

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Amanda Alves Silva

**Controle de Orientação em um Giroscópio
com Grandes Deslocamentos Angulares**

ILHA SOLTEIRA

2017

Amanda Alves Silva

**Controle de Orientação em um Giroscópio
com Grandes Deslocamentos Angulares**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Samuel da Silva

ILHA SOLTEIRA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586c Silva, Amanda Alves.
Controle de orientação em um giroscópio com grandes deslocamentos angulares / Amanda Alves Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
47 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira. Área de conhecimento: Engenharia Mecânica, 2017

Orientador: Samuel Da Silva

Inclui bibliografia

1. Giroscópio. 2. Controle de orientação. 3. Dinâmica de Newton-Euler. 4. Controle LQR. 5. Controle on/off.

ATESTADO DE APROVAÇÃO - DEFESA

Atestamos que **AMANDA ALVES SILVA**, RA nº: 188061-2, RG nº 47.882.506-7, expedido pela SSP/SP, defendeu, no dia 24/08/2017, a dissertação intitulada **Controle de Orientação de um Giroscópio com Grandes Deslocamentos Angulares**, junto ao Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA, Curso de Mestrado Acadêmico, tendo sido 'APROVADA'.

Atestamos ainda que a obtenção do título dependerá de homologação pelo Órgão Colegiado competente.

Ilha Solteira, 24 de agosto de 2017

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "M. Regina", is written over a horizontal line.

Márcia Regina Nagamachi Chaves
Supervisor Técnico de Seção - STPG

*Dedico este trabalho as minhas avós, Maria e Jacy,
pelo amor incondicional e pelas preces que superaram a distância.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais e a minha irmã, Ideu, Lúcia e Andressa, pelo amor, carinho, cuidado e cobrança. E por acreditarem na minha capacidade durante a graduação e o mestrado.

Agradeço também aos professores e técnicos da instituição pelos conhecimentos adquiridos. Destacando entre esses o meu orientador, professor Samuel da Silva, pela paciência e compreensão, pela confiança e, principalmente, por ser um exemplo de esforço e dedicação perante aos seus orientados.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Fundação CAPES), que financiou o desenvolvimento desse projeto durante 24 meses, e ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) pelo suporte administrativo.

Aos amigos, que são muitos, agradeço: a MecUnião minha turma da graduação onde fiz amizades para vida toda; a MecTon que, apesar de serem veteranos, me acolheram com muito carinho; ao Denúncia que não nos conhecemos a muito tempo, no entanto, o tempo que passamos juntos foi intenso e rendeu amizades verdadeiras; aos Filhos do Manuhell de onde conheci pessoas muito inteligentes e com futuros brilhantes, que me ajudaram muito durante o trabalho e que no âmbito pessoal tornaram-se amigos que espero estar sempre em contato; e aos que não são desses grupos mais ainda sim contribuíram com a minha passagem por Ilha Solteira.

Resumo

O giroscópio é um sistema dinâmico de alta aplicabilidade onde, a gama de aplicação se dá devido a presença do efeito giroscópico que é usado no controle de orientação de corpos no espaço. Visando demonstrar este fato, este trabalho aplica um controlador linear quadrático (LQR) projetado a partir do modelo linearizado do giroscópio. Este controlador é testado experimentalmente e os resultados mostram limitações para grandes deslocamentos angulares e na presença de torque de perturbação. Para evitar estas limitações em condições de grandes deslocamentos a proposta foi projetar um controlador não linear diretamente com a planta não linear do giroscópio. A dissertação mostra que mesmo uma estratégia simples de controle do tipo *on/off* pode apresentar melhores resultados quando o giroscópio opera com grandes deslocamentos angulares e apresenta não linearidades acentuadas. A dissertação descreve o modelo do giroscópio usado, as técnicas de controle implementadas e a comparação de desempenho de ambas abordagens de controle.

Palavras-chave: giroscópio; controle de orientação; dinâmica de Newton-Euler, controle lqr, controle on/off.

Abstract

The gyroscope is a dynamic system of high applicability where the range of application is due to the presence of the gyroscopic effect that is used in the control of body orientation in space. Aiming to demonstrate this fact, this work applies a quadratic linear controller (LQR) projected from the linearized model of the gyroscope. This controller is experimentally tested and the results show limitations for large angular displacements and in the presence of perturbation torque. To avoid these limitations in conditions of large displacements, the proposal was to design a nonlinear controller directly with the nonlinear gyroscope. The dissertation shows that even a simple on/off control strategy can perform better when the gyroscope operates at large angular displacements and exhibits sharp nonlinearities. The dissertation describes the gyroscope model used, the control techniques implemented and the performance comparison of both control approaches.

Keywords: gyroscope, guidance control, Newton-Euler dynamics, lqr control, on/off control.

Lista de Símbolos

ψ	- Ângulo de precessão (aro vermelho)
$\dot{\psi}$	- Velocidade angular de precessão (aro vermelho)
$\ddot{\psi}$	- Aceleração angular de precessão (aro vermelho)
θ	- Ângulo de nutação (aro azul)
$\dot{\theta}$	- Velocidade angular de nutação (aro azul)
$\ddot{\theta}$	- Aceleração angular de nutação (aro azul)
ϕ	- Ângulo de <i>spin</i> (disco de inércia)
$\dot{\phi}$	- Velocidade angular do disco de inércia
$\ddot{\phi}$	- Aceleração angular do disco de inércia
$\mathcal{I}$	- Designação para base inercial (sistema de referência)
$\mathcal{B}$	- Designação para base móvel (sistema de referência)
(x, y, z)	- Sistema de eixos cartesianos
$(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$	- Vetor unitário correspondente as direções (x, y, z)
$\mathbf{T}_{\psi}$	- Matriz de rotação da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{I}$
$\mathbf{T}_{\psi}^T$	- Matriz de rotação transposta da base $\mathcal{I}$ para base $\mathcal{B}_1$
$\mathbf{T}_{\theta}$	- Matriz de rotação da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$
$\mathbf{T}_{\theta}^T$	- Matriz de rotação transposta da base $\mathcal{B}_1$ para base $\mathcal{B}_2$
$\mathbf{s}$	- Vetor qualquer (usado como exemplo de mudança de base)
${}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}$	- Velocidade angular do corpo representada na base $\mathcal{B}$
${}^{\mathcal{B}}\dot{\boldsymbol{\omega}}$	- Aceleração angular do corpo representada na base $\mathcal{B}$
${}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega}$	- Velocidade angular da base representada na base $\mathcal{B}$
${}^{\mathcal{B}}\dot{\boldsymbol{\Omega}}$	- Aceleração angular da base representada na base $\mathcal{B}$
${}^{\mathcal{B}}\mathbf{v}_{CM}$	- Velocidade do centro de massa (CM) representada na base $\mathcal{B}$
${}^{\mathcal{B}}\mathbf{a}_{CM}$	- Aceleração do centro de massa (CM) representada na base $\mathcal{B}$
$\sum {}^{\mathcal{B}}\mathbf{F}$	- Somatória de forças representada na base $\mathcal{B}$
$\dot{\mathbf{p}}$	- Taxa de variação do momento linear
m	- Massa (kg)
O	- Ponto de origem dos sistemas de referência
$\sum {}^{\mathcal{B}}\mathbf{M}_o$	- Somatória de momentos aplicados no ponto O representado na base $\mathcal{B}$
$\mathcal{H}_o$	- Momento angular

$\mathcal{B}\mathbb{I}_o$	- Tensor de inércia de massa representado na base $\mathcal{B}$
$\mathcal{B}\mathbf{r}_{o-CM}$	- Vetor distância entre o ponto O e o centro de massa (CM)
$\mathcal{F}(\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta})$	- Funcional
h	- Variável de simplificação ($h = I_{x_2}\dot{\phi}$)
$\mathbf{x}$	- Vetor de estado
$\mathbf{u}$	- Sinal de controle
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$	- Matrizes de valor constante usadas na descrição do modelo de estados
$\mathcal{J}$	- Índice de desempenho quadrático do controlador LQR
$\mathcal{L}$	- Função quadrática usada na definição de $\mathcal{J}$
$\mathcal{K}$	- Matriz de ganhos do controlador LQR
$\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{P}$	- Matrizes de ponderação hermitianas e positivas

Lista de Figuras

1	Giroscópio da Quanser [®] : (1) é a roda de reação, (2) é aro azul, (3) é aro vermelho e (4) é retângulo cinza.	15
2	Representação esquemática do giroscópio.	17
3	Relações entre as bases.	17
4	Planta simplificada do controle LQR usado no giroscópio.	26
5	Bancada experimental: (1) é o computador, (2) é o amplificador, (3) é a placa de aquisição e (4) é o giroscópio.	27
6	Componentes do giroscópio.	28
7	Influência da matriz de ganho $\mathcal{K}$ no controlador LQR e nos torques de controle.	29
8	Validação da simulação através da comparação da resposta do controlador na simulação e no experimento para as mesmas condições de referência e ganho.	29
9	Experimentos realizados para referências distintas mantendo a matriz de ganhos da validação $\mathcal{K}_3$	30
10	Experimento que mostra uma limitação do controlador LQR quando há grande deslocamento angular.	31
11	Experimento com aplicação do torque de perturbação simulando um pulso.	32
12	Experimento com aplicação do torque de perturbação simulando uma sequência de pulsos (onda quadrada).	32
13	Experimento com aplicação do torque de perturbação onde a referência do controlador é zero.	33
14	Planta simplificada do controle <i>on/off</i> usado no giroscópio.	35
15	Comportamento do sistema para referências senoidais de diferentes amplitudes e frequências com o controle <i>on/off</i>	36

16	Comportamento do sistema para condição de pulso, referência zero e rampa com o controlador <i>on/off</i>	37
----	--	----

Sumário

		Páginas
1	Introdução	12
1.1	Objetivo	13
1.2	Organização do trabalho	14
2	Modelo do Giroscópico	15
2.1	Sistemas de referência	16
2.2	Cinemática do giroscópio	18
2.3	Dinâmica do giroscópio	19
2.4	Obtenção do modelo linear do giroscópio	21
2.5	Sumário	22
3	Aplicação do regulador linear quadrático no controle do giroscópio	23
3.1	Controle LQR	23
3.2	Descrição experimental	25
3.3	Resultados	28
3.4	Sumário	33
4	Controle não linear do giroscópio	34
4.1	Controle liga e desliga	34
4.2	Resultados	35
4.3	Sumário	37
5	Considerações finais	38

5.1	Conclusão	38
5.2	Sugestões para futuros trabalhos	38
	Referências	39
	Apêndice A – Formulação completa das equações de Euler	42
	Apêndice B – Diagrama Simulink® do controlador LQR	44
	Apêndice C – Diagrama Simulink® do controlador <i>on/off</i>	46

1 Introdução

Um efeito presente em corpos rígidos que giram em torno de eixos de simetria é o efeito giroscópico (Neto, 2004). De forma simples o balanço de torques deve ser equilibrado com a taxa de variação do momento angular que pode ser causada por variações de sua direção ou amplitude. Em especial, a variação de direção do momento angular produz o chamado torque giroscópico, causando alguns movimentos angulares conhecidos como precessão e nutação. O efeito giroscópico pode ser usado de forma efetiva no controle de orientação de corpos no espaço (Thiele, 1974). Dentre as aplicações possíveis, se destacam os dispositivos de navegação inercial e estabilizadores, usados no controle de atitude¹ de satélites, quadrirrotores, helicópteros elétrico, submarinos, conforme diversos autores (Ni; Zhang, 2011; Braddon, 1960; Barros; Junqueira, 2005; Júnior; Lopes, 2012; Paula, 2013).

