

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.012/02

Alguns Problemas da Radiação Síncrotron

José N. Acosta Jara

Orientador

Dmitri Maximovitch Gitman

Dezembro de 2002



A. M. Zucchi
Ap. a L. Torgli

Gitman
Dmitri Maximovitch

São Paulo, 20 de dezembro de 2002.

Apresentação

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar o desenvolvimento de um sistema de controle de qualidade para a produção de produtos de consumo.

O trabalho está dividido em:

1. Introdução: Apresentação do tema e objetivos do trabalho.

2. Fundamentação Teórica: Revisão de conceitos e métodos utilizados.

3. Metodologia: Descrição do método de pesquisa adotado.

4. Resultados e Discussão: Apresentação dos dados coletados e análise dos resultados.

5. Conclusão: Síntese dos principais achados e recomendações.

Adicionalmente, foram realizadas as seguintes atividades:

Aos meus pais Fortunata e Roberto.

Adicionalmente, foram realizadas as seguintes atividades:

Adicionalmente, foram realizadas as seguintes atividades:

Adicionalmente, foram realizadas as seguintes atividades:

Adicionalmente, foram realizadas as seguintes atividades:

Adicionalmente, foram realizadas as seguintes atividades:

Agradecimentos

Ao Grande Espírito (Deus) por deixar-me ser parte deste mundo.

À minha família.

Aos meus amigos Meire Cristina (IFT), Juan Carlos (UNICAMP), Carlos Alberto pelos grandes momentos de discussão, de idéias e sonhos, e, por compartilhar os grandes momentos de minha vida.

Ao Prof. Dmitri Maximovitch Gitman pela orientação e assessoria.

Ao Prof. Bruto Max Pimentel pelos conselhos, compreensão e assessoria.

Ao Luis Carlos T. G. e ao Harold pelas colaborações.

Aos meus colegas e funcionários do IFT, pelo auxílio que sempre me prestaram.

À FAPESP, pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível (processo número 98/12362-2).

Ao IFT e à grande UNESP pela infra-estrutura e pelo bom ambiente de trabalho.

Definición

La libertad es la capacidad de elegir entre diferentes opciones sin estar sujeto a coacción externa. Es un concepto fundamental en la filosofía política y jurídica, que se refiere a la ausencia de interferencias injustificadas por parte de otros individuos o instituciones.

Existen dos tipos principales de libertad: la libertad negativa, que se refiere a la ausencia de interferencias, y la libertad positiva, que se refiere a la capacidad de actuar de acuerdo con la propia voluntad. Ambas son esenciales para el desarrollo humano y la realización de los derechos fundamentales.

“ El único medio del hombre conservar
su libertad, es estar siempre dispuesto
a morir por ella.”

“El único medio del hombre adquirir
conocimiento verdadero, es ser
siempre humilde.”

Resumo

Estudamos a radiação síncrotron (RS) de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme e constante com influência do solenóide de Aharonov-Bohm dentro do quadro da teoria quântica relativística. Usando as soluções de Klein-Gordon são calculadas e analisadas as características da radiação espontânea de um fóton, tais como a intensidade, a distribuição angular e a polarização.

É também apresentado uma análise detalhada da dependência angular da RS. Estudando as intensidades da RS espectral descobrimos um comportamento inesperado completamente diferente da intensidade da RS total. Essa diferença consiste em que as linhas espectrais possuem uma tendência à desconcentração no plano da órbita quando aumentamos a energia da partícula.

Palavras Chave: Teoria Clássica e Quântica de Campos, Distribuição Angular, Análise Numérica, Intensidade de Radiação

Área de conhecimento: 1.05.03.01-3 : Teoria Geral de Partículas e Campos

Abstract

Synchrotron radiation of a charged particle in a constant uniform magnetic field and in the presence of the Aharonov-Bohm solenoid field is investigated with reference to the relativistic quantum theory. To start with, the exact solution of the Klein-Gordon equation is found. Using this solution, all the characteristics of one photon spontaneous irradiation, such as intensity, angular distribution and polarization were calculated and analyzed.

We have also made a detailed analysis of angular dependence of the synchrotron radiation (SR). By studying the spectral SR-intensities, we have found a new unexpected angular behavior which is completely different from that of the integral SR-intensity. Particularly, for any given synchrotron frequency the spectral ones have the tendency to disperse themselves on the orbit plane, in contrast with the integral SR-intensity, with increasing particle energy.

Keywords: Classical and Quantum Field Theory, Angular Distribution, Numerical Analysis, Radiation Intensity.

Índice

Introdução	1
1 Intensidade da Radiação Síncrotron Clássica e o Efeito Aharonov-Bohm	6
1.1 A Energia de um Campo Eletromagnético no Vácuo e o Teorema de Pointing	6
1.2 Derivação da Fórmula de Schott	7
1.3 Propriedades de Polarização da Radiação Emitida durante o Movimento de um Elétron em uma Espiral	10
1.4 Partícula Clássica Carregada em um Campo Solenoidal-Magnético . . .	14
2 Influência do Efeito Aharonov-Bohm na Radiação Síncrotron Quântica para o Caso de uma Partícula sem Spin	18
2.1 Introdução	18
2.2 Soluções da Equação de Klein-Gordon em um Campo Solenoidal-Magnético	19
2.3 Elementos de Matriz e Frequências da Radiação	25
2.4 Expressão Exata para a Intensidade da Radiação	28
2.5 Aproximação Semi-Clássica e o Efeito Aharonov-Bohm	30
3 Distribuição Angular na Teoria Clássica da Radiação Síncrotron	32
3.1 Introdução	32

3.2	Distribuição Espectral	33
3.3	Algumas Características da Distribuição Angular da Potência Total da Radiação	40
3.4	Características da Distribuição Angular da Radiação da Primeira Harmônica	45
3.5	Características da Distribuição Angular da Radiação das Harmônicas Superiores	46
Conclusões		56
Apêndice A: Equações Básicas e as Componentes dos Campos Elétrico e Magnético		60
Apêndice B: Movimento de Partículas em um Campo Solenoidal		63
Apêndice C: Funções de Laguerre		66
Bibliografia		70

Introdução

Em 1947, pela primeira vez na história, Floyd Haber, um membro de uma jovem equipe no laboratório do Professor Pollock, observou a radiação emitida por elétrons quando estes se moviam circularmente em um campo magnético da câmara de um acelerador. Isto aconteceu durante o ajustamento de um acelerador cíclico [1, 2].

A radiação foi observada no fundo de uma câmara de síncrotron como uma mancha de luz brilhante claramente vista de dia. Assim, foi descoberta experimentalmente a “luz de elétrons”—a radiação emitida por elétrons relativísticos com uma aceleração centrífuga, mas leva o nome de “Radiação Síncrotron” (RS) já que esta radiação foi observada pela primeira vez em um síncrotron.

A RS, conhecida também como luz síncrotron, é a luz emitida por partículas relativísticas carregadas descrevendo trajetórias circulares. Ela é produzida por feixes de elétrons ou pósitrons relativísticos confinados em uma câmara de vácuo, mantidos em uma órbita fechada por ímãs deflectores, focalizadas por pares de ímãs quadrupolares e acelerados em uma cavidade ressonante de micro-ondas.

As aplicações incluem espectroscopia dos níveis de valência (energias até 20 eV) em átomos, moléculas e sólidos, espectroscopia dos níveis profundos (energias de 1 a 20 KeV), estudos estruturais (estrutura cristalina, mudanças de fase, vizinhança de cada espécie química, informação sobre a forma de nanopartículas em suspensão, etc), estudos biológicos (estruturas de membranas, estrutura de proteínas cristalizadas) e microfabricação.

As propriedades da RS depois de sua descoberta e no começo da sua pesquisa pareciam muito esquisitas e interessantes, ainda mais que antes dos experimentos já tinham sido realizados uma grande quantidade de pesquisas teóricas sobre o problema da radiação do elétron relativístico acelerado. Os primeiros passos nesta direção foram realizados por A. L. Lienard (1898) e Heaviside (1902) [3], quando generalizaram a fórmula de Larmor para a potência da radiação de uma carga não relativística,

$$W = -\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2e^2 \dot{\vec{v}}^2}{3c^3}, \quad (0.1)$$

para o caso do movimento de uma partícula rápida,

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma^6}{c} \left\{ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left[\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right]^2 \right\}$$

onde p_μ é o quadrimomentum, $d\tau = dt/\gamma$ é o tempo próprio, $\gamma = E/mc^2$ e $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. Lienard chamou a atenção para a grande perda de energia do elétron, o qual move-se em uma circunferência ($\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$) de raio R :

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \beta^4 \gamma^4,$$

proporcional a quarta potência da energia.

Em seguida Schott (1907) [4] fez uma tentativa de calcular o espectro e a distribuição espacial da radiação dos elétrons que se movimentam no átomo, com os métodos rígidos da eletrodinâmica clássica. Ele propôs que a teoria dos espectros é o ponto mais importante da teoria da matéria. Ele considerava que ela deveria-se parecer ao modelo do átomo.

A estrutura interna e a beleza matemática do trabalho de Schott é muito atraente, mas as suas tentativas de explicar a radiação do átomo através da física clássica não obteve muito sucesso. Devido à isto, esses trabalhos foram usados mais ou menos por 40 anos somente como uma aplicação acadêmica e praticamente foram esquecidos. Porém,

foram novamente retomados, em diferentes condições, quando originou-se uma nova pergunta sobre a radiação de uma carga que se move em uma trajetória macroscópica. Antes disso, foi pesquisado a radiação dos elétrons acelerados em um campo magnético. Essa pesquisa é uma consequência à pergunta sobre a energia limite, devido a perda por radiação no campo magnético da terra, que possuirão as partículas cósmicas carregadas que consigam chegar até a superfície dela.

A resposta foi dada por I. Y. Pomeranchuk em 1939 [5], o qual determinou o máximo de energia dos elétrons. Isso levou a outra consequência de uma energia limite similar alcançada no Betatron (acelerador por indução). Nele os elétrons movimentam-se em um campo magnético que aumenta uniformemente [6] com relação ao tempo ao longo da trajetória da partícula.

A existência da perda de energia do elétron devido a radiação foi rapidamente confirmada na experiência por J. P. Blewett [7]. Ele descobriu que o raio da órbita dos elétrons reduz-se a medida que aumentamos a sua energia: as partículas movimentam-se em espiral, por que no processo de aceleração ocorre a perda de energia na forma de radiação. Lembremos que a energia, o raio da órbita e a intensidade do campo magnético estão relacionados pela relação $\beta E = eHR$ [8].

Os experimentos de J. P. Blewett podem ser considerados como uma demonstração real da existência da radiação das cargas relativísticas no Betatron. No entanto, não foi possível observar-la visual e diretamente: a procura desta radiação no intervalo de microondas (radiação dipolar) não obteve êxito. Depois de entender a situação sobre a perda energética, a própria radiação parecia pouco interessante já que o experimento mostrava somente grandes perdas radioativas que não possuam características muito importantes.

L. A. Artsimovich e I. Y. Pomeranchuk realizaram uma pesquisa teórica sobre as características da distribuição espectral da potência de radiação que emite um elétron relativístico quando movimenta-se em uma circunferência. Eles descobriram que o

máximo da potência não é conseguido na frequência principal de rotação do elétron, como era no caso da radiação dipolar, mas sim na sua frequência mais alta: $\omega \sim \omega_0 \gamma^3$. Para elétrons com energia de 80 à 100 MeV a radiação não tem que ser observada no intervalo de microondas mas sim na região da radiação de vários campos superiores, ou seja, na região da “luz visível” (1945) [9, 10]. Isto foi observado pela primeira vez num experimento no síncrotron nos EUA [1, 2].

Nas pesquisas [9] foi também demonstrado que a RS possui uma anisotropia expressa na distribuição angular da potência (ela está centrada dentro de um cone agudo $\delta\psi \sim 1/\gamma$ na superfície da órbita do elétron e direcionado à frente do movimento).

A descoberta da luz eletrônica visual no síncrotron incentivou as seguintes pesquisas sobre as propriedades da RS, e sobre tudo a análise espectro-angular da distribuição da potência de radiação. As fórmulas de Schott [4] não ajudaram muito para a descrição do espectro da radiação de um elétron relativístico, o qual possui grandes harmônicas na frequência de rotação do elétron em uma circunferência.

Tradicionalmente, o método de análise da radiação na forma de expansão de uma série de muitos campos era incompatível, então surgiu o problema sobre a discussão assintótica do espectro da radiação do elétron relativístico, quando o fator relativístico for grande: $\gamma \gg 1$.

As fórmulas assintóticas que caracterizam o conteúdo espectral da RS foram calculadas em vários trabalhos teóricos de pesquisa [11, 12, 13, 14, 15], e isso abriu a possibilidade de sua confirmação experimental, mostrando dessa maneira a coincidência com a teoria do espectro na região do visível [16], no ultravioleta [17] e no intervalo de raios-X [18].

O desenvolvimento da teoria clássica da RS foi complementado com a pesquisa de suas propriedades de polarização [19]. Em particular, foi estabelecido que no caso geral a RS possui uma polarização elíptica, e quando observamos na direção perto da superfície da órbita de rotação é polarizado linearmente.

A teoria quântica abre também a possibilidade de pesquisa quando um elétron polarizado emite a RS, e o estudo da contribuição do spin da partícula na potência de radiação.

No capítulo 1 analisaremos detalhadamente os cálculos com a intenção de obtermos a intensidade total de radiação que emite um elétron que se move em um círculo. Esta intensidade pode ser expressa através de duas polarizações circulares, de mão-direita e de mão-esquerda, ou também através de duas polarizações lineares σ e π .

Calculamos também a equação de movimento para um elétron relativístico clássico (com carga $-e$ ($e > 0$)) em um campo solenoidal-magnético uniforme e constante e a projeção z do momento angular, L_z . Deduzimos assim que as trajetórias clássicas são linhas espirais de raio R . Neste capítulo introduzimos o fluxo magnético Φ como sendo a soma de duas partes, um número inteiro (l_0) e a mantissa (μ) do fluxo Φ_0 ; $\Phi = (l_0 + \mu) \Phi_0$, onde $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$.

No capítulo 2 veremos a influência do efeito Aharonov-Bohm na RS na sua versão quântica. Obteremos dois tipos de níveis de energia dependendo dos números quânticos orbitais $l \geq 0$ e $l < 0$. Calcularemos a expressão exata para a intensidade de radiação e logo encontraremos também a sua aproximação semi-clássica.

Finalmente, no último capítulo faremos uma análise detalhada da dependência angular da RS. Encontraremos, em particular, a dependência angular da intensidade total da RS e as peculiaridades das intensidades espectrais da RS.

1. Intensidade da Radiação Síncrotron Clássica e o Efeito Aharonov-Bohm

1.1 A Energia de um Campo Eletromagnético no Vácuo e o Teorema de Pointing

Consideremos as equações de Maxwell-Lorentz na forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -c\mathbf{j} + \frac{c}{4\pi} \text{curl} \mathbf{H}, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{c}{4\pi} \text{curl} \mathbf{E}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Multiplicando a primeira destas equações pelo vetor $\mathbf{E}$ e a segunda pelo vetor $\mathbf{H}$, e somando, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + c\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{c}{4\pi} \text{div} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H},\tag{1.2}$$

onde nós usamos a seguinte identidade vetorial,

$$\text{div} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \text{curl} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{curl} \mathbf{H}.$$

Integrando (1.2) sobre um volume fechado por uma superfície S , e aplicando o teorema de Gauss no termo do lado direito da equação, obtemos a seguinte expressão

$$\frac{d}{dt} \int_v \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x + c \int_v \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x = - \oint_S \frac{c}{4\pi} \text{div} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H},\tag{1.3}$$

onde as densidades de carga e de corrente para um elétron pontual são dados respectivamente por

$$\rho = e\delta\{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)\}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{c}\rho,$$

e $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. As quantidades

$$E^{\text{field}} = \int U d^3x, \quad U = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (1.4)$$

podem ser interpretadas como a energia total do campo eletromagnético e sua densidade respectivamente. A equação (1.3) expressa essencialmente a lei de conservação da energia. A porcentagem de variação da energia do campo dE^{field}/dt e a porcentagem de perda de energia pelo elétron

$$W^{\text{loss}} = -c \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x, \quad (1.5)$$

são iguais a porcentagem de emissão de energia

$$W^{\text{rad}} = \int \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Onde $\mathbf{\Pi}$ é o vetor de Pointing que nesta expressão é dado por

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}. \quad (1.7)$$

Notemos que, se o movimento é realizado com energia constante do campo eletromagnético, isto é, se a perda pela radiação é compensada por uma força externa, então

$$W^{\text{loss}} = W^{\text{rad}}. \quad (1.8)$$

1.2 Derivação da Fórmula de Schott

De agora em diante, vamos a considerar o caso em que a energia do campo $E^{\text{field}} = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x$ para um elétron movendo-se em uma trajetória helicoidal é constante, ou seja,

$$\frac{dE^{\text{field}}}{dt} = 0. \quad (1.9)$$

Assim, é claro que a partir de (1.3) a perda de energia é dada por

$$W = -c \int \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E} d^3x, \quad (1.10)$$

onde $\mathbf{j}$ é trocado por $\mathbf{j}^*$ já que a densidade de corrente é uma quantidade real, $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}$.

