Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

A influência de uma ação impulsiva no comportamento de soluções de equações diferenciais

Tatiana Rondon Viegas da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Tatiana Rondon Viegas da Silva

A INFLUÊNCIA DE UMA AÇÃO IMPULSIVA NO COMPORTAMENTO DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemï£¡tica Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Profł. Drł. Selma Helena de Jesus Nicola
Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos

Profł. Drł. Luciene Parron Gimenes Arantes
Departamento de Matemática - Universidade Estadual de Maringá

Rio Claro, 08 de Novembro de 2011

Aos meus pais,
ao meu esposo e filho
e aos meus amigos queridos.

Agradecimentos

À professora Marta Cilene Gadotti pela dedicação durante a orientação deste trabalho, sendo, na maioria das vezes mais amiga do que professora, agindo sempre com ética e compreensão e incentivando sempre o meu crescimento.

Aos meus pais, que me fizeram ver a importância dos estudos na nossa vida.

Ao meu esposo Mauro e meu filho Mateus por todo apoio e compreensão a mim dedicados, pelos meses de distância em nome da realização deste objetivo.

Aos amigos conquistados durante este período e aos antigos que sempre estiveram do meu lado.

Acima de tudo à Deus, por todas as bençãos a mim concedidas e pela força que me foi dada pra chegar até aqui.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer um contraste entre o comportamento das soluções das equações diferenciais ordinárias e das equações diferenciais impulsivas, através da apresentação das propriedades destas equações, e das equações diferenciais ordinárias, e da análise qualitativa das soluções.

Palavras-chave: equações diferenciais, impulsos, soluções, existência e unicidade.

Abstract

In this work we present a parallel between the behavior of ordinary differential equations and the impulsive diferencial equations by presenting their properties and the qualitative analysis of their solutions.

Keywords: differential equations, impulse, solutions, existence and uniqueness.

Sumário

Introdução **14**

1 Preliminares **17**
1.1 Funções vetoriais e Funções matriciais 17
1.2 A exponencial matricial 22
1.2.1 A Desigualdade de Gronwall 25

2 Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem **29**
2.1 Equações diferenciais ordinárias 29
2.2 Sistemas de equações diferenciais 33
2.3 Teoremas de Existência e Unicidade 36
2.4 Sistemas autônomos 42
2.4.1 Estudo das órbitas dos sistemas autônomos bidimensionais . . . 45

3 Equações diferenciais impulsivas **55**
3.1 Sistemas com impulsos em tempos fixados 57
3.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis 59
3.3 Sistemas autônomos com impulso 61
3.4 Existência e continuação 68
3.4.1 Unicidade de solução 75
3.5 Aplicação: modelo presa-predador impulsivo 77

Conclusão **81**

Referências **85**

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar a influência da ação impulsiva no comportamento das soluções de certas equações diferenciais ordinárias. Para isso, são apresentados no primeiro capítulo alguns resultados da Análise Matemática e da Álgebra Linear, afim de estabelecer conceitos fundamentais para o desenvolvimento da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

No segundo capítulo, são apresentados resultados importantes da teoria de equações diferenciais, destacando a análise qualitativa do comportamento das soluções destas equações através do estudo de suas órbitas e pontos de equilíbrio, bem como, de algumas propriedades do espaço das soluções das equações diferenciais homogêneas.

O terceiro capítulo é dedicado às equações diferenciais impulsivas, onde são definidas as soluções de um sistema impulsivo e também são demonstrados os teoremas de existência e unicidade de tais soluções. Nos exemplos apresentados foram feitas as análises do comportamento das soluções para a equação ordinária, e em seguida, para o caso em que se acrescenta a condição de impulso, com o objetivo de destacar as mudanças no comportamento das soluções com relação a continuidade, intervalo de definição, entre outros. Para finalizar o trabalho, é apresentado um modelo de sistema impulsivo do tipo presa-predador, onde é feita a análise do comportamento da solução do sistema ordinário e do sistema impulsivo.

Este trabalho fornece um material de fácil compreensão sobre as equações diferenciais ordinárias, especialmente a análise de sistemas de equações diferenciais ordinárias. É introdutório e motivador para o leitor que se interessar pelas equações diferenciais impulsivas e suas aplicações, portanto pode ser utilizado como material didático em disciplinas relacionadas aos temas aqui tratados.

1 Preliminares

Alguns conceitos e resultados básicos da Análise Matemática e da Álgebra Linear são de grande importância para o desenvolvimento da teoria de Equações Diferenciais. Este capítulo tem por objetivo o desenvolvimento destes conceitos através da demonstração de teoremas e propriedades que serão utilizados ao longo do trabalho.

1.1 Funções vetoriais e Funções matriciais

As funções vetoriais e matriciais são ferramentas fundamentais para o estudo dos sistemas de equações diferenciais. Nesta seção, serão discutidas algumas propriedades importantes destas funções.

Definição 1.1. *Dado um vetor $y \in \mathbb{R}^n$, denotado por $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, define-se a* ***norma*** *deste vetor como o somatório dos valores absolutos das suas componentes, ou seja,*

$$||y|| = |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|.$$

Define-se também, a métrica d em $\mathbb{R}^n$ induzida pela norma, ou seja, $d(y, x) = ||y - x||$ para todo $y, x \in \mathbb{R}^n$.

Observe que no espaço $\mathbb{R}^n$, essa não é a única norma existente. Podem ser consideradas outras, como por exemplo, a **norma do máximo**, isto é: $|y| = max_{1 \leq i \leq n}\{|y_i|\}$, ou a norma $|y| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$. No entanto, sabe-se que todas as normas apresentadas acima são equivalentes. Para o objetivo deste trabalho, a norma será convencionada como na Definição 1.1.

Dados E um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ e I um intervalo da reta. Define-se uma função vetorial como uma aplicação de I em E dada por:

$$g : I \to E,$$

$$t \longmapsto g(t).$$

Onde $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$ e cada componente é uma aplicação $g_i : I \to \mathbb{R}$.

A ideia de limite de uma função vetorial segue diretamente da definição de sequência de vetores e da definição de convergência destas sequências, o que leva à próxima definição:

Definição 1.2. *Seja* $\{y^k\}$ *uma* ***sequência de vetores*** *em* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Diz-se que* $\{y^k\}$ *converge para um vetor* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *se, e somente se,* $d(y^k, y) \to 0$ *quando* $k \to \infty$. *Nesse caso, escreve-se:*

$$\lim_{k\to\infty} y^k = y$$

ou $y^k \to y$.

Observe que $|y^k - y| = |y_1^k - y_1| + |y_2^k - y_2| + \ldots + |y_n^k - y_n|$, e portanto, segue da definição acima que uma sequência de vetores $\{y^k\}$ converge para um vetor y se, e somente se, cada componente de y^k tende à componente correspondente do vetor y. Todas as propriedades de limites para números reais são válidas para o limite de funções vetoriais, já que as componentes destes vetores são números reais. Pode-se então afirmar, a partir desta definição, que uma função vetorial será contínua, diferenciável ou integrável se, e só se, cada uma de suas componentes o forem.

Se g é diferenciável em I define-se a derivada de g, denotada por g', pela expressão:

$$g'(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t)).$$

Da mesma forma dados a, $b \in I$, se g é contínua em I a integral de a até b da função g, denotada por $\displaystyle\int_a^b g(s)ds$, é dada por:

$$\int_a^b g(s)ds = \left(\int_a^b g_1(s)ds, \int_a^b g_2(s)ds, \ldots, \int_a^b g_n(s)ds\right).$$

Assim como para o limite das funções vetoriais, as propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade para números reais podem ser assumidas também para as funções vetoriais. Portanto, é possível estabelecer a seguinte desigualdade:

Teorema 1.1. *Seja* $g(t)$ *uma função vetorial contínua em um intervalo* I. *Então, para qualquer subintervalo* $[a, b] \subset I$ *tem-se:*

$$\left|\int_a^b g(s)ds\right| \leq \int_a^b |g(s)|ds \tag{1.1}$$

para $a < b$.

Demonstração. Para provar o teorema, basta observar que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(s)ds\right| &= \left|\int_a^b g_1(s)ds\right| + \left|\int_a^b g_2(s)ds\right| + \cdots + \left|\int_a^b g_n(s)ds\right| \leq \\ &\leq \int_a^b |g_1(s)|ds + \int_a^b |g_2(s)|ds + \cdots + \int_a^b |g_n(s)|ds = \\ &= \int_a^b \Big(|g_1(s)| + |g_2(s) + \ldots + |g_n(s)|\Big)ds = \int_a^b |g(s)|ds.\end{aligned}$$

□

Considere agora matrizes quadradas de ordem n. Define-se a norma de uma matriz A, que será denotada por $|A|$, pelo somatório:

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

ou seja, $|A|$ é a soma dos valores absolutos de todos os elementos da matriz A. Note que se A é uma matriz de ordem $1 \times n$, a expressão acima se reduz à norma de um vetor. É possível estabelecer e verificar algumas propriedades para a norma de matrizes que serão utilizadas durante o desenvolvimento do trabalho.

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem $n \times n$ e b uma matriz de ordem $n \times 1$. Então,

1. **P1:** $|A + B| \leq |A| + |B|$

   Demonstração. Usando a notação $A = (a_{ij})_{n\times n},\ B = (b_{ij})_{n\times n}$, observe que $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, logo
   $$|A + B| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}|.$$
   Note que, em cada parcela da soma, $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$, pela desigualdade triangular. Portanto,
   $$|A + B| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| = |A| + |B|.$$

   □

2. **P2:** $|AB| \leq |A| \cdot |B|$

   Demonstração. Seja $A \cdot B = (c_{ij})_{n\times n}$ onde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$, logo,

   $$|A \cdot B| = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} |(\sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj})| \leq$$
   $$\leq \sum_{t=1}^{n} |a_{1t} \cdot b_{t1}| + \sum_{t=1}^{n} |a_{2t} \cdot b_{t2}| + \cdots + \sum_{t=1}^{n} |a_{nt} \cdot b_{tn}| =$$
   $$= (|b_{11}| + |b_{12}| + \cdots + |b_{1n}|) \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}| + \cdots + (|b_{n1}| + \cdots + |b_{nn}|) \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|.$$

   Mas, $|A|\cdot|B| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})\right| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|\right) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \cdot |b_{11}| + \cdots + \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \cdot |b_{nn}|.$

   Consequentemente, obtém-se a desigualdade **P2**. □

3. **P3:** $|Ab| \leq |A| \cdot |b|$

   Demonstração. **P3** é consequência de **P2**, pois considera-se o vetor b como uma matriz de ordem $n \times 1$. Seja então $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tem-se que

$$A \cdot b = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + \cdots + a_{1n} \cdot b_n \\ a_{21} \cdot b_1 + \cdots + a_{2n} \cdot b_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot b_1 + \cdots + a_{nn} \cdot b_n \end{pmatrix}.$$

   Logo,

$$|A \cdot b| = |a_{11} \cdot b_1 + \cdots + a_{1n} \cdot b_n| + |a_{21} \cdot b_1 + \cdots + a_{2n} \cdot b_n| + \cdots + |a_{n1} \cdot b_1 + \cdots + a_{nn} \cdot b_n| \leq$$

$$\leq |a_{11} \cdot b_1| + \cdots + |a_{1n} \cdot b_n| + |a_{21} \cdot b_1| + \cdots + |a_{2n} \cdot b_n| + \cdots + |a_{n1} \cdot b_1| + \cdots + |a_{nn} \cdot b_n| =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |b_j|.$$

   Como,

$$|A| \cdot |b| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_j| \right) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |b_1| + \cdots + \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |b_n| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |b_j|$$

   segue que a desigualdade **P3** é verdadeira. □

Define-se uma função matricial como uma aplicação

$$A : I \to E$$

$$t \longmapsto A(t)$$

que associa a cada número real t de um intervalo I da reta, uma única matriz $A(t)_{n \times n} \in E \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Assim como para as funções vetoriais, a definição de limite de funções matriciais segue da definição de limite de sequências de matrizes.

Definição 1.3. *Seja $\{A^k\}$ uma sequência de matrizes. Dizemos que $\{A^k\}$ converge para uma matriz A se, e somente se, a sequência de números $\{|A^k - A|\}$ converge para zero.*

Em outras palavras, $\{A^k\}$ converge para A se cada sequência $\{(a_{ij})^k\}$ da i-ésima linha e j-ésima coluna das matrizes $\{A^k\}$, converge para os elementos a_{ij} da matriz A, quando $k \to \infty$.

Segue da definição de convergência de sequência de matrizes, que uma função matricial é contínua, derivável ou integrável, em um intervalo I se, e somente se, cada $a_{ij}(t)$ é contínua, derivável ou integrável em I, respectivamente.

Usando as propriedades de norma de matrizes e integral de números reais é possível provar a seguinte desigualdade:

Teorema 1.2. *Seja $A(t)$ uma função matricial e $b(t)$ uma função vetorial, ambas contínuas no intervalo $[c, d]$. Então,*

$$\left| \int_c^d A(t) \cdot b(t) dt \right| \leq \int_c^d |A(t)| \cdot |b(t)| dt \tag{1.2}$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_c^d A(t) \cdot b(t) dt \right| = \\
&= \left| \int_c^d (a_{11}(t) \cdot b_1(t) + \cdots + a_{1n}(t) \cdot b_n(t) + \cdots + a_{n1}(t) \cdot b_1(t) + \cdots + a_{nn}(t) \cdot b_n)(t) dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_c^d (a_{11}(t) \cdot b_1(t)) dt \right| + \cdots + \left| \int_c^d (a_{1n}(t) \cdot b_n(t)) dt \right| + \cdots + \left| \int_c^d (a_{nn}(t) \cdot b_n(t)) dt \right| = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left| \int_c^d (a_{ij}(t) \cdot b_i(t)) dt \right|.
\end{aligned}$$

Observe que cada parcela da soma acima é o módulo de uma integral de funções de números reais e portanto, tem-se que: $\left| \int_c^d (a_{ij}(t) \cdot b_i(t)) dt \right| \leq \int_c^d |a_{ij}(t) \cdot b_i(t)| dt$. Logo,

$$\left| \int_c^d A(t) \cdot b(t) dt \right| \leq \int_c^d |A(t) \cdot b(t)| dt.$$

□

Dentre os temas envolvendo matrizes, destaca-se a **forma canônica de Jordan**, através da qual dada uma matriz A, é possível determinar uma outra matriz J formada por blocos, que seja semelhante à matriz A, contendo o maior número de zeros possível. Essa técnica é importante na descrição de solução de certos sistemas de equações diferenciais ordinárias. A definição da Forma Canônica de Jordan exige algumas definições, que seguem.

Definição 1.4. *Seja A uma matriz sobre um corpo F. Um polinômio $p(A)$ de grau n, cujo coeficiente dominante a_n é igual a 1, diz-se que p é um* ***polinômio unitário****.*

Definição 1.5. *Um polinômio unitário $p(A)$ é dito* ***polinômio minimal*** *da matriz A se p é o polinômio de menor grau tal que $p(A) = 0$.*

Definição 1.6. *Seja $r > 0$ um inteiro tal que $A^r = 0$, então diz-se que A é uma* ***matriz nilpotente*** *e o menor valor de r tal que $A^r = 0$ é chamado* ***índice de nilpotência*** *de A.*

Teorema 1.3. *Seja A uma matriz com autovalores reais λ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ e autovalores complexos $\lambda_j = a_j + ib_j$ e $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = k+1, \ldots, n$. Então existe uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_n, u_n\}$ de autovetores de A, para $\mathbb{R}^{2n-k}$, onde v_j, $j = 1, \ldots k$ e w_j, $j = 1, \cdots, k+1, \cdots, n$ são autovetores generalizados de A, $u_j = Re(w_j)$ e $v_j = Im(w_j)$ para $j = k+1, \ldots, n$, tais que a matriz*

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_k & v_{k+1} & u_{k+1} & \ldots & v_n & u_n \end{bmatrix}$$

é inversível e

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

onde B_j, $j = 1, \ldots, r$, chamados de blocos de Jordan, são da forma

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

para cada autovalor real λ de A ou, da forma

$$B_j = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & & D & I_2 \\ 0 & \ldots & & 0 & D \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

com $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para cada autovalor complexo $\lambda = a + ib$ de A.

A forma canônica de Jordan de uma dada matriz A é única, exceto pela ordem dos blocos de Jordan em (1.3) e pelo fato de que tanto na matriz (1.4) como nas matrizes I_2 em (1.5), os números 1's podem aparecer tanto acima quanto abaixo da diagonal principal, de acordo com a ordem dos elementos da base. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1].

1.2 A exponencial matricial

Outro tema importante na discussão de sistemas de equações diferenciais ordinárias é a construção da função e^{At}, onde A é uma matriz de ordem $n \times n$. Para motivar a

definição, note que a função exponencial real pode ser escrita, através do polinômio de Taylor, pela série:

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots$$

É natural usar esta expressão para definir e^A, onde A é uma matriz quadrada de ordem n, ou seja,

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

Porém, para garantir essa igualdade é preciso mostrar que essa série é convergente no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ das matrizes $n \times n$ (ou dos operadores lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$). Para isso, note que:

$$\left| \frac{A^n}{n!} + \ldots + \frac{A^{n+p}}{(n+p)!} \right| \leq \frac{|A|^n}{n!} + \ldots + \frac{|A|^{n+p}}{(n+p)!}. \tag{1.7}$$

Fazendo $a = |A|$, sabe-se que a série $\sum \frac{a^n}{n!}$ é convergente e, portanto satisfaz o critério de Cauchy, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left| \sum_{j=p}^{n+p} \frac{a^j}{j!} \right| < \varepsilon,$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$. Por (1.7) segue que a série e^A é uma série de Cauchy no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e, consequentemente, é convergente. Utilizando (1.6) mostra-se que $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

Para facilitar o processo de expressar de e^A, é preciso verificar algumas propriedades:

Proposição 1.1. *Se uma matriz M é inversível, então:*

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1} e^A M,$$

para todo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Por definição,

$$e^{M^{-1}AM} = I + (M^{-1}AM) + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + \frac{(M^{-1}AM)^3}{3!} + \ldots + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + \ldots.$$

Mas, $(M^{-1}AM)^n = M^{-1}A^nM$, para todo n. Então:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{M^{-1}A^2M}{2!} + \frac{M^{-1}A^3M}{3!} + \ldots \frac{M^{-1}A^nM}{n!} + \ldots \\ &= M^{-1} \cdot (I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots) \cdot M = M^{-1} \cdot e^A \cdot M \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2. *$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ se, e somente se, A comuta com B, ou seja, $AB = BA$.*

Demonstração. Se $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$, derivando ambos os lados da igualdade com respeito a t, obtém-se:

$$(A+B) \cdot e^{(A+B)t} = A \cdot e^{At} \cdot e^{Bt} + e^{At} \cdot B \cdot e^{Bt}.$$

Calculando a derivada de segunda ordem, tem-se:

$$(A+B)^2 \cdot e^{(A+B)t} = A^2 \cdot e^{At} \cdot e^{Bt} + A \cdot e^{At} \cdot B \cdot e^{Bt} + A \cdot e^{At} \cdot B \cdot e^{Bt} + e^{At} \cdot B^2 \cdot e^{Bt}.$$

Tomando $t = 0$, segue por um lado que

$$(A+B)^2 \cdot e^{(A+B)0} = (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

e, por outro lado,

$$A^2 \cdot e^{A0} \cdot e^{B0} + A \cdot e^{A0} \cdot B \cdot e^{B0} + A \cdot e^{A0} \cdot B \cdot e^{B0} + e^{A0} \cdot B^2 \cdot e^{B0} = A^2 + AB + AB + B^2.$$

Então,

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2. \text{ Portanto } BA = 2AB - AB,$$

ou seja, $AB = BA$.

Se A comuta com B, tem-se que $e^{At}e^{Bt}$ é solução do P.V.I $\begin{cases} X'(t) = (A+B) \cdot X(t) \\ X(0) = I \end{cases}$.

