



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Ilha Solteira

JÉSSICA MESQUITA RODRIGUES

**PROJETO DE CONTROLADORES LQR-LMI APLICADOS A SISTEMAS
DINÂMICOS**

ILHA SOLTEIRA – SP

2021

Jéssica Mesquita Rodrigues

**PROJETO DE CONTROLADORES LQR-LMI APLICADOS A SISTEMAS
DINÂMICOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia Elétrica, da Universidade Estadual Paulista como requisito parte das exigências para a obtenção do título de Engenheira Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção

ILHA SOLTEIRA – SP

2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R696p Rodrigues, Jéssica Mesquita.
Projeto de controladores LQR-LMI aplicados a sistemas dinâmicos / Jéssica Mesquita Rodrigues. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
46 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) -
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, 2021

Orientador: Edvaldo Assunção
Inclui bibliografia

1. Regulador Linear Quadrático (LQR). 2. Controle robusto. 3. Análise de factibilidade. 4. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 5. Helicóptero de bancada 3-DOF.

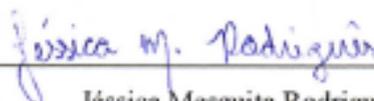

Raiane da Silva Santos

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos vinte e seis dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e um, a discente *Jéssica Mesquita Rodrigues*, matriculado sob o nº 152054839, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Edvaldo Assunção*, *MSc. Marco Antonio Leite Beteto* e o *MSc. Bruno Sereni*, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "PROJETO DE CONTROLADORES LQR-LMI APLICADOS A SISTEMAS DINÂMICOS" obtendo a nota 10,0 (dez) e conceito aprovado.



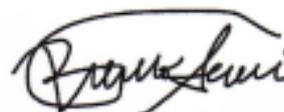
Edvaldo Assunção
- orientador -



Jéssica Mesquita Rodrigues
- discente -



MSc. Marco Antonio Leite Beteto
- Membro da Banca -



MSc. Bruno Sereni
- Membro da Banca -

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades perante um ano complexo e diferente de tudo que a população mundial já enfrentou. À UNESP, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram que fosse possível chegar até essa etapa de minha vida.

Ao meu orientador Edvaldo Assunção, pelo suporte, pela oportunidade, pelas suas correções e incentivos.

Aos meus pais e ao meu namorado William Lucas, por sempre acreditarem em mim, no meu potencial e jamais duvidarem mesmo em meus momentos de fraqueza. À minha irmã, por me tornar seu exemplo e me fortalecer.

Aos meus amigos da graduação, principalmente as meninas que moraram comigo, e, em especial ao Marco Beteto por sempre me auxiliar em meus estudos, nas minhas dúvidas no decorrer desse projeto e se mostrar um grande amigo.

Ao programa CNPq/PIBIC pelo financiamento do projeto de pesquisa.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, a qual foi uma grande jornada com altos e baixos, porém com diversos momentos de felicidade e conquistas.

“O importante é não parar de questionar. A curiosidade tem a sua própria razão para existir”.

(Einstein)

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, o estudo de projeto de controladores LQR via LMI para um helicóptero de bancada sujeito a falha em um de seus motores para as formulações em LQR clássica, estabilidade estendida via lema de Finsler e estabilidade estendida via lema da Projeção Recíproca, a fim de verificar a diferença entre as regiões de factibilidade e o desempenho em geral. Para a realização do projeto, foi utilizado o software MATLAB/Simulink[®] na programação dos métodos clássico, estabilidade estendida via lema de Finsler e estabilidade estendida via lema da Projeção Recíproca. Também foi investigada a influência do parâmetro b , introduzido através da técnica de relaxação via lema de Finsler ao problema de otimização quadrática com restrição e que torna a função de Lyapunov dependente de parâmetros, no desempenho e região de factibilidade do controlador LQR via lema de Finsler no helicóptero de bancada. Por fim, foram executadas simulações para comparação das influências das matrizes de ponderação Q e R no desempenho dos controladores e, além disso, analisou-se a região de factibilidade de cada método.

Palavras-chave: *Regulador Linear Quadrático (LQR); Controle robusto; Análise de factibilidade; Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs); Helicóptero de bancada 3-DOF.*

ABSTRACT

This work presents the design study of LQR controllers via LMI for a bench model helicopter subject to present failure in one of its engines for the formulations in classic LQR, extended stability via Finsler's lemma and extended stability via Reciprocal Projection lemma, in order to verify the difference between the feasibility regions and the performance in general. To carry out the project, the software MATLAB/*Simulink*[®] was used for the programming of the classical methods, extended stability via Finsler's lemma and extended stability via the Reciprocal Projection lemma. The influence of the parameter b , introduced through relaxation techniques to the quadratic optimization problem with constraint and which makes the Lyapunov function dependent on parameters, on the controller performance and design strategy feasibility region of the LQR controller via Finsler's lemma in the bench model helicopter was also studied. Finally, simulations were performed to compare the influences of the weighting matrices Q and R on the performance of the controllers, and also on the feasibility region associated to each method.

Keywords: *Linear Quadratic Regulator (LQR); Robust control; Feasibility analysis; Linear Matrix Inequalities (LMIs); 3-DOF Helicopter.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Regiões de incerteza para modelos politópicos e limitados pela norma.....	18
Figura 2 – Sistema Regulador Ótimo.....	22
Figura 3 – Helicóptero de bancada 3-DOF <i>Quanser</i> [®]	28
Figura 4 – “Boeing CH-47 Chinook”.....	29
Figura 5 – Teste 1: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b nos estados de elevação e inclinação.....	31
Figura 6 – Teste 1: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b no estado de deslocamento e sinal de controle.....	31
Figura 7 – Teste 2: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b nos estados de elevação e inclinação.....	33
Figura 8 – Teste 2: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para o helicóptero de bancada com variação do escalar b no estado de deslocamento e sinal de controle.....	33
Figura 9 – Teste 3: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para o helicóptero de bancada com variação do escalar b nos estados de elevação e inclinação.....	34
Figura 10 – Teste 3: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para o helicóptero de bancada com variação do escalar b no estado de deslocamento e sinal de controle.....	35
Figura 11 – Região de factibilidade do lema de Finsler no helicóptero de bancada com variação do escalar b	36
Figura 12 – Teste 1: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos nos estados de elevação e inclinação.....	38

Figura 13 – Teste 1: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos no estado de deslocamento e sinal de controle.....	38
Figura 14 – Teste 2: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos nos estados de elevação e inclinação.....	39
Figura 15 – Teste 2: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos no estado de deslocamento e sinal de controle.....	40
Figura 16 – Teste 3: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos nos estados de elevação e inclinação.....	41
Figura 17 – Teste 3: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos no estado de deslocamento e sinal de controle.....	41
Figura 18 – Região de factibilidade das técnicas Clássica, lema de Finsler e lema da Projeção Recíproca no helicóptero de bancada.....	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do helicóptero de bancada.....	29
------------------------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BMI – Bilinear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Bilineares)

DOF – Degrees of Freedom (Graus de Liberdade)

LDI – Linear Differential Inclusions (Inclusões Diferenciais Lineares)

LMIs – Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares)

LQR – Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)

LTI – Linear Time-Invariant (Sistema Linear Invariante no Tempo - SLIT)

LISTA DE SIMBOLOS

$diag(\dots, \dots, \dots)$	Denota uma matriz diagonal com dimensões adequadas
*	Denota o bloco transposto de uma matriz simétrica
0	Representa uma matriz nula com dimensões adequadas
M'	Representa a matriz transposta de M
$M < 0$ ($M \leq 0$)	Representa uma matriz negativa definida (semi-definida)
$M > 0$ ($M \geq 0$)	Representa uma matriz positiva definida (semi-definida)
I	Representa uma matriz identidade com dimensões adequadas
J	Representa o custo quadrático associado a energia dos estados derivativos e sinal de entrada de controle
μ	Representa o limite superior especificado de J
R	Representa a matriz de ponderação para o vetor de controle de entrada
Q	Representa a matriz de ponderação para o vetor derivativo de estado
$\sum_{i=1}^N$	Representa a somatória de $i = 1$ a N
\mathcal{R}	Representa o conjunto de números reais
®	Marca comercial

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS	17
2.1. ESTABILIDADE ROBUSTA E MODELAGEM POLITÓPICA	17
2.2. RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO PARA SISTEMAS DE MALHA FECHADA.....	19
2.3. REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO.....	21
3. REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO VIA APROXIMAÇÃO LMI COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO	22
4. ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DE FINSLER.....	25
5. ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DA PROJEÇÃO RECÍPROCA	26
6. ANÁLISE COMPUTACIONAL	27
6.1. HELICÓPTERO DE BANCADA 3-DOF QUANSER®	27
6.2. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO ESCALAR b NA REGIÃO DE FACTIBILIDADE E NO DESEMPENHO DO CONTROLADOR LQR VIA LEMA DE FINSLER	30
6.3. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS LQR CLÁSSICO, ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DE FINSLER E ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DA PROJEÇÃO RECÍPROCA NO DESEMPENHO DOS CONTROLADORES NO HELICÓPTERO DE BANCADA 3-DOF QUANSER®	36
6.4. COMPARAÇÃO DAS REGIÕES DE FACTIBILIDADE E DETERMINAÇÃO DO MELHOR MÉTODO.....	42
7. CONCLUSÃO	44
REFERÊNCIAS.....	45

1. INTRODUÇÃO

Em Ogata (2010), vê-se que o controle passou por algumas etapas até chegar no modelo utilizado atualmente. Inicialmente, tem-se o controle clássico entre os anos de 1930 à 1960, onde trabalhou-se com sistemas com uma entrada e saída e sua essência era dada pela resposta em frequência e lugar das raízes. Com a necessidade de cumprir requisitos mais rigorosos devido ao uso militar, espacial e industrial, que requeriam um certo nível de precisão, chegou-se ao controle moderno entre os anos de 1960 à 1980, em que com a disponibilidade dos computadores digitais tornou-se possível a análise de sistemas mais complexos com várias entradas e saídas. A essência do controle moderno é dada pela síntese do domínio do tempo por meio de equações diferenciais e emprego das variáveis de estado. Por fim, a partir dos anos 1980 até os dias atuais é utilizado o controle robusto, no qual o projeto do sistema estabelece uma gama de possíveis erros, para que o projeto do controlador de sistemas não lineares considere os erros de modelagem que devem ser previstos e também a existência de incertezas deve ser considerada no projeto a fim de garantir estabilidade do sistema em condições adversas. A teoria de controle robusto incorpora as abordagens de resposta em frequência e de domínio do tempo.

Boyd et al. (1994) nos conta que a história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos possui mais de 100 anos. E essa história começou em 1890, quando Lyapunov publicou um trabalho introduzindo o que chamamos hoje de Teoria de Lyapunov, que nada mais é do que a equação diferencial $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é estável (todas as trajetórias convergem para zero) se, e somente se, existir uma matriz P definida positiva, de forma que $A'P + PA < 0$. E, o primeiro marco importante de sua aplicação se deu com Lur'e, Postnikov e outros da União Soviética, que aplicaram o método de Lyapunov em problemas práticos com problema de estabilidade de um sistema de controle com comportamento não-linear em seu atuador.

Segundo Anderson e Moore (1990), técnicas de controle clássicas são aplicadas, em geral, em sistemas ou plantas consideradas lineares e invariantes no tempo e, além disso, que possuem uma única entrada e uma única saída. Já para o controle moderno, Anderson e Moore (1990) afirmam que existem dois principais objetivos opostos ao controle clássico; o projeto dos sistemas de controle e a apresentação de soluções para uma classe muito mais ampla de problemas de controle. Dessa forma, a aplicação de técnicas modernas de controle robusto, que visam garantir a estabilidade e desempenho de um sistema dinâmico possivelmente sujeito a situações adversas durante sua operação, é a base desse trabalho.

Assim, considerando as ferramentas do controle moderno, o projeto dos controladores será realizado por meio das Desigualdades Matriciais Lineares (*do inglês*, Linear Matrix Inequalities – LMI). Tal fato se dá, em razão de que com as LMIs é possível resolver problemas envolvendo incertezas paramétricas com o auxílio de ferramentas como, por exemplo, o *MatLab*[®] em conjunto com pacotes de solvers (GAHINET et al., 1995). E, para obtenção das soluções, será utilizada a ferramenta gratuita “Yalmip” (LOFBERG, 2004), que atua em conjunto com os solvers “SeDuMi” e “LMILab”, auxiliando no desenvolvimento de algoritmos de modo ágil e simples.

