

O espaço das Ordens de um Corpo*

Clotilzio Moreira dos Santos[†]

9 de dezembro de 2013

Resumo

O objetivo deste trabalho é exibir corpos com infinitas ordens e exibir uma estrutura topológica ao conjunto das ordens de um corpo. Como cada ordem em um corpo está associada de modo único a um subgrupo de índice dois do grupo multiplicativo do corpo, ela fica associada, de modo natural, com uma função de $F \setminus \{0\}$ em $\{\pm 1\}$, (onde F é o corpo em questão). Assim uma ordem é um elemento do produto cartesiano $\prod_{x \in F} \{\pm 1\}_x$. Usando a topologia produto, será provado que o conjunto das ordens é um espaço booleano, isto é, um espaço topológico de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo.

Palavras Chave: Ordens, Extensões de ordens, Corpo formalmente real

Introdução

O famoso teorema de Ernst Zermelo diz que todo conjunto pode ser bem ordenado. No entanto, para uma ordem sobre um corpo, exige-se um pouco mais dela: que seja compatível com as operações do corpo. Aí nem todos os corpos são ordenados, a menos que o considere apenas como conjunto. Neste artigo começaremos descrevendo rapidamente ordens sobre conjuntos. A seção (1) trata de ordens sobre corpos e a identificação dela com um subconjunto especial do corpo em questão. Este subconjunto (dito ordem sobre o corpo, ou do corpo) junto com as pré-ordens serão importantes ferramentas e constituirão um caminho a seguir para se estender ordens à uma extensão quadrática do corpo. Usando extensões de corpos, na seção 3.2, exibiremos um corpo com um conjunto infinito e não enumerável de ordens. Na ultima seção daremos uma estrutura topológica ao conjunto das ordens de um corpo, provando que ela é booleana, ou seja, um espaço de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo. Usaremos a nomenclatura de [2].

Começaremos com a seguinte definição e exemplos

Definição 1 *Se E é um conjunto não vazio, uma relação binária $\mathcal{R} \subset E \times E$ é uma relação de ordem (parcial) sobre E se $\mathcal{R}$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.*

Notação: Se $(x, y) \in \mathcal{R}$ é usual escrever $x\mathcal{R}y$. E neste caso, em geral, denota-se por $x \preceq y$ (x precede y). Caso contrário, $x \not\preceq y$. O par $(E, \preceq)$ é dito um conjunto (parcialmente) ordenado.

*Trabalho realizado como parte de pesquisa sobre extensões de ordens sobre corpos

[†]Email: moreira@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Observação 2 É fácil ver que se $\preceq$ é uma ordem sobre um conjunto E então a relação inversa a qual denotaremos por $\succeq$ (sucede) também é uma relação de ordem sobre E . Assim as ordens sobre um conjunto E ocorrem aos pares, se a ordem é distinta da ordem igualdade.

Exemplos:

(a) $\mathbb{R}$ é ordenado pelas relações de ordens usuais $\leq$ (menor ou igual) e sua inversa $\geq$ (maior ou igual).

(b) O conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$ é ordenado pelas ordens:

$a + bi \preceq_1 c + di$ quando $a \leq c$ e $b \leq d$ e também por

$a + bi \preceq_2 c + di$ quando ou bem $a < c$ ou bem $a = c$ e $b \leq d$ e suas inversas.

A segunda ordem é dita *ordem lexicográfica* em $\mathbb{C}$ e, sua inversa é dita ordem lexicográfica inversa.

1 Ordens em um Corpo

Denotemos por $\dot{F}$ grupo multiplicativo dos elementos não-nulos de F .

Um quadrado do corpo F é um elemento $y = x^2$, com $x \in F$. Por exemplo, todo número real positivo é um quadrado. Vamos denotar por F^2 o subconjunto de F : $\{x^2, x \in F\}$ e $\dot{F}^2 =: \{x^2, x \in \dot{F}\}$. Assim $\mathbb{R}^2 = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$. Usaremos ainda as notações

$$\sigma(F) = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, x_i \in F, n \in \mathbb{N}, n > 0\} \text{ e } \dot{\sigma}(F) = \sigma(F) \setminus \{0\}.$$

Exemplos:

(a) $\sigma(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

(b) Seja $\mathbb{Z}_7$ o corpo das classes de restos módulo 7. Então $\sigma(\mathbb{Z}_7) = \mathbb{Z}_7$.

