

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UM ESTUDO DE BIFURCAÇÕES DE CODIMENSÃO DOIS DE CAMPOS DE VETORES

Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto - SP
fevereiro - 2008

Arakawa, Vinicius Augusto Takahashi.

Um estudo de bifurcações de codimensão dois de campos de vetores
/ Vinicius Augusto Takahashi Arakawa. - São José do Rio Preto :
[s.n.], 2008.
105 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Teoria de bifurcação.
3. Bogdanov-Takens, Bifurcação de. 4. Hopf-zero, Bifurcação. I.
Buzzi, Claudio Aguinaldo. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto
de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

COMISSÃO JULGADORA

MEMBROS TITULARES

Prof. Dr. Claudio Aginaldo Buzzi
Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins

MEMBROS SUPLENTE

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

À minha família.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desse trabalho. Em especial para:

- Professor Claudio Buzzi, pelo brilhante trabalho de orientação desde a graduação, além de sua dedicação ao projeto e a mim.
- Minha família: Mãe, Pai, Vi, Vack, Victor, Má, Dani, Lalá e João Gabriel pelo suporte, incentivo, dedicação e por tudo que fizeram por mim.
- Deus, pela fé e bênção.
- Amigos, pelo incentivo, motivação, amor, companheirismo, e por tudo que fizeram por mim durante todos esses anos. Sem vocês, talvez não teria chegado onde cheguei. Em especial a Clézio, Du, Lígia, Paulinho, Alê Paulino, Marina, Grasi, Agnaldo, Zé, Kika, Iara, João, Zênia, Alê, Ju Landim, Nathy, Little, Carol, Durval, André, Mirela, Michelle, Renato, Tiemi, Rafa, Lari, Tukas, Marci, Lu, Lili, Eliana, Carlinhos, Gisa, Má, Ró, Isis, Rô, Júnior, Tati, Márcio, Luís, Juliano e Ernani.
- Aos colegas de faculdade, pela companhia e convivência, Pedro, Rafael, Marcos, Barana e Mateus.
- Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP de São José do Rio Preto, pela base fornecida. Em especial a Gorete, Toninho, Ermínia, Hélia, Hermes, Paulo Ricardo, Vanderlei e Waldemar, pelo companheirismo desde os primeiros anos de faculdade.
- Departamento de Ciências da Computação e Estatística do IBILCE/UNESP de São José do Rio Preto, pelo companheirismo e trocas de convivências.
- Membros da banca examinadora. Luciana, por todas as valiosas considerações e João pelas dicas e correções que enriqueceram nosso trabalho.
- FAPESP, pelo fomento.

*“O futuro não pode ser previsto, mas pode ser inventado.
É a nossa habilidade de inventar o futuro que nos dá esperança
para fazer de nós o que somos.”*
Dennis Gabor.

Resumo

Nesse trabalho são apresentados alguns resultados importantes sobre bifurcações de codimensão dois de campos de vetores. O resultado principal dessa dissertação é o teorema que dá o diagrama de bifurcação e os retratos de fase da Bifurcação de Bogdanov-Takens. Para a demonstração são usadas algumas técnicas básicas de Sistemas Dinâmicos e Teoria das Singularidades, tais como Integrais Abelianas, desdobramentos de Sistemas Hamiltonianos, desdobramentos versais, Teorema de Preparação de Malgrange, entre outros. Outra importante bifurcação clássica apresentada é a Bifurcação do tipo Hopf-Zero, quando a matriz Jacobiana possui um autovalor simples nulo e um par de autovalores imaginários puros. Foram usadas algumas hipóteses que garantem propriedades de simetria do sistema, dentre elas, assumiu-se que o sistema era reversível. Assim como na Bifurcação de Bogdanov-Takens, foram apresentados o diagrama de bifurcação e os retratos de fase da Bifurcação Hopf-zero reversível. As técnicas usadas para esse estudo foram a forma normal de Belitskii e o método do Blow-up polar.

Palavras-chave: Teoria de Bifurcações, Bifurcações de Codimensão Dois, Bifurcação de Bogdanov-Takens, Bifurcação Hopf-Zero Reversível.

Abstract

In this work is presented some important results about codimension two bifurcations of vector fields. The main result of this work is the theorem that gives the local bifurcation diagram and the phase portraits of the Bogdanov-Takens bifurcation. In order to give the proof, some classic tools in Dynamical System and Singularities Theory are used, such as Abelian Integral, versal deformation, Hamiltonian Systems, Malgrange Preparation Theorem, etc. Another classic bifurcation phenomena, known as the Hopf-Zero bifurcation, when the Jacobian matrix has a simple zero and a pair of purely imaginary eigenvalues, is presented. In here, is added the hypothesis that the system is reversible, which gives some symmetry in the problem. Like in Bogdanov-Takens bifurcation, the bifurcation diagram and the local phase portraits of the reversible Hopf-zero bifurcation were presented. The main techniques used are the Belitskii theory to find a normal forms and the polar Blow-up method.

Keywords: Bifurcation Theory, Codimension Two Bifurcations, Bogdanov-Takens Bifurcation, Reversible Hopf-Zero Bifurcation.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	xi
1 Preliminares	1
1.1 Introdução a Teoria Qualitativa das EDO's	1
1.1.1 Conceitos e Definições de Cálculo Avançado	2
1.1.2 Teorema Fundamental de Existência e Unicidade	3
1.1.3 Existência do Intervalo Maximal	4
1.1.4 Fluxo de uma Equação Diferencial	5
1.1.5 Estabilidade e Bifurcação	6
1.2 Variedades Invariantes	10
1.2.1 Variedade Central Global	12
1.2.2 Variedade Central Local	14
1.3 Formas Normais	15
1.4 Estudo de classificação de singularidades	17
1.4.1 Singularidades Hiperbólicas e Semi-hiperbólicas	18
1.4.2 Singularidades Nilpotentes	24
1.5 Campos de Vetores Rodados	25
1.6 Campos Hamiltonianos	27
2 Estudo da Bifurcação do Tipo Bogdanov-Takens	29
2.1 Diagrama de Bifurcação e Retrato de Fase do Sistema (2.6)	31
2.2 Forma Canônica de (2.5)	55
2.2.1 Teorema de Preparação de Malgrange	56
2.2.2 Obtenção da Forma Canônica de (2.5)	56
2.3 Versalidade de (2.6)	63
2.3.1 Definições Preliminares	63
2.3.2 Demonstração da Versalidade de (2.6)	65
3 Estudo da Bifurcação Hopf-Zero	73
3.1 Sistemas Reversíveis	74
3.2 Blow-Up	76

3.3	Forma Normal de Belitskii Reversível	76
3.4	Estudo dos Retratos de Fase e da Bifurcação do Sistema (3.2)	81
3.5	Desdobramentos das Regiões (I) e (II)	83
3.5.1	Desdobramento da Região (II)	84
3.5.2	Desdobramento da Região (I)	85
3.6	Transição entre as Regiões (I) e (II)	87
3.6.1	Região (A)	89
3.6.2	Sobre a curva SN_R	89
3.6.3	Região (B)	90
3.6.4	Sobre a curva B_2	91
3.6.5	Região (C)	92
3.6.6	Na origem $(\alpha, \beta) = (0, 0)$	93
3.6.7	Sobre a curva B_1	93
3.6.8	Diagrama de Bifurcação e Retratos de Fases de (3.5)	95
3.7	Considerações Finais	97

Referências Bibliográficas	99
-----------------------------------	-----------

Índice Remissivo	104
-------------------------	------------

Introdução

O estabelecimento de equações para modelar processos naturais é busca antiga do homem, e talvez tenha começado a ter sucesso na proposição das Leis de Newton da Mecânica. Basta conhecer o estado inicial de um sistema e todas as forças que nele atuam para que todo comportamento futuro esteja univocamente determinado pela resolução das equações provenientes dessas leis ([22]).

A natureza determinística dessa metodologia, aplicada com sucesso a uma imensa quantidade de problemas reais, popularizou o sonho da matematização do universo pelos cientistas. O obsessivo desejo do homem de prever e manipular o futuro encontrava nessas teorias a esperança de realização.

Ao longo dos séculos XVIII e XIX, físicos e matemáticos aprimoraram o uso das Leis de Newton, desenvolvendo métodos eficientes para a resolução dos mais diversos tipos de equações diferenciais, originárias, fundamentalmente, dos problemas de Mecânica. Entretanto isso não atraiu os pesquisadores de outras áreas para o uso dessas metodologias. Dois pontos pareciam falta para compatibilizar essas idéias com os processos biológicos, sociais e culturais que, efetivamente, nos rodeiam: o imponderável e o complexo.

Que espaço sobraria para o imponderável cotidiano social e cultural ou para o complexo cotidiano das ciências biológicas? Como considerar esses fatos nas equações?

Nesse contexto, a teoria dos sistemas dinâmicos, versão evoluída dos métodos de resolução de equações diferenciais, desempenha papel fundamental e sua ação tem início na conjectura do século XX, devida a Poincaré, de que sistemas mecânicos descritos por equações de caráter determinístico podem apresentar comportamentos imprevisíveis e, aparentemente, aleatórios ([35]).

Essa conjectura, correta para sistemas não-lineares, com a ajuda dos métodos computacionais, produziu aquilo que se popularizou como teoria do caos, caso particular da teoria das bifurcações dos sistemas dinâmicos. A teoria de bifurcações trata os sistemas dinâmicos como famílias de equações diferenciais parametrizadas e observa que variações nos

parâmetros produzem mudanças qualitativas nas soluções, sem que o formato original das equações seja alterado.

São esses pontos que podem ser indicativos da adequação da teoria dos sistemas dinâmicos aos problemas complexos dos modelos econômicos. As equações podem, de alguma forma, levar em conta os comportamentos imponderáveis e complexos, e questões como variabilidade, adaptação e emergência talvez possam ser modelados como influências de parâmetros na qualidade das soluções.

Podemos encontrar estudos nesse sentido de modelar-se problemas biológicos via sistemas dinâmicos em [44] e [8]

Os conjuntos de parâmetros correspondentes à manutenção do tipo de solução implicam estabilidade estrutural para o sistema modelado. Aqueles que correspondem à mudanças abruptas no tipo de solução implicam bifurcação.

Considere o sistema de equações diferenciais abaixo

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $f(0) = 0$. Se rotacionarmos e transladarmos o nosso problema, podemos supor, sem perda de generalidade, que a singularidade seja a origem. Pois estruturas topológicas do sistema não são alteradas com essas operações.

Podemos separar o sistema (1) acima da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + h(x),$$

onde $A = Jf(0)$, é o Jacobiano de f em $x = 0$ e h é a parte não-linear de f .

Grobman e Hartmann provaram que se A é hiperbólica, isto é, não admite autovalores com parte real nula, o sistema (1) é estruturalmente estável, e ainda, que é topologicamente conjugado ao sistema linear $\dot{x} = Ax$, a demonstração pode ser encontrada em [30].

Dessa forma, como estamos interessados em problemas de bifurcação, a nossa hipótese geral será de que o Jacobiano do nosso sistema admite pelo menos um autovalor com parte real nula.

Logo, considere a seguinte família de equações diferenciais parametrizadas

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon) \tag{2}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$), $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $f(0, 0) = 0$.

Suponhamos que a origem seja uma singularidade não hiperbólica do sistema (2) para $\varepsilon = 0$, isto é, admite uma singularidade com parte real nula. E ainda, como estudaremos bifurcações de codimensão dois, vamos supor que a origem tenha mais de um autovalor com parte real nula, isto é, que a origem seja uma singularidade duplamente degenerada. A codimensão de uma bifurcação essencialmente é dada pelo número de parâmetros mínimo necessários para que

a bifurcação seja completamente estudada.

Pela estabilidade estrutural na variedade estável e instável do sistema não-linear, correspondentes aos auto-espacos gerados pelo conjunto de autovalores com parte real negativa e positiva do Jacobiano, respectivamente, podemos reduzir o nosso problema para uma variedade central onde a dinâmica do sistema é possivelmente aleatória. Assim o linearizado do sistema deve ser semelhante a uma das seguintes formas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

(onde $\omega_1\omega_2 \neq 0$, $\omega_1 \neq k\omega_2$, $k=1,\dots,5$)

No capítulo 1, recordamos e citamos resultados que foram úteis durante o trabalho.

Estudamos, no capítulo 2, o caso A_1 , onde a matriz é a nilpotente. Admitindo que o linearizado é dado pela matriz nilpotente, determinamos sua forma normal e o seu respectivo desdobramento versal, que é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases} \quad (6)$$

Observe que o versal possui dois parâmetros, o que configura a codimensão dois da bifurcação. Essa bifurcação é conhecida na literatura como bifurcação do tipo Bogdanov-Takens ou desdobramento da cúspide, ou ainda, cúspide de ordem- n .

Nesse problema, uma importante e difícil parte foi estudar a existência de órbitas periódicas, homoclínicas ou heteroclínicas, e o número de órbitas periódicas correspondente a diferentes valores dos parâmetros. Para esses problemas, utilizamos ferramentas da teoria de bifurcações de Hopf e da teoria de bifurcações homoclínicas (heteroclínicas), e também de algumas técnicas especiais como transformações Blowing-ups, Integrais Abelianas e Equações de Picard-Fuchs, que serão detalhadas durante o trabalho.

Dado o versal (6), estudamos o seguinte teorema, encontrado na referência [11].

Teorema A

1. Existe uma vizinhança aberta Δ de $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ do \mathbb{R}^2 tal que o diagrama de bifurcação de (6) em Δ consiste da origem $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ e as seguintes curvas:

(a) $SN^+ = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$

(b) $SN^- = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = 0, \mu_2 < 0\}$

(c) $H = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = -\mu_2^2, \mu_2 > 0\}$

(d) $HL = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0\}$

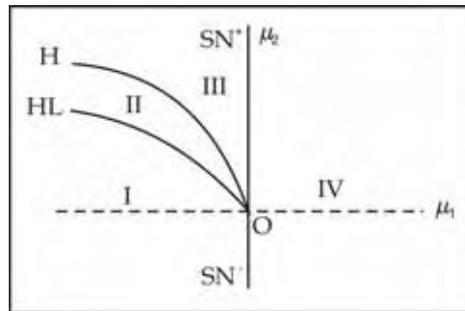


Figura 1: O Diagrama de Bifurcação de (6).

2. O Diagrama de Bifurcação e o retratos de fases de (6) para $\mu \in \Delta$ são mostrados nas Figuras 1 e 2, onde as regiões I, II, III, e IV são formadas pelas curvas de bifurcação acima.

No capítulo 3, estudamos um caso especial quando a matriz do linearizado é semelhante a A_2 . Estudamos uma classe de campos de vetores reversíveis da forma

$$\dot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

onde F é uma função suave, $F(0) = 0$. O sistema de equações diferenciais (7) é dito reversível se existe um germe de uma involução suave $\phi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ ($\phi \circ \phi = id$), satisfazendo a seguinte relação

$$F(\phi(x)) = -\phi' \cdot F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0.$$

Temos que o linearizado admite como autovalores $\{0, \pm i\}$, e a bifurcação que é configurada nesse caso é conhecida como bifurcação do tipo Hopf-Zero. Como adicionamos a hipótese do sistema ser reversível, a chamamos de bifurcação de Hopf-Zero Reversível.

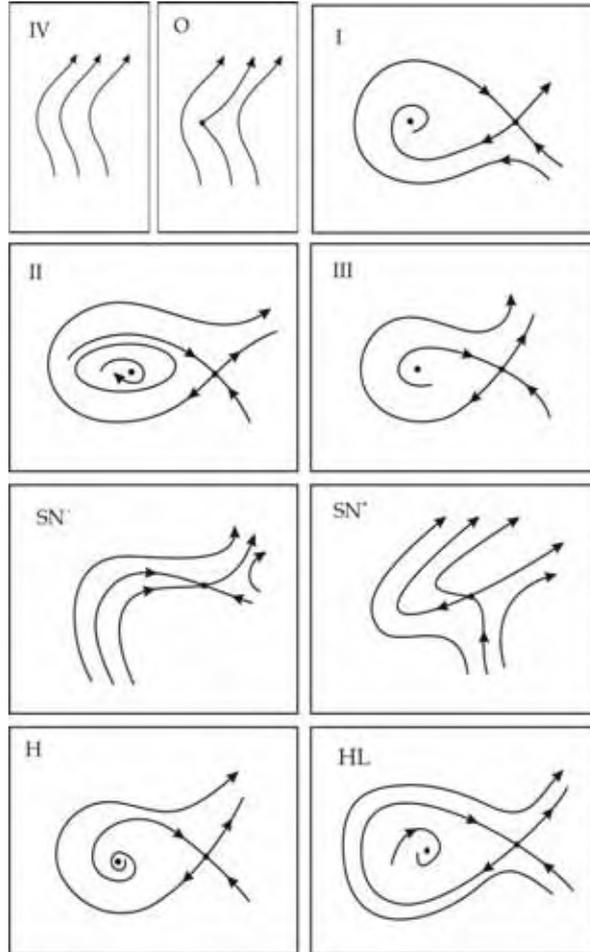


Figura 2: Retratos de fase de (6).

A motivação básica desse estudo vem do estudo da dinâmica local de sistemas reversíveis próximos a singularidade com um par de autovalores puramente imaginários e um autovalor nulo. A simetria do tipo reversível é uma das fundamentais simetrias discutidas na ciência natural. Conseqüentemente, ela surge em muitos sistemas dinâmicos físicos, em particular na mecânica clássica, como no problema de n -corpos, e na mecânica quântica. Muitos sistemas dinâmicos que surgem no contexto das aplicações possuem propriedades estruturais robustas, como por exemplo simetria ou estrutura Hamiltoniana. Sendo assim, para entender a dinâmica de tais sistemas, suas estruturas têm que ser levadas em conta, focalizando os estudos de fenômenos que são genéricos dentro do conjunto dos sistemas dinâmicos com a mesma estrutura. Nas últimas décadas destacou-se um grande interesse nos estudos de sistemas dinâmicos com simetria reversível (veja [19] e [43]). Recentemente, tem-se dado uma maior atenção para entender e usar a ação mútua entre as dinâmicas e as propriedades de simetria.

Existem alguns estudos em bifurcação e classificação geral (não necessariamente sistemas

reversíveis) de sistemas de equações diferenciais com linearizado admitindo autovalores $\{0, \pm i\}$ dados em [18], [38], entre outros.

Um dos métodos usados no estudo é realizar mudanças de coordenadas especiais assim como a teoria de formas normais, em especial a forma normal de Belitskii, pois dessa forma somos motivados a realizar uma mudança de coordenadas cilíndricas e reduzirmos o nosso problema que é dado tridimensionalmente para um problema bidimensional e assim aplicar Blow-up, que é uma técnica essencialmente usada em \mathbb{R}^2 .

Análogo ao estudo feito no capítulo 2, realizamos o estudo genérico do sistema reversível, e construímos um sistema a dois parâmetros dado abaixo em (8) para estudarmos a bifurcação encontrada no sistema. Os resultados estão resumidos no Teorema B, recomendamos, para maiores detalhes do estudo, a referência [10].

Teorema B *Considere o seguinte sistema*

$$X_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = \alpha + r^2 + \beta z^2 + z^4 \end{cases} . \quad (8)$$

1. *Existe uma vizinhança Δ de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ do \mathbb{R}^2 tal que o diagrama de bifurcação de (8) em Δ consiste da origem $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ e as seguintes curvas:*

- (a) $SN_R = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta; \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \beta < 0 \right\}$
- (b) $B_1 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta; \alpha = 0, \beta < 0\}$
- (c) $B_2 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta; \alpha = 0, \beta > 0\}$

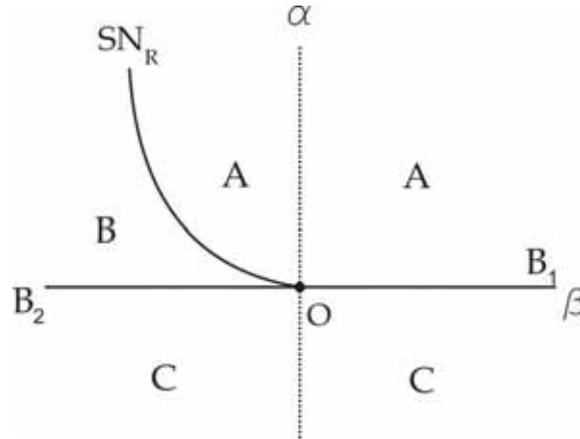


Figura 3: O Diagrama de Bifurcação de (8).

2. *O Diagrama de Bifurcação e o retratos de fases de (8) na vizinhança Δ são mostrados nas Figuras 3 e 4, onde as regiões A, B e C são formadas pelas curvas de bifurcação acima.*

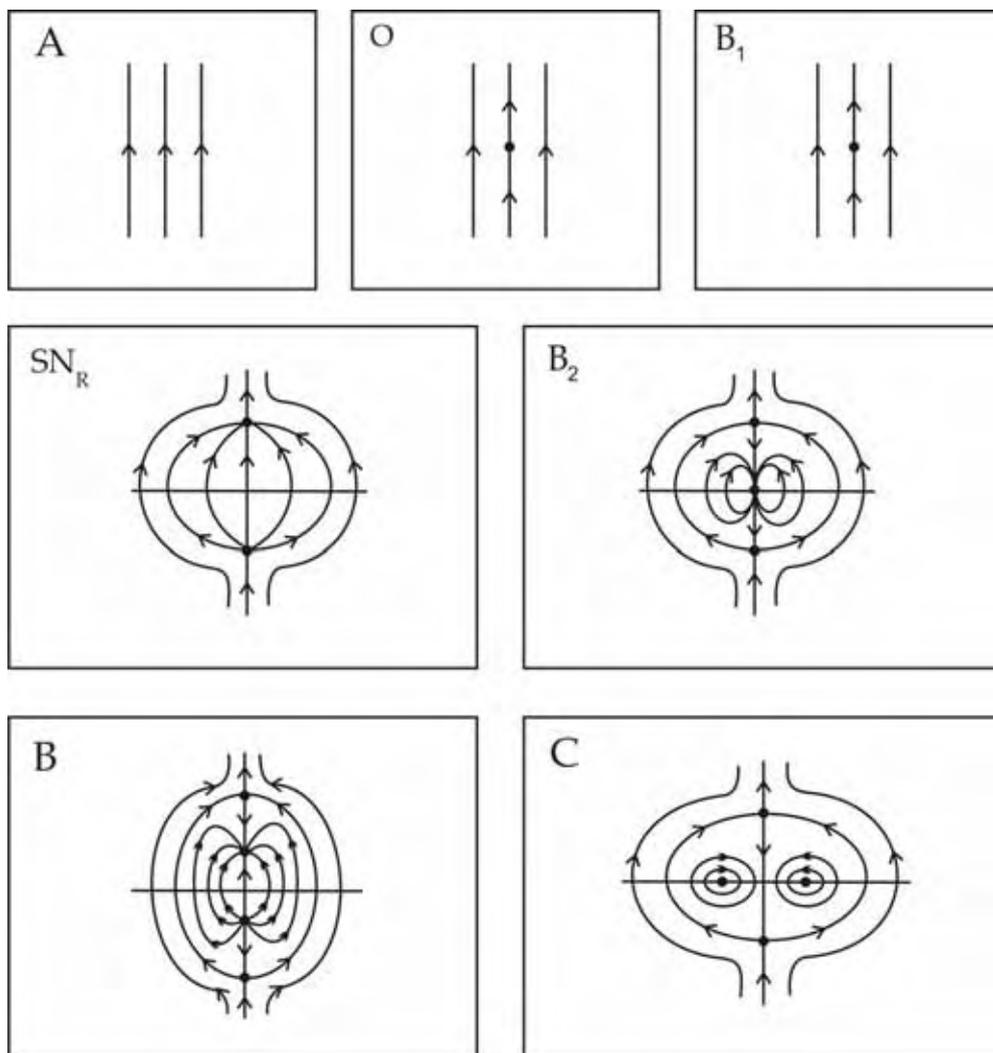


Figura 4: Retratos de fase de (8).

Preliminares

Antes de começarmos nosso estudo em bifurcações, precisamos de alguns resultados e definições preliminares, tais como o conceito de Variedade Central, o Teorema de Grobman-Hartman, Teoremas de classificação dos pontos singulares, Teorema da Variedade Estável, Formas Normais, Sistemas Hamiltonianos, Campos de Vetores Rodados, entre outros. Iniciaremos com uma breve introdução a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que iremos denotar por EDO's, onde iremos enunciar resultados clássicos como por exemplo o Teorema de existência e unicidade.

1.1 Introdução a Teoria Qualitativa das EDO's

Para essa seção indicamos as referências [6], [17], [26], [27], [40], [30] para maiores detalhes e demonstrações dos resultados citados.

Realizamos nosso estudo em sistemas de equações diferenciais não-lineares da seguinte forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

onde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Iremos ver que, sob certas condições da função f , mais precisamente, se f é classe C^1 , o sistema (1.1) tem uma única solução por cada ponto $x_0 \in E$ definida num intervalo máximo de existência $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. (Teorema de Existência e Unicidade).

Em geral, não é possível se resolver o sistema não-linear (1.1); porém conseguimos obter informações qualitativas importantes a respeito do comportamento local das soluções.

Em particular, temos o Teorema de Grobman-Hartman que diz que, topologicamente, o comportamento do sistema não-linear (1.1) próximo a um ponto singular hiperbólico x_0 (i.é, $f(x_0) = 0$ e os autovalores de $Df(x_0)$ têm parte real não nula) é semelhante, ou melhor, é topologicamente conjugado a um sistema linear do tipo

$$\dot{x} = Ax$$

próximo a origem, onde $A = Df(x_0)$ (Jacobiano de f em x_0).

1.1.1 Conceitos e Definições de Cálculo Avançado

Antes de enunciarmos o Teorema fundamental de existência e unicidade do sistema não-linear (1.1) primeiro é necessário definirmos algumas terminologias e notações a respeito da derivada Df da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. As notações, definições e demonstrações dos teoremas dessa subseção foram tiradas da referência [26]. Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ou simplesmente $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1 A função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se existe uma transformação linear $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

A transformação linear $Df(x_0)$ é chamada de derivada de f em x_0 .

Teorema 1.2 Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em x_0 então todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, existem em x_0 e, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j.$$

Demonstração: Ver [26].

Definição 1.3 Suponha que V_1 e V_2 sejam dois espaços lineares normados com normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. Então $F : V_1 \rightarrow V_2$ é contínua em $x_0 \in V_1$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_2 < \varepsilon.$$

Definição 1.4 Definimos a aplicação derivada de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$Df : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

onde $x \mapsto Df(x)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do \mathbb{R}^n .

Definição 1.5 Seja $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável, com $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que f é de classe C^1 , e denotamos por $f \in C^1(E)$, se a derivada $Df : E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ for contínua em E .

Teorema 1.6 *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então $f \in C^1(E)$ se, e somente se, existem as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ e estas são contínuas.*

Demonstração: Ver [26].

Teorema 1.7 (Teorema da Função Implícita) *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , ($k \geq 1$), definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0) , tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é gráfico de uma função $\xi : I \rightarrow J$, de classe C^k . Tem-se $\xi'(x) = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$ estas derivadas sendo calculadas no ponto $(x, \xi(x))$.*

Demonstração: Ver [26].

Teorema 1.8 (Teorema de Stokes) *Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície compacta cujo bordo é a curva ∂M . Se $a, b, c : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 então*

$$\begin{aligned} \int \int_M \left[\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} \right) dx dz \right] = \\ = \int_{\partial M} a dx + b dy + c dz. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [26].

1.1.2 Teorema Fundamental de Existência e Unicidade

Finalmente, iremos enunciar o teorema de existência e unicidade para sistemas não lineares tais como (1.1), mas com a condição de $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Nessa subseção, recomendamos a referência [21] para as definições e demonstrações dos teoremas. Iremos apresentar o método de aproximações sucessivas que é um método clássico desenvolvido pelo matemático Picard, e com esse método ele demonstra o Teorema de existência e unicidade. Além disso, esse método tem grande relevância na Teoria de Sistemas Dinâmicos, principalmente, na Teoria Qualitativa das EDOs, pois além de ser usado nas demonstrações de importantes teoremas, como o Teorema da Variedade Estável e o Teorema de Grobman-Hartman, é um método relativamente simples.

Definição 1.9 *Suponha que $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então $x = x(t)$ é uma solução da equação diferencial (1.1) no intervalo I se x for diferenciável em I e, para todo $t \in I$, $x(t) \in E$*

$$x'(t) = f(x(t)).$$

E ainda, dado $x_0 \in E$, $x(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

no intervalo I se $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ e $x(t)$ é solução da equação diferencial (1.1) no intervalo I .

Teorema 1.10 (*Fundamental da Existência e Unicidade*) *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 e suponha que $f \in C^1(E)$. Então existe $a > 0$ tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tem uma única solução $x(t)$ no intervalo $[-a, a]$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [21].

Para a demonstração do Teorema de existência e unicidade é usado o método de aproximações sucessivas que é baseado no fato de $x = x(t)$ ser uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Dessa forma, x deve ser contínua e satisfazer a seguinte equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds.$$

Definimos como as aproximações sucessivas da solução da equação integral a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x_0 \\ u_{k+1}(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

A demonstração do teorema conclui que a seqüência (u_k) definida acima, converge para a única solução do PVI.

1.1.3 Existência do Intervalo Maximal

Na subseção anterior, vimos que se $f \in C^1(E)$, o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

tem uma única solução definida num intervalo $(-a, a)$. O teorema seguinte afirma que o problema admite uma única solução num intervalo maximal de existência (α, β) .

Teorema 1.11 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e suponha que $f \in C^1(E)$. Então para cada ponto $x_0 \in E$, existe um intervalo aberto maximal (α, β) no qual o problema de valor inicial (1.2) tem uma única solução. Isto é, se o problema inicial admite uma solução $y(t)$ num intervalo I , então $I \subset (\alpha, \beta)$ e $y(t) = x(t)$ para todo $t \in I$.*

Demonstração: Ver [21].