De fato, se $X(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$, então,

$$\begin{aligned} X'(t) &= A \cdot e^{At} \cdot e^{Bt} + e^{At} \cdot B \cdot e^{Bt} \\ &= (A+B) \cdot e^{At} \cdot e^{Bt} = (A+B) \cdot X(t) \end{aligned}$$

e

$$X(0) = e^{A \cdot 0} \cdot e^{B \cdot 0} = I.$$

Logo, $e^{(A+B)t}$ e $e^{At} \cdot e^{Bt}$ são soluções do mesmo P.V.I.. Pelo teorema de existencia e unicidade, que será demonstrado no próximo capítulo, tem-se a igualdade. □

Considere uma matriz de mudança de base M tal que $M^{-1}AM$ está na forma de Jordan, então:
$M^{-1}AM = \text{diag}\,[A_1, \ldots, A_l]$, $A_i = \lambda_i + R_i$, onde

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

onde k é o índice da nilpotência da matriz A. Como $M^{-1} \cdot e^{At} \cdot M = e^{(M^{-1}AM)t}$, tem-se $e^{At} = M \cdot e^{(M^{-1}AM)t} \cdot M^{-1}$.

Agora, $e^{M^{-1}AMt}$ é uma matriz diagonal de blocos do tipo $e^{(\lambda I+Rt)}$, onde:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k\times k},$$

com R nilpotente. Já que λI comuta com R, obtém-se:

$$e^{(\lambda I+R)t} = e^{(\lambda I)t}\cdot e^{Rt} = e^{\lambda t}\cdot e^{Rt} =$$
$$= e^{\lambda t}\cdot\left(I + Rt + \frac{R^2t^2}{2!} + \frac{R^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{R^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right) =$$
$$= e^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}_{k\times k}.$$

Já que $e^{\lambda t}$ está multiplicando a matriz, segue que:

- Os autovetores da exponencial e^{At} são todos do tipo $e^{\lambda t}$, onde λ é um autovalor da matriz A.
- Os elementos de e^{At} são combinações lineares dos termos do tipo $t^j\cdot e^{\lambda t}$, com j limitado pelo índice de nilpotência, no caso acima, $j \leq k$. Logo os elementos de e^{At} são do tipo $p(t)\cdot e^{\lambda t}$, onde $p(t)$ é um polinômio em t.

1.2.1 A Desigualdade de Gronwall

A Desigualdade de Gronwall é uma ferramenta útil na demonstração de alguns resultados de Equações Diferenciais Ordinárias.

Teorema 1.4. *(**Desigualdade de Gronwall**) Seja K uma constante não negativa e sejam f e g funções contínuas não negativas em algum intervalo $[\alpha,\beta]$ satisfazendo a desigualdade:*

$$f(t) \leq K + \int_\alpha^t f(s)g(s)ds,$$

para $\alpha \leq t \leq \beta$. Então,

$$f(t) \leq K\cdot e^{\int_\alpha^t g(s)ds},\ \alpha \leq t \leq \beta. \tag{1.8}$$

Demonstração. Defina $U(t) = K + \int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds$. Então $U(\alpha) = K + \int_{\alpha}^{\alpha} f(s)g(s)ds = K$ e $f(t) \leq U(t)$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Já que f e g são não negativas, segue do teorema fundamental do cálculo e do fato de $g(t) \geq 0$ que,

$$U'(t) = f(t)g(t) \leq U(t)g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $e^{-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds}$ tem-se que:

$$0 \geq U'(t) \cdot e^{-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds} - U(t)g(t) \cdot e^{-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds} = [U(t) \cdot e^{-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds}]',$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}[U(t) \cdot e^{-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds}] \leq 0.$$

Integrando a desigualdade acima de α a t, obtém-se:

$$U(t) \cdot e^{-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds} - U(\alpha) \leq 0 \Rightarrow U(t) \leq K \cdot e^{\int_{\alpha}^{t} g(s)ds},$$

uma vez que $f(t) \leq U(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, segue a desigualdade (1.8). □

Exemplo 1.1. Sejam K_1 e K_2 constantes não negativas e seja $f(t)$ uma função contínua não negativa num intervalo $[\alpha, \beta]$ satisfazendo:

$$f(t) \leq K_1 + K_2 \int_{\alpha}^{t} f(s)ds.$$

Para mostrar que, $f(t) \leq K_1 \cdot e^{[K_2(t-\alpha)]}$, considere $g(t) = K_2$ uma função contínua, constante e não negativa para qualquer $t \in [\alpha, \beta]$. Portanto, segue do teorema 1.4 que

$$f(t) \leq K_1 \cdot e^{\int_{\alpha}^{t} K_2 ds} = K_1 \cdot e^{[K_2(t-\alpha)]}.$$

Definição 1.7. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diz-se que $f(t, y)$ é **lipschitziana**, relativamente a y, em $B \subset D$, se existir uma constante real $L > 0$ tal que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|,$$

para quaisquer $(t, y_1), (t, y_2) \in B$.

Uma função $f(t, y)$ é localmente lipschitziana relativamente a y quando para cada $(t_0, y_0) \in D$ existe uma vizinhança contendo (t_0, y_0) na qual $f(t, y)$ é lipschitziana.

Se $A(t)$ é uma função limitada em I, isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $|A(t)| \leq M$, para todo $t \in I$ então, f é lipschitziana.

Exemplo 1.2. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(t, y) = A(t) \cdot y + b(t)$, onde $A(t)$ é uma matriz de ordem n cujas entradas são funções $a_{ij}(t)$ reais e $b(t)$ é uma função vetorial com entradas reais $b_i(t)$. Considere que cada função $a_{ij}(t)$ e $b_i(t)$ é uma função contínua em um intervalo $I \in \mathbb{R}$. Então, para cada $y_1, y_2 \in D$ tem-se:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |(A(t)y_1 + b(t)) - (A(t)y_2 + b(t))| = |A(t)y_1 - A(t)y_2|.$$

Mas, por definição, $|A(t)| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$. Então:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \right) \cdot |y_1 - y_2|.$$

Note que, cada $a_{ij}(t)$ é uma função contínua em I. Sendo assim, para algum subintervalo de I, tem-se que $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$ é limitado. Portanto, f é uma função localmente lipschitziana.

2 Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Este capítulo apresenta alguns dos resultados básicos da teoria de sistemas de equações diferenciais ordinárias e um estudo sobre o sistema linear

$$y' = Ay.$$

Será provado que a solução deste sistema com condição inicial $y(0) = y_0$ é dada por $y(t) = e^{At}y_0$. Por fim, serão analisados os sistemas lineares em $\mathbb{R}^2$.

2.1 Equações diferenciais ordinárias

Definição 2.1. *Uma* ***equação diferencial linear ordinária de primeira ordem*** *é representada por:*

$$y' = f(t)y + b(t), \tag{2.1}$$

onde $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *e* $b : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *são funções contínuas definidas em um intervalo* (a, b).

Uma função $y : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (2.1) se ela for diferenciável e satisfizer à equação (2.1). Se $b(t) = 0$, para todo $t \in (a, b)$, então a equação correspondente $y' = f(t)y$ é chamada **equação linear homogênea de primeira ordem**.

Uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é dada por

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Sejam* f *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *contínuas no retângulo* $R : \{(t, y); t_0 \leq t \leq t_0 + a,\ |y - y_0| \leq b\}$ *e seja* $M = \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)|$, *considere também* $\alpha = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$.

Então, o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

tem uma única solução $y(t)$ *no intervalo* $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

A demonstração deste teorema, que pode ser encontrada em [2], não será feita neste trabalho, já que na próxima seção será demonstrado um caso geral.

O resultado a seguir mostra que o conjunto solução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é um espaço de dimensão n. Logo, para descrever todas as soluções do sistema (2.2) basta encontrar uma base desse espaço.

Proposição 2.1. *O conjunto das soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem n* (2.2) *forma um espaço vetorial de dimensão n.*

Demonstração. Primeiro é preciso mostrar que o conjunto das soluções de (2.2), denotado por S, é um subespaço do espaço das funções $f \in C[(a,b),\mathbb{R}]$.

Observe que $y \in S$ se, e somente se, y tem derivada até ordem n e, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, vale (2.2). Então tem-se:

(i) A função $y(t) \equiv 0$ pertence a S pois $y^{(k)}(t) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Tomando $y, z \in S$, então

$$\begin{aligned}(y+z)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y+z)^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)(y+z)'(t) + a_0(t)(y+z)(t) = \\ = (y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y)^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)) + \\ +(z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t)) = 0,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $y + z \in S$.

(iii) Considerando $y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$(\lambda y)^n(t) + a_{n-1}(t)(\lambda y)^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)(\lambda y)'(t) + a_0(t)(\lambda y)(t) =$$

$$= \lambda[(y)^n(t) + a_{n-1}(t)(y)^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)(y)'(t) + a_0(t)(y)(t)] = \lambda 0 = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\lambda y \in S$.

Logo, S é um subespaço do espaço das funções contínuas $C[(a,b),\mathbb{R}]$.

Agora, para mostrar que S tem dimensão n, considere as condições $A_0 = 1, A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0$. Aplicando o teorema 2.1, existe $y_1 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que y_1 é a única solução de (2.10) que verifica as condições $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Além disso, considere $A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = 0$ e aplicando novamente o teorema de existência e unicidade, existe $y_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a única solução de (2.10) que satisfaz $y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1,\ y_2''(0) = \ldots = y_2^{(n-1)}(0) = 0$. Dando continuidade a este processo até o caso $A_0 = A_1 = \ldots = A_{n-2} = 0$ e $A_{n-1} = 1$, existe uma única solução $y_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y_n(0) = y_n'(0) = \ldots = y_n^{(n-2)}(0) = 0$ e $y_n^{(n-1)}(0) = 1$.

O próximo passo é mostrar que o conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset S$ é uma base para o espaço S.

De fato, será provado inicialmente que se $\overline{y} \in S$, $\overline{y}$ é combinação linear das funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, então considerando os n números $y(0),\ y'(0), \ldots,\ y^{(n-1)}(0) \in \mathbb{R}$ e uma solução x de (2.2) dada por

$$x(t) = \overline{y}(0)y_1(t) + \ldots + \overline{y}^{(n-1)}(0)y_n(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x(0) = \overline{y}(0)y_1(0) + \ldots + \overline{y}^{(n-1)}(0)y_n(0) = \overline{y}(0),$$

já que $y_j(0) = 0,$ para $j = 2, \ldots, n$ e $y_1(0) = 1$ e

$$x'(0) = \overline{y}(0)y_1'(0) + \overline{y}'(0)y_2'(0) + \ldots + \overline{y}^{(n-1)}(0)y_n'(0) = \overline{y}'(0).$$

Como $\overline{y}_2'(0) = 1$ e $\overline{y}_j'(0) = 0$ para $j = 1, 3, \ldots, n$, tem-se $x'(0) = \overline{y}'(0)$ e assim sucessivamente, verifica-se $x^{(k)}(0) = \overline{y}^{(k)}(0)$ para $k = 1, \ldots, n-1$. Logo x e $\overline{y}$ são soluções de (2.2) e satisfazem as mesmas condições iniciais. Segue do teorema 2.1, que x e $\overline{y}$ são iguais e, consequentemente, $\overline{y}$ é combinação linear de $y_1, \ldots, y_n$. Portanto $S = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$. É preciso mostrar agora que o conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ é LI. Para isso, sejam $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ escalares tais que $\beta_1 y_1(t) + \beta_2 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_n(t) = 0$. Derivando essa equação n vezes, obtém-se:

$$\begin{cases} \beta_1 y_1(t) + \beta_2 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_n(t) = 0 \\ \beta_1 y_1'(t) + \beta_2 y_2'(t) + \ldots + \beta_n y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 y_1^{(n-1)}(t) + \beta_2 y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}.$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular para $t = 0$, vale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ e portanto o conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$é L.I. □

Exemplo 2.1. (Equação Logística) A equação diferencial ordinária abaixo é utilizada para descrever a dinâmica populacional de uma certa espécie:

$$y' = r(1 - \frac{y}{K})y, \tag{2.3}$$

onde K é o *nível de saturação*, ou *capacidade ambiental de sustentação* e é dado por $K = \frac{r}{a}$, para o qual r é uma constante que representa a *taxa de crescimento intrínseco*, que é a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limite, e a é uma constante positiva. Integrando a equação (2.3), tem-se:

$$\int \frac{dy}{y(1-y/K)} = \int r dt.$$

Aplicando a expansão por frações parciais obtém-se:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1-y/K}\right) dy = \int r dt$$

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c$$

$$\frac{y}{1-y/K} = e^{rt}e^{c}$$

$$\frac{y}{1-y/K} = Ce^{rt}.$$

Neste caso, para satisfazer a condição inicial é preciso escolher $C = \frac{y_0}{1-y_0/K}$, portanto a solução do sistema (2.3), com condição inicial $y(t_0) = y_0$ é dada por:

$$y = \frac{y_0 K}{(1-y_0/K)e^{-rt} + y_0}. \tag{2.4}$$

Os pontos de equilíbrio, ou seja, os valores de y para os quais a derivada de y é zero, que correspondem às soluções constantes da equação diferencial, são $y_1 = 0$ e $y_2 = K$. Para $y > 0$, essa equação é um modelo de crescimento populacional. Quando y varia entre 0 e K, as populações iniciais crescem de 0 até K, quando $t \longrightarrow \infty$ e se as populações iniciais são maiores do que $y = K$, as mesmas decrescem a K, quando $t \longrightarrow \infty$. Algumas situações, dependendo da condição inicial $y(0)$, da solução de (2.4) estão representadas na figura 2.1.

Suponha que a equação logística, onde os parâmetros r e a são ambos iguais a 1 (o que implica $K = 1$), descreve uma população de uma certa espécie de peixe na qual se introduz uma pesca com cotas, ou seja, subtrai-se dessa população uma constante do volume por unidade de tempo. Chame essa constante de k, então tem-se a seguinte equação:

$$y' = y(1-y) - k. \tag{2.5}$$

Então, a solução é dada por $y = (1-y)Ce^{-kt}$, acrescentando a condição inicial $y(t_0) = y_0$ e considerando $C = \frac{y_0}{1-y_0}$, que satisfaz à condição inicial, tem-se a solução do PVI dada por:

$$y = \frac{y_0}{(1-y_0)e^{kt} + y_0}. \tag{2.6}$$

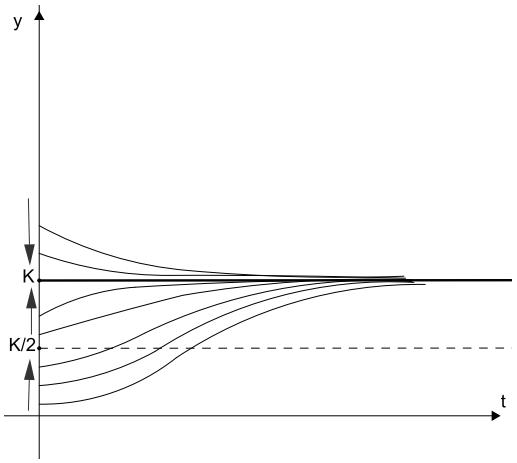

Figura 2.1: Representação gráfica de (2.4).

Os pontos de equilíbrio são:

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{1-4k}}{2} \text{ e } y_2 = \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}.$$

Tem-se as seguintes situações possíveis:

(a) Se $k < \frac{1}{4}$ então $0 < y_1 < y_2$ (pesca moderada)

  (i) se a população inicial for maior do que y_2, ela decrescerá até y_2, mas sobreviverá;

  (ii) se a população inicial for maior do que y_1 e menor do que y_2, ela crescerá até y_2;

  (iii) se a população for menor do que y_1 será extinta.

(b) Se $k = \frac{1}{4}$ então $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$. Neste caso, a pesca apresenta um certo risco e ocorrem as seguintes possibilidades:

  (i) se a população inicial for maior do que $\frac{1}{2}$, ela tenderá a $\frac{1}{2}$, mas sobreviverá;

  (ii) se a população inicial for menor do que $\frac{1}{2}$, será extinta.

2.2 Sistemas de equações diferenciais

Esta seção traz as definições básicas de sistemas de equações diferenciais ordinárias, solução e um exemplo de um sistema 2×2 de primeira ordem.

Definição 2.2. *Um* ***sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem*** *é um sistema da forma:*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são n funções dadas em um espaço euclidiano D, $n+1$-dimensional, e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são as n funções incógnitas.

Resolver o sistema (2.7) consiste em encontrar um intervalo I e n funções $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ definidas em I tais que:

1. $\phi_1'(t), \phi_2'(t), \ldots, \phi_n'(t)$ existem para cada t em I;
2. $(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)) \in D$ para cada $t \in I$;
3. $\phi_j'(t) = f_j(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$ para cada $t \in I$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

A solução de (2.7) pode ser visualizada como uma curva na região D, na qual cada ponto p é dado pelas coordenadas $(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ e $\phi'(t)$ é a componente do vetor tangente à curva na direção y_i.

Um sistema de equações lineares não homogêneo pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

ou ainda,

$$y' = A(t)y + b(t). \tag{2.9}$$

onde $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$.

O caso homogêneo é dado por

$$y' = A(t)y \tag{2.10}$$

fazendo $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ em (2.8).

Definição 2.3. *Um* ***problema de valor inicial****(PVI) associado ao sistema* (2.7) *consiste da equação* (2.7) *e de uma condição inicial* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *dada no instante inicial* t_0*, indicada por* $y(t_0) = \eta$*.*

Resolver um problema de valor inicial consiste em encontrar uma solução passando pelo ponto $P_0 = (t_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in D$.

É fácil constatar que toda equação diferencial de ordem $n \geq 2$ pode ser escrita na forma (2.8), como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2. Considere a equação diferencial de segunda ordem: $x'' = a_1 \cdot x' + a_2 \cdot x + b(t)$. Fazendo $y_1 = x$ e $y_2 = x'$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} y_1' = x' \\ y_2' = x'' \end{cases} \sim \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = x'' = \quad a_1 \cdot y_2 + a_2 \cdot y_1 + b(t) \end{cases}.$$

Para $n > 2$ o procedimento é análogo, ou seja, dada a equação diferencial de ordem n:

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b(t),$$

denote $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $\ldots$, $y_n = x^{(n-1)}$ para obter o sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = x^{n-1} \\ y_n' = x^{(n)} \end{cases} \sim \begin{cases} y_1' = x' = y_2 \\ y_2' = x'' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = x^{(n-1)} = y_n \\ y_n = x^{(n)} = -a_{n-1} \cdot y_n - \cdots - a_1 \cdot y_2 - a_0 \cdot y_1 + b(t) \end{cases}.$$

O sistema acima pode ser reescrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.3. A equação que descreve o movimento de um pêndulo simples de comprimento sem atrito e sem termo forçante, é um exemplo de equação diferencial não linear de segunda ordem. O ângulo θ que um pêndulo de comprimento l, oscilando, faz com a posição vertical é dado por:

$$\theta'' + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Esta equação pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem no plano. De fato, definindo $x = \theta$, $y = \theta'$, $k = \dfrac{g}{l}$, segue:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -k \operatorname{sen} x. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Note que os pontos de equilíbrio do sistema (2.11) são $(n\pi, 0)$, $n = 1, 2, \cdots$.

Um outro exemplo de sistema de equações não lineares é o *Modelo de Lotka-Volterra*, descrito no exemplo abaixo:

Exemplo 2.4. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = ax - cxy \\ y' = -bx + exy \end{cases}, \tag{2.12}$$

onde a, b, c e e são constantes positivas.

O sistema (2.12) descreve a dinâmica de duas espécies de peixes de um lago; uma delas é a presa, denotada por x, que é herbívora. A outra é a predadora, denotada por y, que se alimenta da primeira espécie. Supondo que a quantidade de alimento das presas é suficientemente grande, de modo que possa ser inesgotável, tem-se que, na ausência de predadores, a população de presas tende a aumentar: seja ax essa taxa de aumento. Quando ocorre o encontro das presas com os predadores e esse número de encontros é proporcional à xy, ocorre o decréscimo da população de presas. Da mesma forma, se houver ausência de presas, a população de predadores sofre um decréscimo a uma taxa by. A população de predadores sofre acréscimo, sempre que ocorre o encontro com a população de presas, e o número de encontros é proporcional ao produto xy.

