unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA



Abordagem intuitiva de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral por meio de modelagem e vídeo-análise com os *softwares Tracker* e Geogebra

Isabela Aparecida Ferreira

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2025

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Isabela Aparecida Ferreira

Abordagem intuitiva de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral por meio de modelagem e vídeo-análise com os *softwares Tracker* e Geogebra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

Rio Claro/SP
2025

F383a

Ferreira, Isabela Aparecida
Abordagem intuitiva de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral por meio de modelagem e vídeo-análise com os softwares Tracker e Geogebra / Isabela Aparecida Ferreira. -- Rio Claro, 2025
254 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Vídeo-Análise. 3. Tracker. 4. Geogebra. 5. Ensino de Matemática Superior. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

Impacto potencial desta pesquisa

Ao longo deste trabalho, foram elaboradas sequências didáticas para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral utilizando os *softwares Tracker* e Geogebra. O *Tracker* é muito utilizado no ensino de física, pois permite realizar vídeo-análise de fenômenos físicos, porém nesta dissertação estamos usando este *software* como uma ferramenta para o ensino de matemática. O uso de tecnologias para explorar as ciências exatas, contribui para a visualização dos conceitos teóricos em práticas do cotidiano. Isso reflete no material que foi elaborado, o qual o aluno utiliza ferramentas digitais para analisar movimentos físicos e, a partir deles, explorar conceitos matemáticos como limite, derivada e integral. Além disso, abordamos uma seção sobre a teoria de Howard Gardner sobre Inteligências Múltiplas que permite os alunos refletirem sobre o seu próprio desenvolvimento e aprendizagem.

Potential impact of this research

Throughout this work, didactic sequences were developed for the study of Differential and Integral Calculus using the software Tracker and GeoGebra. Tracker is widely used in physics education, as it allows video analysis of physical phenomena; however, in this dissertation, we are using this software as a tool for teaching mathematics. The use of technology to explore the exact sciences contributes to the visualization of theoretical concepts through everyday practices. This is reflected in the material that was developed, in which students use digital tools to analyze physical movements and, from them, explore mathematical concepts such as limits, derivatives, and integrals. In addition, we included a section on Howard Gardner's theory of Multiple Intelligences, which allows students to reflect on their own development and learning.

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Isabela Aparecida Ferreira

Abordagem intuitiva de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral por meio de modelagem e vídeo-análise com os *softwares Tracker* e Geogebra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Coordenadoria de Matemática - IFSP/SJC
Orientador

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - IGCE - UNESP

Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa
Departamento de Matemática - CESBA - UEMA

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 03 de julho de 2025

Dedico esta dissertação à minha mãe, ao meu pai, aos meus avôs e avós, que são exemplos de força, coragem e amor, e que, com sua sabedoria e ternura, sustentaram as raízes que me formam. Sou eternamente grata por cada gesto, ensinamento e por serem a base da minha história.

Agradecimentos

Concluir esta dissertação representa não apenas o fim de uma etapa acadêmica, mas também a concretização de um processo intenso, repleto de desafios, descobertas, aprendizados e crescimento. É mais do que a finalização de um trabalho acadêmico, este é o resultado de uma jornada que transformou a minha vida.

Morar em outra cidade para realizar parte deste mestrado foi uma decisão corajosa e, ao mesmo tempo, uma das mais enriquecedoras que já tomei. Sair do conhecido, enfrentar a saudade, se adaptar a uma nova rotina e recomeçar do zero em muitos aspectos exigiu força e resiliência. Porém, foi justamente nesses momentos que encontrei aprendizados profundos, novas amizades e um novo olhar sobre mim mesma.

Durante esse percurso, fui acolhida por pessoas incríveis, que cruzaram meu caminho e tornaram a jornada mais leve. A cada gesto de carinho e palavra de apoio, encontrei forças para continuar, mesmo nos dias mais difíceis.

Nenhum passo foi dado sozinho. A conclusão deste trabalho é também fruto do apoio, incentivo e presença de pessoas fundamentais, que fizeram toda a diferença nessa caminhada. Por isso, este agradecimento é uma tentativa de retribuir tantos gestos de cuidado, presença e incentivo.

Chegar até aqui é uma conquista que levo com orgulho e gratidão. Este mestrado marca o encerramento de um ciclo muito significativo da minha vida, que me transformou em muitos sentidos.

Agradeço a Deus, por me guiar, me dar forças e renovar minha fé em todos os momentos. Em meio ao cansaço, às incertezas e ao medo, foi Ele quem me sustentou e me deu forças para continuar.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá, que me orienta desde a época da graduação, agradeço por ser exemplo, pelo seu apoio constante e por acreditar em mim mesmo nos momentos em que eu mesma duvidei. Algum dia gostaria de ser como ele, que é exemplo de professor, me mostrou muito além que um orientador e foi amigo quando precisei. Agradeço pela escuta atenta, pela confiança no meu trabalho e por cada conselho que fizeram toda diferença ao longo desta caminhada. Suas orientações foram fundamentais para que este trabalho tomasse forma. Obrigada por tudo!

Agradeço à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), campus Rio Claro, que me acolheu, ofereceu o espaço físico para o meu desenvolvimento e a formação que tive com professoras exemplares. Aos funcionários do programa de pós-graduação, bibliotecárias, professores e alunos do PAADES[1], e Coral Uirapuru da UNESP, agradeço pela companhia e palavras de incentivo. Sou grata por cada oportunidade vivida aqui.

Obrigada as professoras do programa de mestrado, em especial Profa. Dra. Eliris

[1]Programa de Aperfeiçoamento e Apoio à Docência no Ensino Superior.

Cristina Rizziolli, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso e Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis, que por vezes me ajudaram com a matemática durante a aula e plantões de dúvidas em suas salas, ensinando com todo cuidado e dedicação, além de me acolherem e darem conselhos valiosos para vida. Quatro mulheres na matemática, saibam que vocês são inspirações para mim. Também, agradeço aos colegas de turma, pela convivência enriquecedora, discussões produtivas e o ambiente de aprendizado construído em conjunto.

Agradeço aos professores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São José dos Campos, que foram inspiração para mim, aqueles que me deram a base matemática, me ensinaram a sempre buscar por conhecimento e a ensinar os alunos com dedicação e empatia. Em especial, agradeço a Profa. Dra. Rosemeire Aparecida Rosa Oliveira e ao Prof. Dr. Marcos William da Silva Oliveira, que escreveram as cartas de recomendação para o mestrado, me incentivaram a continuar buscando conhecimento e a seguir meus sonhos, sendo exemplos de professores. Também, agradeço a Profa. Dra. Fabiane Guimaraes Vieira Marcondes e a Profa. Me. Kelem Fabiana Gubolin Zapparoli por serem inspirações para mim na área de Educação Matemática. Além disso, deixo minha gratidão a todos os professores da graduação e do técnico que me deram aula, saibam que levo comigo um pouco de cada um de vocês. Como dizia o Prof. Dr. Reginaldo de Oliveira Coelho: "a bagagem do aluno importa".

Agradeço a minha família, meu porto seguro. Aos meus pais, Amélia Lucinda Bastos Ferreira e Paulo Caetano Ferreira, por todo amor recebido, vocês me ensinaram sobre responsabilidade, persistência e honestidade. Obrigada aos meus avôs, em especial, as minhas avós Leonor Botega Ferreira e, em memória, Hilda Martins Ferreira Bastos, mulheres fortes, inspiradoras, que com sua sabedoria, simplicidade e afeto me ensinaram mais do que qualquer livro. Aos familiares que torceram por mim de perto e de longe, saibam que cada conquista tem um pouco de vocês. Obrigada por entenderem a distância e me apoiarem. Vocês foram a base de tudo.

Obrigada aos novos amigos e os de longa data, que torceram por mim, vibraram comigo, acolheram meu cansaço e me lembraram de não desistir. Agradeço pelo carinho, conversas, comemorações, passeios e a compreensão nos momentos de ausência. Essa conquista também tem um pouco de vocês.

Por fim, obrigada a todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa caminhada. Não caminhei sozinha e é por isso que cheguei até aqui. Cada etapa concluída era uma comemoração que fazíamos. Carrego um pouco de cada um de vocês neste momento tão especial.

Agradeço a todos e a mim por repetir inúmeras vezes a frase a seguir.

Vai dar certo...

Sobre a autorização do uso de imagens

No capítulo 2, são reproduzidas algumas imagens de livros de cálculo que são frequentemente utilizados nas graduações brasileiras. Esclarecemos que a reprodução dessas imagens foi autorizada, conforme detalhado a seguir. Os documentos que comprovam as referidas autorizações estão sob a guarda da autora e de seu orientador.

- Figuras do livro "Cálculo: Volume 1" de George B. Thomas: Autorização concedida pela editora Pearson em 13 de novembro de 2024.
- Figuras do livro "Cálculo com Geometria Analítica: Volume 1" de George F. Simmons: Autorização concedida pela editora Pearson em 13 de novembro de 2024.
- Figuras do livro "Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração" de Diva. M. Flemming e Mirian B. Gonçalves: Autorização concedida pela autora (Diva M. Flemming), por sugestão da editora Pearson, em 13 de novembro de 2024.
- Figuras do livro "Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações (*Applied Calculus: For Business, Economics, and the Social and Life Sciences*)" de Laurence D. Hoffmann, Gerald L. Bradley, Dave Sobecki e Michael Price: Autorização concedida pela editora extrangeira McGraw Hill, por sugestão e com ciência da editora nacional LTC, em 15 de janeiro de 2025.
- Figuras do livro "Cálculo: Volume 1" de James Stewart: Autorização concedida pelo Grupo +A, encaminhado pela editora Cengage Learning, em 21 de fevereiro de 2025.

Resumo

Nas universidades, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é componente curricular nos cursos de Matemática, Física, Química, Engenharias, entre outros. Muitos alunos, ao cursarem a disciplina mencionada, apresentam dificuldades nos estudos, o que muitas vezes ocasionam a sua desistência do curso. Ao pensar nessas dificuldades, esta dissertação busca propor sequências didáticas que auxiliem os alunos do ensino superior a visualizar os conceitos de limite, derivada e integral. Para isso, foram feitas vídeo-análises utilizando os *softwares Tracker* e Geogebra. O *Tracker* é um *software* de vídeo-análise que permite coletar dados do movimento de fenômeno físico. O Geogebra é um *software* de matemática dinâmica que possibilita combinar geometria, álgebra, entre outros, na mesma plataforma. Os movimentos de fenômenos físicos foram registrados com câmera, após isso, utilizamos o *Tracker* para coletar os dados e modelar os experimentos e usamos o Geogebra para estudá-los. Os questionários propostos possuem sequências de atividades para o aluno desenvolver sobre limite, derivada e integral, as respostas esperadas estão apresentadas para o docente com comentários e sugestões de como realizar o experimento e analisá-lo nos *softwares*. As dificuldades encontradas durante a realização do experimento estão mencionadas em um apêndice para que diminua possíveis complicações ao solucionar o questionário.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Vídeo-análise. *Tracker*. Geogebra. Ensino de Matemática Superior.

Abstract

At universities, the subject of Differential and Integral Calculus is a curricular component in courses such as Mathematics, Physics, Chemistry, Engineering, among others. Many students, when taking this subject, face difficulties in their studies, which often leads them to drop out of the course. Considering these difficulties, this dissertation aims to propose didactic sequences that help higher education students visualize the concepts of limit, derivative, and integral. To this end, video analyses will be carried out using the Tracker and GeoGebra software. Tracker is a video analysis software that allows data collection from the motion of physical phenomena. GeoGebra is a dynamic mathematics software that enables the combination of geometry, algebra, and more on the same platform. The motions of physical phenomena will be recorded with a camera; afterwards, we will use Tracker to collect data and model the experiments, and we will use GeoGebra to study them. The questionnaires contain sequences of activities for students to develop on limits, derivatives, and integrals, and the expected answers will be presented to the instructor along with comments and suggestions on how to conduct and analyze the experiment using the software. The difficulties encountered during the experiments will be mentioned in order to reduce potential complications when solving the questionnaire.

Keywords: *Differential and Integral Calculus. Video Analysis. Tracker. Geogebra.* Higher Mathematics Education.

Lista de Figuras

1.1 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2013), página 79. . . 22

2.1 Figura sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 62. 27
2.2 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 75. . . 28
2.3 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76. . . 29
2.4 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76. . . 29
2.5 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 77. . . 31
2.6 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 77. . . 32
2.7 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 79. . . 34
2.8 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 80. . . 35
2.9 Se $\lim_{x \to c} f(x) = L$, a altura do gráfico de f se aproxima de L conforme x se aproxima de c. 37
2.10 A tangente à curva em P é a reta que atravessa P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$ de ambos os lados. 39
2.11 A ideia de Fermat. 40
2.12 Figura sem legenda apresentada no livro de Simmons (1996), página 96. . . 42
2.13 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 132. . . 43
2.14 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 133. . . 44
2.15 Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 135. . . 45
2.16 Figura sem legenda apresentada no livro de Hoffmann et al. (2010), página 103. 47
2.17 Calculando a inclinação da reta tangente a $s = 4,9t^2$ no ponto $P(2; 19,6)$. . 48
2.18 O coeficiente angular da tangente fica mais íngreme perto da origem, tornando-se mais gradual à medida que o ponto de tangência se afasta. 50
2.19 Duas retas tangentes a $y = 1/x$ com coeficiente angular -1/4. 50
2.20 Construímos o gráfico de $y = f'(x)$ em (b) ao traçar os coeficientes angulares do gráfico de $y = f(x)$ em (a). A coordenada vertical em B' é o coeficiente angular em B, e assim por diante. O coeficiente angular em E é de aproximadamente $8/4 = 2$. Vemos que a taxa de variação de f em (b) é negativa para x entre A' e D', a taxa de variação de f é positiva para x à direita de D'. 52
2.21 Figura sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 115. 53
2.22 Figura sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 116. 53
2.23 Figura sem legenda apresentada no livro Simmons (1996), página 87. . . . 57

2.24 Área de polígonos. 59
2.25 Área da região R. 59
2.26 Dividir R em regiões retangulares. 59
2.27 Efeito do método da exaustão. 60
2.28 Determinando o valor da terra ao encontrar a área sob uma curva. 61
2.29 Figura sem legenda apresentada no livro Flemming e Gonçalves (2006), página 259. 64
2.30 Figura sem legenda apresentada no livro Flemming e Gonçalves (2006), página 259. 64
2.31 [$\cdots$] A altura de 256 pés é alcançada em $t = 2$ s e $t = 8$ s. A pedra cai 144 pés da altura máxima quando $t = 8$. 65
2.32 Figura sem legenda apresentada no livro Simmons (1996), página 334. . . . 67

3.1 Ciclo Trigonométrico. 72
3.2 Ciclo Trigonométrico. Note que $|x_1 - x_2| > h > |\cos(x_1) - \cos(x_2)|$, onde $x_1 \neq x_2$. 76
3.3 Ciclo Trigonométrico. Note que $|x_1 - x_2| > h > |\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)|$, onde $x_1 \neq x_2$. 77
3.4 Curvas $f(x) = ln(x)$ e $f(x) = x^2$. 79
3.5 Reta normal ao gráfico de f em P. 83
3.6 Soma das áreas de uma série de retângulos. 91
3.7 Retângulos no caso $n = 13$. 92
3.8 Retângulos no caso $n = 21$. 92
3.9 A área da figura delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ como a integral dessa função no intervalo $[a, b]$. 94
3.10 Sentidos do deslocamento Δx. 98
3.11 Gráfico $t \times x(t)$ - movimento uniforme. 99
3.12 Gráfico $t \times x(t)$ - movimento acelerado. 100

4.1 *Site* oficial do *software Tracker*. 104
4.2 *Download* do *software Tracker*. 105
4.3 *Site* oficial de ajuda do instalador do *software Tracker*. 105
4.4 *Site* oficial do *Tracker online*. 106
4.5 Ambiente de gravação para realizar o experimento. 108
4.6 Posicionamento do equipamento de gravação. 109
4.7 Cenário utilizado para gravação. 110
4.8 Realizando o experimento para gravação. 111
4.9 Visão geral da interface do usuário. 112
4.10 Barra de ferramentas superior. 112
4.11 Barra de ferramentas inferior. 112
4.12 Barra de ferramentas superior: Arquivo. 113
4.13 Abrir pastas no *software Tracker*. 114
4.14 Escolher vídeo para análise no *software Tracker*. 114
4.15 Interface com o vídeo carregado. 115
4.16 Interface com o vídeo rotacionado. 115
4.17 Rotacionar vídeo no *Tracker*. 116
4.18 Escolher o grau de rotação do vídeo no *Tracker*. 116
4.19 Barra da janela de análise. 117
4.20 Determinar o quadro inicial do vídeo no *software Tracker*. 118

4.21 Determinar o quadro final do vídeo no *software Tracker*. 118
4.22 Barra de ferramentas superior: eixos de coordenadas. 119
4.23 Posicionar eixo de coordenadas no *software Tracker*. 119
4.24 Barra de ferramentas superior: opções para configurar eixo. 120
4.25 Rotação do eixo de coordenadas no *software Tracker*. 120
4.26 Barra de ferramentas superior: fita métrica com transferidor. 120
4.27 Barra de ferramentas superior: bastão de medição. 121
4.28 Utilizando o bastão de medição no *software Tracker*. 121
4.29 Barra de ferramentas superior: ponto de massa. 122
4.30 Interface ponto de massa. 122
4.31 Marcar objeto com a opção ponto de massa. 123
4.32 Interface após marcar objeto com o ponto de massa. 123
4.33 Campo de rastreio com a opção ponto de massa. 124
4.34 Ferramenta pesquisar no *Tracker*. 124
4.35 Rastreio de pontos no *software Tracker*. 125
4.36 Rastreio de pontos manual no *software Tracker*. 125
4.37 Gráficos e tabela gerados através do rastreio de pontos no *software Tracker*. 126
4.38 Janela "ferramenta de dados" no *software Tracker*. 127
4.39 Janela "ferramenta de dados" no *software Tracker*. 127
4.40 Janela "ferramenta de dados" no *software Tracker*. 128
4.41 Desmarcar a ferramenta *autofit* no *software Tracker*. 129
4.42 Mudar escala do gráfico no *software Tracker*. 130
4.43 Mudando informações de escala do gráfico no *software Tracker*. 130
4.44 Informações de escala do gráfico alteradas no *software Tracker*. 131
4.45 Salvar arquivo no *software Tracker*. 131
4.46 Aba salvar no *software Tracker*. 132
4.47 Interface do site oficial do Geogebra. 133
4.48 Versões do Geogebra. 133
4.49 Geogebra Clássico na versão *online* ou baixar aplicativos. 133
4.50 Baixar aplicativos no Geogebra. 134
4.51 Interface inicial do Geogebra Clássico *online*. 134
4.52 Menu para acessar o *login* do Geogebra Clássico *online*. 135
4.53 Realizando o *login* no Geogebra Clássico online. 135
4.54 Interface do Geogebra dividida em três partes: esquerda, direita e central. . 137
4.55 Interface esquerda: opção "entrada" no Geogebra. 137
4.56 Gráfico gerado no Geogebra. 138
4.57 Função seno no Geogebra. 138
4.58 Elementos da função seno no Geogebra. 139
4.59 Delimitar intervalo na curva. 139
4.60 Curva delimitada pelo intervalo. 139
4.61 Exibir malha no Geogebra. 140
4.62 Interface direita: opção "planilha" no Geogebra. 140
4.63 Adicionar valores na "planilha" no Geogebra. 141
4.64 Coluna A - Operação na célula da planilha do Geogebra. 141
4.65 Coluna A - Adicionar células automáticas na planilha do Geogebra. 142
4.66 Coluna B - Operação na célula da planilha do Geogebra. 142
4.67 Coluna B - Adicionar células automáticas na planilha do Geogebra. 143
4.68 Adicionar casas decimais no Geogebra - parte 1. 143

4.69 Adicionar casas decimais no Geogebra - parte 2. 144
4.70 Adicionar casas decimais no Geogebra - parte 3. 144
4.71 Adicionar lista de pontos no Geogebra. 145
4.72 Janela lista de pontos no Geogebra. 145
4.73 Lista de pontos no gráfico do Geogebra. 146
4.74 Exibir e ocultar itens no gráfico do Geogebra. 146
4.75 Ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” do Geogebra. 147
4.76 Distância entre dois pontos no Geogebra. 147
4.77 Interface esquerda: opção “controle deslizantes” no Geogebra. 148
4.78 Configuração do controle deslizante no Geogebra. 148
4.79 Controle deslizante na interface central do Geogebra. 148
4.80 Criando função $g(a)$ e ponto no Geogebra. 149
4.81 Exibir rastro no Geogebra. 149
4.82 *Play* no rastro de pontos no Geogebra. 149
4.83 Rastro do ponto P' no Geogebra. 150
4.84 Interface esquerda: opção “retas” no Geogebra. 150
4.85 Reta h criada no Geogebra. 151
4.86 Variação de a gera uma nova reta secante no Geogebra. 151
4.87 Interface esquerda: opção “inclinação” no Geogebra. 152
4.88 Inclinação da reta h no Geogebra. 152
4.89 Salvar estudos feitos no Geogebra. 153

5.1 Cenário e objeto de estudo. 155
5.2 Tripé de apoio. 155
5.3 Posição do tripé de apoio e do aluno para gravação do experimento: “queda livre”. 156
5.4 Medição da medida conhecida. 157
5.5 Marcação da medida conhecida na parede. 157
5.6 Experimento: Queda livre. 158
5.7 Gravação do experimento “queda livre”. 158
5.8 Interface do *Tracker* com os parâmetros do movimento “queda livre”. . . . 163
5.9 Gráficos gerados do movimento: “queda livre”. 163
5.10 Tabela de dados do movimento: “queda livre”. 164
5.11 Curva e parâmetros do movimento: “queda livre”. 166
5.12 Escala do gráfico modificada do movimento: “queda livre”. 166
5.13 Curva e parâmetros do movimento: “queda livre”. 167
5.14 Inserindo a curva e pontos no *Geogebra* do experimento: “queda livre”. . . 169
5.15 Traçando as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: “queda livre”. 169
5.16 Inclinação das retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: “queda livre”. 170
5.17 Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ no *Geogebra* do experimento: “queda livre”. 171
5.18 Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ com o valor da inclinação no *Geogebra* do experimento: “queda livre”. 171
5.19 Queda livre - Gráfico da função $v(t)$. 174
5.20 Queda livre - Gráfico da função $v'(t)$. 175

6.1 Cenário do experimento “o corredor”. 178

6.2 Medições e marcações para o cenário do experimento “o corredor”. 178
6.3 Posicionamento do corredor. 178
6.4 Posicionamento do tripé de apoio e do corredor para gravação do experimento: “o corredor”. 179
6.5 O corredor aumentando a velocidade até a linha de chegada. 179
6.6 Gravação do experimento “o corredor”. 180
6.7 Interface do *Tracker* com os parâmetros do movimento “o corredor”. 184
6.8 Gráficos gerados do movimento: “o corredor”. 185
6.9 Tabela de dados do movimento: “o corredor”. 186
6.10 Curva escolhida para o movimento: “o corredor”. 188
6.11 Curva escolhida para o movimento: “o corredor”. 189
6.12 Reticências no parâmetro do *Tracker*. 189
6.13 Inserindo a curva e pontos no *Geogebra* do experimento: “o corredor”. . . . 191
6.14 Traçando as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: “o corredor”. 192
6.15 Inclinações das retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: “o corredor”. 192
6.16 Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ no *Geogebra* do experimento: “o corredor”. 193
6.17 Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ com o valor da inclinação no *Geogebra* do experimento: “o corredor”. 194
6.18 O corredor - Gráfico da função $v(t)$. Obs.: Escala do gráfico alterada para melhorar a visualização da função. 196
6.19 O corredor - Gráfico da função $v'(t)$. Obs.: Escala do gráfico alterada para melhorar a visualização da função. 197

7.1 Cenário do experimento pêndulo. 200
7.2 Tripé para gravação do experimento pêndulo. 200
7.3 Distância do tripé para gravação do experimento pêndulo. 201
7.4 Medindo referência conhecida no cenário. 201
7.5 Marcação da referência conhecida no cenário. 202
7.6 Início do movimento “pêndulo”. 202
7.7 Gravação do experimento “pêndulo”. 202
7.8 Interface do *Tracker* com os parâmetros do movimento “pêndulo”. 206
7.9 Gráficos gerados do movimento “pêndulo”. 206
7.10 Curva escolhida para o movimento: “pêndulo”. 207
7.11 Escala do gráfico modificada do movimento: “pêndulo”. 208
7.12 Curva e parâmetros do movimento: “pêndulo”. 208
7.13 Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente A da função $f(t)$ do movimento: “pêndulo”. 209
7.14 Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente B da função $f(t)$ do movimento: “pêndulo”. 209
7.15 Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente C da função $f(t)$ do movimento: “pêndulo”. 210
7.16 Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente D da função $f(t)$ do movimento: “pêndulo”. 210
7.17 Recorte da curva $f(x)$ para exemplificar o ponto crítico. 211
7.18 Planilha do Geogebra para analisar os pontos críticos da função $f(t)$ do movimento: “pêndulo”. 212

7.19 Gráfico do Geogebra com os pontos críticos da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo". 214
7.20 Distância entre alguns valores de máximos e mínimos da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo". 215
7.21 Ponto Q se aproximando de C pela direita do gráfico da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo". 216
7.22 Ponto Q se aproximando de C pela esquerda do gráfico da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo". 217

8.1 Inteligências múltiplas aplicadas no desenvolvimento das sequências de atividades. 228
8.2 Inteligências múltiplas aplicadas no questionário: "queda livre". 228
8.3 O corredor desacelera rapidamente momentos antes de cruzar a linha de chegada. 230
8.4 O corredor atinge a meta acelerando e volta ao ponto de partida acelerando. 230

A.1 Dificuldade por causa do tamanho do objeto. 236
A.2 Dificuldade por causa do contraste entre o objeto e fundo. 236
A.3 Modificações no fundo do vídeo. 237
A.4 Troca de câmeras para gravação do experimento. 237
A.5 Fundo de gravação com reflexo. 238
A.6 A base da bola não estava fixa. 238
A.7 Captura de outras partes do vídeo. 239
A.8 Erro no rastreio automático. 239
A.9 Mudança de cenário no experimento o corredor. 240
A.10 Posição do tripé no experimento o corredor. 241
A.11 Destaque com a faixa para o ponto de massa no experimento o corredor. . 241

Lista de Tabelas

2.1 Tabela sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 61. 27
2.2 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76. . . 30
2.3 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76. . . 30
2.4 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 77. . . 31
2.5 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 78. . . 32
2.6 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 78. . . 33
2.7 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 80. . . 34
2.8 Tabela sem legenda apresentada no livro de Hoffmann et al. (2018), página 54. 36
2.9 Tabela sem legenda apresentada no livro de Thomas (2012), página 55. . . 38
2.10 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 136. . . 46
2.11 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 136. . . 46
2.12 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 333. . . 62
2.13 Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 333. . . 62
2.14 Tabela sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 258. 63
2.15 Tabela sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 259. 64
2.16 Tabela sem legenda apresentada no livro de Thomas (2012), página 290. . 66

5.1 Informações sobre o experimento “queda livre”. 159

6.1 Informações sobre o experimento “o corredor”. 180

7.1 Informações sobre o experimento “pêndulo”. 203

Sumário

1 Sobre a Pesquisa **21**
1.1 Introdução e objetivos . . . 21
1.1.1 Apresentação do tema e do problema . . . 21
1.1.2 Justificativa da escolha do tema . . . 23
1.1.3 Objetivo . . . 23
1.2 Metodologia . . . 23
1.3 Estrutura da dissertação . . . 24

2 Noções intuitivas em livros de Cálculo **26**
2.1 Noções intuitivas de limite . . . 26
2.2 Noções intuitivas de derivada . . . 42
2.3 Noções intuitivas de integral definida . . . 58
2.4 Noções intuitivas de cálculo com vídeo-análise . . . 67

3 Formalismo matemático **68**
3.1 Limites . . . 68
3.2 Derivadas . . . 79
3.3 Integrais . . . 90
3.4 Ferramentas do Cálculo e movimento retilíneo . . . 98
3.4.1 Posição e deslocamento . . . 98
3.4.2 Velocidade Média . . . 99
3.4.3 Velocidade Instantânea . . . 100
3.4.4 Aceleração . . . 101
3.4.5 Aceleração constante . . . 102

4 *Softwares* **104**
4.1 O *Tracker* . . . 104
4.1.1 *Tracker* no ensino . . . 106
4.2 Funções essenciais no *Tracker* . . . 107
4.2.1 Gravação de fenômeno físico . . . 107
4.2.2 Conhecendo o *software Tracker* . . . 111
4.3 O Geogebra . . . 132
4.3.1 Geogebra no ensino . . . 135
4.4 Funções essenciais no Geogebra . . . 137

5 Proposta de atividade 01: "Queda Livre" 154
5.1 Descrição do experimento 154
5.2 Questionário (Estudo Dirigido) 159
5.3 Respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente 162

6 Proposta de atividade 02: "O corredor" 177
6.1 Descrição do experimento 177
6.2 Questionário (Estudo Dirigido) 180
6.3 Respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente 183

7 Proposta de atividade 03: "Pêndulo" 199
7.1 Descrição do experimento 199
7.2 Questionário (Estudo Dirigido) 203
7.3 Respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente 205

8 Inteligências, tecnologias e aprendizagens: Reflexões finais 221
8.1 Tecnologias e softwares no ensino de Ciências e Matemática 221
8.2 Inteligências múltiplas no ensino de Ciências e Matemática 223
8.3 Um relato pessoal 225
8.4 Inteligências múltiplas neste trabalho 227
8.5 Reflexões finais 229

Referências 231

A Apêndice: Atenção às dificuldades encontradas 235
A.1 Dificuldades no experimento: queda livre 235
A.2 Dificuldades no experimento: o corredor 240

Anexo 243
Questionário "queda livre" 244
Questionário "o corredor" 248
Questionário "pêndulo" 252

1 Sobre a Pesquisa

1.1 Introdução e objetivos

1.1.1 Apresentação do tema e do problema

Nas universidades, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (ou simplesmente Cálculo) é componente curricular em vários cursos, entre os quais estão Matemática, Física, Química e Engenharias. Também é comum encontrar essa disciplina em graduações nas áreas de humanas e biológicas.

Frequentemente os alunos apresentam dificuldades ao cursarem a mencionada disciplina, mas isso não ocorre somente com alunos brasileiros, como também internacionalmente em cursos superiores (PAVANELO et al., 2016). Essa dificuldade também está relacionada ao fato dos alunos se depararem com a nova realidade do ensino superior, a qual precisarão estudar dentro e fora da sala de aula para buscarem conhecimento, como afirma Macêdo e Gregor (2020). Além disso, Macêdo e Gregor (2020) comentam sobre os alunos não terem maturidade suficiente para adaptação da nova fase e em disciplinas que exigem dedicação e organização, como o Cálculo.

Os autores Silva et al. (2021), discutem a importância do livro didático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Em seu estudo, Silva et al. (2021), comentam sobre os livros mais utilizados pela universidade federal em que atuam como docente, sendo os seguintes: "Um Curso de Cálculo: Volume 1 (Hamilton L. Guidorizzi), Cálculo: Volume 1 (James Stewart), Cálculo: Volume 1 (David J. Foulis, Mustafa A. Munem), Cálculo: Volume 1 (Maurice D. Weir, Joel Hass, George B. Thomas) e Cálculo A (Diva M. Flemming, Mirian B. Gonçalves)".

Muitos livros de Cálculo Diferencial e Integral inicialmente apresentam conceitos como limite, derivada e integral por meio de uma noção intuitiva utilizando eventos físicos do cotidiano. Nesse contexto, neste trabalho iremos reproduzir e analisar alguns eventos através de experimentos práticos, os quais iremos registrar em vídeo e estudar com o auxílio de *softwares*.

Tendo em vista que a tecnologia vem se desenvolvendo e ganhando espaço nas salas de aula, Soares (2012) afirma que sua utilização no processo de ensino amplia as possibilidades de investigação ao favorecer características dinâmicas em representações gráficas, geométricas e algébricas. Lobo e Maia (2015) admitem que as tecnologias seriam utilizadas apenas como um instrumento, o que não seria prejudicial no processo de ensino-aprendizagem.

Pensando nas tecnologias digitais, a vídeo-análise apresenta um grande potencial, pois o acesso dessa ferramenta está mais próximo do cotidiano das pessoas, por conta das câmeras fotográficas e *smartphones*. Com a função de filmagem é possível registrar fenô-

menos físicos que, por exemplo, poderão ser estudados em laboratórios do ensino de Física (CORDEIRO; RODRIGUES, 2019).

O *software Tracker* é comumente utilizado no ensino de física, além disso, pode ser manuseado para a visualização de diversas situações problemas do cotidiano através da vídeo-análise e construção de modelos (BARUFI, 1999). Segundo Cordeiro e Rodrigues (2019), uma vantagem de utilizar a vídeo-análise com o *Tracker* é a eliminação de algumas funções intermediárias, que surgem quando as imagens são obtidas com máquinas digitais, sendo que este *software* traz uma grande evolução para o ensino de Física.

Outro *software* muito utilizado no ensino é o Geogebra, o qual desempenha um papel importante nas ciências exatas, pois oferece uma plataforma interativa que combina representações gráficas e simbólicas. Richit et al. (2012), afirmam em seu estudo que o Geogebra tem um desempenho satisfatório ao realizar as atividades investigativas, além disso, através do *software* os alunos conseguem criar hipóteses e conjecturas sobre os conceitos de derivada e integral. A capacidade de manipular gráficos e fórmulas em tempo real facilita a exploração e visualização de conceitos matemáticos.

Realizaremos nesta dissertação alguns experimentos práticos, sendo um deles chamado de "queda livre", e modelaremos com o auxilio dos *softwares Tracker* e Geogebra. Além disso, o fenômeno físico "queda livre", por exemplo, está presente em diversos livros de Cálculo. Stewart (2021), em seu livro "Cálculo: Volume 1", apresenta problemas sobre velocidade e tangente, como o Exemplo 1.1, e associa ao conceito de limite para sua solução, como mostram os gráficos da Figura 1.1.

Exemplo 1.1. *Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN*[1]*, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.*

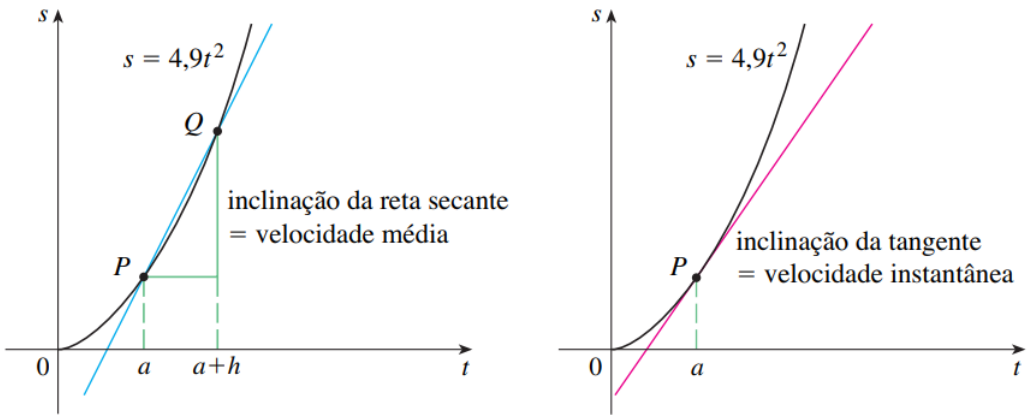


Figura 1.1: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2013), página 79.
Fonte: Stewart (2021).

Stewart (2021) utiliza este exemplo para dar continuidade na explicação sobre o conceito de limite, considerando um caso especial chamado de derivada. O livro aborda o conceito de derivada com situações do cotidiano, por exemplo, a velocidade de um corpo que se move sobre uma reta, no qual a derivada da função de posição resulta na função de velocidade. O que nos leva a pensar, com base nos exemplos do autor, em experimentos práticos para a visualização intuitiva de limite e derivada.

[1] A Torre CN em Toronto foi o maior edifício do mundo por 32 anos.

Em relação aos livros do ensino superior, Silva et al. (2021) apresentam em sua pesquisa a perspectiva dos alunos entrevistados e compartilha que mais de 60% dos alunos afirmaram que o elemento que devia ser melhorado nos livros de cálculo é a linguagem utilizada. Além disso, Silva et al. (2021), comentam que os estudantes preferem que os livros tenha mais abordagens contextualizadas dos conceitos.

Diante disso, pensando nas dificuldades dos estudantes universitários, esta pesquisa tem como objetivo propor atividades didáticas para cursos superiores que auxiliem na visualização de alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, utilizando vídeo-análise com os *softwares Tracker* e Geogebra.

1.1.2 Justificativa da escolha do tema

Segundo Barbosa (2004), a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que está presente em muitos cursos superiores, tem sido uma grande responsável por um número de reprovações e evasões de alunos nas faculdades. O autor ainda afirma que isso ocorre por conta da dificuldade que os alunos possuem em relação a matemática, uma vez que os estudantes do ensino superior muitas vezes já chegam com uma certa defasagem do ensino básico.

Todo esse cenário de defasagem na aprendizagem no ensino regular e as dificuldades enfrentadas pelo estudante no ensino superior podem contribuir para que a situação do discente se agrave, levando à sua desistência ou reprovação nas disciplinas de matemática e outras que necessitem de cálculos matemáticos, como destacam Ferruzzi et al. (2004).

A sequência de atividades para visualização intuitiva de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, que é a proposta desta pesquisa, foi planejada utilizando os *softwares Tracker* e Geogebra para modelar situações cotidianas e promover a visualização dos conceitos limite, derivada e integral. Este material poderá ser adotado como complementar para as aulas dos cursos superiores que possuem no currículo a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

1.1.3 Objetivo

Propor sequências didáticas para os cursos superiores que auxiliem na visualização dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral utilizando vídeo-análise com os *softwares Tracker* e Geogebra.

1.2 Metodologia

Para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado, foram pesquisados autores que utilizam os *softwares Tracker* e Geogebra como ferramenta de ensino de ciências em geral. Também procuramos pesquisas da área de matemática que utilizaram o *Tracker* e Geogebra para o ensino. Verificamos, em especial, a existência de poucos trabalhos que envolvem situações do cotidiano para exemplificar os conceitos de limite, derivada e integral.

O *Tracker* utiliza vídeo-análise para modelar fenômenos físicos. Com isso, foram propostas sequências didáticas guiadas a partir de registros de situações cotidianas, como a queda livre ou o balançar de um pêndulo. As sequências são seguidas por sugestões para o professor aplicador. Os alunos precisarão apenas de equipamentos simples para

as gravações e um computador com os *softwares* para as análises. Os questionários das sequências didáticas guiarão o aprendizado, mediado pelo docente.

1.3 Estrutura da dissertação

O texto desta dissertação está organizado em oito capítulos, cada um abordando aspectos específicos da pesquisa, mas que proporcionam uma sequência lógica para o entendimento do leitor.

No presente capítulo é apresentada uma introdução a respeito da pesquisa que foi realizada, trazendo também o objetivo e metodologia. Além disso, discutimos brevemente as dificuldades que os alunos possuem em Cálculo Diferencial e Integral.

No Capítulo 2, foi discutido como livros de Cálculo Diferencial e Integral apresentam os conceitos de limite, derivada e integral de forma intuitiva antes de formalizar o conteúdo. A partir disso, exibimos exemplos matemáticos utilizados pelos autores em seus livros para apresentar intuitivamente os assuntos mencionados.

No Capítulo 3, recorremos às obras de autores como Ávila (2006), Lima (1976), Boulos (1974), Flemming e Gonçalves (2006), Stewart (2021) e Táboas (2008) para apresentar, de forma mais rigorosa, os conceitos de limite, derivada e integral. Essa abordagem contribui para tornar a dissertação mais completa, uma vez que, embora o foco esteja na compreensão intuitiva do Cálculo Diferencial e Integral, a formalização desses conceitos é uma etapa essencial no aprofundamento do aprendizado.

Apresentamos os *softwares Tracker* e Geogebra no capítulo 4, mostrando como utilizar suas ferramentas para futuramente explorar aplicações no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. O *Tracker* foi utilizado para realizar análise dos vídeos de fenômenos físicos, também explicamos como realizar as gravações. O Geogebra utilizado para modelar os dados coletados do *Tracker*.

A primeira proposta de atividade é apresentada no Capítulo 5, nomeada "queda livre". Sendo este, o movimento de um corpo em queda com direção ao solo. Os passos para realizar o experimento, o questionário, respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente estão detalhadamente descritos ao longo do capítulo, com o objetivo de oferecer um estudo dirigido claro e estruturado para a aplicação da atividade em sala de aula.

A segunda proposta de atividade é apresentada no Capítulo 6, nomeada "o corredor'. Sendo este, o movimento de um corredor que inicia na largada em direção a linha de chegada. Os passos para realizar o experimento, o questionário, respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente estão detalhadamente descritos ao longo do capítulo, com o objetivo de oferecer um estudo dirigido claro e estruturado para a aplicação da atividade em sala de aula.

A terceira, e última, proposta de atividade é apresentada no Capítulo 6, nomeada "pêndulo'. Sendo este, um movimento oscilatório, indo e voltando em torno de uma posição de equilíbrio. Os passos para realizar o experimento, o questionário, respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente estão detalhadamente descritos ao longo do capítulo, com o objetivo de oferecer um estudo dirigido claro e estruturado para a aplicação da atividade em sala de aula.

Os *softwares* explorados na pesquisa estão relacionados com o ensino, por este motivo, no Capítulo 8, discutiremos como os mesmos podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem dos alunos de graduações. Além disso, a teoria Inteligências Múltiplas foi relevante ser apresentada no último capítulo também, pois conseguimos relacioná-la com

o nosso trabalho. Por fim, fazemos um relato pessoal sobre a vida acadêmica, e sugestões de investigações e aprofundamentos futuros dos temas apresentados em nosso trabalho.

2 Noções intuitivas em livros de Cálculo

Neste capítulo será discutido como livros de Cálculo Diferencial e Integral apresentam os conceitos de limite, derivada e integral de forma intuitiva antes de formalizar o conteúdo. Para isso, foram selecionadas algumas obras que possuem os assuntos mencionados. O critério utilizado para realizar tal análise foi escolher livros que fazem parte da bibliografia básica ou complementar dos cursos de graduação oferecidos pelo Instituto Federal de São Paulo, campus São José dos Campos[1]. Além de Matemática, o campus possui cursos superiores em Química, Engenharia Mecânica e Engenharia de Controle e Automação. Segue a lista das obras elencadas:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração. 6. ed. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2006.
- HOFFMANN, L. D. et al. Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 2018.
- SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica: Volume 1. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1996.
- STEWART, J. Cálculo: Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- THOMAS, G. B. Cálculo: Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

2.1 Noções intuitivas de limite

O capítulo 3 do livro *"Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração"* dos autores Flemming e Gonçalves (2006) inicia abordando o conceito de limite com exemplos intuitivos de sequências numéricas. Em seus exemplos, apresentam uma função $y = f(x)$ e substituem valores para x e y na relação dada, formando assim uma sequência que será analisada e esboçada em um gráfico, o que permite visualizar intuitivamente o conceito de limite. Com essa proposta, Flemming e Gonçalves (2006) dispõem de exemplos que permitem analisar sequências simples com o propósito de tratar os limites tendendo para mais infinito, menos infinito ou para uma constante de forma intuitiva. Além disso, introduzem o conceito de limites laterais, ou seja, limite à direita e limite à esquerda.

[1] Instituição e campus onde a autora se graduou em Matemática.

Apresentam também funções que possuem comportamentos numa vizinhança, dando a ideia do conceito de intervalo antes de formalizarem a definição de limite.

Para ilustração, exibiremos o Exemplo 2.1 retirado do livro de Flemming e Gonçalves (2006).

Exemplo 2.1. *A função* $y = x^2 + 3x - 2$ *tende para* $+\infty$ *quando* $x \to \pm\infty$.

Denota-se $\lim_{x\to\infty} x^2 + 3x - 2 = +\infty$

De fato, intuitivamente, basta analisar a Figura 2.1 e as sucessões da Tabela 2.1.

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...	1.000	...
y	2	8	16	26	38	52	68	...	10.298	...	1.002.998	...
x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-100	...	-500	...	
y	-4	-4	-2	2	8	16	...	9.698	...	248.498	...	

Tabela 2.1: Tabela sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 61.

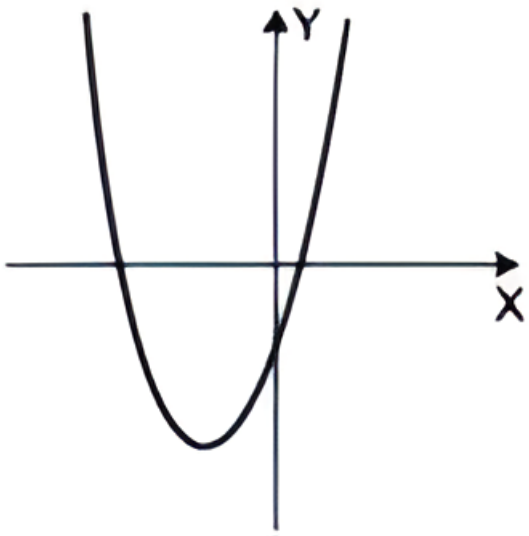


Figura 2.1: Figura sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 62.

Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

Flemming e Gonçalves (2006) repetem o mesmo processo para estudar os seguintes casos:

1. $y = 1 - \frac{1}{x}$ tende para 1 quando $x \to \pm\infty$;
2. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tende para 2 quando $x \to \pm\infty$;
3. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ tende para o infinito quando $x \to -1$;
4. $y = \frac{-1}{(x-2)^2}$ tende para menos infinito quando $x \to 2$;
5. $y = cos\frac{1}{x}$ oscila numa vizinhança de zero, sem tender para um limite;
6. $y = \frac{1}{2}x + 3$ tende para 5 quando $x \to 4$.

O autor Stewart (2021) aborda em seu livro "Cálculo" os conceitos de limite e derivada no mesmo capítulo, iniciando com uma ilustração da queda livre de uma bola, adaptada na Figura 2.2, ou seja, apresenta um exemplo prático que introduz visualmente o conceito de velocidade de um objeto em um dado momento. Além disso, cita que existe um tipo especial de limite usado para encontrar tangentes e velocidades, dizendo ser a origem da ideia central do cálculo, isto é, a derivada.

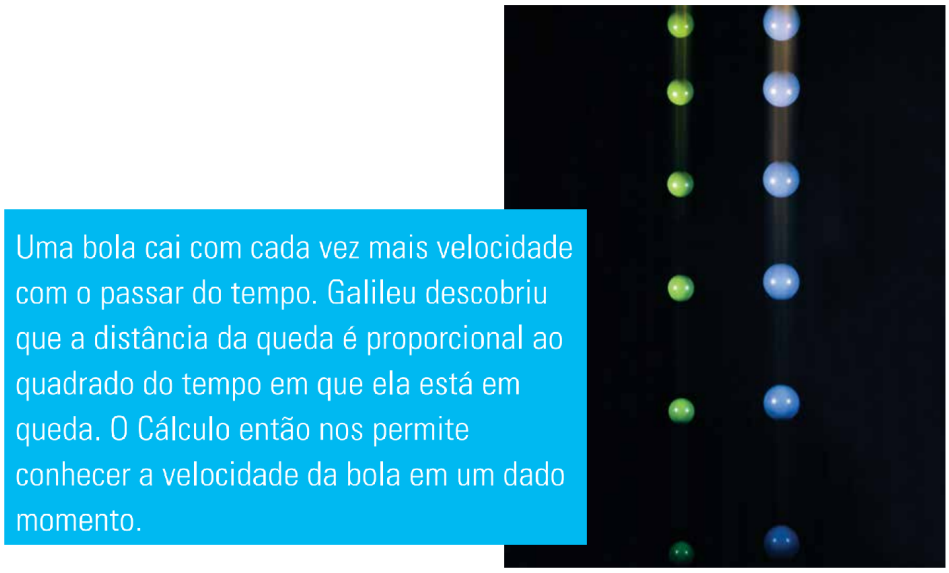


Figura 2.2: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 75.
Fonte: Adaptado de Stewart (2021).

O autor ainda traz a problemática da reta tangente, explicando a diferença entre tangente no círculo e em uma curva. Ele explica que a definição de tangente em um ponto para o círculo é que a reta tangente toca o círculo unicamente no ponto de interesse, mas essa definição não poderia ser aplicada para uma curva qualquer, tendo em vista que seria inadequada, pois, conforme a Figura 2.3, as retas l e t cortam a curva C unicamente no ponto P. Com isso, l intersecta C uma única vez, entretanto não se parece com o que pensamos ser uma tangente. Assim, Stewart (2021) aborda o problema da tangente e apresenta um exemplo sobre a inclinação da reta tangente em um ponto de uma curva dada para exemplificar o surgimento de limites. Neste caso, explica intuitivamente este conceito. Segue o Exemplo 2.2, presente no livro de Stewart (2021).

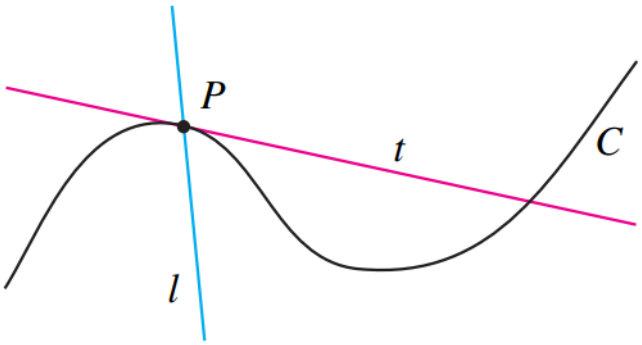


Figura 2.3: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76.
Fonte: Stewart (2021).

Exemplo 2.2. *Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.*

Solução: Podemos encontrar uma equação da reta tangente t assim que soubermos sua inclinação m. A dificuldade está no fato de conhecermos somente o ponto P, em t, quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (como na Figura 2.4) e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. [Uma ***reta secante****, do latim* `secans`*, significando corte, é uma linha que corta (intersecta) uma curva mais de uma vez.]*

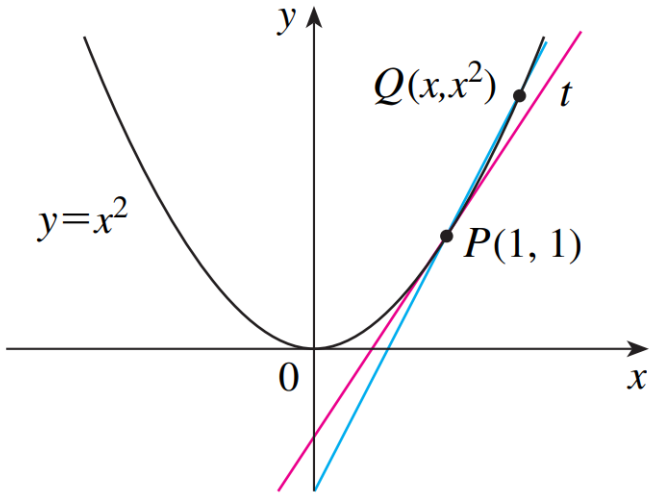


Figura 2.4: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76.
Fonte: Stewart (2021).

Escolhemos $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Por exemplo, para o ponto $P(1,5; 2,25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2,25 - 1}{1,25 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5.$$

As Tabelas 2.2 e 2.3 mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1. Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, e a tabela indica que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

Tabela 2.2: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76.

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

Tabela 2.3: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 76.

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o `limite` *das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que*

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \text{ e } \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta para escrever a equação da tangente no ponto $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1.$$

A Figura 2.5 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.

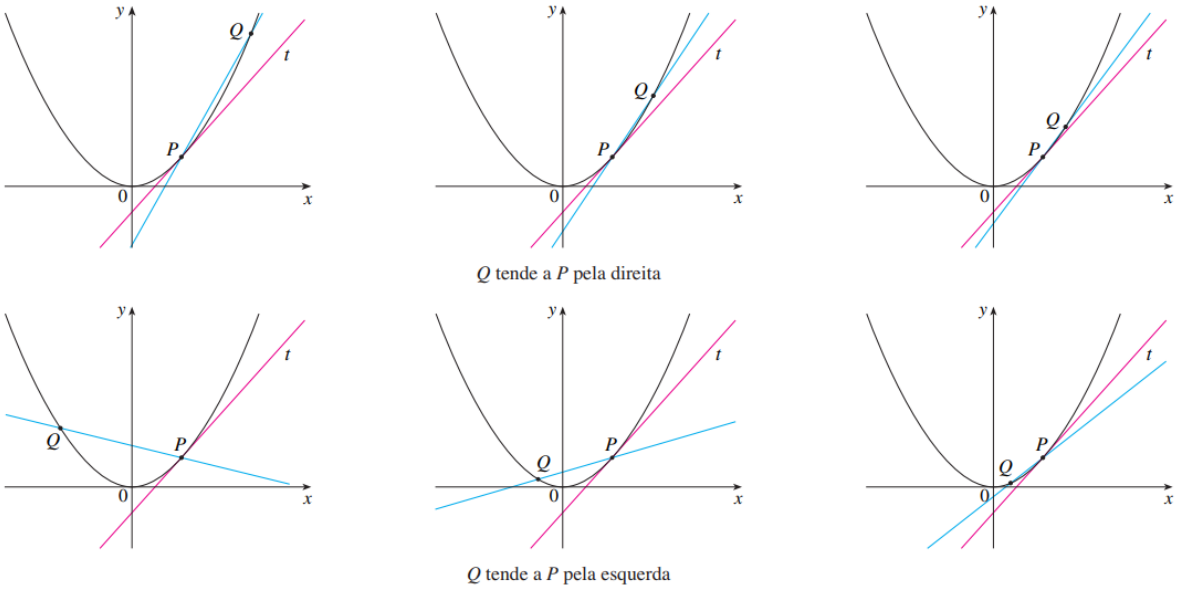


Figura 2.5: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 77.
Fonte: Stewart (2021).

Ainda neste capítulo, Stewart (2021) exibe um exemplo prático que envolve a inclinação de uma reta tangente, sobre o *flash* de uma câmera que opera armazenando carga em um capacitor, liberando-a, instantaneamente, quando disparado. Para isso, o autor analisa a função $Q(t)$, onde Q representa a carga armazenada em função do tempo t, em segundos, contados após o disparo. Além disso, ainda propõe um exercício sobre velocidade se referindo ao problema da ilustração do início do capítulo, no qual trata de uma bola caindo do alto de uma torre e utiliza fenômeno físico para encontrar a velocidade da bola em queda livre. A seguir será apresentado o Exemplo 2.3 do *flash* da câmera que o autor Stewart (2021) aborda em seu livro.

Exemplo 2.3. *O* `flash` *de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na Tabela 2.4 descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulomb) no instante t (medido em segundos após o* `flash` *ter sido disparado). Use os dados para esboçar o gráfico desta função e estimar a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0,04$. [Observação: A inclinação da reta tangente representa a corrente elétrica fluindo do capacitor à lâmpada do* `flash` *(medida em microamperes)].*

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

Tabela 2.4: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 77.

Solução: Na Figura 2.6 marcamos os pontos dados e os usamos para esboçar uma curva que aproxima o gráfico da função.

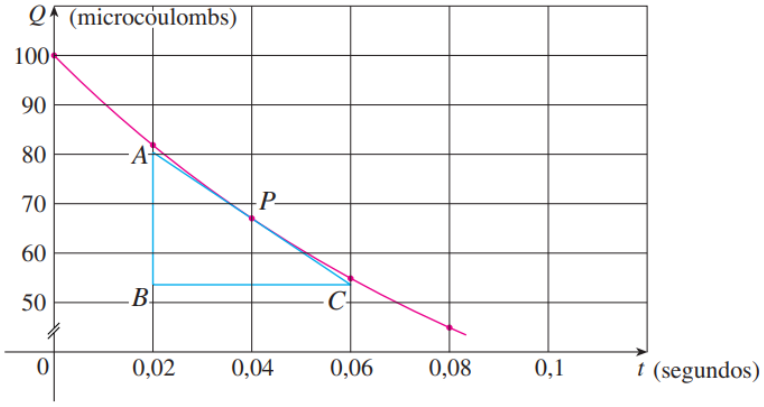


Figura 2.6: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 77.
Fonte: Stewart (2021).

Dados os pontos $P(0,04; 67,03)$ *e* $R(0,00; 100,00)$ *no gráfico, descobrimos que a inclinação da reta secante* PR *é*

$$m_{PR} = \frac{100,00 - 67,03}{0,00 - 0,04} = -824,25.$$

A Tabela 2.5 mostra os resultados de cálculos semelhantes para as inclinações de outras retas secantes. A partir dela podemos esperar que a inclinação da reta tangente em $t = 0,04$ *esteja em algum ponto entre* -742 *e* $-607,5$*. De fato, a média das inclinações das duas retas secantes mais próximas é*

$$\frac{1}{2}(-742 - 607,5) = -674,75.$$

Assim, por esse método, estimamos que a inclinação da reta tangente é -675*.*

Outro método é traçar uma aproximação da reta tangente em P *e medir os lados do triângulo* ABC*, como na Figura 2.6. Isso dá uma estimativa da inclinação da reta tangente como*

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80,4 - 53,6}{0,06 - 0,02} = -670.$$

R	m_{PR}
(0,00; 100,00)	$-824,25$
(0,02; 81,87)	$-742,00$
(0,06; 54,88)	$-607,50$
(0,08; 44,93)	$-552,50$
(0,10; 36,76)	$-504,50$

Tabela 2.5: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 78.

O autor Stewart (2021) traz em seu livro um problema sobre velocidade, envolvendo a queda livre de um objeto. Esse exemplo é muito importante para esta dissertação, o leitor verificará o motivo nos próximos capítulos. Segue o Exemplo 2.4:

Exemplo 2.4. *Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.*

Solução: Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda (Esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar). Se a distância percorrida após t segundos for chamada e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4,9t^2.$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo $(t = 5)$*, ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de* $(t = 5)$ *até* $(t = 5,1)$*:*

$$\begin{aligned} \textit{velocidade média} &= \frac{\textit{mudança de posição}}{\textit{tempo decorrido}} = \frac{s(5,1) - s(5)}{0,1} \\ &= \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{0,1} = 49,49 \ m/s. \end{aligned}$$

A Tabela 2.6 mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de Tempo	Velocidade Média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Tabela 2.6: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 78.

Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A ***velocidade instantânea*** *quando* $t = 5$ *é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em* $t = 5$*. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é*

$$v = 49 \ m/s.$$

Os cálculos utilizados no Exemplo 2.4, até o momento, são muito parecidos com o que foi aplicado no Exemplo 2.2 sobre retas tangentes. Com isso, Stewart (2021) ainda afirma que existe uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo da velocidade. Logo, continuando o Exemplo 2.4:

Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 2.7) e considerarmos os pontos $P(a; 4,9a^2)$ *e* $Q(a + h; 4,9(a + h)^2)$ *sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será*

$$m_{PQ} = \frac{4,9(a + h)^2 - 4,9a^2}{(a + h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a+h]$. *Logo, a velocidade no instante* $t = a$ *(o limite dessas velocidades médias quando* h *tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em* P *(o limite das inclinações das retas secantes).*

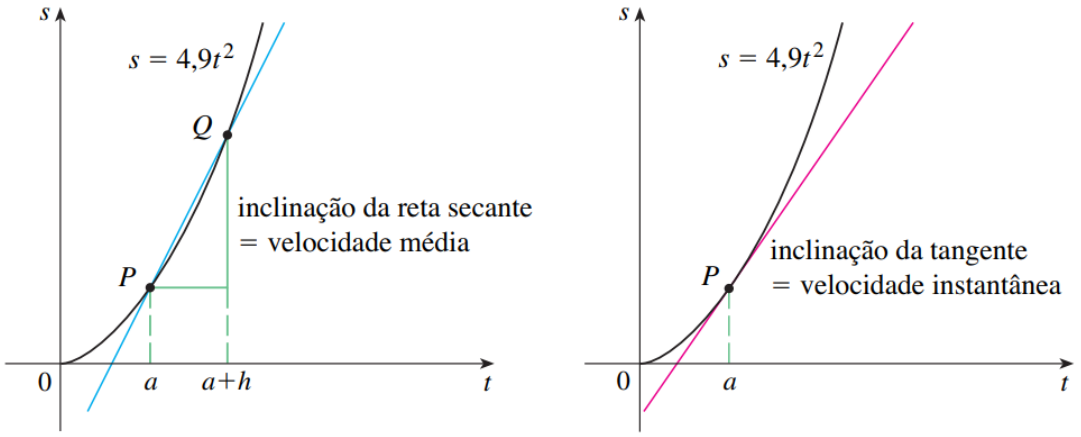


Figura 2.7: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 79.
Fonte: Stewart (2021).

Além do Exemplo 2.4, para iniciar o conceito de limite de uma função, Stewart (2021) apresenta um exemplo aritmético para explicação e em seguida escreve a notação de como um limite precisa ser expresso. Segue o Exemplo 2.5, retirado do livro do Stewart (2021).

Exemplo 2.5. *Tendo visto na seção anterior como surgem os limites quando queremos encontrar as tangentes a uma curva ou a velocidade de um objeto, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral e para os métodos de calculá-los.*

Vamos analisar o comportamento da função f *definida por* $f(x) = x^2 - x + 2$ *para valores de* x *próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de* $f(x)$ *para valores de* x *próximos de 2, mas não iguais a 2.*

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Tabela 2.7: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 80.

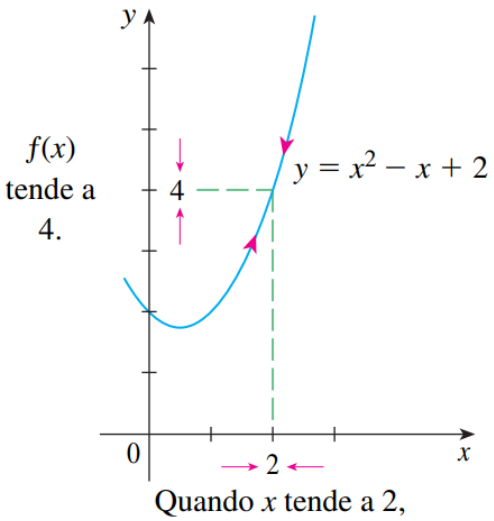


Figura 2.8: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 80.
Fonte: Stewart (2021).

Da Tabela 2.7 e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 2.8, vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tenderá a 4. De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que "o limite da função quando x tende a 2 é igual a 4". A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4.$$

Com isso, Stewart (2021) introduz o conceito de limite de função e apresenta a notação que em geral é utilizada.

Os autores Hoffmann et al. (2018) comentam em seu livro que utilizarão uma abordagem mais intuitiva do que formal nos conceitos de cálculo, como o Exemplo 2.6. Além disso, pode-se consultar vários exemplos de aplicações de cálculo em seu livro. Por exemplo, quando citam sobre economia, engenharia e química, exibindo que o cálculo pode ter diversas funcionalidades, lembrando que esta é uma área da matemática extremamente rica e com diversas aplicações.

Ainda no livro "Cálculo: um curso moderno e suas aplicações", para ilustrar o conceito de limite, é apresentado um exemplo sobre um corretor de imóveis que venderá terrenos em um determinado tempo e gostaria de saber quantas vendas serão esperadas para o ano seguinte. Com isso, pode-se perceber o quanto o cálculo de limite tem uma variedade de aplicações. Segue o Exemplo 2.6 sobre o corretor de imóveis que Hoffmann et al. (2018) apresentam em seu livro com uma abordagem intuitiva do conceito de limite.

Exemplo 2.6. *Em termos simples, calcular um limite é investigar de que modo uma função $f(x)$ se comporta quando a variável independente x se aproxima de determinado número c, que não pertence necessariamente ao domínio de f. Os limites estão presentes em um grande número de situações da vida real. Assim, por exemplo, podemos nos aproximar do zero absoluto a uma temperatura Tc, na qual não existe nenhuma agitação molecular, mas jamais conseguimos atingi-lo. Os economistas que falam do lucro de um investimento em um mercado ideal e os engenheiros que calculam a eficiência de um motor em condições ideais também estão trabalhando com situações limite.*

Para ilustrar o conceito de limite, suponha que um corretor de imóveis estime que, daqui a t anos, S terrenos de certo bairro serão vendidos, em que

$$S(t) = \frac{-2t^3 + 19t^2 - 8t - 9}{-t^2 + 8t - 7}.$$

Quantas vendas de terreno são esperadas daqui a um ano?

A primeira ideia seria simplesmente calcular $S(t)$ para $t = 1$, mas o resultado do cálculo é a fração $0/0$, que tem um valor indeterminado. Entretanto, é possível fazer uma estimativa calculando $S(t)$ para valores de t muito próximos de 1, tanto para $t < 1$ como para $t > 1$. A tabela a seguir mostra alguns desses resultados.

t	0,95	0,98	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2
$S(t)$	3,859	3,943	3,972	3,997	Indeterminado	4,003	4,028	4,285	4,572

Tabela 2.8: Tabela sem legenda apresentada no livro de Hoffmann et al. (2018), página 54.

Os números da segunda linha da tabela revelam que $S(t)$ se aproxima do valor 4 quando t se aproxima de 1. Assim, é razoável esperar que 4 terrenos sejam vendidos daqui a um ano.

O comportamento da função desse exemplo pode ser descrito da seguinte forma: "O limite de $S(t)$ quando t tende a 1 é igual a 4", ou, em notação matemática,

$$\lim_{t \to 1} S(t) = 4.$$

Hoffmann et al. (2018), em seu livro, apresentam uma definição informal de limite, assim como também abordam intuitivamente este conceito através da Figura 2.9, na qual geometricamente ilustram a relação $\lim_{x \to c} f(x) = L$, que significa que a ordenada do gráfico de $y = f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de c. Além disso, pela análise feita no livro "Cálculo: um curso moderno e suas aplicações", podemos perceber que os autores não trazem uma definição formal de limite, em nenhum momento, apenas apresentam intuitivamente o conceito, tanto algébrico quanto geométrico, trazendo as fórmulas e aplicações.

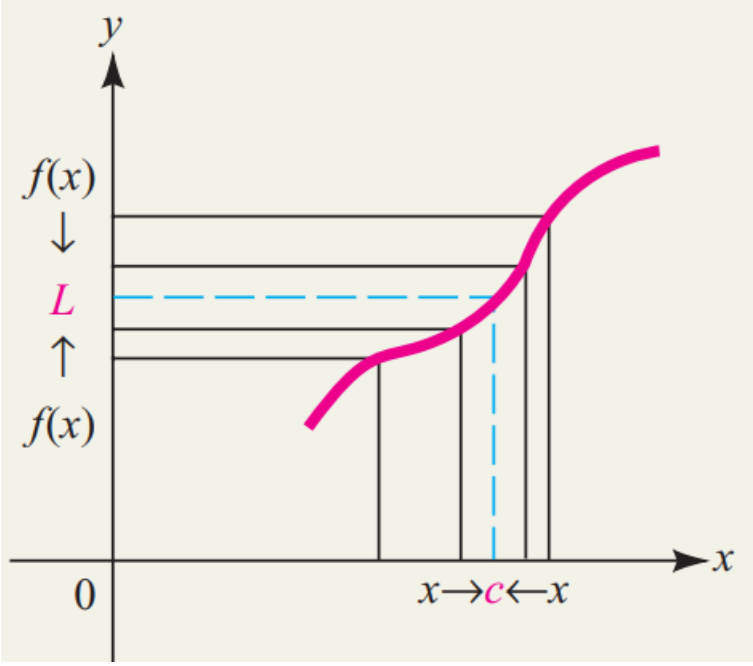


Figura 2.9: Se $\lim_{x \to c} f(x) = L$, a altura do gráfico de f se aproxima de L conforme x se aproxima de c.

Fonte: Hoffmann et al. (2010).

O próximo livro consultado foi do autor Thomas (2012), o qual inicia o capítulo de limite e continuidade com uma visão geral do que será estudado sobre este tema, explicando como o desenvolverá e apresenta intuitivamente o conceito de limite, por fim, explica o conceito formalmente. Com isso, o autor apresenta os conceitos de taxa de variação e tangente de curvas através de uma abordagem histórica de Galileu Galilei sobre queda livre. Assim, introduz o conceito de velocidade média e instantânea, dando exemplos do que foi explicado. Também, apresenta o conceito de taxa de variação média e secantes, definição do coeficiente angular de uma curva, taxa de variação instantânea e retas tangentes, exibindo exemplos para cada um dos temas e, em seguida, apresenta um tópico de limite informal, algumas regras, teoremas de limites de polinômios, limites das funções racionais, eliminação algébrica de denominadores comuns, entre outros que o autor diz ser limite informal. Além disso, propõe alguns exercícios e apresenta a definição formal de limite. O autor Thomas (2012) inicia o capítulo com uma introdução histórica sobre queda livre, como segue no Exemplo 2.7 retirado do seu livro.

Exemplo 2.7. *No final do século XVI, Galileu Galilei descobriu que um objeto sólido que entra em queda a partir do repouso (que não está em movimento) próximo à superfície da Terra e é deixado cair livremente cairá uma distância proporcional ao quadrado do tempo em que estiver caindo. Esse tipo de movimento é chamado de* ***queda livre****. Supõe-se que a resistência do ar é insuficiente para retardar a queda do objeto, e que a gravidade é a única força que atua sobre o objeto em queda. Se y indica a distância percorrida durante a queda em pés após t segundos, então a lei de Galileu é*

$$y = 16t^2$$

onde 16 é a constante (aproximada) de proporcionalidade. (Se y for medido em metros, a constante será 4,9).

*A **velocidade média** de um corpo em movimento durante um intervalo de tempo é determinada pela divisão da distância percorrida pelo tempo transcorrido. A unidade de medida é a distância por unidade de tempo: quilômetros por hora, pés*[2] *(ou metros) por segundo, ou o que quer que seja apropriado para o problema em questão.*

Podemos perceber que alguns autores utilizam $y = 4,9t^2$ para denotar a função de queda livre e outros como $y = 16t^2$. Isso ocorre devido ao sistema de medida que está sendo utilizado pelos autores, isto é, no primeiro caso temos que y está sendo medido em metros e no segundo caso y está sendo medido em *pés*, o que causa a diferença na formulação da função de queda livre.

Para contextualizar, o autor utiliza uma rocha que se desprende do alto de um penhasco e começa a cair, o objetivo deste exemplo é encontrar a velocidade média desta rocha durante um intervalo de tempo. Neste contexto, Thomas (2012) pretende determinar a velocidade deste objeto em queda em um único instante t zero, com isso analisará o que ocorre em intervalos de tempo cada vez menores. Thomas (2012) inclui em seu livro o Exemplo 2.8 para explicar este processo.

Exemplo 2.8. *Determine a velocidade da rocha em queda quando $t = 1$ e $t = 2$ s.*

Solução: Podemos calcular a velocidade média da rocha em um intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$, com comprimento $\Delta t = h$, como

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}. \tag{2.1}$$

Não podemos utilizar essa fórmula para calcular a velocidade "instantânea" no momento t_0 exato simplesmente substituindo $h = 0$, porque não podemos dividir por 0. Mas `podemos` utilizá-la para calcular velocidades médias durante intervalos de tempo cada vez menores, iniciando em $t_0 = 1$ e $t_0 = 2$. Quando fazemos isso, verificamos um padrão na Tabela 2.9.

Velocidades médias durante curtos intervalos de tempo $[t_0, t_0 + h]$

Velocidade Média: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0+h)^2 - 16t_0^2}{h}$

Duração do intervalo de tempo h	Velocidade média durante o intervalo de comprimento h iniciando em $t = 1$	Velocidade média durante o intervalo de comprimento h iniciando em $t = 2$
1	48	80
0,1	33,6	65,6
0,01	32,16	64,16
0,001	32,016	64,016
0,0001	32,0016	64,0016

Tabela 2.9: Tabela sem legenda apresentada no livro de Thomas (2012), página 55.

[2]Pés é uma unidade de medida de comprimento do sistema imperial, usada principalmente em países como os Estados Unidos e o Reino Unido.

A velocidade média nos intervalos iniciando em $t_0 = 1$ parece se aproximar de um valor limite de 32, conforme o comprimento do intervalo diminui. Isso sugere que a rocha está caindo a uma velocidade de 32 pés/s em $t_0 = 1$ s. Confirmemos isso algebricamente.

Se definirmos $t_0 = 1$, depois expandirmos o numerador na Equação (2.1) e simplificarmos, determinaremos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1+2h+h^2) - 16}{h} = \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h$$

para valores de h diferentes de 0, as expressões à direita e à esquerda são equivalentes, e a velocidade média é $32 + 16h$ pés/s. Agora podemos ver por que a velocidade média possui o valor limite $32 + 16(0) = 32$ pés/s à medida que h se aproxima de 0.

Da mesma forma, ao definir $t_0 = 2$ na Equação (2.1), o procedimento resulta em

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64 + 16h$$

para valores de h diferentes de 0. À medida que h se aproxima cada vez mais de 0, a velocidade média possui o valor limite 64 pés/s quando $t_0 = 2$ s, conforme sugerido pela Tabela 2.9.

Após o Exemplo 2.8, o autor Thomas (2012) apresenta em seu livro os tópicos "taxas de variação média e retas secantes" e "definição do coeficiente angular de uma curva". Com isso, exibe a seguinte ideia que compõe o *Exemplo 2.9*.

Exemplo 2.9. *Para definir a tangência para curvas em geral, precisamos de uma abordagem que leve em consideração o comportamento das secantes por P e pontos Q, próximos à medida que Q se move em direção a P ao longo da curva (Figura 2.10). A ideia é a seguinte:*

1. *Inicie com o que* **`podemos`** *calcular, a saber, o coeficiente angular da secante PQ;*
2. *Investigue o valor limite do coeficiente angular secante à medida que Q se aproxima de P ao longo da curva (esclareceremos a ideia de* **`limite`** *na próxima seção);*
3. *Se existir* **`limite`***, suponha que ele seja o coeficiente angular da curva em P e* **`defina`** *a tangente à curva em P como a reta por P com esse coeficiente angular.*

Esse procedimento é o mesmo utilizado no problema da rocha que caía discutido no Exemplo 2.8.

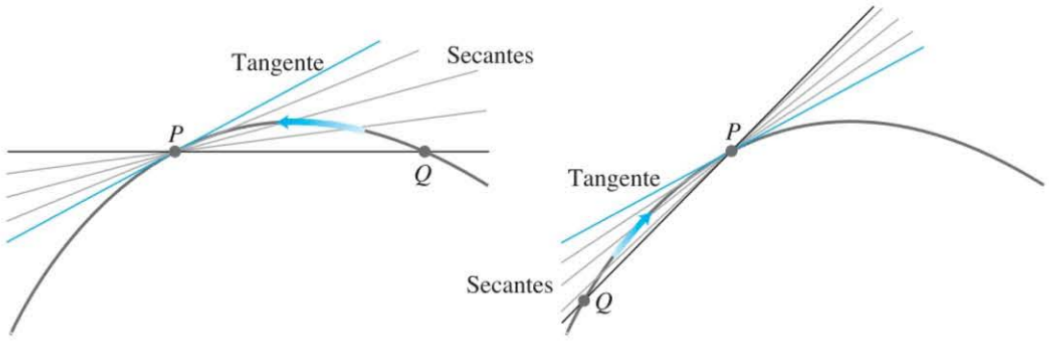


Figura 2.10: A tangente à curva em P é a reta que atravessa P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$ de ambos os lados.
Fonte: Thomas (2012).

Diferente dos outros livros, Simmons (1996) inicia um capítulo com dois problemas, um em relação as tangentes e o outro as áreas, que dizem respectivamente "calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto dado P" e "calcular a área debaixo do gráfico, entre os pontos $x = a$ e $x = b$". A partir disso, o autor afirma que os conceitos que serão desenvolvidos em seguida terão relação com esses temas. Além disso, brevemente faz uma introdução histórica sobre o cálculo diferencial e integral, citando o teorema fundamental do cálculo, afirmando que este é um dos teoremas mais importantes de toda a matemática. O Exemplo 2.10 apresenta um trecho da narrativa histórica de Simmons (1996).