De fato, cada elemento de $\mathbb{Z}_7$ é um quadrado, ou soma de dois quadrados. Vejamos: $\bar{0} = \bar{0}^2$, $\bar{1} = \bar{1}^2$, $\bar{2} = \bar{3}^2$, $\bar{3} = \bar{3}^2 + \bar{1}^2$, $\bar{4} = \bar{2}^2$, $\bar{5} = \bar{2}^2 + \bar{1}^2$, $\bar{6} = \bar{3}^2 + \bar{2}^2$.

(c) Usando o fato de que todo número inteiro positivo é soma de quatro quadrados (veja Teorema 7.F de [3]), vem que todo número racional positivo é soma de quatro quadrados. De fato, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ e $ab \in \mathbb{Z}$. Assim, se a/b é positivo, ou seja, se $ab \geq 0$ vem que $\frac{a}{b}$ é soma de quatro quadrados em $\mathbb{Q}$. Em particular, $\sigma(\mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 0\}$.

Proposição 3 Seja F um corpo. Então $\dot{\sigma}(F)$ é um subgrupo multiplicativo de $\dot{F}$.

Demonstração: De fato, se $x = \sum_i x_i^2$, $y = \sum_j y_j^2 \in \dot{\sigma}(F)$, então $x \cdot y = \sum_{i,j} (x_i \cdot y_j)^2 \in \dot{\sigma}(F)$ e $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \sum_i \left(\frac{x_i}{x}\right)^2 \in \dot{\sigma}(F)$. Disto o resultado segue. $\square$

Definição 4 Um corpo F é dito *formalmente real* se $-1 \notin \sigma(F)$.

Em particular um corpo formalmente real tem característica zero. De fato, se F não tem característica zero, então F tem característica p , onde p é um inteiro positivo e primo. Logo F contém $\mathbb{Z}_p$ e, portanto, $0 = p \cdot 1_F$. Segue-se que $-1_F = (p-1) \cdot 1_F \in \sigma(F)$, o que é absurdo.

Fecharemos a próxima seção com o teorema de Artin Schreier que afirma que um corpo F é formalmente real se, e somente se, F possui pelo menos uma ordem.

O método mais rápido de fazer isto é usando pré-ordens, mas antes vamos ver o que vem a ser ordem em um corpo, e isto é um pouco diferente de ordens sobre conjuntos.

Definição 5 Uma ordem sobre um corpo F é uma relação binária $\preceq$ que é reflexiva, anti-simétrica, transitiva e total (isto é: para todos $x, y \in F$, ou bem $x \preceq y$ ou bem $y \preceq x$). Além disso, sobre um corpo, exige que a relação seja compatível com as operações do corpo, ou seja:

$$x \preceq y \implies x + z \preceq y + z, \quad \forall x, y, z \in F.$$

$$x \preceq y \implies x.z \preceq y.z, \quad \forall x, y, z \in F, \quad \text{com } 0 \preceq z.$$

Proposição 6 Um corpo F é ordenado se, e somente se, existe um subconjunto P de F com as seguintes propriedades:

$$(i) \ P + P \subset P, \quad (ii) \ P.P \subset P, \quad (iii) \ F = P \cup (-P),$$

$$(iv) \ P \cap (-P) = \{0\}, \quad \text{onde } -P =: \{-x \mid x \in P\}.$$

Este subconjunto P de F é dito conjunto dos elementos positivos da ordem.

