

Lucas Verdi Angelocci

**Modelos Matemáticos e Computacionais no
Manejo Integrado de Pragas**

Botucatu

2013

Lucas Verdi Angelocci

**Modelos Matemáticos e Computacionais no
Manejo Integrado de Pragas**

Monografia apresentada ao Instituto de
Biociências da Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Cam-
pus de Botucatu, para obtenção do título
de Bacharel em Física Médica.

Orientadora: Profa. Dra. Cláudia Pio Ferreira

Botucatu

2013

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Luiz Roberto e Claudeti, por todo o apoio dado, não só ao longo destes quatro anos de graduação, mas por toda uma vida. Sempre foram um exemplo a ser seguido e uma motivação para não deixar de buscar evolução na vida, em todos os âmbitos.

Agradeço também ao resto de minha família, em especial irmão, irmãs e sobrinhos, por sempre estarem por perto oferecendo momentos de descontração nas situações de maior tensão.

Aos colegas, em especial aos mais próximos, da Turma VII da Física Médica. Estes quatro longos anos teriam sido insuportáveis sem a grande amizade e cumplicidade de todos. Torço para que todos nos encontremos mais à frente, realizados profissionalmente e com a amizade intacta.

Aos moradores e agregados da República Caverna do Dragão, por serem minha segunda família, tão unidos quanto irmãos de sangue. Ao Heitor, pelo companheirismo sem igual e pelos momentos de iluminação; e que ainda venham muitos outros.

Aos dois mais próximos amigos que tenho, desde que consigo me lembrar, Felipe e Luan. Depois de uma vida de aventuras juntos, sou apenas um terço de mim quando estou sem vocês.

À Isabela Branco por todo o apoio; por me animar nos momentos de dificuldade e aproveitar comigo os de felicidade. Por mostrar que a união não só traz força para vencer os desafios, mas também a coragem para enfrentá-los.

Aos professores do curso de Bacharelado em Física Médica da UNESP de Botucatu. Não só ensinaram tudo o que um físico médico precisa saber, como também deram importantes lições de vida.

Em especial, à professora Cláudia Pio, primeira orientadora e mentora. Por ser uma excelente profissional, professora acessível e disposta a ajudar. Pronta para ouvir, seja para dar orientações quanto ao trabalho ou conselhos. Por saber os momentos certos para encorajar seus alunos, para mimá-los, e principalmente para dar broncas quando preciso. Por ter tido paciência, mesmo com um aluno tão desorganizado. Aprendi com ela mais do que ela ensinou, pois há coisas que são aprendidas além da lousa ou do computador, ainda que ninguém perceba que elas estão ali.

Por fim, à FAPESP; sem o apoio financeiro desta instituição séria, eu e muitos outros não chegaríamos aqui.

”Nunca deixe que lhe digam
Que não vale a pena acreditar no sonho que se tem
Ou que seus planos nunca vão dar certo
Ou que você nunca vai ser alguém”
- Renato Russo

Resumo

Este trabalho foi realizado com a motivação de estudar o controle da praga *Diaphorina citri*, através do uso do Manejo Integrado de Pragas (MIP), método que emprega diversas técnicas de controle de pragas com a intenção de manter a população desta abaixo de um nível que cause dano econômico ao produtor. Aliando o uso de inseticidas ao parasitoide natural da praga, a *Tamarixia radiata*, realizaram-se simulações que mostram padrões espaço-temporais das populações das espécies envolvidas.

Para isso, uma modelagem matemática da dinâmica populacional das espécies foi realizada. Foram estudados os pontos de equilíbrio e a estabilidade destes. Depois, o efeito da variação de alguns parâmetros nas populações foram analisados, seja por observação das simulações ou de forma analítica. Acrescentou-se configuração espacial ao problema, através do uso do formalismo de Mapas Acoplados, permitindo que as espécies envolvidas se difundam pelo campo. Novamente um estudo da sensibilidade à alguns parâmetros, relacionados à movimentação das espécies, foi realizado.

Ao final do projeto, uma grande gama de parâmetros foi estudada, sendo previsto o efeito nas populações da alteração de parâmetros como Nível de Controle, parâmetros biológicos naturais da praga ou parasitoide, populações iniciais, número de parasitoides acrescentados no sistema na aplicação do MIP, velocidade de difusão das espécies pelo campo, intervalos de monitoramento e aplicação de inseticida, entre outros. Espera-se que com estas previsões e outros estudos, os produtores de laranja possam ser auxiliados na melhor maneira de combater esta praga.

Palavras-chave: equações diferenciais; mapas acoplados; *Diaphorina citri*; *Tamarixia radiata*.

Abstract

This work was done with the motivation to better carry out effective control of the pest *Diaphorina citri*, through the use of Integrated Pest Management (IPM), method employing various techniques of pest control with the intent to keep the pest population below a level that causes economic injury to the producer. Combining the use of insecticides with the natural predator of the pest, the *Tamarixia radiata*, were performed simulations that show how populations of the species evolve in time and space.

A mathematical modeling of the population dynamics of the species was realized. From this model, we studied the equilibrium points and its stability. Then, the effect of variation of some parameters in populations were analyzed by observation of simulations or analytically. Spatial configuration was added to the problem by using the formalism of coupled map lattice, allowing the involved species to diffuse across the field. Again, a study of sensitivity to some parameters related to the movement of species was performed.

At the end of the project, a wide range of parameters was studied, and predictions were made for the effect on populations of changing parameters such as control threshold, natural biological parameters of the pest and predator, initial populations, predator numbers added to the system in the application of IPM, speed of diffusion of species through the field, monitoring interval and insecticide application, among others. It is hoped that with these predictions and other studies, the orange growers may be helped in the best way to combat this pest.

Key-words: differential equations; coupled map lattice, *Diaphorina citri*; *Tamarixia radiata*.

Sumário

Resumo	4
Abstract	5
1 Introdução	9
1.1 Modelagem Biomatemática	9
1.2 Problema Biológico	9
1.3 Biologia das Espécies Envolvidas	10
1.4 Modelagem do Problema	11
1.5 Adição do MIP	12
1.6 Parâmetros Utilizados	13
2 Objetivo	13
3 Metodologia	13
3.1 Análise de Estabilidade	13
3.2 Sensibilidade aos Parâmetros Biológicos	15
3.3 Algoritmo Computacional e Mapas Acoplados	17
4 Resultados e Discussões	17
4.1 Eficácia do MIP	17
4.2 Adição da Informação Espacial	20
4.3 Intervalo de Monitoramento	24
5 Conclusão	27
6 Considerações Finais	27

Lista de Figuras

1	Espaço de fase das populações envolvidas	16
2	Evolução das populações de <i>D. citri</i> e <i>T. radiata</i> sem o MIP	18
3	Evolução das populações de <i>D. citri</i> e <i>T. radiata</i> com o MIP	18
4	População de fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com aplicação do MIP	18
5	População de fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com aplicação do MIP e variação no parâmetro τ	19
6	População de fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com aplicação do MIP e variação no parâmetro NC	20
7	Evolução espacial e temporal das fêmeas adultas de <i>D. citri</i> em uma plantação .	21
8	Evolução espacial e temporal das fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com alteração no número de sítios monitorados	22
9	Evolução espacial e temporal das fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com alteração no intervalo de monitoramento	23
10	Evolução espacial e temporal das fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com alteração nos coeficientes de difusão dos insetos	23
11	Evolução espacial e temporal das fêmeas adultas de <i>D. citri</i> com alteração no número de sítios sorteados para difusão	24
12	Intervalo mínimo de monitoramento para que não haja prejuízos considerando variação no NC	25
13	Intervalo mínimo de monitoramento para que não haja prejuízos considerando variação na população inicial das espécies	26

Lista de Tabelas

1	Valores utilizados para os parâmetros em temperatura de 20°C.	13
2	Valores do parâmetros estimados.	13

1 Introdução

1.1 Modelagem Biomatemática

A matemática pode ser utilizada como ferramenta para descrever diversos processos biológicos. A biomatemática utiliza modelos matemáticos que descrevam um comportamento biológico de forma próxima da real. Estes modelos podem ser apresentados na forma de um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), que mostram como diversas populações variam com o tempo, em função de um conjunto de parâmetros e de relações entre elas (seja qual for o tipo de relação existente entre estas populações). Os sistemas mais básicos surgem de interações simples entre duas espécies, mas a ferramenta matemática mostra-se capaz de simular os mais diversos tipos de situações biológicas. Na literatura, encontram-se modelos matemáticos de interações entre animais, vegetais, células corporais; todo tipo de população que se altere ao longo do tempo devido a algum fator que possa ser descrito matematicamente pode ser modelada. Para isso, devem ser levados em conta todos os fatores relevantes para o problema, ou seja, todos os que têm influência nessa variação de população. Para animais, portanto, se for considerado um modelo que abranja tempo o bastante para que os animais envolvidos se reproduzam e morram, os primeiros fatores a serem levados em conta são taxas de nascimento e mortalidade. Se duas ou mais espécies forem consideradas, e houver qualquer tipo de interação entre elas, seja de competição, predação, parasitismo; ela também deve ser considerada. Se dentro de uma única espécie, um fator como gênero ou idade influenciarem a variação populacional da espécie ou suas interações, e este precisar ser descrito no modelo, esta espécie pode ser descrita em duas ou mais variáveis, separadas por sexo ou estágios de vida. Se for o caso, outros fatores que devem ser levados em conta são taxas de razão sexual e taxas de desenvolvimento [3, 6, 7].