Devido a complexidade da dinâmica dos giroscópios, uma vez que trata-se de um sistema com não linearidades acentuadas de origem geométrica causadas por grandes deslocamentos angulares, as plantas de controle usadas nesses sistemas são muito variadas e normalmente devem ser linearizados em torno de pontos de equilíbrio. Tem-se exemplos de plantas usando PID², como no trabalho de Sá (2012) que usa esta estratégia para controle de um quadrirrotor, ou mesmo redes neurais para controle de satélites (Carrara, 1997) e plantas usando lógica *fuzzy* para controlar *quadcopter* (Braga, 2013), entre outros (Almeida, 2002; Paula, 2013).

No caso de controles clássicos, o regulador linear quadrático (LQR) tem sido amplamente usado no controle de orientação (How et al., 2008). Outros exemplos são controle de suspensão veicular ativa (Sam; Ghani; Ahmad, 2000), com o intuito de melhorar a qualidade do passeio e a dirigibilidade e o controle de movimento de prótese de joelho para pacientes paraplégicos (Oliveira et al., 2014). Porém devido a linearização dos modelos estes controladores ficam restritos a pontos de controle próximos aos pontos de equilíbrio (Ogata; Maya; Leonardi, 2003).

¹Descrito aqui como orientação.

²Controle proporcional, Integral e Derivativo.

Objetivando ampliar a região de controle, ou seja, controlar pontos fora da região de equilíbrio, pode-se expandir o uso de controladores como o regulador linear quadrático ou aplicar técnicas de controle que usam o modelo não linear como o controlador do tipo *on/off* (liga/desliga). O uso do regulador linear quadrático para condições fora dos pontos de equilíbrio apresentam bons resultados como Yazici e Sever (2017) usaram um controlador LQR para controlar os amortecedores de trem de pouso de aeronaves, que possuem características não lineares. Enquanto que Li, Sinha e Sankaranarayanan (2016) empregaram o LQR para automação de cirurgia robótica onde é necessário realizar o aquecimento e a compressão de tecidos com dinâmica não linear.

Neste sentido, a presente dissertação de mestrado busca usar um controlador LQR usando o modelo linear mais aplicado em condições de controle fora dos pontos de equilíbrio comparando com o controlador *on/off* usando o modelo não linearizado, uma vez que, esse controlador possui uma lógica simples e trabalha bem até em condições de possível saturação (Mudigonda; Bucinskas, 2016).

A empregabilidade do controlador *on/off* vai desde controle transiente de bomba de calor (Vargas; Parise, 1995) até controle de gerenciamento do processo de carga e des-carga de baterias empregadas em sistemas fotovoltaicos autônomos (Neto et al., 2016), ente outros (Afram; Janabi-sharifi, 2016). Assim após obter os modelos linear e não linear de um giroscópio que foram usados pelos controladores LQR e *on/off*, respectivamente, pode-se comparar os resultados para o controle de orientação e estabilização de um giroscópio em condições de grandes deslocamentos angulares.

1.1 Objetivo

Esta dissertação tem como objetivo estudar, implementar e comparar experimentalmente controladores de orientação e estabilização de um giroscópico usando abordagens lineares e não lineares. Este controlador deve ser robusto a possíveis perturbações e grandes deslocamento angulares.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho está organizado em cinco capítulos:

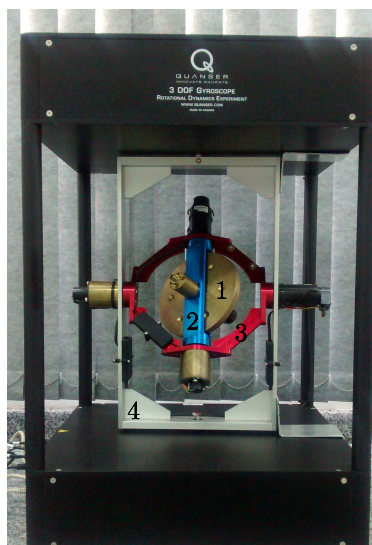
- Capítulo 1: Introdução mostrando as aplicações e motivações do trabalho juntamente com o objetivo;
- Capítulo 2: A modelagem do giroscópio, onde realiza-se a análise cinemática, dinâmica e a linearização do modelo;
- Capítulo 3: A aplicação do regulador linear quadrático, sendo apresentado o desenvolvimento teórico e a implementação com os resultados experimentais;
- Capítulo 4: O controle não linear com a implementação do controle on/off e os resultados da simulação;
- Capítulo 5: A conclusão e apresentação de propostas futuras.

2 Modelo do Giroscópio

Esse capítulo apresenta a modelagem para obtenção das equações do giroscópio visto na fig. (1). Trata-se de um giroscópio fabricado pela Quanser® que possui uma roda de inércia (representado pelo número 1 da fig. (1)) com três graus de liberdade: o aro azul (representado pelo número 2 da fig. (1)), o aro vermelho (representado pelo número 3 da fig. (1)) e o retângulo cinza (representado pelo número 4 da fig. (1)). Neste trabalho o retângulo cinza é mantido fixo, trabalhando assim com apenas dois graus de liberdade mais o giro da roda de reação. O equipamento permite acionar e monitorar de forma independente cada aro e roda de inércia.

Para obtenção das equações de Newton-Euler deve-se definir os sistemas de referência consistentes para permitir a visualização, de forma clara, dos parâmetros referentes a física presente no problema. Tendo esses sistemas de referência bem desenvolvidos é possível fazer a análise cinemática e dinâmica do giroscópio que se detalha nas seções seguintes deste capítulo.

Figura 1 – Giroscópio da QuanserOR: (1) é a roda de reação, (2) é aro azul, (3) é aro vermelho e (4) é retângulo cinza.



2.1 Sistemas de referência

Quando se faz a análise cinemática e dinâmica de um sistema mecânico, é necessário ter sistemas de referência que permitam o equacionamento do problema de modo que facilite a visualização dos movimentos analisados. Essa seção apresenta a escolha dos sistemas de referência que foram usados para a análise dinâmica do giroscópio.

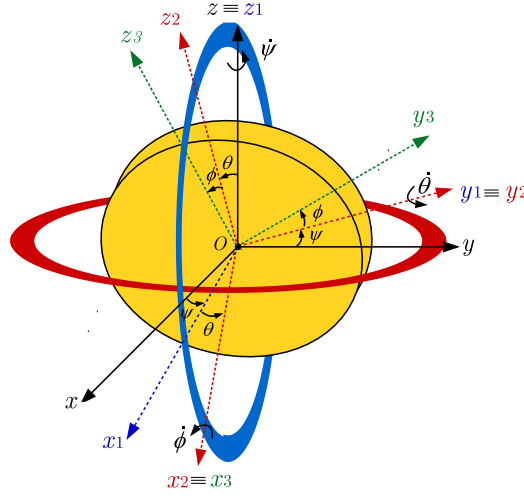
O sistema de referência é composto por um sistema de coordenadas Cartesianas (x , y e z) que pode ou não estar em movimento. O sistema de referência que permanece fixo é o sistema de referência inercial, já quando o sistema de referência se move junto com o objeto em análise diz-se que é um sistema móvel solidário ao movimento do objeto. Quando o objeto tem mais de um movimento, seja ele de translação ou rotação, pode ser necessário a utilização de mais de um sistema de referência móvel. Cada sistema de referência, por sua vez, nomea-se de base, com isso o objeto possui uma base inercial e quantas bases móveis forem necessárias.

As bases relacionam-se entre si através das matrizes de transformação (matriz de translação ou matriz de rotação). Essas são usadas quando quer uma análise em uma base e as variáveis estão escritas em uma base diferente. A relação entre as bases permite observar o comportamento do sistema a ser estudado sobre diferentes ângulos. Durante a modelagem, as equações, normalmente, tornam-se mais simples quando são feitas em uma base móvel. A preferência por uma base móvel se dá uma vez que o tensor de inércia, que está associado a distribuição de massa do objeto, é invariante nessa base. Para o giroscópio os sistemas de referência e suas matrizes de transformação são apresentados na sequência (Beer; Jr; Cornwell, 2013).

O movimento do giroscópio é descrito pelos ângulos de Euler, nomeados de precessão (ψ), nutação (θ) e *spin* (ϕ) e é necessário uma base solidária a cada um dos movimentos juntamente com a base inercial. Deste modo tem-se que a base $\mathcal{B}_1(x_1, y_1, z_1)\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1\}$ encontra-se solidária ao movimento de precessão, a base $\mathcal{B}_2(x_2, y_2, z_2)\{\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}_2\}$ solidária ao movimento de nutação, a base $\mathcal{B}_3(x_3, y_3, z_3)\{\hat{i}_3, \hat{j}_3, \hat{k}_3\}$ solidária ao movimento de *spin* e a base $\mathcal{I}(x, y, z)\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ de referencial, inercial.

A fig. (2) ilustra a distribuição dessas bases e rotações do giroscópio, onde a base $\mathcal{B}_1$ é solidária ao movimento do aro vermelho, movimento de precessão ($\dot{\psi} \Rightarrow z_1$), e a base $\mathcal{B}_2$ encontra-se solidária ao movimento do aro azul, movimento de nutação ($\dot{\theta} \Rightarrow y_2$). A partir da distribuição das bases é possível encontrar as matrizes de rotação.

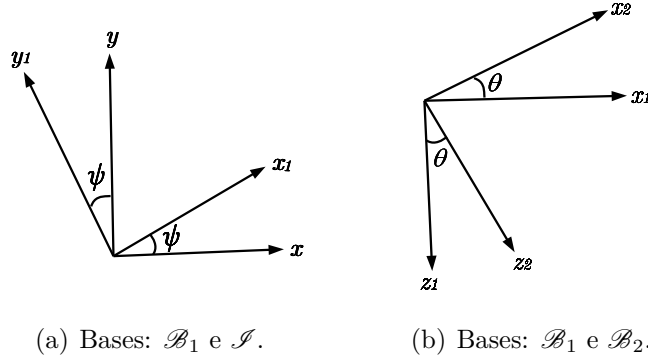
Figura 2 – Representação esquemática do giroscópio.



Fonte: Jambersi (2016) (modificado).