Demonstração: De fato; se $\preceq$ é uma ordem sobre F tome $P =: \{x \in F \mid 0 \preceq x\}$. É fácil a verificação de que este subconjunto de F satisfaz as quatro propriedades acima. Reciprocamente, se existe um subconjunto P de F que satisfaz as quatro propriedades acima, defina a relação sobre F : $x \mathcal{R} y$ se $y - x \in P$. Também é fácil verificar que esta relação é uma ordem total sobre F compatível com as operações de F . O conjunto dos elementos positivos desta ordem é exatamente P , pois $0 \preceq y$ se, e somente se, $y - 0 \in P$. $\square$

Observação 7 (a) É fácil demonstrar que a técnica usada na demonstração da Proposição 6, nos dá uma correspondência “um à um” entre ordens sobre um corpo F e subconjuntos P de F com as propriedades citadas na Proposição 6. Assim, de agora em diante também diremos que P é uma ordem de F (ou sobre F) e, com isto estamos nos referindo a ordem $\preceq$ sobre F tal que $P = \{x \in F \mid 0 \preceq x\}$.

$$(b) \ \sigma(F) \subset P.$$

De fato, como P é fechado para adição por (i), basta provar que $F^2 \subset P$. Como P é também fechado para a multiplicação por (ii), se $x \in P$ então $x^2 \in P$. E caso, $-x \in P$ então $x^2 = (-x)^2 \in P$. Portanto, em qualquer caso ($x \in P$ ou $-x \in P$) temos $x^2 \in P$. Como $F = P \cup (-P)$, temos $F^2 \subset P$.

$$(c) \ -1 \notin P.$$

De fato, se $-1 \in P$ então por definição $1 \in -P$. Mas como 1 é um quadrado e quadrados estão contidos em P , segue que $1 \in P \cap (-P) = \{0\}$, absurdo.

(d) Assim, o corpo $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado, pois $-1 = i^2$. Também, vimos depois da Definição 4 que $-1 \in \sigma(F)$, se a característica de F é $p > 0$. Logo, por (b) e (c) corpos de característica $p > 0$ não são ordenados.

2 Pré-Ordens

O principal resultado desta seção é o lema da extensão que será muito útil para extensões de ordens.

Definição 8 Uma pré-ordem sobre um corpo F é um subconjunto T de F que satisfaz: (v) $T + T \subset T$, (vi) $T.T \subset T$, (vii) $F^2 \subset T$ e (viii) $-1 \notin T$.

Note que, por definição e pela observação 7, toda ordem é uma pré-ordem.

Proposição 9 Seja T uma pré-ordem de um corpo F . Então

$$(a) \ \sigma(F) \subset T, \quad (b) \ T \cap (-T) = \{0\}, \quad (c) \ \dot{T} := T \setminus \{0\} \text{ é um subgrupo de } \dot{F}.$$

Demonstração: (a) Segue facilmente dos itens (v) e (vii) da definição e usando indução em n para $x = \sum_{j=1}^n x_j^2 \in \sigma(F)$.

(b) Seja $y \in T \cap (-T)$. Então $y = -x$, $x, y \in T$. Como $F^2 \subset T$, temos $-1 = (y/x) = xy(\frac{1}{x^2}) \in T$, (se $x \neq 0$). Absurdo. Logo $y = x = 0$.

(c) Sejam $x, y \in \dot{T}$. Por (vi) e (vii) xy e $(\frac{1}{y})^2 \in \dot{T}$. Novamente por (vi) $xy^{-1} = xy \cdot (\frac{1}{y})^2 \in \dot{T}$. $\square$

Em geral o índice $[\dot{F} : \dot{T}]$ é maior ou igual a 2. Gostaríamos que fosse 2, ou seja, gostaríamos que T fosse uma ordem. O seguinte lema garante que podemos estender uma pré-ordem até obter uma ordem.

Lema 10 *Lema da Extensão*

Sejam T uma pré-ordem sobre um corpo F e $a \in F \setminus T$. Então $T' := T - aT$ (onde $T - aT = \{t_1 - at_2, t_1, t_2 \in T\}$) é uma pré-ordem sobre F que contém T e $-a$.