Agora substituímos os valores de $\mathbf{j}^*$ e $\mathbf{E}$ (na forma (A.4), veja o Apêndice A) em (1.10). Logo, usando

$$\frac{1}{8\pi^3} \int d^3x \exp\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}\} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad (1.11)$$

o qual depois da integração em relação a $\mathbf{k}'$, nos dá um resultado equivalente as substituições

$$\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}, \quad \psi' \rightarrow \psi.$$

Aqui $\mathbf{k}$ e ψ são o vetor de onda e seu ângulo polar respectivamente (veja o Apêndice A). Depois de calcular o produto escalar $\mathbf{j}_\nu^* \cdot \mathbf{E}_\nu$, em termos das coordenadas cilíndricas do vetor $\mathbf{k}$, obteremos também que o elemento de volume é dado por

$$d^3k = \frac{1}{2} dk_\perp^2 dk_3 d\psi, \quad (1.12)$$

onde $k_\perp$ está definido em (A.2). Logo aqui será preciso fazer a integração pelo ângulo ψ

$$\oint e^{i(\nu-\nu')\psi} d\psi = 2\pi \delta_{\nu\nu'}. \quad (1.13)$$

Se colocarmos a equação (A.4) em (1.5) e considerarmos ainda (1.11)—(1.13), encontraremos que

$$W = -\frac{ice_0^2}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_0^{\infty} dk_\perp^2 (G_1 + G_0) f_\nu, \quad (1.14)$$

onde

$$f_\nu = \frac{\omega_\nu}{c} (\mathbf{j}_\nu^* \cdot \mathbf{j}_\nu) - (\mathbf{k} \mathbf{j}_\nu^*) \rho_\nu = \left[\frac{\omega_\nu}{c} \left(\beta_\parallel^2 + \frac{\nu^2 \omega^2}{k_\perp^2 c^2} \right) - k_3 \beta_\parallel^2 - \frac{\nu \omega}{c} \right] J_\nu^2 + \frac{\omega_\nu}{c} \beta_\perp^2 J_\nu'^2, \quad (1.15)$$

($\beta_\parallel, \beta_\perp, J_\nu$) são definidos no “Apêndice A” e ω_ν , G_0 e G_1 são definidos em (A.5) e (A.9) respectivamente. Como podemos ver das fórmulas (1.15) e (A.9), a função f_ν é

uma função ímpar em relação as transformações $\nu \rightarrow -\nu$ e $k_3 \rightarrow -k_3$, mas a função G_1 (veja (A.9)) conserva seu sinal. Portanto, a expressão proporcional a $f_\nu G_1$, que é uma função ímpar sob estas duas transformações, se anula. Por outro lado, a expressão proporcional a $f_\nu G_0$ é uma função par, e portanto a integral correspondente é diferente de zero. Colocando o valor de G_0 dado por (A.9) em (1.14) e calculando a integração em $k_\perp^2$, com a ajuda da função delta, obtemos

$$k_\perp^2 = \left(k_3 \beta_\parallel + \frac{\nu \omega}{c} \right)^2 - k_3^2. \quad (1.16)$$

A relação anterior (1.16) é satisfeita se colocarmos

$$k_3 = \frac{\nu \omega}{c} \frac{\cos \theta}{1 - \beta_\parallel \cos \theta}. \quad (1.17)$$

Assim, segue que

$$k_\perp = \frac{|\nu| \omega}{c} \frac{\sin \theta}{1 - \beta_\parallel \cos \theta}, \quad (1.18)$$

$$\omega_\nu = c \left(k_3 \beta_\parallel + \frac{\nu \omega}{c} \right) = \frac{\nu \omega}{1 - \beta_\parallel \cos \theta}, \quad (1.19)$$

$$dk_3 = \frac{\nu \omega}{c} \frac{d \cos \theta}{(1 - \beta_\parallel \cos \theta)^2}, \quad (1.20)$$

onde θ é o ângulo formado pelo vetor k e o eixo z . Portanto, a frequência principal de radiação do campo ($\nu = 1$)

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1 - \beta_\parallel \cos \theta}, \quad (1.21)$$

não coincide com a frequência de rotação do elétron ω (deslocamento Doppler).

Substituindo as expressões (1.17) e (1.19) na expressão (1.14) obteremos [20]

$$W = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_\parallel \cos \theta)^3} \left\{ \left(\frac{\cos \theta - \beta_\parallel}{\sin \theta} \right)^2 J_\nu^2(\xi) + \beta_\perp^2 J_\nu'^2(\xi) \right\}, \quad (1.22)$$

onde

$$\xi = \frac{\nu \beta_\perp \sin \theta}{1 - \beta_\parallel \cos \theta}. \quad (1.23)$$

Em particular, quando não existe movimento longitudinal ($\beta_{\parallel} = 0$), obtemos a fórmula de Schott,

$$W = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \left\{ (\cot \theta)^2 J_{\nu}^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\xi) \right\}, \quad (1.24)$$

onde $\xi = \nu \beta \sin \theta$.

1.3 Propriedades de Polarização da Radiação Emitida durante o Movimento de um Elétron em uma Espiral

Podemos assumir que o vetor de Pointing Π , paralelo ao vetor $\mathbf{k}$, se encontra no plano $k_2 = 0$ e $\psi = 0$, formando o ângulo θ com o eixo z . Então obtemos a seguinte relação

$$\frac{k_1}{k_3} = \tan \theta. \quad (1.25)$$

Se usarmos (1.17), (1.19) e (A.6) encontramos de (A.11) que

$$\begin{aligned} E_{z\nu} &= -B \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} J_{\nu}, \\ E_{x\nu} &= B \frac{\cos \theta (\cos \theta - \beta_{\parallel})}{\sin \theta (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)} J_{\nu}, \\ E_{y\nu} &= B \frac{\beta_{\perp}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} J'_{\nu}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

onde B é uma constante.

As componentes $E_{x\nu}$ e $E_{z\nu}$ formam a componente π enquanto que $E_{y\nu}$ forma a componente σ . Os dois componentes são perpendiculares entre si e em relação ao vetor $\mathbf{k}$. Para o componente σ isto é obvio, $\mathbf{k}$ está posicionado no plano xz e $E_{\sigma\nu}$ é paralelo ao eixo y . Para saber a posição da componente π , isto pode ser deduzido de (1.25) obtendo

$$\frac{E_{x\nu}}{E_{z\nu}} = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{k_3}{k_1}. \quad (1.27)$$

Igualando (1.27) com (1.25) mostra que, embora os vetores $\mathbf{k}$ e $\mathbf{E}_\pi$ estejam no plano xz , eles são perpendiculares.

Para encontrar a diferença de fase entre as componentes π e σ consideremos uma rotação do vetor de polarização no plano xy :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} E_{x\nu} \exp(-i\omega_\nu t) &= E_{x\nu} \cos \omega_\nu t, \\ \operatorname{Re} E_{y\nu} \exp\left(-i\omega_\nu t + i\frac{\pi}{2}\right) &= E_{y\nu} \sin \omega_\nu t, \end{aligned}$$

onde ω_ν é definido em (1.19), ou seja, a rotação ocorre da componente π para a componente σ . Em outras palavras, a relação $\cos \theta > \beta_{\parallel}$ corresponde a radiação eletromagnética com polarização elíptica de mão direita e $\beta_{\parallel} < \cos \theta$ a radiação elíptica de mão esquerda. A intensidade da componente π desaparece quando $\beta_{\parallel} = \cos \theta$, de maneira que a radiação contém somente a componente σ e portanto é linearmente polarizado.

Quando um elétron se move em um círculo ($\beta_{\parallel} = 0$) encontramos a partir de (1.26) que os componentes do campo são dados por [21]

$$E_{z\nu}^0 = -B \cos \theta J_\nu, \quad E_{x\nu}^0 = B \cos \theta \cot \theta J_\nu, \quad E_{y\nu}^0 = B \beta J'_\nu, \quad (1.28)$$

onde o argumento da função de Bessel é $\xi = \nu \beta \sin \theta$ (veja a equação (1.24)). Notemos que a magnitude da componente π é

$$|E_{\pi\nu}| = |B \cot \theta J_\nu|. \quad (1.29)$$

Quando consideramos a dependência do tempo encontramos para a componente π a seguinte relação

$$\operatorname{Re} E_{\pi\nu} \exp(-i\nu\omega t) = E_{\pi\nu}^0 \cos \nu\omega t. \quad (1.30)$$

Da mesma forma, para a componente σ que está no eixo y ou, em geral, em um ângulo ϕ definido, temos

$$\operatorname{Re} E_{\sigma\nu} \exp\left(-i\nu\omega t + i\frac{\pi}{2}\right) = E_{\sigma\nu}^0 \sin \nu\omega t. \quad (1.31)$$

As componentes $E_{z\nu}$ e $E_{x\nu}$ estão direcionados igual ao movimento ao longo da hélice e formam a componente π . Notemos que a partir de (A.11) podemos observar que a componente π do campo magnético situa-se ao longo do eixo y , ou em geral formando um ângulo ϕ , isto é, paralelo a componente E_σ . No entanto, a componente σ do campo magnético é antiparalelo a E_π .

De (1.30) e (1.31) vemos que as amplitudes $E_{\pi\nu}$ e $E_{\sigma\nu}$ tem o mesmo sinal para ângulos agudos ($0 < \theta < \pi/2$). Deste modo, a polarização elíptica vai ser de mão direita. No entanto, para ângulos obtusos ($\pi/2 < \theta < \pi$) os componentes $E_{\pi\nu}$ e $E_{\sigma\nu}$ têm sinais opostos, e a polarização elíptica será de mão esquerda. Finalmente, para $\theta = \pi/2$, $E_{\pi\nu} = 0$. Isto significa que a rotação associada com a polarização circular é a mesma que aquela da rotação do elétron, já que ele foi determinado em relação a direção do vetor de onda $\mathbf{k}$. Para ângulos agudos, os pontos do vetor de onda $\mathbf{k}$ estão na direção dos valores positivos de z . No entanto para ângulos obtusos seus pontos estão nos valores negativos. O caso degenerado somente ocorre para o valor $\theta = \pi/2$, e temos a polarização linear.

De acordo com (1.22), a expressão para a intensidade total de radiação que um elétron irradia quando se move em um círculo ($\beta_{\parallel} = 0$) pode ser escrito na forma

$$W = W_\pi + W_\sigma = ce_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left(|E_{\pi\nu}|^2 + |E_{\sigma\nu}|^2 \right). \quad (1.32)$$

A polarização elíptica pode ser vista como o resultado de duas polarizações circulares (de mão direita $E_{1\nu}$ e a polarização de mão esquerda $E_{-1\nu}$). Isto pode ser mostrado substituindo

$$E_{\pi\nu} = \frac{E_{1\nu} + E_{-1\nu}}{\sqrt{2}}, \quad E_{\sigma\nu} = \frac{E_{1\nu} - E_{-1\nu}}{\sqrt{2}}. \quad (1.33)$$

Daí podemos obter

$$E_{1\nu} = \frac{E_{\pi\nu} + iE_{\sigma\nu}}{\sqrt{2}}, \quad E_{-1\nu} = \frac{E_{\pi\nu} - iE_{\sigma\nu}}{\sqrt{2}}. \quad (1.34)$$

A polarização é rigorosamente definida se, além das amplitudes $|E_{\pi\nu}|$ e $|E_{\sigma\nu}|$, nós especificarmos também a diferença de fase entre eles

$$\phi = \phi_{\sigma} - \phi_{\pi}, \quad (1.35)$$

a qual pode ser expressa em termos dessas amplitudes e das amplitudes circularmente polarizadas $|E_{\pm 1\nu}|$. Essa diferença de fases pode ser expressa através da fórmula

$$\sin \phi = -\frac{|E_{1\nu}|^2 - |E_{-1\nu}|^2}{2|E_{\pi\nu}||E_{\sigma\nu}|}. \quad (1.36)$$

Então a diferença de fase ϕ pode ser calculada uma vez que as amplitudes (ou intensidade) sejam conhecidas. As componentes da intensidade que caracterizam a polarização circular são dados pela fórmula

$$W_{\pm 1} = e_0^2 c \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta |E_{\pm 1, \nu}|^2,$$

onde os subíndices $+1$ e -1 denotam a polarização de mão direita e de mão esquerda respectivamente. Assim, a expressão final para a potência emitida, incluindo os efeitos da polarização, são dados pela fórmula:

$$W_l = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \{l_{\pi} \cot \theta J_{\nu}(\xi) + l_{\sigma} \beta J'_{\nu}(\xi)\}^2, \quad (1.37)$$

onde $\xi = \nu\beta \sin \theta$. Aqui l_{σ} e l_{π} definem as intensidades

$$\begin{aligned} \text{da componente } \sigma \text{ da polarização linear} & \quad l_{\sigma} = 1, \quad l_{\pi} = 0, \\ \text{da componente } \pi \text{ da polarização linear} & \quad l_{\sigma} = 0, \quad l_{\pi} = 1, \\ \text{da polarização circular de mão direita} & \quad l_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l_{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \text{da polarização circular de mão esquerda} & \quad l_{\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l_{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Assim, no caso da componente σ , o vetor $\vec{E}_{\sigma}$ está no plano xy , ou seja, da direção radial para o momento circular e perpendicular ao eixo para o movimento helicoidal. Para o componente π , no entanto, o campo magnético $\vec{H}_{\pi}$ encontra-se no plano xy .

1.4 Partícula Clássica Carregada em um Campo Solenoidal-Magnético

Nesta seção analisaremos o movimento clássico de uma partícula pontual com carga $-e$ ($e > 0$), sob a influência de dois campos. Para isto, consideraremos um campo magnético uniforme e constante de magnitude H ao longo do eixo z , e adicionalmente, colocaremos um solenóide infinitesimalmente fino e infinitamente longo ao longo deste eixo, o qual gera um fluxo magnético finito, “campo AB” (Veja o Apêndice B).

Os potenciais eletromagnéticos para esta combinação de dois campos, denominado campo solenoidal-magnético, terão as seguintes formas:

$$\begin{aligned} A_x &= -y \left(\frac{\Phi}{2\pi r^2} + \frac{H}{2} \right), & A_y &= x \left(\frac{\Phi}{2\pi r^2} + \frac{H}{2} \right), \\ A_z &= 0, & A_0 &= 0, & r^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Estes potenciais geram justamente o campo solenoidal-magnético

$$\mathbf{H} = (0, 0, H_z), \quad H_z = H + \Phi \delta(x) \delta(y). \quad (1.40)$$

A partir deste campo se obtêm as equações de movimento para uma partícula relativística clássica

$$\begin{aligned} E^2(1 - \beta_3^2) &= m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \gamma^2 R^2, & e^2 H^2 R^2 &= m_0^2 c^4 (\beta^2 - \beta_3^2)(1 - \beta^2)^{-1}, \\ E^2 &= m_0^2 c^4 + e^2 H^2 R^2 + c^2 P_z^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \gamma^2 R^2 + c^2 P_z^2, \\ R^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \\ P_x^2 + P_y^2 &= \hbar^2 \gamma^2 R^2, \end{aligned} \quad (1.41)$$

onde x_0, y_0, z_0, R e β_3 são constantes de integração, e

$$\gamma = \frac{eH}{c\hbar} > 0. \quad (1.42)$$

Calculamos também a projeção z do momento angular

$$\begin{aligned} L_z &= -\hbar\bar{\mu} + \frac{1}{2}\hbar\gamma(R^2 - R_0^2), \\ \bar{\mu} &= \left(\frac{e\Phi}{2\pi c\hbar} \right), \\ R_0^2 &= x_0^2 + y_0^2, \end{aligned} \tag{1.43}$$

onde a constante $\bar{\mu}$ é adimensional. De (1.43) vemos que L_z é uma integral de movimento. As equações (1.41) mostram que as trajetórias clássicas são linhas espirais com raio R e suas projeções no plano $z = 0$ terão a forma $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Podemos obter também de (1.41) uma relação importante

$$\mathcal{K}^2 = m^2 + \gamma^2 R^2 + k_3^2,$$

onde introduzimos uma nova notação,

$$E = c\hbar\mathcal{K}, \quad m = m_0c/\hbar, \quad P_z = \hbar k_3.$$

É interessante colocar $\bar{\mu}$ na seguinte forma

$$\bar{\mu} = l_0 + \mu, \quad 0 \leq \mu < 1, \tag{1.44}$$

onde μ é a mantissa e l_0 é um número inteiro. Então, tomando em conta a definição de $\bar{\mu}$, podemos escrever

$$\Phi = \Phi_0(l_0 + \mu), \quad \Phi_0 = 2\pi c\hbar/e. \tag{1.45}$$

Aqui μ representa a mantissa do fluxo magnético Φ , e l_0 representa um número inteiro de Φ_0 , o qual contém o fluxo total Φ . Notemos mais uma vez que a mantissa é sempre positiva e não pode ser igual a um (1.44). A projeção do momento angular é

$$L_z = \hbar(l - l_0), \quad l = L_z/\hbar + l_0, \tag{1.46}$$

onde l é uma quantidade adimensional. A partir de (1.43) segue que

$$l + \mu = L_z / \hbar + \bar{\mu} = \frac{\gamma}{2} (R^2 - R_0^2). \quad (1.47)$$

Logo, podemos ver que no caso

$$l > -\mu, \quad (R > R_0), \quad (1.48)$$

a trajetória abrange o solenóide, enquanto que no caso

$$l < -\mu, \quad (R < R_0), \quad (1.49)$$

ela não o circunda.

Introduzindo as quantidades complexas adimensionais a_1 e a_2 pelas relações,

$$\begin{aligned} \hbar \sqrt{2\gamma} a_1 &= P_x - iP_y, \\ \hbar \sqrt{2\gamma} a_2 &= iP_x - P_y + \hbar \gamma (x + iy), \end{aligned} \quad (1.50)$$

podemos expressar as coordenadas e os momentos como

$$\begin{aligned} \sqrt{2\gamma} x &= a_2^+ + a_2 + i(a_1 - a_1^+), \\ \sqrt{2\gamma} y &= i(a_2^+ - a_2) - a_1^+ - a_1, \\ 2P_x &= \hbar \sqrt{2\gamma} (a_1 + a_1^+), \\ 2P_y &= i\hbar \sqrt{2\gamma} (a_1 - a_1^+). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Então, teremos a representação do movimento clássico em termos de a_1 e a_2

$$\begin{aligned} a_1^+ a_1 + a_1 a_1^+ - a_2^+ a_2 - a_2 a_2^+ &= 2 \left(\frac{L_z}{\hbar} + \bar{\mu} \right) = 2(l + \mu), \\ a_1^+ a_1 + a_1 a_1^+ &= \gamma R^2 = \frac{P_x^2 + P_y^2}{\hbar^2 \gamma}, \\ a_1 &= -i \sqrt{\frac{\gamma}{2}} R e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}, \\ a_2 &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}} R (x_0 - iy_0). \end{aligned} \quad (1.52)$$

onde φ_0 é uma constante, R e γ foram definidos em (1.41) e (1.42) respectivamente e

$$\omega_0 = \frac{ceH}{E}, \quad (1.53)$$

é a frequência de rotação do elétron.

2. Influência do Efeito Aharonov-Bohm na Radiação Síncrotron Quântica para o Caso de uma Partícula sem Spin

2.1 Introdução

No trabalho [22, 23] foi obtida a solução exata da equação de Klein-Gordon para uma carga que se move num campo magnético homogêneo e num campo de AB [24, 25, 26, 27], campo solenoidal-magnético. Estas soluções podem servir de base para a construção da teoria quântica da radiação de partículas no campo citado.

É conhecido a partir de [22] que, a trajetória clássica da partícula não depende da existência do campo do solenoide (no caso quando ela não atravessa o sistema de coordenadas iniciais). Logo, do ponto de vista clássico, a radiação espontânea da carga no campo citado anteriormente é uma RS e a teoria clássica desta radiação é já conhecida [28, 29, 30].

Aqui estudaremos a radiação de uma partícula no campo dado com o método da teoria quântica, nos restringindo ao caso de uma partícula sem spin, onde a influência do solenoide deve-se manifestar e as propriedades da radiação tem que diferenciar-se das propriedades próprias da RS, as quais são perfeitamente conhecidas a nível quântico [31].

Precisamente as diferenças que aparecem aqui são as manifestações do efeito AB na

RS.

O efeito AB é importante porque nos ajuda a conhecer o papel dos potenciais eletromagnéticos na teoria quântica. Foi demonstrado no trabalho [24] um espalhamento não trivial de uma partícula carregada com um solenóide magnético infinitamente longo e infinitesimalmente fino. O efeito pode ser relacionado com a desvio de fase $\exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int A dr\right)$ na função da partícula [28, 32, 33] que se move ao longo de um caminho fechado circundando o solenóide [34]. Este desvio de fase é proporcional ao fluxo magnético gerado pelo solenóide apesar do fato de que a função de onda desaparece na região onde o campo magnético é diferente de zero.