Considerada todas essas possibilidades e criado o modelo, este deve ser validado através de simulações e comparações com dados ou padrões reais. Para isso, uma extensa pesquisa de campo ou busca de dados confiáveis na literatura deve ser realizada, pois apenas com um modelo estruturado de forma a descrever bem a realidade, e com parâmetros reais utilizados, pode-se ter confiabilidade nos resultados analíticos ou de simulações deste modelo. Este trabalho busca apresentar um modelo aceitável para interação entre duas espécies: a *Diaphorina citri*, praga das laranjeiras, e a *Tamarixia radiata*, seu parasitoide natural; e com dados retirados da literatura, realizar simulações confiáveis de sua variação populacional ao longo do tempo, e posteriormente do espaço. Para isso, faz-se necessário primeiro uma abordagem biológica do problema, seguido de uma formulação matemática que o descreva [3, 6, 7].

1.2 Problema Biológico

O problema a ser atacado envolve a praga *Diaphorina citri*, vetor de uma bactéria chamada *Candidatus Liberibacter*. Esta bactéria causa em árvores de citrus uma doença chamada *huanglongbing* (HLB), popularmente conhecida como "greening". As folhas e frutos das árvores adquirem aspecto amarelado ou com outros tons de verde, em forma de manchas irregulares.

Os frutos podem nascer com mal-formações, e a gema apical da árvore pode ser afetada, comprometendo seu desenvolvimento. Por fim, se a doença não levar à morte, a árvore é arrancada pela raiz, para impedir que a doença contamine o resto do pomar. No Brasil, a *Candidatus Liberibacter americanus* foi notada em diversos Estados, atacando principalmente laranjeiras. Segundo dados da FAO (2008), o Brasil é o maior produtor mundial de laranja, dominando aproximadamente 27% da produção mundial. O Estado de São Paulo produz, sozinho, mais de 80% desta safra (mais de 21% da produção mundial), o que justifica a importância da busca de uma solução para o problema causado pelo "greening" [4].

O uso de inseticidas para solucionar o problema traz algumas desvantagens; ao longo do tempo as pragas demonstram maior resistência à utilização deste, e seu uso indiscriminado acarreta diversas consequências negativas para o meio ambiente e para a sociedade. Eles contaminam o solo, os lençóis freáticos e os alimentos, podendo causar danos à vegetais, animais não-alvo e, indiretamente, ao homem. Visando diminuir estes impactos, uma técnica chamada Manejo Integrado de Pragas (MIP) se destaca; sua proposta é aliar duas ou mais técnicas de combate físicas, químicas, mecânicas ou biológicas, de forma a manter os níveis populacionais da praga abaixo de um limiar chamado Nível de Dano Econômico (NDE), ou seja, manter a população da praga baixa o bastante para que ela não cause prejuízos econômicos ao produtor. Para a *D. citri*, isto é atingido aliando o uso consciente de inseticidas ao controle natural da praga, realizado com o uso de seu parasitoide natural, a *Tamarixia radiata*. Permite-se que ambas interajam livremente até que a população da praga ultrapasse um Nível de Controle (NC), definido abaixo do NDE. Quando isto ocorre, o inseticida é aplicado reduzindo a população de pragas (e a de parasitoides, proporcionalmente) até que ela fique abaixo novamente de um nível considerado aceitável (NC), garantindo assim que o NDE nunca seja atingido. Para simular esta situação, a biologia das duas espécies deve ser estudada, com a intenção de simular de forma fiel a interação entre elas e o efeito do inseticida [7].

1.3 Biologia das Espécies Envolvidas

A *D. citri* é um psíldeo que se alimenta da seiva de brotações novas, podendo transmitir o "greening" e causar a morte da gema apical. A fêmea também ovipõe nas plantas mais novas, produzindo de 25 a 100 ninfas por broto. A fecundidade das fêmeas aumenta de acordo com a temperatura até um patamar (entre 28°C e 33°C), quando decai bruscamente. O tempo para que a ninfa torne-se adulta, assim como a expectativa de vida desta, variam fortemente com a temperatura, sendo que a temperatura ótima para seu desenvolvimento está entre 25°C e 28°C. A *D. citri* possui cinco estágios de ninfa (ínstares) antes de atingir sua forma adulta [5, 8].

O parasitoide *T. radiata* é muito eficaz no controle de *D. citri*: se alimenta das ninfas mais jovens (três primeiros ínstares) e parasita as mais desenvolvidas (dois últimos ínstares). Um único parasita é capaz de matar em toda sua vida, com uma combinação de predação e parasitismo, até 500 ninfas de *D. citri*. As fêmeas de *T. radiata* depositam seus ovos no ventre das

ninfas da praga. A larva se alimenta da hemolinfa até estar madura, quando emerge perfurando o corpo do inseto parasitado. O parasitoide também tem suas taxas de desenvolvimento e mortalidade altamente influenciadas pela temperatura do ambiente [5, 8].

Os cinco estágios das ninfas da praga foram divididos em apenas dois grupos para o modelo, predado e parasitado. Também foi considerado um estágio de ovo, pois a oviposição é limitada pela capacidade de suporte do meio, e apenas o estágio de fêmeas adultas da praga foi considerado, pois são capazes de dar cria à novos insetos. Para os predadores, dois estágios foram considerados, o de predadores jovens e adultos, sendo que os adultos parasitam a praga e dão origem a novos parasitoides jovens. O modelo tratado conta portanto com seis variáveis, sendo elas: O (ovos da praga), N_1 e N_2 (ninfas da praga em estágio de serem predadas e parasitadas, respectivamente), F (fêmeas adultas da praga), J (predadores jovens) e P (predadores maduros).

1.4 Modelagem do Problema

Pensando nas seis variáveis propostas, deve-se fazer agora suposições de como elas variam com o tempo. Pela própria definição da derivada, as equações são definidas como EDOs, taxas de variação, pelo tempo t . Para os ovos, O , deve-se considerar que eles crescem em função do número de fêmeas e da taxa de oviposição destas, η , mas que há um limite nesta taxa de crescimento, dado pela capacidade de suporte do meio K . Quanto mais ovos já existem menos ovos novos são colocados, de forma que se a capacidade de suporte limite for atingida, a quantidade total de ovos a ser colocada se torna zero para aquele instante no tempo. Sendo assim, escrevemos essa expressão como sendo $\frac{dO}{dt} = \eta F(1 - \frac{O}{K})$. A quantidade de ovos diminui pela taxa de mortalidade natural destes, μ_O , e pela taxa de eclosão, σ_O . Utilizaremos μ seguida de um índice para representar a mortalidade (todos os seis compartimentos), e σ para representar a passagem dos membros de um estágio de vida para outro (todos menos os já adultos). Sendo assim, para O , temos que a expressão completa é $\frac{dO}{dt} = \eta F(1 - \frac{O}{K}) - (\mu_O + \sigma_O)$.

Para as ninfas, a população do estágio N_1 cresce em função da taxa de eclosão e diminui com a mortalidade e a transição para o estágio N_2 . Além disso, decresce em função da predação pelos predadores adultos. Para representar esta relação, foi escolhida uma resposta funcional de Holling tipo II, onde o consumo das ninfas aumenta até atingir um valor limiar, onde uma quantidade maior de presas não representa maior consumo pois atinge a capacidade limite dos predadores. O termo que representa esta resposta é dado por $\frac{\gamma N_1 P}{1 + \phi N_1}$, onde γ está relacionado com a taxa de predação e ϕ com o tempo gasto para manipulação da presa; o termo é dado com um sinal negativo, pois representa diminuição na população da variável N_1 . Para o próximo estágio de ninfa, N_2 , também considerou-se a taxa de mortalidade e transição para adultos como termos negativos, e a transição de N_1 para N_2 como positivo. Além disso, deve-se considerar o parasitismo. Esta relação também foi escolhida como uma resposta funcional de Holling tipo II, mas com diferentes parâmetros relacionados ao parasitismo (α e β , análogos à γ e ϕ , respectivamente), e também é negativo para representar a morte das ninfas pelo parasitismo.

Além disso, é multiplicada pela razão sexual dos predadores adultos, ψ_t , pois apenas fêmeas podem parasitar dando origem à novos predadores jovens.

Para as fêmeas adultas da praga, variável F , considera-se apenas a mortalidade como fator de diminuição das espécies, e como crescimento a transição de ninfas N_2 para adultos; porém com uma taxa de razão sexual associada (ψ_c), pois consideramos apenas as fêmeas da praga, que podem gerar novos ovos.

Para os parasitoides temos que o nascimento dos jovens J depende da capacidade de parasitar dos adultos (parasitoide não generalista); sua taxa de natalidade é proporcional (constante de proporcionalidade Θ) ao termo de parasitismo descrito na variável N_2 porém positivo, e seu decrescimento depende de sua mortalidade e taxa de transição para adultos. Para os parasitoides adultos P , temos que esta população aumenta devido a transformação de jovens em adultos e diminui devido a mortalidade natural, a qual depende da capacidade de predação modelada por resposta funcional de Holling utilizada para a variável N_1 , multiplicada por um fator ω (o consumo da presa diminui a mortalidade do predador). Ao modelo desenvolvido, deve-se acrescentar o efeito da aplicação do MIP.

1.5 Adição do MIP

Deve-se considerar agora o caso do MIP. Quando a população de fêmeas adultas da praga, F , ultrapassar um valor estabelecido como NC, utiliza-se num instante fixo do tempo uma quantidade de inseticida suficiente para fazer com que a população de pragas volte a ficar menor que o NC. O inseticida afeta todos os estágios de vida da praga, incluindo ovos, e também afeta os parasitoides. Considerou-se que o dano causado é equivalente em todas as espécies e estágios de vida, portanto todas as variáveis vão diminuir proporcionalmente na ocasião da aplicação do inseticida. Uma vez que a proporção necessária para que a quantidade de pragas adultas F caia para o valor de NC é $\frac{NC}{F}$, este é o valor que será utilizado no cálculo das proporções a serem retirados de cada população.