Exemplo 2.10. *Às vezes é dito que o Cálculo foi "inventado" por aqueles dois grandes gênios do século XVII, Newton e Leibniz. Na verdade, o Cálculo é o produto de um longo processo evolutivo que começou na Grécia Antiga e continuou no século XIX. Newton e Leibniz foram homens verdadeiramente notáveis e suas contribuições foram de importância decisiva, mas o assunto nem começou nem terminou com eles. Os problemas enunciados acima estavam presentes nas mentes de muitos cientistas europeus da metade do século XVII - mais notadamente em Fermat - e foi feito um progresso considerável em cada um deles, com engenhosos métodos especiais. A grande realização de Newton e Leibniz foi reconhecer e explorar a íntima conexão entre esses problemas, que ninguém tinha entendido completamente. Especificamente, eles foram os primeiros a entender o significado do* ***Teorema Fundamental do Cálculo****, o qual diz, com efeito, que a solução do problema da tangente pode ser usada para resolver o problema da área. Esse teorema - certamente o mais importante de toda a Matemática - foi descoberto por cada um deles, independentemente um do outro, e eles e seus sucessores usaram-no para unir as duas metades do assunto numa arte de resolução de problemas de poder e versatilidade impressionantes.*

Ainda em seu livro, Simmons (1996) faz um resumo sobre reta tangente a uma curva e o cálculo do coeficiente angular. Resumo este que foi extraído do livro como segue.

Resumidamente, a ideia é esta: considere uma curva $y = (x)$ e P um dado ponto fixo sobre essa curva (Figura 2.11). Considere Q um segundo ponto próximo de P sobre a curva e desenhe a reta secante PQ. A reta tangente em P pode agora ser encarada como a posição-limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva em direção a P.

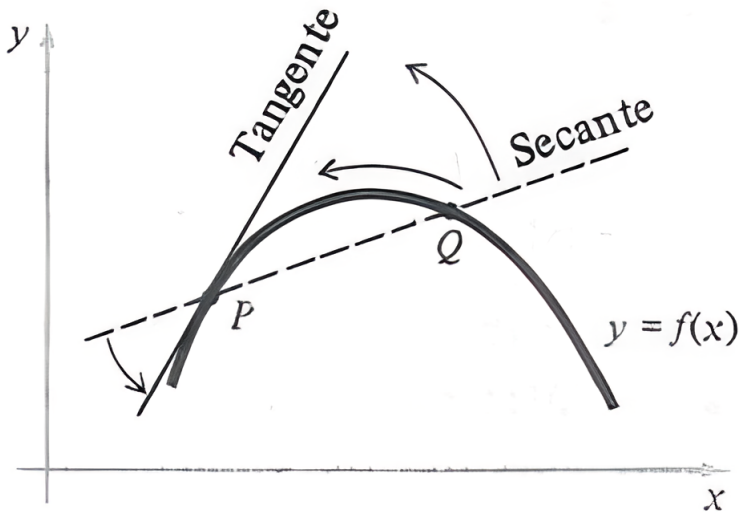


Figura 2.11: A ideia de Fermat.
Fonte: Simmons (1996).

Que não haja má compreensão. Essa maneira de pensar acerca de tangentes não é um ponto técnico de menor importância na geometria de curvas. Pelo contrário, é uma das três ou quatro ideias mais fecundas que qualquer matemático já tenha tido, pois, sem ela, não haveria o conceito de velocidade ou aceleração ou força em Física, nem dinâmica ou astronomia newtoniana, nem ciência física de qualquer natureza, exceto como mera descrição verbal de fenômenos, e certamente não teríamos a idade moderna da Engenharia e tecnologia.

Neste momento, Simmons (1996) separa o problema das tangentes e o problema das áreas, começando a explorar cada um deles separadamente. Com isso, expõe o problema da reta tangente e explica como calcular o coeficiente angular, ou seja, a inclinação da reta tangente. A partir disso, apresenta alguns exemplos sobre reta tangente para logo em seguida apresentar a definição de derivada. Pode-se perceber que Simmons (1996) aborda o conceito de derivada antes mesmo de falar sobre limites e funções contínuas, o que diferencia dos outros autores.

Ainda no mesmo capítulo, Simmons (1996) inicia uma seção explicando sobre o que é limite, porém descreve o conceito de limite como sendo "$f(x)$ tende a L quando x tende a a", apresentando simbolicamente o conceito, mas afirma que esta é uma descrição informal de limite. Além disso, afirma que essas expressões são importantes demais para serem deixadas na imaginação do leitor e apresenta uma definição resumida e clara sobre o assunto. Simmons (1996) analisa o seguinte exemplo:

Exemplo 2.11. *Começamos analisando um exemplo específico:*

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + x}{x}.$$

Essa função não está definida para $x = 0$, e para $x \neq 0$ os seus valores são dados pela expressão mais simples

$$f(x) = \frac{x(2x+1)}{x} = 2x + 1.$$

Ao examinarmos a Figura 2.12, fica claro que $f(x)$ está próximo de 1 quando x está próximo de 0. Para dar uma descrição quantitativa desse comportamento qualitativo, necessitamos de uma fórmula para a diferença entre $f(x)$ e o valor-limite 1:

$$f(x) - 1 = (2x + 1) - 1 = 2x.$$

Vemos, por essa fórmula, que pode-se tornar $f(x)$ **tão próximo de 1 quanto se queira**, *tornando-se x* **suficientemente próximo** *de 0. Assim,*

$$f(x) - 1 = \frac{1}{100} \text{ quando } x = \frac{1}{200},$$

$$f(x) - 1 = \frac{1}{1000} \text{ quando } x = \frac{1}{2000},$$

e assim por diante.

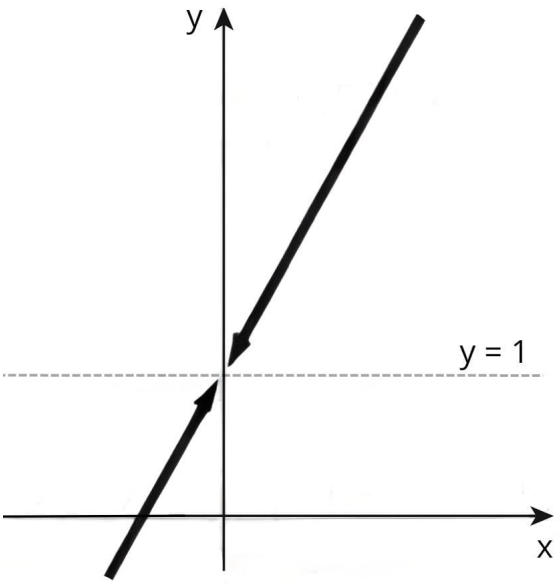


Figura 2.12: Figura sem legenda apresentada no livro de Simmons (1996), página 96.
Fonte: Adaptado de Simmons (1996).

Em seguida, Simmons (1996) apresenta uma afirmação mais precisa sobre limite do que o vago enunciado $f(x)$ está "perto" de 1 quando x está "perto" de 0. Assim, o autor mostra a definição de limite por épsilon e delta, mas finaliza dizendo que uma compreensão intuitiva de limite é suficiente para os seus objetivos no livro.

Finalizaremos esta seção com uma interessante comparação entre o livro da Flemming e Gonçalves (2006) e Stewart (2021), respectivamente, no mesmo capítulo um aborda limite e continuidade e o outro apresenta limite e derivada. Além disso, comparando também o autor Stewart (2021) e Simmons (1996), percebe-se que ambos trazem e trabalham com o problema das tangentes e depois abordam a diferença entre a reta tangente no círculo e curva.

2.2 Noções intuitivas de derivada

A derivada é introduzida inicialmente em alguns livros de forma intuitiva. Discutiremos como os escritores que selecionamos abordam este conceito em seus livros.

Como mencionado, um dos autores que trata a derivada como um limite especial é o Stewart (2021), que apresenta exemplos sobre a derivada podendo ser interpretada como uma taxa de variação, apontando que isso é feito tanto nas ciências quanto nas engenharias. Para introduzir o conceito de derivada, Stewart (2021) exibe exemplos sobre reta tangente e velocidade, após isso, anuncia a derivada pela definição. Uma observação importante é que o autor discute limite e derivada no mesmo capítulo. Neste momento, apresentaremos a seção 2.7 do livro, que trata sobre "Derivadas e Taxas de Variação".

No Exemplo 2.12, a função utilizada é a mesma do Exemplo 2.2. Porém, a forma como o exercício é resolvido na segunda abordagem é o grande diferencial, uma vez que os conceitos de limite já foram explicados e, com isso, é possível resolver o exemplo utilizando outro método. Confira o Exemplo 2.12 retirado do livro do autor.

Exemplo 2.12. *Encontre uma equação da reta tangente à parábola* $y = x^2$ *no ponto* $(1, 1)$.

Solução: Temos aqui $a = 1$ *e* $f(x) = x^2$*, logo a inclinação é*

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ *é*

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1.$$

O autor Stewart (2021) apresenta uma das formas de encontrar a inclinação da reta tangente e afirma que é mais fácil de ser utilizada. Para isso, se $h = x - a$, então $x = a + h$ (veja a Figura 2.13), temos que a inclinação da reta secante PQ é dada pela seguinte expressão:

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

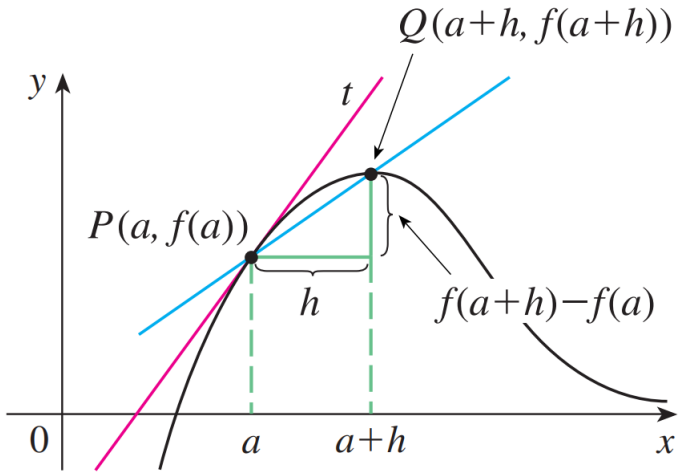


Figura 2.13: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 132.
Fonte: Stewart (2021).

O autor ainda observa que quando x tende a a, h tende a 0 (veja a Figura 2.13), pois $h = x - a$, portanto a expressão para a inclinação da reta tangente pode ser escrita como:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

O autor relembra sobre o Exemplo 2.4, da Torre CN, o qual apresentamos na seção 2.1, no qual se estudou sobre o movimento de uma bola em queda livre e se definiu a velocidade como o valor-limite das velocidades médias em períodos cada vez menores. A partir disso, Stewart (2021) explica o conceito de **função posição**, o qual descreve o movimento de um objeto, no intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$ (Equação (2.2)). Além disso, define velocidade instantânea, $v(a)$, no instante $t = a$, como sendo o limite da velocidade média quando $h \to 0$. Com isso, conclui

que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P, confira a Equação (2.3) e a Figura 2.14.

$$\textit{velocidade média} = \frac{\textit{deslocamento}}{\textit{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.2}$$

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.3}$$

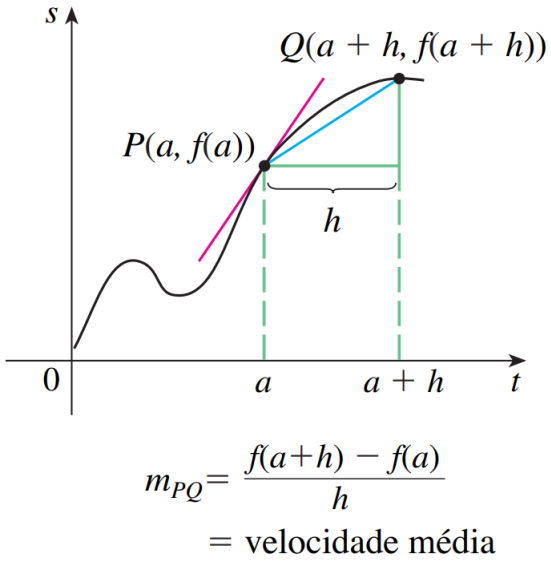


Figura 2.14: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 133. Fonte: Stewart (2021).

Como agora podemos calcular o limite, o autor retoma ao problema da Torre CN, como segue no Exemplo 2.13.

Exemplo 2.13. *Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.*

(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?

(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Solução: Precisaremos encontrar a velocidade tanto quando $t = 5$ quanto quando a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$. Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4,9t^2$, temos

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4,9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4,9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4,9(2a + h) = 9,8a. \end{aligned}$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9,8) \cdot (5) = 49$ m/s.

(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1, quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4,9t_1^2 = 450.$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4,9} \quad e \quad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 9,6 \ s.$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8\sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 94 \ m/s.$$

Após o Exemplo 2.13, Stewart (2021) enuncia a definição da derivada e apresenta exemplos de aplicação, mas não iremos nos aprofundar na definição, pois não é o foco deste capítulo. Além disso, somente no capítulo 3 do livro o autor explica as regras de derivação.

Ainda no capítulo 2, Stewart (2021) explora "Taxas de Variação", apresentando matematicamente este conceito.

O autor explica sobre taxa de variação, considerando y como uma função de x e escrevendo $y = f(x)$. Nesse contexto, chamamos de incremento de x, ou seja, a variação de x, quando x varia de x_1 a x_2, logo

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

assim, a variação em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Com isso, temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.4}$$

O quociente das diferenças da Equação (2.4) é denominado *taxa média de variação de y em relação à x* no intervalo e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ, como aponta Stewart (2021) na *Figura 2.15*.

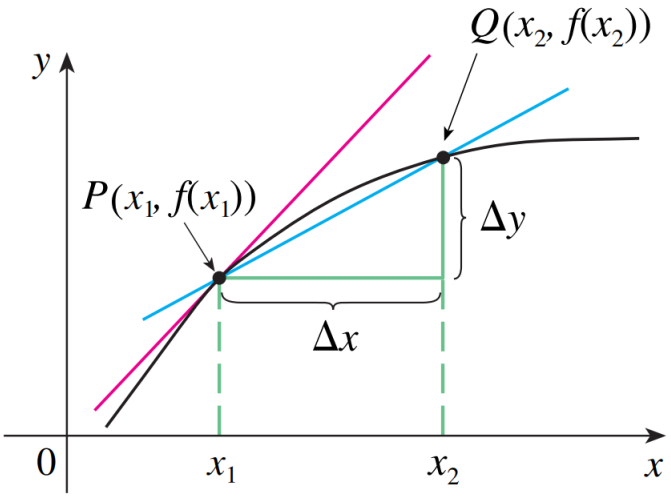


Figura 2.15: Figura sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 135.
Fonte: Stewart (2021).

Além disso, Stewart (2021) fala sobre *taxa instantânea de variação de y em relação à x*. Com isso, reconhece que o limite da Equação (2.5) é a derivada $f'(x_1)$. O autor ainda

diz que uma das interpretações da derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = a$ e apresenta a Definição 2.14 como uma segunda interpretação.

$$\textit{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.5}$$

Definição 2.14. *A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.*

Após falar sobre taxa de variação, exibe dois exemplos de aplicação, sendo o Exemplo 2.15 um deles.

Exemplo 2.15. *Seja $D(t)$ a dívida pública bruta canadense no momento t. A Tabela 2.10 dá os valores aproximados dessa função, fornecendo as estimativas da dívida, em meados do ano, em bilhões de dólares, no período de 1994 a 2002. Interprete e estime os valores de $D'(1998)$.*

t	$D(t)$
1994	414,0
1996	469,5
1998	467,3
2000	456,4
2002	442,3

Tabela 2.10: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 136.

Solução: A derivada $D'(1998)$ indica a taxa de variação da dívida D com relação a t quando $t = 1998$, isto é, a taxa de crescimento da dívida nacional em 1998.

De acordo com a Equação (2.6),

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}. \tag{2.6}$$

Dessa forma, calculamos e tabulamos os valores do quociente de diferenças (as taxas médias da variação) como a seguir:

t	$\frac{D(t)-D(1998)}{t-1998}$
1994	13,3
1996	$-1,1$
2000	$-5,5$
2002	$-6,3$

Tabela 2.11: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 136.

Da Tabela 2.11 vemos que $D'(1998)$ situa-se em algum lugar entre $-1,1$ e $-5,5$ bilhões de dólares por ano. [Aqui faremos a razoável suposição de que a dívida não flutuou muito

entre 1998 e 2002.] Estimamos que a taxa de crescimento da divida nacional do Canadá em 1998 foi a média desses dois números, a saber:

$$D'(1998) \approx -3,3 \text{ bilhões de dólares por ano.}$$

O sinal de menos significa que o débito está **decrescendo** *naquele instante.*

Um outro método seria traçar a função de débito e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1998$.

No livro "Cálculo: um curso moderno e suas aplicações", dos autores Hoffmann et al. (2018), é apresentado, no capítulo 2, os conceitos básicos de derivada, sendo dada uma introdução sobre taxa de variação e inclinação da reta tangente. Mostraremos alguns exemplos em que os autores abordam antes de explicarem a definição de derivada e técnicas de derivação.

O Exemplo 2.16 apresenta como é possível calcular matematicamente a taxa instantânea de variação de uma curva $s(t)$ no instante $t = 2$ e a inclinação da reta tangente à curva $s(t)$ utilizando limite. A Figura 2.16 também faz parte do exemplo.

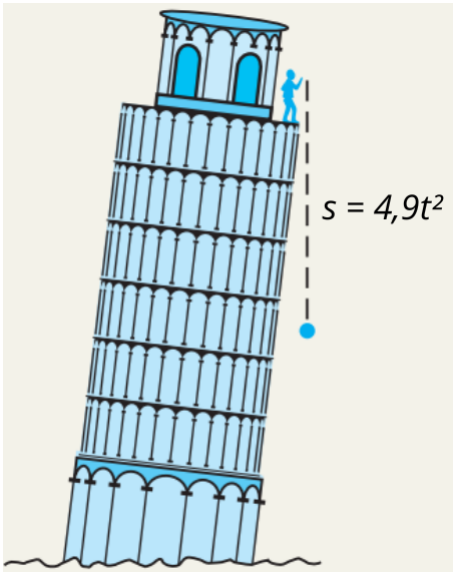


Figura 2.16: Figura sem legenda apresentada no livro de Hoffmann et al. (2010), página 103.

Fonte: Adaptado de Hoffmann et al. (2010).

Exemplo 2.16. *Cálculo da velocidade instantânea: Desprezando a resistência do ar, um corpo em queda livre nas proximidades da superfície da terra percorre uma distância* $s(t) = 4,9t^2$ *metros em* t *segundos.*

(a) Qual é a velocidade do corpo no instante $t = 2$ *segundos?*

(b) Qual é a relação entre a velocidade do corpo calculada no item (a) e a curva de $s(t)$*?*

Solução: (a) A velocidade após 2 segundos é a taxa **instantânea** *de variação de* $s(t)$ *no instante* $t = 2$*. A menos que o corpo esteja equipado com um velocímetro, é difícil medir diretamente essa velocidade. Entretanto, podemos medir a distância percorrida pelo corpo enquanto sofre uma pequena variação* h *de* $t = 2$ *para* $t = 2 + h$ *e, em seguida,*

determinar a taxa **média** *de variação de $s(t)$ no intervalo $[2, 2+h]$ calculando a razão*

$$\begin{aligned} v_{med} &= \frac{distância}{tempo} = \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2} \\ &= \frac{4,9(2+h)^2 - 4,9(2)^2}{h} = \frac{4,9(4+4h+h^2) - 4,9(4)}{h} \\ &= \frac{19,6h + 4,9h^2}{h} = 19,6 + 4,9h. \end{aligned}$$

Como o acréscimo de tempo h é pequeno, esperamos que a diferença entre a velocidade média v_{med} e a velocidade instantânea v_{ins} em $t = 2$ seja muito pequena. Assim, é razoável definir a velocidade instantânea como o limite

$$v_{ins} = \lim_{h \to 0} v_{med} = \lim_{h \to 0} 19,6 + 4,9h = 19,6.$$

Isso significa que, após 2 segundos, o corpo está se movendo a uma velocidade de 19,6 metros por segundo.

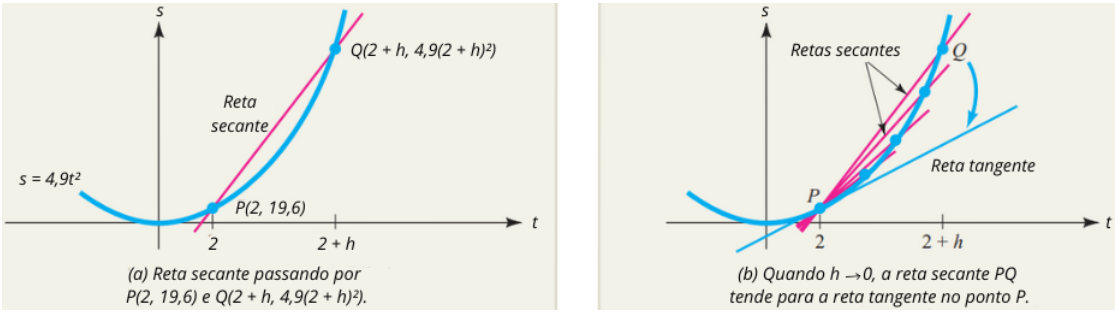


Figura 2.17: Calculando a inclinação da reta tangente a $s = 4,9t^2$ no ponto $P(2; 19,6)$.
Fonte: Adaptado de Hoffmann et al. (2010).

(b) O método descrito no item (a) está representado geometricamente na Figura 2.17. A Figura 2.17 (a) mostra a curva da função $s(t) = 4,9t^2$, juntamente com os pontos $P(2; 19,6)$ e $Q(2+h; 4,9(2+h)^2)$. A reta que liga os pontos P e Q é chamada reta secante da curva de $s(t)$ e tem uma inclinação

$$m_{sec} = \frac{4,9(2+h)^2 - 19,6}{(2+h) - 2} = 19,6 + 4,9h.$$

Como mostra a Figura 2.17 (b), quando tomamos valores cada vez menores de h, as retas secantes PQ correspondentes tendem para a posição da reta que consideramos intuitivamente como a tangente à curva de $s(t)$ no ponto P. Isso sugere que podemos determinar a inclinação m_{tan} da reta tangente calculando o valor limite de m_{sec} quando h tende a 0, ou seja,

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} 19,6 + 4,9h = 19,6.$$

Assim, a inclinação da reta tangente à curva de $s(t) = 4,9t^2$ no ponto $t = 2$ é igual à taxa instantânea de variação de $s(t)$ em relação a t no ponto $t = 2$.

Hoffmann et al. (2018) propõem alguns exemplos sobre taxa de variação em lucro e uso de derivada para determinar a inclinação da reta tangente, em seguida apresentam a definição de derivada de uma função.

O próximo livro que será discutido é do autor Thomas (2012), no qual, ao iniciar o capítulo de derivação, introduz matematicamente o conceito de derivada, relacionando com o limite apresentado no capítulo precedente, logo em seguida traz as definições formais. Após a introdução do conceito, apresenta exemplos e propõe exercícios. Thomas (2012) relembra um exemplo de limite, no qual apresentou um procedimento para determinar a reta tangente de uma curva arbitrária $f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$. Em seguida, exibe a definição do coeficiente angular da curva em P, expõe ilustrações gráficas e apresenta tal conteúdo no Exemplo 2.17. Uma observação válida para ser feita é que "coeficiente angular da curva em um ponto" não é uma expressão muito utilizada.

Exemplo 2.17. *Determine o coeficiente angular da curva $y = 1/x$ em qualquer ponto $x = a \neq 0$. Qual é o coeficiente angular no ponto $x = -1$?*

(a) Em que ponto o coeficiente angular é igual a $-1/4$?

(b) O que acontece com a tangente à curva no ponto $(a, 1/a)$ à medida que a varia?

Solução:

(a) Aqui, $f(x) = 1/x$. O coeficiente angular em $(a, 1/a)$ é

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Observe que é necessário escrever "$\lim_{h\to 0}$" antes de cada fração até o ponto em que se pode avaliar o limite substituindo $h = 0$. O número a pode ser positivo ou negativo, mas não pode ser 0. Quando $a = -1$, o coeficiente angular é $-1/(-1)^2 = -1$ (Figura 2.18).

(b) O coeficiente angular de $y = 1/x$ no ponto em que $x = a$ é $-1/a^2$. Será $-1/4$ se

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Essa equação é equivalente a $a^2 = 4$, assim $a = 2$ ou $a = -2$. A curva tem coeficiente angular $-1/4$ nos dois pontos $(2, 1/2)$ e $(-2, -1/2)$ (Figura 2.19).

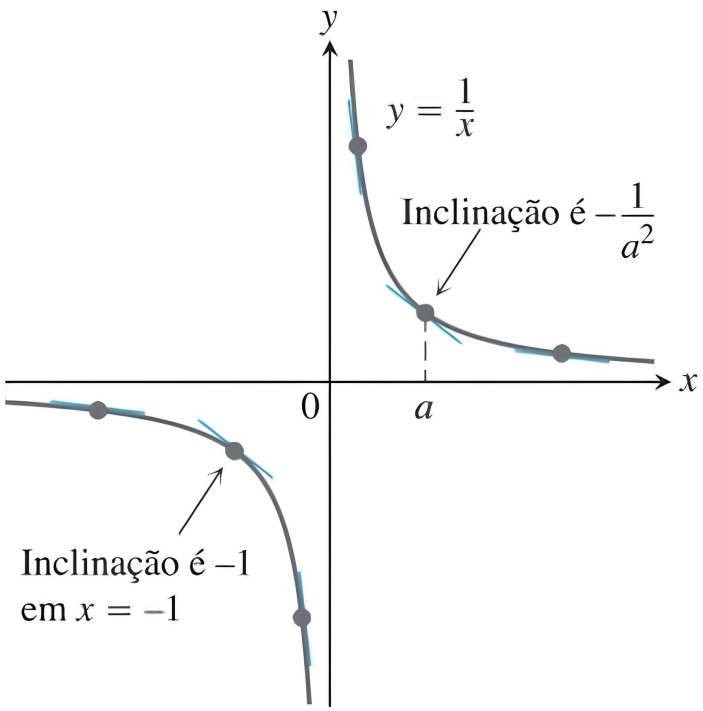


Figura 2.18: O coeficiente angular da tangente fica mais íngreme perto da origem, tornando-se mais gradual à medida que o ponto de tangência se afasta.
Fonte: Thomas (2012).

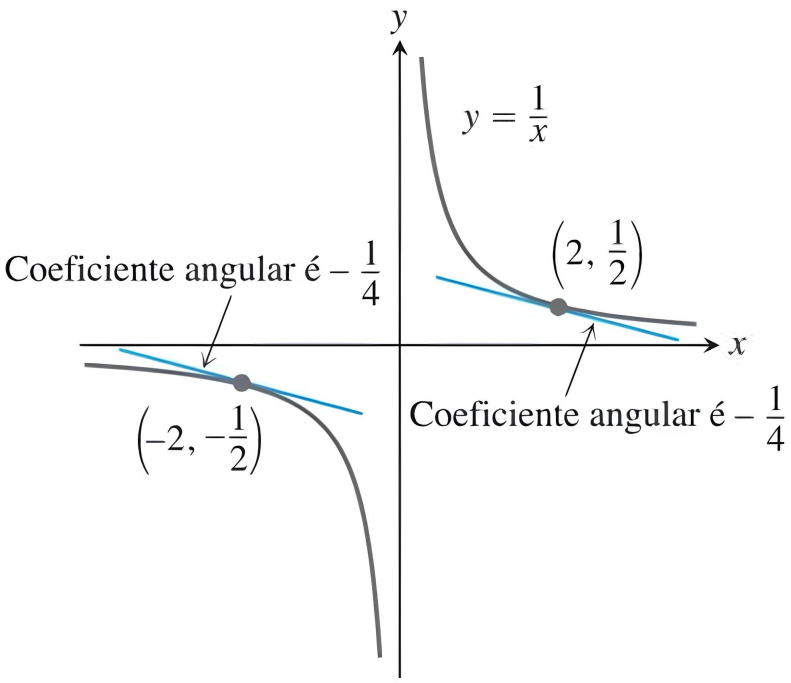


Figura 2.19: Duas retas tangentes a $y = 1/x$ com coeficiente angular -1/4.
Fonte: Thomas (2012).

Em seguida, Thomas (2012) anuncia a definição de derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0. Além disso, o autor afirma que a derivada fornece o coeficiente angular

da curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$, quando a interpretamos como um coeficiente angular de uma reta tangente. Também, se for interpretada como uma taxa de variação média, a mesma fornecerá a taxa instantânea de variação da função em relação a x no ponto $x = x_0$.

Partindo disso, Thomas (2012) retoma o exemplo da pedra que caía livremente a partir do repouso, com o intuito de estudar a velocidade deste corpo. Segue o Exemplo 2.18 retirado o livro do autor.

Exemplo 2.18. *Sabemos que a pedra caiu $y = 16t^2$ pés durante os primeiros t segundos, e utilizamos uma sequência de taxas médias em intervalos cada vez mais curtos para estimar a velocidade da pedra no instante $t = 1$. Qual era a velocidade* **exata** *da pedra nesse instante?*

Solução: Consideramos $f(t) = 16t^2$. Definiu-se a velocidade média da pedra durante o intervalo entre $t = 1$ e $t = 1 + h$ segundos, para $h > O$, como sendo

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(h^2 + 2h)}{h} = 16(h+2).$$

A velocidade da pedra no instante $t = 1$ é, então,

$$\lim_{h \to 0} 16(h+2) = 16(0+2) = 32 \text{ pés/s}.$$

A nossa estimativa inicial de 32 pés/s [$\cdots$] estava certa.

Após isso, Thomas (2012) faz um resumo sobre tudo que discutiu até o momento, ou seja, coeficiente angular das curvas, retas tangentes a uma curva, taxa de variação de uma função e a derivada de uma função em um ponto. Ainda diz que essas ideias se referem ao mesmo limite e apresenta todas as interpretações para o limite do coeficiente da diferença, confira no Exemplo 2.19.

Exemplo 2.19. *Apresentamos a seguir todas as interpretações para o limite do quociente da diferença,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1. *O coeficiente angular do gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$*
2. *O coeficiente angular da tangente à curva $y = f(x)$ em $x = x_0$*
3. *A taxa de variação de $f(x)$ em relação a x em $x = x_0$*
4. *A derivada $f'(x_0)$ em um ponto*

Na seção "3.2 - A derivada como função" de seu livro, Thomas (2012) apresenta a definição de derivada, representações gráficas de uma derivada e alguns exemplos, sendo que no próximo capítulo do livro são apresentadas as regras de derivação. Assim, na representação gráfica de derivada, temos o Exemplo 2.20 retirado de Thomas (2012).

Exemplo 2.20. *Faça o gráfico da derivada da função $y = f(x)$ na Figura 2.20(a).*

Solução: Esboçamos as tangentes no gráfico de f em intervalos frequentes e usamos seus coeficientes angulares para estimar os valores de $f'(x)$ nesses pontos. Registramos os pares $(x, f'(x))$ correspondentes e os unimos com uma curva suave, como esboçado na Figura 2.20(b).

O que descobrimos no gráfico de $y = f'(x)$? Imediatamente percebemos

1. *em que ponto a taxa de variação de f é positiva, negativa ou nula;*
2. *o valor aproximado da taxa de crescimento em qualquer x e seu tamanho em relação a $f(x)$;*
3. *os pontos em que a própria taxa de variação é crescente ou decrescente.*

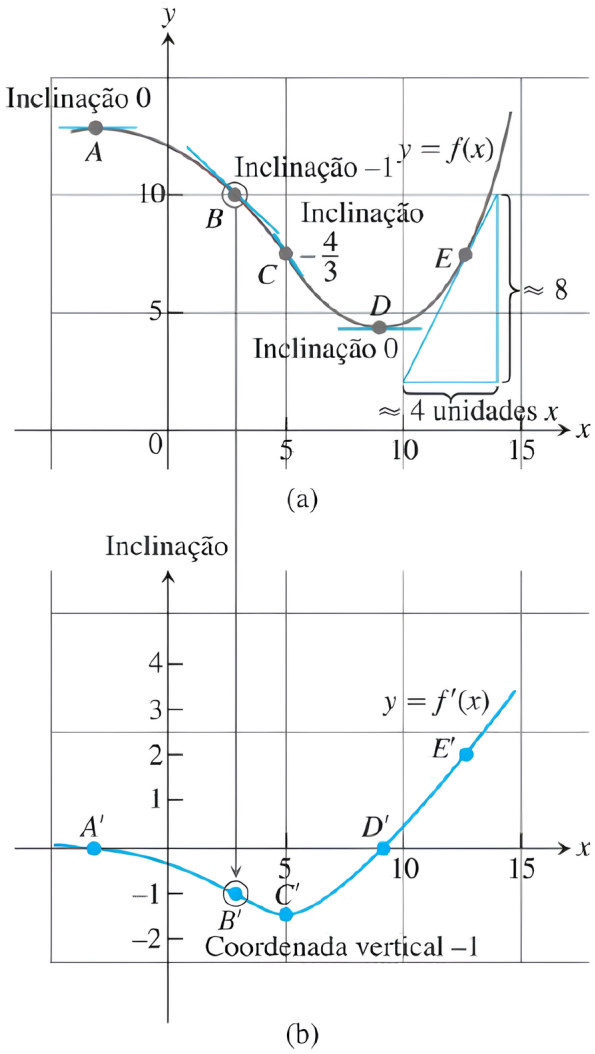


Figura 2.20: Construímos o gráfico de $y = f'(x)$ em (b) ao traçar os coeficientes angulares do gráfico de $y = f(x)$ em (a). A coordenada vertical em B' é o coeficiente angular em B, e assim por diante. O coeficiente angular em E é de aproximadamente $8/4 = 2$. Vemos que a taxa de variação de f em (b) é negativa para x entre A' e D', a taxa de variação de f é positiva para x à direita de D'.

Fonte: Thomas (2012).

Já as autoras Flemming e Gonçalves (2006), começam o capítulo de derivada a partir da explicação sobre reta tangente, abordando as ideias de Newton e Leibnitz introduzidas no século XVIII. Assim, as autoras descrevem intuitivamente sobre a inclinação da reta tangente a uma curva num ponto dado e em seguida explicam como encontrar a equação da reta tangente a curva neste ponto. Segue o passo a passo do Exemplo 2.21 retirado do livro.

Exemplo 2.21. *Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b), como na Figura 2.21.*

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, na Figura 2.21, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

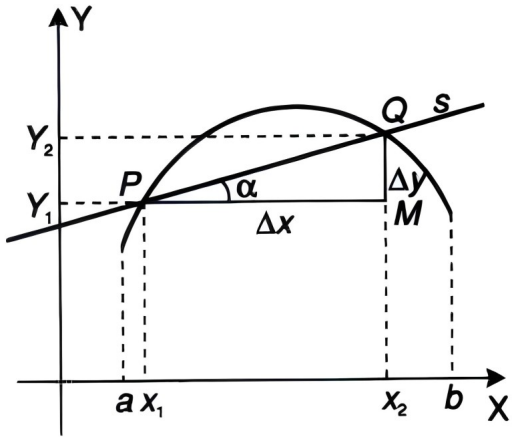


Figura 2.21: Figura sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 115.

Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (ver Figura 2.22).

Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P, ou também inclinação da curva em P.

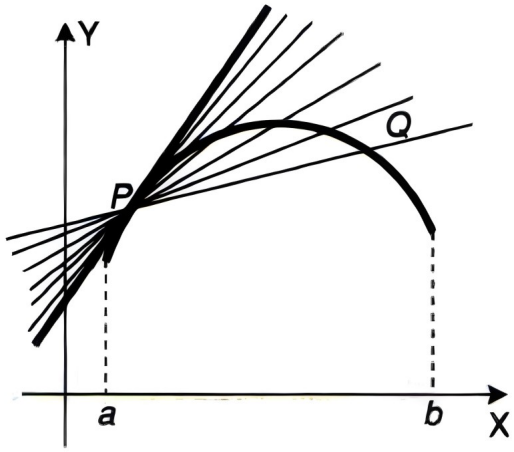


Figura 2.22: Figura sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 116.

Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

Após a explicação sobre reta tangente, as autoras apresentam exemplos para encontrar a inclinação e equação da reta tangente à uma curva em um ponto. A partir disso, na seção de velocidade e aceleração do livro, é apresentado como calcular essas grandezas utilizando limite. Nesse momento, as autoras utilizam um exemplo cotidiano. Explicam que ao dirigimos um carro conseguimos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. A velocidade é marcada em cada instante no velocímetro. Além disso, se pisarmos no acelerador ou freio, percebemos que essa velocidade muda, sendo possível sentir o fenômeno que chamamos de aceleração. A partir disso, é apresentado o conceito de velocidade e aceleração.

Velocidade:

Considerando um corpo em movimento, definimos a *velocidade média* do corpo como sendo o quociente entre o espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo. Ou seja,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Para calcularmos a *velocidade instantânea* do corpo no instante t, utilizamos a velocidade média em instantes de tempo Δt cada vez menores. Assim, a velocidade instantânea é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, ou seja,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Aceleração:

Do mesmo modo, dado um corpo em movimento, a *aceleração média* do corpo no intervalo de tempo t até $t + \Delta t$ é dada por:

$$a_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Para obtermos a aceleração do corpo no instante t, tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. Logo, a *aceleração instantânea* é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Após a explicação sobre velocidade e aceleração, as autoras Flemming e Gonçalves (2006) apresentam o Exemplo 2.22.

Exemplo 2.22. *No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determinar:*

(a) *a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[2, 4]$;*

(b) *a velocidade do corpo no instante $t = 2$;*

(c) *a aceleração média no intervalo $[0, 4]$;*

(d) *a aceleração no instante $t = 4$.*

Solução:

(a) A velocidade média do corpo no intervalo de tempo entre 2 e 4 é dada por:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{s(4)-s(2)}{4-2} \\ &= \frac{(16.4-4^2)-(16.2-2^2)}{4-2} \\ &= \frac{48-28}{2} \\ &= 10 \text{ unid. veloc.} \end{aligned}$$

(b) A velocidade do corpo num instante t qualquer é dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{[16(t+\Delta t)-(t+\Delta t)^2]-[16t-t^2]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{16t+16\Delta t-t^2-2t\Delta t-(\Delta t)^2-16t+t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{16\Delta t-2t\Delta t-(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} (16-2t-\Delta t) \\ &= 16-2t \text{ unid. veloc.} \end{aligned}$$

Quando $t=2$ temos:

$$v(2) = 16-2.2 = 12 \text{ unid. veloc.}$$

(c) A aceleração média no intervalo $[0,4]$ é dada por:

$$a_m = \frac{v(4)-v(0)}{4-0}.$$

Como $v(t)=16-2t$, temos:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(16-2.4)-(16-2.0)}{4} \\ &= \frac{8-16}{4} \\ &= -2 \text{ unid. aceler.} \end{aligned}$$

(d) A aceleração num instante t qualquer é dada por:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{16-2(t+\Delta t)-16+2t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{16-2t-2\Delta t-16+2t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{-2\Delta t}{\Delta t} \\ &= -2 \text{ unid. aceler.} \end{aligned}$$

Observamos que a aceleração negativa significa que o corpo está com a sua velocidade diminuindo. A aceleração no instante $t=4$ é dada por $a(4)=-2$ unid. aceler.

Como mencionado na seção 2.1, Simmons (1996) aborda derivada e limite no mesmo capítulo. Analisaremos alguns tópicos deste capítulo que apresentam o conceito de derivada.

Na seção "2.2 - Como Calcular o Coeficiente Angular (Inclinação) da Tangente", Simmons (1996) apresenta uma construção intuitiva sobre o coeficiente angular, ou seja, em um texto com conceitos matemáticos exibe uma ideia de como a curva se comporta, tendo em vista uma secante mudando de direção e se aproximando visualmente da tangente em um determinado ponto. Simmons (1996) explica sobre o valor-limite, apresenta as notações como o símbolo-padrão "$\rightarrow$" que significa "se aproxima" ou "tende", encontra o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2$ em um ponto arbitrário fixado $P(x_0, y_0)$ e discute um exemplo.

Em seguida, introduz a "notação delta" que pode denotar um *incremento* em processos de cálculos matemáticos. Além disso, apresenta um método que utiliza a notação delta para encontrar o valor do coeficiente angular de qualquer função $y = f(x)$, o autor usa como exemplo a curva $y = x^2$. A notação delta é utilizada no cálculo para encontrar o valor-limite, sendo que este é denotado por $f'(x)$. Assim, por definição, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.7}$$

A Equação (2.7) é conhecida como derivada de $f(x)$, sendo que o processo para encontrá-la é chamado de derivação (ou diferenciação) da função dada $f(x)$. Simmons (1996), apresenta um procedimento denominado *regra dos três passos* (ou *etapas*), a qual exibiremos no Exemplo 2.23.

Exemplo 2.23. ***Passo 1:*** *Escreva a diferença $f(x+\Delta x)-f(x)$ para a particular função em consideração e, se possível, simplifique-a até o ponto em que Δx seja um fator.*

Passo 2: *Divida por Δx para formar o* ***quociente das diferenças***

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

e manipule-o de modo a preparar o caminho para o cálculo de seu limite quando $\Delta x \to 0$. Na maioria dos exemplos e problemas deste capítulo, essa manipulação envolve nada mais que cancelar Δx do numerador e do denominador.

Passo 3: *Calcule o limite do quociente das diferenças quando $\Delta x \to 0$. Se o Passo 2 atingiu seu propósito, só uma simples inspeção é necessária aqui.*

Ainda neste capítulo, o autor diz que o conceito de derivada está relacionado com o problema de calcular a velocidade de um objeto móvel. Foi por este motivo que Newton utilizou o cálculo como sendo um instrumento essencial para os seus estudos. Além disso, tal conceito é importante em muitos campos de estudo, incluindo as ciências biológicas e sociais, especialmente a economia. Apresentaremos o Exemplo 2.24, retirado do livro de Simmons (1996).

Exemplo 2.24. *Considere um objeto em queda livre, digamos uma pedra largada da borda de um penhasco a 122,5 m de altura (Figura 2.11). Sabe-se, por muitos experimentos, que essa pedra estará a uma distância s,*

$$s = 4,9t^2, \tag{2.8}$$

metros em t segundos. Vemos que quando $t = 5$, $s = 122,5$. *A pedra, portanto, atinge o solo 5 segundos após ter começado a cair, e a Fórmula (2.8) é válida somente para* $0 \leq t \leq 5$.

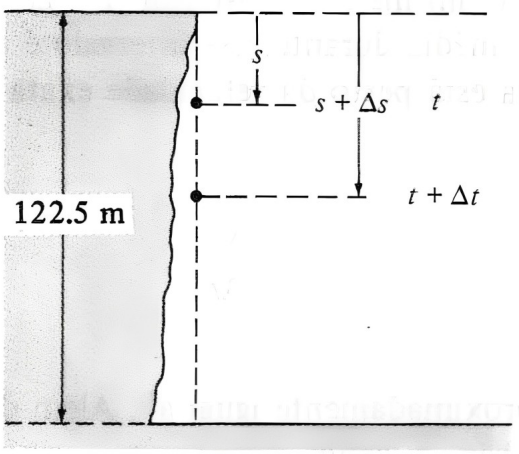


Figura 2.23: Figura sem legenda apresentada no livro Simmons (1996), página 87.
Fonte: Simmons (1996).

A função posição para a pedra em queda livre, $f(t) = 4,9t^2$, *diz que, no primeiro segundo depois que a pedra é largada, ela cai* $f(1) = 4,9$ *m; nos primeiros 2 segundos* $f(2) = 19,6$ *m; nos primeiros 3 segundos* $f(3) = 44,1$ *m; e assim por diante. As velocidades médias, durante cada um dos 3 primeiros segundos, são, portanto,*

$$\frac{4,9}{1} = 4,9 \text{ m/s}, \quad \frac{19,6 - 4,9}{1} = 14,7 \text{ m/s} \quad e \quad \frac{44,1 - 19,6}{1} = 24,5 \text{ m/s}.$$

A pedra, é claro, está caindo cada vez mais rapidamente, mas a questão de exatamente quão rápido está caindo em qualquer instante dado ainda não está respondida.

Para achar a velocidade v da pedra num dado instante t, fazemos o seguinte: no intervalo de tempo de amplitude Δt, *entre t e um instante posterior* $t + \Delta t$, *a pedra cai uma distância* Δx *(veja a Figura 2.23). A velocidade média durante esse intervalo é o quociente* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. *Quando* Δt *é pequeno, essa velocidade média está perto da velocidade exata v no começo do intervalo, isto é,*

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Além disso, quanto menor Δt, *torna-se cada vez melhor essa aproximação, e assim temos*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.9}$$

Uma observação válida é que a Equação (2.9) pode ser reconhecida como a *definição* de velocidade instantânea. Assim, o limite na Equação (2.9) é a derivada ds/dt. Simmons (1996) explica com detalhes na Equação (2.10).

$$\begin{aligned} v = \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4,9(t + \Delta t)^2 - 4,9t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 9,8t + 4,9\Delta t = 9,8t. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Essa fórmula diz-nos que a velocidade da pedra após 1, 2 e 3 segundos de queda é 9,8, 19,6 e 29,4 m/s, e também que a pedra atinge o solo a 49 m/s. Notamos que a velocidade cresce de 9,8 m/s durante cada segundo de queda. Esse fato é usualmente expresso dizendo-se que a aceleração da pedra é 9,8 metros por segundo por segundo (m/s^2).

Ao iniciar o capítulo "a derivada de uma função", Simmons (1996) cita que o cálculo é usualmente dividido em duas partes principais, ou seja, cálculo diferencial e cálculo integral.

Nesta seção trouxemos as noções intuitivas de derivada com algumas aplicações. A seguir, exploraremos intuitivamente, nos livros escolhidos para análise, o conceito do cálculo integral.

2.3 Noções intuitivas de integral definida

Agora iremos abordar as "noções intuitivas de integral definida" apresentadas nos livros de Flemming e Gonçalves (2006), Simmons (1996), Thomas (2012), Hoffmann et al. (2018) e Stewart (2021). Um detalhe observado nos livros, foi que os autores Simmons (1996), Hoffmann et al. (2018) e Flemming e Gonçalves (2006) abordam integral indefinida antes do conceito de integral definida, mas por conta das atividades que iremos propor com o *software Tracker*, neste estudo focaremos na análise dos conceitos da integral definida. Antes de relatar como cada livro apresenta intuitivamente os conceitos de integral definida, falaremos sobre o que possuem em comum: o *problema da área*.

O *problema da área* foi muito interessante para os gregos da antiguidade, pois eles dominavam o assunto quando tratavam de quadrados, triângulos e outras figuras com lados retos, conseguindo encontrar a área dessas figuras geométricas. Porém, Simmons (1996) afirma que, ao se tratar de figuras com fronteiras curvas, os povos antigos tinham uma certa dificuldade para alcançar resultados nos cálculos matemáticos, o que originou o *problema da área*. Começaram a investigar e tentar métodos para solucionar este dilema.

A seguinte frase de Hoffmann et al. (2018) nos permite refletir sobre como atacar o problema:

> "Quando estiver diante de um problema desconhecido procure relacioná-lo com um problema conhecido" - Hoffmann et al. (2018).

Dessa forma, antigamente começaram a utilizar área de figuras já conhecidas, como o quadrado e triângulo, para encontrar áreas de figuras com fronteiras curvas. De acordo com Simmons (1996), uma das técnicas utilizadas foi a de Arquimedes, nomeada como o *método da exaustão*, usada para calcular área de figuras curvas, por exemplo, que possuem uma parábola como parte de sua fronteira, além de algumas outras figuras geométricas particulares. A seguir, iremos apresentar uma solução que os antigos encontraram ao estudarem o mencionado problema.

Ao pensarmos em área de figuras com lados retos, fica simples encontrar a área da região de interesse, por exemplo o retângulo cuja a área é definida como o produto do comprimento pela largura. O mesmo acontece com a área de um triângulo que é definida pela base vezes a altura dividida por dois. Outro caso é do polígono que pode ser encontrado dividindo a figura em triângulos e somando as áreas encontradas para obter a área total da região, veja a Figura 2.24.

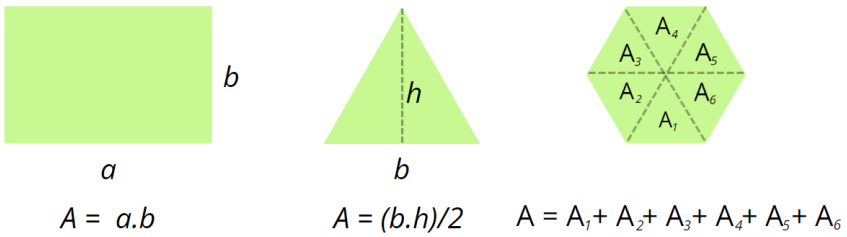


Figura 2.24: Área de polígonos.
Fonte: A autora.

O problema estava em encontrar a área de uma região com lados curvos, assim, o procedimento mais utilizado nos tempos antigos foi o *método da exaustão*, que consiste aproximar a área procurada por figuras em que as áreas possam ser calculadas pela geometria elementar. A Figura 2.25 apresenta um exemplo do mencionado problema: deseja-se calcular a área da região R, delimitada por uma função f não-negativa e contínua e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

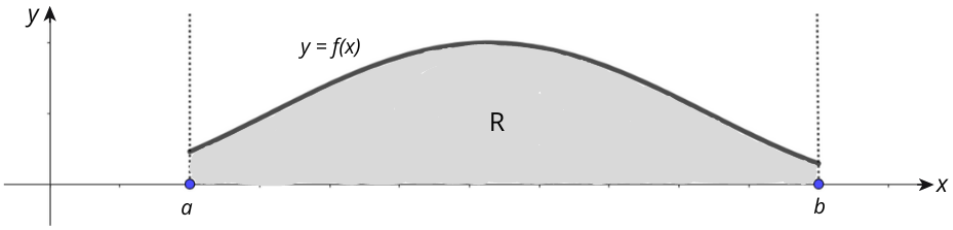


Figura 2.25: Área da região R.
Fonte: A autora.

No caso da Figura 2.25 podemos não saber calcular a área da região R, mas se aproximarmos R por regiões retangulares, como na Figura 2.26, percebemos que é possível calcular o valor aproximado da área sob a curva $y = f(x)$ somando todas as áreas dos retângulos.

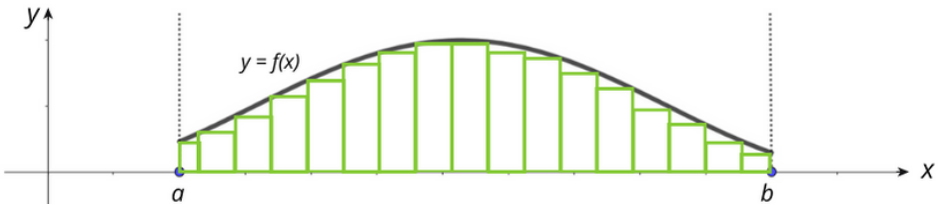


Figura 2.26: Dividir R em regiões retangulares.
Fonte: A autora.

Simmons (1996) enuncia em seu livro "Cálculo com geometria analítica" o problema anterior da seguinte forma:

> "Seja $y = f(x)$ função não-negativa definida num intervalo fechado $a \leq b$, conforme a Figura 2.25. Calcular a área da região sombreada na figura, isto é, a área da região sob o gráfico acima do eixo x e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$".

Podemos fazer uma aproximação da área utilizando o *método da exaustão*, para isso, divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos do mesmo tamanho. Após, construa retângulos cujas bases são esses subintervalos e com altura máxima que fique sob a curva e anote a soma das áreas desses retângulos. Logo, a soma das áreas dos retângulos é uma aproximação da região R, sendo que quanto maior o número de subintervalos, melhor será a aproximação. Por fim, calcule a área exata sob o gráfico achando o valor-limite o qual tende a soma aproximada da área sob a curva quando n tende a infinito. Assim, denotando por S_n a área do n-ésimo retângulo,

$$R = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

A Figura 2.27 sugere o efeito deste procedimento.

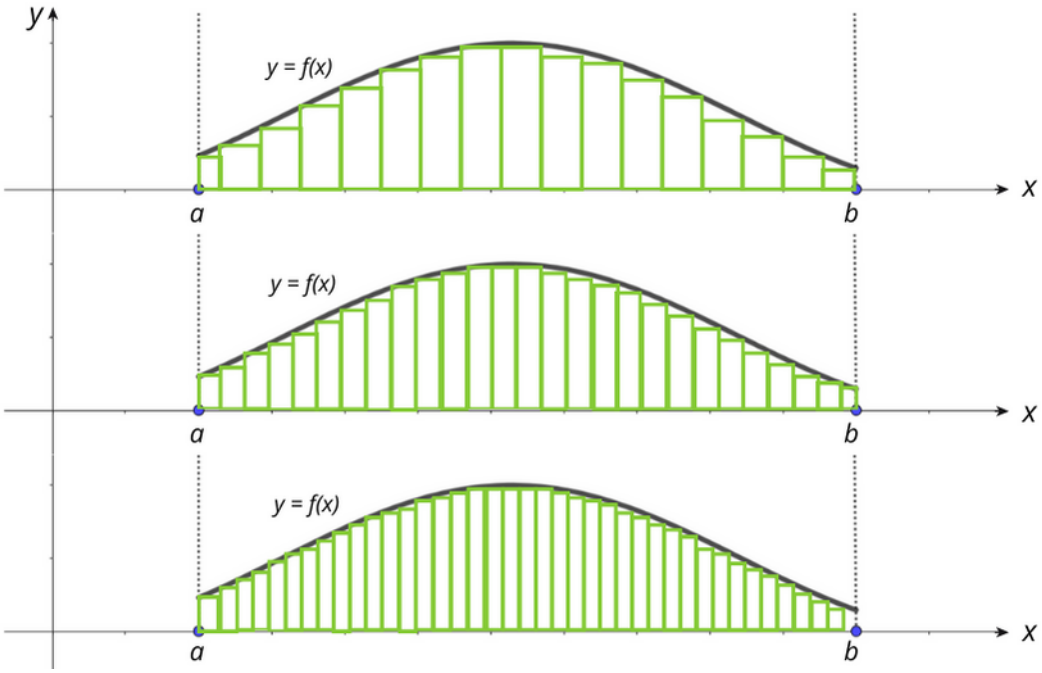


Figura 2.27: Efeito do método da exaustão.
Fonte: A autora.

De modo geral, todos os livros estudados denotam a área de uma região do tipo mostrado na Figura 2.25 pelo simbolo-padrão a seguir:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Com algumas poucas variações, os livros estudados definem a integral definida de uma função f (não precisa ser não-negativa) entre a e b como faz Stewart (2021), confira a Definição 2.25.

Definição 2.25. Se f é uma função contínua definida em $a \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0(= a)$, $x_1, x_2, \cdots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \cdots, \overset{*}{x}_n$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que $\overset{*}{x}_i$ esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overset{*}{x}_i)\Delta x,$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

O Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 2.26) é a importante conexão entre a derivação e integração, o qual permite resolvermos, de forma unificada, problemas que envolvem áreas e taxas de variação.

Teorema 2.26 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.*

1. *Se $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, então $g'(x) = f(x)$;*
2. $g(x) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, *onde F é qualquer primitiva/antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.*

Hoffmann et al. (2018), elaboram alguns exemplos de aplicação e propõem problemas variados nas áreas de economia e finanças, ciências sociais e biológicas, entre outros. Apresentam o conceito de integral definida com o problema da área, o qual discutimos anteriormente. O Exemplo 2.27 foi retirado de Hoffmann et al. (2018):

Exemplo 2.27. *Um corretor de imóveis está interessado em avaliar um terreno com 100 metros de largura, limitado por ruas em três lados e por um rio no quarto lado. O corretor verifica que, em um sistema de coordenadas no qual as ruas são representadas pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$, o rio é descrito pela curva $y = x^3 + 1$, em que x e y são medidos em centenas de metros (veja a Figura 2.28). Se o corretor estima que o preço do metro quadrado de terra na região é R$12,00, quanto vale o terreno?*

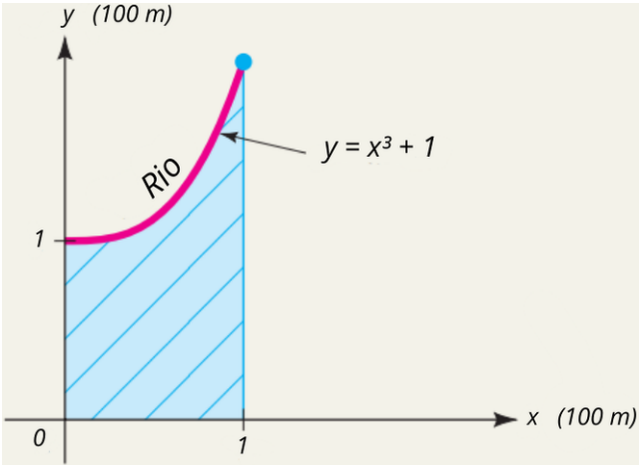


Figura 2.28: Determinando o valor da terra ao encontrar a área sob uma curva.
Fonte: Adaptado de Hoffmann et al. (2010).

Solução: A área do terreno é dada pela integral definida

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\, dx.$$

Como uma das antiderivadas de $f(x) = x^3 + 1$ *é* $F(x) = x^4/4 + x$*, o teorema fundamental do cálculo nos diz que*

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\, dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + x\right)\Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{4}(1)^4 + 1\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 + 0\right] = \frac{5}{4}.$$

Como x *e* y *estão em centenas de metros, a área total é*

$$\frac{5}{4} \cdot 100 \cdot 100 = 12.500 \ \ m^2$$

e, como preço da terra é $R\$12,00$ *o metro quadrado, o valor do terreno é*

$$V = (R\$12,00/\ m^2)(12.500\ m^2) = R\$150.000,00.$$

Além da aplicação sobre áreas, os autores trazem nos livros analisados o conceito de integral aplicada em outras situações, por exemplo, velocidade. A seguir iremos discutir e apresentar alguns exemplos de Stewart (2021), Flemming e Gonçalves (2006), Thomas (2012) e Simmons (1996) que abordam outras aplicações sobre integral.

O autor Stewart (2021), explica sobre o *problema da área* e o *problema da distância*. Dando foco ao problema da distância, Stewart (2021) propõe encontrar a distância percorrida de um objeto durante um período de tempo, sendo sua velocidade conhecida em todos os instantes. Com isso, comenta que esse é o problema inverso ao problema da velocidade que discutimos na seção "Noções intuitivas de limite". Se a velocidade permanece constante, então o problema de distância é fácil de resolver por meio da fórmula:

$$\textit{distância} = \textit{velocidade} \cdot \textit{tempo}.$$

Porém, se a velocidade estiver variando, fica difícil determinar a distância percorrida. Confira o Exemplo 2.28, que aborda o problema da distância.

Exemplo 2.28. *Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:*

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Tabela 2.12: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 333.

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo (1 km/h = 1000/3600 m/s):

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Tabela 2.13: Tabela sem legenda apresentada no livro de Stewart (2021), página 333.

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante.

Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7,5\ m/s \cdot 5\ s = 37,5\ m.$$

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando $t = 5\ s$. Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5\ s$ até $t = 10\ s$ é

$$9,4\ m/s \cdot 5\ s = 47\ m.$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7,5 \cdot 5) + (9,4 \cdot 5) + (10,6 \cdot 5) + (12,8 \cdot 5) + (14,2 \cdot 5) + (13,9 \cdot 5) = 342\ m.$$

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no `fim` *de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então, nossa estimativa se torna*

$$(9,4 \cdot 5) + (10,6 \cdot 5) + (12,8 \cdot 5) + (14,2 \cdot 5) + (13,9 \cdot 5) + (12,5 \cdot 5) = 367\ m.$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

As autoras Flemming e Gonçalves (2006), também apresentam em seu livro o problema da área. Além disso, abordam o cálculo da distância, o qual exibiremos o Exemplo 2.29. Após este exemplo, as autoras discutem sobre integral definida conceitualmente.

Exemplo 2.29. *Podemos citar a distância percorrida por um móvel durante 10 segundos. A cada 2 segundos a distância é registrada. Na Tabela 2.14 apresentamos os dados obtidos.*

Tempo (segundos)	0	2	4	6	8	10
Velocidade (metros/segundo)	22	78	126	166	198	222

Tabela 2.14: Tabela sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 258.

Para fazer uma estimativa da distância percorrida nos primeiros dois segundos, podemos considerar neste período de tempo a velocidade como uma constante igual a 22 m/seg. Assim, a distância percorrida nos dois primeiros segundos é igual a:

$$22\ m/seg \cdot 2\ seg = 44\ metros.$$

Analogamente, durante o intervalo de tempo de 2 a 4 segundos, podemos considerar a velocidade constante igual a 78 m/seg e então a distância percorrida é de:

$$78\ m/seg \cdot 2\ seg = 156\ metros.$$

Se somarmos todas as estimativas, vamos ter a distância total de forma aproximada:

$$22 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 126 \cdot 2 + 166 \cdot 2 + 198 \cdot 2 + 222 \cdot 2 = 1.624\ metros.$$

Esses cálculos podem ser visualizados graficamente na Figura 2.29.

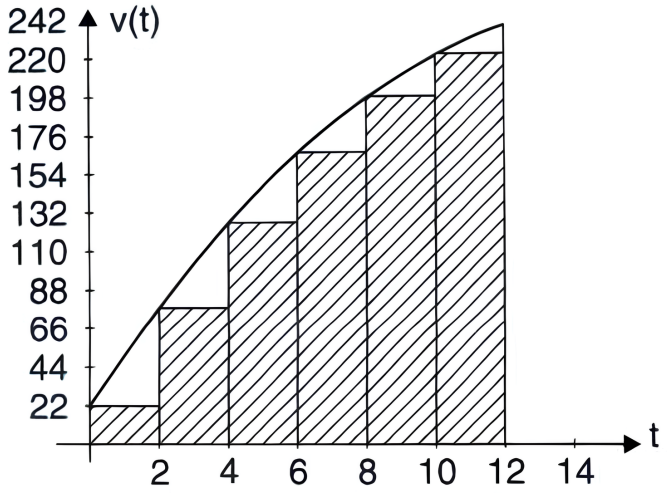


Figura 2.29: Figura sem legenda apresentada no livro Flemming e Gonçalves (2006), página 259.

Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

Podemos melhorar a nossa estimativa obtendo os valores da velocidade em intervalos de tempo menores (ver Tabela 2.15). Por exemplo, na Figura 2.30 mostramos a análise para intervalos de segundo a segundo.

Tempo (seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Velocidade (m/seg)	22	51	78	103	126	147	166	183	198	211	222	231

Tabela 2.15: Tabela sem legenda apresentada no livro de Flemming e Gonçalves (2006), página 259.

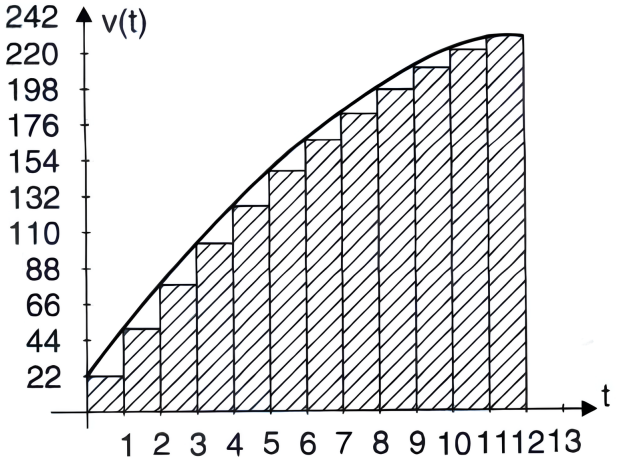


Figura 2.30: Figura sem legenda apresentada no livro Flemming e Gonçalves (2006), página 259.

Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

Para o conjunto de informações dadas na Figura 2.30 vamos ter o espaço percorrido pelo móvel estimado em:

$$22 + 51 + 78 + 103 + 126 + 147 + 166 + 183 + 198 + 211 + 222 + 231 = 1.738 \text{ } \textit{metros.}$$

O autor Thomas (2012) discute sobre a "área e estimativa com somas finitas", dando exemplos para introduzir o conceito de integral definida. Nesse contexto, apresenta o Exemplo 2.30 que exibe o cálculo do deslocamento e distância percorrida de um corpo.

Exemplo 2.30. *Nas seções anteriores, analisamos o movimento de uma pedra pesada, que é arremessada para cima por uma explosão de dinamite. Nesse exemplo, determinamos que a velocidade da pedra em qualquer momento durante o seu deslocamento é de* $v(t) = 160 - 32t$ *pés/s. A pedra estava a 256 pés acima do solo 2 segundos após a explosão, continuou em ascendência para atingir uma altura máxima de 400 pés 5 segundos após a explosão e, em seguida, iniciou a descida para alcançar a altura de 256 pés novamente em* $t = 8$ *s após a explosão (Veja a Figura 2.31).*

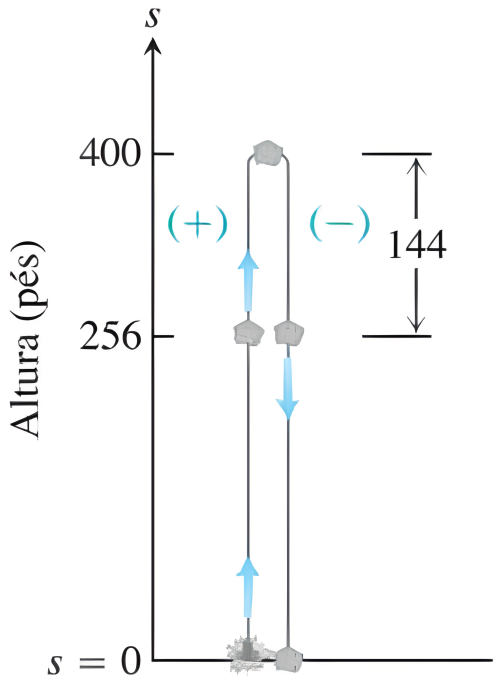


Figura 2.31: $[\cdots]$ A altura de 256 pés é alcançada em $t = 2$ s e $t = 8$ s. A pedra cai 144 pés da altura máxima quando $t = 8$.

Fonte: Thomas (2012).

Subdividimos o intervalo $[0, 8]$ *em dezesseis subintervalos de comprimento* $\Delta t = 1/2$ *e consideramos a extremidade direita de cada subintervalo em nossos cálculos. A Tabela 2.16 mostra os valores da função velocidade nessas extremidades.*

Função velocidade

t	**v(t)**	**t**	**v(t)**
0	160	4,5	16
0,5	144	5,0	0
1,0	128	5,5	-16
1,5	112	6,0	-32
2,0	96	6,5	-48
2,5	80	7,0	-64
3,0	64	7,5	-80
3,5	48	8,0	-96
4,0	32		

Tabela 2.16: Tabela sem legenda apresentada no livro de Thomas (2012), página 290.

Usando $v(t)$ no processo somatório, estimamos o deslocamento em $t = 8$:

$$(144 + 128 + 112 + 96 + 80 + 64 + 48 + 32 + 16 + 0 - 16 - 32 - 48 - 64 - 80 - 96) \cdot \frac{1}{2} = 192.$$

Magnitude do erro = 256 - 192 = 64.

Usando $|v(t)|$ no processo somatório, calculamos a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[0, 8]$:

$$(144 + 128 + 112 + 96 + 80 + 64 + 48 + 32 + 16 + 0 + 16 + 32 + 48 + 64 + 80 + 96) \cdot \frac{1}{2} = 528.$$

Magnitude do erro = 544 - 528 = 16.

Se considerarmos mais e mais subintervalos de $[0, 8]$ em nossos cálculos, as estimativas para 256 pés e 544 pés melhoram, aproximando seus valores reais.

Diferente dos outros autores, Simmons (1996) aborda inicialmente a integral definida apenas com exemplos de cálculos matemáticos, sem apresentá-los com aplicações intuitivas. Porém, mais adiante, o autor exibe um capítulo em seu livro com várias aplicações de integral. Segue o Exemplo 2.31, que Simmons (1996) discute sobre *trabalho* no capítulo de aplicações.

Exemplo 2.31. *Uma certa mola tem um comprimento natural de 16 cm. Quando ela é esticada x cm além do seu comprimento natural, a* `Lei de Hooke` *estabelece que a mola faz retroceder com uma força de restituição de $F = kx$ dinas, onde k é uma constante. A constante de proporcionalidade k chama-se* `constante da mola` *e pode ser encarada como uma medida da inflexibilidade da mola. Para a mola em discussão, 8 d de força são necessárias para mantê-la esticada 2 cm. Quanto trabalho é realizado para esticar essa mola de seu comprimento natural para um comprimento de 24 cm?*

Solução: Primeiro, o fato de que $F = 8$ quando $x = 2$ permite-nos determinar k. Temos $8 = K \cdot 2$ logo $k = 4$ e $F = 4x$. Para tornar claras nossas ideias, desenhamos a mol a em sua condição não-esticada e também após ter sido esticada x cm (Figura 2.32).

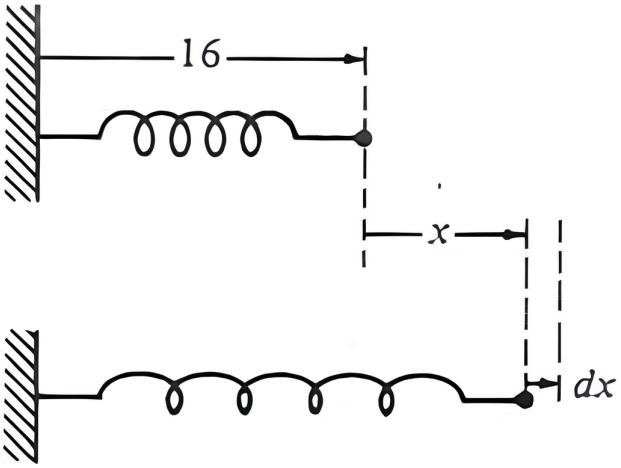


Figura 2.32: Figura sem legenda apresentada no livro Simmons (1996), página 334.
Fonte: Simmons (1996).

Agora, se imaginamos que a mola é esticada um comprimento adicional muito pequeno dx, então a força varia muito pouco nesse incremento de distância e pode ser tratada como essencialmente constante. O trabalho realizado pela força de tração da mola nesse incremento de distância é

$$dW{=}F\ dx = 4x\ dx,$$

e o trabalho total realizado durante esse processo completo de esticamento é

$$W = \int dW = \int F\ dx = \int_0^8 4x\ dx = 2x^2\Big|_0^8 = 128\ d,$$

pois x aumenta de 0 à 8 quando o comprimento da mola aumenta de 16 à 24.

2.4 Noções intuitivas de cálculo com vídeo-análise

Nos livros de Cálculo Diferencial e Integral que foram apresentados neste capítulo, alguns autores buscam exibir os conceitos através de exemplos com aplicações. Mesmo assim, muitos alunos possuem dificuldades com as interpretações dos conceitos teóricos por conta da linguagem usada nos livros didáticos. Por conta das adversidades encontradas pelos estudantes no ensino de cálculo, buscamos propor no presente estudo um material didático-pedagógico que auxiliará os alunos na visualização dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Com isso será proposta a criação de sequências de atividades práticas com o apoio dos *softwares Tracker* e Geogebra. Nas sequências de atividades serão apresentados exemplos de situações práticas realizadas no cotidiano dos alunos que serão relacionadas com conceitos da disciplina.

Os *softwares Tracker* e Geogebra serão utilizados para explorar aplicações de Cálculo Diferencial e Integral. O *Tracker* será usado para fazer a vídeo-análise de eventos físicos e o Geogebra para modelar os dados coletados. Com isso, os alunos poderão manipular as ferramentas dos *softwares* e modelar os dados coletados, visualizando os conceitos da disciplina de forma prática, como será exibido nos próximos capítulos.

3 Formalismo matemático

No desenvolvimento deste capítulo, utilizamos os livros dos autores Ávila (2006), Lima (1976), Boulos (1974), Flemming e Gonçalves (2006), Stewart (2021) e Táboas (2008) para apresentar os conceitos de limite, derivada e integral, de modo mais formal. Isso tornará esta dissertação mais completa, pois, embora o foco principal seja a abordagem intuitiva dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, a formalização desses conceitos é uma etapa fundamental do processo de aprendizagem após a compreensão intuitiva.

3.1 Limites

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes sobre limites que são base matemática para o nosso trabalho, como a própria definição de limite e suas propriedades, teorema da comparação e do confronto, continuidade e consequências. Começaremos explicando o conceito de ponto de acumulação, que é essencial na definição de limite, pois garante que podemos aproximar arbitrariamente de um valor em um domínio sem depender da presença do próprio valor no domínio da função.

Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ quando para todo $\epsilon > 0$ obtemos $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (B-a) \neq \varnothing$. Se $a \in B$ não é ponto de acumulação de B, dizemos que a é um ponto isolado de B. Isso significa que existe $\epsilon > 0$ tal que a é o único ponto de B no intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Precisamente,

Definição 3.1. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $B \subset \mathbb{R}$ se todo intervalo aberto $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, de centro em a, contém um ponto $x \in B$ tal que $x \neq a$.

A próxima definição é a formalização do conceito de limite de uma função, ela representa a ideia de pontos próximos de a que são levados por f em pontos próximos de l.

Definição 3.2. Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação do conjunto B. Dizemos que o limite de f quando x tende a a é igual a $l \in \mathbb{R}$, quando a seguinte condição é satisfeita:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Para notação usamos $\lim_{x \to a} f(x) = l$, mas também é comum escrever $f(x) \to l$, conforme $x \to a$.

A partir da notação $\lim_{x \to a} f(x) = l$, já pressupomos que a é ponto de acumulação de B, dada a função $f : B \to \mathbb{R}$. Mesmo que este fato não esteja mencionado, não dispensamos

que a seja ponto de acumulação de B, pois a Definição 3.2 garante a condição de existir $x \in B$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

O resultado a seguir estabelece uma das principais propriedades do limite de uma função. Ele afirma que uma função não possui dois limites distintos no mesmo ponto, ou seja, se o limite existe é único. Faremos a demonstração deste fato em seguida.

Teorema 3.3 (Unicidade do limite)**.** *Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de B. Suponhamos que exista o $\lim_{x\to a} f(x)$, então ele é único.*

Demonstração. Sejam $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$. Assim, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomemos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, se $x \in B$ e $0 < |x - a| < \delta$:
$0 \leq |l_1 - l_2| = |l_1 + 0 - l_2| = |l_1 + f(x) - f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Portanto, $0 \leq |l_1 - l_2| < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, assim $|l_1 - l_2| = 0$. Com isso temos que $l_1 = l_2$. □

Apresentaremos algumas propriedades dos limites enunciadas e demonstradas no Teorema 3.4. Essas propriedades também podem ser conhecidas da seguinte forma:

- O limite da soma é a soma dos limites.
- O limite de um produto é o produto dos limites.
- O limite de um quociente é o quociente dos limites (com a condição de que o limite do denominador seja diferente de zero).

Teorema 3.4. *Considere $f, g : B \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim_{x\to a} g(x) = m$, então*

1. $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l + m$,
2. $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$,
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, *se* $m \neq 0$.

Demonstração. 1. Temos por hipótese, que dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Então,

$x \in B,\ 0 \leq |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (l + m)| = |f(x) - l + g(x) - m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

2. (I) Queremos demonstrar que $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = l\cdot m$. Isso equivale a $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) - l\cdot m = 0$.

   Tomemos $k = max\{|l|, |m|\}$ e suponhamos $k > 0$, ou seja, $l \neq 0$ ou $m \neq 0$.

   Note que:

   $$\begin{aligned}
   &f(x)\cdot g(x) - l\cdot m\\
   &= f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot m + f(x)\cdot m - g(x)\cdot l + g(x)\cdot l + l\cdot m - l\cdot m - l\cdot m\\
   &= f(x)\cdot g(x) + l\cdot(g(x) - m) + m\cdot(f(x) - l) - f(x)\cdot m - g(x)\cdot l + l\cdot m\\
   &= f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot m - g(x)\cdot l + l\cdot m + l\cdot(g(x) - m) + m(f(x) - l)\\
   &= (f(x) - l)\cdot(g(x) - m) + l\cdot(g(x) - m) + m(f(x) - l).
   \end{aligned}$$

   Dado $\epsilon > 0$ e tomemos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

   $$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3k}\right\},$$

   e

   $$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3k}\right\}.$$

   Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, então para $x \in B$, $0 < |x - a| < \delta$:

   $|f(x)\cdot g(x) - l\cdot m| \leq |f(x) - l|\cdot|g(x) - m| + k\cdot|g(x) - m| + k\cdot|f(x) - l| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\cdot\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} + k\cdot\frac{\epsilon}{3k} + k\cdot\frac{\epsilon}{3k} = \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right)^2 + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{3\epsilon}{3} = \epsilon.$

   Além disso, iremos provar para o caso $l = m = 0$, assim:

   (II) Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Queremos provar que $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = l\cdot m = 0$.

