução trivial.

(b) $a_{32} = 2r$.

Neste caso, um conjunto de representantes de E consiste de elementos da forma $(x, \bar{y})$, onde (x, y) são as coordenadas relativas à base $\{(-1, 0), (r, -1)\}$ e $\bar{y} = y \bmod 2$. Assim,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = x(-1, 0) + y(r, -1) = (-x + yr, -y) = (-x, 0) \text{ ou } (-x + r, -1).$$

- Se $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-x, 0)$, temos que a condição necessária é $-2x = 0$, isto é, $x = 0$. Daí, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$ de modo que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{-r(q_2-q_1)}d^{q_2-q_1})$. Note que $2|a_{32} = 2r$, então tomando $E = 1$ e $D = v^{q_2-q_1}$, sendo $v = e^{-r}d$, segue que $EcDc^{-1}E^{-1}D = 1$. Portanto a equação principal admite a solução trivial.
- Se $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-x + r, -1)$, obtem-se a condição necessária $-2x + 2r - 2r = 0$, ou seja, $x = 0$. Assim, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (r, -1)$ e $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-r}d^{-1})$. Como em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $(r, -1)$ está na mesma classe que $(-r, 1)$, podemos tomar E de modo que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-r}d)$. Além disso, $j_{\#}(D) = j_{\#}((e^{-r}d)^{q_2-q_1})$. Então, tomamos $E = e^{-r}d$ e $D = (de^{-r})^{q_2-q_1}$, de modo a obtermos

$$\begin{aligned} EcDc^{-1}E^{-1}D &= e^{-r}d(d^{-1}e^r e^r d^{-1}e^{-r}d)^{q_2-q_1}d^{-1}e^r(de^{-r})^{q_2-q_1} \\ &= (e^r d^{-1})^{q_2-q_1}(de^{-r})^{q_2-q_1} = (e^r d^{-1})^{q_2-q_1}(e^r d^{-1})^{q_1-q_2} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial.

Repare que nos cálculos anteriores utiliza-se a ação dada para $a_{32} \geq -1$.

(II) Considere, agora, $a_{32} \leq -2$.

Neste caso, temos a seguinte apresentação de $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$:

$$\langle e, d, c; cec^{-1} = \beta e \beta^{-1}, cdc^{-1} = \beta(e^{a_{32}}d^{-1})\beta^{-1} \rangle, \text{ onde } \beta = e^{-1}d^{-1}e$$

Assim, se $2|a_{32}$, então

$$\begin{aligned} cvc^{-1} &= ce^{-a_{32}/2}dc^{-1} = \beta e^{-a_{32}/2}(e^{a_{32}}d^{-1})\beta^{-1} = \beta e^{a_{32}/2}d^{-1}\beta^{-1} \\ &= \beta dv^{-1}d^{-1}\beta^{-1} = [e^{-1}, d^{-1}]v^{-1}[d^{-1}, e^{-1}], \end{aligned}$$

e se $2|(q_2 - q_1)$, então

$$\begin{aligned} cvc^{-1} &= cde^{-a_{32}}dc^{-1} = \beta e^{a_{32}}d^{-1}d^{-1}\beta^{-1} = \beta dv^{-1}d^{-1}\beta^{-1} \\ &= [e^{-1}, d^{-1}]v^{-1}[d^{-1}, e^{-1}]. \end{aligned}$$

Dessa forma,

- Se $2|a_{32}$, tome $D = v^{q_2 - q_1} = (e^{-a_{32}/2}d)^{q_2 - q_1}$. Daí

$$\begin{aligned} cDc^{-1}D &= cv^{q_2 - q_1}c^{-1}v^{q_2 - q_1} = [e^{-1}, d^{-1}]v^{q_1 - q_2}[d^{-1}, e^{-1}]v^{q_2 - q_1} = [[e^{-1}, d^{-1}], v^{q_1 - q_2}], \text{ e} \\ \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) &= \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{32}(q_1 - q_2)}{2} \\ 0 & q_1 - q_2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

- Se $2|(q_2 - q_1)$, tome $D = v^{(q_2 - q_1)/2} = (v = de^{-a_{32}}d)^{(q_2 - q_1)/2}$. Daí,

$$cDc^{-1}D = cv^{(q_2 - q_1)/2}c^{-1}v^{(q_2 - q_1)/2} = [[e^{-1}, d^{-1}], v^{(q_1 - q_2)/2}], \text{ e } \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) = 0.$$

Deste modo, assim como em **(I)**, obtem-se a condição necessária:

$$2(c_{12} - c_{11}) + a_{32}(c_{22} - c_{21}) = 0.$$

Considere H a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} (| | _e, | | _d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e &\mapsto (|ece^{-1}c^{-1}|_e, |ece^{-1}c^{-1}|_d) = (|d^{-1}e^{-1}de|_e, |d^{-1}e^{-1}de|_d) = (0, 0), \\ d &\mapsto (|dcd^{-1}c^{-1}|_e, |dcd^{-1}c^{-1}|_d) = (|de^{-1}d^{-1}e(de^{-a_{32}})e^{-1}de|_e, |de^{-1}d^{-1}e(de^{-a_{32}})e^{-1}de|_d) = (-a_{32}, 2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (a_{32}, -2) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (a_{32}, -2), (-r, 1) \rangle}{\langle (a_{32}, -2) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } a_{32} = 2r + 1, \\ \frac{\langle (-1, 0), (r, -1) \rangle}{\langle (a_{32}, -2) \rangle} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } a_{32} = 2r. \end{cases}$$

Desta maneira, temos as seguintes possibilidades:

(a) $a_{32} = 2r + 1$.

Neste caso, assim como em **(I)(a)**, tem-se que

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-yr, y)$$

e a condição necessária é $y = 0$, conseqüentemente, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$, de modo que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{-(2r+1)\frac{(q_2-q_1)}{2}} d^{q_2-q_1}).$$

Note ainda, que $2|(q_2 - q_1)$. Então, tomando $E = [d^{-1}, e^{-1}]$ e $D = v^{(q_2-q_1)/2}$, onde $v = de^{-a_{32}}d$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = [d^{-1}, e^{-1}][e^{-1}, d^{-1}]v^{(q_1-q_2)/2}[d^{-1}, e^{-1}][e^{-1}, d^{-1}]v^{(q_2-q_1)/2} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial.

(b) $a_{32} = 2r$.

Neste caso, como no caso **(I)(b)**, tem-se que

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-x, 0) \text{ ou } (-x + r, -1),$$

e a condição necessária é $x = 0$. Assim, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$ ou $(r, -1)$, logo $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$, ou $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^r d^{-1}) = j_{\#}(e^{-r} d)$, desde que $(r, -1)$ e $(-r, 1)$ estão na mesma classe em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Além disso, $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{-r(q_2-q_1)} d^{q_2-q_1})$. Daí,

- Se $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$, tomando $E = [d^{-1}, e^{-1}]$ e $D = v^{q_2-q_1}$, sendo $v = e^{-r}d$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = [d^{-1}, e^{-1}][e^{-1}, d^{-1}]v^{q_1-q_2}[d^{-1}, e^{-1}][e^{-1}, d^{-1}]v^{q_2-q_1} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial.

- Se $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-r, 1)$, tomamos $E = e^{-r}e^{-1}de$ e $D = dv^{q_2-q_1}d^{-1}$, sendo $v = e^{-r}d$, de modo que

$$\begin{aligned} EcDc^{-1}E^{-1}D &= e^{-r}(e^{2r}d^{-1})e^{-1}de[e^{-1}, d^{-1}]v^{q_1-q_2}[d^{-1}, e^{-1}]e^{-1}d^{-1}ede^{-r}dv^{q_2-q_1}d^{-1} \\ &= e^r v^{q_1-q_2} e^{-r} dv^{q_2-q_1} d^{-1} = e^r (e^{-r}d)^{q_1-q_2} e^{-r} d (e^{-r}d)^{q_2-q_1} d^{-1} \\ &= (de^{-r})^{q_1-q_2} (de^{-r})^{q_2-q_1} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial.

Finalmente, considere o **Caso XII**:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}; a_{31}n = 2q_i \text{ e } a_{32}n = 2m.$$

Aqui, as relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por: $cec^{-1} = e^{-1}$, e $cdc^{-1} = e^{a_{32}-1}de$.

Além disso, a equação principal é dada por:

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D)E^{-1} \cdot [E, D^{-1}] \cdot D^{-1}X_3^{-1}D \cdot D^{-1}X_2D = 1,$$

e a condição necessária é:

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = 0.$$

Note que $q_1 = q_2 = \frac{a_{31}n}{2}$. Deste modo, $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $D = e^{p_2-p_1}$, temos que

$$cDc^{-1}D = ce^{p_2-p_1}c^{-1}e^{p_2-p_1} = e^{p_1-p_2}e^{p_2-p_1} = 1.$$

Assim, $\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) = 0$ e a condição necessária torna-se $\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = 0$, isto é,

$$\det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(p_1 - p_2)(c_{22} - c_{21}) = 0$. Como $p_1 \neq p_2$, segue que a condição necessária é $c_{22} = c_{21}$.

Por outro lado, se $c_{22} = c_{21}$, tomamos $E = e^{c_{12}-c_{11}}$ e $D = e^{p_2-p_1}$. Deste modo

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = e^{c_{12}-c_{11}}e^{p_1-p_2}e^{c_{11}-c_{12}}e^{p_2-p_1} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial.

(3) Considerando os casos:

Caso IV: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

Caso VIII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a_{31} \neq 0 \text{ e}$

Caso XVIII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix};$
 $a_{31}n = -2q_i \text{ e } a_{32}n = -2m.$

Nestas situações, temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}).$$

Note que no caso *XVIII*, $q_1 = q_2 = \frac{-a_{31}n}{2}$. As relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} cec^{-1} &= d^{-1}ed, \quad cdc^{-1} = d^{-1}e^{a_{32}}, \text{ se } a_{32} \geq -1, \\ cec^{-1} &= e^{-1}d^{-1}(e)de, \quad cdc^{-1} = e^{-1}d^{-1}e(e^{a_{32}}d^{-1})e^{-1}de, \text{ se } a_{32} \leq -2. \end{aligned}$$

Além disso, $a_{41} = 1$, logo a equação principal é da forma:

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1} \cdot [E, D] \cdot DX_3^{-1}D^{-1} \cdot X_2^{-1} = 1, \quad (4.2)$$

e a condição necessária é:

$$-2\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0.$$

Observe que se $E_1 = ZE$ e $D_1 = WD$; $Z, W \in \pi_2(T, T-1)$, então

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathcal{A}(cD_1c^{-1}D_1^{-1}) &= \varepsilon \circ \mathcal{A}(cWDc^{-1}D^{-1}W^{-1}) = \varepsilon \circ \mathcal{A}(cWc^{-1}cDc^{-1}D^{-1}W^{-1}) \\ &\stackrel{T_{eo}3.2.1(4)}{=} -2\varepsilon \circ \mathcal{A}(W) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}), \text{ e} \\ [E_1, D_1] &= [ZE, WD] = ZEWD E^{-1}Z^{-1}D^{-1}W^{-1} \\ &= ZEWE^{-1}EDE^{-1}D^{-1}DZ^{-1}D^{-1}W^{-1}. \text{ Daí,} \\ \varepsilon \circ \mathcal{A}([E_1, D_1]) &\stackrel{T_{eo}3.2.1(1)}{=} \varepsilon \circ \mathcal{A}(Z) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(W) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) - \varepsilon \circ \mathcal{A}(Z) - \varepsilon \circ \mathcal{A}(W) \\ &= \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]). \end{aligned}$$

Assim, $\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1})$ depende da escolha de D , mas $\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D])$ não depende. Deste modo concluímos que a aumentação módulo 2, denotada por $(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2$, é independente dos elementos E e D e a condição necessária módulo 2 é:

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D^{-1}) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D]) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Daí, tomando $E = e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}$ e $D = e^{p_2-p_1}$, temos:

1. Se $a_{32} \geq -1$,

$$\begin{aligned} cDc^{-1}D^{-1} &= ce^{p_2-p_1}c^{-1}e^{p_1-p_2} = d^{-1}e^{p_2-p_1}de^{p_1-p_2} = [d^{-1}, e^{p_2-p_1}]. \text{ Logo,} \\ \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) &= \varepsilon \circ \mathcal{A}([d^{-1}, e^{p_2-p_1}]) = \det \begin{pmatrix} 0 & p_2 - p_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = p_2 - p_1. \end{aligned}$$

2. Se $a_{32} \leq -2$,

$$\begin{aligned} cDc^{-1}D^{-1} &= ce^{p_2-p_1}c^{-1}e^{p_1-p_2} = e^{-1}d^{-1}e^{p_2-p_1}dee^{p_1-p_2} = [e^{-1}d^{-1}, e^{p_2-p_1}]. \text{ Logo,} \\ \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) &= \varepsilon \circ \mathcal{A}([e^{-1}d^{-1}, e^{p_2-p_1}]) = \det \begin{pmatrix} -1 & p_2 - p_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = p_2 - p_1. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}, e^{p_2-p_1}]) = \det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & 0 \end{pmatrix} = (p_1 - p_2)(c_{22} - c_{21}).$$

Portanto

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cD_1c^{-1}D_1^{-1}) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D]) \equiv 0 \pmod{2}$$

é equivalente a

$$(p_2 - p_1)[1 - (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Queremos checar se a condição anterior é suficiente. Seja H a imagem do homomorfismo

$$\begin{aligned} (| |e, | |d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e \mapsto (|ece^{-1}c^{-1}|_e, |ece^{-1}c^{-1}|_d) &= \begin{cases} (|ed^{-1}e^{-1}d|_e, |ed^{-1}e^{-1}d|_d) = (0, 0), & \text{se } a_{32} \geq -1, \\ (|d^{-1}e^{-1}de|_e, |d^{-1}e^{-1}de|_d) = (0, 0), & \text{se } a_{32} \leq -2. \end{cases} \\ d \mapsto (|dcd^{-1}c^{-1}|_e, |dcd^{-1}c^{-1}|_d) &= \begin{cases} (|de^{-a_{32}}d|_e, |de^{-a_{32}}d|_d) = (-a_{32}, 2), & \text{se } a_{32} \geq -1, \\ (|de^{-1}d^{-1}ede^{-a_{32}}e^{-1}de|_e, |de^{-1}d^{-1}ede^{-a_{32}}e^{-1}de|_d) \\ = (-a_{32}, 2), & \text{se } a_{32} \leq -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $H = \langle (-a_{32}, 2) \rangle$, de modo que,

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (-a_{32}, 2) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (-a_{32}, 2), (-r, 1) \rangle}{\langle (-a_{32}, 2) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } a_{32} = 2r + 1, \\ \frac{\langle (-1, 0), (-r, 1) \rangle}{\langle (-a_{32}, 2) \rangle} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } a_{32} = 2r. \end{cases}$$

Devemos considerar as seguintes situações:

(A) $a_{32} = 2r + 1$.

Neste caso, um conjunto de representantes de E é dado pelos elementos da forma $(0, y)$, onde as coordenadas são relativas à base $\{(-a_{32}, 2), (-r, 1)\}$. Logo,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = 0(-a_{32}, 2) + y(-r, 1) = (-ry, y).$$

Estes valores devem satisfazer a condição necessária

$$(p_2 - p_1)(1 - y) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Temos as seguintes possibilidades:

$$(I) \ y = c_{22} - c_{21} = 2k + 1; \ a_{32} = 2r + 1 \geq -1.$$

Neste caso a condição necessária implica que $p_2 - p_1$ é qualquer. Assim

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-r(2k+1)}d^{2k+1}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}).$$

Tomando $E = d^k e^{k-r} d(d^{-1}e^{2r+1})^{-k}$ e $D = d^k e^{p_2-p_1} d^{-k}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

$$(II) \ y = c_{22} - c_{21} = 2k + 1; \ a_{32} = 2r + 1 \leq -2.$$

Neste caso, a condição necessária implica que $0 \neq p_2 - p_1$ é qualquer. Assim,

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-r(2k+1)}d^{2k+1}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}), \ p_2 - p_1 \neq 0.$$

Tomando $E = d^k e^{-r+k-1}(e^{2r+2}d^{-1}e^{-1})^{-k}de$, e $D = d^k e^{p_2-p_1} d^{-k}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial.

$$(III) \ y = c_{22} - c_{21} = 2k; \ a_{32} = 2r + 1 \geq -1.$$

Neste caso a condição necessária implica que $p_2 - p_1 = 2s$, $s \neq 0$. Vamos analisar os seguintes subcasos:

$$(i) \ k = 0.$$

Nesta situação, mostra-se que não existe solução para a equação principal. De fato, temos

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}), \ s \neq 0.$$

Tome $E = 1$ e $D = e^{2s}$. Assim,

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = d^{-1}e^{2s}de^{-2s} = [d^{-1}, e^{2s}].$$

Pela Proposição 3.2.2 (1), em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$, a equação principal tem a forma:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(cX_2c^{-1}) \cdot \mathcal{A}([d^{-1}, e^{2s}]) \cdot \mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s}) \cdot \mathcal{A}(X_2^{-1}) = 1 \quad (4.3)$$

Vamos escrever o termo $\mathcal{A}([d^{-1}, e^{2s}])$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$. Note que

$$\begin{aligned} [d^{-1}, e^{-2}] &= d^{-1}e^{-1}[d, e]ed \cdot e^{-1}d^{-1}e^{-1}[d, e]ede, \\ [d^{-1}, e^{-4}] &= [d^{-1}, e^{-2}] \cdot e^{-2}[d^{-1}, e^{-2}]e^2, \\ [d^{-1}, e^2] &= d^{-1}e[e, d]e^{-1}d \cdot d^{-1}[e, d]d, \\ [d^{-1}, e^4] &= [d^{-1}, e^2] \cdot e^2[d^{-1}, e^2]e^{-2}. \end{aligned}$$

Assim, por recorrência, segue que

$$[d^{-1}, e^{2s}] = \begin{cases} [d^{-1}, e^2]e^2[d^{-1}, e^2]e^{-2} \dots e^{2s-2}[d^{-1}, e^2]e^{-2s+2}, & \text{se } s > 0, \\ [d^{-1}, e^{-2}]e^{-2}[d^{-1}, e^{-2}]e^2 \dots e^{2s+2}[d^{-1}, e^{-2}]e^{-2s-2}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{A}([d^{-1}, e^{2s}]) = \begin{cases} B_{(2s-1,-1)}B_{(2s-2,-1)} \dots B_{(1,-1)}B_{(0,-1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s,-1)}^{-1}B_{(2s+1,-1)}^{-1} \dots B_{(-2,-1)}^{-1}B_{(-1,-1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Observe que se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando, então $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(x+(2r+1)(y+1), -2-y)}^{-n}$ e se $\mathcal{A}(X_3)$ contém $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém $B_{(z+2s,w)}^{-m}$. A saber,

$$\begin{aligned} ce^xd^y[e, d]^nd^{-y}e^{-x}c^{-1} &= d^{-1}e^xd(d^{-1}e^{2r+1})^y[d^{-1}ed, d^{-1}e^{2r+1}]^n \dots \\ &= d^{-1}e^xd(d^{-1}e^{2r+1})^y(d^{-1}ee^{2r+1}d^{-1}e^{-1}de^{-2r-1}d)^n \dots \\ &= d^{-1}e^xd(d^{-1}e^{2r+1})^y(d^{-1}e^{2r+1}(ed^{-1}e^{-1}d)e^{-2r-1}d)^n \dots \\ &= d^{-1}e^xd(d^{-1}e^{2r+1})^yd^{-1}e^{2r+1}d^{-1}[d, e]^n \dots \end{aligned}$$

Deste modo, a soma dos expoentes de e , que precedem $[d, e]^n$, é: $x + (2r + 1)(y + 1)$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[d, e]^n$, é: $-2 - y$, de onde segue que $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(x+(2r+1)(y+1), -2-y)}^{-n}$. Também, $e^{2s}e^zd^we^{-m}d^{-w}e^{-z}e^{-2s}$ é tal que a soma dos expoentes de e , que precedem $[e, d]^{-m}$, é: $z + 2s$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[e, d]^{-m}$, é w . Consequentemente, $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém $B_{(z+2s,w)}^{-m}$.

Sejam $\bar{H} = \langle (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}), (p_2 - p_1, q_2 - q_1) \rangle = \langle (2s, 0) \rangle$ e $\tilde{H} = \pi/\bar{H}$, onde $\pi = \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pela Proposição 3.2.2 (2), em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ a equação principal se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}([d^{-1}, e^{2s}]) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.5)$$

Ainda, quocientando a fórmula (4.4) por $\bar{H}$, obtem-se:

$$\bar{\mathcal{A}}([d^{-1}, e^{2s}]) = \begin{cases} B_{(2s-1, -1)} B_{(2s-2, -1)} \cdots B_{(1, -1)} B_{(0, -1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s-1, -1)}^{-1} B_{(2s-2, -1)}^{-1} \cdots B_{(1, -1)}^{-1} B_{(0, -1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Além disso, se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(x, y)}^n$, então $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x, y)}^{-n}$ e $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(x+(2r+1)(y+1), -y-2)}^{-n} = B_{(2s+x+(2r+1)(y+1), -y-2)}^{-n}$. Assim,

- Se $s > 0$, então para cancelar o termo $B_{(x, -1)}$; $0 \leq x \leq 2s - 1$, em $\bar{\mathcal{A}}([d^{-1}, e^{-2s}])$, o termo $B_{(x, -1)}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, daí, $B_{(x, -1)}$ é um somando de $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$, de modo que $B_{(x, -1)}^{-1}$ aparece em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, consequentemente, não é possível resolver a equação (4.5).
- Se $s < 0$, então para cancelar o termo $B_{(x, -1)}^{-1}$; $2s - 1 \leq x \leq 0$, em $\bar{\mathcal{A}}([d^{-1}, e^{-2s}])$, temos que $B_{(x, -1)}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo, $B_{(x, -1)}^{-1}$ é um somando de $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ e $B_{(x, -1)}$ aparece em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, consequentemente, não é possível resolver a equação (4.5).

Portanto, como não existe solução para a equação (4.5), em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, concluímos que a equação principal na sua forma original também não admite solução.

(ii) $k = 1$.

A princípio, note que se $k = s = 1$, então tomando $\bar{E} = de^{-2r}d$ e $\bar{D} = ded^{-1}e$, temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2r}d^2), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}) \text{ e } \bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-1} = 1.$$

Assim, $\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1} = \bar{D}$. Daí, tomando $E = \bar{E}$ e $D = \bar{D}^s$, $s \neq 0$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = \bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-s} = (\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1})^s\bar{D}^{-s} = \bar{D}^s\bar{D}^{-s} = 1.$$

Portanto, para $k = 1$ e $s \neq 0$, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(IV) $y = c_{22} - c_{21} = 2k$; $a_{32} = 2r + 1 \leq -2$.

Neste caso, a condição necessária implica que $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$. Assim, temos

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2kr}d^{2k}), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}).$$

Vamos analisar as seguintes situações:

(i) $k = 0$.

Neste caso, não existe solução para a equação principal. De fato, temos

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0d^0) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}), s \neq 0.$$

Então, tomando $E = 1$ e $D = e^{2s}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = cDc^{-1}D^{-1} = ce^{2s}c^{-1}e^{-2s} = e^{-1}d^{-1}e^{2s}de e^{-2s} = e^{-1}[d^{-1}, e^{2s}]e.$$

Pela Proposição 3.2.2 (1), em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$, a equação principal tem a forma:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(cX_2c^{-1}) \cdot \mathcal{A}(e^{-1}[d^{-1}, e^{2s}]e) \cdot \mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s}) \cdot \mathcal{A}(X_2^{-1}) = 1 \quad (4.6)$$

Usando a fórmula (4.4) para $\mathcal{A}([d^{-1}, e^{2s}])$ dada no caso (III)(i), podemos escrever o termo $\mathcal{A}(e^{-1}[d^{-1}, e^{2s}]e)$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$, do seguinte modo:

$$\mathcal{A}(e^{-1}[d^{-1}, e^{2s}]e) = \begin{cases} B_{(2s-2,-1)}B_{(2s-3,-1)} \cdots B_{(0,-1)}B_{(-1,-1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s-1,-1)}^{-1}B_{(2s,-1)}^{-1} \cdots B_{(-3,-1)}^{-1}B_{(-2,-1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando, então $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(x+(2r+1)(y+1), -2-y)}^{-n}$ e se $\mathcal{A}(X_3)$ contém $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém $B_{(z+2s,w)}^{-m}$. A saber,

$$c[e, d]c^{-1} = e^{-1}d^{-1}e^{2r+3}[d^{-1}, e^{-1}]e^{-2r-3}de = e^{-1}d^{-1}e^{2r+3}d^{-1}e^{-1}[d, e]ede^{-2r-3}de,$$

daí,

$$ce^x d^y [e, d]^n d^{-y} e^{-x} c^{-1} = e^{-1}d^{-1}e^x e(e^{2r+1}d^{-1})^y e^{-1}e^{2r+3}d^{-1}e^{-1}[e, d]^{-n}ed \dots$$

Deste modo, a soma dos expoentes de e , que precedem $[e, d]^{-n}$, é: $x + (2r + 1)(y + 1)$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[e, d]^{-n}$, é: $-2 - y$, de onde segue que $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(x+(2r+1)(y+1), -2-y)}^{-n}$. Também,

$$e^{2s}e^z d^w [e, d]^{-m} d^{-w} e^{-z} e^{-2s}$$

é tal que a soma dos expoentes de e , que precedem $[e, d]^{-m}$, é: $z + 2s$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[e, d]^{-m}$, é w . Consequentemente, $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém $B_{(z+2s,w)}^{-m}$.