Nesta parte estudaremos o comportamento quântico de uma partícula carregada no meio de um campo magnético homogêneo e constante em combinação com o campo AB. Esta combinação de campos geram exatamente uma situação na qual o efeito AB para os estados ligados podem ser observados. Mais exatamente, isto nos permite demonstrar que a partícula que está girando no campo magnético sente a presença do solenóide.

2.2 Soluções da Equação de Klein-Gordon em um Campo Solenoidal-Magnético

Estudaremos as soluções da equação de Klein-Gordon,

$$\left(\hat{P}^2 - m_0^2 c^2\right) \Psi(x) = 0, \quad \hat{P}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu(x), \quad (2.1)$$

no campo solenoidal-magnético. Vemos que existem três operadores $\hat{P}_0$, $\hat{P}_3$ e $\hat{L}_z$ que comutam entre si e que representam integrais de movimento. O último operador corresponde a quantidade clássica (1.46). Buscaremos as soluções de (2.1), as quais são os autovetores desses operadores,

$$\hat{P}_0 \Psi = \hbar K \Psi, \quad \hat{P}_z \Psi = \hbar k_3 \Psi, \quad \hat{L}_z \Psi = \hbar(l - l_0) \Psi. \quad (2.2)$$

Já que os l_0 são inteiros os números quânticos l tem que ser inteiros afim de manter a unicidade da função de onda. Dependendo do valor deste número quântico existem dois tipos de soluções:

$$\Psi_{n,l,k_3}^{(1)}(x) = N_1 \exp(-ic\mathcal{K}_1 t + ik_3 z) \psi_{n,l}^{(1)}(r, \varphi), \quad l \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\Psi_{n,l,k_3}^{(2)}(x) = N_2 \exp(-ic\mathcal{K}_2 t + ik_3 z) \psi_{n,l}^{(2)}(r, \varphi), \quad l < 0, \quad (2.4)$$

onde φ é o ângulo polar. Portanto vemos daqui a quebra da degeneração da energia em relação ao número quântico l .

Em vista que l é exclusivamente inteiro, o primeiro tipo de soluções (2.3) esta relacionado com a veracidade da desigualdade (1.48) no nível clássico. Podemos interpretar estes estados como os que correspondem as trajetórias clássicas que circundam o solenóide. Assim,

$$\begin{aligned} \psi_{n,l}^{(1)}(r, \varphi) &= \exp[i(l - l_0)\varphi] I_{n+\mu, n-l}(\rho) \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma(1+n-l)}{\Gamma(1+\mu+n)}} \exp\left[i(l - l_0)\varphi - \frac{\rho}{2}\right] \rho^{\frac{l+\mu}{2}} L_{n-l}^{l+\mu}(\rho), \\ 0 &\leq l \leq n, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\rho = \frac{r^2}{2}$ e $I_{k,s}(\rho)$ são as funções de Laguerre, definidas em (C.1), e $L_{n-l}^{l+\mu}(\rho)$ são os polinômios de Laguerre [35] (veja o Apêndice C). Neste caso, os níveis de energia são definidos pela relação

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^2 &= m^2 + k_3^2 + 2\gamma \left(n + \mu + \frac{1}{2}\right) \\ &= m^{*2} + k_3^2 + 2\gamma(n + \mu), \\ m^{*2} &= m^2 + \gamma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eles dependem do número quântico n o qual será chamado de número quântico principal. Cada nível de energia é degenerado $n + 1$ vezes, de acordo com os possíveis l

admitidos em cada nível n . Chamaremos m^{*2} de massa efetiva de uma partícula sem spin.

O segundo tipo de soluções (2.4) os quais estão relacionados com a desigualdade (1.49), no nível clássico, podem ser interpretados como estados cujas trajetórias, no nível clássico, não circundam o solenóide. Neste caso,

$$\begin{aligned}\psi_{n,l}^{(2)}(r, \varphi) &= \exp[i(l - l_0)\varphi] I_{n-l-\mu, n}(\rho) \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1-\mu-l+n)}} \exp\left[i(l - l_0)\varphi - \frac{\rho}{2}\right] \rho^{-\frac{l+\mu}{2}} L_n^{-l-\mu}(\rho), \\ l &= -1, -2, \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$

Assim, os níveis de energia são definidos pela relação

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^2 &= m^2 + k_3^2 + 2\gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= m^{*2} + k_3^2 + 2\gamma(n).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Onde cada nível é infinitamente degenerado com relação ao número quântico l .

Introduzimos novas notações; primeiramente temos o número quântico angular efetivo $\bar{l}$ e o número quântico principal efetivo $\bar{n}$ representados através da seguinte maneira:

$$\bar{l} = l + \mu, \quad \bar{n} = n + \mu(2 - j) = \begin{cases} n + \mu, & j = 1. \\ n, & j = 2, \end{cases}.$$

Então, as equações (2.6) e (2.8) que definem os níveis de energia terão a seguinte forma

$$\mathcal{K}_j^2 = m^{*2} + k_3^2 + 2\gamma\bar{n},$$

e as funções de onda podem ser escritas como

$$\psi_{n,l}^{(1)}(r, \varphi) = \exp[i(l - l_0)\varphi] I_{\bar{n}, \bar{n}-\bar{l}}(\rho), \quad (2.9)$$

$$\psi_{n,l}^{(2)}(r, \varphi) = \exp[i(l - l_0)\varphi] I_{\bar{n}-\bar{l}, \bar{n}}(\rho). \quad (2.10)$$

Pode-se notar que os estados (2.9) e (2.10) se diferenciam pela não-simetria das funções de Laguerre, em seus sub-índices. Quando $\mu = 0$ eles são simétricos (veja a eq (C.18)) e as soluções não sentem o fluxo magnético. Notamos também que as funções de onda desaparecem no eixo z para qualquer μ ,

$$\psi_{n,l}^{(j)}(r = 0, \varphi) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Isto significa que a probabilidade de encontrar uma partícula na área do fluxo magnético é zero. No entanto, este fluxo afeta o comportamento da partícula (efeito AB) em todo o espaço (isto muda a forma das funções de onda). Se os fatores de normalização em (2.3) e (2.4) têm a forma

$$N_j = \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi L \mathcal{K}_j}}, \quad (2.11)$$

então as funções de onda satisfazem a seguinte relação de ortonormalidade

$$\left(\Psi_{n',l',k'_3} \Psi_{n,l,k_3} \right) = \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{k_3 k'_3}, \quad (2.12)$$

em relação ao produto escalar de Klein-Gordon

$$(\Psi, \Psi') = \frac{1}{\hbar} \int \left[\Psi^\dagger \hat{P}_0 \Psi' + (\hat{P}_0 \Psi)^\dagger \Psi' \right] dr. \quad (2.13)$$

Aqui fizemos um corte na direção z , $-L < z < L$, e no final colocamos $L \rightarrow \infty$.

Considerando as quantidades P_x e P_y de (1.50) como operadores definidos em (2.1) podemos construir os operadores correspondentes às quantidades a_1, a_2 . Representamos estes operadores pelas mesmas letras sem chapéus. Então estes operadores tem a forma

$$\begin{aligned} a_1 &= -i\sqrt{\rho} \exp(-i\varphi) [(l_0 + \mu + \rho - i\partial_\varphi) / 2\rho + \partial_\rho], \\ a_1^\dagger &= i\sqrt{\rho} \exp(i\varphi) [(l_0 + \mu + \rho - i\partial_\varphi) / 2\rho - \partial_\rho], \\ a_2 &= -\sqrt{\rho} \exp(i\varphi) [(l_0 + \mu - \rho - i\partial_\varphi) / 2\rho - \partial_\rho], \\ a_2^\dagger &= -\sqrt{\rho} \exp(-i\varphi) [(l_0 + \mu - \rho - i\partial_\varphi) / 2\rho + \partial_\rho]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Obteremos também as seguintes relações

$$\begin{aligned}\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 &= \gamma\hbar(a_1^+a_1 + a_1a_1^+), \\ \hat{L}_z &= \frac{\hbar}{2}(a_1a_1^+ + a_1^+a_1 - a_2^+a_2 - a_2a_2^+) - \hbar\bar{\mu}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Usando a relação de comutação para os operadores do momento

$$\hat{P}_x\hat{P}_y - \hat{P}_y\hat{P}_x = -i\frac{e\hbar}{c}H_z, \quad (2.16)$$

e a definição do campo magnético (1.40), obtemos as seguintes relações de comutação para os operadores a_1, a_2

$$\begin{aligned}[a_1, a_1^+] &= 1 + f, & [a_1, a_2] &= if, \\ [a_2, a_2^+] &= 1 - f, & [a_1, a_2^+] &= 0,\end{aligned}\quad (2.17)$$

onde a função adimensional f tem a seguinte forma

$$f = \left(\frac{\Phi}{H}\right)\delta(x)\delta(y). \quad (2.18)$$

Se D é uma área conexa arbitraria no plano $z = 0$, a qual contém a origem, então nós podemos ver que

$$\int_D f dx dy = \Phi/H = \int_D f r dr d\varphi = 1/\gamma \int_D f d\rho d\varphi,$$

onde ρ foi definido em (2.5). Logo nós obtemos

$$f = \left(\frac{\Phi}{H}\right) \frac{1}{\pi r} \delta(r) = \left(\frac{\Phi}{H}\right) \frac{\gamma}{\pi} \delta(r). \quad (2.19)$$

Observamos que os operadores $a_k, a_k^+, k = 1, 2$, podem ser considerados somente como operadores de criação e aniquilação quando $\Phi = f = 0$. No entanto eles atuam como operadores de criação e aniquilação nas funções que são contínuas nos pontos $\rho = 0$ e que se anulam neste ponto juntamente com a sua primeira derivada em relação a ρ .

Usando as fórmulas (C.6)-(C.9) do Apêndice C, encontraremos a ação dos operadores a_k^+ , a_k , ($k = 1, 2$) nas funções de onda (2.5), (2.7), da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{n,l}^{(j)} &= (-1)^j \sqrt{\bar{n}} \psi_{n-1,l-1}^{(j)}, \\ a_1^+ \psi_{n,l}^{(j)} &= (-1)^j \sqrt{\bar{n}} \psi_{n+1,l+1}^{(j)}, \\ a_2 \psi_{n,l}^{(j)} &= (-1)^j \sqrt{\bar{n} - \bar{l}} \psi_{n,l+1}^{(j)}, \\ a_2^+ \psi_{n,l}^{(j)} &= (-1)^j \sqrt{\bar{n} - \bar{l} + 1} \psi_{n,l-1}^{(j)}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Estas fórmulas mostram que as funções $\psi_{n,l}^{(1)}$ podem ser criadas pela ação dos operadores a_k^+ em $\psi_{0,0}^{(1)}$, e as funções $\psi_{n,l}^{(2)}$ podem ser criadas pela ação dos operadores a_k^+ em $\psi_{0,-1}^{(2)}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi_{n,l}^{(1)} &= (-1)^l i^n \sqrt{\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu+n)\Gamma(1+n-l)}} (a_2^+)^{n-l} (a_1^+)^n \psi_{0,0}^{(1)}, \\ \psi_{n,l}^{(2)} &= i^n \sqrt{\frac{\Gamma(2-\mu)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-\mu+n-l)}} (a_1^+)^n (a_2^+)^{n-l-1} \psi_{0,-1}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Interpretamos naturalmente $\psi_{0,0}^{(1)}$ como um estado de vácuo para o conjunto de estados $\psi_{n,l}^{(1)}$, e $\psi_{0,-1}^{(2)}$ como um estado vácuo para o conjunto de estados $\psi_{n,l}^{(2)}$. Consequentemente temos dois estados de vácuo quando $0 < \mu < 1$.

Quando $\mu = 0$ a situação muda. A partir de (C.18)

$$\psi_{n,l}^{(1)} = (-1)^l \psi_{n,l}^{(2)}, \quad \mu = 0, \quad (2.22)$$

e para qualquer $\psi_{0,0}^{(1)}$ está conectado com $\psi_{0,-1}^{(2)}$ para qualquer $l < n$,

$$a_2^+ \psi_{0,0}^{(1)} = \psi_{0,-1}^{(2)}, \quad a_2 \psi_{0,-1}^{(2)} = \psi_{0,0}^{(1)}. \quad (2.23)$$

Logo, nós temos somente um vácuo no problema, uma serie de energia (2.8), e todas as funções de onda são criadas a partir do vácuo $\psi_{0,0}^{(1)}$.

2.3 Elementos de Matriz e Frequências da Radiação

Do ponto de vista clássico a radiação da carga no campo magnético e no campo solenoidal-magnético não tem diferença. Consideramos a radiação espontânea de uma partícula relativística sem spin em um campo solenoidal-magnético dentro da estrutura da teoria quântica. Esta radiação é chamada também de Radiação Síncrotron (RS). Nós temos observado, da seção anterior, que a presença do solenóide afeta o movimento quântico da carga. Estas consequências diferenciam-se da RS quântica ordinária, já conhecida [28]. Todas as características da RS são expressas através dos elementos de matriz do operador

$$\bar{P} = \int d\mathbf{x} \Psi_a^*(x) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{P} \Psi_b^*(x), \quad (2.24)$$

onde $\hat{P}$ é o operador do momento cinético (2.1), e $\mathbf{k}$ é um vetor de onda de um fóton. No sistema de referência Cartesiana este vetor pode ser expressado da seguinte forma

$$\mathbf{k} = \kappa (\sin \theta \cos \varphi', \sin \theta \sin \varphi', \cos \theta).$$

Os ângulos esféricos θ, φ' definem o ângulo de distribuição dos fótons emitidos, enquanto que χ define a energia de um fóton $E_{ph} = c\hbar\kappa$.

A polarização da RS será definida similar à [28]:

$$\begin{aligned} \hat{P}_\pi &= (\hat{P}_x \cos \varphi' + \hat{P}_y \sin \varphi') \cos \theta - \hat{P}_z \sin \theta, \\ \hat{P}_\sigma &= -\hat{P}_x \sin \varphi' + \hat{P}_y \cos \varphi', \end{aligned} \quad (2.25)$$

ou em termos dos operadores $a_1, a_1^\dagger$

$$\begin{aligned} \hat{P}_\pi &= i\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{2}} [a_1 \exp(i\varphi') + a_1^\dagger \exp(-i\varphi')] \cos \theta - \sin \theta, \\ \hat{P}_\sigma &= i\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{2}} [a_1 \exp(i\varphi') - a_1^\dagger \exp(-i\varphi')]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

É possível calcular exatamente os elementos de matriz dos operadores (2.26) entre os estados iniciais e finais $\Psi_{n,l,k_3}^{(j)}$ e $\Psi_{n',l',k'_3}^{(j')}$. Em seguida mostraremos alguns detalhes desse cálculo.

A integração sobre o ângulo φ leva-nos para as funções de Bessel similares ao caso usual da RS. Os elementos da matriz da amplitude de transição não contém a quantidade l_0 , eles dependem só da mantissa μ do fluxo magnético. Similar ao caso usual da RS aqui aparecem duas leis de conservação: uma para o componente z do momento,

$$k_3 - k'_3 = \kappa \cos \theta, \quad (2.27)$$

e a outra para a energia,

$$K_j - K'_{j'} = \kappa. \quad (2.28)$$

Estas relações junto com (1.41) e (2.9) definem a frequência da radiação κ como uma função dos estados iniciais e finais e o ângulo θ . Não depende do ângulo φ' devido à simetria axial. Quando $\mu = 0$ a frequência k é uma função do número quântico principal n , do número de harmônicas irradiadas ν ,

$$\nu = n - n',$$

e do ângulo θ . E não depende do número quântico orbital l e l' . Quando $\mu > 0$, a degeneração da frequência κ com respeito aos números quânticos l, l' é parcialmente quebrado. A frequência depende do tipo de estados inicial e final mais exatamente dos números quânticos j e j' , de acordo com a equação (2.28). Assim $\kappa = \kappa_{jj'}$. Introduzimos um número efetivo, $\bar{\nu} = \bar{\nu}_{jj'}$, para as harmônicas irradiadas na seguinte forma

$$\bar{\nu} = \bar{n} - \bar{n}' = \nu + \mu (j' - j) = \begin{cases} \nu, & j = j', \\ \nu + \mu, & j = 1, \quad j' = 2, \\ \nu + \mu, & j = 2, \quad j' = 1, \quad \bar{\nu} > 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

logo, obtemos

$$\kappa_{jj'} = \frac{K_j}{\sin^2 \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \beta_j^2 \frac{2\bar{\nu}}{2\bar{n} + 1} \sin^2 \theta} \right), \quad (2.30)$$

onde

$$\beta_j^2 = 1 - \left(\frac{m}{K_j} \right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_j} \right)^2. \quad (2.31)$$

A equação (2.30) é obtida para os estados iniciais com $k_3 = 0$ e pode ser escrita como

$$\kappa_{jj'} = \frac{(2\gamma\bar{\nu})}{K_j + \sqrt{K_j^2 - 2\gamma\bar{\nu} \sin^2 \theta}}. \quad (2.32)$$

Introduzindo uma nova variável sem dimensões $q = q_{jj'}$,

$$q = \frac{\kappa^2 \sin^2 \theta}{2\gamma}, \quad 0 \leq q < \bar{\nu}, \quad (2.33)$$

obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\gamma}{K_j} (\bar{\nu} + q), \\ \sin \theta &= \sqrt{\frac{2}{\gamma} K_j \frac{\sqrt{q}}{\bar{\nu} + q}}, \\ \sqrt{K_j^2 - 2\gamma\bar{\nu} \sin^2 \theta} &= K_j \frac{\bar{\nu} - q}{\bar{\nu} + q}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim, quando $\mu > 0$ aparecem duas séries espectrais, a primeira sem mudança do número quântico j ($\bar{\nu} = \nu$) e a segunda com mudança do número quântico j ($\bar{\nu} = \nu \pm \mu$). No último caso o número efetivo da harmônica emitida não é inteira. Observamos que ao fixar $\nu > 0$, e um número quântico principal do estado inicial obtemos a desigualdade

$$\kappa_{21} < \kappa_{11} < \kappa_{22} < \kappa_{12},$$

a qual será uma igualdade quando $\mu = 0$. Se calcularmos a diferença entre as frequências κ_{11} e κ_{22} para um campo H ($H \ll H_0 = m_0^2 c^3 / e \hbar \approx 4,41 \times 10^{13}$ gauss), onde H_0 é um campo crítico que excede qualquer campo magnético produzido no momento em qualquer laboratório, obteremos que esta é proporcional a μ

$$\begin{aligned} \kappa_{22} - \kappa_{11} &\approx \mu \delta \kappa_{22}, \\ \delta &= \frac{\gamma}{K_1^2} = \frac{\gamma}{m^2} \frac{m^2}{K_1^2} = \frac{H}{H_0} \left(\frac{m_0 c^2}{E_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para os campos típicos $H \approx 10^4$ gauss que são realizados nos aceleradores, e para uma energia não muita alta do elétron obtemos $\delta < 10^{-9}$. Logo, neste caso temos que a diferença entre as frequências κ_{12} e κ_{21} será

$$\kappa_{12} - \kappa_{21} \approx 2\frac{\mu}{\nu}\kappa_{12} = 2\mu\frac{\omega_0}{c} \quad (2.36)$$

onde ω_0 é a frequência síncrotron clássica (1.53). Assim, esta diferença somente é visível para as harmônicas com pequenos valores.