Os pontos de equilíbrio desse sistema são dados por

$$ax - cxy = 0 \text{ e } -by + exy = 0,$$

ou seja, $(0, 0)$ e $(\dfrac{b}{e}, \dfrac{a}{c})$ são os pontos de equilíbrio do sistema (2.12).

2.3 Teoremas de Existência e Unicidade

Nesta seção será demonstrado o teorema de existência e unicidade para o sistema

$$y' = A(t)y + b(t),$$

e também para o caso geral $y' = f(t, y)$.

Teorema 2.2. *Suponha $A(t)$ e $b(t)$ como em (2.15) funções Riemann integráveis em t em um intervalo (a, b), isto é, as integrais de Riemann existem em algum intervalo $[c, d] \subset (a, b)$, para cada a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ em $A(t)$ e cada b_j, $j = 1, \ldots, n$ em $b(t)$, e suponha também que existe uma função $k(t)$ com domínio (a, b), tal que:*

1. $k(t)$ *é contínua em* (a,b) *e existe* $M>0$ *tal que* $|k(t)|\leq M$;

2. $|A(t)|\leq k(t)$ *e* $|b(t)|\leq k(t),\ a<t<b$.

Considere $t_0\in(a,b)$ *e* y^0 *um vetor dado. Então a equação* (2.8) *tem uma única solução* $y(t)$ *em* (a,b) *tal que* $y(t_0)=y^0$ *e* $y(t)$ *satisfaz, para todo* $t\in(a,b)$*, a igualdade:*

$$y(t)=y^0+\int_{t_0}^{t}A(s)\cdot y(s)ds+\int_{t_0}^{t}b(s)ds. \tag{2.13}$$

Demonstração. A ideia da prova se baseia na construção de uma sequência de funções que convergirá para a solução procurada. Para $t\in(a,b)$ defina:

$y_0(t)=y^0$

$y_1(t)=y^0+\int_{t_0}^{t}A(s)\cdot y_0(s)ds+\int_{t_0}^{t}b(s)ds$

$\vdots$

$y_n(t)=y^0+\int_{t_0}^{t}A(s)\cdot y_{n-1}(s)ds+\int_{t_0}^{t}b(s)ds$

$y_{n+1}(t)=y^0+\int_{t_0}^{t}A(s)\cdot y_n(s)ds+\int_{t_0}^{t}b(s)ds$ com $n=1,2,\ldots$.

É preciso garantir a convergência de $\{y_n(t)\}$, quando $n\longrightarrow\infty$. Para isso, considere:

$$\begin{aligned}|y_n(t)-y_0(t)| &= |y_1(t)-y_0(t)+y_2(y)-y_1(t)+\cdots+y_n(t)-y_{n-1}(t)|\leq\\ &\leq |y_1(t)-y_0(t)|+\cdots+|y_n(t)-y_{n-1}(t)|=\sum_{j=1}^{n}|y_{j+1}(t)-y_j(t)|.\end{aligned}$$

Quando $n\longrightarrow\infty$, tem-se a série $\sum_{j=1}^{\infty}|y_{j+1}(t)-y_j(t)|$. Para garantir a convergência de $(y_n(t))$, basta mostrar que essa série converge. Note que $y_n(t)$ é uma função contínua em (a,b) já que é definida pela soma de funções contínuas, então $A(s)\cdot y_n(s)$ é integrável em qualquer intervalo $[c,d]\subset(a,b)$ e daí tem-se que $y_{n+1}(t)$ é contínua em (a,b).

Considere $t\in(a,b)$;

$$\begin{aligned}|y_1(t)-y_0(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}|A(s)|\cdot|y_0(s)|+|b(s)|ds\leq\\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t}(k(s)|y_0(s)|+k(s))ds\right|\leq(1+|y^0|)\cdot\int_{t_0}^{t}|k(s)|ds.\end{aligned}$$

Seja $K(t)=\int_{t_0}^{t}|k(s)|ds$, então $K(t_0)=0$ e $|K(t)|\leq M\cdot(t-t_0)$. Segue que

$$|y_1(t)-y_0(t)|\leq(1+|y^0|)\cdot K(t).$$

Para $n = 2$ tem-se:

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |A(s)| \cdot |y_1(s) - y_0(s)|ds \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)|(1 + |y^0|) \cdot K(s)ds \leq$$
$$\leq (1 + |y^0|) \cdot \int_{t_0}^{t} k(s) \cdot K(s)ds.$$

Observe que integrando por partes, considerando $u = K(t) = \int_{t_0}^{t} k(s)ds$ e $dv = k(s)ds$ então $du = k(s)$ e $v = \int_{t_0}^{t} k(s)ds$, portanto:

$$\int_{t_0}^{t} k(s) \cdot K(s)ds = (K(s))^2 \mid_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} k(s) \cdot K(s)ds \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot \int_{t_0}^{t} k(s) \cdot K(s)ds = (K(t))^2 - (K(t_0))^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} k(s) \cdot K(s)ds = \frac{(K(t))^2}{2!}.$$

Então,

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^2}{2!}.$$

Usando indução para concluir que a desigualdade é válida para um m qualquer, basta supor que vale para $m > 0$, isto é:

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^m}{m!}$$

e mostrar que vale para $m + 1$. De fato,

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |A(s)| \cdot |y_m(s) - y_{m-1}(s)|ds \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} k(s) \cdot (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(s))^m}{m!}ds \leq$$
$$\leq \frac{(1 + |y^0|)}{m!} \int_{t_0}^{t} k(s) \cdot (K(s))^m ds.$$

Integrando por partes obtém-se o seguinte resultado:

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq \frac{(1 + |y^0|)}{m!} \cdot \frac{(K(t))^{m+1}}{m+1} \leq (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Note que a série $\sum_{j=1}^{\infty} (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^{j+1}}{(j+1)!}$ converge uniformemente em cada intervalo fechado $[c, d] \subset (a, b)$, pois $|K(t)| \leq M|t - t_0|$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}$ converge uniformemente

para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue que $\{y_m(t)\}$ converge uniformemente para uma função contínua $y(t)$ em cada compacto $[c,d] \subset (a,b)$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n > n_0$, $|y_n(t) - y(t)| < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$, para todo $t \in [c,d] \subset (a,b)$.

Agora é preciso mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} A(s) \cdot y_n(s) ds = \int_{t_0}^{t} A(s) \cdot y(s) ds. \tag{2.14}$$

Como $y(s)$ é contínua, $\displaystyle\int_{t_0}^{t} A(s) \cdot y(s) ds$ existe para todo t em um intervalo fechado $[c,d] \subset (a,b)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, e para $n \geq n_0$ tem-se

$$\left| \int_{t_0}^{t} A(s) \cdot (y_n(s) - y(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |A(s)| \cdot |y_n(s) - y(s)| ds \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)} \cdot \int_{t_0}^{t} |A(s)| ds \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)} \cdot \int_{a}^{b} |A(s)| ds \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot M(b-a) = \varepsilon$$

segue então (2.14).

Falta agora provar que $y(t)$ é a única solução em qualquer intervalo fechado $[c,d] \subset (a,b)$. Para isso, suponha que existe $x(t)$ solução de (2.8) que satisfaz a condição inicial $x(t_0) = y^0$. Então,

$$|y(t) - x(t)| = \left| \left(y^0 + \int_{t_0}^{t} A(s) \cdot y(s) ds \right) - \left(y^0 + \int_{t_0}^{t} A(s) \cdot x(s) ds \right) \right| \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)||y(s) - x(s)| ds.$$

Note que $|A(t)| \leq M$, para todo t, então:

$$|y(t) - x(t)| \leq \int_{t_0}^{t} M \cdot |y(s) - x(s)| ds.$$

Segue da desigualdade de Gronwall, com $K = 0$, $g(s) = M$, e $f(s) = |y(s) - x(s)|$, que $|y(t) - x(t)| = 0$ e portanto, $y(t) = x(t)$. □

Para o caso mais geral $y' = f(t,y)$, com $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em D e lipschitziana com respeito a y pode-se garantir existência e unicidade da solução do P.V.I. associado à equação diferencial, como mostra o resultado do teorema 2.3. Porém, antes de demonstrar o teorema são necessários alguns resultados sobre espaços métricos completos, que são espaços métricos nos quais as sequências de Cauchy são convergentes.

Definição 2.4. *Seja (X,d) um espaço métrico completo e $F : X \longrightarrow X$ uma transformação. Diz-se que p é um ponto fixo de F se $F(p) = p$.*

Definição 2.5. *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Se $F : X \longrightarrow X$ é uma transformação tal que $d(F(x),F(y)) \leq Kd(x,y)$, com $0 \leq K < 1$, então diz-se que F é uma **contração** em X.*

A constante K é chamada de *constante de contração* de F.

Lema 2.1. *(Lema de Contração) Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $F : X \longrightarrow X$ é uma contração em X, então F tem um único ponto fixo p em X.*

Corolário 2.1. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \longrightarrow X$ é contínua e para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto p tal que $F(p) = p$.*

As demonstrações do lema 2.1 e do corolário 2.1 podem ser encontradas em [3].

Teorema 2.3. *(Teorema de Picard) Seja f uma função contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{y; |y - y_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω então existe uma única solução de*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2.15}$$

em I_α, onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demonstração. Seja $X = C(I_\alpha, B_\beta)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \longrightarrow B_\beta$ com a métrica

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Considere

$$F : C(I_\alpha, B_\beta) \longrightarrow \mathcal{F}(I_\alpha, \mathbb{R}^n)$$

$$\varphi \longmapsto F(\varphi)$$

onde $F(\varphi) : I_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \tag{2.16}$$

$t \in I_\alpha$. Note que F é dotada das seguintes propriedades:

(p_1) $F(X) \subseteq X$;

(p_2) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Para provar (p_1) note que, para todo $t \in I_\alpha$,

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Segue que $F(X) \subseteq X$.

Para provar (p_2), considere agora $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e $n \geq 0$. Então

$$|F^n(\varphi_1(t)) - F^n(\varphi_2(t))| \leq \frac{K^n|t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) \tag{2.17}$$

$t \in I_\alpha$, onde K é uma constante de Lipschitz para f.

Para provar (p_3) basta usar indução finita em n. Considere $n = 1$, então:

$$|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) ds \right| \leq K \int_{t_0}^{t} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \leq$$
$$\leq K d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot |t - t_0|.$$

Suponha que é válido para $n = m$, isto é,

$$|F^m(\varphi_1(t)) - F^m(\varphi_2(t))| \leq \frac{K^m |t - t_0|^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Basta mostrar que vale para $m + 1$:

$$|F^{m+1}(\varphi_1(t)) - F^{m+1}(\varphi_2(t))| = |F(F^m(\varphi_1))(t) - F(F^m(\varphi_2))(t)| \leq$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, F(\varphi_1)(s)) - f(s, F(\varphi_2)(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} K |F^m(\varphi_1)(s) - F^m(\varphi_2)(s)| ds \right| \leq$$
$$\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \frac{K^m (t_0 - s)^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{m+1} |t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Portanto $|F^n(\varphi_1(t)) - F^n(\varphi_2(t))| \leq \dfrac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$ e já que conforme n cresce, $\dfrac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ que é o termo geral da série $\sum e^{k\alpha}$. Logo, F^n é uma contração em X, o que prova a propriedade (p_1). Pelo corolário 2.1 existe um único ponto fixo $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$, o qual corresponde à solução procurada. □

O resultado a seguir é sobre continuação de soluções de equações diferenciais ordinárias, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.4. ***Prolongamento de soluções*** - *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Suponha que $y(t)$, definida em um intervalo I, é uma solução de*

$$y' = f(t, y). \tag{2.18}$$

Então,

(i) Se $y(t)$ é uma solução continuável, então existe uma solução maximal $r(t)$ definida em um intervalo J tal que $r(t)$ é uma continuação de $y(t)$, ou seja, $I \subset J$ e $y(t) = r(t)$, para todo $t \in I$;

(ii) Se $y(t)$, definida em um intervalo (a, b), é uma solução maximal de (2.18), então $y(t)$ tende a fronteira de D quando $t \to b^-$ e $t \to a^+$, isto é, dado um compacto $K \subset D$, existem t_K^1, $t_K^2 \in (a, b)$ tal que $(t, y(t)) \notin K$, para todo $t \in (a, t_K^1) \cup (t_K^2, b)$.

2.4 Sistemas autônomos

No estudo dos sistemas de equações diferenciais tem-se o caso em que a função f não depende explicitamente de t, que será tratado a partir desta seção.

Definição 2.6. *Um **sistema autônomo** é um sistema de equações diferenciais em que a função f não depende explicitamente de t. Representa-se tal sistema pela equação:*

$$y' = f(y), \tag{2.19}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1.

Observe que agora a função f está definida em um subconjunto de um espaço n-dimensional.

Exemplo 2.5. A equação escalar de segunda ordem $y" + y = 0$ pode ser escrita na forma do sistema abaixo:

Considerando $x_1 = y$ e $x_2 = y'$ tem-se que $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

denotando $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ tem-se um sistema autônomo.

Como f e suas funções derivadas são funções contínuas em todo o seu domínio, pelo Teorema 2.2 dado algum (t_0, η), com η no domínio de f, existe uma única solução real ϕ da equação (2.18) satisfazendo a condição inicial $\phi(t_0) = \eta$. Essa solução existe em algum intervalo I e é uma função contínua de (t, t_0, η) com $t, t_0 \in I$ (teorema da dependência contínua com respeito às condições iniciais), ver [4].

Um outro exemplo de sistema autônomo é o sistema linear

$$y' = A \cdot y, \tag{2.20}$$

onde A é uma matriz real de ordem n de coeficientes constantes. Pela proposição 2.1 o conjunto solução de (2.20) é um espaço vetorial de dimensão n.

Lema 2.2. *Se $x(t)$ é uma solução da equação (2.19) no intervalo (a, b) e c uma constante qualquer, então a função $y(t) = x(t + c)$ é solução de (2.19) no intervalo $(a - c, b - c)$.*

Demonstração. De fato: $y'(t) = x'(t + c) = f(x(t + c)) = f(y(t))$. □

Note que a propriedade garantida pelo lema acima não é assegurada para sistemas não autônomos.

Seja A uma matriz real $n \times n$ e $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, então é fácil mostrar que $\bar{y}(t) = e^{At} y_0$ é a única solução de

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.21}$$

De fato, $\bar{y}'(t) = Ae^{At}y_0 = A\bar{y}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}^n$. Para provar a unicidade, suponha que existe uma solução $x(t)$ do PVI (2.21) e seja $y(t) = e^{-At}x(t)$, então

$$y'(t) = -Ae^{-At}x(t)+e^{-At}x'(t) = -Ae^{-At}x(t)+e^{-At}Ax(t) = (-Ae^{-At}+e^{-At}A)x(t) = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, pois A comuta com e^{-At}. Logo, $y(t)$ é constante o que implica que $x(t) = e^{At}y_0 = \bar{y}(t)$.

Definição 2.7. *Se $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ é solução do sistema (2.19), então a curva parametrizada pelo parâmetro t, é chamada **órbita** desse sistema. A representação gráfica das órbitas do sistema é chamada de **retrato de fase** do sistema.*

O retrato de fase de um sistema autônomo é obtido através da análise dos autovalores e autovetores da matriz A associada ao sistema (2.19).

Definição 2.8. *Qualquer ponto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y_0) = 0$ é chamado **ponto de equilíbrio** (ou **estacionário**) do sistema (2.19). Qualquer ponto y do domínio da função f tal que $f(y) \neq 0$ é dito **ponto regular**.*

Note que se y_0 é um ponto de equilíbrio do sistema (2.19) então, a função $y(t) = y_0$ é uma solução do sistema denominada **solução constante.**

Definição 2.9. *Uma matriz $\psi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base para o espaço das soluções do sistema (2.20) chama-se **matriz fundamental** do sistema.*

É possível mostrar que a aplicação $t \longmapsto \psi(t)$, onde $\psi(t)$ é a matriz fundamental do sistema de equações diferenciais (2.20) e A é uma matriz de ordem $n \times n$, tem as mesmas propriedades da função exponencial.

Proposição 2.2. *Dada $\psi(t)$ uma matriz fundamental de (2.20) e A uma matriz de ordem $n \times n$, tem-se:*

a) $\psi'(t) = A \cdot \psi(t)$, $\psi(0) = I$

b) para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $\psi(t + s) = \psi(t)\psi(s)$

c) $[\psi(t)]^{-1} = \psi(-t),\ t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. a) A demonstração é consequência imediata da hipótese de que as colunas de $\psi(t)$ são formadas por soluções do sistema $y' = Ay$.

b) Tem-se, pelo Lema 2.2, que $\psi(t + s)$ é uma solução do sistema $y' = Ay$, e já que $\psi(t)\psi(s)$ é uma combinação linear das soluções deste sistema, segue que $\psi(t)\psi(s)$ também é solução. Logo, considerando o PVI $y' = Ay$, $y(0) = \psi(s)$, segue do teorema 2.2 a igualdade.

c) Fazendo $s = -t$ em b), tem-se que

$$\psi(t+s) = \psi(0) = I \text{ e } \psi(t)\psi(s) = \psi(t)\psi(-t) \overset{\text{b)}}{=} \psi(t+(-t)) = I.$$

Portanto, $[\psi(t)]^{-1} = \psi(-t)$.

□

Lema 2.3. *Sejam A uma matriz, λ um autovalor de A e v um autovetor associado a λ, então:*

$$\phi(t) = v \cdot e^{\lambda t}$$

é uma solução do sistema (2.20).

Demonstração. Tem-se que:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow \phi'(t) = \lambda v e^{\lambda t} = (Av)e^{\lambda t} = A(ve^{\lambda t}) = A\phi(t).$$

Logo, $\phi(t)$ é uma solução de (2.20). □

Lema 2.4. *Se $\phi(t) = \phi_1(t) + i\phi_2(t)$ é uma solução com valores complexos de* (2.20)*, então $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são soluções reais de* (2.20).

Demonstração. Já que $\phi(t)$ é solução do sistema, então $\phi'(t) = A \cdot \phi(t)$, então $\phi_1'(t) + i\phi_2'(t) = A \cdot (\phi_1(t) + i\phi_2(t))$. Igualando as partes real e imaginária, tem-se $\phi_1'(t) = A \cdot \phi_1(t)$ e $\phi_2'(t) = A \cdot \phi_2(t)$. Logo, tanto $\phi_1(t) = Re(\phi(t))$ quanto $\phi_2(t) = Im(\phi(t))$ são soluções de (2.20). □

Escrevendo $\phi(t) = e^{\lambda t}v$, onde $\lambda = \alpha + i\beta$ e $v = u + iw$, obtém-se

$$\phi_1(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t)(u + iw) \text{ e } \phi_2(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t)(u + iw).$$

Tem-se pelo lema 2.4 que

$$\phi_1(t) = e^{\alpha}(\cos\beta t \cdot u - \mathrm{sen}\,\beta t \cdot w) \text{ e } \phi_2(t) = e^{\alpha}(\mathrm{sen}\,\beta t \cdot u + \cos\beta t \cdot w)$$

são duas soluções reais de (2.20).

Proposição 2.3. *Se a matriz A de ordem $n \times n$ tem autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e $v_1, \ldots, v_n$ são os autovetores associados a cada λ_i, ou seja, $Av_i = \lambda_i v_i$, então a matriz $V(t)$ cuja i-ésima coluna é $\phi_i(t) = v_i \cdot e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, é uma matriz fundamental de* (2.20)*. Em particular:*

$$e^{At} = V(t)V^{-1}(0).$$

Demonstração. Segue do lema 2.3 que cada $\phi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ é uma solução do sistema (2.20). Logo, as colunas da matriz $V(t)$ definem uma base do espaço das soluções do sistema, uma vez que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um conjunto linearmente independente e a dimensão do espaço das soluções é n. Assim, $V(t)$ é uma matriz fundamental de (2.20). A última parte, segue da unicidade da solução do PVI $\dot{y} = Ay$, $y(0) = I$. □

2.4.1 Estudo das órbitas dos sistemas autônomos bidimensionais

Nesta seção, serão discutidas as órbitas e o retrato de fase do sistema autônomo de ordem 2×2

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{2.22}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, com $\det(A) \neq 0$. Consequentemente, o único ponto de equilíbrio do sistema (2.22) é o ponto $(0, 0)$.