Adicionalmente, será considerado nos projetos dos controladores a inserção de restrição para taxa de decaimento mínima, que garante melhor desempenho para o controlador projetado, pois melhora a performance do sistema ao longo de seu período transitório e, com isso, otimiza o tempo de estabelecimento, que é o tempo que o sistema leva para alcançar um regime final (constante) (Faria et al, 2009).

Além disso, o sistema dinâmico utilizado no trabalho será o helicóptero de bancada com três graus de liberdade (no inglês, *3 Degrees of Freedom – 3-DOF*), fabricado pela *Quanser*[®]. O helicóptero será utilizado para demonstrar e comparar o desempenho das três técnicas de controladores LQR-LMI através de testes utilizando as mesmas matrizes de ponderação Q e R e taxa de decaimento, e, também analisar suas regiões de factibilidade. Dito isso, foram utilizadas as formulações LQR clássica, estabilidade estendida via lema de Finsler e estabilidade estendida via lema da Projeção Recíproca, no qual para todas as técnicas o problema do regulador quadrático ótimo é resolver a equação do sistema de forma que a determinação da matriz K do vetor de controle ótimo minimize o índice de desempenho J .

Esse trabalho é dividido em 5 principais capítulos. O Capítulo 2 traz consigo uma abordagem dos lemas e propriedades utilizados. Na sequência, a Seção 2.1, apresenta o tema da estabilidade robusta e a modelagem politópica para que, em seguida, na Seção 2.2, seja possível abordar esse tópico considerando a taxa de decaimento, de modo a garantir uma melhor performance do sistema em termos de tempo de estabelecimento. Por fim, na Seção 2.3, apresenta-se a estrutura e conceitos do Regulador Linear Quadrático.

No Capítulo 3, inicia-se a apresentação da formulação da técnica utilizada e analisada, abordando o Regulador Linear Quadrático com restrição de taxa de decaimento. Já no Capítulo 4, tem-se a apresentação da formulação LQR com a inserção da estabilidade estendida via lema

de Finsler. E, por fim, no Capítulo 5 tem-se a formulação LQR com a inserção da estabilidade estendida via lema da Projeção Recíproca.

Em seguida, tem-se o Capítulo 6 dividido em 4 partes. Na primeira parte são introduzidos detalhes e parâmetros do sistema dinâmico a ser utilizado para estudo, o helicóptero de bancada 3-DOF da *Quanser*[®]. Em seguida, na segunda parte é analisada a influência do escalar b no desempenho do controlador projetado e a região de factibilidade via lema de Finsler. Para a terceira parte, temos uma comparação entre o desempenho do controlador projetado entre as três técnicas em estudo. E, por fim, na quarta parte é definido qual método LQR se sobressai considerando a região de factibilidade para matrizes de ponderação Q e R fixas e variação da taxa de decaimento e perda de potência do motor traseiro.

Finalmente, as conclusões do trabalho a respeito da melhor técnica entre as analisadas anteriormente são trazidas no Capítulo 7.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Esse capítulo tem a finalidade de apresentar alguns conceitos que serão utilizados ao longo do texto.

Propriedade 1 – Uma matriz é invertível se $M + M' < 0$ para qualquer matriz assimétrica $M (M \neq M')$ (Boyd et al. 1994).

Lema 1 (Lema de Finsler) – Considerando $W \in \mathcal{R}^{2n}, \mathcal{L} \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ e $B \in \mathcal{R}^{n \times 2n}$ com $\text{rank}(B) < n$ e B^\perp uma base para o espaço nulo de B ($BB^\perp = 0$). Então, as condições a seguir serão equivalentes,

$$(i) W' \mathcal{L} W \leq 0, \forall W \neq 0; BW = 0;$$

$$(ii) B^\perp \mathcal{L} B^\perp < 0;$$

$$(iii) \exists \mu \in \mathcal{R}, \mathcal{L} - \mu B' B < 0;$$

$$(iv) \exists \mathcal{X} \in \mathcal{R}^{2n \times n}: \mathcal{L} + \mathcal{X} B + B' \mathcal{X}' < 0.$$

onde μ e \mathcal{X} são variáveis extras (ou multiplicadores).

Prova. Vide (Skelton et al., 1997; Oliveira e Skelton, 2001) para mais detalhes.

Lema 2 (Lema da Projeção Recíproca) – Seja T uma matriz definida positiva. Então, as seguintes condições serão equivalentes:

$$(i) \Psi + S + S' < 0;$$

(ii) e o seguinte problema é factível com respeito a W ,

$$\begin{bmatrix} \Psi + T - (W + W') & S' + W' \\ S + W & -T \end{bmatrix} < 0. \quad (1)$$

Prova. Vide (Apkarian et al., 2001) para mais detalhes.

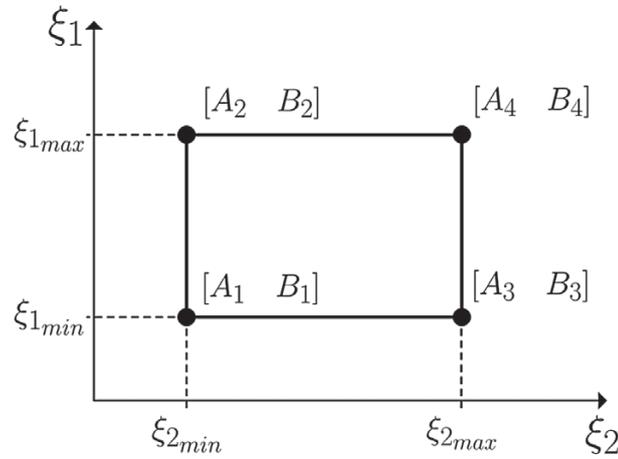
2.1. ESTABILIDADE ROBUSTA E MODELAGEM POLITÓPICA

Um fator de grande importância, tanto técnica como operacional, é a robustez de um sistema dinâmico na teoria de controle. Com isso, garante-se a segurança do sistema ao longo de sua trajetória mesmo em condições adversas como, por exemplo, desgastes de componentes, ocorrência de falhas durante operação, ocorrência de sinais de distúrbios e parâmetros incertos do sistema.

Com isso, temos que a incerteza politópica, que é o domínio da incerteza descrito pela combinação convexa de um conjunto de vértices conhecidos (Figura 1), é uma forma de

representação da incerteza de fácil manuseio e simplicidade, principalmente na condição dos métodos baseados nas funções de Lyapunov (Oliveira e Peres, 2007).

Figura 1 – Regiões de incerteza para modelos politópicos.



Fonte: Adaptado de Caun et al., 2018.

Inicialmente, se considera um sistema controlável, linear e invariante no tempo representador por,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2)$$

sendo $x(t) \in \mathcal{R}^n$ o vetor de estado, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ a matriz que representa a dinâmica do sistema, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ matriz de entrada e $u(t) \in \mathcal{R}^m$ o vetor do sinal de controle. E, para caracterizá-lo como um sistema incerto, considere que o sistema (2) é um conjunto pré-definido em forma $[A \ B] \in \Omega$, com o conjunto Ω descrevendo a “incerteza” nas matrizes A e B . Assim, é possível constituir um sistema politópico, através do conjunto Ω_p , ou seja

$$\Omega_p = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_r \ B_r]\}, \quad (3)$$

que corresponde a um conjunto convexo de r vértices. Nesse caso, nota-se que os vértices $[A_r \ B_r]$ do politopo são obtidos pela combinação de valores extremos assumidos por variáveis incertas do conjunto $\{\delta_i: \delta_{imin} < \delta_i < \delta_{imax}, i = 1, \dots, l\}$, com δ_i sendo uma incerteza paramétrica variável no tempo $r = 2^l$. Nesse trabalho, o parâmetro δ_i pertence ao simplex unitário, dado por

$$\mathcal{U} = \{\delta \in \mathcal{R}^n: \sum_{i=1}^r \delta_i = 1; \delta_i \geq 0; i = 1, \dots, r\}. \quad (4)$$

Para mais detalhes, ver Caun et al. (2018).

2.2. RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO PARA SISTEMAS DE MALHA FECHADA

A fim de trazer um melhor desempenho ao controlador a ser projetado, deve-se considerar uma taxa de decaimento, tendo em vista sua relação direta com a performance do sistema ao longo de seu período transitório e, em particular na otimização de seu tempo de estabelecimento (Faria et al., 2009).

Inicialmente, considera-se um sistema linear invariante no tempo (do inglês, Linear Time Invariant – LTI), conforme descrição abaixo,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

sendo $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ as matrizes do sistema, $x(t) \in \mathcal{R}^n$ o vetor de estado e $u(t) \in \mathcal{R}^m$ o vetor de entrada. Considerando um sistema que possua realimentação de seus estados disponível, temos que a lei de realimentação de estados será:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (6)$$

no qual $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ é uma matriz de elementos constantes a ser encontrada e definida de acordo com as propriedades de cada problema de controle. Deve-se, ainda, tomar cuidado com a norma do controlador K , pois ao assumir valores muito altos pode levar à saturação dos amplificadores e dificultar sua implementação em sistemas analógicos.

Tem-se que a taxa de decaimento, também conhecida como maior expoente de Lyapunov, é definida como a maior constante positiva α que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0, \quad (7)$$

é válido para todas as trajetórias $x(t)$, $t > 0$.

Sendo definida a função quadrática de Lyapunov como,

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t), \quad (8)$$

a fim de estabelecer um limite inferior α para a taxa de decaimento de (5), temos demonstrado em Boyd et al. (1994) que (8) deve ser tal que (9) é válido para todas as trajetórias

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t)). \quad (9)$$

Utilizando (5) e (8) rearranjadas, obtém-se a seguinte expressão

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) =$$

$$= x(t)'(A - BK)'Px(t) + x(t)'P(A - BK)x(t). \quad (10)$$

Agora, utilizando (9) e considerando a taxa de decaimento e simplificando-a, encontra-se as seguintes expressões:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) \leq -2\alpha P, \quad (11)$$

$$P > 0. \quad (12)$$

Pode-se observar que a inequação (11) se tornou uma Desigualdade Matricial Bilinear (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities* – BMI). Devido a isso, é necessário realizar manipulações como forma de obter condições LMIs. Por isso, multiplica-se ambos os lados por P^{-1} , e define-se $X = P^{-1}$ e $G = KX$, como segue:

$$P^{-1}(A - BK)'PP^{-1} + P^{-1}P(A - BK)P^{-1} < -P^{-1}2\alpha PP^{-1}, \quad (13)$$

$$P^{-1}(A' - K'B') + (A - BK)P^{-1} + 2\alpha P^{-1} < 0, \quad (14)$$

$$A'X - G'B' + AX - BG + 2\alpha X < 0, \quad (15)$$

$$X > 0. \quad (16)$$

Ainda, de acordo com Buzachero (2012), se as LMIs em (15) e (16) são factíveis, temos então que um controlador que estabilize um sistema de malha fechada pode ser dado por $K = GX^{-1}$.

A seguir, considere o sistema LTI incerto:

$$\dot{x}(t) = A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t). \quad (17)$$

Como discutido na Seção 2.1, o sistema (17) pode ser descrito também como uma combinação convexa dos vértices, tal como

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \delta_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \delta_i B_i u(t). \quad (18)$$

Buzachero (2012) nos mostra também que com as matrizes A e B pertencendo ao conjunto dos vértices das incertezas politópicas, tem-se que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{(A, B)(\delta) \in \mathcal{R}^{n \times n}: (A, B)(\delta) = \sum_{i=1}^N \delta_i (A, B)_i, \sum_{i=1}^N \delta_i = 1, \delta_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}, \quad (19)$$

sendo r o número de vértices.

Em Boyd et al. (1994), tem-se o seguinte teorema sobre sistemas incertos:

Teorema 2 – Uma condição suficiente que garante a estabilidade de um sistema incerto descrito em (18) com taxa de decaimento mínima α e a existência de uma matriz $X = X' \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathcal{R}^{m \times n}$, tais que:

$$A_i X - B_i G + X A_i' - G' B_i' + 2\alpha X < 0, \quad (20)$$

$$X > 0, \quad (21)$$

onde $i = 1, \dots, r$.

Sabe-se que, quando as LMIs (20) e (21) forem factíveis, a matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema pode ser dada como em (22)

$$K = GX^{-1}. \quad (22)$$

Dessa forma, temos que a realimentação do sistema incerto (17) tem como condições suficientes (20) e (21) para a estabilidade assintótica do politopo e, agora, também em um sistema de malha fechada sujeito à taxa de decaimento mínima.