Notemos que existe a possibilidade, quando $\mu > 0$, de emitir a harmônica $\nu = 0$ no momento em que ocorre a transição de $j = 1$ para $j' = 2$. No caso do campo magnético puro essa situação é proibida. Para os campos $H \ll H_0$, a frequência de radiação que corresponde a essa harmônica é

$$\omega_{12} = \mu\omega_0 = \mu\frac{ecH}{E_1}. \quad (2.37)$$

Para a transição de $j = 2$ para $j' = 1$ (quando $\nu = 1$) é emitida a frequência

$$\omega_{12} = (1 - \mu)\omega_0. \quad (2.38)$$

Essas duas frequências são menores que a frequência síncrotron clássica ω_0 contrariando o fato que na RS usual, quando $\mu = 0$, a menor frequência é a própria ω_0 . Esta é a mais essencial e, em princípio, consequência controlável do efeito AB na RS.

2.4 Expressão Exata para a Intensidade da Radiação

Já que é possível calcular exatamente os elementos de matriz do operador (2.24), então podemos obter as expressões exatas da probabilidade e a intensidade de emissão de um fóton. Quando usando as expressões (C.6 – C.9), obtemos a seguinte expressão para a intensidade de radiação (levando em conta a polarização):

$$W_j = W_0 \frac{H}{H_0} \left(\frac{\gamma}{K_j^2} \right)^2 \sum_{\nu, j'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{(\bar{\nu} + q)^3}{\bar{\nu} - q} Q_{jj'} |F_{jj'}|^2, \quad (2.39)$$

onde

$$W_0 = \frac{e^2 m_0^2 c^3}{\hbar^2} \quad (2.40)$$

é uma constante que tem dimensão de intensidade, e $F_{jj'}$ tem a forma

$$\begin{aligned} F_{jj'} &= 2l_\sigma \sqrt{q} I'_{jj'}(q) + l_\pi \cot \theta \sqrt{\frac{2K^2}{\gamma}} I_{jj'}(q), \\ I_{1j'}(q) &= I_{\bar{n}, \bar{n}'}(q), \\ I_{2j'}(q) &= I_{\bar{n}', \bar{n}}(q). \end{aligned} \quad (2.41)$$

A última magnitude não depende do número quântico orbital l , ela é completamente definida pelo número quântico principal efetivo $\bar{n}$ e pela polarização da radiação. As intensidades de polarização é caracterizada pelas magnitudes l_σ e l_π igual a (1.38)

$$\begin{aligned} \text{da componente } \sigma \text{ da polarização linear} & \quad l_\sigma = 1, \quad l_\pi = 0, \\ \text{da componente } \pi \text{ da polarização linear} & \quad l_\sigma = 0, \quad l_\pi = 1, \\ \text{da polarização circular da mão direita} & \quad l_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \text{e da polarização circular da mão esquerda} & \quad l_\sigma = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

(veja também [36]). E por último quando $l_\sigma^2 = l_\pi^2 = 1$, e $l_\sigma \times l_\pi = 0$ obtemos a intensidade total de radiação não polarizada.

A magnitude $Q_{jj'}$ depende do número quântico orbital l , ela é uma soma sobre os números quânticos finais l'

$$Q_{1j'} = \sum_{l'} I_{\bar{n}-l', \bar{n}-l'}^2(q), \quad Q_{1j'} = \sum_{l'} I_{\bar{n}-l', \bar{n}-l'}^2(q). \quad (2.43)$$

Os limites da soma sobre l' depende de j'

$$\begin{aligned} j' &= 1, \quad 0 \leq l' \leq n - \nu, \\ j' &= 2, \quad -\infty < l' \leq -1. \end{aligned}$$

O integrando em (2.41) não depende de φ' . Logo, a integração sobre esta variável pode ser realizada. Integrando sobre θ obtemos zero para la polarização circular total. Isto

é devido ao fato que as polarizações circulares no semiplano superior ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) e no semiplano inferior ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) têm sinais opostos e compensam-se exatamente entre si.

Se $\mu = 0$ a magnitude $|F|^2$ na equação (2.39) não depende do tipo de estado final (A propriedade (C.18) é válido neste caso). Os números quânticos efetivos coincidem neste caso com os ordinários $\bar{n} = n$, $\bar{l} = l$. Logo, levando em conta (C.18) e (C.26), obtemos a partir de (2.43)

$$\sum_{j'} Q_{jj'} = \sum_{k=0}^{\infty} I_{k,s}^2(q) = 1, \quad s = n - l. \quad (2.44)$$

Isto é um resultado bem conhecido para a teoria da RS. Em outras palavras a intensidade da RS não depende dos números quânticos orbitais.

Se $0 < \mu < 1$ a magnitude $Q_{jj'}$ depende de l , n , ν , e a degeneração desaparece completamente. Fisicamente este resultado pode ser da seguinte forma: Em acordo com a equação (1.47) a magnitude l caracteriza a distancia entre a trajetória clássica e o solenóide. Naturalmente a intensidade de radiação deve depender da distancia assim como também do tipo de estado. Na ausência do solenóide a origem do sistema de referência não está fixada e a física portanto não depende de l .

2.5 Aproximação Semi-Clássica e o Efeito Aharonov-Bohm

Foi mostrado na teoria usual da RS [28] que a expanssão semiclássica para a intensidade de radiação pode ser feita em termos de pequenos parâmetros ν/n , usando (C.22) para isso. Assim, no caso $\mu \neq 0$ nós usamos parâmetros similares, $\bar{\nu}/n$, para obter uma decomposição semiclássica. Conseqüentemente chegamos à seguinte forma para a intensidade clássica:

$$W_j^{cl} = \frac{e^4 H^2 (1 - \beta_j^2)}{m_0^2 c^3} \sum_{v,j'} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \bar{\nu}^2 Q_{jj'}^{cl} |F^{cl}|^2 \quad (2.45)$$

onde as quantidades clássicas tem a forma

$$\begin{aligned} F^{cl} &= l_\sigma \beta_j J'_{jj'}(z) + l_\pi \cot \theta J_{jj'}(z), \\ J_{11} &= J_{22} = J_{12} = J_{\bar{\nu}}(z), \\ J_{21} &= J_{-\bar{\nu}}(z), \quad z = \bar{\nu} \beta_j \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$Q_{jj'}^{cl} = \frac{1}{2} + (-1)^{j+j'} \int_z^\infty (2-j) J_{l-\bar{\nu}+1}(y) J_{l-\bar{\nu}}(y) + (j-1) J_{|l|+\bar{\nu}}(y) J_{|l|+\bar{\nu}+1}(y) dy. \quad (2.47)$$

onde $J_s(y)$ é a função de Bessel. As componentes $Q_{jj'}^{cl}$ têm a seguinte forma

$$\begin{aligned} Q_{11}^{cl} &= \begin{cases} 1 - \int_0^z J_{l-\nu+1}(y) J_{l-\nu}(y) dy, & l \geq \nu, \\ \int_0^z J_{\nu-l-1}(y) J_{\nu-l}(y) dy & l < \nu, \end{cases} \\ Q_{12}^{cl} &= \begin{cases} \int_0^z J_{l-\nu+1-\mu}(y) J_{l-\nu-\mu}(y) dy, & l \geq \nu, \\ \frac{1}{2} - \int_z^\infty J_{l-\nu+1-\mu}(y) J_{l-\nu-\mu}(y) dy & l < \nu, \end{cases} \\ Q_{21}^{cl} &= \int_0^z J_{|l|+\nu-\mu}(y) J_{|l|+\nu-1-\mu}(y) dy, \\ Q_{22}^{cl} &= 1 - \int_0^z J_{|l|+\nu}(y) J_{|l|+\nu-1}(y) dy, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Quando $\mu = 0$ a quantidade $|F^{cl}|^2$ não depende de j' , e $\sum_{j'=1,2} Q_{jj'}^{cl} = 1$. Então obtemos a partir de (2.45) a expressão clássica bem conhecida [28] para a distribuição do espectro angular da RS.

As expressões semiclássicas (2.48) dependem essencialmente do número quântico azimutal inicial l toda vez que $\mu \neq 0$. Levando em consideração (1.47), podemos expressar l em termos de uma quantidade clássica pura $R^2 - R_0^2$. Se fixamos $R^2 - R_0^2$ então quando $\hbar \rightarrow 0$ obtemos que $|l| \sim 1/\hbar \rightarrow \infty$, logo, segue de (2.48) que

$$Q_{jj'}^{cl} = \delta_{jj'}. \quad (2.49)$$

Este resultado é natural. Na teoria clássica da radiação as trajetórias das partículas são fixadas, não existe uma ação de reação dos fótons emitidos, e não são considerados as transições com uma mudança dos estados iniciais.

3. Distribuição Angular na Teoria Clássica da Radiação Síncrotron

Ao estudar a influência do efeito Aharonov-Bohm na RS, $\mu \neq 0$, vimos a necessidade de realizar um cálculo numérico detalhado com o objetivo de entender melhor a distribuição angular desta RS. Para este fim começamos com a aproximação $\mu = 0$. Ao calcular a distribuição angular da RS usual e ter em mente o trabalho [42], onde foi descoberto que: no caso em que o fator relativístico, $\beta = v/c$, é pequeno tanto o máximo do espectro das componentes σ e π da polarização linear quanto a soma total de espectros da RS localizam-se na primeira harmônica $\nu = 1$, mas, a medida que o fator relativístico β aumenta esses máximos deslocam-se na região dos grandes ν 's, descobrimos que existiam “anomalias” perto do plano da órbita e fizemos um estudo detalhado da distribuição angular da potência total de radiação e das potências espectrais de radiação.

3.1 Introdução

Consideramos que a carga do elétron se move pela circunferência de raio R , posicionada na superfície $z = 0$, com a velocidade constante em módulo $v = c\beta$ ($0 < \beta = v/c < 1$), onde c é a velocidade da luz. Se esse movimento se realiza com ajuda do campo

magnético H então teremos o seguinte vínculo

$$\begin{aligned} R &= \frac{\beta m_0 c^2}{eH \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta E}{eH} = \frac{m_0 c^2}{eH} \sqrt{\gamma^2 - 1}, \\ \gamma &= (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{E}{m_0 c^2}, \quad \gamma > 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde m_0 é a massa de repouso do elétron, E é a sua energia total e γ é o fator relativístico. A frequência de rotação do elétron ω_0 está relacionada com seu raio de rotação ou com o campo magnético através da relação

$$\omega_0 = \frac{c\beta}{R} = \frac{ceH}{E} = \frac{eH}{cm_0\gamma}. \quad (3.2)$$

3.2 Distribuição Espectral

A distribuição espectral (integrada nos ângulos) da potência da RS de uma carga de magnitude e , representada na forma de soma dos componentes da polarização linear “ σ ” e “ π ”, pode ser escrita na seguinte forma [38, 39, 40]

$$\begin{aligned} W &= \frac{2ce^2}{R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu, \beta), \quad f(\nu, \beta) = f_{\sigma}(\nu, \beta) + f_{\pi}(\nu, \beta), \\ f_{\sigma}(\nu, \beta) &= \nu\beta^2 \left[\beta J'_{2\nu}(2\nu\beta) + \nu\beta^2 \int_0^1 J_{2\nu}(2\nu\beta x) dx - \nu \int_0^1 \frac{J_{2\nu}(2\nu\beta x)}{x} dx \right], \\ f_{\pi}(\nu, \beta) &= (\nu\beta)^2 \left[\int_0^1 \frac{J_{2\nu}(2\nu\beta x)}{x} dx - \int_0^1 J_{2\nu}(2\nu\beta x) dx \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $J_{\alpha}(x)$, $J'_{\alpha}(x)$ são as funções de Bessel e suas derivadas, ν é o número de harmônicas irradiadas ao observar cada frequência separadamente e ν , c , R , β foram definidas em (3.1). A frequência de radiação ω da harmônica ν tem a seguinte forma

$$\omega = \nu\omega_0, \quad (3.4)$$

onde ω_0 tem a forma (3.2). Vemos a partir de (3.3) que as propriedades da radiação são determinadas inteiramente pela função uniforme $f(\nu, \beta)$ em relação a ν e β .

A potência de radiação total (somada em ν)

$$\begin{aligned} W &= \frac{2ce^2}{3R^2} \frac{\beta^4}{(1-\beta^2)^2} (I_\sigma + I_\pi), \\ I_\sigma &= \frac{6+\beta^2}{8}, \\ I_\pi &= \frac{2-\beta^2}{8}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

crece sem limite quando a energia cresce ilimitadamente ($\beta \rightarrow 1$). No entanto vemos a partir de (3.3) que

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} f_{\sigma,\pi}(\nu, \beta) = f_{\sigma,\pi}(\nu, 1) = f_{\sigma,\pi}(\nu) \quad (3.6)$$

é uma magnitude finita. Isto significa que quando a energia da partícula aumenta, a potência de radiação, para uma harmônica fixa ν , se aproxima a um limite finito. De (3.4) segue também que a frequência ω_0 cresce de uma maneira uniforme e aproxima-se ao limite $\omega_0^c = \frac{c}{R}$ (frequência crítica). Por tanto, quando ν é fixo e β aumenta a frequência da radiação é limitada pela magnitude $\omega^c = \nu\omega_0^c$.

Assim, se a observação da radiação é feita através de um aparelho que permite um intervalo de espectro determinado, então podemos afirmar que com o aumento de β o aparelho registrará uma parte da potência de radiação que permanecerá finita.

Uma pequena análise mostra-nos que as funções $f_{\sigma,\pi}(\nu, \beta)$ e $f(\nu, \beta)$ são limitadas quando ν é fixo e quando β aumenta, além do mais elas são côncavas para baixo (isto é a segunda derivada em β é positiva no semi-intervalo $0 < \beta \leq 1$)

$$0 \leq f_{\sigma,\pi}(\nu, \beta) \leq f_{\sigma,\pi}(\nu), \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (3.7)$$

Os valores das funções $f_{\sigma,\pi}(\nu, \beta)$, para as harmônicas $\nu = 1, 2$ são mostrados nas tabelas 1 e 2. Nas últimas colunas dessas tabelas são mostradas as magnitudes

$$I_\sigma(\nu, \beta) = f_\sigma(\nu, \beta) / f(\nu, \beta) \quad (3.8)$$

que caracterizam o grau da radiação de polarização (a contribuição da componente σ na radiação). Da fórmula (3.5) segue o resultado conhecido para a radiação total

$$I_{\sigma} = (6 + \beta^2) / 8 \quad (3.9)$$

o qual mostra que o grau de polarização para a radiação total cresce uniformemente a partir de $3/4$ ($\beta = 0$) até o valor ultra-relativístico máximo $7/8$ ($\beta = 1$). No entanto, vemos das tabelas 1 – 2 um resultado não esperado e interessante. Para um ν fixo o grau de polarização da radiação é máxima quando $\beta = 0$ e decresce quando β aumenta. Vemos ainda que, para um β fixo o grau de polarização cresce quando ν aumenta.

Em forma geral são também determinadas as mesmas leis para o grau de polarização $I_{\sigma}(\nu, \beta)$ das outras harmônicas, considerando ainda a seguinte relação

$$\frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} = I_{\sigma}(\nu, 0) \geq I_{\sigma}(\nu, \beta) \geq I_{\sigma}(\nu, 1), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (3.10)$$

Calculamos $I_{\sigma}(\nu, 1)$ (crescimento uniforme em relação a ν) para os valores extremos

$$0.6629 \approx I_{\sigma}(1, 1) \leq I_{\sigma}(\nu, 1) \leq I_{\sigma}(\infty, 1) = 3/4 \quad (3.11)$$

onde o valor da função $I_{\sigma}(\infty, 1) = 3/4$ foi obtida da seguintes fórmulas assintóticas (para grandes $\nu's$)

$$\begin{aligned} f_{\sigma}^{as}(\nu, 1) &= 3f_{\pi}^{as}(\nu, 1), \\ f_{\pi}^{as}(\nu, 1) &= \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{8\pi}\nu^{1/3}, \quad \nu \gg 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Na tabela 3 são mostrados os valores numéricos de $f_{\sigma, \pi}(\nu, 1)$, os quais foram também calculados com ajuda das fórmulas assintóticas, o que nos permite confiar sobre o grau de exatidão da fórmula (3.12).

A análise numérica permite-nos também resolver o seguinte problema. Era conhecido que para β pequenos o máximo no espectro da RS aparece na primeira harmônica ($\nu = 1$), mas quando β aumenta o máximo desloca-se na região dos grandes $\nu's$, e no

caso que $\beta \rightarrow 1$ o máximo no espectro das componentes σ e π e da potência total aparecerá na harmônica

$$\begin{aligned} \nu_{\max} &= a\gamma^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, & a &= 0.4287, \\ a_{\sigma} &= 0.5032, & a_{\pi} &= 0.2158. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Daqui se deduz que existe um ponto $\beta = \beta^{(1)}$ no qual o máximo desloca-se da primeira para a segunda harmônica, no ponto $\beta = \beta^{(2)}$ o máximo desloca-se da segunda para a terceira harmônica e assim sucessivamente. Quando β encontra-se no intervalo $\beta^{(n)} < \beta < \beta^{(n+1)}$ o máximo da radiação aparece na harmônica número $n + 1$. Para as componentes σ e π podem ser realizados deduções análogas. Aqui pela primeira vez são calculadas os pontos $\beta^{(n)}$ e são calculados na tabela 4. Aqui são mostrados os valores de $f_{\sigma,\pi}(\nu, \beta)$ nos pontos $\beta = \beta_{\sigma,\pi}^{(\nu)}$. Especialmente distinguimos os grandes valores $\beta^{(1)}$. A tabela 4 é limitada na harmônica $\nu = 12$. Para os grandes ν 's a fórmula (3.13) nos dá $\beta^{(\nu)}$ até três cifras.