O polinômio característico de A é dado por:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \\ = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \\ = \lambda^2 - \mathrm{tr(A)}\lambda + \det(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

onde tr(A) denota o traço da matriz A que é dado pela soma dos elementos da diagonal principal de A. Logo, se λ_1, λ_2 são os autovalores de A, temos:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\mathrm{tr(A)} \pm \sqrt{(\mathrm{tr(A)})^2 - 4 \cdot \det(\mathrm{A})}}{2}. \tag{2.23}$$

Considerando λ_1, λ_2, autovalores de A e v_1, v_2 autovetores associados a λ_1 e λ_2, pode-se definir os seguintes casos, de acordo com os valores das possíveis raízes da equação (2.23):

Para o primeiro caso, considere $(\mathrm{tr(A)})^2 - 4 \cdot \det(\mathrm{A}) > 0$ na equação (2.23), logo, λ_1 e λ_2 são números reais e distintos.

Caso 1: Considere $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Então, sejam v_1, v_2 autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2. Denote por E_1 e E_2 as retas geradas por v_1 e v_2, respectivamente. Segue que $\phi(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$ é uma solução geral de (2.22).

Caso 1.1: Suponha que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, então, para $c_1, c_2 > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = +\infty \qquad & \lim_{t \to -\infty} c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = +\infty \\ \lim_{t \to +\infty} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = 0 \qquad & \lim_{t \to +\infty} c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = 0. \end{aligned}$$

Segue que, exceto a origem que permanece fixa, toda órbita tende a $+\infty$ quando $t \to -\infty$ e a zero quando $t \to +\infty$. Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ (ou reciprocamente se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$), as órbitas permanecem na reta E_1 (respectivamente E_2) quando $t \to +\infty$. Quanto a concavidade, note que a curva $t \longmapsto (c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, c_2 \cdot e^{\lambda_2 t})$, contida no primeiro quadrante (assumindo $c_1, c_2 \geq 0$, para outros valores de c_1 e c_2 a análise é análoga), tem componentes estritamente decrescentes, podemos portanto definir a segunda componente em função da primeira, isto é, $x_2(t) = F(x_1(t))$ onde,

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 \cdot c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ e } \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 \cdot c_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Logo,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 \cdot c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \cdot c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \cdot c_2}{\lambda_1 \cdot c_1} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}. \tag{2.24}$$

Quando $t \to -\infty$, a equação (2.24) tende a zero e, tende a $+\infty$ quando $t \to +\infty$. Portanto, a função x_2 é uma função crescente. As órbitas podem ser representadas como na Figura 2.2. Neste caso, diz-se que o ponto de equilíbrio do sistema é um **nó estável** (nó atrator).

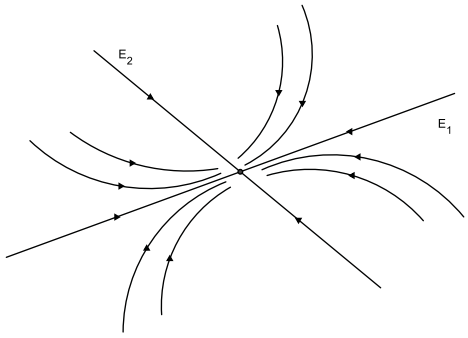

Figura 2.2: Nó estável (ou atrator)

Caso 1.2: Considerando $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, toda trajetória tende a $\pm\infty$ conforme t varia, de acordo com os sinais de c_1 e c_2. De fato:

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}}{c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \lim_{t \to -\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

E ainda,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}}{c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \lim_{t \to +\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \left(sgn\ \{\frac{c_2}{c_1}\} \right) \infty,$$

onde *sgn* representa o sinal, ou seja, $sgn\ x = \begin{cases} +, & \text{se x>0;} \\ -, & \text{se x<0.} \end{cases}$.

Quanto à concavidade, observe que:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 \cdot c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \cdot c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \cdot c_2}{\lambda_1 \cdot c_1} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}. \tag{2.25}$$

Note que quando $t \to -\infty$, a equação (2.25) tende a zero e quando $t \to +\infty$ a equação tende a $\pm\infty$, conforme os sinais de c_1 e c_2, já que $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$. Portanto, conforme t varia, todas as órbitas se afastam do ponto de equilíbrio, neste caso, denomina-se este ponto por **nó instável**, representado na Figura 2.3.

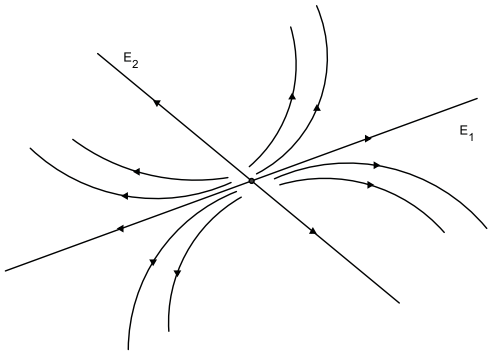

Figura 2.3: Nó instável

Caso 1.3: Sejam λ_1, λ_2 tais que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Então, para cada valor de c_1 e c_2 faz-se a seguinte análise para a função $\phi(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$ que é a solução do sistema:

Primeiro, deve-se observar que é possível escrever a função $\phi(t)$ na forma:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, basta analisar o comportamento de cada elemento da primeira matriz da expressão acima, que serão as componentes das retas E_1 e E_2:

(i) se $c_1 = 0$ a trajetória é dada pela reta E_2 e, se $c_2 = 0$ a trajetória é dada por E_1. Ambas as trajetórias tendem para zero quando $t \to \pm\infty$.

(ii) se $c_1, c_2 \neq 0$, então as soluções tendem para ∞, quando $t \to \pm\infty$, como pode-se observar fazendo a análise segundo as componentes E_1 e E_2:

$$\lim_{t\to-\infty} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = c_1 \cdot \lim_{t\to-\infty} e^{\lambda_1 t} = (sgn c_1)\infty \text{ e } \lim_{t\to-\infty} c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_2 \cdot \lim_{t\to-\infty} e^{\lambda_2 t} = 0$$

da mesma forma,

$$\lim_{t\to+\infty} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = c_1 \cdot \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_1 t} = 0 \text{ e } \lim_{t\to+\infty} c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_2 \cdot \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_2 t} = (sgn\ c_2)\infty.$$

Neste caso dizemos que o ponto de equilíbrio é um **ponto de sela**, e é representado pela Figura 2.4.

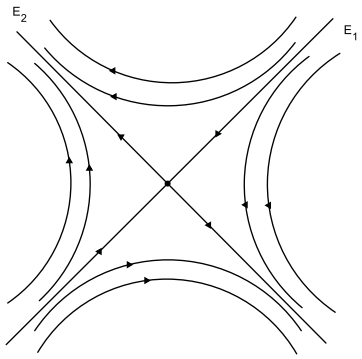

Figura 2.4: Ponto de sela

Caso 2: Considerando $(\mathrm{tr(A)})^2 - 4 \cdot \det(\mathrm{A}) < 0$ na equação (2.23), tem-se que λ_1 e λ_2 são números complexos conjugados dados por $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$. Segue do lema 2.4 que toda solução de (2.22) pode ser escrita na forma:

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t),$$

onde $\phi_1(t) = e^{\alpha t}(u\cos\beta t - w\,\mathrm{sen}\,\beta t)$ e $\phi_2(t) = e^{\alpha t}(u\,\mathrm{sen}\,\beta t + w\cos\beta t)$.

Considere $c_1 = \rho\cos\omega$, $c_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega$. Então,

$$\phi(t) = \rho\cos\omega(e^{\alpha t}(u\cos\beta t - w\,\mathrm{sen}\,\beta t)) + \rho\,\mathrm{sen}\,\omega(e^{\alpha t}(u\,\mathrm{sen}\,\beta t + w\cos\beta t)) =$$

$$= e^{\alpha t}\rho(\cos\omega - \beta t)u + \rho\,\mathrm{sen}(\omega - \beta t w).$$

Caso 2.1: Se $\alpha = 0$, tem-se que $\phi(t) = \rho\cos(\omega - \beta t)u + \rho\,\mathrm{sen}(\omega - \beta t)w$. Logo, todas as soluções, exceto a origem que permanece fixa, são elipses, e neste caso, diz-se que o ponto de equilíbrio é um **centro**.

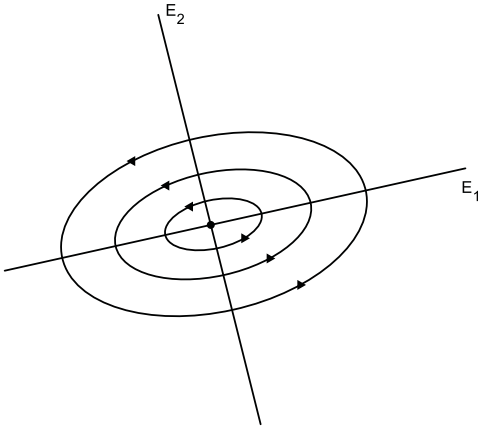

Figura 2.5: Centro

Caso2.2: Se $\alpha > 0$, tem-se que quando $t \to -\infty$, $\phi(t) \to 0$ e quando $t \to +\infty$, $\phi(t) \to +\infty$. Então toda solução tende para o ponto de equilíbrio em forma de espiral. Além disso, deve-se observar que se $\beta > 0$, o argumento $(\omega - \beta t)$ tende a $+\infty$ quando $t \to -\infty$ e a $-\infty$ quando $t \to +\infty$, ou seja, o ângulo $(\omega - \beta t)$ decresce conforme t cresce. As órbitas são representadas pela figura 2.6.
Se $\beta < 0$ $(\omega - \beta t) \to -\infty$ quando $t \to -\infty$ e, quando $t \to +\infty$, $(\omega - \beta t) \to -\infty$. Logo, neste caso, o ângulo $(\omega - \beta t)$ cresce conforme o crescimento de t. Então, diz-se que o ponto de equilíbrio é um **foco instável**.

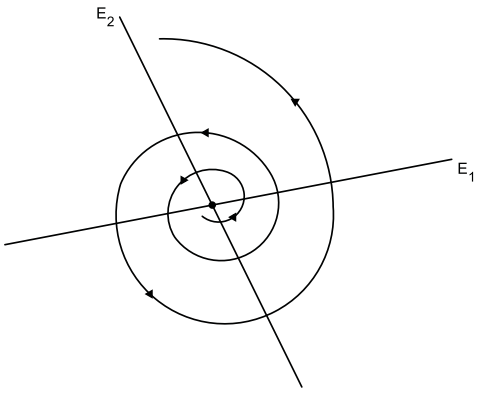

Figura 2.6: Foco instável, $\beta > 0$

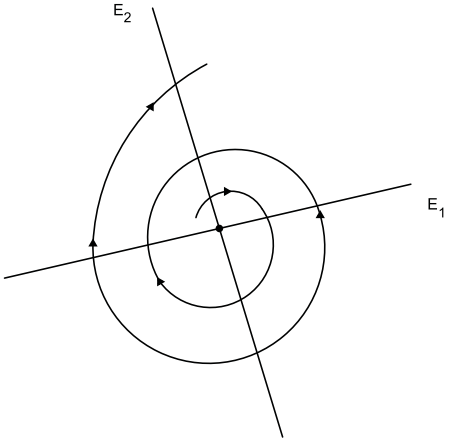

Figura 2.7: Foco instável, $\beta < 0$

Caso 2.3: Quando $\alpha < 0$, $\phi(t) \to 0$ sempre que $t \to -\infty$ e quando $t \to -\infty$, $\phi(t) \to +\infty$. Portanto, toda solução tende para o ponto de equilíbrio em forma de espiral. A análise do ângulo $(\omega - \beta t)$ é feita de maneira análoga ao caso 2.1. O ponto de equilíbrio deste sistema é chamado de **foco estável**.

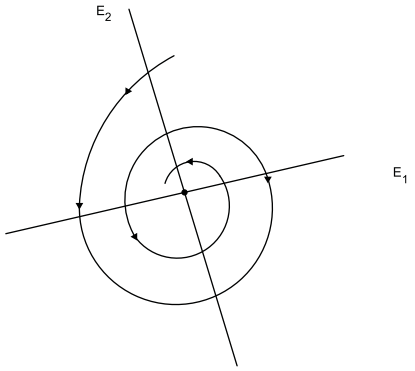

Figura 2.8: Foco estável $\beta < 0$

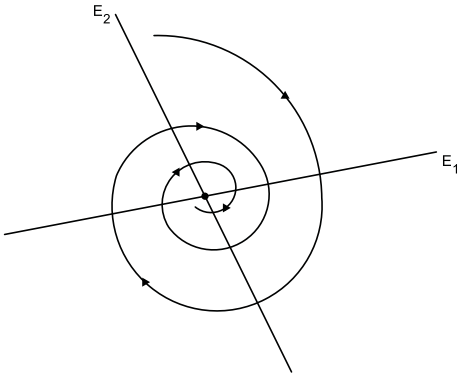

Figura 2.9: Foco estável $\beta > 0$

Caso 3: Se $(\mathrm{tr(A)})^2 - 4 \cdot \det(\mathrm{A}) = 0$, λ_1 e λ_2 são números reais e iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Caso 3.1: Se λ tem multiplicidade geométrica 2, ou seja, se existem vetores linearmente independentes v_1 e v_2, que são autovetores associados a λ. Então a solução geral de (2.22) pode ser escrita da forma:

$$\phi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2).$$

Então, se $\lambda < 0$, segue que :

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\lambda t} c_1 = \infty \text{ e } \lim_{t \to +\infty} e^{\lambda t} c_1 = 0.$$

Se $\lambda > 0$,

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\lambda t} c_1 = 0 \text{ e } \lim_{t \to +\infty} e^{\lambda t} c_1 = \infty.$$

Para $e^{\lambda t} c_2$ obtém-se os mesmos limites. Logo, todas as órbitas, exceto a origem, são semirretas (ver figuras 2.10 e 2.11). No caso em que $\lambda < 0$, toda solução tende para a origem conforme t cresce e se $\lambda > 0$ toda solução tende a ∞ conforme t tende a $\pm\infty$.

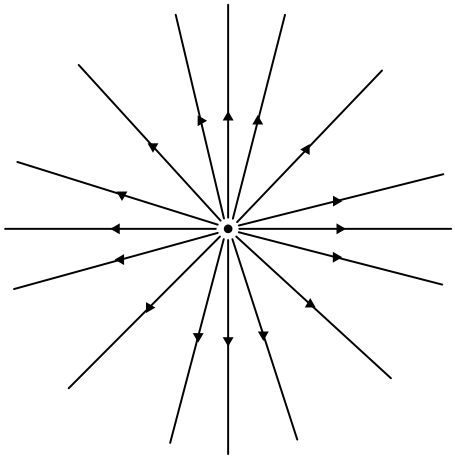

Figura 2.10: $\lambda > 0$

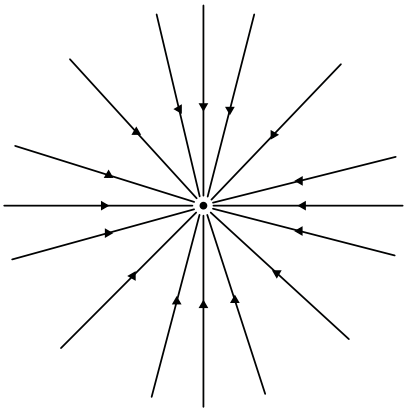

Figura 2.11: $\lambda < 0$

Caso 3.2: Seja λ, tal que λ tem multiplicidade algébrica 1, ou seja, λ tem um único autovetor associado v. Logo, existe uma matriz de mudança de base, da base canônica para a base do auto espaço generalizado, M tal que $J = MAM^{-1}$ está na forma canônica de Jordan. Segue então que:

$$e^J = e^{MAM^{-1}}$$

que pode ser escrita na forma $e^{\lambda I + R}$, onde R são matrizes 2-nilpotentes da forma:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

logo, segue da definição de exponencial matricial que

$$e^J = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Portanto, toda solução de (2.20) pode ser escrita da forma:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}c_1 & 0 \\ te^{\lambda t}c_2 & e^{\lambda t}c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t}[(c_1 + c_2 t)v_1 + c_2 v_2]$$

onde $\{v_1, v_2\}$ são vetores da base do auto espaço generalizado de A.

Para determinar o formato das órbitas, é necessário fazer a análise de cada quadrante. Supondo que $\lambda > 0$ (o caso $\lambda < 0$ segue por simetria) quando $t \to -\infty$, tem-se que as soluções tendem a zero, independentes do sinal de c_1 e c_2, pois:

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) = \lim_{t\to-\infty} e^{\lambda t}c_1 + \lim_{t\to-\infty} te^{\lambda t}c_2 = \lim_{t\to-\infty} \frac{c_2}{-\lambda e^{-\lambda t}} = 0$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\lambda t}c_2 = 0.$$

Quando $t \to +\infty$ tem-se que:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) = sgn\ c_2(+\infty)$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} c_2 e^{\lambda t} = sgn\ c_2(+\infty).$$

Já que ambos os resultados dependem apenas do sinal de c_2, tem-se as seguintes possibilidades:

$$\text{(a)}\ \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) = \begin{cases} +\infty, \text{se } c_2 > 0; \\ -\infty, \text{se } c_2 < 0. \end{cases}$$

$$\text{(a)}\ \lim_{t\to+\infty} c_2 e^{\lambda t} = \begin{cases} +\infty, \text{se } c_2 > 0; \\ -\infty, \text{se } c_2 < 0. \end{cases}$$

Além disso, $(c_1 + tc_2)e^{\lambda t} > 0$ para $t > \dfrac{-c_1}{c_2}$ e fazendo $\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t}c_2 \\ y(t) = (c_1 + tc_2)e^{\lambda t} \end{cases}$ tem-se:

$$\frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda c_2 e^{\lambda t}}{\lambda e^{\lambda t}(c_1 + tc_2) + e^{\lambda t}c_2} = \frac{\lambda c_2}{\lambda c_1 + \lambda t c_2 + c_2}.$$

Portanto, $\dfrac{x'(t)}{y'(t)} \to 0$ quando $t \to \pm\infty$. O comportamento das soluções quando $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$ é representado pelas figuras abaixo.

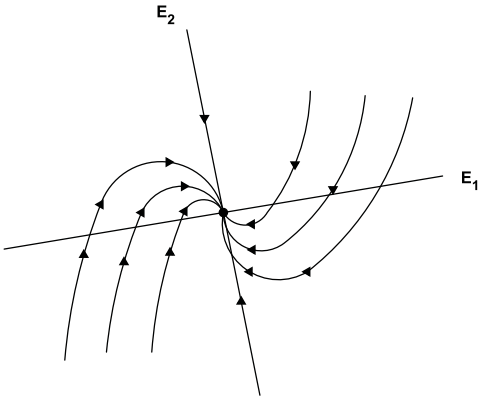

Figura 2.12: $\lambda > 0$

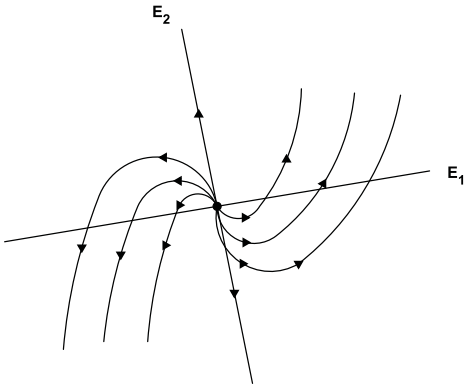

Figura 2.13: $\lambda < 0$

Observação 2.1. Se a matriz A, do sistema (2.22), é semelhante a uma matriz B, isto é, se existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$, então o sistema (2.22) é transformado no sistema $y' = By$ pela transformação de coordenadas $y = Py$.