A fig. (3) mostra que a relação entre a base inercial ($\mathcal{I}$) e a base $\mathcal{B}_1$ é dada pelo ângulo ψ e a relação entre a base $\mathcal{B}_1$ e a base $\mathcal{B}_2$ é dada pelo ângulo θ .

Figura 3 – Relações entre as bases.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Com isso tem-se que as matrizes de rotação são $\mathbf{T}_\psi$ e $\mathbf{T}_\theta$:

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{T}_\psi$ passa um vetor qualquer $\mathbf{s}$ da base $\mathcal{B}_1$ para a base de referência inercial ($\mathcal{I}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi \mathcal{B}_1 \mathbf{s}$). Enquanto que a matriz transposta dessa, $\mathbf{T}_\psi^T$, leva um vetor qualquer $\mathbf{s}$ da base inercial para a base móvel $\mathcal{B}_1$ ($\mathcal{B}_1 \mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi^T \mathcal{I} \mathbf{s}$). Já a matriz $\mathbf{T}_\theta$ passa um vetor qualquer $\mathbf{s}$ da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$ ($\mathcal{B}_1 \mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta \mathcal{B}_2 \mathbf{s}$). Enquanto que a matriz transposta dessa, $\mathbf{T}_\theta^T$, leva um vetor qualquer $\mathbf{s}$ da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_2 \mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta^T \mathcal{B}_1 \mathbf{s}$).

Tendo-se os sistemas de referência e suas matrizes de rotação definidos prossegue-se na modelagem do giroscópio com as análises cinemática e dinâmica.

2.2 Cinemática do giroscópio

A análise cinemática de corpos rígidos consiste em determinar a velocidade angular do corpo (${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}$) e da base de referência (${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega}$), uma vez que nos corpos rígidos, diferentemente das partículas, a velocidade angular do corpo e do sistema de referência não são necessariamente iguais, além do que, as dimensões do corpo são consideradas na modelagem. A determinação da aceleração angular do corpo (${}_{\mathcal{B}}\dot{\boldsymbol{\omega}}$) e da base (${}_{\mathcal{B}}\dot{\boldsymbol{\Omega}}$), e a velocidade (${}_{\mathcal{B}}\mathbf{v}_{CM}$) e a aceleração (${}_{\mathcal{B}}\mathbf{a}_{CM}$) do centro de massa constituem o objetivo da análise cinemática do sistema (Deimel, 1952).

A fig. (2) ilustra a configuração das rotações dispostas nos seus respectivos eixos e a relação entre eles representadas pelos ângulos. A base $\mathcal{B}_2$ foi a base selecionada para análise, com isso todos os parâmetros foram definidos nessa base:

$${}_{\mathcal{B}_2}\boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Dessa forma tem-se que a velocidade angular da base $\mathcal{B}_2$, representada nesta base, é disposta de acordo com a eq. (1), uma vez que a velocidade angular da base representa o movimento que essa base realiza (Santos, 2011).

Já a velocidade angular do corpo representa o movimento do giroscópio como um todo. Assim a velocidade do corpo é composta pela velocidade da base na qual ela é descrita com o acréscimo do giro de *spin* ($\dot{\phi}$). Com isso a velocidade angular do giroscópio representada na base $\mathcal{B}_2$ é:

$${}_{\mathcal{B}_2}\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Com a velocidade angular do corpo (eq. (2)) determinada é necessário obter a aceleração angular. Existem ao menos duas formas de obtê-la, uma seria através da derivada da velocidade angular, no entanto, para que não se percam informações é preciso que a velocidade angular esteja representada na base $\mathcal{J}$. A segunda forma permite derivar a velocidade angular, sem perder informações, mesmo que essa apresente-se na base móvel, usando-se:

$${}_{\mathcal{B}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}) + {}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}} \times {}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

sendo $\frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega})$ taxa de variação da amplitude e ${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}} \times {}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}$ taxa de variação da direção da velocidade angular.

Desta forma obtém-se a aceleração angular do corpo representada na base $\mathcal{B}_2$:

$${}_{\mathcal{B}_2}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi} - \dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - \ddot{\psi} \sin \theta \\ \ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Sendo a velocidade da roda de inércia constante ($\ddot{\phi} = 0$), tem-se a aceleração angular do corpo descrita pela equação:

$${}_{\mathcal{B}_2}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - \ddot{\psi} \sin \theta \\ \ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (5)$$

As equações obtidas estão descritas na base móvel $\mathcal{B}_2$ que é a mais conveniente para a aplicação das equações de Newton-Euler, uma vez que o tensor de inércia se mantém invariante, por ser coincidente com suas direções principais.

Para a análise dinâmica que será realizada na seção 2.3 não será necessário obter a velocidade e aceleração do centro de massa, pois não será feita a discussão com relação às reações dinâmicas.

2.3 Dinâmica do giroscópio

A análise dinâmica dos corpos rígidos através das equações de Newton-Euler é feita por duas equações vetoriais, representando o balanço da taxa de variação do momento linear e a outra o balanço da taxa de variação do momento angular, apresentadas, respectivamente por (Ardema, 2006):

$$\sum {}_{\mathcal{B}}\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m {}_{\mathcal{B}}\mathbf{a}_{CM} \quad (6)$$

$$\sum {}_{\mathcal{B}}\mathbf{M}_o = \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o) + {}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o \quad (7)$$

sendo m a massa do corpo, ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{a}_{CM}$ a aceleração do centro de massa do corpo, $\sum {}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ é a somatória das forças, $\sum {}_{\mathcal{B}}\mathbf{M}_o$ é o somatório de torques externos aplicados no ponto O (origem do sistema de referência), ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o$ é o momento angular e $\mathcal{B}$ é a base na qual são descritos os vetores.

A eq. (6) é usada na determinação das reações dinâmicas do corpo e a eq. (7) possibilita determinar as equações que regem o movimento do corpo. Desta forma todas as informações sobre a dinâmica dos sistemas podem ser determinada.

Já que o objetivo do trabalho é controlar o giroscópio para condições de grandes deslocamentos angulares, é importante obter as equações que regem o movimento do giroscópio. A eq. (7) será o foco dessa seção.

A eq. (7) é dividida em duas partes, a taxa de variação da amplitude do momento angular ($\frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o)$) e a taxa de variação da direção do momento angular (${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o$). Expandindo ambas as partes, têm-se respectivamente:

$$\frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o) = {}_{\mathcal{B}}\mathbb{I}_o \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}) \quad (8)$$

$${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}_o = {}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}}\mathbb{I}_o {}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega} + m {}_{\mathcal{B}}\mathbf{r}_{o-CM} \times {}_{\mathcal{B}}\mathbf{a}_o \quad (9)$$

sendo ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{r}_{o-CM}$ a distância entre o ponto O e o centro de massa, ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{a}_o$ a aceleração do ponto O , os termos citados anteriormente são nulos uma vez que o centro de massa é no ponto O e esse ponto está parado, e ${}_{\mathcal{B}}\mathbb{I}_o$ é o tensor de inércia, que quando está escrito na base móvel é invariante, sendo um dos motivos pelo qual a base de análise será a base móvel $\mathcal{B}_2$. Para o giroscópio, o tensor de inércia apresenta-se por:

$${}_{\mathcal{B}_2}\mathbb{I}_o = \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo:} \quad \begin{cases} I_{x_2} = \frac{1}{2}mR^2 \\ I_{y_2} = I_{z_2} = \frac{1}{4}mR^2 \end{cases}$$

sendo R o raio do disco de inércia do giroscópio e m a massa do disco. Escrevendo a equação da conservação do momento angular com os termos desenvolvidos (eq. (8) e (9)) tem-se:

$$\sum {}_{\mathcal{B}_2}\mathbf{M}_o = {}_{\mathcal{B}_2}\mathbb{I}_o \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_2}\boldsymbol{\omega}) + {}_{\mathcal{B}_2}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}_2}\mathbb{I}_o {}_{\mathcal{B}_2}\boldsymbol{\omega} \quad (10)$$

Sabendo da análise cinemática as velocidades angulares da base (${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\Omega}$) e do corpo (${}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}$), resta definir a soma dos torques externos aplicados. No caso aplica-se um torque de controle (M_{y_2}) no eixo y da base $\mathcal{B}_2$:

$$\sum {}_{\mathcal{B}_2}\mathbf{M}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_{y_2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Ao realizar as substituições na eq. (10), tem-se:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ M_{y_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-I_{x_2} - I_{y_2} + I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - I_{x_2}\ddot{\psi} \sin \theta \\ I_{y_2}\ddot{\theta} + I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + (I_{z_2} - I_{x_2})(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) \\ I_{z_2}\ddot{\psi} \cos \theta - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} + (I_{x_2} - I_{y_2} - I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

Fazendo-se algumas operações algébricas, detalhadas no apêndice A, obtém-se as equações do movimento:

$$I_{y_2}\ddot{\theta} + I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + (I_{z_2} - I_{x_2})(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) = M_{y_2} \quad (13)$$

$$(I_{x_2}\sin^2 \theta + I_{z_2}\cos^2 \theta)\ddot{\psi} - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + 2(I_{x_2} - I_{z_2})(\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta) = 0 \quad (14)$$

Para o projeto de um controle de orientação que deseja controlar o deslocamento pode-se alterar o *spin* ou aplicar um torque de controle. Como o *spin* manteve-se constante aplicou-se um torque de controle.

A seção seguinte mostra a linearização do modelo do giroscópio usado no projeto do controlador regulador linear quadrático (LQR) descrito no capítulo seguinte.

2.4 Obtenção do modelo linear do giroscópio

As equações do movimento dadas pelas eqs. (13) e (14) podem ser escrita da forma:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \mathcal{F}(\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta}) \quad (15)$$

sendo $\mathcal{F}$ um funcional, tomando $\mathcal{F}(\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = 0$ encontra-se que $(\theta_o = 0, \psi_o = 0)$ é um dos pontos de equilíbrio. Para esse ponto de equilíbrio e para pontos próximos a ele tem-se que $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx 0$. Dessa forma pode-se linearizar as equações (13) e (14), obtendo-se (Cannon, 1967):

$$\ddot{\theta}I_{y_2} + h\dot{\psi} = M_{y_2} \quad (16)$$

$$\ddot{\psi}I_{z_2} - h\dot{\theta} = 0 \quad (17)$$

sendo $h = I_{x_2}\dot{\phi}$. As equações linearizadas são usadas no controle LQR e para a aplicação do controle que a Quanser[®] descreve no manual (Quanser Specialty Plant: 3 Dof Gyroscope, 2013). As equações são descritas por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathcal{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{18}$$

sendo que $\mathbf{x}$ o vetor de estados e $\mathbf{y}$ o vetor de saída. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são matrizes dinâmicas, entrada, saída e transmissão direta, respectivamente, sendo $\mathcal{D} = 0$ e $\mathbf{u}$ é o vetor de controle. A eq. (19) e eq. (20) apresentam as equações do giroscópio (eq. (16) e eq. (17)) escritas em espaço de estados na forma mais conveniente para implementação de um controlador linear:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h}{I_{y2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{h}{I_{z2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{y2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{M_{y2}\}\tag{19}$$

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}\tag{20}$$

Com as equações escritas em espaço de estados tem-se:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{y} = \{\psi\} \quad \mathbf{u} = \{M_{y2}\} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h}{I_y} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{h}{I_z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{D} = [0]$$

Assim a dinâmica do giroscópio relacionada ao movimento do corpo foi apresentada e será trabalhada junto ao sistema de controle nos próximos capítulos.