Além disso, neste mesmo instante do tempo, é adicionado ao sistema uma quantidade τ de parasitoides adultos, que auxiliarão no combate à praga. Adicionando todas estas informações, obtém-se o modelo completo utilizado, dado por:

$$F(t) < NC \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dO}{dt} & = & \eta F \left(1 - \frac{O}{K}\right) - (\sigma_o + \mu_o)O \\ \frac{dN_1}{dt} & = & \sigma_o O - (\sigma_{n1} + \mu_{n1})N_1 - \frac{\gamma N_1 P}{1 + \Phi N_1} \\ \frac{dN_2}{dt} & = & \sigma_{n1} N_1 - (\sigma_{n2} + \mu_{n2})N_2 - \frac{\psi_t \alpha N_2 P}{1 + \beta N_2} \\ \frac{dF}{dt} & = & \psi_c \sigma_{n2} N_2 - \mu_f F \\ \frac{dJ}{dt} & = & \theta \frac{\alpha N_2 P}{1 + \beta N_2} - (\sigma_j + \mu_{n2})J \\ \frac{dP}{dt} & = & \sigma_j J - \mu_p P \left(1 - \omega \frac{\gamma N_1}{1 + \Phi N_1}\right) \end{array} \right.$$

e,

$$F(t) \geq NC \left\{ \begin{array}{l} O(t^+) = (1 - \delta_c)O(t) \\ N_1(t^+) = (1 - \delta_c)N_1(t) \\ N_2(t^+) = (1 - \delta_c)N_2(t) \\ F(t^+) = (1 - \delta_c)F(t) \\ J(t^+) = (1 - \delta_c)J(t) \\ P(t^+) = (1 - \delta_c)P(t) + \tau \end{array} \right.$$

onde t^+ representa um instante fixo no tempo e $\delta_c = 1 - \frac{NC}{F}$.

1.6 Parâmetros Utilizados

A Tabela 1 apresenta os valores encontrados na literatura para a concepção do modelo. Na Tabela 2, são apresentados os valores que foram estimados, como razão sexual, limitantes de predação e afins.

Tabela 1: Valores utilizados para os parâmetros em temperatura de 20°C [5, 8].

Parâmetro	η	K	σ_O	μ_o	σ_{n1}	μ_{n1}	σ_{n2}
Valor	9,880	75 x broto	0,1422	0,1060	0,1031	0,2029	0,08292
Parâmetro	μ_{n2}	ψ_c	μ_f	σ_j	ψ_t	μ_p	θ
Valor	0,01892	0,5	0,01976	0,05882	0,6429	0,02941	0,7

Tabela 2: Valores estimados para o modelo [7].

Parâmetro	α	β	ω	γ	Φ
Valor	0,1	0,6	0,2	0,2	0,6

2 Objetivo

Dado o modelo proposto, o objetivo deste projeto é realizar o estudo das soluções deste sistema, avaliar a estabilidade destas soluções e a sensibilidade do modelo aos parâmetros. Depois, vamos adicionar ao sistema informação espacial, através do formalismo de Mapas Acoplados, e apresentar os resultados em forma de gráficos claros que revelem informações que possam vir a ser relevantes no combate à praga pelos produtores de citrus.

3 Metodologia

3.1 Análise de Estabilidade

Foi realizada a análise de estabilidade das soluções de equilíbrio para o sistema sem o MIP. O sistema possui três pontos de equilíbrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ E_2 = (O^*, N_1^*, N_2^*, F^*, 0, 0) \\ E_3 = (O^*, N_1^*, N_2^*, F^*, J^*, P^*), \end{array} \right.$$

os quais representam, respectivamente, a extinção de ambas as espécies, a persistência da praga e a persistência de ambas as espécies.

Para analisar a estabilidade das soluções, utilizaremos os autovalores da equação característica $\Delta(\lambda) = \det(J^* - \lambda I)$, onde J^* representa a matriz Jacobiana (matriz formada pelas derivadas parciais de cada função em relação à cada variável); calculada no ponto de equilíbrio. Sabe-se que se as partes reais de todos os auto-valores forem negativas, a solução é estável [1].

Para E_1 , devemos derivar cada equação em relação a cada variável, e calcular o valor de cada derivada no ponto E_1 . Os cálculos são facilitados, pois no ponto $E_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, muitos dos termos acabam se igualando a 0. Calculando todas as derivadas, temos que a matriz Jacobiana neste ponto é:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ \sigma_o & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{n1} & -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & -\mu_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_j & -\mu_p \end{bmatrix},$$

sendo $b = \sigma_o + \mu_o$; $d = \sigma_{n1} + \mu_{n1}$; $f = \sigma_{n2} + \mu_{n2}$; $g = \psi_c \sigma_{n2}$; $l = \sigma_j + \mu_{n2}$.

A equação característica é encontrada resolvendo-se o determinante da matriz. Para simplificar sua análise, vamos escrevê-la na forma $\Delta(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$, onde $P(\lambda) = (l + \lambda)(\mu_p + \lambda)$ e $Q(\lambda) = (b + \lambda)(d + \lambda)(f + \lambda)(\mu_f + \lambda) - \eta \sigma_o \sigma_{n1} g$. Se todos os autovalores dessa equação forem negativos, o ponto será estável. Para o polinômio P , fica óbvia a conclusão de que os autovalores são negativos, devido ao fato de que todos os parâmetros do problema são positivos. Para o polinômio Q , porém, devemos calcular em que situação o sinal dos valores de λ é negativo. Para determinar o sinal sem a necessidade de resolver uma equação de quarto grau, será utilizado o critério de Routh-Hurwitz para um polinômio de grau 4, dado por:

$$a_3, a_2, a_1, a_0 > 0,$$

$$a_3 a_2 - a_1 > 0,$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_3^2 a_0 > 0,$$

sendo estes os coeficientes da equação na forma polinomial $Q(\lambda) = \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$, ou seja:

$$\begin{cases} a_3 = b + d + f + \mu_f \\ a_2 = bf + b\mu_f + df + d\mu_f + f\mu_f + bd \\ a_1 = bdf + bd\mu_f + bf\mu_f + df\mu_f \\ a_0 = bdf\mu_f - \eta \sigma_o \sigma_{n1} g. \end{cases}$$

Como todos os parâmetros são extritamente positivos, precisamos apenas provar que $a_0 > 0$ e que os segundo e terceiro critérios de Routh-Hurwitz são verdadeiros, ou para que situação eles serão. Calculando estes critérios, temos:

$$a_3a_2 - a_1 = bdf(b+d) + (f+\mu_f)((b+d)^2 + (f+\mu_f)(b+d) + f\mu_f),$$

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_3^2a_0 &= (\eta\sigma_{n1}\sigma_o g + 2bdf\mu_f)(b+d+f+\mu_f)^2 \\ &+ (f+d)(b+\mu_f)(b^2\mu_f^2 + d^2f^2) \\ &+ (b+d)(f+\mu_f)(b^2d^2 + f^2\mu_f^2) \\ &+ (d+\mu_f)(b+f)(b^2f^2 + d^2\mu_f^2) \\ &+ 2b^2f^2(d^2 + \mu_f^2) + 2d^2\mu_f^2f^2b^2. \end{aligned}$$

Como as duas equações só contêm termos positivos, o único critério restante é o de $a_0 > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} a_0 &> 0 \\ bdf\mu_f - \eta\sigma_o\sigma_{n1}g &> 0 \\ bdf\mu_f &> \eta\sigma_o\sigma_{n1}g \\ \frac{\eta\sigma_o\sigma_{n1}g}{bdf\mu_f} &< 1, \end{aligned}$$

e a condição para que o ponto E_1 seja assintoticamente estável é dada por

$$R_{c1} < 1 \quad \text{sendo} \quad R_{c1} = \frac{\eta\sigma_o\sigma_{n1}g}{bdf\mu_f}.$$

Cálculos análogos para E_2 e E_3 resultam em outro valor limiar, igual para ambos os pontos, denominado R_{c2} . Estas duas condições determinam a estabilidade para os três pontos. Conclui-se então que E_1 será estável se $R_{c1} < 1$; que E_2 será estável se $R_{c1} > 1$ e $R_{c2} < 1$; e que E_3 será um ciclo-limite (resultado obtido por simulação numérica) se $R_{c1} > 1$ e $R_{c2} > 1$, dados:

$$\begin{cases} R_{c1} = \frac{\eta\sigma_o\sigma_{n1}g}{bdf\mu_f} \\ R_{c2} = \frac{A^2(l\mu_p i\beta + \sigma_{js}\Phi) + Adg\eta(\sigma_{n1}\sigma_{js} + fl\mu_p)}{\mu_p(d^2gA^2f\sigma_{n1}\eta^2 + A^2l\beta\Phi + Adg\eta(\sigma_{n1}l\beta + fl\Phi))}, \end{cases}$$

sendo $s = \theta\phi_t\alpha$, $i = \omega\gamma$ e $A = K(\eta g\sigma_{n1}\sigma_o - bdf\mu_f)$.