2.3. REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Considere o sistema (5). O Regulador Linear Quadrático (do inglês, Linear Quadratic Regulator – LQR) possui um modo sistemático de cálculo da matriz de controle por meio da realimentação de estados. E, também consiste em encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimize a função quadrática $J = f(x, u)$ de tal modo que (Kumar et al., 2016):

$$J = \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dt, \quad (23)$$

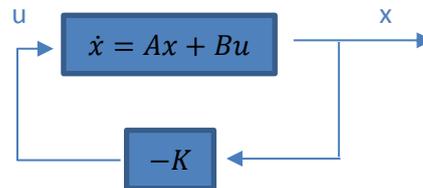
onde as matrizes de ponderação $Q = Q' > 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $R = R' > 0 \in \mathcal{R}^{m \times m}$ são conhecidas. Além disso, ambas as matrizes Q e R determinam a importância relativa do erro e consumo da energia representada pelo segundo termo ao lado direito de (23). Dessa forma, neste problema as variáveis de controle estão expressas por uma realimentação de estado K constante, ou seja,

$$u(t) = -Kx(t), \quad (24)$$

para minimização do índice de desempenho (23). Também, será suposto nesse problema que o vetor de controle $u(t)$ não seja limitado e a lei de controle linear dado em (24) é a lei de controle ótimo. Sendo assim, se os elementos não conhecidos da matriz K forem determinados de maneira que minimize o índice de desempenho, então (24) será ótimo para qualquer estado

inicial $x(0)$. O diagrama de blocos demonstrando a configuração ótima está representado na Figura 2.

Figura 2 – Sistema Regulador Ótimo.



Fonte: Adaptado de Ogata, 2010.

Agora, considere a função de Lyapunov quadrática (25) a fim de encontrar uma solução para o problema de otimização (26),

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t), \quad (25)$$

$$x(t)'(Q + K'RK)x(t) = -\frac{d}{dt}(x(t)'Px(t)). \quad (26)$$

Por consequência, a solução do problema para minimização de J (aplicado a sistemas determinísticos), pode ser expressa como,

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B'Px(t), \quad (27)$$

de tal forma que P satisfaça a equação de Riccati,

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0. \quad (28)$$

Para mais detalhes sobre a formulação, vide Ogata (2010) e para mais detalhes do projeto, vide Caun et al. (2018).

3. REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO VIA APROXIMAÇÃO LMI COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO

O controlador LQR corresponde a um critério quadrático que, através de um processo linear de otimização, define uma lei de controle ótima. Tal lei está associada às funções de energia das variáveis de estado e controle, a qual visa encontrar o equilíbrio da velocidade de resposta do sistema e a intensidade do sinal de controle. Assim, objetiva-se encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimize a função quadrática J (Caun et al., 2018):

$$J = \min \int_0^{\infty} [x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)]dt, \quad (29)$$

sendo as matrizes de ponderação $Q = Q' > 0$ e $R = R' > 0$. As variáveis de controle estão expressas por uma realimentação de estado K constante descrito em (24).

Considerando a função dada em (29), é possível definir a seguinte relação,

$$V(x) + \int_0^{\infty} x(t)'(Q + K'RK)x(t)dt < 0. \quad (30)$$

Para uma condição inicial $x(0)$, obtém-se a seguinte expressão equivalente:

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) + \int_0^{\infty} x(t)'(Q + K'RK)x(t)dt < 0. \quad (31)$$

Considere que o sistema de malha fechada é assintoticamente estável, ou seja, possui todos os autovalores com parte real negativa. Dessa forma, tem-se que $x(\infty) \rightarrow 0$, e

$$\int_0^{\infty} x(t)'(Q + K'RK)x(t)dt < V(x(0)) = x(0)'Px(0). \quad (32)$$

Nota-se que existe uma relação estreita entre a condição inicial e a função de Lyapunov considerando a desigualdade demonstrada em (32). Sendo assim, é importante encontrar uma expressão equivalente em termos de LMIs, que contenha o limite superior igual a energia de saída, ou seja,

$$x(0)'Px(0) < \mu. \quad (33)$$

Para prosseguir com o desenvolvimento da expressão, será necessário o uso do complemento de Schur.

Lema 3 (Complemento de Schur) – Seja $N(x) = N(x)'$, $M(x) = M(x)'$ e $S(x)$ depende de modo afim da variável x . Então considerando a LMI

$$X = \begin{bmatrix} N(x) & S(x) \\ S(x)' & M(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (34)$$

é equivalente a desigualdade matricial dada por,

$$N(x) > 0, M(x) - S(x)'N(x)^{-1}S(x) > 0, \quad (35)$$

ou,

$$M(x) > 0, N(x) - S(x)M^{-1}(x)S(x)' > 0. \quad (36)$$

Prova. Vide (Boyd et al., 1994) para mais detalhes.

Como ressaltado anteriormente, tem-se uma relação estreita entre a condição inicial e a função de Lyapunov com relação a desigualdade apresentada em (32). E, por isso, é importante encontrar uma expressão equivalente em LMIs, no qual seu limite superior é igual a energia de

saída. Portanto, ao aplicar o complemento de Schur em (33) rearranjada e fazendo $W = P^{-1}$, tem-se:

$$\mu - x(0)'Px(0) > 0, \quad (37)$$

sendo $N = \mu$, $S' = x(0)$, $S = x(0)'$ e $M^{-1} = P \leftrightarrow M = P^{-1}$,

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0. \quad (38)$$

Como extensão buscou-se um politopo $\Omega_C = Co\{x_1(0), x_2(0), \dots, x_p(0)\}$, no qual a energia máxima está em um dos vértices. Sendo assim, obtém-se através da nova função objetivo um novo limite superior na energia de saída (Boyd et al., 1994),

$$\begin{bmatrix} \mu & x_i(0)' \\ x_i(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \dots, p. \quad (39)$$

Os sistemas de controle visam atender especificações de desempenho, as quais implicam no comportamento desejado dos sinais de saída. Em outras palavras a colocação dos valores próprios do sistema de malha fechada e essas condições podem ser obtidas ao se inserir restrições adicionais na forma de LMIs. No entanto, ao utilizar a colocação dos autovalores aumentamos a complexidade computacional. Xie (2018) ressalta que para reduzir os impactos no processamento do computador é interessante aplicar a taxa de decaimento na formulação original das LMIs e, para isso, inclui-se o maior expoente de Lyapunov em Inclusões Diferenciais Lineares Politópicas (do inglês, Linear Differential Inclusions – LDIs) (Ge, Chiu, & Wang, 2002) e LDIs vinculados a normas (Boyd et al., 1994).

Para mais detalhes, vide Caun et al. (2018).

Teorema 3 – O sistema (17) é estável em $u(t) = -Kx(t)$, quando a taxa de decaimento maior ou igual a α e garantindo um custo J inferior a μ , se existem matrizes $W = W' > 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathcal{R}^{m \times n}$, de tal forma que

$$\min_{\mu, W, Z} \mu \quad (40)$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} G_i & * & * \\ W & -Q^{-1} & * \\ Z & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad (42)$$

onde $G_i = A_i W + W A_i' + B_i Z + Z' B_i' + 2\alpha W$ e o ganho de realimentação é dado por $K = -ZP$ e $P = W^{-1}$.

Prova. A prova pode ser encontrada em (Caun et al., 2018).

4. ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DE FINSLER

Caun et al. (2018) diz que a técnica de relaxação nos problemas de otimização quadrática com restrição permite a expansão da região de factibilidade sem gerar aumentos consideráveis no custo computacional. Além disso, o lema de Finsler possui destaques em suas aplicações na teoria de controle contínuo e discreto, sendo uma dela o desacoplamento da matriz de Lyapunov do ganho de realimentação de estados.

De acordo com Buzachero et al. (2012), a vantagem que esse lema nos traz permite o uso de funções menos conservadoras, ou seja, a função de Lyapunov dependente de parâmetros, com isso temos um aumento da região de factibilidade no problema de otimização convexa devido a introdução de novas variáveis de matrizes ou folga.

Então, em Caun et al. (2018) é proposto o Teorema 4, que irá estabelecer o limite inferior da taxa de decaimento das inclusões diferenciais lineares (*do inglês*, Linear Differential Inclusions – LDI), a fim de obter formulações originais menos conservadoras do controlador robusto LQR via LMIs.

Teorema 4 – O sistema (17) é estável para $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α e garantindo um custo J inferior a μ , se para um dado escalar $b > 0$, existir uma matriz $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathcal{R}^{m \times n}$ e $W_i = W_i' > 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$, onde $i = 1, \dots, n$, de modo que:

$$\min_{\mu, W_i, Z, Y} \mu \quad (43)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} A_i Y + B_i Z + Y' A_i' + Z' B_i' + 2\alpha W_i & * & * & * \\ W_i - Y' + b A_i Y + b B_i Z & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -Q^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & Y' + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (45)$$

onde $K = -ZY^{-1}$.

Prova. A prova pode ser encontrada em (Caun et al., 2018).

Proposição 1 – Considerando o sistema apresentado em (17) com uma dada condição inicial $x(0)$, matrizes definidas positivas Q e R , assumindo que existem matrizes Y e Z , matrizes simétricas $W_i = W, \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}$ e um escalar positivo b tal que (44) e (45) são factíveis. Desse modo, este resultado converge no caso particular utilizando as funções quadráticas de Lyapunov.

Geromel e Korogui (2006) diz que, é possível observar através de testes práticos que à medida que o parâmetro b torna-se pequeno o suficiente temos um aumento da região de factibilidade no projeto de controladores obtida via Lema de Finsler. Neste trabalho, a fim de verificar e analisar os resultados apresentados por Geromel e Korogui (2006) foram feitos testes com valores diferentes de b nas aplicações práticas e foi utilizado para critérios de comparação entre as demais formulações valores de b da ordem centesimal.

5. ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DA PROJEÇÃO RECÍPROCA

Nesse capítulo, será apresentado um novo projeto LQR baseado em LMI via lema da projeção recíproca (Apkarian et al., 2001; Caun et al., 2018). No qual, é considerado o politopo descrito pelos vértices na forma $Co\{[A_1 \ B_1 \ x_1(0)], \dots, [A_{\mathcal{N}+p} \ B_{\mathcal{N}+p} \ x_{\mathcal{N}+p}(0)]\}$. E, por fim, adquire-se condições menos conservadoras sujeitas à restrição adicional de taxa de decaimento mínima sem empregar o uso de linhas LMIs adicionais.

Teorema 5 – O sistema (17) é estável para $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α e garantindo um custo J inferior a μ , se existir as matrizes $V \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathcal{R}^{m \times n}$ e $X_i = X_i' > 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$, de modo que:

$$\min_{\mu, X_i, Z, Y} \mu, \quad (46)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} -(V' + V) & * & * & * & * \\ A_i V + B_i Z + \alpha V + X_i & -X_i & * & * & * \\ V & 0 & -X_i & * & * \\ V & 0 & 0 & -Q^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x_i(0) & X_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (48)$$

sendo $i = 1, \dots, \mathcal{N} + p$. Desta forma, o ganho de realimentação de estados será $K = -ZV^{-1}$.

Prova. A prova pode ser encontrada em (Caun et al., 2018).

6. ANÁLISE COMPUTACIONAL

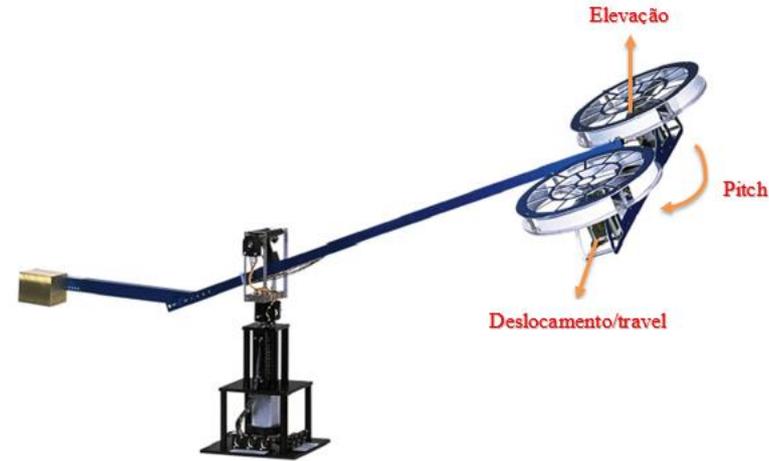
Para que o leitor entenda melhor sobre as matrizes de ponderação Q e R , vamos realizar uma pequena introdução sobre ambas. As matrizes Q e R representam o consumo de energia dos sinais de controle e determinam a importância relativa do erro. A matriz Q atua na performance do controlador nos estados do sistema, quanto maior o valor dos elementos da diagonal principal, maior será a prioridade que o estado daquele elemento receberá. Já, a matriz R atua solicitando o esforço do sinal de controle, ao contrário da matriz Q , quanto menor o valor dos elementos da diagonal principal, maior será o esforço solicitado do sinal de controle e, com isso, teremos também um melhor desempenho do controlador projetado.