   Dado ϵ e tomemos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

   $$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 0| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |f(x)| < \sqrt{\epsilon}$$

   e

   $$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - 0| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |g(x)| < \sqrt{\epsilon}.$$

   Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Então, para $x \in B$ com $0 < |x - a| < \delta$, temos:

   $|f(x)\cdot g(x) - 0| = |f(x)\cdot g(x)| < \sqrt{\epsilon}\cdot\sqrt{\epsilon} = (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon.$

   Por (I) e (II), temos que $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = l\cdot m$.

3. Agora queremos provar que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $m \neq 0$. Para isso, basta mostrar que $\frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{m}$, conforme $x \to a$ e, depois, usar o item (2) desta propriedade.

   Como $\lim_{x\to a} g(x) = m$, para $\epsilon = \frac{|m|}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

   $$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}.$$

Nessas condições, note que:

$$|m| = |m - g(x) + g(x)| \leq |m - g(x)| + |g(x)| = |g(x) - m| + |g(x)| < \frac{|m|}{2} + |g(x)|.$$

O que implica:

$$|m| < \frac{|m|}{2} + |g(x)| \Rightarrow |g(x)| > \frac{|m|}{2}.$$

Ou seja:

$$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{|mg(x)|} = \frac{1}{|m||g(x)|} < \frac{1}{|m|} \cdot \frac{2}{|m|} = \frac{2}{|m|^2}. \tag{3.1}$$

Também, como $\lim_{x \to a} g(x) = m$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{|m|^2}{2}.\epsilon,\ \forall \epsilon > 0. \tag{3.2}$$

Usando as Equações (3.1) e (3.2), tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, para $x \in B,\ 0 < |x - a| < \delta$, temos:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|mg(x)|} < \frac{2}{|m|^2} \cdot \frac{|m|^2}{2} \cdot \epsilon = \epsilon,\ \forall \epsilon > 0.$$

Portanto, provamos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \epsilon.$$

Assim, $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

Agora, usando o item (2), segue que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = l \cdot \frac{1}{m} = \frac{l}{m}$. □

Os Teoremas 3.5 e 3.6 fornecem duas propriedades adicionais dos limites, segue seus respectivos enunciados e demonstrações.

Teorema 3.5 (Teorema da Comparação)**.** *Sejam $f, g : B \to \mathbb{R}$ com $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in B$. Se existem $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Demonstração. Considere $\lim_{x \to a} f(x) = l$ e $\lim_{x \to a} g(x) = m$.

Suponhamos por absurdo que

$$\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x).$$

Considere $k = l - m$. Então,

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = k > 0.$$

Tome $\epsilon = \frac{k}{2}$, pela Definição 3.2 existe um $\delta > 0$ tal que, se $x \in B$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - g(x) - k| < \frac{k}{2}$, logo $-\frac{k}{2} < f(x) - g(x) - k < \frac{k}{2}$.

Com isso, temos que $0 < \frac{k}{2} < f(x) - g(x)$, o que resulta em um absurdo, visto que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in B$. □

Teorema 3.6 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam* $f, g, h : B \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

para todo $x \in B$*. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$*, então* $\lim_{x\to a} g(x) = l$*.*

Demonstração. Como $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - l| < \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$$

Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Então,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon,$$

ou seja,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon \Rightarrow |g(x) - l| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{x\to a} g(x) = l$. □

Usaremos agora o Teorema do Confronto para calcular um limite especial, conhecido como um dos limites fundamentais.

Exemplo 3.7. Provemos que $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Vamos recorrer ao Ciclo Trigonométrico. Observe a construção apresentada na Figura 3.1.

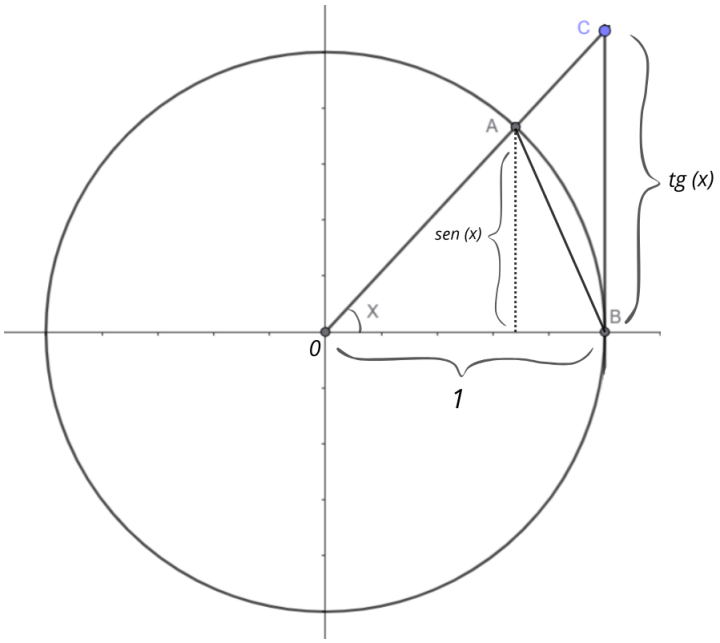


Figura 3.1: Ciclo Trigonométrico.
Fonte: A autora.

Denote a área do setor circular OAB por L, a área do triângulo OAB por M e a área do triângulo OBC por N.

Como o círculo tem raio unitário o arco $\widehat{AB}$ mede x. Com uma simples regra de três, usando a área completa da circunferência, determinamos que a área do setor circular OAB é $L = \frac{x}{2}$.

Perceba que, por construção,

$$M \leq L \leq N.$$

Colocando as áreas:

$$\frac{1 \cdot \operatorname{sen}(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 1 \cdot \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(x) \leq x \leq \operatorname{tg}(x).$$

Nas proximidades de zero, considerando $x \neq 0$, temos $\operatorname{sen}(x) \neq 0$. Então:

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \leq \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1.$$

Como $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = 1$, do Teorema 3.6, segue que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Neste momento, apresentaremos o conceito de limites laterais, referente a pontos de acumulação à esquerda e à direita.

Definição 3.8. Seja $B \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita de B se a for ponto de acumulação de $B \cap (a, +\infty)$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à esquerda de B se a for ponto de acumulação de $B \cap (-\infty, a)$.

Definição 3.9. Considere $f : B \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita de B. Diz-se que $l \in \mathbb{R}$ é o limite lateral à direita de f, quando $x \to a$, se:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B \cap (a, +\infty), \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

A notação usada é $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$.

Definição 3.10. Considere $f : B \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à esquerda de B. Diz-se que $l \in \mathbb{R}$ é o limite lateral à esquerda de f, quando $x \to a$, se:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B \cap (-\infty, a), \quad a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

A notação usada é $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$.

Teorema 3.11. *Considere $f : B \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação bilateral de B. Então $\lim_{x\to a} f(x) = l$ se, e somente se, $\lim_{x\to a^+} f(x) = l = \lim_{x\to a^-} f(x)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$, então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{onde } x \in B. \tag{3.3}$$

Caso $x \to a^+$, temos $x > a$, da Equação (3.3):

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{onde } x \in B \cap (a, +\infty).$$

Caso $x \to a^-$, temos $x < a$, da Equação (3.3):

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{onde } x \in B \cap (-\infty, a).$$

Ou seja, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

($\Leftarrow$) Supondo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, temos que para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in B \cap (a, +\infty), \quad 0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \tag{3.4}$$

e

$$x \in B \cap (-\infty, a), \quad 0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \tag{3.5}$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que:

$$x - a < \delta \text{ e } a - x < \delta \Rightarrow x - a < \delta \text{ e } -\delta < x - a \Rightarrow -\delta < x - a < \delta \Rightarrow |x - a| < \delta.$$

Dessa forma, para todo $\epsilon > 0$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{onde } x \in (B \cap (a, +\infty)) \cap (B \cap (-\infty, a)) = B.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

□

Vamos discutir um pouco sobre continuidade. Antes de tudo, uma condição para a função f ser contínua em a é que $f(a)$ exista. Sabendo disso, podemos dizer que uma função $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in B$ se f levar pontos próximos de a em pontos próximos de $f(a)$, o que leva a Definição 3.12.

Definição 3.12. Dizemos que $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in B$, quando para todo $\epsilon > 0$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$x \in B, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Diferente da Definição 3.2 de limite, na Definição 3.12 não adicionamos nessa sentença a condição "$0 < |x - a|$", pois isso reflete a exigência da existência do valor de $f(a)$, o que não era feito naquele momento.

A seguinte afirmação é uma consequência imediata da Definição 3.12, podemos usá-la quando temos uma função $f : B \to \mathbb{R}$ contínua em um ponto de acumulação $a \in B$. Assim,

"Se $a \in B$ e é ponto de acumulação de B, então

uma função $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$."

Quando um ponto é isolado em um conjunto, não existem pontos próximos o suficiente para influenciar o limite da função nesse local. Essa propriedade simplifica a verificação da continuidade, levando ao resultado do Teorema 3.13.

Teorema 3.13. *Se $a \in B$ não é ponto de acumulação de B, isto é, a é um ponto isolado de B, então qualquer função $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua em a.*

Demonstração. Suponhamos a um ponto isolado de B, então existe $\delta > 0$ tal que $B \cap (a-\delta, a-\delta) = \{a\}$.

Tomemos $\delta > 0$, para qualquer $\epsilon > 0$ podemos supor que $x \in B \cap (a-\delta, a-\delta) = \{a\}$, então temos que $x = a$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ temos

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ qualquer,

$$x \in B, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon.$$

□

Em funções contínuas, podemos observar que o limite quando x se aproxima de a pode ser determinado simplesmente substituindo x por a na função. Precisamente,

Definição 3.14. Dizemos que $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua em um conjunto de $A \subset B$, quando dado $\epsilon > 0$, para cada $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição 3.15. Uma função é dita contínua quando ela é contínua em todo o seu domínio.

Apresentaremos nos exemplos a seguir algumas funções contínuas mais comuns.

Exemplo 3.16. Toda função polinomial é contínua.

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com o domínio sendo $\mathbb{R}$.

Precisamos provar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, uma vez que todo ponto $a \in \mathbb{R}$ é de acumulação de $\mathbb{R}$.

Antes, provemos que $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Para isso basta tomar $\delta = \epsilon$ na definição de limite. Assim, é verdade que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Agora olhemos para $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Usando os itens obtidos do Teorema 3.4:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right] \\
&= a_n \left[\lim_{x\to a} x\right]^n + a_{n-1}\left[\lim_{x\to a} x\right]^{n-1} + \cdots + a_1\left[\lim_{x\to a} x\right] + a_0 \\
&= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$, segue que f é contínua.

Exemplo 3.17. A função $\cos(x)$ é contínua.

Inicialmente, observamos que dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, distintos, temos $|\cos(x_1) - \cos(x_2)| < |x_1 - x_2|$, pois $|x_1 - x_2|$ é o comprimento do arco de extremos x_1 e x_2. Considerando que o comprimento do arco x_1x_2 é maior que o da corda x_1x_2, conforme Figura 3.2. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon$. Então,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\cos(x_1) - \cos(x_2)| < |x_1 - x_2| < \delta = \epsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$, então a função $\cos(x)$ é contínua.

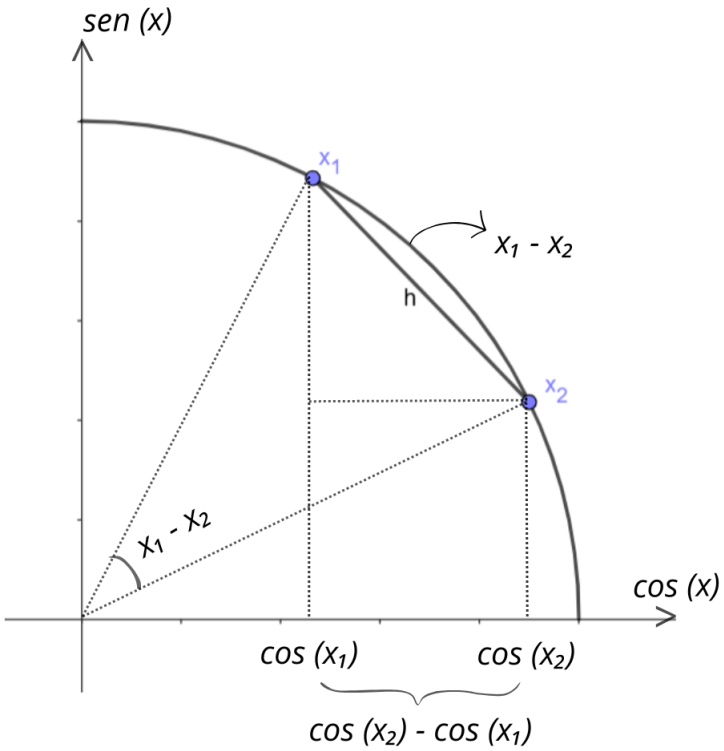


Figura 3.2: Ciclo Trigonométrico. Note que $|x_1 - x_2| > h > |\cos(x_1) - \cos(x_2)|$, onde $x_1 \neq x_2$.

Fonte: A autora.

Exemplo 3.18. A função $\operatorname{sen}(x)$ é contínua.

Assim como no exemplo anterior, observamos que $|\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)| < |x_1 - x_2|$, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, pois $|x_1 - x_2|$ é o comprimento do arco de extremos x_1 e x_2. Considerando que o comprimento do arco x_1x_2 é maior que o da corda x_1x_2, conforme a Figura 3.3. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon$. Assim,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)| < |x_1 - x_2| < \delta = \epsilon.$$

Logo, $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$, então a função $\operatorname{sen}(x)$ é contínua.

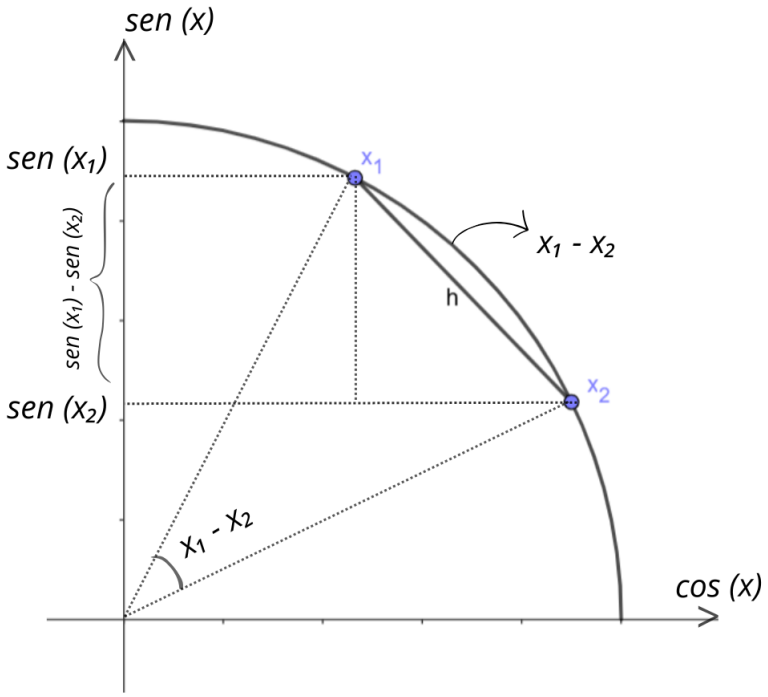


Figura 3.3: Ciclo Trigonométrico. Note que $|x_1 - x_2| > h > |\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)|$, onde $x_1 \neq x_2$.

Fonte: A autora.

Apresentaremos a Proposição 3.19 que aborda continuidade para operações de soma, produto e quociente entre funções contínuas.

Proposição 3.19. *Se $f, g : B \to \mathbb{R}$ são contínuas em um ponto de acumulação $a \in B$, então $f + g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ são contínuas em a, supondo, nesse último caso, $g(a) \neq 0$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que f e g são contínuas em a, que é ponto de acumulação de B, assim, podemos dizer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)$. Com isso, podemos mostrar que:

1. $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)\cdot g(a) = (f\cdot g)(a)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)$.

Por 1, 2 e 3, temos então que $f + g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ são contínuas em $a \in B$. □

Exemplo 3.20. A função $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ é contínua em seu domínio.

Sabemos que $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, sendo $\cos(x) \neq 0$. Assim, usando a Proposição 3.19, temos que $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\operatorname{sen}}{\cos}\right)(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}}{\cos}\right)(a) = \operatorname{tg}(a)$. Logo, temos que a função $\operatorname{tg}(x)$ é contínua em seu domínio.

Além desses exemplos enunciados e provados acima, temos outras funções contínuas mais comuns, em seu domínio, tais como:

- Polinômios;
- Funções racionais;
- Logaritmo;
- Seno;
- Cosseno;
- Tangente;
- Cotangente;
- Secante;
- Cossecante;
- Raíz n-ésima.

A continuidade da composição de funções garante que, se f e g são funções contínuas e $h(x) = f(g(x))$ representa sua composição, então $h(x)$ também será contínua. Confira o enunciado e prova do Teorema 3.21, o qual garante que a continuidade se mantém ao compor funções contínuas.

Teorema 3.21 (Continuidade da função composta)**.** *Sejam f e g funções com domínios A e B respectivamente, com $g(B) \subset A$. Se g é contínua em a e f é contínua em $b = g(a)$, então $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a.*

Demonstração. Como g é contínua em a, podemos dizer que dado qualquer $\epsilon^* > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \epsilon^*.$$

Como f é contínua em b, podemos dizer que dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|y - b| < \delta_2 \Rightarrow |f(y) - f(b)| < \epsilon.$$

Em particular, se tomarmos $\epsilon^* < \delta_2$:

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

Portanto, $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a. □

3.2 Derivadas

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes sobre derivadas que são base matemática para o nosso trabalho, como a própria definição de derivada, propriedades, notações, teoremas, entre outros. Dando início a esta seção começaremos explicando sobre o problema da reta tangente em um ponto de uma curva $y = f(x)$, que por fim, sua inclinação será a derivada de f neste ponto.

Tomemos a reta secante passando pelos pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x, f(x))$, sendo Q um ponto deslizante sobre a curva $y = f(x)$ que tende à P. Com isso, a tangente em P pode ser considerada como a posição limite da secante variável, isto é, a reta limite. Por este motivo, dizemos que a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente no ponto (x_0, y_0). Os gráficos da Figura 3.4, apresentam duas curvas como exemplo em que existe a reta tangente.

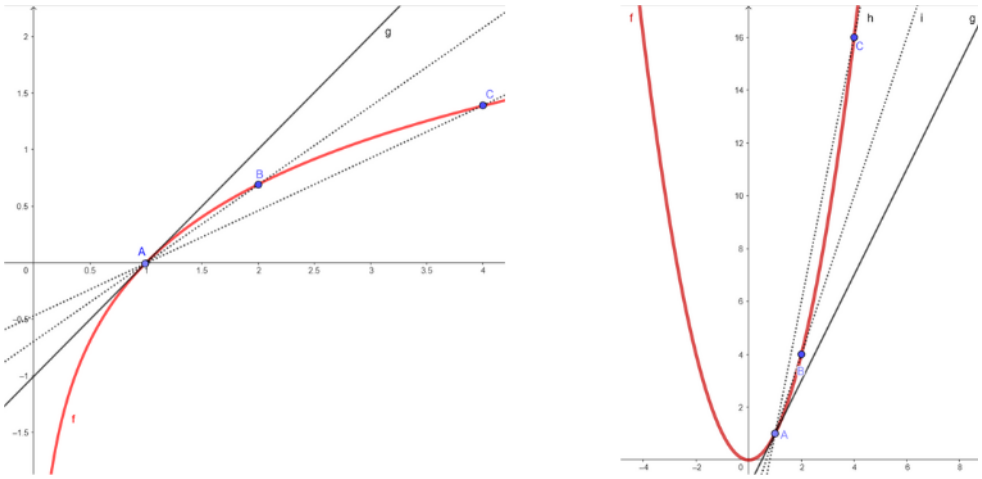


Figura 3.4: Curvas $f(x) = ln(x)$ e $f(x) = x^2$.
Fonte: A autora.

Sejam $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ pontos que pertencem a uma reta secante a curva $y = f(x)$, assim, a equação da reta é:

$$f(x) - f(x_0) = m(x) \cdot (x - x_0),$$

onde o coeficiente angular da reta é:

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando existir a reta limite, podemos dizer que existe o limite dos coeficientes angulares, sendo $x \to x_0$ logo $\lim_{x \to x_0} m(x) = m_0$. Assim, a reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e que possui o coeficiente angular m_0, será a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$. Pela Definição 3.22, temos que o coeficiente angular m_0 é a derivada de f em x_0.

Definição 3.22. Considere $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de B. Dizemos que f é diferenciável em a quando existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Neste caso, o número real $f'(a)$ é denominado derivada de f no ponto a. Outras notações comuns são $\dot{f} = (a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, e $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$.

Uma observação válida é que, para funções com uma única variável real, os termos derivável e diferenciável são sinônimos e os utilizaremos sem distinção. Podemos, de forma equivalente, escrever o limite da Definição 3.22 como sendo:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Para definir quando uma função f é diferenciável em um conjunto, analisamos a existência da sua derivada em cada ponto desse domínio, como apresenta a Definição 3.23.

Definição 3.23. Seja $f : B \to \mathbb{R}$ onde todo ponto de B é de acumulação. Se f é diferenciável em todo ponto $x \in B$, dizemos simplesmente que f é diferenciável.

Os próximos exemplos ilustram a aplicação da Definição 3.22 para calcular a derivada de diferentes funções.

Exemplo 3.24. Se $f(x) = c$ é constante, então $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
De fato, dado $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0.$$

Portanto, o cálculo mostra que $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.25. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \{1, 2, 3, \cdots\}, \forall x \in \mathbb{R}$.
De fato, usando a Definição 3.22 com a segunda notação, temos que:

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Para expandir $(x+h)^n$, aplicaremos o Teorema Binomial, ou seja,

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + h^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \cdots + h^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot 0 + \cdots + 0^{n-1} = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.26. $\text{sen}'(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

De fato, usando a Definição 3.22 com a segunda notação, temos que:

$$\begin{aligned}
\text{sen}'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h) + \text{sen}(h)\cdot\cos(x) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot(\cos(h)-1) + \text{sen}(h)\cdot\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)\cdot\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \text{sen}(x)\cdot\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}
\end{aligned}$$

Do Exemplo 3.7, sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$. Também, note que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$, pois

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\cdot\left(\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\right)\right] = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{(\cos(h)+1)} = 1\left(\frac{0}{1+1}\right) = 1\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\text{sen}'(x) = \text{sen}(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) = 0 + \cos(x) = \cos(x).$$

Exemplo 3.27. $\cos'(x) = -\text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

De fato, usando a Definição 3.22 com a segunda notação, temos que:

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cdot\cos(h) - \text{sen}(x)\cdot\text{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cdot(\cos(h)-1) - \text{sen}(x)\cdot\text{sen}(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cdot(\cos(h)-1)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x)\cdot\text{sen}(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h} \\
&= \cos(x)\cdot 0 - 1\cdot\text{sen}(x) = 0 - \text{sen}(x) = -\text{sen}(x).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.28. $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

Antes das contas, vamos contextualizar este exemplo: $\ln(x)$ denota o logaritmo de x na base e, ou seja,

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

O número e é aproximadamente 2,718281.... Ele é um número irracional e transcendente, chamado de número de Neper. Seu valor pode ser matematicamente definido pelo seguinte limite:

$$e = \lim_{l \to 0} (1 + l)^{\frac{1}{l}}$$

Desse forma, $\ln(x)$ é chamado de logaritmo neperiano de x. Pela própria natureza dos logaritmos, obviamente $\ln(e) = 1$, pois $e^1 = e$.

Calculemos $(\ln(x))'$ agora:

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}.\end{aligned}$$

Denote $k = \dfrac{h}{x}$. Note que quando $h \to 0$, também $k \to 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \lim_{k \to 0} \ln(1+k)^{\frac{1}{kx}} = \lim_{k \to 0} \left[\ln(1+k)^{\frac{1}{k}} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{k \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1+k)^{\frac{1}{k}} \right] = \frac{1}{x} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

A Definição 3.29 de reta tangente é fundamental no cálculo da derivada, pois fornece a interpretação geométrica do conceito. A derivada de uma função em um ponto representa a inclinação da reta tangente, ou seja, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto. A derivada de uma função em um determinado ponto indica o coeficiente angular da reta. Esse conceito permite interpretar a mudança da função localmente e resolver problemas envolvendo crescimento, máximos, mínimos e otimização.

Definição 3.29. Seja $y = f(x)$ uma função derivável no ponto x_0. Assim, a reta tangente ao seu gráfico em (x_0, y_0), sendo $y_0 = f(x_0)$, é a reta

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Seja $P(x_0, y_0)$ o ponto de tangência entre a reta r e a curva f, sendo $y_0 = f(x_0)$. Tomemos a reta s perpendicular à reta r passando pelo ponto P, a qual será denominada "reta normal" ao gráfico de f em P. Se o coeficiente angular de r é $m \neq 0$, assim o coeficiente angular da reta s é

$$m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Portanto, a equação da reta normal ao gráfico de f por $P(x_0, y_0)$ é

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

A Figura 3.5 ilustra o caso discutido onde r é a reta tangente à curva $y = f(x)$ em P e n é a reta normal a curva em P.

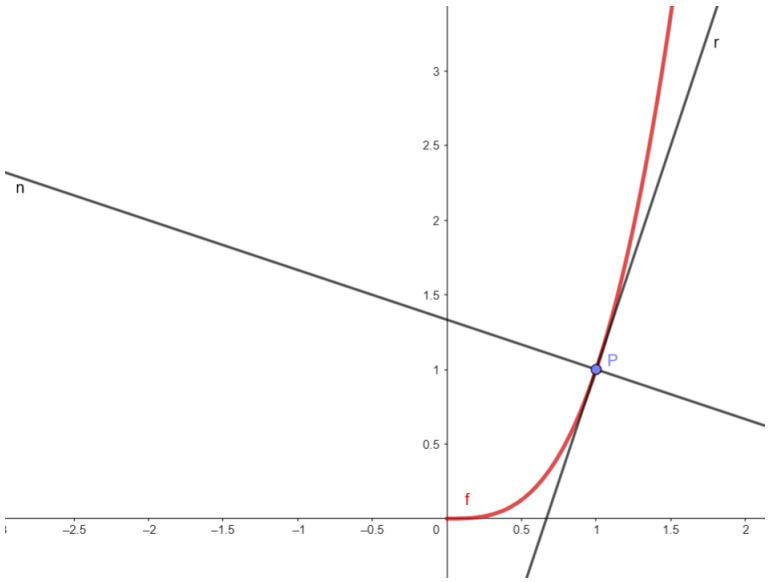


Figura 3.5: Reta normal ao gráfico de f em P.
Fonte: A autora.

A continuidade e a diferenciabilidade são propriedades importantes em uma função. A Proposição 3.30 mostra a relação entre elas e como uma pode influenciar a outra. Além disso, em seguida, apresentaremos o Exemplo 3.31 que exibe uma função contínua, mas não diferenciável, em um determinado ponto.

Proposição 3.30. *Considere $f : B \to \mathbb{R}$ onde todo ponto de B é de acumulação. Se a função é diferenciável em um ponto $a \in B$, então f é contínua em a.*

Demonstração. Por hipótese, existe $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Precisamos provar que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Isso equivale a mostrar que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) - f(a) &= \lim_{x\to a} f(x) - f(a) \cdot \left(\frac{x-a}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \cdot (x - a) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a) \\
&= f'(a)(a - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em a. □

Exemplo 3.31. A função $f(x) = |x|$ é contínua, mas não diferenciável, no ponto $a = 0$.
De fato, f não é derivável em $a = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1.$$

Então não existe $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Na Proposição 3.32, temos duas funções que são deriváveis em um determinado ponto, apresentaremos operações algébricas que podem ser realizadas e que as funções resultantes mantêm a diferenciabilidade. Isso significa que a soma, produto e o quociente de funções deriváveis resultam em novas funções deriváveis, desde que as condições sejam satisfeitas.

Proposição 3.32. *Considere $f, g : B \to \mathbb{R}$ onde todo ponto de B é de acumulação. Se f e g são deriváveis em $a \in B$, então:*

1. *$f+g$ é derivável em a e $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$;*
2. *$f\cdot g$ é derivável em a e $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$;*
3. *$\frac{f}{g}$ é derivável em a e $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$.*

Demonstração. 1.

$$\begin{aligned}(f+g)'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot g(x)\right]+\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\cdot f(a)\right]\\&=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}g(x)+g'(a)\lim_{x\to a}f(a)\\&=f'(a)\cdot g(a)+g'(a)\cdot f(a),\end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$, pela Proposição 3.30.

3. Supondo $g(a) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(a) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \left[\left(\frac{-f(x)}{g(x)\cdot g(a)}\right)\cdot\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right] + \\
&+ \lim_{x\to a} \left[\left(\frac{g(x)}{g(x)\cdot g(a)}\right)\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right] \\
&= \frac{-f(a)}{(g(a))^2}\cdot g'(a) + \frac{g(a)}{(g(a))^2}\cdot f'(a) \\
&= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2},
\end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, pela Proposição 3.30.

□

A regra da cadeia, Proposição 3.33, é um resultado fundamental no cálculo diferencial, pois permite calcular a derivada de uma função composta.

Proposição 3.33 (Regra da cadeia)**.** *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, funções onde todos os pontos dos domínios são de acumulação, onde $f(A) \subset B$. Seja f diferenciável em a e g diferenciável em $b = f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e*

$$[g(f(a))]' = g'(f(a))\cdot f'(a).$$

Demonstração. Definimos a função h por

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b), \text{ se } y \neq b \\ 0, \text{ se } y = b \end{cases}$$

a qual, para $y \neq b$,

$$h(y) = \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b) \Rightarrow [h(y) + g'(b)]\cdot(y-b) = g(y) - g(b).$$

Considerando $y = f(x)$ e $b = f(a)$, segue

$$[h(f(x)) + g'(f(a))]\cdot(f(x) - f(a)) = g(f(x)) - g(f(a)).$$

Como $\lim_{x\to a} h(f(x)) = \lim_{y\to b} h(y) = h(b) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
(g(f(a)))' &= \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{[h(f(x)) + g'(f(a))]\cdot(f(x)-f(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} [h(f(x)) + g'(f(a))]\cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \left[\lim_{x\to a} h(f(x)) + \lim_{x\to a} g'(f(a))\right]\cdot f'(a) \\
&= g'(f(a))\cdot f'(a).
\end{aligned}$$

□

Nas Definições 3.34 e 3.35, introduziremos as derivadas de ordem superior, as quais são obtidas derivando uma função várias vezes.

Definição 3.34. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, dizemos que f é duas vezes diferenciável se f' é diferenciável em A.

De acordo com a Definição 3.34, a derivada de f' em $x \in A$ é chamada "derivada segunda" ou derivada de ordem dois de f em x e é denotada por $f''(x)$. Além disso, podemos usar as seguintes notações para a derivada segunda de uma função f:

- $f^{(2)}(x)$
- $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$

Generalizando a Definição 3.34, temos a derivada de ordem n de f ou derivada n-ésima de f, que significa a n-ésima derivada de f. A Definição 3.35 apresenta formalmente a derivada de ordem n e o Exemplo 3.36 exibe uma aplicação no caso $n = 3$.

Definição 3.35. Tomemos $n \geq 3$ e seja $f : A \to \mathbb{R}$ com derivada de ordem $(n-1)$ indicada por $f^{(n-1)}$. Dizemos que f é *n vezes diferenciável*, se a função $f^{(n-1)}$ for diferenciável em A. Assim,

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$

Exemplo 3.36. Se $f(x) = 2(\ln(x))^3 + sen(x) \cdot x^3$ a derivada terceira será

$$f'''(x) = \frac{12(1 - 3\ln(x) - \ln^2(x))}{x^4} - cos(x) \cdot x^3 - 9x^2 \cdot sen(x) + 18x \cdot cos(x) + 6sen(x).$$

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} + cos(x) \cdot x^3 + sen(x) \cdot 3x^2 \\ &= \frac{6(\ln(x))^2}{x} + cos(x) \cdot x^3 + sen(x) \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{12\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 6(\ln(x))^2}{x^2} - sen(x) \cdot x^3 + cos(x) \cdot 3x^2 + cos(x) \cdot 3x^2 + \\ &+ sen(x) \cdot 6x \\ &= \frac{12\ln(x) - 6(\ln(x))^2}{x^2} - sen(x) \cdot x^3 + cos(x) \cdot 6x^2 + sen(x) \cdot 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{(12 \cdot \frac{1}{x} - 12\ln(x) \cdot \frac{1}{x}) \cdot x^2 - (12\ln(x) - 6(\ln(x))^2) \cdot 2x}{x^4} - cos(x) \cdot x^3 - \\ &- sen(x) \cdot 3x^2 - sen(x) \cdot 6x^2 + cos(x) \cdot 12x + cos(x) \cdot 6x + sen(x) \cdot 6 \\ &= \frac{12x - 12x \cdot \ln(x) - 24x \cdot \ln(x) + 12x(\ln(x))^2}{x^4} - cos(x).x^3 - 9x^2 \cdot sen(x) + \\ &+ cos(x) \cdot 18x + sen(x) \cdot 6 \\ &= \frac{12(1 - 3\ln(x) + (\ln(x))^2)}{x^3} - cos(x) \cdot x^3 - 9x^2 \cdot sen(x) + 18x \cdot cos(x) + 6sen(x). \end{aligned}$$

A seguir, definiremos os máximos e mínimos locais de uma função, que são pontos onde f atinge, respectivamente, o maior ou o menor valor em relação aos seus vizinhos.

Definição 3.37. Seja f uma função definida num intervalo I. Dizemos que f tem um máximo local em $c \in I$, se existir $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ é um intervalo aberto, onde $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap (c-\epsilon, c+\epsilon)$. Neste caso, $f(c)$ é chamado de valor máximo local.

Definição 3.38. Seja f uma função definida num intervalo I. Dizemos que f tem um mínimo local em $c \in I$, se existir $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ é um intervalo aberto, onde $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap (c-\epsilon, c+\epsilon)$. Neste caso, $f(c)$ é chamado de valor mínimo local.

Definição 3.39. Os pontos de máximo ou de mínimo locais de uma função f são denominados pontos extremos de f.

A Proposição 3.40 resulta em uma condição necessária para que um ponto seja extremo de f, quando seu domínio é um intervalo aberto.

Proposição 3.40. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for diferenciável no intervalo aberto I e $c \in I$ for ponto extremo de f, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f tem um ponto de máximo local em c e $f'(c)$ existe. Assim, temos que:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como c é um ponto de máximo local de f, pela Definição 3.37, temos que $f(c) \geq f(x)$, ou seja, $f(x) - f(c) \leq 0$. Assim,

- Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, logo,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

- Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, logo,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Assim, temos que:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como c é um ponto de mínimo local de f, pela Definição 3.38, temos que $f(c) \leq f(x)$, ou seja, $f(x) - f(c) \geq 0$. Assim,

- Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, logo,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

- Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, logo,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

De todo modo, $f'(c) = 0$. □

o Teorema de Darboux é um dos mais belos teoremas do Cálculo. Dizendo o seguinte das funções derivadas: Se temos alguma função em um intervalo em que f é a derivada, então essa função tem a propriedade do valor intermediário, mesmo que não seja contínua. Rigorosamente, segue o Teorema 3.41.

Teorema 3.41 (Teorema de Darboux)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demonstração. Suponhamos que $f'(a) < d < f'(b)$. Considere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - dx$. A derivada dessa função é $g'(x) = f'(x) - d$. Como $f'(a) < d < f'(b)$, temos que

$$f'(a) < d \Rightarrow f'(a) - d < 0 \Rightarrow g'(a) < 0$$

e

$$d < f'(b) \Rightarrow 0 < f'(b) - d \Rightarrow g'(b) > 0.$$

Perceba que $g'(a) < 0$ implica que existe $x_1 \in (a, b)$ tal que $g(x_1) < g(a)$, pois se $g(x) \geq g(a)$ para todo x com $a < x < b$ teríamos $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$, contrariando $g'(a) < 0$.

Note também que $g'(b) > 0$ implica que existe $x_2 \in (a, b)$ tal que $g(x_2) < g(b)$, pois se $g(x) \geq g(b)$ para todo x com $a < x < b$ teríamos $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} \leq 0$, contrariando $g'(b) > 0$.

Como g é derivável, pela Proposição 3.30 sabendo que g é contínua. Assim, pelo Teorema de Weierstrass (o leitor pode conferir a página 81 do livro do Lima (1976)), g assume seu valor mínimo em algum ponto $c \in [a, b]$.

Como vimos existem $x_1, x_2 \in (a, b)$ com $g(x_1) \leq g(a)$ e $g(x_2) \leq g(b)$, portanto $c \neq a$ e $c \neq b$, ou seja, o ponto onde g atinge seu valor mínimo está no intervalo aberto (a, b).

Como $c \in (a, b)$ é um ponto extremo de g (que é contínua em (a, b)), pela Proposição 3.40, $g'(c) = 0$.

Então $f'(c) - d = 0$, portanto $f'(c) = d$. □

O Teorema 3.42 (de Rolle) é um caso particular do Teorema 3.43 (do Valor Médio), que apresentaremos um pouco mais adiante.

Teorema 3.42 (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$, contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema de Weierstrass (o leitor pode conferir na página 81 do livro do Lima (1976)), f assume seus valores máximo (M) e mínimo (m), ou seja, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ com $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Faremos a demonstração em duas partes:

- Suponha que m e M sejam atingidos nos extremos do intervalo $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$, então $m = M$. Com isso, temos que f é constante, implicando $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.
- Suponha que pelo menor dos valores m ou M seja atingido em um ponto $c \in (a, b)$. Portanto, pela Proposição 3.40, temos que $f'(c) = 0$.

De todo modo, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. □

O Teorema do Valor Médio (TVM) é um dos teoremas fundamentais do cálculo diferencial e descreve uma propriedade essencial das funções diferenciáveis em um intervalo. Ele garante que existe um ponto onde a taxa de variação instantânea da função, ou seja, a derivada, é igual à taxa de variação média no intervalo. Precisamente,

Teorema 3.43 (Teorema do Valor Médio (TVM))**.** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então, existe uma constante c no intervalo (a, b) tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Sejam $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$, temos que a equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é

$$y - f(a) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a).$$

Defina a função

$$h(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a) + f(a).$$

Como $h(x)$ é uma função polinomial, ela é contínua e derivável em todos os pontos.
Considere a função $g(x) = f(x) - h(x)$, assim, temos que:

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a) - f(a).$$

Podemos dizer que a função $g(x)$ satisfaz as hipóteses de Teorema de Rolle no intervalo $[a, b]$. Pois, $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$. Assim, como $g(x)$ é derivável em (a, b), pois $f(x)$ e $h(x)$ são deriváveis em (a, b). Além disso, $g(a) = g(b) = 0$, pois

- $g(a) = f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (a - a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$;

  e
- $g(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (b - a) - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0.$

Portanto, existe um ponto c no intervalo (a, b) tal que $g'(c) = 0$.
Como $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, logo $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Assim, para que essa igualdade seja valida, temos que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O que conclui a prova. □

No Exemplo 3.24, vimos que a derivada de uma função constante é zero. Agora, quando o domínio é um intervalo vale a recíproca, como afirma o Corolário 3.44.

Corolário 3.44. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), onde para todo $x \in (a, b)$ temos que $f'(x) = 0$. Então, f é uma função constante.*

Demonstração. Seja $x \in [a, b]$. Por hipótese temos que f é contínua em $[a, x]$ e diferenciável em (a, x). Podemos utilizar o Teorema do Valor Médio, com isso, existe um $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$

Por hipótese, $f'(c) = 0$. Logo,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Portanto, $f(x) = f(a)$, para todo $x > a$ com $x \in [a, b]$, logo f é constante. □

É válido encontrar duas funções que possuem a mesma derivada em um intervalo, mas pelo Corolário 3.45 podemos as diferenciar através de uma constante. Isso ocorre pois, o Exemplo 3.24 garante que a derivada de uma constante é zero, por este motivo, uma função pode ser transformada em outra apenas adicionando uma constante.

Corolário 3.45. *Se duas funções tem a mesma derivada em um intervalo, então o que as diferenciam é uma constante.*

Demonstração. De fato, sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) com $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

Se $h = f - g$, então h é contínua em $[a, b]$ e $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Pelo Corolário 3.44, temos que a função h é constante, ou seja, $h(x) = c$. Então, para $x \in (a, b)$:

$$c = f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c.$$

□

3.3 Integrais

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes sobre integrais que são base matemática para o nosso trabalho, como a própria definição de integral, propriedades, notações, teoremas, entre outros. Dando início a esta seção, começaremos abordando o problema da área como motivação.

Considere encontrar a área da figura delimitada pelo gráfico de uma função positiva f, pelo eixo x e por duas retas $x = a$ e $x = b$. Deste modo, dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, de comprimentos $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ são os pontos dessa divisão, que é chamada de *partição* do intervalo $[a, b]$. Escolheremos pontos quaisquer dentro de cada um dos subintervalos da partição, denotados na Figura 3.6 como $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$. Os retângulos formados na Figura 3.6, possuem base Δx e alturas dadas por $f(k_1), f(k_2), f(k_3), \cdots, f(k_n)$.

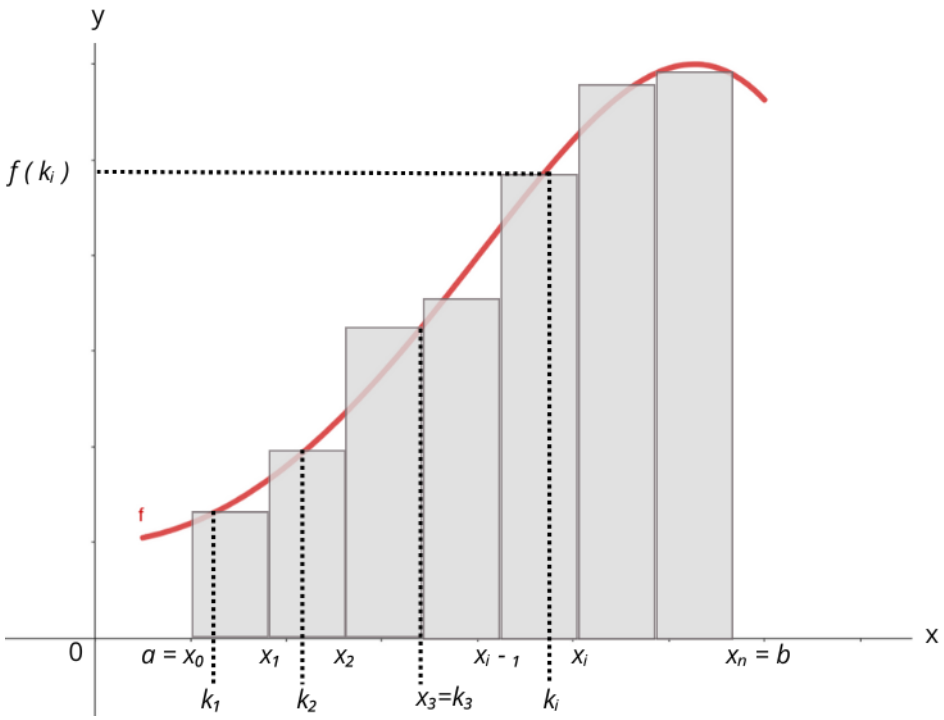


Figura 3.6: Soma das áreas de uma série de retângulos.
Fonte: A autora.

Para ilustração, as Figuras 3.7 e 3.8 apresentam, respectivamente, um exemplo aplicado para o caso de $n = 13$ e $n = 21$ retângulos.

A soma das áreas dos retângulos (S_n) é dada por

$$S_n = f(k_1) \cdot \Delta_x + f(k_2) \cdot \Delta_x + \cdots + f(k_n) \cdot \Delta_x,$$

escrevendo essa expressão com a notação de somatório

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x,$$

que é conhecida como *Soma de Riemann*.

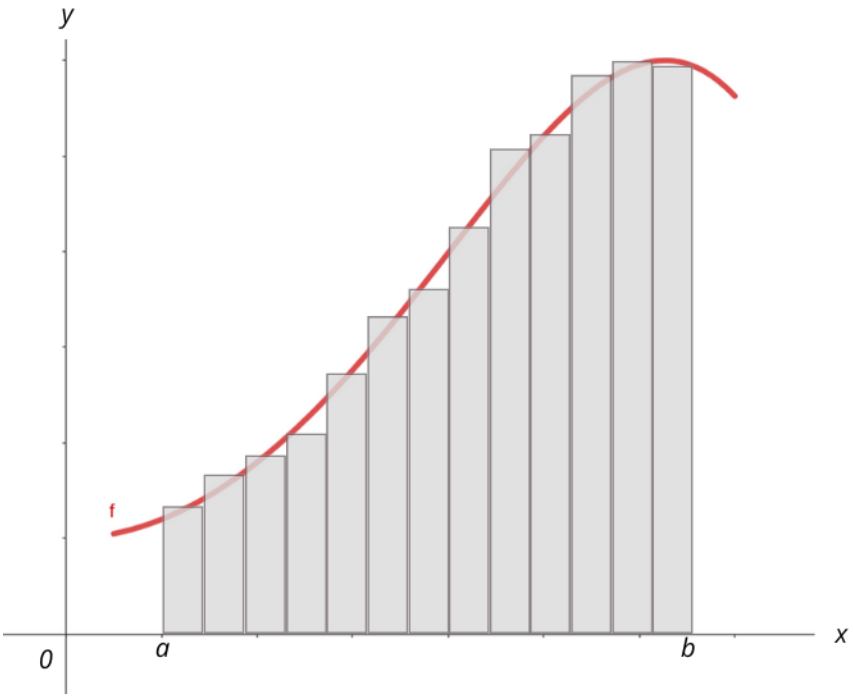


Figura 3.7: Retângulos no caso $n = 13$.
Fonte: A autora.

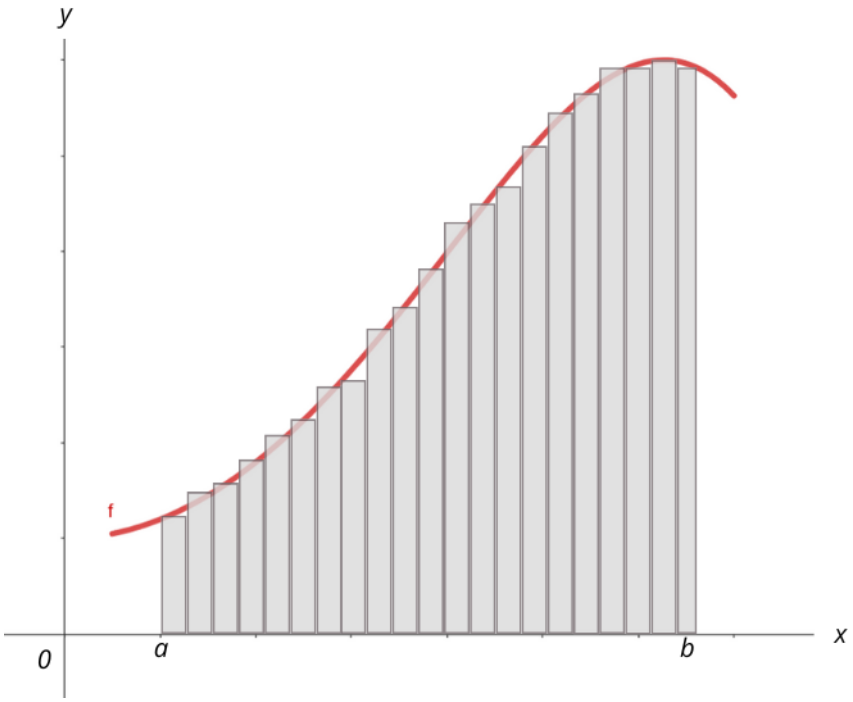


Figura 3.8: Retângulos no caso $n = 21$.
Fonte: A autora.

Conforme n cresce, o valor da soma S_n se aproxima da área da figura delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme as próprias Figuras 3.7 e 3.8 sugerem. O resultado desse limite é chamado de *integral* de f no intervalo $[a, b]$,

com a seguinte notação

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

De acordo com a nossa discussão, segue a Definição 3.46 de integral definida.

Definição 3.46. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ com $[a, b] \subset X$, sendo o intervalo $[a, b]$ dividido em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $k_1, k_2, \cdots, k_n$, respectivamente, as extremidades e os pontos amostrais arbitrários desses subintervalos, onde k_i está no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f em $[a, b]$ é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x$$

com a condição de que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de amostras. Caso exista o limite, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Note que estamos assumindo $x_0 < x_1$ na definição de $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$. Mas, como o limite das Somas de Riemann também faz sentido para $x_0 > x_1$, podemos definir

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Note que se $\Delta x = \frac{b-a}{n} > 0$, onde n é o número de intervalos produzidos pela partição de $[a, b]$, então se invertermos a e b, $\Delta x = \frac{a-b}{n} < 0$.

Na Definição 3.46 de integral, observamos que a função f pode assumir diferentes valores entre positivos, negativos ou nulos. Sendo que, as divisões dos subintervalos da partição de $[a, b]$ não precisam ser iguais, pois o que interessa é o maior comprimento desses subintervalos tenda a zero. Esse comprimento máximo é denominado *norma da partição* $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$, sendo $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Tomemos pontos quaisquer k_1 em $[x_0, x_1]$, k_2 em $[x_1, x_2]$, $\cdots$, k_n em $[x_{n-1}, x_n]$. Denotamos por

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

os comprimentos dos subintervalos, o que forma a Soma de Riemann

$$S_n = f(k_1)\Delta x_1 + f(k_2)\Delta x_2 + \cdots + f(k_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x.$$

Podemos generalizar a Definição 3.46 da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_1,$$

desde que a norma da partição usada tenda a zero conforme n tende a infinito.

Partimos da ideia geométrica para motivar a integral, mas a sua definição é de fato toda numérica e não necessariamente representa uma área, o que nos leva a inverter e definir a área da figura delimitada pelo gráfico de $f \geq 0$, pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ como a integral dessa função no intervalo $[a, b]$. O mesmo vale para quando f for negativa em alguma parte do intervalo $[a, b]$, a qual corresponde a área com sinal negativo (Figura 3.9).

Desse fato, podemos notar, por exemplo, que $\int_a^b dx = b - a$, pois basta considerar $f(x) = 1$ e pensar na área de um retângulo de altura 1 e base $b - a$.

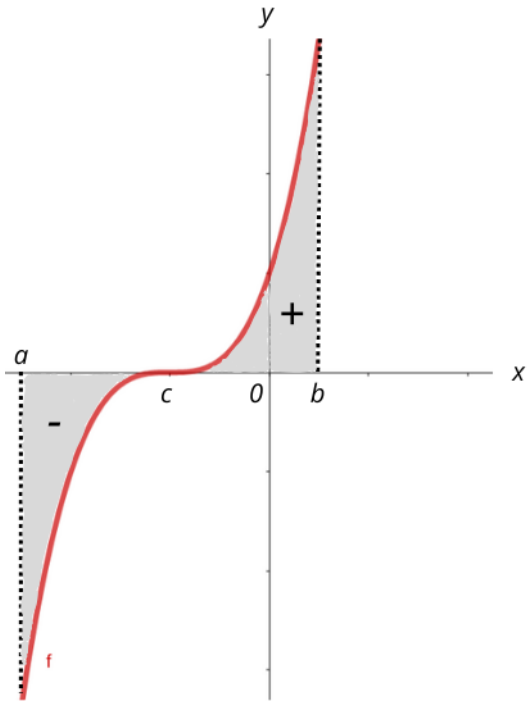


Figura 3.9: A área da figura delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ como a integral dessa função no intervalo $[a, b]$.
Fonte: A autora.

O Teorema 3.47 afirma que, se uma função f é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e c é um ponto interno desse intervalo, então a integral de f de a até b pode ser decomposta como a soma das integrais nos subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$. Precisamente,

Teorema 3.47. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$, considere c um ponto interno desse intervalo. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demonstração. Considere $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \cdots, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ com $x_i = c$ para algum índice i. Dessa forma, o i-ésimo intervalo produzido pela partição é o $[x_{i-1}, c]$ e o $(i + 1)$-ésimo é o $[c, x_{i+1}]$. Usando propriedade de somatório, podemos escrever a Soma de Riemann assim:

$$f(k_1)\Delta x_1 + \cdots + f(k_{i-1})\Delta x_{i-1} + f(k_i)\Delta x_i + f(k_{i+1})\Delta x_{i+1} + \cdots + f(k_n)\Delta x_n\ ,$$

onde k_j representa um ponto amostral do j-ésimo intervalo que possui comprimento Δx_j. Assim:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{i} f(k_l)\Delta x_l + \sum_{l=i+1}^{n} f(k_l)\Delta x_l\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{i} f(k_l)\Delta x_l + \lim_{n\to\infty}\sum_{l=i+1}^{n} f(k_l)\Delta x_l\\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ ,\end{aligned}$$

uma vez que f é integrável em $[a, b]$ e a norma da partição tende a zero, conforme n cresce. □

A seguir, apresentamos algumas propriedades básicas da integral definida com as suas respectivas demonstrações.

Propriedade 3.48. Sejam f e g integráveis em $[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:

a) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

Demonstração. Considere $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ onde sua norma tende a zero, conforme n cresce. Denote por k_i um ponto amostral no i-ésimo intervalo da partição e seja Δx_i seu comprimento.

a)

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(k_i) + g(k_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(k_i)\Delta x + g(k_i)\Delta x_i] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(k_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} cf(k_i)\Delta x_i \\ &= c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \\ &= c\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

□

É possível provar que toda função f contínua em $[a, b]$ é também integrável em $[a, b]$. Para isso, é necessário o uso de sequências, o que está fora do escopo deste texto. No entanto, recomendamos a leitura da página 201 do livro Ávila (2006) para os interessados. Assumiremos esse resultado como válido daqui para frente.

Teorema 3.49 (Teorema da Média)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então, existe um número $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b - a).$$

Demonstração. Como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass (o leitor pode conferir na página 81 do livro do Lima (1976)), assume mínimo (m) e máximo (M) em $[a, b]$.

Considere que os valores de f estão entre o número (m) e máximo (M), então para a soma de Riemann, considerando uma partição adequada, valem as seguintes desigualdades:

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} f(k_i)\Delta x_i \leq M(b-a).$$

Fazendo $\mathrm{n} \to \infty$, temos que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

desde que a norma da partição tenda à zero.

Como f é definida no intervalo $[a, b]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, f assume todos os valores do intervalo $[m, M]$, assim existe um número $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Portanto, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$.

□

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do Cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Vimos que o Cálculo Diferencial surgiu do problema da tangente e o Cálculo Integral surgiu do problema da área, aparentemente esses conceitos não estão relacionados, porém é o contrário, estão exatamente associados. O que leva a derivação e a integração serem processos inversos. Além disso, o Teorema Fundamental do Cálculo foi dividido em duas partes, sendo que a primeira lida com funções definidas e a segunda, segue da primeira, fornece um método mais simples para calcular integrais.

Teorema 3.50 (1º Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Assim, a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável nesse intervalo e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Tomemos x como ponto interno do intervalo $[a, b]$, assim

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \\ &= \int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.49, temos

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(k),$$

onde k é um ponto do intervalo $[x, x+h]$. Assim,

$$f(k) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h},$$

ou seja,

$$f(k) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}. \tag{3.6}$$

Agora, quando h tende a zero na Equação (3.6), k tende a x, e sabemos que f é contínua, então $f(k)$ tende a $f(x)$, então completando a demonstração temos que

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

ou seja,

$$F'(x) = f(x).$$

□

Definição 3.51. Dizemos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, quando $F'(x) = f(x)$, para algum $x \in (a, b)$.

Teorema 3.52 (2º Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e F uma primitiva de f. Então:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Consideremos a partição de $[a, b]$, $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$. Tomemos um intervalo fechado qualquer $[x_{i-1}, x_i]$, pelo Teorema 3.43 (do Valor Médio), como F é derivável, temos que:

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(k_i),$$

para algum $k_i \in (a, b)$.

Podemos denotar $x_i - x_{x-1} = \Delta x_i$ e por hipótese F é uma primitiva de f, então $F'(k_i) = f(k_i)$. Assim,

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(k_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(k_i) \cdot \Delta x_i.$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} f(k_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} F(x_i) - F(x_{i-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(x_n) - F(x_0) = \lim_{n\to\infty} F(b) - F(a) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

□

3.4 Ferramentas do Cálculo e movimento retilíneo

Para que possamos estudar o movimento, devemos ser capazes de descrevê-lo utilizando os conceitos de espaço e tempo, sem necessariamente focar na causa. O ramo da física que faz esse estudo é chamado de cinemática. Nessa área, os principais elementos de interesse são:

- **Posição:** a localização de um objeto em um determinado momento.
- **Deslocamento:** a diferença entre as posições de um objeto em dois momentos.
- **Velocidade:** a taxa de mudança de posição de um objeto em relação ao tempo.
- **Aceleração:** a taxa de mudança de velocidade de um objeto em relação ao tempo.

Na cinemática, estuda-se diferentes tipos de movimento, como: o retilíneo (ao longo de uma trajetória reta), em duas ou três dimensões (podendo envolver trajetórias curvas mais complicadas) e o movimento circular. O objeto em movimento é sempre considerado pontual, isto é, como uma partícula de dimensões desprezíveis.

Nesta seção, apresentaremos elementos básicos do movimento retilíneo e exibiremos como as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral podem ser usadas no estudo deste tipo de fenômeno físico.

3.4.1 Posição e deslocamento

A posição indica a localização de um objeto em relação a um ponto de referência. Em um sistema unidimensional (como no movimento retilíneo), a posição pode ser representada como uma coordenada em uma linha reta, como um eixo numérico (aqui chamaremos de eixo x), em relação à sua origem.

Suponha que um objeto, representado pelo ponto P, se desloca, ao longo do tempo, pela linha reta representada pelo eixo x. A equação paramétrica $x = x(t)$, onde x é a coordenada posição e t indica a variável tempo, nos fornece a posição de P a cada instante t.

Considere que P varie de x_1 para x_2, entre os instantes t_1 e t_2, com $0 \leq t_1 < t_2$. Dizemos que $\Delta x = x_2 - x_1$ foi o deslocamento de P nesse intervalo de tempo. Quando $\Delta x > 0$, o deslocamento se faz no sentido positivo do eixo x, quando $\Delta x < 0$, o deslocamento ocorre no sentido negativo (Veja a Figura 3.10). Perceba que Δx é uma grandeza vetorial, já que é caracterizada por um módulo (seu valor absoluto), uma direção (a mesma do eixo x) e um sentido (positivo ou negativo).

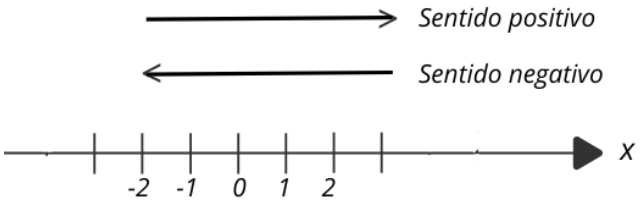


Figura 3.10: Sentidos do deslocamento Δx.
Fonte: A autora.

3.4.2 Velocidade Média

Suponha que certo objeto P se desloque de x_1 para x_2, entre os instantes t_1 e t_2 com $0 \leq t_1 < t_2$, isto é, $x(t_1) = x_1$ e $x(t_2) = x_2$. Definimos a velocidade média de P no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, como:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

No caso em que P percorre deslocamentos iguais em intervalos de tempos iguais, dizemos que P está em movimento uniforme, isto é, com velocidade constante. Caso contrário, chamamos o movimento de acelerado.

No Sistema Internacional de Unidades, a unidade adotada para velocidade é m/s, mas comumente outras unidades são adotadas, desde que respeitada as dimensões físicas "comprimento/tempo".

Perceba que a velocidade média (ou a velocidade, no caso uniforme) é uma grandeza vetorial, note que $v_m < 0$, quando $\Delta x < 0$.

Quando $v_m < 0$, temos que o movimento se dá no sentido negativo da reta e, quando $v_m > 0$, temos o movimento no sentido positivo.

O valor absoluto $|v_m|$ é chamado de rapidez média (ou simplesmente rapidez, no caso uniforme). Analisemos agora o gráfico $t \times x(t)$, onde $x = x(t)$ fornece a posição de um objeto no instante t. Se o movimento for uniforme, note que $x(t) = x_0 + v(t - t_0)$, onde t_0 é o instante inicial e $x(t_0) = x_0$ representa a posição inicial do objeto, obviamente com $t_0 \geq 0$. Neste caso, o gráfico de $t \times x(t)$ é uma reta e a velocidade constante v pode ser interpretada como $v = \operatorname{tg} \theta$, onde θ é o ângulo da reta que é o gráfico indicado com o eixo t.

Por exemplo, se $t_0 = 0\ s$, $x_0 = 0\ m$ e $v = 5\ m/s$, temos:

$$x(t) = 0 + 5(t - 0) = 5t.$$

Veja a Figura 3.11:

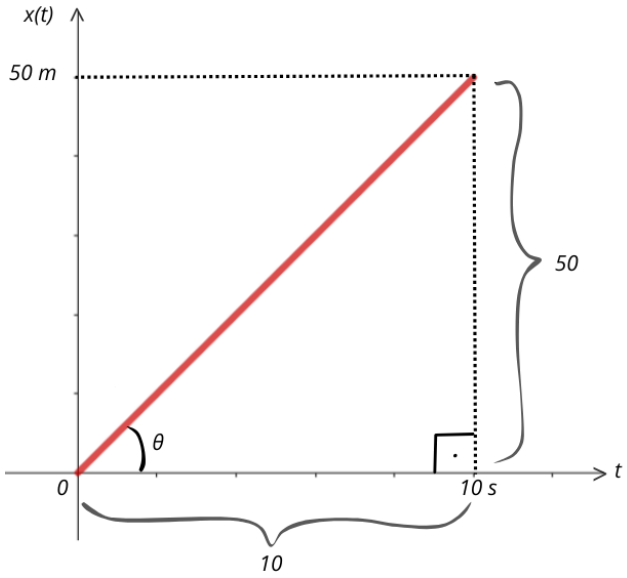


Figura 3.11: Gráfico $t \times x(t)$ - movimento uniforme.
Fonte: A autora.

Note que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{50}{10} = 5$.
Considere os instantes $t_0 = 0\ s$ e $t_1 = 10\ s$, então:

$$v = \frac{50-0}{10-0} = \frac{50}{10} = 5 = \operatorname{tg}\theta\ m/s.$$

Por outro lado, se o movimento é acelerado, suponha que o objeto se movimente de x_1 para x_2, entre t_1 e t_2 com $0 \leq t_1 < t_2$. Observe a Figura 3.12:

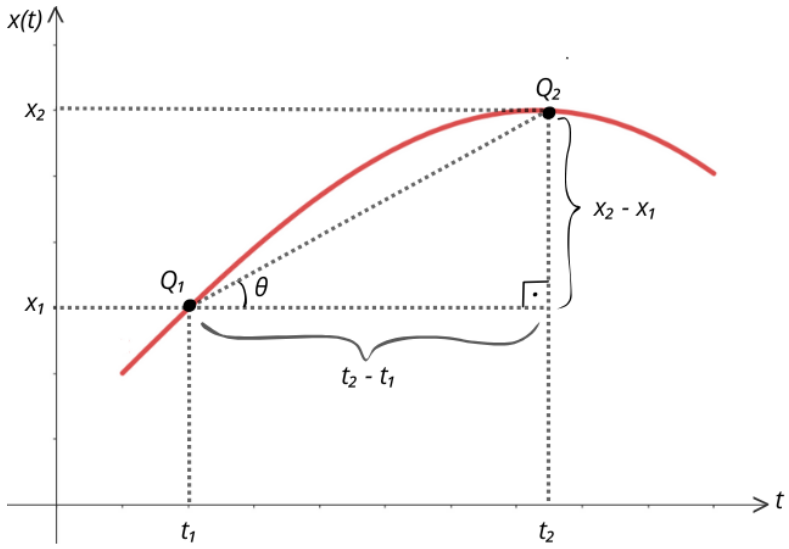


Figura 3.12: Gráfico $t \times x(t)$ - movimento acelerado.
Fonte: A autora.

Considere $Q_1(t_1, x_1)$ e $Q_2(t_2, x_2)$ pontos na curva que é o gráfico da função $x(t)$. Sendo θ a inclinação da reta que passa por Q_1 e Q_2, temos que a velocidade média do objeto entre os instantes t_1 e t_2 é igual à $\operatorname{tg}\theta$. Perceba que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_m.$$

3.4.3 Velocidade Instantânea

De forma geral, a velocidade média nada nos diz sobre a velocidade de um corpo num dado instante t. Para isso, precisamos definir velocidade instantânea, no instante em questão. Para obter tal velocidade, observamos a velocidade média no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, para Δt cada vez menores. Considerando $x(t)$ a função posição do objeto em movimento, a velocidade no instante t é dada pelo limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Da seção 3.2, sabemos que o último limite representa a função derivada da função posição. Desse modo, temos que a função que nos fornece a velocidade $v(t)$, para cada instante de tempo t, de um objeto cuja posição é dada pela função $x(t)$ é:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

A velocidade instantânea de um objeto em movimento também é uma grandeza vetorial, por ter intensidade, direção e sentido. Perceba que, nas condições anteriores, se $v(t_0) = \frac{d}{dt}x(t_0) > 0$, em um instante t_0, então a posição x aumenta conforme t aumenta nessa vizinhança temporal. Por outro lado, se $v(t_0) = \frac{d}{dt}x(t_0) < 0$ em um instante t_0, então a posição x diminui conforme t aumenta nessa vizinhança temporal (como, por exemplo, em uma marcha ré). Já se $v(t_0) = \frac{d}{dt}x(t_0) = 0$, temos no instante t_0 um ponto de máximo, de mínimo ou de inflexão da função $x(t)$.

Vimos que se conhecemos a função posição de uma partícula, conseguimos calcular a função velocidade instantânea no decurso do movimento, apenas fazendo $v(t) = x'(t)$. Mas também é possível resolver o problema inverso: conhecida $v(t)$ entre os instantes t_1 e t_2, calcular o espaço percorrido, ou seja, determinar $x(t_2) - x(t_1)$.

Com as ferramentas do Cálculo que estamos estudando nas seções anteriores, não é difícil, uma vez que $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

Sabemos do Teorema 3.52, que

$$\int_{t_1}^{t_2} v(\tau)\, d\tau = x(t_2) - x(t_1).$$

Isso nos permite determinar a função $x(t)$, conhecendo $v(t)$ e $x(t_0)$, onde t_0 é o instante inicial do intervalo no qual $v(t)$ representa a velocidade instantânea. Note que, nesse caso:

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau = x(t) - x(t_0) \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau. \tag{3.7}$$

3.4.4 Aceleração

A taxa de variação da velocidade de um objeto é chamada de aceleração. Se um objeto possui função velocidade $v(t)$, entre os instantes t_1 e t_2 com $0 \leq t_1 < t_2$, definimos a aceleração média entre os instantes t_1 e t_2 como:

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Já, para obter uma função que nos fornece a aceleração instantânea, em um instante t, observamos a aceleração média no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, para Δt cada vez menores, isto é, o limite:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Usando o que estudamos na seção 3.2, temos que a função $a(t)$, que fornece a aceleração de um objeto no instante t, é dada por:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Considerando $x(t)$ como função posição, uma vez que $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = x'(t)$, também podemos escrever:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t).$$

No Sistema Internacional de Unidades, a unidade da aceleração é m/s^2, mas comumente outras unidades são adotadas, desde que respeitando as dimensões físicas "$comprimento/tempo^2$".

Neste caso, também é possível resolver o problema inverso: conhecida $a(t)$, entre os instantes t_1 e t_2, calcular a variação de velocidade $v(t_2) - v(t_1)$. Note que $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$, desse modo, pelo Teorema 3.52:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(\tau)\, d\tau = v(t_2) - v(t_1).$$

O mesmo argumento nos permite determinar a função $v(t)$, conhecendo $a(t)$ e $v(t_0)$, onde t_0 é o instante inicial do intervalo no qual $a(t)$ representa a aceleração instantânea. Note que, nesse caso:

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau = v(t) - v(t_0) \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau. \tag{3.8}$$

3.4.5 Aceleração constante

Quando um objeto possui aceleração constante, em um determinado intervalo de tempo, dizemos que, nesse intervalo, o movimento é uniformemente acelerado.

Considere t_0 o instante inicial do intervalo mencionado e denote $x(t_0) = x_0$ e $v(t_0) = v_0$. Supondo $a(t) = a$, constante, segue que $\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = a$.

Da Equação (3.8), temos:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, d\tau = v_0 + a\tau\Big|_{t_0}^{t} = v_0 + a(t - t_0).$$

Ou seja,

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \tag{3.9}$$

Da Equação (3.7), temos:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(\tau - t_0))\, d\tau = x_0 + \left(v_0\tau + a\frac{\tau^2}{2} - at_0\tau\right)\Big|_{t_0}^{t}$$
$$= x_0 + \left[\left(v_0 t + a\frac{t^2}{2} - at_0 t\right) - \left(v_0 t_0 + a\frac{t_0^2}{2} - at_0^2\right)\right] = x_0 + (t - t_0)v_0 + \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

Ou seja,

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)v_0 + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \tag{3.10}$$

Usando as Equações (3.9) e (3.10), podemos obter uma outra, útil, uma vez que "elimina" o parâmetro tempo inicial.

Considere, da Equação (3.9), $t - t_0 = \dfrac{v(t) - v_0}{a}$, supondo que $a \neq 0$, obviamente.

Substituindo na Equação (3.10):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right)v_0 + \frac{a}{2}\left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right)^2 \\ &\Rightarrow x(t) - x_0 = \frac{v(t)v_0}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{a^2}\right) \\ &\Rightarrow x(t) - x_0 = \frac{v(t)v_0}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2(t)}{2a} - \frac{v(t)v_0}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} \\ &\Rightarrow x(t) - x_0 = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} \Rightarrow 2a(x(t) - x_0) = v^2(t) - v_0^2 \\ &\Rightarrow v^2(t) = v_0^2 + 2a(x(t) - x_0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

A Equação (3.11) é a famosa *Equação de Torricelli*, em homenagem a Evangelista Torricelli, discípulo de Galileu. O instante pode ser omitido, para não sobrecarregar a notação, assim $v = v_0 + 2a\Delta x$ é uma forma comum de se encontrar a Equação (3.11) na literatura.

Por falar em Galileu, o movimento de corpos em queda livre, exaustivamente estudado por ele, é um interessante exemplo de movimento retilíneo uniformemente acelerado. Galileu notou que a aceleração da gravidade é constante (localmente)[1]. A letra g é usada para denotá-la e seu valor aproximado é de $9,8\ \mathrm{m/s^2}$.

[1]Na realidade, é conhecido que a intensidade de g varia levemente de acordo com a posição geográfica, mas, na prática, a aproximação $9,8\ \mathrm{m/s^2}$ é mundialmente aceita.

4 *Softwares*

Neste capítulo serão apresentados os *softwares* que utilizamos para desenvolver os estudos na dissertação.

4.1 O *Tracker*

De acordo com Parreira (2018), o *software Tracker* é utilizado para realizar vídeo-análise, sendo um programa de computador gratuito e de fácil acesso. O *Tracker* analisa o movimento escolhido utilizando um objeto como referência para ser localizado em um vídeo, com as medidas de posição e tempo.

A estrutura do *software Tracker* é baseada na linguagem Java de *Open Source Physics* (OSP), como comenta Assunção (2018). O *site* oficial do *software Tracker* pode ser consultado ao acessar: <https://physlets.org/tracker/>. Na página inicial, Figura 4.1, aparecem as informações sobre instalação, *software online*, explicação sobre os recursos do *Tracker*, tutorias em vídeo, entre outros. O *site* oficial é apresentado na língua inglesa, porém o *software Tracker* pode ser traduzido para vários idiomas, como o árabe, catalão, alemão, grego, espanhol, francês, indonésio, italiano, hebraico, coreano, português, russo, chinês, entre outros.

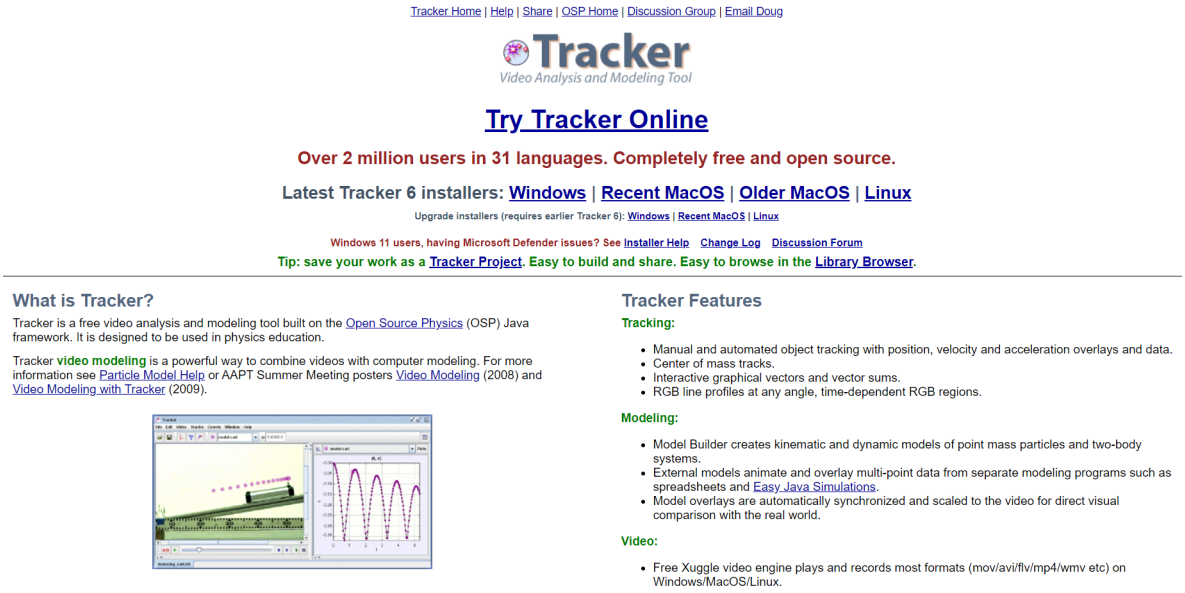


Figura 4.1: *Site* oficial do *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Para realizar o *download* do *software Tracker*, basta acessar o *site* oficial e escolher a versão de instalador compatível com o sistema operacional (*Windows, MacOS, Linux*) do seu dispositivo. Clique no *link* de *download* correspondente. Confira a Figura 4.2.



Figura 4.2: *Download* do *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Após o *download*, executar o arquivo de instalação, seguindo as instruções do assistente de instalação para configurar o *software*. Caso precise de ajuda com a instalação, acesse: <https://physlets.org/tracker/installers/installer_help.html>. Veja a interface *"Installer Help"* na Figura 4.3.

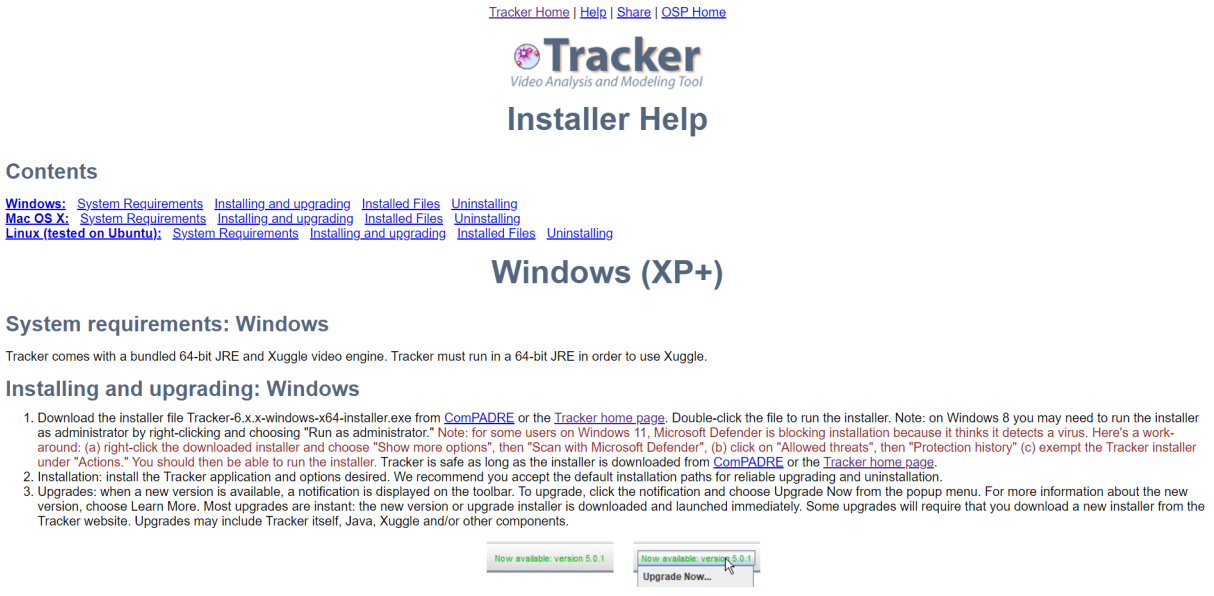


Figura 4.3: *Site* oficial de ajuda do instalador do *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Além da opção para *download*, existe a versão *online* do *software Tracker* disponível em: <https://physlets.org/tracker/trackerJS/>. Confira a interface do *Tracker online* na Figura 4.4.