Demonstração: Desde que $0, 1 \in T$, claramente T' contém T e $-a$. Agora, sejam $x = t_1 - at_2$, $y = t_3 - at_4$ em T' , (onde $t_i \in T$). Então:

$x + y = (t_1 + t_3) - a(t_2 + t_4) \in T'$ e $xy = (t_1t_3 + a^2t_2t_4) - a(t_2t_3 + t_1t_4) \in T'$. Também, $F^2 \subset T \subset T'$ e resta mostrar que $-1 \notin T'$.

Se $-1 \in T'$ então $-1 = t_1 - at_2$, $t_i \in T$. Se $t_2 \neq 0$ então $a = \frac{1+t_1}{t_2} \in T$, contrário a hipótese. Então $t_2 = 0$ e obtemos $-1 = t_1 \in T$, outra contradição. Portanto $-1 \notin T'$. $\square$

Corolário 11 *Seja T uma pré-ordem sobre F . Então*

(1) *T é uma ordem sobre F se, e somente se, T é uma pré-ordem maximal (no sentido de inclusão de conjuntos).*

(2) *$T \subset P$ para alguma ordem P de F .*

Demonstração: (1) suponha que T é uma ordem sobre F . Segue da definição que $[\dot{F} : \dot{T}] = 2$. Como ordens são pré-ordens segue que T é uma pré-ordem maximal. Reciprocamente, se T é uma pré-ordem então por definição valem os itens (i) e (ii) da Proposição 6. Pela Proposição 9(b) o item (iv) da Proposição 6 também é satisfeito e resta provar o item (iii) da Proposição 6, ou seja, provar que $F = T \cup (-T)$. Para cada $a \in F$, se $a \notin T$ pelo Lema da Extensão $T' = T - aT$ é uma pré-ordem. Como $T' \neq F$ (Definição 8(viii)), por hipótese $T' = T$. Logo $-a \in T$. Isto mostra que $F = T \cup (-T)$. Isto conclui a demonstração de (1).

(2) Como T é uma pré-ordem de F o conjunto $S := \{T \subset F, T : \text{pré-ordem}\}$ é não-vazio. Ordenemos S pela inclusão de conjuntos. Se U é uma cadeia em S então $\bigcup_{T \in U} T \in S$. Isto segue do fato de que todos elementos de U são comparáveis, ou seja, se $T_1, T_2 \in U$ então $T_1 \subset T_2$ ou $T_2 \subset T_1$. Assim, $\bigcup_{T \in U} T$ é uma cota superior para U . Pelo Lema de Zorn ([4] 3.11) S tem um elemento maximal, digamos T_0 . Então T_0 satisfaz os itens da Definição 8. Para demonstrar que T_0 é uma ordem, tendo em vista a Proposição 9(b), basta demonstrar que $F = T_0 \cup (-T_0)$. Seja $a \in F \setminus T_0$. Pelo Lema da Extensão $T' = T_0 - aT_0$ é uma pré-ordem que contém T_0 . Com $T' \neq F$ (vide Definição 8(viii)) e T_0 é maximal vem que $T_0 = T'$. Logo $-a \in T_0$. Isto mostra que $F = T_0 \cup (-T_0)$. Assim T_0 é uma ordem que contém T . $\square$

Teorema 12 *Artin-Schreier ([2], Capítulo viii, Corolário 1.10)*

Um corpo F é formalmente real se, e somente se, $\sigma(F)$ é uma pré-ordem sobre F , se, e somente se, F possui pelo menos uma ordem.

Demonstração: $\sigma(F)$ contém F^2 e é fechado para adição e multiplicação. Logo, se F é formalmente real então $-1 \notin \sigma(F)$.