Resume-se a análise feita acima no seguinte teorema:

Teorema 2.5. *Considere o sistema* (2.22)*. Então*

(a) se $detA < 0$*, então* (2.22) *tem na origem um ponto de sela;*

(b) se $detA > 0$ *e* $\mathrm{tr(A)}^2 - 4\det(\mathrm{A}) \geq 0$*, então a origem é um nó estável, se* $\mathrm{tr(A)} < 0$ *e instável se* $\mathrm{tr(A)} > 0$*;*

(c) se $detA > 0$*,* $\mathrm{tr(A)}^2 - 4\det(\mathrm{A}) < 0$ *e* $\mathrm{tr(A)} \neq 0$*, então a origem é um foco estável se* $\mathrm{tr(A)} < 0$ *e instável se* $\mathrm{tr(A)} > 0$*;*

(d) se $\det A > 0$ *e* $\mathrm{tr(A)} = 0$ *então a origem é um centro.*

A prova deste teorema é consequência da análise do comportamento das soluções feita acima e pode ser encontrada em [4].

Exemplo 2.6. Considere o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$$

tem-se que, os autovetores da matriz são $\lambda = \pm 2i$. Considere a matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Logo,

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot c = \begin{pmatrix} \cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t \\ \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \cdot c$$

onde $c = X(0)$.

Note que $X_1^2(t) + 4X_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, as trajetórias do sistema estão sobre as elipses, como na Figura 2.14.

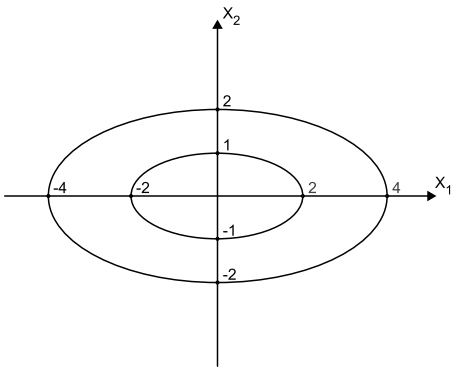

Figura 2.14: Exemplo 2.6

Observação 2.2. (**Caso não linear**) Para o estudo dos sistemas não lineares existem alguns resultados, entre eles o teorema de Hartman-Grobman que fornece condições que garantem algumas conclusões sobre o comportamento das soluções em uma vizinhança do equilíbrio, através do estudo do sistema linear associado ao não linear.

Considere o sistema não linear

$$y' = f(y), \tag{2.26}$$

onde $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se y_0 é um ponto de equilíbrio desse sistema, para o qual os autovalores não tem a parte real nula, então o comportamento do sistema é topologicamente equivalente ao comportamento local do sistema linear (2.20), isto é, existe uma aplicação contínua, bijetora que associa uma vizinhança de y_0 a um conjunto aberto U contendo a origem, $H : N_\varepsilon(y_0) \longrightarrow U$, que transforma o sistema não linear no sistema linear transformando trajetórias do sistema (2.26) em $N_\varepsilon(y_0)$ em trajetórias do sistema (2.20) em um conjunto aberto U, e preserva a orientação da trajetória no instante t, ou seja, H preserva a direção do fluxo ao longo das trajetórias. O teorema a seguir garante que essa propriedade é válida.

Teorema 2.6. ***(Teorema de Hartman-Grobman)*** *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto contendo a origem, $f \in (C^1(E))$ e seja φ_t uma solução do sistema* (2.26)*. Suponha que $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não tem autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo H de um conjunto aberto U contendo a origem em um aberto V, também contendo a origem, tal que para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo o zero, tal que para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_0$*

$$H \circ \varphi(x_0) = e^{At} H(x_0),$$

isto é, H transforma trajetórias de (2.26) *próximas à origem em trajetórias de* (2.20) *próximas à origem e preserva a parametrização por t.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4].

3 Equações diferenciais impulsivas

As equações diferenciais impulsivas (EDI) são usadas para descrever processos de evolução que sofrem variações de estado cuja duração é tão curta que podem ser consideradas instantâneas. Para fazer tal descrição deve-se valer das equações diferenciais para descrever os estágios contínuos do processo e de uma condição para descrever as descontinuidades de primeira espécie da solução ou de suas derivadas no instante de impulso.

O modelo de Kruger-Thiemer de dois ambientes para distribuição de drogas no corpo humano, é um exemplo de aplicação deste tipo de equação diferencial, ver [5]. Suponha que a droga, administrada oralmente, é primeiro dissolvida no ambiente gastrointestinal. A droga é então absorvida em um ambiente amorfo constituído de sangue, músculos, tecidos, etc., chamado de volume aparente de distribuição, e é finalmente eliminada do sistema pelos rins. Suponha que $x(t)$ e $y(t)$ são as quantidades de drogas no instante t no ambiente gastrointestinal e no volume aparente de distribuição, respectivamente, e sejam k_1 e k_2 taxas constantes. As equações que representam esse processo são:

$$\begin{cases} x' = & -k_1 x \\ y' = & -k_2 y + k_1 x. \end{cases} \tag{3.1}$$

Defina um tratamento tal que nos instantes

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < T$$

a droga é prescrita em quantidades

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N, \text{ respectivamente.}$$

Desse modo, tem-se as seguintes condições acrescidas a (3.1):

$$\begin{cases} x(t_i^+) = x(t_i^-) + \delta_i, \\ y(t_i^+) = y(t_i^-), \qquad\quad , i = 1, 2, \cdots, N \\ x(0) = \delta_0,\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Para se obter o efeito terapêutico esperado, é preciso que a quantidade de droga no volume aparente de distribuição nunca fique abaixo de um nível mínimo durante o tempo de tratamento.

No modelo de Kruger-Thiemer os instantes de impulso são pré-fixados, o que significa que o sistema impulsivo não é autônomo, ainda que a equação diferencial associada seja autônoma.

Para representar um sistema impulsivo, para o caso ordinário, deve-se considerar:

1) Uma equação diferencial
$$y' = f(t, y) \tag{3.3}$$
onde $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função que satisfaz alguma condição de unicidade para PVI e Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais positivos;

2) conjuntos $M(t)$, $N(t) \subset \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$ e

3) funções $A(t) : M(t) \to N(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Seja $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ uma solução de (3.3) começando em (t_0, y_0). O processo de evolução de um problema impulsivo se dá da seguinte forma:

O ponto $P_t = (t, y(t))$ começa o movimento em $P_{t_0} = (t_0, y_0)$ e move-se ao longo da curva $\{(t, y);\, t \geq t_0, y = y(t)\}$ até um instante $t_1 > t_0$ em que o ponto P_t encontra o conjunto $M(t)$. Em $t = t_1$, $A(t)$ transfere o ponto $P_{t_1} = (t_1, y(t_1))$ em $P_{t_1^+} = (t_1, y_1^+)$, onde $y_1^+ = A(t_1)y_1$. Então o ponto P_t continua a se mover ao longo da curva com $y(t) = y(t, t_1, y_1^+)$, até P_t encontrar $M(t)$ no próximo instante $t_2 > t_1$. Então, o ponto $P_{t_2} = (t_2, y(t_2))$ é transferido ao ponto $P_{t_2^+} = (t_2, y_2^+) \in N(t_2)$, onde $y_2^+ = A(t_2)y(t_2)$. Como anteriormente, o ponto P_t continua a se mover com $y(t) = y(t, t_2, y_2^+)$ como solução de (3.3) começando em (t_2, y_2^+). E assim sucessivamente.

O sistema impulsivo descrito acima é dado por:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t) \in M(t) \Rightarrow y(t^+) = A(t)y(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

A curva descrita por P_t é chamada **curva integral** e a função que define essa curva é a solução do sistema impulsivo (3.4).

A solução de um sistema diferencial impulsivo pode ser:

a) uma função contínua, se a curva integral $\{(t, y);\, t \geq t_0,\, y = y(t_0)\}$ não encontrar o conjunto $M(t)$ ou se atingir $M(t)$ em pontos fixos do operador $A(t)$;

b) uma função contínua por partes com um número finito de descontinuidades de primeira espécie se a curva encontrar $M(t)$ em um número finito de pontos que não são pontos fixos do operador $A(t)$;

c) uma função contínua com uma quantidade enumerável de descontinuidades de primeira espécie se a curva encontrar $M(t)$ em uma quantidade enumerável de pontos que não são pontos fixos de $A(t)$.

Definição 3.1. *Os instantes $t = t_k$ nos quais as curvas integrais de um sistema impulsivo* (3.4) *atingem o conjunto $M(t)$ são denominados* ***momentos de impulso*** *do sistema.*

Para as equações diferenciais ordinárias do tipo $y' = f(t, y)$, uma solução, se existir, em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, pertence ao espaço $C(I; \mathbb{R}^n)$, que é o espaço das funções contínuas definidas em I, com imagem em $\mathbb{R}^n$. Já para as equações diferenciais impulsivas, uma solução definida em um intervalo I, pertence ao espaço $PC(I, \mathbb{R}^n)$ que é o espaço das funções φ seccionalmente contínuas com descontinuidades de primeira espécie em uma quantidade, no máximo, enumerável de instantes t, logo existem os limites laterais à esquerda e à direita, isto é, existem $\lim_{x \to t^+} \varphi(x)$ e $\lim_{x \to t^-} \varphi(x)$, para todo $t \in I$, sendo contínua à direita (ou à esquerda) em $t \in I$.

3.1 Sistemas com impulsos em tempos fixados

Alguns sistemas impulsivos podem ter os impulsos em tempos pré-fixados, ou seja, os momentos de impulsos são conhecidos. Neste tipo de sistema, o conjunto $M(t)$ representa uma sequência de planos $t = t_k$, onde $\{t_k\} \to \infty$ quando $k \to \infty$, com $M(t_k) = N(t_k) = \Omega$. A sequência de operadores será $A(t_k) = A(k) : \Omega \to \Omega$ tal que $y \longmapsto A(t)y = y + I_k(y)$, onde $I_k : \Omega \to \Omega$. Um sistema diferencial impulsivo simples com os momentos de impulsos fixados é descrito por:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t \neq t_k,\ k = 1, 2, \ldots \\ \Delta y(t) = I_k(y),\ t = t_k, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $\Delta y(t) = y(t_k^+) - y(t_k)$ e $y(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} y(t)$. Então, qualquer solução de (3.5) satisfaz:

i) $y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in (t_k, t_{k+1}],\ k = 1, 2, \ldots.$

ii) $\Delta y(t_k) = I_k(y(t_k))$.

Pode-se supor que a solução seja contínua à esquerda em t_k, isto é, $y(t_k) = y(t_k^-)$. Observe que o comportamento das soluções é influenciado pelos efeito impulsivos, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 3.1. Considere o sistema impulsivo:

$$\begin{cases} y' = 0,\ t \neq k,\ k = 1, 2, \ldots \\ \Delta y(k) = \dfrac{1}{1 - y(k)}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Considerando-se apenas a equação diferencial ordinária com condição inicial $y(0) = c$, as soluções são funções constantes e, portanto, contínuas para qualquer valor de t.

Aplicando a condição de impulso, tem-se que a solução $y(t)$ do sistema, satisfazendo $y(0) = 1$, por exemplo, está definida apenas para $0 \leq t < 1$. Esta solução não está definida em $t = 1$, já que a função $I_k(y) = \dfrac{1}{1-y}$ não está definida para $y(t) = 1$ (veja figura 3.1), e neste caso, vale $y(t) = 1$, para $t \in [0, 1)$, aqui considere a solução contínua à direita.

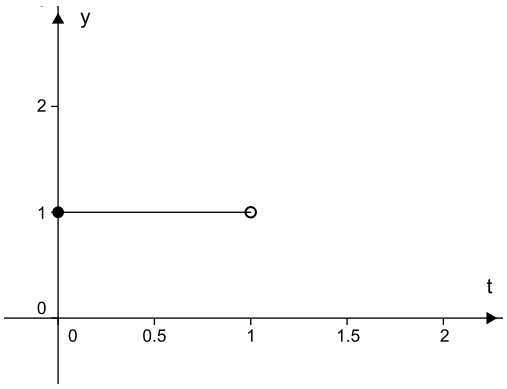

Figura 3.1: Solução do sistema (3.6) com condição inicial $y(0) = 1$

Por outro lado, considerando a condição inicial $y(0) = 2$, a solução de (3.6) sofrerá apenas um efeito impulsivo quando $t = 1$, já que para $t = 2$, $y(t)$ não está definida. Logo, a solução do sistema (3.6) com condição inicial $y(0) = 2$ está definida apenas no intervalo $[0, 2)$.Veja a figura 3.2.

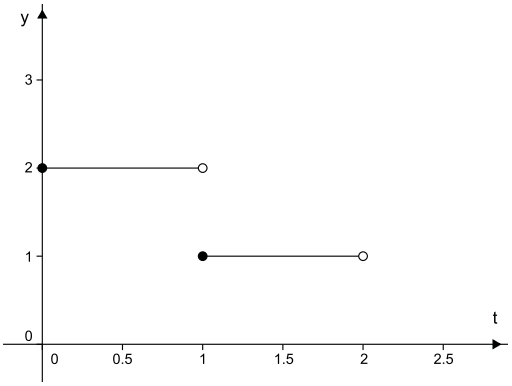

Figura 3.2: Solução do sistema (3.6) com condição inicial $y(0) = 2$.

Exemplo 3.2. Considere a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2,\ t \neq \dfrac{k\pi}{4},\ k = 1, 2, \ldots \\ \Delta y = -1,\ t = \dfrac{k\pi}{4} \end{cases} \tag{3.7}$$

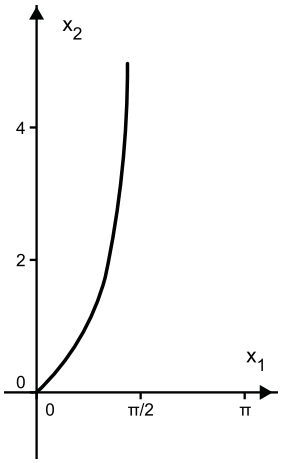

Figura 3.3: Solução de $y' = 1 + y^2$ com condição inicial $y(0) = 0$ e sem efeito impulsivo.

A solução da equação diferencial ordinária sem impulso, de (3.7), com condição inicial $y(0) = 0$, é $y(t) = \operatorname{tg} t$ que é contínua e crescente para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. Ver figura 3.3.

Considerando a condição de impulso, a solução com a condição inicial $y(0) = 0$ está definida para todo $t \geq 0$ e é dada pela função $y(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{k\pi}{4}\right)$, $t \in \left[\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}\right)$ que é periódica com período $\frac{\pi}{4}$ e contínua em $[0, \frac{\pi}{4})$, mais geralmente, $y(t)$ é contínua em $\left[\frac{k\pi}{4}, \frac{k+1\pi}{4}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$.

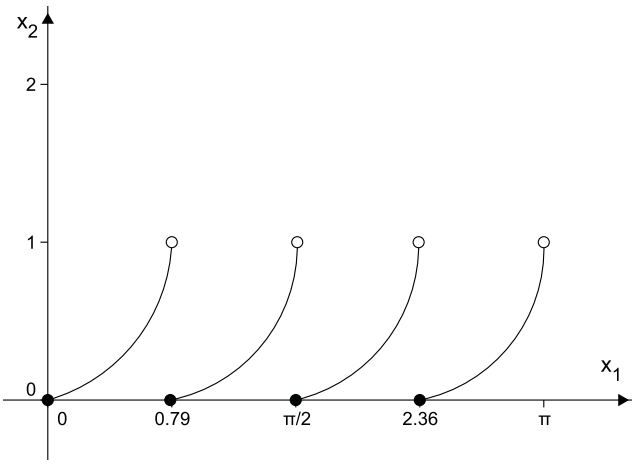

Figura 3.4: Solução do sistema (3.7) com condição inicial $y(0) = 0$.

3.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis

Considere a sequência de superfícies $\{S_k\}$ dada por $S_k : t = \tau_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots$ tal que $\tau_k(y) < \tau_{k+1}(y)$ e $\lim_{k\to\infty} \tau_k(y) = \infty$. Defina o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y),\ t \neq \tau_k(y) \\ \Delta y(\tau_k) = I_k(y),\ t = \tau_k(y),\ k = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.8}$$

Em geral, os problemas envolvendo este tipo de sistema são mais difíceis do que os que envolvem os sistemas do tipo de (3.5). Note que os momentos de impulso para o sistema (3.8) dependem das soluções, pois $t_k = \tau_k(y(t_k))$, para cada k. O que implica que para condições iniciais diferentes, tem-se diferentes pontos de descontinuidade. Diferente das equações diferenciais ordinárias, para um sistema impulsivo é possível que o gráfico das soluções distintas de um mesmo sistema se cruzem em um ou mais pontos, como será observado no exemplo 3.3.

Definição 3.2. *Se $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de (3.8) e se, a partir de algum t_0, tem-se $x(t) = y(t)$, ou seja, a partir de um instante t_0, $x(t)$, e $y(t)$ passam a se comportar como uma única solução, diz-se que existe, a partir do instante t_0, uma* ***confluência****.*

Definição 3.3. *Se uma solução $y(t)$ do sistema (3.8) atinge uma superfície S_k mais de uma vez, diz-se que ocorre, neste caso, um* ***fenômeno de pulso****.*

Exemplo 3.3. Considere o sistema impulsivo

$$\begin{cases} x' = 0,\ t \neq \tau_k(x), t \geq 0 \\ \Delta x = x^2(sgnx) - x,\ t = \tau_k(x),\ k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

onde $\tau_k(x) = x + 6k$, para $|x| < 3$, descreve a superfície $S_k : t = \tau_k(x)$. Assim $I_k(x) = x^2(sgnx) - x$ e $A(x) = x^2(sgnx)$.

As soluções do sistema, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, onde $|x_0| \geq 3$ não sofrem efeitos impulsivos já que não encontram nenhuma das superfícies S_k. Considerando as soluções onde $|x_0| < 3$, tem-se os seguintes casos:

- Se $0 < x_0 < 1$, note que $\Delta x = x^2 - x$ e $x^2 \leq x$, portanto, $\Delta x \leq 0$, o que significa que os saltos são sempre no sentido negativo. Logo, $x(t)$ sofre infinitos efeitos impulsivos, porém , não há mudança de sinal e $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

- Se $-1 < x_0 < 0$ tem-se $\Delta x = -x^2 - x$ e $x^2 \leq -x$, segue que $\Delta x \geq 0$. Logo, $x(t)$ sofre infinitos efeitos impulsivos, porém, neste caso $x(t)$ encontra apenas a superfície S_1, ocorrendo então um fenômeno pulso. Além disso, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

- Se $1 < |x_0| < 3$, a função $x(t)$ sofre um número finito de impulsos. Considerando o caso em que $1 < x_0 < 3$, (o caso em que $-3 < x_0 < -1$ é simétrico) tem-se que $\Delta x = x^2 - x > 0$, portanto, todos os saltos são no sentido positivo. Por exemplo, se a trajetória se inicia no ponto $(0, 2^{\frac{1}{4}})$, a solução $x(t)$ toca a superfície S_0 exatamente três vezes. No ponto $(2,4)$ passa a se comportar como a solução do sistema cuja trajetória se inicia no ponto $(0,4)$, ocorrendo, a partir daí, uma confluência para $t \geq 2$.

As soluções que se iniciam nos pontos $(0,0),(0,1)$ e $(0,-1)$ atingem as superfícies S_k nos pontos fixos do operador $A = x^2 sgnx$ e, portanto, não sofrem nenhum efeito impulsivo. O comportamento das soluções descritas acima é representado na figura 3.5.

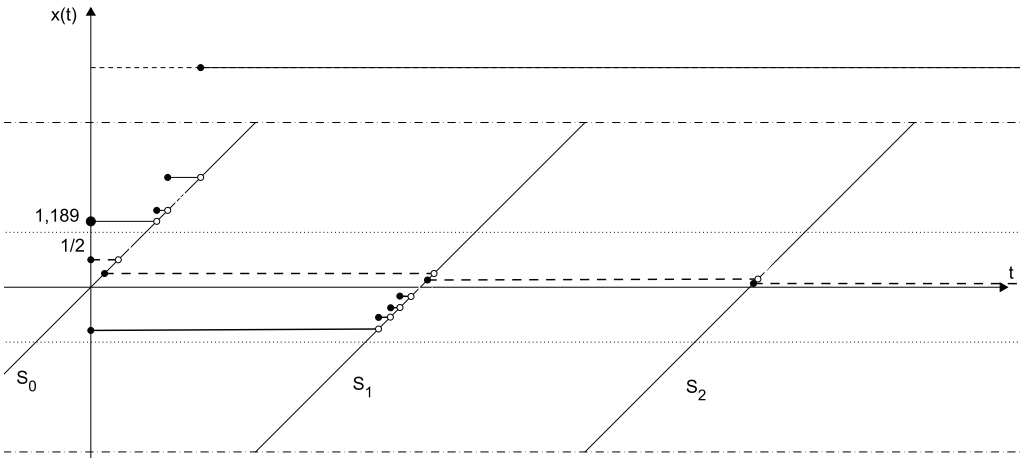

Figura 3.5: Representação gráfica de algumas soluções do sistema no exemplo 3.3.