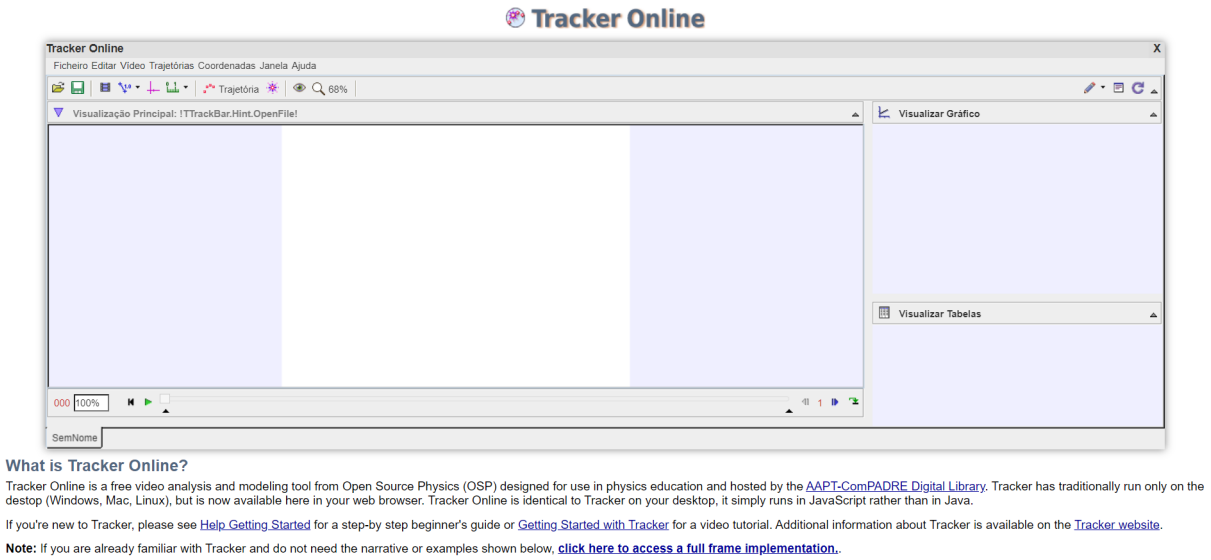


Figura 4.4: *Site* oficial do *Tracker online*.
Fonte: A autora.

As ferramentas do *software Tracker* que utilizaremos neste estudo serão explicadas na seção 4.2.2.

4.1.1 *Tracker* no ensino

O *software Tracker* é muito utilizado no ensino de Física para estudos de movimento de fenômenos naturais. No entanto, não é comum encontrarmos abordagens utilizando o *Tracker* para explorar conceitos matemáticos.

A tecnologia permite visualizar conceitos matemáticos tanto dentro da sala de aula quanto em outros ambientes, como laboratório, natureza, cotidiano, entre outros. Vale ressaltar que o uso das tecnologias pode contribuir para o desenvolvimento do aluno. Todavia é importante observar se seu uso será relevante para melhorar o processo de aprendizagem e se estará dentro do tempo didático disponível para as aulas, como apontam Bezerra Júnior et al. (2012).

Bordin (2020) afirma que existe um potencial na didática quando utiliza-se de animações e simulações, pois as mesmas podem contribuir positivamente para o ensino. O autor ainda comenta que essas tecnologias auxiliam na demonstração e visualização de conceitos abstratos, visto que isso possibilita uma interação do estudante com as ferramentas digitais. O *software Tracker*, por exemplo, permite que o aluno realize investigações através da vídeo-análise de movimento de fenômenos físicos, possibilitando a visualização de conceitos teóricos de forma prática.

Os primeiros passos para realizar uma análise no *software Tracker* é a organização do experimento e escolha do movimento que deseja ser filmado, assim, após a gravação, deve-se transferir o arquivo da gravação para o computador no qual foi instalado o *software*. De acordo com Bezerra Júnior et al. (2012), o experimento de queda livre precisa de 5 minutos para ser realizado, além disso, para transferir o arquivo de vídeo e a marcação de todos os pontos de análise, um usuário iniciante gasta cerca de 10 minutos para realizar tal ação.

Para Parreira (2018), uma vantagem de se utilizar o *software* é a substituição de eventos apresentados através de desenhos em sala de aula por experimentos que utilizam

valores reais nos problemas. Outro ponto que o autor comenta é sobre os experimentos serem, na maioria das vezes, de baixo custo, por conta disso, conseguem desenvolver, de maneira prática, os conceitos que são estudados no curso de Mecânica no ensino médio e no ciclo básico do ensino superior. Os professores conseguem desenvolver atividades experimentais com flexibilidade e baixo custo, mas que agregam qualidade acadêmica e potencial para o desenvolvimento do estudante, além disso, os alunos podem participar ativamente da montagem do experimento, como dizem Bezerra Júnior et al. (2012).

Bordin (2020) afirma que o recurso tecnológico é importante desde que esteja de acordo com o plano didático do docente, pois o uso de tecnologias não substitui o trabalho do professor, mesmo utilizando tecnologias como computador, livros, filmes, entre outros, o docente precisa ser capaz de utilizar esses recursos didáticos afim de auxiliá-lo em sala de aula. Ainda neste cenário, podemos perceber que o docente é importante no processo de aprendizagem dos estudantes, mas que os alunos podem realizar investigações matemáticas utilizando a tecnologia em prol do seu desenvolvimento e que isso não irá substituir o docente da disciplina.

Por conta do *Tracker* ser um *software* flexível, prático e de baixo custo, ele se encaixa no tempo didático disponível para a maioria das aulas do ensino médio, que possuem cerca de 50 minutos de duração, mas, com os recursos que a plataforma oferece, os professores conseguem realizar experimentos voltados para o ensino superior e em atividades para a formação docente, como aponta Bezerra Júnior et al. (2012). O autor continua e diz que o uso do *Tracker* nas aulas facilita e permite desenvolver o pensamento crítico sobre o estudos de movimentos físicos, tornando um entendimento mais próximo do fazer científico.

O *software Tracker* apresenta diversas ferramentas para realizar uma exploração no vídeo do fenômeno registrado, como tabelas, gráficos e equações de movimento. Assim, para Parreira (2018), a habilidade de lidar com essas diferentes ferramentas de representações pode auxiliar no entendimento dos conceitos de Mecânica.

Por fim, para Bezerra Júnior et al. (2012), o uso do *Tracker* no ensino de física desperta interesse nos estudantes para aprender os conceitos teóricos, além de ser um *software* de baixo custo e possuir uma grande flexibilidade, permitindo criar aulas dinâmicas. O autor confirma que o uso de tecnologias é auxílio para ser utilizado tanto nos anos iniciais quanto no ensino superior, sendo um incremento nas aulas de física nas escolas e universidades.

O *software Tracker* possui potencial para ser aplicado no ensino de matemática, pois permite visualizar e explorar conceitos através de aplicações práticas. Essa é a essência deste trabalho. Por este motivo, antes de propormos as atividades, precisamos entender algumas ferramentas disponíveis no *software*.

4.2 Funções essenciais no *Tracker*

4.2.1 Gravação de fenômeno físico

Apresentaremos como é feita a gravação de experimentos físicos para serem posteriormente analisados no *software Tracker*. Para realizar a gravação, é importante ter alguns cuidados com a escolha do local, equipamentos e procedimentos que serão utilizados para gravar o vídeo.

O ambiente precisa ter uma iluminação adequada, sendo luz natural ou não, o fundo com tom que apresenta contraste com o objeto que será analisado em movimento, por exemplo, se o objeto de estudo for de cor clara, utilizar fundo e outros elementos do vídeo

na cor escura. Além disso, dependendo do experimento que será realizado, ficar atento ao vento presente no local ou outras condições adversas. Na Figura 4.5, a autora se preparava para gravar o experimento de queda livre. Confira o contraste entre a bola e o fundo.

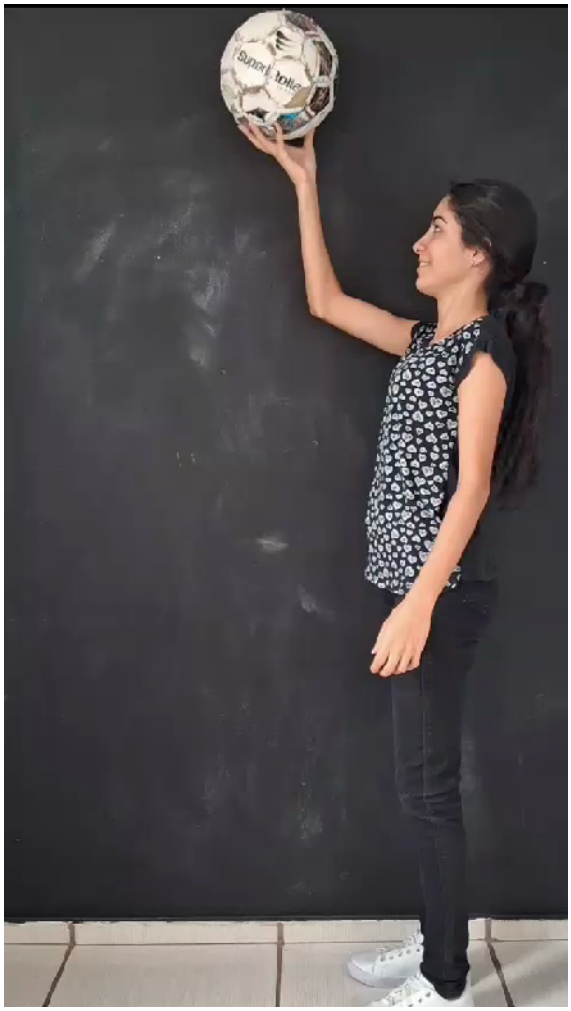


Figura 4.5: Ambiente de gravação para realizar o experimento.
Fonte: A autora.

A escolha dos equipamentos é um dos primeiros passos para a criação do vídeo. Neste experimento foi utilizado um *smartphone*, modelo M34, da marca *Samsung*, o qual foi posicionado verticalmente em um tripé para efetuar a gravação, como exibe a Figura 4.6

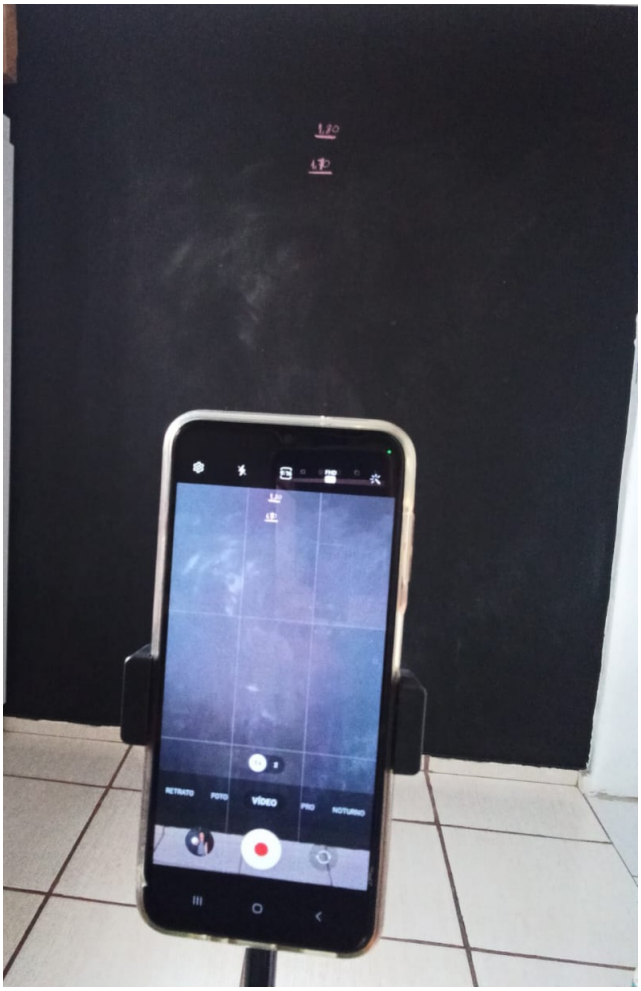


Figura 4.6: Posicionamento do equipamento de gravação.
Fonte: A autora.

Antes de iniciar a gravação do vídeo, se faz necessário executar alguns procedimentos, como a marcação da distância entre a câmera e o objeto a ser gravado, a altura da base ao objeto, verificar se a câmera está capturando toda a região de interesse, entre outros. No exemplo, foi utilizado o chão como base e a bola como objeto de estudo, tendo uma distância de 1,70 metros. Além disso, o tripé foi posicionado a uma distância de 2 metros do fundo. Confira o cenário usado para gravação na Figura 4.7.

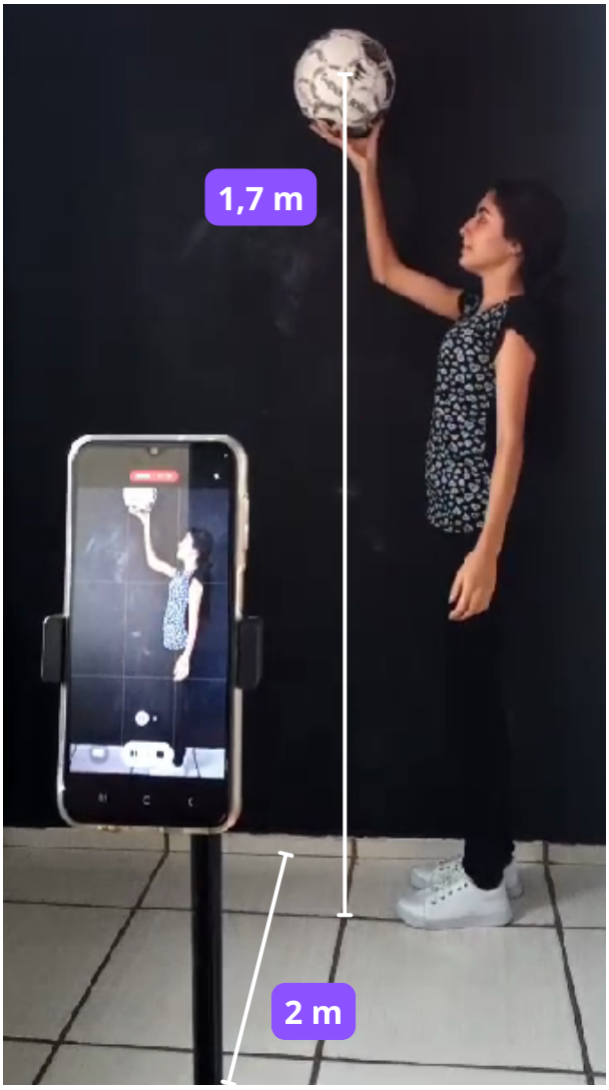


Figura 4.7: Cenário utilizado para gravação.
Fonte: A autora.

Com todos os equipamentos regulados e marcações feitas é hora de realizar a gravação do fenômeno físico. A duração do vídeo depende do tempo do experimento escolhido para análise. Após a produção do vídeo, salvar no dispositivo no qual será feita a análise no *software Tracker*. Confira a Figura 4.8.

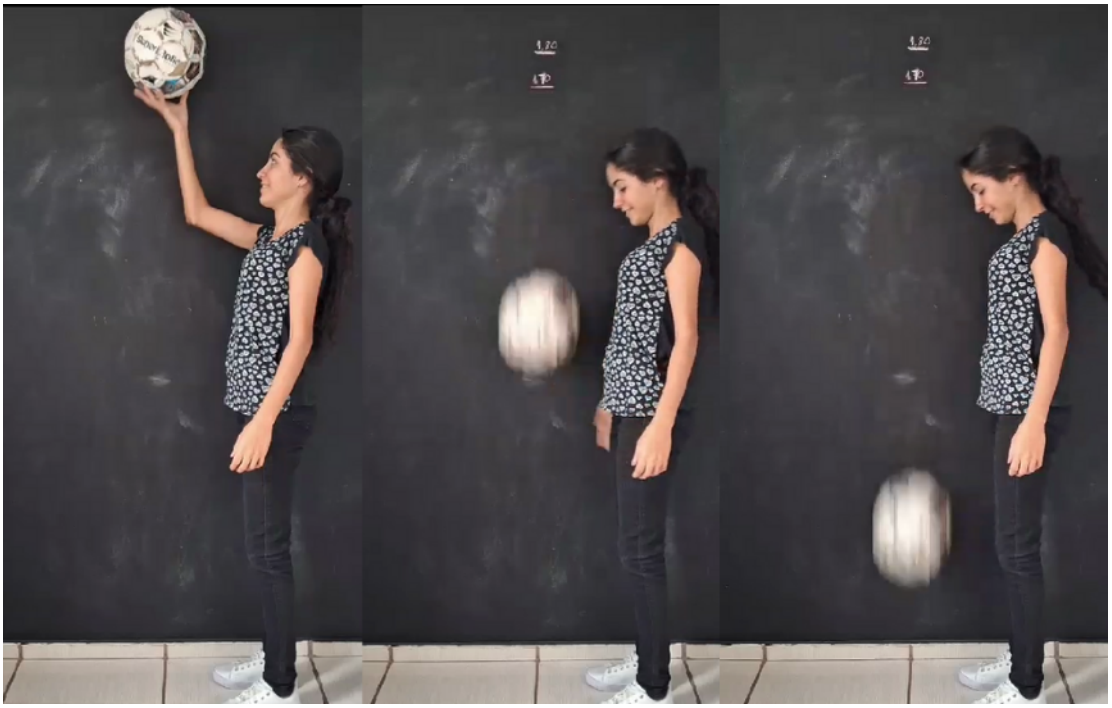


Figura 4.8: Realizando o experimento para gravação.
Fonte: A autora.

Importante ressaltar que os formatos de vídeo que o *sotware Tracker* suporta são vídeos com extensão mp4, avi, wmv, flv ou mov.

4.2.2 Conhecendo o *software Tracker*

Antes de efetuar uma vídeo-análise é preciso conhecer o *software* que será utilizado. A seguir, descreveremos as ferramentas do *software Tracker* que manusearemos para realizar este estudo.

O *Tracker* possui uma interface simples. A Figura 4.9 exibe a tela inicial quando o *software* é aberto. A primeira barra de ferramentas, Figura 4.10, fica localizada na parte superior esquerda da interface do usuário. A segunda barra de ferramentas, Figura 4.11, fica localizada na parte inferior da interface do usuário.

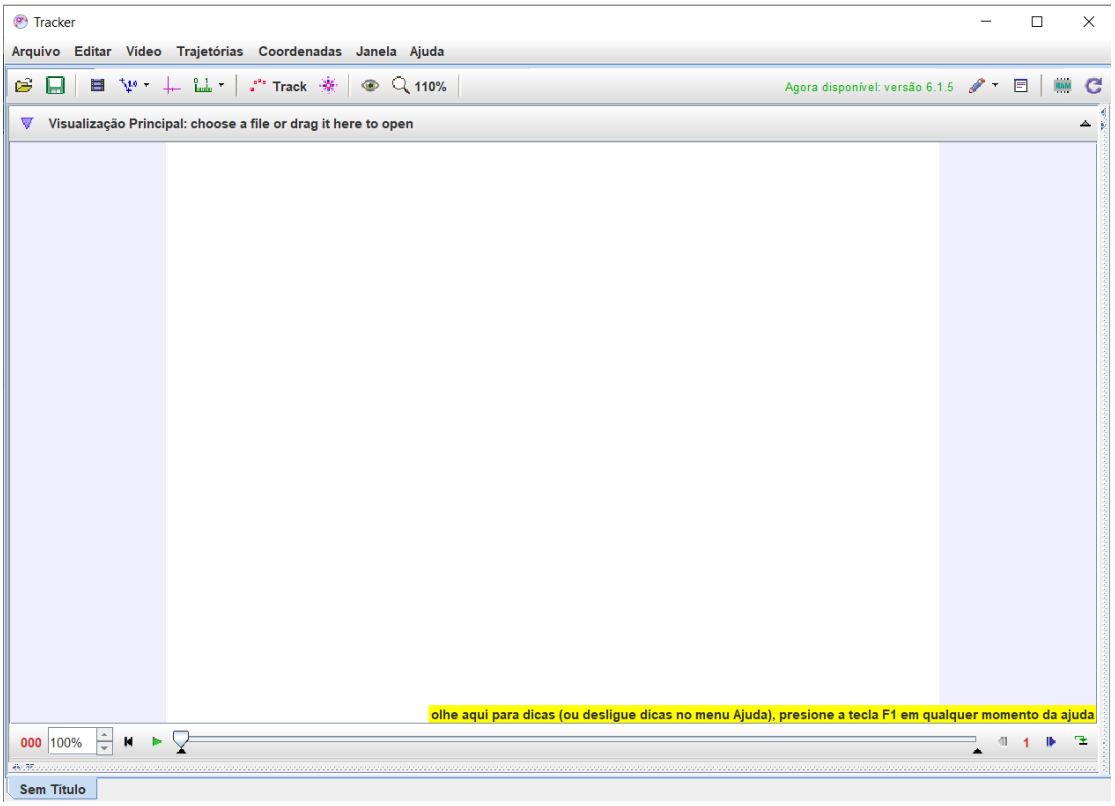


Figura 4.9: Visão geral da interface do usuário.
Fonte: A autora.

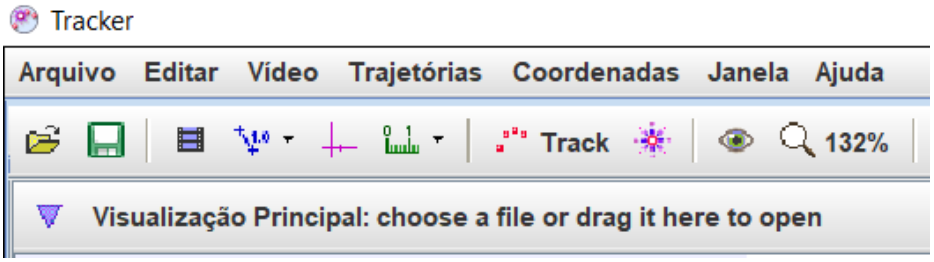


Figura 4.10: Barra de ferramentas superior.
Fonte: A autora.

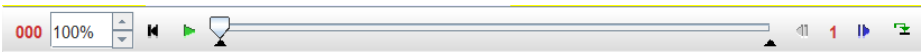


Figura 4.11: Barra de ferramentas inferior.
Fonte: A autora.

Para começar a análise, precisamos adicionar um vídeo no *software Tracker*. Confira a Figura 4.12. Com o botão esquerdo do *mouse*, clicar na opção "arquivo" (item (1)) localizada na barra de ferramentas superior. Em seguida, clicar na opção *"Open"* (item (2)) e *"File chooser"* (item (3)), que traduzidos para o português significam, respectivamente, abrir e seletor de arquivos.

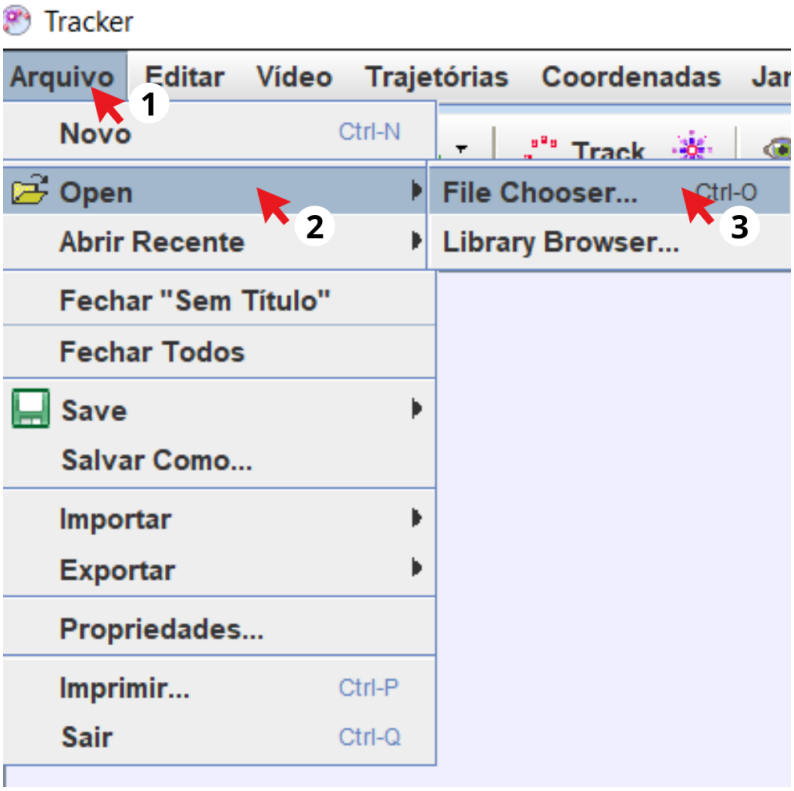


Figura 4.12: Barra de ferramentas superior: Arquivo.
Fonte: A autora.

Após isso, uma janela será aberta com a finalidade de escolher o vídeo que será analisado, conforme a Figura 4.13. Para esse propósito, clicar com o botão esquerdo do *mouse* no item (1), escolher a pasta do dispositivo que o vídeo está localizado. Caso o vídeo esteja dentro de mais uma pasta, clicar duas vezes com o botão esquerdo do *mouse* sobre a pasta desejada, como no item (2), ou clicar apenas uma vez na escolhida (item (2)) e em seguida na opção “abrir” (item (3)).

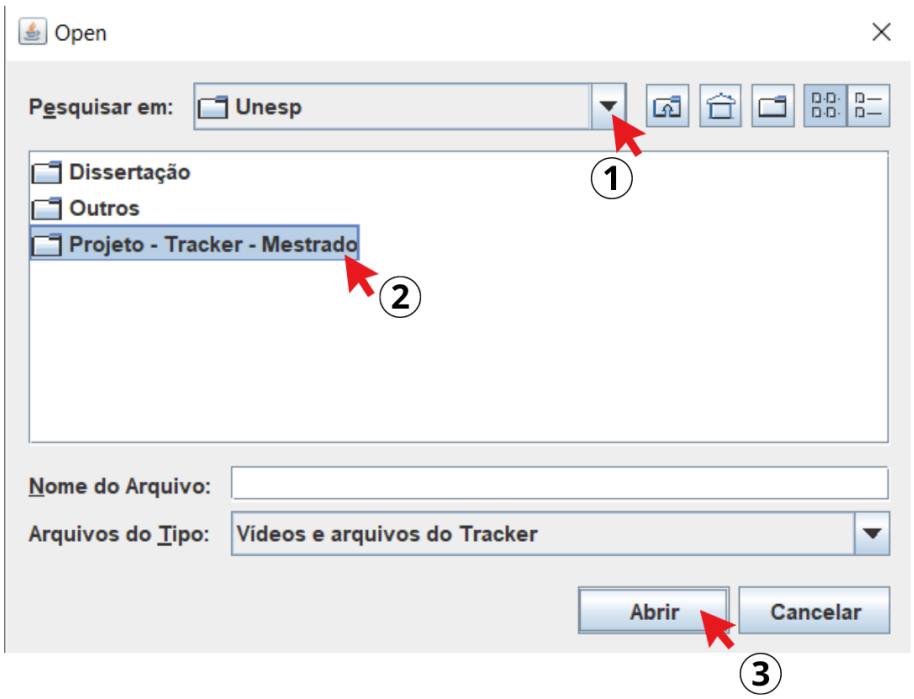


Figura 4.13: Abrir pastas no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Confira a Figura 4.14. Ao abrir a pasta em que o arquivo está localizado, basta selecionar o vídeo que deseja realizar a análise (item (1)) e clicar com o botão esquerdo do *mouse* na opção "abrir" (item (2)).

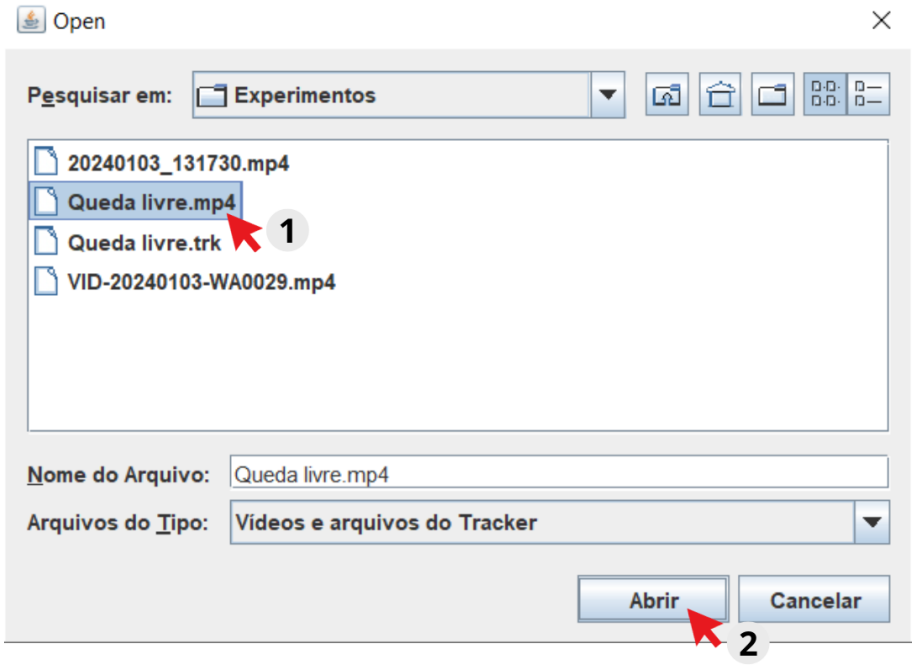


Figura 4.14: Escolher vídeo para análise no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

A Figura 4.15 mostra a janela que abre assim que o vídeo é carregado no *software Tracker*. Uma observação, caso o vídeo aberto no *Tracker* esteja rotacionado, como na

Figura 4.16, será preciso colocar na posição correta. Para isso, clique em vídeo (item (1)), escolha a opção filtros (item (2)), selecione "novo" (item (3)) e escolha a ferramenta rotacionar (item (4)), como apresenta a Figura 4.17. Após isso, a janela da Figura 4.18 abrirá, escolha o grau de rotação do vídeo selecionando as opções disponíveis (item (1)), assim, o vídeo será rotacionado automaticamente.

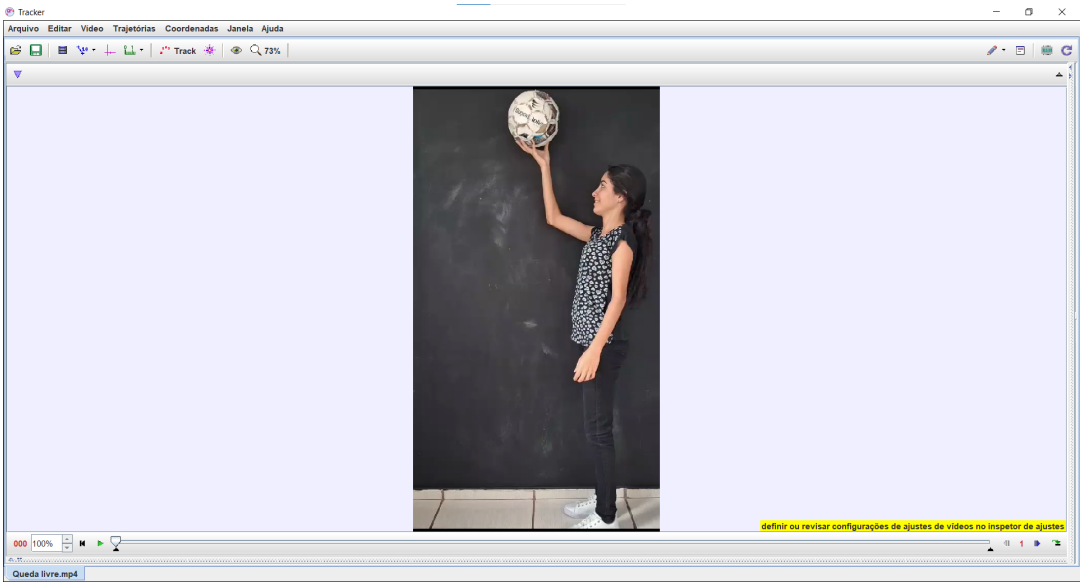


Figura 4.15: Interface com o vídeo carregado.
Fonte: A autora.

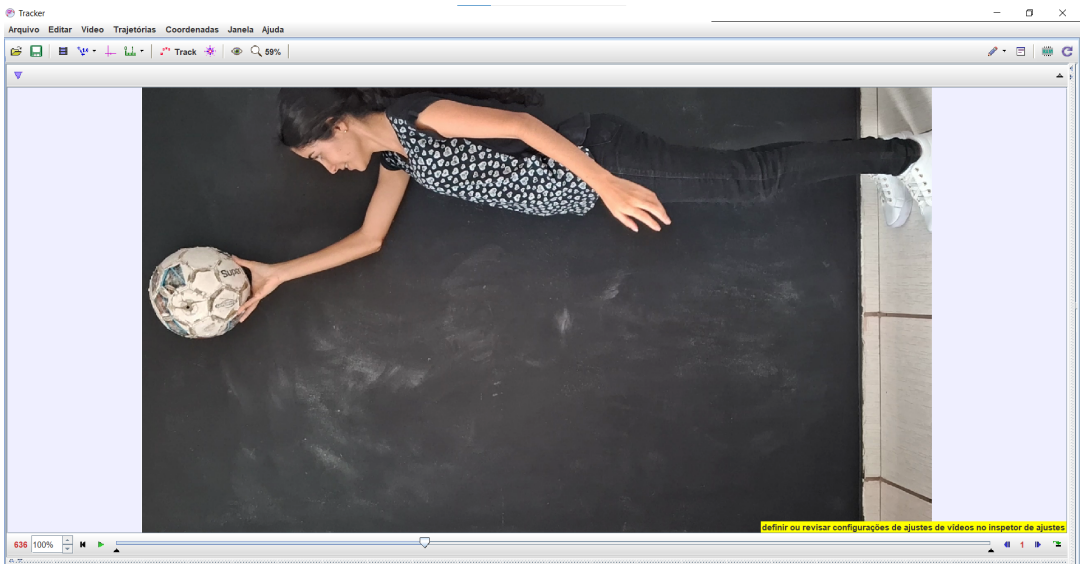


Figura 4.16: Interface com o vídeo rotacionado.
Fonte: A autora.

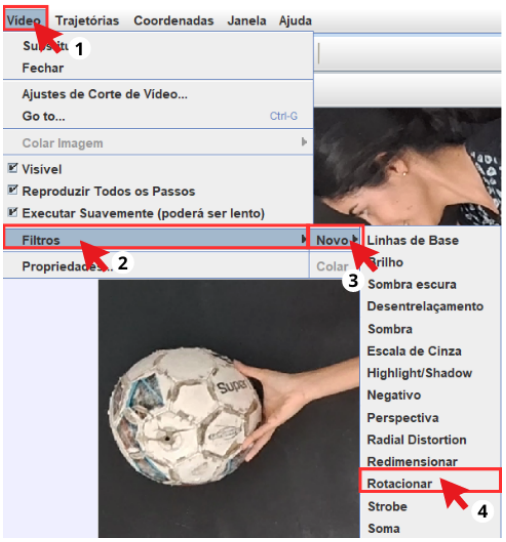


Figura 4.17: Rotacionar vídeo no *Tracker*.
Fonte: A autora.

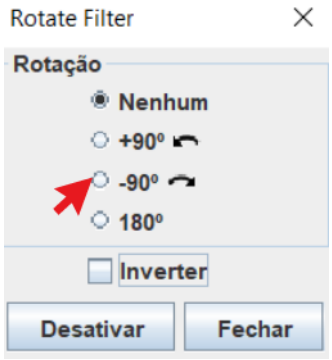


Figura 4.18: Escolher o grau de rotação do vídeo no *Tracker*.
Fonte: A autora.

Veja a Figura 4.19. Para futuras análises, arrastar a barra (item (1)). Assim, aparecerão as telas (item (2) e item (3)), janelas que exibirão os gráficos e tabelas.

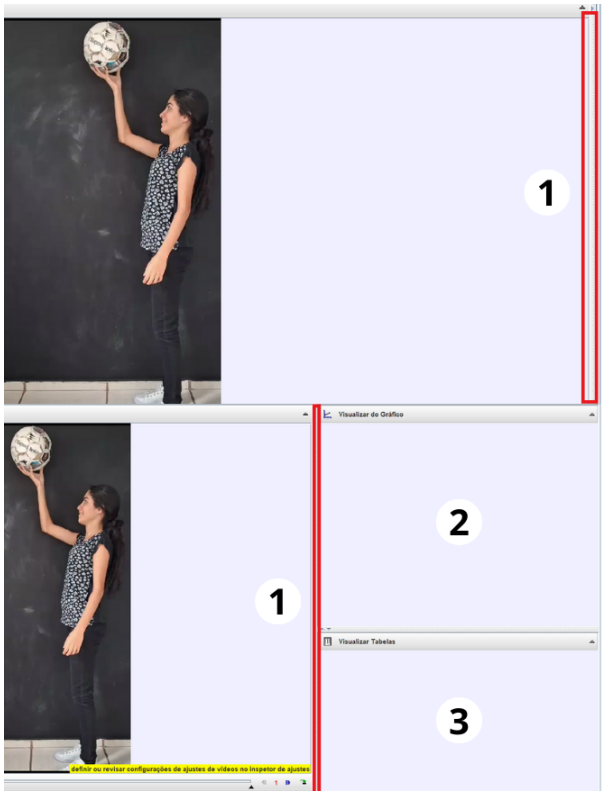


Figura 4.19: Barra da janela de análise.
Fonte: A autora.

Antes de ter os resultados da análise, é preciso ajustar algumas ferramentas. Neste caso, se o vídeo não foi cortado antes de carregá-lo no *software*, será necessário determinar o início e fim da gravação. A escolha do início e fim do vídeo depende, respectivamente, do primeiro e último movimento do objeto que está sendo analisado. Para isso, utilizar a "barra de duração", localizada na barra de ferramentas inferior. Veja a Figura 4.11. Determine o quadro inicial do vídeo arrastando o item (1) até o início desejado, em seguida clicar com o botão direto do *mouse* no item (1) e escolher a opção "Determine este como quadro inicial" (item (2)), confira a Figura 4.20. Analogamente, considerando a Figura 4.21, para determinar o quadro final do vídeo arraste o item (1) até o corte desejado do fim, em seguida clicar com o botão direto do *mouse* no item (1) e escolher a opção "Determine este como quadro final" (item (2)).



Figura 4.20: Determinar o quadro inicial do vídeo no *software Tracker*.
Fonte: A autora.



Figura 4.21: Determinar o quadro final do vídeo no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Verificamos agora como inserir um eixo de coordenadas para referencial. Na barra de ferramentas superior, escolher a opção “eixos de coordenadas”, conforme a Figura 4.22.

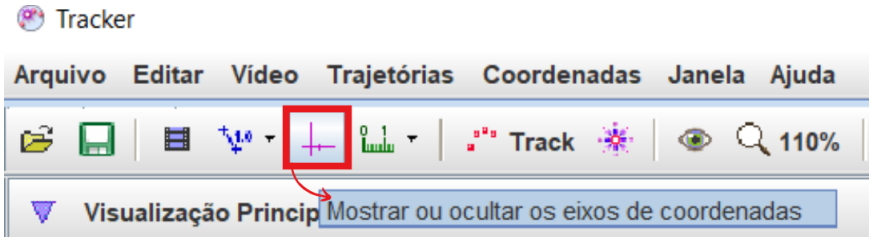


Figura 4.22: Barra de ferramentas superior: eixos de coordenadas.
Fonte: A autora.

Para aplicar o eixo de coordenadas, basta selecionar o centro do eixo e arrastar para o local de origem desejado (Figura 4.23). Além disso, novas opções abrirão na barra de ferramentas superior para configurar o eixo como a grade de fundo, posição do *pixel* de origem e ângulo a partir da horizontal, confira a Figura 4.24. Caso precise rotacionar o eixo de coordenadas, clique no item (1) e rotacione para a angulação desejada, como exemplo do item (2). Ao fazer isso, o grau do eixo de coordenadas mudará, veja o item (3) e (4). Confira todos os passos de rotação na Figura 4.25.

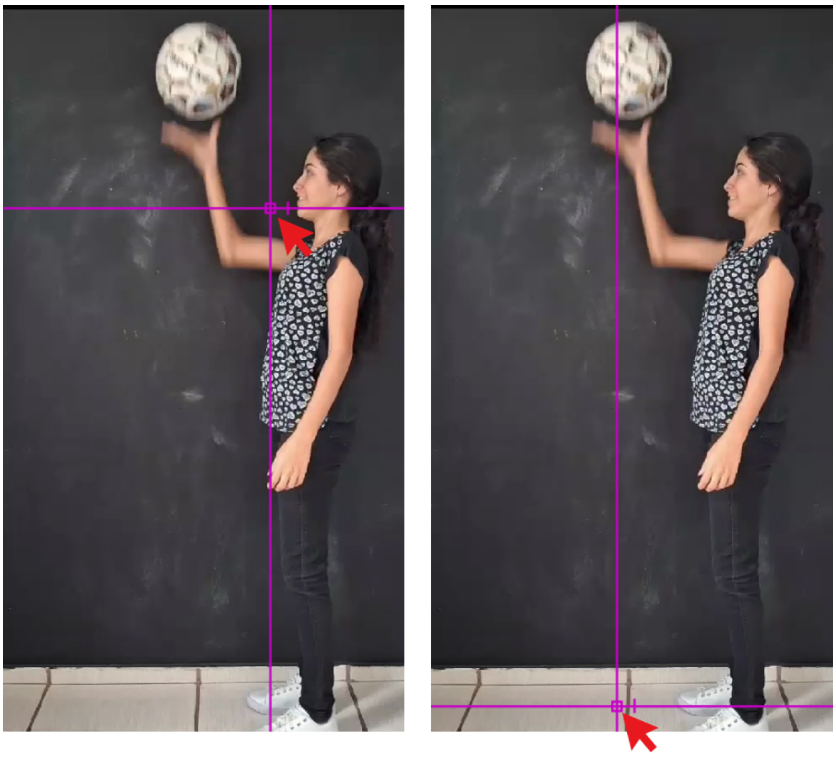


Figura 4.23: Posicionar eixo de coordenadas no *software Tracker*.
Fonte: A autora.



Figura 4.24: Barra de ferramentas superior: opções para configurar eixo.
Fonte: A autora.

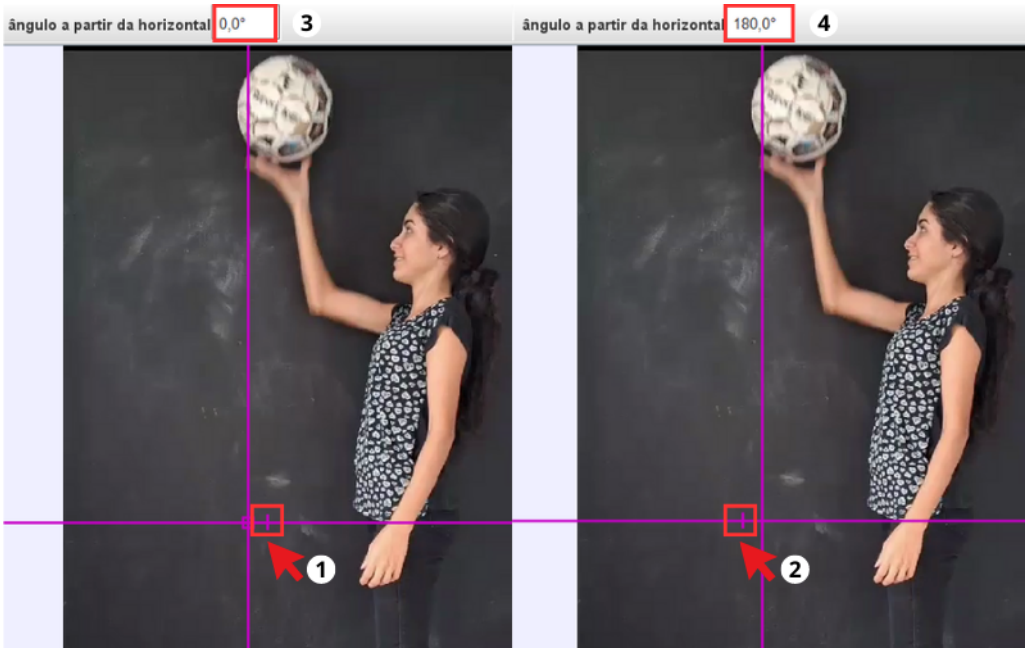


Figura 4.25: Rotação do eixo de coordenadas no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

O processo de calibração do vídeo garante medidas precisas, para isso, utilizar as marcações feitas no vídeo, conforme a subseção 4.2.1. Assim, o *software Tracker* possui ferramentas que possibilitam exibir medidas reais na vídeo-análise. Como na gravação foram utilizados objetos de referência conhecidos, podemos usar a ferramenta "bastão de medição" para adicionar a medida exata.

O bastão de medição está localizado na barra de ferramentas na opção "Fita métrica com transferidor" (Figura 4.26). Para utilizar, conforme a Figura 4.27, clicar com o botão esquerdo do *mouse* no item (1), após isso, selecionar a opção "novo" (item (2)) e, por fim, escolher a opção "bastão de medição" (item (3)).

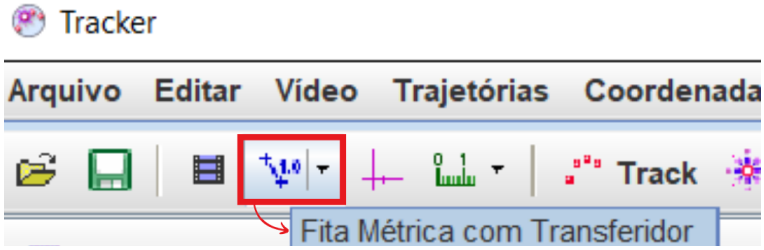


Figura 4.26: Barra de ferramentas superior: fita métrica com transferidor.
Fonte: A autora.

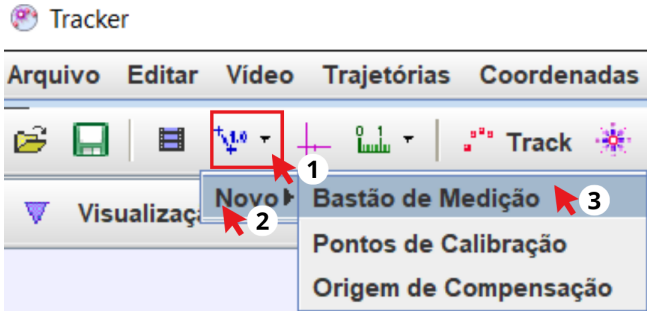


Figura 4.27: Barra de ferramentas superior: bastão de medição.
Fonte: A autora.

Confira a Figura 4.28. O bastão de medição serve para identificar a medida de referência que escolhemos, conforme a seção 4.2.1, adicione-a no item (1). Arraste os itens (2) e (3) exatamente no local desejado do vídeo, pois servem para indicar a distância ou altura da referência utilizada.

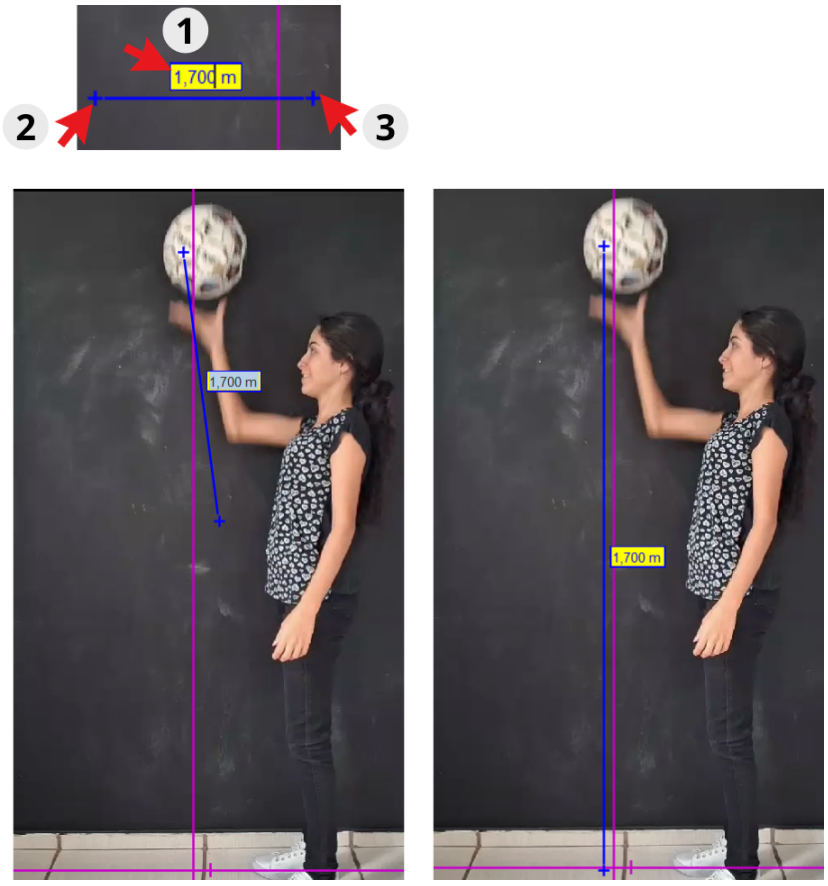


Figura 4.28: Utilizando o bastão de medição no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Na barra de ferramentas superior escolher a opção "ponto de massa", como na Figura 4.29. Para isso, clicar com o botão esquerdo do *mouse* no item (1), após isso, selecionar a opção "novo" (item (2)) e, por fim, escolher a opção ponto de massa, item (3).



Figura 4.29: Barra de ferramentas superior: ponto de massa.
Fonte: A autora.

Após escolher essa função, abrirá a interface exibida na Figura 4.30. Utilize a opção ponto de massa para localizar o objeto que realizará o movimento. Neste momento, verificar se o vídeo está na posição inicial, segurar as teclas "*Ctrl* + *Shift*" e clicar no centro do objeto escolhido para análise. Veja a Figura 4.31.

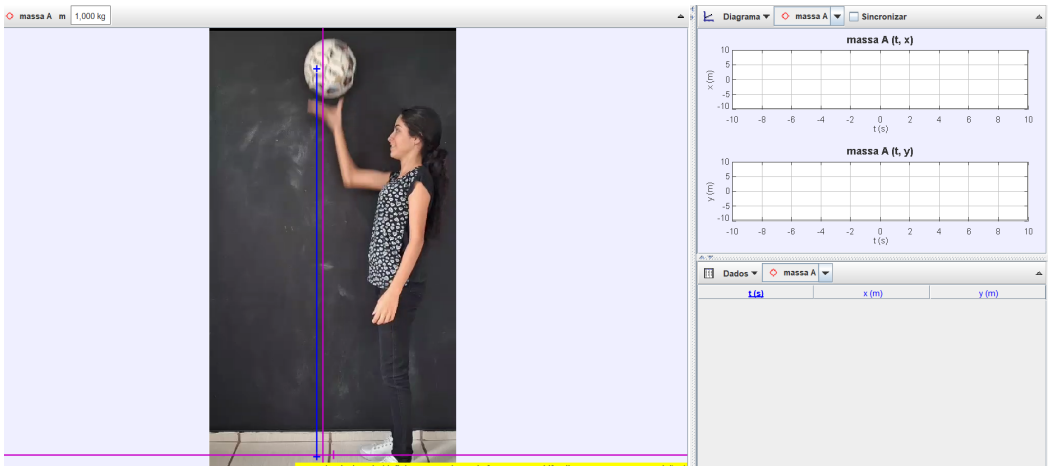


Figura 4.30: Interface ponto de massa.
Fonte: A autora.



Figura 4.31: Marcar objeto com a opção ponto de massa.
Fonte: A autora.

A interface exibida na Figura 4.32 abrirá.

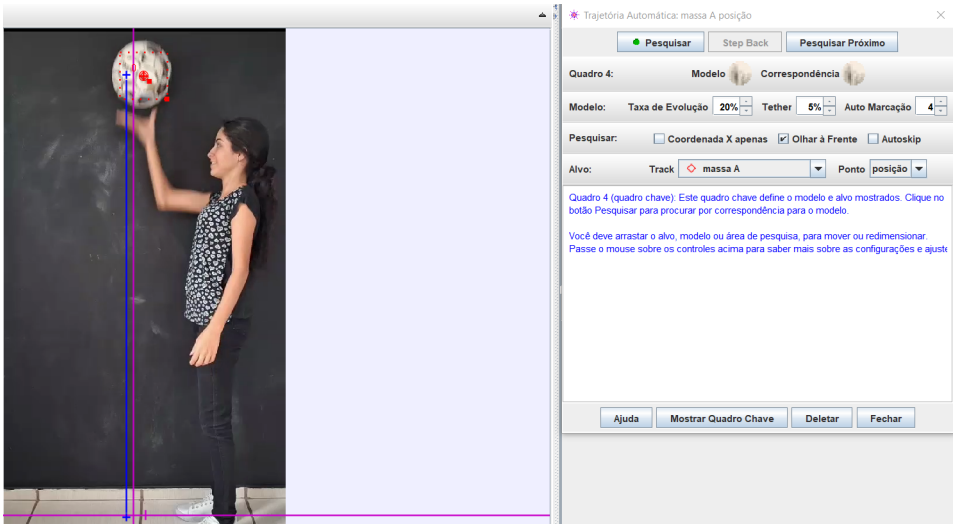


Figura 4.32: Interface após marcar objeto com o ponto de massa.
Fonte: A autora.

Além disso, ao escolher o ponto de massa do objeto, aparecerá o que exibe a Figura 4.33. Com isso, arrastar o item (1) para abrir o campo de rastreio dos dados do movimento.

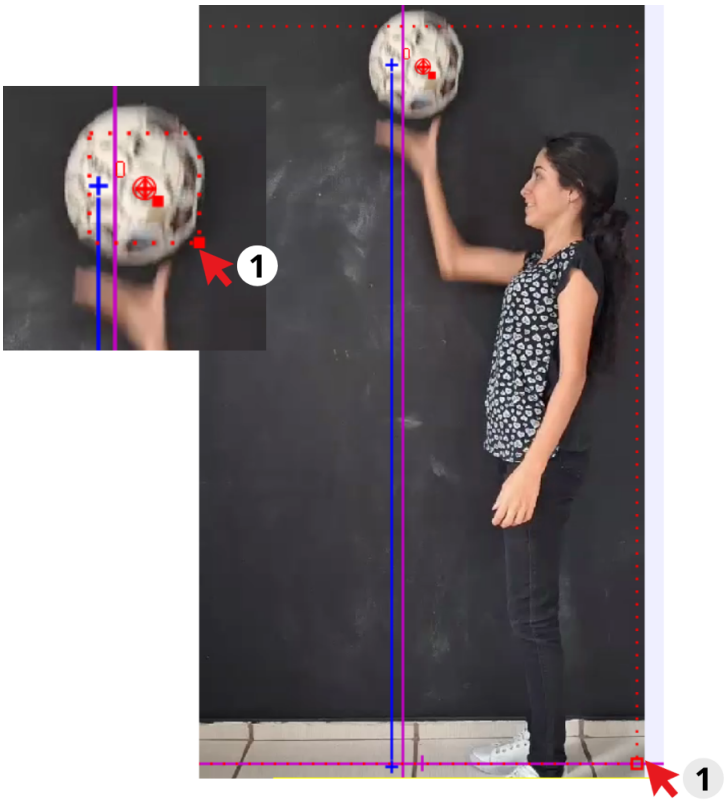


Figura 4.33: Campo de rastreio com a opção ponto de massa.
Fonte: A autora.

Para adicionar pontos de rastreamento a objeto no vídeo, clicar em "pesquisar", como mostra a Figura 4.34.

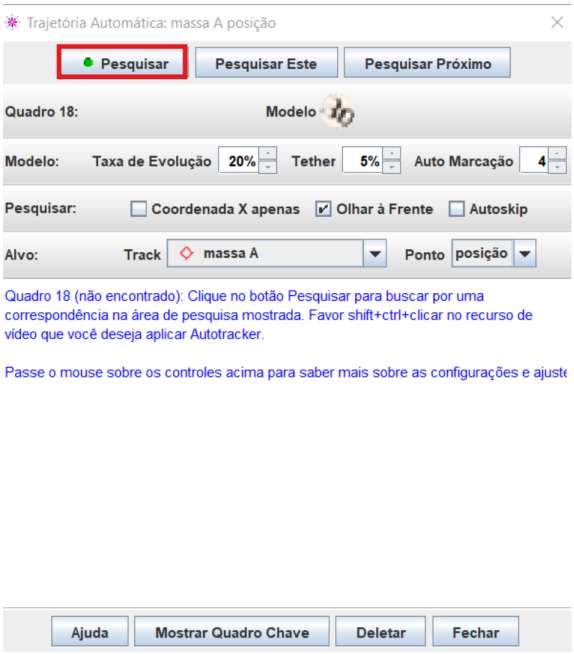


Figura 4.34: Ferramenta pesquisar no *Tracker*.
Fonte: A autora.

A partir disso, começará automaticamente o rastreio dos pontos do movimento esco-

lhido (Figura 4.35). Essas marcações são feitas a cada quadro do vídeo. Uma observação a ser feita é que esses pontos serão importantes para identificar qual curva utilizaremos para realizar a análise. Ressaltamos que caso o rastreio automático apresente erros, pode ser feito o processo manualmente. Para isso, selecione a função ponto de massa, segure a tecla *Shift* e clique no centro do objeto ou no local escolhido, desde que seja o mesmo em todos os quadro, deixando todos os pontos o mais alinhado possível, como a Figura 4.36 .



Figura 4.35: Rastreio de pontos no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

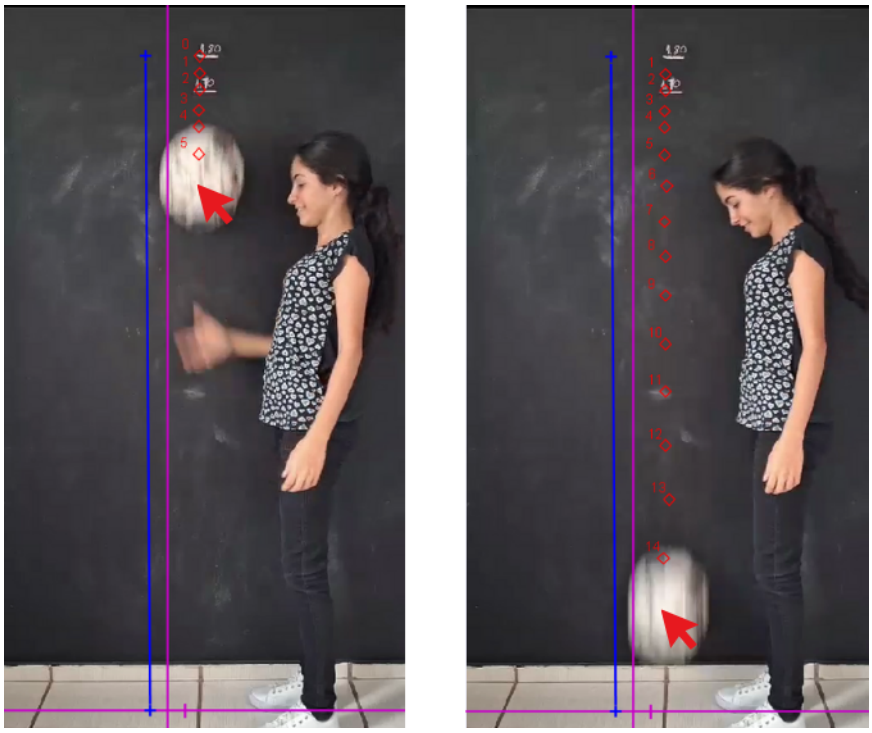
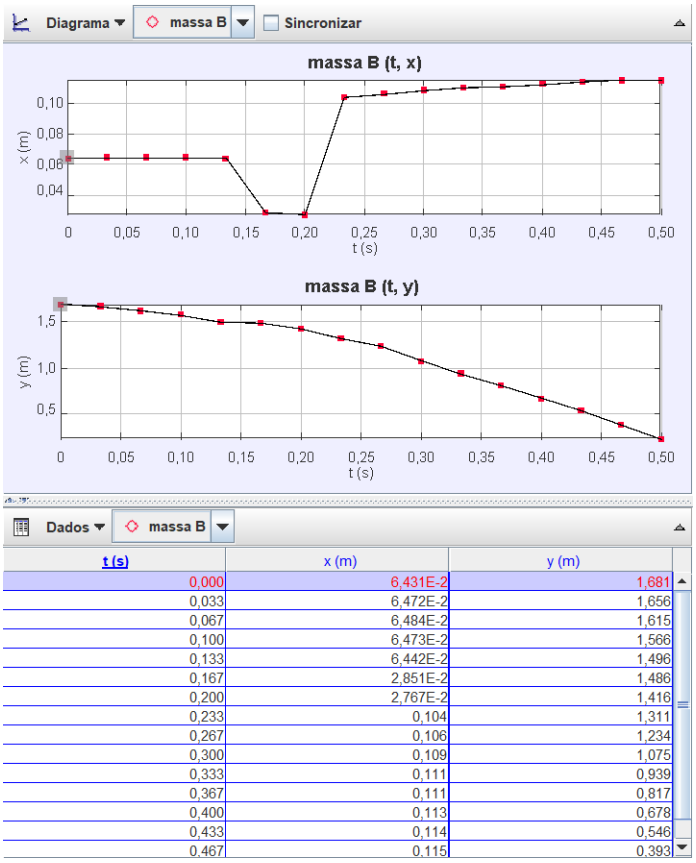


Figura 4.36: Rastreio de pontos manual no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Através do rastreio de pontos, cria-se dois gráficos, um em relação ao eixo x e outro em relação ao eixo y, pelo tempo. Com isso, uma tabela com os dados é criada. Segue a Figura 4.37.



t (s)	x (m)	y (m)
0,000	6,431E-2	1,681
0,033	6,472E-2	1,656
0,067	6,484E-2	1,615
0,100	6,473E-2	1,566
0,133	6,442E-2	1,496
0,167	2,851E-2	1,486
0,200	2,767E-2	1,416
0,233	0,104	1,311
0,267	0,106	1,234
0,300	0,109	1,075
0,333	0,111	0,939
0,367	0,111	0,817
0,400	0,113	0,678
0,433	0,114	0,546
0,467	0,115	0,393

Figura 4.37: Gráficos e tabela gerados através do rastreio de pontos no *software Tracker*. Fonte: A autora.

Pela natureza do experimento queda livre, o qual estamos usando como exemplo, apenas nos interessa o movimento vertical, então o gráfico que iremos analisar será em relação a (t, y). Para abrir a janela de análise, basta clicar duas vezes com o botão esquerdo do *mouse* sobre o gráfico escolhido, assim abrirá a janela "ferramenta de dados". Veja a Figura 4.38.

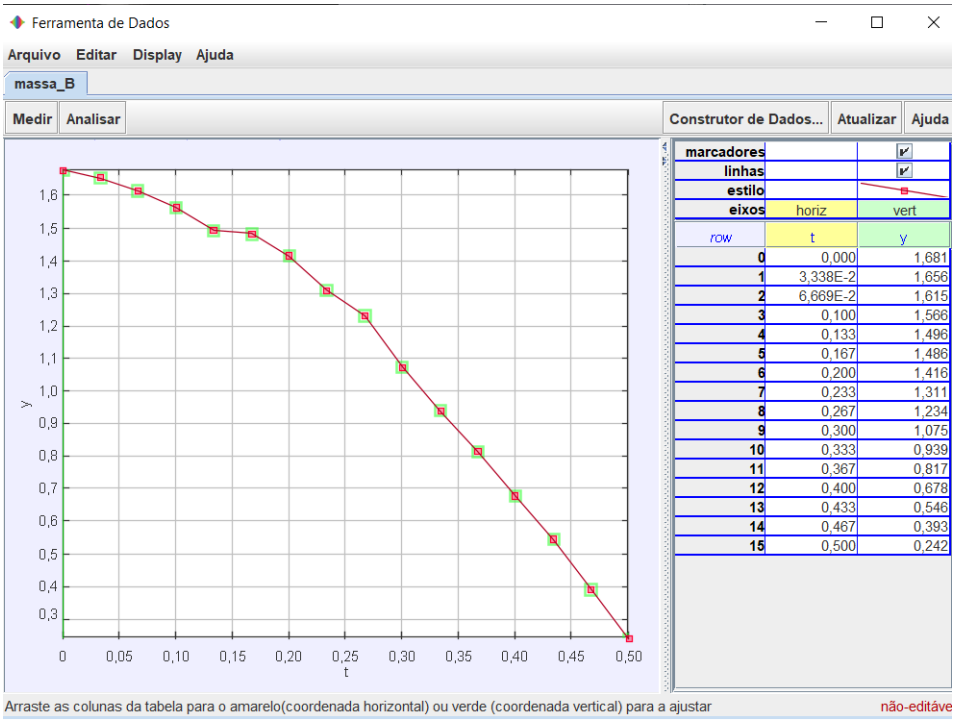


Figura 4.38: Janela "ferramenta de dados" no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Confira a Figura 4.39. Para realizar a análise, clicar com o botão esquerdo do *mouse* na opção "analisar" (item (1)), ajuste de curva (item (2)) e escolher a curva que mais se aproxima do gráfico gerado do experimento (item (3)).

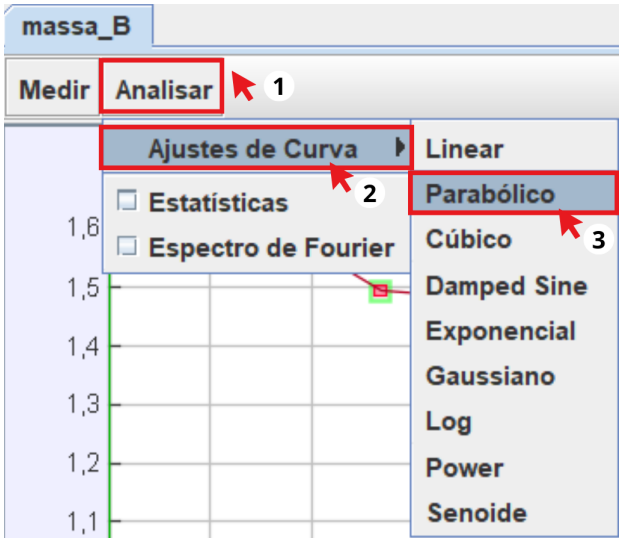


Figura 4.39: Janela "ferramenta de dados" no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Neste caso, escolhemos a opção parabólico como ajuste de curva, os dados são apresentados nos itens (1) e (2) para serem extraídos e analisados na seção 4.4, conforme a Figura 4.40.

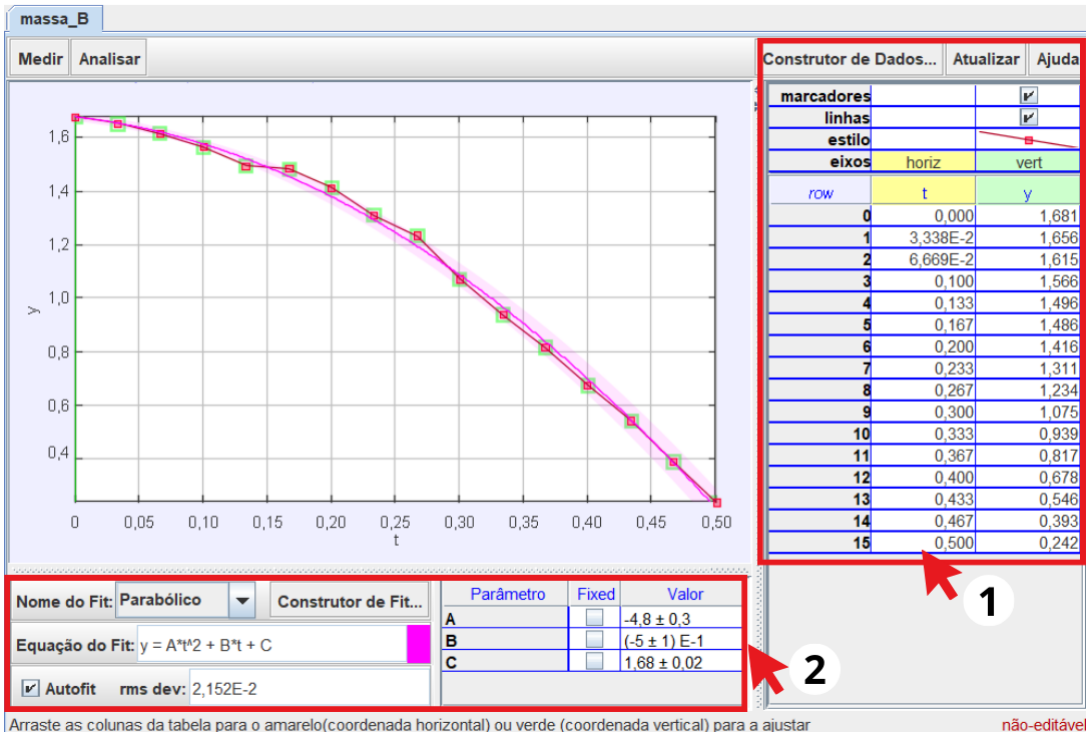


Figura 4.40: Janela "ferramenta de dados" no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Um detalhe que pode ajudar na hora de extrair os valores dos parâmetros é desmarcar a opção "*Autofit*" (item (1)), pois os valores serão aproximados (item (2)) tirando também a variação na curva (item (3)), como apresenta a Figura 4.41.

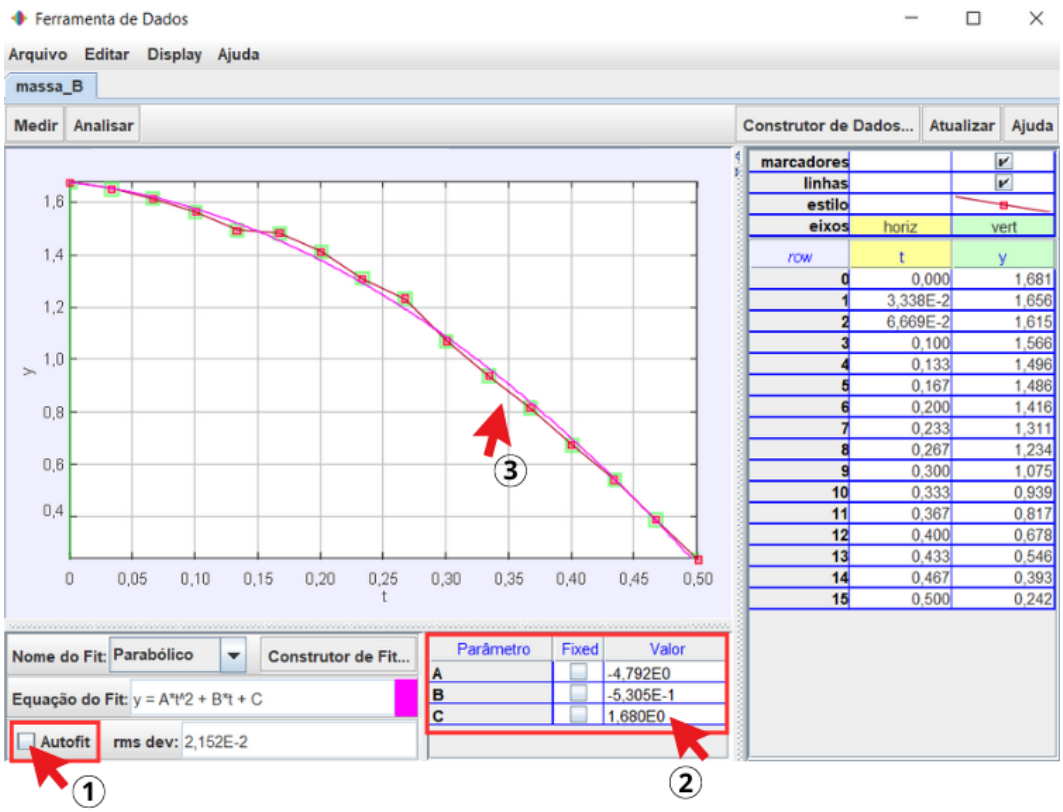


Figura 4.41: Desmarcar a ferramenta *autofit* no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Analisando os dados da Figura 4.40, temos, pelo item (2), a lacuna "Equação do *Fit*". Neste caso, a curva gerada foi uma parábola definida por $y = At^2 + Bt + C$, sendo $A = -4,8$, $B = -0,5$ e $C = 1,68$. Além disso, o item (2), apresenta a lacuna "rms dev", este número surge através do ajuste de curva, o qual representa o desvio padrão da raiz do erro quadrático médio, como afirma Monteiro (2021). No experimento realizado, como exemplo, o valor do "rms dev" foi de 0,0215.

Antes de abrir o próximo *software*, mude a escala do gráfico para que fique parecido com o do Geogebra que será analisado posteriormente. Essa função é ativada ao clicar com o botão direito do *mouse* em cima do gráfico e escolha a opção "*scale*", como mostra a Figura 4.42. Desative a opção de "auto" (automático) para alterar as informações da escala, de acordo com o seu experimento, a Figura 4.43 mostra um exemplo e clique em "*OK*". A partir disso, a escala do gráfico mudará, confira a Figura 4.44.

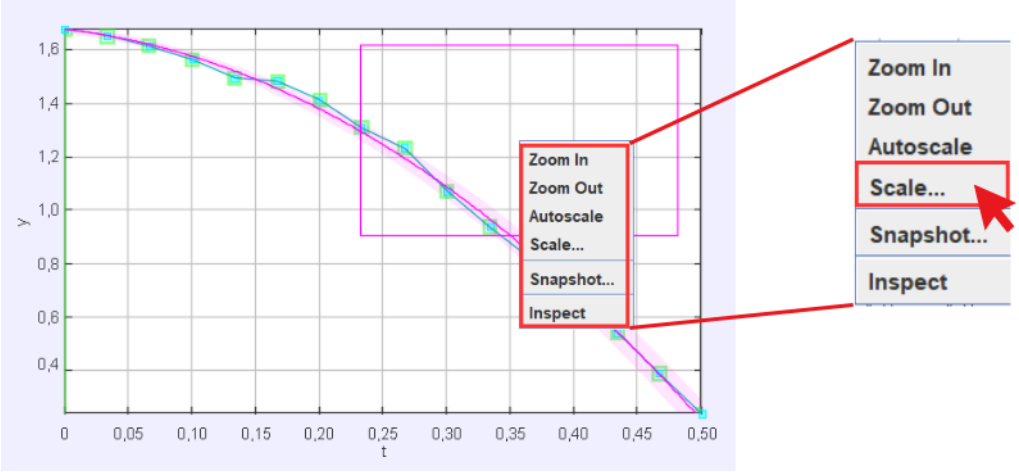


Figura 4.42: Mudar escala do gráfico no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

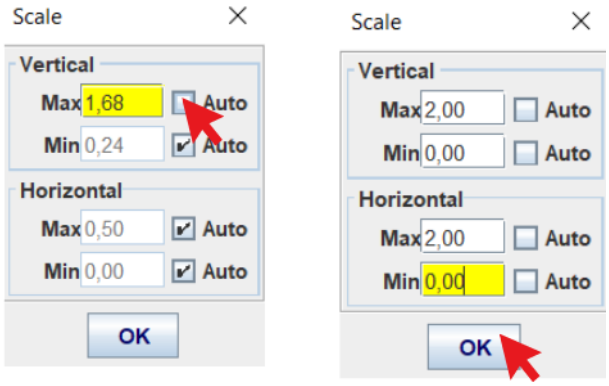


Figura 4.43: Mudando informações de escala do gráfico no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

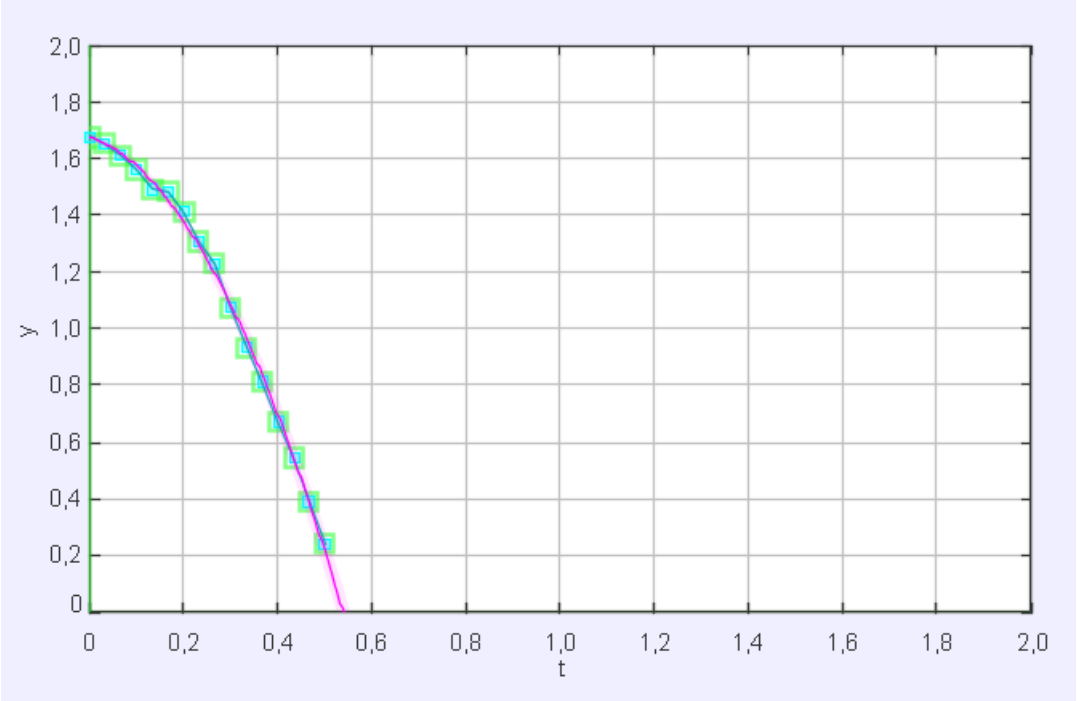


Figura 4.44: Informações de escala do gráfico alteradas no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

Por fim, clique em "X" para fechar a aba de análise. Em seguida, para salvar a vídeo-análise feita, veja a Figura 4.45, clicar na opção "arquivo" (item (1)) na barra de ferramentas superior e escolher a opção "salvar como" (item (2)). De acordo com a Figura 4.46, escolher a pasta para salvar (item (1)), o nome do arquivo (item (2)) e clicar em "salvar" (item (3)).