Sejam $\bar{H} = \langle (2s, 0) \rangle$ e $\tilde{H} = \pi/\bar{H}$, onde $\pi = \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, a equação (4.6) se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(e^{-1}[d^{-1}, e^{2s}]e) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.8)$$

Além disso, quocientando a fórmula (4.7) por $\bar{H}$, obtém-se:

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-1}[d^{-1}, e^{2s}]e) = \begin{cases} B_{(-2s-1,-1)}B_{(-2s,-1)} \cdots B_{(-3,-1)}B_{(-2,-1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-1,-1)}^{-1}B_{(0,-1)}^{-1} \cdots B_{(-2s-3,-1)}^{-1}B_{(-2s-2,-1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Assim,

- Se $s > 0$, então para cancelar o termo $B_{(x,-1)}$; $-2s - 1 \leq x \leq -2$, em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-1}[d^{-1}, e^{-2s}]e)$, o termo $B_{(x,-1)}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, daí, $B_{(x,-1)}$ é um somando de $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$, de modo que $B_{(x,-1)}^{-1}$ aparece em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, consequentemente, não é possível resolver a equação (4.8).
- Se $s < 0$, então para cancelar o termo $B_{(x,-1)}^{-1}$; $-1 \leq x \leq -2s - 2$, em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-1}[d^{-1}, e^{-2}]e)$, temos que $B_{(x,-1)}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo, $B_{(x,-1)}^{-1}$ é um somando de $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ e $B_{(x,-1)}$ aparece em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, consequentemente, não é possível resolver a equação (4.8).

Portanto, como não existe solução para a equação (4.8), em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, concluímos que a equação principal na sua forma original também não admite solução.

(ii) $k = 1$.

Neste caso temos

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2r}d^2), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}), s \neq 0.$$

A princípio, observe que para

$$\bar{E} = de^{-2r-1}de, \bar{D} = e^2 \text{ e } Z_2 = Z_3 = e^{-1}[d, e]e,$$

segue que

$$Z_3\bar{E}cZ_2c^{-1}\bar{E}^{-1} \cdot \bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-1} \cdot \bar{D}Z_3^{-1}\bar{D}^{-1} \cdot Z_2^{-1} = 1.$$

Uma vez encontrado um sistema qualquer de solução, pode-se determinar E e D de modo a se obter a solução trivial. A saber, temos que

$$\bar{E} = \alpha_E \tilde{E} \text{ e } \bar{D} = \alpha_D \tilde{D}; \alpha_E, \alpha_D \in \ker j_{\#} = \pi_1(T - 1)$$

satisfazem

$$Z_3\alpha_E\tilde{E}cZ_2\alpha_D\tilde{D}c^{-1}\tilde{E}^{-1}\alpha_E^{-1}Z_3^{-1} = Z_2\alpha_D\tilde{D}.$$

Tomando $X_2 = Z_2\alpha_D$ e $X_3 = Z_3\alpha_E$, segue que

$$X_3\tilde{E}cX_2\tilde{D}c^{-1}\tilde{E}^{-1}X_3^{-1} = X_2\tilde{D}. \text{ Ainda,}$$

$$X_2 = Z_2\alpha_D = 1 \Rightarrow \alpha_D = Z_2^{-1} \text{ e } X_3 = Z_3\alpha_E = 1 \Rightarrow \alpha_E = Z_3^{-1}. \text{ Logo,}$$

$$\tilde{E} = \alpha_E^{-1}\bar{E} = Z_3\bar{E} = e^{-1}[d, e]ede^{-2r-1}de \text{ e } \tilde{D} = \alpha_D^{-1}\bar{D} = Z_2\bar{D} = e^{-1}[d, e]ee^2$$

satisfazem

$$\tilde{E}c\tilde{D}c^{-1}\tilde{E}^{-1}\tilde{D}^{-1} = 1. \text{ Daí, considerando}$$

$$E = \tilde{E} \text{ e } D = \tilde{D}^s = (e^{-1}[d, e]ee^2)^s, \text{ temos}$$

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = \tilde{E}c\tilde{D}^sc^{-1}\tilde{E}^{-1}\tilde{D}^{-s} = (\tilde{E}c\tilde{D}^sc^{-1}\tilde{E})^s D^{-s} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(V) $y = c_{22} - c_{21} = 2k$; $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Vamos mostrar que não existe solução nestes casos. De fato, temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2kr}d^{2k}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}), \text{ } s \neq 0. \text{ Tomando}$$

$$E = d^{2k-1}e^{-2kr}d \text{ e } D = e^{2s}, \text{ se } a_{32} \geq -1 \text{ e}$$

$$E = d^{2k-1}e^{-2kr-1}de \text{ e } D = e^{2s}, \text{ se } a_{32} \leq -2,$$

temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = [d^{2k-1}, e^{2s}].$$

Em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ temos que a equação principal tem a forma:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1}) \cdot \mathcal{A}([d^{2k-1}, e^{2s}]) \cdot \mathcal{A}(DX_3^{-1}D^{-1}) \cdot \mathcal{A}(X_2)^{-1}.$$

Vamos escrever $\mathcal{A}([d^{2k-1}, e^{2s}])$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$. A saber,

$$[d^2, e^{-2}] = e^{-1}[e, d]e.e^{-1}d[e, d]d^{-1}e.e^{-2}[e, d]e^2, e^{-2}d[e, d]d^{-1}e^2,$$

$$[d^2, e^2] = d[d, e]d^{-1}.de[d, e]e^{-1}d^{-1}.[d, e].e[d, e]e^{-1},$$

$$[d^3, e^{-2}] = e^{-1}[e, d]e.e^{-2}[e, d]e^2.e^{-2}de[e, d]e^{-1}d^{-1}e^2, e^{-2}d[e, d]d^{-1}e^2.e^{-2}d^2e[e, d]e^{-1}d^{-2}e^2. \\ e^{-2}d^2[e, d]d^{-2}e^2.$$

$$[d^3, e^2] = d^2[d, e]d^{-2}.d^2e[d, e]e^{-1}d^{-2}.d[d, e]d^{-1}.[d, e].ed[d, e]d^{-1}e^{-1}.e[d, e]e^{-1}.$$

$$[d^2, e^{2s}] = \begin{cases} [d^2, e^2]e^2[d^2, e^2]e^{-2} \dots e^{2s-2}[d^2, e^2]e^{-2s+2}, & \text{se } s > 0, \\ [d^2, e^{-2}]e^{-2}[d^2, e^{-2}]e^2 \dots e^{2s+2}[d^2, e^{-2}]e^{-2s-2}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

$$[d^3, e^{2s}] = \begin{cases} [d^3, e^2]e^2[d^3, e^2]e^{-2} \dots e^{2s-2}[d^3, e^2]e^{-2s+2}, & \text{se } s > 0, \\ [d^3, e^{-2}]e^{-2}[d^3, e^{-2}]e^2 \dots e^{2s+2}[d^3, e^{-2}]e^{-2s-2}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

$$[d^5, e^{2s}] = d^2[d^3, e^{2s}]d^{-2}[d^2, e^{2s}] \text{ e}$$

$$[d^{-2}, e^{-2}] = d^{-1}e^{-2}[d, e]e^2d.d^{-1}e^{-1}[d, e]ed.e^{-2}d^{-2}[d, e]d^2e^2.e^{-2}d^{-2}e[d, e]e^{-1}d^2e^2,$$

$$[d^{-2}, e^2] = d^{-2}e[e, d]e^{-1}d^2.d^{-2}[e, d]d^2.d^{-1}e[e, d]e^{-1}d.d^{-1}[e, d]d,$$

$$\begin{aligned}
[d^{-3}, e^{-2}] &= d^{-3}e^{-2}d^2[d, e]d^{-2}e^2d^3.d^{-3}e^{-2}d[d, e]d^{-1}e^2d^3.d^{-3}e^{-2}[d, e]e^2d^3. \\
&\quad d^{-3}e^{-1}[d, e]ed^3.d^{-2}e^{-1}[d, e]ed^2.d^{-1}e^{-1}[d, e]ed, \\
[d^{-3}, e^2] &= d^{-3}e[e, d]e^{-1}d^3.d^{-3}[e, d]d^3.d^{-2}e[e, d]e^{-1}d^2.d^{-2}[e, d]d^2.d^{-1}e[e, d]e^{-1}d.d^{-1}[e, d]d, \\
[d^{-2}, e^{2s}] &= \begin{cases} [d^{-2}, e^2]e^2[d^{-2}, e^2]e^{-2} \dots e^{2s-2}[d^{-2}, e^2]e^{-2s+2}, & \text{se } s > 0, \\ [d^{-2}, e^{-2}]e^{-2}[d^{-2}, e^{-2}]e^2 \dots e^{2s+2}[d^{-2}, e^{-2}]e^{-2s-2}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \\
[d^{-3}, e^{2s}] &= \begin{cases} [d^{-3}, e^2]e^2[d^{-3}, e^2]e^{-2} \dots e^{2s-2}[d^{-3}, e^2]e^{-2s+2}, & \text{se } s > 0, \\ [d^{-3}, e^{-2}]e^{-2}[d^{-3}, e^{-2}]e^2 \dots e^{2s+2}[d^{-3}, e^{-2}]e^{-2s-2}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \\
[d^{-5}, e^{2s}] &= d^{-2}[d^{-3}, e^{2s}]d^2[d^{-2}, e^{2s}].
\end{aligned}$$

Assim, por recorrência, segue que se $k \geq 2$, então

$$\mathcal{A}([d^{2k-1}, e^{2s}]) = \begin{cases} B_{(0,0)}^{-1}B_{(1,0)}^{-1} & \dots & B_{(2s-2,0)}^{-1}B_{(2s-1,0)}^{-1} \\ B_{(0,1)}^{-1}B_{(1,1)}^{-1} & \dots & B_{(2s-2,1)}^{-1}B_{(2s-1,1)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(0,2k-2)}^{-1}B_{(1,2k-2)}^{-1} & \dots & B_{(2s-2,2k-2)}^{-1}B_{(2s-1,2k-2)}^{-1}, \text{ se } s > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{cases} B_{(2s,0)}B_{(2s+1,0)} & \dots & B_{(-2,0)}B_{(-1,0)} \\ B_{(2s,1)}B_{(2s+1,1)} & \dots & B_{(-2,1)}B_{(-1,1)} \\ & \vdots & \\ B_{(2s,2k-2)}B_{(2s+1,2k-2)} & \dots & B_{(-2,2k-2)}B_{(-1,2k-2)}, \text{ se } s < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Ademais, se $k \leq -1$, então

$$\mathcal{A}([d^{2k-1}, e^{2s}]) = \begin{cases} B_{(0,2k-1)}B_{(1,2k-1)} & \dots & B_{(2s-2,2k-1)}B_{(2s-1,2k-1)} \\ B_{(0,2k)}B_{(1,2k)} & \dots & B_{(2s-2,2k)}B_{(2s-1,2k)} \\ & \vdots & \\ B_{(0,-1)}B_{(1,-1)} & \dots & B_{(2s-2,-1)}B_{(2s-1,-1)}, \text{ se } s > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{cases} B_{(2s,2k-1)}^{-1}B_{(2s+1,2k-1)}^{-1} & \dots & B_{(-2,2k-1)}^{-1}B_{(-1,2k-1)}^{-1} \\ B_{(2s,2k)}^{-1}B_{(2s+1,2k)}^{-1} & \dots & B_{(-2,2k)}^{-1}B_{(-1,2k)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(2s,-1)}^{-1}B_{(2s+1,-1)}^{-1} & \dots & B_{(-2,-1)}^{-1}B_{(-1,-1)}^{-1}, \text{ se } s < 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém o termo $B_{(x,y)}^n$ como um somando, então $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém o termo

$B_{(x,y)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém o termo $B_{(-2kr+x+(2r+1)(y+1),2k-2-y)}^{-n}$ e se $\mathcal{A}(X_3)$ contém o termo $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém o termo $B_{(z+2s,w)}^{-m}$. De fato, se $a_{32} \geq -1$,

$$\begin{aligned} d^{2k-1}e^{-2kr}dce^xd^y[e,d]^nd^{-y}e^{-x}c^{-1}d^{-1}e^{2kr}d^{-2k+1} = \\ d^{2k-1}e^{-2kr}dd^{-1}e^xd(d^{-1}e^{2r+1})^y[d^{-1}ed, d^{-1}e^{2r+1}]^n \dots = \\ d^{2k-1}e^{-2kr}dd^{-1}e^xd(d^{-1}e^{2r+1})^yd^{-1}e^{2r+1}d^{-1}[d,e]^n \dots \end{aligned}$$

Por outro lado, se $a_{32} \leq -2$,

$$\begin{aligned} d^{2k-1}e^{-2kr-1}dece^xd^y[e,d]^nd^{-y}e^{-x}c^{-1}e^{-1}d^{-1}e^{2kr+1}d^{-2k+1} = \\ d^{2k-1}e^{-2kr-1}e^xe(e^{2r+1}d^{-1})^ye^{-1}e^{2r+2}d^{-1}[d,e]^n \dots \end{aligned}$$

Em ambos os casos, a soma dos expoentes de e que precedem $[d,e]^n$ é: $-2kr + x + (2r + 1)(y + 1)$ e a de d é: $2k - 2 - y$.

Escreva

$$\begin{aligned} 2s &= 2^{a_1}b_1; a_1 \geq 1 \text{ e } b_1 \text{ é ímpar,} \\ 2k &= 2^{a_2}b_2; a_2 \geq 1 \text{ e } b_2 \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Considere $H' = \langle (0, 1), (2^{a_1}, 0) \rangle$. Em $\mathbb{Z}\pi/H'$ a equação principal se reduz a:

$$\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}([d^{2k-1}, e^{2s}]) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.13)$$

Daí quocientando por H' as fórmulas dadas em (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) para $k \neq 0$ e $k \neq 1$, obtém-se:

$$\bar{\mathcal{A}}([d^{2k-1}, e^{2s}]) = \begin{cases} B_{(0,y)}^{-(2k-1)b_1} B_{(1,y)}^{-(2k-1)b_1} \dots B_{(2^{a_1}-1,y)}^{-(2k-1)b_1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-2^{a_1},y)}^{-(2k-1)b_1} B_{(-2^{a_1}+1,y)}^{-(2k-1)b_1} \dots B_{(-1,y)}^{-(2k-1)b_1}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Vamos analisar duas possíveis situações:

$$(1) \ a_1 \leq a_2 \text{ ou } a_1 > a_2 \text{ e } r = 2^{a_1-a_2}\lambda.$$

Neste caso, $2^{a_1} \mid -2kr$. Logo, se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando, então $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(x+(2r+1)(y+1),y)}^{-n}$. Deste modo, tomando $y = -1$ em (4.14) segue que,

- Se $s > 0$, então para cancelar o termo $B_{(x,-1)}^{-1}$; $0 \leq x \leq 2^{a_1} - 1$ em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2k-1}, e^{2s}])$, o termo $B_{(x,-1)}$; $0 \leq x \leq 2^{a_1} - 1$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(x,-1)}$

em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$. Como $-(2k-1)(b_1)$ é ímpar, $B_{(x,-1)}^{-(2k-1)b_1}$; $0 \leq x \leq 2^{a_1} - 1$ não pode ser cancelado.

- Se $s < 0$, então para cancelar o termo $B_{(x,-1)}$; $-2^{a_1} \leq x \leq -1$ em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2k-1}, e^{2s}])$, o termo $B_{(x,-1)}^{-1}$; $-2^{a_1} \leq x \leq -1$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(x,-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$. Como $-(2k-1)(b_1)$ é ímpar, $B_{(x,-1)}^{-(2k-1)b_1}$; $-2^{a_1} \leq x \leq -1$ não pode ser cancelado.

$$(2) \ a_1 > a_2 \text{ e } r = 2^{a_1-a_2}\lambda + j; \ 1 \leq j \leq 2^{a_1-a_2} - 1.$$

Neste caso, observe que existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y_i = 2^{a_2}i - 1$ satisfaz

$$-2kr + (2r+1)(y_i+1) = \alpha 2^{a_1}, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Ademais, basta verificar a equação anterior para $r = j$; $1 \leq j \leq 2^{a_1-a_2} - 1$. De fato, suponha que existam $y_0 = 2^{a_2}i_0 - 1$ e $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$-2kj + (2j+1)(y_0+1) = \alpha_0 2^{a_1}. \text{ Daí,}$$

$$\begin{aligned} & -2k(2^{a_1-a_2}\lambda + j) + (2^{a_1-a_2+1}\lambda + 2j+1)(y_0+1) = \\ & -2kj + (2j+1)(y_0+1) - 2k2^{a_1-a_2}\lambda + (y_0+1)2^{a_1-a_2+1}\lambda = \\ & \alpha_0 2^{a_1} - 2^{a_1}b_2\lambda + 2^{a_1+1}i_0\lambda = (\alpha_0 - b_2\lambda + 2i_0\lambda)2^{a_1}. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} -2kj + (2j+1)(2^{a_2}i) &= \alpha 2^{a_1} \Leftrightarrow \\ -2^{a_2}b_2j + (2j+1)(2^{a_2}i) &= \alpha 2^{a_2}2^{a_1-a_2} \Leftrightarrow \\ -b_2j + (2j+1)i &= \alpha 2^{a_1-a_2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, vamos mostrar que existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$-b_2j + (2j+1)i = \alpha 2^{a_1-a_2}, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

A princípio, note que existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^{a_1-a_2}\beta + j = \mu(2j+1), \text{ para algum } \mu \in \mathbb{Z}.$$

A saber, temos que $2^{a_1-a_2}$ e $2j+1$ são relativamente primos, ou seja, existem $l, t \in \mathbb{Z}$ tais

que

$$\begin{aligned} 2^{a_1-a_2}l + t(2j+1) &= 1. \text{ Daí,} \\ 2^{a_1-a_2}(-jl) + (2j+1)(-tj) &= -j, \text{ ou seja,} \\ 2^{a_1-a_2}(-jl) + j &= (tj)(2j+1). \end{aligned}$$

Tome $\beta = -jl$ e $\mu = tj$. Por fim, para

$$\alpha = \beta b_2 \text{ e } i = \mu b_2,$$

segue que

$$-b_2j + (2j+1)i = -b_2j + (2j+1)\mu b_2 = -b_2j + (2^{a_1-a_2}\beta + j)b_2 = 2^{a_1-a_2}\beta b_2 = 2^{a_1-a_2}\alpha,$$

como queríamos.

Portanto existe $y_i = 2^{a_2}i - 1$ tal que $2^{a_1} | (-2kr + (2r+1)(y_i+1))$. Logo, se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando, então $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$. Deste modo, tomando $y = y_i$ em 4.14 segue que,

- Se $s > 0$, então para cancelar o termo $B_{(x,y_i)}^{-1}; 0 \leq x \leq 2^{a_1} - 1$ em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2k-1}, e^{2s}])$, o termo $B_{(x,y_i)}; 0 \leq x \leq 2^{a_1} - 1$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(x,y_i)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$. Como $-(2k-1)(b_1)$ é ímpar, $B_{(x,y_i)}^{-(2k-1)b_1}; 0 \leq x \leq 2^{a_1} - 1$ não pode ser cancelado.
- Se $s < 0$, então para cancelar o termo $B_{(x,y_i)}; -2^{a_1} \leq x \leq -1$ em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2k-1}, e^{2s}])$, o termo $B_{(x,y_i)}^{-1}; -2^{a_1} \leq x \leq -1$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(x,y_i)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$. Como $-(2k-1)(b_1)$ é ímpar, $B_{(x,y_i)}^{-(2k-1)b_1}; -2^{a_1} \leq x \leq -1$ não pode ser cancelado.

Portanto, como não existe solução para a equação (4.13), em $\mathbb{Z}\pi/H'$, concluímos que a equação principal na sua forma original também não admite solução.

(B) $a_{32} = 2r$.

Neste caso, um conjunto de representantes de E é dado pelos elementos da forma $(x, \bar{y})$, onde as coordenadas (x, y) são relativas à base $\{(-1, 0), (-r, 1)\}$. Assim,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = x(-1, 0) + y(-r, 1) = (-x - ry, y) = (-x, 0) \text{ ou } (-x - r, 1).$$

Temos as seguintes situações:

$$(I) \ c_{22} - c_{21} = 0.$$

Neste caso, a condição necessária é

$$p_2 - p_1 \equiv 0 \pmod{2}, \text{ isto é, } p_2 - p_1 = 2s, \ s \neq 0. \text{ Logo,}$$

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-x}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}); \ s \neq 0.$$

Assim, vamos considerar os seguintes subcasos:

$$(i) \ x = c_{11} - c_{12} = 2u + 1 \ (x \text{ ímpar}) \text{ e } a_{32} = 2r \geq -1.$$

A princípio, note que para

$$\bar{E} = (e^{-1}d^{-1}e^{-1}d)^ue^{-1} \text{ e } \bar{D} = d^{-1}ede,$$

segue que $\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-1} = 1$, ou seja, $\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1} = \bar{D}$. Daí, tomando $E = \bar{E}$ e $D = \bar{D}^s$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = \bar{E}c\bar{D}^sc^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-s} = (\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1})^s\bar{D}^{-s} = \bar{D}^s\bar{D}^{-s} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

$$(ii) \ x = c_{11} - c_{12} = 2u - 1 \ (x \text{ ímpar}) \text{ e } a_{32} = 2r \leq -2.$$

Primeiramente, observe que para

$$\bar{E} = (e^{-1}d^{-1}e^{-1}d)^ue, \text{ e } \bar{D} = d^{-1}ede,$$

segue que

$$\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-1} = 1,$$

ou seja, $\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1} = \bar{D}$. Daí, tomando $E = \bar{E}$ e $D = \bar{D}^s$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = \bar{E}c\bar{D}^sc^{-1}\bar{E}^{-1}\bar{D}^{-s} = (\bar{E}c\bar{D}c^{-1}\bar{E}^{-1})^s\bar{D}^{-s} = \bar{D}^s\bar{D}^{-s} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

$$(iii) \ x = c_{11} - c_{12} = 0.$$

Neste caso, temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0d^0) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}), \ s \neq 0.$$

Então, como nos casos (A) (III)(i), para $a_{32} \geq -1$, ou (IV)(i), para $a_{32} \leq -2$, segue que não existe solução para a equação principal.

(iv) $0 \neq x = c_{11} - c_{12} = 2^a(2k+1)$; $a \in \mathbb{N}^*$ (x par, diferente de zero), $s = 2^a t$ e $a_{32} = 2r \geq -1$.

Tomando

$$\bar{E} = (e^{-2^a} d^{-1} e^{-2^a} d)^k e^{-2^a}, \text{ e } \bar{D} = d^{-1} e^{2^a} d e^{2^a},$$

temos que

$$\bar{E} c \bar{D} c^{-1} \bar{E}^{-1} \bar{D}^{-1} = 1.$$

Daí, para $E = \bar{E}$ e $D = \bar{D}^t$, segue que

$$E c D c^{-1} E^{-1} D^{-1} = (\bar{E} c \bar{D} c^{-1} \bar{E}^{-1})^t \bar{D}^{-t} = \bar{D}^t \bar{D}^{-t} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(v) $0 \neq x = c_{11} - c_{12} = 2^a(2k+1)$; $a \in \mathbb{N}^*$ (x par, diferente de zero), $s = 2^a t$ e $a_{32} = 2r \leq -2$.