3.3 Sistemas autônomos com impulso

Considere os conjuntos $M(t)$, $N(t)$ e o operador $A(t)$, independentes de t, com $A(t) \equiv A : M \to N$ definido por $Ay = y + I(y)$, onde $I : \Omega \to \Omega$. O sistema diferencial impulsivo

$$\begin{cases} y' = f(y), y \notin M \\ \Delta y = I(y), y \in M \end{cases} \tag{3.9}$$

é denominado **sistema autônomo com impulso**. Observe que a ideia de sistema autônomo é similar à definição usada para as EDO's, já que aqui, os momentos de impulso não dependem do tempo t.

Quando qualquer solução $y(t) = y(t, 0, y_0)$ atinge o conjunto M em qualquer instante t, o operador A transfere o ponto $y(t) \in M$ para o ponto $y(t^+) = y(t) + I(y(t)) \in N$. Desde que o sistema (3.9) seja autônomo, o movimento do ponto $y(t)$ será considerado em Ω, ao longo das trajetórias do sistema (3.9).

O exemplo a seguir mostra algumas possibilidades interessantes.

Exemplo 3.4. Se $x = (x_1, x_2)$, considere o sistema diferencial impulsivo no $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1, \\ x_2' = -\alpha x_2,\ \alpha > 0, x \notin M, \\ A : M \to N, \end{cases} \tag{3.10}$$

onde os conjuntos M, $N \subset \mathbb{R}^2$ são definidos por $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 5x_1^2 + x_2^2 = 8\}$, $N = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ e A associa a cada ponto $x \in M$ um ponto $y \in N$, $y = (y_1, y_2)$ que está sobre o raio formado pelo ponto x e a origem em $\mathbb{R}^2$.

Observe que os autovalores associados a matriz A do sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = -\alpha x_2 \end{cases} \tag{3.11}$$

são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -\alpha$ e para qualquer valor de α o ponto $(0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.11). Então, a solução geral de (3.11) é dada, de acordo com o valor de α, por:

(i) $\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\alpha t}$ se $\alpha \neq 1$ e nesse caso, o ponto de equilíbrio é um nó estável e as soluções têm as órbitas representadas pela figura (2.2), observe que se $0 < \alpha < 1$, tem-se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ e o plano de fase é como na figura (2.2), onde E_1 é o eixo x_1 e E_2 é o eixo x_2;

(ii) e $\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, se $\alpha = 1$. A órbita das soluções, neste caso, é representado pela figura (2.11).

Para fazer a análise do comportamento das soluções do sistema impulsivo (3.10), devido à simetria do problema, basta considerar o primeiro quadrante, ou seja, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Seguem os seguintes casos:

(1) Se $0 < \alpha < 1$, tem-se as seguintes situações:

(i) Se a condição inicial $\phi(t_0) = (x_1, x_2)$ satisfaz ${x_1}^2 + {x_2}^2 < 8$ então a solução é livre de efeitos impulsivos e tende a zero quando $t \to \infty$, veja a figura 3.6.

(ii) Considere agora $\phi(t_0) = (x_1, x_2)$ satisfazendo $5x_1^2 + x_2^2 \geq 8$. Então, tem-se as seguintes situações:

Caso (a): Se $0 \leq x_1 \leq 1$, então a solução que passa por (x_1, x_2) sofre um único impulso e tende ao ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$. As órbitas desta solução estão representadas na figura 3.7.

Caso (b): Considerando a condição inicial $(x_1, x_2) = (1, \sqrt{3})$ então a solução geral do sistema (3.10) sem impulso é dada por

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \sqrt{3}e^{-\alpha t} \end{pmatrix}.$$

Logo $x_2 = \sqrt{3}x_1^{-\alpha}$ e a solução $\phi(t)$ tende ao ponto de equilíbrio do sistema ao longo da curva $x_2 = \sqrt{3}x_1^{-\alpha}$ quando $t \to \infty$, sem sofrer nenhum efeito impulsivo, já que $(1, \sqrt{3})$ é um ponto fixo do operador A. O comportamento desta solução é representado na figura 3.8.

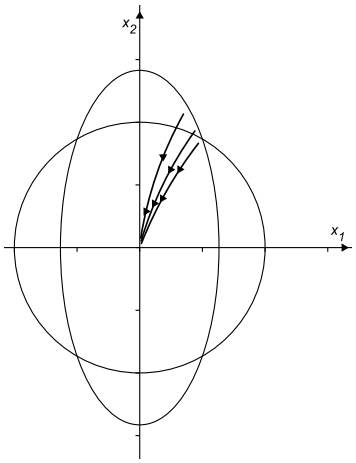

Figura 3.6: Órbita da solução do sistema (3.10) com condição inicial $\{(x_1, x_2); 5x_1^2 + x_2^2 < 8\}$.

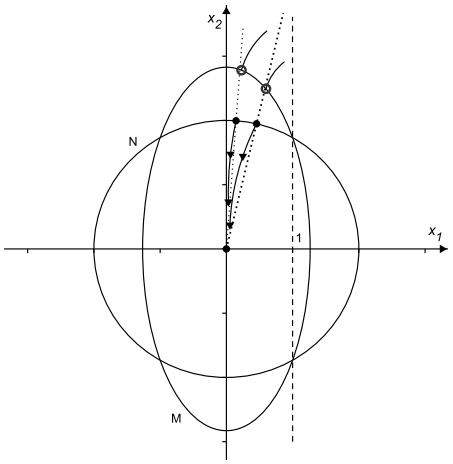

Figura 3.7: Órbita da solução do sistema (3.10) com condição inicial $\{(x_1, x_2); 5x_1^2 + x_2^2 \geq 8 \text{ e } 0 \leq x_1 \leq 1\}$.

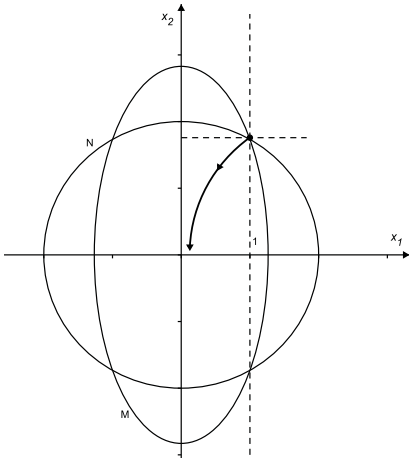

Figura 3.8: Órbita da solução do sistema (3.10) com condição inicial $(x_1, x_2) = (1, \sqrt{3})$, com $5x_1^2 + x_2^2 \geq 8$.

Caso(c): Se $1 < x_1 < \sqrt{\frac{8}{5}}$ e $0 \leq x_2 < \sqrt{3}$, a solução com condição inicial (x_1, x_2) sofre infinitos impulsos e tende a $(1, \sqrt{3})$ quando $t \to \infty$, a órbita da solução, neste caso, está representada na figura 3.9.

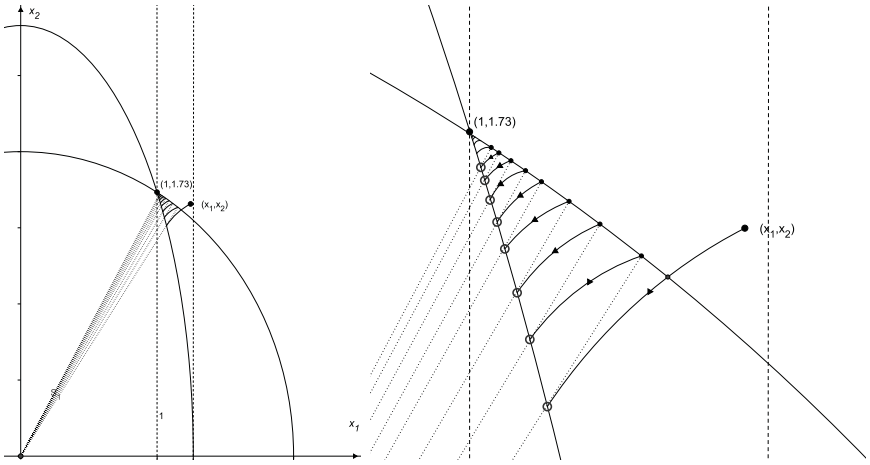

Figura 3.9: Órbita da solução do sistema (3.10) com condição inicial $\{(x_1, x_2); 1 < x_1 < \sqrt{\frac{8}{5}}$ e $0 \leq x_2 < \sqrt{3}\}$.

Caso (d): Tomando $x_1 > \sqrt{\frac{8}{5}}$ e $x_2 = 0$, a solução que começa em (x_1, x_2) sofre infinitos impulsos e a partir de um instante se torna periódica. No caso em que a condição inicial é $(2, 0)$ a componente x_2 é nula para todo t e o gráfico de x_1 é dado pela figura 3.10.

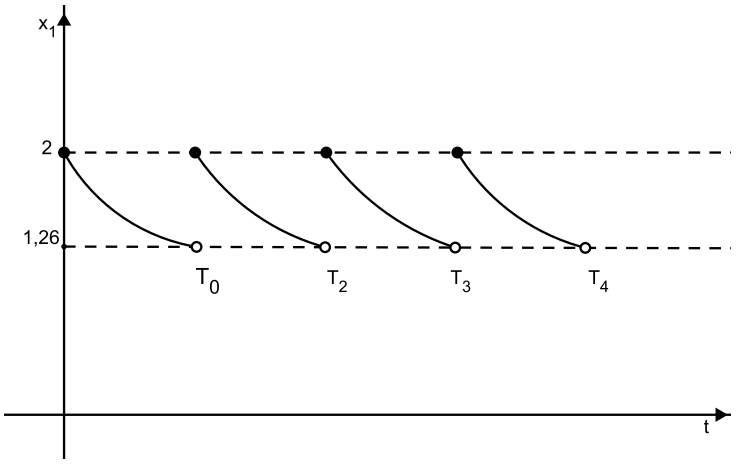

Figura 3.10: Gráfico da função $x_1(t) = 2e^{-t}$.

O período dessa solução é dado por $\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{5}{2}}$. De fato, denote o período de x_1 por T, então $\sqrt{\frac{8}{5}} = 2e^{-T} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{5}} = e^{-T} \Rightarrow e^{T} = 2\sqrt{\frac{5}{8}} =$

$2\sqrt{\frac{5\cdot 4}{8}} \Rightarrow e^T = \sqrt{\frac{5}{2}}$ aplicando ln obtém-se $T = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{5}{2}}$. A órbita da solução, neste caso é representada na figura 3.11.

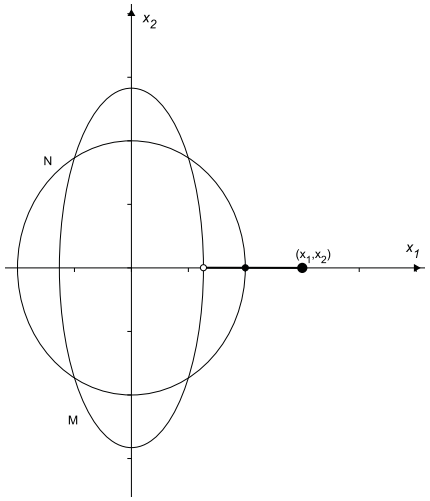

Figura 3.11: Órbita da solução do sistema (3.10), com condição inicial $\{(x_1, x_2); x_1 > \sqrt{\frac{8}{5}},\ x_2 \equiv 0\}$.

(2) Se $\alpha > 1$, tem-se:

(i) Como no caso anterior, se a condição inicial (x_1, x_2) satisfaz $5x_1^2 + x_2^2 < 8$ então a solução passando por (x_1, x_2) não sofre impulsos e tende à origem quando $t \to \infty$, veja a figura 3.12.

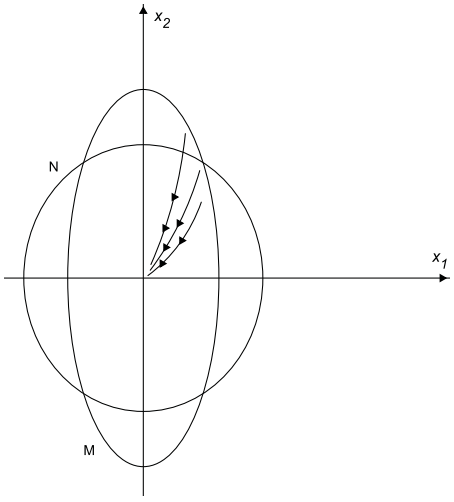

Figura 3.12: Órbita da solução do sistema (3.10), com condição inicial $\{(x_1, x_2); 5x_1^2 + x_2^2 < 8\}$.

(ii) Considere o caso $5x_1^2 + x_2^2 > 8$, neste caso, tem-se, de acordo com a condição inicial, as seguinte situações:

Caso (a): Se a condição inicial $(x_1, x_2) = (1, \sqrt{3})$ a solução não sofre impulso e tende à origem quando $t \to \infty$ ao longo curva $x_2 = \sqrt{3}x_1^{\alpha}$, já que $(1, \sqrt{3})$ é um ponto fixo do operador A. A órbita da solução é representada pela figura 3.13.

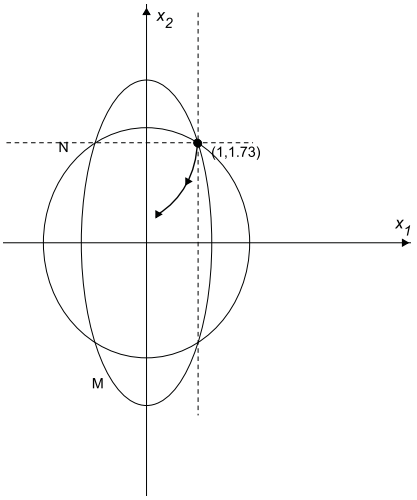

Figura 3.13: Órbita da solução do sistema (3.10), com condição inicial $(x_1, x_2) = (1, \sqrt{3})$ e $5x_1^2 + x_2^2 > 8$.

Caso (b): Se a condição inicial (x_1, x_2) satisfaz $x_2 > \sqrt{3}x_1^{\alpha}$, a solução encontra a superfície M uma única vez e tende ao ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$, o comportamento da solução é dado pela figura 3.14.

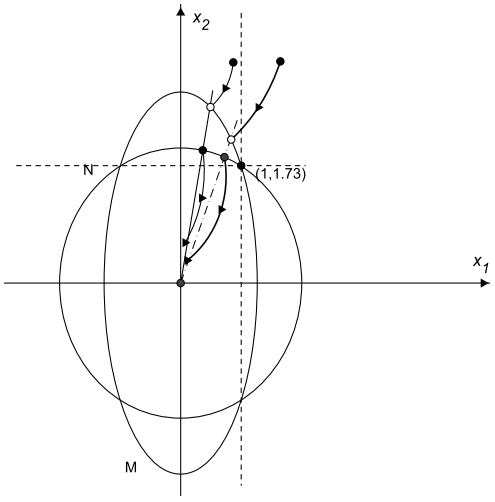

Figura 3.14: Órbita da solução do sistema (3.10), com condição inicial $\{(x_1, x_2); x_2 > \sqrt{3}x_1^{\alpha}\}$.

Caso(c): Se $x_2 < \sqrt{3}x_1^{\alpha}$, a solução que começa em (x_1, x_2) sofre infinitos impulsos. Observe que a solução que se inicia em (x_1, x_2) com $x_2 < \sqrt{3}x_1^{\alpha}$ é atraída pela órbita da solução periódica descrita no item d) do caso anterior.

Essa é uma propriedade importante no estudo qualitativo das equações diferenciais. A órbita dessa solução está representada na figura 3.15.

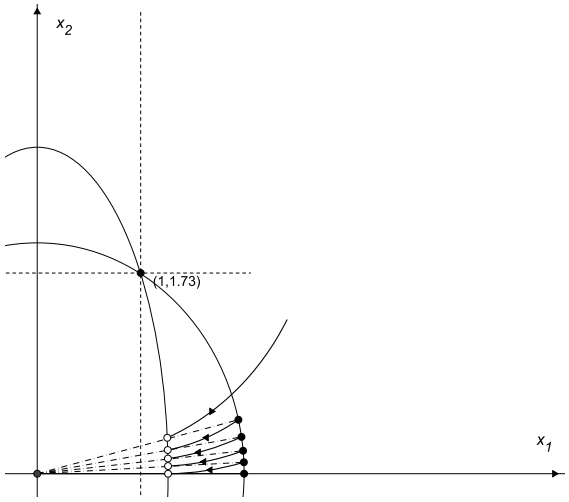

Figura 3.15: Solução do sistema (3.10), com condição inicial $\{(x_1, x_2); x_2 < \sqrt{3}x_1^{\alpha}\}$.

Caso (d) Toda solução com condição inicial (x_1, x_2) tal que $\sqrt{\frac{8}{5}} < x_1 < 2$ e $x_2 = 0$ é periódica com período $\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{5}{2}}$. Neste caso, a órbita é representada pela figura 3.11.

(3) Se $\alpha = 1$ o comportamento da solução muda apenas quando a condição inicial é dada por $\{(x_1, x_2); x_2 < \sqrt{3}x_1,\ 5x_1^2 + x_2^2 > 8\}$, onde a solução se torna periódica e se move ao longo da curva $x_2 = cx_1$. A figura 3.16 representa a órbita dessa solução.

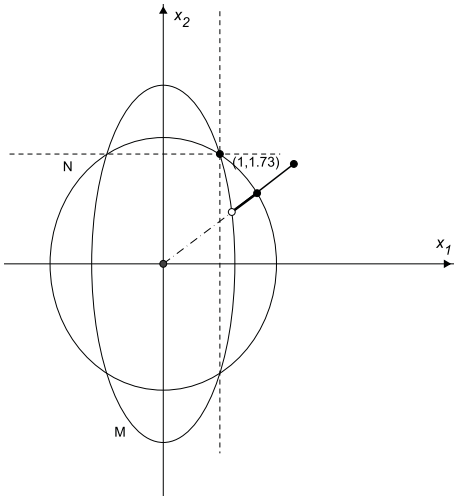

Figura 3.16: Órbita da solução do sistema (3.10), com condição inicial $\{(x_1, x_2);\ x_2 < \sqrt{3},\ 5x_1^2 + x_2^2 > 8\}$.

Para valores de (x_1, x_2) fora da região mencionada acima, a solução do sistema

tende ao ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$.

3.4 Existência e continuação

Nesta seção, os resultados clássicos sobre existência e continuação de soluções para equações diferenciais com impulso são apresentados segundo o trabalho dos autores Lakshmikantan, Bainov e Simeonov ([6]). Há, atualmente, muitos outros resultados que fornecem condições que garantem a existência de solução local e global para equações diferenciais com impulso, ver [7]. Alguns desses resultados utilizam uma certa função de Lyapunov que é seccionalmente contínua para garantir a existência global.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Suponha que para cada $k = 0, 1, 2, \ldots,\ \tau_k \in C[\Omega, (0, \infty)],\ \tau_k(y) < \tau_{k+1}(y)$ e $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \tau_k(y) = \infty$ para $y \in \Omega$. Para facilitar a notação, defina $\tau_0(y) \equiv 0$ e note que $S_k : t = \tau_k(y)$ são as superfícies.