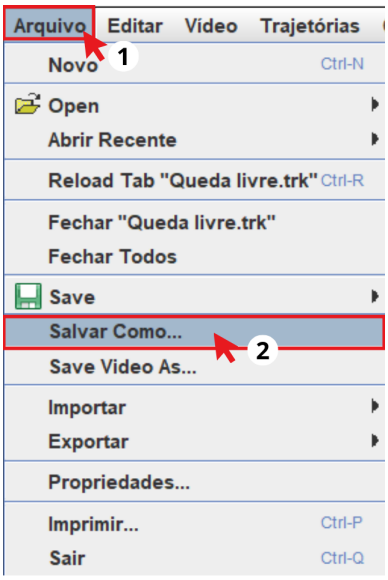


Figura 4.45: Salvar arquivo no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

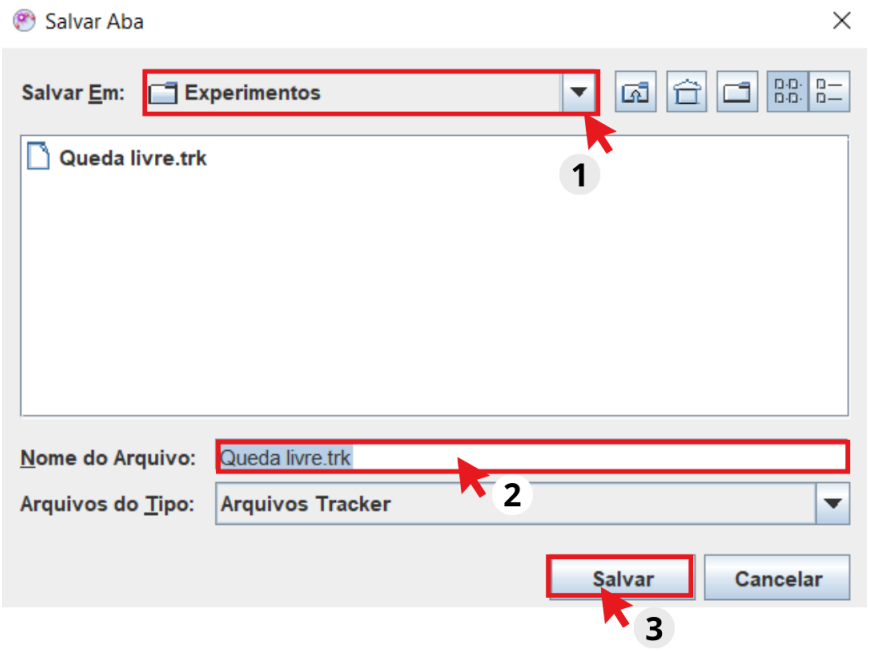


Figura 4.46: Aba salvar no *software Tracker*.
Fonte: A autora.

4.3 O Geogebra

O Geogebra é um *software* de matemática dinâmica que possui inúmeras aplicações a partir das ferramentas disponíveis no ambiente do usuário. Além disso, este *software* é de fácil acesso e livre para uso, por ser gratuito. A partir disso, os professores podem utilizar o Geogebra em laboratórios de informática ou em sala de aula e, por possuir uma interface simples, os estudantes rapidamente podem se habituar com as ferramentas do *software*, como aponta Goulart (2020).

De acordo com Abar e Almeida (2017), o Geogebra evoluiu muito com a sua utilização em aplicações na matemática. Este *software* está disponível para computadores, *smartphones*, quadros digitais, plataformas *online*, entre outros. O Geogebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, no início de 2001, na *University of Salzburg*, na Áustria, como comentam Hellmann et al. (2016).

O *site* oficial do Geogebra (<https://www.geogebra.org/?lang=pt>) disponibiliza gratuitamente materiais didáticos, aplicativos, entre outras ferramentas para serem utilizadas pelo usuário. A plataforma possui muitas funções para serem exploradas em diversas áreas da matemática. Segue a Figura 4.47.

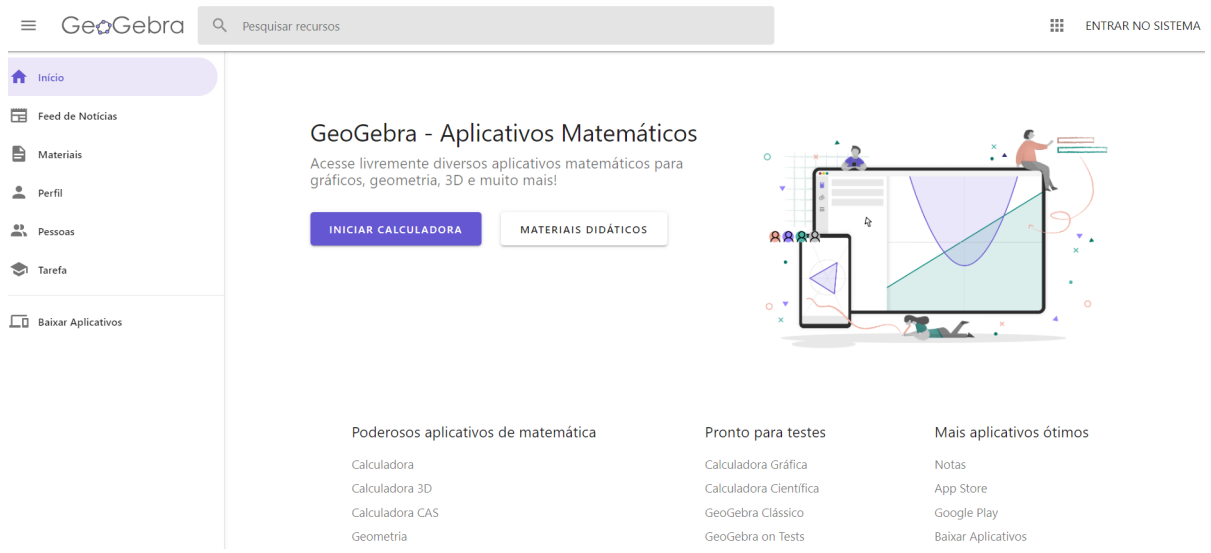


Figura 4.47: Interface do site oficial do Geogebra.
Fonte: A autora.

O Geogebra possui diferentes versões para cada necessidade e propósito. Por exemplo, o Geogebra Clássico, calculadora gráfica ou científica, geometria, entre outros. Veja todas as opções disponíveis na Figura 4.48.

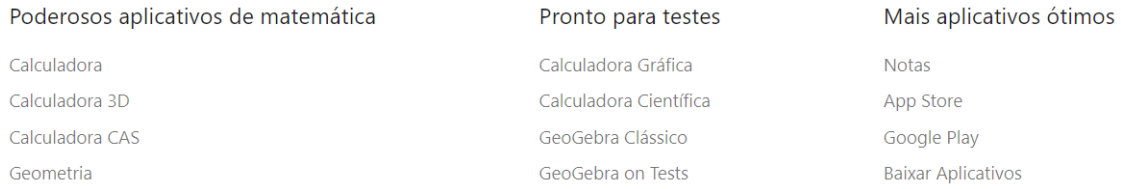


Figura 4.48: Versões do Geogebra.
Fonte: A autora.

Neste estudo, utilizaremos a opção "Geogebra Clássico" na versão *online*, item (1) da Figura 4.49, caso desejar é possível baixar os aplicativos em seu dispositivo (item (2)). Na aba "baixar aplicativos Geogebra" escolher a opção que deseja realizar o *download* (Figura 4.50) e seguir os passos para instalação. Tanto a versão para *download* quanto a *online* são opção gratuitas.



Figura 4.49: Geogebra Clássico na versão *online* ou baixar aplicativos.
Fonte: A autora.

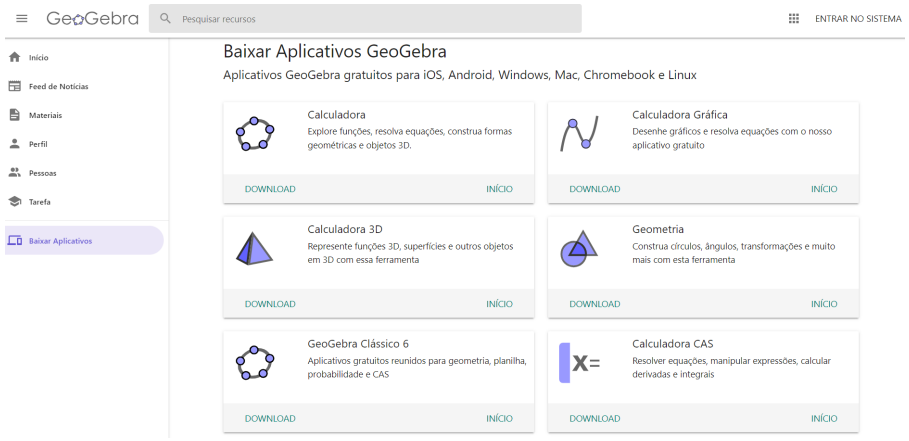


Figura 4.50: Baixar aplicativos no Geogebra.
Fonte: A autora.

Para utilizar o Geogebra Clássico *online*, basta clicar no item (1) apontado na Figura 4.49, assim a interface inicial abrirá conforme a Figura 4.51.

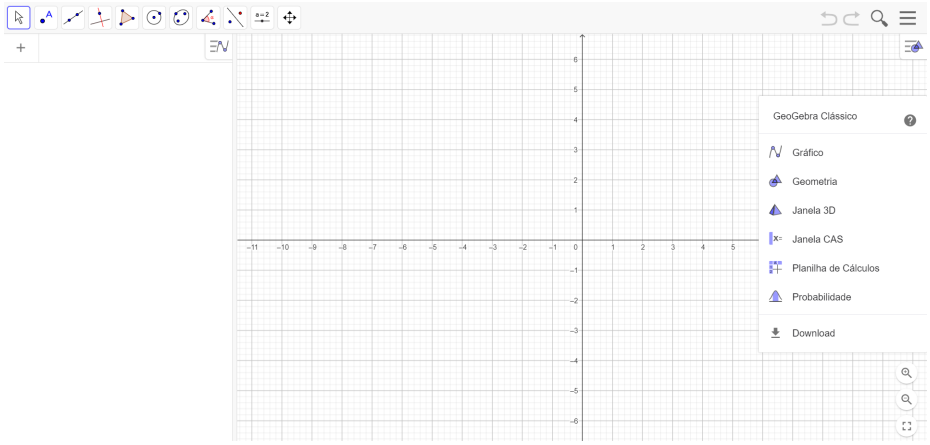


Figura 4.51: Interface inicial do Geogebra Clássico *online*.
Fonte: A autora.

Os projetos do Geogebra *online* são salvos em uma nuvem, siga o passo a passo exibido nas Figuras 4.52 e 4.53. Na Figura 4.53, observe a opção de *login* (item (1)), mas se for o primeiro acesso, é necessário realizar um cadastro (item (2)).

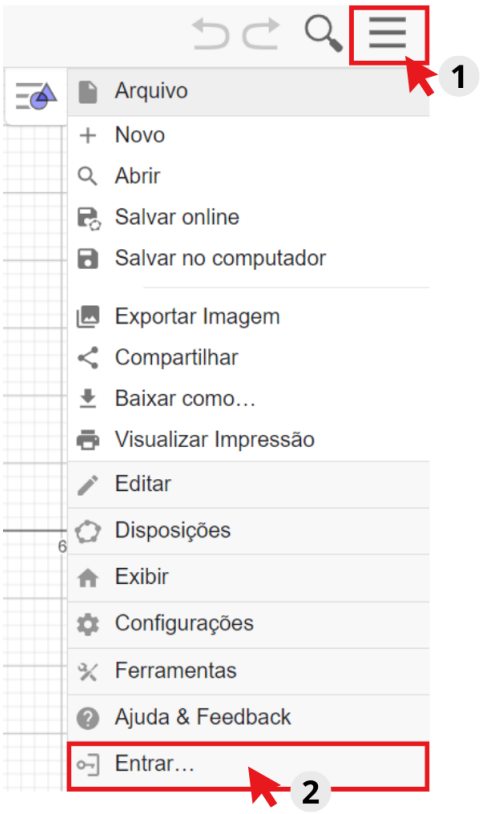


Figura 4.52: Menu para acessar o *login* do Geogebra Clássico *online*.
Fonte: A autora.



Figura 4.53: Realizando o *login* no Geogebra Clássico online.
Fonte: A autora.

Apresentaremos algumas ferramentas básicas do Geogebra Clássico *online* na seção 4.4.

4.3.1 Geogebra no ensino

O Geogebra é um *software* que possibilita utilizar cálculo algébrico e simbólico na mesma interface, assim pode-se estudar geometria plana e geometria tridimensional juntas. A plataforma facilita explorar a área de ciências exatas, pois possui interfaces que permitem a construção de objetos matemáticos. Martins Júnior (2015), ressalta que é

possível utilizar variáveis para números, pontos, vetores, derivadas e integrais de funções no Geogebra, além disso o *software* oferece comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. O autor ainda afirma que a plataforma disponibiliza ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas a álgebra e cálculo, possibilitando representar didaticamente na mesma interface as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Apesar do Geogebra ser um recurso tecnológico, sua utilização colabora no desenvolvimento de conceitos matemáticos, pois o *software* precisa de um usuário para realizar os experimentos, como afirmam Abar e Almeida (2017). Além disso, Hellmann et al. (2016) confirmam dizendo que o Geogebra permite realizar animações durante a exploração e que isso facilita o entendimento do aluno, por exemplo, em variações que ocorrem com algumas funções. Martins Júnior (2015), diz que durante o processo de exploração, o aluno tem a oportunidade de fazer conjecturas, rever definições, conceitos, propriedades e exemplos, pois o Geogebra, com suas ferramentas, permite interação com conceitos matemáticos.

Gonçalves (2012) argumenta que o *software* Geogebra é uma vantagem didática quando simultaneamente apresenta representações diferentes para o mesmo objeto, ou seja, cada objeto criado na interface geométrica possui uma correspondência na interface algébrica. Os objetos criados podem ser manipulados, podendo ser movidos sem mudar suas propriedades. Por conta disso, Gonçalves (2012) afirma que o Geogebra é considerado um *software* de geometria dinâmica. O Geogebra reúne ferramentas de geometria, álgebra, estatística e cálculo em uma única interface do *software*, por essa razão, Gonçalves (2012) considera a plataforma adequada para ser utilizada em diversos níveis da educação, desde o ensino fundamental ao ensino superior.

No ensino superior, em especial, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, os alunos apresentam dificuldades em diversos conceitos matemáticos. Os autores Hellmann et al. (2016), consideram que as dificuldades estão explicitamente apresentadas nessa disciplina por conta do grau de abstração e a necessidade de representações gráficas e algébricas. Em seus estudos, Hellmann et al. (2016) realizam uma pesquisa com alunos do ensino superior e a maioria afirma ter dificuldades em representações gráficas, além disso, os estudantes salientam que o manual desenvolvido pelos autores, que utilizam Geogebra, auxiliaria nas representações e ajudaria na verificação de exercícios resolvidos em sala. Diante disso, consideramos que o *software* Geogebra pode auxiliar os alunos em seu processo de aprendizagem, sendo possível desenvolver habilidades e diminuir dificuldades de visualização na matemática.

O Geogebra é um *software* prático que permite realizar explorações e simulações de exercícios, sendo útil também na verificação em questões resolvidas manualmente, como comentam Hellmann et al. (2016). Os alunos dos autores deram as seguintes considerações: "é possível verificar o que acontece no gráfico, quando alteramos um número ou um sinal" ou "o Geogebra ajuda a representar e calcular gráficos que demorariam muito tempo para fazer manualmente".

Gonçalves e Reis (2013), afirmam que aplicações dos conceitos de Cálculo podem ser úteis no processo de aprendizagem, mas também servem para motivar os alunos no ensino. Ainda comentam que existe uma preocupação por parte de alguns pesquisadores com o ensino desta disciplina e que essa aflição só aumenta tanto no cenário nacional quanto internacional.

Diante disso, o computador pode ser uma ferramenta que auxilia o professor em sala de aula, pois as diversas opções tecnológicas permitem uma exploração do tema pelos alunos. Os autores Hellmann et al. (2016) afirmam que o uso de computadores pode enri-

quecer os ambientes de aprendizagem, auxiliando os alunos no processo de construção do conhecimento. Com isso, o Geogebra apresenta ferramentas de exploração que contribuem para entender conceitos matemáticos a partir da geometria dinâmica.

4.4 Funções essenciais no Geogebra

A partir da vídeo-análise produzida no *software Tracker* utilizaremos os dados coletados para estudá-los no Geogebra. A curva gerada pelo *Tracker* foi $f(t) = -4,8t^2 - 0,6t + 1,68$, antes de analisá-la é preciso conhecer o *software* que será utilizado. A seguir, descreveremos as ferramentas do Geogebra que manusearemos para estudar a função $f(t)$ encontrada.

O Geogebra possui muitas versões e ferramentas disponíveis para cada tipo de estudo. Como visto na seção 4.3, utilizaremos a versão *online* do Geogebra *Classic*. Sua interface é simples, mas possui muitas ferramentas. Por isso, daremos foco apenas para as opções que utilizaremos neste estudo. Podemos dividir a interface do Geogebra em três partes: esquerda, direita e central, como na Figura 4.54.

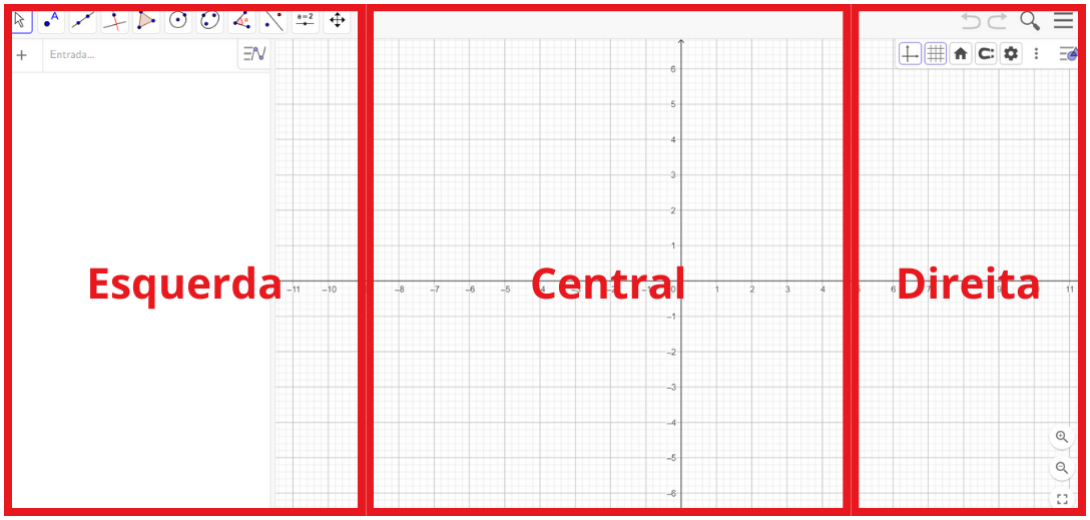


Figura 4.54: Interface do Geogebra dividida em três partes: esquerda, direita e central.
Fonte: A autora.

A partir dos dados coletados no *software Tracker*, seção 4.2.2, utilizaremos o Geogebra para o estudo da função que melhor descreve o movimento do fenômeno que está sendo analisado. Para tanto, a curva gerada no *Tracker*, será adicionada na opção "entrada", localizada na interface esquerda do Geogebra. Confira a Figura 4.55.

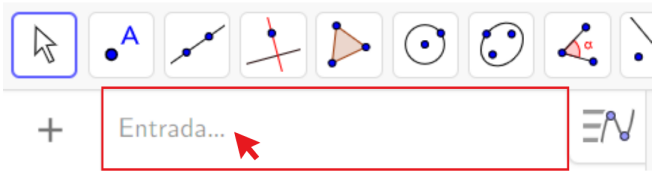


Figura 4.55: Interface esquerda: opção "entrada" no Geogebra.
Fonte: A autora.

Ao adicionar a curva $f(t) = -4,8t^2 - 0,6t + 1,68$ na opção "entrada", apertar a tecla "enter". Em seguida, o gráfico da função será gerado automaticamente (Figura 4.56). Além disso, para adicionar funções como seno, cosseno e tangente, basta utilizar a mesma entrada do Geogebra. Porém, precisa escrever as iniciais das palavras para dar o comando, por exemplo, "sen" (item (1)) de seno e clicar nos itens (1) e (2), confira Figura 4.57). Para adicionar elementos na lei da função seno, comece com os termos de dentro do parenteses (item (1)) e acrescente o restante depois, como o item (2), veja a Figura 4.58.

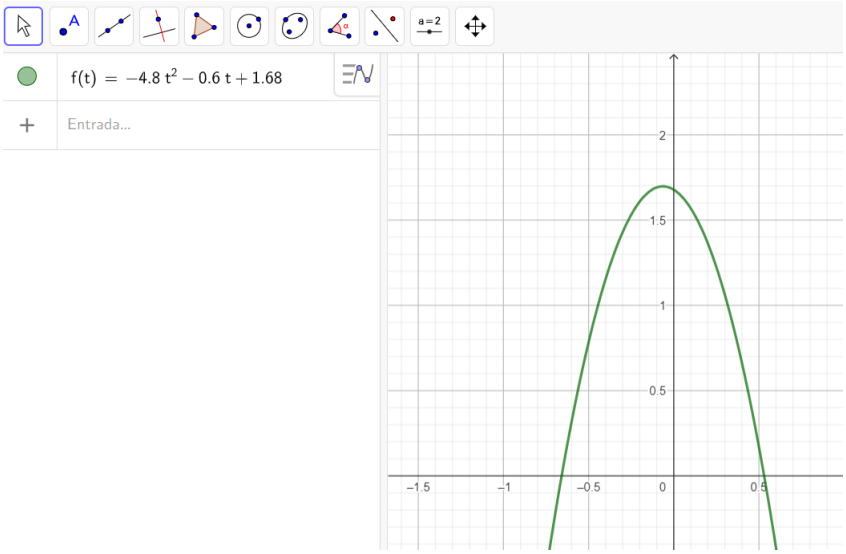


Figura 4.56: Gráfico gerado no Geogebra.
Fonte: A autora.



Figura 4.57: Função seno no Geogebra.
Fonte: A autora.

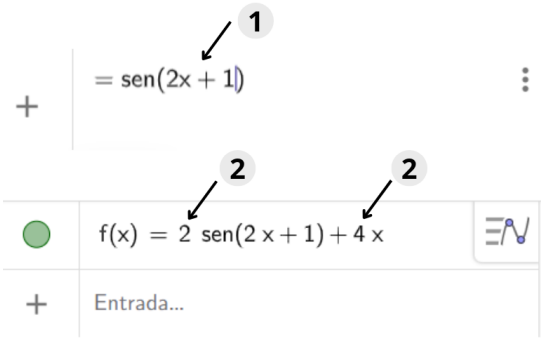


Figura 4.58: Elementos da função seno no Geogebra.
Fonte: A autora.

Voltemos a trabalhar com a curva $f(t) = -4,8t^2 - 0,6t + 1,68$. Caso precise selecionar um intervalo para delimitar a curva, basta adicionar na frente da função $f(t)$ o termo "$, a < t < b$", sendo a e b os extremos do intervalo de tempo, como apresenta a figura 4.59. O gráfico da curva será delimitado como apresenta a figura 4.60.



Figura 4.59: Delimitar intervalo na curva.
Fonte: A autora.

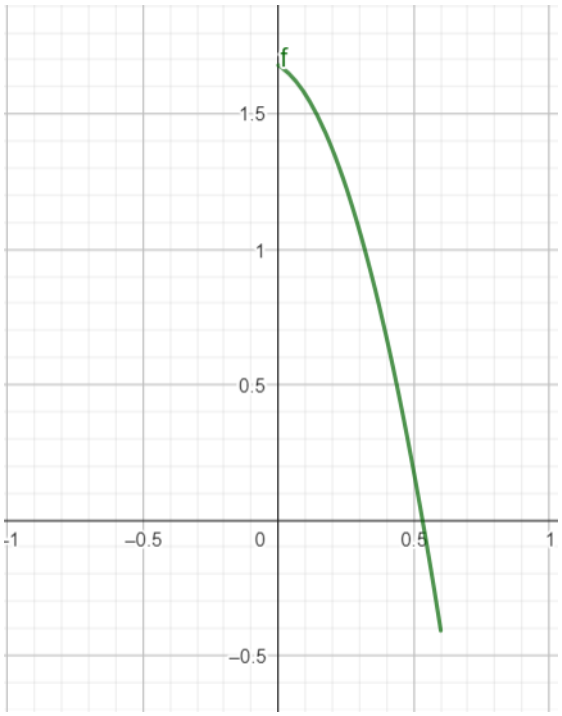


Figura 4.60: Curva delimitada pelo intervalo.
Fonte: A autora.

Confira a Figura 4.61. Para ocultar a grade de fundo, clicar com o botão esquerdo na interface central, escolher a opção "exibir malha" (item (1)) e "sem malha" (item (2)).

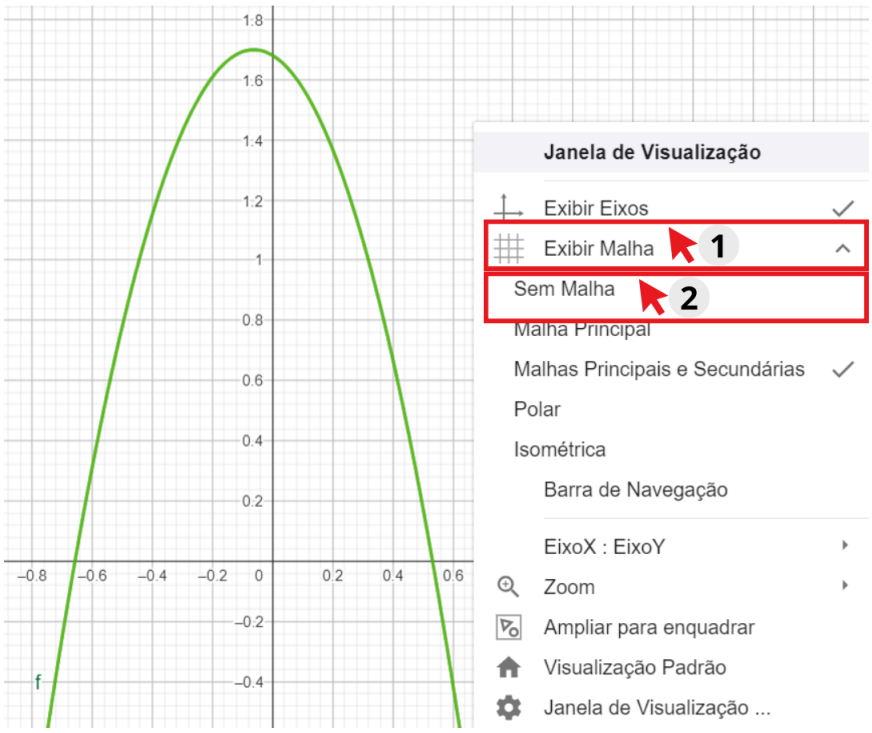


Figura 4.61: Exibir malha no Geogebra.
Fonte: A autora.

De acordo com a curva $f(t)$, extraída do *Tracker*, vamos criar uma planilha de pontos. Esse passo é importante, pois conseguiremos exibir os pontos sobre a curva que proporcionará o estudo de retas secantes. Além disso, esse processo será utilizado para estudarmos retas tangentes, o qual relacionaremos com a derivada. A opção "planilha" (item (3)) fica localizada na interface direita do Geogebra, para encontrar essa ferramenta seguir os passos da Figura 4.62.

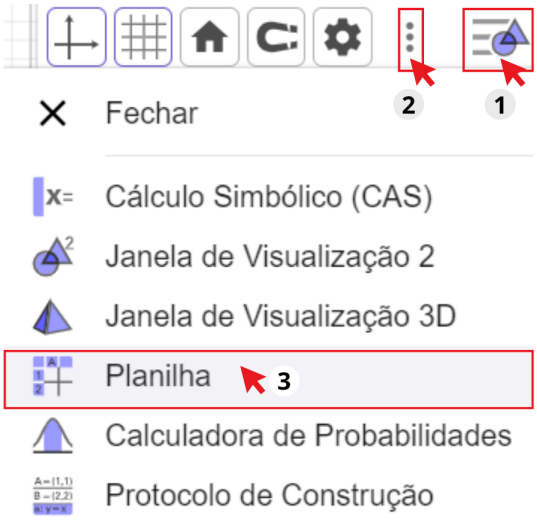


Figura 4.62: Interface direita: opção "planilha" no Geogebra.
Fonte: A autora.

A partir disso, abrirá uma planilha na interface direita. Assim, nas duas primeiras colunas, informar a variável independente t e a variável dependente $f(t)$, na qual $f(t)$

deve ser apresentada igual a da curva da "entrada". Segue a Figura 4.63.

	A	B
1	t	$-4.8\,t^2 - 0.6\,t + 1.68$
2		
3		
4		

Figura 4.63: Adicionar valores na "planilha" no Geogebra.
Fonte: A autora.

Adicionar na célula A2 o valor 0. Em seguida, na célula A3 realizar a operação $[= 0.03 + A2]$, o mesmo acontece para a célula A4, realizando a operação $[= 0.03 + A3]$, confira a Figura 4.64. Para adicionar essa operação de forma automática, clicar uma vez na célula A4 e arrastar até um valor de t que julgar válido para a análise, sendo que este valor posteriormente pode ser aumentado ou diminuído (Figura 4.65). Um detalhe importante é referente ao incremento $0,03$, este valor é a variação de tempo entre cada quadro do vídeo, sendo que este dado é estabelecido pelo *software Tracker*.

	A	B
1	t	$-4.8\,t^2 - 0.6\,t + 1.68$
2	0	
3	0.03	
4	=0.03 + A3	
5		

Figura 4.64: Coluna A - Operação na célula da planilha do Geogebra.
Fonte: A autora.

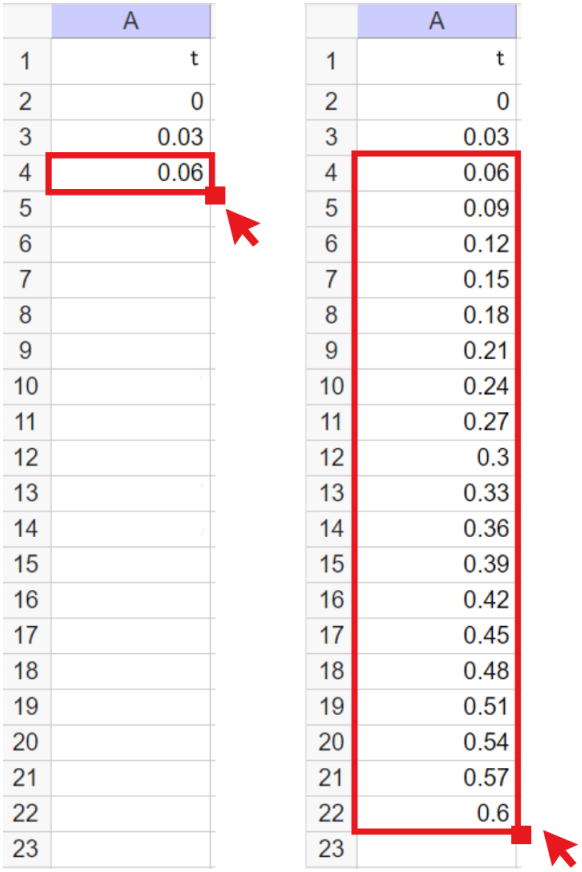


Figura 4.65: Coluna A - Adicionar células automáticas na planilha do Geogebra.
Fonte: A autora.

Na coluna $f(t)$ adicionar a operação $[= f(A2)]$ na célula B2 e teclar *enter* (Figura 4.66). Para este comando ser de forma automática, selecionar a célula B2 e arrastar até o último valor de t (Figura 4.67).

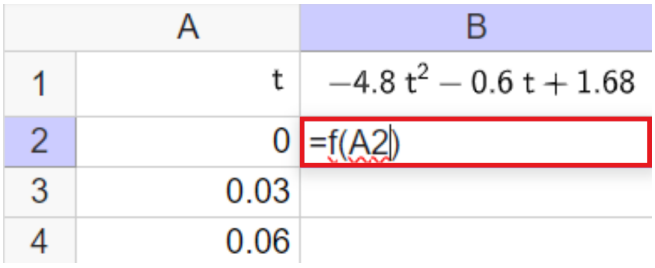
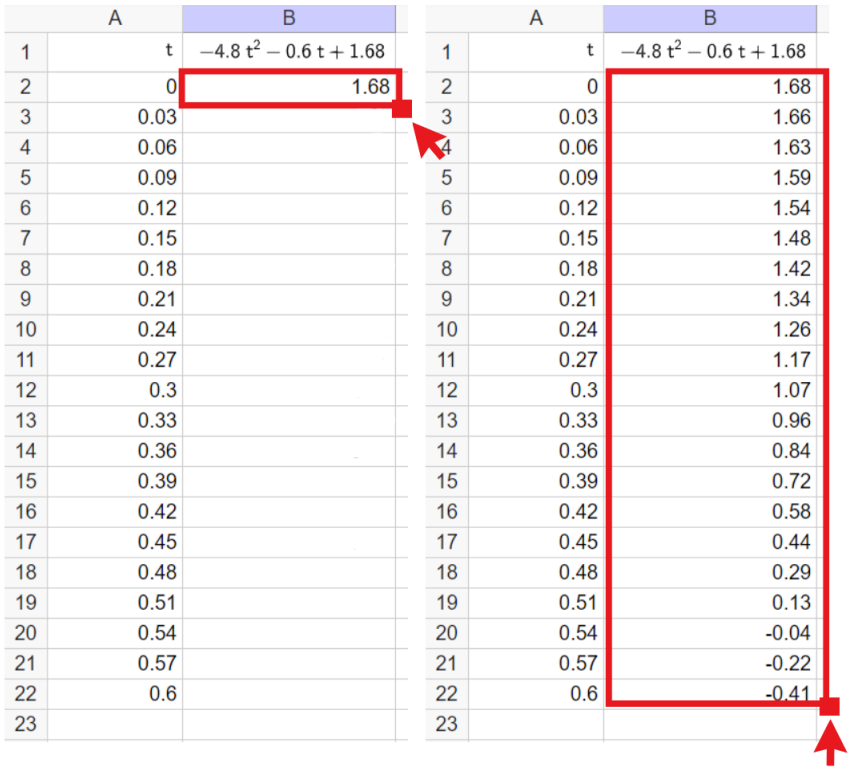


Figura 4.66: Coluna B - Operação na célula da planilha do Geogebra.
Fonte: A autora.



	A	B
1	t	$-4.8\,t^2 - 0.6\,t + 1.68$
2	0	1.68
3	0.03	
4	0.06	
5	0.09	
6	0.12	
7	0.15	
8	0.18	
9	0.21	
10	0.24	
11	0.27	
12	0.3	
13	0.33	
14	0.36	
15	0.39	
16	0.42	
17	0.45	
18	0.48	
19	0.51	
20	0.54	
21	0.57	
22	0.6	
23		

	A	B
1	t	$-4.8\,t^2 - 0.6\,t + 1.68$
2	0	1.68
3	0.03	1.66
4	0.06	1.63
5	0.09	1.59
6	0.12	1.54
7	0.15	1.48
8	0.18	1.42
9	0.21	1.34
10	0.24	1.26
11	0.27	1.17
12	0.3	1.07
13	0.33	0.96
14	0.36	0.84
15	0.39	0.72
16	0.42	0.58
17	0.45	0.44
18	0.48	0.29
19	0.51	0.13
20	0.54	-0.04
21	0.57	-0.22
22	0.6	-0.41
23		

Figura 4.67: Coluna B - Adicionar células automáticas na planilha do Geogebra.
Fonte: A autora.

Um detalhe importante, caso precise adicionar mais casas decimais nos números da tabela e função encontrada no *Tracker*, basta clicar no ícone indicado no item (1) e em seguida no ícone indicado no item (2), confira a Figura 4.68. Agora, selecione a configuração indicada na Figura 4.69 e escolha a quantidade de casas decimais seguindo o passo a passo da Figura 4.70.

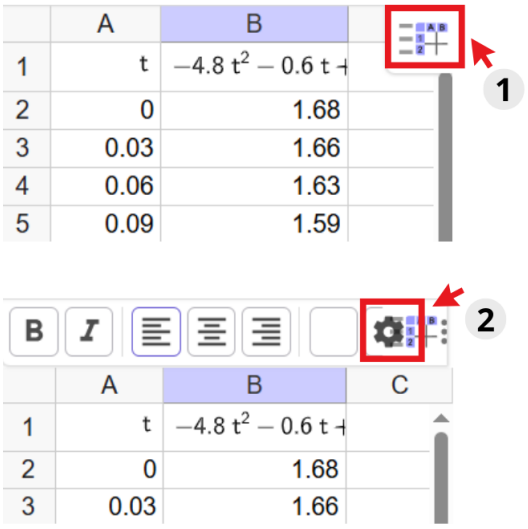


Figura 4.68: Adicionar casas decimais no Geogebra - parte 1.
Fonte: A autora.

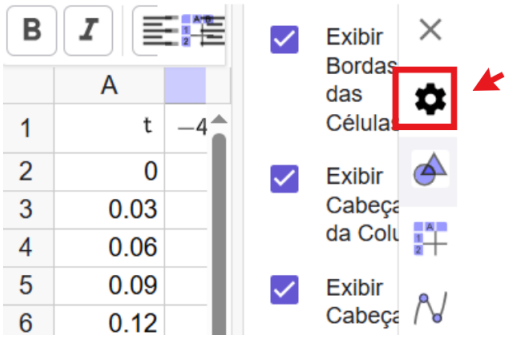


Figura 4.69: Adicionar casas decimais no Geogebra - parte 2.
Fonte: A autora.

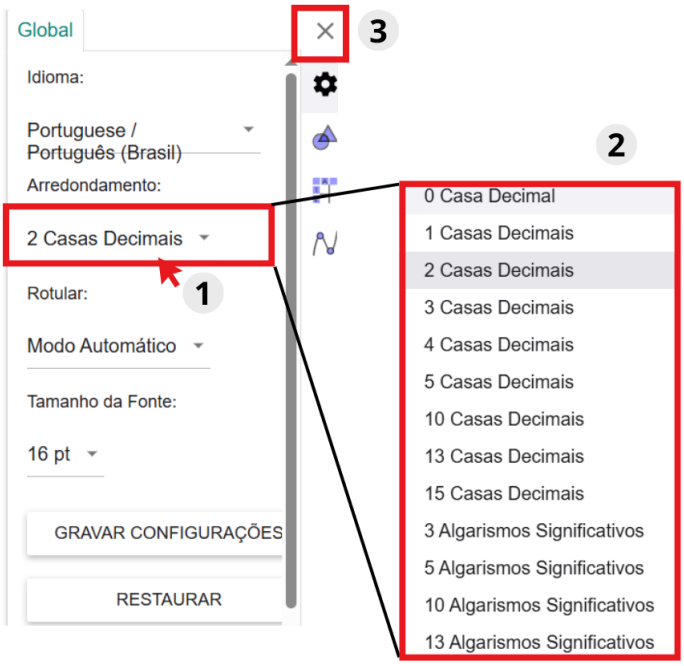


Figura 4.70: Adicionar casas decimais no Geogebra - parte 3.
Fonte: A autora.

Confira a Figura 4.71. Para inserir todos os pontos da planilha na curva $f(t)$, na interface esquerda, selecionar as duas colunas da planilha (item (1)), clicar na opção "$\{1, 2\}$" (item (2)) e selecionar "$\{\cdots\}$ Lista de pontos" (item (3)).

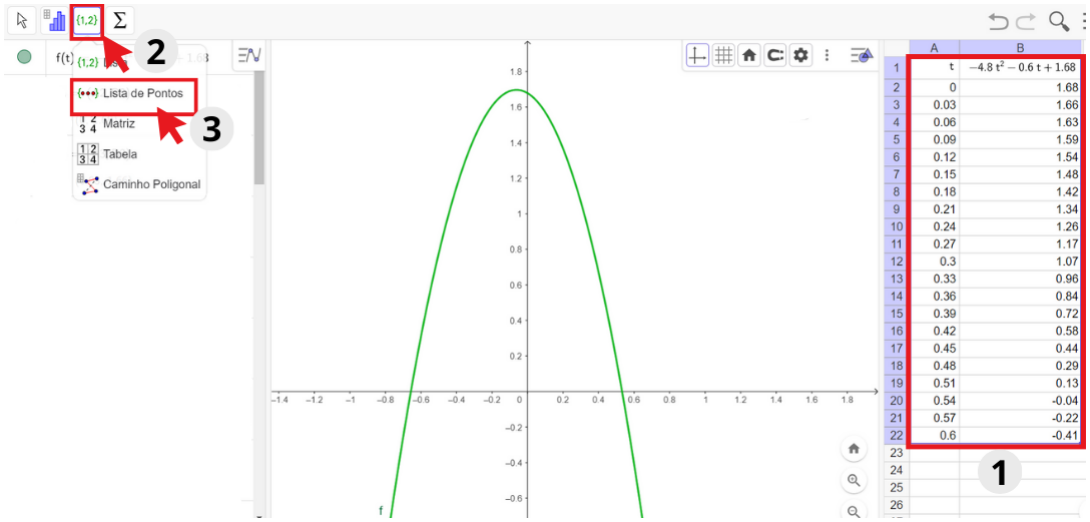


Figura 4.71: Adicionar lista de pontos no Geogebra.
Fonte: A autora.

Em seguida, abrirá a janela "Lista de pontos", clicar em "*OK*" (Figura 4.72). A partir disso, aparecerá na interface esquerda todos os pontos selecionados na planilha e na interface central esses pontos estarão plotados sobre o gráfico da função. Confira a Figura 4.73.

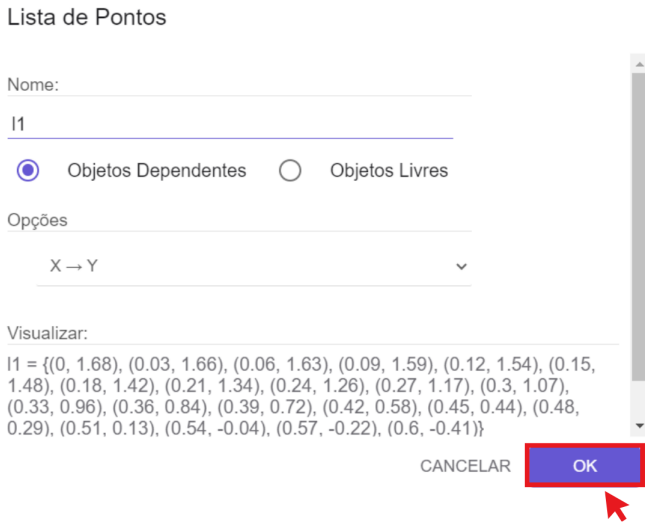


Figura 4.72: Janela lista de pontos no Geogebra.
Fonte: A autora.

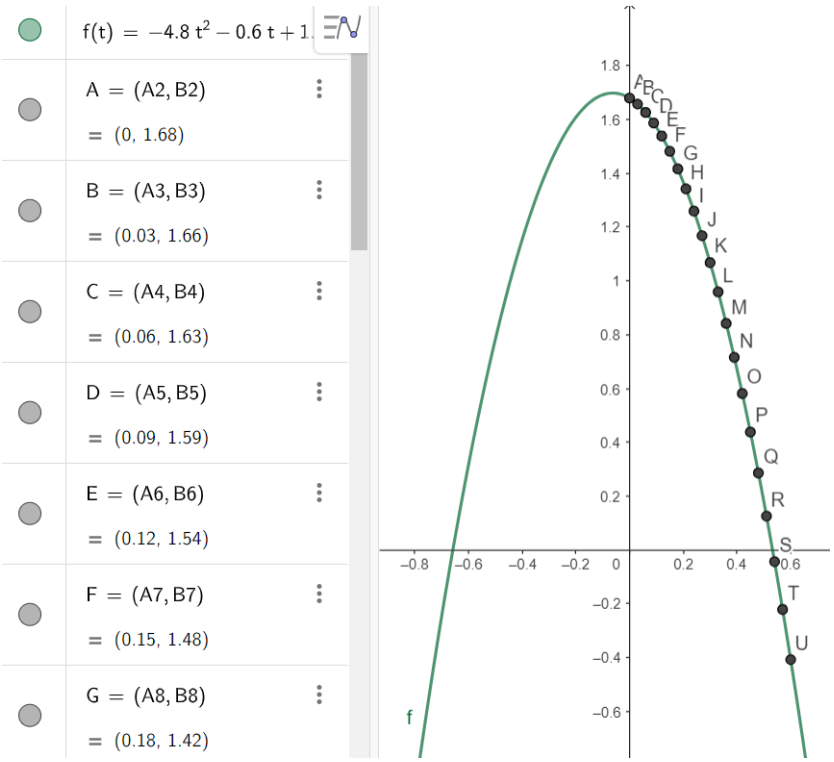


Figura 4.73: Lista de pontos no gráfico do Geogebra.
Fonte: A autora.

Se desejar ocultar um ponto no gráfico, clicar no item (1), a partir disso, o ponto será ocultado na interface central (item (2)) como mostra a Figura 4.74. Além disso, caso precise encontrar a distância entre dois pontos, utilize a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" localizada no item (1) da Figura 4.75. Após isso, clique nos dois pontos em que deseja descobrir a distância entre eles e aparecerá automaticamente o valor em *cm*, por exemplo, a distância entre os pontos A e B é 1,41 cm, veja a Figura 4.76.

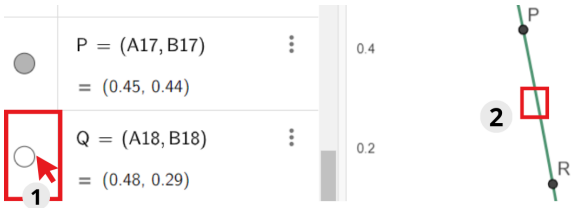


Figura 4.74: Exibir e ocultar itens no gráfico do Geogebra.
Fonte: A autora.

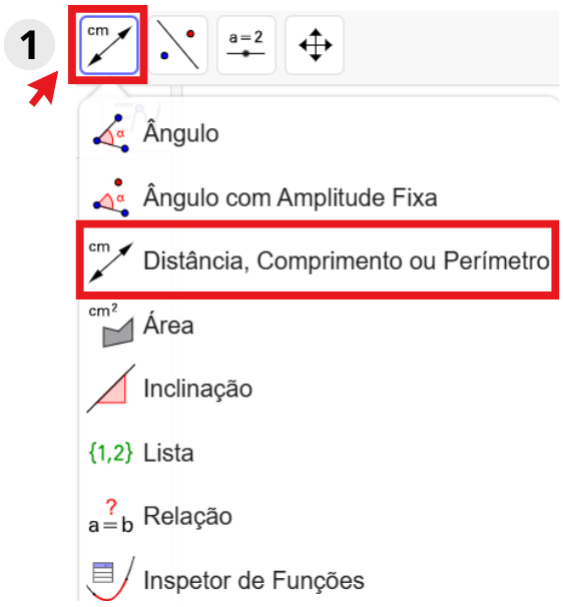


Figura 4.75: Ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" do Geogebra.
Fonte: A autora.

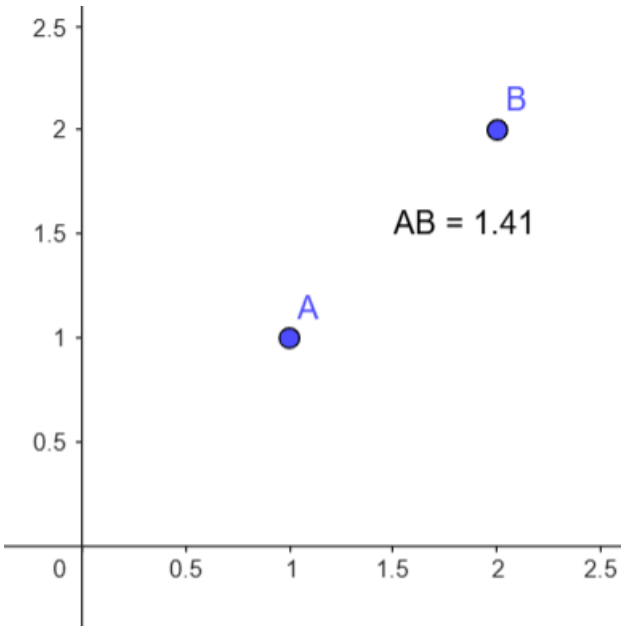


Figura 4.76: Distância entre dois pontos no Geogebra.
Fonte: A autora.

Neste momento, explicaremos como utilizar a ferramenta "controle deslizante", a qual serve para variar valores dos coeficientes de uma função. No exemplo, criaremos um ponto P' em função de a que se movimentará sobre a curva $f(t)$.

Veja a Figura 4.77. Na interface esquerda selecionar a opção "$a = 2$" (item (1)), em seguida escolher o "controle deslizante" (item (2)) e clicar na interface central (fora do gráfico). Após isso, aparecerá a janela "controle deslizante". De acordo com a planilha, inserir na aba "intervalo" o valor mínimo e máximo de t. Além disso, incluir o valor do incremento como sendo 0.03. Lembre-se que esse incremento é a variação de tempo entre cada quadro do vídeo. Confira a Figura 4.78.

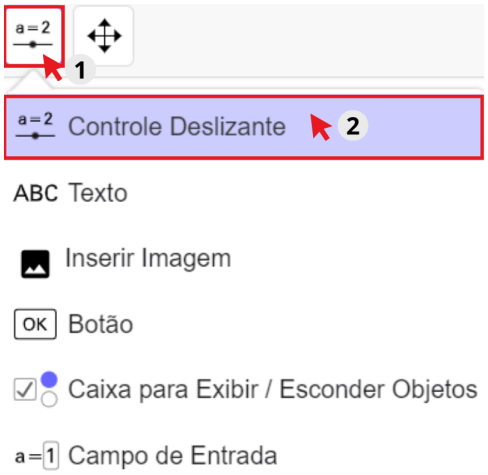


Figura 4.77: Interface esquerda: opção "controle deslizantes" no Geogebra.
Fonte: A autora.

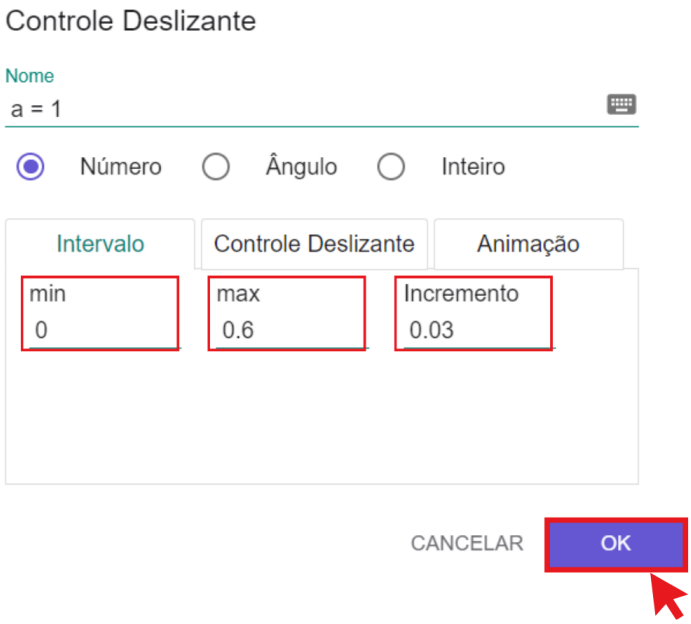


Figura 4.78: Configuração do controle deslizante no Geogebra.
Fonte: A autora.

O controle deslizante aparecerá na interface central como apresentado na Figura 4.79.

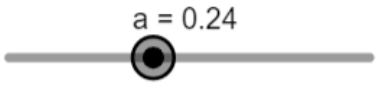


Figura 4.79: Controle deslizante na interface central do Geogebra.
Fonte: A autora.

Neste momento, na opção de entrada criar uma função $g(a)$ com os mesmos coeficientes da curva $f(t)$ em que "a" será o ponto corrente, que foi criado anteriormente, e definir o ponto $P'(a, g(a))$ (Figura 4.80).

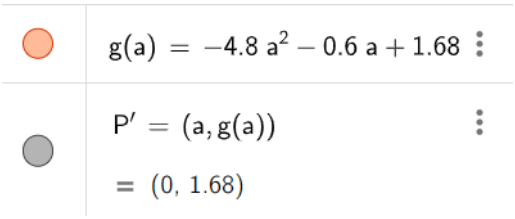


Figura 4.80: Criando função $g(a)$ e ponto no Geogebra.
Fonte: A autora.

Definimos o ponto P' para exibir o seu rastro na curva $g(a)$, de modo que $g(a)$ siga o exato caminho do gráfico da $f(t)$. Para ativar a função de rastreio, clicar com o botão direito do *mouse* em cima do campo P' (item (1)) e escolher a opção "exibir rastro" (item (2)), conforme a Figura 4.81.

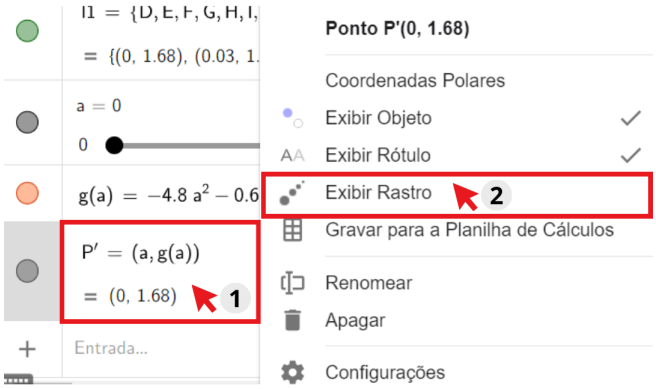


Figura 4.81: Exibir rastro no Geogebra.
Fonte: A autora.

Veja a Figura 4.82. Após ativar o "exibir rastro", clicar no *play* (item (1)) do ponto corrente "a". Em seguida, o rastro do ponto P' aparecerá no gráfico (Figura 4.83).



Figura 4.82: *Play* no rastro de pontos no Geogebra.
Fonte: A autora.

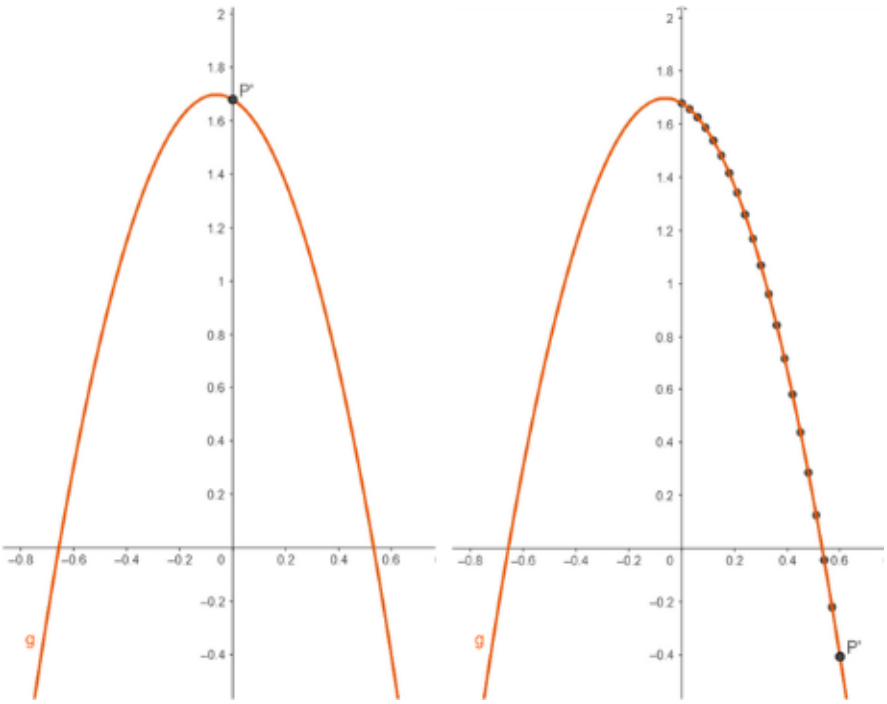


Figura 4.83: Rastro do ponto P' no Geogebra.
Fonte: A autora.

Para definir retas secantes em relação a qualquer ponto, utilizar a ferramenta "retas" localizada na interface esquerda (Figura 4.84), escolher dois pontos do gráfico para criar uma reta, pois dois pontos determinam uma reta. Neste momento, escolher um ponto fixo qualquer e o ponto corrente (P'), o qual os dois pontos estão contido na curva g, ligá-los pela ferramenta "reta" (Figura 4.85), criando assim a reta $h : Reta(P'; N)$.



Figura 4.84: Interface esquerda: opção "retas" no Geogebra.
Fonte: A autora.

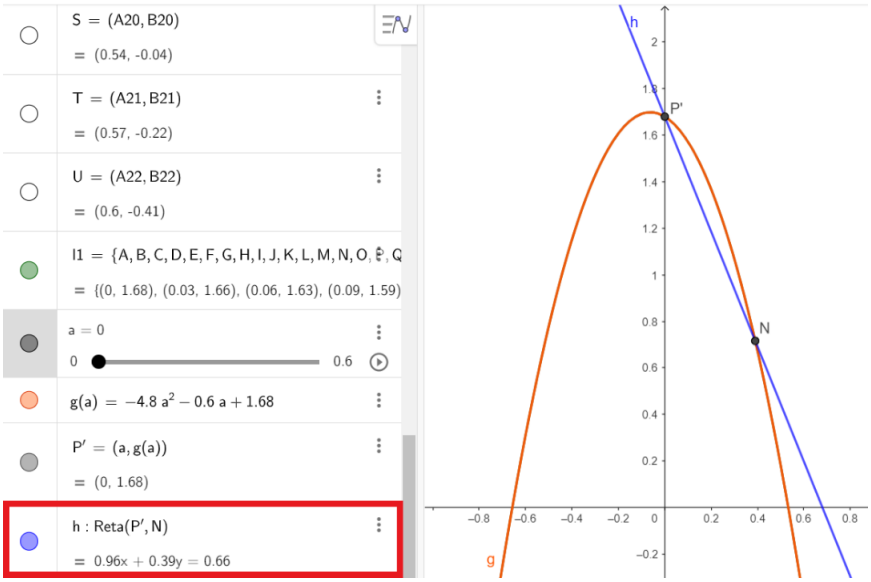


Figura 4.85: Reta h criada no Geogebra.
Fonte: A autora.

Neste momento, incentivaremos o estudo da reta tangente, para futuramente relacionar com conceitos de Cálculo. Tendo isso em vista, exploraremos a reta tangente a curva $f(t)$ no ponto N. Para isso, utilizar a ferramenta "exibir rastro" na reta h. A partir disso, a cada variação de "a" uma nova reta secante será formada (Figura 4.86), encontrando uma reta que mais se aproxima da reta tangente a curva em N.

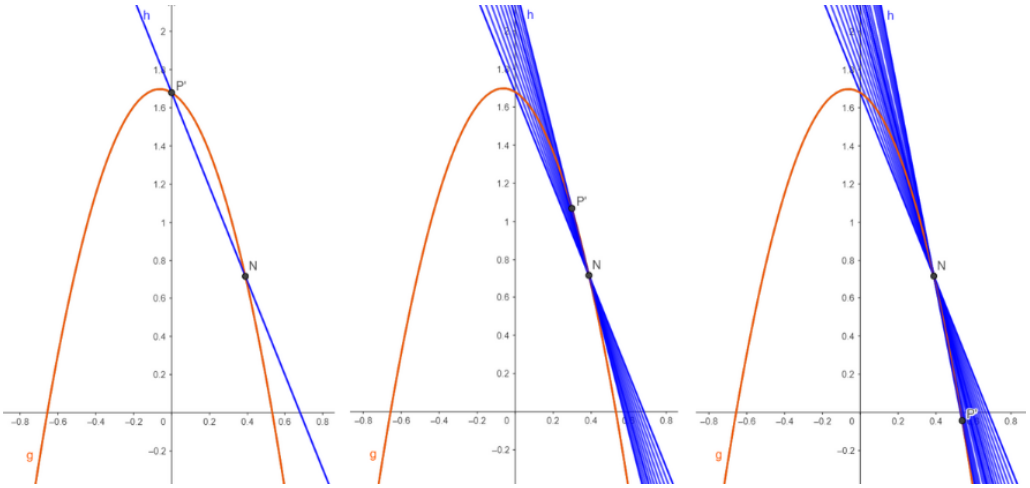


Figura 4.86: Variação de a gera uma nova reta secante no Geogebra.
Fonte: A autora.

Para exibir a inclinação da reta h, basta utilizar a ferramenta "inclinação", localizada na interface esquerda (Figura 4.87). Após selecionar a opção "inclinação", clicar sobre a reta h para acionar a função da ferramenta (Figura 4.88). Conforme a reta h muda com a variação de a, o valor da inclinação também varia.



Figura 4.87: Interface esquerda: opção "inclinação" no Geogebra.
Fonte: A autora.

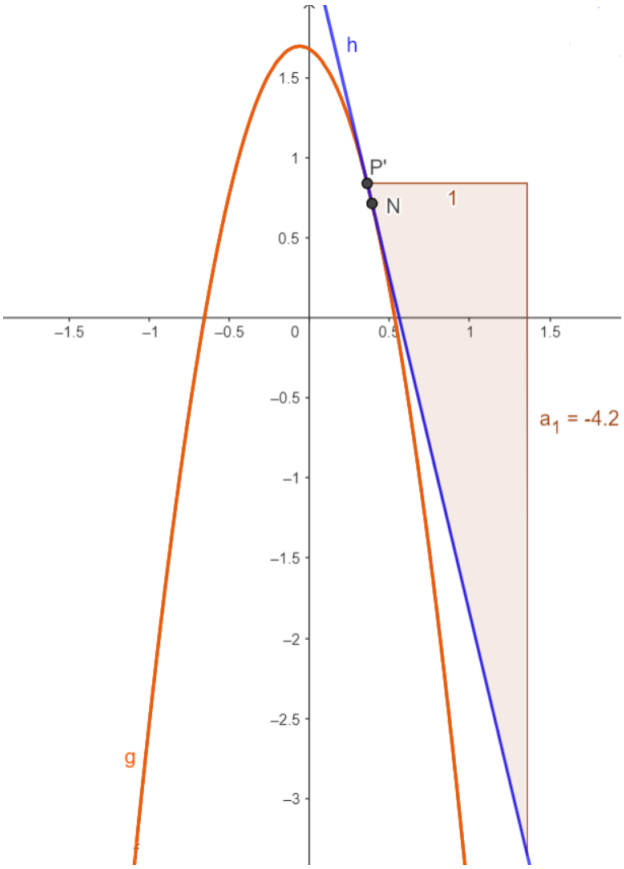


Figura 4.88: Inclinação da reta h no Geogebra.
Fonte: A autora.

Existem várias opções para salvar o estudo feito no Geogebra, podendo salvar *online* ou no computador, exportar imagem, compartilhar o arquivo, imprimir, entre outros. Essas funções ficam localizadas na interface direita do Geogebra, como indica a Figura 4.89.

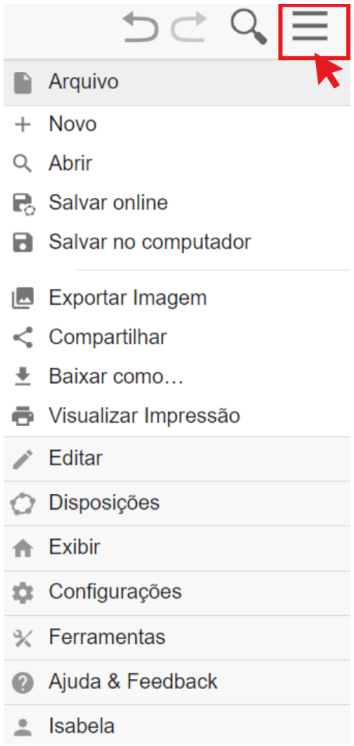


Figura 4.89: Salvar estudos feitos no Geogebra.
Fonte: A autora.

Neste capítulo, foram apresentadas as ferramentas básicas dos *softwares* que utilizaremos neste estudo. Acreditamos que os procedimentos explicados possam sanar as principais dúvidas que possam aparecer no decorrer da execução das atividades que iremos propor mais adiante.

5 Proposta de atividade 01: "Queda Livre"

Neste capítulo, apresentaremos nossa primeira proposta de experimento, que consiste no estudo de um objeto em queda-livre. Elaboramos um estudo dirigido que consiste em escolher o cenário para realizar o experimento, as instruções para gravação e um questionário que será respondido pelos alunos com auxílio do professor. O questionário está disponível para impressão no Anexo. Será necessário o uso de equipamentos como câmera, tripé de apoio e computador que tenham acesso aos *softwares Tracker* e Geogebra.

5.1 Descrição do experimento

O experimento "queda livre" consiste no movimento vertical de um corpo em queda que descreve sua trajetória em direção ao solo. Para realizar tal experimento utiliza-se um objeto de estudo, que deve ser solto de uma determinada altura para que o seu movimento seja registrado através de um vídeo.

Antes de realizar a gravação do vídeo, é necessário escolher o cenário, equipamentos e o objeto que será utilizado para análise[1]. Para este experimento, basta escolher um fundo com cor lisa que possua contraste com o objeto de estudo, por exemplo, uma parede branca e uma bola com cor escura, como na Figura 5.1. Além disso, para registrar o movimento físico é necessário uma câmera, a qual será posicionada em um tripé de apoio ou em uma superfície (Figura 5.2), desde que não permita a movimentação do equipamento, pois isso poderá causar variação nos dados da análise.

[1]Em nosso caso, escolhemos uma bola de tênis.

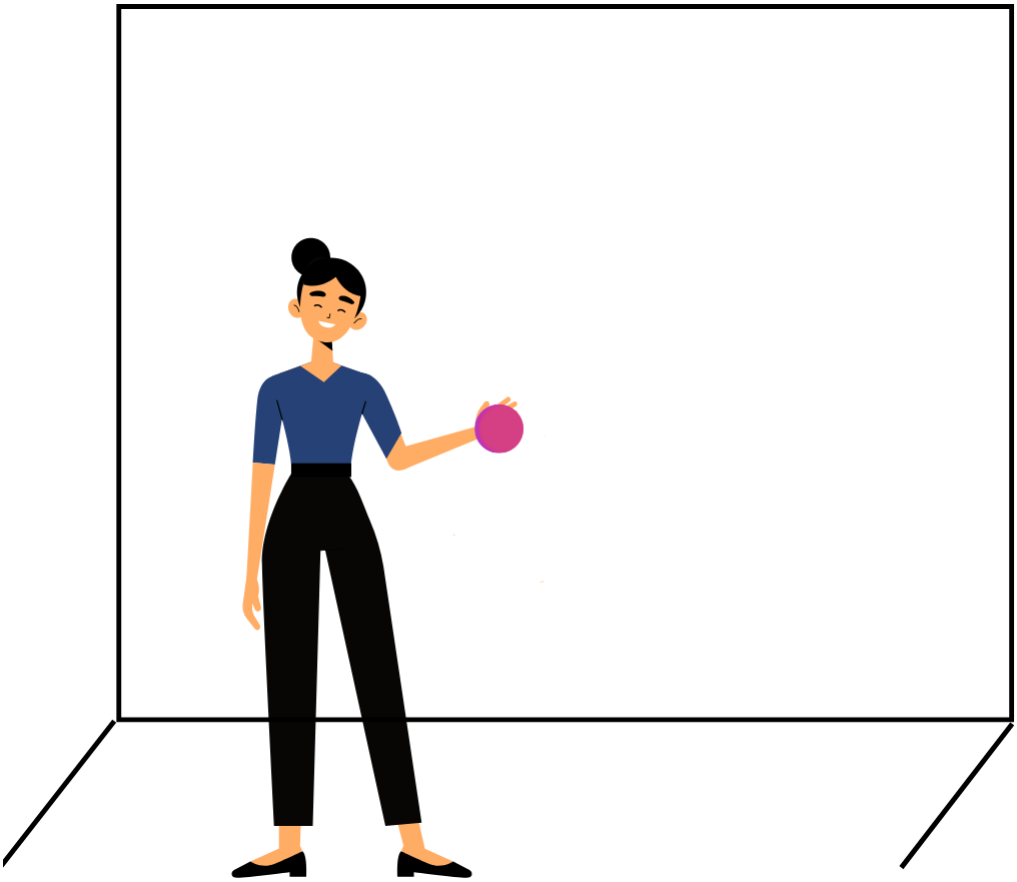


Figura 5.1: Cenário e objeto de estudo.
Fonte: A autora.

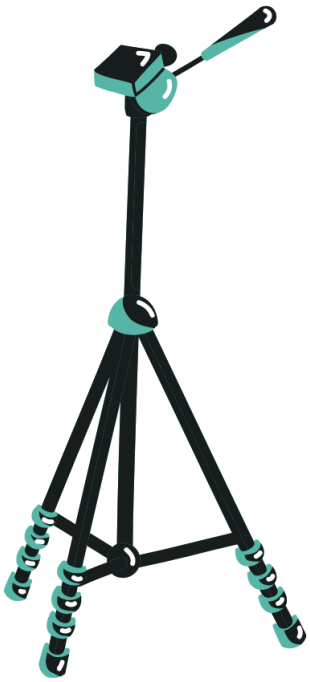


Figura 5.2: Tripé de apoio.
Fonte: A autora.

O aluno se posicionará em frente a uma parede, que possua contraste com o objeto que será solto. Além disso, o restante dos elementos do vídeo também precisam ser de tons diferentes da cor do objeto que está sendo estudado. Posicione o tripé de apoio em frente ao aluno, como na Figura 5.3, de forma que seja possível registrar todo o movimento da queda, mas não precisa realizar a medição e marcação da distância.



Figura 5.3: Posição do tripé de apoio e do aluno para gravação do experimento: "queda livre".

Fonte: A autora.

Utilize uma trena para medir uma referência conhecida que aparecerá no vídeo, como a Figura 5.4. Ao fazer a medição será preciso marcar essa medida na parede, com fita adesiva, giz, entre outros. Confira a Figura 5.5.

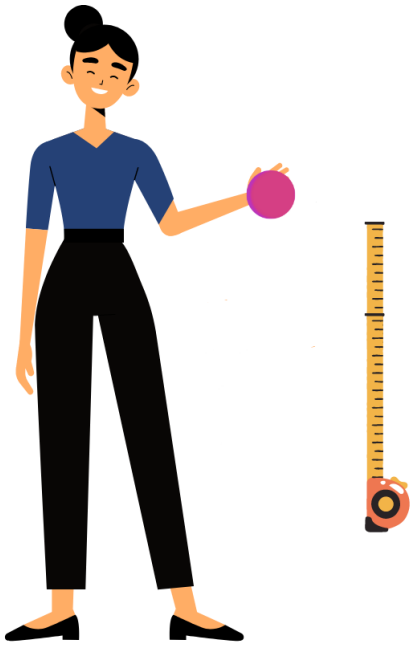


Figura 5.4: Medição da medida conhecida.
Fonte: A autora.

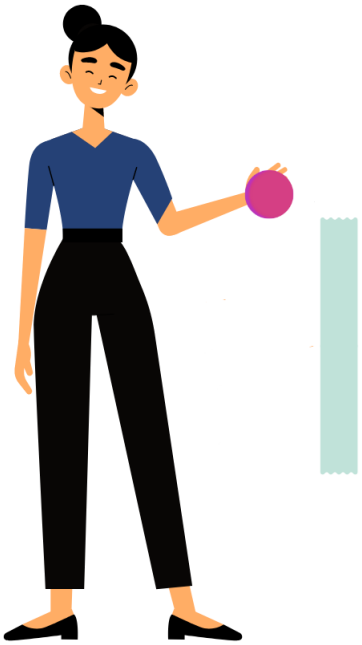


Figura 5.5: Marcação da medida conhecida na parede.
Fonte: A autora.

A Figura 5.6 mostra como realizar o experimento “queda livre”, basta soltar verticalmente o objeto de estudo logo acima da medida marcada, realizando assim o movimento físico da atividade como apresenta a Figura 5.7.

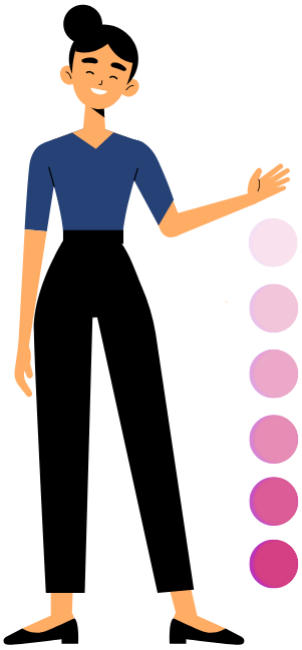


Figura 5.6: Experimento: Queda livre.
Fonte: A autora.

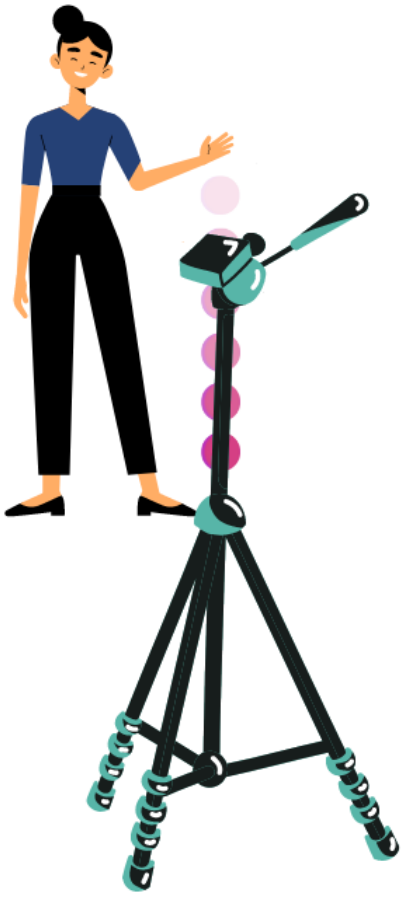


Figura 5.7: Gravação do experimento “queda livre”.
Fonte: A autora.

A Tabela 5.1 contém uma estimativa do tempo para a execução desta atividade e outras informações relevantes.