Tomando

$$\bar{E} = (e^{-2^a} d^{-1} e^{-2^a} d)^k e^{-2^a} d^{-1} e^{-1} d e, \text{ e } \bar{D} = d^{-1} e^{2^a} d e^{2^a},$$

temos que

$$\bar{E} c \bar{D} c^{-1} \bar{E}^{-1} \bar{D}^{-1} = 1.$$

Daí, para $E = \bar{E}$ e $D = \bar{D}^t$, segue que

$$E c D c^{-1} E^{-1} D^{-1} = (\bar{E} c \bar{D} c^{-1} \bar{E}^{-1})^t \bar{D}^{-t} = \bar{D}^t \bar{D}^{-t} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(vi) $0 \neq x = 2^a(2k+1)$; $a \in \mathbb{N}^*$ (x par diferente de zero), $s \neq 2^a t$ e $a_{32} = 2r \geq -1$.

Neste caso, a equação principal não admite solução. De fato, observe que

$$s \neq 2^a t \Rightarrow s \in \{2^a t + 1, 2^a t + 2, \dots, 2^a t + 2^a - 1\}.$$

Além disso,

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-x}), \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}); s \neq 0.$$

Tomando $E = e^{-x}$ e $D = e^{2s}$, segue que

$$E c D c^{-1} E^{-1} D^{-1} = e^{-x} [d^{-1}, e^{2s}] e^x.$$

Note também que

$$\begin{aligned} [d^{-1}, e^{-2}] &= d^{-1}e^{-1}[d, e]ed \cdot e^{-1}d^{-1}e^{-1}[d, e]ede, \\ [d^{-1}, e^2] &= d^{-1}e[e, d]e^{-1}d \cdot d^{-1}[e, d]d. \\ [d^{-1}, e^{2s}] &= \begin{cases} [d^{-1}, e^2]e^2[d^{-1}, e^2]e^{-2} \dots e^{2s-2}[d^{-1}, e^2]e^{-2s+2}, & \text{se } s > 0, \\ [d^{-1}, e^{-2}]e^{-2}[d^{-1}, e^{-2}]e^2 \dots e^{2s+2}[d^{-1}, e^{-2}]e^{-2s-2}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{A}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x) = \begin{cases} B_{(-x+2s-1, -1)}B_{(-x+2s-2, -1)} \dots B_{(-x+1, -1)}B_{(-x, -1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-x+2s, -1)}^{-1}B_{(-x+2s+1, -1)}^{-1} \dots B_{(-x-2, -1)}^{-1}B_{(-x-1, -1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(u,v)}^n$ como somando, então $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém $B_{(u,v)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(e^{-x}cX_2c^{-1}e^x)$ contém $B_{(-x+u+(2r)(v+1), -2-v)}^{-n}$ e se $\mathcal{A}(X_3)$ contém $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém $B_{(z+2s,w)}^{-m}$. A saber,

$$ce^u d^v [e, d]^n d^{-u} e^{-v} c^{-1} = d^{-1} e^u d (d^{-1} e^{2r})^v d^{-1} e^{2r} d^{-1} [d, e]^n \dots$$

Deste modo, a soma dos expoentes de e , que precedem $[d, e]^n$, é: $u + (2r)(v + 1)$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[d, e]^n$, é: $-2 - v$.

Sejam $\bar{H} = \langle (-x, 0), (2s, 0) \rangle$ e $\tilde{H} = \pi/\bar{H}$; $\pi = \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, a equação principal se reduz a forma:

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.16)$$

Além disso, quocientando a fórmula (4.15) por $\bar{H}$, obtém-se:

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x) = \begin{cases} B_{(2s-1, -1)}B_{(2s-2, -1)} \dots B_{(1, -1)}B_{(0, -1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s, -1)}^{-1}B_{(2s+1, -1)}^{-1} \dots B_{(-2, -1)}^{-1}B_{(-1, -1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Ainda, se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(u,v)}^n$, então $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ contém $B_{(u,v)}^{-n}$ e $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(u+2r(v+1), -v-2)}^{-n}$. Observe também que

$$\bar{H} = \langle (-2^a(2k+1), 0), (2s, 0) \rangle; s \in \{2^at + 1, 2^at + 2, \dots, 2^at + 2^a - 1\} = \langle (L, 0) \rangle,$$

onde $L = \text{mdc}(-x, 2s)$. De fato, como $L = \text{mdc}(-x, 2s)$, então $\frac{-x}{L}$ e $\frac{2s}{L}$ são primos entre si, ou seja, existem $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$w_1 \left(\frac{-x}{L} \right) + w_2 \left(\frac{2s}{L} \right) = 1.$$

Além disso, existem $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $-x = l_1 L$ e $2s = l_2 L$. Seja $(b, c) \in \langle (-x, 0), (2s, 0) \rangle$,

então $b = -\alpha x + 2\beta s$ e $c = 0$, para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$b = -\alpha l_1 L + \beta l_2 L = L(-\alpha l_1 + \beta l_2).$$

Deste modo, existe $\gamma = -\alpha l_1 + \beta l_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $(b, c) = \gamma(L, 0)$. Logo, $\langle(-x, 0), (2s, 0)\rangle \subset \langle(L, 0)\rangle$. Por outro lado, se $(b, c) \in \langle(L, 0)\rangle$, então $(b, c) = \alpha(L, 0)$ para algum $\alpha \in \mathbb{Z}$, ou seja, $b = \alpha L$ e $c = 0$. Daí

$$(b, c) = \alpha L(1, 0) = \alpha L(w_1 \left(\frac{-x}{L}\right) + w_2 \left(\frac{2s}{L}\right), 0) = \alpha w_1(-x, 0) + \alpha w_2(2s, 0).$$

Consequentemente $\langle(L, 0)\rangle \subset \langle(-x, 0), (2s, 0)\rangle$, de onde segue a igualdade desejada.

Note que L é par, uma vez que $-x$ e $2s$ o são, e que $\frac{2s}{L}$ é ímpar. De fato, supondo que

$$\frac{2s}{L} = 2p, \text{ para algum } p \in \mathbb{Z},$$

como $\frac{2s}{L}$ e $\frac{-x}{L}$ são primos entre si, segue que $\frac{-x}{L}$ é ímpar, ou seja, $\frac{-2^a(2k+1)}{L} \in \mathbb{Z}$ é ímpar. Assim, $L = 2^a$. Dessa forma, temos que $s \in \{2^a t + 1, 2^a t + 2, \dots, 2^a t + 2^a - 1\}$ é tal que $\frac{2s}{2^a} \in 2\mathbb{Z}$. Logo, $s = 2^a t + 2^{a-1}$. Daí,

$$\frac{2s}{L} = \frac{2^{a+1}t + 2^a}{2^a} = 2t + 1,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\frac{2s}{L}$ é ímpar. Assim,

- Se $s > 0$, então

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x) = B_{(L-1, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(L-2, -1)}^{\frac{2s}{L}} \cdots B_{(1, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(0, -1)}^{\frac{2s}{L}}, \text{ onde}$$

$B_{(L-1, -1)}, B_{(L-2, -1)}, \dots, B_{(1, -1)}$ e $B_{(0, -1)}$ pertencem à classes distintas em $\mathbb{Z}\tilde{H}$. Daí, se tentamos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$; $0 \leq x \leq L-1$ em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x)$, aparece $B_{(x, -1)}^{\frac{-2s}{L}}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, e este não cancela nenhum outro termo da equação (4.16). Além disso, não podemos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$ usando $B_{(x, -1)}^{-1}$ uma vez que $\frac{2s}{L}$ é ímpar. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.16).

- Se $s < 0$, então

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x) = B_{(-L, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(-L+1, -1)}^{\frac{2s}{L}} \cdots B_{(-2, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(-1, -1)}^{\frac{2s}{L}}, \text{ onde}$$

$B_{(-L, -1)}, B_{(-L+1, -1)}, \dots, B_{(-2, -1)}$ e $B_{(-1, -1)}$ pertencem à classes distintas em $\mathbb{Z}\tilde{H}$. Dessa forma, se tentamos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$; $-L \leq x \leq -1$ em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-x}[d^{-1}, e^{2s}]e^x)$, aparece $B_{(x, -1)}^{\frac{-2s}{L}}$ em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-x}cX_2c^{-1}E^x)$, e este não cancela nenhum outro termo da equação (4.16). Além disso, não podemos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$ usando $B_{(x, -1)}$ uma vez que $\frac{2s}{L}$ é ímpar.

Consequentemente, não existe solução para a equação (4.16).

Portanto, como não existe solução para a equação (4.16), em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, concluímos que a equação principal na sua forma original também não admite solução.

(vii) $0 \neq x = 2^a(2k+1)$; $a \in \mathbb{N}^*$ (x par diferente de zero), $s \neq 2^a t$ e $a_{32} = 2r \leq -2$.

Neste caso, a equação principal também não admite solução. De fato, temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-x}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}); s \neq 0.$$

Tomando $E = e^{-x}$ e $D = e^{2s}$ segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1}.$$

Usando a fórmula (4.15) do caso anterior, temos que

$$\mathcal{A}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1}) = \begin{cases} B_{(-x+2s-2,-1)}B_{(-x+2s-3,-1)} \cdots B_{(-x,-1)}B_{(-x-1,-1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-x+2s-1,-1)}^{-1}B_{(-x+2s,-1)}^{-1} \cdots B_{(-x-3,-1)}^{-1}B_{(-x-2,-1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Além disso, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(u,v)}^n$ como somando, então $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém $B_{(u,v)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(e^{-x}cX_2c^{-1}e^x)$ contém $B_{(-x+u+(2r)(v+1),-2-v)}^{-n}$ e se $\mathcal{A}(X_3)$ contém $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(e^{2s}X_3^{-1}e^{-2s})$ contém $B_{(z+2s,w)}^{-m}$. A saber,

$$ce^ud^v[e, d]^nd^{-u}e^{-v}c^{-1} = e^{-1}d^{-1}e^{u+1}(e^{2r}d^{-1})^ve^{2r}d^{-1}[d, e]^n \dots$$

Deste modo, a soma dos expoentes de e , que precedem $[d, e]^n$, é: $u + (2r)(v+1)$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[d, e]^n$, é: $-2 - v$. Sejam $\bar{H} = \langle (-x, 0), (2s, 0) \rangle$ e $\tilde{H} = \pi/\bar{H}$; $\pi = \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, a equação principal se reduz a forma:

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.18)$$

Quocientando a fórmula anterior por $\bar{H}$, obtem-se:

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1}) = \begin{cases} B_{(2s-2,-1)}B_{(2s-3,-1)} \cdots B_{(0,-1)}B_{(-1,-1)}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s-1,-1)}^{-1}B_{(2s,-1)}^{-1} \cdots B_{(-3,-1)}^{-1}B_{(-2,-1)}^{-1}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Ainda, se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(u,v)}^n$, então $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ contém $B_{(u,v)}^{-n}$ e $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(u+2r(v+1),-v-2)}^{-n}$.

Como no caso anterior, temos que $\tilde{H} = \langle (L, 0) \rangle$, onde $L = \text{mdc}(-x, 2s)$ e $\frac{2s}{L}$ é ímpar. Deste modo,

- Se $s > 0$, então

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1}) = B_{(L-2, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(L-3, -1)}^{\frac{2s}{L}} \cdots B_{(0, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(-1, -1)}^{\frac{2s}{L}},$$

onde $B_{(L-2, -1)}, B_{(L-3, -1)}, \dots, B_{(0, -1)}$ e $B_{(-1, -1)}$ pertencem às classes distintas em $\mathbb{Z}\tilde{H}$. Dessa forma, se tentamos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$; $-1 \leq x \leq L-2$ em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1})$, aparece $B_{(x, -1)}^{-\frac{2s}{L}}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, e este não cancela nenhum outro termo da equação (4.18). Além disso, não podemos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$ usando $B_{(x, -1)}^{-1}$ uma vez que $\frac{2s}{L}$ é ímpar. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.18).

- Se $s < 0$, então

$$\bar{\mathcal{A}}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1}) = B_{(-L-1, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(-L, -1)}^{\frac{2s}{L}} \cdots B_{(-3, -1)}^{\frac{2s}{L}} B_{(-2, -1)}^{\frac{2s}{L}},$$

onde $B_{(-L-1, -1)}, B_{(-L, -1)}, \dots, B_{(-3, -1)}$ e $B_{(-2, -1)}$ pertencem às classes distintas em $\mathbb{Z}\tilde{H}$. Dessa forma, se tentamos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$; $-L-1 \leq x \leq -2$ em $\bar{\mathcal{A}}(e^{-x-1}[d^{-1}, e^{2s}]e^{x+1})$, aparece $B_{(x, -1)}^{-\frac{2s}{L}}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$, e este não cancela nenhum outro termo da equação (4.18). Além disso, não podemos cancelar $B_{(x, -1)}^{\frac{2s}{L}}$ usando $B_{(x, -1)}$ uma vez que $\frac{2s}{L}$ é ímpar. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.18).

Portanto, como não existe solução para a equação (4.18), em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, concluímos que a equação principal na sua forma original também não admite solução.

(II) $c_{22} - c_{21} = 1$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(2) \equiv 0 \pmod{2}, \text{ isto é, } 0 \neq p_2 - p_1 \text{ é qualquer.}$$

Note que $(-x-r, 1)$ e $(-x+r, -1)$ estão na mesma classe em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Assim,

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-x-r}d) = j_{\#}(e^{-x+r}d^{-1}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}).$$

Daí, tomando

- $E = e^{-x-r}d$ e $D = e^{p_2-p_1}$, se $a_{32} = 2r \geq -1$,
- $E = d^{-1}e^{-x-r}d^{-1}e^{-1}de$, e $D = d^{-1}e^{p_2-p_1}d$, se $a_{32} = 2r \leq -2$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(4) Considere os seguintes casos:

Caso V: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$; $a_{32}n = 2m$ e $a_{32}q_i = 2p_i$ e

Caso IX: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$; $a_{31} \neq 0$, e $a_{32}q_i = 2p_i$.

Observe que no caso IX, $m = n = 0$. Assim, nos dois casos temos as igualdades $a_{32}n = 2m$ e $a_{32}q_i = 2p_i$. Ainda, temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1})$$

e as relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}(e^{a_{32}}d)e.$$

Além disso, $a_{41} = 1$, logo a equação a ser resolvida é

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} \cdot DX_3^{-1}D^{-1} \cdot X_2^{-1} = 1, \quad (4.19)$$

e a condição necessária é:

$$-2\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0.$$

Observe que se $E_1 = ZE$ e $D_1 = WD$; $Z, W \in \pi_2(T, T-1)$, então como feito em (3),

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cD_1c^{-1}D_1^{-1}) = -2\varepsilon \circ \mathcal{A}(W) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) \text{ e } \varepsilon \circ \mathcal{A}([E_1, D_1]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]).$$

Deste modo, a condição necessária módulo 2 é:

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D^{-1}) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D]) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Vamos considerar as seguintes situações:

(I) $a_{32} = 2r$.

Neste caso, temos que

$$2rn = 2m \Rightarrow m = rn \text{ e } 2rq_i = 2p_i \Rightarrow p_i = rq_i; q_1 \neq q_2, i = 1, 2.$$

Resumimos os dados deste caso por

$$(\phi_1, \phi_2, B_i, |E|_e, |E|_d) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} rn & rq_i \\ n & q_i \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21} \right); a_{31} \neq 0.$$

Para calcular a condição necessária módulo 2, tome $v = e^r d$. Daí,

$$cvc^{-1} = e^{-r} e^{2r-1} de = e^{-1} e^r de = e^{-1} ve.$$

Logo, se $D = v^{q_2-q_1}$, então

$$cDc^{-1}D^{-1} = cv^{q_2-q_1}c^{-1}v^{q_1-q_2} = e^{-1}v^{q_2-q_1}ev^{q_1-q_2} = [e^{-1}, D] = [e^{-1}, (e^r d)^{q_2-q_1}].$$

Assim, se $E = e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}$, a condição necessária módulo 2 é dada por:

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([e^{-1}, (e^r d)^{q_2-q_1}]) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}, (e^r d)^{q_2-q_1}]) \equiv 0 \pmod{2},$$

que é equivalente à equação:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & r(q_2 - q_1) \\ 0 & q_2 - q_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & r(q_2 - q_1) \\ c_{22} - c_{21} & q_2 - q_1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Aqui, usamos o fato que

$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([e^{-1}, (e^r d)^{q_2-q_1}]) = (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([e^{-1}, (e^{r(q_2-q_1)}d^{q_2-q_1})])$, $(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}, (e^r d)^{q_2-q_1}]) = (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}, (e^{r(q_2-q_1)}d^{q_2-q_1})])$ e o Teorema 3.2.1(2). Deste modo, a condição necessária módulo 2 é

$$(q_2 - q_1)[(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) - 1] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Resolver a equação para os dados

$$(\phi_1, \phi_2, B_i, |E|_e, |E|_d) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} rn & rq_i \\ n & q_i \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21} \right); a_{31} \neq 0$$

é equivalente a resolver a equação para os dados

$$(\phi'_1, \phi'_2, B'_i, |E'|_e, |E'|_d) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & nr + q_i \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}), c_{22} - c_{21} \right); a_{31} \neq 0.$$

Para ver isso, considere o isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}e^{2r}de \rangle &\rightarrow G_2 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}de \rangle \\ e &\mapsto e, d \mapsto e^{-r}d, c \mapsto c \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{1\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{1\#} & \downarrow & \downarrow \\ e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e) = e & \varphi(d) = e^{-r}d \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ccccc} e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{1\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{1\#} & \downarrow & \downarrow \\ e & e^{a_{31}}d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e) = e & \varphi(e^{a_{31}}d) = e^{a_{31}-r}d \\ \\ e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{2\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{2\#} & \downarrow & \downarrow \\ e^{-1} & e^{2r}d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e^{-1}) = e^{-1} & \varphi(e^{2r}d) = e^{2r}e^{-r}d \\ \\ e & d & c & e & e^{-r}d & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e^{rn}d^n & e^{rq_i}d^{q_i} & e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}} & e^{rn}(e^{-r}d)^n & e^{rq_i}(e^{-r}d)^{q_i} & e^{c_{12}-c_{11}}(e^{-r}d)^{c_{22}-c_{21}} \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi'_{1\#}(e) &= e, \phi'_{1\#}(e^{-r}d) = e^{-r}d \Rightarrow \phi'_{1\#}(d) = d \text{ ou} \\ \phi'_{1\#}(e) &= e, \phi'_{1\#}(e^{-r}d) = e^{a_{31}-r}d \Rightarrow \phi'_{1\#}(d) = e^{a_{31}}d, \\ \phi'_{2\#}(e) &= e^{-1}, \phi'_{2\#}(e^{-r}d) = e^{-1}e^{2r}de \Rightarrow \phi'_{2\#}(d) = e^{-1}de, \\ f'_{\#}(e) &= e^{rn}(e^{-r}d)^n, f'_{\#}(e^{-r}d) = e^{rq_i}(e^{-r}d)^{q_i} \Rightarrow f'_{\#}(d) = (e^{rn}(e^{-r}d)^n)^r e^{rq_i}(e^{-r}d)^{q_i}, \text{ e} \\ f'_{\#}(c) &= e^{c_{12}-c_{11}}(e^{-r}d)^{c_{22}-c_{21}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\phi'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B'_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & nr + q_i \end{pmatrix}; a_{31} \neq 0,$$

$$|E'|_e = c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}) \text{ e } |E'|_d = c_{22} - c_{21}.$$

Considerando os novos dados temos

$$p'_2 - p'_1 = 0, q'_2 - q'_1 = q_2 - q_1, j_\#(E') = j_\#(e^{c_{12}-c_{11}-r(c_{22}-c_{21})}d^{c_{22}-c_{21}}) \text{ e } j_\#(D') = j_\#(d^{q_2-q_1})$$

satisfazendo a condição necessária:

$$(q_2 - q_1)[(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) - 1] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Seja H a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} (| |_e, | |_d) : \pi_1(T-1) &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e &\mapsto (|ee|_e, |ee|_d) = (2, 0), \\ d &\mapsto (|de^{-1}d^{-1}e|_e, |de^{-1}d^{-1}e|_d) = (0, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0) \rangle} = \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (2, 0) \rangle} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Assim, é suficiente tomar E' tal que $(|E'|_e, |E'|_d) = (0, c_{22} - c_{21})$ ou $(1, c_{22} - c_{21})$. Desta maneira, temos as seguintes situações:

(a) $|E'|_e = (c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) \equiv 1 \pmod{2}.$

Neste caso, tomando $E' = d^{(c_{22}-c_{21})}e$, e $D' = d^{q_2-q_1}$, segue que

$$E'cD'c^{-1}E'^{-1}D'^{-1} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial.

(b) $|E'|_e = (c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) \equiv 0 \pmod{2}.$

Nesta situação temos que $(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) - 1$ é ímpar, daí, a condição necessária

$$(q_2 - q_1)[(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) - 1] \equiv 0 \pmod{2}$$

implica que $q_2 - q_1$ é par, ou seja, $q_2 - q_1 = 2k$. Seja $L = \text{mdc}(q_2 - q_1, c_{22} - c_{21})$. Vamos analisar as seguintes possibilidades:

(i) $\frac{q_2 - q_1}{L} = 2p$.

Neste caso $\frac{c_{22} - c_{21}}{L} = 2q - 1$, logo a equação principal admite a solução trivial. A saber, tome $v = cdc^{-1} = e^{-1}de$. Note que $cvc^{-1} = ce^{-1}dec^{-1} = d$. Daí, se $E' = v^{-L}(v^L d^L)^q$ e $D' = (d^L v^L)^p$, então

$$\begin{aligned} E' c D' c^{-1} E'^{-1} D'^{-1} &= v^{-L} (v^L d^L)^q (v^L d^L)^p (v^L d^L)^{-q} v^L (d^L v^L)^{-p} \\ &= v^{-L} (v^L d^L)^p v^L (d^{-L} v^{-L})^{-p} = (d^L v^L)^p (d^L v^L)^{-p} = 1. \end{aligned}$$

(ii) $q_2 - q_1 = 2^{r_1} d_1$, onde d_1 é ímpar e $c_{22} - c_{21} = 2^{r_2} d_2$, com d_2 ímpar, tal que, $1 < r_1 \leq r_2$.