Tabela I: Notação 1,561-6 é igual $1,561 \cdot 10^{-6}$

β	$f_{\sigma}(1, \beta)$	$f_{\pi}(1, \beta)$	$f(1, \beta)$	$I_{\sigma}(1, \beta)$
0,05	1,561-6	5,207-7	2,081-6	0,7498
0,10	2,488-5	8,325-6	3,321-5	0,7492
0,15	1,251-4	4,209-5	1,672-4	0,7483
0,20	3,921-4	1,328-4	5,249-4	0,7470
0,25	9,464-4	3,235-4	1,270-3	0,7453
0,30	1,936-3	6,690-4	2,205-3	0,7432
0,35	3,527-3	1,235-3	4,763-3	0,7406
0,40	5,905-3	2,100-3	8,004-3	0,7377
0,45	9,256-3	3,349-3	1,260-2	0,7343
0,50	1,377-2	5,080-3	1,885-2	0,7305

Tabela I ... continua

Tabela I: Notação 1,561-6 é igual 1, 561.10⁻⁶

β	$f_{\sigma}(1,\beta)$	$f_{\pi}(1,\beta)$	$f(1,\beta)$	$I_{\sigma}(1,\beta)$
0,55	1,963-2	7,399-3	2,702-2	0,7262
0,60	2,699-2	1,042-2	3,741-2	0,7214
0,65	3,599-2	1,426-2	5,025-2	0,7162
0,70	4,673-2	1,906-2	6,579-2	0,7104
0,75	5,930-2	2,493-2	8,423-2	0,7040
0,80	7,369-2	3,203-2	1,057-1	0,6970
0,85	8,990-2	4,049-2	1,304-1	0,6895
0,90	1,080-1	5,045-2	1,583-1	0,6813
0,95	1,274-1	6,207-2	1,895-1	0,6724
1,00	1,487-1	7,548-2	2,231-1	0,6629

Tabela 2: Notação 1,039-8 é igual 1, 039.10⁻⁸

β	$f_{\sigma}(2,\beta)$	$f_{\pi}(2,\beta)$	$f(2,\beta)$	$I_{\sigma}(2,\beta)$
0,05	1,039-8	2,081-9	1,247-8	0,8331
0,10	6,596-7	1,328-7	7,924-7	0,8324
0,15	7,413-6	1,506-6	8,919-6	0,8312
0,20	4,088-5	8,404-6	4,908-5	0,8295
0,25	1,522-4	3,179-5	1,840-4	0,8272
0,30	4,412-4	9,393-5	5,351-4	0,8245
0,35	1,074-3	2,339-4	1,308-3	0,8211
0,40	2,297-3	5,139-4	2,811-3	0,8172
0,45	4,443-3	1,025-3	5,468-3	0,8125
0,50	7,931-3	1,894-3	9,825-3	0,8072

Tabela 2 ... continua

Tabela 2: Notação 1,039-8 é igual 1, 039.10⁻⁸

β	$f_{\sigma}(2, \beta)$	$f_{\pi}(2, \beta)$	$f(2, \beta)$	$I_{\sigma}(2, \beta)$
0,55	1,325-2	3,290-3	1,654-2	0,8011
0,60	2,092-2	5,425-3	2,635-2	0,7941
0,65	3,148-2	8,564-3	4,005-2	0,7862
0,70	4,542-2	1,302-2	5,844-2	0,7772
0,75	6,310-2	1,916-2	8,227-2	0,7670
0,80	8,475-2	2,741-2	1,122-1	0,7556
0,85	1,104-1	3,823-2	1,486-1	0,7427
0,90	1,397-1	5,211-2	1,918-1	0,7282
0,95	1,721-1	6,961-2	2,417-1	0,7120
1,00	2,068-1	9,129-2	2,981-1	0,6938

Tabela 3

ν	$f_{\sigma}(\nu, 1)$	$f_{\sigma}^{ass}(\nu, 1)$	$f_{\pi}(\nu, 1)$	$f_{\pi}^{ass}(\nu, 1)$
1	0,1484	0,1941	0,0755	0,0647
3	0,2466	0,2800	0,1022	0,0933
6	0,3260	0,3528	0,1448	0,1176
9	0,3804	0,4038	0,1409	0,1346
15	0,4590	0,4788	0,1650	0,1596
21	0,5179	0,5355	0,1833	0,1785
30	0,5875	0,6033	0,2053	0,2021
36	0,6262	0,6411	0,2177	0,2137
45	0,6767	0,6903	0,2339	0,2301
60	0,7475	0,7599	0,2567	0,2533
200	1,1268	1,1352	0,3807	0,3784
350	1,3615	1,3680	0,4579	0,4560

Tabela 4

ν	$\beta^{(\nu)}$	$\beta_{\sigma}^{(\nu)}$	$\beta_{\pi}^{(\nu)}$	$f(\nu, \beta^{(\nu)})$	$f_{\sigma}(\nu, \beta_{\sigma}^{(\nu)})$	$f_{\pi}(\nu, \beta_{\pi}^{(\nu)})$
1	0,764	0,715	0,882	0,0897	0,0503	0,04658
2	0,837	0,806	0,918	0,1383	0,0875	0,05773
3	0,871	0,848	0,973	0,1751	0,1149	0,06470
4	0,892	0,874	0,943	0,2008	0,1386	0,07006
5	0,906	0,890	0,949	0,2244	0,1569	0,07454
6	0,916	0,903	0,954	0,2246	0,1744	0,07850
7	0,924	0,913	0,958	0,2628	0,1894	0,08201
8	0,930	0,919	0,961	0,2791	0,2021	0,08525
9	0,9356	0,925	0,963	0,2941	0,2143	0,08826
10	0,940	0,930	0,965	0,3101	0,2244	0,09030
12	0,948	0,937	0,968	0,3386	0,2433	0,09463

A potência de radiação total W (3.3), considerando a polarização de radiação, pode ser também representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 W_i &= W_0 \Phi_i(\beta), \\
 W_0 &= \frac{ec^2 \beta^4}{R^2} = \frac{e^4 H^2 \beta^2 (1 - \beta^2)}{m_0^2 c^3}, \\
 \Phi_i(\beta) &= \int_0^\pi F_i(\beta, \theta) \sin \theta d\theta, \\
 F_i(\beta, \theta) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} f_i(\nu, \beta; \theta),
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $i = -1, 1, 2, 3, 0$ corresponde a polarização de radiação circular esquerda, circular direita, da componente σ , da componente π da polarização linear e por fim temos a da

polarização total

$$\begin{aligned} f_0(\nu, \beta; \theta) &= f_{-1}(\nu, \beta; \theta) + f_1(\nu, \beta; \theta) \\ &= f_2(\nu, \beta; \theta) + f_3(\nu, \beta; \theta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

As definições detalhadas sobre as componentes de polarização são dados em [36, 37]. A função $f_i(\nu, \beta; \theta)$ descreve a distribuição angular espectral da potência irradiada e de acordo com a teoria clássica [36, 37] tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} f_{\pm 1}(\nu, \beta; \theta) &= \frac{\nu^2}{2} \left(J'_\nu(z) \pm \frac{\cos \theta}{\beta \sin \theta} J_\nu(z) \right)^2, \quad z = \nu \beta \sin \theta, \\ f_2(\nu, \beta; \theta) &= \nu^2 J_\nu'^2(z), \quad f_3(\nu, \beta; \theta) = \nu^2 \frac{\cos^2 \theta}{\beta^2 \sin^2 \theta} J_\nu^2(z). \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $J_\nu(z)$ é a função de Bessel com subscrito inteiro. São satisfeitas as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} f_k(\nu, \beta; \theta) &= f_k(\nu, \beta; \pi - \theta), \quad k = 0, 2, 3 \\ f_{-1}(\nu, \beta; \theta) &= f_1(\nu, \beta; \pi - \theta), \end{aligned} \quad (3.17)$$

as quais permitem-nos limitar o estudo do comportamento da função $f_k(\nu, \beta; \theta)$ somente no segmento $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 2, 3$) e de duas funções $f_{\pm}$ pode-se analisar somente uma delas (por exemplo f_1).

3.3 Algumas Características da Distribuição Angular da Potência Total da Radiação

As expressões analíticas exatas para a função $F_k(\beta, \theta)$

($k = 0, 2, 3$) são

$$F_2(\beta, \theta) = \frac{7 - 3\varepsilon}{16\varepsilon^{5/2}}, \quad \varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta, \quad \frac{1}{\gamma^2} \leq \varepsilon < 1,$$

$$\begin{aligned} F_3(\beta, \theta) &= \frac{(\gamma^2 \varepsilon - 1)(5 - \varepsilon)}{16(\gamma^2 - 1)\varepsilon^{7/2}}, \\ F_0(\beta, \theta) &= \frac{(3 - 4\gamma^2)\varepsilon^2 + 6(2\gamma^2 - 1)\varepsilon - 5}{16(\gamma^2 - 1)\varepsilon^{7/2}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para as funções $F_{\pm 1}$ temos

$$\begin{aligned} F_{\pm 1}(\beta, \theta) &= \frac{1}{2}F_0(\beta, \theta) \pm \Psi(\beta \sin \theta) \cos \theta, \\ \Psi(x) &= \frac{1}{x} \sum_{v=1}^{\infty} v^2 J_v(vx) J'_v(vx) = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \sum_{v=1}^{\infty} v J_v^2(vx) \end{aligned} \quad (3.19)$$

A expressão analítica fechada para a função $\Psi(x)$ até agora não tem sido encontrada.

Analisando cada $F_i(\beta, \theta)$, para cada β fixo, como uma função de θ encontramos que o ponto $\theta = 0$ é sempre um extremo para cada uma delas. O valor destas funções (quando $\theta = 0$):

$$F_{-1}(\beta, 0) = 0, \quad 2F_0 = 2F_1(\beta, 0) = 4F_2(\beta, 0) = 4F_3(\beta, 0) = 1 \quad (3.20)$$

são independentes de β (Ou seja da energia da partícula). O ponto $\theta = \frac{\pi}{2}$ é também um extremo da função F_k ($k = 0, 2, 3$) mas não é para as funções $F_{\pm 1}$:

$$\begin{aligned} F_0\left(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}\right) &= F_2\left(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16}\gamma^3(7\gamma^2 - 3), \\ F_3\left(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da mesma maneira o ponto $\theta = \frac{\pi}{2}$ é um mínimo absoluto para a função F_3 . $F_2(\beta, \theta)$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ cresce continuamente em relação a θ para qualquer β ; o ponto $\theta = 0$ é um mínimo absoluto e $\theta = \frac{\pi}{2}$ é um máximo absoluto. O valor máximo de F_2 cresce proporcional a E^5 quando E , cresce.

As funções $F_0(\beta, \theta)$ e $F_1(\beta, \theta)$ decrescem monotonamente (F_0 no intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; F_1 no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$) em relação a θ quando

$$\gamma \leq \gamma_0^{(1)}, \quad (\beta \leq \beta_0^{(1)});$$

$$\gamma_0^{(1)} = \sqrt{\frac{7}{6}} \approx 1.0801, \quad \beta_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.3379. \quad (3.22)$$

Dessa maneira, o máximo absoluto destas funções é atingido quando $\theta = 0$. A função F_0 tem o mínimo absoluto quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, a função F_1 alcança o mínimo absoluto quando $\theta = \pi$, anulando-se neste ponto. Se

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(1)} &< \gamma < \gamma_0^{(2)}, & (\beta_0^{(1)} < \beta < \beta_0^{(2)}), \\ \gamma_0^{(2)} &= \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{5} \approx 1.1949, \\ \beta_0^{(2)} &= \left(\frac{2}{3} (\sqrt{6} - 2) \right)^{\frac{1}{2}} = 0.5474, \end{aligned} \quad (3.23)$$

então a função F_0 tem mínimo nos pontos $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ e o máximo é alcançado no ponto $\theta = \theta_0(\beta)$ ($0 < \theta_0(\beta) < \frac{\pi}{2}$)

$$\sin^2 \theta_0(\beta) = \frac{6\gamma^2(1 - 3\gamma^2) + 2\gamma^2\sqrt{15(15\gamma^4 - 22\gamma^2 + 9)}}{3(4\gamma^2 - 3)(\gamma^2 - 1)}. \quad (3.24)$$

Por fim, se

$$\gamma_0^{(2)} < \gamma, \quad (\beta_0^{(2)} < \beta < 1), \quad (3.25)$$

então a função $F_0(\beta, \theta)$ tem o máximo absoluto no ponto ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Por tanto, denominando como $\theta_0^m(\beta)$ o ponto da função máxima F_0 , encontraremos

$$\theta_0^m(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_0^{(1)}; \\ \theta_0(\beta), & \beta_0^{(1)} < \beta < \beta_0^{(2)}; \\ \frac{\pi}{2}, & \beta_0^{(2)} < \beta < 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

O gráfico da função $\theta_0^m(\beta)$ (na região onde β tem a mudança mais importante) é representado na figura 3.1 :

No caso da polarização circular direita a função F_1 alcança o seu valor máximo quando $1 > \beta > \beta_0^{(1)}$ no ponto $\theta = \theta_1(\beta)$ ($0 < \theta_1(\beta) < \frac{\pi}{2}$). Desta maneira, representando o ponto máximo da função F_1 como $\theta_1^{(m)}(\beta)$, encontraremos que

$$\theta_1^{(m)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_0^{(1)}; \\ \theta_1(\beta), & \beta_0^{(1)} < \beta < 1. \end{cases}$$

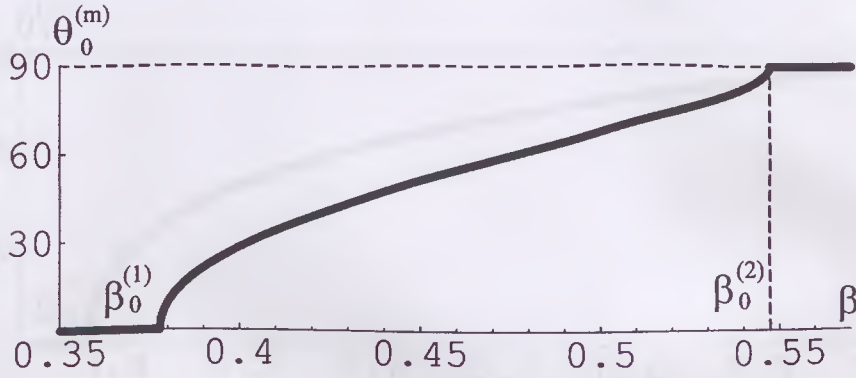


Figura 3.1: $\theta_0^{(m)}(\beta)$.

A expressão analítica (analogamente a (3.24)) para a função $\theta_1(\beta)$ ainda não foi possível obter.

Pode-se mostrar que no intervalo $\beta_0^{(1)} \leq \beta \leq 1$ a função $\theta_1(\beta)$ é uma função que cresce monotonamente e quando $\beta \rightarrow 1$ existe a seguinte aproximação

$$\theta_1(\beta) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1}{\gamma} \quad (3.27)$$

onde o número α_1 é a raiz da equação

$$5\pi\alpha_1(5 + 12\alpha_1^2)\sqrt{3} + 64(5\alpha_1^2 - 1)\sqrt{1 + \alpha_1^2} = 0, \quad \alpha_1 \approx 0.2672. \quad (3.28)$$

O gráfico da função $\theta_1^{(m)}(\beta)$ na região mais importante é mostrado na figura 2.

Finalmente, a função F_3 (no intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) é uma função que decai monotonamente quando

$$\gamma \leq \gamma_3, \quad (\beta \leq \beta_3), \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{15}{11}} \approx 1.1678, \quad \beta_3 = \frac{2}{\sqrt{15}} \approx 0.5164, \quad (3.29)$$

e ela possui um máximo absoluto no ponto $\theta = 0$.

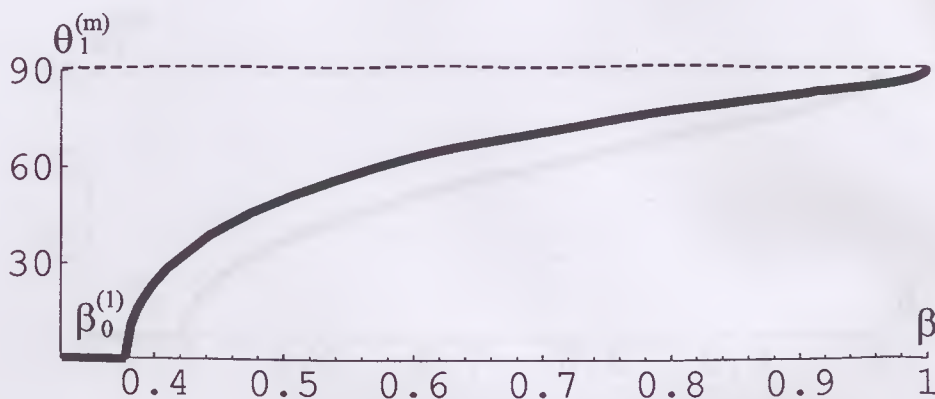


Figura 3.2: $\theta_1^{(m)}(\beta)$.

No caso quando

$$\gamma > \gamma_3, \quad (1 > \beta > \beta_3), \quad (3.30)$$

o ponto $\theta = 0$ será o mínimo da função F_3 e seu máximo será alcançado quando $\theta = \theta_3(\beta)$

$$\sin^2 \theta_3(\beta) = \frac{\sqrt{5(125\gamma^4 - 34\gamma^2 + 5)} - 19\gamma^2 - 5}{6(\gamma^2 - 1)}, \quad 0 < \theta_3(\beta) < \frac{\pi}{2}. \quad (3.31)$$

Desta maneira o ponto máximo da função F_3 é $\theta_3^{(m)}(\beta)$

$$\theta_3^{(m)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_3; \\ \theta_3(\beta), & \beta_3 < \beta < 1; \end{cases} \quad (3.32)$$

Quando $\beta \rightarrow 1$ teremos a expressão aproximada

$$\theta_3^{(m)} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{5}}. \quad (3.33)$$

O gráfico da função $\theta_3^{(m)}(\beta)$ é representado na figura 3.3

Na literatura muitas vezes se menciono [38, 40, 42, 43] que na aproximação não relativística ($\beta \sim 0$) grande parte da radiação se movimenta nas direções $\theta = 0, \pi$, e no

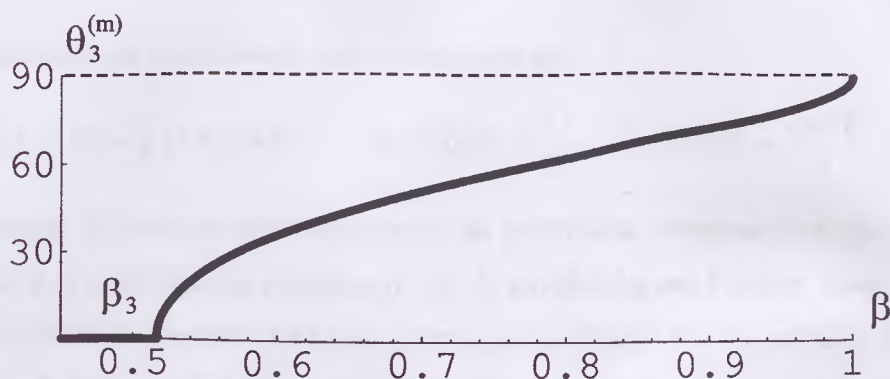


Figura 3.3: $\theta_3^{(m)}(\beta)$.

caso ultrarelativístico ($\beta \sim 1$) a parte principal da radiação está concentrada perto da superfície da órbita ($\theta \sim \pi$). Sem embargo o caráter detalhado da mudança de direção do máximo da radiação é aqui analisado pela primeira vez.