O modelo do helicóptero de bancada utilizado nesse trabalho possui três estados principais, sendo eles a elevação, inclinação e deslocamento. O estado que precisa de maior atenção dentre os três é o de elevação e, por isso, as matrizes Q nas seções a seguir possuem no seu elemento q_{11} um valor maior que os demais elementos.

6.1. HELICÓPTERO DE BANCADA 3-DOF QUANSER®

O helicóptero de bancada (Figura 3) possui três graus de liberdade e dois motores DC posicionados nas extremidades de uma haste retangular que acionam duas hélices. Além disso, a estrutura do helicóptero é suspensa em uma articulação instrumentada, apoiada em uma das extremidades de um “braço longo” e fica livre para se inclinar em torno de seu centro. Na outra extremidade do braço tem-se um contrapeso, que permite que a massa efetiva do helicóptero se torne leve o suficiente, de forma a garantir que o impulso dos motores consiga levá-lo. Ainda, o funcionamento dos motores é dado através das tensões aplicadas. Quando uma tensão positiva é aplicada ao motor frontal, gera-se uma inclinação positiva. Por outro lado, quando uma tensão negativa é aplicada ao motor traseiro, gera-se uma inclinação negativa. Também, se uma tensão positiva for aplicada em ambos os motores, ocorre a elevação (elevation) do helicóptero. Por fim, caso o helicóptero sofra uma inclinação (pitch), tem-se, por consequência o deslocamento (travel) em seu eixo, devido aos vetores de impulso.

Figura 3 – Helicóptero de bancada 3-DOF Quanser®.



Fonte: Adaptado de (Quanser, 2012).

O modelo de espaço de estados que descreve o comportamento dinâmico do sistema é dado pelo o vetor de estados $x(t)$, o vetor do sinal de controle $u(t)$ e as matrizes de parâmetros do sistema A e B , que são definidos por:

$$x(t) = [\varepsilon \quad \rho \quad \lambda \quad \dot{\varepsilon} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\lambda} \quad \xi \quad \gamma]', u(t) = [V_f \quad V_b]', \quad (49)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-g(l_w m_w - 2l_a m_f)}{(m_w l_w^2 + 2m_f l_h^2 + 2m_f l_a^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{(l_a k_f)}{(2m_f l_a^2 + m_w l_w^2)} & \frac{(l_a k_f)}{(2m_f l_a^2 + m_w l_w^2)} \\ \frac{k_f}{(2m_f l_h)} & -\frac{k_f}{(2m_f l_h)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Sendo a variável ε representa a elevação, ρ o pitch, λ o deslocamento, V_f motor frontal, V_b motor traseiro e as integrais da elevação e deslocamento são respectivamente ξ e γ . Para

mais detalhes, vide Quanser (2012). E, os valores das constantes apresentadas em (50) e (51) são dados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do helicóptero de bancada.

Constante gravitacional	g	9,81 (m/s^2)
Distância entre o eixo de elevação e o contrapeso	l_w	0,4699 (m)
Massa do contrapeso	m_w	1,87 (kg)
Distância entre o eixo de elevação e o corpo do helicóptero	l_a	0,6604 (m)
Massa de toda a frente da hélice	m_f	$m_h/2$ (kg)
Distância entre o eixo de pitch e o motor	l_h	0,1778 (m)
Constante de potência da hélice (encontrada experimentalmente)	k_f	0,1188 (N/V)
Massa do corpo do helicóptero	m_h	1,15 (kg)

Fonte: Adaptado de Quanser, 2012.

Por fim, a fim de demonstrar um exemplo de modelo real do modelo de bancada estudado temos a Figura 4 a seguir.

Figura 4 – “Boeing CH-47 Chinook”.



Fonte: < <http://helimarte.com.br/os-10-helicopteros-mais-fortes-da-historia/>>.

6.2. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO ESCALAR b NA REGIÃO DE FACTIBILIDADE E NO DESEMPENHO DO CONTROLADOR LQR VIA LEMA DE FINSLER

Com o auxílio do software *MatLab/Simulink*[®] foram realizadas simulações a fim de verificar a influência do escalar $b > 0$ no desempenho do controlador LQR via lema de Finsler e notou-se que quanto menor é o valor de b melhor é o desempenho do mesmo. Porém, a partir de $b \leq 0,01$ o desempenho do controlador e a norma de K sofrem pouca variação.

Por isso, para critério de comparação e demonstração da importância do escalar b , iremos abaixo retratar três testes com matrizes Q, R e α diferentes, a fim de checar o desempenho dos controladores resultantes para os valores de $b = 1, b = 0,1$ e $b = 0,01$. Além disso, foi considerado a partir de 22 segundos uma falha de 30% no motor traseiro do helicóptero em todos os testes.

Para o teste 1, foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[1520 \ 35 \ 1 \ 0,01 \ 1 \ 1,2 \ 1 \ 0,5]$, $R = 0,032 * \text{diag}[1 \ 1]$ e $\alpha = 0,157$. O projeto gerou os controladores K_b abaixo:

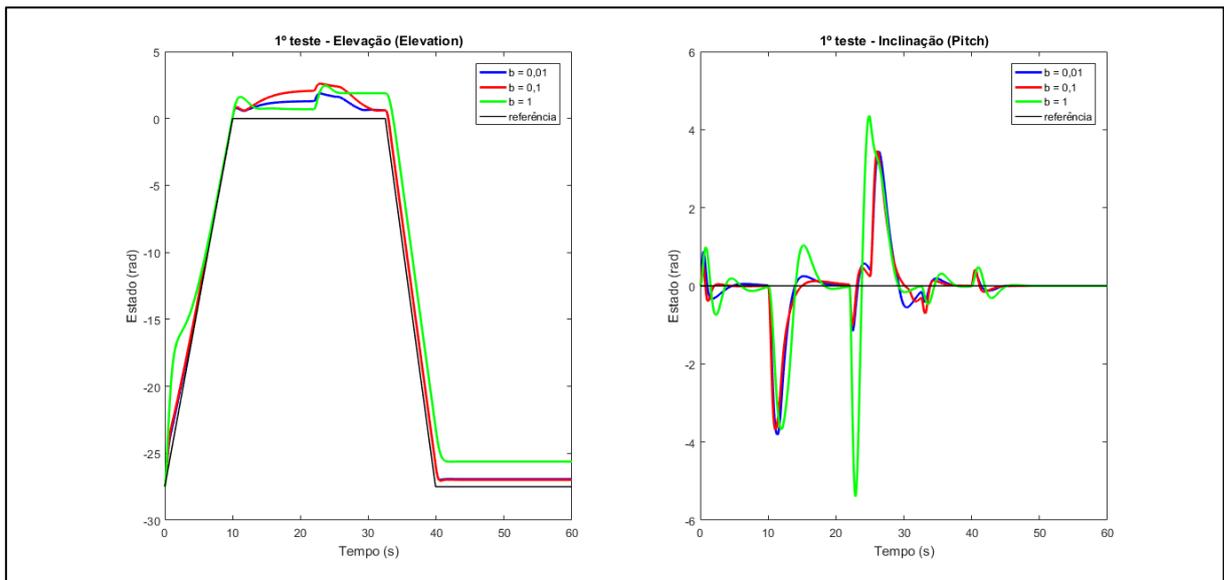
$$K_1 = \begin{bmatrix} 46,3552 & 12,2832 & -5,5274 & 29,7414 & 5,2574 & -10,6903 & 15,6691 & -1,2175 \\ 45,7457 & -13,2740 & 5,7992 & 33,2652 & -5,9883 & 11,1821 & 17,0158 & 1,2689 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$K_{0,1} = \begin{bmatrix} 161,9081 & 57,0303 & -49,2113 & 40,3353 & 11,1611 & -86,9384 & 44,1170 & -10,8004 \\ 146,3022 & -74,4736 & 60,9851 & 55,5176 & -15,2146 & 109,6939 & 45,4578 & 13,2329 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$K_{0,01} = \begin{bmatrix} 165,0904 & 61,3202 & -43,2303 & 41,3053 & 12,0399 & -70,1333 & 49,1941 & -11,1616 \\ 185,1375 & -51,6636 & 33,7765 & 58,6564 & -12,6940 & 56,3949 & 52,2266 & 8,5891 \end{bmatrix} \quad (54)$$

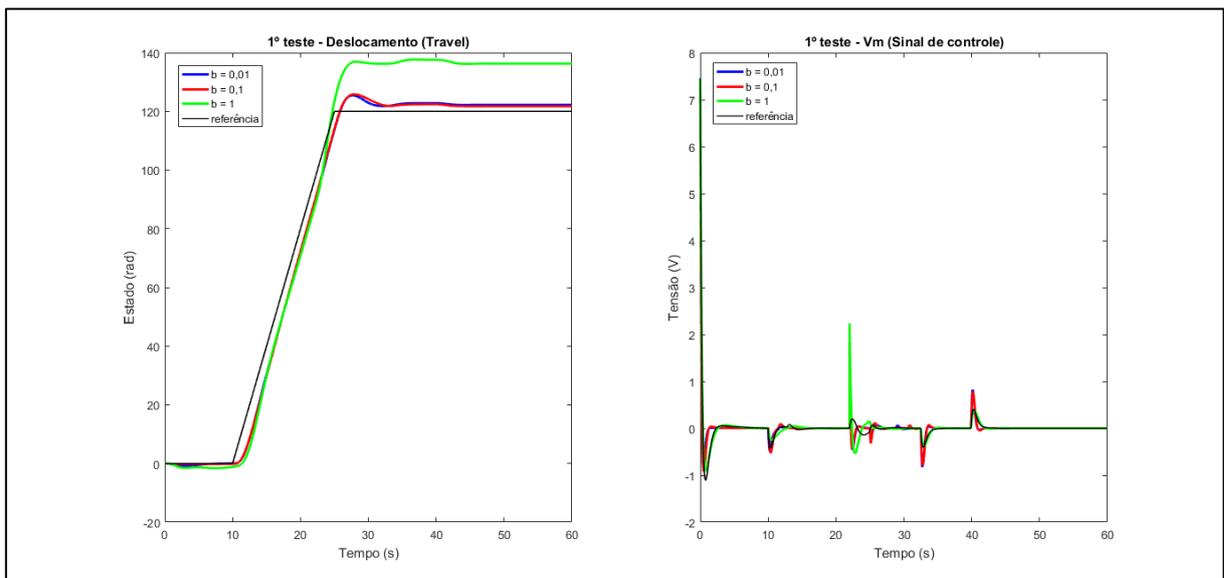
Para cada teste foi plotado em conjunto o desempenho dos controladores por estado e sinal de controle, a fim de facilitar a comparação da atuação dos controladores considerando a linha de referência. Vale ressaltar que quanto maior o valor dos elementos da diagonal principal da matriz de ponderação Q , maior será a prioridade à um determinado estado do helicóptero. Nesse caso (teste 1), tem-se uma matriz Q dando mais prioridade ao estado de elevação e trajetória. Já a matriz de ponderação R funciona de maneira inversa, quanto menor for os valores de sua diagonal principal, maior será a demanda solicitada de esforço do sinal de controle.

Figura 5 – Teste 1: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b nos estados de elevação e inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 6 – Teste 1: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b no estado de deslocamento e sinal de controle.



Fonte: Próprio autor.

Pode-se observar que a performance do controlador via lema de Finsler para $b = 0,1$ e $b = 0,01$ nos estados de inclinação e trajetória são semelhantes e o mesmo acontece no sinal de controle. Entretanto, para $b = 1$ todos os resultados são diferentes dos apresentados para os

outros valores, sendo também seu controlador resultante menos eficiente do que para valores menores de b .

Analisando o estado de elevação, tem-se em $b = 0,1$ e $0,01$ uma subida e descida do helicóptero mais próxima do desejado (curva de referência) e a amplitude com a falha apresenta o mesmo perfil, porém em $b = 0,01$ a variação de amplitude é menor. Já para $b = 1$ tem-se maiores oscilações na subida e descida com relação a curva de referência e também mais variações na amplitude durante o voo. Por fim, no estado de inclinação, estado de trajetória e sinal de controle os valores de $b = 0,1$ e $0,01$ se saíram melhores do que o valor de $b = 1$.