Neste caso, uma vez que $c_{22} - c_{21}$ é par segue que a condição necessária

$$(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) \equiv 0 \pmod{2}$$

é equivalente a

$$c_{12} - c_{11} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Vamos mostrar que não existe solução para a equação principal (4.19). De fato, sejam $E' = d^{c_{22} - c_{21}}$ e $D' = d^{q_2 - q_1}$. Então

$$\begin{aligned} E' c D' c^{-1} E'^{-1} D'^{-1} &= d^{c_{22} - c_{21}} c d^{q_2 - q_1} c^{-1} d^{c_{21} - c_{22}} d^{q_1 - q_2} \\ &= d^{c_{22} - c_{21}} e^{-1} d^{q_2 - q_1} e d^{c_{21} - c_{22}} d^{q_1 - q_2} \\ &= d^{c_{22} - c_{21}} [e^{-1}, d^{q_2 - q_1}] d^{c_{21} - c_{22}}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} [e^{-1}, d] &= e^{-1} d e d^{-1} e^{-1} e = e^{-1} [d, e] e, \\ [e^{-1}, d^2] &= [e^{-1}, d] \cdot d [e^{-1}, d] d^{-1}, \\ [e^{-1}, d^3] &= [e^{-1}, d^2] \cdot d^2 [e^{-1}, d] d^{-2}, \\ [e^{-1}, d^{-1}] &= e^{-1} d^{-1} e d e^{-1} d^{-1} d e = e^{-1} d^{-1} [e, d] d e, \\ [e^{-1}, d^{-2}] &= [e^{-1}, d^{-1}] \cdot d^{-1} [e^{-1}, d^{-1}] d \text{ e} \\ [e^{-1}, d^{-3}] &= [e^{-1}, d^{-2}] \cdot d^{-2} [e^{-1}, d^{-1}] d^2. \end{aligned}$$

Por recorrência, obtem-se

$$\mathcal{A}([e^{-1}, d^{q_2-q_1}]) = \begin{cases} B_{(-1,0)}^{-1} B_{(-1,1)}^{-1} B_{(-1,2)}^{-1} \cdots B_{(-1,q_2-q_1-1)}^{-1}, & \text{se } q_2 - q_1 \geq 1, \\ B_{(-1,-1)} B_{(-1,-2)} B_{(-1,-3)} \cdots B_{(-1,q_2-q_1)}, & \text{se } q_2 - q_1 \leq -1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(d^{c_{22}-c_{21}}[e^{-1}, d^{q_2-q_1}]d^{c_{21}-c_{22}}) = \\ \begin{cases} B_{(-1,c_{22}-c_{21})}^{-1} B_{(-1,1+c_{22}-c_{21})}^{-1} \cdots B_{(-1,q_2-q_1-1+c_{22}-c_{21})}^{-1}, & \text{se } q_2 - q_1 \geq 1, \\ B_{(-1,-1+c_{22}-c_{21})} B_{(-1,-2+c_{22}-c_{21})} \cdots B_{(-1,q_2-q_1+c_{22}-c_{21})}, & \text{se } q_2 - q_1 \leq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a equação (4.19), com o novo input e na abelianização é dada por:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1}) \cdot \mathcal{A}(E'cD'c^{-1}E'^{-1}D'^{-1}) \cdot \mathcal{A}(D'X_3^{-1}D'^{-1}) \cdot \mathcal{A}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.20)$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ e $\mathcal{A}(X_3)$ contém $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(-x-2,y)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(D'X_3^{-1}D'^{-1})$ contém $B_{(z,w+q_2-q_1)}^{-m}$. Aliás,

$$\begin{aligned} ce^x d^y [e, d]^n d^{-y} e^{-x} c^{-1} &= e^{-x} e^{-1} d^y e [e^{-1}, e^{-1} d e]^n e^{-1} d^{-y} e e^x \\ &= e^{-x} e^{-1} d^y (e^{-1} d e d^{-1})^n d^{-y} e e^x \\ &= e^{-x} e^{-1} d^y e^{-1} [d, e]^n \dots, \end{aligned}$$

de modo que a soma dos expoentes de e , que precedem $[d, e]^n$, é: $-x-2$ e a de d é: y . Também,

$$d^{q_2-q_1} e^z d^w [e, d]^m d^{-w} e^{-z} d^{q_1-q_2}$$

é tal que a soma dos expoentes de e que precedem $[e, d]^m$ é: z e de d é: $w + q_2 - q_1$.

Considere o subgrupo $H = \langle (0, L) \rangle$, onde $L = \text{mdc}(q_2 - q_1, c_{22} - c_{21})$ e $\frac{q_2 - q_1}{L} = 2u + 1$. Vamos olhar para a equação (4.20) em $\mathbb{Z}(\frac{\pi}{H})$. Primeiro, observe que em $\mathbb{Z}\pi$, a equação (4.20) é dada por:

$$\begin{aligned} B_{(z,w)}^m B_{(-x-2,y+c_{22}-c_{21})}^{-n} B_{(-1,c_{22}-c_{21})}^{-1} B_{(-1,1+c_{22}-c_{21})}^{-1} \cdots B_{(-1,q_2-q_1-1+c_{22}-c_{21})}^{-1} B_{(z,w+q_2-q_1)}^{-m} B_{(x,y)}^{-n} &= 1, \\ \text{se } q_2 - q_1 \geq 1, \text{ ou} \\ B_{(z,w)}^m B_{(-x-2,y+c_{22}-c_{21})}^{-n} B_{(-1,-1+c_{22}-c_{21})} B_{(-1,-2+c_{22}-c_{21})} \cdots B_{(-1,q_2-q_1+c_{22}-c_{21})} B_{(z,w+q_2-q_1)}^{-m} B_{(x,y)}^{-n} &= 1, \\ \text{se } q_2 - q_1 \leq -1. \end{aligned}$$

Após projetar essas equações em $\mathbb{Z}(\frac{\pi}{H})$ obtemos, em ambos os casos, a equação

$$B_{(-x-2,y)}^{-n} B_{(-1,0)}^{-2u-1} B_{(-1,1)}^{-2u-1} \cdots B_{(-1,L-1)}^{-2u-1} B_{(x,y)}^{-n} = 1. \quad (4.21)$$

Note que em $\mathbb{Z}(\frac{\pi}{H})$ $\bar{\mathcal{A}}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1})$ contém $B_{(-x-2,y)}^{-n}$, pois $c_{22} - c_{21}$ é múltiplo de L .

Para cancelar $B_{(-1,i)}^{-1}$, $i = 0, \dots, L-1$ em $B_{(-1,i)}^{-2u-1}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ deve conter $B_{(-1,i)}$, logo $\bar{\mathcal{A}}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1})$ deve conter $B_{(-1,i)}$. Assim, toda vez que quisermos cancelar o termo $B_{(-1,i)}^{-1}$ em $B_{(-1,i)}^{-2u-1}$, o termo $B_{(-1,i)}$ aparece aos pares e portanto, como $B_{(-1,i)}^{-2u-1}$ contém uma quantidade ímpar de $B_{(-1,i)}^{-1}$, isto é impossível, consequentemente, não existe solução para a equação (4.21). Portanto, a equação principal na sua forma original também não admite solução.

(II) $a_{32} = 2r + 1$.

Neste caso temos:

$$(2r+1)n = 2m \Rightarrow n \text{ é par, isto é, } n = 2k.$$

$$(2r+1)q_i = 2p_i \Rightarrow q_i \text{ é par, ou seja, } q_i = 2t_i, i = 1, 2.$$

Deste modo, $q_2 - q_1 = 2(t_2 - t_1)$ com $t_2 - t_1 \neq 0$, pois $q_2 - q_1 \neq 0$. Logo,

$$p_2 - p_1 = (2r+1)\frac{q_2}{2} - (2r+1)\left(\frac{q_1}{2}\right) = (2r+1)(t_2 - t_1). \text{ Assim,}$$

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{(2r+1)(t_2-t_1)}d^{2(t_2-t_1)})$$

e resumimos os dados deste caso por

$$(\phi_1, \phi_2, B_i, |E|_e, |E|_d) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2r+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2r+1)k & (2r+1)t_i \\ 2k & 2t_i \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21} \right); \\ a_{31} \neq 0.$$

Para calcular a condição necessária módulo 2, tomamos $v = de^{2r+1}d$ e assim

$$cvc^{-1} = cde^{2r+1}dc^{-1} = e^{2r}dee^{-2r-1}e^{2r}de = e^{-1}e^{2r+1}dde = e^{-1}d^{-1}(v)de.$$

Agora, se $D = v^{t_2-t_1}$, então

$$cDc^{-1}D^{-1} = cv^{t_2-t_1}c^{-1}v^{t_1-t_2} = e^{-1}d^{-1}v^{t_2-t_1}dev^{t_1-t_2} = [e^{-1}d^{-1}, D],$$

de modo que

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D^{-1}) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})([E, D]) = \det \begin{pmatrix} -1 & (2r+1)(t_2-t_1) \\ -1 & 2(t_2-t_1) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_{12}-c_{11} & (2r+1)(t_2-t_1) \\ c_{22}-c_{21} & 2(t_2-t_1) \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Assim,

$$(t_2 - t_1)[1 + (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Resolver a equação para $(\phi_1, \phi_2, B_i, |E|_e, |E|_d)$ dado anteriormente é equivalente a resolvê-la para os dados:

$$(\phi'_1, \phi'_2, B'_i, |E'|_e, |E'|_d) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & rk + t_i \\ 2k & 2(rk + t_i) \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}), c_{22} - c_{21} \right); \\ a_{31} \neq 0.$$

Para checar isso, basta considerar o isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}e^{2r+1}de \rangle &\rightarrow G_2 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = de \rangle \\ e &\mapsto e, d \mapsto e^{-r}d, c \mapsto c \end{aligned}$$

Aliás, temos:

$$\begin{array}{ccccc} e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{1\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{1\#} & \downarrow & \downarrow \\ e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e) = e & \varphi(d) = e^{-r}d \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ccccc} e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{1\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{1\#} & \downarrow & \downarrow \\ e & e^{a_{31}}d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e) = e & \varphi(e^{a_{31}}d) = e^{a_{31}-r}d \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{2\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{2\#} & \downarrow & \downarrow \\ e^{-1} & e^{2r+1}d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e^{-1}) = e^{-1} & \varphi(e^{2r+1}d) = e^{r+1}d \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} e & d & c & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & f_{\#} \downarrow \quad \downarrow f'_{\#} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e^{(2r+1)k}d^{2k} & e^{(2r+1)t_i}d^{2t_i} & e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}} & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e^{(2r+1)k}(e^{-r}d)^{2k} & e^{(2r+1)t_i}(e^{-r}d)^{2t_i} & e^{c_{12}-c_{11}}(e^{-r}d)^{c_{22}-c_{21}} \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi'_{1\#}(e) &= e, \phi'_{1\#}(e^{-r}d) = e^{-r}d \Rightarrow \phi'_{1\#}(d) = d, \text{ ou} \\ \phi'_{1\#}(e) &= e, \phi'_{1\#}(e^{-r}d) = e^{a_{31}-r}d \Rightarrow \phi'_{1\#}(d) = e^{a_{31}}d, \\ \phi'_{2\#}(e) &= e^{-1}, \phi'_{2\#}(e^{-r}d) = e^{r+1}d \Rightarrow \phi'_{2\#}(d) = ed, \\ f'_{\#}(e) &= e^{(2r+1)k}(e^{-r}d)^{2k}, f'_{\#}(e^{-r}d) = e^{(2r+1)t_i}(e^{-r}d)^{2t_i} \Rightarrow \\ f'_{\#}(d) &= (e^{(2r+1)k}(e^{-r}d)^{2k})^r e^{(2r+1)t_i}(e^{-r}d)^{2t_i}. \end{aligned}$$

Ainda, note que

$$p'_2 - p'_1 = t_2 - t_1 \text{ e } q'_2 - q'_1 = 2(t_2 - t_1). \text{ Assim,}$$

$$j_{\#}(E') = e^{c_{12}-c_{11}-r(c_{22}-c_{21})} d^{c_{22}-c_{21}}, \text{ e } j_{\#}(D') = e^{t_2-t_1} d^{2(t_2-t_1)}.$$

Considere os dados $(\phi'_1, \phi'_2, B'_i, |E'|_e, |E'|_d)$ satisfazendo a condição necessária

$$(t_2 - t_1)[1 - (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Seja H' a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} (| \cdot |_e, | \cdot |_d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$e \mapsto (|ee|_e, |ee|_d) = (2, 0) \text{ e } d \mapsto (|de^{-1}d^{-1}|_e, |de^{-1}d^{-1}|_d) = (-1, 0).$$

Considere o grupo quociente

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H'} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (-1, 0) \rangle} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 0) \rangle} = \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (1, 0) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \simeq \{a\} \times \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z} \text{ fixo.}$$

Assim, é suficiente tomar E' tal que $(|E'|_e, |E'|_d) = (a, c_{22} - c_{21})$, onde $a \in \mathbb{Z}$ é fixo e $c_{22} - c_{21} \in \mathbb{Z}$. Temos as seguintes possibilidades:

(i) $|E'|_d = c_{22} - c_{21} \equiv 1 \pmod{2}$, isto é, $c_{22} - c_{21} = 2u - 1$.

Neste caso, tomando $E' = (ded)^u d^{-1}$ e $D' = (ded)^{t_2-t_1}$. Temos:

$$\begin{aligned} E' c D' c^{-1} E'^{-1} D'^{-1} &= (ded)^u d^{-1} c (ded)^{t_2-t_1} c^{-1} d (ded)^{-u} (ded)^{t_1-t_2} \\ &= (ded)^u d^{-1} (dde)^{t_2-t_1} d (ded)^{-u} (ded)^{t_1-t_2} \\ &= (ded)^u (ded)^{t_2-t_1} (ded)^{-u} (ded)^{t_1-t_2} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial. Observe que aqui consideramos $a = u$, isto é, $c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}) = u$.

(ii) $|E'|_d = c_{22} - c_{21} \equiv 0 \pmod{2}$, isto é, $c_{22} - c_{21} = 2u$.

Neste caso, a condição necessária

$$(t_2 - t_1)[1 - (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2}$$

implica que $t_2 - t_1$ é par. Seja $L = \text{mdc}(q'_2 - q'_1 = 2(t_2 - t_1), c_{22} - c_{21})$. L é par, uma vez que $c_{22} - c_{21} = 2u$. Deste modo, vamos analisar as seguintes situações:

(a) $\frac{2(t_2-t_1)}{L} = 2d_1$.

Neste caso, $\frac{(c_{22}-c_{21})}{L} = 2l + 1$. Note que se $w_1 = ded$ e $w_2 = cw_1c^{-1} = dde = dw_1d^{-1}$, então

$$cw_2c^{-1} = cdw_1d^{-1}c^{-1} = ded = w_1,$$

de modo que $c(w_1w_2)^xc^{-1} = (w_2w_1)^x$. Assim, tomando $E' = w_1^{L/2}(w_2^{L/2}w_1^{L/2})^l$ (estamos considerando $a = u$, pois a soma dos expoentes de e em E' é u) e $D' = (w_1^{L/2}w_2^{L/2})^{d_1}$, temos que

$$\begin{aligned} E'cD'c^{-1}E'^{-1}D'^{-1} &= w_1^{L/2}(w_2^{L/2}w_1^{L/2})^l(w_2^{L/2}w_1^{L/2})^{d_1}(w_2^{L/2}w_1^{L/2})^{-l}w_1^{-L/2}(w_1^{L/2}w_2^{L/2})^{-d_1} \\ &= (w_1^{L/2}w_2^{L/2})^{d_1}(w_1^{L/2}w_2^{L/2})^{-d_1} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial.

(b) $\frac{2(t_2-t_1)}{L} = 2u + 1$.

Neste caso, temos que $c_{22} - c_{21} = 2l$. Vamos mostrar que a equação principal não admite solução. Para tal, é suficiente mostrar que a equação não tem solução para $E' = w_2^l$ e $D' = w_1^{t_2-t_1}$, onde $w_1 = ded$ e $w_2 = dde$. Observe que estamos tomando $a = l$. Temos

$$\begin{aligned} E'cD'c^{-1}E'^{-1}D'^{-1} &= w_2^lw_2^{t_2-t_1}w_2^{-l}w_1^{t_1-t_2} = (dde)^{t_2-t_1}(ded)^{t_1-t_2} \\ &= (ddedd^{-1})^{t_2-t_1}(ded)^{t_1-t_2} = d(ded)^{t_2-t_1}d^{-1}(ded)^{t_1-t_2} = [d, (ded)^{t_2-t_1}]. \end{aligned}$$

Note, ainda que

$$\begin{aligned} [d, ded] &= dded^{-1}e^{-1}d^{-1} = d[d, e]d^{-1}, \\ [d, (ded)^2] &= d^2ed[d, e]d^{-1}e^{-1}d^{-2} \cdot d[d, e]d^{-1}, \\ [d, (ded)^{-1}] &= e^{-1}d^{-1}ed = e^{-1}d^{-1}[e, d]de, \text{ e} \\ [d, (ded)^{-2}] &= e^{-1}d^{-2}e^{-1}d^{-1}[e, d]ded^2e \cdot e^{-1}d^{-1}[e, d]de. \end{aligned}$$

Assim, por recorrência, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([d, (ded)^{t_2-t_1}]) &= \\ \begin{cases} B_{(0,1)}^{-1}B_{(1,3)}^{-1} \cdots B_{(t_2-t_1-1, 2(t_2-t_1)-1)}^{-1}, & \text{se } t_2 - t_1 \geq 1, \\ B_{(-1,-1)}B_{(-2,-3)} \cdots B_{(t_2-t_1, 2(t_2-t_1)+1)}, & \text{se } t_2 - t_1 \leq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém o termo $B_{(x,y)}^n$ e $\mathcal{A}(X_3)$ contém o termo $B_{(z,w)}^m$, temos que $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$, $\mathcal{A}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1})$ contém $B_{(c_{22}-c_{21}/2-x-1+y, c_{22}-c_{21}+y)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(DX_3D^{-1})$ contém $B_{(t_2-t_1+z, 2(t_2-t_1)+w)}^{-m}$. Aliás:

$$\begin{aligned} ce^x d^y [e, d]^n d^{-y} e^{-x} c^{-1} &= e^{-x} (de)^y [e^{-1}, de]^n (de)^{-y} e^x \\ &= e^{-x} (de)^y (e^{-1} ded^{-1})^n (de)^{-y} e^x \\ &= e^{-x} e^{-1} e (de)^y (e^{-1} ded^{-1} e^{-1} e)^n (ed)^{-y} ee^x \\ &= e^{-x} e^{-1} e (de)^y e^{-1} [d, e]^n \dots \\ &= e^{-x} e^{-1} (ed)^y [d, e]^n \dots, \end{aligned}$$

logo,

$$E' ce^x d^y [e, d]^n d^{-y} e^{-x} c^{-1} = (dde)^{l=(c_{22}-c_{21})/2} e^{-x} e^{-1} (ed)^y [d, e]^n \dots,$$

de modo que a soma dos expoentes de e , que precedem $[d, e]^n$, é: $(c_{22} - c_{21})/2 - x - 1 + y$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[d, e]^n$ é: $c_{22} - c_{21} + y$. Além disso, $D'X_3^{-1}D'^{-1}$ contém $(ded)^{t_2-t_1} e^z d^w [d, e]^m \dots$, neste caso, a soma dos expoentes de e , que precedem $[d, e]^m$, é: $t_2 - t_1 + z$ e a soma dos expoentes de d , que precedem $[d, e]^m$, é: $2(t_2 - t_1) + w$.

Considere o subgrupo $H = \langle (1, 0), (0, L) \rangle$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, onde

$$L = \text{mdc}(2(t_2 - t_1), c_{22} - c_{21}) = \text{mdc}(2(t_2 - t_1), 2l) \text{ e } \frac{2(t_2 - t_1)}{L} = 2u + 1. \text{ Temos que,}$$

- Se $t_2 - t_1 \geq 1$, em termos de classes de representantes, a equação

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1}) \cdot \mathcal{A}(E'cD'c^{-1}E'^{-1}D'^{-1}) \cdot \mathcal{A}(D'X_3^{-1}D'^{-1}) \cdot \mathcal{A}(X_2^{-1}) = 1$$

em $\mathbb{Z}\pi$ é da forma:

$$\begin{aligned} B_{(z,w)}^m \cdot B_{((c_{22}-c_{21})/2-x-1+y, c_{22}-c_{21}+y)}^{-n} \cdot B_{(0,1)}^{-1} B_{(1,3)}^{-1} \dots \\ B_{(t_2-t_1-1, 2(t_2-t_1)-1)}^{-1} \cdot B_{(z+t_2-t_1, w+2(t_2-t_1))}^{-m} B_{(x,y)}^{-n} = 1. \end{aligned}$$

Projetando-a sobre $\mathbb{Z} \left(\frac{\pi}{H} \right)$ obtem-se:

$$B_{(x,y)}^{-n} B_{(0,1)}^{-(2u+1)} B_{(1,3)}^{-(2u+1)} \dots B_{(L/2-1, L-1)}^{-(2u+1)} B_{(x,y)}^{-n} = 1.$$

Assim, para cancelar o termo $B_{(i-1, 2i-1)}^{-1}$, $i = 1, \dots, L/2$ em $B_{(i-1, 2i-1)}^{-(2u+1)}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ deve conter $B_{(i-1, 2i-1)}$, daí aparece o termo $B_{(i-1, 2i-1)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1})$, ou seja, $B_{(i-1, 2i-1)}$ aparece aos pares. Como $B_{(i-1, 2i-1)}^{-(2u+1)}$ contém uma quantidade ímpar de $B_{(i-1, 2i-1)}^{-1}$, isto é impossível. Observe ainda, que para todo $i = 1, 2, \dots, L/2$, os $B_{(i-1, 2i-1)}$ são de classes diferentes. De fato,

$$1 \leq i < j \leq L/2 \Rightarrow 1 \leq j - i < L/2, (*)$$

daí, se

$$(j-1, 2j-1) - (i-1, 2i-1) = \alpha(1, 0) + \beta(0, L),$$

temos que $j-1 = \alpha$ e $2(j-1) = \beta L$, mas por (*), $2 \leq 2(j-i) < L$, ou seja, L não divide $2(j-i)$. Consequentemente, a equação principal em $\mathbb{Z}(\frac{\pi}{H})$ não admite solução. Portanto, a equação principal na sua forma original também não admite solução.

- Se $t_2 - t_1 \leq -1$, temos que a equação principal em $\mathbb{Z}\pi$, em termos de classes de representantes, é dada por:

$$B_{(z,w)}^m \cdot B_{((c_{22}-c_{21})/2-x-1+y, c_{22}-c_{21}+y)}^{-n} \cdot B_{(-1,-1)} B_{(-2,-3)} \cdots \\ B_{(t_2-t_1, 2(t_2-t_1)+1)} \cdot B_{(z+t_2-t_1, w+2(t_2-t_1))}^{-m} B_{(x,y)}^{-n} = 1.$$

Projetando-a sobre $\mathbb{Z}(\frac{\pi}{H})$ obtem-se:

$$B_{(x,y)}^{-n} B_{(-1,-1)}^{-(2u+1)} B_{(-1,-3)}^{-(2u+1)} \cdots B_{(-L/2, 1-L)}^{-(2u+1)} B_{(x,y)}^{-n} = 1.$$

Para cancelar o termo $B_{(-i, -2i+1)}$, $i = 1, \dots, L/2$ em $B_{(-i, -2i+1)}^{-(2u+1)}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ deve conter $B_{(-i, -2i+1)}^{-1}$, logo aparece o termo $B_{(-i, -2i+1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(E'cX_2c^{-1}E'^{-1})$, de modo que $B_{(-i, -2i+1)}^{-1}$ aparece aos pares. Mas $B_{(-i, -2i+1)}^{-(2u+1)}$ contém uma quantidade ímpar de $B_{(-i, -2i+1)}$, logo é impossível cancelar $B_{(-i, -2i+1)}$, $i = 1, \dots, L/2$ em $B_{(-i, -2i+1)}^{-(2u+1)}$. Note ainda, que para todo $i = 1, 2, \dots, L/2$, os $B_{(-i, -2i+1)}^{-1}$ são de classes diferentes. Aliás,

$$1 \leq i < j \leq L/2 \Rightarrow 1 \leq j-i < L/2, (*)$$

daí, se

$$(-i, -2i+1) - (-j, -2j+1) = \alpha(1, 0) + \beta(0, L),$$

então $j-1 = \alpha$ e $2(j-1) = \beta L$, ou seja, L divide $2(j-1)$, mas por (*), $2 \leq 2(j-i) < L$. Consequentemente, a equação principal em $\mathbb{Z}(\frac{\pi}{H})$ não admite solução. Portanto, a equação principal na sua forma original também não admite solução.

Por fim, considere o:

Caso XIX: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$;
 $a_{32}q_i - a_{31}m = 2p_i$.