Considere o problema de valor inicial para sistemas diferenciais impulsivos dado por:

$$\begin{cases} y' = f(t, y),\ t \neq \tau_k(y); \\ \Delta y = I_k(y),\ t = \tau_k(y); \\ y(t_0^+) = y_0,\ t_0 \geq 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

onde $f : D \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Definição 3.4. *Uma função $y : (t_0, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $\alpha > 0$, é dita* ***solução*** *de (3.12) se:*

(i) $y(t_0^+) = y_0$ *e* $(t, y(t)) \in D$ *para* $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$,

(ii) $y(t)$ *é continuamente diferenciável e satisfaz* $y'(t) = f(t, y)$ *para* $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$ *e* $t \neq \tau_k(y(t))$,

(iii) se $t \in (t_0, t_0 + \alpha)$ *e* $t = \tau_k(y(t))$, *então* $y(t^+) = y(t) + I_k(y(t))$, *e assuma que nestes t's* $y(t)$ *é contínua à esquerda e* $s \neq \tau_j(y(s))$ *para qualquer* j, $t < s < \delta + t$, *para algum* $\delta > 0$.

Observe que em vez da condição inicial usual $y(t_0) = y_0$, é imposta a condição limitante $y(t_0^+) = y_0$ que, em geral, é natural para sistemas como o (3.12) desde que (t_0, y_0) seja tal que $t_0 = \tau_k(y_0)$ para algum k. Se, ao contrário, tem-se $t_0 \neq \tau_k(y_0)$ para algum k, deve-se entender a condição inicial $y(t_0^+) = y_0$ no sentido usual, ou seja, $y(t_0) = y_0$.

Diferente dos sistemas diferenciais ordinários, o sistema (3.12) pode não ter solução mesmo que f seja contínua (ou continuamente diferenciável) já que a única solução $y(t)$ do problema $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, pode estar inteiramente sobre a superfície S_k, como mostra o exemplo que segue.

Exemplo 3.5. Considere o sistema impulsivo

$$\begin{cases} x' = 1, \ t \neq \tau_k(x), \ t \geq 0 \\ \Delta x = x^2 \ sgnx - x, \ t = \tau_k(x), \ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.13}$$

onde $\tau_k(x) = x + 6k, \ \text{para } |x| < 3$.

Considerando a condição inicial $x(1) = 1$, como a solução da equação diferencial é $x(t) = t$ e com essa condição inicial tem-se $\Delta x = 1^2 - 1 = 0$, portanto a solução do sistema sem impulso deve estar inteiramente sobre a superfície S_0, o que não é possível. Portanto, não existe solução do sistema (3.13) com condição inicial $x(1) = 1$. Veja a figura 3.17.

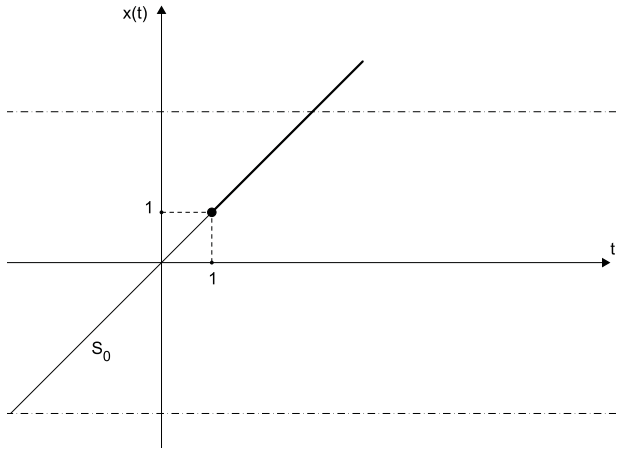

Figura 3.17: Solução do sistema (3.13).

Para evitar a situação em que a solução permanece em uma dada superfície S_k e para estabelecer uma teoria geral de existência para o sistema (3.12) é preciso algumas condições extras sobre τ_k e f além de continuidade. Como consequência disso tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Assuma que:*

(i) $f : D \to \mathbb{R}^n$ *é contínua em* $t \neq \tau_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots$, *e para cada* $(t, y) \in D$ *existe uma função* ℓ *integrável tal que*

$$|f(s, y)| \leq \ell(s); \tag{3.14}$$

(ii) se para qualquer k, $t_1 = \tau_k(y_1)$ *então existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$t \neq \tau_k(y) \tag{3.15}$$

para qualquer $0 < t - t_1 < \delta$ *e* $|y - y_1| < \delta$,

então , para cada $(t_0, y_0) \in D$ *existe uma solução* $y : [t_0, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}^n$ *do problema de valor inicial* (3.12), *para algum* $\alpha > 0$.

Demonstração. Assuma que as soluções do problema impulsivo são contínuas à esquerda, logo em t_0 pode ou não ser um instante de impulso.

Se t_0 não é um instante de impulso, ou seja, se $t_0 \neq \tau_k(y_0)$ para todo k, a existência da solução local segue do teorema de existência e unicidade das soluções para um PVI para o caso ordinário (2.3). Se t_0 é um instante de impulso, isto é, $t_0 = \tau_k(y_0)$ para algum k, considera-se o PVI para o caso ordinário:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0^+) = y_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Segue, das hipóteses (3.14) e (3.15) que existe uma solução local de (3.16), pois $t_0 = \tau_k(y_0)$ implica a existência de $\delta > 0$ tal que $t \neq \tau_k(y)$, para todo (t, y) satisfazendo $0 < t - t_0 < \delta$ e $|y - y_0| < \delta$, ou seja, a solução não encontra a mesma superfície S_k durante um intervalo de tempo suficientemente pequeno ($0 < t - t_0 < \delta$). Como $\tau_j(y) < \tau_i(y)$ para $j < i$, segue que $t \neq \tau_j(y)$ para todo $j \neq k$ e t suficientemente próximo de t_0. Assim, tem-se a solução local do sistema. □

Observação 3.1. Supondo $\tau_k(y)$ funções diferenciáveis, note $\tau_k(y) = t$ é o mesmo que $\tau_k(y) - t = 0$. Definindo $F(t, y) = \tau_k(y) - t = 0$, para k fixado, e se $\tau_k(y_0) = t_0$, temos $F(t_0, y_0) = 0$ e se $\tau_k'(y_0) \neq 0$, temos $F_y(t_0, y_0) \neq 0$. Pelo teorema das funções implícitas existe uma vizinhança de t_0 e uma função γ, definida em $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 tal que $\gamma(t_0) = y_0$, $F(t, \gamma(t)) = 0$ e $\gamma'(t) = \dfrac{F_t}{F_y}$ para $t \in I$. Mas isso contraria a hipótese (3.15).

Impondo algumas condições sobre as funções τ_k, tem-se um outro resultado sobre a existência de uma solução local.

Teorema 3.2. *Suponha que*

(i) $f : D \to \mathbb{R}^n$ *é contínua,*

(ii) $\tau_k : \Omega \to (0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots,$ *são diferenciáveis,*

(iii) se $t_1 = \tau_k(y_1)$ *para algum* $(t_1, y_1) \in D$ *e* $k \geq 1$, *então existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{\partial \tau_k(y)}{\partial y} \cdot f(t, y) \neq 1, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{3.17}$$

para $(t, y) \in D$ *tal que* $|y - y_1| < \delta$ *e* $0 < t - t_1 < \delta$.

Então, para cada $(t_0, y_0) \in D$, *existe uma solução* $y : [t_0, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}^n$ *do sistema* (3.12) *para algum* $\alpha > 0$.

Demonstração. Se $t_0 \neq \tau_k(y_0)$ para todo k, segue o resultado como no teorema 3.1. Se, por outro lado, $t_0 = \tau_k(y_0)$ para algum $k \geq 1$ e $y(t)$ é uma solução de $y' = f(t, y)$ e $y(t_0^+) = y_0$, considere $\sigma(t) = t - \tau_k(y(t))$. Então, $\sigma(t_0) = 0$ e

$$\sigma'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_k(y(t))}{\partial y} \cdot f(t, y(t)).$$

Pela condição (3.17), $\sigma'(t) \neq 0$ em uma vizinhança a direita de t_0 suficientemente pequena. Então, $\sigma(t)$ é estritamente crescente ou decrescente nessa vizinhança, além disso, $t \neq \tau_k(y(t))$ para $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ para algum $\delta > 0$. Como na prova do teorema 3.1, segue que $t \neq \tau_j(y(t))$, para $j \neq k$ e $t > t_0$ suficientemente próximo à t_0. Logo, $y(t)$ é uma solução local do problema (3.12). □

Considerando o problema de valor inicial (3.12), é importante observar que:

(i) se $t_0 \neq \tau_k(y_0)$ para todo k então a solução de (3.12) é entendida no sentido clássico;

(ii) se $t_0 = \tau_k(y_0)$, então a solução $y(t)$ de (3.12) é estendida em algum sentido, dependendo da suavidade de f.

Observe ainda que uma solução $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ de (3.12) em algum intervalo $[t_0, t_0 + \alpha)$ que sofre impulsos nos pontos t_i, $t_0 < t_i < t_0 + \alpha$, $t_i < t_j$ para $i < j$, é descrita como segue:

$$y(t) = y(t, t_0, y_0) = \begin{cases} y(t, t_0, y_0),\ t_0 \leq t \leq t_1, \\ y(t, t_1, y_1^+),\ t_1 < t \leq t_2, \\ \qquad \ldots \\ y(t, t_i, y_i^+),\ t_i < t \leq t_{i+1} \\ \qquad \ldots \end{cases} \tag{3.18}$$

onde $y_i^+ = y_i + I_k(y_i)$ e $y_i = y(t_i^+)$. Consequentemente, mesmo quando $t_0 \neq \tau_k(y_0)$, é possível que para algum i, (t_i, y_i^+) esteja sobre uma superfície S_j. Neste caso, a solução $y(t, t_0, y_0)$ no intervalo $t_i < t < t_{i+1}$ consiste em $y(t, t_i, y_i^+)$ que é uma solução de (3.12) em $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ no sentido estendido.

Quanto à continuação das soluções de (3.12) à direita, assim como no caso clássico, dada uma solução $y(t)$ de (3.12) definida em $[t_0, t_0 + \alpha)$ com $\alpha > 0$, diz-se que uma solução $x(t)$ de (3.12) definida em $[t_0, t_0 + \beta)$ é uma continuação própria à direita de $y(t)$ se $\beta > \alpha$ e $y(t) = x(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$. O intervalo $[t_0, t_0 + \alpha)$ é dito **intervalo maximal** de existência de $y(t)$, se $y(t)$ está definida em $[t_0, t_0 + \alpha)$ e não tem nenhuma continuação própria à direita.

Quanto à continuação das soluções de (3.12), é importante observar que as mesmas conclusões válidas para o caso clássico são asseguradas aqui. Isto é, para uma solução $y(t)$ do sistema (3.12) com intervalo maximal de existência $[t_0, t_0 + \alpha)$, se $\alpha < \infty$, então $y(t)$ se aproxima da fronteira de Ω ou $|y(t)|$ se torna ilimitado quando $t \longrightarrow (t_0 + \alpha)^-$. Tem-se então, o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema 3.3. *Sejam* $\Omega = \mathbb{R}^n$,

(i) $f : D \to \mathbb{R}^n$ *contínua e*

(ii) $I_k \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$, $\tau_k \in C[\Omega, (0, \infty)]$, *para todo* $k \geq 1$.

Então, para qualquer solução $y(t)$ *do sistema* (3.12) *com um intervalo finito* $[t_0, \beta)$ *como seu intervalo maximal de existência, tem-se*

$$\lim_{t \longrightarrow \beta^-} |y(t)| = \infty,$$

desde que uma das três condições seguintes seja satisfeita:

(a) para qualquer $k \geq 1$, $t_1 = \tau_k(y_1)$ *implica a existência de um* $\delta > 0$ *tal que* $t \neq \tau_k(y)$ *para todo* (t, y) *com* $0 < t - t_1 < \delta$ *e* $|y - y_1| < \delta$,

(b) para todo $k \geq 1$, $t_1 = \tau_k(y_1)$ *implica que* $t_1 \neq \tau_j(y_1 + I_k(y_1))$ *para todo* $j \geq 1$,

(c) $\tau_k \in C^1[\Omega, (0, \infty)]$, *para todo* $k \geq 1$, *e* $t_1 = \tau_k(y_1)$ *implica* $t_1 = \tau_j(y_1 + I_k(y_1))$ *para algum* $j \geq 1$ *e*

$$\frac{\partial \tau_j(y_1^+)}{\partial y} \cdot f(t_1, x_1^+) \neq 1,$$

onde $y_1^+ = y_1 + I_k(y_1)$.

Desde que a existência local seja garantida, pode-se assegurar a existência global das soluções do sistema (3.12) através do teorema:

Teorema 3.4. *Assuma as hipóteses do teorema 3.2. Suponha, além disso, que não há fenômeno pulso em* (3.12) *e*

$$|f(t, y)| \leq g(t, |y|), \ (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \tag{3.19}$$

$$|y + I_k(y)| \leq |y|, \ y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.20}$$

onde $g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$, $g(t, u)$ *é não decrescente em* u, *para cada* $t \in \mathbb{R}_+$. *Seja* $r(t) = r(t, t_0, u_0)$ *a solução maximal de*

$$u' = g(t, u), \ u(t_0) = u_0 > 0 \tag{3.21}$$

no intervalo $[t_0, \infty)$. *Então, o maior intervalo de existência de qualquer solução* $y(t, t_0, y_0)$ *de* (3.12) *tal que* $|y_0| \leq u_0$ *é* $[t_0, \infty)$.

Demonstração. Considere $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ uma solução de (3.12) com $|y_0| \leq u_0$ que existe em $[t_0, \beta)$, $\beta < \infty$, onde β não pode ser estendido. Seja $m(t) = |y(t)|$, $t_0 \leq t \leq \beta$, como $\tau_k(y) \to \infty$ quando $k \to \infty$ e não existe fenômeno pulso para (3.12), segue que $y(t)$ encontra apenas um número finito de superfícies S_i em $t_0 \leq t \leq \beta$. Sejam t_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, os momentos nos quais $y(t)$ toca essas superfícies, então, usando (3.19) e (3.20), obtém-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} D_- m(t) \leq g(t, m(t)), \ t \neq t_i \\ m(t_i^+) \leq m(t_i) \\ m(t_0) \leq u_0. \end{cases} \tag{3.22}$$

De fato,

(i) se $m(t) \equiv 0$ para $t \in (t_0, \beta)$, $t \neq t_i$, então $D_-m(t) = 0 \leq g(t, m(t))$ pois a imagem de g está contida em $\mathbb{R}_+$;

(ii) se existe $s \in (t_0, \beta)$ com $m(s) = 0$, $s \neq t_i$, então como $m(t) = |y(t)|$ é contínua nos intervalos (t_i, t_{i+1}), $i = 1, \ldots, p$, segue que $D_-m(s) = 0 \leq g(s, m(s))$;

(iii) se $m(t) \neq 0$, para todo $t \in (t_0, \beta)$, $t \neq t_i$, então então $D_-m(t) = \dfrac{y(t)}{|y(t)|} \cdot y'(t)$ logo $|D_-m(t)| = |y'(t)|$ e, portanto $D_-m(t) \leq |D_-m(t)| = |y'(t)|$, mas $|y'(t)| = |f(t, y(t)| \leq g(t, |y(t)|) = g(t, m(t))$.

É válido que:

$$m(t) = |y(t)| \leq r(t),\ t_0 \leq t \leq \beta, \tag{3.23}$$

pois, como $r(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} u(t, \varepsilon)$, uniformemente, em $[t_0, \beta]$, onde $u(t, \varepsilon)$ é qualquer solução de

$$u' = g(t, u) + \varepsilon,\ u(t_0) = u_0 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0, \tag{3.24}$$

segue que para provar (3.23), basta mostrar que $m(t) < u(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t \leq \beta$. Suponha que isso não ocorre, isso significa que existe um t^* tal que $t_i < t^* \leq t_{i+1}$, para algum i, $1 \leq i \leq p-1$, satisfazendo $m(t^*) \geq u(t^*, \varepsilon)$ e $m(t) < u(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t \leq t_i$. Segue de (3.22) que $m(t_i^+) \leq u(t_i, \varepsilon)$ logo, existe um t^0 tal que $t_i \leq t^0 \leq t^*$, que satisfaz

$$m(t^0) = u(t^0, \varepsilon) \text{ e } m(t) \leq u(t, \varepsilon),\ t_i \leq t < t^0.$$

Defina $H(t) = m(t) - u(t, \varepsilon)$, $t \in [t_i, t^0)$, então $H(t^0) = 0$, $H(t) \leq 0$ e $H'(t^0) = D_-m(t^0) - u'(t^0, \varepsilon) \geq 0$. Daí segue que $D_-m(t^0) \geq u'(t^0, \varepsilon)$ e

$$g(t^0, u(t^0, \varepsilon)) + \varepsilon = u'(t^0, \varepsilon) \leq D_-m(t^0) \leq g(t^0, m(t^0)) = g(t^0, |y(t^0)|)$$

o que significa que $g(t^0, u(t^0, \varepsilon)) + \varepsilon \leq g(t^0, m(t^0))$. Mas como g é não decrescente, tem-se uma contradição. Então, (3.23) está garantido.

Observe que $y(t)$ satisfaz a equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds + \sum_{t_0 < t_i < t} I_i(y(t_i)), i = 1, 2, \ldots, p.$$

Além disso, para qualquer $s_1 < s_2$ com $t_p < s_1$, $s_2 < \beta$, observe que t_p é o último instante de impulso, segue de (3.19), (3.23) e a monotonicidade de g que

$$|y(s_2) - y(s_1)| \leq \int_{s_1}^{s_2} |f(\xi, y(\xi))|d\xi \leq \int_{s_1}^{s_2} g(\xi, |y(\xi)|)d\xi \leq \int_{s_1}^{s_2} g(\xi, r(\xi))d\xi = r(s_2) - r(s_1). \tag{3.25}$$

Desde que $\lim_{t \longrightarrow \beta^-} r(t) = r(\beta)$, tomando o limite quando $t_1, t_2 \longrightarrow \beta^-$ e usando o critério de convergência de Cauchy, segue de (3.25) que $\lim_{t \longrightarrow \beta^-} y(t)$ existe. Defina $y(\beta, t_0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow \beta^-} y(t)$ e considere o sistema (3.12) com $y(\beta) = y(\beta, t_0, y_0)$. Pelo teorema 3.3, tem-se que $y(\beta, t_0, y_0)$ pode ser continuada além de β, contradizendo a suposição de que β não pode ser estendido. Então, toda solução $y(t)$ de (3.12) com $|y_0| \leq u_0$ existe em $[t_0, \infty)$, o que prova o teorema. □

Pode-se provar existência global das soluções do sistema (3.12) sob as hipóteses do teorema 3.3, enfraquecendo consideravelmente as condições do teorema 3.4, como segue.