A seguir, para o teste 2, foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[152 \ 15 \ 0,1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $R = 0,02 * \text{diag}[1 \ 1]$ e $\alpha = 0,03$. O projeto gerou os controladores K_b abaixo:

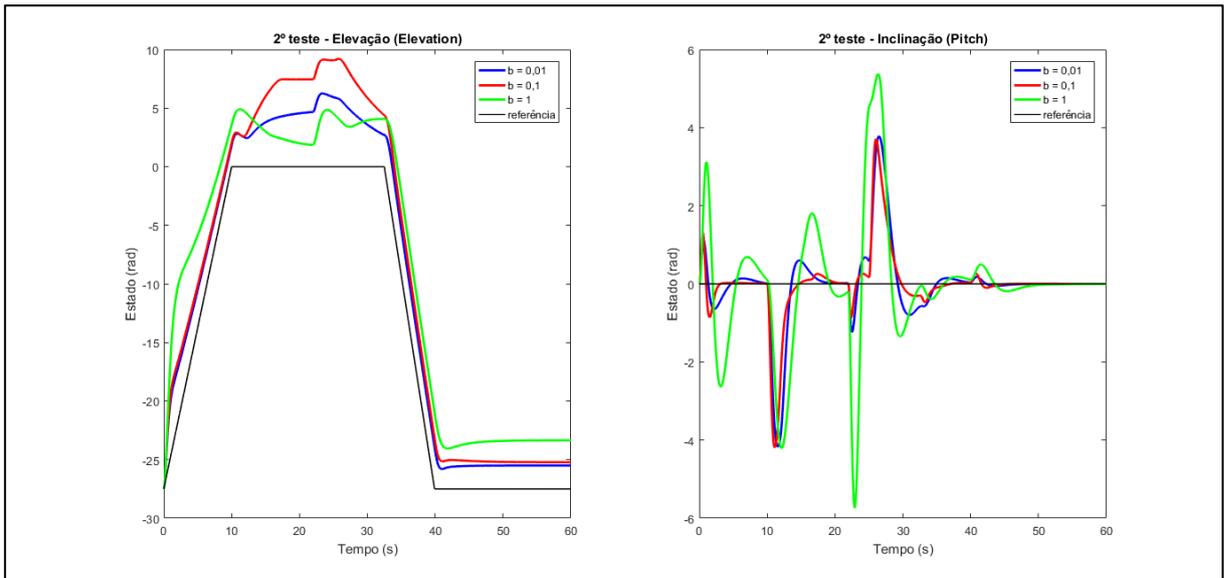
$$K_1 = \begin{bmatrix} 25,9031 & 11,1490 & -5,0582 & 20,7938 & 5,0680 & -9,2163 & 3,3979 & -1,3464 \\ 30,1975 & -11,4050 & 5,2553 & 26,2302 & -5,5154 & 9,4054 & 4,3782 & 1,4321 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$K_{0,1} = \begin{bmatrix} 55,6199 & 64,7964 & -64,7185 & 19,0898 & 12,7840 & -105,2771 & 4,8669 & -18,5818 \\ 64,5250 & -62,8441 & 55,6148 & 38,2057 & -13,8508 & 92,7278 & 8,1894 & 15,5872 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$K_{0,01} = \begin{bmatrix} 58,4589 & 51,3746 & -34,6759 & 25,3291 & 12,8883 & -54,5859 & 6,6381 & -10,6736 \\ 72,4295 & -44,5025 & 28,6863 & 36,3976 & -12,6449 & 45,8637 & 7,8486 & 8,7088 \end{bmatrix} \quad (57)$$

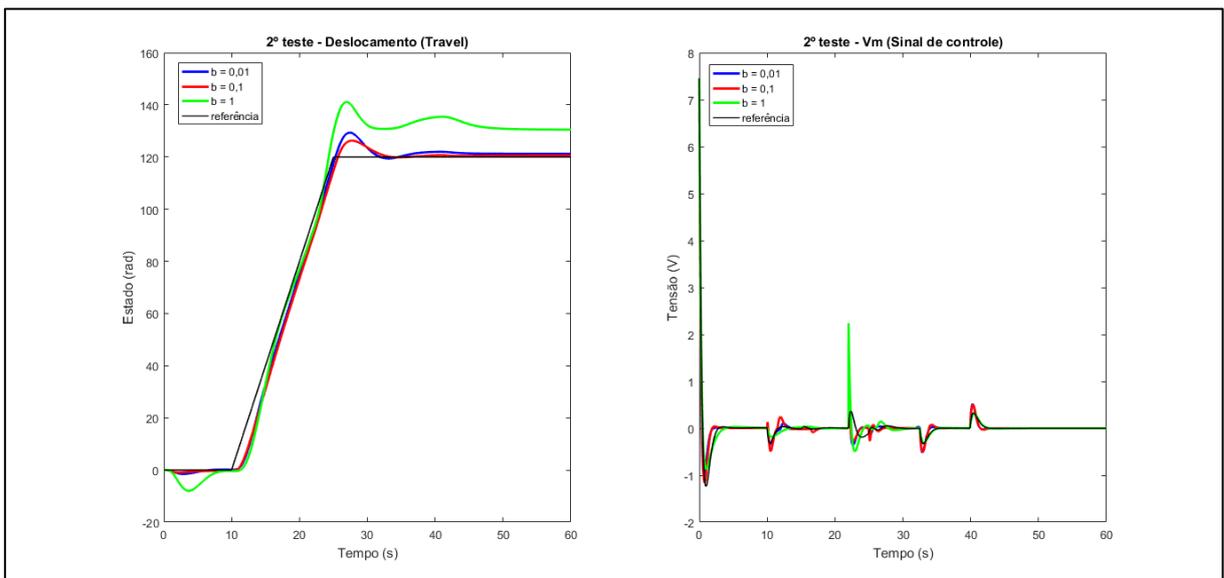
Da mesma forma que o teste 1, o teste 2 foi plotado e está representado nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 – Teste 2: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b nos estados de elevação e inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 8 – Teste 2: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b no estado de deslocamento e sinal de controle.



Fonte: Próprio autor.

Esse teste foi realizado com uma matriz de ponderação Q mais “fraca” e uma taxa de decaimento menor, ou seja, menor prioridade ao estado de elevação e uma imposição menos rígida para o tempo de estabelecimento, a fim de verificar se o comportamento e relação entre

os valores seriam mantidos. Nota-se nesse teste que o lema de Finsler para $b = 0,1$ e $0,01$ seguem com a mesma característica comentada no teste 1, com os estados de deslocamento e sinal de controle similares, uma diferença maior que o teste 1 para o estado de inclinação no qual $b = 0,01$ teve inclinações mais acentuadas ou mais longas do que $b = 0,1$ e para o estado de elevação a curva de subida e descida muito próximas, porém para o estado de elevação durante o trajeto a que mais se encontra próxima a referência é a de $b = 0,01$. Seguindo, temos que a relação entre as três curvas se mantém e o valor de $b = 1$ continua sendo o pior desempenho, com muitas variações na amplitude do estado de elevação e demais curvas distantes da referência.

Por fim, para o teste 3, foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[1000 \ 21 \ 1 \ 0,1 \ 1 \ 1,7 \ 1 \ 0,4]$, $R = 0,025 * \text{diag}[1 \ 1]$ e $\alpha = 0,05$. O projeto gerou os controladores K_b abaixo:

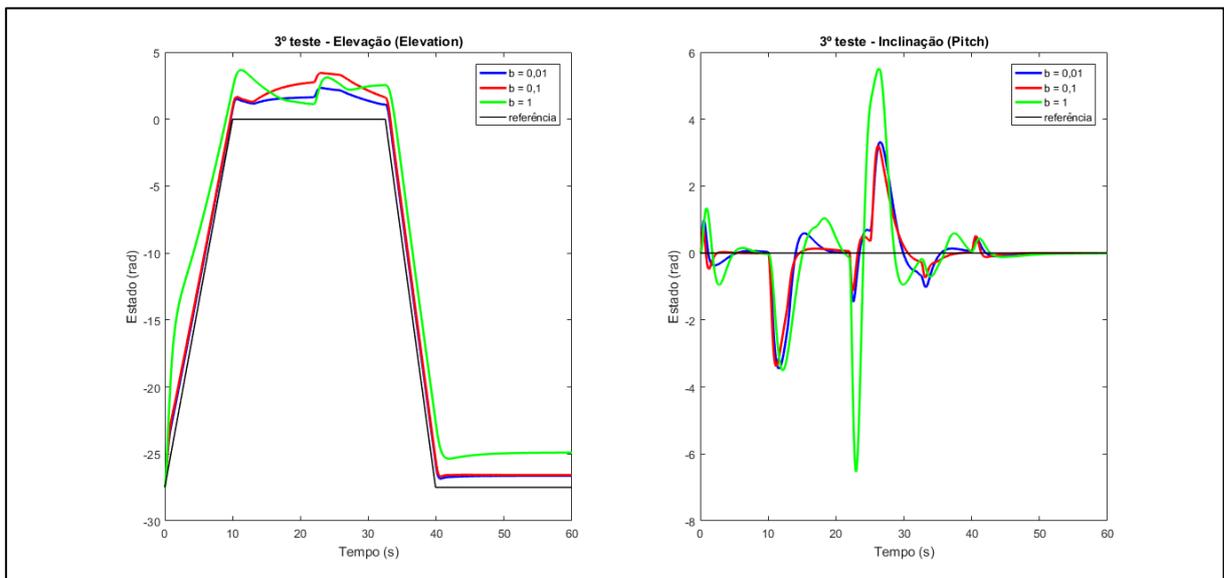
$$K_1 = \begin{bmatrix} 38,1245 & 10,0875 & -3,7040 & 27,8480 & 4,7526 & -7,7331 & 5,3224 & -0,7782 \\ 38,7516 & -11,7606 & 4,4593 & 31,2842 & -5,6712 & 9,0025 & 5,9896 & 0,9510 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$K_{0,1} = \begin{bmatrix} 135,7141 & 51,0815 & -36,0156 & 35,3585 & 10,8060 & -70,3634 & 13,2029 & -7,8249 \\ 124,4951 & -63,7969 & 42,4541 & 51,0898 & -14,3568 & 84,0699 & 14,5151 & 9,1273 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$K_{0,01} = \begin{bmatrix} 140,1739 & 47,8738 & -26,0337 & 38,0558 & 11,2430 & -46,7975 & 15,1693 & -6,2658 \\ 154,2548 & -42,7686 & 22,0613 & 52,8214 & -12,0762 & 40,6796 & 16,0117 & 5,2438 \end{bmatrix} \quad (60)$$

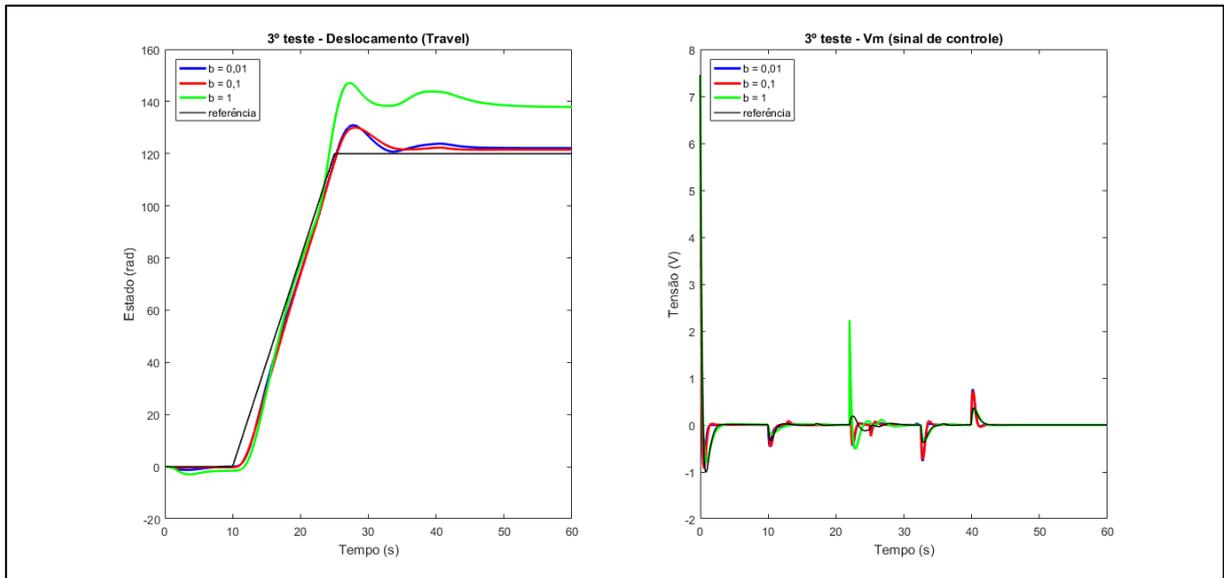
O resultado do teste 3 foi plotado e está representado nas Figuras 9 e 10.