Neste caso, temos

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}} d^{c_{22}-c_{21}}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1} d^{q_2-q_1}).$$

As relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}(e^{a_{32}}d)e,$$

a equação principal é da forma:

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1} \cdot [E, D] \cdot DX_3^{-1}D^{-1} \cdot X_2^{-1} = 1, \quad (4.22)$$

e a condição necessária é:

$$-2\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0.$$

Estes dados coincidem com os dados dos casos V e IX resolvidos anteriormente. Ainda,

(I) Se $a_{32} = 2r$, então

$$p_2 - p_1 = r(q_2 - q_1) \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} m & (2rq_i - a_{31}m)/2 \\ 0 & q_i \end{pmatrix}.$$

Daí, como nos casos V e IX ($a_{32} = 2r$), obtemos a condição necessária

$$(q_2 - q_1)[(c_{12} - c_{11}) - r(c_{22} - c_{21}) - 1] \equiv 0 \pmod{2},$$

e um novo input

$$(\phi'_1, \phi'_2, B'_i, |E'|_e, |E'|_d) = \left(\begin{pmatrix} -1 & a_{31} - 2r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & -a_{31}m/2 + mr \\ 0 & q_i \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}), c_{22} - c_{21} \right).$$

Para ver isso, considere o isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}(e^{2r}d)e \rangle &\rightarrow G_2 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}de \rangle \\ e &\mapsto e, d \mapsto e^{-r}d, c \mapsto c. \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d \\ \downarrow & \downarrow & \phi_{1\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{1\#} & \downarrow & \downarrow \\ e^{-1} & e^{a_{31}}d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e^{-1}) = e^{-1} & \varphi(e^{a_{31}}d) = e^{a_{31}}e^{-r}d \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& e & d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d & \\
& \downarrow & \downarrow & \phi_{2\#} \downarrow \quad \downarrow \phi'_{2\#} & \downarrow & \downarrow & \\
& e^{-1} & e^{2r}d & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & \varphi(e^{-1}) = e^{-1} & \varphi(e^{2r}d) = e^{2r}e^{-r}d & \\
\\
e & d & c & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e & e^{-r}d & c \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & f_{\#} \downarrow \quad \downarrow f'_{\#} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
e^m & e^{(2rq_i - a_{31}m)/2} d^{q_i} & e^{c_{12} - c_{11}} d^{c_{22} - c_{21}} & G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 & e^m & e^{(2rq_i - a_{31}m)/2} (e^{-r}d)^{q_i} & e^{c_{12} - c_{11}} (e^{-r}d)^{c_{22} - c_{21}}
\end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi'_{1\#}(e) &= e^{-1}, \phi'_{1\#}(e^{-r}d) = e^{a_{31}}e^{-r}d \Rightarrow \phi'_{1\#}(d) = e^{a_{31}-2r}d, \\
\phi'_{2\#}(e) &= e^{-1}, \phi'_{2\#}(e^{-r}d) = e^r d \Rightarrow \phi'_{2\#}(d) = d, \\
f'_{\#}(e) &= e^m, f'_{\#}(e^{-r}d) = e^{(2rq_i - a_{31}m)/2} (e^{-r}d)^{q_i} \Rightarrow f'_{\#}(d) = e^{(2rq_i - a_{31}m)/2 + mr} (e^{-r}d)^{q_i} \text{ e} \\
f'_{\#}(c) &= e^{c_{12} - c_{11}} (e^{-r}d)^{c_{22} - c_{21}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\phi'_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} - 2r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B'_i = \begin{pmatrix} m & -a_{31}m/2 + mr \\ 0 & q_i \end{pmatrix},$$

$$|E'|_e = c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}) \text{ e } |E'|_d = c_{22} - c_{21}.$$

Note que $p'_2 - p'_1 = 0$ e $q'_2 - q'_1 = q_2 - q_1$. Assim, $j_{\#}(E') = j_{\#}(e^{c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21})} d^{c_{22} - c_{21}})$, e $j_{\#}(D') = j_{\#}(d^{q_2 - q_1})$. Portanto a solução para este caso é análoga a solução para $a_{32} = 2r$ dada nos casos anteriores.

(II) Se $a_{32} = 2r + 1$, então

$(2r+1)(q_2 - q_1) = 2(p_2 - p_1)$, logo $q_2 - q_1 = 2t$. Além disso, $p_i = ((2r+1)q_i - a_{31}m)/2$, de modo que

$$B_i = \begin{pmatrix} m & ((2r+1)q_i - a_{31}m)/2 \\ 0 & q_i \end{pmatrix}.$$

Daí, como nos casos V e IX, para $a_{32} = 2r + 1$, obtemos a condição necessária

$$t[1 + (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{2}$$

e o novo input

$$(\phi'_1, \phi'_2, B'_i, |E'|_e, |E'|_d) = \left(\begin{pmatrix} -1 & a_{31} - 2r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & ((2r+1)q_i - a_{31}m)/2 - rq_i + rm \\ 0 & q_i \end{pmatrix}, c_{12} - c_{11} - r(c_{22} - c_{21}), c_{22} - c_{21} \right).$$

Para ver isso, considere o isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = e^{-1}(e^{2r+1}d)e \rangle &\rightarrow G_2 = \langle e, d, c; cec^{-1} = e^{-1}, cdc^{-1} = de \rangle \\ e &\mapsto e, d \mapsto e^{-r}d, c \mapsto c. \end{aligned}$$

Aliás:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ e^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} d \\ \downarrow \\ e^{a_{31}}d \end{array} & \begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \phi_{1\#} \downarrow & & \downarrow \phi'_{1\#} \\ G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \end{array} & \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ \varphi(e^{-1}) = e^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} e^{-r}d \\ \downarrow \\ \varphi(e^{a_{31}}d) = e^{a_{31}}e^{-r}d \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ e^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} d \\ \downarrow \\ e^{2r+1}d \end{array} & \begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \phi_{2\#} \downarrow & & \downarrow \phi'_{2\#} \\ G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \end{array} & \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ \varphi(e^{-1}) = e^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} e^{-r}d \\ \downarrow \\ \varphi(e^{2r+1}d) = e^{2r+1}e^{-r}d \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ e^m \end{array} & \begin{array}{c} d \\ \downarrow \\ e^{\frac{(2r+1)q_i - a_{31}m}{2}} d^{q_i} \end{array} & \begin{array}{c} c \\ \downarrow \\ e^{c_{12} - c_{11}} d^{c_{22} - c_{21}} \end{array} & \begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f'_{\#} \\ G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \end{array} & \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ e^m \end{array} & \begin{array}{c} e^{-r}d \\ \downarrow \\ e^{\frac{(2r+1)q_i - a_{31}m}{2}} (e^{-r}d)^{q_i} \end{array} & \begin{array}{c} c \\ \downarrow \\ e^{c_{12} - c_{11}} (e^{-r}d)^{c_{22} - c_{21}} \end{array} \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi'_{1\#}(e) &= e^{-1}, \phi'_{1\#}(e^{-r}d) = e^{a_{31}}e^{-r}d \Rightarrow \phi'_{1\#}(d) = e^{a_{31}-2r}d, \\ \phi'_{2\#}(e) &= e^{-1}, \phi'_{2\#}(e^{-r}d) = e^{r+1}d \Rightarrow \phi'_{2\#}(d) = ed, \\ f'_{\#}(e) &= e^m, f'_{\#}(e^{-r}d) = e^{((2r+1)q_i - a_{31}m)/2} (e^{-r}d)^{q_i} \Rightarrow f'_{\#}(d) = e^{rm} e^{((2r+1)q_i - a_{31}m)/2} (e^{-r}d)^{q_i}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} p'_2 - p'_1 &= (2r+1) \left(\frac{q_2 - q_1}{2} \right) - r(q_2 - q_1) \\ &= (q_2 - q_1) \left(\frac{2r+1}{2} - r \right) = \frac{q_2 - q_1}{2} = t, \end{aligned}$$

$$e \ q'_2 - q'_1 = q_2 - q_1 = 2t. \text{ Assim, } j_{\#}(E') = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}-r(c_{22}-c_{21})} d^{c_{22}-c_{21}}), \text{ e } j_{\#}(D') = j_{\#}(e^t d^{2t}).$$

Deste modo, a solução para este caso é análoga a solução dada anteriormente, para $a_{32} = 2r + 1$, trocando $t_2 - t_1$ por t .

(5) Consideremos os seguintes casos:

Caso XI: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$; $a_{32}q_i = 0$ e

Caso XIV: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 & a_{32} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ n & q_i \end{pmatrix}$; $a_{31}n = 0$, $a_{32}n = 0$ e $a_{31}m = a_{32}q_i$.

Temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1}),$$

e as relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} cec^{-1} &= d^{-1}e^{-1}d, cdc^{-1} = d^{-1}e^{-1}(e^{a_{32}}d^{-1})ed, \text{ se } a_{32} \geq 1, \\ cec^{-1} &= e^{-1}d^{-1}(e^{-1})de, cdc^{-1} = e^{-1}(d^{-1}e^{a_{32}})e, \text{ se } a_{32} \leq 0. \end{aligned}$$

Nestes casos, a equação a ser resolvida é

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D)E^{-1} \cdot [E, D^{-1}] \cdot D^{-1}X_3^{-1}D \cdot D^{-1}X_2D = 1, \quad (4.23)$$

e a condição necessária é:

$$2\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = 0.$$

Observe que se $E_1 = ZE$ e $D_1 = WD$; $Z, W \in \pi_2(T, T-1)$, então

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathcal{A}(cD_1c^{-1}D_1) &= \varepsilon \circ \mathcal{A}(cWDc^{-1}WD) = \varepsilon \circ \mathcal{A}(cWc^{-1}cDc^{-1}DD^{-1}WD) \\ &= 2\varepsilon \circ \mathcal{A}(W) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D). \end{aligned}$$

Além disso,

$$[E_1, D_1^{-1}]D_1^{-1}[E_1, D_1] = 1. \text{ Daí,}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathcal{A}([E_1, D_1^{-1}]) &= -\varepsilon \circ \mathcal{A}([E_1, D_1]) = -\varepsilon \circ \mathcal{A}(ZEWDE^{-1}Z^{-1}D^{-1}W^{-1}) \\ &= -\varepsilon \circ \mathcal{A}(ZEW E^{-1}EDE^{-1}D^{-1}DZ^{-1}D^{-1}W^{-1}) \\ &= -\varepsilon \circ \mathcal{A}(Z) - \varepsilon \circ \mathcal{A}(W) - \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(Z) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(W) \\ &= -\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]), \end{aligned}$$

e como

$$[E, D^{-1}]D^{-1}[E, D]D = 1, \text{ segue que}$$

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = -\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]). \text{ Portanto,}$$

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([E_1, D_1^{-1}]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]).$$

Assim, $\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D)$ depende da escolha de D , mas $\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}])$ não depende. Ainda, a aumentação módulo 2, $(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2$, é independente dos elementos E e D e a condição necessária módulo 2 é da forma:

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D^{-1}]) \equiv 0 \pmod{2}, \text{ onde,}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) &= -\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([D, E]) \\ &= \det \begin{pmatrix} p_2 - p_1 & c_{12} - c_{11} \\ q_2 - q_1 & c_{22} - c_{21} \end{pmatrix} = (p_2 - p_1)(c_{22} - c_{21}) - (q_2 - q_1)(c_{12} - c_{11}). \end{aligned}$$

Se $a_{32} \neq 0$, então tanto no caso XI como no caso XIV , $q_2 - q_1 = 0$. Daí, tomando $D = e^{p_2 - p_1}$ temos que

$$\begin{aligned} cDc^{-1}D &= ce^{p_2 - p_1}c^{-1}e^{p_2 - p_1} \\ &= \begin{cases} d^{-1}e^{p_1 - p_2}de^{p_2 - p_1} = [d^{-1}, e^{p_1 - p_2}], & \text{se } a_{32} \geq 1, \\ e^{-1}d^{-1}(e^{p_1 - p_2})de^{p_2 - p_1} = e^{-1}[d^{-1}, e^{p_1 - p_2}]e, & \text{se } a_{32} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se $a_{32} = 0$, então

$$\begin{aligned} cDc^{-1}D &= ce^{p_2 - p_1}d^{q_2 - q_1}c^{-1}e^{p_2 - p_1}d^{q_2 - q_1} \\ &= e^{-1}d^{-1}(e^{p_1 - p_2})d(d^{-1}e^0)^{q_2 - q_1}ee^{p_2 - p_1}d^{q_2 - q_1} \\ &= e^{-1}d^{-1}e^{p_1 - p_2}dd^{q_1 - q_2}ee^{p_2 - p_1}d^{q_2 - q_1} \\ &= e^{-1}d^{-1}e^{p_1 - p_2}de^{p_2 - p_1}e^{p_1 - p_2}d^{q_1 - q_2}e^{p_2 - p_1}d^{q_2 - q_1}d^{q_1 - q_2}ed^{q_2 - q_1}e^{-1}e \\ &= e^{-1}[d^{-1}, e^{p_1 - p_2}][e^{p_1 - p_2}, d^{q_1 - q_2}][d^{q_1 - q_2}, e]e. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) &= \\ &\begin{cases} \det \begin{pmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } a_{32} \neq 0, \\ \det \begin{pmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} p_1 - p_2 & 0 \\ 0 & q_1 - q_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_1 - q_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{se } a_{32} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} p_1 - p_2, & \text{se } a_{32} \neq 0, \\ (p_1 - p_2)[1 + (q_1 - q_2)] + q_2 - q_1, & \text{se } a_{32} = 0. \end{cases}$$

Lembre que se $a_{32} \neq 0$, então $q_2 - q_1 = 0$, e assim

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) = (p_1 - p_2)[1 + (q_1 - q_2)] + q_2 - q_1, \forall a_{32} \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a condição necessária módulo 2

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D^{-1}]) = 0$$

é equivalente a

$$(p_1 - p_2)[1 + (q_1 - q_2) + (c_{21} - c_{22})] + (q_2 - q_1)[1 + (c_{11} - c_{12})] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Queremos checar se a condição anterior é suficiente. Seja H a imagem do homomorfismo

$$\begin{aligned} (| |e, | |d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e \mapsto (|ece^{-1}c^{-1}|_e, |ece^{-1}c^{-1}|_d) &= \begin{cases} (|ed^{-1}ed|_e, |ed^{-1}ed|_d), & \text{se } a_{32} \geq 1, \\ (|d^{-1}ede|_e, |d^{-1}ede|_d), & \text{se } a_{32} \leq 0. \end{cases} = (2, 0), \\ d \mapsto (|dcd^{-1}c^{-1}|_e, |dcd^{-1}c^{-1}|_d) &= \begin{cases} (|e^{-1}de^{-a_{32}}ed|_e, |e^{-1}de^{-a_{32}}ed|_d), & \text{se } a_{32} \geq 1, \\ (|de^{-1}e^{-a_{32}}de|_e, |de^{-1}e^{-a_{32}}de|_d), & \text{se } a_{32} \leq 0. \end{cases} = (-a_{32}, 2). \end{aligned}$$

Portanto $H = \langle (2, 0), (-a_{32}, 2) \rangle$. Assim,

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (-a_{32}, 2) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (1, 0), (-r, 1) \rangle}{\langle 2(1, 0), 2(-r, 1) \rangle} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } a_{32} = 2r, \\ \frac{\langle (1, 2), (0, 1) \rangle}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}_4, & \text{se } a_{32} = 2r + 1. \end{cases}$$

Seja $(|E|_e, |E|_d) = (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21})$. Devemos considerar as seguintes situações:

(A) $a_{32} = 2r; r \neq 0$.

Neste caso, um conjunto de representantes de E consiste de elementos da forma $(\bar{x}, \bar{y})$, onde (x, y) são as coordenadas relativas à base $\{(1, 0), (-r, 1)\}$, e $\bar{x}, \bar{y}$ significam x e y módulo 2. Assim,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = x(1, 0) + y(-r, 1) = (x - ry, y) = (0, 0), (-r, 1), (1, 0), \text{ ou } (1 - r, 1).$$

Considere $a_{32} = 2r > 0$. Temos os seguintes casos:

(i) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-r, 1)$; r par.

Neste caso, como $a_{32} \neq 0$, $q_2 - q_1 = 0$ e a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(2) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1$ é qualquer. Além disso, r par implica que $(-r, 1) \equiv (0, 1)$. Deste modo, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = d$ e $D = e^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = dce^{p_2-p_1}c^{-1}d^{-1}e^{p_2-p_1} = dd^{-1}e^{p_1-p_2}dd^{-1}e^{p_2-p_1} = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(ii) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1 - r, 1)$; r par.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(2) \equiv 0 \pmod{2},$$

de modo que $p_2 - p_1$ é qualquer. Além disso, $(1 - r, 1) \equiv (1, 1)$, logo, $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = ed$ e $D = e^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = edce^{p_2-p_1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}e^{p_2-p_1} = edd^{-1}e^{p_1-p_2}dd^{-1}e^{-1}e^{p_2-p_1} = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(iii) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-r, 1)$; r ímpar.

Como no caso (i), temos que $p_2 - p_1$ é qualquer. Além disso, r ímpar implica que $(-r, 1) \equiv (1, 1)$. Deste modo, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = ed$ e $D = e^{p_2-p_1}$, como no caso (ii), segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(iv) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1 - r, 1)$; r ímpar.

Como no caso (ii), temos que $p_2 - p_1$ é qualquer. Ainda, r ímpar implica que $(1 - r, 1) \equiv (0, 1)$. Deste modo, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = d$ e $D = e^{p_2-p_1}$, como no caso (i), segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(v) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1, 0) \equiv (-2r + 1, 2)$; r qualquer.

Neste caso a condição necessária é

$$(p_2 - p_1) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$. Assim, $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2r+1}d^2)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = de^{-2r+1}d$ e $D = e^s de^s d^{-1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = de^{-2r+1}dce^s de^s d^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{2r-1}d^{-1}e^s de^s d^{-1} = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

Considere agora, $a_{32} = 2r < 0$. Temos os seguintes casos:

(i') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-r, 1)$; r par.

Como no caso (i), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = e^{-1}de$, e $D = e^{p_2-p_1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(ii') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1 - r, 1)$; r par.

Como no caso (ii), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = ed(d^{-1}e^{-1}de)$, e $D = e^{p_2-p_1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(iii') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (-r, 1)$; r ímpar.

Como no caso (iii), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = ed(d^{-1}e^{-1}de)$, e $D = e^{p_2-p_1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(iv') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1 - r, 1)$; r ímpar.

Como no caso (iv), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = e^{-1}de$,

e $D = e^{p_2 - p_1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(v') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1, 0) \equiv (-2r + 1, 2)$; r qualquer.

Como no caso (v), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2r+1}d^2)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = de^{-2r}de$, e $D = e^sde^sd^{-1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(**B**) $a_{32} = 2r + 1$.

Neste caso, um conjunto de representantes de E consiste de elementos da forma $(0, \bar{y})$, onde $(0, y)$ são as coordenadas relativas à base $\{(1, 2), (0, 1)\}$, e $\bar{y}$ significa y módulo 4. Assim,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = 0(1, 2) + y(0, 1) = (0, y) = (0, 0), (0, 1), (0, 2) \text{ ou } (0, 3).$$

Considere $a_{32} = 2r + 1 > 0$. Temos as seguintes situações:

(I) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 1)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(0) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1$ é qualquer. Deste modo, $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2 - p_1})$. Tomando $E = d$ e $D = e^{p_2 - p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(II) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 2) \equiv (-2r, 2)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1) \equiv 0 \pmod{2},$$

de modo que $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$. Assim, $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2r}d^2)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = de^{-2r}d$ e $D = e^sde^sd^{-1}$, temos que $EcDc^{-1}E^{-1}D = 1$. Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(III) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 3) \equiv (1, 1)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(0) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1$ é qualquer. Assim, $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = ed$ e $D = e^{p_2-p_1}$, como no caso (ii) de (A), segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

Agora, consideremos $a_{32} = 2r + 1 < 0$. Temos as seguintes situações:

(I') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 1)$.

Neste caso, assim como no caso (I), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = e^{-1}de$, e $D = e^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(II') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 2) \equiv (-2r, 2)$.

Assim como no caso (II), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{-2r}d^2)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = de^{-2r-1}de$, e $D = e^sde^sd^{-1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(III') $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 3) \equiv (1, 1)$.

Assim como no caso (III), temos que $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1})$. Tomando $E = de$, e $D = e^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(C) $a_{32} = 0$.

Neste caso, como no caso (A), fazendo $r = 0$, segue que

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0), (0, 1), (1, 0) \text{ ou } (1, 1).$$

Note que, como $a_{32} = 0$, q_1 e q_2 são quaisquer. Temos as seguintes situações:

$$(1) (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 1).$$

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_1 - p_2)(q_1 - q_2) + (q_2 - q_1) \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow (q_2 - q_1)(1 - (p_2 - p_1)) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1$ é ímpar ou $p_2 - p_1$ é par e $q_2 - q_1$ é par.

- Suponha que $p_2 - p_1$ é ímpar. Temos, $j_{\#}(E) = j_{\#}(d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{q_2-q_1})$. Como $p_2 - p_1$ é ímpar, segue que $p_2 - p_1 - 1$ é par, assim $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{p_2-p_1-1}d)$, pois $(0, 1) \equiv (p_2 - p_1 - 1, 1)$. Então, tomando $E = e^{p_2-p_1-2}de$, e $D = e^{p_2-p_1-1}d^{q_2-q_1}e$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

- Se $p_2 - p_1$ é par e $q_2 - q_1 = 2k$, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(d) = j_{\#}(e^{p_1-p_2+2}d)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{2k})$. Tomando $E = e^{p_1-p_2+1}de$, e $D = d^k e d^k e^{p_2-p_1-1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

$$(2) (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1, 1).$$

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(q_2 - q_1) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$ ou $q_2 - q_1 = 2k$; $k \neq 0$.

- Se $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}d^{q_2-q_1})$. Então, tomando $E = de$, e $D = e^s d^{q_2-q_1} e^s$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

- Se $q_2 - q_1 = 2k$; $k \neq 0$, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{2k})$. Tomando $E = de$, e $D = d^k e^{p_2-p_1} d^k$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

(3) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (1, 0)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)[(q_2 - q_1) - 1] \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $q_2 - q_1 = 2k + 1$ ou $q_2 - q_1 = 2k$; $k \neq 0$ e $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$.

- Se $q_2 - q_1 = 2k + 1$, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(ed^{2k})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{2k+1})$. Assim, tomando $E = d^{2k}e$, e $D = d^{2k}e^{p_2-p_1}d$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

- Se $q_2 - q_1 = 2k$; $k \neq 0$ e $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(e) = j_{\#}(ed^{-2k+2})$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s}d^{2k})$. Tomando $E = d^{-2k+2}e$, e $D = e^s d e^s d^{2k-1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação (4.23) admite a solução trivial.

Ainda falta verificar as seguintes situações:

(a) $a_{32} = 2r > 0$, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

Neste caso, a condição necessária é $(p_1 - p_2) \equiv 0 \pmod{2}$, ou seja, $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$. Assim, $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = 1$ e $D = e^{2s}$, vamos mostrar que não existe solução para este caso.

(b) $a_{32} = 2r < 0$, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

Como no caso anterior, obtemos $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = [d^{-1}, e^{-1}]$ e $D = e^{2s}$, vamos mostrar que não existe solução para este caso.

(c) $a_{32} = 2r + 1 > 0$, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

Neste caso, a condição necessária é $p_2 - p_1 = 2s$; $s \neq 0$. Assim, $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Tomando $E = 1$ e $D = e^{2s}$, vamos mostrar que não há solução para esta

situação.

(d) $a_{32} = 2r + 1 < 0$, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

Aqui, como no caso anterior, temos $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s})$. Então, tomando $E = [d^{-1}, e^{-1}]$ e $D = e^{2s}$, vamos mostrar que não existe solução para esta situação.

Observe que nestes casos $a_{32} \neq 0$, logo $q_2 - q_1 = 0$.

(e) $a_{32} = 0$, $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0)$.

A condição necessária, neste caso, é

$$(p_2 - p_1)[(q_2 - q_1) - 1] + (q_2 - q_1) \equiv 0 \pmod{2},$$

ou seja, $p_2 - p_1 = 2s$ e $q_2 - q_1 = 2k$; s ou $k \neq 0$. Assim, $j_{\#}(E) = j_{\#}(e^0 d^0)$ e $j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{2s} d^{2k})$. Então, tomando $E = 1$ e $D = d^k e^{2s} d^k$, vamos mostrar que, nesta situação, não existe solução para a equação (4.23).

Para mostrar que não há solução para estes casos, vamos escrever o termo $EcDc^{-1}E^{-1}D$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$.