3.4 Características da Distribuição Angular da Radiação da Primeira Harmônica

A distribuição angular da radiação da primeira harmônica ($\nu = 1$) diferencia-se bastante da distribuição angular da radiação das outras harmônicas ($\nu \geq 2$). É conhecido [38, 42], que esta é a única harmônica que dá uma contribuição diferente de zero na radiação, nas direções $\theta = 0, \pi$, na aproximação não-relativística ($\beta \sim 0$), a radiação é máxima exatamente nestas direções.

De (3.16) obtemos

$$\begin{aligned} f_{\pm 1}(1, \beta; \theta) &= \frac{1}{2} \left(J'_\nu(x) \pm \frac{\cos \theta}{x} J_1(x) \right)^2, \quad x = \beta \sin \theta, \\ f_2(1, \beta; \theta) &= J_1'^2(x), \quad f_3(1, \beta; \theta) = \frac{\cos^2 \theta}{x} J_1^2(x). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Daqui obtemos, na aproximação não-relativística que

$$f_{\pm 1}(1, 0; \theta) = \frac{1}{8}(1 \pm \cos \theta)^2, \quad f_2(1, 0; \theta) = \frac{1}{4}, \quad f_3(1, 0; \theta) = \frac{\cos^2 \theta}{4}. \quad (3.35)$$

A distribuição da radiação da componente σ da polarização linear em geral não depende do ângulo θ , e o máximo na radiação f_0, f_2, f_3 são obtidos em $\theta = 0, \pi$. Uma pesquisa não muito difícil da equação (3.34) nos mostra que na direção $\theta = 0$ a radiação é máxima para $f_k(1, \beta; \theta)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) para qualquer β (do mesmo jeito e quando $\beta \rightarrow 1$). Ainda mais, se $\theta \neq 0, \pi$ então as funções $f_i(1, \beta; \theta)$ ($i = -1, 0, 1, 2, 3$), para cada θ fixo, são funções que decaem monotonamente em relação a β . Isso significa que com o aumento da energia do elétron (no caso ultra-relativístico) a distribuição da radiação na primeira harmônica “estica-se” na direção $\theta = 0, \pi$ e não acontece nenhuma concentração desta partícula na superfície da órbita (diferente do comportamento da potência irradiada sumada pelo espectro (3.18)). Quando $\beta \rightarrow 1$ a expressão (3.34) obtem um valor limite finito. Estas leis são mostradas na figura 3.4, onde são mostrados os gráficos da função $f_k(1, \beta, \theta)$ para os casos $\beta = 0, 1$.

3.5 Características da Distribuição Angular da Radiação das Harmônicas Superiores

Quando $\nu \geq 2$ todas as funções $f_i(\nu, \beta; \theta)$ (quando $\theta = 0, \pi$) se anulam e por conseguinte nestes pontos se alcança o mínimo absoluto. Usando a propriedade (3.17) da função $f_s(\nu, \beta; \theta)$, ($s = 0, 2, 3$) possui dois máximos simétricos, situados nos pontos

$$\theta_s^\nu(\beta) = \frac{\pi}{2} \pm \delta(\nu, \beta), \quad (s = 0, 2, 3).$$

O máximo da função $f_{\pm}(\nu, \beta; \theta)$ é conseguido nos pontos

$$\theta_{\pm 1}^\nu(\beta) = \frac{\pi}{2} \mp \delta_1(\nu, \beta). \quad (3.36)$$

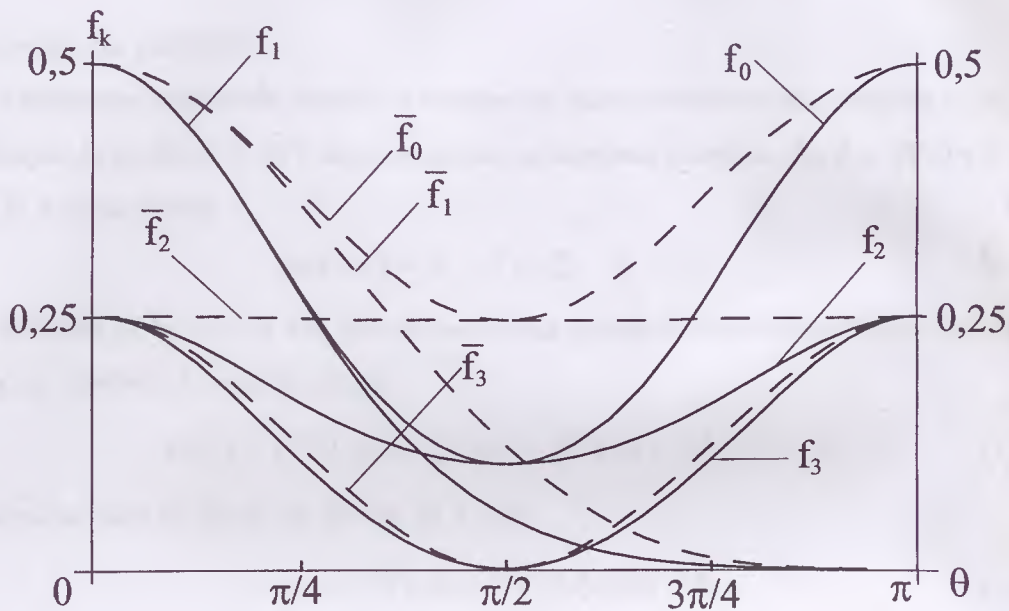


Figura 3.4: $\bar{f}_k$ —função $f_k(1, \beta; \theta)$ ($\beta = 0$); f_k —função $f_k(1, \beta; \theta)$ ($\beta = 1$).

Todas as funções $\delta_k(\nu, \beta)$, ($k = 0, 1, 2, 3$) é uma função que não cae com β quando fixamos ν e as funções que não crescem em relação a ν quando β é fixado ao mesmo tempo que

$$0 \leq \delta_k(\nu, \beta) < \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.37)$$

Quando $\beta \rightarrow 1$ todas as funções $\delta_k(\nu, \beta)$ se acercam a um valor finito

$$\delta_k(\nu, 1) = \delta_k^\nu < \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.38)$$

que são máximos para estas funções. Do mesmo jeito a radiação (qualquer polarização) de cada uma das harmônicas por separadas não mostra uma tendência a concentração da radiação na superfície da órbita quando se aumenta a energia da partícula; ao contrário a distribuição angular em uma frequência fixa se desconcentra em relação ao plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ e o máximo da distribuição angular afasta-se deste plano com o aumento

da energia da partícula.

Analisemos com mais detalhe o caráter do comportamento das funções $\delta_k(\nu, \beta)$. A função $\delta_n(\nu, \beta)$, $n = 0, 2$ comportam-se da seguinte maneira. Se $\beta < \beta_n^\nu$, ($\gamma < \gamma_n^\nu$) $n = 0, 2$ então temos

$$\delta_n(\nu, \beta) = 0, \quad \beta < \beta_n^\nu, \quad n = 0, 2. \quad (3.39)$$

As unidades β_n^ν ($n = 0, 2$) são determinados das equações transcendentais. As equações para β_0^ν possuem a seguinte forma

$$\nu\beta(1 - \beta^2) J_\nu(\nu\beta) J'_\nu(\nu\beta) - J_\nu^2(\nu\beta) - J_\nu'^2(\nu\beta) = 0. \quad (3.40)$$

A equação para β_2^ν pode ser escrita na forma

$$\nu(1 - \beta^2) J_\nu(\nu\beta) - \beta J'_\nu(\nu\beta) = 0. \quad (3.41)$$

Cada uma das equações (3.40), (3.41) possui infinitas raízes reais, mas somente uma das raízes de cada equação menor que 1 e ele determina a unidade β_n^ν . É válida a desigualdade

$$\beta_0^\nu < \beta_2^\nu, \quad (\gamma_0^\nu < \gamma_2^\nu), \quad (3.42)$$

e as fórmulas assintóticas (para ν grandes)

$$\gamma_0^\nu \approx \left(\frac{\nu}{a_0}\right)^{1/3}, \quad \gamma_2^\nu \approx \left(\frac{\nu}{a_2}\right)^{2/3}, \quad \nu \gg 1. \quad (3.43)$$

Aqui

$$a_0 = 3z_0 \approx 0,7332, \quad a_2 = \left(\frac{16\pi^3}{\Gamma^6(1/3)\sqrt{3}}\right)^{1/4} \approx 0,9382. \quad (3.44)$$

A magnitude z_0 é a raiz da equação transcendental

$$3z_0 K_{2/3}(z_0) - K_{1/3}(z_0) = 0, \quad z_0 \approx 0,2444, \quad (3.45)$$

onde $K_\mu(x)$ é a função Mc Donald. Se $\beta > \beta_0^\nu$, então a função $\delta_0(\nu, \beta)$ é definida pela solução da equação transcendental

$$\begin{aligned} & J_\nu(\nu\beta \cos \delta_0) J'_\nu(\nu\beta \cos \delta_0) [1 - \beta^2 + (1 - \beta^2) \sin^2 \delta_0] \nu\beta \cos \delta_0 \\ &= J_\nu^2(\nu\beta \cos \delta_0) + J_\nu'^2(\nu\beta \cos \delta_0) \beta^2 \cos^2 \delta_0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

É claro, que a equação (3.40) se obtm da equação (3.46) quando $\delta_0 = 0$. Quando $\beta > \beta_0^\nu$, a função $\delta_0(\nu, \beta)$ é uma função que cresce monotonamente em relação a β com ν fixo, e o valor máximo δ_0^ν da função $\delta_0(\nu, \beta)$, alcançado quando $\beta = 1$, é a solução da equação (3.46) quando $\beta = 1$. É válida a fórmula assintótica

$$\delta_0^\nu \approx \left(\frac{b_0}{\nu} \right)^{1/3}, \quad \nu \geq 1, \quad b_0 = 3p_0 \approx 0,3066, \quad (3.47)$$

onde p_0 é a raiz da equação transcendental

$$6p_0 K_{2/3}(p_0) - K_{1/3}(p_0) = 0, \quad p_0 \approx 0,1022. \quad (3.48)$$

A função $\delta_2(\nu, \beta)$, quando $\beta > \beta_2^\nu$ tem a seguinte forma

$$\delta_2(\nu, \beta) = \arccos(\beta_2^\nu/\beta), \quad 1 > \beta > \beta_2^\nu. \quad (3.49)$$

Daqui deduzimos que o valor máximo $\delta_2(\nu, \beta)$ é alcançado no ponto $\beta = 1$ e igual

$$\delta_2^\nu = \delta_2(\nu, 1) = \arccos \beta_2^\nu. \quad (3.50)$$

Para ν maiores temos, em relação com (3.43), a fórmula assintótica

$$\delta_2^\nu \approx 1/\gamma_2^\nu, \quad \nu \gg 1. \quad (3.51)$$

A função $\delta_1(\nu, \beta)$ e $\delta_3(\nu, \beta)$ se comportam do jeito original (inicial). A função $\delta_1(\nu, 1)$ se determina como a solução da equação transcendental

$$(\nu \sin \delta_1 - 1 - \nu \beta^2 \sin \delta_1 \cos^2 \delta_1) J_\nu(\nu \beta \cos \delta_1) = J'_\nu(\nu \beta \cos \delta_1) \beta (1 - \nu \sin \delta_1) \sin \delta_1 \cos \delta_1, \quad (3.52)$$

a função $\delta_3(\nu, \beta)$ satisfaz a equação

$$J'_\nu(\nu \beta \cos \delta_3) \nu \beta \sin^2 \delta_3 \cos \delta_3 = J_\nu(\nu \beta \cos \delta_3). \quad (3.53)$$

Para cada ν fixo esta função quando $0 \leq \beta \leq 1$ são funções de β limitadas e que crescem monotonamente.

$$\begin{aligned} \arcsin(1/\nu) &= \delta_1(\nu, 0) \leq \delta_1(\nu, \beta) \leq \delta_1^\nu = \delta_1(\nu, 1), \\ \arcsin(1/\sqrt{\nu}) &= \delta_3(\nu, 0) \leq \delta_3(\nu, \beta) \leq \delta_3^\nu = \delta_3(\nu, 1). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para cada β fixo estas funções caem monotonamente quando ν cresce. É válida a desigualdade

$$\delta_1(\nu,\beta) < \delta_3(\nu,\beta), \tag{3.55}$$

e as fórmulas assintóticas (para grandes ν)

$$\delta_1^\nu \approx \left(\frac{b_1}{\nu}\right)^{1/3}, \quad b_1 \approx 0.3933, \quad \delta_3^\nu \approx \left(\frac{a_0}{\nu}\right)^{1/3}, \quad \nu \gg 1 \tag{3.56}$$

onde a_0 se determina em (3.44), e $b_1 = 3p_1$, onde p_1 é a raiz da equação transcendental

$$(3p_1 - 1) K_{1/3}(p_1) + 3p_1 K_{2/3}(p_1) = 0, \quad p_1 \approx 0,13114 \tag{3.57}$$

É válida a seguinte desigualdade

$$\delta_3(\nu,\beta) > \delta_1(\nu,\beta) > \delta_0(\nu,\beta) \geq \delta_2(\nu,\beta). \tag{3.58}$$

O valor de γ_0^ν e γ_2^ν e os valores limites δ_ν^k (em graus), para alguns ν , são mostrados na seguinte tabela:

ν	2	3	4	5	6	7	10	15	20	25
γ_0^ν	1.00	1.22	1.40	1.54	1.67	1.79	2.08	2.46	2.75	3.00
γ_2^ν	1.59	2.10	2.55	2.97	3.36	3.73	4.75	6.25	7.59	8.82
δ_0^ν	45.50	36.22	31.29	28.11	25.84	24.10	20.66	17.48	15.59	14.30
δ_1^ν	45.88	36.83	32.02	28.91	26.68	24.98	21.57	18.39	16.48	15.16
δ_2^ν	38.84	28.44	23.06	19.67	17.30	15.54	12.14	9.20	7.57	6.51
δ_3^ν	49.83	41.09	36.29	33.11	30.80	29.00	25.34	21.83	19.69	18.19
ν	30	35	40	45	50	100	200	300	400	500
γ_0^ν	3.21	3.40	3.58	3.74	3.88	4.98	6.35	7.31	8.07	8.70
γ_2^ν	9.98	11.07	12.10	13.10	14.06	22.38	35.58	46.66	56.54	65.63
δ_0^ν	12.34	12.59	11.98	11.47	11.03	8.60	6.74	5.86	5.31	4.92
δ_1^ν	14.18	13.41	12.77	12.24	11.79	9.24	7.28	6.34	5.75	5.33
δ_2^ν	5.75	5.18	4.74	4.38	4.08	2.56	1.61	1.23	1.01	0.87
δ_3^ν	17.06	16.16	15.43	14.81	14.28	11.26	8.90	7.76	7.04	6.53

Na figura 5 são construídos os gráficos das funções $\delta_k(\nu, \beta)$ (as funções δ_k estão em graus).

Na figura 6 são mostradas os gráficos das funções $f_k(\nu, \beta; \theta)$ para $\beta = 1$ e $\nu = 1 - 5, 10$.

No trabalho [42] foram encontradas os valores exatos $\beta = \beta(\nu)$, sobre os quais o máximo na radiação total (integrado pelos ângulos) pulam da harmônica ν na harmônica $\nu + 1$. A comparação destes resultados com as contas realizadas aqui nos mostra que, a função $\delta_0(\nu, \beta)$ para ν , no qual alcança o máximo na radiação total diferente de zero. A função $\delta_2(\nu, \beta)$ para ν , no qual o máximo na radiação da componente σ , é igual a zero.

Os gráficos da função $\delta_k(\nu, \beta)$, ($k = 0, 1, 2, 3$) para $\nu = 1 - 10, 50$ são mostrados a continuação e as funções $f_k(\nu, 1; \theta)$, $k = 0, 1, 2, 3$ para as harmônicas $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$

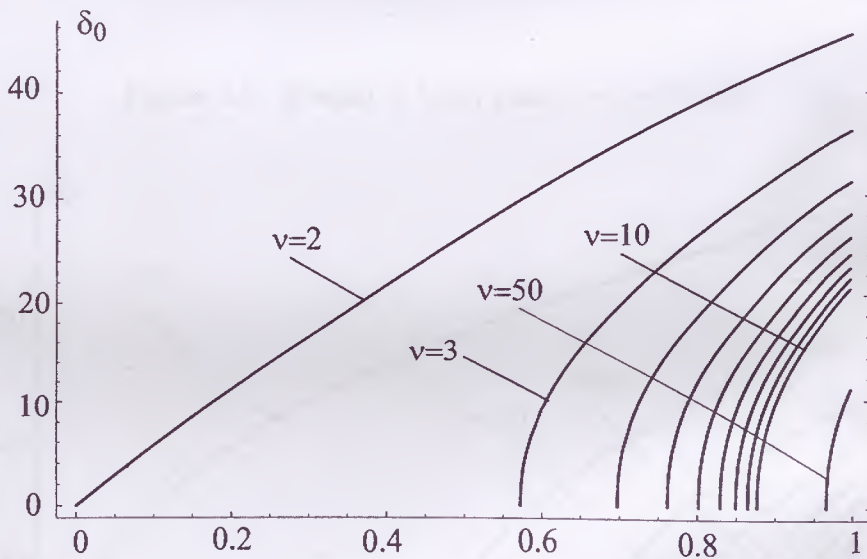


Figura 3.5: função $\delta_0(\nu, \beta)$ para $\nu = 1 - 10, 50$.

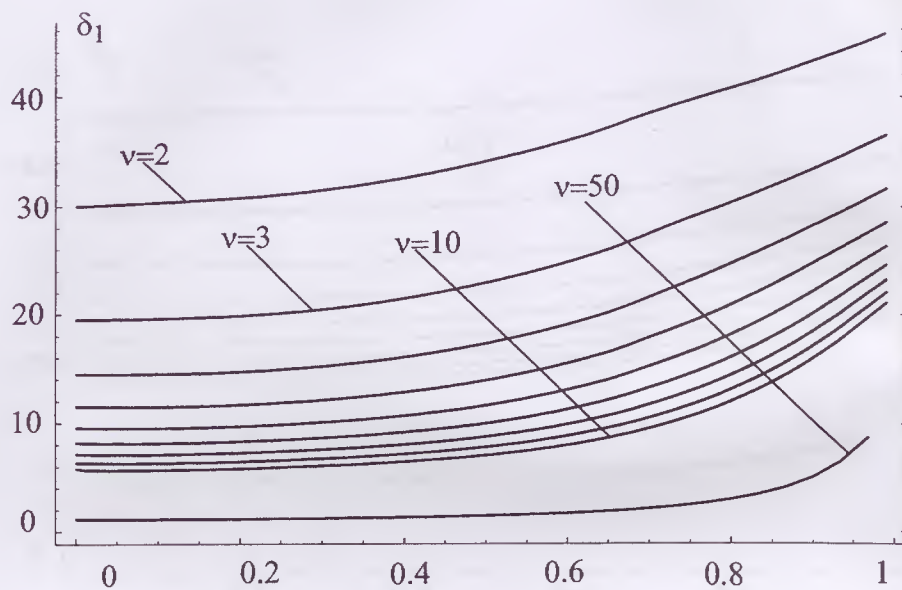


Figura 3.6: função $\delta_1(\nu, \beta)$ para $\nu = 1 - 10, 50$.