Figura 9 – Teste 3: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para helicóptero de bancada com variação do escalar b nos estados de elevação e inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 10 – Teste 3: Desempenho do projeto de controle LQR via lema de Finsler para o helicóptero de bancada com variação do escalar b no estado de deslocamento e sinal de controle.



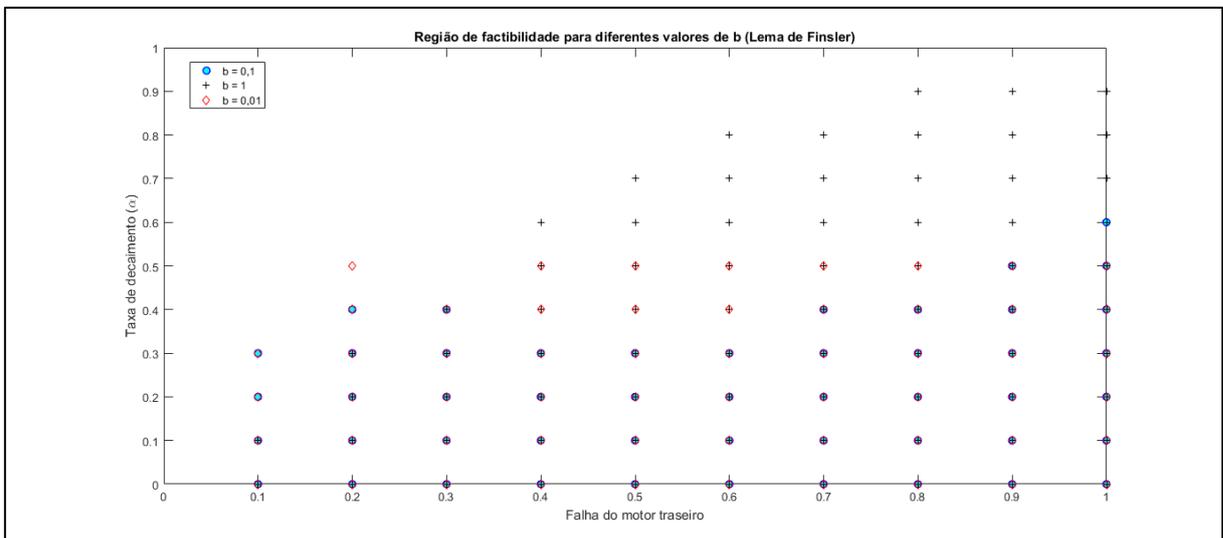
Fonte: Próprio autor.

O teste 3 seguiu uma linha próxima do teste 1, com algumas mudanças nos valores das matrizes de ponderação Q e R e com uma taxa de decaimento menor com relação ao teste 1, o que gerou efeitos similares ao teste 1 na performance dos controladores nos estados e sinal de controle e um tempo de estabelecimento sem grandes interferências devido a taxa de decaimento não ser elevada. As demais considerações feitas nos testes anteriores se mantêm nesse último teste de desempenho. Portanto, considerando o desempenho do controlador via lema de Finsler variando o valor do escalar b , adota-se para uso de comparação de desempenho e região de factibilidade com os demais métodos nas Seções 6.3 e 6.4 o valor de $b = 0,01$.

A seguir, será feita uma análise da região de factibilidade para os valores de b utilizados nos testes anteriores. Para essa análise foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[100 \ 5 \ 7 \ 0,01 \ 0,01 \ 2 \ 10 \ 0,1]$, $R = 0,025 * \text{diag}[1 \ 1]$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e falha no motor traseiro variando também de $0,1 \leq \varphi_{falha} \leq 1$, ou seja, a variação da perda de potência no motor traseiro é de 90% a 0% comprometido. O passo utilizado tanto para a taxa de decaimento (α) como para a perda de potência do motor (φ_{falha}) foi de 0,1. Além disso, é importante destacar que foi inserido um limite na norma do controlador menor ou igual a 300 para considerá-lo factível, com o intuito de garantir que o controlador encontrado não irá saturar

o atuador, tendo em vista que a tensão máxima permitida dos motores é de $\pm 24V$ e o controlador implementado no sistema atual inclui uma tensão de operação (V_{op}). E, essa tensão de operação é de aproximadamente $7,5V$ e será adicionada a saída de controle resultante.

Figura 11 – Região de factibilidade do lema de Finsler no helicóptero de bancada com variação do escalar b .



Fonte: Próprio autor.

Analisando a Figura 11, tem-se que o melhor desempenho ocorreu em $b = 1$ atingindo 74 pontos de 110 pontos possíveis da simulação, em sequência, com um desempenho mais uniforme temos $b = 0,01$ com 57 pontos e, por último, com a menor região de factibilidade $b = 0,1$ com 49 pontos. Levando em consideração a análise da atuação do controlador para os diferentes valores de b e a região de factibilidade, o valor mais coerente para dar sequência a esse projeto é de $b = 0,01$, pois temos um desempenho similar no sistema com falhas comparado aos outros dois métodos e uma região de factibilidade interessante para fins de comparação.

6.3. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS LQR CLÁSSICO, ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DE FINSLER E ESTABILIDADE ESTENDIDA VIA LEMA DA PROJEÇÃO RECÍPROCA NO DESEMPENHO DOS CONTROLADORES NO HELICÓPTERO DE BANCADA 3-DOF QUANSER[®]

Nesta Seção, são apresentados os resultados de estudos a fim de verificar a performance de cada técnica diante da perda de potência de um dos motores do helicóptero de bancada a partir dos 22 segundos da simulação em todos os testes. Além disso, também pode-se verificar

qual a melhor técnica, tendo em vista a importância de se projetar controladores que sejam robustos às incertezas do processo real, seja por razões econômicas ou de segurança na operação dos processos. Ademais, o esforço computacional na busca de soluções em controle varia de acordo com a incerteza e as dimensões do modelo da planta e por isso a necessidade de que o controlador atenda ao maior número de incertezas possível.

Caun et al. (2018) diz que, do ponto de vista da teoria de controle, o uso de uma única função de Lyapunov na definição de uma lei de controle de realimentação de estado é de certa forma mais conservadora, como visto no Teorema 3. Assim, ao considerarmos técnicas de matrizes de relaxação que permitiram adotar funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, obtém-se vantagens em termos de estabilidade marginal estendida, ou seja, regiões de maior factibilidade em termos de taxa de decaimento, além disso com os métodos de estabilidade estendida notou-se menores magnitudes na norma do controlador projetado em comparação com o método clássico (uma condição importante em implementações práticas), além de garantir a estabilidade robusta dos LDIs.

Na seção anterior foi citado o funcionamento das matrizes de ponderação Q e R no controlador, sendo a primeira com influência sobre a prioridade dos estados e a segunda no esforço do sinal de controle. Além disso, temos também a atuação da taxa de decaimento que ajuda o sistema a entrar em regime permanente mais rápido. Considerando esses fatores, três projetos, o primeiro solicitou maior prioridade ao estado de elevação, mais esforço do sinal de controle e uma taxa de decaimento baixa sem grandes interferências no transitório do sistema. Na segunda simulação diminuiu-se a prioridade do estado de elevação, solicitou-se menos esforço do sinal de controle e tivemos um aumento da taxa de decaimento, na tentativa de contrabalancear a atuação do controlador no sistema. E, por fim, a terceira simulação foi com uma matriz priorizando diversos estados, solicitando mais esforço do sinal de controle e também uma taxa de decaimento maior em relação ao primeiro teste.

Para o teste 1 foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[1500 \ 10 \ 0,1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $R = 0,05 * \text{diag}[1 \ 1]$ e $\alpha = 0,03$. A simulação de cada técnica gerou os controladores descritos a seguir.

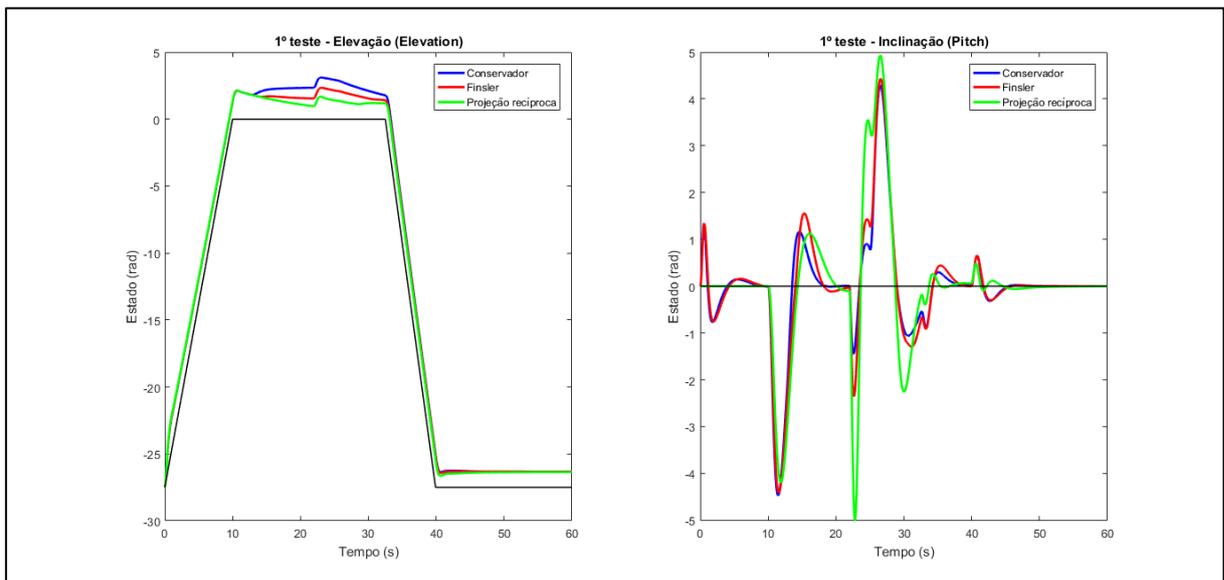
$$K_{\text{clássico}} = \begin{bmatrix} 123,9963 & 41,5379 & -29,1651 & 32,3140 & 12,0444 & -45,1752 & 8,7852 & -9,3990 \\ 129,3370 & -41,5942 & 28,3749 & 52,5248 & -12,8573 & 44,3476 & 8,5188 & 9,0652 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$K_{\text{Finster}} = \begin{bmatrix} 123,0929 & 29,1218 & -18,9365 & 35,2795 & 8,7284 & -29,5439 & 8,4983 & -5,9117 \\ 128,3791 & -27,1966 & 16,6573 & 48,4857 & -9,4399 & 26,7499 & 8,6470 & 5,0963 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$K_{\text{projeção}} = \begin{bmatrix} 126,2798 & 15,3258 & -8,3596 & 38,6704 & 5,8216 & -13,9760 & 8,6014 & -2,3581 \\ 126,2798 & -15,3258 & 8,3596 & 38,6704 & -5,8216 & 13,9760 & 8,6014 & 2,3581 \end{bmatrix} \quad (63)$$

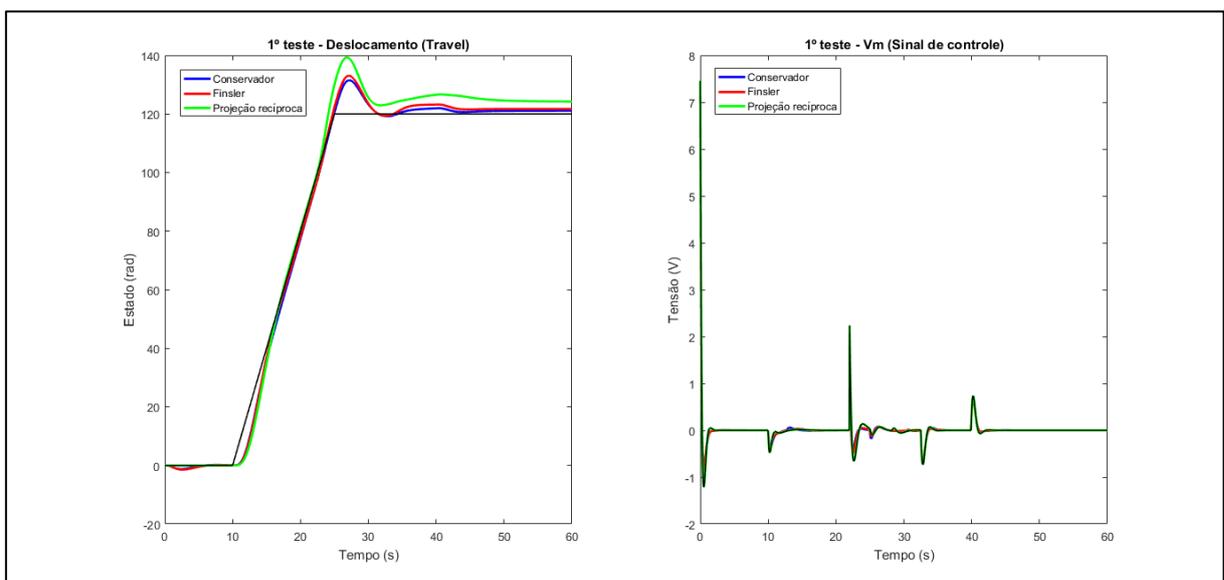
O resultado do teste 1 foi plotado e está representado nas Figuras 12 e 13.