Título do experimento	Queda livre
Materiais	Bola (ou outro objeto para a queda livre) e materiais para marcação de medidas na parede (giz ou fita).
Ambiente	Parede de cor lisa ao fundo.
Tempo estimado para experimento e gravação	1h30min
Tempo estimado para vídeo-análise no *Tracker*	1h
Tempo estimado para o questionário	4h
Conteúdo do cálculo a ser abordado	Limites, taxas de variação e derivadas.

Tabela 5.1: Informações sobre o experimento "queda livre".

5.2 Questionário (Estudo Dirigido)

Para iniciar a análise do vídeo, no *software Tracker*, abra a gravação realizada. Determine o quadro inicial e final usando a barra de ferramentas inferior, considerando como início o exato momento em que o objeto começa o movimento ao sair da mão, e como final um ponto qualquer desde que permita uma observação de uma parte considerável da queda livre. A partir disso, adicione o eixo de coordenadas, posicione a origem dos eixos cartesianos no centro do objeto de estudo, de modo que o eixo das abscissas fique paralelo ao chão. Gire o sistema de eixos em 180° para que o eixo das ordenadas fique positivamente orientado para baixo. Acrescente o bastão de medição, colocando sobre a marcação com medida conhecida feita na parede, acrescentando o valor em metros. Neste momento, insira a ferramenta ponto de massa, posicione-a em um ponto de destaque no objeto que sofrerá a queda, ative a função trajetória automática e rastreie a trajetória. Caso o movimento gravado em vídeo fique borrado, de baixa qualidade ou se o *software* for incapaz de reconhecer a trajetória automaticamente, faça esse procedimento de forma manual. Observe os gráficos gerados na janela à direita do *software* e responda a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento retilíneo vertical da "queda livre", qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Observando a tabela gerada pelo *Tracker*, anote a duração total do movimento analisado, bem como a distância vertical percorrida pelo objeto.

b) Com base nos dados anteriores, calcule a velocidade média do objeto em queda.

Ainda utilizando a tabela produzida pelo *Tracker*, considere as colunas referentes ao tempo e ao deslocamento vertical. Considere também os intervalos de tempo[2] $I_1 = [0,08; 0,32]$, $I_2 = [0,08; 0,28]$, $I_3 = [0,08; 0,24]$, $I_4 = [0,08; 0,20]$, $I_5 = [0,08; 0,16]$ e $I_6 = [0,08; 0,12]$.

c) Calcule as velocidades médias em cada intervalo e preencha as informações a seguir.

[2]Se os valores dos extremos desses intervalos não estiverem na coluna de tempo da tabela, o docente deve adaptar considerando os valores mais próximos possíveis que aparecem na tabela. Esses valores dependem da taxa de *frame* do vídeo.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

d) Intuitivamente a tabela que foi preenchida acima fornece alguma informação sobre a velocidade instantânea em algum instante específico? Justifique.

Agora, clique sobre o gráfico escolhido no primeiro item para abrir a janela "ferramentas de dados" e selecione o ajuste de curva "parabólico", uma vez que sabemos que este movimento é uniformemente acelerado, isto é, possui aceleração constante (aceleração da gravidade). Preencha:

e) A lei da função $y = f(t) = At^2 + Bt + C$ possui os coeficientes $A =$__, $B =$__ e $C =$__.

f) Considerando a função $y = f(t)$ eleita, calcule: $f(0,32), f(0,28), f(0,24), f(0,2), f(0,16), f(0,12)$ e $f(0,08)$.

g) Complete a tabela a seguir, semelhante a do item (c), mas com os valores de distância fornecidos pela função $y = f(t)$.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

No *Geogebra* insira a função $f(t)$ obtida no item (e), altere as casas decimais para que fique com os mesmos valores do *Tracker*, delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total aproximada do objeto em queda livre. Crie os pontos $P(0,08; f(0,08))$, $A(0,32; f(0,32))$, $B(0,28; f(0,28))$, $C(0,24; f(0,24))$, $D(0,2; f(0,2))$, $E(0,16; f(0,16))$ e $F(0,12; f(0,12))$, observe que estes pontos cairão perfeitamente sobre o gráfico de $f(t)$. Trace as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$.

h) Usando a ferramenta "inclinação" do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados:

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares						

i) O que você percebe ao comparar as tabelas preenchidas nos itens (g) e (h) em relação à velocidade média e coeficiente angular? Justifique.

Oculte os pontos A, B, C, D, E e F, bem como a inclinação no *software*, deixando expostos apenas o gráfico de $f(t)$ e o ponto P. Crie um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varie entre $0,08$ e $0,32$ com incremento igual à $0,01$. Crie a reta entre os pontos Q e P e aperte o *play* no controle deslizante.

j) Nas condições acima, o que você observa sobre a reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

k) Usando a ferramenta "inclinação" do *software*, o que ocorre com o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

l) Com base nas suas observações, o que fisicamente representaria a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto P?

m) Se denotarmos os pontos P e Q por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$, e o valor $h = t_Q - t_P$, selecione a alternativa que traduz que ocorre com o valor de h conforme o ponto Q se aproxima de P?

( ) $h \to 0$ ( ) $h \to 1$ ( ) $h \to 2$ ( ) $h \to \infty$

n) Escreva a fórmula matemática do coeficiente angular m_{PQ} da reta que passa por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$.

o) Usando o valor de tendência de h selecionado no item (m) e a fórmula de m_{PQ} do item (n), complete as lacunas do limite abaixo:

$$\lim_{h \to \square} m_{PQ} = \lim_{h \to \square} \square.$$

p) Sendo $h = t_Q - t_P$, então $t_Q = t_P + h$, substituindo no limite obtido no item (o), temos

$$\lim_{h \to \square} \square.$$

Que matematicamente é conhecido como a derivada da função $f(t)$ em $t = t_P$.

q) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f'(t_P)$ =_____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a velocidade _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f(t)$ em _____".

r) Explique o que o valor do limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,3+h) - f(0,3)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito ao objeto em queda livre.

s) Com base no que foi concluído nos itens (q) e (r), calcule os valores das velocidades do objeto em queda nos instantes indicados na tabela.

Instantes (s)	Velocidade instantânea (m/s)
0,1	
0,15	
0,2	
0,25	
0,3	

t) Usando a função f e os conceitos percebidos nos itens $(q), (r)$ e (s), calcule a expressão matemática da velocidade v em função de t.

u) Faça um gráfico da função $v(t)$. Calcule $v'(t)$ e escreva aqui a sua expressão: $v'(t)$=_____. Plote o gráfico de $v'(t)$ e perceba que ele será uma reta com inclinação igual à _____.

v) Volte a tabela do item (s). Calcule a aceleração média o instante inicial e final da tabela. Qual o seu valor?

w) O que você percebe quando compara os itens (u) e (v)? Estabeleça uma relação entre sua conclusão e o valor da aceleração da gravidade.

x) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f''(t_P) =$ _____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f'(t)$ em _____".

y) Explique o que o valor do limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{v(0,3+h) - v(0,3)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito ao objeto em queda livre.

5.3 Respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente

Para realizar esta atividade recomendaremos ao docente algumas intervenções e indicaremos possibilidades de respostas esperadas ao aplicar este estudo. Ressaltamos também, que os itens do estudo dirigido podem ser escolhidos pelo docente ao aplicar o questionário na disciplina que ministrará, dependendo do tópico de interesse a ser trabalhado.

Antes de mostrarmos as respostas que esperamos para o questionário, informaremos os parâmetros que utilizamos em nossa gravação do movimento "queda livre", dados que serão utilizados em nossa resolução, que apresentaremos a seguir. Nossa marcação feita na parede foi de $0,50$ metros e usamos como "ponto de massa" o centro da bola.

Após a gravação do experimento, oriente seus alunos a abrirem o *software Tracker* para iniciar a análise do movimento, seguindo as instruções iniciais do questionário (Figura 5.8) para que comecem a responder as perguntas propostas na atividade.

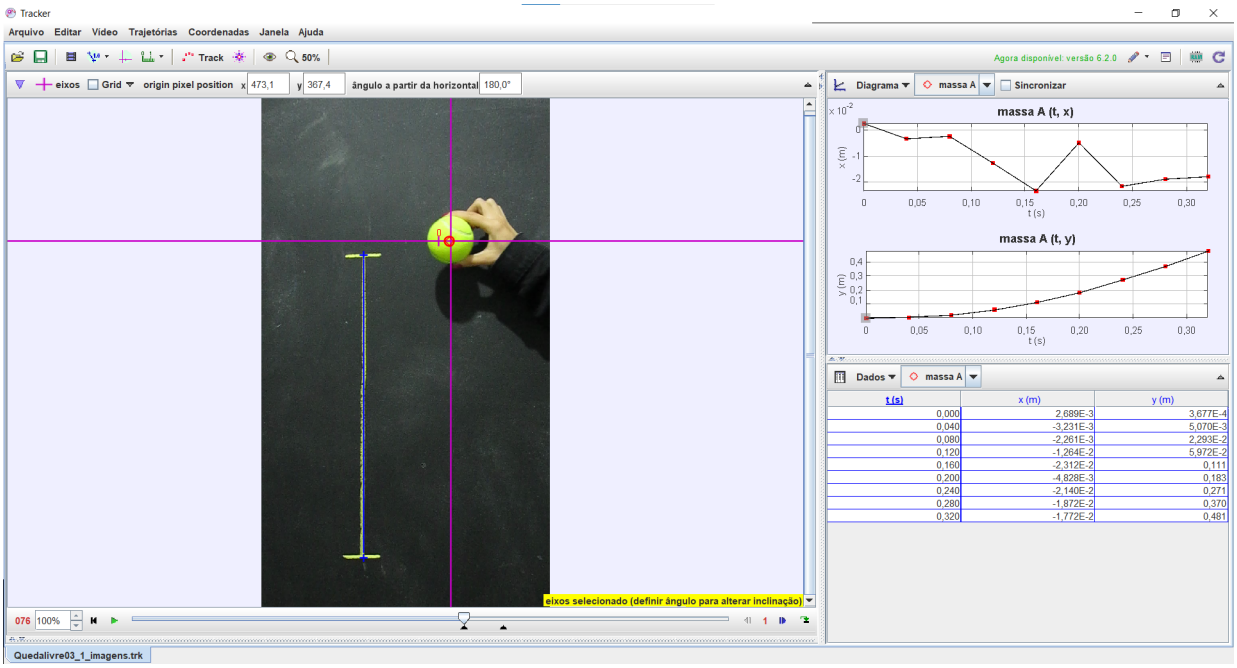


Figura 5.8: Interface do *Tracker* com os parâmetros do movimento "queda livre".
Fonte: A autora.

Podemos observar que o *software* gerou dois gráficos e uma tabela de dados. Neste caso, os gráficos "massa $A(t, x)$" e "massa $A(t, y)$" representam, respectivamente, a trajetória horizontal e vertical do movimento. Sendo t o tempo, x a distância no eixo das abscissas e y a distância no eixo das ordenadas. Esses valores são apresentados também na tabela. Através dos dados gerados, o aluno responderá a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento retilíneo vertical da "queda livre", qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Nesta questão, o aluno observará os gráficos gerados pelos parâmetros utilizados para análise do vídeo do experimento, como mostra a Figura 5.9.

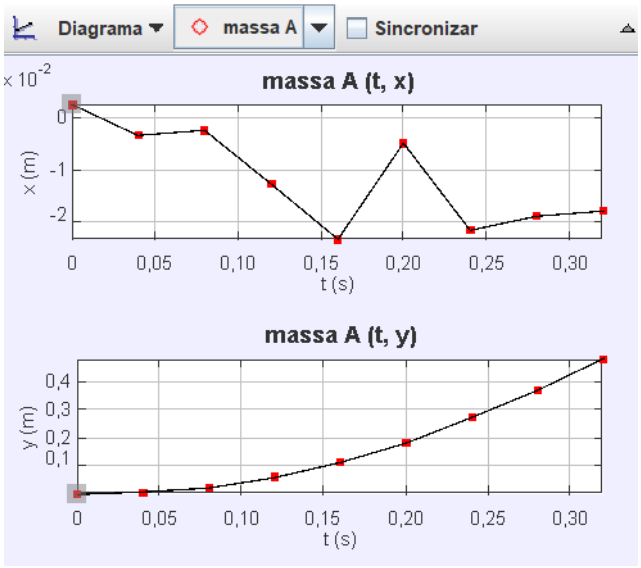


Figura 5.9: Gráficos gerados do movimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

a) **Resposta esperada:**

Devemos observar o gráfico de "massa $A(t, y)$", pois (t, y) representa o tempo $\times$ distância do eixo y (ordenadas), indicando assim a trajetória vertical do movimento.

Uma observação válida a ser feita, caso surja dúvidas pelos alunos, sobre a trajetória horizontal do movimento queda livre é que (t, x) representa o tempo $\times$ distância do eixo x (abscissa), por este motivo o gráfico ficará oscilando devido a movimentação horizontal do ponto de massa em conjunto com as aproximações feitas pelo *software*. O gráfico de (t, x) indica que essas variações são mínimas e praticamente desprezíveis.

Com o auxílio da tabela gerada pelo *software*, a Figura 5.10 é um exemplo com os nossos dados, o aluno obtém a duração total da trajetória e encontra a distância percorrida pelo objeto de estudo. Com esses dados, conseguirá calcular a velocidade média da bola no trajeto completo, como é pedido no item (b).

Dados | massa A

t (s)	x (m)	y (m)
0,000	2,689E-3	3,677E-4
0,040	-3,231E-3	5,070E-3
0,080	-2,261E-3	2,293E-2
0,120	-1,264E-2	5,972E-2
0,160	-2,312E-2	0,111
0,200	-4,828E-3	0,183
0,240	-2,140E-2	0,271
0,280	-1,872E-2	0,370
0,320	-1,772E-2	0,481

Figura 5.10: Tabela de dados do movimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

b) **Resposta esperada:**

Duração total da trajetória: 0,32 segundos (dados fornecido pela coluna t).

Distância entre os pontos A e B: 0,48 metros (dados fornecido pela coluna y).

Velocidade média:

$$v_m = \frac{0,48}{0,32} = 1,5\ m/s.$$

Ainda com o auxílio da tabela de dados gerada pelo *Tracker*, o aluno responderá o item (c), o qual é pedido para calcular a velocidade média em cada intervalo dado e preencher a tabela.

c) **Resposta esperada:**

Distância percorrida:

$Dp_1 = 0,481 - 0,02293 = 0,45807\ m$

$Dp_2 = 0,37 - 0,02293 = 0,34707\ m$

$Dp_3 = 0,271 - 0,02293 = 0,24807\ m$

$Dp_4 = 0,183 - 0,02293 = 0,16007\ m$

$Dp_5 = 0,111 - 0,02293 = 0,08807\ m$

$Dp_6 = 0,05972 - 0,02293 = 0,03679\ m$

Duração do intervalo:

$Di_1 = 0,32 - 0,08 = 0,24\ s$

$Di_2 = 0,28 - 0,08 = 0,2\ s$

$Di_3 = 0,24 - 0,08 = 0,16\ s$

$Di_4 = 0,20 - 0,08 = 0,12\ s$

$Di_5 = 0,16 - 0,08 = 0,08\ s$

$Di_6 = 0,12 - 0,08 = 0,04\ s$

Velocidade média do intervalo:

$v_{m1} = \frac{0,45807}{0,24} = 1,90862\ m/s$

$v_{m2} = \frac{0,34707}{0,2} = 1,73535\ m/s$

$v_{m3} = \frac{0,24807}{0,16} = 1,55043\ m/s$

$v_{m4} = \frac{0,16007}{0,12} = 1,33391\ m/s$

$v_{m5} = \frac{0,08807}{0,08} = 1,10087\ m/s$

$v_{m6} = \frac{0,03679}{0,04} = 0,91975\ m/s$

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida	0,45807	0,34707	0,24807	0,16007	0,08807	0,03679
Duração do intervalo	0,24	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
Velocidade média do intervalo	1,90862	1,73535	1,55043	1,33391	1,10087	0,91975

A partir da tabela do item (c), os alunos responderão a próxima pergunta sobre a velocidade instantânea em algum instante específico. Neste caso, o intuito é o aluno perceber que a velocidade instantânea do corredor está tendendo para o instante de $t = 0,08\ s$.

d) **Resposta esperada:** Sim, pois a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores e próximos de 0,08 s, indica a velocidade instantânea nesse instante.

Após o aluno clicar sobre o gráfico escolhido no item (a), abrirá a janela de "ferramentas de dados", a partir disso o discente selecionará o ajuste de curva "parabólico", uma vez que sabemos que este movimento é uniformemente acelerado, isto é, possui aceleração constante (aceleração da gravidade). Neste momento, podem surgir dúvidas sobre aceleração da gravidade, recomendamos que o docente oriente seus alunos com explicações do conceito. Além disso, os alunos podem apresentar dificuldades em aplicar as ferramentas do *software*, auxilie os estudantes com o Capítulo 4. Salientamos que, para cada aluno, o experimento resultará em curvas com dados diferentes para serem analisadas. A Figura 5.11 exibe a parábola gerada com seus respectivos valores dos parâmetros do nosso experimento.

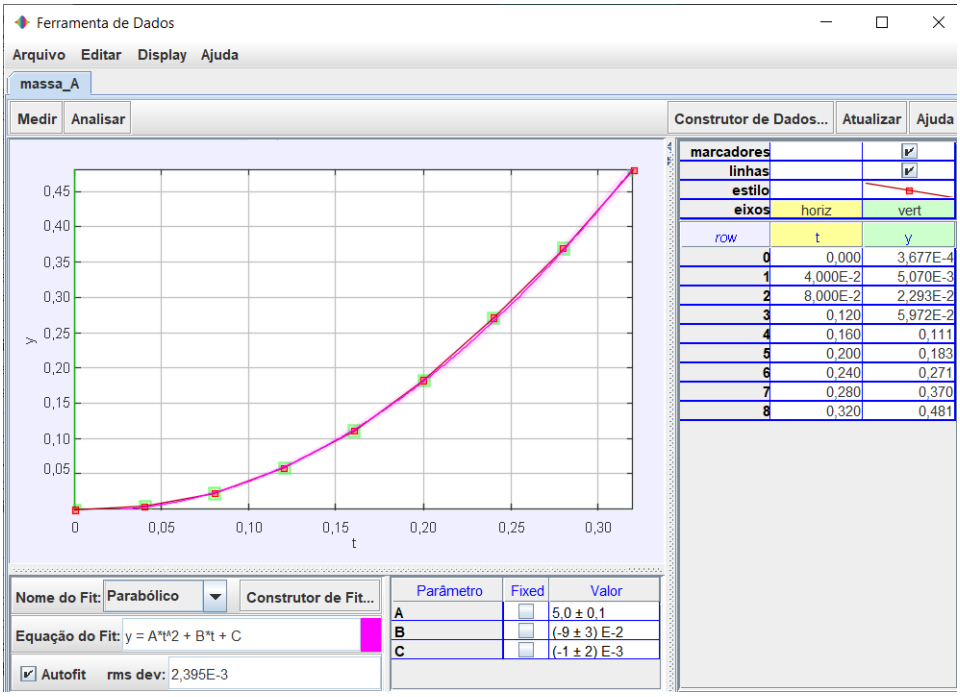


Figura 5.11: Curva e parâmetros do movimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

Para mudar a escala do gráfico no *software Tracker* confira as instruções dadas no Capítulo 4. Essa ferramenta facilitará na hora do aluno comparar o gráfico do *Tracker* e Geogebra, colocando na mesma escala. Confira o nosso exemplo na Figura 5.12 que apresenta o gráfico do *Tracker* com a escala modificada.

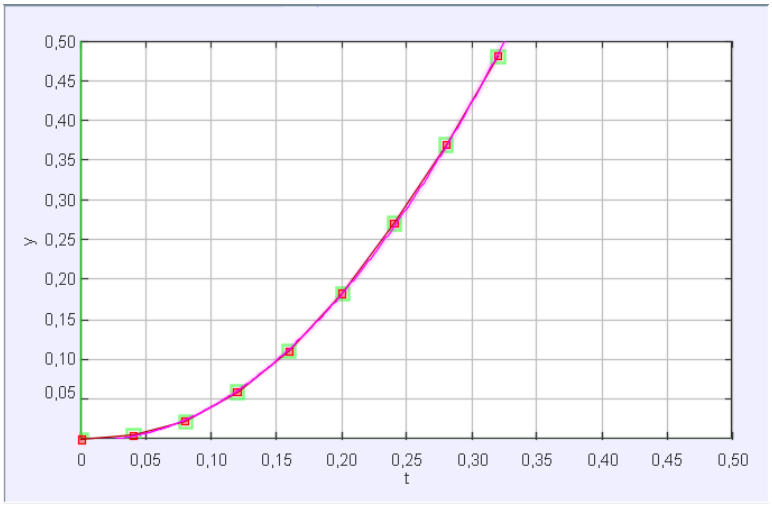


Figura 5.12: Escala do gráfico modificada do movimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

É importante observar os parâmetros completos gerados pela curva no *Tracker*, pois pode haver continuação no valor de cada coeficiente da função (indicada por reticências). Ignorar o parâmetro completo poderá causar erros nos cálculos e gráfico. Para isso, recomendamos que o docente oriente seus alunos a posicionarem o *mouse* sobre os valores que apresentam as reticências para verificarem se existe continuação do número. Outra

recomendação é retirar a seleção do "*Autofit*", o Capítulo 4 apresenta a explicação de como utilizar essa ferramenta. A Figura 5.13 mostra os parâmetros do nosso experimento, a qual foi desmarcada a opção do "*Autofit*".

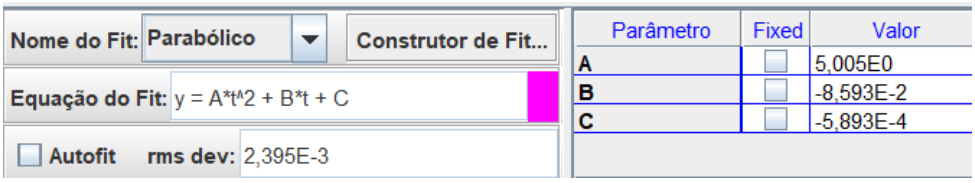


Figura 5.13: Curva e parâmetros do movimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

e) **Resposta esperada:**
Em nosso experimento, obtemos a função $f(t) = 5,005t^2 - 0,08593t - 0,0005893$, portanto os coeficientes são $A = 5,005$, $B = -0,08593$ e $C = 0,0005893$.

f) **Resposta esperada:**
De acordo com o nosso estudo, obtemos a função

$$f(t) = 5,005t^2 - 0,08593t - 0,0005893.$$

Assim,

$f(0,32) = 5,005(0,32)^2 - 0,08593(0,32) - 0,0005893 = 0,4844251$

$f(0,28) = 5,005(0,28)^2 - 0,08593(0,28) - 0,0005893 = 0,3677423$

$f(0,24) = 5,005(0,24)^2 - 0,08593(0,24) - 0,0005893 = 0,2670755$

$f(0,2) = 5,005(0,2)^2 - 0,08593(0,2) - 0,0005893 = 0,1824247$

$f(0,16) = 5,005(0,16)^2 - 0,08593(0,16) - 0,0005893 = 0,1137899$

$f(0,12) = 5,005(0,12)^2 - 0,08593(0,12) - 0,0005893 = 0,0611711$

$f(0,08) = 5,005(0,08)^2 - 0,08593(0,08) - 0,00058935 = 0,0245683$

g) **Resposta esperada:**
Nesta dissertação, obtemos os seguintes cálculos para completar a tabela a seguir, semelhante a do item (c), mas com os valores da função $x = f(t)$.

Distância percorrida:

$Dp_1 = 0,4844251 - 0,0245683 = 0,4598568\ m$

$Dp_2 = 0,3677423 - 0,0245683 = 0,343174\ m$

$Dp_3 = 0,2670755 - 0,0245683 = 0,2425072\ m$

$Dp_4 = 0,1824247 - 0,0245683 = 0,1578564\ m$

$Dp_5 = 0,1137899 - 0,0245683 = 0,0892216\ m$

$Dp_6 = 0,0611711 - 0,0245683 = 0,0366028\ m$

Duração do intervalo:

$Di_1 = 0,32 - 0,08 = 0,24\ s$

$Di_2 = 0,28 - 0,08 = 0,2\ s$

$Di_3 = 0,24 - 0,08 = 0,16\ s$

$Di_4 = 0,20 - 0,08 = 0,12\ s$

$Di_5 = 0,16 - 0,08 = 0,08\ s$

$Di_6 = 0,12 - 0,08 = 0,04\ s$

Velocidade média do intervalo:

$v_{m1} = \frac{0,4598568}{0,24} = 1,91607\ m/s$

$v_{m2} = \frac{0,343174}{0,2} = 1,71587\ m/s$

$v_{m3} = \frac{0,2425072}{0,16} = 1,51567\ m/s$

$v_{m4} = \frac{0,1578564}{0,12} = 1,31547\ m/s$

$v_{m5} = \frac{0,0892216}{0,08} = 1,11527\ m/s$

$v_{m6} = \frac{0,0366028}{0,04} = 0,91507\ m/s$

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida	0,4598568	0,343174	0,2425072	0,1578564	0,0892216	0,0366028
Duração do intervalo	0,24	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
Velocidade média do intervalo	1,91607	1,71587	1,51567	1,31547	1,11527	0,91507

Agora, o aluno será direcionado a abrir o *Geogebra* para inserir a função $f(t)$ obtida no item (e), delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total percorrida pelo corredor (em nosso caso inserimos o valor 0,32 s). Neste momento, recomendamos que o docente oriente os alunos caso surjam dúvidas sobre o *software* e suas ferramentas utilizando o Capítulo 4. Ressaltamos que se o aluno não tiver feito o ajuste de escala no gráfico do *Tracker* poderá haver um estranhamento em relação ao formato da curva. Caso isso ocorra, recomendamos intervenção do docente para que o aluno perceba que isso se trata apenas de problemas de escala.

O discente seguirá todas as instruções do questionário antes de responder ao item (h), segue a Figura 5.14 como exemplo. Além disso, o aluno traçará no gráfico as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$, como a Figura 5.15.

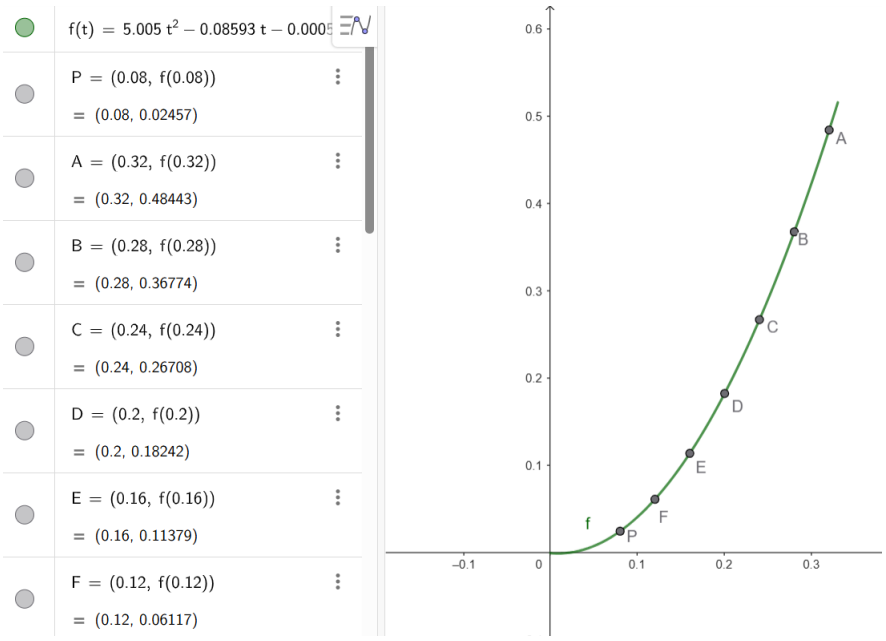


Figura 5.14: Inserindo a curva e pontos no *Geogebra* do experimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

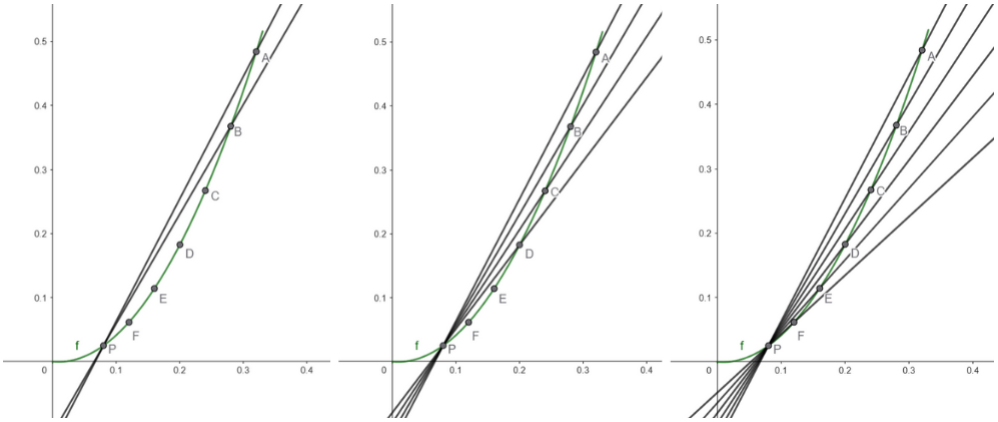


Figura 5.15: Traçando as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

Feitos os passos anteriores, agora os alunos responderão o item (h) utilizando o gráfico criado no *Geogebra*. Para facilitar a visualização da inclinação da reta que está sendo analisada, oriente os alunos a desativar a opção "mostrar objeto" nas demais retas e pontos. Confira o exemplo na Figura 5.16.

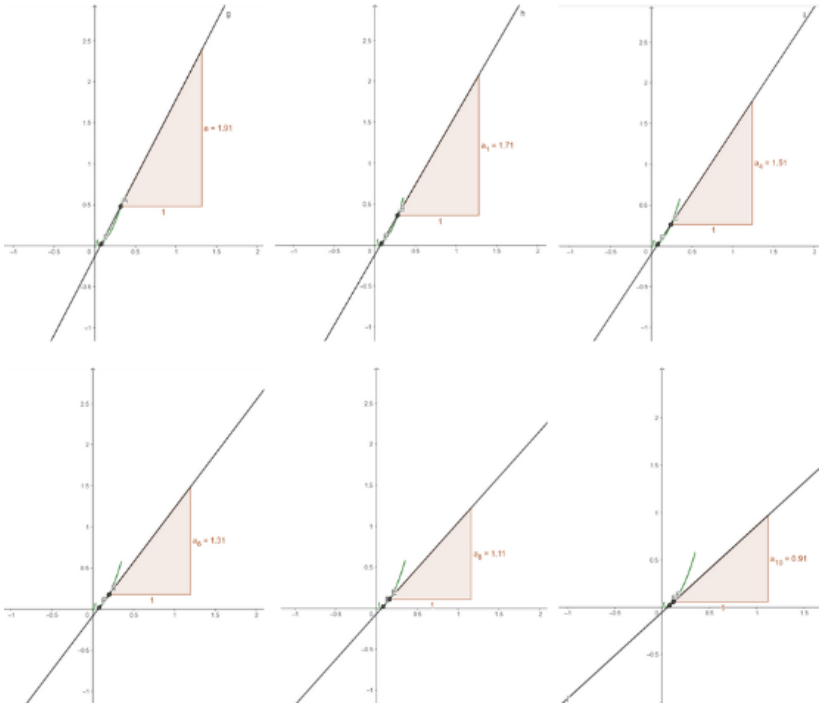


Figura 5.16: Inclinação das retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: "queda livre".

Fonte: A autora.

h) **Resposta esperada:**
Usando a ferramenta inclinação do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados. Os valores da tabela abaixo foram do experimento que realizamos na dissertação.

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares	1,91	1,71	1,51	1,31	1,11	0,91

i) **Resposta esperada:**
Ao compararmos a velocidade média e o coeficiente angular, percebemos que seus valores são iguais (a menos de arredondamento) em cada intervalo analisado na tabela. Isso acontece, pois a velocidade média e o coeficiente angular são o quociente entre a variação do eixo das ordenadas pelo eixo das abscissas.

Oriente os alunos a ocultarem os pontos A, B, C, D, E e F, bem como a reta e sua inclinação no *software*, deixando expostos apenas o gráfico de $f(t)$ e o ponto P. Criarão um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varia entre $0,08$ e $0,32$ com incremento igual à $0,01$. Crie a reta entre os pontos Q e P e aperte o *play* no controle deslizante, como a Figura 5.17 apresenta um exemplo do movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ que será analisado no item (j). Nesta mesma reta, os alunos analisarão a inclinação, sendo exemplificado na Figura 5.18 alguns momentos do ponto Q se movendo, como é pedido no item (k).

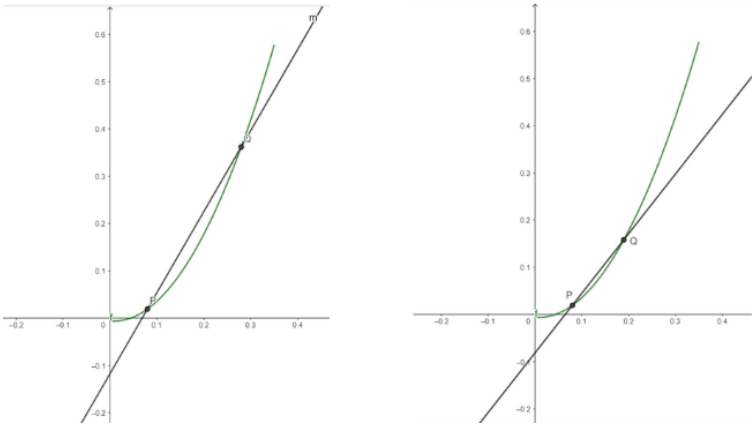


Figura 5.17: Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ no *Geogebra* do experimento: "queda livre".
Fonte: A autora.

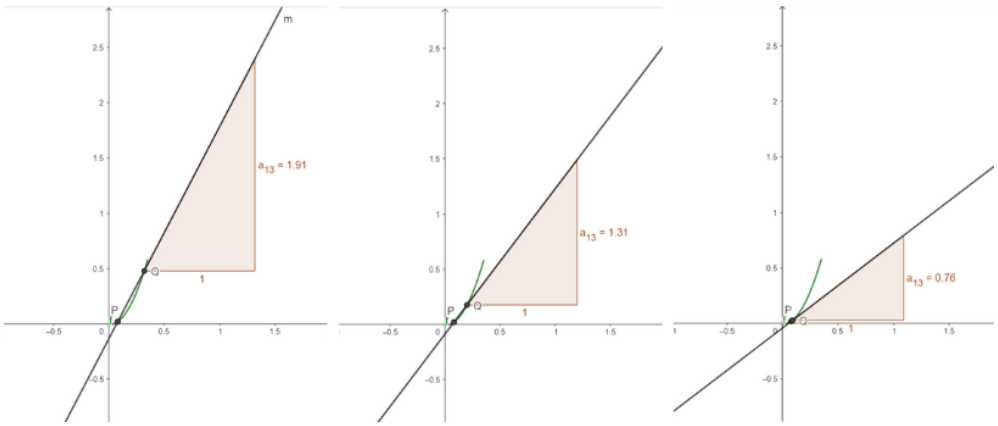


Figura 5.18: Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ com o valor da inclinação no *Geogebra* do experimento: "queda livre".

Fonte: A autora.

j) **Resposta esperada:**
Conforme Q se movimenta em direção ao ponto P a reta $\overleftrightarrow{QP}$ tende à reta tangente ao gráfico da função no ponto P.

k) **Resposta esperada:**
Conforme o ponto Q se move, o valor apresentado pela inclinação corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto P.

l) **Resposta esperada:**
Observando a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto P, percebemos que representa fisicamente a velocidade instantânea do objeto em queda no instante do ponto P, ou seja, em 0,08 s. Além disso, podemos perceber que a inclinação da reta secante ao gráfico de $f(t)$ no ponto P representa a velocidade média entre os instantes do ponto P e do ponto Q.

m) **Resposta esperada:**
Se denotarmos os pontos P e Q por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$, e o valor $h = t_Q - t_P$, selecione a alternativa que traduz que ocorre com o valor de h conforme o ponto Q se aproxima de P?

(X) $h \to 0$ ( ) $h \to 1$ ( ) $h \to 2$ ( ) $h \to \infty$

n) **Resposta esperada:**
Coeficiente angular da reta que passa por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$:

$$m_{PQ} = \frac{f(t_Q) - f(t_P)}{t_Q - t_P}.$$

o) **Resposta esperada:**

$$\lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_Q) - f(t_P)}{t_Q - t_P}.$$

p) **Resposta esperada:**
Derivada da função $f(t)$ em $t = t_P$.

$$\lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_P + h) - f(t_P)}{h}.$$

q) **Resposta esperada:**
"O limite $f'(t_P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_P + h) - f(t_P)}{h}$ representa a derivada da função $f(t)$ em t_P, bem como a velocidade instantânea no instante t_P s e, também, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ em t_P ".

r) **Resposta esperada:**
O valor limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(0,3 + h) - f(0,3)}{h}$ representa a derivada da função $f(t)$ no instante 0,3 s e em respeito ao objeto em queda representa a velocidade instantânea no instante 0,3 s.

s) **Resposta esperada:**
Para encontrar os valores da velocidade instantânea, basta resolver a derivada da função f(t) em cada instante e preencher a tabela. Apresentaremos um exemplo de

resolução da velocidade no instante 0,1 s.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h}=\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{5,005(0,1+h)^2-0,08593(0,1+h)-0,0005893}{h}\\
&-\lim_{h\to 0}\frac{5,005(0,1)^2-0,08593(0,1)-0,0005893}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{5,005(0,01+0,2h+h^2)-0,008593-0,08593h-0,0005893}{h}\\
&-\lim_{h\to 0}\frac{0,05005-0,008593-0,0005893}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{0,05005+1,001h+5,005h^2-0,008593-0,08593h-0,0005893}{h}\\
&-\lim_{h\to 0}\frac{0,05005-0,008593-0,0005893}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1,001h+5,005h^2-0,08593h}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{h(1,001+5,005h-0,08593)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}1,001+5,005h-0,08593=0,91507
\end{aligned}$$

Instantes (s)	Velocidade instantânea (m/s)
0,1	0,91507
0,15	1,41557
0,2	1,91607
0,25	2,41657
0,3	2,91707

Caso surjam dúvidas, lembre-os que a velocidade ($v(t)$) é a taxa de variação da posição em relação ao tempo, isto é, a derivada da posição em relação ao tempo, assim, $v(t) = f'(t)$ e a função f está dada no item (e).

t) **Resposta esperada:**

Com base nos dados do nosso estudo, obtemos a função $f(t) = 5,005t^2 - 0,08593t - 0,0005893$. De acordo com os itens (q), (r) e (s), calculamos a expressão matemática

da velocidade v em função de t. A partir disso, temos:

$$
\begin{aligned}
v(t) = f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{5,005(t+h)^2 - 0,08593(t+h) - 0,0005893}{h} \\
&- \lim_{h\to 0} \frac{5,005t^2 - 0,08593t - 0,0005893}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5,005(t^2+2th+h^2) - 0,08593t - 0,08593h - 0,0005893}{h} \\
&- \lim_{h\to 0} \frac{5,005t^2 - 0,08593t - 0,0005893}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5,005t^2 + 10,01th + 5,005h^2 - 0,08593t - 0,08593h - 0,0005893}{h} \\
&- \lim_{h\to 0} \frac{5,005t^2 - 0,08593t - 0,0005893}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10,01th + 5,005h^2 - 0,08593h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(10,01t + 5,005h - 0,08593)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 10,01t + 5,005h - 0,08593 = 10,01t - 0,08593
\end{aligned}
$$

u) **Resposta esperada:**

A partir da expressão encontrada no item (t) foi criado o gráfico da função $v(t)$ utilizando o Geogebra. A Figura 5.19 apresenta o exemplo do nosso trabalho.

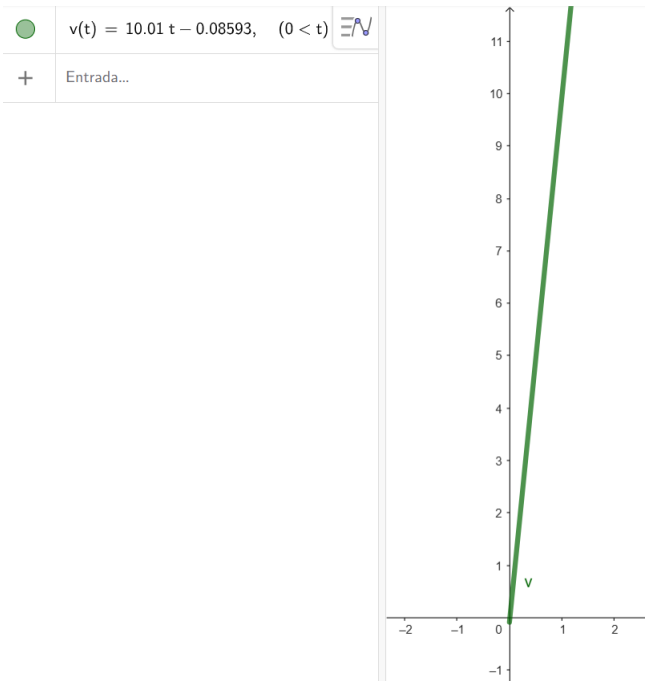


Figura 5.19: Queda livre - Gráfico da função $v(t)$.
Fonte: A autora.

Neste estudo a função encontrada foi $v(t) = 10,01t - 0,08593$. Calcularemos $v'(t)$:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{10,01(t+h) - 0,08593 - 10,01t + 0,08593}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{10,01t + 10,01h - 0,08593 - 10,01t + 0,08593}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{10,01h}{h} = \lim_{h\to 0} 10,01 = 10,01. \end{aligned}$$

Portanto, no nosso estudo, $a(t) = v'(t) = 10,01$. A Figura 5.20 mostra o gráfico de $v'(t)$ e podemos perceber que é uma reta com inclinação igual à 0.



Figura 5.20: Queda livre - Gráfico da função $v'(t)$.
Fonte: A autora.

No item (v) os alunos podem ter dúvidas em relação ao conceito de aceleração média. Neste momento, explique que a aceleração $(a(t))$ é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, ou seja,

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

v) **Resposta esperada:**

De acordo com o nosso estudo, a aceleração média entre o instante inicial e final da tabela do item (s) é

$$a = \frac{2,91707 - 0,91507}{0,3 - 0,1} = \frac{2,002}{0,2} = 10,01.$$

w) **Resposta esperada:**

Percebe-se que a aceleração é constante, usando a nossa função, igual à 10,01 m/s^2.

x) **Resposta esperada:**

"O limite $f''(t_P) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t_P + h) - v(t_P)}{h}$ representa a derivada segunda da função $f(t)$ em t_p, bem como a aceleração no instante t_p e, também, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f'(t)$ em t_p".

y) **Resposta esperada:**

O valor limite $\lim_{h \to 0} \frac{v(0,3 + h) - v(0,3)}{h}$ representa a derivada segunda da função $f(t)$ no instante 0,3 s e em respeito ao objeto em queda representa a aceleração no instante 0,3 s, que como vimos é constante, independente do instante, igual à 10,01 m/s^2, isto é, um valor muito próximo do que sabemos ser a aceleração da gravidade.

6 Proposta de atividade 02: “O corredor”

Nossa segunda proposta consiste no estudo do movimento retilíneo de um corredor que se desloca entre dois pontos. Assim como no capítulo anterior, elaboramos um estudo dirigido que consiste em escolher o cenário para realizar o experimento, as instruções para gravação e um questionário que será respondido pelos alunos com auxilio do professor. O questionário está disponível para impressão no Anexo. Também, será necessário o uso de equipamentos como câmera, tripé de apoio e computador que tenha acesso aos *softwares* *Tracker* e Geogebra.

6.1 Descrição do experimento

O experimento “o corredor” consiste no movimento horizontal de um corpo em deslocamento com variações em sua velocidade. Para realizar tal experimento utilizamos uma pessoa, que corre em linha reta enquanto o seu movimento é registrado em vídeo.[1]

Antes de realizar a gravação do vídeo é necessário escolher o cenário, equipamentos e a pessoa que desempenhará o papel do corredor. Para este experimento, basta escolher um fundo com cor lisa, por exemplo, uma parede branca, que possua um espaço para correr entre dois pontos fixos, como na Figura 6.1. Além disso, para registrar o movimento físico é necessário de uma câmera, o qual será posicionada em um tripé de apoio ou em uma superfície (Figura 6.4), desde que não permita a movimentação do equipamento, pois isso poderá causar variação nos dados da análise.

[1]Recomendamos que a duração da corrida no vídeo seja superior à dois segundos, para que se tenha dados suficientes para a execução do questionário proposto.

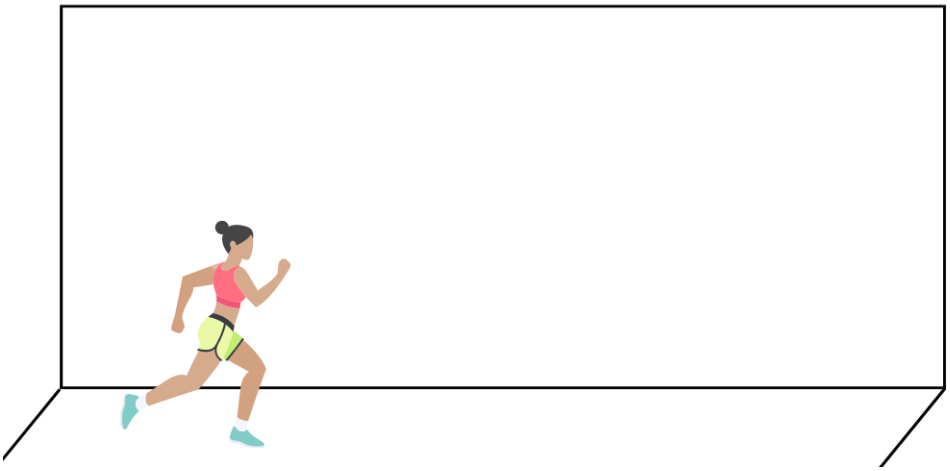


Figura 6.1: Cenário do experimento “o corredor”.
Fonte: A autora.

Para enquadrar a câmera ao cenário, o aluno precisará utilizar equipamentos para fazer algumas medições e marcações no chão como, respectivamente, fita adesiva e fita métrica ou trena. O aluno utilizará uma trena para medir a distância entre as duas marcações (Figura 6.2).

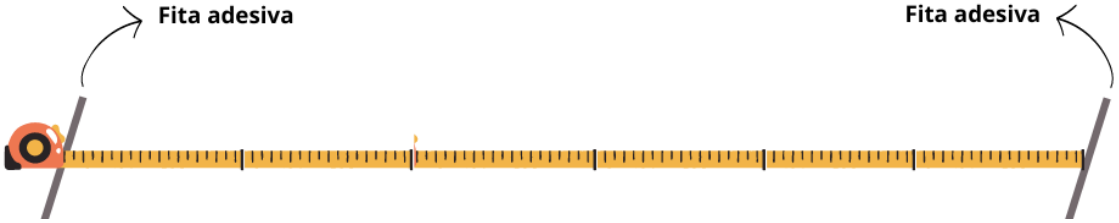


Figura 6.2: Medições e marcações para o cenário do experimento “o corredor”.
Fonte: A autora.

O corredor se posicionará na primeira marcação para iniciar a corrida (Figura 6.3). Além disso, o tripé de apoio ficará centralizado em frente ao espaço a ser percorrido, como na Figura 6.4, de modo a registrar todo o movimento realizado pelo corredor.



Figura 6.3: Posicionamento do corredor.
Fonte: A autora.

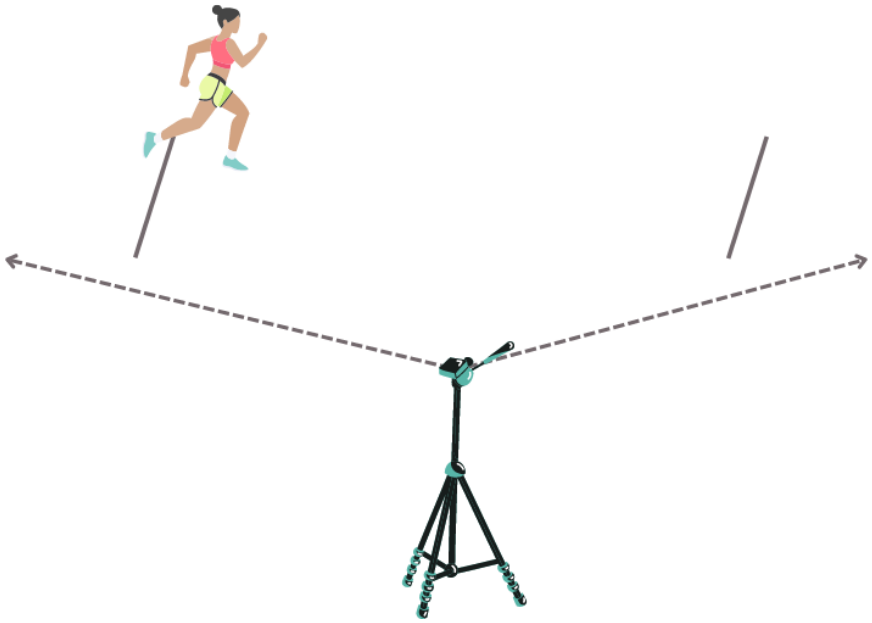


Figura 6.4: Posicionamento do tripé de apoio e do corredor para gravação do experimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

A Figura 6.5 mostra como realizar o experimento "o corredor", basta iniciar a corrida na largada aumentando a velocidade até a linha de chegada, realizando assim o movimento físico registrado na atividade como apresenta a Figura 6.6.



Figura 6.5: O corredor aumentando a velocidade até a linha de chegada.
Fonte: A autora.



Figura 6.6: Gravação do experimento “o corredor”.
Fonte: A autora.

A Tabela 6.1 contém uma estimativa do tempo para a execução desta atividade e outras informações relevantes.

Título do experimento	O corredor
Materiais	Materiais para a marcação do chão (giz ou fita).
Ambiente	Parede de cor lisa ao fundo e chão com espaço apropriado para correr.
Tempo estimado para experimento e gravação	2h
Tempo estimado para vídeo-análise no *Tracker*	1h
Tempo estimado para o questionário	4h
Conteúdo do cálculo a ser abordado	Limites, taxas de variação e derivadas.

Tabela 6.1: Informações sobre o experimento “o corredor”.

6.2 Questionário (Estudo Dirigido)

Para iniciar a análise do vídeo, no *software Tracker*, abra a gravação realizada. Determine o quadro inicial e final usando a barra de ferramentas inferior, considerando como início o exato momento em que o corredor passa pelo ponto A e como final o exato momento em que passa pelo ponto B. A partir disso, adicione o eixo de coordenadas, posicione o eixo da abscissa ligando os pontos A e B (Figura 6.3) e o eixo da ordenada passando pelo ponto A. Acrescente o bastão de medição, colocando um dos extremos no ponto A e o outro no ponto B, além disso, adicione em metros a distância entre esses pontos. Neste momento, insira a ferramenta ponto de massa, posicione-a em um ponto de destaque no corpo do corredor, ative a função trajetória automática e rastreie a trajetória. Caso o movimento gravado em vídeo fique borrado, de baixa qualidade ou se o *software* for incapaz de reconhecer a trajetória automaticamente, faça esse procedimento de forma manual. Observe os gráficos gerados na janela à direita do *software* e responda a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento retilíneo horizontal do corredor, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Analisando a tabela gerada pelo *software*, observe a coluna referente ao tempo.

b) Considerando a duração total da trajetória e a distância entre os pontos A e B, calcule a velocidade média do corredor no percurso total.

Ainda utilizando a tabela produzida pelo *Tracker*, considere as colunas referentes ao tempo e ao deslocamento horizontal. Considere também os intervalos de tempo[2] $I_1 = [1,0; 1,8]$, $I_2 = [1,0; 1,6]$, $I_3 = [1,0; 1,4]$, $I_4 = [1,0; 1,2]$, $I_5 = [1,0; 1,1]$ e $I_6 = [1,0; 1,033]$.

c) Calcule as velocidades médias em cada intervalo e preencha as informações a seguir.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

d) Intuitivamente a tabela que foi preenchida acima fornece alguma informação sobre a velocidade instantânea em algum instante específico? Justifique.

Agora, clique sobre o gráfico escolhido no primeiro item para abrir a janela "ferramentas de dados" e selecione o ajuste de curva com o menor valor "rms dev", ou seja, curva que melhor se ajusta aos pontos dados. Preencha:

e) O tipo de curva selecionado: _____.
A lei da função $x = f(t)$ com o ajuste escolhido: _____.

f) Considerando a função $x = f(t)$ eleita, calcule: $f(1,8)$, $f(1,6)$, $f(1,4)$, $f(1,2)$, $f(1,1)$, $f(1,033)$ e $f(1)$.

g) Complete a tabela a seguir, semelhante a do item (c), mas com os valores de distância fornecidos pela função $x = f(t)$.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

No *Geogebra* insira a função $f(t)$ obtida no item (e), altere as casas decimais para que fique com os mesmos valores do *Tracker*, delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total do percurso pelo corredor. Crie os pontos $P(1, f(1))$, $A(1,8; f(1,8))$, $B(1,6; f(1,6))$, $C(1,4; f(1,4))$, $D(1,2; f(1,2))$, $E(1,1; f(1,1))$ e $F(1,033; f(1,033))$, observe que estes pontão cairão perfeitamente sobre o gráfico de $f(t)$. Trace as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$.

[2]Se os valores dos extremos desses intervalos não estiverem na coluna de tempo da tabela, o docente deve adaptar considerando os valores mais próximos possíveis que aparecem na tabela. Esses valores dependem da taxa de *frame* do vídeo.

h) Usando a ferramenta inclinação do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados:

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares						

i) O que você percebe ao comparar as tabelas preenchidas nos itens (g) e (h) em relação à velocidade média e coeficiente angular? Justifique.

Oculte os pontos A, B, C, D, E e F, bem como as retas e as inclinações no *software*, deixando expostos apenas o gráfico de $f(t)$ e o ponto P. Crie um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varie entre $1,0$ e $1,8$ com incremento igual à $0,01$. Crie a reta entre os pontos Q e P e aperte o *play* no controle deslizante.

j) Nas condições acima, o que você observa sobre a reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

k) Usando a ferramenta inclinação do *software*, o que ocorre com o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

l) Com base nas suas observações, o que fisicamente representaria a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto P?

m) Se denotarmos os pontos P e Q por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$, e o valor $h = t_Q - t_P$, selecione a alternativa que traduz que ocorre com o valor de h conforme o ponto Q se aproxima de P?

( ) $h \to 0$ ( ) $h \to 1$ ( ) $h \to 2$ ( ) $h \to \infty$

n) Escreva a fórmula matemática do coeficiente angular m_{PQ} da reta que passa por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$.

o) Usando o valor de tendência de h selecionado no item (m) e a fórmula de m_{PQ} do item (n), denotando $t_Q = t_P + h$, complete as lacunas do limite abaixo:

$$\lim_{h \to \square} m_{PQ} = \lim_{h \to \square} \square.$$

p) Sendo $h = t_Q - t_P$, então $t_Q = t_P + h$, substituindo no limite obtido no item (o), temos $\lim\limits_{h \to \square} \square$. Que matematicamente é conhecido como a derivada da função $f(t)$ em $t = t_P$.

q) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f'(t_P)$ =_____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a velocidade _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f(t)$ em _____".

r) Explique o que o valor do limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito à situação do corredor.

s) Com base no que foi concluído nos itens (q) e (r), calcule os valores das velocidades do objeto em queda nos instantes indicados na tabela.

Instantes (s)	Velocidade instantânea (m/s)
0,1	
0,15	
0,2	
0,25	
0,3	

t) Usando a função f e os conceitos percebidos nos itens $(q), (r)$ e (s), calcule a expressão matemática da velocidade v em função de t.

u) Faça um gráfico da função $v(t)$. Calcule $v'(t)$ e escreva aqui a sua expressão: $v'(t)$=_____. Plote o gráfico de $v'(t)$ e perceba que ele será uma reta com inclinação igual à _____.

v) Volte a tabela do item (s). Calcule a aceleração média o instante inicial e final da tabela. Qual o seu valor?

w) O que você percebe quando compara os itens (u) e (v)?

x) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f''(t_P) =$ _____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f'(t)$ em _____".

y) Explique o que o valor do limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{v(0,5+h)-v(0,5)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito à situação do corredor.

6.3 Respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente

Para realizar esta atividade recomendaremos ao docente algumas intervenções e indicaremos possibilidades de respostas esperadas ao aplicar este estudo. Ressaltamos também, que os itens do estudo dirigido podem ser escolhidos pelo docente ao aplicar o questionário na disciplina que ministrará, dependendo do tópico de interesse a ser trabalhado.

Antes de mostrarmos as respostas que esperamos para o questionário, informaremos os parâmetros que utilizamos em nossa gravação do movimento "o corredor". A distância entre os pontos inicial e final foi de 7 metros.

Além disso, usamos como "ponto de massa" uma faixa amarela amarrada na cabeça do corredor. Após a gravação do experimento, oriente seus alunos a abrirem o *software Tracker* para iniciar a análise do movimento, seguindo as instruções iniciais do questionário (Figura 6.7) para que comecem a responder as perguntas propostas na atividade.

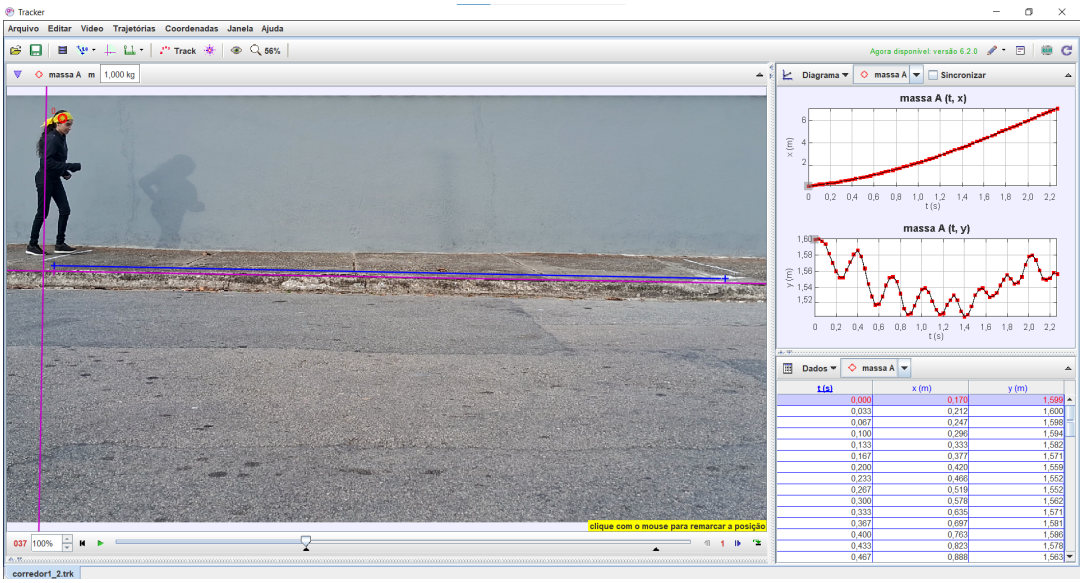


Figura 6.7: Interface do *Tracker* com os parâmetros do movimento "o corredor".
Fonte: A autora.

Podemos observar que o *software* gerou dois gráficos e uma tabela de dados. Neste caso, os gráficos "massa $A(t, x)$" e "massa $A(t, y)$" representam, respectivamente, a trajetória horizontal e vertical do corredor. Sendo t o tempo, x a distância no eixo das abscissas e y a distância no eixo das ordenadas. Esses valores são apresentados também na tabela. Através dos dados gerados, o aluno responderá a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento retilíneo horizontal do corredor, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Nesta questão, o aluno observará os gráficos gerados pelos parâmetros utilizados para análise do vídeo do experimento, como mostra a Figura 6.8.

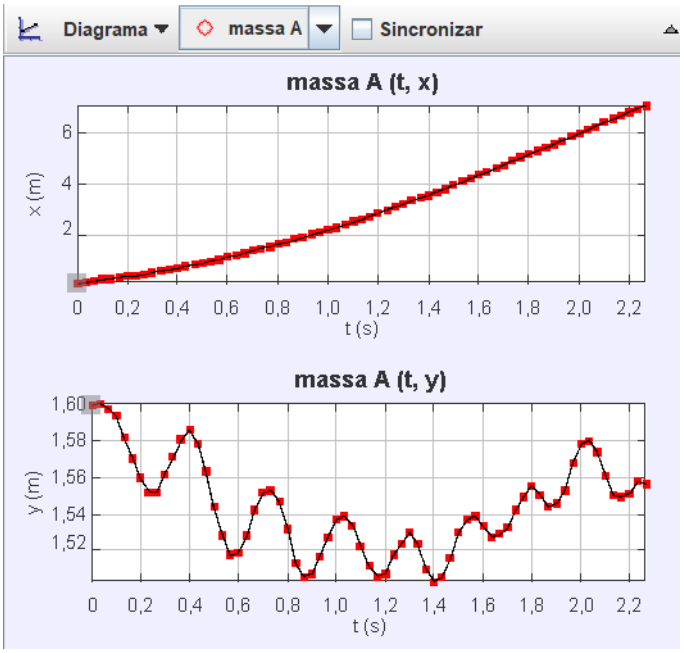


Figura 6.8: Gráficos gerados do movimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

a) **Resposta esperada:**

Devemos observar o gráfico de "massa $A(t, x)$", pois (t, x) representa o tempo $\times$ distância do eixo x (abscissa), indicando assim a trajetória horizontal do corredor.

Uma observação válida a ser feita, caso surja dúvidas pelos alunos, sobre a trajetória vertical do movimento o corredor é que (t, y) representa o tempo $\times$ distância do eixo y (ordenada), por este motivo o gráfico ficará oscilando devido a movimentação vertical do ponto de massa em conjunto com as aproximações feitas pelo *software*. O gráfico de (t, y) indica que essas variações são mínimas e praticamente desprezíveis.

Com o auxílio da tabela gerada pelo *software*, a Figura 6.9 é um exemplo com os nossos dados, o aluno obtém a duração total da trajetória e encontra a distância percorrida pelo corredor. Com esses dados, conseguirá calcular a velocidade média do corredor no trajeto completo, como é pedido no item (b).

Dados — massa A

t (s)	x (m)	y (m)
0,000	0,170	1,599
0,033	0,212	1,600
0,067	0,247	1,598
0,100	0,296	1,594
0,133	0,333	1,582
0,167	0,377	1,571
0,200	0,420	1,559
0,233	0,466	1,552
0,267	0,519	1,552
0,300	0,578	1,562
0,333	0,635	1,571
0,367	0,697	1,581
0,400	0,763	1,586
0,433	0,823	1,578
0,467	0,888	1,563
0,500	0,954	1,544
0,533	1,025	1,528
0,567	1,092	1,517
0,600	1,172	1,518
0,633	1,258	1,528
0,667	1,346	1,542
0,700	1,434	1,552
0,733	1,517	1,553

Dados — massa A

t (s)	x (m)	y (m)
0,767	1,598	1,547
0,800	1,680	1,532
0,833	1,758	1,513
0,867	1,854	1,506
0,900	1,948	1,507
0,933	2,044	1,517
0,967	2,135	1,527
1,000	2,239	1,537
1,033	2,341	1,539
1,067	2,443	1,533
1,100	2,553	1,522
1,133	2,660	1,512
1,167	2,769	1,506
1,200	2,887	1,507
1,233	3,015	1,517
1,267	3,128	1,524
1,300	3,258	1,530
1,333	3,372	1,524
1,367	3,476	1,510
1,400	3,596	1,503
1,433	3,717	1,505
1,467	3,843	1,516
1,500	3,977	1,530

Dados — massa A

t (s)	x (m)	y (m)
1,533	4,103	1,537
1,567	4,235	1,539
1,600	4,366	1,533
1,633	4,498	1,527
1,667	4,640	1,529
1,700	4,774	1,532
1,733	4,916	1,543
1,767	5,047	1,549
1,800	5,187	1,556
1,833	5,315	1,550
1,867	5,446	1,544
1,900	5,583	1,546
1,933	5,711	1,553
1,967	5,852	1,568
2,000	5,996	1,578
2,033	6,138	1,580
2,067	6,277	1,574
2,100	6,411	1,561
2,133	6,547	1,550
2,167	6,685	1,549
2,200	6,822	1,551
2,233	6,962	1,558
2,267	7,093	1,556

Figura 6.9: Tabela de dados do movimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

b) **Resposta esperada:**

Duração total da trajetória: 2,267 segundos.

Distância entre os pontos A e B: 7 metros.

Velocidade média:

$$v_m = \frac{7}{2,267} = 3,088\ m/s.$$

Ainda com o auxilio da tabela de dados gerada pelo *Tracker*, o aluno responderá o item (c), o qual é pedido para calcular a velocidade média em cada intervalo dado e preencher a tabela.

c) **Resposta esperada:**

Distância percorrida:

$Dp_1 = 5,187 - 2,239 = 2,948\ m$

$Dp_2 = 4,366 - 2,239 = 2,127\ m$

$Dp_3 = 3,596 - 2,239 = 1,357\ m$

$Dp_4 = 2,887 - 2,239 = 0,648\ m$

$Dp_5 = 2,553 - 2,239 = 0,314\ m$

$Dp_6 = 2,341 - 2,239 = 0,102\ m$

Duração do intervalo:

$Di_1 = 1,8 - 1,0 = 0,8\ s$

$Di_2 = 1,6 - 1,0 = 0,6\ s$

$Di_3 = 1,4 - 1,0 = 0,4\ s$

$Di_4 = 1,2 - 1,0 = 0,2\ s$

$Di_5 = 1,1 - 1,0 = 0,1\ s$

$Di_6 = 1,033 - 1,0 = 0,033\ s$

Velocidade média do intervalo:

$v_{m1} = \frac{2,948}{0,8} = 3,685\ m/s$

$v_{m2} = \frac{2,127}{0,6} = 3,545\ m/s$

$v_{m3} = \frac{1,357}{0,4} = 3,392\ m/s$

$v_{m4} = \frac{0,648}{0,2} = 3,24\ m/s$

$v_{m5} = \frac{0,314}{0,1} = 3,14\ m/s$

$v_{m6} = \frac{0,102}{0,033} = 3,09\ m/s$

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida	2,948	2,127	1,357	0,648	0,314	0,102
Duração do intervalo	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,033
Velocidade média do intervalo	3,685	3,545	3,392	3,24	3,14	3,09

A partir da tabela do item (c), os alunos responderão a próxima pergunta sobre a velocidade instantânea em algum instante específico. Neste caso, o intuito é o aluno perceber que a velocidade instantânea do corredor está tendendo para o instante de $t = 1\ s$.

d) **Resposta esperada:** Sim, pois a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores e próximos de 1 s, indica a velocidade instantânea nesse instante. Neste caso, indica que a velocidade do corredor no instante $t = 1s$ é aproximadamente de 3 m/s.

Após o aluno clicar sobre o gráfico escolhido no item (a), abrirá a seguinte janela de "ferramentas de dados" (Figura 6.10), a partir disso o discente selecionará o ajuste de curva com o menor valor "rms dev", ou seja, curva que melhor se ajusta aos pontos dados. Neste momento, podem surgir dúvidas sobre o que seria o valor "rms dev", recomendamos que o docente oriente seus alunos utilizando o Capítulo 4, no qual é apresentado onde fica localizado esta informação no *software* e seu significado. Salientamos que, para cada aluno, o experimento resultará em curvas com dados diferentes para serem analisadas, por este motivo o ajuste de curva que o aluno escolherá depende do valor apresentado no "rms dev". Em nosso exemplo, estamos utilizando o ajuste de curva "cúbico", pois foi o que apresentou o menor valor do "rms dev". A partir disso, os parâmetros da curva foram gerados pelo *software*, como apresenta a Figura 6.10.

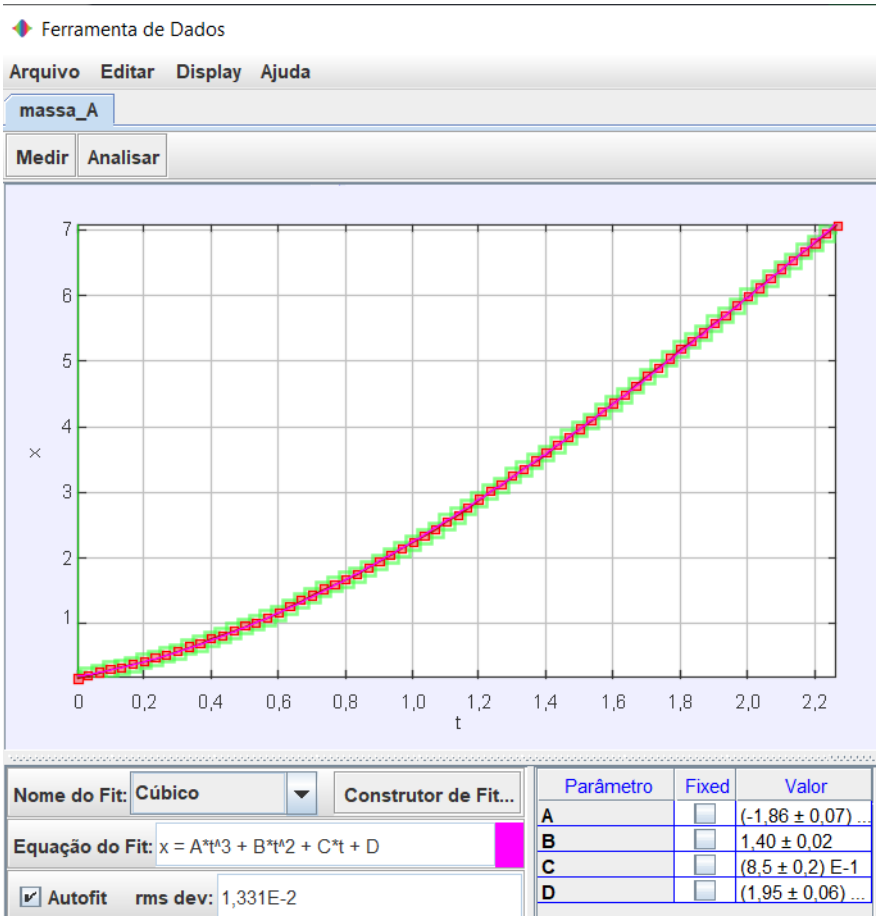


Figura 6.10: Curva escolhida para o movimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

Para mudar a escala do gráfico no *software Tracker* confira as instruções dadas no Capítulo 4. Essa ferramenta facilitará na hora do aluno comparar o gráfico do *Tracker* e Geogebra, colocando na mesma escala. Confira o nosso exemplo na Figura 6.11 que apresenta o gráfico do *Tracker* com a escala modificada.

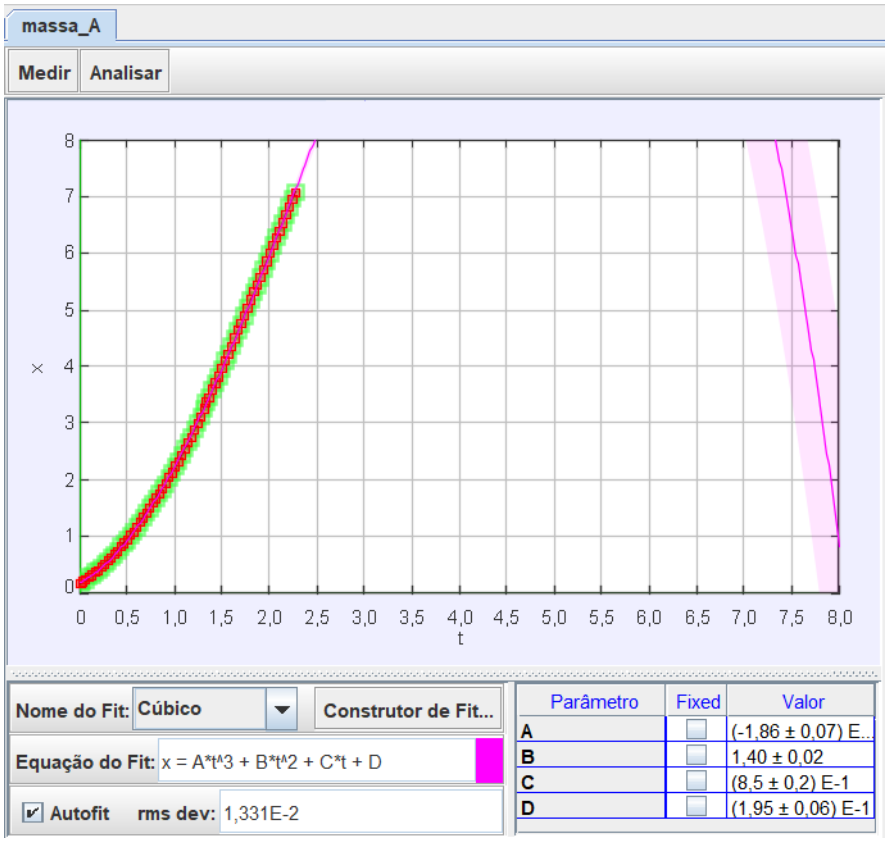


Figura 6.11: Curva escolhida para o movimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

É importante observar os parâmetros completos gerados pela curva no *Tracker*, pois pode haver continuação no valor de cada coeficiente da função (indicada por reticências). Ignorar o parâmetro completo poderá causar erros nos cálculos e gráfico. Para isso, recomendamos que o docente oriente seus alunos a posicionarem o *mouse* sobre os valores que apresentam as reticências para verificarem se existe continuação do número (Figura 6.12). Uma observação válida a se fazer ainda na Figura 6.12 é sobre o valor depois do símbolo ±, que representa um erro muito pequeno e por isso foi desprezado na resolução do nosso exemplo. Outra recomendação é retirar a seleção do "*Autofit*", o Capítulo 4 apresenta a explicação de como utilizar essa ferramenta.

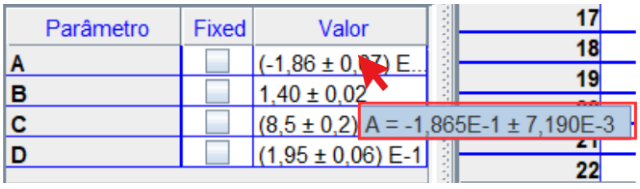


Figura 6.12: Reticências no parâmetro do *Tracker*.

e) **Resposta esperada:**
Em nosso experimento, escolhemos tipo de curva "cúbico". A lei da função $x = f(t)$ foi $f(t) = -0,186t^3 + 1,4t^2 + 0,85t + 0,195$.

f) **Resposta esperada:**
De acordo com o nosso exemplo obtivemos a função $f(t) = -0,186t^3 + 1,4t^2 +$

$0,85t + 0,195$. Assim,

$f(1,8) = -0,186 \cdot (1,8)^3 + 1,4 \cdot (1,8)^2 + 0,85 \cdot (1,8) + 0,195 = 5,176$

$f(1,6) = -0,186 \cdot (1,6)^3 + 1,4 \cdot (1,6)^2 + 0,85 \cdot (1,6) + 0,195 = 4,377$

$f(1,4) = -0,186 \cdot (1,4)^3 + 1,4 \cdot (1,4)^2 + 0,85 \cdot (1,4) + 0,195 = 3,619$

$f(1,2) = -0,186 \cdot (1,2)^3 + 1,4 \cdot (1,2)^2 + 0,85 \cdot (1,2) + 0,195 = 2,909$

$f(1,1) = -0,186 \cdot (1,1)^3 + 1,4 \cdot (1,1)^2 + 0,85 \cdot (1,1) + 0,195 = 2,576$

$f(1,033) = -0,186 \cdot (1,033)^3 + 1,4 \cdot (1,033)^2 + 0,85 \cdot (1,033) + 0,195 = 2,362$

$f(1) = -0,186 \cdot (1)^3 + 1,4 \cdot (1)^2 + 0,85 \cdot (1) + 0,195 = 2,259$

g) **Resposta esperada:**
Nesta dissertação, obtemos os seguintes cálculos para completar a tabela a seguir, semelhante a do item (c), mas com os valores da função $x = f(t)$.