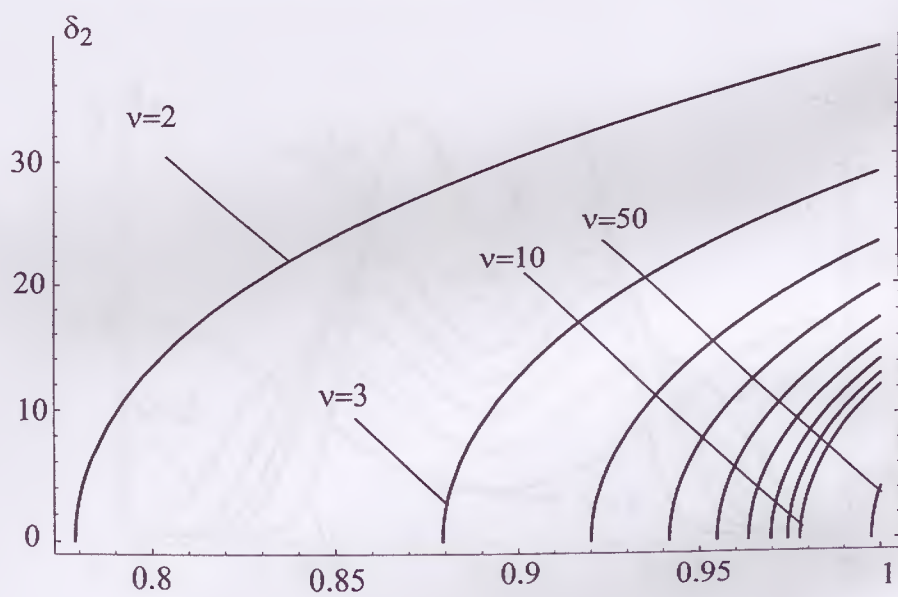


Figura 3.7: função $\delta_2(\nu, \beta)$ para $\nu = 1 - 10, 50$.

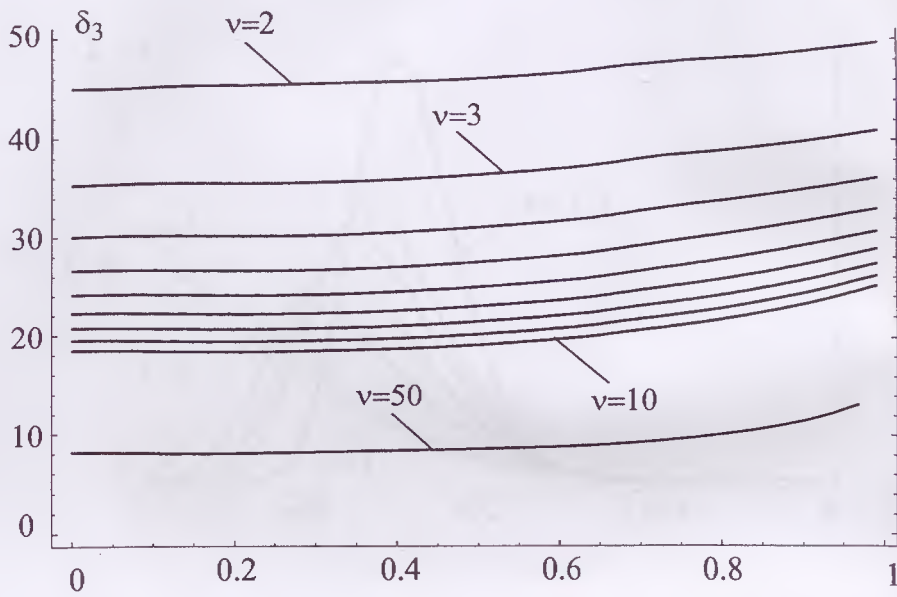


Figura 3.8: função $\delta_3(\nu, \beta)$ para $\nu = 1 - 10, 50$.

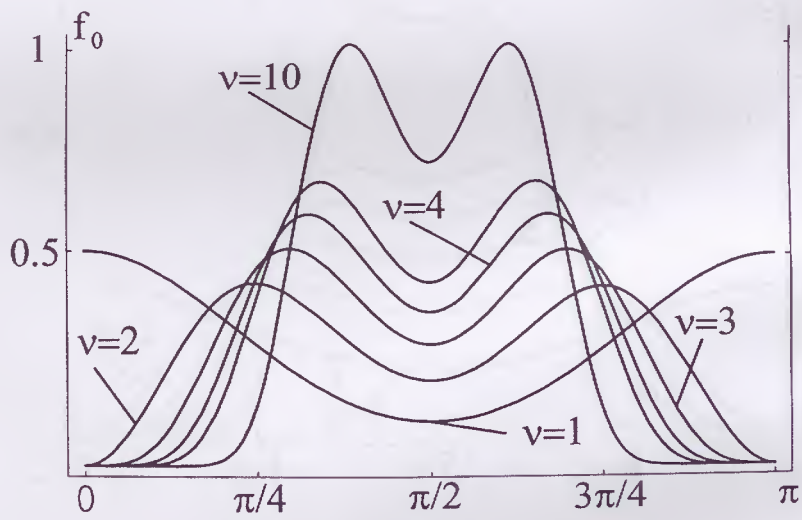


Figura 3.9: Função $f_0(\nu, 1; \theta)$ para $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

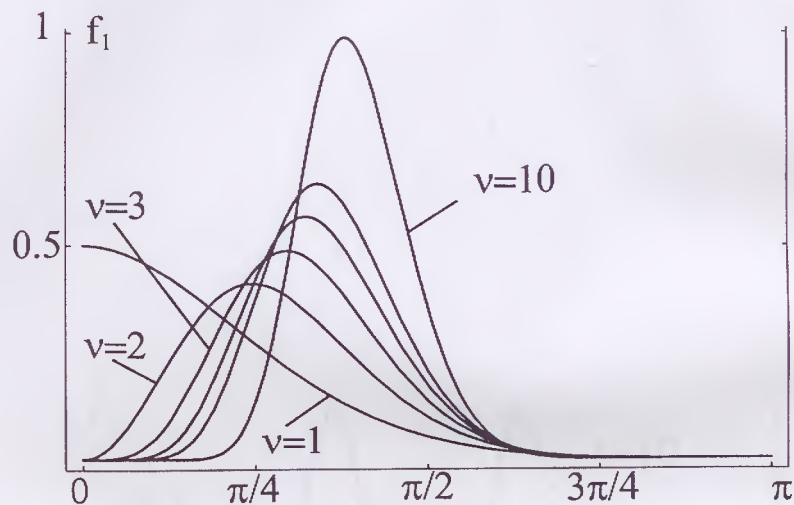


Figura 3.10: Função $f_1(\nu, 1; \theta)$ para $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

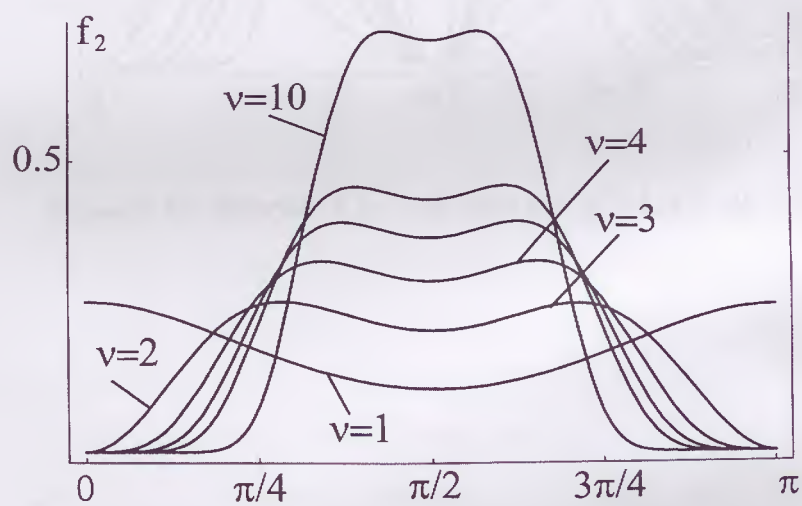


Figura 3.11: Função $f_2(\nu, 1; \theta)$ para $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

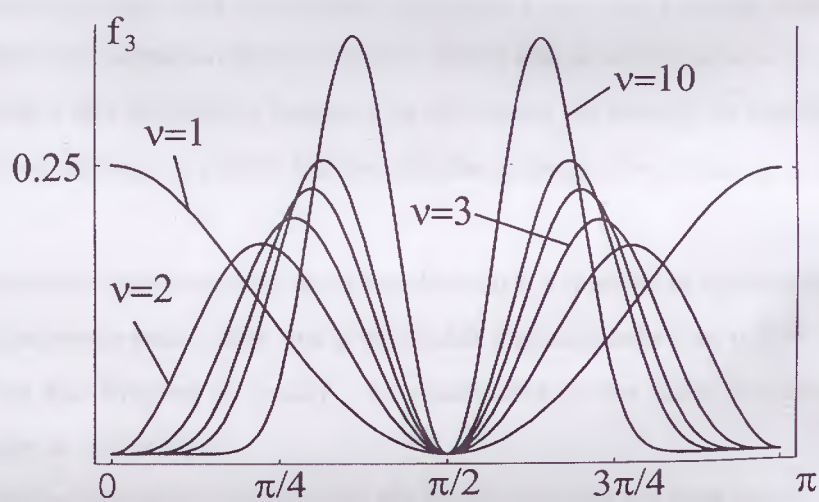


Figura 3.12: Função $f_3(\nu, 1; \theta)$ para $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

Conclusões

Primeiramente gostaríamos de salientar que alguns resultados exatos relacionados ao campo solenoidal-magnético foram obtidos. Entre eles a solução exata da equação de Klein-Gordon e são calculados também os elementos da matriz de transição, com a emissão de um fóton, e a partir dali são obtidas e analisadas todas as características da RS.

É demonstrado que somente a mantissa do campo AB afeta as características usuais da RS (é consistente com o fato que o efeito AB é relacionado com o deslocamento do fator de fase nas funções de onda). As qualidades físicas mais interessantes dessa influência são as seguintes:

Cada linha espectral (harmônica) da RS usual é dividida em duas linhas. A primeira permanece muito parecida com a linha inicial da RS. O deslocamento da frequência correspondente a ela é pequeno, este é proporcional a H/H_0 e pode ser calculado como a relação $1/10^3$ das intensidades atuais dos campos magnéticos nas condições do laboratório. O deslocamento relacionado a segunda frequência é igual a μ ou a $1 - \mu$ (dependendo do tipo de estado inicial). Observações experimentais de tais deslocamentos, especialmente no caso não relativístico, não parecem ser muito difíceis.

Como é conhecido a intensidade da RS usual não depende do número quântico orbital do estado inicial. A presença do fluxo magnético com $\mu \neq 0$ quebra completamente essa degeneração. Os números quânticos mudam todas as características da RS usual.

Além do mais, na RS usual, no caso não relativístico ($\beta^2 \ll 1$), é praticamente emitida somente a primeira harmônica ($\nu = 1$). A emissão de outras harmônicas é proporcional a $\beta^{2\nu}$. A presença do fluxo magnético com $\mu \neq 0$ muda totalmente essa situação. Se os estados iniciais das partículas carregadas tem $l = 0, -1$ então no caso não relativístico um conjunto de harmônicas têm a mesma probabilidade de radiação. Isso pode aumentar a intensidade total de radiação.

Podemos dizer também que aparecem novas linhas relacionadas com os dois tipos de estado no problema. A saber, ali existe uma radiação de harmônicas com frequências, as quais são menores que a frequência síncrotron básica ω_0 . Essas frequências são $\mu\omega_0$ e $(1 - \mu)\omega_0$, dependendo do tipo de estado inicial. É importante salientar que as intensidades de radiação dessas harmônicas são da mesma magnitude da frequência de radiação básicas. O deslocamento significativo entre estas novas frequências e a frequência síncrotron básica permite-nos pensar que elas podem ser observadas.

De outro lado é conhecido, que no caso relativístico a parte principal da RS se concentra na superfície da órbita em um cone estreito, cuja abertura angular efetiva é $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$, onde $\gamma = E/mc^2$ —é um fator relativístico [38, 39].

Do mesmo jeito quando aumenta o fator relativístico aumenta cada vez mais a concentração da potência de radiação total na órbita superficial da partícula. São conhecidas as fórmulas assintóticas, na aproximação $\gamma \gg 1$ [38, 39] da distribuição angular-espectral da radiação as quais reafirmam essa conclusão assim como também para as componentes espectrais.

No entanto, uma análise detalhada das expressões teóricas exatas (nos limites da teoria clássica da RS [38, 39] da distribuição angular espectral da RS) mostrou que, a distribuição angular das componentes espectrais determinadas possuem uma peculiaridade não trivial, a qual não se manifesta na potência de radiação total.

A distribuição angular de radiação na primeira harmônica (tom principal) para qualquer γ possui um máximo nas direções ortogonais ao plano da órbita (para o caso

não relativística, isso foi conhecido anteriormente [38, 39]) além do mais a agudeza deste máximo cresce quando γ cresce, em outras palavras, a concentração desta parte de radiação na superfície da órbita decresce quando γ cresce.

A distribuição angular das harmônicas superiores (começando da segunda) se comportam da seguinte maneira. Para cada harmônica ν existe um determinado γ , tal que, quando $\gamma < \gamma_\nu$ o máximo da irradiação encontra-se na superfície da órbita ($\theta_{\max}^\nu = \frac{\pi}{2}$), não obstante quando γ cresce, quando $\gamma > \gamma_\nu$, o máximo da irradiação se afasta do plano da órbita ($\theta_{\max}^\nu = \frac{\pi}{2} \mp \delta_\nu(\gamma)$) e a magnitude $\delta_\nu(\gamma)$ é uma função de γ que cresce monotonamente.

Por tanto acontece uma desconcentração da irradiação de uma frequência determinada em relação a superfície da órbita quando a energia da partícula aumenta. A magnitude $\delta_\nu(\gamma)$ possui valores finitos quando $\gamma \rightarrow \infty$. Existem tendências análogas para as componentes da polarização de radiação. A distribuição angular da harmônica ν da componente σ da radiação se comporta analogamente a potência de radiação total (o valor de γ_ν^σ é diferente do valor γ_ν). O ângulo, para as componentes π e as componentes da polarização circular, para o qual se alcança a radiação máxima quando γ cresce, monotonamente se afasta da superfície da órbita e tende também a um limite finito quando $\gamma \rightarrow \infty$.

Por tanto cada uma das componentes da polarização também possuem tendência a desconcentração em relação a superfície da órbita para cada frequência determinada

As magnitudes γ_ν e os valores limites quando $\gamma \rightarrow \infty$ para $\theta_{\max}^\nu$ são mostrados em graus na seguinte tabela para alguns ν no caso da semi-superfície superior.

Tem validade as seguintes fórmulas assintóticas quando $\nu \gg 1$

$$\delta_\nu(\infty) = \left(\frac{0.306}{\nu} \right)^{1/3}, \quad \gamma_\nu = \left(\frac{\nu}{0.733} \right)^{1/3}$$

ν	2	3	4	5	6	7	10	15	20	25
γ_ν	1.00	1.21	1.39	1.54	1.67	1.79	2.08	2.45	2.75	2.99
$\theta_{\max}^\nu$	44.5	53.7	58.7	61.8	64.1	65.8	69.3	72.5	74.4	75.7
ν	30	35	40	45	50	100	200	300	400	500
γ_ν	3.21	3.40	3.57	3.73	3.88	4.98	6.35	7.30	8.06	8.70
$\theta_{\max}^\nu$	76.6	77.4	78.0	78.5	79.0	81.4	83.2	84.1	84.6	85.0

Apêndice A: Equações Básicas e as Componentes dos Campos Elétrico e Magnético

Nós consideramos um elétron movimentando-se em um caminho helicoidal. Suas coordenadas estão dadas por

$$x' = R \cos \omega t, \quad y' = R \sin \omega t, \quad z' = v_{\parallel} t \quad (\text{A.1})$$

onde R é o raio da superfície cilíndrica onde o movimento é realizado, ω é a frequência angular, e $v_{\parallel}$ é a componente da velocidade ao longo do eixo z .

Para o movimento dado pela equação (A.1), a densidade de carga pode ser expressa pela relação

$$\begin{aligned} \rho &= e \delta(x - R \cos \omega t) \delta(y - R \sin \omega t) \delta(z - v_{\parallel} t) \\ &= \frac{e}{8\pi^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i v_{\parallel} t k_3 + i k_{\perp} R \sin \alpha}, \end{aligned}$$

onde $\alpha = (\omega t - \psi + \pi/2)$ e ψ é o ângulo polar do vetor $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{\perp} \cos \psi, \quad k_2 = k_{\perp} \sin \psi, \quad k_{\perp} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ k_3 &= k_3, \quad k^2 = k_{\perp}^2 + k_3^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A partir de (A.1) encontraremos que as componentes das velocidades satisfazem as seguintes relações

$$v_x = \frac{dx'}{dt} = -v_{\perp} \sin \omega t = v_{\perp} \{ \cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi \}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_{\perp} \cos \omega t = v_{\perp} \{ \cos \alpha \sin \psi + \sin \alpha \cos \psi \} \\ v_z &= v_{\parallel} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde $v_{\perp} = R\omega$. Em virtude das equações (A.12) teremos que a densidade de corrente $\mathbf{j}$ é igual a $\beta\rho$. Em diante todas as quantidades serão representadas pelas séries de Fourier e a integral

$$F(\mathbf{r}, t) = -\frac{e_0}{8\pi^3} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - it\omega_{\nu}) \exp\left(i\nu\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) F_{\nu} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\omega_{\nu} = v_{\parallel} k_3 + \nu\omega = c\beta_{\parallel} k_3 + \nu\omega. \quad (\text{A.5})$$

Encontramos que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{e}{8\pi^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - iv_{\parallel} t k_3 - ik_{\perp} R \sin \alpha} \\ &= \frac{e}{8\pi^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-i\omega_{\nu} t} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(k_{\perp} R) e^{i\nu(\psi - \pi/2)}. \end{aligned}$$

Já que $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ e usando (A.12) obtemos que as amplitudes das densidades de carga e corrente são dados por

$$\begin{pmatrix} \rho \\ j_{z\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{\parallel} \end{pmatrix} J_{\nu}, \quad \begin{pmatrix} j_{x\nu} \\ j_{y\nu} \end{pmatrix} = \frac{\nu\omega}{k_{\perp} c} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} J_{\nu} + \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} J'_{\nu} \quad (\text{A.6})$$

onde $J_{\nu} = J_{\nu}(k_{\perp} R)$, $k_{\perp} R = k_{\perp} c\beta_{\perp}/\omega$.