Figura 12 – Teste 1: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos nos estados de elevação e inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 13 – Teste 1: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos no estado de deslocamento e sinal de controle.



Fonte: Próprio autor.

Para as matrizes de ponderação do teste 1, tem-se uma solicitação de prioridade para o estado de elevação e esforço do sinal de controle pelas matrizes Q e R , respectivamente. Todas as técnicas se desempenham de forma semelhante para o sinal de controle. Já para o deslocamento, o lema de Finsler e o clássico atuaram de forma similar e o lema da projeção recíproca não atuou tão bem considerando a referência e o mesmo ocorre com o estado de inclinação. Porém, para o estado de elevação que possui maior prioridade dentre todos os estados, teve o lema da projeção recíproca com melhor performance comparado aos outros dois métodos.

Já para o teste 2, foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[150 \ 15 \ 0,1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $R = 0,1 * \text{diag}[1 \ 1]$ e $\alpha = 0,1$. A simulação de cada técnica gerou os controladores descritos a seguir.

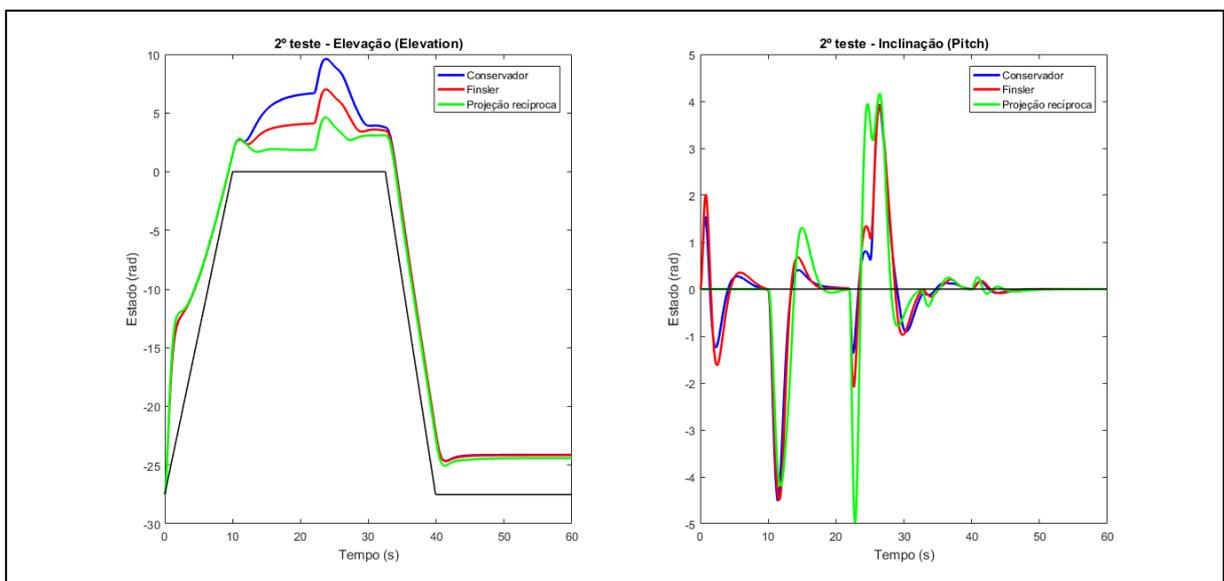
$$K_{\text{Clássico}} = \begin{bmatrix} 29,3785 & 44,5815 & -34,1280 & 17,4455 & 12,3829 & -51,3699 & 6,0697 & -10,7933 \\ 38,7073 & -35,7324 & 26,2424 & 27,6734 & -10,9512 & 39,9884 & 7,3833 & 8,2187 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$K_{\text{Finsler}} = \begin{bmatrix} 29,4215 & 30,1404 & -21,0247 & 18,3628 & 9,2155 & -32,5316 & 5,9410 & -6,3070 \\ 38,5591 & -25,0789 & 16,3576 & 26,9096 & -8,7235 & 25,8720 & 7,4593 & 4,8235 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$K_{\text{Projeção}} = \begin{bmatrix} 33,6416 & 14,5945 & -8,1809 & 20,5191 & 5,4510 & -13,7139 & 6,7004 & -2,2248 \\ 33,6416 & -14,5945 & 8,1809 & 20,5191 & -5,4510 & 13,7139 & 6,7004 & 2,2248 \end{bmatrix} \quad (66)$$

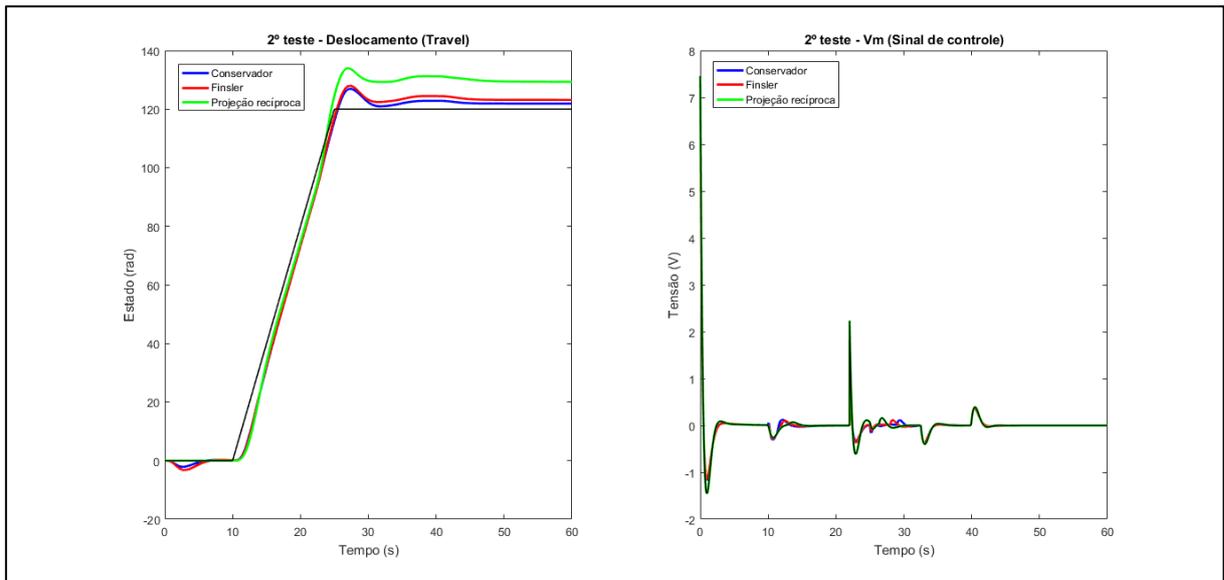
O resultado do teste 2 foi plotado e está representado nas Figuras 14 e 15.

Figura 14 – Teste 2: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos nos estados de elevação e inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 15 – Teste 2: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos no estado de deslocamento e sinal de controle.



Fonte: Próprio autor.

O teste 2 teve um comportamento nos resultados comparativos da atuação do desempenho dos controladores projetados similar ao teste 1. No entanto, o segundo teste traz uma matriz de ponderação Q com menor intensidade de prioridade no estado de elevação, uma matriz R solicitando menos esforço do sinal de controle e uma taxa de decaimento maior comparado ao teste 1.

Por fim, no teste 3, foram utilizadas as matrizes $Q = \text{diag}[1900 \ 15 \ 0,15 \ 13 \ 10 \ 11 \ 1 \ 0,1]$, $R = 0,02 * \text{diag}[1 \ 1]$ e $\alpha = 0,275$. A simulação de cada técnica gerou os controladores descritos a seguir.

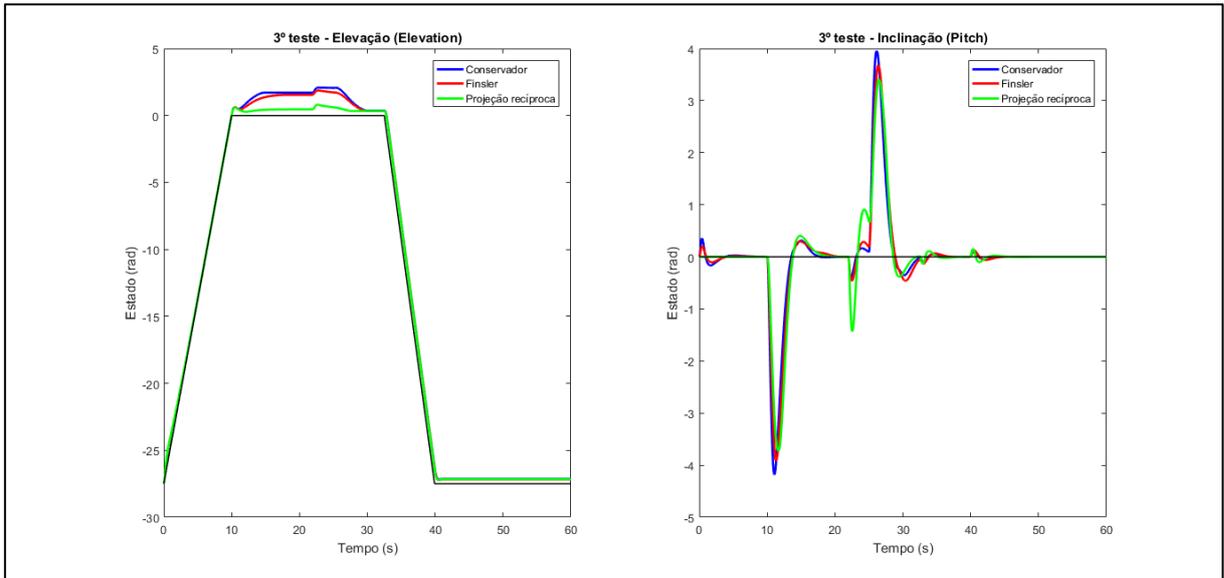
$$K_{\text{Clássico}} = \begin{bmatrix} 244,9909 & 158,9172 & -156,8840 & 53,6378 & 29,9553 & -216,6965 & 131,7537 & -40,8551 \\ 291,6334 & -134,1293 & 128,0935 & 77,8378 & -26,9320 & 179,1314 & 129,2425 & 33,0682 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$K_{\text{Finsler}} = \begin{bmatrix} 257,9920 & 123,8762 & -95,9636 & 57,8681 & 34,1471 & -149,4752 & 128,7411 & -22,7521 \\ 270,1638 & -135,6272 & 103,1335 & 73,4187 & -38,7131 & 162,1217 & 124,8735 & 24,2750 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$K_{\text{Projeção}} = \begin{bmatrix} 264,4648 & 46,6169 & -28,8584 & 59,9987 & 15,1129 & -49,5481 & 128,4703 & -6,2587 \\ 264,4648 & -46,6169 & 28,8584 & 59,9987 & -15,1129 & 49,5481 & 128,4703 & 6,2587 \end{bmatrix} \quad (69)$$