Distância percorrida:

$Dp_1 = 5,176 - 2,259 = 2,917\ m$

$Dp_2 = 4,377 - 2,259 = 2,118\ m$

$Dp_3 = 3,619 - 2,259 = 1,36\ m$

$Dp_4 = 2,909 - 2,259 = 0,65\ m$

$Dp_5 = 2,576 - 2,259 = 0,317\ m$

$Dp_6 = 2,362 - 2,259 = 0,103\ m$

Duração do intervalo:

$Di_1 = 1,8 - 1,0 = 0,8\ s$

$Di_2 = 1,6 - 1,0 = 0,6\ s$

$Di_3 = 1,4 - 1,0 = 0,4\ s$

$Di_4 = 1,2 - 1,0 = 0,2\ s$

$Di_5 = 1,1 - 1,0 = 0,1\ s$

$Di_6 = 1,033 - 1,0 = 0,033\ s$

Velocidade média do intervalo:

$v_{m1} = \frac{2,917}{0,8} = 3,646\ m/s$

$v_{m2} = \frac{2,118}{0,6} = 3,53\ m/s$

$v_{m3} = \frac{1,36}{0,4} = 3,4\ m/s$

$v_{m4} = \frac{0,65}{0,2} = 3,25\ m/s$

$v_{m5} = \frac{0,317}{0,1} = 3,17\ m/s$

$v_{m6} = \frac{0,103}{0,033} = 3,121\ m/s$

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida	2,917	2,118	1,36	0,65	0,317	0,103
Duração do intervalo	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,033
Velocidade média do intervalo	3,646	3,53	3,4	3,25	3,17	3,121

Agora, o aluno será direcionado a abrir o *Geogebra* para inserir a função $f(t)$ obtida no item (e), delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total percorrida pelo corredor (em nosso caso inserimos o valor 2,267 s). Neste momento, recomendamos que o docente oriente os alunos caso surjam dúvidas sobre o *software* e suas ferramentas utilizando o Capítulo 4. Ressaltamos que se o aluno não tiver feito o ajuste de escala no gráfico do *Tracker* poderá haver um estranhamento em relação ao formato da curva. Caso isso ocorra, recomendamos intervenção do docente para que o aluno perceba que isso se trata apenas de problemas de escala.

O discente seguirá todas as instruções do questionário antes de responder ao item (h), segue a Figura 6.13 como exemplo. Além disso, o aluno traçará no gráfico as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$, como a Figura 6.14.

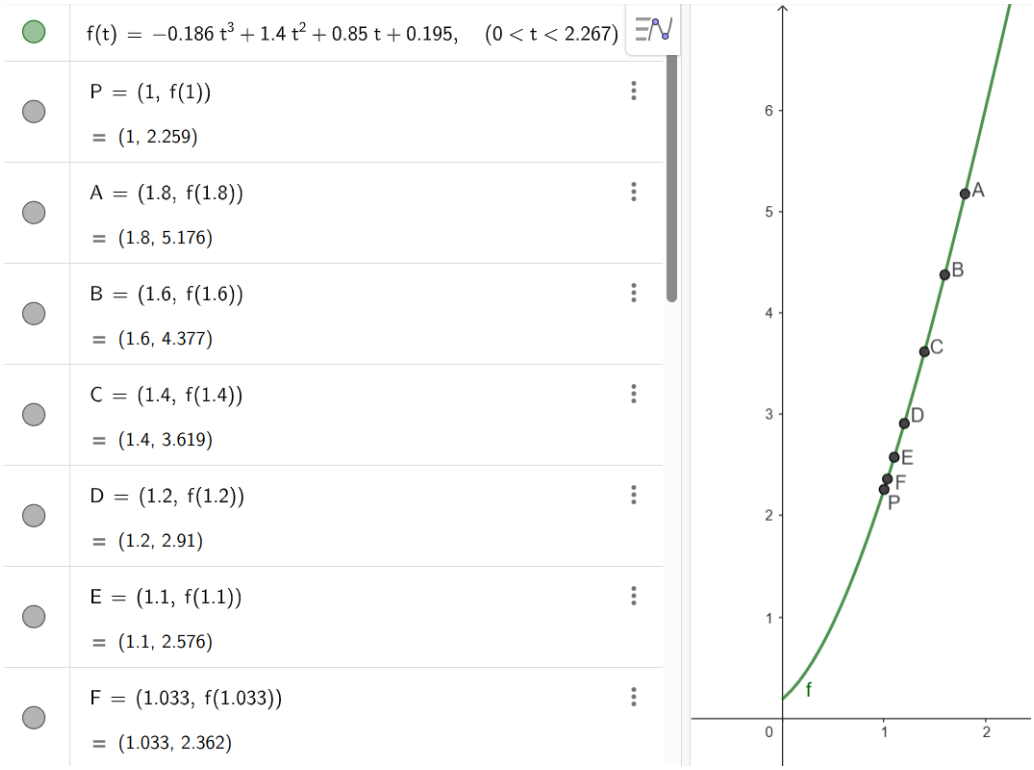


Figura 6.13: Inserindo a curva e pontos no *Geogebra* do experimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

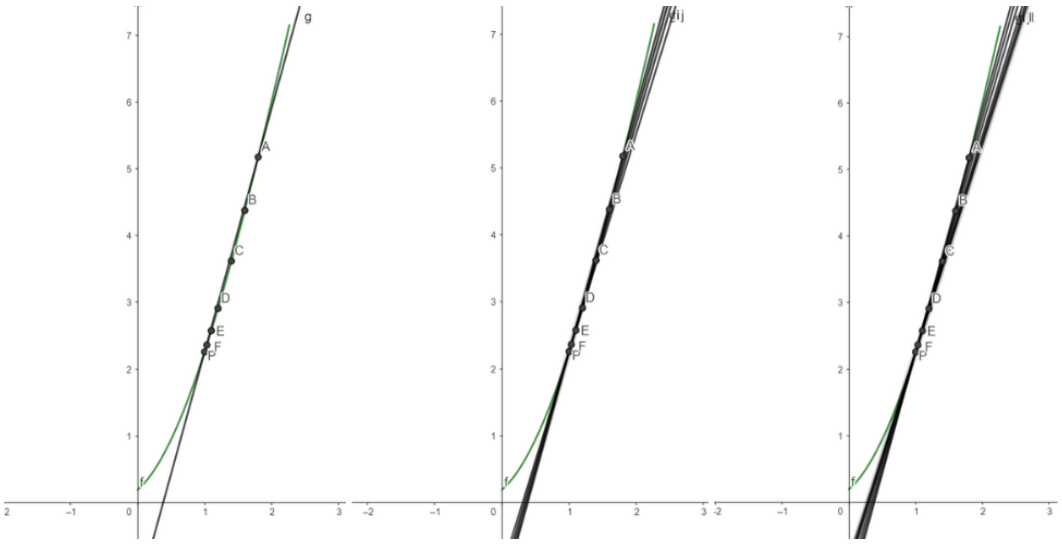


Figura 6.14: Traçando as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: "o corredor".

Fonte: A autora.

Feitos os passos anteriores, agora os alunos responderão o item (h) utilizando o gráfico criado no *Geogebra*. Para facilitar a visualização da inclinação da reta que está sendo analisada, oriente os alunos a desativar a opção "mostrar objeto" nas demais retas e pontos. Confira o exemplo na Figura 6.15.

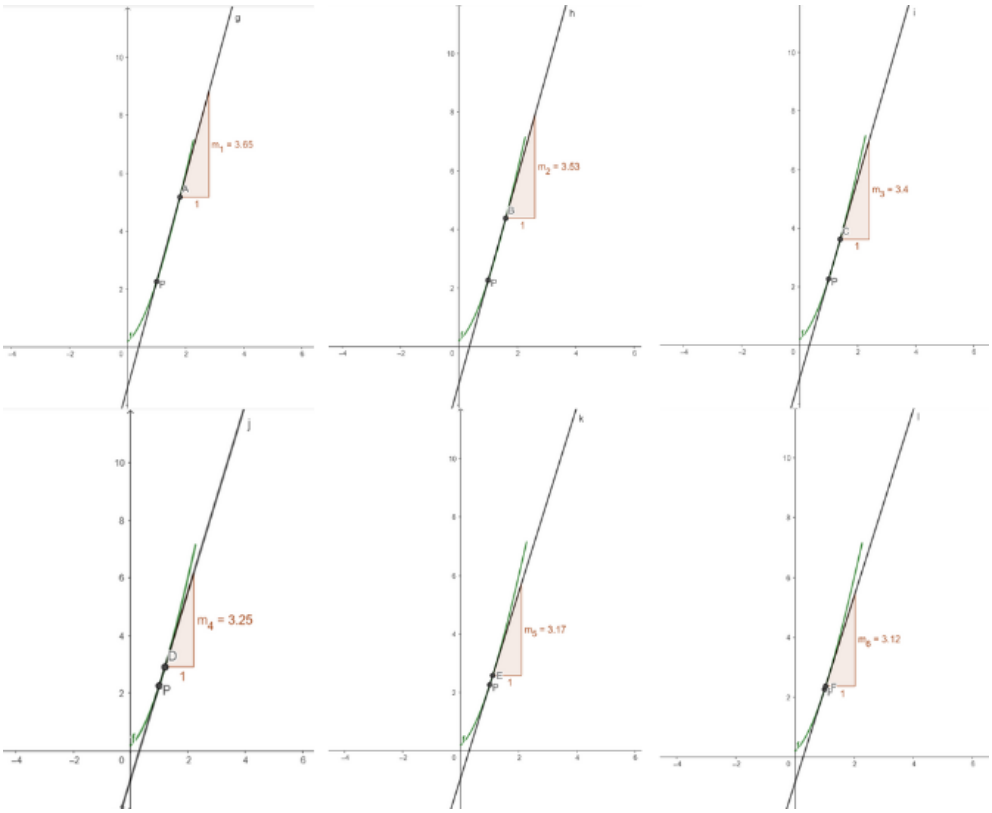


Figura 6.15: Inclinações das retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$ no *Geogebra* do experimento: "o corredor".

Fonte: A autora.

h) **Resposta esperada:**
Usando a ferramenta inclinação do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados:

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares	3,65	3,53	3,4	3,25	3,17	3,12

i) **Resposta esperada:**
Ao compararmos a velocidade média e o coeficiente angular, percebemos que seus valores são iguais (a menos de arredondamento) em cada intervalo analisado na tabela. Isso acontece, pois a velocidade média e o coeficiente angular são o quociente entre a variação do eixo das ordenadas pelo eixo das abscissas.

Oriente os alunos a ocultarem os pontos A, B, C, D, E e F, bem como as retas e inclinações no *software*, deixando expostos apenas o gráfico de $f(t)$ e o ponto P. Criarão um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varia entre $1,0$ e $1,8$ com incremento igual à $0,01$. Crie a reta entre os pontos Q e P e aperte o *play* no controle deslizante, como a Figura 6.16 apresenta um exemplo do movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ que será analisado no item (j). Nesta mesma reta, os alunos analisarão a inclinação, sendo exemplificado na Figura 6.17 alguns momentos do ponto Q se movendo, como é pedido no item (k).

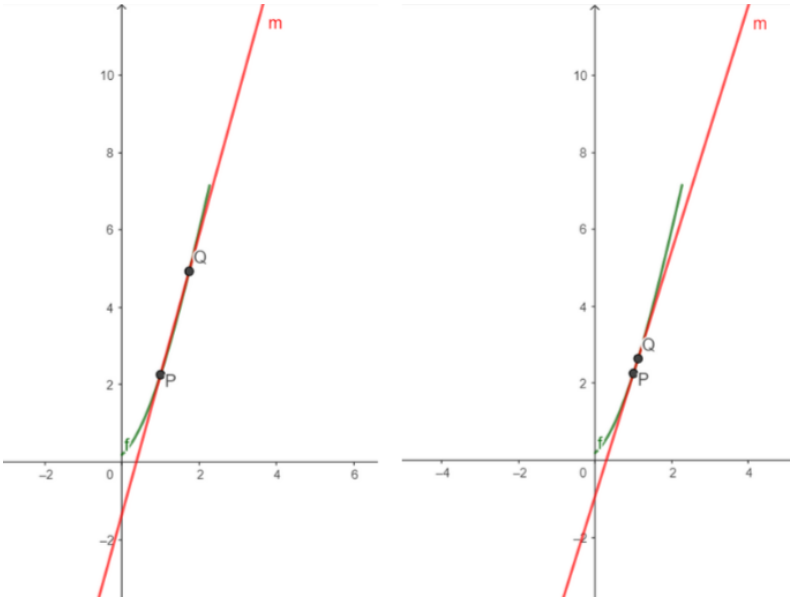


Figura 6.16: Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ no *Geogebra* do experimento: "o corredor".
Fonte: A autora.

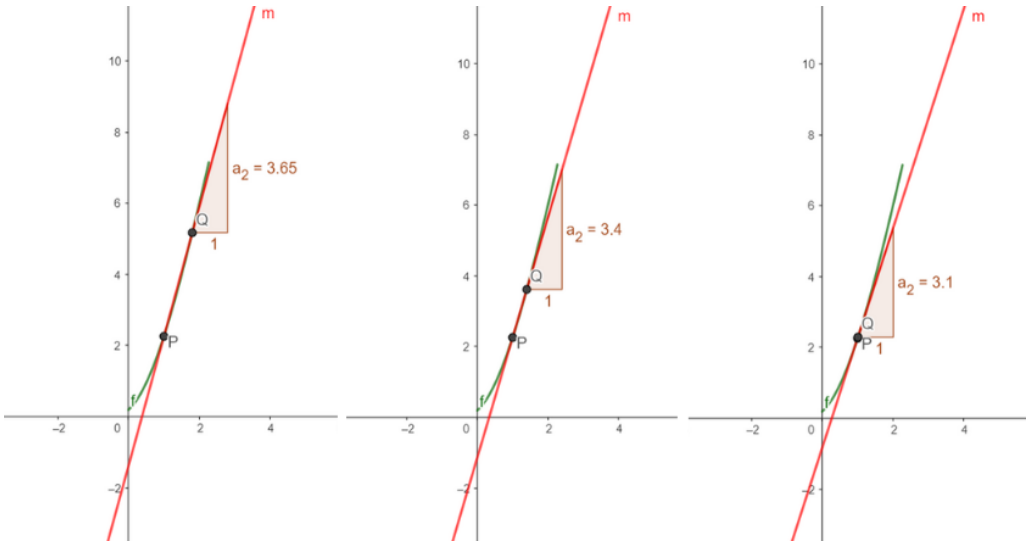


Figura 6.17: Movimento da reta $\overleftrightarrow{QP}$ com o valor da inclinação no *Geogebra* do experimento: "o corredor".

Fonte: A autora.

j) **Resposta esperada:**
Conforme Q se movimenta em direção ao ponto P a reta $\overleftrightarrow{QP}$ tende à reta tangente ao gráfico da função no ponto P.

k) **Resposta esperada:**
Conforme o ponto Q se move, o valor apresentado pela inclinação corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto P.

l) **Resposta esperada:**
Observando a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto P, percebemos que representa fisicamente a velocidade instantânea do corredor no instante do ponto P, ou seja, em 1 s. Além disso, podemos perceber que a inclinação da reta secante ao gráfico de $f(t)$ no ponto P representa a velocidade média entre os instantes do ponto P e do ponto Q.

m) **Resposta esperada:**
Se denotarmos os pontos P e Q por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$, e o valor $h = t_Q - t_P$, selecione a alternativa que traduz que ocorre com o valor de h conforme o ponto Q se aproxima de P?

(X) $h \to 0$ ( ) $h \to 1$ ( ) $h \to 2$ ( ) $h \to \infty$

n) **Resposta esperada:**
Coeficiente angular da reta que passa por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$:

$$m_{PQ} = \frac{f(t_Q) - f(t_P)}{t_Q - t_P}.$$

o) **Resposta esperada:**

$$\lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_Q) - f(t_P)}{t_Q - t_P}.$$

p) **Resposta esperada:**
Derivada da função $f(t)$ em $t = t_P$.

$$\lim_{h\to 0} m_{PQ} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_P + h) - f(t_P)}{h}.$$

q) **Resposta esperada:**
"O limite $f'(t_P) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_P+h)-f(t_P)}{h}$ representa a derivada da função $f(t)$ em t_P, bem como a velocidade instantânea no instante t_P s e, também, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ em t_P ".

r) **Resposta esperada:**
O valor limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ representa a derivada da função $f(t)$ no instante 0,5 s e em respeito à situação do corredor representa a velocidade instantânea no instante 0,5 s.

s) **Resposta esperada:**

Instantes (s)	Velocidade instantânea (m/s)
0,1	1,12442
0,15	1,257445
0,2	1,38768
0,25	1,515125
0,3	1,63978

Caso surjam dúvidas, lembre-os que a velocidade $(v(t))$ é a taxa de variação da posição em relação ao tempo, isto é, a derivada da posição em relação ao tempo, assim, $v(t) = f'(t)$ e a função f está dada no item (e).

t) **Resposta esperada:**

Com base nos dados do nosso estudo, obtemos a função $f(t) = -0,186t^3 + 1,4t^2 + 0,85t + 0,195$. De acordo com os itens $(q), (r)$ e (s), calculamos a expressão matemática da velocidade v em função de t. A partir disso, temos:

$$
\begin{aligned}
&v(t) = f'(t) = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{-0,186(t+h)^3 + 1,4(t+h)^2 + 0,85(t+h) + 0,195}{h} \\
&- \lim_{h\to 0} \frac{-0,186t^3 + 1,4t^2 + 0,85t + 0,195}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,186(t+h)^3 + 1,4(t+h)^2 + 0,85h + 0,186t^3 - 1,4t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,186(t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3) + 1,4(t+h)^2 + 0,85h + 0,186t^3 - 1,4t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,186(3t^2h + 3th^2 + h^3) + 1,4(t+h)^2 + 0,85h - 1,4t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,186(3t^2h + 3th^2 + h^3) + 1,4(t^2 + 2th + h^2) + 0,85h - 1,4t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,186(3t^2h + 3th^2 + h^3) + 1,4(2th + h^2) + 0,85h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,558t^2h - 0,558th^2 - 0,186h^3 + 2,8th + 1,4h^2 + 0,85h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-0,558t^2 - 0,558th - 0,186h^2 + 2,8t + 1,4h + 0,85)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -0,558t^2 - 0,558th - 0,186h^2 + 2,8t + 1,4h + 0,85 \\
&= -0,558t^2 + 2,8t + 0,85.
\end{aligned}
$$

u) **Resposta esperada:**

A partir da expressão encontrada no item (u) foi criado o gráfico da função $v(t)$ utilizando o Geogebra. A Figura 6.18 apresenta o exemplo do nosso trabalho.

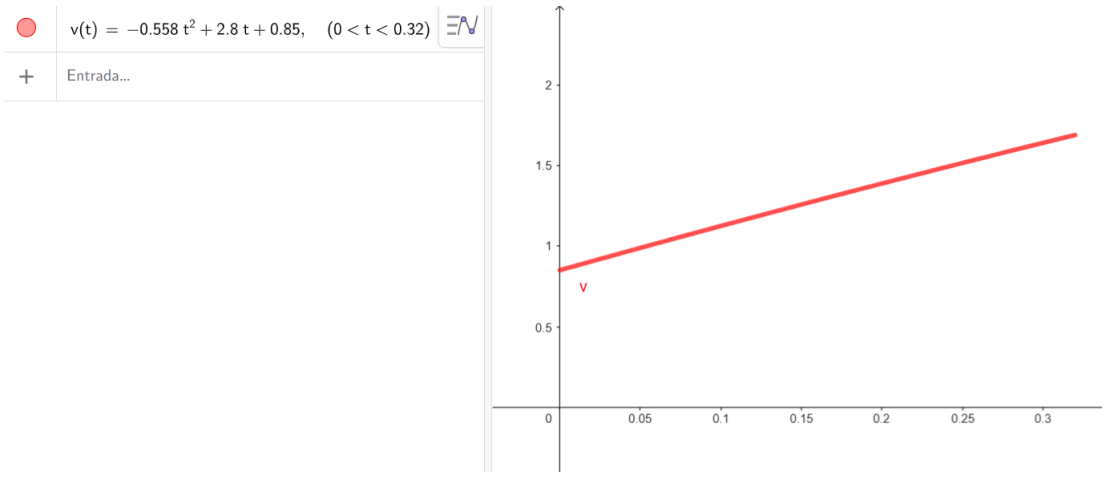


Figura 6.18: O corredor - Gráfico da função $v(t)$. Obs.: Escala do gráfico alterada para melhorar a visualização da função.

Fonte: A autora.

Neste estudo a função encontrada foi $v(t) = -0,558t^2 + 2,8t + 0,85$, calcularemos

$v'(t)$:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{-0,558(t+h)^2 + 2,8(t+h) + 0,85 + 0,558t^2 - 2,8t - 0,85}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-0,558(t^2+2th+h^2) + 2,8(t+h) + 0,85 + 0,558t^2 - 2,8t - 0,85}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-0,558(2th+h^2) + 2,8h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1,116th - 0,558h^2 + 2,8h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(-1,116t - 0,558h + 2,8)}{h} = \lim_{h\to 0} -1,116t - 0,558h + 2,8 \\ &= -1,116t + 2,8. \end{aligned}$$

Portanto, no nosso estudo, $a(t) = v'(t) = -1,116t + 2,8$. A Figura 6.19 mostra o gráfico de $v'(t)$ e podemos perceber que é uma reta com inclinação igual à -1,12.

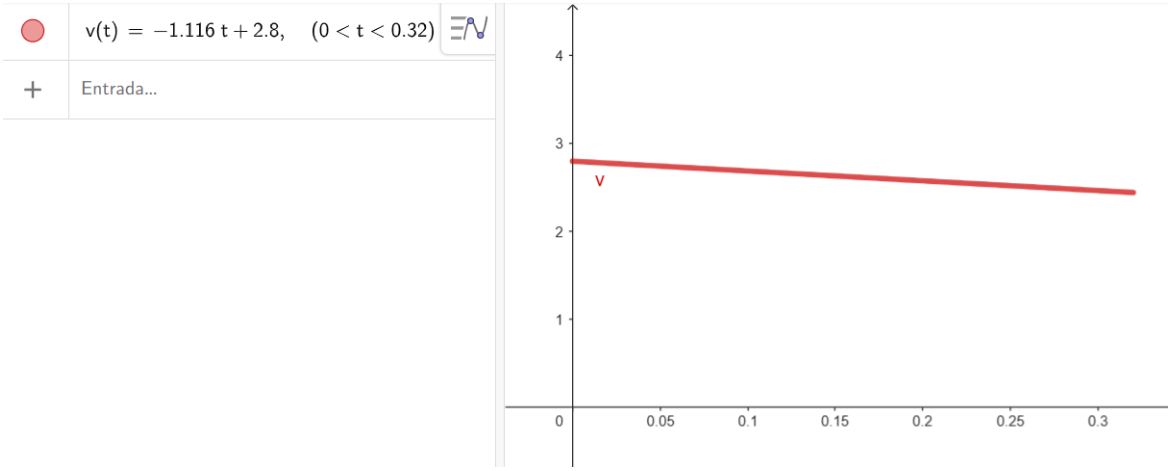


Figura 6.19: O corredor - Gráfico da função $v'(t)$. Obs.: Escala do gráfico alterada para melhorar a visualização da função.
Fonte: A autora.

No item (v) os alunos podem ter dúvidas em relação ao conceito de aceleração média. Neste momento, explique que a aceleração $(a(t))$ é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, ou seja,

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

v) **Resposta esperada:**

De acordo com o nosso estudo, a aceleração média entre o instante inicial e final da tabela do item (s) é

$$a = \frac{1,63978 - 1,12442}{0,3 - 0,1} = \frac{0,51536}{0,2} = 2,5768.$$

w) **Resposta esperada:**

Percebe-se que no item (u) a aceleração varia em função de t quando a velocidade é alterada e o item (v) fornece a aceleração média no trajeto. Resolução dada observando os dados do nosso estudo.

x) **Resposta esperada:**

"O limite $f''(t_P) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t_P + h) - v(t_P)}{h}$ representa a derivada segunda da função $f(t)$ em t_p, bem como a aceleração no instante t_p e, também, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f'(t)$ em t_p".

y) **Resposta esperada:**

O valor limite $\lim_{h \to 0} \frac{v(0,5 + h) - v(0,5)}{h}$ representa a derivada segunda da função $f(t)$ no instante 0,5 s e em respeito ao corredor representa a aceleração no instante 0,5 s.

7 Proposta de atividade 03: "Pêndulo"

Em nossa terceira (e última) proposta, analisaremos o movimento periódico de um pêndulo. Assim como nos capítulos anteriores, elaboramos um estudo dirigido que consiste em escolher o cenário para realizar o experimento, as instruções para gravação e um questionário que será respondido pelos alunos com auxilio do professor. O questionário está disponível para impressão no Anexo. Mais uma vez, será necessário o uso de equipamentos como câmera, tripé de apoio e computador que tenham acesso aos *softwares* *Tracker* e Geogebra.

7.1 Descrição do experimento

O experimento "pêndulo" consiste no movimento oscilatório de um corpo que descreve sua trajetória periódica em torno de um ponto fixo ao ser solto preso em um fio com extremidade no ponto. Para realizar tal experimento utilizamos um objeto de estudo preso em uma linha, o qual era solto em uma determinada altura e registrado o seu movimento através de um vídeo.

Antes de realizar a gravação do movimento, é necessário escolher o cenário, equipamentos e o objeto que será preso em uma linha fixada em uma haste.[1] Para este experimento, basta escolher um fundo com cor lisa que possua contraste com o objeto de estudo, por exemplo, uma parede branca e uma bola com cor escura, presa na linha fixada na haste, como na Figura 7.1. Além disso, para registrar o movimento físico é necessário de uma câmera, a qual será posicionada em um tripé de apoio ou em uma superfície (Figura 7.2), desde que não permita a movimentação do equipamento, pois isso poderá causar variação nos dados da análise.

[1] Em nosso caso, escolhemos uma bolinha

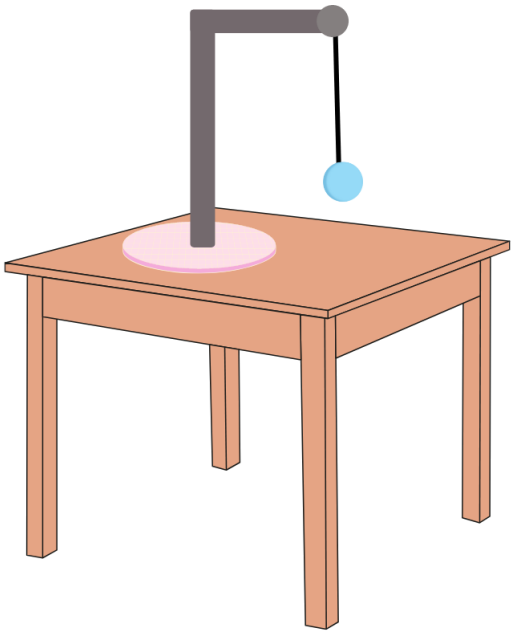


Figura 7.1: Cenário do experimento pêndulo.
Fonte: A autora.

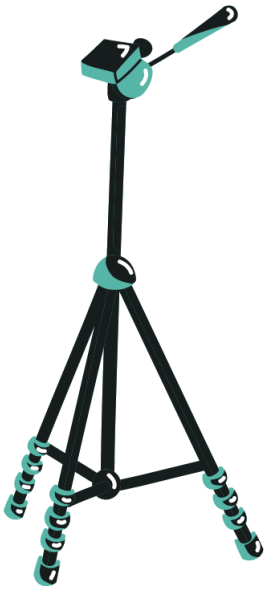


Figura 7.2: Tripé para gravação do experimento pêndulo.
Fonte: A autora.

Todos os elementos do vídeo precisam ser de tons diferentes da cor do objeto que está sendo estudado, para que tenha contraste no vídeo, evitando erros durante rastreio de ponto no *Tracker*. Posicione o tripé de apoio em frente ao cenário, como na Figura 7.3, de forma que consiga registrar todo o movimento realizado pela bola, mas não é necessário realizar a medição e marcação da distância.

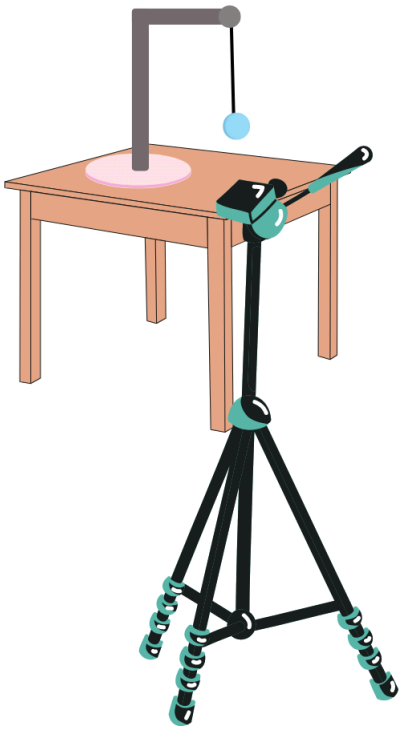


Figura 7.3: Distância do tripé para gravação do experimento pêndulo.
Fonte: A autora.

Utilize uma trena para medir uma referência conhecida que aparecerá no vídeo, como a Figura 7.4. Ao fazer a medição será preciso marcar essa medida na parede, com fita adesiva, giz, entre outros. Confira a Figura 7.5.

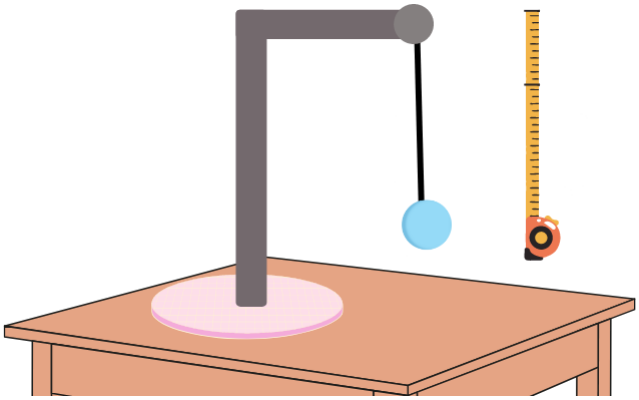


Figura 7.4: Medindo referência conhecida no cenário.
Fonte: A autora.

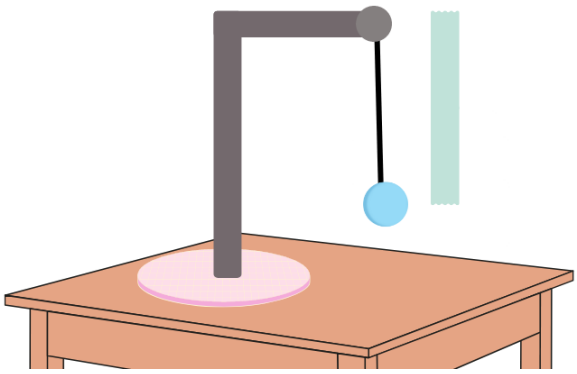


Figura 7.5: Marcação da referência conhecida no cenário.
Fonte: A autora.

A Figura 7.6 mostra como realizar o experimento "pêndulo", basta puxar em seu nível máximo e soltar o objeto de estudo, a partir disso começará o movimento físico da atividade, como exibe Figura 7.7.



Figura 7.6: Início do movimento "pêndulo".
Fonte: A autora.

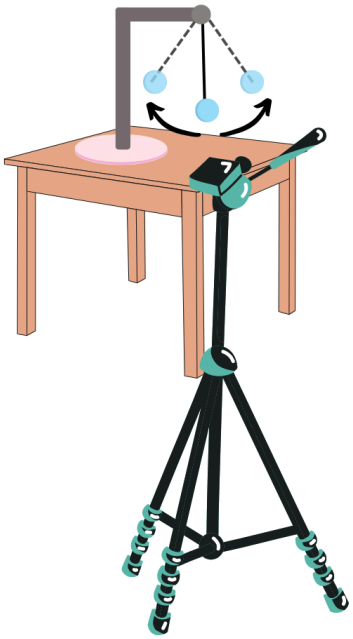


Figura 7.7: Gravação do experimento "pêndulo".
Fonte: A autora.

A Tabela 7.1 contém uma estimativa do tempo para a execução desta atividade e outras informações relevantes.

Título do experimento	Pêndulo
Materiais	Bola, linha/barbante, suporte para pendurar a linha e materiais para marcação de medidas na parede (giz ou fita).
Ambiente	Parede de cor lisa ao fundo e suporte para pendurar a linha em um ponto fixo.
Tempo estimado para experimento e gravação	2h
Tempo estimado para vídeo-análise no *Tracker*	1h
Tempo estimado para o questionário	4h
Conteúdo do cálculo a ser abordado	Taxas de variação, derivadas, funções periódicas, máximos e mínimos locais, pontos críticos.

Tabela 7.1: Informações sobre o experimento "pêndulo".

7.2 Questionário (Estudo Dirigido)

Para iniciar a análise do vídeo, no *software Tracker*, abra a gravação realizada. Determine o quadro inicial e final usando a barra de ferramentas inferior, considerando como início o exato momento em que se solta o objeto e como final o exato momento em que o objeto volta para ao ponto de início, ou seja, após uma oscilação completa. A partir disso, adicione o eixo de coordenadas, posicione o eixo da ordenada na linha central de repouso do pêndulo. O eixo da abscissa pode ser aleatório, mas sugerimos colocar na direção que passa pelo centro do objeto no instante inicial do experimento. Acrescente o bastão de medição, colocando sobre a marcação com medida conhecida feita na parede, acrescentando o valor em metros. Neste momento, insira a ferramenta ponto de massa, posicione-a no centro da bola, ative a função trajetória automática e rastreie a trajetória. Caso o movimento gravado em vídeo fique borrado, de baixa qualidade ou se o *software* for incapaz de reconhecer a trajetória automaticamente, faça esse procedimento de forma manual. Observe os gráficos gerados na janela à direita do *software* e responda a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento horizontal do pêndulo, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

b) Ao observar o gráfico escolhido, percebemos que a curva possui um comportamento oscilatório, com subidas e descidas. De acordo com o experimento pêndulo, qual o motivo disso acontecer?

Agora, clique sobre o gráfico escolhido no primeiro item para abrir a janela "ferramentas de dados" e selecione o ajuste de curva. Preencha:

c) O tipo de curva selecionado: _____.
A lei da função $x = f(t)$ com o ajuste escolhido: _____.

No Geogebra insira a função $f(t)$ obtida no item (c) com $t \geq 0$, faça a alteração nas casas decimais para que fique com os mesmos valores do *Tracker*. Agora, responda a seguinte pergunta:

d) Variando os valores de cada parâmetro da função obtidos no item (c), o que cada um representa?

Ao modificar os parâmetros da função $f(x)$ para responder o item (d), volte a função para os valores encontrados no item (c). Agora, utilizando a ferramenta "planilha" no Geogebra, crie uma tabela iniciando em $t = 0$ e os outros valores variando em 0,033 segundos, aplique na função $f(t)$ encontrada no Tracker.

e) Ao observar a tabela criada no Geogebra podem ser identificado alguns pontos críticos com valores aproximados. Sendo assim, preencha a seguinte tabela com os intervalos da localização dos pontos críticos no gráfico. Caso precise, acrescente mais valores na planilha do Geogebra para preencher toda a tabela.

	t	$f(t)$
I_1 inicial		
I_1 final		
I_2 inicial		
I_2 final		
I_3 inicial		
I_3 final		
I_4 inicial		
I_4 final		

Utilizando o Cálculo Diferencial responda o seguinte item:

f) Determine a derivada da função apresentada no item (c).

g) A partir da derivada do item (f), calcule o valor de pelo menos quatro pontos críticos próximos positivamente da origem do gráfico. Com base no que foi estabelecido no item (e), os pontos críticos calculados pertencem (ou estão próximos) aos intervalos esperados?

No Geogebra,insira no gráfico da função $f(t)$ os pontos críticos encontrados no item (g), em seguida responda ao item (h).

h) Neste item, usaremos alguns valores de máximos e mínimos para realizar a análise das distâncias entre eles no gráfico do Geogebra. Complete a tabela com os valores das distâncias entre os pontos. Use a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro" do *software* para os cálculos e utilize duas casas decimais para minimizar os efeitos das aproximações.

Distância entre	Valor
1º Máximo e 2º Máximo	
1º Mínimo e 2º Mínimo	

i) A distância entre os dois primeiros mínimos é _____, por sua vez, a distância entre os dois primeiros máximos é _____. Esperamos que estes dois valores coincidam. Na verdade, este valor é definido como sendo o período da função f.

Analisaremos agora o que acontece com a derivada de f ao se aproximar de um ponto máximo t_0 pela direta e pela esquerda do gráfico. Para isso, escolha um dos pontos máximos de f e crie um ponto deslizante sobre a curva que varie em apenas uma concavidade da função que contenha o ponto máximo. Além disso, trace a reta tangente à curva no ponto deslizante, em seguida utilize a ferramenta "inclinação" do Geogebra para encontrar a derivada.

j) O que se pode afirmar sobre a derivada de f em pontos que se aproximam do ponto máximo pela esquerda e pela direita?

k) Calcule a função velocidade $v(t) = \frac{d}{dt}f(t)$. Em quais instantes t essa velocidade é zero? O que ocorre com a posição do pêndulo nesses instantes?

l) Com base no que foi concluído nos itens (g) e (k), o que você percebe ao comparar os valores das respostas de ambos os itens. Explique.

m) Calcule a função aceleração $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t)$.

n) De acordo com o item (m), em quais instantes a aceleração é máxima (em módulo)? Esses instantes coincidem com os pontos críticos? Justifique.

7.3 Respostas esperadas e apoio para a intervenção do docente

Para realizar esta atividade recomendaremos ao docente algumas intervenções e indicaremos possibilidades de respostas esperadas ao aplicar este estudo. Ressaltamos também, que os itens do estudo dirigido podem ser escolhidos pelo docente ao aplicar o questionário na disciplina que ministrará, dependendo do tópico de interesse a ser trabalhado.

Antes de mostrarmos as respostas que esperamos para o questionário indicaremos os parâmetros que utilizamos em nossa gravação e análise do movimento "pêndulo". No exemplo dado nesta dissertação, prendemos uma bola em um barbante e fixamos em uma haste para conseguirmos realizar o movimento. Utilizamos como parâmetro de medição a distância entre dois parafusos previamente instalados na parede. Além disso, usamos como "ponto de massa" o próprio centro do objeto de estudo. Outro detalhe importante é posicionar o eixo no ponto de equilíbrio (no meio) de onde a bola está fixada. Após a gravação do experimento, oriente seus alunos a abrirem o *software Tracker* para iniciar a análise do movimento, adicionando todos os parâmetros (Figura 7.8), e começar a responder as perguntas propostas na atividade.

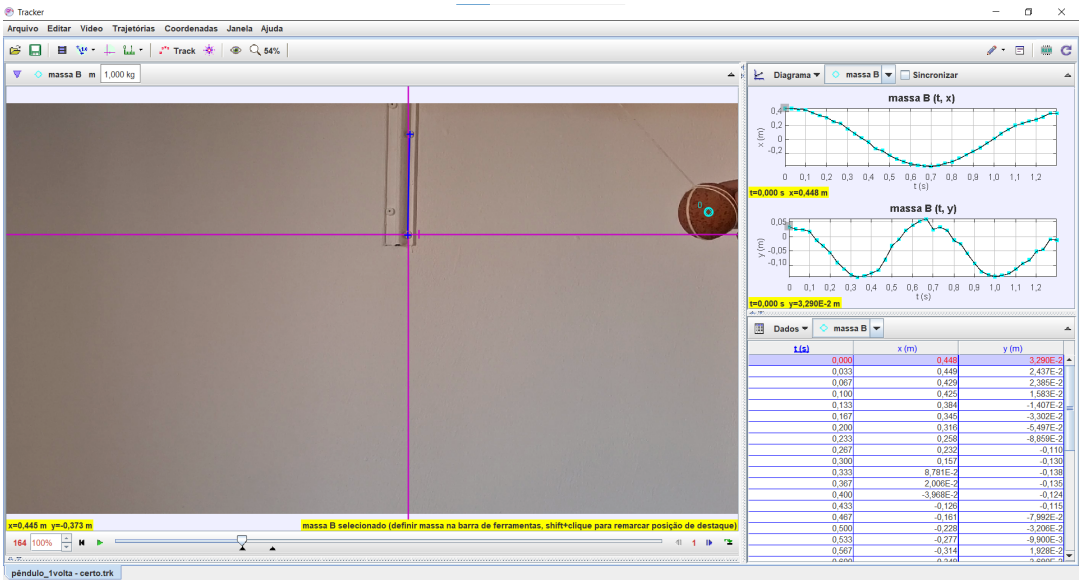


Figura 7.8: Interface do *Tracker* com os parâmetros do movimento "pêndulo".
Fonte: A autora.

Podemos observar que o *software* gerou dois gráficos e uma tabela de dados. Neste caso, os gráficos "massa $B(t, x)$" e "massa $B(t, y)$" representam, respectivamente, a trajetória horizontal e vertical do movimento. Sendo t o tempo, x a distância no eixo das abscissas e y a distância no eixo das ordenadas, o qual esses valores são apresentados também na tabela. Através dos dados gerados, o aluno responderá a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento horizontal do pêndulo, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Nesta questão, o aluno observará os gráficos gerados pelos parâmetros utilizados para análise do vídeo do experimento, como mostra a Figura 7.9.

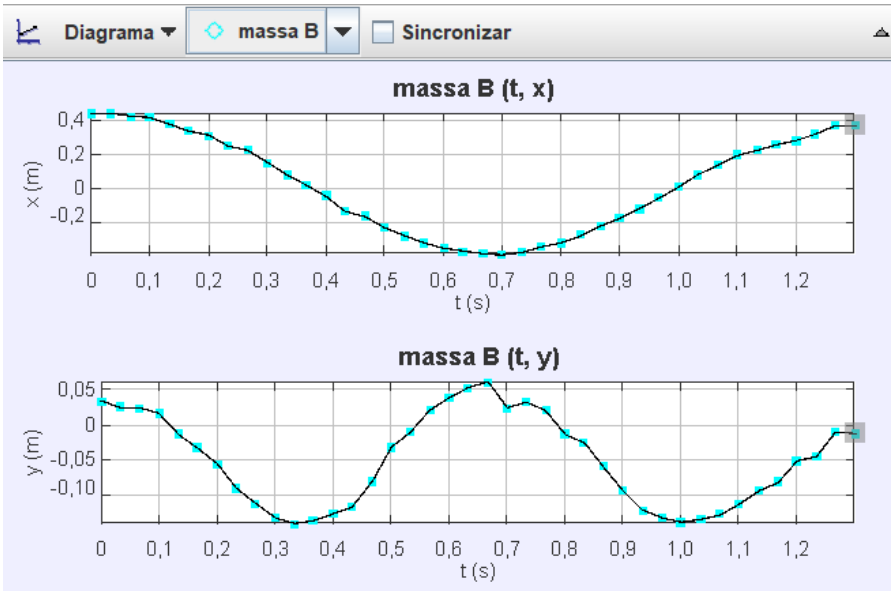


Figura 7.9: Gráficos gerados do movimento "pêndulo".
Fonte: A autora.

a) **Resposta esperada:**

Devemos observar o gráfico de "massa $B(t,x)$", pois (t,x) representa o tempo $\times$ distância no eixo x (abscissa),indicando o movimento horizontal do pêndulo.

Uma observação válida a ser feita, caso surja dúvidas pelos alunos, sobre a trajetória vertical do movimento pêndulo é que (t,y) representa o tempo $\times$ distância do eixo y (ordenada), por este motivo o gráfico ficará oscilando devido a movimentação vertical do ponto de massa.

b) **Resposta esperada:**

Isso ocorre devido a própria movimentação do objeto de estudo ao realizar o experimento. O início do vídeo é marcado ao soltar o objeto e o final quando ele volta a posição inicial. Diante disso, em nosso estudo, quando a bola é solta do ponto de início os valores em x estão diminuindo, ao atingir o ponto máximo de alcance do objeto este começa a voltar ao ponto inicial, o qual os valores em x começam a aumentar.

Após o aluno clicar sobre o gráfico escolhido no item (a), abrirá a janela de "ferramentas de dados", a partir disso o discente selecionará o ajuste de curva "senoide", uma vez que sabemos que este movimento é senoidal. Neste momento, os alunos podem apresentar dificuldades em aplicar as ferramentas do *software*, auxilie os estudantes com o Capítulo 4. Salientamos que, para cada aluno, o experimento resultará em curvas com dados diferentes para serem analisadas. A Figura 7.10 exibe a senoide gerada com seus respectivos valores dos parâmetros do nosso experimento.

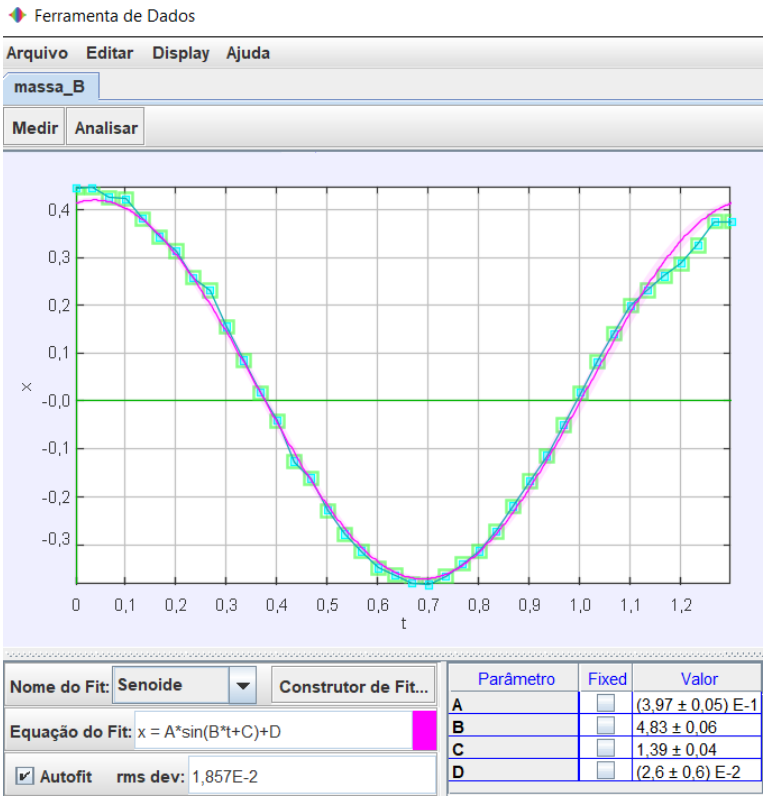


Figura 7.10: Curva escolhida para o movimento: "pêndulo".
Fonte: A autora.

Para mudar a escala do gráfico no *software Tracker* confira as instruções dadas no Capítulo 4. Essa ferramenta facilitará na hora do aluno comparar o gráfico do *Tracker* e Geogebra, colocando na mesma escala. Confira o nosso exemplo na Figura 7.11 que apresenta o gráfico do *Tracker* com a escala modificada.

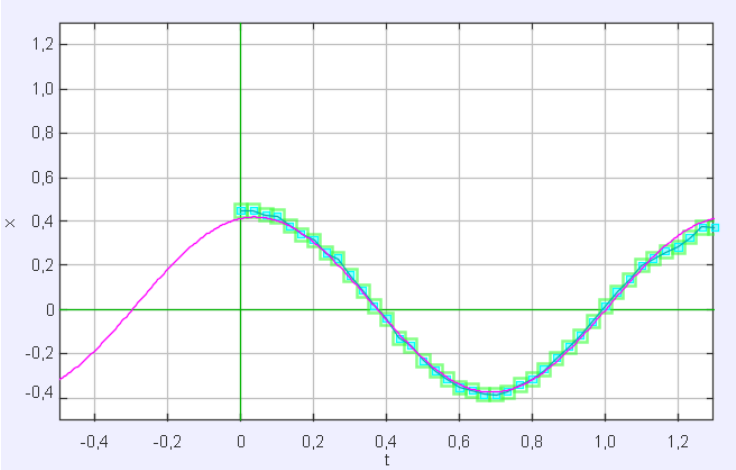


Figura 7.11: Escala do gráfico modificada do movimento: "pêndulo".
Fonte: A autora.

É importante observar os parâmetros completos gerados pela curva no *Tracker*, pois pode haver continuação no valor de cada coeficiente da função (indicada por reticências). Ignorar o parâmetro completo poderá causar erros nos cálculos e gráfico. Para isso, recomendamos que o docente oriente seus alunos a posicionarem o *mouse* sobre os valores que apresentam as reticências para verificarem se existe continuação do número. Outra recomendação é retirar a seleção do "*Autofit*", o Capítulo 4 apresenta a explicação de como utilizar essa ferramenta. A Figura 7.12 mostra os parâmetros do nosso experimento, a qual foi desmarcada a opção do "*Autofit*".

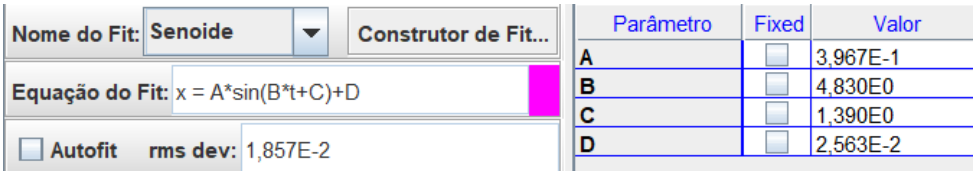


Figura 7.12: Curva e parâmetros do movimento: "pêndulo".
Fonte: A autora.

c) **Resposta esperada:**

Em nosso experimento, escolhemos tipo de curva "senoide", a qual a lei dessa função $x = f(t)$ foi $f(t) = 0,3967 \cdot \text{sen}\,(4,83t + 1,39) + 0,02563$.

Agora, o aluno será direcionado a abrir o *Geogebra* para inserir a função $f(t)$ obtida no item (c), delimitando o intervalo de tempo como sendo $t \geq 0$ s. Importante lembrar que para acrescentar uma função seno no Geogebra existe um comando específico e além disso, instrua o aluno a aumentar as casas decimais utilizando as configurações da planilha. Neste momento, recomendamos que o docente oriente os alunos caso surjam dúvidas sobre o *software* e suas ferramentas utilizando o Capítulo 4. Ressaltamos que se o aluno não

tiver feito o ajuste de escala no gráfico do *Tracker* poderá haver um estranhamento em relação ao formato da curva. Caso isso ocorra, recomendamos intervenção do docente para que o aluno perceba que isso se trata apenas de problemas de escala.

Para responder ao item (d), oriente os alunos a explorarem a curva criada no Geogebra realizando a variação nos parâmetros da função $f(t)$, o qual podem identificar o que cada parâmetro representa na lei da função. Apresentaremos um exemplo feito com o nosso experimento, sendo utilizado a função $f(t)$ com os parâmetros $A = 0,3967, B = 4,83, C = 1,39$ e $D = 0,02563$.

A Figura 7.13 apresenta a representação geométrica da variação do coeficiente A da função $f(t)$:

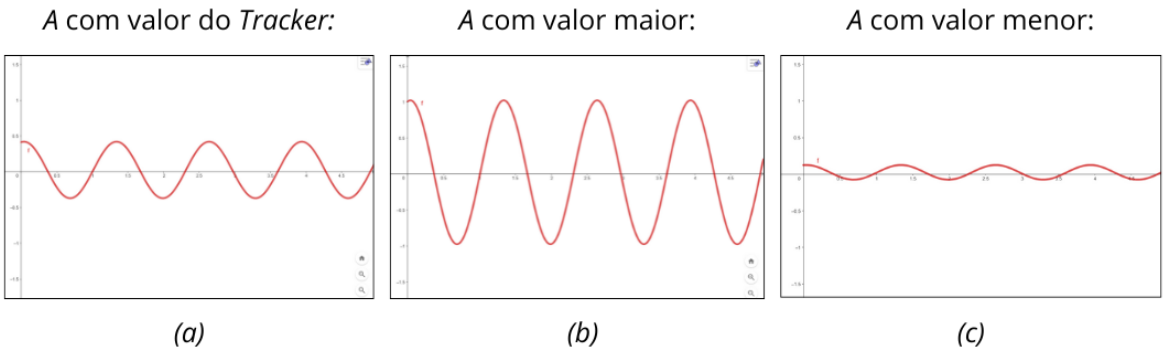


Figura 7.13: Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente A da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

Podemos perceber na Figura 7.13 que o parâmetro A indica a amplitude da função $f(t)$.

A Figura 7.14 apresenta a representação geométrica da variação do coeficiente B da função $f(t)$:

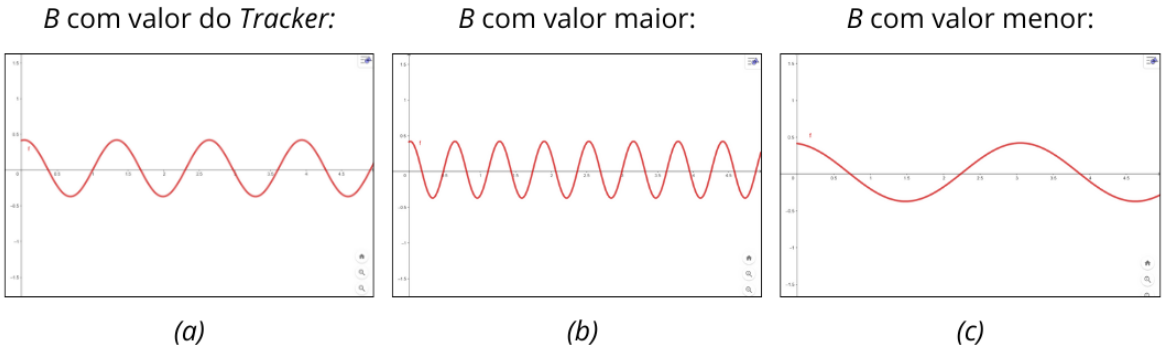


Figura 7.14: Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente B da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

Podemos perceber na Figura 7.14 que o parâmetro B indica a frequência angular, que se relaciona com o período, da função $f(t)$.

A Figura 7.15 apresenta a representação geométrica da variação do coeficiente C da função $f(t)$:

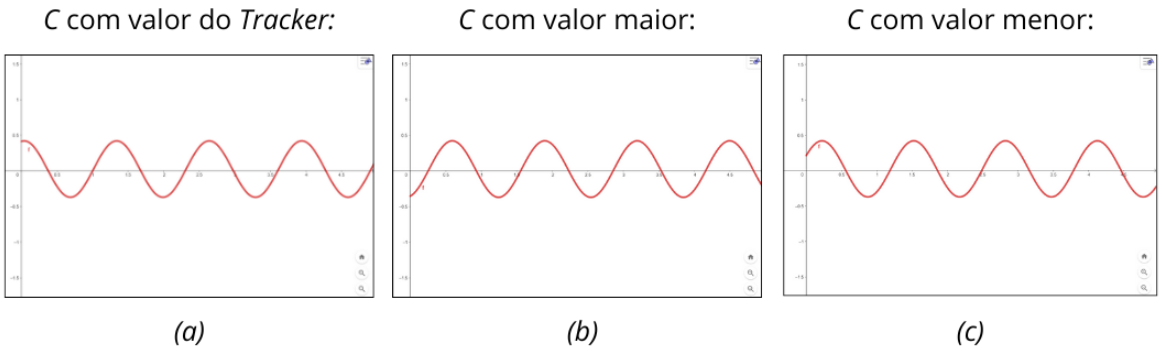


Figura 7.15: Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente C da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

Podemos perceber na Figura 7.15 que o parâmetro C indica o deslocamento horizontal da função $f(t)$.

A Figura 7.16 apresenta a representação geométrica da variação do coeficiente D da função $f(t)$:

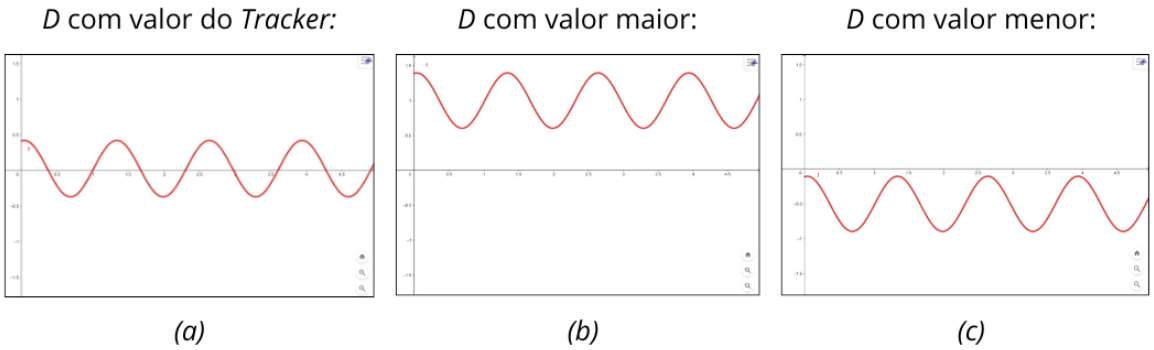


Figura 7.16: Gráfico do Geogebra com a variação do coeficiente D da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

Podemos perceber na Figura 7.16 que o parâmetro D indica o deslocamente vertical da função $f(t)$.

A seguir, será apresentada a reposta a qual esperamos que os alunos desenvolvam observando o gráfico do Geogebra para responderem ao item (d).

d) **Resposta esperada:**

Neste estudo, os parâmetros encontrados da função $f(t)$ foram: $A = 0,3967, B = 4,83, C = 1,39$ e $D = 0,02563$.

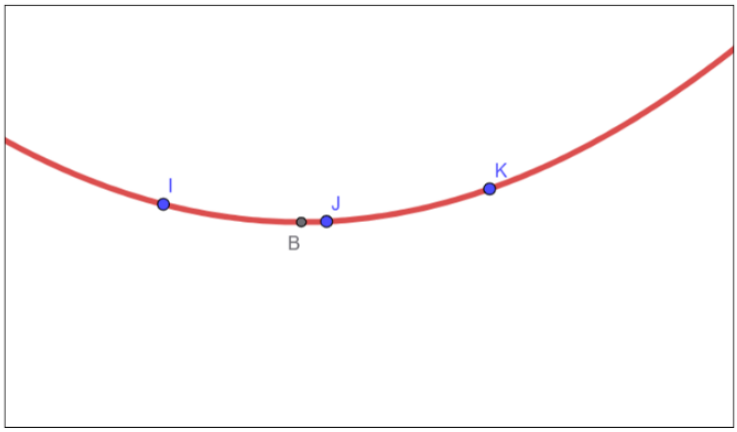
O parâmetro A indica a amplitude da função, o B é a frequência angular, o qual se relaciona com o período, o C e D são, respectivamente, o deslocamento horizontal e deslocamento vertical.

Com a ferramenta "planilha" do Geogebra, oriente os alunos a criarem uma tabela iniciando em $t = 0$ e os outros valores variando em 0,033 segundos, além disso, aplicarem

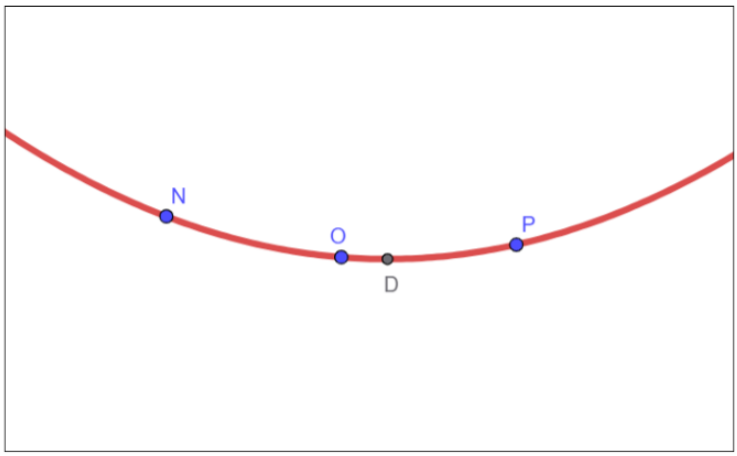
os valores de t na função $f(t)$. Caso tenham dúvidas sobre essa ferramenta, utilize o Capítulo 4 para orienta-los.

Após a planilha ser preenchida pelos alunos, eles serão direcionados a reponderem o item (e) que trata sobre o conceito de pontos críticos da curva. Os discentes observarão a tabela para encontrar os possíveis pontos críticos ou seu intervalo de aproximação em que estão localizados. Para isso, eles analisarão a mudança da função de crescente para decrescente ou o contrário, identificando os intervalos dos pontos críticos e anotando na tabela do item (e). Lembrando que, se na planilha do aluno estiver faltando pontos críticos, oriente os alunos a acrescentarem mais valores na planilha do Geogebra para preencherem toda a tabela do item (e).

Além disso, o ponto crítico pode pertencer ao intervalo tanto a direita quanto a esquerda do gráfico da curva. Este é um detalhe importante para instruir os alunos a observarem na tabela os dois intervalos possíveis, crescente e decrescente, em que o ponto crítico se encontra. No nosso estudo, por exemplo, o intervalo I_2 e I_4 possuem, respectivamente, o ponto crítico no intervalo decrescente e crescente em relação a um ponto pertencente a curva (Confira a Figura 7.17). Por este motivo, precisa ser observado o intervalo completo em que o ponto crítico pode estar localizado (ou próximo).



Ponto crítico (B) no intervalo decrescente.



Ponto crítico (D) no intervalo crescente.

Figura 7.17: Recorte da curva $f(x)$ para exemplificar o ponto crítico.
Fonte: A autora.

e) **Resposta esperada:**

Neste estudo, os valores dos intervalos aproximados para os pontos críticos foram os que estão adicionados na tabela 7.3.

	t	$f(t)$
I_1 inicial	0	0,41586
I_1 final	0,066	0,41856
I_2 inicial	0,66	$-0,36748$
I_2 final	0,726	$-0,36436$
I_3 inicial	1,32	0,42078
I_3 final	1,386	0,41185
I_4 inicial	1,947	$-0,36304$
I_4 final	2,013	$-0,36835$

Deixamos como exemplo, feito no nosso estudo, a Figura 7.18 com um recorte da planilha criada no Geogebra para analisar os pontos críticos da função $f(t)$ e preencher a tabela do questionário.

	A	B
1	t	0.3967 sen(4.83 t + 1.39) + 0.02563
2	0	0.41586
3	0.033	0.42224
4	0.066	0.41856
5	0.099	0.40492
6	0.132	0.38166
7	0.165	0.34938
8	0.198	0.30889
9	0.231	0.26122
10	0.264	0.20758
11	0.297	0.14932
12	0.33	0.08793
13	0.363	0.02496
14	0.396	-0.038
15	0.429	-0.09934
16	0.462	-0.15751
17	0.495	-0.21104
18	0.528	-0.25857
19	0.561	-0.2989
20	0.594	-0.33099
21	0.627	-0.35405
22	0.66	-0.36748
23	0.693	-0.37095
24	0.726	-0.36436
25	0.759	-0.34788

	A	B
41	1.287	0.41022
42	1.32	0.42078
43	1.353	0.42133
44	1.386	0.41185
45	1.419	0.39257
46	1.452	0.364
47	1.485	0.32684
48	1.518	0.28205
49	1.551	0.23076
50	1.584	0.17427
51	1.617	0.11401
52	1.65	0.05151
53	1.683	-0.01165
54	1.716	-0.07386
55	1.749	-0.13355
56	1.782	-0.1892
57	1.815	-0.23941
58	1.848	-0.2829
59	1.881	-0.31857
60	1.914	-0.34551
61	1.947	-0.36304
62	1.98	-0.37072
63	2.013	-0.36835
64	2.046	-0.35599
65	2.079	-0.33396

Figura 7.18: Planilha do Geogebra para analisar os pontos críticos da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

Agora, os alunos utilizarão o Cálculo Diferencial para responder o item (f). Recomendamos ao docente que oriente os alunos caso precisem de auxílio ao aplicar as regras de

derivação na função $f(t)$.

f) **Resposta esperada:**

De acordo com o nosso estudo, encontramos a função $f(t)$, item (c), sendo sua derivada dada por:

$$f'(t) = 0,3967\cos(4,83t + 1,39) \cdot 4,83 + 0 = 1,916061\cos(4,83t + 1,39).$$

A próxima pergunta será para calcular alguns pontos críticos da função $f(t)$. Neste momento, caso os alunos tenham dúvidas, orientamos que o docente explique o conceito, apenas dando instruções para iniciar a questão. Além disso, caso necessário, discuta com os discentes a igualdade $\cos(x) = 0$.

g) **Resposta esperada:**

No nosso caso, encontramos a derivada de $f(t)$ como sendo $f'(t) = 1,916061\cos(4,83t + 1,39)$. Antes de calcular os pontos críticos, lembremos que $\cos(x) = 0$ nos pontos:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, para que $f'(t) = 0$,

$$4,83t + 1,39 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - 1,39}{4,83}.$$

Para encontrar os pontos críticos, substituiremos o valor de k. Com isso,

1. $k = 0$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1,39}{4,83} \approx 0,0374.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(0,0374) &= 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83 \cdot 0,0374 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot 0,9999 + 0,02563 = 0,3966 + 0,02563 \approx 0,422. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto crítico $A(0,0374; 0,422)$.

2. $k = 1$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi - 1,39}{4,83} \approx 0,6879.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(0,6879) &= 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83 \cdot 0,6879 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot (-0,9999) + 0,02563 = -0,3966 + 0,02563 \approx -0,3710. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto crítico $B(0,6879; -0,3710)$.

3. $k = 2$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi - 1,39}{4,83} \approx 1,3383.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(1,3383) &= 0,3967 \cdot \text{sen}\,(4,83 \cdot 1,3383 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot 1 + 0,02563 \approx 0,422. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto crítico $C(1,3383; 0,422)$.

4. $k = 3$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 3 \cdot \pi - 1,39}{4,83} \approx 1,9887.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(1,9887) &= 0,3967 \cdot \text{sen}\,(4,83 \cdot 1,9887 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot (-0,9999) + 0,02563 \approx -0,3710. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto crítico $D(1,9887; -0,3710)$.

Assim, na função do nosso estudo, segue que sempre terá um ponto crítico quando $t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - 1,39}{4,83}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Além disso, podemos perceber que os valores encontrados ao calcular os pontos críticos no item (g) se relacionam com os intervalos analisados no item (e), o qual os pontos críticos estão localizados no gráfico nos intervalo de tempo $I_1 = [0; 0,066]$, $I_2 = [0,66; 0,726]$, $I_3 = [1,32; 1,386]$ e $I_4 = [1,94; 2,013]$ vistos no item (e).

Oriente o aluno a inserir no gráfico do Geogebra os pontos críticos encontrados no item (g), Figura 7.19, utilize o Capítulo 4 para tirar as dúvidas da ferramenta. No item (h), será pedido para que os alunos encontrem a distância entre alguns valores de máximos e mínimos no gráfico do Geogebra. Para descobrir a distância entre dois pontos no *software*, utilize a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro" o qual as instruções de como usar está disponível no Capítulo 4. Confira o gráfico com os nossos valores das distâncias na Figura 7.20.

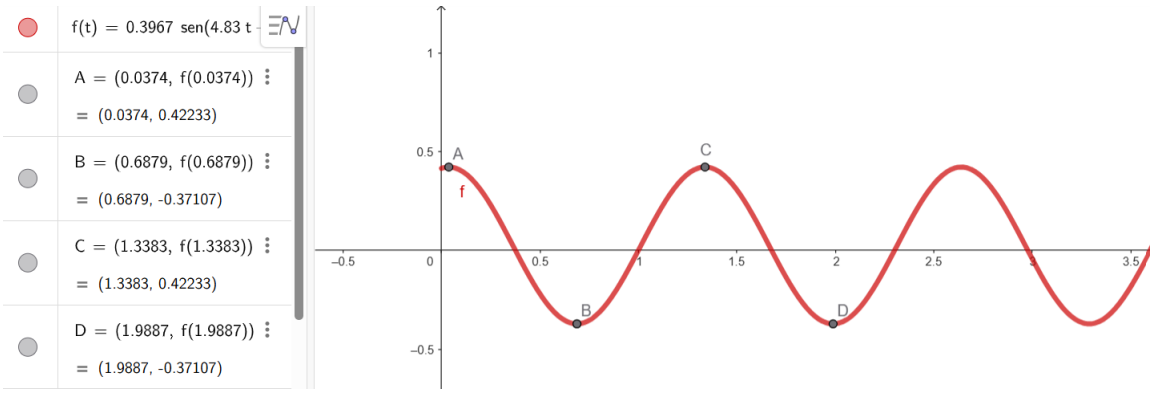


Figura 7.19: Gráfico do Geogebra com os pontos críticos da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

h) **Resposta esperada:**

A tabela foi preenchida com os valores do nosso experimento.

Distância entre	Valor
1º Máximo e 2º Máximo	1,30
1º Mínimo e 2º Mínimo	1,30

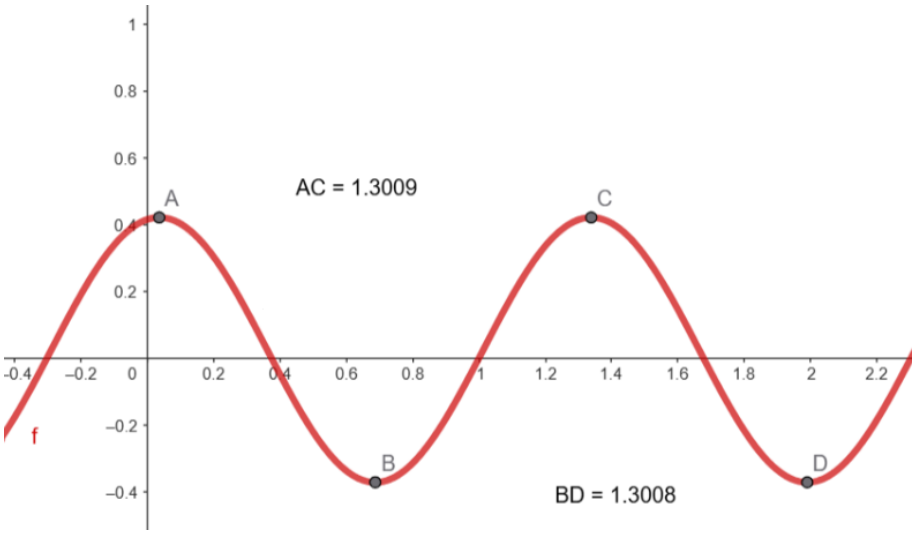


Figura 7.20: Distância entre alguns valores de máximos e mínimos da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

O item a seguir motiva o aluno a observar o período da função $f(t)$, caso os discentes tenham dúvidas, relembre o conceito instruindo a observação da tabela anterior e se necessário no gráfico do Geogebra também.

i) **Resposta esperada:**

A distância entre os dois primeiros mínimos é 1,3 cm, por sua vez, a distância entre os dois primeiros máximos é 1,3 cm. Esperamos que estes dois valores coincidam. Na verdade, este valor é definido como sendo o período da função f.

Agora, os alunos analisarão o que acontece com a derivada ao se aproximar de um ponto máximo pela direta e pela esquerda do gráfico. Para isso, os oriente a criar um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varie em apenas uma concavidade da função que contenha um ponto máximo (o exemplo do nosso estudo será com o ponto C), com incremento igual à 0,01. Crie a reta tangente a curva em Q, adicione a ferramenta inclinação na reta criada e em seguida aperte o *play* no controle deslizante. As Figuras 7.21 e 7.22 apresentam alguns exemplos dos movimentos da reta tangente a curva em Q para que seja analisada a derivada no item (j).

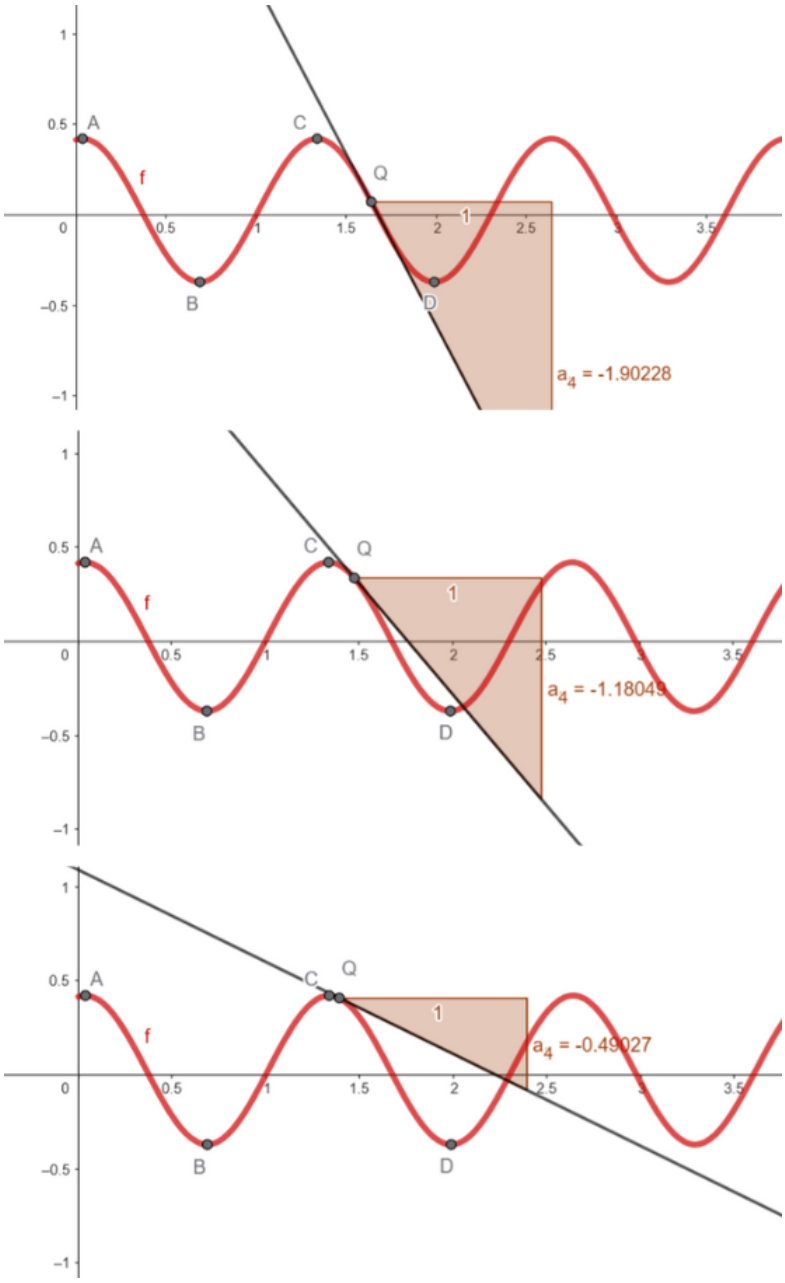


Figura 7.21: Ponto Q se aproximando de C pela direita do gráfico da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

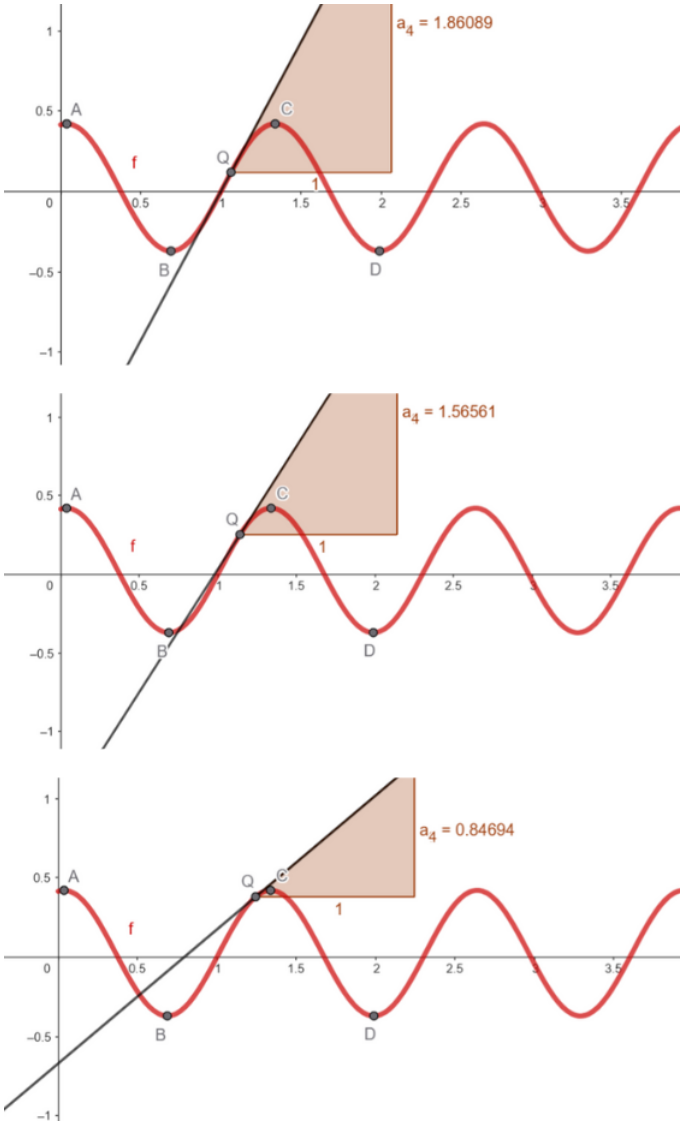


Figura 7.22: Ponto Q se aproximando de C pela esquerda do gráfico da função $f(t)$ do movimento: "pêndulo".