2.5 Sumário

Para descrever o comportamento do giroscópio, é necessário uma avaliação com um sistema de referência para a realização da análise cinemática do sistema com os cálculos das velocidades e acelerações, já com a análise dinâmica obtém-se as equações que descrevem o movimento do corpo a partir das equações de Euler. Após a obtenção das equações de movimento, as mesmas foram linearizadas e descritas com uma representação em espaço de estados. Deve-se destacar que o modelo linearizado é limitado para operação com grandes deslocamentos angulares, como será demonstrado nos próximos capítulos.

3 Aplicação do regulador linear quadrático no controle do giroscópio

Esse capítulo apresenta o desenvolvimento teórico usado na determinação dos parâmetros necessários para a implementação de um controlador com base no regulador linear quadrático (LQR), aplicado para controlar o deslocamento angular do giroscópio. Com o controle de orientação implementado foram realizadas análises para verificar a influência dos parâmetros de controle e suas limitações.

3.1 Controle LQR

O controle com base no regulador linear quadrático (LQR) foi desenvolvido em 1960 por Kalman usando a teoria de controle ótimo. Este regulador busca minimizar um funcional quadrático associado a sistemas dinâmicos lineares. Um índice de desempenho quadrático pode ser descrito por (Ogata; Maya; Leonardi, 2003):

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (21)$$

sendo $\mathbf{x}$ o vetor de estados, $\mathbf{u}$ o sinal de controle e $\mathcal{L}$ um funcional quadrático. O sinal de controle pode ser descrito em função da matriz de ganho $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{x}(t) \quad (22)$$

sendo que se assume realimentação negativa do vetor de estados. Para o projeto do controlador LQR deve-se determinar a matriz de ganhos $\mathcal{K}$. Porém, como esse sistema de controle é baseado na minimização do índice quadrático de desempenho, primeiramente se resolve a equação de Riccati (Ogata; Maya; Leonardi, 2003; Castrucci; Bittar; Sales, 2011). Com um modelo linearizado no espaço de estados da planta descrita pelas equações (19) e (20), a função custo do desempenho pode ser escrita como:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathcal{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathcal{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (23)$$

sendo $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ matrizes de ponderação Hermitianas³ e positivas⁴ e o sobrescrito T indica matriz transposta. Substituindo na eq. (23) a relação entre o vetor de estados e o vetor de controle, eq. (22), obtém-se:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K} \mathbf{x}) dt \quad (24)$$

Para a solução de problemas de otimização deve-se, modificar a eq. (24) a fim de definir alguma forma de solução, uma vez que não se sabe os valores de $\mathcal{K}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Q}$, assim:

$$\mathbf{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathcal{P} \mathbf{x}) \quad (25)$$

sendo $\mathcal{P}$ uma matriz Hermitiana e positiva, assim como $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$. Com o cálculo da taxa de variação chega-se a:

$$\mathbf{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathcal{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathcal{P} \dot{\mathbf{x}} \quad (26)$$

Assim, substituindo a eq. (22) na eq. (19), tem-se que a derivada de $\mathbf{x}$ é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K}) \mathbf{x} \quad (27)$$

Substituindo a eq. (27) na eq. (26) encontra-se:

$$\mathbf{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T [(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})^T \mathcal{P} + \mathcal{P} (\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})] \mathbf{x} \quad (28)$$

Contudo, para obter o índice de desempenho quadrático mínimo, recorre-se a eq. (24) e (25) obtendo:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathcal{Q} + \mathbf{x}^T \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K} \mathbf{x}) dt = -\mathbf{x}^T \mathcal{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty) \mathcal{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) \mathcal{P} \mathbf{x}(0) \quad (29)$$

Admitindo-se que todos os autovalores de $\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K}$ tenham parte real negativa para que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ encontra-se o nível de desempenho quadrático em função de $\mathbf{x}$ e de $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{J} = \mathbf{x}^T(0) \mathcal{P} \mathbf{x}(0) \quad (30)$$

³Matrizes Hermitianas tem sempre seus auto-valores reais.

⁴Matrizes positivas são análogas a um número real positivo.

No entanto, para determinar a matriz $\mathcal{P}$ é necessário resolver a equação de Riccati que foi obtida através da simplificação da eq. (28), uma vez que ela é válida para qualquer valor de $\mathbf{x}$:

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} - \mathcal{P} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0 \quad (31)$$

Posteriormente encontra-se a matriz de ganhos que pode ser escrita como:

$$\mathcal{K} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P} \quad (32)$$

Em suma, para determinar a matriz de ganhos de um controlador LQR é necessário resolver a eq. (31) definindo-se uma matriz $\mathcal{P}$ em função de $\mathcal{K}$ e posteriormente substituir $\mathcal{P}$ na eq. (30), para se ter $\mathcal{J}$ em função de $\mathcal{K}$. Já para minimizar o índice de desempenho quadrático que está em função da matriz de ganhos deriva-se o índice de desempenho quadrático:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial k_{ij}} = 0 \quad (33)$$

Dessa forma para cada matriz $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ encontra-se uma matriz de ganhos para minimizar o índice de desempenho quadrático. No entanto, para projetar o controlador no *software* MATLAB[®] pode-se usar o comando:

`K=lqr(A,B,Q,R)`

Neste trabalho o projeto do controlador LQR foi feita com este comando a partir da definição das matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ para o giroscópio. Usando a eq. (19) os parâmetros que foram usados no comando **lqr** foram:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h}{I_y} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{h}{I_z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R} = [r]$$

Concordante com a teoria desenvolvida nessa seção, o controlador da Quanser[®], através de simulações, obtém uma matriz $\mathcal{Q}$ e uma matriz $\mathcal{R}$ que produzem uma matriz de ganhos $\mathcal{K}$ ótima a fim de controlar o giroscópio tendo em vista as limitações físicas dos equipamentos usados no controle. A seção 3.2 apresenta o projeto desse controlador.

3.2 Descrição experimental

O procedimento experimental realizado no giroscópio da Quanser[®] onde foi aplicado o controle de orientação usando um controlador LQR e realizada a análise experimental

visando mostrar os aspectos limitantes do controlador é mostrado nesta seção. De forma geral as condições onde o controlador funciona e onde o controlador falha devido a limitação do modelo, uma vez que o controlador empregado aqui usa o modelo linearizado do giroscópio.

Para aplicar o controle LQR, usando o MATLAB®, como na seção 3.1, é necessário definir as matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$. Definindo-se o tensor de inércia e a velocidade de rotação do disco e assim $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como:

$$\mathcal{J}_o = \begin{bmatrix} 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0036 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0226 \end{bmatrix} kg.m^2 \quad \dot{\phi} = 750rpm \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -122.0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 277.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Já as matrizes $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ são variadas durante a realização das simulações considerando três condições, onde as duas primeiras foram escolhidas arbitrariamente e a terceira utilizou os valores sugeridos no manual da Quanser®, que foram:

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_1 = [1]$$

$$\mathcal{R}_2 = [1]$$

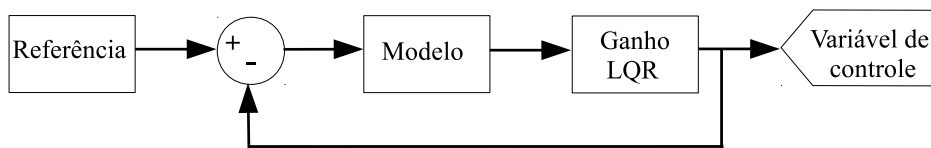
$$\mathcal{R}_3 = [5]$$

Tendo-se as matrizes definidas, obtêm-se os ganhos do controlador para as três condições anteriores:

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.32 \\ 0.015 \end{bmatrix} \quad \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.83 \\ 0.74 \end{bmatrix} \quad \mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 1.79 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

Para simulação deste controlador escreve-se os modelos no Simulink®. Vide apêndice B e fig. (4), para as verificações tanto na simulação quanto no experimentais.

Figura 4 – Planta simplificada do controle LQR usado no giroscópio.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na implementação do controle além das matrizes definidas anteriormente é necessário selecionar a taxa de aquisição dos dados, o tempo de simulação do experimento e a orientação desejada, que foi chamada de referência, ou seja, o movimento que deseja que o aro vermelho siga. Assim a meta do controlador é manter o aro vermelho seguindo a curva de referência selecionada (onda quadrada, uma senoide ou até um sinal do tipo dente de serra).

A taxa de aquisição de dados usada tanto na simulação quanto no experimento foi de 100 Hz. Já o tempo de aquisição de dados usado variou dependendo do caso. As simulações duraram 50 segundos e os experimentos 100 segundos.

Com as plantas montadas e os parâmetros definidos realizam-se as simulações e os experimentos na bancada mostrada na fig. (5), onde há um computador (1), um amplificador modelo AMPAQ-L4 (2) de corrente linear que é ideal para sistemas mecatrônicos que exigem controle de corrente sensível, uma placa de aquisição modelo Q8-USB (3) que oferece uma extensa gama de recursos de *hardware* e capacidade de suporte de *software* sendo ideal para pesquisas e testes de controladores atingindo uma taxa de aquisição de até 2 kHz em circuito fechado e o giroscópio Quanser® (4) ((Quanser Specialty Plant: 3 Dof Gyroscope, 2013)).

Figura 5 – Bancada experimental: (1) é o computador, (2) é o amplificador, (3) é a placa de aquisição e (4) é o giroscópio.

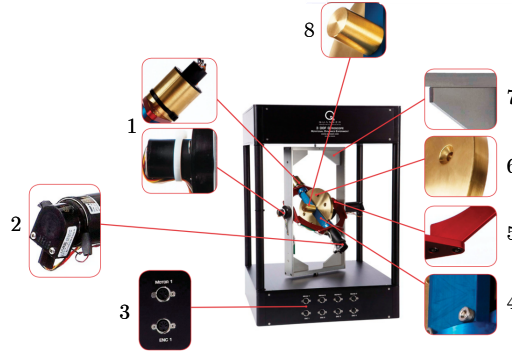


Fonte: Próprio autor.