3.2 Sensibilidade aos Parâmetros Biológicos

É importante notar que, para os valores encontrados para os parâmetros (temperatura de 20°C), $R_{c1} = 39,3$ e $R_{c2} = 2,0$. Isto significa que todas as simulações geradas com este conjunto de parâmetros recaem no 3º ponto estudado, o ciclo-limite que representa oscilação de ambas as espécies ao longo do tempo. A Figura 1 mostra o espaço de fase das populações de praga *versus* parasitoides. Pode-se notar no canto inferior-esquerdo, próximo à origem, como os valores de população inicial são atraídos para a solução prevista. Apesar dos parâmetros biológicos não estarem sob o controle do produtor, eles podem ser alterados de forma natural (o exemplo mais simples sendo a alteração na temperatura, aqui considerada constante). Faz sentido, portanto, estudar o efeito da alteração destes parâmetros no problema, e sensibilidade do sistema à alguns deles.

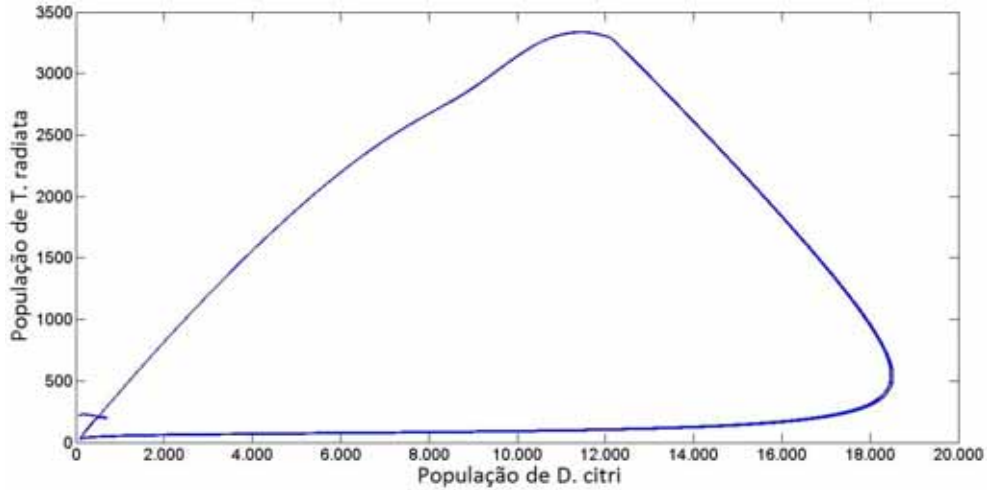


Figura 1: *Espaço de fase mostrando o ciclo-limite.*

Quanto à sensibilidade do sistema, calculou-se como exemplo a sensibilidade à dois parâmetros relacionados ao parasitismo e à predação: θ e ω , respectivamente. Como R_{c2} é o limitante que define a existência de apenas uma das espécies, ele será estudado (R_{c1} não depende destes parâmetros).

Após alguma álgebra, temos as derivadas de R_{c2} por estes parâmetros:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} R_{c2} = \frac{\alpha(A^2 \sigma_j \Phi + Adg\eta \sigma_{n1} \sigma_j)}{\mu_p(d^2 g A^2 f \sigma_{n1} \eta^2 + A^2 l \beta \Phi + Adg\eta(\sigma_{n1} l \beta + fl \Phi))},$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} R_{c2} = \frac{\gamma(A^2 l \mu_p \beta + Adg\eta fl \mu_p)}{\mu_p(d^2 g A^2 f \sigma_{n1} \eta^2 + A^2 l \beta \Phi + Adg\eta(\sigma_{n1} l \beta + fl \Phi))}.$$

Como R_{c2} precisa ser maior que 1 para que o sistema esteja num ciclo-limite, que é a situação propícia para a sobrevivência da *T. radiata*, um aumento em R_{c2} significa, de alguma forma, melhores condições para a existência desta. Diminuições, pelo contrário, significam algum tipo de dificuldade. Como todos os parâmetros trabalhados, independente da temperatura ou qualquer outra variação que sofram, são sempre positivos, então esta derivada (ou seja, a variação do limiar com as variáveis) é sempre positiva. Isto faz sentido do ponto de vista biológico, uma vez que ambas as variáveis estudadas, θ e ω , representam fatores de sobrevivência da *T. radiata* em função do ataque às pragas. É de se esperar, portanto, que o aumento de qualquer uma delas reflita de forma positiva em R_{c2} , aumentando-o e o distanciando ainda mais de 1; tornando assim, do ponto de vista analítico-matemático (mas com total concordância com a idéia biológica) mais fácil a existência da *T. radiata* no sistema, contanto é claro que R_{c1} também esteja acima de 1, pois a presença da *D. citri* é imprescindível.

Para analisar qual das duas variáveis seria a mais influente, basta comparar a forma com que elas influenciam o limiar, ou seja, a derivada de R_{c2} por cada uma delas. Podemos cancelar todo o divisor, igual para ambas as derivadas. Fazendo algumas simplificações, temos:

$$\alpha\sigma_j(A\Phi + dg\eta\sigma_{n1}) > \gamma\mu_pl(A\beta + dg\eta f).$$

Esta inequação implica em θ (parasitismo) como mais importante para o aumento de R_{c2} , enquanto a mesma expressão, com o sinal de maior trocado por de menor ($<$), implicaria que ω (predação) é mais influente.

3.3 Algoritmo Computacional e Mapas Acoplados

Todos os outros principais resultados obtidos ao longo do projeto foram obtidos através de simulação computacional. Para isso, o sistema de EDOs foi resolvido através de um método numérico, o Método de Runge-Kutta Clássico de 4ª Ordem, programado em Linguagem C, no ambiente Linux. Todos os parâmetros alterados foram variados diretamente no algoritmo. Um algoritmo baseado no formalismo de Mapas Acoplados foi desenvolvido para acrescentar informação espacial ao sistema. Posteriormente, outros algoritmos foram desenvolvidos para gerar dados específicos, como análise do intervalo de monitoramento necessário com a variação de parâmetros ou para gerar figuras da configuração espacial das pragas na plantação [2, 7, 9].

Sobre a forma como o algoritmo para Mapas Acoplados foi implantado, foi considerada uma plantação quadrada, de 150x150 sítios regulares, homogêneos, sem fluxo pelas bordas, e com difusão das pragas e parasitoides dada pela vizinhança de Von Neumann, ou seja, pelos quatro vizinhos mais próximos (direções cardeais; a princípio, sem direção preferencial). Em cada sítio foi acrescentada uma população inicial idêntica de pragas e parasitoides, em todos os estágios de vida.

Os principais resultados obtidos destas simulações ao longo do projeto são mostrados e discutidos a seguir.

4 Resultados e Discussões

4.1 Eficácia do MIP

Primeiramente, realizou-se uma simulação da dinâmica entre as espécies sem a aplicação do MIP. A Figura 2 mostra a evolução temporal das populações de praga e parasitoide (sem divisão por etapas de vida) utilizando os parâmetros citados anteriormente, para uma temperatura de 20°C. Pode-se obter como informação deste gráfico que a amplitude populacional da praga é bem maior que a do parasitoide, atingindo aproximadamente 18500 indivíduos, bem como o período da oscilação, de aproximadamente 700 dias (2 anos). Na Figura 3 há a aplicação do MIP (parâmetros utilizados: $NDE = 150$, $NC = 30$ e $\tau = 30$); repara-se facilmente que a população da praga cai bruscamente, não passando agora de 1000 indivíduos. Esta é, porém, a população total de pragas, e boa parte dela é formada por ovos ou ninfas que sequer podem causar dano ao pomar. É mais prático portanto mostrar um gráfico apenas da variável de interesse, $F(t)$, pois só as pragas adultas causam prejuízo ao pomar. A Figura 4 mostra como se dá a oscilação desta variável com o tempo; percebe-se como a aplicação do MIP ocorre com sucesso, havendo uma queda abrupta na população toda vez que ela atinge a marca de 30 indivíduos.