Definição 1.12 *O intervalo (α, β) definido pelo teorema anterior é chamado de intervalo maximal de existência da solução do problema de valor inicial (1.2), ou simplesmente intervalo maximal de existência do problema de valor inicial (1.2).*

Teorema 1.13 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo x_0 e seja $f \in C^1(E)$. Suponha que o problema de valor inicial (1.2) tem uma solução $x(t, x_0)$ definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então existe $\delta > 0$ e $K > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x_0)$, vizinhança aberta de x_0 de raio δ , o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = y. \end{cases}$$

tem uma única solução $x(t, y)$ definida em $[a, b]$ tal que

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| \leq |y - x_0| e^{K|t|}$$

e $\lim_{y \rightarrow x_0} x(t, y) = x(t, x_0)$ uniformemente para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração: Ver [21].

1.1.4 Fluxo de uma Equação Diferencial

Nessa subseção, definimos o fluxo de um sistema não-linear e apresentamos algumas propriedades básicas deles. Recomendamos a referência [32] para maiores detalhes.

Denotaremos o intervalo maximal de existência (α, β) da solução $\phi(t, x_0)$ do problema de valor inicial (1.2) por $I(x_0)$.

Definição 1.14 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, seja $\phi(t, x_0)$ a solução do PVI (1.2) definido no intervalo maximal de existência $I(x_0)$. Então para $t \in I(x_0)$, a aplicação*

$$\phi_t : E \rightarrow E$$

definida por $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ é chamada de fluxo da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$. $\phi(t)$ é também referido como fluxo do campo de vetores $f(x)$.

Teorema 1.15 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C^1(E)$. Então para todo $x_0 \in E$, se $t \in I(x_0)$ e $s \in I(\phi_t(x_0))$, segue que $s + t \in I(x_0)$ e*

$$\phi_{s+t}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0)).$$

Demonstração: Ver [32].

Teorema 1.16 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in C^1(E)$. Se $(t, x_0) \in \Omega := \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I(x_0)\}$, então existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\{t\} \times U \subset \Omega$. Segue também que $V = \phi_t(U) \subset E$ é um aberto e*

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x, \forall x \in U$$

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y, \forall y \in V$$

Demonstração: Ver [32].

Definição 1.17 *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in C^1(E)$ e $\phi_t : E \rightarrow E$ o fluxo da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $S \subset E$ é dito invariante com respeito ao fluxo ϕ_t se $\phi_t(S) \subset S$, para todo $t \in \mathbb{R}$. S é dito positivamente (negativamente) invariante com respeito ao fluxo ϕ_t se $\phi_t(S) \subset S$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$).*

1.1.5 Estabilidade e Bifurcação

Essa seção tem por objetivo principal, introduzir algumas notações e definições que serão usadas neste trabalho, e também fazemos algumas considerações em campos lineares para entendermos a motivação matemática de se estudar bifurcações, que definimos ao longo dessa seção.

Definição 1.18 Uma família de campos vetoriais X_μ sobre \mathbb{R}^n , a k parâmetros, onde $\mu \in \mathbb{R}^k$ denota o parâmetro, é definida por

$$X_\mu = p(x, \mu) \frac{\partial}{\partial x} + q(x, \mu) \frac{\partial}{\partial y}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde as funções coeficientes p e q são de classe C^∞ com respeito a $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Definição 1.19 Dentro do conjunto de todos os campos vetoriais sobre \mathbb{R}^n de classe C^r (para algum $1 \leq r < \infty$), denotado por $\mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n)$, consideramos a topologia C^s , ou seja, diremos que dois campos vetoriais X e Y estão próximos se para qualquer conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, todas as derivadas até ordem s de X e Y estão uniformemente próximas, ou dito de outra maneira, isto é,

$$\forall X \in \mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n), \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto e } \forall \varepsilon > 0 \text{ definimos}$$

$$U_{K,\varepsilon}^s(X) = \left\{ Y \in \mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n) \left| |\partial^j X(p) - \partial^j Y(p)| < \varepsilon, \forall 0 \leq j = \sum_{i=1}^n j_i \leq s, 0 \leq j_i \in \mathbb{N}, \forall p \in K \right. \right\}$$

onde $\partial^j X(p) = \frac{\partial^j X(p)}{\partial^{j_1} x_1 \dots \partial^{j_n} x_n}$, para $j = \sum_{i=1}^n j_i$.

A coleção de todas $U_{K,\varepsilon}^s(X)$, K compacto e $\varepsilon > 0$, forma uma base para a topologia C^s em $\mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n)$.

Quando falamos sobre bifurcações, não podemos deixar de comentar sobre estabilidade estrutural. Iremos definir alguns conceitos para ilustrarmos essa idéia de bifurcação matematicamente.

Definição 1.20 Dois campos vetoriais X, Y definidos em abertos U e V de \mathbb{R}^n , respectivamente, são ditos topologicamente equivalentes quando existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que leva órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação. Quando o homeomorfismo h preserva o tempo, dizemos que X e Y são topologicamente conjugados.

Denotando ϕ e ψ os fluxos de X e Y , respectivamente, dizemos que h é uma conjugação topológica se $h(\phi(t, x, y)) = \psi(t, h(x, y))$.

A importância de se ter uma conjugação topológica entre dois campos é que dados $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ com A topologicamente conjugado a B então A é atrator (repulsor) se, e somente se, B é atrator (repulsor). Isto é, o que estudarmos ser válido para o campo A também será verdadeiro para o campo B . Da definição (1.20), decorre a definição de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.21 Denotemos por Σ_0 o conjunto dos campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n)$. O conjunto de bifurcações será dado por $\mathfrak{X}_r(\mathbb{R}^n) - \Sigma_0$.

Definição 1.22 Consideremos $X : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial de classe C^r ($r \geq 0$). Um desdobramento X_ε de classe C^r ($r \geq 0$) de X , isto é $X_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = X$ com $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, é um desdobramento versal de X se, e somente se, dado qualquer perturbação Y_μ de classe C^r com $\mu \in \mathbb{R}^m$ com $Y_\mu|_{\mu=0} = X$, tem-se:

- (i) Existem vizinhanças abertas U da origem em \mathbb{R}^k , V da origem em \mathbb{R}^m , W da origem em \mathbb{R}^n ;
- (ii) Existe uma função $\phi : V \rightarrow U$;
- (iii) Existe uma aplicação $H : W \times V \rightarrow W$ tal que para μ fixo, $H_\mu = H(\cdot, \mu)$ é um homeomorfismo, e além disso, para cada μ , Y_μ é topologicamente equivalente a $X_{\phi(\mu)}$ através de H_μ .

Definição 1.23 No desdobramento versal, o número k é unicamente definido e é dito a codimensão (ou ordem) de uma singularidade.

Campos Lineares

O resultado principal que citamos nessa subseção é o seguinte: Dado um campo linear $A \in L(\mathbb{R}^n)$, então temos que seu fluxo $\phi^A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é global.

Teorema 1.24 (Fluxo de Campos Lineares) Dada $A \in L(\mathbb{R}^n)$ temos que $\phi^A(t, x) = e^{tA}x$ para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, além disso, $\phi_t^A = e^{tA} \in L(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

Demonstração: Ver [30].

Esse teorema nos diz que o fluxo de sistemas lineares estão completamente estudados e são explicitamente calculados.

Campos Hiperbólicos

Antes de fazermos os comentários sobre essa seção, definimos o conceito de campo hiperbólico, singularidade e singularidade hiperbólica.

Definição 1.25 Dizemos que $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é hiperbólico se $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, onde $\sigma(A)$ denota o conjunto dos autovalores de A . Isto é, A é hiperbólico se não existem autovalores com parte real nula.

A definição de hiperbolicidade pode ser feita para sistemas não-lineares do tipo

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.3)$$

Definição 1.26 Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é uma singularidade de (1.3) se $f(x_0) = 0$. Uma singularidade é dita hiperbólica se $Df(x_0)$ é hiperbólica, isto é, todos os autovalores da matriz $Df(x_0)$ tem parte real não nula. O sistema linear

$$\dot{x} = Ax$$

onde $A = Df(x_0)$ é dito linearização de (1.3) em x_0 .

Em geral, dizemos que uma propriedade relativa a pontos de um espaço topológico é genérica se ela vale para um conjunto residual de pontos, ou seja, um conjunto que contém um aberto denso do espaço. Em [30], podemos encontrar a demonstração de que o conjunto dos campos lineares hiperbólicos é genérico no espaço dos campos lineares.

Os campos não-hiperbólicos, isto é, campos que possuem pelo menos um autovalor com parte real nula, não têm nenhum tipo de persistência ou estabilidade, ou seja, arbitrariamente próximo a qualquer campo não hiperbólico existem campos hiperbólicos e não hiperbólicos de aspectos totalmente distintos.

Exemplo 1.27 Tome a família

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

esta percorre $L(\mathbb{R}^2)$ localmente sempre com o mesmo retrato de fase, exceto quando $\lambda = 0$, justamente quando deixa de ser hiperbólica. Para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, os retratos de fase de A_{λ_1} e A_{λ_2} são parecidos (são selas topologicamente conjugadas) e para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, os campos A_{λ_1} e A_{λ_2} são atratores, portanto, topologicamente conjugados. Agora, se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, mesmo sendo $|\lambda_1 - \lambda_2|$ arbitrariamente pequeno, os retratos de fase de A_{λ_1} e A_{λ_2} são totalmente distintos. O valor do parâmetro λ no qual o retrato de fase de A_λ muda é chamado de bifurcação da família. As bifurcações se situam sempre em valores do parâmetro para os quais o campo deixa de ser hiperbólico.

Além da hiperbolicidade implicar em estabilidade estrutural, o teorema a seguir, conhecido como Teorema de Grobman-Hartman, afirma que próximo a uma singularidade hiperbólica x_0 , o sistema não linear (1.3) tem a mesma estrutura qualitativa do sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad (1.4)$$

onde $A = Df(x_0)$.

Teorema 1.28 (Teorema de Grobman-Hartman) *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem e suponhamos que $f \in C^1(E)$. Se a origem é uma singularidade hiperbólica, então (1.3) e (1.4) são topologicamente conjugados numa vizinhança da origem. Isto é, temos*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0), \forall x_0 \in U \text{ e } t \in I_0.$$

Demonstração: Ver [21].

1.2 Variedades Invariantes

Definição 1.29 *Sejam $A \in L(\mathbb{R}^n)$ um campo linear e $E \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Dizemos que E é uma variedade invariante de A se E é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n e $A(E) \subset E$, ou seja*

$$Ax \in E, \forall x \in E.$$

Considere a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{1.5}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.

Considere o espectro $\sigma(A)$ de A

$$\sigma(A) = \sigma_s \cup \sigma_c \cup \sigma_u$$

onde $\sigma_s = \{\lambda \in \sigma(A) / \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, $\sigma_c = \{\lambda \in \sigma(A) / \operatorname{Re}\lambda = 0\}$, $\sigma_u = \{\lambda \in \sigma(A) / \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

Sejam E^s, E^c, E^u os autoespaços generalizados correspondentes a $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$, respectivamente. Por exemplo, $E^s = E^{\lambda_1} \oplus E^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E^{\lambda_k}$, com $\lambda_i \in \sigma_s$.

Definição 1.30 *Dada $A \in L(\mathbb{R}^n)$, dizemos que*

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = 0\}$$

é a variedade estável de A e que

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = 0\}$$

é a variedade instável de A .

Temos

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u.$$

com as projeções correspondentes

$$\pi_s : \mathbb{R}^n \rightarrow E_s,$$

$$\pi_c : \mathbb{R}^n \rightarrow E_c,$$

$$\pi_u : \mathbb{R}^n \rightarrow E_u.$$

Os teoremas seguintes, conhecidos como Teorema da Variedade Estável e da Variedade Central, encontrados em [32], nos garante que os subconjuntos E^s, E^c e E^u são variedades invariantes do campo linear $\dot{x} = Ax$, e ainda que existem variedades diferenciáveis S, U, W^c , tangentes aos subespaços E^s, E^u e E^c , respectivamente, que são invariantes e são os correspondentes do sistema não-linear (1.5).

Teorema 1.31 (*Teorema da Variedade Estável*) *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem. Suponhamos que $f \in C^1(E)$ e seja ϕ_t o fluxo do sistema não linear (1.5). Suponha ainda que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ tenha k autovalores com parte real negativa e $n-k$ autovalores com parte real positiva. Então existe uma variedade S diferenciável de dimensão k tangente ao subespaço estável E^s do sistema linearizado $\dot{x} = Ax$ em 0 tal que*

$$\forall t \geq 0, \phi_t(S) \subset S \text{ e,}$$

$$\forall x_0 \in S, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

E existe uma variedade $(n-k)$ -dimensional diferenciável U tangente ao subespaço estável E^u do linearizado $\dot{x} = Ax$ em 0 tal que

$$\forall t \geq 0, \phi_t(U) \subset U \text{ e,}$$

$$\forall x_0 \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Demonstração: Ver [32].

Teorema 1.32 (*Teorema da Variedade Central*) *Seja $f \in C^r(E)$, com $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem e $r \geq 1$. Suponhamos que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ tenha k autovalores com parte real positiva, j autovalores com parte real negativa e $m=n-k-j$ autovalores com parte real nula. Então existe uma variedade central $W^c(0)$ m -dimensional de classe C^r tangente ao subespaço E^c do linearizado $\dot{x} = Ax$ em 0 que é invariante pelo fluxo ϕ_t de (1.5).*

Demonstração: Ver [32].

Então, a estrutura do fluxo em $\Omega = S \cup U$ é relativamente simples. Porém, quando $\sigma_c \neq \emptyset$, a situação se torna bem diferente. Primeiro, a estrutura topológica de (1.5) com $f \neq 0$ é, em geral, distinta da de (1.5) com $f \equiv 0$, como observamos durante o desenvolvimento da dissertação. Segundo, estruturas mais complicadas do fluxo de (1.5) poderão surgir na variedade invariante $W^c(f)$. Assim, ao invés de considerarmos a equação n -dimensional para os problemas, consideraremos uma equação de dimensão menor em $W^c(f)$.

A variedade $W^c(f)$ é chamada de variedade central e nessa seção, o nosso objetivo é defini-la e darmos condições para que ela exista e seja diferenciável.

1.2.1 Variedade Central Global

Para essa subseção continuamos com a notação adotada em [11], o recomendamos também para maiores detalhes e demonstrações dos teoremas que seguem.

Considere a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (1.6)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.

Continuamos com a mesma notação E_s, E_c, E_u e π_s, π_c, π_u nesta seção, e sejam

$$E_h = E_s \oplus E_u, \quad \pi_h = \pi_s + \pi_u.$$

Sejam X, Y espaços de Banach e $C^k(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações C^k de X em Y . Definimos o espaço de Banach

$$C_b^k(X, Y) = \{\omega \in C^k(X, Y) / \|\omega\|_{C^k} := \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in X} |D^j \omega(x)| < \infty\}.$$

Agora, se $X = Y$, escrevemos $C_b^k(X)$.

Seja

$$\|D\omega\| = \sup_{x \in X} |D\omega(x)|.$$

Similarmente definimos

$$C_b^{k,1}(X, Y) = \left\{ \omega \in C_b^k(X, Y) / \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{\|D^k \omega(x) - D^k \omega(y)\|}{\|x - y\|_X} < \infty \right\}$$

com norma

$$\|\omega\|_{C^{k,1}} = \|\omega\|_{C^k} + \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{\|D^k \omega(x) - D^k \omega(y)\|}{\|x - y\|_X}.$$

Finalmente, denotamos por $\tilde{x}(t, x)$ a solução de (1.6) com a condição inicial $\tilde{x}(0, x) = x$. O teorema seguinte nos garante a existência e a unicidade da variedade W^c .

Teorema 1.33 1. Existe $\delta_0 > 0$, δ_0 dependendo apenas de A em (1.6) tal que se $f \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ e $Lip(f) < \delta_0$, então

$$W^c := \{x \in \mathbb{R}^n / \sup_{t \in \mathbb{R}} |\pi_h \tilde{x}(t, x)| < \infty\}$$

é invariante por (1.6) e é uma variedade Lipschitz de \mathbb{R}^n . Mais precisamente, existe uma única $\psi \in C_b^0(E_c, E_h)$ função Lipschitz tal que

$$W^c = \{x_c + \psi(x_c) / x_c \in E_c\}.$$

2. Se $\phi \in C_b^0(E_c, E_h)$ e o conjunto

$$M_\phi := \{x_c + \phi(x_c) / x_c \in E_c\}$$

é invariante por (1.6), então $M_\phi = W^c$ e $\phi = \psi$.

Demonstração: Ver [11].

Definição 1.34 W^c , definido no Teorema (1.33) é chamada de variedade central global de (1.6).

Finalmente, com a existência da Variedade Central, iremos enunciar o teorema que garante sua diferenciabilidade.

Teorema 1.35 Suponha $f \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $f(0) = Df(0) = 0$. Então existe $\delta_k > 0$ tal que se $\|Df\| < \delta_k$, a variedade central global W^c é de classe C^k , isto é, $\psi \in C_b^k(E_c, E_h)$, onde ψ é dado como no teorema anterior. Mais ainda, $Lip(\psi) < 1$, $\psi(0) = 0$ e $D\psi(0) = 0$. E além disso, se $\hat{x} \in W^c$, e $\tilde{x}_c(t) := \pi_c \tilde{x}(t, \hat{x})$, então $\tilde{x}_c(t)$ satisfaz a seguinte equação

$$\dot{x}_c = Ax_c + \pi_c f(x_c + \psi(x_c)), x_c \in E_c.$$

Demonstração: Ver [11].

1.2.2 Variedade Central Local

Na subseção anterior estabelecemos a existência, a unicidade e a suavidade da variedade central global para a equação (1.6). A condição $f \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ é natural mas a hipótese $Lip(f) < \delta_0$ para δ_0 pequeno requer muito da função. Se consideramos um problema de bifurcação apenas próximos a uma singularidade de (1.6), então precisamos definir uma variedade central local com condições mais gerais da função f . Isto pode ser obtido através da variedade central global de uma equação modificada usando a técnica de bump function, e a hipótese $\|Df\| < \delta_0$ será satisfeita automaticamente quando $f(0) = Df(0) = 0$.

Considere a bump-function $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- $\chi \in C^\infty$,
- $0 \leq \chi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$,
- $\chi(x) = 1$, se $|x| \leq 1$,
- $\chi(x) = 0$, se $|x| \geq 2$.

Relacionado a $f(x)$ em (1.6) e dado $\rho > 0$, definimos

$$f_\rho(x) = f(x)\chi\left(\frac{x}{\rho}\right), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, como uma modificação da equação (1.6), consideramos

$$\dot{x} = Ax + f_\rho(x). \tag{1.7}$$

Obviamente, se restringirmos x para o domínio $|x| < \rho$, então as equações (1.7) e (1.6) são as mesmas. O Lema a seguir nos diz que se ρ for suficientemente pequeno, então $\|Df_\rho\|$ pode ser bem pequeno também. Logo, podemos aplicar a teoria da variedade central global para (1.7) e ter o resultado a seguir, por exemplo, para (1.6).

Lema 1.36 *Se $f \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$ e $f(0) = Df(0) = 0$, então $f_\rho(x) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, para algum $\rho > 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0} \|Df_\rho\| = 0$.*

Demonstração: Ver [11].

1.3 Formas Normais

Recomendamos para essa seção de formas normais a referência [11] para maiores detalhes e demonstrações.

Já é conhecido que uma mudança de coordenadas linear

$$x = Ty$$

transforma uma equação diferencial linear

$$\dot{x} = Ay$$

na seguinte forma

$$\dot{y} = (T^{-1}AT)y,$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, A e T são matrizes $n \times n$, e T é não degenerada. Então, sem mudar a estrutura topológica das órbitas, podemos estudar o caso onde a matriz A está na sua forma de Jordan.

O que podemos perguntar é se seria possível realizarmos um procedimento similar para equações diferenciais não lineares, isto é, se conseguimos obter uma forma mais simples da equação via uma mudança de coordenadas. A resposta para isso é positiva e a teoria de Formas Normais é que nos dá essa forma mais simples da equação.

Apesar da forma normal da equação não ser única, a teoria de formas normais será muito útil no estudo dos problemas de bifurcação.

Aqui, iremos nos preocupar com campos de vetores nas proximidades da singularidade que tomaremos, sem perda de generalidade, como sendo a origem. Considere a equação diferencial:

$$\dot{x} = Ax + h(x), \tag{1.8}$$

onde $x \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz $n \times n$ com entradas complexas, e $h(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$, quando $|x| \rightarrow 0$.

Considere um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$ numa vizinhança Ω da origem:

$$x = \xi(y), y \in \Omega, \tag{1.9}$$

onde $\xi(0) = 0$. Substituindo (1.9) em (1.8), obtemos:

$$\dot{y} = \xi_y^{-1}(y)A\xi(y) + \xi_y^{-1}(y)h(\xi(y)), y \in \Omega, \tag{1.10}$$

onde ξ_y denota a derivada de $\xi(y)$ em relação a y e $\xi_y^{-1}(y)$ é a inversa de $\xi_y(y)$ em Ω . Note que a parte linear de (1.10) é $\xi_y^{-1}(0)A\xi_y(0)y$. Então, se A já está na sua forma canônica, podemos assumir que o difeomorfismo ξ em (1.9) é dado da seguinte forma

$$\xi(y) = y + \mathcal{O}(|y|^2), \text{ quando } y \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Então, podemos escrever (1.10) como

$$\dot{y} = Ay + g(y), y \in \Omega, \quad (1.12)$$

onde $g(y) = \mathcal{O}(|y|^2)$ quando $|y| \rightarrow 0$.

Nosso objetivo é determinar uma mudança de coordenadas (1.9) tal que a equação transformada (1.12) seja a mais simples possível, e ainda, de tal forma que as estruturas essenciais dos fluxos de (1.8) próximas a singularidade $x = 0$ estejam ainda mais evidentes.

Apresentamos, a seguir, um exemplo onde se utiliza um método para se determinar a forma normal desejada para o estudo futuro em bifurcações. Resumidamente, o método utilizado é apresentado a seguir.

Definimos $L_A : C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ dada pela equação homológica abaixo

$$(L_A \xi)(x) = \xi_x(x)Ax - A\xi(x).$$

Para determinarmos uma A-forma normal de ordem r , é suficiente resolvermos a equação diferencial parcial $L_{A^*} \xi = 0$, onde A^* denota a matriz transposta de A , para polinômios soluções de ordem r sem constantes ou termos lineares.

Exemplo 1.37 *Considere*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \xi(x) = \begin{bmatrix} \xi_1(x_1, x_2) \\ \xi_2(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

onde $\xi_1(x_1, x_2)$ e $\xi_2(x_1, x_2)$ são polinômios escalares de grau $r \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} L_{A^*} \xi(x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(x_1, x_2) \\ \xi_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ x_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \xi_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

É fácil ver que os polinômios soluções de ordem r (sem constantes ou termos de ordem 1) da equação $L_{A^*} \xi(x) = 0$, isto é, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0 \\ x_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \xi_1 = 0 \end{cases} ,$$

são

$$\begin{cases} \xi_1(x_1, x_2) = x_1^2 \phi_1(x_1) \\ \xi_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \phi_1(x_1) + x_1^2 \phi_2(x_1) \end{cases} ,$$

onde $\phi_1(x_1)$ e $\phi_2(x_1)$ são polinômios escalares arbitrários de ordem $r - 2$. Logo, uma A-forma normal de ordem r é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \phi_2(x_1) + x_1 x_2 \phi_1(x_1) \end{cases} .$$

Note que $r \geq 2$ poderia ser qualquer inteiro. Dessa forma, uma A-forma normal de ordem 2 é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b x_1^2 \\ \dot{x}_2 = a x_1^2 + b x_1 x_2 \end{cases} . \quad (1.13)$$

onde a, b são constantes complexas.

Finalmente, ainda faz-se uma mudança de variáveis, escolhendo $\{x_1^2 e_2, x_1 x_2 e_2\}$ como o espaço complementar do \mathbb{R}^2 . De fato, se $v_1 = x_1^2 e_2$ e $v_2 = x_1^2 e_1 + x_1 x_2 e_2$, então tomamos $w_1 = \frac{1}{2} x_1^2 e_2$ e $w_2 = x_1 x_2 e_2$. E dessa forma, $\{w_1, w_2\}$ é outro espaço complementar de \mathbb{R}^2 . E então chegamos na forma normal desejada

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a x_1^2 + b x_1 x_2 \end{cases} , \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

1.4 Estudo de classificação de singularidades

Nessa seção, iremos apresentar resultados úteis sobre singularidades hiperbólicas, semi-hiperbólicas e nilpotentes. Entende-se por singularidade semi-hiperbólica x_0 de $\dot{x} = f(x)$ aquela cujo Jacobiano $Df(x_0)$ admite apenas um autovalor com parte real nula no seu Jacobiano, enquanto que a singularidade Nilpotente admite como Jacobiano uma matriz semelhante a matriz Nilpotente.

Esses resultados serão úteis na hora de estudarmos os retratos de fase do sistema desejado e quando partirmos para o estudo das bifurcações.

Aqui, iremos abordar apenas sistemas de equações diferenciais em duas variáveis

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.15)$$

onde P e Q são funções C^r definidas num aberto U do \mathbb{R}^2 , com $r = 1, 2, \dots, \infty, \omega$, onde C^ω significa analítica.

1.4.1 Singularidades Hiperbólicas e Semi-hiperbólicas

Enunciaremos dois resultados que serão úteis para determinarmos o comportamento das singularidades. Para demonstrações e detalhes, recomendamos [2].

Caracterizamos o retrato de fase local numa vizinhança de uma singularidade hiperbólica no teorema seguinte. Apresentaremos o teorema para sistemas analíticos.

Definição 1.38 *Uma singularidade x_0 de (1.3) é dito um poço se todos o autovalores da matriz $Df(x_0)$ têm parte real negativa. Se todos os autovalores da matriz $Df(x_0)$ têm parte real positiva, x_0 é chamado de fonte. Uma singularidade hiperbólica x_0 será uma sela se $Df(x_0)$ admitir pelo menos um autovalor com parte real positiva e um autovalor com parte real negativa.*

Teorema 1.39 *(Teorema das Singularidades Hiperbólicas) Seja $(0, 0)$ uma singularidade isolada do campo de vetores X , dado por,*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + A(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + B(x, y) \end{cases}, \quad (1.16)$$

onde A e B são analíticas numa vizinhança da origem com $A(0, 0) = B(0, 0) = DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear do sistema na origem $DX(0)$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) *Se λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1\lambda_2 < 0$, então $(0, 0)$ é uma sela (veja Figura 1.1). Se denotamos por E_1 e E_2 os autoespaços associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente, então é possível determinarmos duas curvas analíticas invariantes, tangentes respectivamente a E_1 e E_2 em 0. Num deles, a origem é um atrator e, no outro, a origem é um repulsor. Nessas curvas invariantes, X é C^ω -linearizado. Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma (1.16) em uma das seguintes formas:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases},$$

caso $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ou

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\lambda_1 + f(x^k, y^l)) \\ \dot{y} = y(\lambda_2 + g(x^k, y^l)) \end{cases},$$

caso $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, com $k, l \in \mathbb{N}$, e f, g são funções C^∞ . Todos os sistemas da forma (1.16) são C^0 -conjugados a

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases},$$

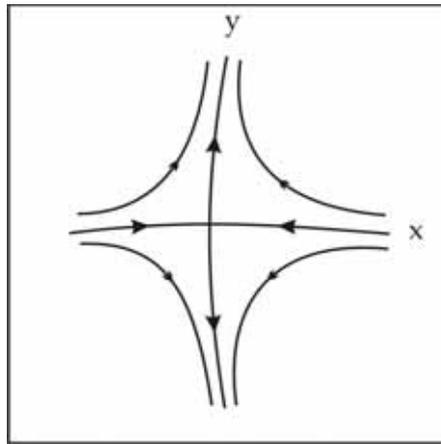


Figura 1.1: Sela.

(ii) Se λ_1 e λ_2 são reais com $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ e $\lambda_1\lambda_2 > 0$, então $(0,0)$ é um nó (veja Figura 1.2). Se $\lambda_1 > 0$ (respectivamente < 0) então a singularidade é dita repulsora ou instável (respectivamente atratora ou estável). Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma (1.16) em uma das seguintes formas:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases},$$

caso $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{N}$. Ou

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \delta x^m \end{cases},$$

para algum $\delta = 0$ ou 1 , caso $\lambda_2 = m\lambda_1$ com $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$. Todos os sistemas da forma (1.16) são C^0 -conjugados a

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x \\ \dot{y} = \delta y \end{cases},$$

com $\delta = \pm e$ e $\lambda_1 \delta > 0$.

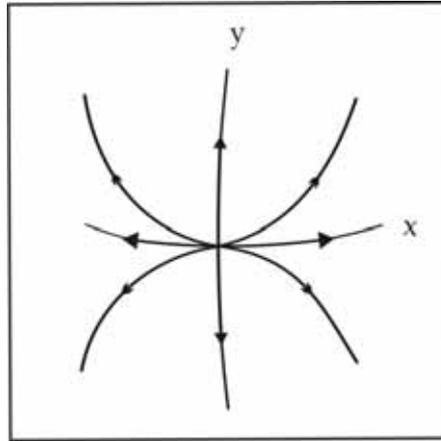


Figura 1.2: Nó.

(iii) Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ com $\alpha, \beta \neq 0$, então $(0,0)$ é um foco (veja Figura 1.3). Se $\alpha > 0$ (respectivamente < 0), $(0,0)$ é dito repulsor ou instável (respectivamente atrator ou estável). Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma (1.16) em

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}.$$

Todos os sistemas da forma (1.16) são C^0 -conjugados a

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x \\ \dot{y} = \delta y \end{cases},$$

com $\delta = \pm e$ e $\alpha \delta > 0$.