Para $a_{32} \neq 0$, temos que $EcDc^{-1}E^{-1}D = [d^{-1}, e^{-2s}]$. De fato,

- Se $a_{32} = 2r > 0$, então $E = 1$ e $D = e^{2s}$. Daí,

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = ce^{2s}c^{-1}e^{2s} = d^{-1}e^{-2s}de^{2s} = [d^{-1}, e^{-2s}].$$

- Se $a_{32} = 2r < 0$, então $E = d^{-1}e^{-1}de$ e $D = e^{2s}$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = d^{-1}e^{-2s}de^{2s} = [d^{-1}, e^{-2s}].$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} [d^{-1}, e^{-2}] &= d^{-1}e^{-2}[d, e]e^2d \cdot d^{-1}e^{-1}[d, e]ed, \\ [d^{-1}, e^{-4}] &= d^{-1}e^{-4}[d, e]e^4d \cdot d^{-1}e^{-3}[d, e]e^3d \cdot [d^{-1}, e^{-2}], \\ [d^{-1}, e^2] &= d^{-1}e[e, d]e^{-1}d \cdot d^{-1}[e, d]d, \text{ e} \\ [d^{-1}, e^4] &= d^{-1}e^3[e, d]e^{-3}d \cdot d^{-1}e^2[e, d]e^{-2}d \cdot [d^{-1}, e^2]. \end{aligned}$$

Assim, por recorrência, segue que

$$\mathcal{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D) = \mathcal{A}([d^{-1}, e^{-2s}]) = \begin{cases} B_{(-1,-1)}^{-1}B_{(-2,-1)}^{-1}B_{(-3,-1)}^{-1} \cdots B_{(-2s,-1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(0,-1)}B_{(1,-1)}B_{(2,-1)} \cdots B_{(-2s-1,-1)}, & \text{se } s < 0, \end{cases}$$

Além disso, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$, então

$$\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1}) \text{ contém } B_{(-x+a_{32}y+a_{32}-2,-y-2)}^n \text{ e } \mathcal{A}(D^{-1}X_2D) \text{ contém } B_{(-2s+x,y)}^n.$$

A saber,

$$ce^xd^y[e,d]^nd^{-y}e^{-x}c^{-1} = \begin{cases} d^{-1}e^{-x}e^{-1}(e^{a_{32}}d^{-1})^ye^{a_{32}}e^{-1}d^{-1}[e,d]^n\dots, & \text{se } a_{32} \geq 1, \\ e^{-1}d^{-1}e^{-x}d(d^{-1}e^{a_{32}})^ye^{-1}e^{a_{32}}e^{-1}d^{-1}[e,d]^n\dots, & \text{se } a_{32} \leq 0. \end{cases}$$

Logo, a soma dos expoentes de e , que precedem $[e,d]^n$, é: $-x + a_{32}y + a_{32} - 2$ e a de d é: $-y - 2$. Como nos casos analisados, $E = 1$ ou $E = [d^{-1}, e^{-1}]$, os expoentes de e e d , que precedem $[e,d]^n$, na expressão $EcX_2c^{-1}E^{-1}$ satisfazem essas condições. Além disso, em todos os casos $D = e^{2s}$, então a soma dos expoentes de e e de d , que precedem $[e,d]^n$ em $D^{-1}e^xd^y[e,d]^n\dots$ é: $-2s + x$ e y , respectivamente.

Agora, considere $H' = \langle (2s, 0) \rangle$ o subgrupo de $\pi = \pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}_{H'}^{\pi}$, a equação (4.23) se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D)\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D) = 1, \quad (4.24)$$

onde

$$\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D) = \bar{\mathcal{A}}([d^{-1}, e^{-2s}]) = \begin{cases} B_{(2s-1,-1)}^{-1}B_{(2s-2,-1)}^{-1}B_{(2s-3,-1)}^{-1}\dots B_{(0,-1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s,-1)}B_{(2s+1,-1)}B_{(2s+2,-1)}\dots B_{(-1,-1)}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Ainda, se $\mathcal{A}(\bar{X}_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como um somando, então $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-x+a_{32}y+a_{32}-2,-y-2)}^n$. Assim,

- Se $s > 0$, então para cancelar o termo $B_{(t-1,-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D)$, o termo $B_{(t-1,-1)}$ deve ser um somando de $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$, $0 < t \leq 2s$, logo ele produz em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ o termo $B_{(2s-t-1,-1)}$, $-1 \leq 2s - t - 1 < 2s - 1$. Note que, se $-1 < 2s - t - 1 < 2s - 1$, então obtem-se novamente os termos $B_{(t-1,-1)}$, $0 < t < 2s$, e se $2s - t - 1 = -1$, obtem-se novamente o termo $B_{(2s-t-1,-1)} = B_{(-1,-1)} = B_{(2s-1,-1)}$. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.24).
- Se $s < 0$, então para cancelar o termo $B_{(t,-1)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D)$, o termo $B_{(t,-1)}^{-1}$ deve ser um somando de $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$, $2s \leq t \leq -1$, logo ele produz em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ o termo $B_{(2s-t-2,-1)}^{-1}$, $2s - 1 \leq 2s - t - 2 \leq -2$. Note que, se $2s - 1 < 2s - t - 2 \leq -2$, então obtem-se novamente os termos $B_{(t,-1)}^{-1}$, $2s \leq t < -1$ e se $2s - t - 2 = 2s - 1$, obtem-se novamente o termo $B_{(2s-t-2,-1)}^{-1} = B_{(2s-1,-1)}^{-1} = B_{(-1,-1)}^{-1}$. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.24).

Para $a_{32} = 0$, tomamos $E = 1$ e $D = d^k e^{2s} d^k$. Daí,

$$\begin{aligned} EcDc^{-1}E^{-1}D &= cDc^{-1}D = cd^k e^{2s} d^k c^{-1} d^k e^{2s} d^k = e^{-1} d^{-k} d^{-1} e^{-2s} d d^{-k} e d^k e^{2s} d^k \\ &= e^{-1} d^{-1} d^{-k} e^{-2s} d^{-k} d e d^k e^{2s} d^k = [e^{-1} d^{-1}, d^{-k} e^{-2s} d^{-k}]. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} (cDc^{-1}D)^{-1} &= [d^{-k} e^{-2s} d^{-k}, e^{-1} d^{-1}] \\ &= [d^{-k} e^{-2s} d^{-k}, e^{-1}] e^{-1} [d^{-k} e^{-2s} d^{-k}, d^{-1}] e, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} cDc^{-1}D &= e^{-1} [d^{-1}, d^{-k} e^{-2s} d^{-k}] e [e^{-1}, d^{-k} e^{-2s} d^{-k}] \\ &= e^{-1} d^{-k} [d^{-1}, e^{-2s}] d^k e [e^{-1}, d^{-k} e^{-2s}] d^{-k} e^{-2s} [e^{-1}, d^{-k}] e^{2s} d^k \\ &= e^{-1} d^{-k} [d^{-1}, e^{-2s}] d^k e [e^{-1}, d^{-k}] d^{-k} e^{-2s} [e^{-1}, d^{-k}] e^{2s} d^k. \end{aligned}$$

Usando a fórmula

$$[x, y^n] = \begin{cases} [x, y] y [x, y] y^{-1} \dots y^{n-1} [x, y] y^{-n+1}, & \text{se } n > 0, \\ [x, y^{-1}] y^{-1} [x, y^{-1}] y \dots y^{n+1} [x, y^{-1}] y^{-n-1}, & \text{se } n < 0, \end{cases}$$

segue que

$$[e^{-1}, (d^{-1})^k] = \begin{cases} [e^{-1}, d^{-1}] d^{-1} [e^{-1}, d^{-1}] d \dots d^{-k+1} [e^{-1}, d^{-1}] d^{k+1}, & \text{se } k > 0, \\ [e^{-1}, d] d [e^{-1}, d] d^{-1} \dots d^{-k-1} [e^{-1}, d] d^{k+1}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([e^{-1}, d^{-1}]) &= \mathcal{A}(e^{-1} d^{-1} e d e^{-1} d^{-1} e) = B_{(-1, -1)} \text{ e} \\ \mathcal{A}([e^{-1}, d]) &= \mathcal{A}(e^{-1} d e d^{-1} e^{-1} e) = B_{(-1, 0)}^{-1}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos

$$\mathcal{A}([e^{-1}, (d^{-1})^k]) = \begin{cases} B_{(-1, -1)} B_{(-1, -2)} \dots B_{(-1, -k)}, & \text{se } k > 0, \\ B_{(-1, 0)}^{-1} B_{(-1, 1)}^{-1} \dots B_{(-1, -k-1)}^{-1}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Como visto anteriormente,

$$\mathcal{A}([d^{-1}, (e^{-1})^{2s}]) = \begin{cases} B_{(-1, -1)}^{-1} B_{(-2, -1)}^{-1} \dots B_{(-2s, -1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(0, -1)} B_{(1, -1)} \dots B_{(-2s-1, -1)}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Dessa forma,

- Se $s, k > 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(cDc^{-1}D) &= B_{(-2,-k-1)}^{-1}B_{(-3,-k-1)}^{-1} \cdots B_{(-2s-1,-k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(-1,-1)}B_{(-1,-2)} \cdots B_{(-1,-k)} \cdot \\ &\quad B_{(-2s-1,-k-1)}B_{(-2s-1,-k-2)} \cdots B_{(-2s-1,-2k)}.\end{aligned}$$

Seja $H'' = \langle (2s, 0), (0, 2k) \rangle$ o subgrupo de $\pi = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}_{H''}^{\pi}$ a equação (4.23) se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D) = 1, \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) &= B_{(2s-2,k-1)}^{-1}B_{(2s-3,k-1)}^{-1} \cdots B_{(-1,k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,2k-1)}B_{(2s-1,2k-2)} \cdots B_{(2s-1,k)} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,k-1)}B_{(2s-1,k-2)} \cdots B_{(2s-1,0)}.\end{aligned}$$

Observe que $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$ contém o termo $B_{(s-1,k-1)}^{-1}B_{(2s-1,2k-1)} \neq 1$, desde que, neste caso, $s, k > 0$. Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém o termo $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}B_{(s-1,k-1)}$, então por (*), tomando $a_{32} = 0$, segue que $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1})E^{-1}$ contém o termo $B_{(-2s-1,-2k-1)}^{-1}B_{(-s-1,-k-1)}$ e como $D = d^k e^{2s} d^k$, $\mathcal{A}(D^{-1}X_2D)$ contém o termo $B_{(-1,-1)}^{-1}B_{(-s-1,-k-1)}$. Assim, $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém o termo $B_{(-1,-1)}^{-1}B_{(s-1,k-1)} = B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}B_{(s-1,k-1)}$ e $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$ contém o termo $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}B_{(s-1,k-1)}$. Consequentemente, o termo $B_{(s-1,k-1)}^{-1}B_{(2s-1,2k-1)}$ não pode ser cancelado, ou seja, não existe solução para a equação (4.25).

- Se $s < 0$ e $k > 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(cDc^{-1}D) &= B_{(-1,-k-1)}B_{(0,-k-1)} \cdots B_{(-2s-2,-k-1)} \cdot \\ &\quad B_{(-1,-1)}B_{(-1,-2)} \cdots B_{(-1,-k)} \cdot \\ &\quad B_{(-2s-1,-k-1)}B_{(-2s-1,-k-2)} \cdots B_{(-2s-1,-2k)}.\end{aligned}$$

Projetando em $\mathbb{Z}_{H''}^{\pi}$, obtem-se

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) &= B_{(2s-1,k-1)}B_{(2s,k-1)} \cdots B_{(-2,k-1)} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,2k-1)}B_{(2s-1,2k-2)} \cdots B_{(2s-1,k)} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,k-1)}B_{(2s-1,k-2)} \cdots B_{(2s-1,0)}.\end{aligned}$$

Além disso, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-2s-1,-2k-1)}^{-1}$

e $\mathcal{A}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(-1,-1)}^{-1}$. Logo, $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,-1)}^{-1} = B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}$ e $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}$. Assim, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Consequentemente, o termo $B_{(2s-1,2k-1)}^{-1}$ não pode ser cancelado, ou seja, não existe solução para a equação (4.25).

- Se $s > 0$ e $k < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(cDc^{-1}D) &= B_{(-2,-k-1)}^{-1}B_{(-3,-k-1)}^{-1} \cdots B_{(-2s-1,-k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(-1,0)}^{-1}B_{(-1,1)}^{-1} \cdots B_{(-1,-k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(-2s-1,-k)}^{-1}B_{(-2s-1,-k+1)}^{-1} \cdots B_{(-2s-1,-2k-1)}^{-1}.\end{aligned}$$

Projetando em $\mathbb{Z}_{H''}^{\pi}$, obtem-se

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) &= B_{(2s-2,k-1)}^{-1}B_{(2s-3,k-1)}^{-1} \cdots B_{(-1,k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,2k)}^{-1}B_{(2s-1,2k+1)}^{-1} \cdots B_{(2s-1,k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,k)}^{-1}B_{(2s-1,k+1)}^{-1} \cdots B_{(2s-1,-1)}^{-1}.\end{aligned}$$

Além disso, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(2s-1,k-1)}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-2s-1,-k-1)}$ e $\mathcal{A}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(-1,-k-1)}$. Logo, $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,k-1)} = B_{(2s-1,k-1)}$ e $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(2s-1,k-1)}$. Assim, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(2s-1,k-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece $B_{(2s-1,k-1)}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Consequentemente, o termo $B_{(2s-1,k-1)}^{-1}$ não pode ser cancelado, ou seja, não existe solução para a equação (4.25).

- Se $s, k < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(cDc^{-1}D) &= B_{(-1,-k-1)}B_{(0,-k-1)} \cdots B_{(-2s-2,-k-1)} \cdot \\ &\quad B_{(-1,0)}^{-1}B_{(-1,1)}^{-1} \cdots B_{(-1,-k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(-2s-1,-k)}^{-1}B_{(-2s-1,-k+1)}^{-1} \cdots B_{(-2s-1,-2k-1)}^{-1}.\end{aligned}$$

Projetando em $\mathbb{Z}_{H''}^{\pi}$, obtem-se

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) &= B_{(2s-1,k-1)}B_{(2s,k-1)} \cdots B_{(-2,k-1)} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,2k)}^{-1}B_{(2s-1,2k+1)}^{-1} \cdots B_{(2s-1,k-1)}^{-1} \cdot \\ &\quad B_{(2s-1,k)}^{-1}B_{(2s-1,k+1)}^{-1} \cdots B_{(2s-1,-1)}^{-1}.\end{aligned}$$

Além disso, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(2s-1,-1)}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-2s-1,-1)}$ e $\mathcal{A}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(-1,-2k-1)}$. Logo, $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,2k-1)} = B_{(2s-1,-1)}$ e $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(2s-1,-1)}$. Assim, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(2s-1,-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece $B_{(2s-1,-1)}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Consequentemente, o termo $B_{(2s-1,-1)}^{-1}$ não pode ser cancelado, ou seja, não existe solução para a equação (4.25).

Se $s = 0$, temos

$$cDc^{-1}D = [e^{-1}, d^{-k}]d^{-k}[e^{-1}, d^{-k}]d^k.$$

Daí,

$$\mathcal{A}(cDc^{-1}D) = \begin{cases} B_{(-1,-1)}B_{(-1,-2)} \cdots B_{(-1,-k)}B_{(-1,-k-1)}B_{(-1,-k-2)} \cdots B_{(-1,-2k)}, & \text{se } k > 0, \\ B_{(-1,0)}^{-1}B_{(-1,1)}^{-1} \cdots B_{(-1,-k-1)}^{-1}B_{(-1,-k)}^{-1}B_{(-1,-k+1)}^{-1} \cdots B_{(-1,-2k-1)}^{-1}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Seja $H''' = \langle (0, 2k) \rangle$ o subgrupo de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}_{H'''}^{\pi}$, a equação (4.23) se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)\bar{\mathcal{A}}(X_2) = 1, \quad (4.26)$$

onde

$$\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) = \begin{cases} B_{(-1,2k-1)}B_{(-1,2k-2)} \cdots B_{(-1,k)}B_{(-1,k-1)}B_{(-1,k-2)} \cdots B_{(-1,0)}, & \text{se } k > 0, \\ B_{(-1,2k)}^{-1}B_{(-1,2k+1)}^{-1} \cdots B_{(-1,k-1)}^{-1}B_{(-1,k)}^{-1}B_{(-1,k+1)}^{-1} \cdots B_{(-1,-1)}^{-1}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Assim,

- Se $k > 0$ e $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(-1,2k-1)}^{-1}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,-2k-1)}^{-1}$. Projetando em $\mathbb{Z}_{H'''}^{\pi}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(-1,4k-1)}^{-1} = B_{(-1,2k-1)}^{-1}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,-1)}^{-1} = B_{(-1,2k-1)}^{-1}$. Consequentemente, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(-1,2k-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece o termo $B_{(-1,2k-1)}^{-1}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Portanto, não existe solução para a equação (4.26).
- Se $k < 0$, e $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(-1,k-1)}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,-k-1)}$. Projetando em $\mathbb{Z}_{H'''}^{\pi}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(-1,3k-1)} = B_{(-1,k-1)}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,k-1)}$. Consequentemente, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(-1,k-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece o termo $B_{(-1,k-1)}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Portanto, não existe solução para a equação (4.26).

Se $k = 0$, temos

$$cDc^{-1}D = e^{-1}[d^{-1}, e^{-2s}]e.$$

Daí,

$$\mathcal{A}(cDc^{-1}D) = \begin{cases} B_{(-2,-1)}^{-1}B_{(-3,-1)}^{-1} \cdots B_{(-2s-1,-1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-1,-1)}B_{(0,-1)} \cdots B_{(-2s-2,-1)}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Projetando em $\mathbb{Z}_{\frac{p_i}{H'}}^{p_i}$, onde $H' = \langle (2s, 0) \rangle$, obtem-se

$$\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) = \begin{cases} B_{(2s-2,-1)}^{-1}B_{(2s-3,-1)}^{-1} \cdots B_{(-1,-1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(2s-1,-1)}B_{(2s,-1)} \cdots B_{(-2,-1)}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Assim,

- Se $s > 0$ e $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(-1,-1)}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,-1)}$. Projetando em $\mathbb{Z}_{\frac{\pi}{H'}}^{\pi}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(2s-1,-1)} = B_{(-1,-1)}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(2s-1,-1)} = B_{(-1,-1)}$. Consequentemente, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(-1,-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece o termo $B_{(-1,-1)}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Portanto, não existe solução para a equação (4.24).
- Se $s < 0$ e $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(2s-1,-1)}^{-1}$, então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-2s-1,-1)}^{-1}$. Projetando em $\mathbb{Z}_{\frac{\pi}{H'}}^{\pi}$, $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(4s-1,-1)}^{-1} = B_{(2s-1,-1)}^{-1}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(-1,-1)}^{-1} = B_{(2s-1,-1)}^{-1}$. Consequentemente, toda vez que tentamos cancelar o termo $B_{(2s-1,-1)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, aparece o termo $B_{(2s-1,-1)}^{-1}$ que não cancela os demais termos de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Portanto, não existe solução para a equação (4.24).

(6) Considere os casos:

Caso XXV: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & p_i \end{pmatrix}$ e

Caso XXVII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ m & p_i - a_{31}m \end{pmatrix}$.

Nestes casos temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}), \quad j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{p_2-p_1}).$$

As relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por

$$cec^{-1} = d^{-1}e^{-1}ded, \quad cdc^{-1} = d^{-1}e^{-1}(d^{-1}e^{-1}d^{-1})ed.$$

A equação principal é da forma

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D)E^{-1} \cdot [E, D^{-1}] \cdot D^{-1}X_3^{-1}D \cdot D^{-1}X_2D = 1$$

e a condição necessária é:

$$2\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = 0.$$

Esta condição módulo 2 é

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D^{-1}]) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Como $[E, D^{-1}]D^{-1}[E, D]D = 1$, segue que $\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D^{-1}]) = \varepsilon \circ \mathcal{A}([D, E])$.

Tomando $E = e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}$ e $D = (de)^{p_2-p_1}$, temos

$$cDc^{-1}D = (d^{-1}e^{-1})^{p_2-p_1}(de)^{p_2-p_1}.$$

Note que

$$\begin{aligned} (d^{-1}e^{-1})^{-1}(de)^{-1} &= [e, d], \\ (d^{-1}e^{-1})^{-2}(de)^{-2} &= [(ed)e, d], \\ (d^{-1}e^{-1})^{-3}(de)^{-3} &= [(ed)^2e, d], \\ (d^{-1}e^{-1})(de) &= [d^{-1}, e^{-1}], \\ (d^{-1}e^{-1})^2(de)^2 &= [(d^{-1}e^{-1})d^{-1}, e^{-1}], \text{ e} \\ (d^{-1}e^{-1})^3(de)^3 &= [(d^{-1}e^{-1})^2d^{-1}, e^{-1}]. \end{aligned}$$

Logo, por recorrência, segue que

$$\begin{aligned} &(d^{-1}e^{-1})^{p_2-p_1}(de)^{p_2-p_1} = \\ &\begin{cases} [(d^{-1}e^{-1})^{p_2-p_1-1}d^{-1}, e^{-1}], & \text{se } p_2 - p_1 > 0, \\ [(ed)^{p_1-p_2-1}e, d], & \text{se } p_2 - p_1 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D) = \begin{cases} \det \begin{pmatrix} p_1 - p_2 + 1 & -1 \\ p_1 - p_2 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } p_2 - p_1 > 0, \\ \det \begin{pmatrix} p_1 - p_2 + 1 & 0 \\ p_1 - p_2 - 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } p_2 - p_1 < 0 \end{cases} = p_1 - p_2.$$

Além disso,

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([D, E]) = \det \begin{pmatrix} p_2 - p_1 & c_{12} - c_{11} \\ p_2 - p_1 & c_{22} - c_{21} \end{pmatrix} = (p_2 - p_1)[(c_{22} - c_{21}) - (c_{12} - c_{11})].$$

Deste modo, a condição necessária módulo 2 é equivalente a

$$(p_2 - p_1)[(c_{22} - c_{21}) - (c_{12} - c_{11}) - 1] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Vamos checar se esta condição também é suficiente.

Seja H a imagem do homomorfismo

$$\begin{aligned} (| |_e, | |_d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e &\mapsto (|ed^{-1}e^{-1}d^{-1}ed|_e, |ed^{-1}e^{-1}d^{-1}ed|_d) = (1, -1), \\ d &\mapsto (|e^{-1}deded|_e, |e^{-1}deded|_d) = (1, 3). \end{aligned}$$

Assim, $H = \langle (1, -1), (1, 3) \rangle$. Daí,

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (1, -1), (1, 3) \rangle} = \frac{\langle (1, -1), (0, 1) \rangle}{\langle (1, -1), (0, 4) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}_4.$$

Então um conjunto de representantes de E é dado pelos elementos da forma $(0, \bar{y})$, onde (o, y) são as coordenadas relativas à base $\{(1, -1), (0, 1)\}$ e $\bar{y}$ significa $y \pmod{4}$. Deste modo,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = 0(1, -1) + y(0, 1) = (0, y); y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Temos as seguintes situações:

$$(i) \quad (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 0).$$

Neste caso, a condição necessária é

$$p_2 - p_1 \equiv 0 \pmod{2}, \text{ ou seja, } p_2 - p_1 = 2s, s \neq 0.$$

Daí, tomando $E = 1$ e $D = (de)^{2s}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = (d^{-1}e^{-1})^{2s}(de)^{2s}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
(d^{-1}e^{-1})^{-2}(de)^{-2} &= ed[e, d]d^{-1}e^{-1} \cdot [e, d], \\
(d^{-1}e^{-1})^{-4}(de)^{-4} &= (ed)^2(d^{-1}e^{-1})^{-2}(de)^{-2}(ed)^{-2} \cdot (d^{-1}e^{-1})^{-2}(de)^{-2}, \\
(d^{-1}e^{-1})^2(de)^2 &= d^{-1}e^{-1}d^{-1}e^{-1}[d, e]eded \cdot e^{-1}d^{-1}[d, e]de, \text{ e} \\
(d^{-1}e^{-1})^4(de)^4 &= (d^{-1}e^{-1}d^{-1}e^{-1})^2[d, e](eded)^2 \cdot \\
&\quad (d^{-1}e^{-1}d^{-1}e^{-1})e^{-1}d^{-1}[d, e]deeded \cdot (d^{-1}e^{-1})^2(de)^2.
\end{aligned}$$

Daí, por recorrência,

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \begin{cases} [(d^{-1}e^{-1})^{2s-1}d^{-1}, e^{-1}] & \text{se } s > 0, \\ [(ed)^{2s-1}e, d], & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Assim, escrevemos o termo $EcDc^{-1}E^{-1}D$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ do seguinte modo:

$$\mathcal{A}(d^{-1}e^{-1})^{2s}(de)^{2s} = \begin{cases} B_{(-2s,-2s)}^{-1}B_{(-2s+1,-2s+1)}^{-1} \cdots B_{(-2,-2)}^{-1}B_{(-1,-1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-2s-1,-2s-1)}B_{(-2s-2,-2s-2)} \cdots B_{(1,1)}B_{(0,0)}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Além disso, em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ temos que a equação a ser resolvida é dada por:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(cX_2c^{-1}) \cdot \mathcal{A}(cDc^{-1}D) \cdot \mathcal{A}(D^{-1}X_3^{-1}D) \cdot \mathcal{A}(D^{-1}X_2D) = 1.$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando, então $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(-2-y,-2+x-2y)}^n$ e $\mathcal{A}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(x-2s,y-2s)}^n$. De fato,

$$\begin{aligned}
c[e, d]c^{-1} &= d^{-1}e^{-1}d^{-1}e^{-1}[e, d]eded \\
ce^xd^y[e, d]^nd^{-y}e^{-x}c^{-1} &= d^{-1}e^{-1}d^x(d^{-1}e^{-1}d^{-1})^yd^{-1}e^{-1}[e, d]^n \dots,
\end{aligned}$$

e se $\mathcal{A}(X_3)$ contém o termo $B_{(z,w)}^m$, então $\mathcal{A}(D^{-1}X_3D)$ contém $B_{(z-2s,w-2s)}^m$.