Se $\sigma(F)$ é uma pré-ordem, pelo item (2) do Corolário 11, $\sigma(F)$ está contido em uma ordem P . Portanto F possui uma ordem. Finalmente, se F possui uma ordem P então $-1 \notin P$ (senão $P \cap (-P) \neq \{0\}$). Como P contém $\sigma(F)$ vem que $-1 \notin \sigma(F)$. Logo F é formalmente real. $\square$

3 Extensões de Ordens

3.1 Extensões Quadráticas

Posso dizer que $-\sqrt{2}$ é positivo em alguma ordem? O uso frequente de tomarmos sempre a função real $\sqrt{x}$ como tendo imagem em $\mathbb{R}^+$ reforça a idéia de que $\sqrt{2}$ sempre é positiva. Mas, isto não é sempre verdade. Temos pelo menos três modos de construir extensões quadráticas de $\mathbb{Q}$, mas todas isomorfas.

De forma geral, seja p um número inteiro, primo e positivo. Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) := \{a + b\sqrt{p}, a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$, de modo natural. Podemos verificar que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

Seja $\mathbb{F}$ o corpo $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2 - p \rangle$, ou seja, $\mathbb{F} = \{\bar{a} + \bar{b}x, \text{ onde } \bar{a} = a + \langle X^2 - p \rangle, \bar{b} = b + \langle X^2 - p \rangle \text{ e } x = X + \langle X^2 - p \rangle, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Como $x^2 = \bar{p}$, então por definição, $x = \sqrt{p} \in \mathbb{F}$ (ou $x = -\sqrt{p} \in \mathbb{F}$).

Outro modo é ver $\sqrt{p}$ como sendo $(0, 1) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, desde que se considera as operações em $\mathbb{K} := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ do seguinte modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + pbd, ad + bc).$$

Assim $\mathbb{K}$ é um corpo onde $1_{\mathbb{K}} = (1, 0)$, e se $(a, b) \neq (0, 0)$ então

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - pb^2}, -\frac{b}{a^2 - pb^2} \right).$$

Desde que $\mathbb{Q}$ é isomorfo a $\mathbb{Q} \times \{0\}$ e $(0, 1)^2 = (p, 0) \equiv p$, então $\sqrt{p} = (0, 1)$ em $\mathbb{K}$.

Agora é fácil verificar que $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ definida por $f(a, b) = a + b\sqrt{p}$ e $g : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, definida por $g(\bar{a} + \bar{b}x) = a + b\sqrt{p}$ são isomorfismos de corpos.

3.2 Extensões de Ordens

Definição 13 *Sejam F e K corpos tais que $F \supset K$ e P_1 uma ordem de F . P_1 é dita uma extensão à F de uma ordem P sobre K se $P = K \cap P_1$.*

Teorema 14 *Sejam K um corpo ordenado por uma ordem P e $F = K(\sqrt{d})$ uma extensão quadrática de K . Existe uma extensão de P à F se, e somente se, $d \in P$.*

Demonstração: Consideremos $S := \{\sum x_i y_i^2, x_i \in P, y_i \in F\}$.

A verificação de que S é fechado para adição e multiplicação e contém todos os quadrados de F é bem simples. Verifiquemos que $-1 \notin S$, por redução ao absurdo.

Se $-1 = \sum x_i(\alpha_i + \beta_i\sqrt{d})^2$ então

$$-1 = \sum x_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2 d) \quad \text{e} \quad 0 = \sum (2x_i \alpha_i \beta_i \sqrt{d}).$$

Logo, por hipótese, $-1 \in P$, uma contradição. Pela Definição 8, S é uma pré-ordem de F . Do item (2) do Corolário 11, F possui uma ordem.

Reciprocamente, se existe uma extensão P_1 de P à F , então $d = (\sqrt{d})^2 \in K \cap P_1 = P$. $\square$

Observação 15 A extensão da ordem P de K ao corpo $F = K(\sqrt{d})$ fica determinado por P e pela escolha de $\sqrt{d}$ sendo positivo ou negativo na ordem P_1 . Assim temos duas extensões de P à F .