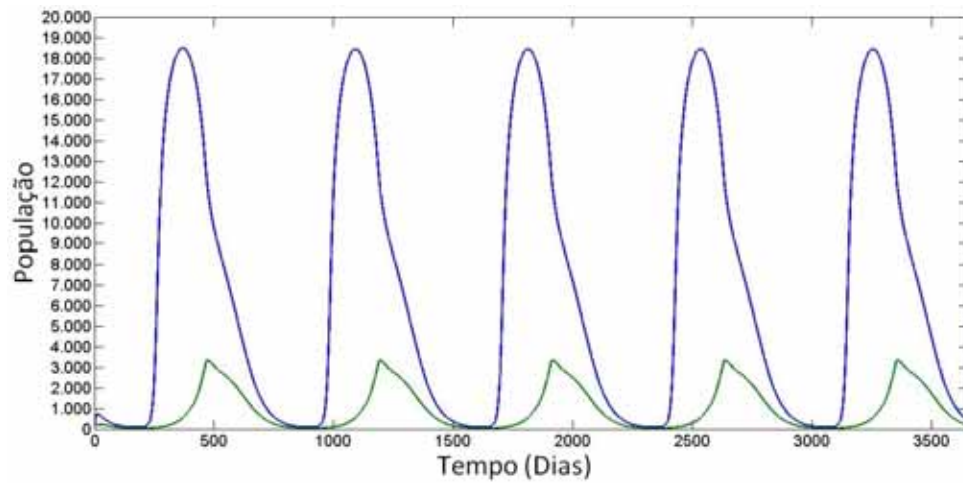


Figura 2: *Evolução da D. citri (azul) e T. radiata (verde) sem o MIP.*

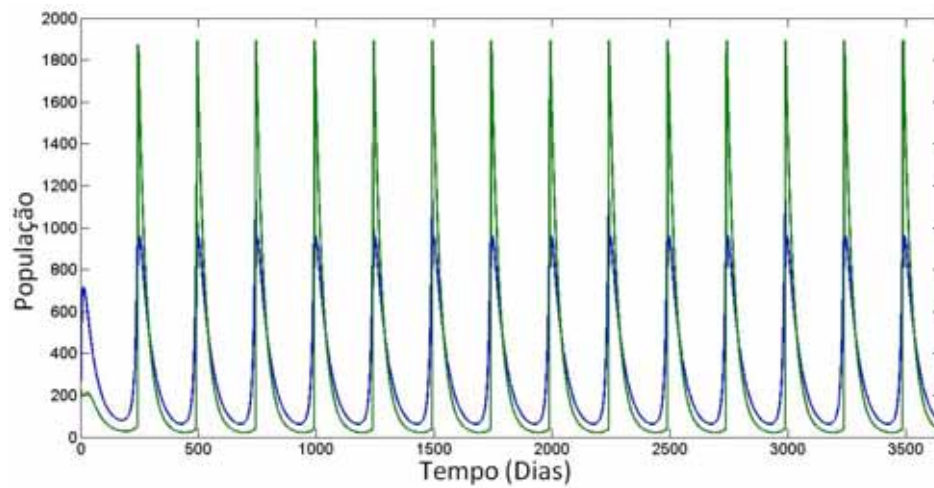


Figura 3: *Evolução da D. citri (azul) e T. radiata (verde) com o MIP.*

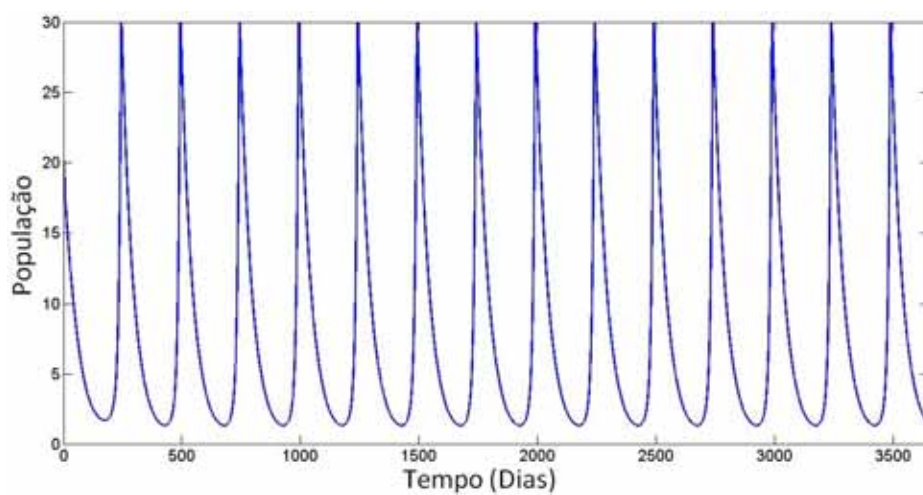


Figura 4: *População de fêmeas adultas de D. citri, com aplicação do MIP.*

Dado o efeito observado nas populações com a aplicação das técnicas do MIP, podemos observar agora o impacto causado pela variação dos parâmetros relacionados a esta técnica: a alteração do NC (nível de controle da praga) e de τ (quantidade de parasitoides adultos adicionados ao sistema quando da aplicação desta). Um fato interessante observado dos gráficos das simulações é o porquê da utilização dos parasitoides naturais auxiliar tanto o uso de inseticida. A conclusão tirada envolve a dinâmica das espécies: no momento da aplicação do MIP, quando as pragas encontram-se em fase de crescimento populacional, o inseticida reduz a quantidade absoluta de pragas, assim como de parasitoides. Como a proporção se mantém a mesma, logo a seguir a população de *D. citri* volta a crescer, ultrapassando novamente a quantidade aceitável (NC). Assim sendo, por vários dias consecutivos é necessária a aplicação do inseticida, mantendo a população no limiar aceitável até que ela comece a decair naturalmente. A Figura 5 mostra a variação populacional do MIP sob os mesmos parâmetros da Figura 4, mas sem a adição de nenhum parasitoide ao sistema além de sua população inicial ($\tau = 0$). Repara-se que de fato há um platô, quando a praga permanece em sua amplitude máxima por determinado período de tempo. O gasto com inseticida para manter essa situação é alto e desnecessário. Aumentando-se neste momento a quantidade de parasitoides, a proporção destes em relação às pragas começa a aumentar, e aumenta-se a rapidez com que a população de praga começa a cair, extinguindo esse platô como na Figura 4. Um gasto muito grande com adição de parasitoides, porém, pode-se mostrar desnecessário. Adicionar muitos parasitoides apenas irá aumentar a competição entre eles, e a população rapidamente voltará para o ponto de estabilidade E_3 , como demonstrado teoricamente anteriormente, retornando ao ciclo-limite. Simulações bem definidas podem mostrar um valor razoável para τ dependendo de cada caso particular. Por hora, o valor de $\tau = 30$ mostra-se eficaz para diminuir a duração deste platô, e será utilizado em todas as simulações a seguir.

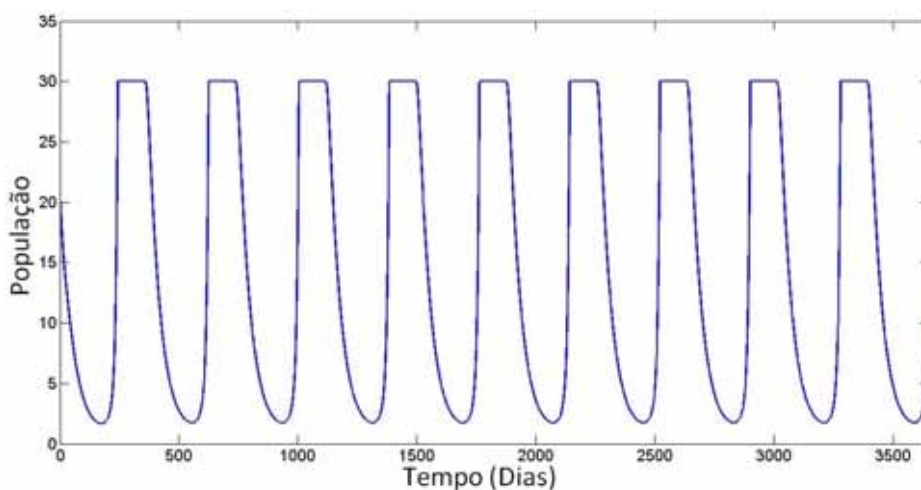


Figura 5: Gráfico referente a aplicação do MIP, sob os mesmos parâmetros descritos anteriormente, porém com NC de 30 e τ de 0. A população mostrada é de fêmeas adultas de *D. citri*, variável $F(t)$, pelo tempo em dias.

O outro parâmetro a ser variado é o NC, máximo aceitável de pragas na população antes da

aplicação do inseticida. A Figura 6 mostra as populações de ambas as espécies oscilando, sob os mesmos parâmetros da Figura 3, exceto o NC que foi alterado de 30 para 90. Permitindo uma quantidade maior de fêmeas adultas da praga, altera-se a amplitude populacional não só desta variável, mas também de todos os estágios de vida da *D. citri*, bem como da *T. radiata* pela maior oferta de presas. Além da amplitude, repara-se também que o período de oscilação aumenta; isto ocorre pois é permitido ao sistema oscilar mais naturalmente antes da intervenção forçada do MIP. Em teoria, não haveria problemas em utilizar o NC como sendo 90, pois ainda assim garante-se que a variável $F(t)$ não ultrapasse o NDE de 150 indivíduos, mas estamos tratando de uma situação irreal ou dificilmente praticável na realidade, pois estamos considerando um único sítio com monitoração constante. Desta forma fica fácil garantir que a quantidade de pragas não se eleve à níveis críticos. O problema é que na prática, podemos ter pomares muito grandes, onde é impossível ou pelo menos inviável, economicamente e praticamente, monitorar todas as árvores por todo o tempo. Por isso, na etapa seguinte do projeto, definimos a configuração espacial do problema. Como o monitoramento não é constante, elevar muito o NC neste caso representa uma chance maior de que a população de pragas atinja o NDE, em um ponto do pomar que não esteja sendo monitorado por alguns momentos.

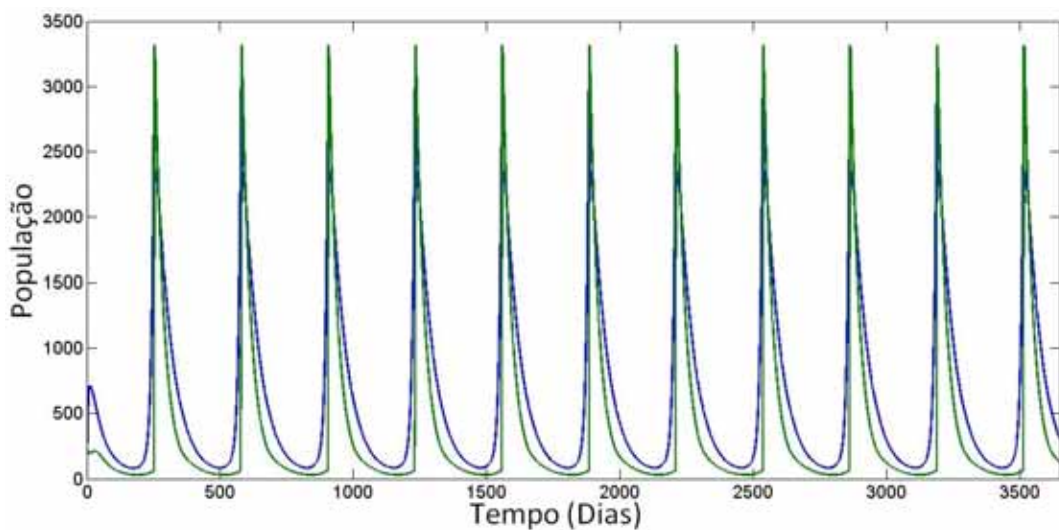


Figura 6: Gráfico referente a aplicação do MIP, sob os mesmos parâmetros descritos anteriormente, agora com NC de 90 e τ de 30.