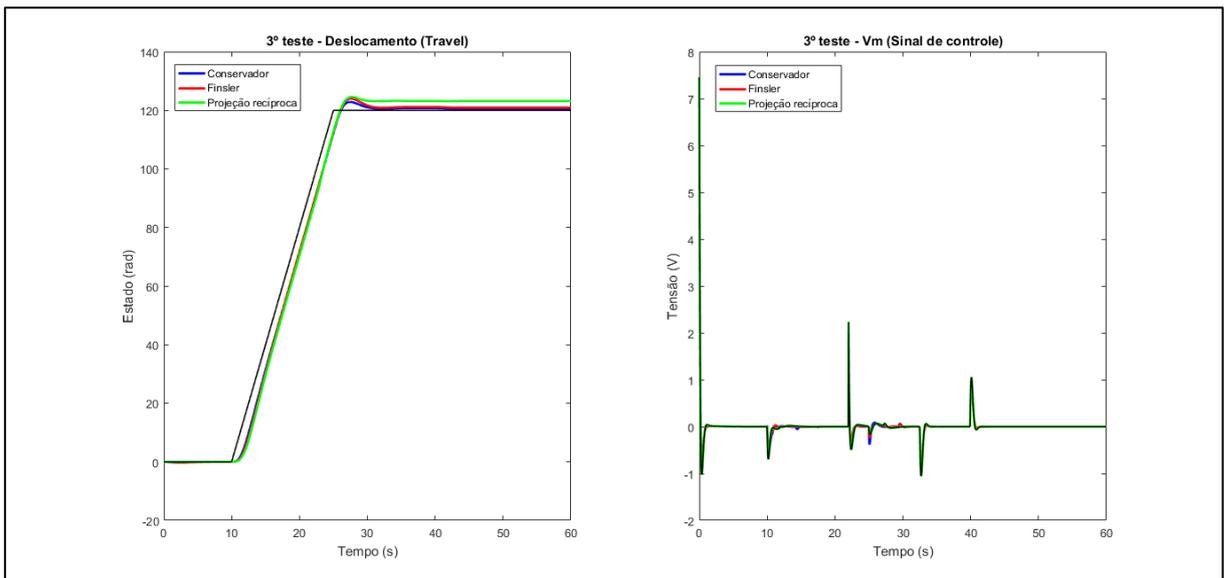
O teste 3 foi plotado e está representado nas Figuras 16 e 17.

Figura 16 – Teste 3: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos nos estados de elevação e inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 17 – Teste 3: Comparação de desempenho no helicóptero de bancada entre os métodos no estado de deslocamento e sinal de controle.



Fonte: Próprio autor.

Por fim, no teste 3, temos uma excelente atuação do lema da projeção recíproca no sinal de controle e estados em geral, porém, com um erro um pouco maior considerando a referência no estado de deslocamento, com relação as outras duas técnicas. Pode-se observar também ao longo dos três testes que o desempenho do controlador clássico e lema de Finsler são próximos

com algumas diferenças entre eles no estado de inclinação e uma diferença mais aparente no estado de elevação, com exceção do teste 3 que ambas tiveram um desempenho muito próximo em todos os cenários.

Considerando apenas o teste 3, o estado de elevação e o sinal e controle, o controlador com melhor desempenho seria o projetado com o lema da projeção recíproca. Porém, os controladores via lema de Finsler e clássico atingiram de forma geral uma boa atuação em todos os testes, menos para o estado de elevação do teste 2. Portanto, com a seção a seguir será possível decidir qual a melhor técnica entre os três, considerando também a região de factibilidade.

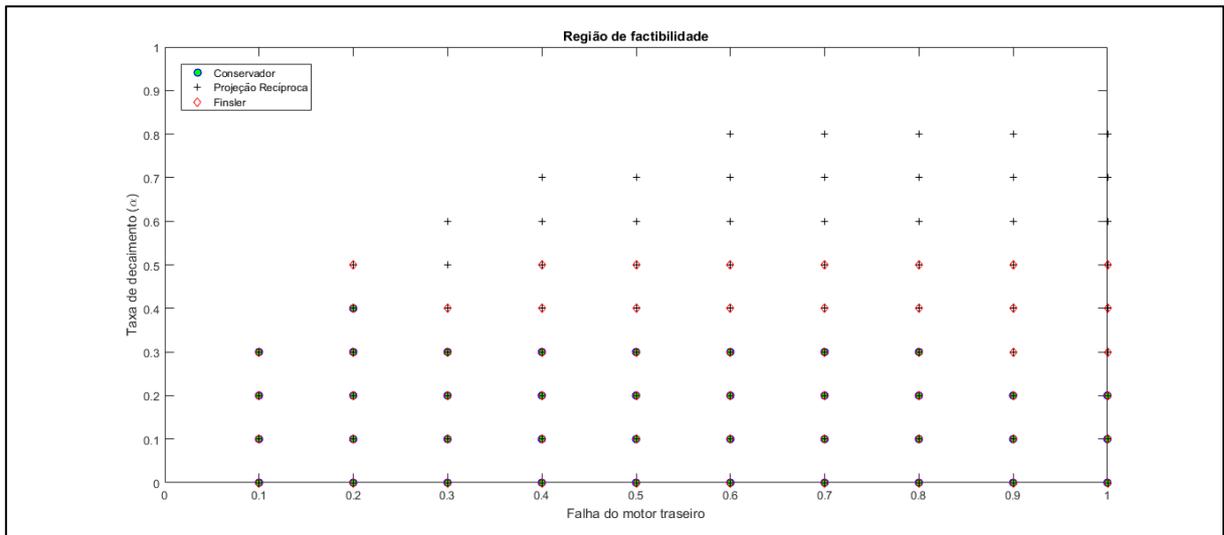
6.4. COMPARAÇÃO DAS REGIÕES DE FACTIBILIDADE E DETERMINAÇÃO DO MELHOR MÉTODO

Nessa seção, será analisada a região de factibilidade entre as técnicas, a fim de determinar qual técnica apresenta o melhor resultado. Para a execução desse trabalho, foi utilizado o pacote computacional de solvers “LMILab” em conjunto com a interface “Yalmip” por meio do software *MatLab*[®] (LOFBERG, 2004).

Ressalta-se que o valor da norma do controlador projetado foi limitado em menor ou igual a 300 para considerá-lo factível, devido aos problemas de saturação do atuador do sistema real e tensão máxima permitida dos motores de $\pm 24V$. Para essa simulação foram utilizadas as matrizes de ponderação $Q = \text{diag}[100 \ 5 \ 7 \ 0,01 \ 0,01 \ 2 \ 10 \ 0,1]$, $R = 0,025 * \text{diag}[1 \ 1]$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e falha a perda de potência do motor traseiro variando também de $0,1 \leq \varphi_{falha} \leq 1$. O passo utilizado tanto para a taxa de decaimento (α) como para a perda de potência do motor (φ_{falha}) foi de 0,1.

A simulação de cada técnica plotada em conjunto gerou a região de factibilidade demonstrada na Figura 18.

Figura 18 – Região de factibilidade das técnicas Clássico, lema de Finsler e lema da Projeção Recíproca no helicóptero de bancada.



Fonte: Próprio autor.

Analisando a Figura 18, vê-se que em ordem de maior região de factibilidade temos o lema da Projeção Recíproca, o lema de Finsler ($b = 0,01$) e o clássico, respectivamente. Como citado anteriormente, quanto maior a taxa de decaimento, menor será o tempo de estabelecimento do sistema com o controlador, ou seja, o helicóptero entrará em regime permanente em menos tempo.

Portando, levando em consideração que a técnica com maior região de factibilidade possui uma faixa de taxa de decaimento maior de atuação que as outras técnicas para determinada incerteza inserida no motor e que o desempenho do controlador no sistema é otimizado para uma taxa de decaimento mais elevada, então, tem-se pela análise da seção anterior com a atual que o lema da Projeção Recíproca é a mais adequada neste trabalho, ou seja, ela teve um melhor desempenho se comparada com as outras técnicas. Uma vez que, para a Projeção Recíproca conseguimos atingir uma ampla faixa do intervalo da taxa de decaimento do que os outros (Figura 18) e, na seção 6.2 observa-se que o teste 3 em que a taxa de decaimento é mais elevada que os testes 1 e 2 o lema da Projeção Recíproca obteve uma excelente performance em todos os estados e sinal de controle de forma geral comparado a técnica clássica e via lema de Finsler.

7. CONCLUSÃO

O presente trabalho abordou o problema de controle robusto e análise de região de factibilidade de projetos de controladores LQR via LMI, aplicado ao helicóptero de bancada 3-DOF Quanser[®]. Em Quanser (2012), apesar de ser descrito por um modelo linear em espaço de estados, o equipamento possui fortes características de não-linearidades, o que aumenta a dificuldade de projeto, o que ressalta a importância da pesquisa realizada.

Ao observar os resultados apresentados no Capítulo 6, primeiramente pode-se verificar a importância da boa escolha do escalar b no lema de Finsler, pois quanto menor seu valor, melhor será a atuação do controlador projetado. Porém, após $b = 0,01$ os resultados são muito semelhantes e a diferença entre as normas do controlador K projetado são pequenas. Além disso, na análise de região de factibilidade temos que $b = 1$ se sai melhor quantitativamente, mas sua performance no sistema com incertezas não é tão bom quanto os outros valores. E, por fim, pode-se verificar que após a queda do valor de $b < 1$ há uma redução da região de factibilidade, em comparação a $b = 1$, seguido de um crescimento conforme seu valor diminui até $b = 0,01$ (Figura 11), esse crescimento da região de factibilidade ao atingir os valores de $b \leq 0,01$ fica da mesma forma que o desempenho do controlador, ou seja, sofre pouca variação.

Adicionalmente, foi verificado também uma comparação entre o desempenho e região de factibilidade entre as três técnicas e, quando escolhido de forma adequada uma priorização uniforme dos estados o lema da projeção recíproca se sai melhor do que os outros métodos. Porém, quando há uma carga de prioridade maior em apenas um estado, seu controlador não se comporta de maneira adequada nos demais estados. Ademais, o lema de Finsler e clássico atuam de forma parecida nas simulações com exceção do estado de elevação que foram diferentes em 2 dos 3 testes. Por fim, apesar da atuação similar entre lema de Finsler e clássico, podemos claramente ver que o lema de Finsler possui maior região de factibilidade que o clássico e, o lema da projeção recíproca dentre todos foi o que melhor se sobressaiu em todos os testes, inclusive na região de factibilidade. Portanto, após as considerações e análises realizadas, temos o lema da Projeção Recíproca como a melhor técnica.

Para trabalhos futuros, pretende-se investigar a influência do parâmetro b no desempenho dos controladores e como isso afeta o custo J .

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. New York: Prentice-Hall, 1990.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; Bernussou, J. (2001). Continuoustime analysis, eigenstructure assignment, and H₂ synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46, 1941–1946.
- BOMBOIS, X. (2000). *Connecting prediction error identification and robust control analysis: A new framework* (Tese de doutorado). Universite Catholique de Louvain.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. In *Studies in applied mathematics* (Vol. 15, 2nd ed.). Philadelphia, PA: SIAM.
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; DA SILVA, E. R. P. (2012). New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems. In G.L.O. Serra (Ed.), *Frontiers in advanced control systems* (pp. 75–100).
- CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; Teixeira, M. C. M.; CAUN, A. P. (2018). LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/23311916.2018.1457206>>. Acesso em: 20 de março de 2020.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. (2001). Parameter dependente Lyapunov functions for discrete time systems with varying parametric uncertais. *Systems & Control Letters: Elsevier Science*, 43, 355–359.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M.C.M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/ca/a/VJxvhwwc9xT8frqrXSj766w/?lang=pt>>. Acesso em: 12 de junho de 2021.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI control toolbox - For use with MATLAB*. [S.l.], 1995.
- GE, M., Chiu, M.; WANG, Q. (2002). Robust PID controller design via LMI approach. *Journal of Process Control*, 12, 3–13.

- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. (2006). Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, 1984–1989.
- LOFBERG, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design* (pp. 284-289). Disponível em: <<http://control.ee.ethz.ch/joloef/yalmip.php>>. Acesso em: 27 de junho de 2020.
- OGATA, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall, 5th Edition.
- OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. (2001). *Perspectives in robust control*, 1st edition, Springer Berlin / Heidelberg, Berlin, chapter Stability tests for constrained linear system, pp. 241-257.
- OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 52, n. 7, p. 1334-1340, 2007.
- QUANSER. (2012). 3-DOF Helicopter Reference Manual. Disponível em: <http://www.quanser.com/english/html/products/fs_product_challenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1>. Acesso em: 20 de março de 2020.
- SKELTON, R. E., IWASAKI, T. E. e GRIGORIADIS, K. (1997). *A unified algebraic approach to control design*, Taylor & Francis, Bristol.
- XIE, W. (2008). Multi-objective infinity/alpha -stability controller synthesis of LTI systems. *IET: Control Theory Applications*, 2, 51–55.