O giroscópio, propriamente dito, possui alguns componentes que possibilitam a realização dos experimentos como ilustrado na fig. (6), o número 1 são anéis que mantêm os fios seguros e assim não limitam os movimentos do giroscópio evitando acidentes. O componente 2 é um dos sensores do tipo *encoders* (codificadores) de alta resolução para medir, com precisão, a posição angular tanto dos aros vermelho, número 5, e azul, número 4, quanto do disco, número 6. As conexões para realizar a comunicação entre o giroscópio

e a placa de aquisição estão representadas pelo número 3 e o número 7 representa a estrutura cinza; finalizando, o número 8 é um dos contrapesos responsáveis pelo balanceamento do giroscópio.

Figura 6 – Componentes do giroscópio.



Fonte: Quanser Specialty Plant: 3 DOF Gyroscope (2013) modificado.

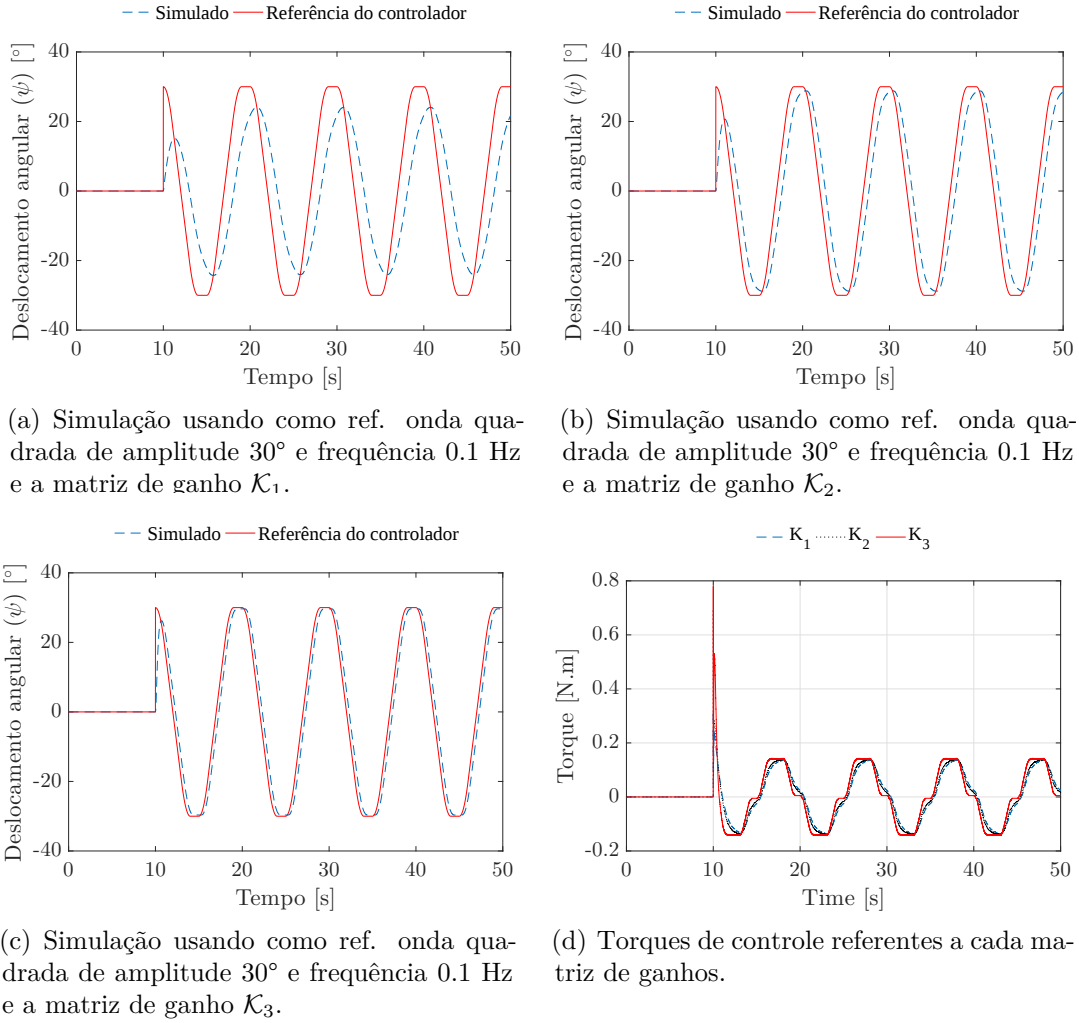
Nas simulações e nos experimentos a análise realizada foi a comparação do deslocamento angular da referência selecionada com o deslocamento angular simulado, nas simulações, ou medido, nos experimentos. Assim a seção seguinte apresenta os resultados obtidos nas simulações para as diferentes matrizes de ganho e nos experimentos para as diferentes referências, mostrando as limitações do controlador.

3.3 Resultados

Aplicando-se o controlador LQR de orientação do giroscópio, a primeira análise foi verificar a influência da matriz de ganho $\mathcal{K}$ na resposta do controlador. Dessa forma realizou-se simulações usando as matrizes de ganho $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ e $\mathcal{K}_3$ (apresentadas na seção 3.2) como apresentado na fig. (7). Onde observa-se que para a mesma referência selecionada para o controlador (onda quadrada de amplitude 30° e frequência 0.1 Hz) a melhor resposta do controlador foi quando a matriz de ganho usada foi a $\mathcal{K}_3$. Com relação ao torque de controle, fig. (7) (d), nota-se pouca variação desse parâmetro. O torque em $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ são praticamente iguais, isso está relacionado com a matriz $\mathcal{R}$ como ela não mudou o torque foi praticamente o mesmo, a maior variação do torque ocorreu quando a matriz $\mathcal{R}$ foi alterada na matriz de ganhos $\mathcal{K}_3$.

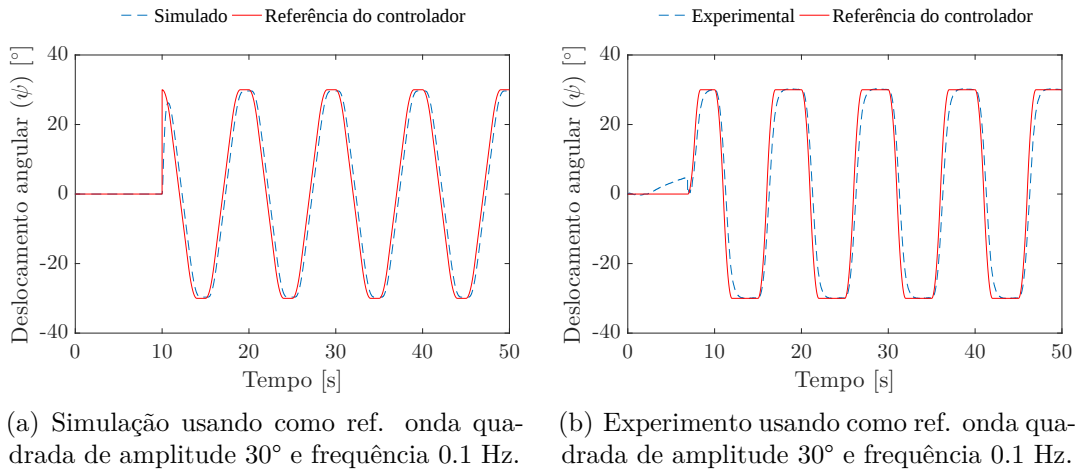
Como a matriz de ganho $\mathcal{K}_3$ é a que proporcionou a melhor resposta para o controlador foi necessário validar a simulação realizando uma comparação entre as respostas do controlador obtidas via simulação e experimento nas mesmas condições de referência e de ganho. A fig. (8) mostra que a simulação apresenta uma resposta coerente com o experimento.

Figura 7 – Influência da matriz de ganho $\mathcal{K}$ no controlador LQR e nos torques de controle.



Fonte: Próprio autor.

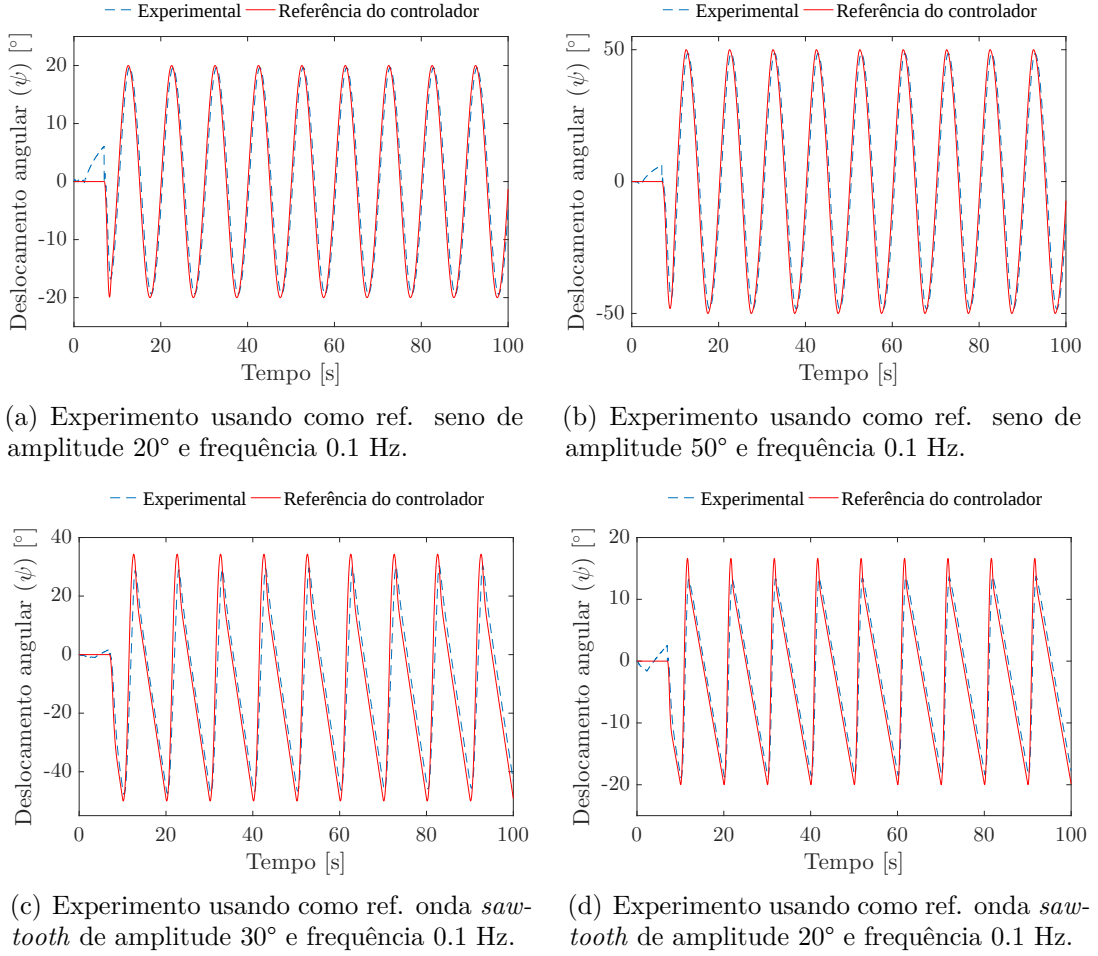
Figura 8 – Validação da simulação através da comparação da resposta do controlador na simulação e no experimento para as mesmas condições de referência e ganho.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma para mostrar que o controlador está atuando de maneira satisfatória realizou-se alguns experimentos variando-se a referência do controlador e mantendo a matriz de ganhos $\mathcal{K}_3$. A fig. (9) mostra os experimentos realizados com referência senoidal e com referência do tipo dente de serra (*sawtooth*) nos quais a resposta do controlador foi satisfatória.