(iv) Se $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$, com $\beta \neq 0$, então $(0,0)$ é um centro. (veja Figuras 1.3 e 1.4).

Demonstração: Ver [2].

Todos os resultados são a respeito de singularidades hiperbólicas, exceto a afirmação (iv), caso quando X é topologicamente um foco ou um centro, que foi adicionada apenas para completude do teorema.

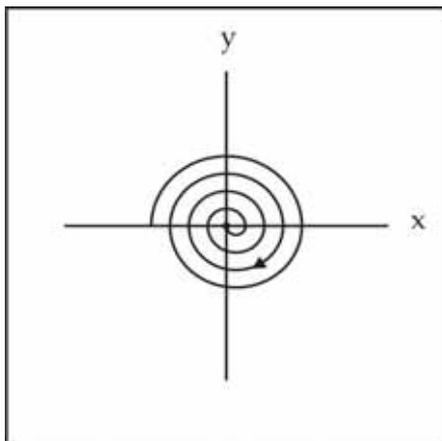


Figura 1.3: Foco.

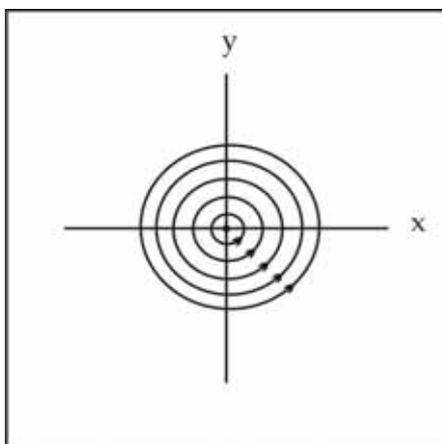


Figura 1.4: Centro.

O Teorema (1.39) também pode ser enunciado em termos do determinante (\det), traço (tr) e discriminante ($dis = tr^2 - 4\det$) da parte linear do sistema na singularidade. Isto é, corresponderia a

- (i) $\det < 0$,
- (ii) $\det > 0$, $tr \neq 0$ e $dis \geq 0$,
- (iii) $\det > 0$, $tr \neq 0$ e $dis < 0$,
- (iv) $\det > 0$, $tr = 0$, $dis < 0$.

Agora, vamos caracterizar os retratos de fase em singularidades semi-hiperbólicas, que é o teorema a seguir.

Teorema 1.40 (*Teorema das Singularidades Semi-Hiperbólicas*) *Seja $(0,0)$ uma singularidade isolada do campo de vetores X dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y) \\ \dot{y} = \lambda y + B(x, y) \end{cases}, \quad (1.17)$$

onde A e B são analíticas numa vizinhança da origem com $A(0,0) = B(0,0) = DA(0,0) = DB(0,0) = 0$ e $\lambda > 0$. *Seja $y = f(x)$ uma solução da equação $\lambda y + B(x, y) = 0$ numa vizinhança do ponto $(0,0)$ e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tenha a seguinte expressão $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então existe uma curva analítica invariante, chamada de variedade instável forte, tangente em 0 com o eixo- y , no qual X é analiticamente conjugado a*

$$\dot{y} = \lambda y;$$

que representa o comportamento repulsor, já que $\lambda > 0$. E ainda, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- (i) *Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0,0)$ é uma sela topológica (veja Figura 1.5.a). Tangente ao eixo- x existe uma única curva invariante C^∞ , chamada de variedade central, no qual X é C^∞ -conjugada com*

$$\dot{x} = -x^m(1 + ax^{m-1}), \quad (1.18)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. *Se essa curva invariante for analítica, então, nessa curva, X será C^ω -conjugada a (1.18).*

O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases},$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}.$$

- (ii) *Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0,0)$ é um nó topológico instável (veja Figura 1.5.b). Todo ponto que não pertencem a variedade fortemente instável pertence a uma curva invariante C^∞ , chamada de uma variedade central, tangente ao eixo- x na origem, e na qual X é C^∞ -conjugado a*

$$\dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}), \quad (1.19)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedade centrais são mutuamente e infinitamente tangentes umas as outras, e então no máximo uma delas pode ser analítica, e nesse caso X é C^∞ -conjugado a (1.19).

O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases},$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}.$$

(iii) Se m é par, então $(0,0)$ é uma sela-nó, isto é, uma singularidade cuja vizinhança é a união de um setor parabólico e dois setores hiperbólicos (veja Figura 1.5.c). Via mudança x para $-x$, vamos supor que $a_m > 0$. Todos os pontos à direita da variedade fortemente instável (lado $x > 0$) pertencem a uma curva invariante C^∞ , chamada de uma variedade central, tangente ao eixo- x na origem, e no qual X é C^∞ -conjugado a

$$\dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}), \quad (1.20)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedade centrais coincidem no lado $x \leq 0$ e são portanto infinitamente tangentes na origem. No máximo uma delas pode ser analítica, e nesse caso X é C^∞ -conjugado a (1.20).

O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases},$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}.$$

Demonstração: Ver [2].

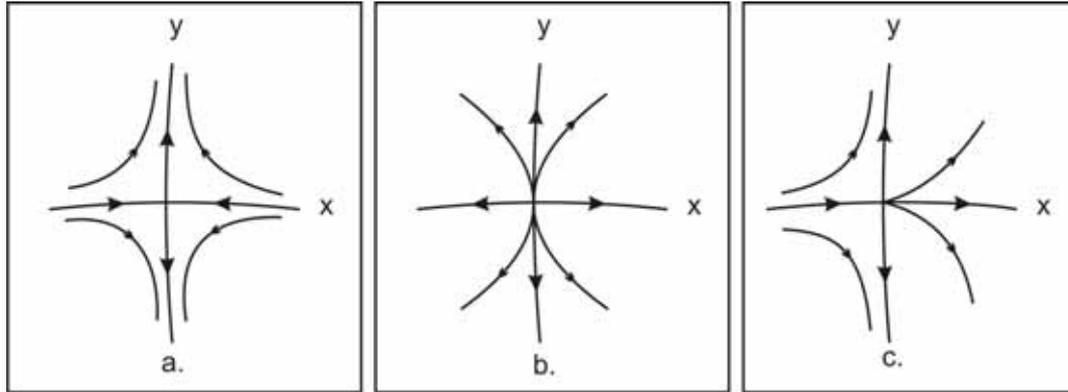


Figura 1.5: Retratos de fase das singularidades semi-hiperbólicas.

Obsevação 1.41 *O caso $\lambda < 0$ pode ser reduzido para o caso $\lambda > 0$ fazendo uma mudança de X para $-X$.*

1.4.2 Singularidades Nilpotentes

Finalmente, iremos enunciar um teorema muito útil para determinarmos o comportamento local de singularidades nilpotentes. Recomendamos a referência [1] e [2] para mais detalhes.

Teorema 1.42 *(Teorema das Singularidades Nilpotentes) Seja $(0,0)$ uma singularidade do campo de vetores X dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x, y) \\ \dot{y} = B(x, y) \end{cases}, \quad (1.21)$$

onde A e B são analíticas numa vizinhança da origem $(0,0)$ e também $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$. Seja $y = f(x)$ uma solução da equação $y + A(x, y) = 0$ numa vizinhança do ponto $(0,0)$, e considere $F(x) = B(x, f(x))$ e $G(x) = (\partial A/\partial x + \partial B/\partial y)(x, f(x))$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Se $F \equiv G \equiv 0$, então o retrato de fase de X é dado pela Figura (1.6).a.
2. Se $F \equiv 0$ e $G(x) = bx^n + o(x^n)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, então o retrato de fase de X é dado pelas Figuras (1.6).b ou c.
3. Se $G \equiv 0$ e $F(x) = ax^m + o(x^m)$ para $m \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$, então
 - (i) se m é ímpar e $a > 0$, então a origem é uma sela para o sistema X (veja a Figura (1.6).d) e se $a < 0$, então a origem será um centro ou um foco (veja Figuras (1.6).e,f e g.);

(ii) se m é par, então a origem é uma cúspide para X , isto é, topologicamente equivalente ao campo $Y(x, y) = (0, y)$. Veja Figura (1.6).h.

4. Se $F(x) = ax^m + o(x^m)$ e $G(x) = bx^n + o(x^n)$, com $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, e $n \in \mathbb{N}$, $a, b \neq 0$, então temos:

(i) se m é par, e

(i1) $m < 2n + 1$, então a origem é uma cúspide como na Figura (1.6).h;

(i2) $m > 2n + 1$, então a origem é uma sela-nó como nas Figuras (1.6).i ou j;

(ii) se m é ímpar e $a > 0$, então a origem será uma sela como na Figura (1.6).d;

(iii) se m é ímpar, $a < 0$, e

(iii1) ou $m < 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1)$, então a origem será um centro ou um foco. Veja Figuras (1.6).e, f e g;

(iii2) n ímpar e ou $m > 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1)$, então o retrato de fase da origem consiste de um setor hiperbólico e um elíptico, como mostrado na Figura (1.6).k;

(iii3) n ímpar e ou $m > 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$, então a origem é um nó como na Figura (1.6).l e m. O nó é atrator se $b < 0$ e repulsor se $b > 0$.

Demonstração: Ver [2].

1.5 Campos de Vetores Rodados

Nessa seção, fazemos uma breve apresentação sobre a dependência de ciclos limites em uma classe especial de famílias a um parâmetro, que são as famílias de campos de vetores rodados no plano. O primeiro trabalho sobre esse assunto pode ser encontrado no artigo [12] em 1953. Mais tarde, Seifert em [37], Perko em [31], Chen Xiang-yan em [45], [46] e [47], entre outros, sucessivamente desenvolveram ainda mais os trabalhos de Duff.

Considere campos de vetores da forma

$$(P(x, y, s), Q(x, y, s)), \quad (1.22)$$

dependendo de um parâmetro s . Suponha que conforme s varia em um intervalo (a, b) , as singularidades do campo de vetores (1.22) permaneçam inalterados, e para todo ponto fixo $p = (x, y)$ e quaisquer parâmetros $s_1 < s_2 \in (a, b)$, temos

$$\begin{vmatrix} P(x, y, s_1) & Q(x, y, s_1) \\ P(x, y, s_2) & Q(x, y, s_2) \end{vmatrix} \geq 0 \text{ (ou } \leq 0), \quad (1.23)$$

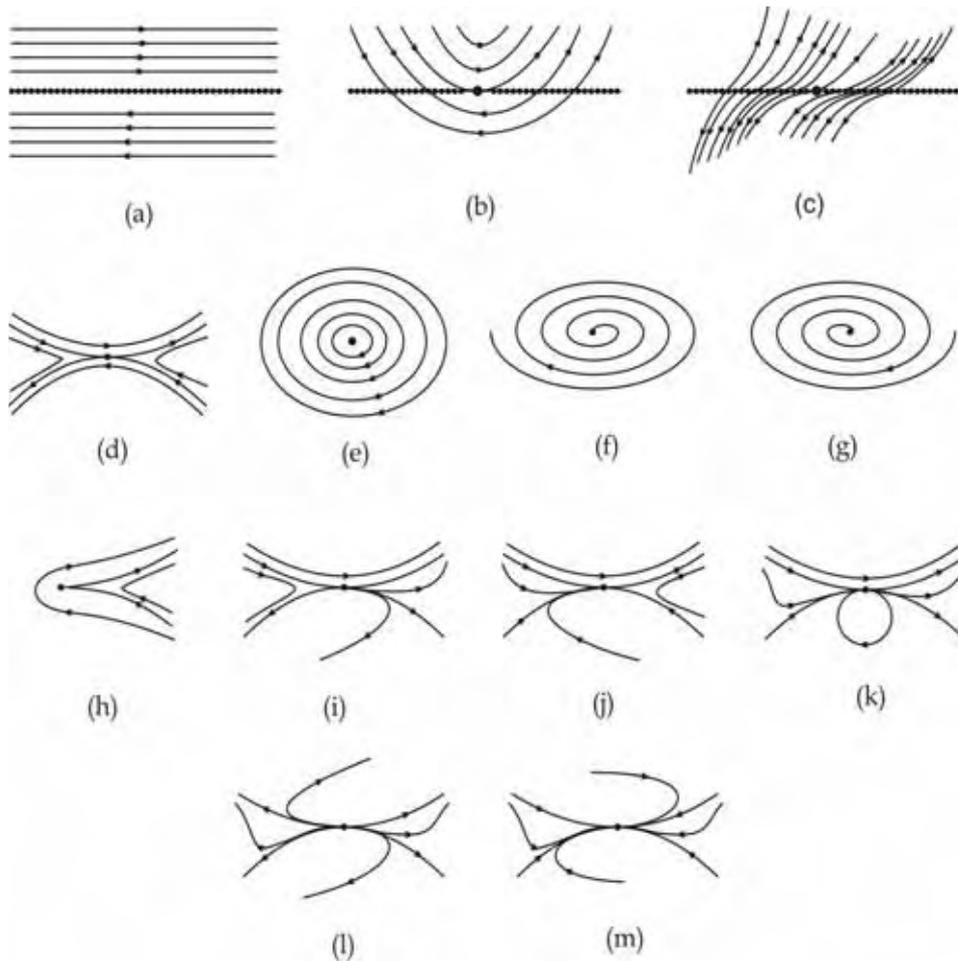


Figura 1.6: Retratos de fase das Singularidades Nilpotentes.

onde a igualdade não pode ser satisfeita numa órbita periódica inteira de (1.22) com $s = s_i$, para $i = 1, 2$. Então, os campos de vetores (1.22) são ditos uma família (generalizada) de campos de vetores rodados com respeito ao parâmetro s . Aqui, o intervalo (a, b) pode ser limitado ou ilimitado.

A interpretação geométrica da condição (1.23) é que, em qualquer ponto fixo $p = (x, y)$ a área orientada entre os vetores $(P(x, y, s_1), Q(x, y, s_1))$ e $(P(x, y, s_2), Q(x, y, s_2))$ tem o mesmo sinal (ou sinal oposto) ao sinal de $(s_2 - s_1)$. Isto é, em qualquer ponto fixo $p = (x, y)$, conforme o parâmetro s cresce, o vetor $(P(x, y, s), Q(x, y, s))$ pode apenas rodar em uma direção, mais ainda, o ângulo de rotação não pode exceder π . Para uma definição de ciclo limite estável ou instável, ciclo limite semi-estável e separatriz, recomendamos a referência [48].

Apresentamos quatro importantes resultados a respeito de órbitas periódicas e ciclos limites de famílias de campos de vetores rodados como (1.22), que serão úteis durante o estudo de bifurcações.

1. Propriedade de não-intersecção: Para distintos s_1 e s_2 , órbitas periódicas de (1.22) com $s = s_1$ e de (1.22) com $s = s_2$ não podem se intersectar.
2. Propriedade de estabilidade e instabilidade: Quando o parâmetro s muda monotonicamente, o ciclo limite estável e instável não podem desaparecer; ele expande ou contrai monotonicamente.
3. Propriedade de semi-estabilidade: Quando o parâmetro s varia em uma adequada direção, o ciclo limite semi-estável desaparece.
4. Propriedade de começo ou fim: Quando o parâmetro s varia, uma família de ciclos limites apenas pode desaparecer ou aparecer ou num ponto singular (bifurcação de Hopf), ou numa separatriz, ou no infinito (isto é, a família se torna ilimitada).

1.6 Campos Hamiltonianos

Faremos um breve comentário sobre campos hamiltonianos pois usaremos alguns resultados sobre tais campos durante o trabalho. Recomendamos [32] e [22] para maiores detalhes.

Em geral, qualquer sistema de segunda ordem designa-se um sistema hamiltoniano se existir uma função hamiltoniana $H = H(x, y)$ que permita encontrar as equações dinâmicas

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}.$$

A condição necessária, e suficiente, para que um sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases},$$

seja hamiltoniano, é que as funções f e g verifiquem a seguinte igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Exemplo 1.43 *Verifiquemos que o seguinte sistema de equações diferenciais é hamiltoniano.*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 + x^2 \end{cases}. \quad (1.24)$$

Temos nesse caso que $f(x, y) = y$ e $g(x, y) = -1 + x^2$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Assim o sistema (1.24) é um sistema hamiltoniano. Observe ainda que a função potencial é dada por $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}$.

Dessa forma, verifica-se que

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}.$$

As trajetórias de um sistema hamiltoniano, no espaço de fase, são as famílias de curvas

$$H(x, y) = c,$$

onde c é uma constante. Isto é, as trajetórias do sistema (1.24) são os níveis da função potencial H .

Logo, no exemplo (1.43) dado anteriormente, temos o seguinte retrato de fase, como mostra a Figura (1.7).

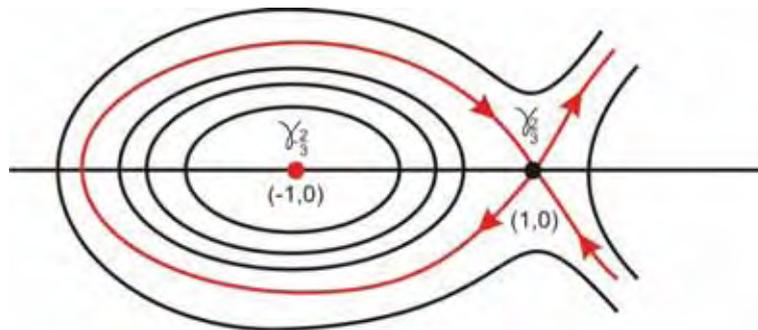


Figura 1.7: Retrato de fase do Hamiltoniano.

Uma última observação que iremos fazer sobre sistemas hamiltonianos é a respeito das suas singularidades. É fácil ver que o jacobiano de um sistema hamiltoniano é dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, se a função hamiltoniana for contínua, o traço dessa matriz será sempre nulo. Consequentemente, um sistema hamiltoniano só pode ter pontos de sela e centros. Não pode ter nós nem focos, pois nesses pontos o traço da matriz jacobiana é diferente de zero.

Um dos autovalores da matriz jacobiana será sempre igual ao outro, com sinal oposto. Assim as singularidades cujo jacobiano possui autovalores reais, serão pontos de sela, e as singularidades cujo jacobiano possui autovalores imaginários serão centros.

Estudo da Bifurcação do Tipo Bogdanov-Takens

Uma singularidade nilpotente de um campo de vetores planar, isto é, uma singularidade com parte linear equivalente a $y \frac{\partial}{\partial x}$, é genericamente de codimensão dois.

Mostramos que desdobramento a dois parâmetros

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (\mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.1)$$

é um desdobramento versal de

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm xy) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Também estudamos o diagrama de bifurcação e retratos de fase do campo (2.1). O estudo sobre tal sistema foi feito primeiramente por Takens em [42] e Bogdanov [4], por isso muitas vezes esse sistema é conhecido como de Bogdanov-Takens. Para o estudo da versalidade usamos como referências principais [11], [14] e [15]. Recentemente, um estudo global da família (2.1) foi feito para quaisquer valores de $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$. O retrato local que apresentamos nesse trabalho, para (μ_1, μ_2) numa vizinhança de $(0, 0)$ e qualquer desdobramento genérico a dois parâmetros é em verdade globalmente para a família, que tem no máximo uma órbita periódica. Esse estudo pode ser encontrado em [13]. Historicamente, essa bifurcação foi a última de codimensão dois a ser tratada. A razão para tal dificuldade se encontra em provar-se a existência e unicidade do ciclo limite que surge na bifurcação. Apresentamos aqui, uma demonstração completa e simplificada desse estudo.

Como dissemos anteriormente, nosso primeiro problema em bifurcações é o caso onde a matriz linearizada é não nula nilpotente..

Considere a família de equações diferenciais abaixo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, e $f, g \in C^\infty(x, y, \varepsilon)$.

Quando nos referimos a um sistema de equações diferenciais como (2.3), podemos associá-lo a uma família de campo de vetores dado por $X(x, y, \varepsilon) = f(x, y, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial y}$. Então, daqui em diante, vamos nos referir, por um abuso de linguagem, ao sistema da equações diferenciais dado como (2.3) tanto como sistema de equações quanto como uma família de campos de vetores, associados como anteriormente, pois na verdade, não há distinção quando os estudamos.

Vamos supor que, para $\varepsilon = 0$, (2.3) admita uma singularidade em $x = y = 0$ para o qual sua matriz linearizada seja similar ao bloco de Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, como vimos na seção de Formas Normais nas preliminares, mais precisamente no exemplo (1.37), a forma normal de (2.3) para $\varepsilon = 0$ é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^2 + bxy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \end{cases}. \quad (2.4)$$

Observamos que a primeira forma normal poderia estar na seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \\ \dot{y} = ax^2 + bxy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \end{cases},$$

mas com a mudança de variáveis $\bar{x} = x$ e $\bar{y} = y + \mathcal{O}(|(x, y)|^3)$, obtemos a forma (2.4).

Suponhamos também que $ab \neq 0$ em (2.4). Daí, sob tal hipótese, podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas e rescalonamento do tempo: $\tilde{x} = \alpha x$, $\tilde{y} = \beta y$ e $\tilde{t} = \gamma t$ onde

- $b > 0$

$$\alpha = a\sqrt[4]{\frac{b^2}{a^4}}, \quad \beta = a\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^6}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{b}{a^2}}.$$

- $b < 0$

$$\alpha = a\sqrt[4]{\frac{b^2}{a^4}}, \quad \beta = a\sqrt[4]{\frac{-b^3}{a^6}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{-b}{a^2}}.$$

Daí, o sistema (2.4) é transformado em

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \end{cases}. \quad (2.5)$$

Aqui, se $ab < 0$ então o tempo é invertido. Vamos considerar o caso $a = b = 1$, o caso $b = -1$ pode ser estudado de forma análoga.

Nesse capítulo, iremos mostrar que a seguinte família de campos de vetores a dois parâmetros é o desdobramento versal de (2.5)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases} \quad (2.6)$$

Para isso, dividiremos o nosso estudo em três partes. Primeiro iremos estudar o sistema (2.6) e determinar seu diagrama de bifurcação e os possíveis retratos de fase do sistema para diferentes valores de $(\mu_1, \mu_2) \in U$, onde U é uma pequena vizinhança da origem. Na segunda parte, iremos determinar uma forma canônica do sistema (2.5) e, finalmente, provar a versalidade de (2.6).

2.1 Diagrama de Bifurcação e Retrato de Fase do Sistema (2.6)

Teorema A

1. Existe uma vizinhança aberta Δ de $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ do \mathbb{R}^2 tal que o diagrama de bifurcação de (2.6) em Δ consiste da origem $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ e as seguintes curvas:

- (a) $SN^+ = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$
- (b) $SN^- = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = 0, \mu_2 < 0\}$
- (c) $H = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = -\mu_2^2, \mu_2 > 0\}$
- (d) $HL = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta \mid \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0\}$

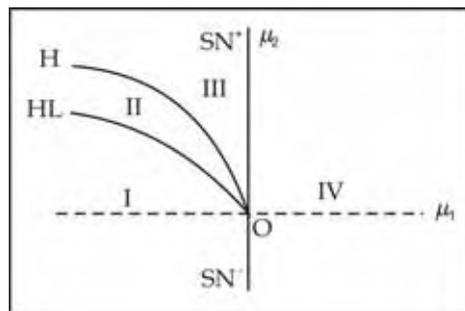


Figura 2.1: O Diagrama de Bifurcação de (2.6).

2. O Diagrama de Bifurcação e o retratos de fases de (2.6) para $\mu \in \Delta$ são mostrados nas Figuras 2.1 e 2.2, onde as regiões I, II, III, e IV são formadas pelas curvas de bifurcação acima.

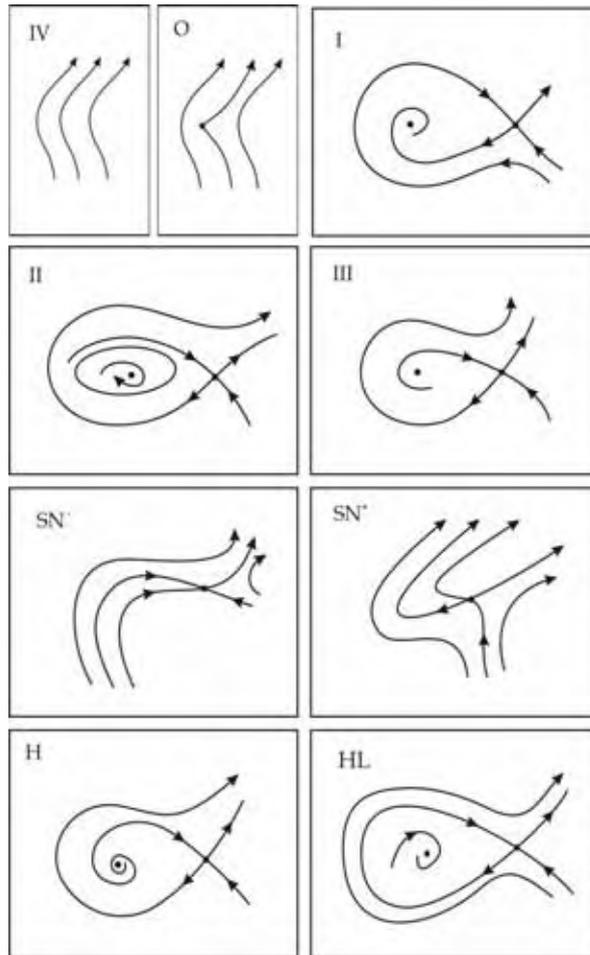


Figura 2.2: Retratos de fase de (2.6).

A demonstração do Teorema A será dada pelos lemas que o seguem, mais precisamente pelos Lemas (2.1), (2.7), (2.11) e (2.12).

Lema 2.1 *Existe uma vizinhança aberta $\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ de $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ tal que SN^+ e SN^- são curvas de bifurcação selá-nó, enquanto que H é uma curva de bifurcação de Hopf do sistema (2.6). Mais ainda, se $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_1 \cap$ região II, então o sistema (2.6) tem um único ciclo limite numa pequena vizinhança do foco $(-\sqrt{-\mu_1}, 0)$ o qual é instável e tende para o foco quando (μ_1, μ_2) tende para um ponto em H .*

Demonstração do Lema (2.1):

Vamos considerar, primeiramente o sistema na forma de (2.6).

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases} .$$

Vemos que as singularidades do sistema são da forma $(x_\Delta, 0)$ e que devem satisfazer a seguinte equação:

$$\mu_1 + x_\Delta^2 = 0.$$

Dessa forma, se $\mu_1 > 0$, o sistema (2.6) não admite singularidades. Agora, se $\mu_1 = 0$, a origem é a única singularidade do sistema.

Temos pelo Teorema (1.21)[4.(i1)] que a origem será uma cúspide se $\mu_2 = 0$ e, pelo Teorema (1.40)[(iii)], que a origem será uma sela-nó caso $\mu_2 \neq 0$.

Finalmente, estudamos o caso onde $\mu_1 < 0$. Agora, temos duas singularidades:

$$p_1 = (\sqrt{-\mu_1}, 0) \quad p_2 = (-\sqrt{-\mu_1}, 0).$$

Calculando o linearizado, obtemos o seguinte:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x + y & \mu_2 + x \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A(p_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{-\mu_1} & \mu_2 + \sqrt{-\mu_1} \end{bmatrix}.$$

Com isso,

- $\det A(p_1) < 0, \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$,
- $\text{tr} A(p_1) \in \mathbb{R}, \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$,
- $\text{dis} > 0, \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$.

E assim, p_1 é sela para qualquer $\mu_2 \neq 0$.

Da mesma forma, fazemos para p_2 .

$$A(p_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{-\mu_1} & \mu_2 - \sqrt{-\mu_1} \end{bmatrix}.$$

Agora,

- $\det A(p_2) > 0, \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$,
- $\text{dis} < 0, \forall (\mu_1, \mu_2) \in H$,
- $\text{tr} A(p_2) \geq 0$, se $\mu_2 \geq \sqrt{-\mu_1}$,

- $\text{tr}A(p_2) < 0$, se $\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}$.

Logo, p_2 é um foco atrator se $\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}$ e um foco repulsor se $\mu_2 \geq \sqrt{-\mu_1}$ numa vizinhança de H , observamos também que o comportamento de p_2 pode mudar, isto é, p_2 pode deixar de ser um foco, porém a natureza de estabilidade e instabilidade se mantém.

Com esses resultados, obtemos a bifurcação de Hopf na curva $H = \mu_1 = -\mu_2^2$, pois sobre a curva H a singularidade troca de estabilidade, passando de estável para instável. Falta apenas demonstrar o surgimento do ciclo limite para caracterizar por completo essa bifurcação. Também obtemos uma bifurcação Sela-Nó Genérica na curva $SN = SN^+ \cup SN^-$, pois sobre a curva SN há o surgimento de duas singularidades (uma sela e um nó) caso $\mu_1 < 0$ ou o desaparecimento da singularidade caso $\mu > 0$. E ainda, temos que a origem do sistema é uma cúspide para $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$.

Discussão Sobre o Ciclo Limite de (2.6)

Essa parte do estudo é a mais complicada desse sistema.

Para tal discussão, fazemos a seguinte mudança de variáveis e parâmetros:

- $\mu_1 = -\delta^4$,
- $\mu_2 = \zeta\delta^2$,
- $\bar{x} = \frac{x}{\delta^2}$,
- $\bar{y} = \frac{y}{\delta^3}$,
- $\bar{t} = \delta t$.

Com essa mudança, o sistema (2.6) se transforma no seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \zeta\delta y + \delta xy \end{cases} \quad (2.7)$$

Observe que para $\delta = 0$, (2.7) é um sistema hamiltoniano, com a função potencial $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}$. A nossa estratégia é determinarmos o retrato de fase do sistema (2.6) a partir do hamiltoniano, considerando-o como sendo uma perturbação desse sistema.

Sabemos que as órbitas do Sistema Hamiltoniano são os níveis da função potencial, então obtemos o seguinte retrato de fase:

Tome qualquer domínio compacto \bar{V} no plano xy . Observe que $\bar{X}_{\delta, \zeta}$ é um δ -desdobramento do campo de vetores hamiltoniano $\bar{X}_{0,0} = \bar{X} = y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial y}$ em \bar{V} .