Para o caso $\sqrt{d}$ positivo temos:

$$x, y \geq 0 \implies x + y\sqrt{d} \geq 0 \quad \text{e} \quad x, y \leq 0 \implies x + y\sqrt{d} \leq 0,$$

Usando $0 \leq x \leq y \implies x^2 \leq y^2$ temos

$$x \geq 0 > y \implies \left(x + y\sqrt{d} > 0 \iff x > -y\sqrt{d} \iff x^2 > y^2d \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2 > d \right) \quad \text{e}$$

$$y \geq 0 > x \implies \left(x + y\sqrt{d} > 0 \iff y\sqrt{d} > -x \iff y^2d > x^2 \iff \left(\frac{y}{x}\right)^2 > \frac{1}{d} \right).$$

Para $\sqrt{d} < 0$ o raciocínio é análogo.

Exemplo de um corpo com um conjunto não enumerável de ordens.

Considere $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_i, \dots$ primos positivos de $\mathbb{Z}$ e $F_i = F_{i-1}(\sqrt{p_i}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_i})$, $i > 0$, onde $F_0 = \mathbb{Q}$. Desde que $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_i \subset \dots$ vem que $F = \bigcup_{i \geq 0} F_i = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots)$ é um corpo.

Denote por $X(F)$ o conjunto de todas as ordens de F . Para $p > 0$ um número primo em $\mathbb{Z}$, já vimos que existem duas ordens sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ que estendem a ordem original $\leq$ de $\mathbb{Q}$. Assim existem quatro ordens sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ (p e q primos positivos em $\mathbb{Z}$) que estendem a ordem original de $\mathbb{Q}$, etc. Cada ordem de F fica determinada quando se especifica que $\sqrt{p}$ é positivo ou negativo (ou seja: tem sinal 1 ou -1). Denotemos o produto cartesiano de infinitos fatores de $\{-1, 1\}$ por $\prod_{i \geq 0} \{-1, 1\}$ e definimos $\varphi : X(F) \longrightarrow \prod_{i \geq 0} \{-1, 1\}$, por: $\varphi(\preceq) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, onde $a_i = 1$ se $\sqrt{p_i}$ é positivo na ordem $\preceq$ e $a_i = -1$, caso contrário, (p_i é o i -ésimo primo). Então φ é uma bijeção e como $\prod_{i \geq 0} \{-1, 1\}$ não é enumerável, temos que $X(F)$ não é enumerável. Outras propriedades de $X(F)$ podem ser vistas em [1], seção 2.

4 O Espaço das Ordens de um Corpo

O conjunto das ordens de um corpo F será denotado por X_K , ou seja, $X_F := \{P \mid P \text{ ordem de } F\}$

Toda ordem P define uma função sinal, $\text{sign}_P : \dot{F} \longrightarrow \{\pm 1\}$, $\text{sign}_P(x) = 1$, se $x \in P$ e -1 , se $x \in -P$.

Para cada $x \in \dot{F}$, temos um conjunto $\{\pm 1\}_x$ o x -ésimo fator do produto cartesiano $\prod_{x \in \dot{F}} \{\pm 1\}_x \equiv \{f : \dot{F} \longrightarrow \{\pm 1\}\}$. Este conjunto será denotado simplesmente por $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$. Ele é conjunto de todas aplicações $f : \dot{F} \longrightarrow \{\pm 1\}$.

Como P é completamente determinado por sign_P , temos uma injeção X_F em $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$. Assim podemos ver X_F como um subconjunto próprio de $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$, pois existe $f \in \prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$, tal que $f(1) = f(-1) = 1$ e portanto, esta função não corresponde a uma ordem P sobre F .

Tomemos $\{\pm 1\}$ com a topologia discreta e $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$ com a topologia produto, isto é a topologia *menos fina* que torna as projeções $\Pi_a : \prod_{\dot{F}} \rightarrow \{\pm 1\}$, $a \in \dot{F}$, contínuas. Como $\{\pm 1\}$ é um espaço de Hausdorff e compacto, pelo Teorema de Tychonoff (veja [4], Teorema 12.9), temos que $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$ é Hausdorff e compacto.

O subconjunto X_F de $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$ dotado da topologia induzida é chamado espaço das ordens de F . A topologia em X_F é chamada *Topologia de Harrison*.