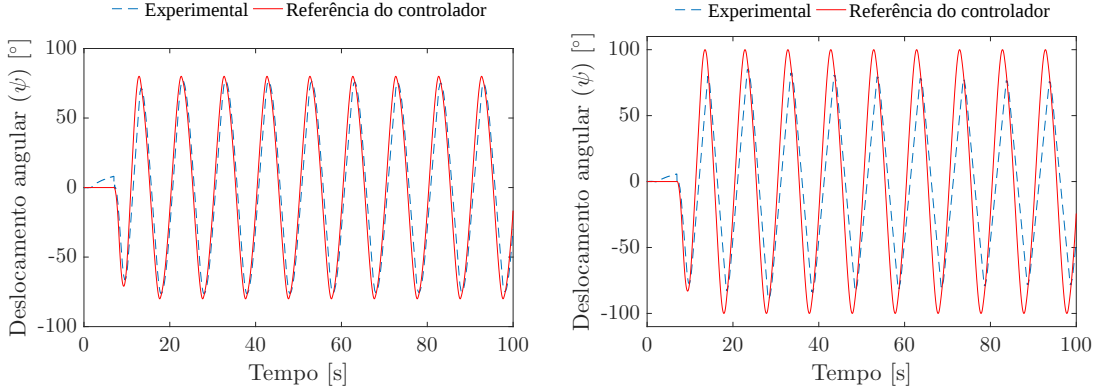
Figura 9 – Experimentos realizados para referências distintas mantendo a matriz de ganhos da validação $\mathcal{K}_3$.



Fonte: Próprio autor.

Sabendo que o controlador opera com o modelo linearizado do giroscópio constata-se que o mesmo possui limitações. A fig. (10) mostra que há uma piora na resposta do controlador quando aumenta-se a amplitude da referência. Nesta situação tem-se um grande deslocamento angular e o modelo linearizado usado para projetar o controlador deixa de ser o mais apropriado.

Figura 10 – Experimento que mostra uma limitação do controlador LQR quando há grande deslocamento angular.



(a) Experimento usando como ref. seno de amplitude 80° e frequência 0.1 Hz.

(b) Experimento usando como ref. seno de amplitude 100° e frequência 0.1 Hz.

Fonte: Próprio autor.

Ainda com relação a limitação do controlador, além do deslocamento angular o comportamento com aplicação de torque de perturbação também foi analisado para verificação da robustez.

Para acrescentar um torque de perturbação é preciso inclui-lo no modelo. Assim a eq. (18) foi para ter mais um termo ($\mathcal{B}_w \mathbf{w}$) como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{u} + \mathcal{B}_w \mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathcal{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (34)$$

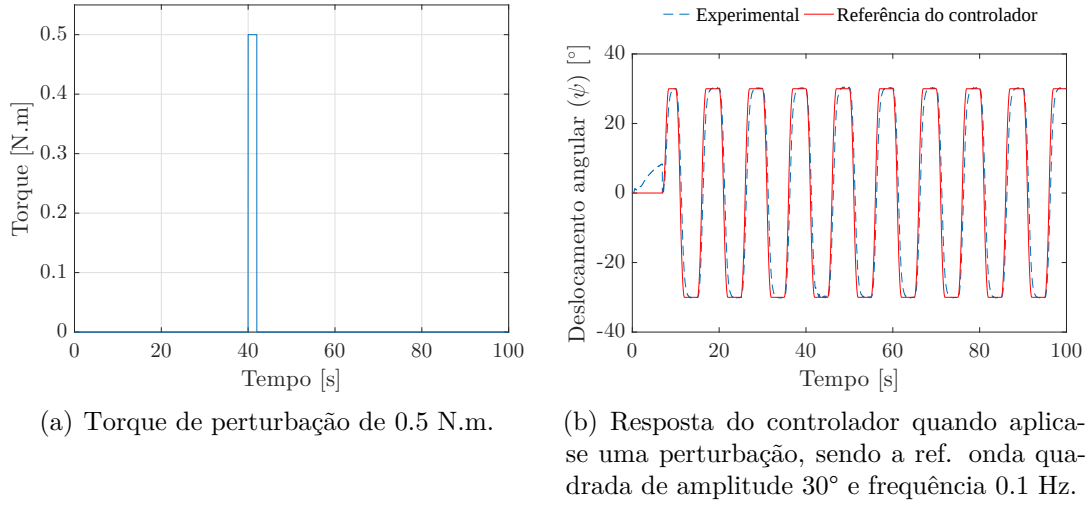
onde $\mathcal{B}_w$ é uma matriz de entrada de perturbação e $\mathbf{w}$ é um torque de perturbação, que no caso trata-se de uma perturbação aplicada no aro vermelho (movimento mostrado pelo ângulo ψ):

$$\mathcal{B}_w \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \{M_w\} \quad (35)$$

Realizou-se, assim, um experimento onde o torque de perturbação simula um pulso de 0.5 N.m, enquanto a referência do controlador é uma onda quadrada de amplitude 30° e frequência 0.1 Hz. A fig. (11) mostra, portanto, que nessa condição a atuação do controlador LQR manteve-se satisfatória.

Alterando a referência do controlador para uma onda quadrada de amplitude 50° e frequência de 0.1 Hz, e o torque de perturbação deixando de ser apenas um pulso e passando a ser uma sequência de pulsos de 0.7 N.m, tem-se o resultado da fig. (12), onde nota-se que o controlador demora em torno de 20 segundos para restabelecer uma boa

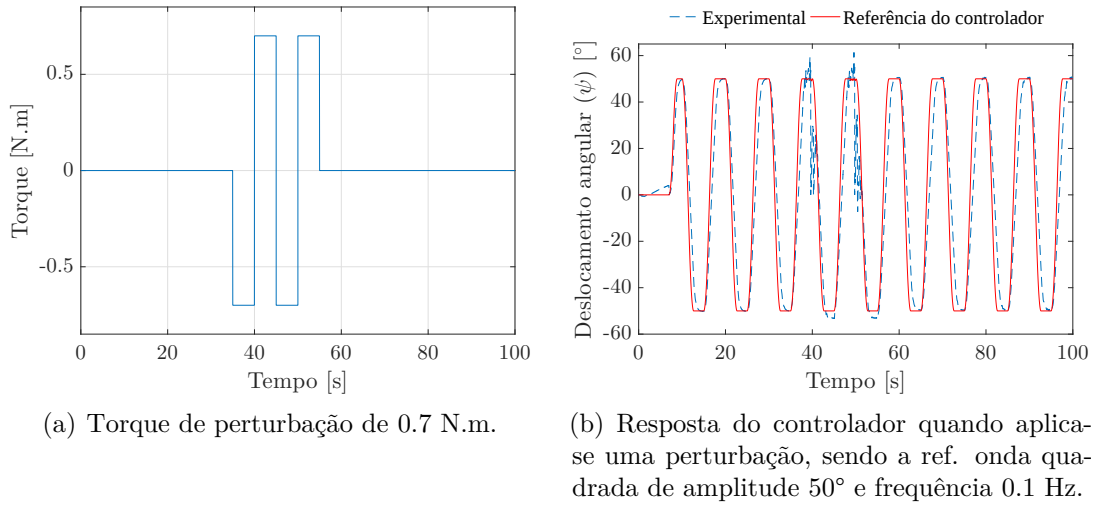
Figura 11 – Experimento com aplicação do torque de perturbação simulando um pulso.



Fonte: Próprio autor.

resposta devido a perturbação.

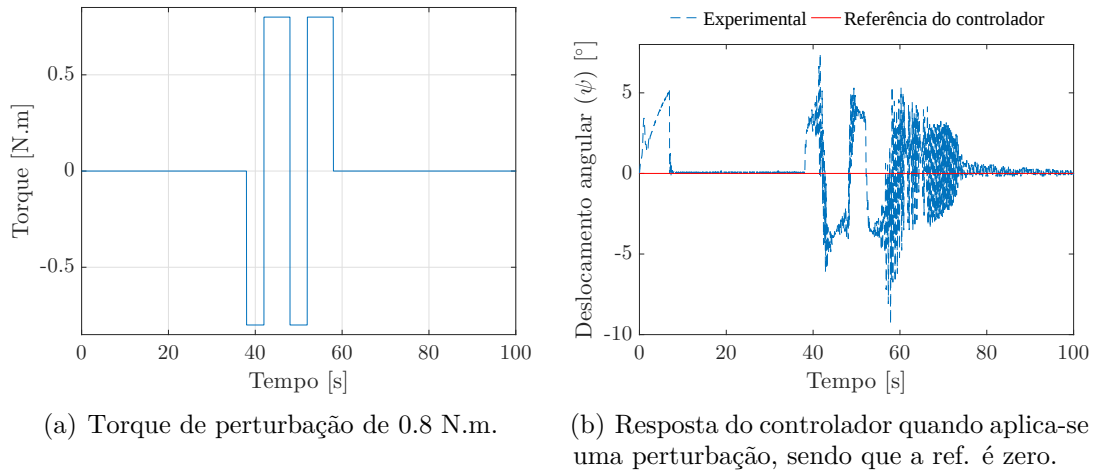
Figura 12 – Experimento com aplicação do torque de perturbação simulando uma sequência de pulsos (onda quadrada).



Fonte: Próprio autor.

Visto que a perturbação faz com que o controlador tivesse dificuldades na sua atuação realizou-se mais um experimento, dessa vez com a referência do controlador sendo zero, ou seja, o controlador tem que manter o aro vermelho parado. A fig. (13) mostra o resultado do desempenho do controlador nessas condições e o observado é que o controle falha e o sistema se perde totalmente.

Figura 13 – Experimento com aplicação do torque de perturbação onde a referência do controlador é zero.



Fonte: Próprio autor.

Interessante notar que a matriz de ganhos foi a mesma para todos os experimentos, a alteração da matriz de ganhos pode tornar melhor a resposta do controlador nas condições onde há torque de perturbação, porém pode-se ter problemas sérios de saturação e limitações física dos atuadores sendo inviável na prática.

3.4 Sumário

Esse capítulo apresentou o desenvolvimento teórico usado para determinar a matriz de ganhos do controlador LQR. Apresentou-se também o procedimento usado na aplicação desse controle para controlar o deslocamento angular do aro vermelho do giroscópio, ou seja, um controle de orientação. Realizou-se ainda uma análise simulada e experimental da implementação desse controle que resultou na apresentação das suas limitações quando há grandes deslocamentos angulares e torque de perturbação.