A função Hamiltoniana é dada por

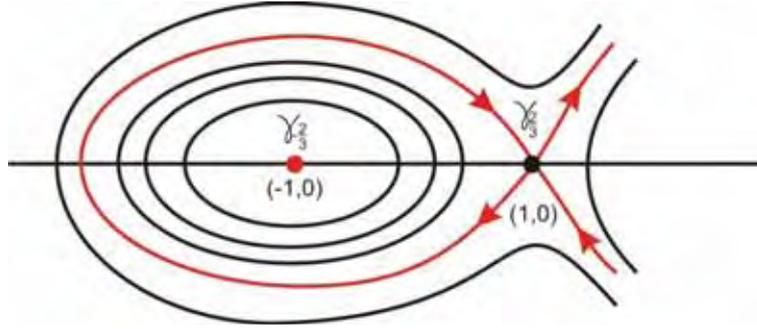


Figura 2.3: Retrato de fase do Hamiltoniano.

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right),$$

com dois pontos singulares $e = (-1, 0)$ que é um centro e uma sela $s = (1, 0)$. Temos também, no retrato do sistema, um disco singular \bar{D} preenchido por curvas de nível $\gamma_h \subset \{H = h\}$, onde $H(e) = -\frac{2}{3} \leq h \leq H(s) = \frac{2}{3}$.

Agora, tomamos um domínio \bar{V} contendo \bar{D} no seu interior como mostra a figura 2.4.

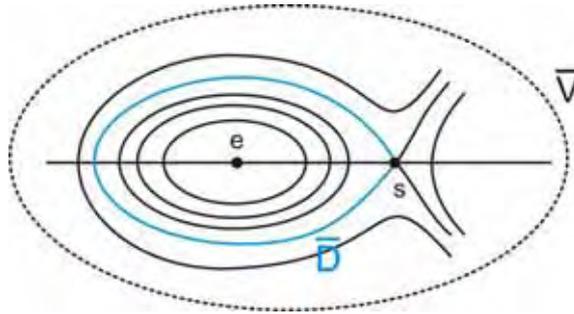


Figura 2.4: Domínio \bar{V} e o disco \bar{D} .

Para obtermos o retrato de fase de $\bar{X}_{\delta, \zeta}$ em \bar{V} para δ pequeno, iremos precisar do seguinte lema, como referência desse lema recomendamos [15].

Lema 2.2 (*Lema da Perturbação*) *Seja $\bar{X}_{\delta, \zeta} = \bar{X} + \delta X_D(\zeta) + \mathcal{O}(\delta)$ uma família de campos de vetores onde \bar{X} é um hamiltoniano e $\delta \geq 0$ é um parâmetro pequeno.*

Suponhamos que \bar{X} tenha uma região central \bar{D} contendo um centro e envolto de curvas de nível fechadas, onde \bar{D} é um disco aberto cuja fronteira pode conter outros pontos singulares. Seja $[e, s]$ um segmento de e para um outro ponto $s \in \partial\bar{D}$. Suponha que $[e, s] \subset \bar{D}$ e que seja transversal a \bar{X} .

Também supomos que e é uma singularidade de $\bar{X}_{\delta, \zeta}$ para todo (δ, ζ) . Seja $\beta \in]e, s[$ e K um compacto do espaço de parâmetros de ζ . Então existe uma constante $T(K) > 0$ tal que

1. A aplicação de Poincaré $P_{\delta,\zeta}(h)$ de $X_{\delta,\zeta}$ está definida de $[e, \beta]$ em $[e, s]$ para todo $(\delta, \zeta) \in [0, T(K)] \times K$.
2. Se parametrizarmos $[e, s]$ pelos valores da função potencial \bar{H} de \bar{X} ; isto é, $[e, s] \simeq [H(e), H(s)]$. Então,

$$P_{\delta,\zeta}(h) = h + \delta \int_{\gamma_h} \omega_D + o(\delta),$$

para todo $(h, \delta, \zeta) \in [H(e), H(s)] \times [0, T(K)] \times K$. Onde γ_h é a curva de nível de \bar{H} por $h \in [H(e), H(s)]$ orientada no sentido horário e ω_D é o dual simplético de X_D ; i.é, $\omega_D = A_D dy - B_D dx$, se $X_D = A_D \frac{\partial}{\partial x} + B_D \frac{\partial}{\partial y}$.

Demonstração do Lema (2.2) (da Perturbação):

1. Conseqüência imediata do Teorema da Função Implícita (1.7).
2. Seja $\omega_{\delta,\zeta} = d\bar{H} + \delta\omega_D + \mathcal{O}(\delta)$, ou seja, $\omega_{\delta,\zeta}$ é a forma dual de $X_{\delta,\zeta}$, e tome qualquer $h \in [H(e), H(s)]$.

Seja Γ_1 o segmento da trajetória de $X_{\delta,\zeta}$ entre h e $P_{\delta,\zeta}(h)$ e $\Gamma_2 = [P_{\delta,\zeta}(h), h]$, como mostra a figura 2.5.

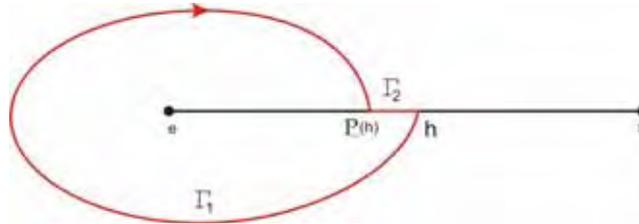


Figura 2.5: Γ_1 e Γ_2 .

Seja $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ orientada no sentido horário. Assim, temos

$$\int_{\Gamma} \omega_{\delta,\zeta} = \int_{\Gamma_1} \omega_{\delta,\zeta} + \int_{\Gamma_2} \omega_{\delta,\zeta}.$$

Agora, como Γ_1 é uma órbita de $X_{\delta,\zeta}$ e $X_{\delta,\zeta}$ é dual a $\omega_{\delta,\zeta}$, temos que

$$\int_{\Gamma_1} \omega_{\delta,\zeta} = 0.$$

Calculamos agora $\int_{\Gamma_2} \omega_{\delta,\zeta}$.

$$\int_{\Gamma_2} \omega_{\delta,\zeta} = \int_{\Gamma_2} d\bar{H} + \delta \int_{\Gamma_2} (\omega_D + \varphi(\delta, \zeta)).$$

onde $\varphi(\delta, \zeta)$ tende para 0, quando δ tende para 0. Agora,

$$\int_{\Gamma_2} d\bar{H} = -P_{\delta,\zeta}(h) + h.$$

E ainda,

$$\delta \int_{\Gamma_2} (-\omega_D + \varphi(\delta)) = o(\delta).$$

pois $|\Gamma_2| = |P_{\delta,\zeta}(h) - h|$ tende para 0 quando δ tende para 0.

Dessa forma, obtemos

$$\int_{\Gamma} \omega_{\delta,\zeta} = \int_{\Gamma_2} \omega_{\delta,\zeta} = h - P_{\delta,\zeta} + o(\delta).$$

Considere agora, γ_h a curva de nível do sistema Hamiltoniano do enunciado desse Lema. A curva fechada $\Gamma - \gamma_h$ limita uma corrente dupla, a chamamos de σ , como mostra a figura 2.6.

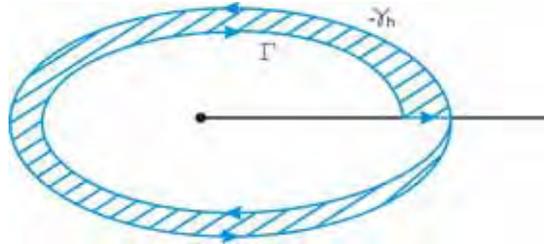


Figura 2.6: Região para aplicar o Teorema de Stokes.

Logo, $\partial\sigma = \Gamma - \gamma_h$. Aplicado o Teorema de Stokes ((2.6), segue que

$$\int_{\Gamma - \gamma_h} \omega_{\delta,\zeta} = \int_{\sigma} d\omega_{\delta,\zeta} = \int_{\sigma} (ddH - \delta d\omega_D) + \chi(\delta) = -\delta \int_{\sigma} d\omega_D + \chi(\delta),$$

onde $\chi(\delta) = o(\delta)$.

Como $\text{Área}(\sigma)$ tende para 0, quando δ tende para 0, segue que

$$\delta \int \sigma d\omega_D + \chi(\delta) = o(\delta)$$

e assim,

$$\int_{\Gamma} \omega_{\delta, \zeta} = \int_{\gamma_h} \omega_{\delta, \zeta} + o(\delta) = -\delta \int_{\gamma_h} \omega_D + o(\delta).$$

E então,

$$\int_{\Gamma} \omega_{\delta, \zeta} = h - P_{\delta, \zeta}(h) + o(\delta) = -\delta \int_{\gamma_h} \omega_D + o(\delta).$$

E assim, finalizamos a demonstração do Lema da Perturbação (2.2).

□

Integrais Abelianas

Observe que as hipóteses do Lema (2.2) (da Perturbação) se encaixam perfeitamente nas condições do nosso sistema. Logo podemos usá-lo para determinarmos a expressão da aplicação de Poincaré. Aqui, estaremos interessados em trabalhar a fórmula conseguida para a aplicação de Poincaré para o nosso sistema. Então temos que

$$P_{\delta, \zeta}(h) = h - \delta \int_{\gamma_h} \omega_D + o(\delta),$$

onde γ_h é a curva de nível da função Hamiltoniana $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$, orientada positivamente. E $\omega_D = y(\zeta + x)dx$.

A técnica usada para se calcular $\int_{\gamma_h} \omega_D$ é a de Integrais Abelianas, que mostramos a seguir. Escrevemos

$$\int_{\gamma_h} \omega_D = I(h, \zeta) = \zeta I_0(h) + I_1(h),$$

onde

$$I_i(h) = \int_{\gamma_h} yx^i dx.$$

Agora, seja

$$G_{\delta, \zeta}(h) = \frac{1}{\delta}(P_{\delta, \zeta}(h) - h) = I(h, \zeta) + \eta(h, \delta, \zeta)$$

onde $\eta(h, \delta, \zeta)$ tende para 0 quando δ tende para 0.

Observe que as raízes da função G correspondem univocamente aos pontos fixos da função de Poincaré $P_{\delta,\zeta}$ que, por sua vez, correspondem às órbitas fechadas de $(X_{\delta,\zeta})$ que intersectam o segmento $[e, s]$.

Temos que a aplicação G pode ser vista como um desdobramento de I , logo, faz sentido estudarmos suas raízes e por sua vez, a própria integral (Abeliana) $I(h, \zeta)$.

Vamos iniciar o estudo com algumas observações:

- $I_0(h) > 0$ para $h \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$,
- $\frac{I_1}{I_0} \rightarrow -1$, quando $h \rightarrow -\frac{2}{3}$.

De fato, considere σ_h a área delimitada por γ_h , pelo Teorema de Stokes (2.6), temos

$$I_i(h) = - \int_{\partial\sigma_h} yx^i dx = - \int_{\sigma_h} x^i dy \wedge dx = \int_{\sigma_h} x^i dx \wedge dy.$$

Logo, $I_0(h) = \int_{\sigma_h} dx \wedge dy = \text{area}(\sigma_h) > 0$, para todo $h \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Agora, para provarmos o segundo item, observe que

$$m(h)I_0 \leq I_1 \leq M(h)I_0, \forall h \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

onde m e M são funções que denotam o menor e o maior valor, respectivamente, que a coordenada x atinge em γ_h . Coincidentemente, neste caso, esses pontos são os pontos de intersecção de γ_h com o eixo- x .

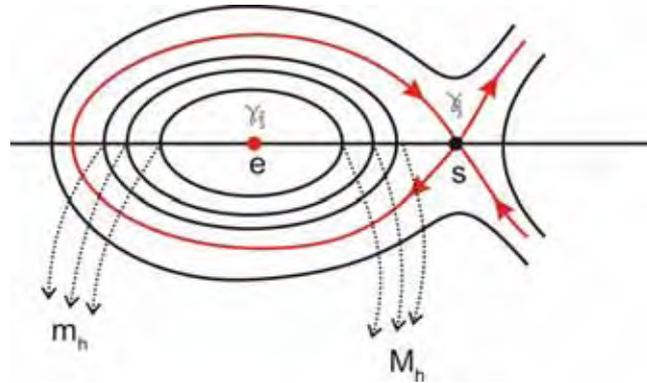


Figura 2.7: Maior e menor valor que a coordenada x atinge em γ_h .

Dessa forma,

$$\lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}} m(h) = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}} M(h) = -1.$$

E assim, temos a segunda observação.

Agora, estamos prontos para definirmos a função B de Bogdanov, que irá auxiliar no estudo daqui pra frente.

Observe que

$$I(h, \zeta) = 0 \iff \zeta I_0(h) + I_1(h) = 0 \iff \zeta + \frac{I_1}{I_0}(h) = 0.$$

Logo,

$$\zeta = B(h) = -\frac{I_1}{I_0}(h)$$

é uma função bem definida para $h \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, e ainda, $B\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$.

A função B definida acima é chamada de Função Bogdanov. Foi chamada assim pois Bogdanov demonstrou algumas propriedades que tal função satisfaz, citadas no teorema seguinte.

Teorema 2.3 (Bogdanov) *A função B de Bogdanov é contínua em $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Além disso, satisfaz $B\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ e $B\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{7}$, e sua derivada satisfaz $\frac{dB}{dh} < 0$ para todo $h \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, enquanto $\frac{dB}{dh} \rightarrow -\infty$ quando $h \rightarrow \frac{2}{3}$.*

Para demonstrarmos esse teorema é preciso demonstrar o seguinte lema, que diz que a função B satisfaz uma equação de Ricatti. Recomendamos [4] e [14] para maiores detalhes das demonstrações.

Lema 2.4 *A função B de Bogdanov satisfaz a seguinte equação de Ricatti:*

$$(9h^2 - 4)\frac{dB}{dh} = 7B^2 + 3hB - 5.$$

Demonstração do Lema (2.4):

Para demonstrarmos esse lema, iremos manipular as funções integrais I_i .

$$I_i(h) = \int_{\gamma_h} yx^i dx.$$

A equação que define o gráfico de γ_h é dada por

$$H = \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{x^3}{3} = h.$$

Podemos resolvê-la em y e obtemos:

$$y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{2 \left(\frac{x^3}{3} - x + h \right)},$$

onde $(x, y_+(x))$ parametriza a metade superior de γ_h enquanto que $(x, y_-(x))$ parametriza a metade inferior.

Como observamos acima, as raízes de y_{\pm} foram denotadas por $m(h)$ e $M(h)$ tal que $m(h) \leq M(h)$, então temos que I_i pode ser escrito da seguinte forma

$$I_i(h) = 2 \int_{m(h)}^{M(h)} y_+(x) x^i dx = 2J_i,$$

pois as curvas de nível de um Hamiltoniano são simétricas em relação ao eixo $-x$.

Definimos agora a seguinte função

$$R(x, h) = y_+(x) = \sqrt{2 \left(\frac{x^3}{3} - x + h \right)}.$$

Logo, J_i fica assim

$$J_i(h) = \int_{m(h)}^{M(h)} \omega^i R(\omega, h) d\omega.$$

Para podermos estudar algumas relações que J_i satisfaz, vamos derivar a equação acima em relação a h .

$$\frac{dJ_i}{dh} = \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^i}{R} d\omega + \underbrace{\frac{R(M(h), h)M'(h)}{0}}_0 - \underbrace{\frac{R(m(h), h)m'(h)}{0}}_0 = \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^i}{R} d\omega.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^i}{R} R^2 d\omega = \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^i}{R} \left(2 \left(\frac{\omega^3}{3} - \omega + h \right) \right) d\omega = \\ &= 2h \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^i}{R} d\omega - 2 \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^{i+1}}{R} d\omega + \frac{2}{3} \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^{i+3}}{R} d\omega = 2hJ'_i - 2J'_{i+1} + \frac{2}{3}J'_{i+3}. \end{aligned}$$

Outra maneira de encontrarmos alguma relação entre os J_i 's é fazermos a integração por partes de J_i .

$$J_i = \int_{m(h)}^{M(h)} \omega^i R(\omega, h) d\omega = \frac{\omega^{i+1}}{i+1} R(\omega, h) \Big|_{m(h)}^{M(h)} - \int_{m(h)}^{M(h)} \left(\frac{\omega^{i+1}}{i+1} \right) \frac{1}{R} (\omega^2 - 1) d\omega =$$

$$= 0 + \frac{1}{R} \left[\int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^{i+1}}{R} d\omega - \int_{m(h)}^{M(h)} \frac{\omega^{i+3}}{R} d\omega \right] = \frac{1}{i+1} [J'_{i+1} - J'_{i+3}].$$

pois $R(M(h), h) = R(m(h), h) = 0$.

Assim, obtemos as seguintes relações:

$$(1) \quad J_i = 2hJ'_i - 2J'_{i+1} + \frac{2}{3}J'_{i+3}$$

$$(2) \quad J_i = \frac{1}{i+1} [J'_{i+1} - J'_{i+3}].$$

E dessas relações, temos

$$J_i = 2hJ'_i - 2J'_{i+1} + \frac{2}{3}[-(i+1)J_i + J'_{i+1}] \iff (2i+5)J_i = 6hJ'_i - 4J'_{i+1}.$$

Em particular, para $i \in \{0, 1\}$, temos

$$\begin{cases} 5J_0 = -4J'_1 + 6hJ'_0 \\ 7J_1 = -4J'_2 + 6hJ'_1 \end{cases}.$$

Afirmção 2.5 $J'_0 \equiv J'_2$.

Prova da Afirmção (2.5):

Basta mostrarmos que $I_0 \equiv I_2$, que por sua vez, é equivalente mostrar que

$$I_2(h) = \int_{\gamma_h} \underbrace{yx^2 dx}_{\omega_2} = \int_{\gamma_h} \underbrace{y dx}_{\omega_0} = I_0(h).$$

Temos que

$$\omega_2 = \omega_0 = ydx - yx^2 dx = \underbrace{y(1-x^2)dx + y \cdot ydy}_{y dH} - \underbrace{y^2 dy}_{d\frac{y^3}{3}}.$$

Logo,

$$\int_{\gamma_h} (\omega_0 - \omega_2) = \int_{\gamma_h} y dH - \int_{\gamma_h} d\frac{y^3}{3} = 0.$$

As duas últimas integrais são nulas pois γ_h é uma curva de nível fechada de H .

Dessa forma, $I_0 \equiv I_2$ e daí, $J_0 \equiv J_2$ e finalmente, $J'_2 = J'_0$. E concluímos a prova da Afirmação (2.5). ■

Com essa afirmação chegamos no sistema de Picard-Fuchs (ver Referência [20]) abaixo:

$$\begin{cases} 5J_0 = -4J'_1 + 6hJ'_0 \\ 7J_1 = -4J'_0 + 6hJ'_1 \end{cases}.$$

Da segunda equação obtemos

$$J'_0 = \frac{1}{4}(6hJ'_1 - 7J_1).$$

Substituindo na primeira equação, temos

$$5J_0 = -4J'_1 + \frac{6h}{4}(6hJ'_1 - 7J_1) \Rightarrow (4 - 9h^2)J'_1 = -5J_0 - \frac{21}{2}hJ_1.$$

Voltando e isolando agora J'_0 , temos

$$J'_0 = \frac{1}{4} \left[6h \frac{(-5J_0 - \frac{21}{2}hJ_1)}{4 - 9h^2} - 7J_1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(4 - 9h^2)J'_0 = -30hJ_0 - 63h^2J_1 - 7(4 - 9h^2)J_1 = 30hJ_0 - 28J_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 - 9h^2)J'_0 = -\frac{15}{2}J_0 - 7J_1.$$

Assim, chegamos com

$$\begin{cases} J'_0 = \frac{1}{9h^2-4} \left(\frac{15}{2}hJ_0 + 7J_1 \right) \\ J'_1 = \frac{1}{9h^2-4} \left(5hJ_0 + \frac{21}{2}J_1 \right) \end{cases}.$$

Voltando para a função B , temos

$$B(h) = -\frac{I_1}{I_0} = -\frac{\frac{I_1}{2}}{\frac{I_2}{2}} = -\frac{J_1}{J_0}.$$

Logo

$$\frac{dB}{dh} = \frac{d}{dh} \left(-\frac{J_1}{J_0} \right) = - \left[\frac{J'_1 J_0 - J_0' J_1}{J_0^2} \right] = \frac{J'_0 J_1 - J'_1 J_0}{J_0^2}.$$

Substituindo com as relações do sistema de Picard-Fuchs, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dh} &= \frac{\frac{1}{9h^2-4} \left[\frac{15}{2}hJ_0 + 7J_1 \right] J_1 - \frac{1}{9h^2-4} \left[5J_0 + \frac{21}{2}J_1 \right] J_0}{J_0^2} = \\
&= \frac{1}{9h^2-4} \left[\frac{\frac{15}{2}hJ_0J_1 + 7J_1^2 - 5J_0^2 - \frac{21}{2}J_0J_1}{J_0^2} \right] = \\
&= \frac{1}{9h^2-4} \left[\frac{-3hJ_0J_1}{J_0^2} + \frac{7J_1^2}{J_0^2} - 5 \right] = \\
&= \frac{1}{9h^2-4} \left[\frac{\frac{15}{2}hJ_0J_1 + 7J_1^2 - 5J_0^2 - \frac{21}{2}J_0J_1}{J_0^2} \right] = \\
&= \frac{1}{9h^2-4} \left[-3h \underbrace{\left(\frac{J_1}{J_0} \right)}_B + 7 \underbrace{\left(\frac{J_1}{J_0} \right)^2}_{B^2} - 5 \right] = \\
&= \frac{1}{9h^2-4} (3hB + 7B^2 - 5).
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do Lema (2.4).

□

Demonstração do Teorema de Bogdanov (2.3):

Acabamos de mostrar que o aplicação B satisfaz a Equação de Ricatti abaixo

$$(9h^2 - 4) \frac{dB}{dh} = 7B^2 + 3hB - 5.$$

Ou seja,

$$(9h^2 - 4)dB - (7B^2 + 3hB - 5)dh = 0.$$

Assim, podemos analisar a aplicação B como sendo uma órbita do campo de vetores

$$Z = \begin{cases} \dot{h} = -(9h^2 - 4) \\ \dot{B} = -(7B^2 + 3hB - 5) \end{cases}.$$

As singularidades desse campo são:

- $\alpha_0 = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$,
- $\alpha_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{7}\right)$,
- $\alpha_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{7}\right)$,

- $\alpha_3 = \left(\frac{2}{3}, -1\right)$.

Já havíamos calculado $B(-\frac{2}{3}) = 1$. Agora, se $B = 0$, temos que $Z = (9h^2 - 4)\frac{\partial}{\partial h} + 5\frac{\partial}{\partial B}$. Assim, podemos restringir nossa atenção para o semi-plano positivo $B \geq 0$.

Nesse semi-plano, temos que Z admite duas singularidades:

$$\alpha_0 = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \quad e \quad \alpha_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{7}\right).$$

Calculando a parte linear de Z , temos

$$DZ(h, B) = \begin{bmatrix} -18h & 0 \\ -3B & -14B - 3h \end{bmatrix}.$$

Assim, temos

$$DZ(\alpha_0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}.$$

$$DZ(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -\frac{15}{7} & -12 \end{bmatrix}.$$

Logo, α_0 é uma sela hiperbólica e α_1 é um nó atrator.

Considere o conjunto compacto K definido por

$$K = \left\{ (h, B) \mid -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}, 0 \leq B \leq M \right\}.$$

Observe que a componente $\frac{\partial}{\partial B}$ do campo Z será estritamente negativa para $B = M$ suficientemente grande em K .

Como nas retas $h = -\frac{2}{3}$ e $h = \frac{2}{3}$, a componente $\frac{\partial}{\partial h}$ de Z é nula, temos que K é um conjunto invariante por Z , isto é, todas as órbitas positivas dos pontos de K permanecem em K , como mostra a Figura 2.8.

Fatos importantes:

1. Z admite uma única órbita ligando α_0 a α_1 que, neste caso, é a variedade estável de α_0 em K .
2. Não existem ciclos limites em K , já que a componente $\frac{\partial}{\partial h}$ de Z é positiva em K e α_1 é um atrator global de Z .
3. O ponto $\alpha_0 = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ e pelo menos um ponto no interior de K pertencem ao gráfico $(h, B(h))$, pela continuidade de B em $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Logo α_1 , por ser atrator global, será um ponto do gráfico.

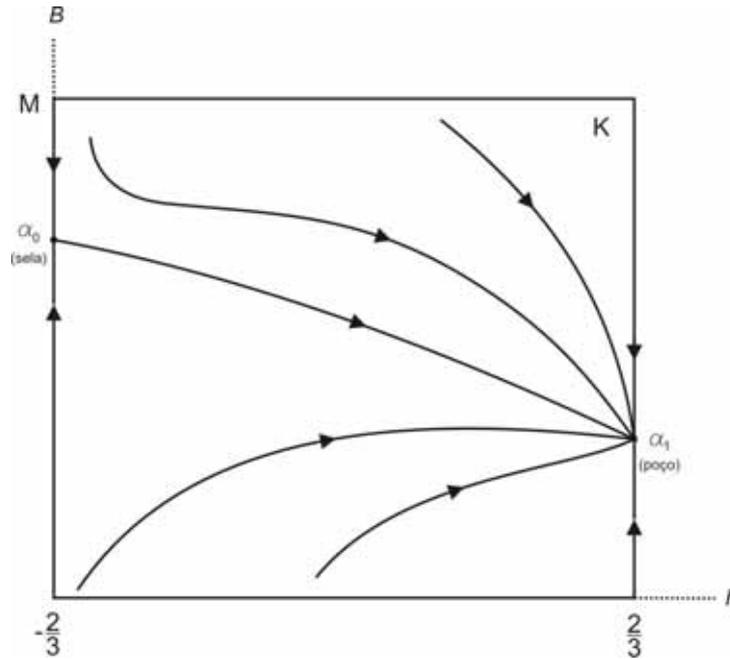


Figura 2.8: Compacto K e retrato de fase do sistema (B, h) .

Com isso, o gráfico de B coincide com a separatriz repulsora de α_0 .

Assim, obtemos que $B(h) \rightarrow \frac{5}{7}$, quando $h \rightarrow \frac{2}{3}$.

Considere agora a equação

$$7B^2 + 3hB - 5 = 0,$$

que é a equação de todos os pontos no espaço de fase onde a componente $\frac{\partial}{\partial B}$ de Z se anula.

A equação define uma hipérbole. Um arco dessa hipérbole une α_0 a α_1 , chamemos esse arco de σ .

A componente $\frac{\partial}{\partial h}$ de Z ao longo do arco é positiva, então o campo é horizontal apontando para a direita.

Agora, temos em α_0

- a inclinação de σ é igual a $-\frac{1}{4}$;
- a inclinação da variedade instável de α_0 é igual a $-\frac{1}{8}$.

De fato,

$$7B^2 + 3hB - 5 = 0 \Leftrightarrow 7(B(h))^2 + 3h(B(h)) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 14BB' + 3B + 3hB' = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad 14B' + 3 - 2B' = 0 \Leftrightarrow \\ & \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\alpha_0=(B=1, h=-\frac{2}{3})} \\ \Leftrightarrow 12B' + 3 = 0 \Leftrightarrow B' = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Para provar o segundo item, calculamos o autoespaço repulsor da sela α_0 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -3h - 24B = 0 \Leftrightarrow B = \underbrace{-\frac{1}{8} h}_{\text{item 2}}.$$

Agora, vamos calcular o autoespaço de α_0 .

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h = 0.$$

Isso implica que próximo a α_0 , a variedade instável localiza-se acima da hipérbole e pelo fato do campo na hipérbole ser horizontal e apontando a direita, temos que a variedade instável permanecerá acima de σ .

Agora, temos que acima de σ , a componente $\frac{\partial}{\partial B}$ de Z é negativa, logo $\frac{dB}{dh} < 0$ para $h \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Só falta mostrarmos que $B'(h) \rightarrow -\infty$ quando $h \rightarrow \frac{2}{3}$. Para isso, observe a seguinte linearização de Z em torno de α_1

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -\frac{15}{7} & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

onde $x = h - \frac{2}{3}$ e $y = B - \frac{5}{7}$.

Logo,

$$\dot{x} = \dot{h} = -(9h^2 - 4) = -\left(9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 4\right).$$

$$\dot{y} = \dot{B} = -(7B^2 + 3hB - 5) = -\left(7\left(y + \frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(y + \frac{5}{7}\right) - 5\right).$$

Logo

$$DZ(x, y) = \begin{bmatrix} -18\left(x + \frac{2}{3}\right) & 0 \\ -3\left(y + \frac{5}{7}\right) & -14\left(y + \frac{5}{7}\right) - 3\left(x + \frac{2}{3}\right) \end{bmatrix}.$$

$$DZ(0, 0) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -\frac{15}{7} & -12 \end{bmatrix}.$$

A solução para o problema de Cauchy em condição inicial (x_0, y_0) é dada por

$$x(t) = x_0 e^{-12t};$$

$$y(t) = -\frac{15}{7} t x_0 e^{-12t} + y_0 e^{-12t}.$$

Agora, y pode ser expresso como função de x . Temos

$$x(t) = x_0 e^{-12t} \Rightarrow t = -\frac{\ln \frac{x}{x_0}}{12}.$$

Logo,

$$y(x) = \frac{5}{28} x \ln \frac{x}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} x.$$

Derivando y em relação a x ,

$$y'(x) = \frac{5}{28x_0} + \frac{5}{28} \ln \frac{x}{x_0} + \frac{y_0}{x_0}.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = -\infty$. Dessa forma, temos $\frac{dB}{dh} \rightarrow -\infty$, quando $h \rightarrow \frac{2}{3}$.