Seja

$$\tilde{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}), (p_2 - p_1, q_2 - q_1) \rangle} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (0, 0), (2s, 2s) \rangle}.$$

Em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ a equação principal se reduz a:

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D) \cdot \bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D) = 1, \quad (4.27)$$

onde

$$\bar{\mathcal{A}}(d^{-1}e^{-1})^{2s}(de)^{2s} = \begin{cases} B_{(0,0)}^{-1}B_{(1,1)}^{-1} \cdots B_{(2s-2,2s-2)}^{-1}B_{(2s-1,2s-1)}^{-1}, & \text{se } s > 0, \\ B_{(-1,-1)}B_{(-2,-2)} \cdots B_{(2s+1,2s+1)}B_{(2s,2s)}, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Observe também que se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$, então $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(-2-y,-2+x-2y)}^n$ e $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$ contém $B_{(x,y)}^n$. Assim,

- Se $s > 0$, então para cancelar o termo $B_{(2s-1,2s-1)}^{-1}$ de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, o termo $B_{(2s-1,2s-1)}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$. Logo, $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ deve conter o termo $B_{(-2s-1,-2s-1)} = B_{(-1,-1)} = B_{(2s-1,2s-1)}$ que não cancela nenhum outro termo de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.27).
- Se $s < 0$, então para cancelarmos o termo $B_{(-1,-1)}$ de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$, o termo $B_{(-1,-1)}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(D^{-1}X_2D)$. Logo, $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ deve conter o termo $B_{(-1,-1)}^{-1}$ que não cancela nenhum outro termo de $\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D)$. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.27).

(ii) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 1)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(0) \equiv 0 \pmod{2}, \text{ ou seja, } p_2 - p_1 \text{ é qualquer.}$$

Assim, temos as seguintes possibilidades:

(a) $p_2 - p_1 = 2s$, $s \neq 0$.

Nesta situação, temos

$$(0, 1) \equiv (2s + 1, 2s) \text{ em } \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}, \text{ pois}$$

$(2s + 1, 2s - 1) = 2s + 1(1, -1) + s(0, 4)$. Assim, tomando $E = (ed)^{p_2-p_1-1}e^2d$ e $D = (ed)^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

(b) $p_2 - p_1 = 2s + 1$.

Nesta situação, temos

$$(0, 1) \equiv (p_2 - p_1 - 1, p_2 - p_1) \text{ em } \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}, \text{ pois}$$

$$(p_2 - p_1 - 1, p_2 - p_1 - 1) = (2s, 2s) = 2s(1, -1) + s(0, 4).$$

Assim, tomando $E = (de)^{p_2-p_1-1}d$ e $D = (de)^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, se $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 1)$, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(iii) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 2)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$p_2 - p_1 \equiv 0 \pmod{2}, \text{ ou seja, } p_2 - p_1 = 2s, s \neq 0.$$

Note que $(0, 2) \equiv (2, 4)$ em $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}$, pois $(2, 2) = 2(1, -1) + 1(0, 4)$. Daí, tomando $E = d^2eded$ e $D = (d^2, e^2)^s$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial.

(iv) $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 3)$.

Neste caso, a condição necessária é

$$(p_2 - p_1)(2) \equiv 0 \pmod{2}, \text{ ou seja, } p_2 - p_1 \text{ é qualquer.}$$

Assim, temos as seguintes possibilidades:

(a) $p_2 - p_1 = 2s, s \neq 0$.

Nesta situação, temos

$$(0, 3) \equiv (p_2 - p_1 - 1, p_2 - p_1) \text{ em } \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}, \text{ pois}$$

$(p_2 - p_1 - 1, p_2 - p_1 - 3) = (2s - 1)(1, -1) + (s - 1)(0, 4)$. Assim, tomando $E = (de)^{p_2-p_1-1}d$ e $D = (de)^{p_2-p_1}$, como no caso (ii) (b), segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

(b) $p_2 - p_1 = 2s + 1$.

Neste caso,

$$(0, 3) \equiv (p_2 - p_1 + 1, p_2 - p_1) \text{ em } \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}, \text{ pois}$$

$$(p_2 - p_1 + 1, p_2 - p_1 - 3) = (2s + 2, 2s - 2) = (2s + 2)(1, -1) + s(0, 4).$$

Assim, tomando $E = (ed)^{p_2-p_1-1}e^2d$ e $D = (ed)^{p_2-p_1}$, como no caso (ii) (a), segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, se $(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 3)$, a equação principal admite a solução trivial $X_2 = X_3 = 1$.

(7) Considere os seguintes casos:

Caso XX: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ m & p_i \end{pmatrix}$,

Caso XXII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i \\ 0 & p_i \end{pmatrix}$; $a_{31} \neq 0$ e

Caso XXVIII: $\phi_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{31} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} m & p_i \\ -m & a_{31}m + p_i \end{pmatrix}$.

Nestes casos temos que

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}), j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1}d^{p_2-p_1}).$$

As relações em $\pi_1(M(\phi_2) - S^1)$ são dadas por

$$cec^{-1} = d, cdc^{-1} = e.$$

A equação principal é da forma

$$X_3 \cdot EcX_2c^{-1}E^{-1} \cdot E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1} \cdot [E, D] \cdot DX_3^{-1}D^{-1} \cdot X_2^{-1} = 1$$

e a condição necessária é:

$$-2\varepsilon \circ \mathcal{A}(X_2) + \varepsilon \circ \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) + \varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = 0.$$

Esta condição módulo 2 é

$$(\varepsilon \circ \mathcal{A})_2(cDc^{-1}D^{-1}) + (\varepsilon \circ \mathcal{A})_2([E, D]) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Tomando $E = e^{c_{12}-c_{11}}d^{c_{22}-c_{21}}$ e $D = e^{p_2-p_1}d^{p_2-p_1}$, temos

$$cDc^{-1}D^{-1} = d^{p_2-p_1}e^{p_2-p_1}d^{p_1-p_2}e^{p_1-p_2} = [d^{p_2-p_1}, e^{p_2-p_1}]. \text{ Daí}$$

$$\varepsilon \circ \mathcal{A}([E, D]) = \det \begin{pmatrix} c_{12} - c_{11} & p_2 - p_1 \\ c_{22} - c_{21} & p_2 - p_1 \end{pmatrix} = (p_2 - p_1)[(c_{12} - c_{11}) - (c_{22} - c_{21})].$$

Logo, a condição necessária módulo 2 é equivalente a

$$(p_2 - p_1)[(c_{12} - c_{11}) - (c_{22} - c_{21}) - (p_2 - p_1)] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Vamos checar se esta condição também é suficiente. Seja H a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} (| \cdot |_e, | \cdot |_d) : \pi_1(T - 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto (|\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_e, |\alpha c \alpha^{-1} c^{-1}|_d). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} e &\mapsto (|ed^{-1}|_e, |ed^{-1}|_d) = (1, -1), \\ d &\mapsto (|de^{-1}|_e, |de^{-1}|_d) = (-1, 1). \end{aligned}$$

Assim, $H = \langle (1, -1), (-1, 1) \rangle$, e

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H} = \frac{\langle (1, -1), (0, 1) \rangle}{\langle (1, -1) \rangle} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}.$$

Então, um conjunto de representantes de E é dado pelos elementos da forma $(0, y)$; $y \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, y); y \in \mathbb{Z}.$$

Estes valores devem satisfazer a condição necessária

$$(p_2 - p_1)(p_1 - p_2 - y) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Deste modo, temos as seguintes situações:

(A) $y = 0$.

Neste caso, a condição necessária implica que $p_2 - p_1 = 2s$, $s \neq 0$. Vamos mostrar que não existe solução para esta situação. De fato, tomando $E = 1$ e $D = e^{2s}d^{2s}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = d^{2s}e^{2s}d^{-2s}e^{-2s} = [d^{2s}, e^{2s}].$$

Note que

$$\begin{aligned} [d^{-2}, e^{-2}] &= d^{-1}e^{-1}d^{-1}[d, e]ded \cdot d^{-1}e^{-2}d^{-1}[d, e]de^2d \cdot e^{-1}d^{-1}[d, e]de \cdot e^{-2}d^{-1}[d, e]de^2, \\ [d^{-4}, e^{-4}] &= d^{-2}[d^{-2}, e^{-2}]d^2 \cdot [d^{-2}, e^{-2}] \cdot e^{-2}d^{-2}[d^{-2}, e^{-2}]d^2e^2 \cdot e^{-2}[d^{-2}, e^{-2}]e^2, \\ [d^2, e^2] &= d[d, e]d^{-1} \cdot de[d, e]e^{-1}d^{-1} \cdot ded^{-1}[d, e]de^{-1}d^{-1} \cdot [d, e], \text{ e} \\ [d^4, e^4] &= d^2[d^2, e^2]d^{-2} \cdot d^2e^2[d^2, e^2]e^{-2}d^{-2} \cdot d^2e^2d^{-2}[d^2, e^2]d^2e^{-2}d^{-2} \cdot [d^2, e^2]. \end{aligned}$$

Assim, por recorrência, escrevemos $\mathcal{A}([d^{2s}, e^{2s}])$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{A}([d^{2s}, e^{2s}]) = \left\{ \begin{array}{ccc} B_{(0,0)}^{-1} B_{(0,1)}^{-1} & \cdots & B_{(0,2s-2)}^{-1} B_{(0,2s-1)}^{-1} \\ B_{(1,0)}^{-1} B_{(1,1)}^{-1} & \cdots & B_{(1,2s-2)}^{-1} B_{(1,2s-1)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(2s-1,0)}^{-1} B_{(2s-1,1)}^{-1} & \cdots & B_{(2s-1,2s-2)}^{-1} B_{(2s-1,2s-1)}^{-1}, \text{ se } s > 0 \end{array} \right. \quad (4.28)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B_{(-1,-1)}^{-1} B_{(-1,-2)}^{-1} & \cdots & B_{(-1,2s+1)}^{-1} B_{(-1,2s)}^{-1} \\ B_{(-2,-1)}^{-1} B_{(-2,-2)}^{-1} & \cdots & B_{(-2,2s+1)}^{-1} B_{(-2,2s)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(2s,-1)}^{-1} B_{(2s,-2)}^{-1} & \cdots & B_{(2s,2s+1)}^{-1} B_{(2s,2s)}^{-1}, \text{ se } s < 0. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Além disso, em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ a equação principal é da forma:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(cX_2c^{-1}) \cdot \mathcal{A}(cDc^{-1}D^{-1}) \cdot \mathcal{A}(DX_3^{-1}D^{-1}) \cdot \mathcal{A}(X_2^{-1}) = 1.$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando, então $\mathcal{A}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(y,x)}^{-n}$ e $\mathcal{A}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{-n}$. De fato,

$$ce^x d^y [e, d]^n d^{-y} e^{-x} c^{-1} = d^x e^y [d, e]^n e^{-y} d^{-x}.$$

Seja

$$\tilde{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}), (p_2 - p_1, q_2 - q_1) \rangle} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2s, 2s) \rangle}.$$

Em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ a equação principal se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1, \quad (4.30)$$

onde

$$\bar{\mathcal{A}}(cDc^{-1}D^{-1}) = \left\{ \begin{array}{ccc} B_{(-2s,-2s)}^{-1} B_{(-2s,-2s+1)}^{-1} & \cdots & B_{(-2s,-2)}^{-1} B_{(-2s,-1)}^{-1} \\ B_{(-2s+1,-2s)}^{-1} B_{(-2s+1,-2s+1)}^{-1} & \cdots & B_{(-2s+1,-2)}^{-1} B_{(-2s+1,-1)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(-1,-2s)}^{-1} B_{(-1,-2s+1)}^{-1} & \cdots & B_{(-1,-2)}^{-1} B_{(-1,-1)}^{-1}, \text{ se } s > 0 \end{array} \right. \quad (4.31)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{lll} B_{(-2s-1, -2s-1)}^{-1} B_{(-2s-1, -2s-2)}^{-1} & \cdots & B_{(-2s-1, 1)}^{-1} B_{(-2s-1, 0)}^{-1} \\ B_{(-2s-2, -2s-1)}^{-1} B_{(-2s-2, -2s-2)}^{-1} & \cdots & B_{(-2s-2, 1)}^{-1} B_{(-2s-2, 0)}^{-1} \\ B_{(0, -2s-1)}^{-1} B_{(0, -2s-2)}^{-1} & \cdots & B_{(0, 1)}^{-1} B_{(0, 0)}^{-1}, \text{ se } s < 0. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Assim,

- Se $s > 0$, então para cancelar, por exemplo, o termo $B_{(-1, -1)}^{-1}$ em $\bar{A}(cDc^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(-1, -1)}$ deve ser um somando de $\bar{A}(X_2^{-1})$, daí $B_{(-1, -1)}$ será um somando de $\bar{A}(cX_2c^{-1})$ e este não cancela nenhum outro termo de $\bar{A}(cDc^{-1}D^{-1})$. Consequentemente, não existe solução para a equação 4.30.
- Se $s < 0$, então para cancelar, por exemplo, o termo $B_{(0, 0)}^{-1}$ em $\bar{A}(cDc^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(0, 0)}$ deve ser um somando de $\bar{A}(X_2^{-1})$, daí $B_{(0, 0)}$ será um somando de $\bar{A}(cX_2c^{-1})$ e este não cancela nenhum outro termo de $\bar{A}(cDc^{-1}D^{-1})$. Consequentemente, não existe solução para a equação 4.30.

(B) $y = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, a condição necessária implica que $p_2 - p_1$ é qualquer. Assim, temos

$$j_{\#}(E) = j_{\#}(d^{2k+1}) \text{ e } j_{\#}(D) = j_{\#}(e^{p_2-p_1} d^{p_2-p_1}).$$

Note que

$$(c_{12} - c_{11}, c_{22} - c_{21}) = (0, 2k + 1) \equiv (k, k + 1) \text{ em } \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}, \text{ pois } (k, -k) = k(1, -1).$$

Daí, tomando $E = (de)^k d$ e $D = (de)^{p_2-p_1}$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = 1.$$

Portanto a equação principal admite a solução trivial.

(C) $0 \neq y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, a condição necessária implica que $p_2 - p_1 = 2s$, $s \neq 0$. Seja $y = 2^a(2k - 1)$; $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$. Vamos considerar as seguintes situações:

(C₁) $p_2 - p_1 = 2^a s$, $a \geq 2$.

Note que

$$(0, 2^a(2k - 1)) \equiv (2^a(2k - 1), 2^a k) \text{ em } \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}.$$

De fato,

$$(2^a(2k-1), 2^a k - 2^a(2k-1)) = 2^a(2k-1)(1, -1).$$

Assim, tomando $E = (d^{2^a} e^{2^a})^{k-1} d^{2^a}$ e $D = (d^{2^a} e^{2^a})^s$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = 1.$$

Portanto, a equação principal admite a solução trivial.

$$(C_2) \ p_2 - p_1 \neq 2^a s, \ a \geq 2.$$

Neste caso, temos que

$$p_2 - p_1 \in \{2^a s + 2, 2^a s + 4, \dots, 2^a s + 2^a - 2\}.$$

Vamos mostrar que não existe solução para a equação principal. De fato, tomando $E = d^{2^a(2k-1)}$ e $D = e^{2^a s+t} d^{2^a s+t}$, $t \in \{2, 4, \dots, 2^a - 2\}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = [d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}].$$

Por recorrência, escrevendo $\mathcal{A}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}])$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ obtemos as seguintes situações:

$$(C_{21}) \ 2^a(2k-1) + 2^a s + t > 0.$$

Neste caso, temos

$$\mathcal{A}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}]) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B_{(0,0)}^{-1} B_{(1,0)}^{-1} & \dots & B_{(2^a s+t-1,0)}^{-1} \\ B_{(0,1)}^{-1} B_{(1,1)}^{-1} & \dots & B_{(2^a s+t-1,1)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(0,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}^{-1} B_{(1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}^{-1} & \dots & B_{(2^a s+t-1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}^{-1}, \text{ se } s \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B_{(2^a s+t,0)} B_{(2^a s+t+1,0)} & \dots & B_{(-1,0)} \\ B_{(2^a s+t,1)} B_{(2^a s+t+1,1)} & \dots & B_{(-1,1)} \\ B_{(2^a s+t,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)} B_{(2^a s+t+1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)} & \dots & B_{(-1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}, \text{ se } s < 0. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Além disso, em $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ a equação principal é da forma:

$$\mathcal{A}(X_3) \cdot \mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1}) \cdot \mathcal{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}) \cdot \mathcal{A}(DX_3^{-1}D^{-1})\mathcal{A}(X_2^{-1}) = 1.$$

Ainda, se $\mathcal{A}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^n$ como somando então $\mathcal{A}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(y,x+2^a(2k-1))}^{-n}$. De fato,

$$d^{2^a(2k-1)}ce^xd^y[e,d]e^{-x}d^{-y}d^{-2^a(2k-1)} = d^{2^a(2k-1)}d^xe^y[d,e]\dots$$

A soma dos expoentes de e que precedem $[d,e]$ é y e a soma dos expoentes de d que precedem $[d,e]$ é $x + 2^a(2k-1)$. Seja

$$\tilde{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (0, 2^a(2k-1)), (2^as + t, 2^as + t) \rangle}.$$

Em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ a equação principal se reduz a

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.35)$$

Observe que se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^{\pm n}$, então $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$ contém $B_{(x,y)}^{\pm n}$ e $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$ contém $B_{(y,x)}^{\pm n}$. Note também que em $\mathbb{Z}\tilde{H}$

$$B_{(x,y)}^{\pm 1} = B_{(z,w)}^{\pm 1} \Leftrightarrow (x-z, y-w) = (\beta(2^as + t), \alpha 2^a(2k-1) + \beta(2^as + t)).$$

Daí, como os termos em $\mathcal{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$ são da forma

$$\begin{aligned} B_{(x,y)}^{-1}; 0 \leq x \leq 2^as + t - 1, \quad \text{se } s \geq 0, \text{ e} \\ B_{(x,y)}; 2^as + t \leq x \leq -1, \quad \text{se } s < 0, \end{aligned}$$

então

$$B_{(x,y)}^{\pm 1} = B_{(z,w)}^{\pm 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y - w = \alpha 2^a(2k-1). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^as+t}, e^{2^as+t}]) = \\ & \begin{cases} B_{(0,0)}^{-u_0} B_{(1,0)}^{-u_0} & \cdots & B_{(2^as+t-1,0)}^{-u_0} \\ B_{(0,1)}^{-u_1} B_{(1,1)}^{-u_1} & \cdots & B_{(2^as+t-1,1)}^{-u_1} \\ & \vdots & \\ B_{(0,|2^a(2k-1)|-1)}^{-u_{|2^a(2k-1)|-1}} B_{(1,|2^a(2k-1)|-1)}^{-u_{|2^a(2k-1)|-1}} & \cdots & B_{(2^as+t-1,|2^a(2k-1)|-1)}^{-u_{|2^a(2k-1)|-1}}, \end{cases} \quad (4.36) \\ & \text{se } s \geq 0 \text{ e } |2^a(2k-1)| < 2^a(2k-1) + 2^as + t - 1, \end{aligned}$$

onde

$$u_i = \left\lceil \left| \frac{2^a(2k-1) + 2^as + t - 1 - i}{2^a(2k-1)} \right| \right\rceil + 1, \quad 0 \leq i \leq |2^a(2k-1)| - 1$$

e $[x]$ denota o maior número inteiro menor ou igual a x .

$$\bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}]) = \mathcal{A}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}]) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B_{(0,0)}^{-1} B_{(1,0)}^{-1} & \cdots & B_{(2^a s+t-1,0)}^{-1} \\ B_{(0,1)}^{-1} B_{(1,1)}^{-1} & \cdots & B_{(2^a s+t-1,1)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(0,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}^{-1} B_{(1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}^{-1} & \cdots & B_{(2^a s+t-1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}^{-1} \end{array} \right. \quad (4.37)$$

se $s \geq 0$ e $|2^a(2k-1)| \geq 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1$, e

$$\bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}]) = \mathcal{A}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}]) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B_{(2^a s+t,0)} B_{(2^a s+t+1,0)} & \cdots & B_{(-1,0)} \\ B_{(2^a s+t,1)} B_{(2^a s+t+1,1)} & \cdots & B_{(-1,1)} \\ B_{(2^a s+t,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)} B_{(2^a s+t+1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)} & \cdots & B_{(-1,2^a(2k-1)+2^a s+t-1)}, \text{ se } s < 0. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Observe que se $s < 0$, então $y - w \neq \alpha 2^a(2k-1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$, pois

$$0 < y - w \leq 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1 < 2^a(2k-1).$$

Dessa forma, temos as seguintes situações:

(I) Para $s \geq 0$, analisamos os subcasos:

(i) $2^a s + t > 2^a(2k-1)$ e $|2^a(2k-1)| < 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1$.

Para cancelar o termo $B_{(x,x)}^{-u_x}$; $0 \leq x \leq |2^a(2k-1)| - 1$, em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}])$, o termo $B_{(x,x)}^{u_x}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(x,x)}^{u_x}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2 c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}])$. Assim, se u_0 é ímpar, então o termo $B_{(0,0)}^{-u_0}$ está nas condições anteriores. Por outro lado, se u_0 for par, mostremos que $u_{|2^a(2k-1)|-1}$ é ímpar. De fato,

$$u_0 = \left\lceil \frac{2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1}{2^a(2k-1)} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{2^a s + t - 1}{2^a(2k-1)} \right\rceil + 2.$$

$$u_0 \text{ par} \Rightarrow \left\lceil \frac{2^a s + t - 1}{2^a(2k-1)} \right\rceil = 2\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{aligned} 2^a s + t - 1 &= 2\alpha |2^a(2k-1)| + c; 0 \leq c \leq |2^a(2k-1)| - 1 \Rightarrow \\ 2^a s + t &= 2\alpha |2^a(2k-1)| + c + 1; 1 \leq c + 1 \leq |2^a(2k-1)|. \end{aligned}$$

Note que

$$c + 1 = |2^a(2k-1)| \Rightarrow 2^a s + t = (2\alpha + 1)|2^a(2k-1)|$$

o que é um absurdo, uma vez que,

$$2^a \mid (2\alpha + 1)|2^a(2k - 1)| \text{ e } 2^a \nmid (2^a s + t). \text{ Daí}$$

$$\left\lfloor \left\lceil \frac{2^a s + t}{2^a(2k - 1)} \right\rceil \right\rfloor = 2\alpha,$$

consequentemente,

$$u_{|2^a(2k-1)|-1} = \left\lfloor \left\lceil \frac{2^a s + t}{2^a(2k - 1)} \right\rceil \right\rfloor + 1 = 2\alpha + 1.$$

Portanto, ao tentar cancelar o termo $B_{(|2^a(2k-1)|-1, |2^a(2k-1)|-1)}^{-u_{|2^a(2k-1)|-1}}$ em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}])$, aparece o termo $B_{(|2^a(2k-1)|-1, |2^a(2k-1)|-1)}^{u_{|2^a(2k-1)|-1}}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^a s+t}, e^{2^a s+t}])$. Dessa forma, não existe solução para a equação (4.35).

$$(ii) \ 2 \leq 2^a s + t < 2^a(2k - 1) \text{ e } |2^a(2k - 1)| < 2^a(2k - 1) + 2^a s + t - 1.$$

Note que $2^a s + t \neq 2^a(2k - 1)$, pois $2^a \mid 2^a(2k - 1)$ e $2^a \nmid (2^a s + t)$. Neste caso temos as seguintes situações:

$$(a) \ 2^a(2k - 1) = \gamma(2^a s + t).$$

Assim, $2^a \mid \gamma$ ou $2^a \mid (2^a s + t)$ como $2^a \nmid (2^a s + t)$, segue que $\gamma = 2\alpha$, $\alpha \geq 1$. Daí,

$$u_{2^{a-1}(2k-1)} = \left\lfloor \left\lceil \frac{2\alpha(2^a s + t) + 2^a s + t - 1 - \alpha(2^a s + t)}{2\alpha(2^a s + t)} \right\rceil \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \left\lceil \frac{(\alpha + 1)(2^a s + t) - 1}{2\alpha(2^a s + t)} \right\rceil \right\rfloor + 1.$$

Como $(\alpha + 1)(2^a s + t) - 1 < 2\alpha(2^a s + t)$, segue que $u_{2^{a-1}(2k-1)} = 1$. Assim, para cancelar o termo $B_{(0, 2^{a-1}(2k-1))}^{-1}$ em $\bar{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(0, 2^{a-1}(2k-1))}$ deve ser um somando em $\bar{A}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(2^{a-1}(2k-1), 0)} = B_{(0, 2^{a-1}(2k-1))}$ em $\bar{A}(cX_2c^{-1})$. Note que

$$(2^{a-1}(2k - 1), -2^{a-1}(2k - 1)) = -(0, 2^a(2k - 1)) + \alpha(2^a s + t, 2^a s + t),$$

consequentemente, o termo $B_{(0, 2^{a-1}(2k-1))}^{-1}$ não pode ser cancelado. Portanto, não existe solução para a equação (4.35).

$$(b) \text{ Se } 2^a(2k - 1) = \lambda(2^a s + t) + c; \ 1 \leq c \leq 2^a s + t - 1, \text{ então}$$

$$2^a(2k - 1) - 1 = \lambda(2^a s + t) + c - 1; \ 0 \leq c - 1 \leq 2^a s + t - 2. \text{ Ainda,}$$

$$u_{2^a(2k-1)-1} = \left\lfloor \left\lceil \frac{2^a s + t}{2^a(2k - 1)} \right\rceil \right\rfloor + 1 = 1.$$

Se $0 \leq i \leq 2^a s + t - 1$, então

$$u_i = \left\lfloor \frac{2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1 - i}{2^a(2k-1)} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{2^a s + t - 1 - i}{2^a(2k-1)} \right\rfloor + 2 = 2,$$

e todos os termos $B_{(x,y)}^{-2}$; $0 \leq x \leq 2^a s + t - 1$ e $0 \leq y \leq 2^a s + t - 1$ podem ser cancelados.