4 Controle não linear do giroscópio

Nesse capítulo apresenta-se uma proposta de controle que use diretamente o modelo não linear do giroscópio. O controlador usado foi uma configuração simples do controlador liga e desliga (*on/off*), que além de ter bom desempenho também trabalha bem em condição de saturação. Neste capítulo mostra-se que as configurações com grandes perturbações e grandes deslocamentos angulares que o controlador LQR projetado com o modelo linear falhou, podem-se ser bem controladas com a configuração liga e desliga apresentada neste capítulo.

4.1 Controle liga e desliga

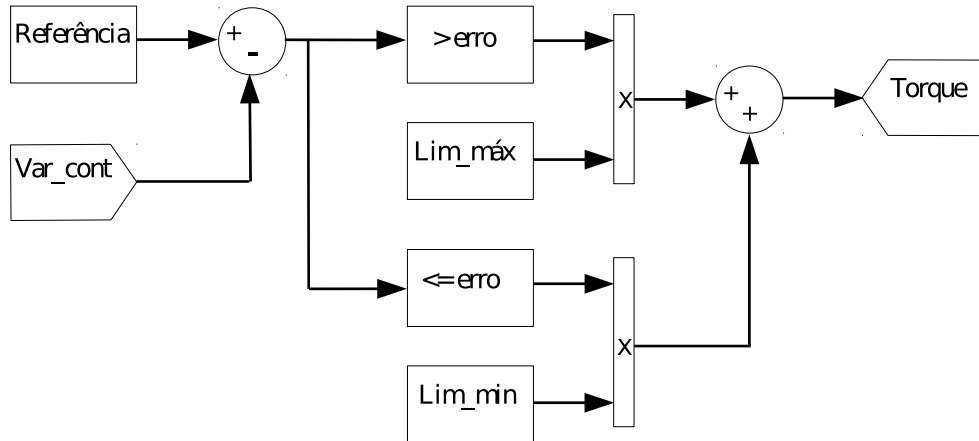
O controlador liga e desliga possui uma lógica de controle simples. Basicamente deve-se definir os limites de controle e enquanto o sistema estiver dentro desses limites o atuador permanece desligado e quando o sistema estiver fora, o atuador é acionado, como um chaveamento (Varseveld; Bone, 1997; Vargas; Parise, 1995).

Há algumas variações dessa forma de controle, onde ao invés de apenas atuar ou não é possível fazer com que ele atue de forma proporcional ao erro, isso pode fazer com que a referência seja atingida em menor tempo.

No controle do giroscópio define-se uma referência, assim como no controlador LQR, que foi comparada com o deslocamento do aro vermelho (ψ), variável de controle (Var_cont), dessa comparação obtém-se um erro que será o chaveamento, ou seja, através do erro determina-se se o controlador ligará ou não, nesse caso os limites estarão relacionados com a saturação do motor do giroscópio que aplicará o torque de controle.

A fig. (14) traz uma representação da planta de controle usada. Onde a variável de controle (Var_cont) representa o deslocamento ψ , sendo o erro definido como 10^{-3} e os limites usados foram 0.8 Nm e -0.8 Nm que representam os máximos de torque que podem ser aplicados pelos motores sem saturar.

Figura 14 – Planta simplificada do controle *on/off* usado no giroscópio.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como o modelo usado foi o modelo original não linear descrito pelas equações (13) e (14), a cada iteração o novo torque faz com que seja obtido um novo ψ que será novamente comparado ao valor da referência.

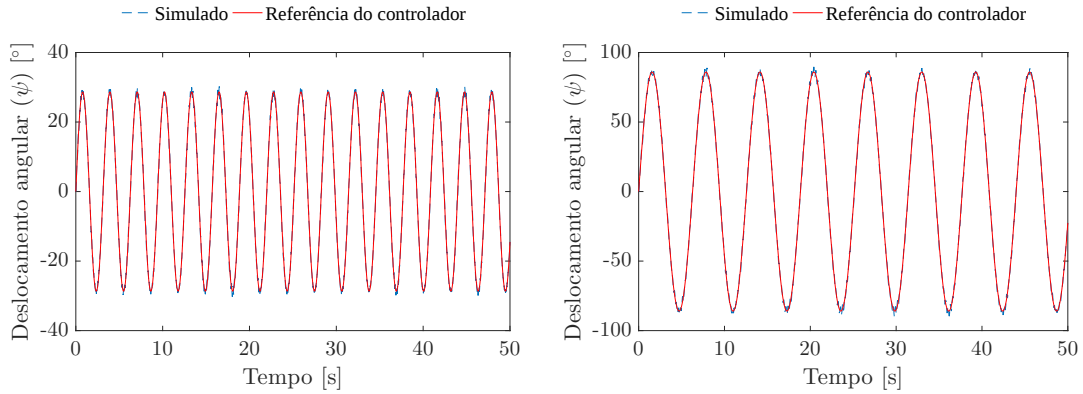
O deslocamento do aro azul (θ), devido a forte não linearidade, influência muito no comportamento do aro vermelho, dessa forma montou-se uma planta de controle praticamente igual para controlar o deslocamento θ afim de minimizar essa influência. Os limites usados foram os mesmos e o erro foi de 10^{-2} graus. Para o controle do deslocamento θ a referência usada foi uma oscilação de baixa amplitude para que a perturbação fosse a menor possível.

4.2 Resultados

Para a realização das simulações usando o controlador liga e desliga, a planta de controle foi desenhada no Simulink®, vide apêndice C, e além de definir o erro e os limites de controle também foi necessário definir o tempo de simulação e a frequência de aquisição dos dados.

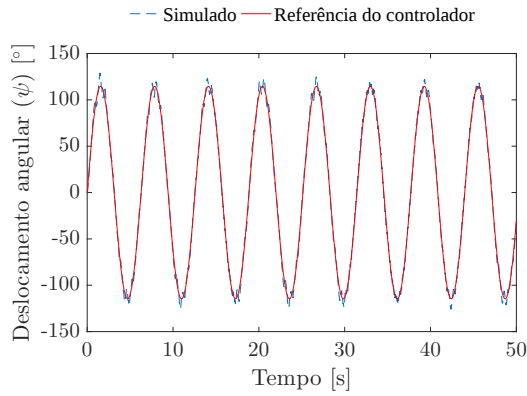
O tempo de simulação foi definido em 50 segundos e a frequência de aquisição dos dados foi de 10 kHz. A fig. (15), mostra três condições de simulação onde a referência foi uma onda senoidal, na primeira com baixa amplitude e frequência maior do que na segunda e terceira. Nas outras manteve-se a frequência e aumentou-se a amplitude. Nas três condições a resposta do sistema foi muito satisfatória, sendo que as curvas praticamente se sobrepõem, mostrando assim que o controlador está respondendo de forma eficiente.

Figura 15 – Comportamento do sistema para referências senoidais de diferentes amplitudes e frequências com o controle *on/off*.



(a) Simulação usando como ref. seno de amplitude 29° e frequência 0.3 Hz.

(b) Simulação usando como ref. seno de amplitude 86° e frequência 0.16 Hz.



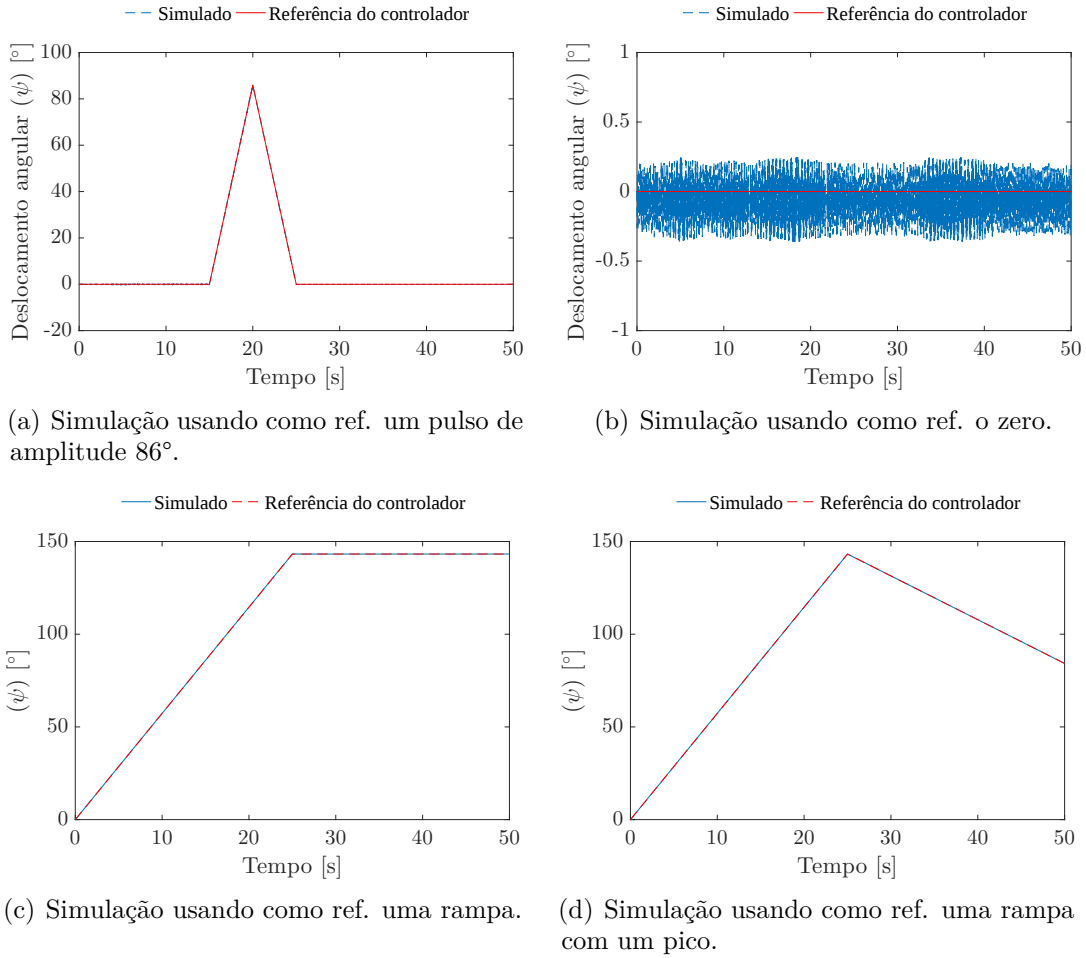
(c) Simulação usando como ref. seno de amplitude 115° e frequência 0.16 Hz.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Com o objetivo de mostrar outras condições onde o controlador também funciona, foram simuladas as condições mostradas pela fig. (16). A primeira mostra como referência um pico e a segunda a condição onde o LQR falhou, a referência zero, nas duas situações o controlador liga e desliga se comportou-se de maneira eficiente, comprovando assim a sua robustez. A fig. (16) (c) e (d), foram outros testes que mostraram a versatilidade de situações nas quais o controlador liga e desliga controlou bem a orientação do aro vermelho.