Pelo Teorema de Grobman-Hartman, podemos expressar a equação B como função de h localmente próximo de $(h, B) = (\frac{2}{3}, \frac{5}{7})$

$$B(h) = \frac{5}{28} \left(h - \frac{2}{3} \right) \ln \left| h - \frac{2}{3} \right| + \psi(h), h \leq \frac{2}{3}.$$

onde $\psi(\frac{2}{3}) = 0$ e $\psi \in C^1$.

Conseqüentemente, obtemos que B é contínua e concluímos assim a demonstração do Teorema (2.3) de Bogdanov.

□

Bifurcação de Hopf

Com os resultados obtidos anteriormente, estamos aptos a discutir a existência do único ciclo limite do sistema na região II . A proposição (2.6) nos dá a existência do ciclo limite, e, conseqüentemente, caracteriza por completo a Bifurcação de Hopf e o retrato de fase na região II . Observamos que, nessa proposição, trabalhamos com os parâmetros (δ, ζ) , mas depois vamos mostrar que a curva H dada será a mesma dada no Teorema A .

Proposição 2.6 Para qualquer $\beta \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, existe uma constante $T = T_H(\zeta, \beta)$ tal que para qualquer $(h, \delta) \in [-\frac{2}{3}, \beta] \times [0, T]$

$$F(h, \delta, \zeta) = \zeta - B(h) + \chi(h, \delta, \zeta) = 0$$

possui uma única solução $\bar{\zeta}$, diferenciável em h e δ

$$\bar{\zeta} = L_H(h, \delta)$$

tal que

$$\frac{\partial}{\partial h} L_H(h, \delta) < 0, \forall h \in \left[-\frac{2}{3}, \beta\right].$$

e $L_H(h, 0) = B(h)$.

Demonstração:

Temos que, no intervalo $[-\frac{2}{3}, \beta]$, a função F é diferenciável. Agora, calculemos $\frac{\partial}{\partial \zeta} F(h, \delta, \zeta)$.

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} F(h, \delta, \zeta) = 1 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \chi(h, \delta, \zeta)$$

onde $\chi(h, \delta, \zeta) = G_{\delta, \zeta}(h) = \zeta + B(h) = \frac{1}{\delta}(P_{\delta, \zeta}(h) - h) - \zeta + B(h)$.

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \chi(h, \delta, \zeta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} P_{\delta, \zeta}(h) \right) - 1.$$

Agora,

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} P_{\delta, \zeta}(h) \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\int_{\gamma_h} \omega_D \right] = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\int_{\gamma_h} y(\zeta + x) dx \right] \underbrace{=}_{Green} \int_{\gamma_h} y dx = \text{área}(\gamma_h).$$

Assim, temos

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \chi(h, \delta, \zeta) = \text{área}(\gamma_h) - 1.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} F(h, \delta, \zeta) = \text{área}(\gamma_h) > 0.$$

Pela conservação do sinal, existe $T = T_H(\zeta, \beta)$ tal que para todo $\varepsilon \in [0, T]$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} F(h, \delta, \zeta) > 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita (1.7), temos a existência e a unicidade da função $L(h, \delta)$, concluindo a demonstração da Proposição (2.6). □

A curva H deve satisfazer a seguinte equação:

$$F(-2/3, \delta, \zeta(\delta)) = 0$$

Agora, temos que $H : \zeta = 1$, e assim, obtemos de $\mu_1 = -\delta^4$ e $\mu_2 = \zeta\delta^2$ que $\mu_1 = -\mu_2^2$. Com todos os resultados precedentes, finalizamos a demonstração do Lema (2.1). □

Bifurcação Homoclínica

Agora, vamos determinar a curva HL com um raciocínio análogo a determinação do ciclo limite, feito na Proposição (2.6) anterior. O lema seguinte nos dará a existência e a unicidade do loop homoclínico. Na demonstração do lema, iremos fazer a mudança de parâmetros para que determinemos a equação de HL nas variáveis desejáveis (μ_1, μ_2) . Observe que o próprio enunciado já é dado nesses parâmetros.

Lema 2.7 *Existe uma vizinhança aberta $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ de $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ tal que para $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$, existe uma curva $HL = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2 \mid \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0 \right\}$ que é uma curva de bifurcação homoclínica de*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy. \end{cases}$$

Demonstração:

Vamos trabalhar, inicialmente, com o sistema da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y}, \\ \dot{\bar{y}} = -1 + \bar{x}^2 + \zeta\delta\bar{y} + \delta\bar{x}\bar{y}. \end{cases}$$

onde $\mu_1 = -\delta^4$, $\mu_2 = \zeta\delta^2$, $\bar{x} = \frac{x}{\delta^2}$, $\bar{y} = \frac{y}{\delta^3}$, $\bar{t} = \delta t$.

Provamos que a função B de Bogdanov está bem definida em $h = \frac{2}{3}$. Assim, a condição de existência da órbita homoclínica está satisfeita. Falta mostrarmos que será única.

Temos que $B(2/3) = 5/7 = \zeta_0$.

$$F(h, 0, \zeta) = \zeta I_0(h) + I_1(h).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} F(h, 0, \zeta) = I_0(h) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} F(2/3, 0, \zeta) = I_0(2/3) > 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe $\delta_0 > 0$ e uma função $\zeta = \zeta(\delta)$ definida em $0 \leq \delta \leq \delta_0$ tal que

$$F(2/3, \delta, \zeta(\delta)) = 0,$$

isto é, $\gamma(2/3, \delta, \zeta(\delta))$ é a órbita homoclínica do sistema.

Vamos, agora, mudar aos parâmetros (μ_1, μ_2) como do enunciado. Temos que,

$$\zeta(\delta) = \frac{5}{7}(1 + \mathcal{O}(\delta)).$$

Agora,

$$\mu_1 = -\frac{\mu_2^2}{(\zeta(\delta))^2} = -\frac{\mu_2^2}{\left(\frac{5}{7}(1 + \mathcal{O}(\delta))\right)^2}.$$

Ainda, temos que

$$\frac{1}{(1 + \mathcal{O}(\delta))^2} = 1 + \mathcal{O}(\delta).$$

Logo, obtemos

$$\mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2(1 + \mathcal{O}(\delta)) = -\frac{49}{25}\mu_2^2 - \frac{49}{25}\mu_2^2\mathcal{O}(\delta).$$

Mostremos que

$$-\frac{49}{25}\mu_2^2\mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\mu_2^{5/2}).$$

De fato,

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow 0} \frac{\mu_2^2 f(\delta)}{\mu_2^{5/2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^4 (1 + g(\delta))^2 f(\delta)}{[\delta^2 (1 + g(\delta))]^{5/2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\delta)}{\delta} (1 + g(\delta))^{-1/2} = 0.$$

□

Nos Lemas (2.8) e (2.9), reenunciamos a Proposição (2.6) e o Lema (2.7), respectivamente.

Lema 2.8 Dado $h_1 \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, existe $\delta_1 > 0$ e uma única função $\zeta = \zeta_1(h, \delta)$ definida em $h \in \left[h_1, \frac{2}{3}\right]$, $0 \leq \delta \leq \delta_1$ tal que

(1^o) A trajetória $\gamma(h, \delta, \zeta_1(h, \delta))$, $h_1 \leq h \leq \frac{2}{3}$ e $0 < \delta \leq \delta_1$ é uma órbita periódica de

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \zeta\delta y + \delta xy. \end{cases}$$

que é o único ciclo limite do sistema e;

(2^o) $\frac{\partial \zeta_1}{\partial h} < 0$, $h_1 \leq h < \frac{2}{3}$ e $0 < \delta \leq \delta_1$.

Lema 2.9 Existe $h_2 \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\delta_2 > 0$ e uma única função $\zeta = \zeta_2(h, \delta)$ definida em $-\frac{2}{3} \leq h \leq h_2$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$ tal que

(i) Se $\zeta = \zeta_2(h, \delta)$, $-\frac{2}{3} < h \leq h_2$ e $0 < \delta \leq \delta_2$ então o sistema (2.7)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \zeta\delta y + \delta xy. \end{cases}$$

tem um ciclo limite instável $\gamma(h, \delta, \zeta_2(h, \delta))$ passando pelo ponto $(x(h), 0)$;

(ii) $\frac{\partial \zeta_2}{\partial h} < 0$, $-\frac{2}{3} < h \leq h_2$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$.

Tendo esses dois lemas, falta apenas mostrarmos os dois lemas seguintes para que possamos finalizar a demonstração do Teorema A. Para isto, ainda é necessário do resultado conhecido como Lema da colagem, da Topologia, que enunciaremos a seguir.

Lema 2.10 (Lema da Colagem) Seja $X = A \cup B$ um espaço topológico, A e B conjuntos fechados em X . Considere as funções $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$, tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$.

Seja $h : X \rightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Se f e g forem contínuas, então h é contínua.

Demonstração: A demonstração do Lema da colagem pode ser encontrado em [29].

Lema 2.11 Existe uma vizinhança aberta $\Delta_3 \subset \mathbb{R}^2$ de $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ tal que se $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_3$ e entre as curvas H e HL então o sistema (2.6)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy. \end{cases}$$

tem uma única órbita periódica e esta é instável. E ainda, quando (μ_1, μ_2) tende para H , o ciclo limite tende para o foco, quando (μ_1, μ_2) tende para HL , o ciclo limite tende para o loop homoclínico. O sistema (2.6) não possui ciclos limites sobre as curvas H e HL nessa vizinhança Δ_3 .

Demonstração:

Iremos demonstrar o lema nos parâmetros (ζ, δ) como abaixo.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \zeta\delta y + \delta xy. \end{cases}$$

e depois fazemos a mudança de variáveis para determinarmos nos parâmetros (μ_1, μ_2) como desejado e enunciado.

Pelo Lema (2.9), existe $h_2 \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\delta_2 > 0$ e uma função $\zeta = \zeta_2(h, \delta)$ definida em $-\frac{2}{3} \leq h \leq h_2$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$ tendo as propriedades (i) e (ii).

Tomemos $h_1 \in (-\frac{2}{3}, h_2)$, pelo Lema (2.8), existe $\delta_1 > 0$ e uma única função $\zeta = \zeta_1(h, \delta)$ definida em $h_1 \leq h \leq \frac{2}{3}$, $0 \leq \delta \leq \delta_1$ e tendo as propriedades (1^o) e (2^o), novamente do Lema (2.8).

Tome $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, pela unicidade de $\zeta_1(h, \delta)$, temos

$$\zeta_1(h, \delta) = \zeta_2(h, \delta), h_1 \leq h \leq h_2, 0 \leq \delta \leq \delta_3.$$

Logo, pelo Lema da colagem, podemos definir a seguinte função no intervalo $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ da seguinte forma em $0 \leq \delta \leq \delta_3$

$$\zeta = \zeta_3(h, \delta) = \begin{cases} \zeta_2(h, \delta), & \text{se } -\frac{2}{3} \leq h \leq h_2 \\ \zeta_1(h, \delta), & \text{se } h_2 \leq h \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

com as seguintes propriedades

1. $\gamma(h, \delta, \zeta_3(h, \delta))$ é uma órbita periódica do sistema passando pelo ponto $(x(h), 0)$, $-\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}$.
2. $\frac{\partial \zeta_3}{\partial h} < 0$ para $-\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}$, $0 \leq \delta \leq \delta_3$.

A condição (2) implica que para todo $\delta_0 \in (0, \delta_3)$ e $\zeta_0 \in [\zeta(\delta_0), 1]$, onde $\zeta = \zeta(\delta)$ é a função correspondente a bifurcação homoclínica descrita no Lema (2.7), existe um único $h_0 \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ tal que $\zeta_0 = \zeta_3(h_0, \delta_0)$. Então, se $\zeta_0 \in (\zeta(\delta_0), 1)$, então $\gamma(h_0, \delta_0, \zeta_0)$ é a única órbita periódica de (2.7). E ainda, é um ciclo limite instável. Se $\zeta_0 \rightarrow \zeta(\delta_0)^+$ (ou 1^-), então o ciclo limite tende para o loop homoclínico (ou para o foco).

Finalmente, voltamos para os parâmetros μ_1 e μ_2 .

Temos

$$\mu_1 = -\delta^4, \mu_2 = \zeta\delta^2.$$

Logo, a região $0 < \delta \leq \delta_3$, $\zeta(\delta) \leq \zeta \leq 1$ corresponde a região cúspide

$$-\delta_3^4 \leq \mu_1 < 0$$

e (μ_1, μ_2) está entre as curvas de bifurcação H e HL , como nos mostra a figura a seguir

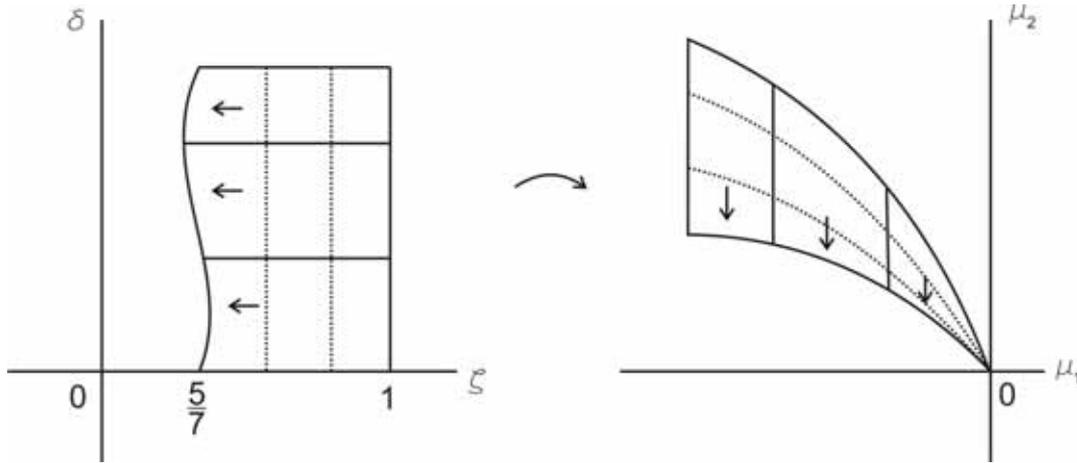


Figura 2.9: Mudança de Parâmetros.

Note que $\zeta_3(-2/3, \delta) = 1$, $\zeta_3(2/3, \delta) = \zeta(\delta)$ (definida no Lema (2.7)), e $\frac{\partial \zeta_3}{\partial h} < 0$, concluímos que o ciclo limite contrai para o foco ou se torna o loop homoclínico quando (μ_1, μ_2) tende para H ou HL , respectivamente. A existência de δ_3 é o que garante a existência da vizinhança Δ_3 . Isto conclui a demonstração do Lema (2.11). □

Lema 2.12 *Existe uma vizinhança aberta $\Delta_4 \subset \mathbb{R}^2$ de $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ tal que se $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_4$ e está acima da curva H ou abaixo de HL , então o sistema (2.6) não possui nenhuma órbita periódica, como mostrado na Figura (2.2).*

Demonstração:

Sabemos, pelo Lema (2.11), que sobre as curvas de bifurcação na vizinhança Δ_3 , o sistema não possui órbitas periódicas e a trajetória futura de γ de qualquer ponto

$$p \in L = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, y = 0\}$$

é uma espiral expansora se $(\mu_1, \mu_2) \in H$ ou uma espiral contratora se $(\mu_1, \mu_2) \in HL$.

O sistema (2.6) é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = y, \\ \dot{y} = Q(x, y) = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy. \end{cases}$$

Note que

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \mu_2} & \frac{\partial Q}{\partial \mu_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \mu_1 + x^2 + xy + \mu_2 y \\ 0 & y \end{vmatrix} = y^2 > 0, \text{ se } y \neq 0. \quad (2.8)$$

Logo, (2.6) é uma família de campos de vetores rodados com respeito a μ_2 . (Ver referência [49], e a Seção de Campos Rodados em Preliminares).

Tomando $\Delta_4 = \Delta_3$, temos que para qualquer $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_4$ e acima de H (ou abaixo de HL) podemos determinar $(\mu_1, \bar{\mu}_2) \in H$ (ou HL).

Qualquer órbita periódica de $(2.6)_{(\mu_1, \mu_2)}$, se existir, deve intersectar o segmento L . A trajetória futura de $\bar{\gamma}$ de $(2.6)_{(\mu_1, \bar{\mu}_2)}$ começando pelo ponto $p \in L$ é uma espiral expansora (ou contratora) e por (2.8), a trajetória positiva de γ de $(2.6)_{(\mu_1, \mu_2)}$ começando pelo mesmo ponto p deve estar totalmente localizado fora (dentro) de $\bar{\gamma}$, e então γ é também uma espiral expansora (contratora). □

Demonstração do Teorema A

Tome $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \cap \Delta_4$, temos o Teorema A, onde Δ_1 é do Lema (2.1), Δ_2 do Lema (2.7), Δ_3 do Lema (2.11) e Δ_4 do Lema (2.12). □

2.2 Forma Canônica de (2.5)

Agora, chegamos na segunda etapa do estudo da Bifurcação de Bogdanov-Takens, que é determinar uma forma canônica de (2.5), dado abaixo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \end{cases} .$$

Essa forma canônica será útil quando passarmos para a terceira e última etapa do estudo dessa bifurcação, pois será a partir dela que estudaremos a versalidade do campo (2.6), dado abaixo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases} .$$

Para a determinação dessa forma canônica necessitamos de um resultado, conhecido como Teorema de Preparação de Malgrange que enunciaremos na próxima seção. O Teorema de Preparação de Malgrange é, em certa forma, uma generalização do Teorema de Função Implícita, e é obtida usando o Teorema da Divisão que foi provado para funções C^r por [3] e [25]. Veja também [36] para mais detalhes.

2.2.1 Teorema de Preparação de Malgrange

Esse teorema será fundamental durante a demonstração da versalidade de (2.6), por isso resolvemos destacá-lo e enunciá-lo nesse momento.

Teorema 2.13 (*Teorema de Preparação de Malgrange*) *Suponha que $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ seja um conjunto aberto com $(0, 0) \in U$, e $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ satisfaça*

$$f(x, 0) = x^k g(x)$$

para algum inteiro $k \geq 1$, onde g é suave numa vizinhança de $x = 0$ e $g(0) \neq 0$. Então existe uma função suave q definida numa vizinhança V de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e C^∞ -funções $a_0(\varepsilon), \dots, a_{k-1}(\varepsilon)$ numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^n tais que $q(0, 0) \neq 0$, $a_0(0) = \dots = a_{k-1}(0) = 0$, e

$$q(x, \varepsilon)f(x, \varepsilon) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\varepsilon)x^i, (x, \varepsilon) \in V.$$

Demonstração: Ver [3], [25] e [36].

2.2.2 Obtenção da Forma Canônica de (2.5)

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \omega_1(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) + \omega_2(x, y, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.9)$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $\omega_1, \omega_2 \in C^\infty(x, y, \varepsilon)$ e $\omega_i|_{\varepsilon=0} = 0$, $i = 1, 2$.

Observe que a Equação (2.9) é a forma normal obtida a partir do linearizado com matriz nilpotente, perturbada. Por isso a razão do aparecimento das funções ω_i nas componentes.

Teorema 2.14 *Numa vizinhança suficientemente pequena de $x = y = \varepsilon = 0$, existe uma transformação C^∞ não degenerada em $x = y = 0$*

$$\begin{cases} u = u(x, y, \varepsilon) \\ v = v(x, y, \varepsilon) \end{cases},$$

tal que $u(0, 0, 0) = v(0, 0, 0) = 0$ e deixa o sistema (2.9) da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v\theta(u, \varepsilon) \\ \dot{v} = [\phi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)u + u^2 + uvQ(u, \varepsilon) + v^2\Phi(u, v, \varepsilon)]\theta(u, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde $\theta, Q, \Phi, \phi, \psi \in C^\infty$, $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $Q(0, 0) = 1$ e $\theta(0, 0) = 1$.

Demonstração:

Seja

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y + \omega_1(x, y, \varepsilon) \end{cases},$$

onde (x, y) pertence a uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^2 e ε está numa vizinhança da origem do \mathbb{R}^k de tal forma que a transformação acima seja invertível.

Logo, temos

$$\dot{\xi} = \dot{x} = y + \omega_1(x, y, \varepsilon) = \eta.$$

$$\dot{\eta} = \dot{y} + \frac{\partial}{\partial t}[\omega_1(x, y, \varepsilon)] =$$

$$= x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) + \omega_2(x, y, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial t}\omega_1(x, y, \varepsilon)\dot{x} + \frac{\partial}{\partial t}\omega_1(x, y, \varepsilon)\dot{y} =$$

$$= x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) + \omega_2(x, y, \varepsilon) +$$

$$+ f_1(x, y, \varepsilon) \left[\underbrace{\eta}_{\dot{x}} + \underbrace{[x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) + \omega_2(x, y, \varepsilon)]}_{\dot{y}} \right] =$$

$$= \xi^2 + \xi(\eta - \bar{\omega}_1(\xi, \eta, \varepsilon)) + \mathcal{O}(|(\xi, \eta)|^3) + \bar{\omega}_2(\xi, \eta, \varepsilon) +$$

$$+ \bar{f}_1(\xi, \eta, \varepsilon) [\eta + \xi^2 + \xi(\eta - \bar{\omega}_1(\xi, \eta, \varepsilon)) + \mathcal{O}(|(\xi, \eta)|^3) + \bar{\omega}_2(\xi, \eta, \varepsilon)].$$

Observamos que nessa última igualdade, rearranjamos os termos da seguinte forma:

$$\dot{\eta} = F(\xi, \varepsilon) + \eta G(\xi, \varepsilon) + \eta^2 H(\xi, \eta, \varepsilon)$$

onde

- $F(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(0, 0) = 0$;
- $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(0, 0) = 1$;
- $G(0, 0) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(0, 0) = 1$;
- $H(0, 0, 0) = 0$.

Logo, o sistema (2.9) foi transformado para o seguinte

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = F(\xi, \varepsilon) + \eta G(\xi, \varepsilon) + \eta^2 H(\xi, \eta, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.11)$$

Agora, como $G(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial \xi}(0, 0) = 1$, pelo Teorema da Função Implícita, existe $\alpha(\varepsilon)$, definida numa vizinhança de $\varepsilon = 0 \in \mathbb{R}^k$, tal que $G(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = 0$.

Assim, tomamos a transformação

$$\begin{cases} u = \xi - \alpha(\varepsilon) \\ v = \eta \end{cases},$$

que transforma (2.11) em

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \tilde{F}(u, \varepsilon) + uv\tilde{G}(u, \varepsilon) + v^2\tilde{H}(u, v, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde

- $\tilde{F}(0, 0) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(0, 0) = 0$;
- $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial u^2}(0, 0) = 2$;
- $\tilde{G}(0, 0) = 1$;
- $\tilde{H}(0, 0, 0) = 0$.

De fato,

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{\xi} = \eta = v \\ \dot{v} = \dot{\eta} = F(\xi, \varepsilon) + \eta G(\xi, \varepsilon) + \eta^2 H(\xi, \eta, \varepsilon) = \tilde{F}(u, \varepsilon) + v\tilde{G}(u, \varepsilon) + v^2\tilde{H}(u, v, \varepsilon) \end{cases}.$$

Agora,

$$\bar{G}(u, \varepsilon) = G(u + \alpha(\varepsilon), \varepsilon).$$

Temos a seguinte expansão para \bar{G}

$$\bar{G}(u, \varepsilon) = \underbrace{a_{00}}_{=0} + \underbrace{a_{10}}_{=1} u + a_{01}\varepsilon + a_{20}u^2 + a_{11}u\varepsilon + \dots,$$

pois $a_{00} = \bar{G}(0, 0) = G(0, 0) = 0$ e $a_{10} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) = 1$.

Observe que,

$$G(0, \varepsilon) = a_{01}\varepsilon + a_{02}\varepsilon^2 + \dots = G(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Dessa forma, $a_{0i} = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. E assim, temos que $\bar{G}(u, \varepsilon) = u\tilde{G}(u, \varepsilon)$, com $\tilde{G}(0, 0) = 1$. Tomando $\tilde{F} = \bar{F}$ e $\tilde{H} = \bar{H}$, temos (2.12).

Pelo Teorema da Preparação de Malgrange 2.13), obtemos:

$$F(u, \varepsilon) = [\phi_1(\varepsilon) + \phi_2(\varepsilon)u + u^2]\theta(u, \varepsilon).$$

onde $\phi_i, \theta \in C^\infty$, $\phi_i(0) = 0$ para $i = 1, 2$ e $\theta(0, 0) = 1$. Então, (2.12) pode ser reescrito da seguinte forma (numa vizinhança de $(0, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$)

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \left[\phi_1(\varepsilon) + \phi_2(\varepsilon)u + u^2 + \frac{\tilde{G}(u, \varepsilon)}{\theta(u, \varepsilon)}uv + \frac{\tilde{H}(u, v, \varepsilon)}{\theta(u, \varepsilon)}v^2 \right] \theta(u, \varepsilon) \end{cases} \quad (2.13)$$

definidas como anteriormente.

Para obtermos a expressão dada no Teorema 2.14, tomamos a seguinte mudança

$$\begin{cases} \tilde{u} = u, \\ \tilde{v} = \frac{v}{\sqrt{\theta(u, \varepsilon)}} \end{cases}$$

Assim, (2.13) se torna da forma (2.10). De fato,

$$\dot{\tilde{u}} = \dot{u} = v = \tilde{v}\sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}.$$

$$\dot{\tilde{v}} = \frac{\left[\dot{v}\sqrt{\theta(u, \varepsilon)} - \frac{1}{2}v\frac{\partial \theta}{\partial u}(u, \varepsilon)\dot{u} \right]}{\theta(u, \varepsilon)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\phi_1(\varepsilon) + \phi_2(\varepsilon)u + u^2 + \frac{\tilde{G}(u, \varepsilon)}{\theta(u, \varepsilon)}uv + \frac{\tilde{H}(u, v, \varepsilon)}{\theta(u, \varepsilon)}v^2 \right] \sqrt{\theta(u, \varepsilon)} - \frac{\frac{1}{2}v \frac{\partial \theta}{\partial u}(u, \varepsilon)v}{\theta(u, \varepsilon)\sqrt{\theta(u, \varepsilon)}} = \\
&= \left[\phi_1(\varepsilon) + \phi_2(\varepsilon)\tilde{u} + \tilde{u}^2 + \frac{\tilde{G}(\tilde{u}, \varepsilon)}{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}\tilde{u}\tilde{v}\sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)} + \frac{\tilde{H}(\tilde{u}, \tilde{v}\sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}, \varepsilon)}{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}\tilde{v}^2\theta(\tilde{u}, \varepsilon) \right] \sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)} - \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2}\tilde{v}^2\theta(\tilde{u}, \varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \varepsilon)}{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)\sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}} = \\
&= \sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)} \left[\phi_1(\varepsilon) + \phi_2(\varepsilon)\tilde{u} + \tilde{u}^2 + \underbrace{\frac{\tilde{G}(\tilde{u}, \varepsilon)}{\sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}}}_{\tilde{\Phi}(\tilde{u}, \varepsilon)}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{v}^2 \underbrace{\left[\tilde{H}(\tilde{u}, \tilde{v}\sqrt{\theta(\tilde{u}, \varepsilon)}, \varepsilon) - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta(\tilde{u}, \varepsilon)}{\partial \tilde{u}} \right]}_{\tilde{\Psi}(\tilde{u}, \tilde{v}, \varepsilon)} \right].
\end{aligned}$$

E assim, temos que (2.9), numa vizinhança da origem, tem a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v\theta(u, \varepsilon), \\ \dot{v} = [\phi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)u + u^2 + uvQ(u, \varepsilon) + v^2\Phi(u, v, \varepsilon)]\theta(u, \varepsilon) \end{cases}$$

onde $\theta, Q, \Phi, \phi, \psi \in C^\infty$, $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $Q(0, 0) = 1$ e $\theta(0, 0) = 1$.

□

O Lema a seguir nos dá outra mudança de variáveis para finalizarmos essa seção e obtermos a forma canônica desejada.

Lema 2.15 *Numa vizinhança suficientemente pequena do ponto $u = v = \varepsilon = 0$, existe uma transformação C^∞*

$$\begin{cases} x = x(u, v, \varepsilon) \\ y = y(u, v, \varepsilon) \end{cases},$$

tal que $x(0, 0, 0) = y(0, 0, 0) = 0$ não degenerada em $x = y = 0$, e torna a equação (2.10) na seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y\bar{\theta}(x, \varepsilon) \\ \dot{y} = [\bar{\phi}(\varepsilon) + \bar{\psi}(\varepsilon)y + x^2 + xy\bar{Q}(x, \varepsilon) + y^2\bar{\Phi}(x, y, \varepsilon)]\bar{\theta}(x, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.14)$$

onde $\bar{\theta}, \bar{Q}, \bar{\Phi}, \bar{\phi}, \bar{\psi} \in C^\infty$, $\bar{\phi}(0) = \bar{\psi}(0) = 0$, $\bar{Q}(0, 0) = 1$ e $\bar{\theta}(0, 0) = 1$.