Mas, para cancelar o termo $B_{(0,2^a(2k-1)-1)}^{-1}$ em $\bar{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(0,2^a(2k-1)-1)}$ deve ser um somando em $\bar{A}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(2^a(2k-1)-1,0)} = B_{(c-1,c)}$ em $\bar{A}(cX_2c^{-1})$. Como $0 \leq c-1 \leq 2^a s + t - 2$ e $1 \leq c \leq 2^a s + t - 1$ e os termos $B_{(x,y)}^{-2}$; $0 \leq x \leq 2^a s + t - 1$, $0 \leq y \leq 2^a s + t - 1$ foram cancelados, segue que $B_{(c-1,c)}$ não cancela nenhum outro termo em $\bar{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.35).

(iii) Se $|2^a(2k-1)| \geq 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1$, então para cancelar o termo $B_{(x,x)}^{-1}$; $0 \leq x \leq \min\{2^a s + t - 1, 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1\}$, em $\bar{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(x,x)}$ deve ser um somando em $\bar{A}(X_2^{-1})$, logo aparece o termo $B_{(x,x)}$ em $\bar{A}(cX_2c^{-1})$, que não cancela nenhum outro termo em $\bar{A}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.35).

Lembre que estamos considerando a situação (C_{21}) $2^a(2k-1) + 2^a s + t > 0$ ($k \geq 1$).

(II) Se $s < 0$, temos as seguintes possibilidades:

(i) $2^a(2k-1) = \gamma(2^a s + t)$. Neste caso, como $2^a \nmid (2^a s + t)$, segue que $2^a | \gamma$, logo $\gamma = 2\alpha$ com $\alpha \leq -1$ uma vez que $2^a s + t < 0$. Observe que

$$\begin{aligned} 0 \leq 2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t < 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1 &\Rightarrow \\ (\alpha+1)(2^a s + t) - (2\alpha+1)(2^a s + t) \leq -1 &\Rightarrow \\ \alpha(2^a s + t) \geq 1. \end{aligned}$$

Daí, para cancelar o termo $B_{(2^a s + t, 2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcX_2c^{-1}E^{-1})$, o termo $B_{(2^a s + t, 2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t)}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, logo aparece em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ o termo $B_{(2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t, 2^a s + t)}^{-1} = B_{(2^a s + t, 2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t)}^{-1}$ em $\mathbb{Z}\tilde{H}$, o qual não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.35).

(ii) $2^a(2k-1) = \lambda(2^a s + t) = c$; $1 \leq c \leq -(2^a s + t) - 1$.

Note que $\lambda \leq -1$ pois $2^a(2k-1) > 0$ e $2^a s + t \leq -c - 1 \leq -2$. Assim, para cancelar o termo $B_{(-c-1, 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(-c-1, 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1)}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, daí, aparece o termo $B_{(2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1, -c-1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$ uma vez que

$$B_{(2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1, -c-1)}^{-1} \neq B_{(z,w)}^{-1}; 2^a s + t \leq z \leq -1 \text{ e } 0 \leq w \leq 2^a(2k-1) + 2^a s + t - 1.$$

De fato,

$$B_{(2^a(2k-1)+2^as+t-1, -c-1)}^{-1} = B_{(z, w)}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} z - (2^a(2k-1) + 2^as + t - 1) = \beta(2^as + t) (*) \\ w + c + 1 = \alpha 2^a(2k-1) + \beta(2^as + t) (**). \end{cases}$$

Observe que

$$2^as + t \leq z \leq -1 \Rightarrow 1 - 2^a(2k-1) \leq z - (2^a(2k-1) + 2^as + t - 1) \leq -2^a(2k-1) - (2^as + t).$$

Como há $-(2^as + t)$ números entre $1 - 2^a(2k-1)$ e $-2^a(2k-1) - (2^as + t)$, existe um único valor para β que satisfaz (*). Por outro lado, tomando $\beta = -\lambda$, temos que $z = 2^as + t + c - 1$ é tal que $2^as + t \leq 2^as + t + c - 1 \leq -2 < 1$, uma vez que, $0 \leq c - 1 \leq -(2^as + t) - 2$. Daí, substituindo $\beta = -\lambda$ em (**), temos que

$$w = (\alpha - 1)(2^a(2k-1)) - 1.$$

Se $\alpha \leq 1$, então $w < 0$ e se $\alpha > 1$, então $w = (\alpha - 1)(2^a(2k-1)) - 1 > 2^a(2k-1) - 1 > 2^a(2k-1) + 2^as + t - 1$. Consequentemente, não existe solução para a equação (4.35).

Agora, vamos escrever $\mathcal{A}([d^{2^a(2k-1)+2^as+t}, e^{2^as+t}])$ nos geradores $B_{(x,y)}$ do grupo abelianizado $\mathbb{Z}\pi_1(T)$ na situação

$$(C_{22}) \quad 2^a(2k-1) + 2^as + t < 0.$$

Neste caso, por recorrência, temos

$$\mathcal{A}([d^{2^a(2k-1)+2^as+t}, e^{2^as+t}]) = \begin{cases} B_{(0, 2^a(2k-1)+2^as+t)} B_{(1, 2^a(2k-1)+2^as+t)} & \cdots & B_{(2^as+t-1, 2^a(2k-1)+2^as+t)} \\ B_{(0, 2^a(2k-1)+2^as+t+1)} B_{(1, 2^a(2k-1)+2^as+t+1)} & \cdots & B_{(2^as+t-1, 2^a(2k-1)+2^as+t+1)} \\ B_{(0, -1)} B_{(1, -1)} & \cdots & B_{(2^as+t-1, -1)}, \text{ se } s \geq 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

e

$$\begin{cases} B_{(2^as+t, 2^a(2k-1)+2^as+t)}^{-1} B_{(2^as+t+1, 2^a(2k-1)+2^as+t)}^{-1} & \cdots & B_{(-1, 2^a(2k-1)+2^as+t)}^{-1} \\ B_{(2^as+t, 2^a(2k-1)+2^as+t+1)}^{-1} B_{(2^as+t+1, 2^a(2k-1)+2^as+t+1)}^{-1} & \cdots & B_{(-1, 2^a(2k-1)+2^as+t+1)}^{-1} \\ & \vdots & \\ B_{(2^as+t, -1)}^{-1} B_{(2^as+t+1, -1)}^{-1} & \cdots & B_{(-1, -1)}^{-1}, \text{ se } s < 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Seja

$$\tilde{H} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (0, 2^a(2k-1)), (2^as + t, 2^as + t) \rangle}.$$

Como na situação (C_{21}) , temos que em $\mathbb{Z}\tilde{H}$ a equação principal se reduz a:

$$\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}) \cdot \bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1}) = 1. \quad (4.41)$$

Ainda, se $\bar{\mathcal{A}}(X_2)$ contém $B_{(x,y)}^{\pm n}$, então $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ contém $B_{(y,x)}^{\pm n}$. Além disso,

$$B_{(x,y)}^{\pm 1} = B_{(z,w)}^{\pm 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y - w = \alpha 2^a(2k - 1). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{A}}([d^{2^a(2k-1)+2^as+t}, e^{2^as+t}]) = \\ & \begin{cases} B_{(0,2^a(2k-1)+2^as+t)} B_{(1,2^a(2k-1)+2^as+t)} & \dots & B_{(2^as+t-1,2^a(2k-1)+2^as+t)} \\ B_{(0,2^a(2k-1)+2^as+t+1)} B_{(1,2^a(2k-1)+2^as+t+1)} & \dots & B_{(2^as+t-1,2^a(2k-1)+2^as+t+1)} \\ B_{(0,-1)} B_{(1,-1)} & \dots & B_{(2^as+t-1,-1)}, \text{ se } s \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.42)$$

e

$$\begin{cases} B_{(2^as+t, -|2^a(2k-1)|)}^{-u-|2^a(2k-1)|} B_{(2^as+t+1, -|2^a(2k-1)|)}^{u-|2^a(2k-1)|} & \dots & B_{(-1, -|2^a(2k-1)|)}^{-u-|2^a(2k-1)|} \\ B_{(2^as+t, -2)}^{-u-2} B_{(2^as+t+1, -2)}^{u-2} & \dots & B_{(-1, -2)}^{-u-2} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{(2^as+t, -1)}^{-u-1} B_{(2^as+t+1, -1)}^{u-1} & \dots & B_{(-1, -1)}^{-u-1}, \text{ se } s < 0, \end{cases} \quad (4.43)$$

onde

$$u_i = \left\lceil \left| \frac{2^a(2k-1) + 2^as + t - i}{2^a(2k-1)} \right| \right\rceil + 1; -|2^a(2k-1)| \leq i \leq -1.$$

Dessa forma,

(I) Se $s \geq 0$,

$$2^a(2k-1) + 2^as + t < 0 \Rightarrow 2^a(2k-1) < 0 \text{ e } 2^as + t < -2^a(2k-1). \text{ Logo,}$$

$$-2^a(2k-1) = \gamma(2^as + t) + c; 0 \leq c \leq 2^as + t - 2.$$

Assim, temos as seguintes situações:

(i) $c = 0$, ou seja, $-2^a(2k-1) = \gamma(2^as + t)$; $\gamma \geq 1$.

Note que $2^a|\gamma|$ e como $-2^a(2k-1) > 2^as + t > 0$, então γ é par e $\gamma \geq 2$. Neste caso, para cancelar o termo $B_{(0,2^{a-1}(2k-1))}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(0,2^{a-1}(2k-1))}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, daí aparece o termo $B_{(2^{a-1}(2k-1),0)}^{-1} = B_{(0,2^{a-1}(2k-1))}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.41).

(ii) $-2^a(2k-1) = \gamma(2^as + t) + c$; $1 \leq c \leq 2^as + t - 2$.

Neste caso, para cancelar o termo $B_{(c+1,2^a(2k-1)+2^as+t)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo

$B_{(c+1, 2^a(2k-1)+2^a s+t)}^{-1}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$, daí aparece o termo $B_{(2^a(2k-1)+2^a s+t, c+1)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, uma vez que

$$B_{(2^a(2k-1)+2^a s+t, c+1)}^{-1} \neq B_{(z, w)}^{-1}; 0 \leq z \leq 2^a s + t - 1 \text{ e } 2^a(2k-1) + 2^a s + t \leq w \leq -1.$$

De fato,

$$B_{(2^a(2k-1)+2^a s+t, c+1)}^{-1} = B_{(z, w)}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} z - (2^a(2k-1) + 2^a s + t) = \beta(2^a s + t) (*), \\ w - c - 1 = \alpha 2^a(2k-1) + \beta(2^a s + t) (**). \end{cases}$$

Além disso,

$$0 \leq z \leq 2^a s + t - 1 \Rightarrow -(2^a(2k-1) + 2^a s + t) \leq z - (2^a(2k-1) + 2^a s + t) \leq -2^a(2k-1) - 1.$$

Como há $2^a s + t$ números entre $-(2^a(2k-1) + 2^a s + t)$ e $-2^a(2k-1) - 1$, existe um único valor para β que satisfaz (*). Por outro lado, tomando $\beta = \gamma$, temos que

$$0 \leq z = \gamma(2^a s + t) + 2^a(2k-1) + 2^a s + t = 2^a s + t - c \leq 2^a s + t - 1, \text{ pois}$$

$$1 \leq c \leq 2^a s + t - 2 \Rightarrow -2^a s - t + 2 \leq -c \leq -1.$$

Daí, substituindo $\beta = \gamma$ em (**), segue que

$$w = \alpha 2^a(2k-1) + \gamma(2^a s + t) + c + 1 = (\alpha - 1)2^a(2k-1) + 1. \text{ Assim,}$$

se $\alpha \leq -1$, então $w > 0$ e se $\alpha > 1$, $w = (\alpha - 1)2^a(2k-1) + 1 < 2^a(2k-1) + 2^a s + t$. Consequentemente,

$$B_{(2^a(2k-1)+2^a s+t, c+1)}^{-1} \neq B_{(z, w)}^{-1}; 0 \leq z \leq 2^a s + t - 1 \text{ e } 2^a(2k-1) + 2^a s + t \leq w \leq -1.$$

Portanto, não existe solução para a equação (4.41).

(II) Se $s < 0$, temos as seguintes possibilidades:

$$(i) \ 2^a(2k-1) + 2^a s + t \leq -2^a(2k-1) \text{ e } 2^a(2k-1) < 2^a s + t < 0.$$

Neste caso, $2^a(2k-1) = \gamma(2^a s + t) - c$; $0 \leq c \leq -(2^a s + t) - 1$; $\gamma \geq 1$. Temos as seguintes situações:

$$(a) \ c = 0, \text{ ou seja, } 2^a(2k-1) = \gamma(2^a s + t).$$

Como $2^a|\gamma$, γ é par e $\gamma \geq 2$. Assim,

$$\begin{aligned} 2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t &= \frac{\gamma}{2}(2^a s + t) + 2^a s + t = \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)(2^a s + t). \text{ Daí} \\ -|2^a(2k-1)| &= \gamma(2^a s + t) \leq \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)(2^a s + t) < 0, \text{ ou seja,} \\ -|2^a(2k-1)| &\leq 2^{a-1}(2k-1) + 2^a s + t \leq -1. \text{ Além disso,} \\ u_{2^{a-1}(2k-1)+2^a s+t} &= \left\lceil \frac{(\gamma+1)(2^a s + t) - \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)(2^a s + t)}{\gamma(2^a s + t)} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\frac{\gamma}{2}}{\gamma} \right\rceil + 1 = 1. \end{aligned}$$

Deste modo, para cancelar o termo $B_{(2^a s+t, 2^{a-1}(2k-1)+2^a s+t)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(2^a s+t, 2^{a-1}(2k-1)+2^a s+t)}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$. Logo, aparece o termo $B_{(2^a(2k-1)+2^a s+t, 2^a s+t)} = B_{(2^a s+t, 2^{a-1}(2k-1)+2^a s+t)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.41).

(b) $2^a(2k-1) = \gamma(2^a s + t) - c$; $0 < c < -(2^a s + t) - 1$; $\gamma \geq 1$.

Observe que $c \neq -(2^a s + t) - 1$, pois $2^a(2k-1)$ é par e $\gamma(2^a s + t) + 2^a s + t + 1$ é ímpar. Ainda,

$$\begin{aligned} u_{-|2^a(2k-1)|} &= \left\lceil \frac{2^a s + t}{2^a(2k-1)} \right\rceil + 1 = 1. \\ 2^a s + t \leq i \leq -1 &\Rightarrow u_i = \left\lceil \frac{-2^a(2k-1) - (2^a s + t) + i}{-2^a(2k-1)} \right\rceil + 1 \\ &= \left\lceil \frac{-(2^a s + t) + i}{-2^a(2k-1)} \right\rceil + 2 = 2. \end{aligned}$$

Assim, todos os termos $B_{(x,y)}^{-2}$; $2^a s + t \leq x, y \leq -1$, podem ser cancelados. Mas, para cancelar o termo $B_{(-1, -|2^a(2k-1)|)}^{-1}$ em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(-1, -|2^a(2k-1)|)}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$. Logo, aparece o termo $B_{(2^a(2k-1), -1)} = B_{(-c, -c-1)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$. Como $2^a s + t \leq -c - 1 < -1$ e os termos $B_{(x,y)}^{-2}$; $2^a s + t \leq x, y \leq -1$ foram cancelados, segue que $B_{(-c, -c-1)}$ não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.41).

(ii) $2^a(2k-1) + 2^a s + t \leq -2^a(2k-1)$ e $2^a(2k-1) > 2^a s + t$.

Neste caso, temos

$$2^a s + t < 2^a(2k-1) < -(2^a s + t) \Rightarrow |2^a(2k-1)| < -(2^a s + t) \Rightarrow 2^a s + t < -|2^a(2k-1)| \leq -1.$$

Assim, para cancelar o termo $B_{(x,x)}^{-u_x}$; $-|2^a(2k-1)| \leq x \leq -1$ com u_x ímpar em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(x,x)}^{u_x}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$. Logo, aparece o termo

$B_{(x,x)}^{u_x}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Deste modo, se u_{-1} é ímpar, então o termo $B_{(-1,-1)}^{-u_{-1}}$ está nas condições anteriores, consequentemente não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$.

Por outro lado, se u_{-1} for par, vamos mostrar que $u_{-|2^a(2k-1)|}$ é ímpar, consequentemente, o termo $B_{(-|2^a(2k-1)|, -|2^a(2k-1)|)}^{-u_{-|2^a(2k-1)|}}$ está nas condições anteriores, logo, não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. De fato, note que

$$2^a(2k-1) + |2^a(2k-1)| + 2^a s + t = \begin{cases} 2^a s + t < 0, & \text{se } 2^a s + t < 2^a(2k-1) < 0, \\ 2^{a+1}(2k-1) + 2^a s + t \leq 0, & \text{se } 2^a(2k-1) > 0. \end{cases}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} u_{-1} \text{ par} &\Rightarrow \left\lfloor \frac{|2^a(2k-1) + 2^a s + t + 1|}{|2^a(2k-1)|} \right\rfloor + 1 = 2\alpha; \alpha \geq 1 \\ &\Rightarrow \left\lfloor \frac{|2^a(2k-1) + 2^a s + t + 1|}{|2^a(2k-1)|} \right\rfloor = 2\alpha - 1 \\ &\Rightarrow |2^a(2k-1) + 2^a s + t + 1| = (2\alpha - 1)|2^a(2k-1)| + \lambda; 0 \leq \lambda \leq |2^a(2k-1)| - 1. \end{aligned}$$

Como $2^a(2k-1) + 2^a s + t < 0$, segue que

$$\begin{aligned} 2^a(2k-1) + 2^a s + t &\leq -1 \Rightarrow 2^a(2k-1) + 2^a s + t + 1 \leq 0. \text{ Assim,} \\ -2^a(2k-1) - (2^a s + t) - 1 &= (2\alpha - 1)|2^a(2k-1)| + \lambda. \text{ Daí,} \\ -2^a(2k-1) - (2^a s + t) - |2^a(2k-1)| &= (2\alpha - 2)|2^a(2k-1)| + \lambda + 1; \\ 1 &\leq \lambda + 1 \leq |2^a(2k-1)|. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda + 1 &= |2^a(2k-1)| \Rightarrow |2^a(2k-1)| = -2^a(2k-1) - (2^a s + t) - (2\alpha - 1)|2^a(2k-1)| \Rightarrow \\ -(2^a s + t) &= 2^a(2k-1) + 2\alpha|2^a(2k-1)|, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, uma vez que $2^a|2^a(2k-1) + 2\alpha|2^a(2k-1)|$ e $2^a \nmid -(2^a s + t)$. Daí,

$$\begin{aligned} u_{-|2^a(2k-1)|} &= \left\lfloor \frac{|2^a(2k-1) + 2^a s + t + |2^a(2k-1)||}{|2^a(2k-1)|} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{(2\alpha - 2)|2^a(2k-1)| + \lambda + 1}{|2^a(2k-1)|} \right\rfloor + 1 = 2\alpha - 1. \end{aligned}$$

Portanto, não existe solução para a equação (4.41).

(iii) $2^a(2k-1) + 2^a s + t > -2^a(2k-1)$.

Neste caso, para cancelar o termo $B_{(x,x)}^{-1}$; $\min\{2^a s + t, 2^a(2k - 1) + 2^a s + t\} \leq x \leq -1$, em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$, o termo $B_{(x,x)}$ deve ser um somando em $\bar{\mathcal{A}}(X_2^{-1})$. Logo, aparece o termo $B_{(x,x)}$ em $\bar{\mathcal{A}}(cX_2c^{-1})$ que não cancela nenhum outro termo em $\bar{\mathcal{A}}(EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1})$. Portanto, não existe solução para a equação (4.41). ■

Referências Bibliográficas

- [1] H.J. Baues, Obstruction Theory - on Homotopy Classification of Maps, Lecture Notes in Mathematics, vol. **628**, Springer, (1977).
- [2] R. Brooks, Coincidences, roots and fixed points, Doctoral Dissertation, University of California, Los Angeles, Calif., (1967).
- [3] E. Fadell and S. Husseini, A fixed point theory for fiber-preserving maps, Lecture Notes in Mathematics, vol. **886**, Springer, (1981), 49-72.
- [4] E. Fadell and S. Husseini, Fixed point theory for non simply connected manifolds, Topology, vol. **20**, Springer, (1981), 53-92.
- [5] D. L. Gonçalves, Fixed Point of S^1 -Fibrations, Pacific J. Math., vol. **129** (1987), 297-306.
- [6] D. L. Gonçalves, Coincidence theory, Handbook of Topological Fixed Point Theory, Springer, (2005), 3-42.
- [7] D. L. Gonçalves, D. Penteado, and J. P. Vieira, Fixed points on Torus fiber bundles over the circle, Fund. Math., vol. **183**(1) (2004), 1-38.
- [8] D. L. Gonçalves, D. Penteado, and J. P. Vieira, Fixed points on Klein bottle fiber bundles over the circle, Fund. Math., vol. **203**(3) (2009), 263-292.
- [9] D. L. Johnson, Presentation of Groups, LMS Lecture Notes vol. **22**, Cambridge University Press (1976).
- [10] G. W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer, (1918).
- [11] J. P. Vieira, Coincidence of maps on Torus fibre bundles over the circle, Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. **183**(2) (2015), 507-548.
- [12] D. Penteado, Fixed points on surface fiber bundles, in: 10th Brazilian Topology Meeting, Mat. Contemp. **13** (1997), 251-267.
- [13] J. W. Vick, Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology, Academic Press, (1973).

- [14] P. Wong, Coincidence Theory for spaces which Fiber Over Nilmanifold, Hindawi Publishing Corporation Fixed Point theory and Applications, (2004), 89-95.
- [15] W. L. Silva and J. P. Vieira, Coincidences of self-maps on Klein bottle fiber bundles over the circle, JP Journal of Geometry and Topology, Vol. **12**, Number 1, (2012), 55-97.

Índice Remissivo

$B_{(x,y)}$, 49

$Coin(f, g)$, 26

$E_B(M_2)$, 13

$E_B(f, g)$, 14

$M(\phi_i)$, 15, 16

$M_2 \times_B M_2$, 13

$\mathcal{A} : \pi_2(T, T - 1) = \pi_2 \rightarrow \frac{\pi_2}{[\pi_2, \pi_2]}$, 49

Equação Principal, 46

Input data, 48

Número de Nielsen $N(f, g)$, 26

Pullback, 13

Pullback algébrico, 19

Pullback geométrico, 19