4.2 Adição da Informação Espacial

As características espaciais do problema foram acrescentadas conforme já descrito. Foram testadas e comparadas algumas formas de se realizar difusão. Ao fim, optou-se por definir um coeficiente de difusão para a praga e outro para o parasitoide; a difusão foi considerada igual para os quatro vizinhos, mas difusão preferencial também pode ser utilizada, incluindo situações onde o parasitoide dá preferência em migrar para sítios com mais presas.

Quando acrescenta-se o sistema bidimensional, novas considerações devem ser feitas. Não é viável monitorar todos os sítios por todo o tempo, como estava suposto até agora. Portanto,

deve-se considerar uma técnica alternativa: a cada intervalo pré-definido de dias (chamado aqui de intervalo de monitoramento) uma quantidade de sítios também definida anteriormente é sorteada para ser analisada. Em cada um destes sítios, checka-se se a população de fêmeas adultas passou do NC. Se sim, apenas naquele sítio o MIP é aplicado. Temos aqui portanto, dois novos parâmetros cujo controle está à disposição do produtor, sendo portanto interessante alterá-los nas simulações para prever seus efeitos.

Sobre a difusão, novos parâmetros incluem o coeficiente de difusão (proporção de insetos que se difundem em cada sítio), tanto da praga quanto do parasitoide, o que dá a possibilidade de definir qual dos dois se movimenta mais rápido. Para simular a movimentação constante e difícil de prever dos insetos no campo, optou-se por fazer o algoritmo de forma que fossem sorteados, por dia simulado, uma quantidade de sítios em ordem aleatória para que sofressem difusão. Se o número de sítios escolhidos for maior do que o tamanho do campo (neste caso, $150 \times 150 = 22500$ sítios), então um sítio pode ser escolhido mais de uma vez, o que significa que este inseto tem um raio de dispersão maior. A ordem aleatória garante que não se crie direção preferencial para movimentação. Estes três parâmetros (difusão da praga, do parasitoide, e intensidade de difusão) não estão sob controle do produtor, mas é possível observar nas simulações uma predição de como o sistema se comporta na realidade em caso de variação destes.

A Figura 7 apresenta o avanço populacional da *D. citri* pelo campo. Sítios em branco estão pouco infestados, enquanto que escalas de cinza mais escuras representam maior presença de pragas. O último tom de preto representa mais de 10000 pragas presentes no ponto. Pode-se notar que sem o controle constante com o MIP, a praga volta a atingir densidades populacionais altíssimas rapidamente, como na Figura 2. Além disso, nota-se a formação de focos espaciais circulares da praga, que se expandem com o tempo. Este comportamento é esperado neste tipo de sistema de reação-difusão. O conjunto de parâmetros utilizado foi: 6750 sítios sorteados a cada 30 dias para monitoração; porcentagem de pragas adultas difundidas de 20% e de predadores adultos de 10% (da população total presente no sítio, por difusão, para ambos), 67500 sítios sorteados para difusão por dia (três vezes o número total de sítios). Pela grande quantidade de pragas e velocidade de infestação, nota-se que o controle não está sendo eficiente.

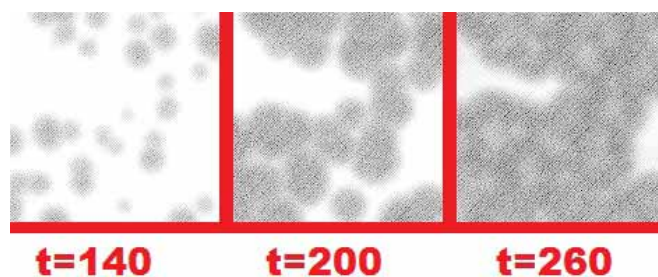


Figura 7: Imagem bidimensional representando a densidade populacional das fêmeas adultas de *D. citri* em uma plantação, em três diferentes passos de tempo (em dias).

A primeira hipótese que pode ser levantada é que aumentando-se o número de sítios sor-

teados para serem monitorados com MIP, a técnica se mostre mais eficiente em eliminar estes focos. A Figura 8, porém, mostra que triplicando-se o número de sítios sorteados, passando-os para 18000, os focos continuam crescendo, com a mesma intensidade de cinza. Esta figura foi mostrada com mais passos de tempo para que isso pudesse ser compreendido. No dia 240 da simulação ocorre o monitoramento, e diversos sítios espalhados pelo pomar são sorteados, voltando diretamente à cor branca. Cinco dias depois, boa parte deles já volta a adquirir tons de cinza: a alta difusão dos insetos permitem que os sítios vizinhos dos sorteados, ainda infectados, recuperem a população de pragas naquele ponto rapidamente. Dez dias depois do monitoramento o aspecto "chiado" da imagem começa a desaparecer, e menos de um mês depois, no dia 260, boa parte da nitidez original já é recuperada. Desta forma, antes do próximo monitoramento, as pragas já se recuperaram do último ataque, e conseguem resistir ao MIP.

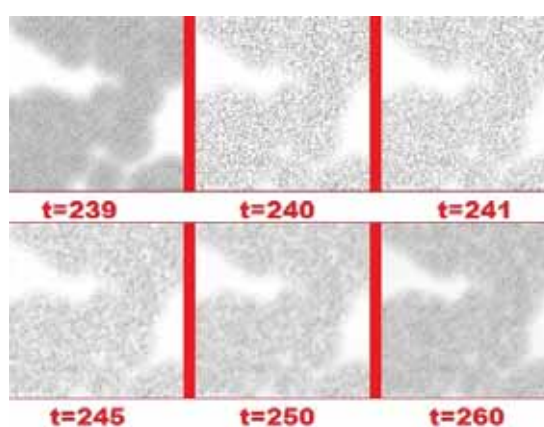


Figura 8: Imagem bidimensional representando a densidade populacional das fêmeas adultas de *D. citri* em uma plantação, em seis diferentes instantes de tempo. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da Figura 7, exceto pela quantidade de sítios sorteada para monitoramento, alterada para 18000.

Modificar o intervalo de monitoramento, porém, mostra-se muito mais viável. A Figura 9 mostra duas simulações, idênticas (inclusive na semente do gerador de números aleatórios) à Figura 7 exceto pelo intervalo de monitoramento, alterados para 15 e 7 dias (nas linhas *a* e *b*, respectivamente). A diminuição do intervalo de monitoramento efetivamente afeta a tonalidade da imagem, mostrando que as pragas de fato não têm tempo de se propagar o bastante para se recuperar e voltar a adquirir uma distribuição mais homogênea. O gasto com monitoramento constante, porém, mostra-se um empecilho para que isto seja realizado; o monitoramento teria que ser quase constante para fazer a amplitude populacional, de fato, ficar longe de causar dano. Aliar o aumento do número de sítios monitorados com a diminuição deste intervalo seria uma forma simples de resolver o problema, mas não viável na realidade, portanto sem uma boa justificativa de ser utilizada.

Podemos alterar os parâmetros relacionados à difusão do sistema, prevendo uma grande gama de possibilidades para os padrões de difusão dos insetos envolvidos. A Figura 10(I) mostra o que ocorre se o coeficiente de difusão da praga é aumentado: na linha *a* está em 30% e na

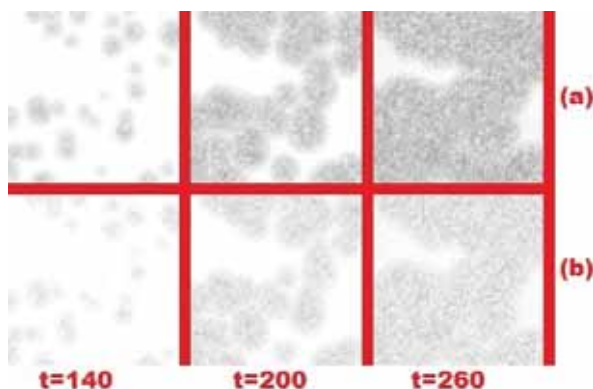


Figura 9: Imagem bidimensional representando a densidade populacional das fêmeas adultas de *D. citri* em uma plantação, em três diferentes instantes de tempo. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da Figura 7, exceto pelo tempo de monitoramento, alterado para 15 dias (a) e 7 dias (b).

linha *b* em 40%. Nota-se que conforme a difusão aumenta, a distribuição dos insetos fica mais homogênea, reduzindo a quantidade de focos que aparecem. Por outro lado, alterar a difusão dos parasitoides, conforme mostrado na Figura 10(II), tem o efeito contrário. Aparentemente, tornar a distribuição dos parasitoides mais homogênea e menos focada propicia o aparecimento de diversos focos pequenos de praga, ao invés de poucos grandes, e em pouco tempo estes conseguem tomar toda a plantação; o tempo que leva para o sistema tornar-se inteiro ocupado, e desocupado novamente pela própria dinâmica das espécies (período da praga) é reduzido.