Demonstração:

Basta tomar a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = u + \frac{\psi(\varepsilon)}{2} \\ y = v \end{cases},$$

e temos o que queremos. De fato,

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{u} = v\theta(u, \varepsilon) = y\theta(u, \varepsilon) &= y \underbrace{\theta\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right)}_{\bar{\theta}(x, \varepsilon)} = y\bar{\theta}(x, \varepsilon) \\ \dot{y} = \dot{v} = [\phi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)u + u^2 + uvQ(u, \varepsilon) + v^2\Phi(u, v, \varepsilon)]\theta(u, \varepsilon) &= \\ = \left[\phi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}\right) + \left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}\right)yQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) + \right. \\ &\quad \left. + y^2\Phi\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, y, \varepsilon\right) \right] \theta\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) = \\ = \left[\phi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)x - \frac{\psi(\varepsilon)^2}{2} + x^2 - x\psi(\varepsilon) + \frac{\psi(\varepsilon)^2}{4} + xyQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) - \right. \\ &\quad \left. - yQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) \frac{\psi(\varepsilon)}{2} + y^2\Phi\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, y, \varepsilon\right) \right] \theta\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) = \\ = \left[\underbrace{\phi(\varepsilon) - \frac{\psi(\varepsilon)^2}{4}}_{\bar{\phi}(\varepsilon)} + x^2 + xyQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) - yQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) \frac{\psi(\varepsilon)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + y^2\Phi\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, y, \varepsilon\right) \right] \theta\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Agora, escreva

$$Q\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) = 1 + f(\varepsilon) + g(\varepsilon, x)x.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} -yQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) \frac{\psi(\varepsilon)}{2} + xyQ\left(x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}, \varepsilon\right) &= \\ &= -y \frac{\psi(\varepsilon)}{2} (1 + f(\varepsilon) + g(\varepsilon, x)x) + xy(1 + f(\varepsilon) + g(\varepsilon, x)x) = \\ &= y \underbrace{\frac{-\psi(\varepsilon)}{2} (1 + f(\varepsilon))}_{\bar{\psi}(\varepsilon)} + xy \underbrace{\left(1 + f(\varepsilon) + g(\varepsilon, x)x - \frac{\psi(\varepsilon)}{2} g(\varepsilon, x)\right)}_{\bar{Q}(x, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Finalizando assim a demonstração do Lema (2.15). □

De agora em diante, iremos focar nossa atenção na equação (2.14). Obviamente, as órbitas de (2.14) e as órbitas da equação seguinte são as mesmas se restringirmos (x, y, ε) numa vizinhança pequena de $(0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \bar{\phi}(\varepsilon) + \bar{\psi}(\varepsilon)y + x^2 + xy\bar{Q}(x, \varepsilon) + y^2\bar{\Phi}(x, y, \varepsilon) \end{cases}, \quad (2.15)$$

onde $\bar{\theta}, \bar{Q}, \bar{\Phi}, \bar{\phi}, \bar{\psi} \in C^\infty$, $\bar{\phi}(0) = \bar{\psi}(0) = 0$ e $\bar{Q}(0, 0) = 1$.

Agora, se

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(\bar{\phi}(\varepsilon), \bar{\psi}(\varepsilon))}{\partial\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right] = 2 \quad \left(\text{digamos, } \frac{\partial(\bar{\phi}, \bar{\psi})}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \Big|_{\varepsilon=0} \neq 0 \right), \quad (2.16)$$

então fazemos a mudança de parâmetros

$$\begin{cases} \mu_1 = \bar{\phi}(\varepsilon), \\ \mu_2 = \bar{\psi}(\varepsilon), \\ \mu_3 = \varepsilon_3, \\ \vdots \\ \mu_m = \varepsilon_m, \end{cases} \quad (2.17)$$

e assim, (2.15) se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xyQ(x, \mu) + y^2\Phi(x, y, \mu), \end{cases} \quad (2.18)$$

onde $Q(x, \mu) = \bar{Q}(x, \varepsilon(\mu))$ e $\Phi(x, y, \mu) = \bar{\Phi}(x, y, \varepsilon(\mu))$, e $\varepsilon - \varepsilon(\mu)$ é a transformação inversa de (2.17) que satisfaz $\varepsilon(0) = 0$. Então $Q, \Phi \in C^\infty$ e $Q(0, 0) = 1$.

Em particular, se definirmos $Q(x, \mu) \equiv 1$ e $\Phi(x, y, \mu) \equiv 0$, então (2.18) se torna (2.6), que é a família de campos de vetores a dois parâmetros que estudamos na parte II. O que iremos fazer na seção seguinte é mostrar que estruturas topológicas do diagrama de bifurcação e dos retratos de fase de (2.18) para diferentes Q , e Φ , são as mesmas desde que $Q, \Phi \in C^\infty$ e $Q(0, 0) = 1$.

Se a condição (2.16) são for satisfeita, então dado ε ($|\varepsilon|$ pequeno), a equação (2.15) é apenas um caso especial da família (2.18). Então, não existe novo retrato de fase.

2.3 Versalidade de (2.6)

O nosso objetivo nessa seção é demonstrar que o sistema (2.6) é o desdobramento versal da bifurcação. Com esse resultado fica caracterizado que a bifurcação de Bogdanov-Takens é de fato uma bifurcação de codimensão dois, já que o desdobramento versal tem dois parâmetros. Para tal estudo, precisamos de alguns resultados e definições preliminares que tiramos da referência [11]. Antes de iniciarmos as demonstrações da versalidade de (2.6), iremos, então, dar algumas definições preliminares.

2.3.1 Definições Preliminares

Sejam M e N variedades de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) de dimensões finitas e $f, g \in C^r(M, N)$.

Definição 2.16 *f e g são ditas serem k -tangentes em $x \in M$ ($1 \leq k \leq r$) se, num sistema de coordenadas local, f e g possuem os mesmo coeficientes de Taylor até a ordem k em x . A k -tangência dá uma relação de equivalência em $C^r(M, N)$.*

Definição 2.17 *Um k -jato de uma aplicação $f \in C^r$ em x é dado por*

$$j_x^k(f) = \{g \in C^r(M, N) / g \text{ é } k\text{-tangente a } f \text{ em } x\}.$$

E definimos

$$j^k(f) = \{j_x^k(f), x \in M\}.$$

E ainda,

$$J^k(M, N) = \{j^k(f)/f \in C^k(M, N)\}.$$

Como a dimensão de M e N são finitas, então $J^k(M, N)$ também é finito. Mais ainda, se M e N são variedades de classe C^r , então $J^k(M, N)$ é uma C^{r-k} -variedade.

Recomendamos a referência [23] para mais detalhes.

Definição 2.18 Duas aplicações definidas próximas a um ponto x possuem um germe em comum em x se existir uma vizinhança U de x tal que elas coincidem em U .

É claro que o germe de uma aplicação num ponto é uma classe de equivalência, logo qualquer aplicação nessa classe será um representante deste germe.

Assim como foi feito nas definições anteriores, podemos definir o k -jato de um germe num ponto. Considerando o problema localmente, usamos a mesma notação $J^k(M, N)$ para denotar o conjunto de todos os k -jatos de germes de aplicações de M em N .

Denotamos por $V(x_0)$ o espaço de germes de campos de vetores C^∞ em $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Damos a $V(x_0)$ a topologia induzida de funções inclusões. (Vide [23], pg. 36 para mais detalhes).

Seja um aberto U contendo a origem do \mathbb{R}^n e definimos

$$\mathcal{H} = \{(x, X), X \in V(x), x \in U\}.$$

A projeção natural

$$\pi_k(x_0) : V(x_0) \rightarrow J_{x_0}^k := \{j_{x_0}^k(X)/X \in V(x_0)\}$$

induz uma projeção

$$\pi_k : \mathcal{H} \rightarrow J^k := \{(x, j_x^k(X)/x \in U \text{ e } X \in V(x))\}.$$

Agora, considere a família de campos de vetores

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon) \tag{*}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Se ε varia numa vizinhança pequena de $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^k$, (*) é dito um desdobramento do campo $\dot{x} = X(x, \varepsilon_0)$.

Definição 2.19 Uma família local $(X; x_0, \varepsilon_0)$ é o germe da aplicação X no ponto (x_0, ε_0) do produto direto do espaço de fase e do espaço de parâmetros.

Definição 2.20 Duas famílias locais $(X; x_0, \varepsilon_0)$ e $(Y; y_0, \varepsilon_0)$ são ditas equivalentes se existir um germe de uma aplicação contínua, $y = h(x, \varepsilon)$ no ponto (x_0, ε_0) tal que para todo ε , $h(\cdot, \varepsilon)$ (o representante do germe) é um homeomorfismo que mapeia as órbitas de $(X; x_0, \varepsilon_0)$ sobre as órbitas de $(Y; y_0, \varepsilon_0)$ com $h(x_0, \varepsilon_0) = y_0$ e preservando a direção das órbitas em tempo.

Definição 2.21 Uma família local (Z, x_0, μ_0) é induzida de uma família local $(X; x_0, \varepsilon_0)$ se existir um germe de uma aplicação contínua ϕ em μ_0 . $\varepsilon = \phi(\mu)$ tal que $\varepsilon_0 = \phi(\mu_0)$ e $Z(x, \mu) = X(x, \phi(\mu))$.

Definição 2.22 Uma família local $(X; x_0, \varepsilon_0)$ é um desdobramento versal do germe de $X(\cdot, \varepsilon_0)$ no ponto x_0 se qualquer outra família local contendo o mesmo germe de $X(\cdot, \varepsilon_0)$ é equivalente a família local induzida de $(X; x_0, \varepsilon_0)$.

Definição 2.23 A aplicação f e a subvariedade A são ditas transversais em $p \in M$ e denotamos por $f \pitchfork_p A$, se $f(p) \notin A$ ou

$$(T_p f)(T_p M) + T_{f(p)} A = T_{f(p)} N.$$

E ainda, f e A são ditas transversais e denotamos por $f \pitchfork A$ se forem transversais em todo ponto $p \in M$.

O resultado é de demonstração direta, porém iremos enunciá-lo pois será útil daqui para frente.

Teorema 2.24 Suponha que M e N sejam variedades suaves com dimensão m e n , respectivamente, e A é uma subvariedade de N com dimensão r . Seja (x^1, \dots, x^m) as coordenadas locais de M próximas a x_0 , e (y^1, \dots, y^n) as coordenadas locais de N próximas a $f(x_0)$. Suponha que numa vizinhança U de $f(x_0)$ em N , o conjunto $A \cap U$ pode ser expresso por $y^1 = y^2 = \dots = y^r = 0$. Se $f(x_0) \in A$, então $f \pitchfork_{x_0} A$ se, e somente se, o posto da matriz $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{i=1,2,\dots,r} \Big|_{j=1,\dots,m}$ em x_0 é r .

Demonstração: Ver [11].

2.3.2 Demonstração da Versalidade de (2.6)

Finalmente, estamos aptos a iniciar a demonstração da versalidade do sistema (2.6).

Suponha que $Z \in V(z_0)$ tenha o seguinte representante

$$\dot{z} = H(z), \tag{2.19}$$

onde

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad H(z) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad H \in C^\infty.$$

Temos a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathcal{H} &\rightarrow J^k, \\ (z, Z) &\mapsto (z, H, \tilde{D}H, \dots, \tilde{D}^k H), \end{aligned}$$

onde cada $\tilde{D}^j H$ ($j=0,1,\dots,k$) nos dá uma expressão coordenada para os coeficientes de Taylor da k -ésima derivada de H em z . No nosso caso, $\dim(z) = \dim(H) = 2$, $\dim(\tilde{D}H) = 4$, e $\dim(\tilde{D}^2 H) = 6$. Podemos tomar a matriz Jacobiana e a Hessiana em z como $\tilde{D}H$ e $\tilde{D}^2 H$, respectivamente.

Dizemos que (2.19) tem a mesma característica singular em z_0 que a equação abaixo tem em 0

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3). \end{cases}$$

se as seguintes condições são satisfeitas

(H_1) A matriz da parte linear de $H(z)$ em z_0 é semelhante a matriz nilpotente.

(H_2) Colocando (2.19) na sua forma normal abaixo, como em (2.4)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ax^2 + bxy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3). \end{cases}$$

temos que $ab > 0$.

Considere agora um subconjunto de \mathcal{H} dado por

$$\Sigma = \{(z, Z) \in \mathcal{H}/Z \text{ satisfaz } (H_1) \text{ e } (H_2) \text{ em } z \in U\}$$

onde U é uma vizinhança de $z = 0$.

Lema 2.25 *Se $k \geq 2$, então $\pi_k \Sigma$ é localmente uma subvariedade suave de codimensão 4 de J^k .*

Demonstração:

Note que

$$\pi_1 \Sigma = \{(z, H, DH) / f = g = \det DH = \text{Tr} DH = 0, DH \neq 0\},$$

$$\pi_2\Sigma = \pi_{21}^{-1}(\pi_1\Sigma)|_{H_2},$$

onde π_{21} é a projeção natural de J^2 sobre J^1 , e a condição (H_2) dá $ab > 0$ que é independente das condições $f = g = \det DH = \text{Tr} DH = 0$ e $DH \neq 0$. Então, $\pi_1\Sigma$ é uma subvariedade suave com codimensão 4 em J^1 , e $\pi_2\Sigma$ é localmente um subconjunto aberto de $\pi_{21}^{-1}(\pi_1\Sigma)$. Assim, o resultado segue. □

Consideremos um desdobramento de (2.5)

$$\dot{z} = H(z, \varepsilon), \quad (2.20)$$

onde $z \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ e $H \in C^\infty$.

Definição 2.26 *A equação (2.20) é um desdobramento não degenerado de (2.5) se a aplicação*

$$(z, \varepsilon) \mapsto \pi_2 H(z, \varepsilon)$$

é transversal a $\pi_2\Sigma$ em $(z, \varepsilon) = (0, 0)$ em J^2 .

Lema 2.27 *Qualquer desdobramento não degenerado de (2.5) é equivalente ao sistema (2.18). ($\dim(\mu) = \dim(\varepsilon)$).*

Demonstração:

Como vimos na Seção (2.2.2) anterior precisamos apenas mostrar que a condição de não degeneracidade do desdobramento implica na condição (2.16).

A não degeneracidade é independente da escolha das coordenadas, vamos tomar a equação (2.15) que é considerar (2.20) da seguinte forma

$$\begin{cases} f(x, y, \varepsilon) = y, \\ g(x, y, \varepsilon) = \bar{\phi}(\varepsilon) + \bar{\psi}(\varepsilon)y + x^2 + xy\bar{Q}(x, \varepsilon) + y^2\bar{\Phi}(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

Temos que $\pi_2\Sigma$ pode ser expressa localmente por

$$f = g = \det H = \text{Tr} H = 0.$$

onde $\det H = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$ e $\text{Tr} H = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$.

Pelo Teorema (2.24) e pela definição (2.26), a não degeneracidade de (2.20) implica que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial(x,y,\varepsilon)} \\ \frac{\partial g}{\partial(x,y,\varepsilon)} \\ \frac{\partial \det H}{\partial(x,y,\varepsilon)} \\ \frac{\partial \text{Tr} H}{\partial(x,y,\varepsilon)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \varepsilon_2} & \dots & \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \varepsilon_m} \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\Phi & \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_2} & \dots & \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_m} \end{pmatrix}_{(x,y,\varepsilon)=(0,0,0)} = 4,$$

e isso implica que

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(\bar{\phi}, \bar{\psi})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right] = 2. \quad (2.21)$$

□

Teorema 2.28 *A família (2.6) dada abaixo*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases}$$

é um *desdobramento versal* de (2.5), *dado abaixo*,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x,y)|^3) \end{cases}$$

em $(x,y) = (0,0)$ desde que consideremos apenas *desdobramentos não degenerados* de (2.5).

Para demonstrarmos o Teorema (2.28), é suficiente mostrar que quaisquer duas famílias de (2.18) são equivalentes. Para isso, iremos provar os lemas que seguem.

Lema 2.29 *Para quaisquer $Q, \Phi \in C^\infty$ ($Q(0,0)=1$), as conclusões do Teorema A são verdadeiras para a equação (2.18).*

Demonstração:

Pela mesma mudança de variáveis que fizemos anteriormente

- $\mu_1 = -\delta^4$,
- $\mu_2 = \zeta \delta^2$,
- $\bar{x} = \frac{x}{\delta^2}$,

- $\bar{y} = \frac{y}{\delta^3}$,
- $\bar{t} = \delta t$.

temos que (2.18) fica da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \delta(\zeta + x)y + \mathcal{O}(\delta^2). \end{cases}$$

Assim, a função bifurcação $F(h, \delta, \zeta)$ é dada por

$$\tilde{F}(h, \delta, \zeta) = \int_{\gamma(h, \delta, \zeta)} ((\zeta + x)y + \mathcal{O}(\delta)) dx.$$

Dessa forma, tudo o que foi feito na Seção (2.1) é válido para esse sistema e, logo, (2.18) também satisfaz o Teorema A. Isso conclui a demonstração do Lema (2.29). □

Lema 2.30 *Para quaisquer duas famílias (2.18), existe um difeomorfismo C^∞ numa vizinhança de $\mu = 0$, que fixa o ponto $\mu = 0$ e leva as curvas de bifurcação de uma na outra.*

Para a demonstração desse lema, precisamos de um outro resultado. Sejam Y_1, Y_2, Y_3 três curvas C^∞ numa vizinhança de $x = y = 0$ no plano- xy , k -tangentes umas as outras no ponto $x = y = 0$, $k \geq 1$. Escolhendo adequadamente as coordenadas de tal forma que as curvas Y_1, Y_2, Y_3 sejam gráficos de funções $Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x)$, respectivamente, e

$$Y_i(0) = \frac{dY_i(0)}{dx} = 0.$$

Seja

$$I(Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{[Y_3''(0) - Y_1''(0)]}{[Y_2''(0) - Y_1''(0)]}, \quad (2.22)$$

onde $Y_1''(0), Y_2''(0), Y_3''(0)$ são números distintos dois a dois. Note que $I(Y_1, Y_2, Y_3)$ é um número finito e diferente de zero.

Lema 2.31 *Suponha que $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ e $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ sejam dois conjuntos de curvas de classe C^∞ satisfazendo as condições acima. Então a condição*

$$I(Y_1, Y_2, Y_3) = I(Z_1, Z_2, Z_3), \quad (2.23)$$

é necessária e suficiente para a existência de um difeo C^∞ numa vizinhança da origem, fixando a origem e mapeando Y_i e Z_i , $i=1,2,3$.

Demonstração:

Vamos provar primeiramente a necessidade. Assim, suponha que existe a transformação de classe C^∞

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ u &= g(x, y), \end{aligned}$$

tal que transforma $Y_i : y \rightarrow y_i(x)$ em $Z_i : z \rightarrow z_i(u)$, $i=1,2,3$. Então

$$f(x, y_i(x)) = z_i(g(x, y_i(x))), i = 1, 2, 3.$$

Diferenciando a equação acima, temos

$$f'_x + f'_y y'_i = z'_i(g'_x + g'_y y'_i). \quad (2.24)$$

Diferenciando a expressão acima, obtemos

$$f''_{xx} + 2f''_{xy} y'_i + f''_{yy} y'^2_i + f'_y y''_i = z''_i(g'_x + g'_y y'_i)^2 + z'_i(g''_{xx} + 2g''_{xy} y'_i + g''_{yy} y'^2_i + g'_y y''_i). \quad (2.25)$$

Agora, temos que $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Dessa forma, temos que $y_i(0) = z_i(0) = y'_i(0) = z'_i(0) = 0$.

Logo, por (2.24), $f'_x(0, 0) = 0$, e assim, $f'_y(0, 0) \neq 0$. Logo, $g'_x(0, 0) \neq 0$.

Substituindo em (2.25), temos

$$z''_i(0) = \frac{f''_{xx}(0, 0)}{(g'_x(0, 0))^2} + \frac{f'_y(0, 0)}{(g'_x(0, 0))^2} y''_i(0).$$

Logo, substituindo na expressão (2.22), temos $I(Y_1, Y_2, Y_3) = I(Z_1, Z_2, Z_3)$.

E assim, concluímos uma parte da demonstração do Lema (2.31).

Para se mostrar a outra condição do lema, primeiramente vamos mostrar que ambos $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ e $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ podem ser convertidos respectivamente por transformações C^∞ para o conjunto de curvas C^∞ , $\{X_1, X_2, X_3\}$ com

$$X_1(x) \equiv 0, \quad X_2(x) = x^2, \quad X_3(x) = cx^2,$$

onde $c = I(Y_1, Y_2, Y_3) = I(Z_1, Z_2, Z_3)$.

Vamos fazer para $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ e a demonstração para $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ é análoga.

Não é difícil achar uma transformação C^∞ numa vizinhança da origem que converta $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ em $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3\}$ com $\tilde{Y}_1(x) \equiv 0$, $\tilde{Y}_2(x) = \alpha x^2 \xi(x)$ e $\tilde{Y}_3(x) = \beta x^2 \psi(x)$, onde α e β são número distintos não nulos e $\xi, \psi \in C^\infty$ com $\xi(0) = \psi(0) = 1$. Basta tomar

$$\underbrace{Y_1}_{(x, y_1(x))} \rightarrow_F \tilde{Y}_1, \text{ dada por } F(x, y) = (x, y - y_1(x))$$

Para os casos \tilde{Y}_2 e \tilde{Y}_3 fazemos tomando a expansão de Taylor de Y_2 e Y_3 .

$$\begin{cases} Y_2(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ Y_3(x) = b_2x^2 + b_3x^3 + \dots \end{cases} .$$

Tomamos agora,

$$\begin{aligned} Y_2 &\rightarrow \tilde{Y}_2 \\ (x, y_2(x)) &\mapsto (x, y_2(x) - y_1(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &\rightarrow \tilde{Y}_3 \\ (x, y_3(x)) &\mapsto (x, y_3(x) - y_1(x)) \end{aligned}$$

Agora, pela condição provada anteriormente, $\frac{\beta}{\alpha} = I(Y_1, Y_2, Y_3)$. Assim, fazemos a mudança de coordenadas C^∞ próxima a origem novamente dada por

$$x \rightarrow x, \quad \tilde{y} \rightarrow \alpha\xi(x)y.$$

Logo, $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3\}$ são mapeados para $\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3\}$, com $\bar{Y}_1(x) \equiv 0$, $\bar{Y}_2(x) = x^2$ e $\bar{Y}_3(x) = cx^2\phi(x)$, onde $\phi \in C^\infty$ e $\phi(0) = 1$ e $c = \frac{\beta}{\alpha} = I(Y_1, Y_2, Y_3)$.

Agora, vamos determinar uma mudança C^∞ de coordenadas numa vizinhança da origem que converta $\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3\}$ em $\{X_1, X_2, X_3\}$. Tome

$$u = y, \quad v = x + (y - x^2)f(x)$$

que transforma a curva $y = cx^2\phi(x)$ na curva $u = cv^2$. Então temos,

$$cx^2\phi(x) = c[x + (cx^2\phi(x) - x^2)f(x)]^2.$$

Logo,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\phi(x)} - 1}{x(c\phi(x) - 1)}.$$

Como $\phi(0) = 1$, $\phi \in C^\infty$ e $c \neq 1$, então $f \in C^\infty$ numa vizinhança de $x = 0$.

E isso conclui a demonstração do Lema (2.31) .

□

Demonstração do Lema (2.30)

Para quaisquer família (2.18) as equações das curvas de bifurcação são $\mu_1 = 0$, $\mu_1 = -\mu_2^2$ e $\mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{5/2})$, quando $\mu_2 \rightarrow 0^+$. Logo, pela fórmula (2.22).

$$I(SN_i, H_i, HL) = \frac{49}{25}, i = 1, 2.$$

Isso conclui a demonstração do Lema (2.30). □

Demonstração do Teorema (2.28)

Vamos mostrar que quaisquer duas famílias da forma (2.18) são equivalentes.

Pelo Lema (2.30), é possível construirmos duas família A e \tilde{A} numa mesma vizinhança Δ do espaço de parâmetros. As vizinhanças de $(x, y) = (0, 0)$ para A e \tilde{A} serão denotadas por $N(\mu)$ e $\tilde{N}(\mu)$, respectivamente.

Construímos então um homeomorfismo $\Psi(\mu)$, fixado $\mu \in \Delta$, que mapeia $K(\varepsilon)$ (Conjunto limite e trajetórias singulares da família A em $N(\mu)$) sobre $\tilde{K}(\varepsilon)$, onde $\tilde{K}(\varepsilon)$ é uma conjunto similar de \tilde{A} em $\tilde{N}(\mu)$.

Finalmente, podemos estender o homeomorfismo $\Psi(\mu)$ para obter um homeomorfismo que mapeia as trajetórias de A em N sobre as trajetórias de \tilde{A} em \tilde{N} . □

A demonstração completa do Teorema (2.28) pode ser vista na referências [4] e [39] com mais detalhes. Para não ocuparmos muito o nosso tempo com as técnicas usadas para essa demonstração e entrarmos em contato com outros problemas, demos apenas a idéia da demonstração, que usa os resultados que fizemos anteriormente.

Estudo da Bifurcação Hopf-Zero

Nessa capítulo, trabalhamos com sistemas cuja matriz Jacobiana é semelhante a forma

(4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é, a matriz linearizada possui um autovalor nulo e um par de autovalores imaginários puros. O tipo de bifurcação que ocorre nesse caso é conhecido como do tipo Hopf-Zero.

Aqui, estudamos uma classe de campos de vetores reversíveis tendo a seguinte forma

$$\dot{x} = F(x) \tag{3.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, F é de uma função suave, $F(0) = 0$. O campo de vetores (3.1) é dito reversível se existe um germe de uma involução suave $\phi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ ($\phi \circ \phi = id$) satisfazendo a seguinte relação

$$F(\phi(x)) = -\phi' \cdot F(x)$$

com $c \in \mathbb{R}^n, 0$.

Como citamos na introdução do trabalho, a classificação e estudo em bifurcação no caso geral (não necessariamente reversíveis) de campos de vetores tendo autovalores $(0, \pm\alpha i)$ pode ser encontrado em [18] e [38], entre outros. Sistemas tendo tais autovalores mas com outras configurações, por exemplo, sistemas de livre-divergência, também atraem atenção (veja [7]).

A motivação básica para o estudo feito no nosso trabalho veio do estudo local da dinâmica

de campos de vetores reversíveis próximos a um singularidade com um par de autovalores puramente imaginários e um autovalor nulo. Tais campos de vetores são comumente encontrados em aplicações. Para modelos físicos e de hidrodinâmica, recomendamos a referência [33].

Os métodos usados vieram de [15], [18], [43], entre outros. O nosso estudo foi baseado no artigo [10], recomendamos esse artigo para maiores detalhes.

Antes de começarmos a estudar de fato, iremos apresentar algumas definições preliminares e alguns resultados.

3.1 Sistemas Reversíveis

O conceito de reversibilidade para campos de vetores está ligado a uma involução. Mais precisamente,

Definição 3.1 *Uma involução é um germe de um difeomorfismo*

$$\varphi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$$

tal que $\varphi^2 = Id$.

Exemplo 3.2 *A aplicação linear $R_1(x) = Mx$, onde*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma involução do \mathbb{R}^3 .

Definição 3.3 *Dada uma involução φ de classe C^∞ ,*

$$\varphi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0,$$

dizemos que um campo vetorial $X \in C^\infty$ sobre \mathbb{R}^n é φ -reversível do tipo (n, k) se

$$D\varphi \circ X = -X \circ \varphi,$$

e o conjunto dos pontos fixos de φ , $S = \text{Fix}(\varphi)$, é uma subvariedade k -dimensional de \mathbb{R}^n .

Toda singularidade de X em S é chamado de singularidade simétrica de X .

Definição 3.4 *Seja $\psi : U \rightarrow U$, difeomorfismo em U aberto de \mathbb{R}^n , e $v : U \rightarrow U$ campo vetorial. Dizemos que ψ é uma simetria de v se $d\psi_x v(x) = v\psi(x)$, para todo $x \in U$.*

Algumas propriedades clássicas de sistemas Reversíveis:

(1) O retrato de fase de X é simétrico com relação a S . Isto é,

$$x(t) \text{ é solução} \iff \varphi(x(-t)) \text{ é solução.}$$

(2) Qualquer singularidade ou órbita periódica simétricas não podem ser atratoras e nem repulsoras.

(3) Se $X(p) = 0$ e $p \notin S$ então $X(\varphi(p)) = 0$.

(4) Se uma órbita regular γ intersecta S em dois pontos distintos, então γ é uma órbita periódica.

(5) Se $X(p) \neq 0$ e $p \in S$ então $X(p) \notin T_p S$.

Lema 3.5 *Sejam X um campo de vetores φ -reversível, isto é, $D\varphi(p) \circ X(p) = -X(\varphi(p))$ e Φ uma mudança de coordenadas diferenciável. Então o campo $\tilde{X} = D\Phi \circ X \circ \Phi^{-1}$ é ϕ -reversível, onde $\phi = \Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} D\phi \circ \tilde{X} &= D(\Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}) \circ D\Phi \circ X \circ \Phi^{-1} = \\ &= D\Phi \circ D\varphi \circ \underbrace{(D\Phi)^{-1} \circ D\Phi}_{Id} \circ X \circ \Phi^{-1} = \\ &= D\Phi \circ D\varphi \circ X \circ \Phi^{-1} = \\ &= -D\Phi \circ X \circ \varphi \circ \Phi^{-1} = \\ &= -\underbrace{D\Phi \circ X \circ \Phi^{-1}}_{\tilde{X}} \circ \underbrace{\Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}}_{\phi} = -\tilde{X} \circ \phi. \end{aligned}$$

□

Os resultados a seguir dizem que toda involução na vizinhança de um ponto fixo é C^∞ conjugada a $\varphi(x, y) = (x, -y)$. Mais precisamente:

Teorema 3.6 *(Teorema de Montgomery-Bochner) Seja G um grupo compacto de transformações de uma variedade M de classe C^k ($k \geq 0$) ou analítica. Então, numa vizinhança de um ponto fixo estacionário, coordenadas admissíveis podem ser escolhidas tais que as transformações sejam lineares.*

A demonstração do teorema pode ser encontrado em [28]

Proposição 3.7 *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma involução tal que $\dim(\text{Fix}(\phi)) = k$, então ϕ é localmente conjugada com a involução linear $\varphi(x, y) = (x, -y)$ com $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{n-k}$.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [9].

3.2 Blow-Up

Iremos dar uma breve definição da Blow-Up, indicamos a referência [15] para mais detalhes.