Lembremos que um subconjunto $\mathcal{B}$ de abertos de um espaço topológico X é chamado sub-base se todo aberto de X pode ser expresso como união de interseções finitas de elementos de $\mathcal{B}$. A topologia em $\prod_{\dot{F}} \{\pm 1\}$ é definida tomando a seguinte

sub-base:

$$\Pi_a^{-1}(\varepsilon) = H(a, \varepsilon) = \{f : \dot{F} \longrightarrow \{\pm 1\} \mid f(a) = \varepsilon\}$$

onde $a \in \dot{F}$, $\varepsilon = \pm 1$ e $\Pi_a : \Pi\{\pm 1\} \longrightarrow \{\pm 1\}$ é a projeção sobre o a -ésimo fator.

Como a seguinte união é disjunta:

$$\Pi\{\pm 1\} = H(a, \varepsilon) \cup H(a, -\varepsilon)$$

os conjuntos $H(a, \varepsilon)$ são abertos e fechados.

Um espaço topológico X é chamado *totalmente desconexo* se quaisquer dois pontos distintos p e q podem ser separados por uma desconexão G_1 e G_2 de X , isto é: existem abertos disjuntos G_1, G_2 tais que $p \in G_1, q \in G_2$. Além disso G_1 e G_2 é uma desconexão para X , isto é: $X = G_1 \cup G_2$. Assim se $f, g \in \Pi_{\dot{F}}\{\pm 1\}$ e $f \neq g$, então existe $a \in \dot{F}$ tal que $\varepsilon = f(a) \neq g(a)$. Logo f e g são separados pela desconexão $H(a, \varepsilon)$ e $H(a, -\varepsilon)$. Assim $\Pi_{\dot{F}}\{\pm 1\}$ é um espaço booleano, isto é, Hausdorff, compacto e totalmente desconexo.

Resta provar que X_F é compacto e isto segue do famoso Teorema de Tychonoff ([4], Capítulo 12): “Produto cartesiano de espaço compacto com a topologia produto, é compacto”.

Como X_F é um subconjunto de $\Pi_{\dot{F}}\{\pm 1\}$, basta mostrar que X_F é fechado em $\Pi_{\dot{F}}\{\pm 1\}$, pois subconjuntos fechados tem as propriedades hereditárias (ou herdam as propriedades: Hausdorff e conexidade).

Teorema 16 X_F é um subconjunto fechado de $\Pi_{\dot{F}}\{\pm 1\}$. Assim, X_F é um espaço booleano com a respectiva topologia induzida.

Demonstração: Mostremos que X_F^C é aberto. Tome a aplicação $s : \dot{F} \longrightarrow \{\pm 1\}$ que não é definida por uma ordem. Dessa forma, pela Proposição 6, pelo menos uma das seguintes condições ocorre:

- (1) $s^{-1}(1) + s^{-1}(1) \neq s^{-1}(1)$
- (2) $s^{-1}(1)s^{-1}(1) \neq s^{-1}(1)$ (3) $s^{-1}(1) \cup s^{-1}(-1) \neq \dot{F}$

Consideremos que ocorre (1), então $a, b \in s^{-1}(1)$ implica que $a + b = c \notin s^{-1}(1)$ e daí, $s \in H(a, 1) \cap H(b, 1) \cap H(c, -1)$. Mas $(H(a, 1) \cap H(b, 1) \cap H(c, -1)) \cap X_F = \emptyset$ pois se $P \in X_F$, $\text{sign}(a) = \text{sign}(b) = 1$ então $\text{sign}(c) = 1$, contradição.

Se ocorre (2) ou (3) o raciocínio é análogo. □

Referências

- [1] CRAVEN, T. C. *The Boolean Space of Orderings of a Field*, T.A.M.S. vol. 209, 225-235, 1975.
- [2] LAM, T.Y. *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol.67, American Mathematical society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [3] HERSTEIN, I. *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.
- [4] SEYMOUR, L. *Topologia Geral*, Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda, coleção Schãum, São Paulo, 1973.