Teorema 3.5. *Assuma que as hipóteses do teorema 3.3 são válidas e suponha que para* $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$,

$$[y, f(t,y)]_+ \equiv \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}[|y + h \cdot f(t,y)| - |y|] \leq g(t, |y|) \tag{3.26}$$

$$|y + I_k(y)| \leq |y|,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.27}$$

onde $g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ *e* $r(t) = r(t, t_0, y_0)$ *é a solução maximal de* (3.21) *definida no intervalo* $[t_0, \infty)$. *Então a conclusão do teorema 3.4 permanece verdadeira.*

Demonstração. Sejam $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ uma solução de (3.12) tal que $|y_0| \leq u_0$ e $[t_0, \beta),\ \beta < \infty$ o intervalo maximal de existência. Tome $m(t) = |y(t)|$ para $t_0 \leq t < \beta$. Então, segue de (3.26) e (3.27) as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} D^+m(t) \leq g(t, m(t)),\ t \neq \tau_k(y(t)), \\ m(t^+) \leq m(t),\ t = \tau_k(y(t)), \\ m(t_0) \leq u_0, \end{cases} \tag{3.28}$$

onde $D^+m(t)$ representa a derivada à direita de $m(t)$. Segue disso que

$$m(t) \leq r(t),\ t_0 \leq t < \beta. \tag{3.29}$$

Já que, neste caso, pode haver um número infinito de impulsos para $y(t)$ no intervalo $t_0 \leq t < \beta$, a demonstração de (3.29) será feita através de uma prova indireta. Para isso, considere o PVI:

$$\begin{cases} u' = G(t,u),\ t \neq t_k, \\ u(t_k^+) = u(t_k),\ t = t_k, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{3.30}$$

onde $G(t,u) = g(t, p(t,u))$, $p(t,u) = \max\{m(t), u\}$ e t_k são momentos de impulso para $y(t)$ em $t_0 \leq t < \beta$. Se $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ é qualquer solução de (3.30), basta mostrar que

$$m(t) \leq u(t) \text{ para } t_0 \leq t < \beta \tag{3.31}$$

Suponha que não ocorre (3.31), isso significa que existe um $t_0 \leq t < \beta$ tal que $m(t) > u(t)$. Considere $t^* = \inf\{t; t_0 \leq t < \beta \text{ e } m(t) > u(t)\}$, tem-se $m(t) \leq u(t)$ para $t_0 \leq t < t^*$ e $m(t^*) \leq u(t^*)$, já que $m(t)$ é contínua à esquerda e $u(t)$ contínua. Seguem duas possibilidades:

(i) Se $t^* \neq \tau_k(y(t^*))$, para todo $k \geq 1$, trata-se do caso usual, ou seja, $m(t^*) = u(t^*)$. Logo, existe um $t^0 > t^*$ tal que

$$m(t^0) \geq u(t^0) \text{ e } D^+m(t^0) > u'(t^0). \tag{3.32}$$

(ii) Se $t^* = \tau_k(y(t^*))$ para algum $k \geq 1$, segue que

$$m(t^{*+}) \leq m(t^*) \leq u(t^*) = u(t^{*+}).$$

Consequentemente, é possível encontrar um $t^0 > t^*$ que satisfaz as relações (3.32). Basta considerar $H(t) = m(t) - u(t)$, então $H(t^0) \geq 0$ e $H'(t^0) = D^+m(t^0) - u'(t^0) > 0$, isto é, $D^+m(t^0) > u'(t_0)$. Logo, já que para $t = t^0$, $p(t,u) = m(t^0)$, segue

$$g(t^0, m(t^0)) \geq D^+m(t^0) > u'(t^0) = G(t^0, u(t^0)) = g(t^0, m(t^0)),$$

o que é uma contradição. Então, a desigualdade (3.31) é verdadeira o que implica que $u(t)$ também é uma solução de (3.21). Já que $u(t) \leq r(t)$ para $t_0 \leq t < \beta$, a desigualdade (3.29) é verdadeira não podendo ocorrer $\lim_{t \longrightarrow \beta^-} |y(t)| = \infty$. Então, pelo teorema 3.3, o maior intervalo de existência de $y(t)$ é $[t_0, \infty)$, o que completa a prova. □

3.4.1 Unicidade de solução

Nesta seção será mostrada a unicidade da solução de um PVI impulsivo. Para isso, é preciso enunciar o lema a seguir, que trata de desigualdades diferenciais que são úteis quando o objetivo é comparar duas soluções de um sistema impulsivo.

Lema 3.1. *Assuma $m(t) \in PC^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ é contínua a esquerda em t_k. Suponha, além disso, que*

(i) $g \in [\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $\psi_k : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ não decrescente em u e, para cada $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{cases} D^-m(t) \leq g(t, m(t)),\ t \neq t_k,\ m(t_0) \leq u_0 \\ m(t_k^+) \leq \psi_k(m(t_k)); \end{cases}$$

(ii) $r(t)$ é a solução maximal definida em $[t_0, \infty)$ de

$$\begin{cases} u' = g(t,u),\ t \neq t_k,\ u(t_0) = u_0 \\ u(t_k^+) = \psi_k(u(t_k)),\ t_k > t_0 \geq 0, \end{cases}$$

onde $g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$.

Então $m(t) \leq r(t),\ t \in [t_0, \infty)$.

A demonstração deste lema será omitida neste trabalho, mas poderá ser encontrada em [6].

Considere o PVI para o sistema diferencial impulsivo (3.12), para garantir a unicidade serão admitidas condições sobre a função f e sobre a unicidade de solução de um certo PVI ordinário.

Teorema 3.6. *Suponha* $f \in C[\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^n]$, $g \in (C[t_0, t_0+a]\times[0, 2b], \mathbb{R}_+)$ *e, para* $(t, y), (t, x) \in \mathbb{R}_0$,

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq g(t, |y - x|), \tag{3.33}$$

onde $\mathbb{R}_0 = \{(t, y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$. *Suponha, além disso, que para qualquer* t^* *com* $t_0 \leq t^* < t_0 + a$, *o PVI*

$$u' = g(t, u), \qquad u(t^*) = 0, \tag{3.34}$$

tem uma única solução $u(t) = 0$ *em* $[t^*, t_0 + a]$. *Então, o problema* (3.12) *possui no máximo uma solução sobre* $[t_0, t_0 + a]$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem duas soluções distintas $y(t)$ e $x(t)$ do problema (3.12) em $[t_0, t_0 + a]$. Defina $m(t) = |y(t) - x(t)|, \quad t \in [t_0, t_0 + a]$ e $\Omega = \{t; t \geq t_0 \text{ e } m(t) > 0\}$. Logo, $\Omega \neq \emptyset$.

Se $t^* = \inf \Omega$, então $m(t) = 0$, para todo $t \in [t_0, t^*)$ e $m(t^*) = 0$, pois $y(t)$ e $x(t)$ são contínuas à esquerda. Logo, $y(t^*) = x(t^*)$.

Se $t^* \neq \tau_k(y(t^*))$ para todo $k \geq 1$ então tem-se $t^* \neq \tau_k(x(t^*))$, pois $y(t^*) = x(t^*)$. Se existir $k \geq 1$ tal que $t^* = \tau_k(y(t^*))$ então $t^* \neq \tau_k(x(t^*))$. Então $m(t^*) = 0$ e também $m(t^*_+) = 0$, já que $y(t^*_+) = I_k(y(t^*)) = I_k(x(t^*)) = x(t^*_+)$ se t^* for um instante de impulso.

Usando (3.33) segue que

$$D_- m(t) \leq |f(t, y) - f(t, x)| \leq g(t, |y - x|) = g(t, m(t)),$$

para $t \in [t_0, t_0 + a)$. Pelo lema 3.1, existe $\delta > 0$ tal que

$$m(t) = r(t), \qquad t^* \leq t < t^* + \delta, \tag{3.35}$$

onde $r(t) = r(t, t^*, 0)$ é uma solução maximal de (3.34). Por hipótese tal solução é nula, isto é, $r(t) \equiv 0$. Segue de (3.35) que $m(t) = 0$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ o que é uma contradição já que t^* é o ínfimo do conjunto Ω. Logo, $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + a]$. □

Da prova do teorema 3.6, segue como consequência o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *A unicidade das soluções do PVI*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

para todo (t_0, y_0) *implica a unicidade das soluções do problema 3.6.*

3.5 Aplicação: modelo presa-predador impulsivo

Nesta seção será apresentado um modelo impulsivo do tipo presa-predador. Através de resolução deste exemplo é possível perceber que as soluções consideradas são possíveis de sucesso através da manipulação das dificuldades numéricas que surgem quando são acrescidas as condições de impulso. O principal objetivo deste modelo é a conservação biológica de ambas as espécies que compõem o sistema no qual uma espécie de peixes é capturada para consumo humano, além disso, este é o único recurso de alimento da espécie de predadores. Por este motivo, busca-se estabelecer uma estratégia de cotas estável para a pesca, de forma a preservar ambas as espécies, presa e predador.

Chame de $N(t)$ e $H(t)$ as densidades de presas e predadores, respectivamente, em um instante t. Assuma que as presas são capturadas quando a densidade da sua população alcança um limite Y, a uma proporção p dessa população, tal que $p \in (0,1)$. O modelo descrito é dado pelo sistema:

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right) - aN(t)H(t) \\ H'(t) = abN(t)H(t) - dH(t) \end{cases} \quad \text{para } N(t) \neq Y, \tag{3.36}$$

e

$$\begin{array}{l} \Delta N(t) = N(t^+) - N(t^-) = -pN(t) \\ \Delta H(t) = H(t^+) - H(t^-) = 0 \end{array} \quad \text{para } N(t) = Y. \tag{3.37}$$

onde r é a taxa de crescimento da população de presas, K é a capacidade ambiental de suporte, $aH(t)$ é a taxa *per capita* de predação, que é convertida em biomassa predadora a uma taxa de conversão b, e d é a taxa de mortalidade da espécie predadora.

Note que, para o caso sem impulso, os pontos de equilíbrio do sistema (3.36) são $(0,0)$, $(K,0)$ e $\left(\dfrac{d}{ab}, \dfrac{r}{a}\left(1 - \dfrac{d}{abK}\right)\right)$.

O teorema 2.6 garante que o comportamento das soluções do sistema (3.36) (que é não-linear) próximo ao ponto de equilíbrio $(\bar{N}, \bar{H})$ é equivalente ao comportamento da solução do sistema linearizado em uma vizinhança $V(\bar{N}, \bar{H})$ desse ponto. Portanto, será analisado o comportamento da solução do sistema linearizado que pode ser obtido através da matriz jacobiana correspondente ao sistema (3.36), denote $F_1(N,H) = rN(1 - N/K) - aNH$ e $F_2(N,H) = abNH - dH$, assim:

$$J_{(\bar{N},\bar{H})} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial N}(\bar{N},\bar{H}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial H}(\bar{N},\bar{H}) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial N}(\bar{N},\bar{H}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial H}(\bar{N},\bar{H}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\left(1 - 2\dfrac{\bar{N}}{K}\right) - a\bar{H} & -a\bar{N} \\ \\ ab\bar{H} & ab\bar{N} - d \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Se é considerada o ponto $(\bar{N}, \bar{H}) = (0,0)$, tem-se a matriz jacobiana dada por:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

então, o polinômio característico é dado por $P_{(0,0)}(\lambda) = (r-\lambda)(-d-\lambda)$ e as raízes são dadas por $\lambda_1 = r$ e $\lambda_2 = -d$. Portanto, neste caso, o comportamento da solução em uma vizinhança do ponto $(0,0)$ é representado pela figura 2.4, para o caso sem impulso.

Se $(\bar{N}, \bar{H}) = (K, 0)$, tem-se que

$$J_{(K,0)} = \begin{pmatrix} -r & -aK \\ 0 & abK - d \end{pmatrix}$$

então $P_{(K,0)}(\lambda) = (-r-\lambda)(abK - d - \lambda)$. E segue que $\lambda_1 = -r$ e $\lambda_2 = abK - d$ e tem-se as seguintes situações:

(i) se $abK > d$ tem-se $\lambda_2 > 0$, e então, a órbita da solução é representada na figura 2.4;

(ii) se $abK = d$ então $\lambda_2 = 0$. Logo, a solução se comporta como a função exponencial;

(iii) se $abK < d$, então $\lambda_2 < 0$. Neste caso, o ponto de equilíbrio é um nó estável e a órbita da solução é representada pela figura 2.2.

Por fim, se $(\bar{N}, \bar{H}) = \left(\frac{d}{ab}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{d}{abK}\right)\right)$, então a matriz jacobiana é dada por

$$J_{(\bar{N},\bar{H})} = \begin{pmatrix} -\frac{dr}{abK} & -\frac{d}{b} \\ r\left(b - \frac{d}{aK}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico de J é $P_{(\bar{N},\bar{H})}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{-dr}{abK}\lambda + dr - \frac{d^2r}{abK}$, assim

$$\Delta = \frac{d^2r^2}{a^2b^2K^2} + 4\frac{d^2r}{abK} - 4dr \text{ e } \lambda = \left(\frac{-dr}{abK} \pm \sqrt{\Delta}\right)/2.$$

Segue que:

1. se $\Delta > 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\lambda_1 = \left(-\frac{dr}{abK} - \sqrt{\Delta}\right)/2 < 0 \text{ e } \lambda_2 = \left(-\frac{dr}{abK} + \sqrt{\Delta}\right)/2$$

logo $\lambda_2 > 0$ ou $\lambda_2 < 0$. Segue que:

(i) se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ então o ponto de equilíbrio é um ponto de sela e a órbita da solução está representada na figura 2.4;

(ii) se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, então o ponto de equilíbrio é um nó estável.

2. se $\Delta < 0$ então λ_1, λ_2 são números complexos conjugados, cuja parte real é um número menor do que zero. Logo a órbita da solução é uma espiral e é representada pelas figuras 2.8 e 2.9.

No caso em que $r = 1,\ K = 1,\ a = 2,\ b = 1$ e $d = 1$, a matriz J é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

então, o polinômio característico é $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}$. Logo, se $P(\lambda) = 0$ tem-se $\Delta = -\frac{7}{4}$ e $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$. Portanto, a órbita da solução é a espiral representada na figura 2.8.

Neste caso, o sistema ordinário, presa-predador, oscila para o equilíbrio, ou seja, há coexistência entre as espécies.

Note que $\Delta \neq 0$, pois se $\Delta = 0$ tem-se um único autovalor $\lambda = -\frac{dr}{abK}$, ao calcular o(s) autovetor(es) associado(s) a λ obtém-se:

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{b} \\ \\ r\left(b - \frac{d}{aK}\right) & \frac{dr}{abK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$-\frac{d}{b}v_2 = 0$$

$$r\left(b - \frac{d}{aK}\right)v_1 + \frac{dr}{abK}v_2 = 0.$$

Então, tem-se $v_2 = 0$ e $r(b - d/aK) = 0$ o que implica $r = 0$, que é absurdo, ou $b = d/aK$, então neste caso $\lambda = -r$, gerando um único autovetor e tem-se a figura 2.4.1.

Quando o sistema é sujeito a captura das presas, a dinâmica da sua solução muda significativamente conforme o valor do limite Y.

Considere, a princípio, que $H \equiv 0$. Neste caso, a evolução do sistema sem impulso, se dá de acordo com a equação logística, apresentada no exemplo 2.1. Aplicando a condição de impulso, e considerando a condição inicial próxima ao ponto de equilíbrio, segue que:

1. se $0 < Y < K$, tem-se:

   (i) considerando $0 < N_0 < Y$, a solução é periódica e é representada pela figura 3.18.

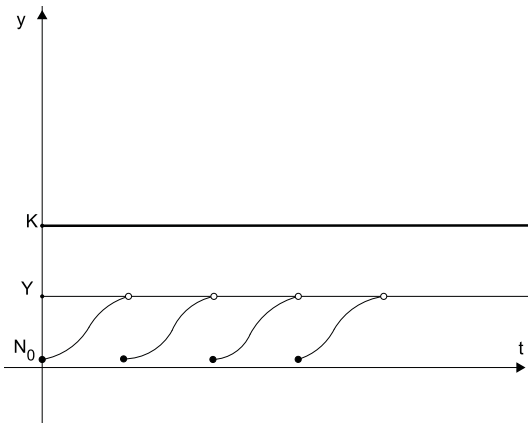

Figura 3.18: Solução do sistema (3.36) com impulso, considerando $H \equiv 0$ com condição inicial $N_0 = K$ e $0 < N_0 < Y$ e com $0 < Y < K$.

(ii) se $Y < N_0 < K$ a órbita da solução é idêntica à da equação logística, ou seja, não há efeitos impulsivos.

2. Se $Y > K$, considere as seguintes situações:

(i) se $K < N_0 < Y$ a solução é livre de efeitos impulsivos e o seu comportamento se dá de acordo com a equação logística.

(ii) se $N_0 > Y$ a solução sofre um único impulso e passa a se comportar como a solução da equação logística. A órbita, neste caso, é representada pela figura 3.19.

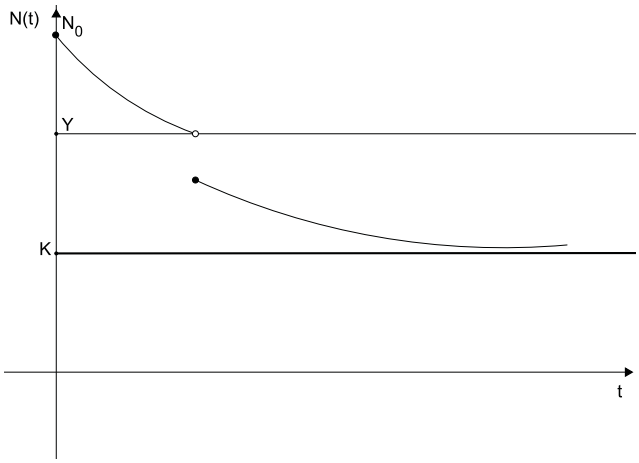

Figura 3.19: Solução do sistema (3.36) com impulso, considerando $H \equiv 0$ com condição inicial $N_0 = K$ e $N_0 > Y$, com $Y > K$.

Se, por outro lado, $H \neq 0$, considere o ponto de equilíbrio

$$(\bar{N}, \bar{H}) = \left(\frac{d}{ab}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{d}{abK}\right)\right), \text{ com } \frac{d}{ab} \neq Y,$$

que é o caso para o qual é possível a coexistência entre as espécies, se $\bar{N} \neq Y$ é sempre possível obter uma vizinhança $V(\bar{N}, \bar{H})$ que não encontra a reta $N = Y$ e pelo teorema de Hartman-Grobman, o comportamento da solução próximo ao ponto de equilíbrio $(\bar{N}, \bar{H})$ é equivalente ao comportamento da solução do problema sem impulso nessa vizinhança, ou seja, a solução não sofrerá impulsos e o comportamento é similar ao descrito pela figura 2.8. Note que existe uma vizinhança $V(\bar{N}, \bar{H})$ suficientemente pequena deste ponto de equilíbrio tal que $V(N_0, H_0) \cap \{(N, H); N = Y \text{ e } H \neq 0\} = \emptyset$.

Conclusão

Os efeitos impulsivos podem interferir no comportamento assintótico das soluções de um PVI, podendo mudar consideravelmente a natureza destas soluções, como foi possível constatar nos exemplos apresentados neste trabalho.

Observa-se pela aplicação descrita na seção 3.5, no caso de ausência de predadores, que a ação impulsiva contribuiu para a existência de solução periódica (ver figura 3.18). Essa informação é relevante no estudo de modelos de dinâmica populacional (assim como problemas de economia), pois há informação sobre existência de ciclos. Por outro lado, o problema sem efeito de impulso nunca apresentaria soluções periódicas (ver exemplo 2.1 no capítulo 2). Isto também pode ser observado no exemplo 3.4, capítulo 3.

Um outro ponto interessante, ilustrado ainda na aplicação, é que o comportamento assintótico do problema sem impulso foi preservado mesmo com o acréscimo da ação impulsiva (figura 3.19), ou seja, o equilíbrio $N(t) = K$ permanece estável, com condição inicial N_0 satisfazendo $K < Y < N_0$. O mesmo pode ser observado no exemplo 3.2 no capítulo 3.

Analisando o exemplo 3.3, no capítulo 3, nota-se que a ação impulsiva promoveu a propriedade de estabilidade para a solução de equilíbrio $x \equiv 0$ do problema, enquanto que o mesmo problema sem impulso não apresenta tal propriedade.

Conclui-se destas análises que o efeito impulsivo, em muitas situações, melhora o acomportamento das soluções, isto é, contribui para o aparecimento de soluções estáveis, assim como de soluções eriódicas, além de modelar de forma mais realística um dado fenômeno natural (biológico, físico, econômico, médico, etc).

Referências

[1] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de Álgebra Linear*. São Paulo: EDUSP, 2007.

[2] BRAUN, M. *Equações diferenciais e suas aplicações*. [S.l.]: Editora Campus, 1979.

[3] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. 2. ed. New York: Huntington, 1980.

[4] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer, 1996.

[5] KRUGER-THIEMER, E. Formal theory of drug dosage regiments. *Int. J. Theo. Biology*, v. 13, 1966.

[6] LAKSHMIKANTAN, V.; BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1989.

[7] SHEN, J.; LIU, X. Global existence results for impulsive differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 314, p. 546–557, 2006.

[8] BRAUER, F.; NOHEL, J. A. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equation*. Toronto-Canadá: General Publishing Company, 1969.

[9] CRONIN, J. *Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory*. Michigan University: M. Dekker, 1980.

[10] FIGUEIREDO, D. G.; FERREIRA, A. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.

[11] CORWIN, S. P.; THOMPSON, S.; WHITE, S. M. Solving odes and ddes with impulses. *Journal of numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*, v. 3, p. 139–149, 2008.

[12] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas da Valores de Contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2006.