Seja X um germe de um campo vetorial em $\mathbb{R}^2, 0$ e $j^k X$ seu primeiro jato não nulo. Seja S^1 o círculo unitário em \mathbb{R}^2 e $B : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+$ definida por

$$B(\omega) = \left(\frac{\omega}{|\omega|}, |\omega| \right).$$

Para $(r, \theta) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$, seja

$$DB \circ X(r, \theta) = DB(r, \theta) \text{ e } \bar{X}(r, \theta) = \frac{1}{r^{k-1}} DB \circ X(r, \theta).$$

Takens (em [41]) provou que \bar{X} é um campo vetorial C^∞ e que $\bar{X}|_{S^1 \times \{0\}}$ é determinado por $j^k X$. Além disso, uma condição suficiente para X e Y serem C^0 -equivalentes é que \bar{X} e \bar{Y} sejam C^0 -equivalentes próximos a $S^1 \times \{0\}$.

3.3 Forma Normal de Belitskii Reversível

Nessa seção, apresentamos a forma normal de Belitskii. Considere um campo de vetores formal expresso por

$$\hat{X}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} X^{(k)}(x)$$

onde $X^{(k)}$ é a parte homogênea de grau k . Vamos observar uma forma mais “simples” do campo de vetores formal $\hat{Y} = D\hat{\phi} \circ \hat{X}$ dada pela transformação formal

$$\hat{\phi} = x + \sum_k^\infty \phi^{(k)}(x).$$

A prova do seguinte teorema é encontrado em [7].

Teorema 3.8 *Dado o seguinte campo de vetores formal*

$$\widehat{X}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} X^{(k)}(x),$$

existe uma transformação formal $\widehat{\phi} = x + \dots$ de \widehat{X} para a forma $(\widehat{\phi} * X)(x) = Ax + h(x)$, onde h é um campo de vetores formal com parte linear nula que comuta com A^T , isto é

$$A^T h(x) = h'(x) A^T x,$$

onde A^T é a matriz transposta.

Aqui, chamamos a forma normal $(\widehat{\phi} * X)(x) = Ax + h(x)$ de forma normal de Belitskii. Às vezes, por abuso de terminologia, denota-se $X_H = A + h$.

No nosso trabalho, estamos estudando o caso onde os autovalores do linearizado são $\{0, i, -i\}$. Logo a forma de Jordan fica como (4), dado abaixo

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos assumir que o sistema seja reversível em relação a R_1

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos a forma de Belitskii do sistema a partir do sistema linear da forma A_2 com o seguinte algoritmo (usando o software Mathematica).

```
Quit
```

```
A={{0,-1,0},{1,0,0},{0,0,0}}; MatrixForm[A];
```

```
Só um teste para verificar que é R1-reversível.
```

```
R={{1,0,0},{0,-1,0},{0,0,-1}}; MatrixForm[R];
```

```
MatrixForm[R.A + A.R];
```

A partir da parte linear do campo vamos encontrar a forma normal de Belitskii deste campo. Para isto, vamos definir uma aplicação $h:R^3 \rightarrow R^3$ como a seguir.

$$\begin{aligned} h_1[x_1, x_2, x_3] = & a_{01}x_1^2 + a_{02}x_1x_2 + a_{03}x_1x_3 + a_{04}x_2^2 + \\ & a_{05}x_2x_3 + a_{06}x_3^2 + a_{07}x_1^3 + a_{08}x_1^2x_2 + a_{09}x_1^2x_3 + \\ & a_{10}x_1x_2^2 + a_{11}x_1x_2x_3 + a_{12}x_1x_3^2 + a_{13}x_2^3 + a_{14}x_2^2x_3 + \\ & a_{15}x_2x_3^2 + a_{16}x_3^3 + a_{17}x_1^4 + a_{18}x_1^3x_2 + a_{19}x_1^2x_2^2 + \\ & a_{20}x_1x_2^3 + a_{21}x_2^4 + a_{22}x_1^3x_3 + a_{23}x_1^2x_2x_3 + \\ & a_{24}x_1x_2^2x_3 + a_{25}x_2^3x_3 + a_{26}x_1^2x_3^2 + a_{27}x_1x_2x_3^2 + \\ & a_{28}x_2^2x_3^2 + a_{29}x_1x_3^3 + a_{30}x_2x_3^3 + a_{31}x_3^4 + a_{32}x_1^5 + \\ & a_{33}x_1^4x_2 + a_{34}x_1^4x_3 + a_{35}x_1^3x_2^2 + a_{36}x_1^3x_2x_3 + \\ & a_{37}x_1^3x_3^2 + a_{38}x_1^2x_2^3 + a_{39}x_1^2x_2^2x_3 + a_{40}x_1^2x_2x_3^2 + \\ & a_{41}x_1^2x_3^3 + a_{42}x_1x_2^4 + a_{43}x_1x_2^3x_3 + a_{44}x_1x_2^2x_3^2 + \\ & a_{45}x_1x_2x_3^3 + a_{46}x_1x_3^4 + a_{47}x_2^5 + a_{48}x_2^4x_3 + \\ & a_{49}x_2^3x_3^2 + a_{50}x_2^2x_3^3 + a_{51}x_2x_3^4 + a_{52}x_3^5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2[x_1, x_2, x_3] = & b_{01}x_1^2 + b_{02}x_1x_2 + b_{03}x_1x_3 + b_{04}x_2^2 + \\ & b_{05}x_2x_3 + b_{06}x_3^2 + b_{07}x_1^3 + b_{08}x_1^2x_2 + b_{09}x_1^2x_3 + \\ & b_{10}x_1x_2^2 + b_{11}x_1x_2x_3 + b_{12}x_1x_3^2 + b_{13}x_2^3 + b_{14}x_2^2x_3 + \\ & b_{15}x_2x_3^2 + b_{16}x_3^3 + b_{17}x_1^4 + b_{18}x_1^3x_2 + b_{19}x_1^2 + x_2^2 + \\ & b_{20}x_1x_2^3 + b_{21}x_2^4 + b_{22}x_1^3x_3 + b_{23}x_1^2x_2x_3 + \\ & b_{24}x_1x_2^2x_3 + b_{25}x_2^3x_3 + b_{26}x_1^2x_3^2 + b_{27}x_1x_2x_3^2 + \\ & b_{28}x_2^2x_3^2 + b_{29}x_1x_3^3 + b_{30}x_2x_3^3 + b_{31}x_3^4 + b_{32}x_1^5 + \\ & b_{33}x_1^4x_2 + b_{34}x_1^4x_3 + b_{35}x_1^3x_2^2 + b_{36}x_1^3x_2x_3 + \\ & b_{37}x_1^3x_3^2 + b_{38}x_1^2x_2^3 + b_{39}x_1^2x_2^2x_3 + b_{40}x_1^2x_2x_3^2 + \\ & b_{41}x_1^2x_3^3 + b_{42}x_1x_2^4 + b_{43}x_1x_2^3x_3 + b_{44}x_1x_2^2x_3^2 + \\ & b_{45}x_1x_2x_3^3 + b_{46}x_1x_3^4 + b_{47}x_2^5 + b_{48}x_2^4x_3 + \\ & b_{49}x_2^3x_3^2 + b_{50}x_2^2x_3^3 + b_{51}x_2x_3^4 + b_{52}x_3^5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3[x_1, x_2, x_3] = & c_{01}x_1^2 + c_{02}x_1x_2 + c_{03}x_1x_3 + c_{04}x_2^2 + \\ & c_{05}x_2x_3 + c_{06}x_3^2 + c_{07}x_1^3 + c_{08}x_1^2x_2 + c_{09}x_1^2x_3 + \\ & c_{10}x_1x_2^2 + c_{11}x_1x_2x_3 + c_{12}x_1x_3^2 + c_{13}x_2^3 + c_{14}x_2^2x_3 + \\ & c_{15}x_2x_3^2 + c_{16}x_3^3 + c_{17}x_1^4 + c_{18}x_1^3x_2 + c_{19}x_1^2 + x_2^2 + \\ & c_{20}x_1x_2^3 + c_{21}x_2^4 + c_{22}x_1^3x_3 + c_{23}x_1^2x_2x_3 + \\ & c_{24}x_1x_2^2x_3 + c_{25}x_2^3x_3 + c_{26}x_1^2x_3^2 + c_{27}x_1x_2x_3^2 + \\ & c_{28}x_2^2x_3^2 + c_{29}x_1x_3^3 + c_{30}x_2x_3^3 + c_{31}x_3^4 + c_{32}x_1^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c33*x1^4*x2 + c34*x1^4*x3 + c35*x1^3*x2^2 + c36*x1^3*x2*x3 + \\
& c37*x1^3*x3^2 + c38*x1^2*x2^3 + c39*x1^2*x2^2*x3 + c40*x1^2*x2*x3^2 \\
& + c41*x1^2*x3^3 + c42*x1*x2^4 + c43*x1*x2^3*x3 + c44*x1*x2^2*x3^2 + \\
& c45*x1*x2*x3^3 + c46*x1*x3^4 + c47*x2^5 + c48*x2^4*x3 + \\
& c49*x2^3*x3^2 + c50*x2^2*x3^3 + c51*x2*x3^4 + c52*x3^5;
\end{aligned}$$

$$h=\{h1[x1,x2,x3],h2[x1,x2,x3],h3[x1,x2,x3]\};$$

A matriz Jacobiana de h.

$$Dh=Transpose[\{D[h,x1],D[h,x2],D[h,x3]\}];$$

A forma normal de Belitskii de um campo é da forma

A. $[x1,y1,x2,y2]+h(x1,y1,x2,y2)$, onde h deve satisfazer:

$$Transpose[A].h-Dh.Transpose[A].\{x1,y1,x2,y2\}=0;$$

$$Timing[Variables[Transpose[A].h-Dh.Transpose[A].\{x1,x2,x3\}]];$$

$$\{0.Second,\{a01,a02,a03,a04,a05,a06,a07,a08,a09,a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16, \\
b01,b02,b03,b04,b05,b06,b07,b08,b09,b10,b11,b12,b13,b14,b15,b16,c01,c02, \\
c03,c04,c05,c07,c08,c09,c10,c11,c12,c13,c14,c15,x1,x2,x3\}\};$$

A partir da relação acima temos os seguintes valores para os coeficientes

$$AbsoluteTiming[$$

$$Solve[CoefficientList[$$

$$\begin{aligned}
& Transpose[A].h-Dh.Transpose[A].\{x1,x2,x3\},\{x1,x2,x3\}\backslash[Equal]0,\{a01, \\
& a02,a03,a04,a05,a06,a07,a08,a09,a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,b01,b02,b03, \\
& b04,b05,b06,b07,b08,b09,b10,b11,b12,b13,b14,b15,b16,c01,c02,c03,c04,c05, \\
& c07,c08,c09,c10,c11,c12,c13,c14,c15\}]]];
\end{aligned}$$

Com isso, a aplicação h fica da forma.

$$hh=h/.\{Valores\ das\ Variáveis\ dados\ pelo\ comando\ supra\ citado\};$$

Logo, a forma normal de Belitskii é dada por:

```
XH[x1_,x2_,x3_]=A.{x1,x2,x3}+hh;
```

```
Variables[R.XH[x1,x2,x3]+XH[x1,-x2,-x3]];
```

```
Solve[CoefficientList[R.XH[x1,x2,x3]+XH[x1,-x2,-x3],{x1,x2,x3}]\[Equal]0,{Variáveis Citadas no comando acima]};
```

```
XXH[x1_,x2_,x3_]=
```

```
XH[x1,x2,x3]/.{Variáveis Nulas dadas pelo comando anterior};
```

Conseguimos ter a forma Normal de Belitskii até ordem 4 do sistema, que é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y [1 + b_{10}(x^2 + y^2) + b_{42}(x^2 + y^2)^2 + b_{12}z^2 + b_{44}(x^2 + y^2)z^2 + b_{46}z^4] + \\ \quad + xz [b_{05} + b_{25}(x^2 + y^2) + b_{30}z^2] \\ \dot{y} = x [1 + b_{10}(x^2 + y^2) + b_{42}(x^2 + y^2)^2 + b_{12}z^2 + b_{44}(x^2 + y^2)z^2 + b_{46}z^4] + \\ \quad + yz [b_{05} + b_{25}(x^2 + y^2) + b_{30}z^2] \\ \dot{z} = (1 + c_{04})(x^2 + y^2) + c_{06}z^2 + c_{28}z^2(x^2 + y^2) + c_{31}z^4 \end{cases} .$$

Com isso, podemos realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} .$$

Logo, temos

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2} \\ \dot{z} = z \end{cases} .$$

Assim, o sistema fica da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{r} = zr [b_{05} + b_{25}r^2 + b_{30}z^2] \\ \dot{\theta} = 1 + b_{10}r^2 + b_{12}z^2 + b_{42}r^4 + b_{44}r^2z^2 + b_{46}z^4 \\ \dot{z} = (1 + c_{04})r^2 + c_{06}z^2 + c_{28}z^2r^2 + c_{31}z^4 \end{cases} .$$

Como estamos fazendo uma análise local, isto é, numa vizinhança da origem, podemos dividir o nosso sistema pela expressão de $\dot{\theta}$ e assim, obtemos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{zr[b_{05}+b_{25}r^2+b_{30}z^2]}{1+b_{10}r^2+b_{12}z^2+b_{42}r^4+b_{44}r^2z^2+b_{46}z^4} \\ \dot{\theta} = 1 \\ \dot{z} = \frac{(1+c_{04})r^2+c_{06}z^2+c_{28}z^2r^2+c_{31}z^4}{1+b_{10}r^2+b_{12}z^2+b_{42}r^4+b_{44}r^2z^2+b_{46}z^4} \end{cases} .$$

Para fazermos a análise do retrato de fase do sistema acima, iremos usar a técnica de Blow-Up, e para isso, é suficiente considerarmos apenas os primeiros termos de cada componente. Neste caso, θ irá ser considerado como o tempo. Para fazermos uma análise geral dos diagramas de bifurcação, retratos de fases possíveis do sistema acima, iremos considerar apenas os primeiros termos da expansão, que são os termos de ordem 2, pois não é necessário a adição dos outros termos para determinarmos as propriedades genéricas.

$$\begin{cases} \dot{r} = b_{05}rz \\ \dot{z} = (1+c_{04})r^2+c_{06}z^2 \end{cases} .$$

Como vamos fazer uma análise para parâmetros pequenos. Consideremos, finalmente, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} = brz, \\ \dot{z} = r^2 + cz^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $b = \frac{b_{05}}{1+c_{04}}$ e $c = \frac{c_{06}}{1+c_{04}}$.

3.4 Estudo dos Retratos de Fase e da Bifurcação do Sistema (3.2)

Obtemos no primeiro blow-up

$$\begin{cases} r = \rho \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases} .$$

Logo, temos

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{r\dot{r}+z\dot{z}}{\rho^2} \\ \dot{\varphi} = \frac{r\dot{z}-\dot{r}z}{\rho^3} \end{cases} .$$

Dessa forma, (3.2) fica

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho \sin \varphi ((1+b) \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi) \\ \dot{\varphi} = \cos \varphi (\cos^2 \varphi + (c-b) \sin^2 \varphi) \end{cases} .$$

Determinamos as singularidades em $\rho = 0$ resolvendo a seguinte equação:

$$\cos \varphi (\cos^2 \varphi + (c - b) \sin^2 \varphi) = 0.$$

Assim, teremos apenas duas singularidades quando $b < c$ e seis singularidades quando $b > c$, e elas são dadas por

- $b < c$

1. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$,
2. $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$.

- $b > c$

1. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$,
2. $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$,
3. $\varphi_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right)$,
4. $\varphi_4 = -\arccos\left(\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right)$,
5. $\varphi_5 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right)$,
6. $\varphi_6 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right)$.

Agora, calculando o Jacobiano em cada singularidade obtemos:

1. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$,

$$J = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b - c \end{pmatrix}.$$

2. $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$,

$$J = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -(b - c) \end{pmatrix}.$$

3. $\varphi_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right)$,

$$J = \begin{pmatrix} b\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} & 0 \\ 0 & -2(b-c)\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} \end{pmatrix}.$$

$$4. \varphi_4 = -\arccos\left(\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right),$$

$$J = \begin{pmatrix} -b\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} & 0 \\ 0 & 2(b-c)\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} \end{pmatrix}.$$

$$5. \varphi_5 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right),$$

$$J = \begin{pmatrix} b\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} & 0 \\ 0 & -2(b-c)\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} \end{pmatrix}.$$

$$6. \varphi_6 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{1+b-c}}\right).$$

$$J = \begin{pmatrix} -b\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} & 0 \\ 0 & 2(b-c)\sqrt{\frac{1}{1+b-c}} \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, obtemos o seguinte diagrama e retratos de fase do sistema, considerando as 5 regiões possíveis.

$$(I) \quad b - c < 0, \quad c > 0;$$

$$(II) \quad b - c < 0, \quad c < 0;$$

$$(III) \quad b - c > 0, \quad c < 0, \quad b < 0;$$

$$(IV) \quad b - c > 0, \quad c < 0, \quad b > 0;$$

$$(V) \quad b - c > 0, \quad c > 0, \quad b > 0.$$

3.5 Desdobramentos das Regiões (I) e (II)

Determinadas as propriedades genéricas do sistema (3.2) e motivados pelos diagramas de bifurcação dos casos (I) e (II), podemos construir um diagrama de bifurcação de codimensão dois para explicarmos a transição entre as regiões (I) e (II). O primeiro passo para tal estudo é considerarmos um campo genérico de cada região e obtermos seus diagramas de bifurcação, que nesse caso são de codimensão um. Recomendamos a referência [10] para uma classificação completa das famílias a 1-parâmetro genéricas de campos de vetores reversíveis do tipo (3, 1).

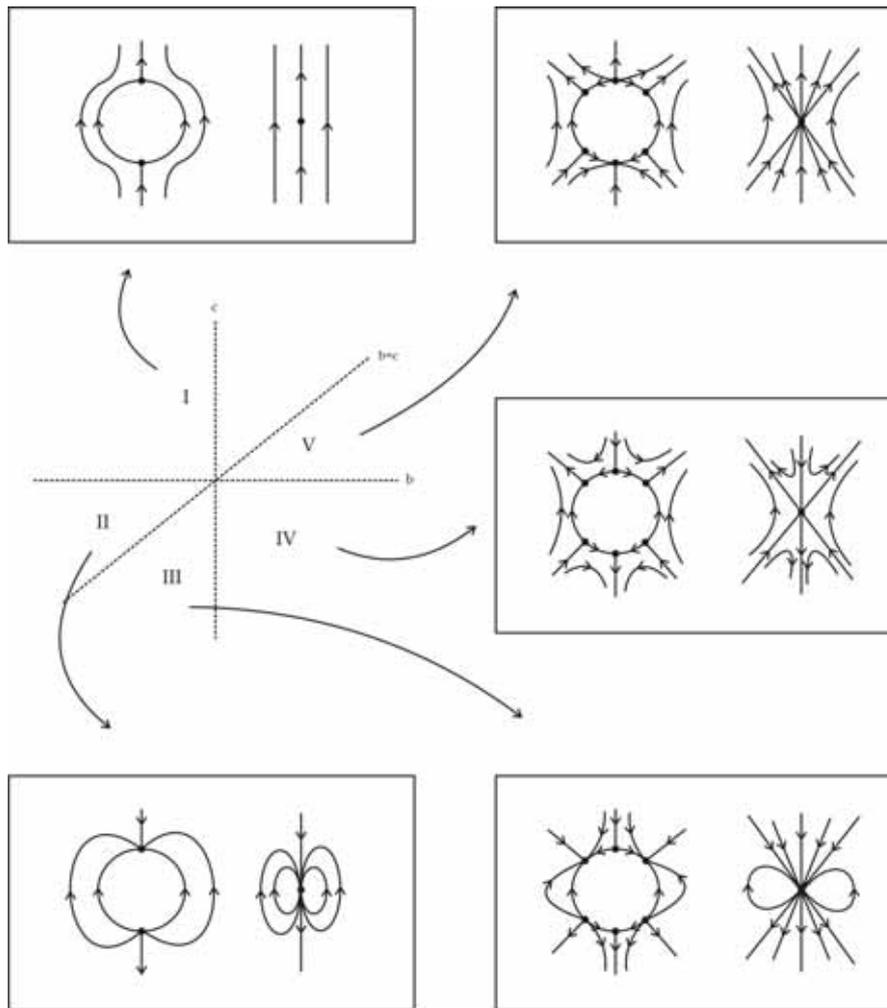


Figura 3.1: Blow-Ups e respectivos Retratos de fase do Sistema (3.2).

3.5.1 Desdobramento da Região (II)

Dentre todos os campos de vetores que pertencem a região $\{b - c < 0, c < 0\}$, podemos selecionar os que são genéricos. Nesse caso, podemos considerar o seguinte desdobramento.

$$\begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = \alpha + r^2 - z^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Analisando o sistema, obtemos:

- $\alpha < 0$

Os pontos singulares são $(-\sqrt{-\alpha}, 0)$ e $(\sqrt{-\alpha}, 0)$ com partes lineares iguais a $\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{-\alpha} \\ -2\sqrt{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{-\alpha} \\ 2\sqrt{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Observe que a reta $r = 0$ é invariante pelo fluxo e a dinâmica sobre ela é apontando para cima, pois $\dot{z} < 0$. E ainda, como o sistema é reversível em relação à $\varphi(r, z) = (r, -z)$, os pontos singulares são centros. Logo, o retrato de fase fica como na Figura 3.2.

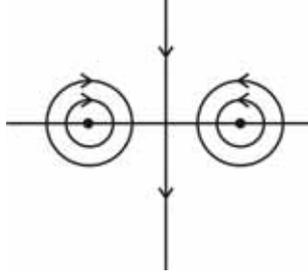


Figura 3.2: Retrato de fase para $\alpha < 0$.

- $\alpha > 0$

Os pontos singulares são $(0, -\sqrt{\alpha})$ e $(0, \sqrt{\alpha})$ com partes lineares iguais a $\begin{pmatrix} 2\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$, respectivamente.

Assim, obtemos o seguinte retrato de fase, mostrado na Figura 3.3.

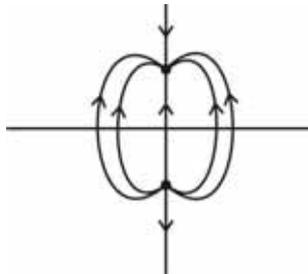


Figura 3.3: Retrato de fase para $\alpha > 0$.

Assim, o diagrama de bifurcação fica da seguinte forma, como mostra a Figura 3.4:

3.5.2 Desdobramento da Região (I)

Analogamente como foi feito para a região (II), fazemos com a região (I) que é dada por $\{b - c < 0, c > 0\}$, logo podemos considerar o seguinte desdobramento.

$$\begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = \alpha + r^2 + z^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Analisando o sistema, obtemos:

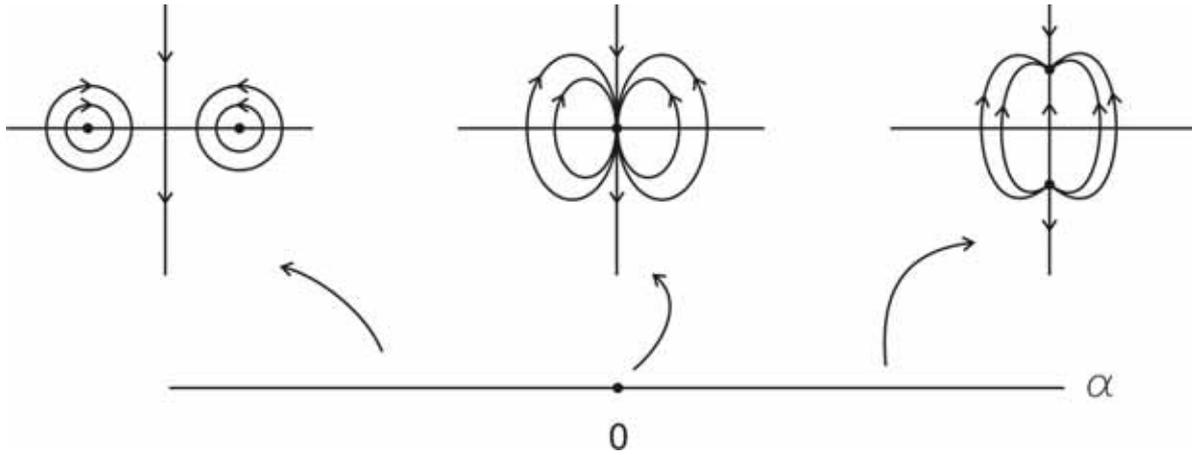


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação de (3.3).

- $\alpha < 0$

Os pontos singulares são $(-\sqrt{-\alpha}, 0)$, $(\sqrt{-\alpha}, 0)$, $(0, -\sqrt{-\alpha})$ e $(0, \sqrt{-\alpha})$ com partes lineares iguais a $\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{-\alpha} \\ -2\sqrt{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{-\alpha} \\ 2\sqrt{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$, respectivamente.

Aqui, novamente o sistema é reversível em relação à $\varphi(r, z) = (r, -z)$, isso justifica a existência dos centros no retrato de fase, como mostra a Figura 3.5. Observamos também que o sistema (3.4), é Hamiltoniano com função potencial $H(r, z) = -rz^2 + \alpha r - \frac{r^3}{3}$. As órbitas que passam pelo ponto $(0, \sqrt{-\alpha})$ são definidas implicitamente pela equação $H(r, z) = 0$, isto é,

$$-r \left(z^2 + \frac{r^2}{3} - \alpha \right) = 0$$

que nos dá duas órbitas, que é o eixo- z ($r = 0$), e a elipse definida por $z^2 + \frac{r^2}{3} = \alpha$, que é a órbita que conecta as selas.

- $\alpha > 0$

Não existem pontos singulares.

Assim, obtemos o seguinte retrato de fase (veja Figura 3.6).

Assim, o diagrama de bifurcação fica como mostra a Figura 3.7:

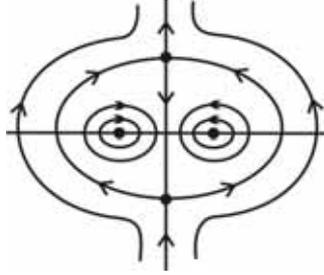


Figura 3.5: Retrato de fase para $\alpha < 0$.



Figura 3.6: Retrato de fase para $\alpha > 0$.

3.6 Transição entre as Regiões (I) e (II)

Agora que estudamos os desdobramentos nessas duas regiões, vamos estudar a bifurcação que ocorre na transição entre essas regiões, usando a teoria desenvolvida em [10], considerando a seguinte família a dois parâmetros.

$$X_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = \alpha + r^2 + \beta z^2 + z^4 \end{cases} . \quad (3.5)$$

Determinando as singularidade temos:

- $z = 0$

Assim, obtemos as singularidades $(-\sqrt{-\alpha}, 0)$ e $(\sqrt{-\alpha}, 0)$.

- $r = 0$

Assim, obtemos as singularidades $(0, z_+^+), (0, z_-^+), (0, z_+^-)$ e $(0, z_-^-)$.

Onde

$$z_+^+ = +\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}},$$

$$z_-^+ = +\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}},$$

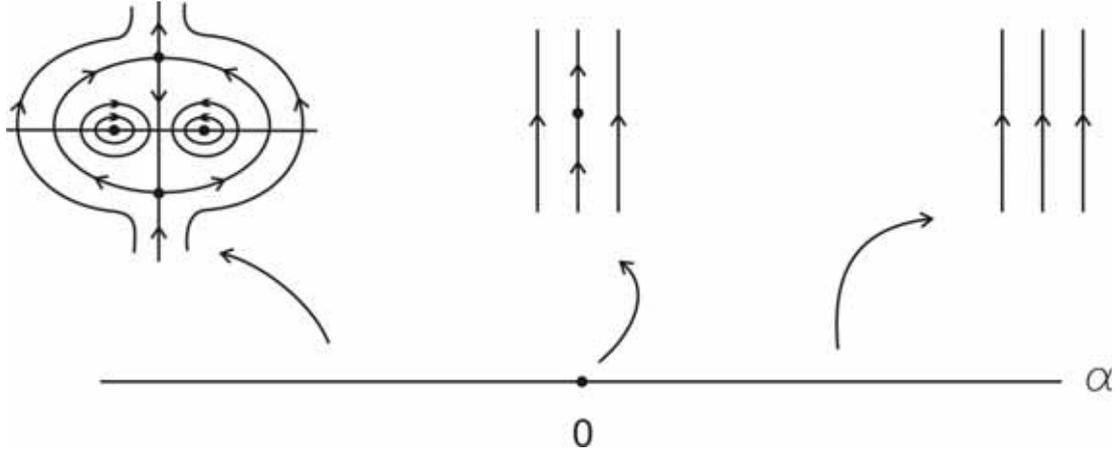


Figura 3.7: Diagrama de Bifurcação do sistema (3.4).

$$z_+^- = -\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}},$$

$$z_-^- = -\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}}.$$

Analisando o sinal das expressões das raízes, obtemos basicamente 3 regiões distintas, quanto às singularidades do sistema (3.5).

$$(A) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha > \frac{\beta^2}{4} \right\} \cup \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; 0 < \alpha < \frac{\beta^2}{4}, \beta > 0 \right\}.$$

$$(B) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; 0 < \alpha < \frac{\beta^2}{4}, \beta < 0 \right\}.$$

$$(C) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha < 0 \}.$$

Observe que na região (A), não existem singularidades. Na região (B), existem 4 singularidades $(0, z_+^+), (0, z_+^-), (0, z_-^+)$ e $(0, z_-^-)$ e na região (C), existem também 4 singularidades $(-\sqrt{-\alpha}, 0), (\sqrt{-\alpha}, 0), (0, z_+^+)$ e $(0, z_+^-)$. Veja ainda que, sobre a curva $SN_R = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \beta < 0 \right\}$, temos duas singularidades, $\left(0, -\sqrt{\frac{-\beta}{2}}\right)$ e $\left(0, \sqrt{\frac{-\beta}{2}}\right)$. Agora, sobre a curva $B_2 = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha = 0, \beta < 0 \}$, temos 3 singularidades $(0, 0), (0, -\sqrt{-\beta})$ e $(0, \sqrt{-\beta})$. Finalmente, sobre a curva $B_1 = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha = 0, \beta > 0 \}$, obtemos apenas a origem como singularidade, assim como para $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Vamos agora fazer a análise da dinâmica em cada região determinada acima e sobre as curvas que as determinaram para obtermos o diagrama de bifurcação e os retratos de fase de (3.5).