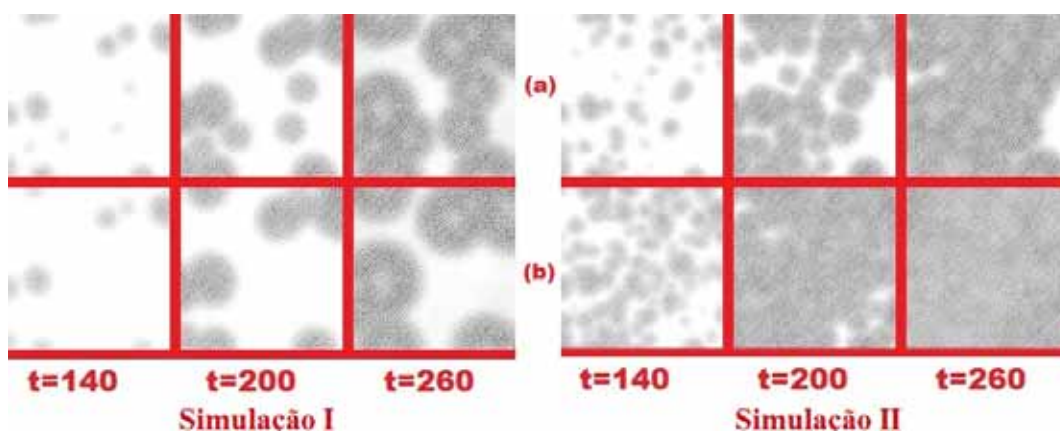


Figura 10: Imagem bidimensional representando a densidade populacional das fêmeas adultas de *D. citri* em uma plantação, em três diferentes passos de tempo (em dias). Os parâmetros utilizados foram os mesmos da Figura 7, exceto que na Simulação I a difusão de pragas foi aumentada para 30% na fileira (a) e para 40% na fileira (b); e na Simulação II a difusão de predadores foi aumentada para 20% na fileira (a) e para 30% na fileira (b). Tempo em dias.

Além disso, pode-se alterar a intensidade da difusão, ou seja, quantos sítios são sorteados (ou quantas vezes todos são sorteados) para passar por difusão. A Figura 11 mostra diferentes resultados para um mesmo conjunto de parâmetros, apenas alterando este parâmetro.

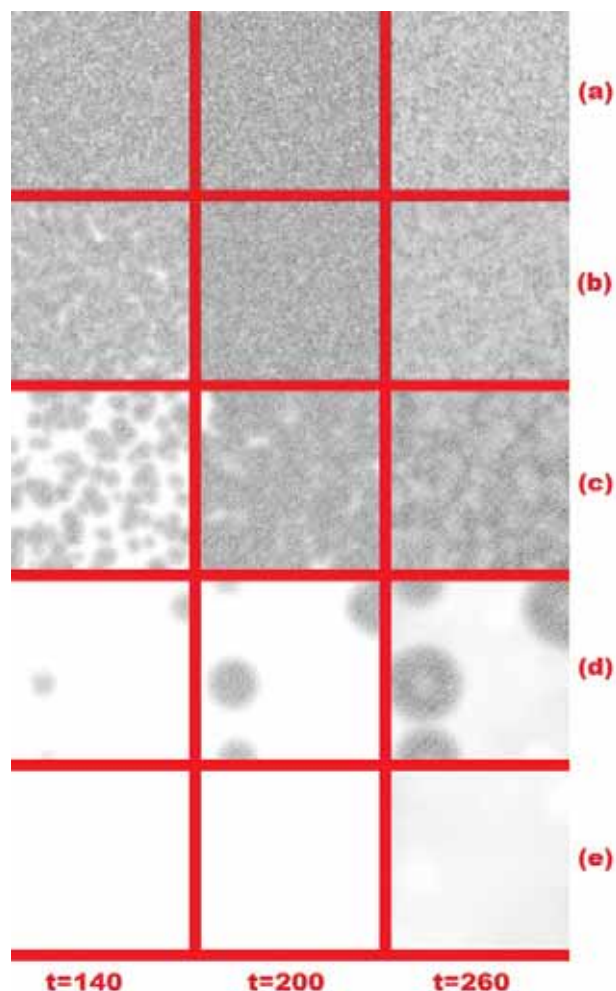


Figura 11: Imagem bidimensional representando a densidade populacional das fêmeas adultas de *D. citri* em uma plantação, em três diferentes passos de tempo, para cinco diferentes conjuntos de parâmetros. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da Figura 7, exceto pela intensidade de difusão, alterada para 50% do número total de sítios na linha (a), para 100% na linha (b), para 200% na linha (c), para 500% na linha (d) e para 800% na linha (e).

4.3 Intervalo de Monitoramento

Pensando em um único sítio, mas sem a necessidade de se manter monitoramento constante, pode-se pensar na melhor maneira de calcular o intervalo de monitoramento necessário para que a população não ultrapasse o NDE. Através do estudo da influência do NC e das populações iniciais, pode-se definir de quanto em quanto tempo é necessário aplicar a técnica, sem que a população chegue ao ponto de causar dano. A Figura 12, mostra a variação obtida do intervalo necessário, conseguido empiricamente, para prevenir contra dano econômico. A população inicial para cada estágio de vida foi escolhida aleatoriamente. O NC foi variado de 1 a 150 (com passo 1), e para cada NC foi calculado o intervalo máximo entre os monitoramentos que poderia ser aceito sem que o produtor sofresse prejuízo. Essa simulação foi repetida 20 vezes, cada uma delas com uma população inicial diferente. Para cada NC fixo, o gráfico mostra o

intervalo máximo e mínimo encontrado, além de uma média simples entre as 20 simulações.

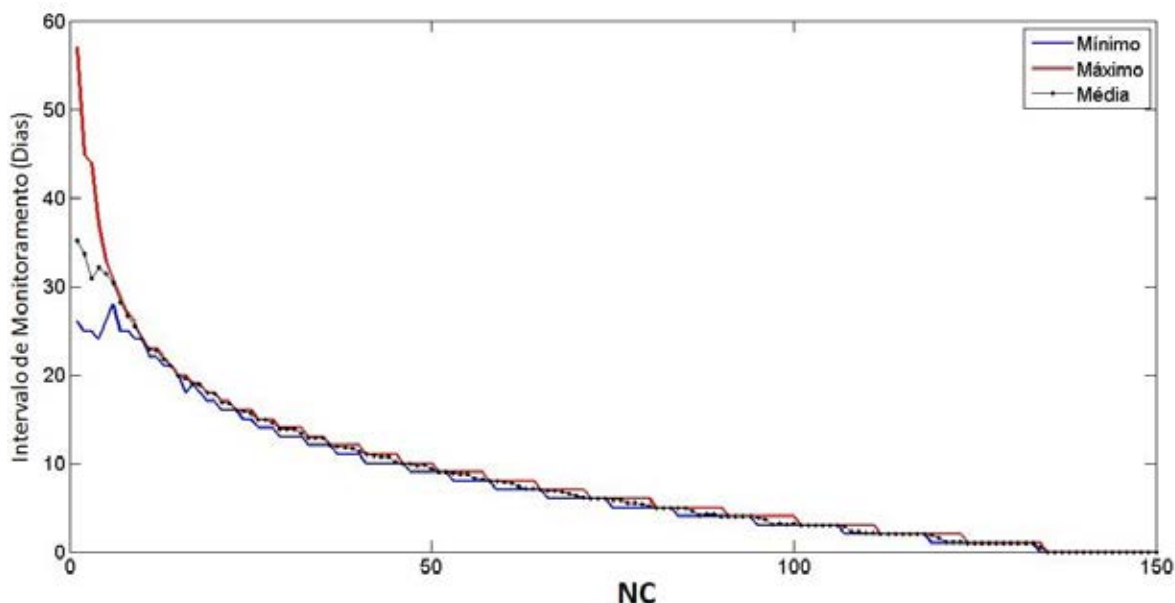


Figura 12: Gráfico para o intervalo de monitoramento mínimo sem causar prejuízos, pelo Nível de Controle utilizado (o Nível de Dano Econômico foi fixado em 150). Conforme as cores indicadas pela legenda, as linhas mostram o intervalo mínimo calculado, o máximo e uma média, considerando 20 simulações realizadas para cada NC.

As duas principais informações deduzidas desta imagem são: que o intervalo de tempo entre as monitorações diminui conforme aumentamos o NC, como esperado; e que a faixa de diferentes intervalos (para um mesmo NC e populações iniciais diferentes) é mais ampla para os NCs mais baixos, mais visivelmente para aqueles abaixo de 10 (para este conjunto de parâmetros). Para estudar de maneira mais completa como este intervalo varia conforme várias combinações de populações iniciais são utilizadas, o NC foi fixado e foi gerado um gráfico tridimensional de população inicial de pragas por população inicial de predadores por intervalo de monitoramento. Os resultados podem ser vistos na Figura 13.