Fonte: A autora.

j) **Resposta esperada:**

A derivada de f em Q, quando Q tende à C pela direita possui valor negativo. Já a derivada de f em Q, quando Q tende à C pela esquerda possui valor positivo.

k) **Resposta esperada:**

Sabemos que a velocidade é a derivada da função posição, neste contexto, $v(t) = \frac{d}{dt}f(t)$. A função posição do nosso estudo é $f(t) = 0,3967 \cdot \text{sen}\,(4,83t + 1,39) + 0,02563$. Assim,

$$v(t) = \frac{d}{dt}f(t) = 0,3967 \cdot \cos\,(4,83t + 1,39) \cdot 4,83 + 0 = 1,916061 \cdot \cos\,(4,83t + 1,39).$$

Agora, encontraremos onde $v(t) = 0$. Para isso, lembremos que $\cos\,(x) = 0$ nos pontos:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, para que $f'(t) = v(t) = 0$,

$$4,83t + 1,39 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - 1,39}{4,83}.$$

Para encontrar em quais instantes de t a velocidade é zero, basta substituir o valor de k. Com isso, apresentaremos a seguir alguns exemplos quando isso ocorre.

1. $k = 0$
$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1,39}{4,83} \approx 0,0374.$$
2. $k = 1$
$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi - 1,39}{4,83} \approx 0,6879.$$
3. $k = 2$
$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi - 1,39}{4,83} \approx 1,3383.$$

A velocidade, em nosso estudo, será igual a zero sempre que $t = \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi-1,39}{4,83}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nesses instantes de tempo t, o pêndulo atinge sua amplitude máxima, ou seja, o ponto em que o objeto é solto e a altura máxima alcançada. Esses são os picos do movimento, nos quais a velocidade da bola é igual a zero.

l) **Resposta esperada:**

Comparando os exercícios, os valores para t são iguais. Isso indica que o pêndulo atinge sua amplitude máxima nos pontos críticos da função f, coincidindo com os pontos onde a velocidade é nula.

Nos próximos itens será abordado o conceito de aceleração, aqui o docente poderá lembrar os alunos que a função aceleração é a derivada segunda da função posição ou a derivada da função velocidade.

m) **Resposta esperada:**

Em nosso estudo, a função posição é dada por $f(t) = 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83t + 1,39) + 0,02563$ e sua derivada por

$$f'(t) = 0,3967 \cdot \cos(4,83t + 1,39) \cdot 4,83 + 0 = 1,916061 \cdot \cos(4,83t + 1,39).$$

Como a função aceleração é dada por $a(t) = \dfrac{d^2}{dt^2} f(t)$, temos que:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{d^2}{dt^2} f(t) = f''(t) &= 1,916061 \cdot (-\operatorname{sen}(4,83t + 1,39)) \cdot 4,83 \\ &= -9,2546 \cdot \operatorname{sen}(4,83t + 1,39). \end{aligned}$$

n) **Resposta esperada:**

A aceleração em módulo, da função do nosso estudo, é dada por

$$|a(t)| = 9,2546 \cdot |\operatorname{sen}(4,83t + 1,39)|.$$

Agora, descobriremos em que instantes a aceleração será máxima. Isso ocorrerá quando $|\operatorname{sen}(x) = 1|$, ou seja, quando $\operatorname{sen}(x) = 1$ ou $\operatorname{sen}(x) = -1$.

Para $\operatorname{sen}(x) = 1$, temos: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$4,83t + 1,39 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1,39}{4,83}.$$

Substituindo alguns valores para k, temos que:

1. $k = 0$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1,39}{4,83} \approx 0,0374.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(0,0374) &= 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83 \cdot 0,0374 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot 0,9999 + 0,02563 = 0,3966 + 0,02563 \approx 0,422. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto $A_1(0,0374; 0,422)$.

2. $k = 1$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi - 1,39}{4,83} \approx 1,3383.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(1,3383) &= 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83 \cdot 1,3383 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot 1 + 0,02563 \approx 0,422. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto $B_1(1,3383; 0,422)$.

Para $\operatorname{sen}(x) = -1$, temos: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$4,83t + 1,39 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - 1,39}{4,83}.$$

Substituindo alguns valores para k, temos que:

1. $k = 0$

$$t = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{3\pi}{2} - 1,39}{4,83} \approx 0,6879.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(0,6879) &= 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83 \cdot 0,6879 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot (-0,9999) + 0,02563 = -0,3966 + 0,02563 \approx -0,3710. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto $A_2(0,6879; -0,3710)$.

2. $k = 1$

$$t = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi - 1,39}{4,83} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \pi - 1,39}{4,83} \approx 1,9887.$$

Aplicando o valor anterior na função $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} f(1,9887) &= 0,3967 \cdot \operatorname{sen}(4,83 \cdot 1,9887 + 1,39) + 0,02563 \\ &= 0,3967 \cdot (-0,9999) + 0,02563 \approx -0,3710. \end{aligned}$$

Com isso, temos o ponto $B_2(1,9887; -0,3710)$.

A aceleração, em nosso estudo, sempre será máxima quando $t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1,39}{4,83}$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $t = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - 1,39}{4,83}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Comparando os resultados dos itens (g) e (m) deste estudo, percebemos que os valores dos pontos A_1, B_1, A_2 e B_2, correspondem aos pontos de máximo da função que por sua vez são os pontos críticos. Isto é, a aceleração máxima ocorre nos pontos de maior amplitude da senoide que modula o movimento, ou seja, nos extremos da oscilação, coincidindo com os pontos onde a velocidade é zero.

8 Inteligências, tecnologias e aprendizagens: Reflexões finais

Neste capítulo abordaremos como as tecnologias e *softwares* podem enriquecer o ensino de Ciências e Matemática, destacando suas contribuições e desafios. Também apresentaremos a teoria das inteligências múltiplas de Gardner (2011), a qual relacionaremos com o questionário proposto nessa dissertação. Além disso, trazemos um relato pessoal sobre como essa teoria contribuiu para o próprio processo de aprendizagem da autora e como os alunos podem reconhecer e desenvolver as próprias habilidades durante uma atividade.

8.1 Tecnologias e softwares no ensino de Ciências e Matemática

Nesta seção refletiremos sobre tecnologias e *softwares* no ensino de ciências e matemática, para isso, é interessante trazer algumas contribuições e restrições da utilização dessas ferramentas quando aplicadas na educação. Aliás, como as tecnologias estão muito presentes no cotidiano de todos, acabamos não percebendo o seu uso, pois se tornaram algo natural na cultura da sociedade.

É comum assimilar tecnologia com *smartphone, tablet* e *smart tv*, uma vez que essas ferramentas são as mais utilizadas atualmente no cotidiano e tem cada vez mais modificado a forma que o homem vive em sociedade (ALMEIDA, 2015). Porém, a tecnologia está presente em todas as atividades humanas e em todos os lugares e momentos, pois ao decorrer do tempo os grupos sociais criaram hábitos, técnicas, culturas e costumes que foram transmitidos de geração em geração, com isso o ser humano foi evoluindo socialmente e suas ferramentas foram sendo aperfeiçoadas. Por isso, segundo Almeida (2015), pode-se considerar que tecnologia é conhecimento, pois a partir dele foram construídas todas as tecnologias que conhecemos.

Uma dessas tecnologias é a calculadora, que foi criada antes mesmo do computador. Nos dias atuais, a calculadora está presente, por exemplo, nos *smartphones*, calculadoras gráficas (GeoGebra), *softwares*, entre outros meios em que esta ferramenta foi implementada. No entanto, esta e outras tecnologias digitais muitas vezes não são utilizadas nas salas de aula, pois falta reconhecê-las como um objeto de estudo que pode auxiliar e contribuir no desenvolvimento dos alunos, conforme diz Almeida (2015).

Em vista disso, de acordo com Marin (2009), a evolução tecnológica abre novas possibilidades para o ensino de ciências e matemática. Porém, o autor também aponta que tal evolução pode criar novas demandas para os docentes, enfrentamento de problemas técnicos, dificuldades de interação com as ferramentas, renovação nas abordagens para

trabalhar os conceitos, entre outros.

Em particular, pensar no ensino da matemática é refletir que esta ciência sempre foi considerada uma das mais difíceis, isso porque também os alunos apontam muitas dificuldades ao desenvolvê-la. Por este motivo, alguns docentes procuram recursos didáticos-pedagógicos para auxiliar durante as aulas desta disciplina. Um dos recursos pedagógicos que são utilizados na matemática e em outras áreas do conhecimento são as Tecnologias da Informação e da Comunicação, conhecidas como *TICs*, pois estas permitem preparar alunos mais criativos e independentes. Além disso, vários projetos e *softwares* foram criados com o intuito de aprendizagem dinâmica tanto dentro da sala de aula quanto estudos em laboratório ou ao ar livre (ROCHA, 2000).

Uma das razões de se utilizar as *TICs* no ensino é a capacidade do aluno desenvolver suas habilidades durante as atividades, pois permitem que os estudantes tenham uma perspectiva de organização do pensamento. Diante disso, Diniz (2007) aponta que no ensino de matemática, por exemplo, o docente pode sugerir atividades de estudos de funções que permitem relacionar mudanças em gráficos com alterações de coeficientes. Além disso, a tecnologia possibilita um pensamento entre os seres humanos e mídias, pois é dado um *feedback* de uma ação humana. Com isso, cria-se condições para estudantes pensarem junto com o *software* gráfico, permitindo realizar investigações em seus estudos, como apresenta Diniz (2007).

Penso que as *TICs* são um auxílio para as aulas de matemática, pois, ainda assim, os conceitos precisam ser explicados antes, durante ou depois de se utilizar as tecnologias. De acordo com Scheffer (2017), o uso de tecnologias no ensino de matemática é fundamental para construir, analisar e estabelecer relações. Permite que o estudante reflita sobre os conceitos aprendidos em sala, tendo a oportunidade de usar, testar e analisar na prática os procedimentos estudados para solucionar um problema. Complementando este pensamento, Eyyam e Yaratan (2014) acreditam que a utilização da tecnologia em sala de aula, aplicada de forma adequada, possibilita um efeito muito positivo no desempenho do aluno. Ainda afirmam que o uso de tecnologias no ensino auxilia os professores a darem um *feedback* imediato e motivar o aprendizado ativo dos alunos. Ou seja, ajuda a desenvolver ativamente a colaboração e cooperação entre os estudantes, mas também permite que o docente forneça informações individualizadas e flexíveis para os estudantes.

A utilização das tecnologias no ensino de ciências e matemática é importante para que o aluno se desenvolva além da sala de aula, pois na maioria dos casos os discentes possuem um *smartphone* e estão sempre conectados. As ferramentas tecnológicas podem auxiliar no pensamento matemático dos alunos, pelo fato de que estão cada vez mais próximos da realidade dos estudantes. Além disso, podem proporcionar aulas de investigações matemáticas, as quais podem contribuir para o desenvolvimento do estudante.

Em concordância com Rocha (2000), é importante ressaltar que o computador pode ser utilizado para auxiliar no aprendizado do aluno, pois este permite que os estudantes tenham, por exemplo, banco de dados, gráficos, elementos visuais, entre outras ferramentas que estão disponíveis para manipulação. Com isso, permite que o discente tenha uma fonte de aprendizagem e uma ferramenta para desenvolver suas habilidades, pois com este meio de interação é possível que o aluno aprenda com seus próprios erros, mas também junto com seus colegas, com trocas de informações e comparações de seus desempenhos.

Em seu estudo, Gouveia (2010) aponta que os recursos tecnológicos utilizados para visualizar e representar os conceitos, reproduzem dados de experimentos matemáticos realizados pelo estudante, por conta disso, o autor busca compreender como cada elemento pode influenciar no desenvolvimento da aprendizagem do aluno. No ensino de exatas,

essas representações são feitas, por exemplo, através de imagens gráficas, sendo necessária a escolha dos recursos e elementos utilizados nos experimentos de ensino. Porém, na maioria dos casos entre estudante, professor e pesquisador, quando se trata de representar e visualizar um objeto, normalmente escolhem a fala e gestos corporais, que posteriormente serão esboçados no papel ou quadro-negro, como afirma Gouveia (2010).

Sabemos o quanto é difícil e desafiador aplicar as tecnologias no ensino de ciências e matemática, pois muitas vezes os docentes não estão preparados para lidar com as eventuais dúvidas sobre tecnologias que surgem ao longo do caminho de aprendizagem. Eyyam e Yaratan (2014) ressaltam que uma das principais restrições para aplicar as tecnologias no ensino é a falta de equipamentos, mas outro ponto que consideram importante é que os professores não estão bem treinados na interação da tecnologia para darem instruções aos alunos.

Por conta da restrição de equipamentos tecnológicos em algumas instituições, os docentes implementam práticas pedagógicas utilizando *smartphones*, pois é uma alternativa para a realização da atividade, visto que a maioria dos alunos possuem este equipamento em mãos. Essa ferramenta tem potencial para contribuir na aprendizagem dos discentes, os quais podem criar e relacionar situações do cotidiano com a matemática, possibilitando realizar vídeo-análise através de *softwares* que permitam manipular dados coletados pela gravação de fenômenos físicos.

Com o uso da tecnologia, Zulatto (2002) explica que a exploração do conceito pode levar os alunos a formular suas próprias conjecturas e tentativas de verificar se elas são válidas. Isto é possível pelas ferramentas disponíveis nos *softwares* que possibilitam a simulação de diferentes situações envolvendo análise matemática.

Diante de toda essa discussão feita sobre tecnologias no ensino de ciências e matemática, pretendo abordar a seguir um outro tema relevante que também será importante abordarmos no contexto deste trabalho.

8.2 Inteligências múltiplas no ensino de Ciências e Matemática

Nesta seção trazemos o tema "inteligências múltiplas" que pode ser abordado dentro do nosso estudo. Antes de falarmos sobre ela, precisamos citar alguns nomes que foram importantes na história antes do desenvolvimento desta teoria.

O Franz Joseph Gall foi um médico, anatomista e neurocientista alemão do final do século XVIII e início do XIX. Ele é conhecido por ter desenvolvido a "frenologia", uma ideia que sugere que diferentes partes do cérebro possuem funções distintas. Jean Piaget foi um psicólogo e epistemólogo suíço, que contribuiu para a teoria do desenvolvimento cognitivo, o qual descreve como as crianças constroem gradualmente o conhecimento ao longo do tempo. Os erros que as crianças cometem ao responder um item de teste, foi o que motivou sua pesquisa, além disso, Piaget passou a acreditar que não é a resposta final da criança que importa, mas sim o caminho do raciocínio que ela utiliza para desenvolver um determinado problema (GARDNER, 2011). Muitas outras teorias e pesquisas foram desenvolvidas para desvendar o processamento da informação, abordagem de sistemas de símbolos, os fundamentos biológicos da inteligência, entre outros, até chegar nas inteligências múltiplas. O que nos leva a seguinte pergunta: "o que é inteligência?".

Howard Gardner, nasceu em 1943 na Pensilvânia, EUA, é um psicólogo cognitivo e educacional americano, ligado à Universidade Harvard, que ficou conhecido, em especial,

pela sua teoria das inteligências múltiplas. Segundo Gardner (2011), "inteligência" não é uma capacidade única e que pode ser medida através de testes padronizados, mas sim um conjunto de competências distintas. Por isso, Gardner (2011), propõe critérios para identificar quais capacidades podem ser consideradas inteligências e reconhece que essa teoria está aberta para melhorias. Com isso, divide as inteligências múltiplas como sendo: inteligência linguística; inteligência lógico-matemática; inteligência espacial; inteligência musical; inteligência corporal-cinestésica e as inteligências pessoais (interpessoal e intrapessoal). Descreveremos cada uma delas a seguir de acordo com a teoria de Gardner, para isso, baseamos nas descrições de Silva et al. (2009).

- **Inteligência linguística**

  A inteligência linguística é a capacidade de compreender, usar e refletir sobre a linguagem de forma eficiente. Envolvendo a sensibilidade ao significado das palavras, atenção na gramática e na ordem das frases. Além disso, a pessoa percebe os sons, ritmos e entonações que tornam a linguagem expressiva. Essa inteligência permite que o indivíduo comunique ideias, emoções e conhecimentos com clareza, sendo essencial tanto na fala quanto na escrita. Embora os poetas sejam destaques desse tipo de inteligência, todos a utilizamos diariamente para nos comunicar, aprender e compreender o mundo ao nosso redor. Ainda assim, a linguagem cumpre papéis fundamentais na vida em sociedade, pois é usada para persuadir, memorizar informações, ensinar e aprender, e até para refletir sobre a prórpia pessoa. Ela pode ser desenvolvida por meio da leitura, escrita, debates, contação de histórias e o contato constante com diferentes formas de linguagem.

- **Inteligência lógico-matemática**

  A inteligência lógico-matemática é a capacidade de raciocinar logicamente, identificar padrões, resolver problemas e lidar com conceitos abstratos de forma eficaz. Pessoas com esse tipo de inteligência possui facilidade em lidar com números, fórmulas, cálculos e sequências lógicas, além de gostar de investigar, experimentar e chegar a conclusões racionais. É a inteligência caracteristica dos advogados, matemáticos, cientistas, entre outras áreas. Essa inteligência pode ser estimulada usando desafios, jogos de lógica, investigações e atividades que envolvam raciocínio dedutivo.

- **Inteligência espacial**

  A inteligência espacial é a capacidade de perceber, transformar e recriar imagens mentais com precisão, além de compreender o mundo visual e espacial ao redor. Pessoas com esse tipo de inteligência conseguem imaginar objetos em diferentes posições, visualizar detalhes com clareza e interpretar mapas, gráficos e diagramas com facilidade. Essa inteligência pode ser desenvolvida por meio de atividades como desenho, pintura, montagem de quebra-cabeças e uso de ferramentas digitais de modelagem.

- **Inteligência corporal-cinestésica**

  A inteligência corporal-cinestésica é a capacidade de usar o corpo de forma habilidosa para expressar ideias, emoções e realizar atividades físicas com precisão e controle. Pessoas com esse tipo de inteligência possuem facilidade em aprender por meio do movimento, coordenar gestos, manipular objetos e desenvolver habilidades motoras finas e amplas. Essa inteligência pode ser estimulada por meio de práticas como

esportes, dança, teatro, trabalhos manuais e outras atividades que envolvam o uso consciente do corpo.

- **Inteligência musical**

  A inteligência musical é a capacidade de perceber, transformar e expressar formas musicais. Ela envolve habilidades como reconhecer ritmos, tons, timbres e melodias, além de criar ou reproduzir músicas com facilidade. Pessoas com esse tipo de inteligência costumam ter sensibilidade para sons e música desde cedo, aprendem melhor por meio de canções e ritmos, e muitas vezes demonstram talento para cantar, tocar instrumentos ou compor. Pode ser desenvolvida com prática e exposição musical constante.

- **Inteligências pessoais**

  – Interpessoal: A inteligência interpessoal é a capacidade de entender e se relacionar bem com outras pessoas, percebendo emoções, intenções, motivações e desejos alheios com sensibilidade. Pessoas com esse tipo de inteligência se comunicam com empatia, escutam com atenção, sabem trabalhar em equipe e costumam mediar conflitos com facilidade. Essa inteligência pode ser estimulada por meio de atividades em grupo, dinâmicas de convivência, debates e experiências que envolvam cooperação e interação social.

  – Intrapessoal: A inteligência intrapessoal é a capacidade de compreender a si mesmo, reconhecendo emoções, pensamentos, motivações e valores pessoais. Pessoas com esse tipo de inteligência possuem autoconhecimento, sabem refletir sobre suas ações, identificar seus pontos fortes e fracos, e tomar decisões alinhadas com seus objetivos e sentimentos. Elas tendem a ser introspectivas, autênticas e guiadas por um senso claro de identidade. Essa inteligência pode ser desenvolvida por meio da auto-observação, meditação, escrita reflexiva, análise pessoal e tempo dedicado à reflexão interior.

Todos os seres humanos são diferentes, por este motivo vimos que a aprendizagem de cada indivíduo é única. Neste contexto, podemos dizer que os alunos aprendem de maneiras distintas, respeitando cada um a sua habilidade. Quando pensamos em educação, a forma mais utilizada para ensinar é por meio da linguística e lógica-matemática, porém percebemos que existem outras habilidades que podem ser desenvolvidas e estimuladas nos alunos, tanto dentro quanto fora da sala de aula.

De acordo com Silva (2023), o saber matemático vai muito além de decorar fórmulas e usá-las para calcular equações, ele é importante para o aprendizado e a compreensão de diferentes fenômenos presentes no nosso cotidiano. É preciso levar em consideração os conhecimentos que os alunos já possuem para que eles possam se desenvolver a partir deles.

8.3 Um relato pessoal

Meu primeiro contato com a teoria das inteligências múltiplas foi durante a minha graduação em Licenciatura em Matemática no IFSP. A Profa. Me. Kelem Fabiana Gubolin Zapparoli explicava como é importante incentivar e motivar os alunos a desenvolverem suas habilidades, pois o professor possui um papel essencial no aprendizado dos discentes.

Nesse sentido, ao estudar sobre essa teoria estava pensando somente no aluno e em como ajudá-lo a se desenvolver. Porém, foi na última disciplina do mestrado que apliquei essa teoria no meu desenvolvimento e percebi como era a forma em que tinha mais facilidade para aprender. Para isso, usei um teste de inteligências múltiplas, é possível encontrar vários disponíveis na internet, inclusive no livro dos autores Silva et al. (2009), porém o que apliquei foi o teste disponível em Curso Aprenda Mais (2022) ou Benedetti (2017).

Ao realizar o teste (Curso Aprenda Mais, 2022; BENEDETTI, 2017), cheguei ao resultado da "inteligência espacial" e a "inteligência corporal-cinestésica", poderíamos chamar, respectivamente, inteligência aplicada e estratégica. Mesmo sendo da área de exatas, a "inteligência lógico-matemático" foi a minha segunda da inteligência aplicada. Através do resultado do teste, pude entender minhas dificuldades durante o aprendizado. Pensava em aplicar essa teoria somente com os alunos, o que nos leva ao resultado das inteligências pessoais que foi "interpessoal".

Na maioria das aulas de exatas em cursos superiores os conceitos são apresentados de forma teórica. Aqui, não estamos propondo que os professores mudem a maneira como aplicam suas aulas e nem a didática que utilizam, mas talvez uma reflexão. Essa teoria pode ser aplicada dentro e fora da sala de aula, podendo ser uma ferramenta de aprendizagem que o próprio aluno utiliza ao realizar atividades, trabalhos, estudar para provas, entre outros.

Depois que realizei o teste e descobri as habilidades que mais se destacavam, procurei em como aperfeiçoar essas e desenvolver mais as outras inteligências. Isso ajudou a estudar para uma prova do mestrado. Ao entender sobre a "inteligência espacial" comecei aplicar métodos de estudo, como a criação de mapas mentais para compreender a matéria. No dia do exame lembrava exatamente o caminho, cores, todas os títulos que estavam no papel, por fim, conseguia visualizar o conteúdo e resolver a questão com facilidade. Antes disso, foi preciso criar o mapa mental, o qual utilizei a inteligência corporal-cinestésica, que é literalmente colocar a "mão na massa".

Isso deixou claro o motivo de tantas dificuldades, inclusive em demonstrações, que é uma parte mais teórica da matemática, o que dificultava a visualização. Porém, a Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli explicou para mim como ilustrar a prova de teoremas fazendo um simples desenho, claro que hoje não faço o desenho no papel, mas imagino os caminhos antes de escrever uma demonstração. Também, a Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso que antes de realizar uma demonstração fazia rascunhos para entendermos o que estava sendo pedido para provar e quais ferramentas matemáticas poderíamos utilizar, isso ajudava na visualização para desenvolver o problema.

Além disso, pude refletir sobre didáticas adotadas por alguns docentes que deram aula para mim durante a graduação. O Prof. Dr. Marcos William da Silva Oliveira ilustrava o conceito de retas concorrentes, paralelas e perpendiculares manuseando duas simples canetas, o que podia ser aplicado pelos próprios alunos. Neste trabalho utilizamos o Geogebra, o qual foi muito aplicado nas aulas da Prof. Dr. Fabiane Guimaraes Vieira Marcondes, que incentivava o uso desse *software* em sala de aula, além disso, nas aulas ministradas pela Prof. Dr. Rosemeire Aparecida Rosa Oliveira utilizamos este *software* para desenvolver um trabalho em grupo.

Outro exemplo também, em que vejo a inteligência espacial sendo usada e isso facilita o entendimento, são em reuniões com o meu orientador Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá, pois algumas vezes não compreendo o que está sendo dito, mas quando partimos para a lousa e fazemos um simples rascunho isso deixa claro a informação. Além de outros professores que não foram citados aqui, mas que fizeram a diferença ao usarem caminhos

distintos para solucionar problemas matemáticos, fazendo com que eu compreendesse a explicação do conceito com mais clareza.

Depois que apliquei as inteligências múltiplas tudo fez mais sentido na aprendizagem e no cotidiano, as tantas dificuldades e erros ao longo dos anos, lembranças exatas de professores explicando através de desenhos, rascunhos de demonstrações, usando o corpo ou objetos, entre outros, fizeram refletir o quanto é importante que o aluno tenha contato e saiba quais são suas habilidades durante o processo de desenvolvimento. Para ajudar outros alunos a desenvolver suas habilidades de aprendizagem e por existir uma relação com a dissertação, foi criada essa discussão sobre as inteligências múltiplas.

8.4 Inteligências múltiplas neste trabalho

Nesta dissertação, propomos alguns questionários sobre Cálculo Diferencial e Integral que utilizam a vídeo-análise e modelagem matemática para analisar fenômenos físicos. Os quais pode ser aplicado durante as aulas ou como trabalho de casa. Para resolver as sequências de atividades, os alunos podem estar desenvolvendo ou usando suas habilidades para estudar limite, derivada e integral. Os discentes podem ser estimulados a aperfeiçoarem algumas das suas inteligências múltiplas, pois, como vimos, cada indivíduo pode ter mais de uma habilidade.

Durante a gravação ou elaboração do experimento, a "inteligência corporal-cinestésica" predomina, pois se refere a capacidade de resolver problemas e elaborar soluções utilizando o corpo inteiro ou partes do corpo. Claramente, a "inteligência lógica-matemática" estará presente ao responder o questionário e manipular todos os elementos matemáticos disponíveis nos *softwares*, visto que, essa habilidade se refere a capacidade de avaliar problemas com lógica, de resolver operações matemática e investigar questionamentos científicos. Além disso, a "inteligência linguística" permite que os alunos utilizem a escrita e a linguagem para certos objetivos durante o desenvolvimento das sequências de atividades.

Da mesma forma, os alunos são capazes de explorar a "inteligência espacial", uma vez que essa desenvolve a capacidade de perceber, transformar e recriar imagens mentais com precisão e, além disso, o aluno consegue imaginar objetos em diferentes posições, visualizando os detalhes com clareza e interpretar tabelas e gráficos com facilidade manipulando os dados do experimento nos *softwares Tracker* e Geogebra. Outro exemplo, de visualização e criação, é a escolha do cenário para gravação que será feito o experimento.

Fica a critério do docente escolher se essas sequências de atividades serão feitas individualmente ou em grupo, neste sentido será trabalhado, respectivamente a "inteligência intrapessoal" e a "inteligência interpessoal". A inteligência intrapessoal permite que o aluno faça possíveis autoavaliações em respeito ao seu aprendizado, se motive e supere os obstáculos durante a atividade, essa habilidade também pode ser trabalhada estando em um grupo. A inteligência interpessoal pode ajudar no trabalho em equipe, pois permite que os alunos compreendam os outros integrantes que possuem ideias diferentes, consigam motivar e conduzi-los com facilidade para o desenvolvimento do experimento e questionário.

Entre todas as inteligências múltiplas apresentadas, a "inteligência musical" foi a única que não é relacionada, pois essa habilidade não será diretamente trabalhada nos questionários. Diante disso, a Figura 8.1 mostra as outras inteligências múltiplas sendo utilizadas em alguns momentos da resolução das sequências de atividades sobre Cálculo Diferencial e Integral.

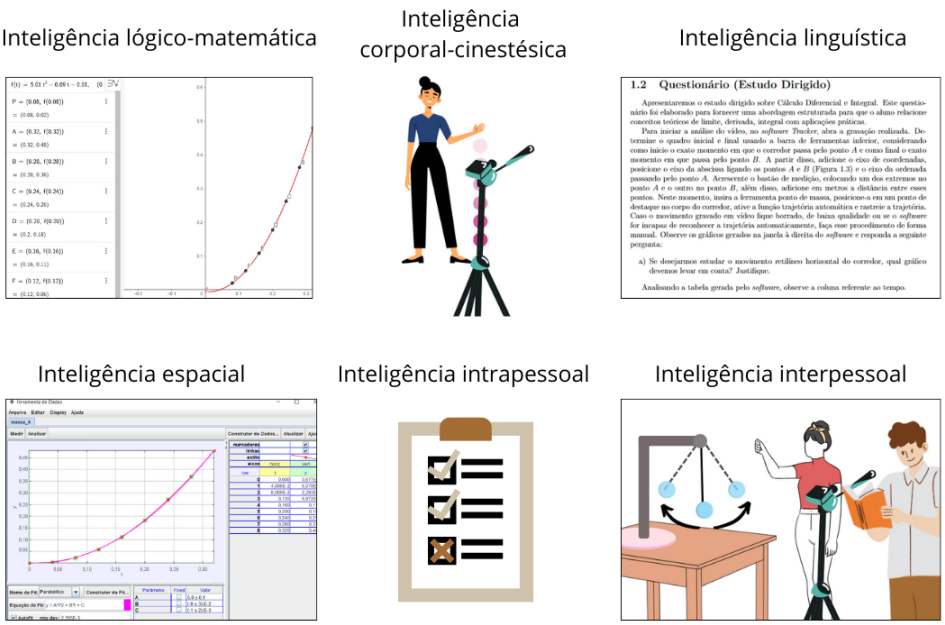


Figura 8.1: Inteligências múltiplas aplicadas no desenvolvimento das sequências de atividades.

Fonte: A autora.

A Figura 8.2 apresenta um recorte do questionário sobre o experimento queda livre. Antes de responder aos itens, os alunos são direcionados a inserir a função no Geogebra. Como é uma orientação prática, que utiliza partes do corpo para realizar a atividade, a inteligência utilizada será a corporal-cinestésica. Após isso, para interpretar o gráfico o aluno lida com a inteligência espacial. A inteligência linguística e lógico-matemática caminham juntas para solucionar o questionário, respectivamente, uma ajuda o aluno a compreender e a interpretar os itens e a outra da a capacidade de identificar padrões e de resolver problemas. Além disso, as inteligências pessoais possibilitam que os alunos consigam trabalhar sozinho ou em equipe.

No *Geogebra* insira a função $f(t)$ obtida no item (e), delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total aproximada do objeto em queda livre. Crie os pontos $P(0,08; f(0,08))$, $A(0,32; f(0,32))$, $B(0,28; f(0,28))$, $C(0,24; f(0,24))$, $D(0,2; f(0,2))$, $E(0,16; f(0,16))$ e $F(0,12; f(0,12))$, observe que estes pontos cairão perfeitamente sobre o gráfico de $f(t)$. Trace as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$.

h) Usando a ferramenta "inclinação" do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados:

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares						

Figura 8.2: Inteligências múltiplas aplicadas no questionário: "queda livre".
Fonte: A autora.

As inteligências múltiplas foi percebida no nosso trabalho antes mesmo de escrever os questionários sobre queda livre, o corredor e pêndulo. Ao fazer um parâmetro geral da dissertação e tentar visualizar como seria cada experimento, com o seu desenvolvimento,

conseguimos fazer essa relação com a teoria de Gardner (2011). Podemos observar que em um simples item do questionário é possível aperfeiçoar mais de uma habilidade dos alunos. Com isso, a teoreia de Gardner (2011) se relaciona com todas as etapas para a resolução do questionário, complementando uma justificativa para a aplicação das sequências de atividades dentro e fora da sala de aula.

8.5 Reflexões finais

Neste trabalho a tecnologia estava muito presente, pois no desenvolvimento da proposta utilizamos os *softwares Tracker* e Geogebra, o qual, respectivamente, realizam vídeo-análise e modelagem matemática. Acreditamos que o questionário desenvolvido possa ser um auxílio para visualização intuitiva do Cálculo Diferencial e Integral por meio da modelagem e vídeo-análise em situações cotidianas. Para isso, utilizamos como base alguns livros da grade curricular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São José dos Campos, que abordavam os conceitos de limite, derivada e integral.

Durante a pesquisa, foram realizados experimentos de fenômenos físicos, aplicados no questionário para discutir os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Por exemplo, o experimento "queda livre", que consiste no movimento vertical de um corpo em queda que descreve sua trajetória em direção ao solo. Este fenômeno está presente em praticamente todos os livros que foram analisados neste trabalho, pois este movimento se relaciona com os conceitos de limite, derivada e integral. Por este motivo e por ser simples a reprodução, criamos um questionário sobre este fenômeno físico.

Acreditamos que ao aplicar o questionário, como material de apoio nas aulas, os alunos consigam visualizar intuitivamente os conceitos de limite, derivada e integral. Possibilitando que o aluno aplique a teoria na prática.

Durante o desenvolvimento da proposta encontramos algumas dificuldades, que foram citadas no Apêndice A para que o docente consiga auxiliar os alunos no manuseio dos *softwares* e experimentos, diminuindo os erros ao realizar a atividade. Além disso, todas as respostas esperadas dos questionários foram precisamente comentadas e discutidas para o apoio ao docente. Lembrando que a aprendizagem de cada aluno é única e suas habilidades podem ser estimuladas, como discutido em algumas seções deste capítulo. A teoria das inteligências múltiplas está aberta para melhorias, o que pode ser um tema muito interessante para realizar pesquisas na área da educação matemática.

Nos experimentos feitos neste trabalho é possível investigar outras situações do movimento que está sendo realizado. Por exemplo, o experimento "o corredor" pode ser realizado variações em relação a aceleração, o que leva a novos gráficos e dados para serem analisados. As Figuras 8.3 e 8.4 apresentam, respectivamente, o corredor desacelerando rapidamente momentos antes de cruzar a linha de chegada e o corredor atingindo a meta acelerando e voltando ao ponto de partida acelerando. Essas são algumas variações que podem ser aplicadas e investigadas futuramente, além de ter a possibilidade de variar o movimento dos outros experimentos citados neste trabalho. O que também pode abrir espaço para investigar o Cálculo Integral que pode ser utilizado para explorar os movimentos dos fenômenos físicos, criando assim novas linhas de discussões e questionários para análise. Além disso, este estudo pode ser ampliado para investigar outros fenômenos físicos, como o lançamento oblíquo.



Figura 8.3: O corredor desacelera rapidamente momentos antes de cruzar a linha de chegada.

Fonte: A autora.



Figura 8.4: O corredor atinge a meta acelerando e volta ao ponto de partida acelerando.
Fonte: A autora.

Além disso, uma investigação e análise que pode ser feita é a aplicação dos questionários durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral, podendo observar quais resultados obtiveram e impactos que a pesquisa teve no desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

Em Ferreira (2025) o leitor encontra alguns experimentos, análises no *software Tracker* e Geogebra, além de vivências da autora durante o mestrado na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

A entrega deste trabalho não representa um ponto final, mas sim uma etapa de um processo contínuo. Os temas ficam como sugestões para investigações e aprofundamentos futuros.

Referências

ABAR, C. A. A. P.; ALMEIDA, M. V. Geogebra como organizador de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem da matemática em uma formação de professores. *emd - Ensino da Matemática em Debate*, v. 4, n. 2, p. 136–144, 2017.

ALMEIDA, H. R. F. L. de. Das tecnologias às tecnologias digitais e seu uso na educação matemática. *Nuances: estudos sobre educação*, v. 26, n. 2, p. 224–240, 2015.

ASSUNÇÃO, T. V. Ensino, ciência e tecnologia: uso do *software* livre *Tracker* no laboratório didático de física. In: *III CONAPESC*. Campina Grande: Realize Editora, 2018. p. 1–4. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/43108>.

BARBOSA, M. A. *O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Intregal*. 101 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. 184 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BENEDETTI, P. T. *FAÇA O TESTE: Inteligências Múltiplas de Howard Gardner*. 2017. <https://youtu.be/WbYG1vsxEUg?si=CK886DDKFMlLOv3h>. Acesso em: 11 abr. 2025.

BEZERRA JÚNIOR, A. G. et al. Videoanálise com o *software* livre tracker no laboratório didático de física: movimento parabólico e segunda lei de Newton. *Caderno Brasileiro De Ensino De Física*, v. 29, n. Especial 1, p. 469–490, 2012.

BORDIN, G. D. *Potencialidades de uso do software de videoanálise Tracker no ensino de Física*. 113 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

BOULOS, P. *Introdução ao Cálculo*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CORDEIRO, A. L.; RODRIGUES, F. L. O. O *software Tracker*: uma ferramenta educacional para potencializar o ensino de física. *Essentia*, v. 20, n. 2, p. 2–8, 2019.

Curso Aprenda Mais. *Teste de Percepção - Inteligências Múltiplas*. 2022. Disponível em: <https://doceru.com/doc/nnsve0v5>. Acesso em: 08 abr. 2025.

DINIZ, L. N. *O papel das Tecnologias da Informação e Comunicação nos projetos de modelagem matemática*. 118 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/São Paulo, 2007.

EYYAM, R.; YARATAN, H. S. Impact of use of technology in mathematics lessons on student achievement and attitudes. *Social Behavior and Personality*, v. 42, p. 31–42, 2014.

FERREIRA, I. A. *Isabela Aparecida Ferreira - Mestrado - UNESP*. 2025. Disponível em: <https://drive.google.com/drive/folders/1FZ_D2I0y26Rqovou0KuCl_ZRComX7mWy?usp=sharing>. Acesso em: 15 mai. 2025.

FERRUZZI, E. C. et al. Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia. *World Congress on Engineering and Technology Education*, p. 1354–1358, 2004.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração*. 6. ed. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2006.

GARDNER, H. *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. 2. ed. New York: Basic Books, 2011.

GONÇALVES, D. C. *Aplicações de derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o Geogebra*. 110 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. da S. Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o Geogebra. *Bolema*, v. 27, n. 46, p. 417–432, 2013.

GOULART, T. M. B. *Os "elementos" de Euclides visitam o ensino fundamental: análise de tarefas matemáticas pautadas na história da matemática e desenvolvidas no software Geogebra*. 198 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/Minas Gerais, 2020.

GOUVEIA, C. A. A. *Processos de Visualização e Representação de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com um Software Tridimensional*. 213 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2010.

HELLMANN, L. et al. Geogebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. *Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia*, v. 2, n. 14, p. 31–46, 2016.

HOFFMANN, L. D. et al. *Applied Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences*. 10. ed. New York: McGraw-Hill, 2010.

HOFFMANN, L. D. et al. *Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações*. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, 2018.

LIMA, E. L. *Curso de Análise: Volume 1*. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

LOBO, A. S. M.; MAIA, L. C. G. O uso das TICs como ferramenta de ensino-aprendizagem no ensino superior. *Caderno de Geografia*, v. 25, n. 44, p. 16–26, 2015.

MACÊDO, J. A.; GREGOR, I. C. S. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. *Educação Matemática Debate*, v. 4, n. 10, p. 1–24, 2020.

MARIN, D. *Professores de matemática que usam a tecnologia de informção e comunicação no ensino superior*. 164 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2009.

MARTINS JÚNIOR, J. C. *Ensino de derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra*. 123 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

MONTEIRO, L. C. *Uma proposta de ensino com modelagem matemática: o estudo de movimentos através da análise de vídeos com o programa Tracker*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Pampa (Unipampa), 2021.

PARREIRA, J. E. Um curso de mecânica com o uso do programa de videoanálise *Tracker*. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 35, n. 3, p. 980–1003, 2018.

PAVANELO, E. et al. A construção do conceito intuitivo com limite com apoio de tecnologias digitais. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, p. 1–12, 2016.

RICHIT, A. et al. Contribuições do *software* Geogebra no estudo de Cálculo Diferencial e Integral: uma experiência com alunos do curso de Geologia. *1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra*, p. 90–99, 2012.

ROCHA, M. L. *As novas tecnologias e o ensino de matemática*. 164 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

SCHEFFER, N. F. *Tecnologias digitais e representação matemática de movimentos corporais*. 1. ed. Curitiba: Appris, 2017.

SILVA, L. M. et al. O livro de Cálculo Diferencial e Integral I: A visão dos alunos de cursos de engenharia. *SciELO Preprints*, p. 1–15, 2021.

SILVA, M. F. M. C. et al. *Diversidade na aprendizagem de pessoas com necessidades especiais*. 1. ed. Curitiba: IESDE Brasil, 2009.

SILVA, V. L. O. D. *Inteligências múltiplas e ensino-aprendizagem da matemática*. Monografia (Graduação) — Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), 2023.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica: volume 1*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1996.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do Geogebra no estudo de funções. *Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, p. LXVI – LXXX, 2012.

STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2021.

TÁBOAS, P. Z. *Cálculo em uma variável real*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

THOMAS, G. B. *Cálculo: Volume 1*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas caracteristicas e perspectivas*. 184 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, São Paulo, 2002.

ÁVILA, G. S. de S. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

A Apêndice: Atenção às dificuldades encontradas

A partir de todos os experimentos realizados nesta dissertação, podemos citar algumas dificuldades encontradas nas execuções, o que levou a uma série de tentativas de resoluções que iremos compartilhar nesse capítulo. Vale ressaltar que após encontrar as dificuldades nos experimentos "queda livre" e "o corredor", foram evitadas todas as possíveis adversidades para realizar o movimento "pêndulo", executando assim o experimento sem encontrar obstáculos.

A.1 Dificuldades no experimento: queda livre

No experimento "queda livre" uma das maiores dificuldades foi encontrar o *time* perfeito que fornecesse a lei da gravidade de Galileu Galilei que é $4{,}9t^2$. Por diversos fatores a dificuldade aumentava, seja pelo contraste do vídeo, tamanho do objeto, tipo de câmera, *frame* da gravação, entre outros. A função que conseguíamos diferia muito da lei de Galileu. A partir disso, observamos que todas as variáveis importavam para solucionar o problema.

Vários foram os objetos utilizados para realizar o experimento queda livre. O tamanho, cor e peso importava na hora da análise, pois esses fatores podiam modificar os dados. No *software Tracker*, o tamanho do objeto dificultou para localizar e realizar o rastreio automático (Figura A.1). Outro fator, foi a cor do objeto que se misturava com o fundo escolhido quando a bola atingia uma certa velocidade, fazendo com que o *software* não identificasse o objeto, como mostra a Figura A.2. Além disso, se o objeto fosse leve demais o atrito com o ar, ou até mesmo o vento, modificavam a função obtida também.

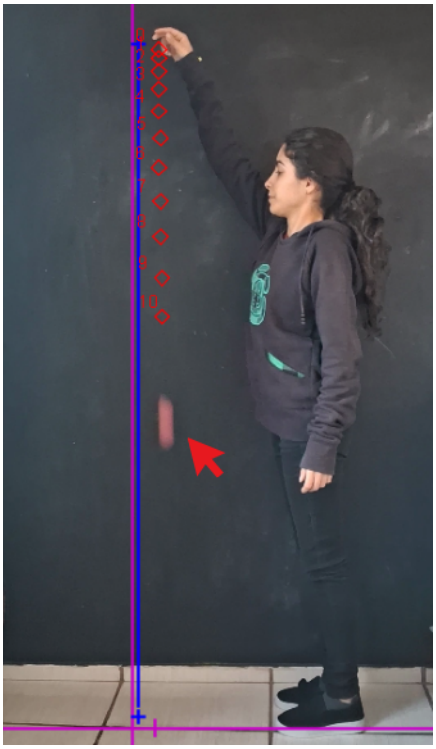


Figura A.1: Dificuldade por causa do tamanho do objeto.
Fonte: A autora.

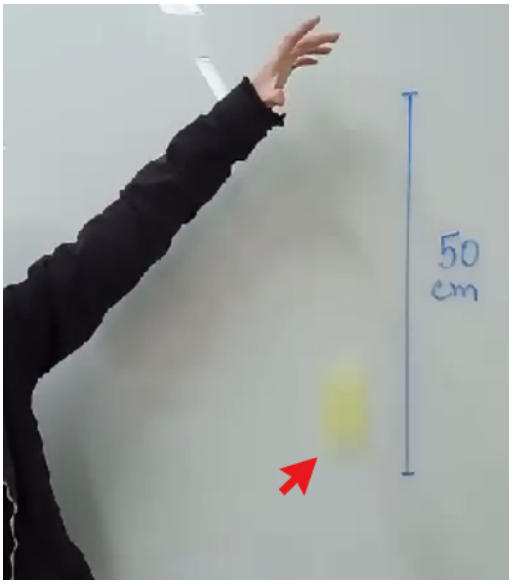


Figura A.2: Dificuldade por causa do contraste entre o objeto e fundo.
Fonte: A autora.

As modificações de variáveis estava apenas começando. Foi preciso modificar o fundo do vídeo, para observar se isso não estava afetando o contraste com o objeto (Figura A.3). Foram feitos diversos vídeos com câmeras diferentes para verificar se a qualidade do vídeo não afetava nos dados da análise, a Figura A.4 exibe as imagens registradas por algumas câmeras utilizadas. Além disso, dependendo da quantidade de *frame* da câmera, isso ajuda a ter um vídeo mais nítido e com mais quadros para serem analisados.



Figura A.3: Modificações no fundo do vídeo.
Fonte: A autora.

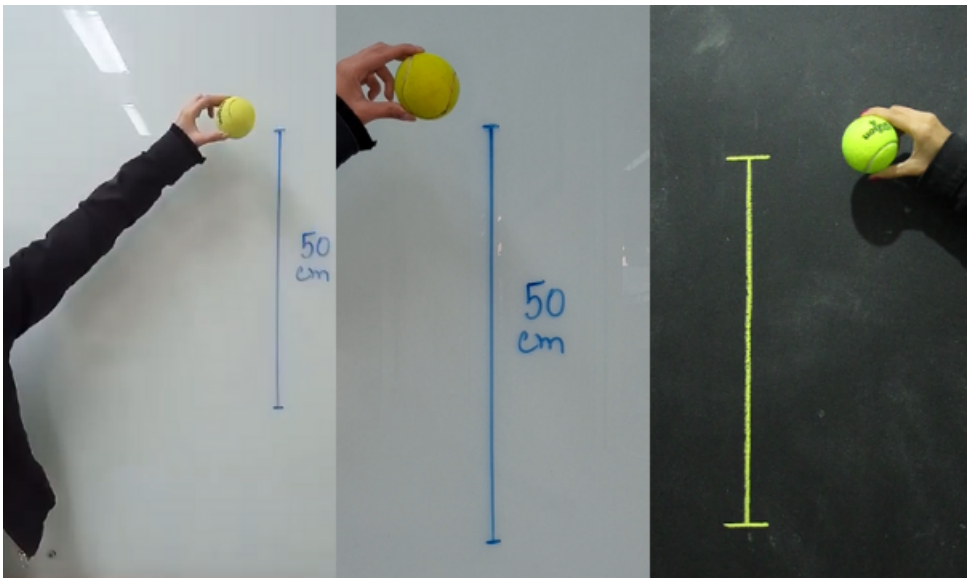


Figura A.4: Troca de câmeras para gravação do experimento.
Fonte: A autora.

A iluminação do ambiente é importante para realizar a gravação do movimento, pois um local com baixa ou alta luminosidade pode dificultar a captura do objeto com nitidez, podendo ocorrer erros na análise. Além disso, o fundo que contém um reflexo da lâmpada pode interferir no contraste, dificultando que o *software Tracker* realize o rastreio automático com exatidão. Confira a Figura A.5.

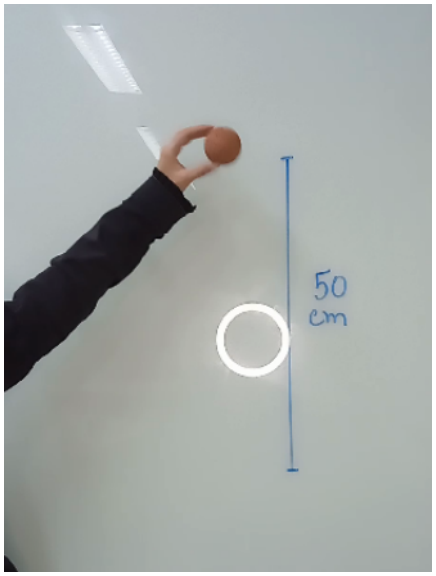


Figura A.5: Fundo de gravação com reflexo.
Fonte: A autora.

A câmera precisa estar fixa no tripé de apoio, como explicado nos passos para realizar o experimento de queda livre. Uma observação a ser feita é que a base em que a bola está sendo segurada também necessita estar fixa, isto é, a pessoa estará posicionada com os dois pés no chão para que não tenha variação de posição da bola. Essa alteração ocorreu em um dos nossos testes, pois a base da bola não estava fixa como na Figura A.6.



Figura A.6: A base da bola não estava fixa.

Além disso, ocorria do rastreio automático capturar outras partes do vídeo, como a mão e rosto da pessoa que estava realizando o experimento, veja um exemplo na Figura A.7.

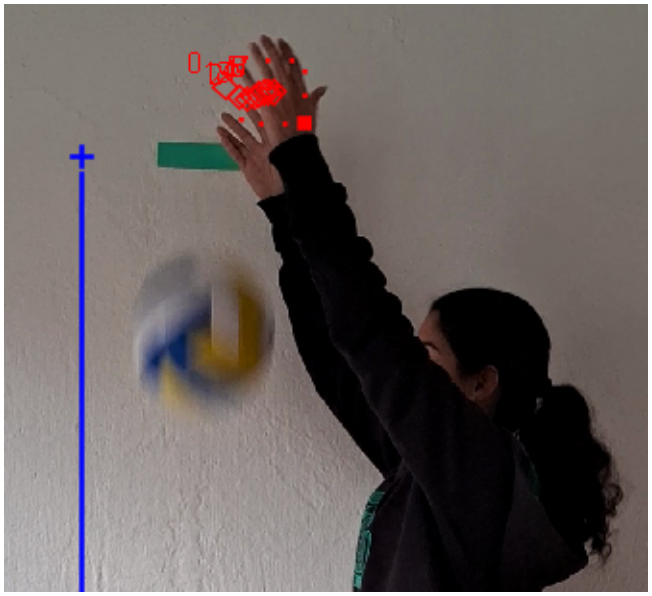


Figura A.7: Captura de outras partes do vídeo.

Utilizamos o rastreio automático para analisar o experimento queda livre, porém por causa das variáveis citadas, encontramos dificuldades ao utilizar essa ferramenta (Figura A.8). As vezes, essa função não identificava o objeto por causa do contraste, tamanho, qualidade do vídeo, entre outros fatores. Para resolver esses problemas foi preciso realizar todas as trocas de ambientes, objetos e câmeras. Existem circunstâncias que precisam ser observadas antes mesmo de realizar o experimento, pois podem interferir no resultado da análise no *software Tracker*.

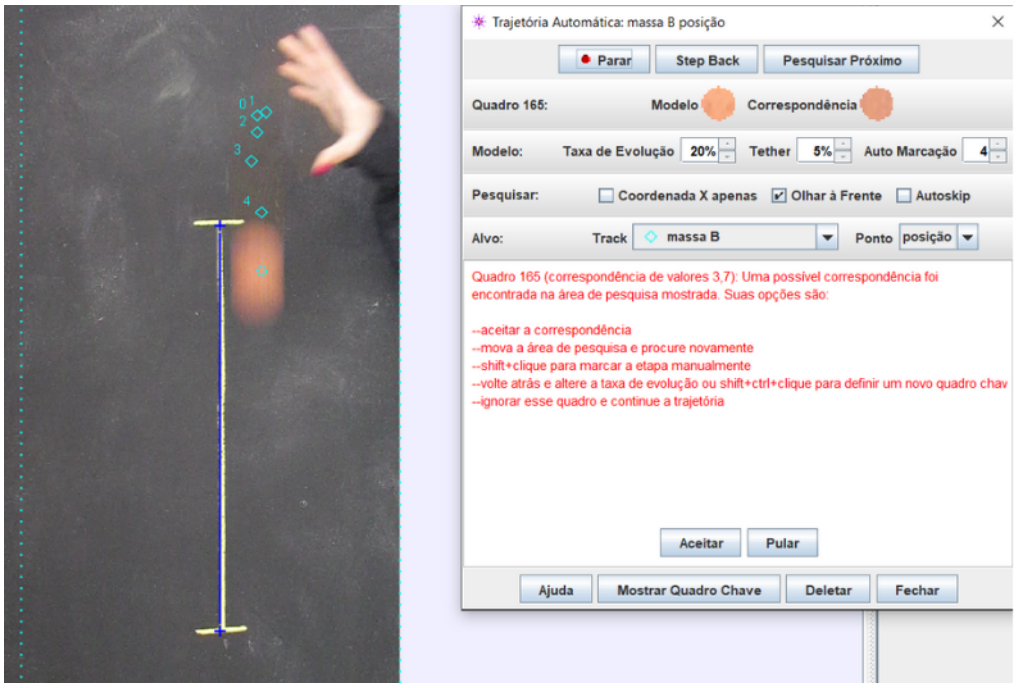


Figura A.8: Erro no rastreio automático.
Fonte: A autora.

A.2 Dificuldades no experimento: o corredor

Uma das dificuldades encontradas no experimento "o corredor" foi tentar não movimentar o que seria o ponto de massa, no nosso caso, a cabeça do corredor. A partir disso, percebemos que ao movimentar o ponto de massa isso causava erros nos dados do *Tracker*. Além disso, o corredor precisava correr o mais retilíneo possível, possibilitando não ter inclinações do movimento durante a análise. Dependendo do objetivo do experimento poderia ter variações na velocidade, por exemplo, correr mais rápido ou devagar.

O cenário do vídeo foi sendo mudado ao decorrer dos testes realizados nessa dissertação. Percebemos que um fundo de cor lisa seria melhor para realizar a análise do que um fundo com variações de cores e objetos, pois analisar o movimento com a menor margem de erro possível. Além disso, as roupas utilizadas pelo corredor durante o experimento teriam que ser de cores neutras para que não houvesse erros de contraste e rastreio do ponto de massa. Confira a Figura A.9.



Figura A.9: Mudança de cenário no experimento o corredor.
Fonte: A autora.

Para realizar a gravação, posicione a câmera à uma distância que permita filmar todo o movimento realizado pelo corredor. Nos testes realizados nessa dissertação, percebemos que o percurso que o corredor faria teria que ter uma maior distância entre a linha de partida e a linha de chegada, pois assim teria espaço para o corredor conseguir velocidade no movimento, além de ter mais pontos no gráfico para serem analisados e formar a curva.

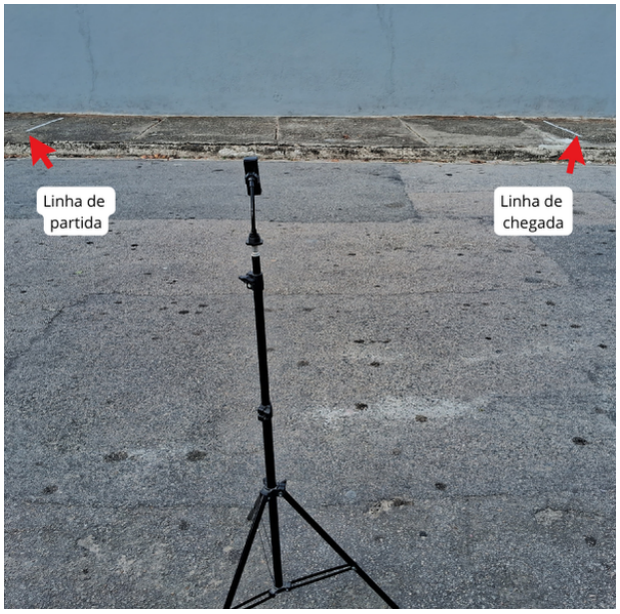


Figura A.10: Posição do tripé no experimento o corredor.
Fonte: A autora.

Fizemos uma observação no contraste que o ponto de massa precisaria ter com o fundo de gravação, isto é, utilizar uma referência para realizar a marcação do ponto de massa para que o *software* consiga rastrear o movimento com facilidade. Para isso, utilizamos uma faixa amarrada na cabeça do corredor para destacar e identificar onde seria a marcação do ponto de massa. Quanto mais destacada for essa faixa, melhor será no momento da análise no *Tracker*. A Figura A.11 exibe um exemplo de faixa que usamos no experimento para indicar o ponto de massa do movimento.



Figura A.11: Destaque com a faixa para o ponto de massa no experimento o corredor.
Fonte: A autora.

Utilizamos o rastreio automático para analisar o experimento o corredor, porém por causa das variáveis citadas, encontramos dificuldades ao utilizar essa ferramenta. As vezes, essa função não identificava o objeto por causa do contraste, qualidade do vídeo, entre outros fatores. Para resolver esses problemas foi preciso realizar todas as trocas de ambientes e figurinos. Existem circunstâncias que precisam ser observadas antes mesmo de realizar o experimento, pois podem interferir no resultado da análise no *software Tracker*.

Anexo

Neste anexo o leitor encontra os questionários dos experimentos “queda livre”, “o corredor” e “pêndulo”, que estão separados a seguir por tópico de atividade e disponíveis para impressão.

Questionário “queda livre”.

Nome: _____

Turma: _____ Disciplina: _____

Realize a gravação do experimento “queda livre”. Para iniciar a análise do vídeo, no *software Tracker*, abra a gravação realizada. Determine o quadro inicial e final usando a barra de ferramentas inferior, considerando como início o exato momento em que o objeto começa o movimento ao sair da mão, e como final um ponto qualquer desde que permita uma observação de uma parte considerável da queda livre. A partir disso, adicione o eixo de coordenadas, posicione a origem dos eixos cartesianos no centro do objeto de estudo, de modo que o eixo das abscissas fique paralelo ao chão. Gire o sistema de eixos em 180° para que o eixo das ordenadas fique positivamente orientado para baixo. Acrescente o bastão de medição, colocando sobre a marcação com medida conhecida feita na parede, acrescentando o valor em metros. Neste momento, insira a ferramenta ponto de massa, posicione-a em um ponto de destaque no objeto que sofrerá a queda, ative a função trajetória automática e rastreie a trajetória. Caso o movimento gravado em vídeo fique borrado, de baixa qualidade ou se o *software* for incapaz de reconhecer a trajetória automaticamente, faça esse procedimento de forma manual. Observe os gráficos gerados na janela à direita do *software* e responda a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento retilíneo vertical da “queda livre”, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Observando a tabela gerada pelo *Tracker*, anote a duração total do movimento analisado, bem como a distância vertical percorrida pelo objeto.

b) Com base nos dados anteriores, calcule a velocidade média do objeto em queda.

Ainda utilizando a tabela produzida pelo *Tracker*, considere as colunas referentes ao tempo e ao deslocamento vertical. Considere também os intervalos de tempo[1] $I_1 = [0,08; 0,32]$, $I_2 = [0,08; 0,28]$, $I_3 = [0,08; 0,24]$, $I_4 = [0,08; 0,20]$, $I_5 = [0,08; 0,16]$ e $I_6 = [0,08; 0,12]$.

c) Calcule as velocidades médias em cada intervalo e preencha as informações a seguir.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

d) Intuitivamente a tabela que foi preenchida acima fornece alguma informação sobre a velocidade instantânea em algum instante específico? Justifique.

Agora, clique sobre o gráfico escolhido no primeiro item para abrir a janela “ferramentas de dados” e selecione o ajuste de curva “parabólico”, uma vez que sabemos que este movimento é uniformemente acelerado, isto é, possui aceleração constante (aceleração da gravidade). Preencha:

[1] Se os valores dos extremos desses intervalos não estiverem na coluna de tempo da tabela, o docente deve adaptar considerando os valores mais próximos possíveis que aparecem na tabela. Esses valores dependem da taxa de *frame* do vídeo.

e) A lei da função $y = f(t) = At^2 + Bt + C$ possui os coeficientes $A =$___, $B =$___ e $C =$___.

f) Considerando a função $y = f(t)$ eleita, calcule: $f(0,32), f(0,28), f(0,24), f(0,2)$, $f(0,16), f(0,12)$ e $f(0,08)$.

g) Complete a tabela a seguir, semelhante a do item (c), mas com os valores de distância fornecidos pela função $y = f(t)$.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

No *Geogebra* insira a função $f(t)$ obtida no item (e), altere as casas decimais para que fique com os mesmos valores do *Tracker*, delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total aproximada do objeto em queda livre. Crie os pontos $P(0,08; f(0,08))$, $A(0,32; f(0,32))$, $B(0,28; f(0,28))$, $C(0,24; f(0,24))$, $D(0,2; f(0,2))$, $E(0,16; f(0,16))$ e $F(0,12; f(0,12))$, observe que estes pontos cairão perfeitamente sobre o gráfico de $f(t)$. Trace as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$.

h) Usando a ferramenta "inclinação" do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados:

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares						

i) O que você percebe ao comparar as tabelas preenchidas nos itens (g) e (h) em relação à velocidade média e coeficiente angular? Justifique.

Oculte os pontos A, B, C, D, E e F, bem como a inclinação no *software*, deixando expostos apenas o gráfico de $f(t)$ e o ponto P. Crie um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varie entre $0,08$ e $0,32$ com incremento igual à $0,01$. Crie a reta entre os pontos Q e P e aperte o *play* no controle deslizante.

j) Nas condições acima, o que você observa sobre a reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

k) Usando a ferramenta "inclinação" do *software*, o que ocorre com o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

l) Com base nas suas observações, o que fisicamente representaria a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto P?

m) Se denotarmos os pontos P e Q por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$, e o valor $h = t_Q - t_P$, selecione a alternativa que traduz que ocorre com o valor de h conforme o ponto Q se aproxima de P?

( ) $h \to 0$ ( ) $h \to 1$ ( ) $h \to 2$ ( ) $h \to \infty$

n) Escreva a fórmula matemática do coeficiente angular m_{PQ} da reta que passa por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$.

o) Usando o valor de tendência de h selecionado no item (m) e a fórmula de m_{PQ} do item (n), complete as lacunas do limite abaixo:

$$\lim_{h\to\ \square} m_{PQ} = \lim_{h\to\ \square}\ \square.$$

p) Sendo $h = t_Q - t_P$, então $t_Q = t_P + h$, substituindo no limite obtido no item (o), temos

$$\lim_{h\to\ \square}\ \square.$$

Que matematicamente é conhecido como a derivada da função $f(t)$ em $t = t_P$.

q) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f'(t_P)$ =_____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a velocidade _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f(t)$ em _____".

r) Explique o que o valor do limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,3+h) - f(0,3)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito ao objeto em queda livre.

s) Com base no que foi concluído nos itens (q) e (r), calcule os valores das velocidades do objeto em queda nos instantes indicados na tabela.

Instantes (s)	Velocidade instantânea (m/s)
0,1	
0,15	
0,2	
0,25	
0,3	

t) Usando a função f e os conceitos percebidos nos itens $(q), (r)$ e (s), calcule a expressão matemática da velocidade v em função de t.

u) Faça um gráfico da função $v(t)$. Calcule $v'(t)$ e escreva aqui a sua expressão: $v'(t)$=_____. Plote o gráfico de $v'(t)$ e perceba que ele será uma reta com inclinação igual à _____.

v) Volte a tabela do item (s). Calcule a aceleração média o instante inicial e final da tabela. Qual o seu valor?

w) O que você percebe quando compara os itens (u) e (v)? Estabeleça uma relação entre sua conclusão e o valor da aceleração da gravidade.

x) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f''(t_P) =$ _____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f'(t)$ em _____".

y) Explique o que o valor do limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(0,3+h) - v(0,3)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito ao objeto em queda livre.

Observação: Para analisar o fenômeno físico e responder ao questionário utilize os *softwares* Geogebra e *Tracker*.

Questionário “o corredor”.

Nome: _____

Turma: _____ Disciplina: _____

Realize a gravação do experimento “o corredor”. Para iniciar a análise do vídeo, no *software Tracker*, abra a gravação realizada. Determine o quadro inicial e final usando a barra de ferramentas inferior, considerando como início o exato momento em que o corredor passa pelo ponto A e como final o exato momento em que passa pelo ponto B. A partir disso, adicione o eixo de coordenadas, posicione o eixo da abscissa ligando os pontos A e B (Figura 6.3) e o eixo da ordenada passando pelo ponto A. Acrescente o bastão de medição, colocando um dos extremos no ponto A e o outro no ponto B, além disso, adicione em metros a distância entre esses pontos. Neste momento, insira a ferramenta ponto de massa, posicione-a em um ponto de destaque no corpo do corredor, ative a função trajetória automática e rastreie a trajetória. Caso o movimento gravado em vídeo fique borrado, de baixa qualidade ou se o *software* for incapaz de reconhecer a trajetória automaticamente, faça esse procedimento de forma manual. Observe os gráficos gerados na janela à direita do *software* e responda a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento retilíneo horizontal do corredor, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

Analisando a tabela gerada pelo *software*, observe a coluna referente ao tempo.

b) Considerando a duração total da trajetória e a distância entre os pontos A e B, calcule a velocidade média do corredor no percurso total.

Ainda utilizando a tabela produzida pelo *Tracker*, considere as colunas referentes ao tempo e ao deslocamento horizontal. Considere também os intervalos de tempo[2] $I_1 = [1,0; 1,8]$, $I_2 = [1,0; 1,6]$, $I_3 = [1,0; 1,4]$, $I_4 = [1,0; 1,2]$, $I_5 = [1,0; 1,1]$ e $I_6 = [1,0; 1,033]$.

c) Calcule as velocidades médias em cada intervalo e preencha as informações a seguir.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

d) Intuitivamente a tabela que foi preenchida acima fornece alguma informação sobre a velocidade instantânea em algum instante específico? Justifique.

Agora, clique sobre o gráfico escolhido no primeiro item para abrir a janela “ferramentas de dados” e selecione o ajuste de curva com o menor valor “rms dev”, ou seja, curva que melhor se ajusta aos pontos dados. Preencha:

e) O tipo de curva selecionado: _____.
A lei da função $x = f(t)$ com o ajuste escolhido: _____.

[2]Se os valores dos extremos desses intervalos não estiverem na coluna de tempo da tabela, o docente deve adaptar considerando os valores mais próximos possíveis que aparecem na tabela. Esses valores dependem da taxa de *frame* do vídeo.

f) Considerando a função $x = f(t)$ eleita, calcule: $f(1,8)$, $f(1,6)$, $f(1,4)$, $f(1,2)$, $f(1,1)$, $f(1,033)$ e $f(1)$.

g) Complete a tabela a seguir, semelhante a do item (c), mas com os valores de distância fornecidos pela função $x = f(t)$.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Distância percorrida						
Duração do intervalo						
Velocidade média do intervalo						

No *Geogebra* insira a função $f(t)$ obtida no item (e), altere as casas decimais para que fique com os mesmos valores do *Tracker*, delimitando o intervalo de tempo entre 0 e a duração total do percurso pelo corredor. Crie os pontos $P(1, f(1))$, $A(1,8; f(1,8))$, $B(1,6; f(1,6))$, $C(1,4; f(1,4))$, $D(1,2; f(1,2))$, $E(1,1; f(1,1))$ e $F(1,033; f(1,033))$, observe que estes pontão cairão perfeitamente sobre o gráfico de $f(t)$. Trace as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DP}$, $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FP}$.

h) Usando a ferramenta inclinação do *software*, preencha a tabela com os coeficientes angulares solicitados:

	$\overleftrightarrow{AP}$	$\overleftrightarrow{BP}$	$\overleftrightarrow{CP}$	$\overleftrightarrow{DP}$	$\overleftrightarrow{EP}$	$\overleftrightarrow{FP}$
Coeficientes angulares						

i) O que você percebe ao comparar as tabelas preenchidas nos itens (g) e (h) em relação à velocidade média e coeficiente angular? Justifique.

Oculte os pontos A, B, C, D, E e F, bem como as retas e as inclinações no *software*, deixando expostos apenas o gráfico de $f(t)$ e o ponto P. Crie um ponto dinâmico $Q(a, f(a))$, onde o valor a, no controle deslizante, varie entre $1,0$ e $1,8$ com incremento igual à $0,01$. Crie a reta entre os pontos Q e P e aperte o *play* no controle deslizante.

j) Nas condições acima, o que você observa sobre a reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

k) Usando a ferramenta inclinação do *software*, o que ocorre com o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{QP}$, conforme o ponto Q se move?

l) Com base nas suas observações, o que fisicamente representaria a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto P?

m) Se denotarmos os pontos P e Q por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$, e o valor $h = t_Q - t_P$, selecione a alternativa que traduz que ocorre com o valor de h conforme o ponto Q se aproxima de P?

( ) $h \to 0$ ( ) $h \to 1$ ( ) $h \to 2$ ( ) $h \to \infty$

n) Escreva a fórmula matemática do coeficiente angular m_{PQ} da reta que passa por $P(t_P, f(t_P))$ e $Q(t_Q, f(t_Q))$.

o) Usando o valor de tendência de h selecionado no item (m) e a fórmula de m_{PQ} do item (n), denotando $t_Q = t_P + h$, complete as lacunas do limite abaixo:

$$\lim_{h \to \square} m_{PQ} = \lim_{h \to \square} \square.$$

p) Sendo $h = t_Q - t_P$, então $t_Q = t_P + h$, substituindo no limite obtido no item (o), temos $\lim_{h \to \square} \square$. Que matematicamente é conhecido como a derivada da função $f(t)$ em $t = t_P$.

q) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f'(t_P)$ =_____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a velocidade _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f(t)$ em _____".

r) Explique o que o valor do limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito à situação do corredor.

s) Com base no que foi concluído nos itens (q) e (r), calcule os valores das velocidades do objeto em queda nos instantes indicados na tabela.

Instantes (s)	Velocidade instantânea (m/s)
0,1	
0,15	
0,2	
0,25	
0,3	

t) Usando a função f e os conceitos percebidos nos itens $(q), (r)$ e (s), calcule a expressão matemática da velocidade v em função de t.

u) Faça um gráfico da função $v(t)$. Calcule $v'(t)$ e escreva aqui a sua expressão: $v'(t)$=_____. Plote o gráfico de $v'(t)$ e perceba que ele será uma reta com inclinação igual à _____.

v) Volte a tabela do item (s). Calcule a aceleração média o instante inicial e final da tabela. Qual o seu valor?

w) O que você percebe quando compara os itens (u) e (v)?

x) Com base no desenvolvimento do questionário, complete:

"O limite $f''(t_P)$ = _____ representa a _____ da função $f(t)$ em _____, bem como a _____ no instante _____ e, também, a inclinação da reta _____ ao gráfico de $f'(t)$ em _____".

y) Explique o que o valor do limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(0,5+h) - v(0,5)}{h}$ representa

(i) em respeito ao gráfico da função $f(t)$;

(ii) em respeito à situação do corredor.

Observação: Para analisar o fenômeno físico e responder ao questionário utilize os *softwares* Geogebra e *Tracker*.

Questionário "pêndulo".

Nome: _____

Turma: _____ Disciplina: _____

Realize a gravação do experimento "pêndulo". Para iniciar a análise do vídeo, no *software Tracker*, abra a gravação realizada. Determine o quadro inicial e final usando a barra de ferramentas inferior, considerando como início o exato momento em que se solta o objeto e como final o exato momento em que o objeto volta para ao ponto de início, ou seja, após uma oscilação completa. A partir disso, adicione o eixo de coordenadas, posicione o eixo da ordenada na linha central de repouso do pêndulo. O eixo da abscissa pode ser aleatório, mas sugerimos colocar na direção que passa pelo centro do objeto no instante inicial do experimento. Acrescente o bastão de medição, colocando sobre a marcação com medida conhecida feita na parede, acrescentando o valor em metros. Neste momento, insira a ferramenta ponto de massa, posicione-a no centro da bola, ative a função trajetória automática e rastreie a trajetória. Caso o movimento gravado em vídeo fique borrado, de baixa qualidade ou se o *software* for incapaz de reconhecer a trajetória automaticamente, faça esse procedimento de forma manual. Observe os gráficos gerados na janela à direita do *software* e responda a seguinte pergunta:

a) Se desejarmos estudar o movimento horizontal do pêndulo, qual gráfico devemos levar em conta? Justifique.

b) Ao observar o gráfico escolhido, percebemos que a curva possui um comportamento oscilatório, com subidas e descidas. De acordo com o experimento pêndulo, qual o motivo disso acontecer?

Agora, clique sobre o gráfico escolhido no primeiro item para abrir a janela "ferramentas de dados" e selecione o ajuste de curva. Preencha:

c) O tipo de curva selecionado: _____.
A lei da função $x = f(t)$ com o ajuste escolhido: _____.

No Geogebra insira a função $f(t)$ obtida no item (c) com $t \geq 0$, faça a alteração nas casas decimais para que fique com os mesmos valores do *Tracker*. Agora, responda a seguinte pergunta:

d) Variando os valores de cada parâmetro da função obtidos no item (c), o que cada um representa?

Ao modificar os parâmetros da função $f(x)$ para responder o item (d), volte a função para os valores encontrados no item (c). Agora, utilizando a ferramenta "planilha" no Geogebra, crie uma tabela iniciando em $t = 0$ e os outros valores variando em 0,033 segundos, aplique na função $f(t)$ encontrada no Tracker.

e) Ao observar a tabela criada no Geogebra podem ser identificado alguns pontos críticos com valores aproximados. Sendo assim, preencha a seguinte tabela com os intervalos da localização dos pontos críticos no gráfico. Caso precise, acrescente mais valores na planilha do Geogebra para preencher toda a tabela.

	t	$f(t)$
I_1 inicial		
I_1 final		
I_2 inicial		
I_2 final		
I_3 inicial		
I_3 final		
I_4 inicial		
I_4 final		

Utilizando o Cálculo Diferencial responda o seguinte item:

f) Determine a derivada da função apresentada no item (c).

g) A partir da derivada do item (f), calcule o valor de pelo menos quatro pontos críticos próximos positivamente da origem do gráfico. Com base no que foi estabelecido no item (e), os pontos críticos calculados pertencem (ou estão próximos) aos intervalos esperados?

No Geogebra,insira no gráfico da função $f(t)$ os pontos críticos encontrados no item (g), em seguida responda ao item (h).

h) Neste item, usaremos alguns valores de máximos e mínimos para realizar a análise das distâncias entre eles no gráfico do Geogebra. Complete a tabela com os valores das distâncias entre os pontos. Use a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro" do *software* para os cálculos e utilize duas casas decimais para minimizar os efeitos das aproximações.

Distância entre	Valor
1º Máximo e 2º Máximo	
1º Mínimo e 2º Mínimo	

i) A distância entre os dois primeiros mínimos é _____, por sua vez, a distância entre os dois primeiros máximos é _____. Esperamos que estes dois valores coincidam. Na verdade, este valor é definido como sendo o período da função f.

Analisaremos agora o que acontece com a derivada de f ao se aproximar de um ponto máximo t_0 pela direta e pela esquerda do gráfico. Para isso, escolha um dos pontos máximos de f e crie um ponto deslizante sobre a curva que varie em apenas uma concavidade da função que contenha o ponto máximo. Além disso, trace a reta tangente à curva no ponto deslizante, em seguida utilize a ferramenta "inclinação" do Geogebra para encontrar a derivada.

j) O que se pode afirmar sobre a derivada de f em pontos que se aproximam do ponto máximo pela esquerda e pela direita?

k) Calcule a função velocidade $v(t) = \frac{d}{dt}f(t)$. Em quais instantes t essa velocidade é zero? O que ocorre com a posição do pêndulo nesses instantes?

l) Com base no que foi concluído nos itens (g) e (k), o que você percebe ao comparar os valores das respostas de ambos os itens. Explique.

m) Calcule a função aceleração $a(t) = \frac{d^2}{dt^2} f(t)$.

n) De acordo com o item (m), em quais instantes a aceleração é máxima (em módulo)? Esses instantes coincidem com os pontos críticos? Justifique.

Observação: Para analisar o fenômeno físico e responder ao questionário utilize os *softwares* Geogebra e *Tracker*.