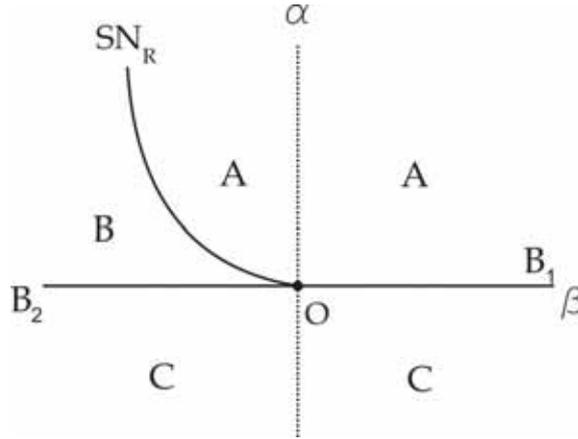


Figura 3.8: Regiões (A), (B) e (C).

3.6.1 Região (A)

Como vimos anteriormente, nessa região, não existem singularidades, e ainda, temos que $\dot{z} > 0$ para todo (r, z) . Logo o retrato de fase nessa região é dado pela Figura (3.9) abaixo.

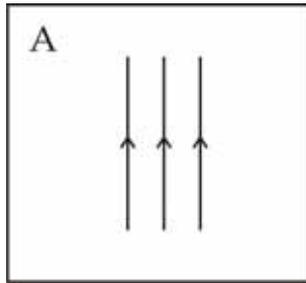


Figura 3.9: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros na região (A).

3.6.2 Sobre a curva SN_R

Sobre a curva $SN_R = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \beta < 0 \right\}$, temos duas singularidades, $\left(0, -\sqrt{\frac{-\beta}{2}}\right)$ e $\left(0, \sqrt{\frac{-\beta}{2}}\right)$. Vamos ver o comportamento de $\left(0, \sqrt{\frac{-\beta}{2}}\right)$, e pela reversibilidade do sistema, obtemos seu retrato de fase.

Calculando o Jacobiano do sistema na singularidade, obtemos

$$J\left(0, \sqrt{\frac{-\beta}{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{-\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que nesse caso não conseguimos obter de imediato o comportamento local da singularidade, então fazemos uma mudança de variáveis para concluirmos sua natureza.

Chamemos $\bar{r} = r$ e $\bar{z} = z - \sqrt{-\frac{\beta}{2}}$, e obtemos

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = -2 \left(\bar{z} + \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \right) \bar{r} \\ \dot{\bar{z}} = -2\beta\bar{z}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{-\beta}\bar{z}^3 + \bar{z}^4 + \bar{r}^2 \end{cases}.$$

Dessa forma, temos que $\left(0, \frac{\sqrt{-\beta}}{2}\right)$ é uma sela-nó. E novamente, pela reversibilidade do sistema, obtemos o seguinte retrato de fase sobre a curva SN_R , Figura (3.10).

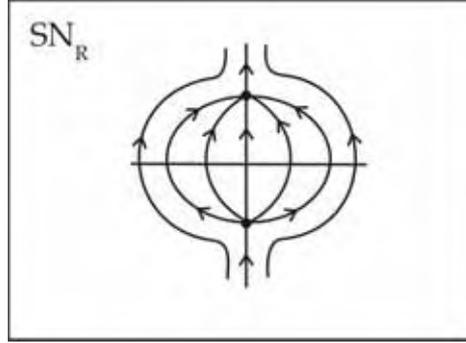


Figura 3.10: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros sobre a curva SN_R .

3.6.3 Região (B)

Na região (B), existem 4 singularidades $(0, z_+^+)$, $(0, z_+^-)$, $(0, z_-^-)$ e $(0, z_-^+)$, todos no eixo- z . Vamos calcular o Jacobiano em cada singularidade para obtermos seu comportamento local.

Temos:

$$\begin{aligned} \bullet J(0, z_+^+) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \end{pmatrix} \\ \bullet J(0, z_+^-) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sqrt{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \end{pmatrix} \\ \bullet J(0, z_-^-) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sqrt{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \end{pmatrix} \\ \bullet J(0, z_-^+) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observamos que $(0, z_+^+)$ e $(0, z_-^-)$ são selas, $(0, z_+^-)$ é nó-atrator e $(0, z_-^+)$ é nó-repulsor. Agora, pela reversibilidade do sistema, as selas se conectam, assim como os nós se conectam, como mostra a Figura (3.11). Obtemos então o seguinte retrato de fase (3.11) na região (B).

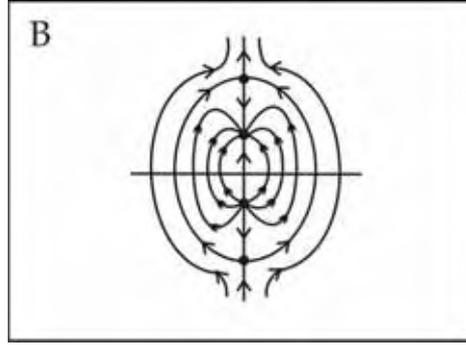


Figura 3.11: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros na região (B).

3.6.4 Sobre a curva B_2

Observe que sobre a curva $B_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha = 0, \beta < 0\}$, o sistema (3.5) fica da forma

$$X_{0,\beta} = \begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = r^2 + \beta z^2 + z^4 \end{cases} \quad (3.6)$$

Neste caso, temos 3 singularidades $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{-\beta})$ e $(0, \sqrt{-\beta})$. Novamente, vamos calcular o Jacobiano em cada singularidade para obtermos seu comportamento local.

Iremos calcular o Jacobiano em $(0, \sqrt{-\beta})$ e pela simetria da reversibilidade, determinamos o comportamento de $(0, -\sqrt{-\beta})$.

$$J(0, \sqrt{-\beta}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{-\beta} & 0 \\ 0 & -2\beta\sqrt{-\beta} \end{pmatrix}.$$

Observe que nesse caso, $\beta < 0$, então, temos que as singularidades $(0, -\sqrt{-\beta})$ e $(0, \sqrt{-\beta})$, serão selas.

Agora, vamos estudar a origem no sistema. Observamos primeiramente que, nesse caso, o linearizado é nulo. Então vamos fazer a desingularização usando a técnica de blow-up no sistema (3.8). Logo, tome

$$\begin{cases} r = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{r\dot{r} + z\dot{z}}{\rho^2} \\ \dot{\theta} = \frac{r\dot{z} - \dot{r}z}{\rho^3} \end{cases}.$$

Consequentemente, (3.8) fica

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho (-\cos^2 \theta \sin \theta + \beta \sin^3 \theta + \rho^2 \sin^5 \theta) \\ \dot{\theta} = \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (2 + \beta + \rho^2 \sin^2 \theta)) \end{cases}.$$

Determinamos as singularidades em $\rho = 0$ resolvendo a seguinte equação:

$$\cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (2 + \beta + \rho^2 \sin^2 \theta)) = 0.$$

Como estamos realizando um estudo local, podemos nos preocupar apenas com as raízes $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Calculando o Jacobiano em cada uma das raízes, temos

$$J_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -2 - \beta \end{pmatrix}.$$

$$J_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 2 + \beta \end{pmatrix}.$$

Logo, o retrato de fase fica como mostra a Figura (3.12).

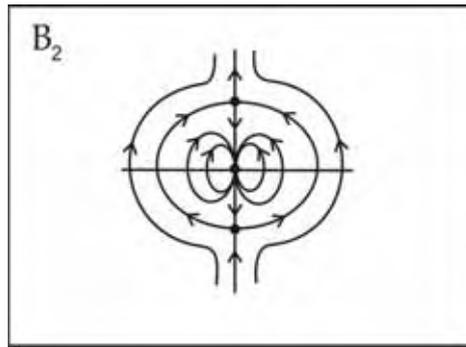


Figura 3.12: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros sobre a curva B_2 .

3.6.5 Região (C)

Nesta região, existem também 4 singularidades $(-\sqrt{-\alpha}, 0)$, $(\sqrt{-\alpha}, 0)$, $(0, z_+^+)$ e $(0, z_+^-)$. Observamos que agora existem duas singularidades no eixo- r e duas singularidades do eixo- z . Estudando o Jacobiano das singularidades $(-\sqrt{-\alpha}, 0)$, $(\sqrt{-\alpha}, 0)$, obtemos

$$J(-\sqrt{-\alpha}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{-\alpha} \\ -2\sqrt{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J(\sqrt{-\alpha}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{-\alpha} \\ 2\sqrt{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente, pela reversibilidade do sistema, obtemos que as duas singularidades acima são centros.

Calculando agora o Jacobiano nas outras singularidades, obtemos

$$J(0, z_+^+) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$J(0, z_+^-) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \end{pmatrix}$$

Logo, elas são selas. Dessa forma, o retrato de fase fica da seguinte forma, como mostra a Figura (3.13).

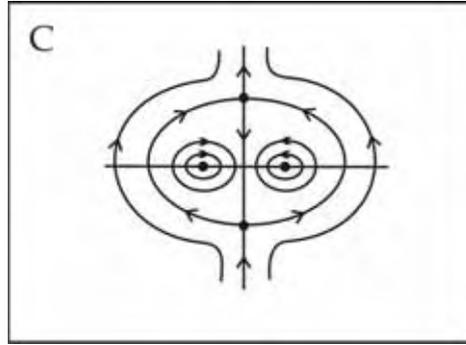


Figura 3.13: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros na região (C).

3.6.6 Na origem $(\alpha, \beta) = (0, 0)$

Observe que na origem, o sistema (3.5) fica da forma

$$X_{0,0} = \begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = r^2 + z^4 \end{cases} . \quad (3.7)$$

Primeiramente, temos que a única singularidade do sistema (3.7) é a origem. Aqui, como o sistema está bem degenerado, observamos que o eixo- y é invariante e o fluxo é sempre apontando para cima. Além disso, $\dot{z} > 0$ para todo (r, z) , logo obtemos o retrato na Figura (3.14).

3.6.7 Sobre a curva B_1

Finalmente, só falta estudarmos sobre a curva $B_1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha = 0, \beta > 0\}$. Aqui o sistema (3.5) fica da forma

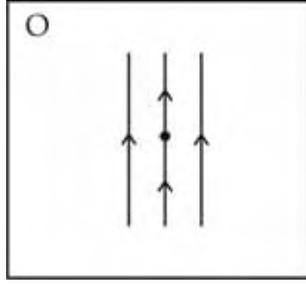


Figura 3.14: Retrato de fase com parâmetros nulos.

$$X_{0,\beta} = \begin{cases} \dot{r} = -2rz \\ \dot{z} = r^2 + \beta z^2 + z^4 \end{cases} \quad (3.8)$$

Porém, neste caso, a única singularidade é a origem. Novamente, devemos aplicar a técnica de blow-up, como fizemos no caso sobre a curva B_2 . Como a singularidade é a mesma, obtemos as mesmas expressões do blow-up.

$$\begin{cases} r = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \quad .$$

Dessa forma, temos

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{r\dot{r} + z\dot{z}}{\rho^2} \\ \dot{\theta} = \frac{r\dot{z} - \dot{r}z}{\rho^3} \end{cases} \quad .$$

Consequentemente, (3.8) fica

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho (-\cos^2 \theta \sin \theta + \beta \sin^3 \theta + \rho^2 \sin^5 \theta) \\ \dot{\theta} = \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (2 + \beta + \rho^2 \sin^2 \theta)) \end{cases} \quad .$$

Determinando as singularidades em $\rho = 0$, obtemos as mesmas raízes $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

Calculando o Jacobiano em cada uma das raízes, temos

$$J_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -2 - \beta \end{pmatrix} \quad .$$

$$J_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 2 + \beta \end{pmatrix} \quad .$$

E dessa forma, obtemos o seguinte retrato de fase, como mostra a Figura (3.15).

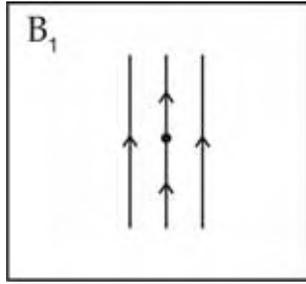


Figura 3.15: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros sobre a curva B_1 .

3.6.8 Diagrama de Bifurcação e Retratos de Fases de (3.5)

Juntando todas as seções anteriores, podemos fechar o resultado que obtivemos quanto ao sistema (3.5) que nos dá o diagrama de bifurcação e retratos de fase do mesmo.

Teorema B

1. Existe uma vizinhança aberta $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ tal que o diagrama de bifurcação de (3.5) dentro de Δ consiste da origem $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ e as seguintes curvas:

$$(a) SN_R = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta; \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \beta < 0 \right\}$$

$$(b) B_1 = \{ (\alpha, \beta) \in \Delta; \alpha = 0, \beta < 0 \}$$

$$(c) B_2 = \{ (\alpha, \beta) \in \Delta; \alpha = 0, \beta > 0 \}$$

2. O Diagrama de Bifurcação e o retratos de fases de (3.5) na vizinhança Δ são mostrados nas Figuras 3.16 e 3.17, onde as regiões A, B e C são formadas pelas curvas de bifurcação acima.

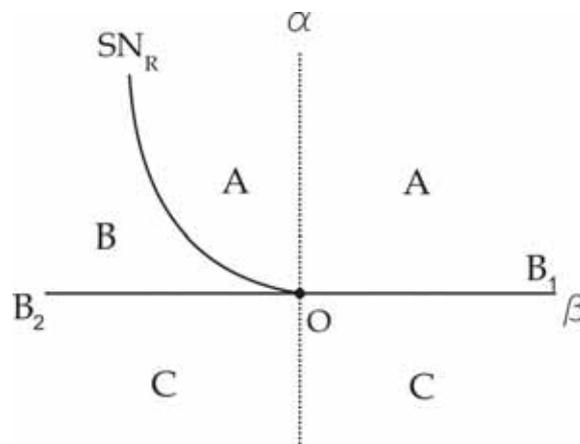


Figura 3.16: O Diagrama de Bifurcação de (3.5).

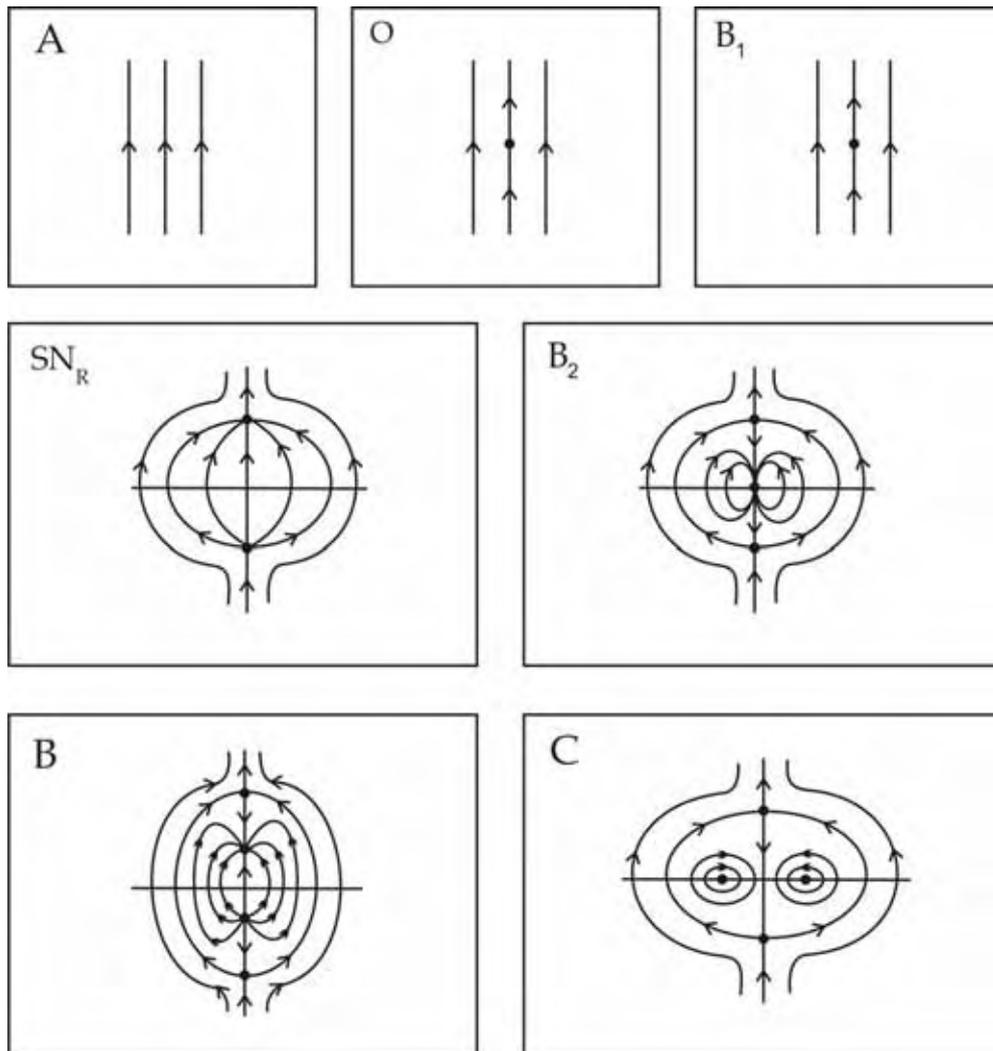


Figura 3.17: Retratos de fase de (3.5).

3.7 Considerações Finais

Recordemos como foi feito o estudo desse último capítulo, sobre a bifurcação Hopf-Zero. Estudamos o caso onde os autovalores do linearizado são $\{0, i, -i\}$. Isto é, com a forma de Jordan dada como (4)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assumimos que o sistema seja reversível em relação a R_1

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

e calculamos a forma de Belitskii do sistema a partir do sistema linear da forma A_2 . Fizemos algumas observações e mudanças de variáveis até obtermos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = brz, \\ \dot{z} = r^2 + cz^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $b = \frac{b_{05}}{1+c_{04}}$ e $c = \frac{c_{06}}{1+c_{04}}$.

Para obtermos esse último sistema fizemos uma mudança de coordenadas cilíndricas e consideramos θ como sendo o tempo. Assim, podemos fazer uma análise do retrato de fase do sistema (3.9) que determinamos durante todo o capítulo 3 e tentarmos observar o que está ocorrendo no sistema original que é dado no \mathbb{R}^3 . Isto é, passarmos o retrato de fase do plano- rz para o espaço- xyz , dada que a mudança realizada foi feita da seguinte forma

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}.$$

Para fazermos esse estudo, escolhemos o retrato de fase dado pela Figura 3.18, que é o retrato dado na região C .

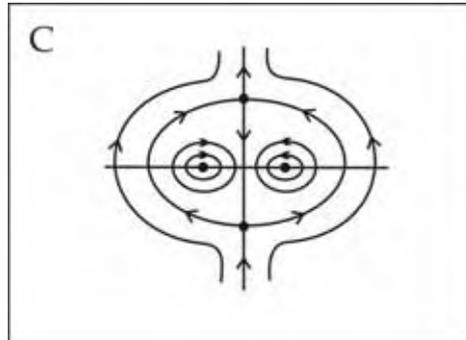


Figura 3.18: Retrato de fase de (3.5) com parâmetros na região (C).

Observamos os seguintes fatos:

- Pontos singulares do retrato no plano- rz situados no eixo- r , correspondem a ciclos limites no espaço- xyz . Pois pontos singulares correspondem a $\dot{r} = 0$ e $\dot{z} = 0$, isto é, raio r e coordenada z constantes e θ variando.

- As órbitas que conectam as duas selas no plano- rz , diferentes do próprio eixo z , determinam uma esfera invariante pelo fluxo do campo. A sela situada no eixo- z positivo corresponde ao pólo norte dessa esfera e órbitas situadas nessa esfera todas acabam morrendo nesse pólo, em forma de foco atrator. Enquanto que a sela situada no eixo- z negativo corresponde ao pólo sul da mesma, e as órbitas situadas sobre essa esfera todas nascem dela, em forma de foco repulsor.
- Órbitas periódicas fechadas do retrato no plano- rz situados em torno das singularidades do eixo- r , correspondem a toros invariantes pelo fluxo do sistema tridimensional. As órbitas do sistema tridimensional, dentro desses toros invariantes, podem ser periódicas ou densas dependendo se a inclinação em relação ao plano- xy for racional ou irracional.
- Finalmente as órbitas situadas no exterior das conexões de sela, correspondem a cilindros invariantes pelo fluxo do sistema tridimensional. As órbitas contidas nesses cilindros invariantes correspondem a hélices ou órbitas periódicas.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDREEV, A.F., **Investigation of the Behaviour of the Integral Curves of a system of two Differential Equations in the Neighbourhood of a Singular Point.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 8 :183–207, 1958.
- [2] ANDRONOV, A.A.; LEONTOVICH, E.A.; GORDON, I.I.; MAUIER, A.G., **Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane.** Translated from the Russian. Halsted Press, New York-Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973.
- [3] BARBACON, M., **Théorème de Newton pour les fonctions de class C^r** , preprint, Strashcurg.
- [4] BOGDANOV, R.I , **Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues.** *Trudy Sem. Petrovsk.*, 2 (1976), 37-65 (em Russo). *Sel. Math. Sov.*, 1(1981), 389–421 (em Inglês).
- [5] BOGDANOV, R.I , **Bifurcations of the limit cycle of a family of plane vector fields.** *Trudy Sem. Petrovsk.*, 2 (1976), 23-35 (em Russo). *Sel. Math. Sov.*, 1 (1981), 373–387 (em Inglês).
- [6] BOYCE, W.; DIPRIMA, R., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de valores de contorno.** LTC. 1999.
- [7] BROER, H.W., **Quasi Periodic Flow Near a Codimension One Singularity of a Divergence Free Vector Field in Dimension Three.** *Lecture Notes in Mathematics*, 898, Berlin: Springer. 1981.
- [8] BROER, H.W.; NAUDOT, V.; SALEH, K.; ROUSSARIE, R., **A predator-prey model with non-monotonic response function.** *Regular and chaotic dynamics*, 11, 155–165, 2006.

-
- [9] BUZZI, C.A., **Formas Normais de Campos Vetoriais Reversíveis**. Tese de Doutorado. Universidade de Campinas. 1999.
- [10] BUZZI, C.A.; TEIXEIRA, M.A.; YANG, J., **Hopf-zero bifurcations of reversible vector fields**. (English summary) *Nonlinearity*, 14 (2001), 3, 623–638.
- [11] CHOW, S.N.; LI, C.; WANG, D., **Normal form and bifurcation of planar vector fields**. Cambridge University Press, 1994.
- [12] DUFF, G.F.D., **Limit-cycles and rotated vector fields**. *Ann. of Math.*, 57, 15–31, 1953.
- [13] DUMORTIER, F.; ROUSSARIE, R. E SOTOMAYOR, J., **Bifurcations in planar vector fields: Nilpotents singularities and abelian integrals**, *Lec. Notes in Math.*, 1480, Springer-Verlag, 1991.
- [14] DUMORTIER, F., **Singularities of vector fields in the plane**. *J. of Diff. Eq.*, 23, 53–106, 1977.
- [15] DUMORTIER, F., **Singularities of vector fields**. *Monografia IMPA*, 32, Brasil, 1978.
- [16] DUMORTIER, F., **Techniques in the theory of local bifurcations: blow-up, normal forms, nilpotent bifurcations, singular perturbations**. *Bifurcations and periodic orbits of vector fields*. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 408, 19–73, Montreal, PQ, 1992.
- [17] FIGUEIREDO, D.G.; NEVES, A.F., **Equações Diferenciais e Aplicações**. Coleção SBM, 1997.
- [18] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P., **Nonlinear Oscillations. Dynamical Systems and bifurcation of vector fields**. Berlin:Springer. 1983.
- [19] HANBMANN, H., **The reversible umbilic bifurcation**. In: **Time-reversal symmetry in dynamical systems**. *Phys. D*, 112, no. 1-2, 81–94, 1996.
- [20] HARNAD, J., **Picard-Fuchs equations, Hauptmoduls and integrable systems. Integrability: the Seiberg-Witten and Whitham equations**. Edinburgh, 1998, 137–151, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.
- [21] HARTMAN, P., **Ordinary Differential Equations**. Wiley, New York, 1964.
- [22] HIRSCH, M.W; SMALE, S., **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra**. Academic Press, Orlando, 1974.

-
- [23] HIRSCH, M.W.; PUGH, C.; SHUB, M., **Invariant manifold. In Lecture Notes in Math.**, 583. Springer-Verlag, New York. 1977.
- [24] KHOROZOV, E.I., **Versal deformations of equivariant vector fields in the case of symmetry of order 2 and 3. Trans. of Petrovski Seminar**, 5, 163–192 (em Russo), 1979.
- [25] LASALLE, M.G., **Une Démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables. Topology**, 12, 41–62, 1973.
- [26] LIMA, E.L., **Curso de Análise; v.1**, 10.ed., Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [27] LIMA, E.L., **Espaços Métricos**, Projeto Euclides, IMPA, 1983.
- [28] MONTGOMERY, D.; ZIPPIN, L., **Topological Transformations Groups**, Inter- science, New York, (1955).
- [29] MUNKRES, J.R., **Topology: a first course**. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [30] PALIS JR, J.; MELO, W., **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**. Projeto Euclides, 1978.
- [31] PERKO, L., **Rotated vector fields and the global behavior of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane. J. Differential Equations**, 18, 63–86, 1975.
- [32] PERKO, L., **Differential equations and dynamical systems. Third edition. Texts in Applied Mathematics**, 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [33] ROBERTS, J.A.G.; QUISPÉL, G.R.W., **Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems. Phys. Rep.**, 216, 63–177, 1992.
- [34] ROUSSARIE, R.; WAGENER, F., **A study of the Bogdanov-Takens bifurcation. (English summary) Resenhas** 2, 1, 1–25, 1995.
- [35] RUELE, D., **Chance and Chaos**. Princeton University Press, New Jersey, 1991.
- [36] SCHECTER, S., **C^p singularity theory and heteroclinic bifurcation with a distinguished parameter. J. Diff. Eq.**, 99, 306–341, 1992.
- [37] SEIFERT, G., **A rotated vector approach to the problem of stability of solutions of pendulum-type equations, contributions to the theory of nonlinear oscillations. Annals of Math. Studies**, 3, 1–16, 1956.

-
- [38] SEVRYUK, M.B., **Reversible Systems. Lecture Notes in Mathematics**, 1211. 1986.
- [39] SOTOMAYOR, J., **Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. Publ. Math. IHES**, 43, 5–46, 1973.
- [40] SOTOMAYOR, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides**, 1979.
- [41] TAKENS, F., **Singularities of vector fields. Publ. Math. IHES**, 43, 47–100, 1974.
- [42] TAKENS, F., **Forced oscillations and bifurcations: Applications of global analysis I. In Commun. Math.**, Vol. 3. Inst. Rijksuniv. Utrecht, 1974.
- [43] TEIXEIRA, M. A., **Singularities of reversible vector fields. Phys. D**, 100, no. 1-2, 101–118, 1997.
- [44] TOUBOUL, J., **Bifurcation analysis of a General Class Of Non-Linear Integrate And Fire Neurons. Rapport de Recherche**, 6161, 2007.
- [45] XIANG-YAN, C. , **Applications of the theory of rotated vector fields I, Nanjing Daxue Xuebao (Math.)**, 1, 19–25, 1963.
- [46] XIANG-YAN, C. , **Applications of the theory of rotated vector fields II, Nanjing Daxue Xuebao (Math.)**, 2, 43–50, 1963.
- [47] XIANG-YAN, C. , **On generalized rotated vector fields, Nanjing Daxue Xuebao (Nat. Sci.)**, 1, 100–108, 1975.
- [48] YANQIAN, YE , **Qualitative theory of polynomial differential systems. Shanghai Scientific and Technical Publishers**, Shanghai, 1995 (em Chinês).
- [49] ZHANG, Z.; DING, T.; HUANG, W.; DONG, Z., **The Qualitative Theory of Differential Equations. Science Press**, Beijing, 1985 (em Chinês). Tradução em Inglês.
- [50] ZOLADEK, H., **On the versality of certain family of vector Fields on the plane. Math. USSR Sb.**, 48, 463–492, 1984.
- [51] ZOLADEK, H., **Bifurcations of a certain family of a planar vector Fields tangent to axes. J. Diff. Eq.**, 67, 1–55, 1987.

Índice Remissivo

- blow-up, 76
- Campo Hamiltoniano, 27
- campo hiperbólico, 8
- Campo Reversível, 74
- codimensão de uma singularidade, 8
- conjugação topológica, 7
- desdobramento não degenerado, 67
- desdobramento versal, 65
- equivalência de famílias locais, 64
- família de campos vetoriais, 6
- família local, 64
- família local induzida, 65
- fluxo de um campo de vetores, 5
- fonte, 18
- germe, 64
- Involução, 74
- k-jato, 63
- k-tangente, 63
- Lema da Colagem, 52
- Lema da Perturbação, 35
- linearização, 9
- poço, 18
- projeção natural, 64
- sela, 18
- simetria, 74
- singularidade, 9
- solução da equação diferencial, 3
- Teorema da Função Implícita, 3
- Teorema da Variedade Central, 11
- Teorema da Variedade Estável, 11
- Teorema de Grobman-Hartman, 10
- Teorema de Montgomery-Bochner, 76
- Teorema de Preparação de Malgrange, 56
- Teorema de Stokes, 3
- topologicamente conjugados, 7
- topologicamente equivalentes, 7
- Variedade Central Global, 12
- Variedade Central Local, 14