Já que as relações entre os potênciais e as densidades de carga e de corrente são

$$\square \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

podemos dividir pelo operador de d'Alembert, consideramos somente as soluções retardadas da função de Green, e obteremos as amplitudes dos pontênciais na forma

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\nu} \\ \mathbf{A}_{\nu} \end{pmatrix} = 4\pi (G_0 + G_1) \begin{pmatrix} \rho_{\nu} \\ \mathbf{j}_{\nu} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

onde

$$G_0 = i\pi \frac{\omega_\nu}{|\omega_\nu|} \delta \left\{ k^2 - \left(\frac{\omega_\nu}{c} \right)^2 \right\}, \quad G_1 = \frac{1}{k^2 - \left(\frac{\omega_\nu}{c} \right)^2}. \quad (\text{A.9})$$

Conseqüentemente, as componentes dos campos elétrico e magnético

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{curl} \mathbf{A} \quad (\text{A.10})$$

são dados por

$$\mathbf{E}_\nu = i4\pi (G_1 + G_0) \left(\frac{\omega_\nu}{c} \mathbf{j}_\nu - \mathbf{k} \rho_\nu \right), \quad \mathbf{H}_\nu = i4\pi (G_1 + G_0) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}_\nu) \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} e^{-ix \sin \alpha} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu(x) e^{-i\nu\alpha} \\ \sin \alpha e^{-ix \sin \alpha} &= i \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J'_\nu(x) e^{-i\nu\alpha} \\ \cos \alpha e^{-ix \sin \alpha} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{x} J_\nu(x) e^{-i\nu\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Apêndice B: Movimento de Partículas em um Campo Solenoidal

Analizamos um campo magnético cuja intensidade tem a seguinte forma no sistema cartesiano

$$\vec{H} = (0, 0, H_z), \quad H_z = \frac{a^2 \Phi}{\pi (a^2 + r^2)^2}, \quad r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad (\text{B.1})$$

onde a, Φ —constantes reais. Observamos que o valor máximo da intensidade consegue-se no ponto $r = 0$

$$H_z^{\max}(r = 0) = \frac{\Phi}{\pi a^2} \quad (\text{B.2})$$

e além do mais cresce até o infinito quando $a \rightarrow 0$.

Quando r cresce, o campo (B.1) cai rapidamente até zero (como $\frac{1}{r^4}$). Encontramos o potencial deste campo; por exemplo em um dos calibres teremos

$$A^0 = A^3 = 0, \quad A^1 = -\frac{x^2 \Phi}{2\pi (a^2 + r^2)}, \quad A^2 = \frac{x^1 \Phi}{2\pi (a^2 + r^2)}. \quad (\text{B.3})$$

O potencial vetorial pode ser expressado também na forma

$$\vec{A} = \frac{r \Phi}{2\pi (a^2 + r^2)} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi, \quad (\text{B.4})$$

onde $\vec{e}_\varphi$ é o eixo unitário do sistema de coordenadas cilíndricas

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi. \quad (\text{B.5})$$

O módulo do potencial (B.4) atinge seu valor máximo (1^{ra} derivada) quando $r = a$

$$\left| \vec{A}(r=a) \right|_{\max} = \left| \frac{\Phi}{2\pi a} \right|. \quad (\text{B.6})$$

E quando $a \rightarrow 0$ ele cresce até o infinito.

O campo (B.1) não é livre. A corrente eletromagnética encontrada a partir das equações de Maxwell, tem a seguinte forma

$$\vec{j} = \frac{4ra^2\Phi}{\pi(a^2 + r^2)^3} \vec{e}_\varphi. \quad (\text{B.7})$$

O módulo da corrente é máximo quando $r = \frac{a}{\sqrt{5}}$

$$\left| \vec{j} \left(\frac{a}{\sqrt{5}} \right) \right|_{\max} = \frac{25\sqrt{5}}{54\pi} \left| \frac{\Phi}{a^3} \right| \quad (\text{B.8})$$

Quando $r \rightarrow \infty$ a corrente cai rapidamente ($\sim \frac{1}{r^5}$) até zero. Encontramos o fluxo magnético Φ , que é criado pelo campo (B.1) através de uma determinada superfície, a qual está representada por um círculo de raio R e tem seu centro na origem de coordenadas no plano $x^3 = cte$

$$\bar{\Phi} = \int_{r \leq R} H_z dx^1 dx^2 = \frac{R^2}{R^2 + a^2} \Phi = \left(1 - \frac{a^2}{R^2 + a^2} \right) \Phi \quad (\text{B.9})$$

Quando $R \rightarrow \infty$ teremos $\bar{\Phi} = \Phi$. De tal maneira que a constante Φ é a unidade do fluxo magnético total através do plano $x^3 = cte$. Se tendemos $a \rightarrow 0$, obteremos que o campo (B.1) desaparece justamente quando $r \neq 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} H_z(r \neq 0) = 0.$$

No entanto o valor máximo do campo (B.2) cresce até o infinito quando $a \rightarrow 0$ ($r = 0$).

O fluxo magnético $\bar{\Phi}$ não depende de R quando $a \rightarrow 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \bar{\Phi} = \Phi$$

O potencial magnético (B.3) (B.4), quando $a \rightarrow 0$, tem um limite finito

$$\vec{A} = (A^1, A^2, 0) = \frac{\Phi}{2\pi r} \vec{e}_\varphi, \quad A^1 = -\frac{x^2 \Phi}{2\pi r^2}, \quad A^2 = \frac{x^1 \Phi}{2\pi r^2}. \quad (\text{B.10})$$

Por isso o potencial eletromagnético gera o campo

$$\vec{H} = (0, 0, H_z), \quad H_z = \Phi \delta(x^1) \delta(x^2) \quad (\text{B.11})$$

o qual cria um fluxo magnético constante através da superfície $x^3 = \text{cte}$.

Então o campo pode-se ver como o limite do fluxo, quando o raio tende a zero, criado com um solenóide infinitamente cumprido no eixo x^3 .

Apêndice C: Funções de Laguerre

1. As funções de Laguerre $I_{n,m} \equiv I_{n,m}(x)$ são definidas pela relação

$$I_{n,m} = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n-m)}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{n-m}{2}} \Phi(-m, n-m+1; x). \quad (\text{C.1})$$

Aqui $\Phi(\alpha, \gamma; x)$ é a função hipergeométrica convergente pelas definições padrões (veja [35], 9.210). Para $\gamma \neq -s$, onde s é inteiro e positivo, a função Φ pode ter a forma

$$\Phi(\alpha, \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{x^k}{k!} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{x^k}{k!}. \quad (\text{C.2})$$

Esta serie é convergente para qualquer x complexo. Para qualquer α complexo, os símbolos de Pochhammer $(\alpha)_k$ são definidos da seguinte maneira

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (\text{C.3})$$

2. Seja m um número inteiro não negativo; então as funções de Laguerre são relacionados com os polinômios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ ([35], 8.970, 8.972.1), através da equação

$$I_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)}} e^{(-\frac{x}{2})} x^{\frac{n-m}{2}} L_m^{n-m}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{n+\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} = \binom{n+\alpha}{n} \Phi(-n, 1+\alpha; x) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Aqui n são números inteiros não negativos do mesmo que satisfazem a relação

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+\alpha-n)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

3. Usando as propriedades conhecidas da função hypergeométrica convergente [35], (9.212; 9.213; 9.216), nós podemos obter as seguintes relações para a função de Laguerre

$$2\sqrt{x(n+1)}I_{n+1,m} = (n-m+x)I_{n,m} - 2xI'_{n,m}, \quad (\text{C.6})$$

$$2\sqrt{x(m+1)}I_{n,m+1} = (n-m-x)I_{n,m} + 2xI'_{n,m}, \quad (\text{C.7})$$

$$2\sqrt{xn}I_{n-1,m} = (n-m+x)I_{n,m} + 2xI'_{n,m}, \quad (\text{C.8})$$

$$2\sqrt{xm}I_{n,m-1} = (n-m-x)I_{n,m} - 2xI'_{n,m}, \quad (\text{C.9})$$

$$2\sqrt{nm}I_{n-1,m-1} = (n+m-x)I_{n,m} - 2xI'_{n,m}, \quad (\text{C.10})$$

$$2\sqrt{(n+1)(m+1)}I_{n+1,m+1} = (n+m+2-x)I_{n,m} + 2xI'_{n,m}, \quad (\text{C.11})$$

e a equação diferencial para estas funções

$$4x^4 I''_{n,m} + 4x I'_{n,m} - \left[x^2 - 2x(1+n+m) + (n-m)^2 \right] I_{n,m} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Suponhamos que $I_{n,m}(x)$ e $I_{m,n}(x)$ são linearmente independentes. Então uma solução geral I desta equação tem a forma $I = AI_{n,m}(x) + BI_{m,n}(x)$. No entanto, sempre que a condição (C.18) é válida $I_{n,m}(x)$ e $I_{m,n}(x)$ são dependentes. As equações (C.6)-(C.11) e a equação (C.12) são válidas para qualquer n, m, x complexo. Note que as fórmulas (C.6)-(C.10) tem que ser cuidadosamente aplicadas para o caso $n, m = 0$. Um cálculo direto, usando (C.1) e (C.2) nos dá

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{n} I_{n-1,m}(x) &= -\frac{\sin m\pi}{\pi} \sqrt{\Gamma(1+m)} x^{-\frac{1+m}{2}} \exp\left(\frac{x}{2}\right), \\ \lim_{m \rightarrow 0} \sqrt{m} I_{n,m-1}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Uma combinação das equações (C.6)-(C.9) gera as seguintes relações

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x}I'_{n,m} &= \sqrt{n}I_{n-1,m} - \sqrt{n+1}I_{n+1,m} \\ &= \sqrt{m+1}I_{n,m+1} - \sqrt{m}I_{n,m-1}, \end{aligned} \quad (C.14)$$

$$0 = \sqrt{x(n+1)}I_{n+1,m} - (n-m+x)I_{n,m} + \sqrt{xn}I_{n-1,m}, \quad (C.15)$$

$$0 = \sqrt{x(m+1)}I_{n,m+1} - (n-m-x)I_{n,m} + \sqrt{xm}I_{n,m-1}. \quad (C.16)$$

4. Usando as propriedades da função hypergeométrica convergente, podemos obter a representação

$$I_{n,m} = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n-m)}} \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right)}{x^{\frac{n-m}{2}}} \Phi(1+n, 1+n-m; -x), \quad (C.17)$$

e a relação ([35], 9.214)

$$I_{n,m}(x) = (-1)^{n-m} I_{m,n}(x), \quad n-m \text{ inteiro.} \quad (C.18)$$

5. É válida a seguinte forma assintótica

$$\Phi(a, c; x) \approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}, \quad \operatorname{Re} x \rightarrow \infty. \quad (C.19)$$

Logo, obtemos o comportamento assintótico de $I_{n,m}(x)$ para o caso quando m não é inteiro

$$I_{n,m}(x) = -\frac{\sin m\pi}{\pi} \sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)} x^{-\frac{n+m+2}{2}} \exp\left(\frac{x}{2}\right), \quad \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \quad (C.20)$$

e

$$I_{n,m}(x) = (-1)^2 \frac{x^{\frac{n+m}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)}}, \quad \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \quad (C.21)$$

quando m é inteiro.

6. Podemos provar a seguinte fórmula assintótica

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_{p+\alpha, p+\beta} \left(\frac{x^2}{4p} \right) = J_{\alpha-\beta}(x), \quad (C.22)$$

onde $J_\nu(x)$ são as funções de Bessel.

7. Se temos em conta que (C.20) e (C.21), podemos concluir que somente as funções $I_{\alpha+n, n}(x)$, com n inteiros não negativos e $\alpha > -1$, são quadrados integráveis no intervalo $(0, \infty)$. Funções semelhantes obedecem a relação de ortonormalidade

$$\int_0^\infty I_{\alpha+n, n}(x) I_{\alpha+m, m}(x) dx = \delta_{m, n}, \quad (\text{C.23})$$

a qual é uma consequência direta das propriedades dos polinômios de Laguerre ([35], 7.414.3). Neste último caso a relação

$$I_{\alpha+n, n}(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x) \quad (\text{C.24})$$

é uma consequência da fórmula (C.4).

8. Considere a soma

$$R_\mu^{m, n}(x) = \sum_{(k=0)}^\infty I_{k+\mu, m}(x) I_{k+\mu, n}(x). \quad (\text{C.25})$$

Se $n, m \geq 0$ e inteiros então obtemos

$$R_o^{m, n}(x) = \delta_{m, n} = \sum_{(k=0)}^\infty I_{k, m}(x) I_{k, n}(x) = \sum_{(k=0)}^\infty I_{m, k}(x) I_{n, k}(x). \quad (\text{C.26})$$

Bibliografia

- [1] *Sciens News Letters* **51** 339 (1947); *Electronics* **20** (9 – 10) 136 (1947)
- [2] F. R. Elder, R. V. Langmuir & H. C. Pollock, *Phys. Rev.* **74** 52 (1948)
- [3] A. Lienard, *L'Eclairage electr.* **16** (27) 5 (1898); O. Heaviside, *Nature* **67** (1723) 6 (1902).
- [4] G. A. Schott, *Ann. der Phys.* **24** 635 (1907); *Electromagnetic Radiation* (Cambridge, 1912)
- [5] I. Y. Pomeranchuk, *ZHETF* **9** 915 (1939)
- [6] D. D. Ivanenko & I. Y. Pomeranchuk, *DAN SSSR* **44** 343 (1944)
- [7] J. P. Blewett, *Phys. Rev.* **69** 87 (1946)
- [8] I. M. Ternov & V. V. Mikhailin, *Sinchrotronnnoe Izluchenie. Teoria i Eksperiment* (M. Energoatomizdat 1986)
- [9] L. A. Artsimovich & I. Y. Pomeranchuk, **16** 370 (1946)
- [10] V. L. Ginsburg, *Izv AN SSSR* **11** 165 (1947); V. L. Ginsburg & S. I. Syrovatskiy, *Proizkhozhdenie Kosmicheskikh Luchei* (M. -L. Izdatelvo AN SSSR, 1963)
- [11] V. V. Vladimirskiy, *ZHETF*, **18** 392 (1948)

- [12] A. A. Sokolov, *Vest. Mosk. Univ.* (4) 77 (1947)
- [13] D. D. Ivanenko & A. A. Sokolov, *DAN SSSR* **59** 1551 (1948)
- [14] L. D. Landau & E. M. Lifschits, *Teoria do Campo* (Moscou, 1948)
- [15] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 1912 (1949)
- [16] Y. M. Ado & P. A. Cherenkov, *DAN SSSR*, 110 235 (1956)
- [17] D. Tombulian & P. Hatman, *Phys. Rev.* 102 423 (1956)
- [18] G. Vathov, E. Freitag & R. Haensel, *J. Appl. Phys.* **37** 3449 (1966)
- [19] A. A. Sokolov & I. M. Ternov, *ZHETF* **31** 373 (1956)
- [20] A. A. Sokolov, I. M. Ternov & V. G. Bagrov, et al. (1968) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.* **5**, 43; *Z. Phys.* 211, 1.
A. A. Sokolov, V. Ch. Zhukovskiy & M. M. Kolesnikova, (1969) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.* **2**, 108.
- [21] A. A. Sokolov & I. M. Ternov, (1956) *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31**, 473.
- [22] V. G. Bagrov, G. F. Kapitov & V. B. Tlyachev. *O eletron relativístico num campo electromagnético constante e o efeito Aharanov-Bohm*, Trudi Fiz Soobshch. Resp. Adigea
- [23] V. G. Bagrov & D.M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, (Kluwer, Dordrecht 1990)
- [24] Y. Aharanov & D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485
- [25] V. D. Skarzhinskiy, *Trudy FIAN (Proceedings of Lebedev Institute)*, **167** (1986)

- [26] M. Peskin & Tonomura, *The Aharonov Bohm Effect* (Springer-Verlag, Berlin 1989)
- [27] Y. Nambu, *The Aharonov-Bohm problem revisited*, hep-th/9810182
- [28] A. A. Sokolov, I. M. Ternov & V. G. Bagrov, *Teoria Clássica da Radiação Síncrotron*. No livro. "Radiação Síncrotron" A. A. Sokolov & I. M. Ternov, Nauka, 1966, pg 72 – 151.
- [29] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York 1975)
- [30] A. O. Barut *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover, New York 1980)
- [31] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, V. G. Bagrov & P. A. Rzaev. *Teoria quântica da radiação dos elétrons relativísticos que se movem num campo homogêneo e constante*. No livro "Radiação Síncrotron" A. A. Solov, I. M. Ternov, Nauka, 1966, pg 72 – 151.
- [32] E. M. Serebrianiy & V. D. Skarzhinskiy, *Sov. Phys. Lebedev Inst. Rep.* (Kratk. Soobshch. Fiz.) **6** (1988) 56
- [33] J. A. Audretsh, U. Jasper & V. D. Skarzhinskiy, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 2178
- [34] T. T. Wu & C. N. Yang, *Phys. Rev. D* **12** (1975) 3864.
- [35] I. S. Grandshtein & I. W. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic, New York 1994)
- [36] A. A. Sokolov & I. M. Ternov, *Synchrotron Radiation* (Verlag, Berlin 1968).
- [37] A. A. Sokolov, I. M. Ternov & V. G. Bagrov, *Classical Teoria Synchrotron Radiation. Inside of Synchrotron Radiation's book* (Nauka, 1966).
- [38] Sbornik Statei. *Sinchrotronnoe izluchenie*, Moskva Nauka 1966. 228s

- [39] *Sinchrotronnoe Izluchenie*. Trudy FIAN SSSR imenno P. N. Lebedeva, T. 80. M. Nauka. 1975.
- [40] A. A. Sokolov & I. M. Ternov, *Reljativistskiy Elektron*, Moskva Nauka. 1983. 304c.
- [41] I. M. Ternov, V. V. Mikhailin & V. R. Khalilov. *Sinchrotronnoe Izluchenie i ego Primenenie*. M. Izd. MGU. 1980.
- [42] V. G. Bagrov, G. F. Kopitov, G. K. Razina & V. B. Tlyachev. *Chislenniy Analiz Anguljarnogo Raspredeleija Sinkhrotronnogo Izlucheija (Klassicheskaja Teoria)*, Den. Biniti 12.11.1985, N 7927 B85. 13s.
- [43] Vladimir A. Bordovitsyn, *Synchrotron Radiation Theory and its development*. World Scientific. Singapore • New Jersey • London • Hong Kong. 1999. 447p.
- [44] G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation* (Cambridge University Press, 1912).
- [45] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, A. Levin & V.B. Tlyachev, *Aharonov-Bohm Effect in Synchrotron Radiation*, Nucl. Phys. B 605 (2001) 425-454. hep-th/0001108.
- [46] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro 1978)
- [47] M. E. Hehl, "*Linguagem de Programação Estruturada Fortran77*" (McGraw-Hill, São Paulo 1986)
- [48] Stephen Wolfram, *The Mathematica book, 3rd ed.* (Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996)
- [49] L. Nyhoof & S. Leestma, *Fortran 77 for Engineers and Scientists with an Introduction to Fortran90, 4th ed.* (Upper Saddle River, New Jersey 1996).
- [50] S. Olariu & I. I. Popescu, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1985) 339