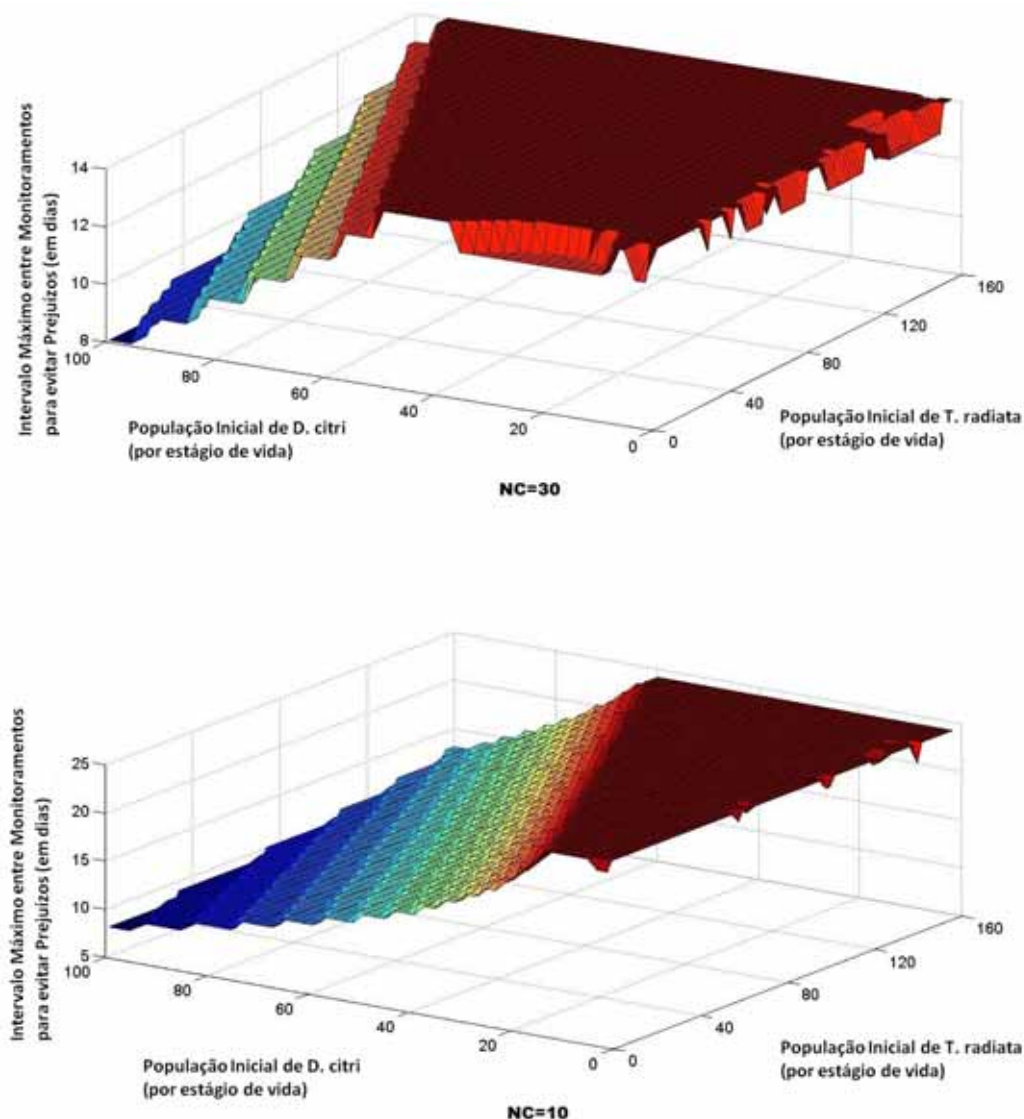


Figura 13: Gráfico para o intervalo de monitoramento mínimo sem causar prejuízos, pela população inicial de pragas e predadores. O Nível de Controle para a imagem superior é de 30, e para a inferior é de 10. O Nível de Dano Econômico foi fixado em 150 para ambas.

Como pode-se notar, a variação para o NC fixado em 10 é superior a do NC de 30, como indicado pela imagem anterior. Apesar disso, ambas mostram um comportamento semelhante: um platô e uma área de decrescimento. Em ambos os casos, este decrescimento ocorre conforme a população inicial de pragas aumenta e de predadores diminui, o que faz sentido biológico, uma vez que um predomínio maior da praga no início da simulação exige um controle maior com uso de pesticidas para normalizar a situação. Em ambos os casos existe um limiar para os intervalos saírem do platô e caírem, que parece depender de uma razão entre ambas as populações iniciais, mas cujo valor depende do NC fixado, além de outros parâmetros. A principal importância das Figuras 12 e 13 é mostrar que apesar dos sistemas estudados até agora sempre terem convergido para um ciclo-limite após um período transiente, a população inicial pode afetar os intervalos necessários entre as aplicações do inseticida.

5 Conclusão

A utilização do MIP em um único sítio monitorado constantemente reduz drasticamente a amplitude populacional da praga. O aumento do NC aumenta a amplitude populacional da praga e do parasitoide, e aumenta o período de cada oscilação da população. A diminuição do parâmetro τ , isto é, do número de *T. radiata* adultos acrescentados no sistema quando da aplicação do MIP, faz com que a população da praga fique mais tempo estagnada no limite permitido (NC).

Pode-se estimar o intervalo de monitoramento necessário para evitar prejuízo econômico no sistema, através do estudo do efeito da variação do NC na aplicação do MIP. Aumentar o NC diminui o intervalo de monitoramento necessário, pois permite-se que as pragas atinjam populações muito próximas do NDE. Além disso, baixos valores de NC mostram maior variação no intervalo necessário, quando consideradas diversas simulações. Isto deve-se à população inicial dos insetos; da relação entre população inicial de pragas e predadores, de fato.

O estudo do modelo simples (dinâmica populacional em um único sítio) é essencial para se entender o funcionamento do modelo mais completo, com considerações espaciais. Neste, parâmetros relacionados à movimentação dos indivíduos também são considerados. Aumentar a difusão da praga faz com que um número menor de focos, porém mais concentrados, apareçam. Aumentar a difusão dos parasitoides gera o efeito contrário. De fato, o efeito parece depender da diferença entre ambos, pois multiplicar por uma constante a quantidade de difusões que ocorrem gera o mesmo efeito que aumentar a difusão daquele que já possui maior (a diferença entre os dois torna-se maior, multiplicada pela mesma constante). Parâmetros que estão sob o controle do produtor são relacionados à aplicação do MIP: a quantidade de sítios monitorados e o intervalo entre os monitoramentos. Apenas alterar a quantidade não é eficiente para se reduzir a intensidade dos focos; o sistema se recupera rapidamente dependendo da capacidade de difusão da praga. Diminuir o intervalo entre os monitoramentos afeta esta capacidade de recuperação, pois não há tempo das pragas se reagruparem nos sítios atacados pelo MIP. Uma combinação de alta quantidade de sítios monitorados em poucos intervalos de tempo seria a melhor solução para o problema, mas pode ser difícil do ponto de vista prático. Como o objetivo da Matemática Aplicada é trazer resultados realmente úteis para um problema real, deve-se buscar uma alternativa que resolva melhor o problema. Isto pode ser obtido alterando-se as regras de aplicação do MIP: muita pesquisa futura ainda pode ser realizada no sentido de melhorar ainda mais a técnica, tornando-a mais eficaz para manter a população de pragas abaixo do NDE.

6 Considerações Finais

Este projeto foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP - Número de Processo 2011/05832-9), com bolsa de Iniciação Científica de 05/2011 a 12/2013. Durante este período, o trabalho foi apresentado em diversos congressos conforme foi

evoluindo e tomando forma, entre eles: VII Congresso de Física Aplicada à Medicina (Botucatu - apresentação oral); Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (Botucatu - apresentação em painel); XXIV e XXV Congresso de Iniciação Científica da UNESP (ambos: 1ª Fase de Botucatu - apresentação oral); "8vo Congreso Latinoamericano de Biomatemática - SOLABIMA 2013"(congresso internacional em Luján, Argentina - apresentação oral).

Este projeto mostra uma de uma infinidade de maneiras de como a matemática computacional pode ser aplicada à biologia. Esta monografia foi escrita a partir de quase três anos de projeto de Iniciação Científica, tendo acrescentado diversos conhecimentos à bagagem de seu autor; não só conhecimentos específicos da área de biomatemática (muitos complementares à base do curso de Física Médica), mas também gerou experiência de como se trabalhar com o método científico, pesquisar artigos em bases de dados *online*, conhecer novos *softwares*, e lidar com situações imprevistas, tendo que analisar os dados e tirar conclusões próprias. A experiência com Iniciação Científica mostra-se imprescindível para guiar um graduando em direção ao mundo acadêmico.

Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DiPrima, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC, 2006.
- [2] CUNHA, M. C. C. **Métodos Numéricos**. Editora Unicamp, 2003.
- [3] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. SIAM, 2005.
- [4] FAO - Food and Agriculture Organization of the United Nations; Economic and Social Department; The Statistics Division. **Major Food and Agricultural Commodities and Producers**. 2005.
- [5] FAUVERGUE, X.; QUILICI, S. **Studies on the biology of *Tamarixia radiata*, primary ectoparasitoid of *Diaphorina citri* Kuwayama, Asian vector of citrus greening disease**. Fruits, v.46, p.179-183, 1991.
- [6] KEELING, M. J.; ROHANI, P. **Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals**. Princeton University Press, 2008.
- [7] LIMA, E. A. B. F. **Desenvolvimento e Aplicação de Modelos Matemáticos para o Controle da *Diaphorina citri* via Manejo Integrado e Estudo da Influência da Temperatura sobre a Dinâmica Populacional de *Talitroides topitotum***. 2010. 68f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Biociências de Botucatu, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2010.
- [8] LIU, Y. H.; TSAI, J. H. **Effects of temperature on biology and life table parameters of the Asian citrus psyllid, *Diaphorina citri* Kuwayama (Homoptera: Psyllidae)**. Annals of applied biology, v.137, n.3, p.201-206, 2000.
- [9] PIERI, K. **Um Modelo Espacial para a Resposta Imunológica Adaptativa da Hepatite B**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado - Física Médica) - Instituto de Biociências de Botucatu, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2010.