Em todas essas simulações o controle que atuou no deslocamento θ teve como referência uma senoide de amplitude 0.06° e frequência 0.16 Hz de tal forma que minimizasse a sua influência no deslocamento ψ que era o objetivo da análise.

Figura 16 – Comportamento do sistema para condição de pulso, referência zero e rampa com o controlador *on/off*.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

4.3 Sumário

Com os resultados apresentados neste capítulo se observa que ao usar um controlador cujo modelo usado é o não linear a predição do comportamento torna-se melhor mesmo em condições de grande deslocamento angular e referência zero. O controlador liga e desliga se mostrou mais robusto para controlar o giroscópio nessas condições do que o controlador LQR projetado para condição de grandes deslocamentos. Obviamente, que o projeto de um controlador LQR mais avançado usando diretamente o modelo não linear do giroscópio poderia dar resultados similares, porém o procedimento de projeto e implementação seria mais caro e difícil.

Também se observa que os sinais de atuação do controlador tem amplitudes satisfatórias e dentro das limitações das faixas de segurança dos motores que acionam as rodas de reação do giroscópio.

5 Considerações finais

Este capítulo apresenta as conclusões e as sugestões para futuros trabalhos que podem ser feitos com base na presente dissertação.

5.1 Conclusão

Após a realização das análises de cinemática e dinâmica do giroscópio e aplicação da teoria do controlador LQR nota-se que o controlador funciona de maneira satisfatória para amplitudes pequenas e livre de perturbação, para uma mesma matriz de ganhos. Assim em condições de grande amplitude ou com referência zero e para perturbações a eficiência do controlador diminui. Dessa forma ou seria necessário alterar a matriz de ganhos ou seria necessário alterar a planta do controlador.

Alterando-se a planta de controle para um controlador que usa o modelo não linear, no caso o controlador liga e desliga, nota-se que as simulações mostram que mesmo para grandes amplitudes o sistema se mantém controlado, até mesmo para referência zero, onde o LQR falha o comportamento simulado do controlador *on/off* é satisfatório. Com relação a implementação o controlador LQR possui maior complexidade na sua planta quando em comparação com uma planta do controlador *on/off*.

5.2 Sugestões para futuros trabalhos

Alguns trabalhos futuros são possíveis de serem realizados a partir desta dissertação. Primeiramente, temos a possibilidade de controlar a orientação com variação da velocidade de *spin*, o que poderia reduzir a quantidade de torque aplicado nos aros para gerar os torques giroscópios de estabilização.

Além disto, as perturbações de grande amplitude nos deslocamentos angulares dos aros provocam e tem problemas de saturação e de grandes picos de torque aplicados nos motores. A implementação de técnicas de suavização dos sinais de atuação é bem vinda para evitar estes cenários que foram observados em algumas das simulações realizadas.

Referências

- AFRAM, A.; JANABI-SHARIFI, F. Effects of dead-band and set-point settings of on/off controllers on the energy consumption and equipment switching frequency of a residential hvac system. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 47, p. 161--174, 2016.
- ALMEIDA, O. d. M. Controle PID auto-ajustável, inteligente e preditivo. Tese (Doutorado) --- Florianópolis, SC, 2002.
- ARDEMA, M. D. **Newton-Euler Dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- BARROS, E. A. d.; JUNQUEIRA, F. d. C. Modelagem matemática de um giroscópio sintonizado dinamicamente. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 16, n. 2, p. 136--145, 2005. SciELO Brasil.
- BEER, F. P.; JR, E. R. J.; CORNWELL, P. J. **Mecânica Vetorial para Engenheiros-Dinâmica**. [S.l.]: AMGH Editora, 2013.
- BRADDON, F. D. New gyros for our submarines. **Journal of the Franklin Institute**, v. 270, n. 2, p. 79 -- 98, 1960. ISSN 0016-0032.
- BRAGA, A. P. **Simulação e controle de um quadcopter utilizando lógica fuzzy**. Dissertação (Mestrado) --- Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.
- CANNON, R. H. **Dynamics of Physical Systems**. Chapter 19, section 5. [S.l.]: McGraw Hill, New York, 1967.
- CARRARA, V. **Redes neurais aplicadas ao controle de atitude de satélites com geometria variável**. Tese (Doutorado) --- São José dos Campos.(INPE-6384-TDI/603). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- CASTRUCCI, P. de L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. **Controle Automático**. [S.l.]: LTC - GRUPO GEN, 2011.
- DEIMEL, R. F. **Mechanics of the Gyroscope**. [S.l.]: Dover Publications, 1952.
- HOW, J. P.; BEHIHKE, B.; FRANK, A.; DALE, D.; VIAN, J. Real-time indoor autonomous vehicle test environment. **IEEE control systems**, v. 28, n. 2, p. 51--64, 2008.
- JAMBERSI, A. B. **Movimento regulares e caóticos de rotação de corpos rígidos**. Dissertação (Mestrado) --- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2016.

JÚNIOR, Z. R. M.; LOPES, R. V. Modelagem de um helicóptero elétrico em uma plataforma 3dof. XIX Congresso de Estudantes de Engenharia Mecânica, 2012.

LI, B.; SINHA, U.; SANKARANARAYANAN, G. Modelling and control of non-linear tissue compression and heating using an lqg controller for automation in robotic surgery. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 38, n. 12, p. 1491–1499, 2016.

MUDIGONDA, N.; BUČINSKAS, V. Experimental performance analysis of heat processing of drive motor in cnc machine. **Imperial Journal of Interdisciplinary Research**, v. 3, n. 1, 2016.

NETO, A. F. d. C. P.; ALMEIDA, M. P.; MACÊDO, W. N.; PINHO, J. T. Desenvolvimento e análise operacional de um controlador de carga on/off. **Revista Brasileira de Energia Solar**, v. 1, n. 1, 2016.

NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.

NI, S.; ZHANG, C. Attitude determination of nano satellite based on gyroscope, sun sensor and magnetometer. **Procedia Engineering**, v. 15, n. 0, p. 959 -- 963, 2011. ISSN 1877-7058. <ce:title>CEIS 2011</ce:title>.

OGATA, K.; MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.

OLIVEIRA, T. C. de; GAINO, R.; COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A. de. Controle LQR aplicado ao movimento da articulação do joelho de pacientes paraplégicos. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 35, n. 2, p. 231–246, 2014.

PAULA, J. C. d. **Desenvolvimento de um vant do tipo quadrirrotor para obtenção de imagens aéreas em alta definição**. Dissertação (Mestrado) --- Universidade Federal do Paraná, 2013.

QUANSER SPECIALTY PLANT: 3 DOF GYROSCOPE. **Gyroscope Position Control**. Instructor manual. [S.l.], 2013.

SÁ, R. C. **Construção, modelagem dinâmica e controle PID para estabilidade de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor**. Dissertação (Mestrado) --- Universidade Federal do Ceará - Departamento de Engenharia de Teleinformática, 2012.

SAM, Y. M.; GHANI, M. R. H. A.; AHMAD, N. LQR controller for active car suspension. **TENCON 2000. Proceedings**, v. 1, p. 441–444, 2000.

SANTOS, I. F. dos. **Dinâmica de Sistemas Mecânicos**. [S.l.]: Makron Books; SP, 2011.

THIELE, A. Applications of the gyrocoupling vector and dissipation dyadic in the dynamics of magnetic domains. **Journal of Applied Physics**, v. 45, n. 1, p. 377–393, 1974.

VARGAS, J.; PARISE, J. Simulation in transient regime of a heat pump with closed-loop and on-off control. **International Journal of Refrigeration - Elsevier**, v. 18, n. 4, p. 235--243, 1995.

VARSEVELD, R. B. V.; BONE, G. M. Accurate position control of a pneumatic actuator using on/off solenoid valves. **IEEE/ASME Transactions on mechatronics**, v. 2, n. 3, p. 195--204, 1997.

YAZICI, H.; SEVER, M. Active control of a non-linear landing gear system having oleo pneumatic shock absorber using robust linear quadratic regulator approach. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, 2017.

APÊNDICE A – Formulação completa das equações de Euler

Tendo em vista a equação de Euler, equação (10), mostrada novamente a seguir.

$$\sum \mathcal{B}_2 \mathbf{M}_o = \mathcal{B}_2 \mathbb{I}_o \frac{d}{dt}(\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{B}_2 \mathbb{I}_o \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.1})$$

O balanço dos troques externos aplicados ($\sum \mathcal{B}_2 \mathbf{M}_o$) está mostrada na equação (A.2), uma vez que só será aplicado momento externo na direção y .

$$\mathcal{B}_2 \mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{y_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A taxa de variação da velocidade angular da base ($\frac{d}{dt}(\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega})$) está representada por:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} -\ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Já a taxa de variação da velocidade angular da base multiplicada pelo tensor de inércia ($\mathcal{B}_2 \mathbb{I}_o \frac{d}{dt}(\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega})$) fornece:

$$\mathcal{B}_2 \mathbb{I}_o \frac{d}{dt}(\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} -I_{x_2} \ddot{\psi} \sin \theta - I_{x_2} \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ I_{y_2} \ddot{\theta} \\ I_{z_2} \ddot{\psi} \cos \theta - I_{z_2} \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando o produto vetorial da velocidade angular do corpo com a parcela encontrada anteriormente ($\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{B}_2 \mathbb{I}_o \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega}$), obtêm-se:

$$\mathcal{B}_2 \boldsymbol{\Omega} \times_{\mathcal{B}_2} \mathbb{I}_{o\mathcal{B}_2} \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} (I_{z_2} - I_{y_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta \\ (I_{z_2} - I_{x_2})\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \\ (I_{x_2} - I_{y_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo os termos anteriores na equação de Euler obtêm-se o sistema de equações representados por:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ M_{y_2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (-I_{x_2} - I_{y_2} + I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - I_{x_2}\ddot{\psi} \sin \theta \\ I_{y_2}\ddot{\theta} + I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + (I_{z_2} - I_{x_2})(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) \\ I_{z_2}\ddot{\psi} \cos \theta - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} + (I_{x_2} - I_{y_2} - I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando-se a equação na direção x por $\sin \theta$:

$$(-I_{x_2} - I_{y_2} + I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - I_{x_2}\ddot{\psi} \sin^2 \theta = 0 \quad (\text{A.7})$$

E na direção z multiplica-se a equação pelo termo $\cos \theta$:

$$I_{z_2}\ddot{\psi} \cos^2 \theta - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + (I_{x_2} - I_{y_2} - I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (\text{A.8})$$

Isolando-se o termo $I_{y_2}\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$ nas equações (A.7) e (A.8), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (-I_{x_2} + I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - I_{x_2}\ddot{\psi} \sin^2 \theta &= I_{y_2}\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ I_{z_2}\ddot{\psi} \cos^2 \theta - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + (I_{x_2} - I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= I_{y_2}\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

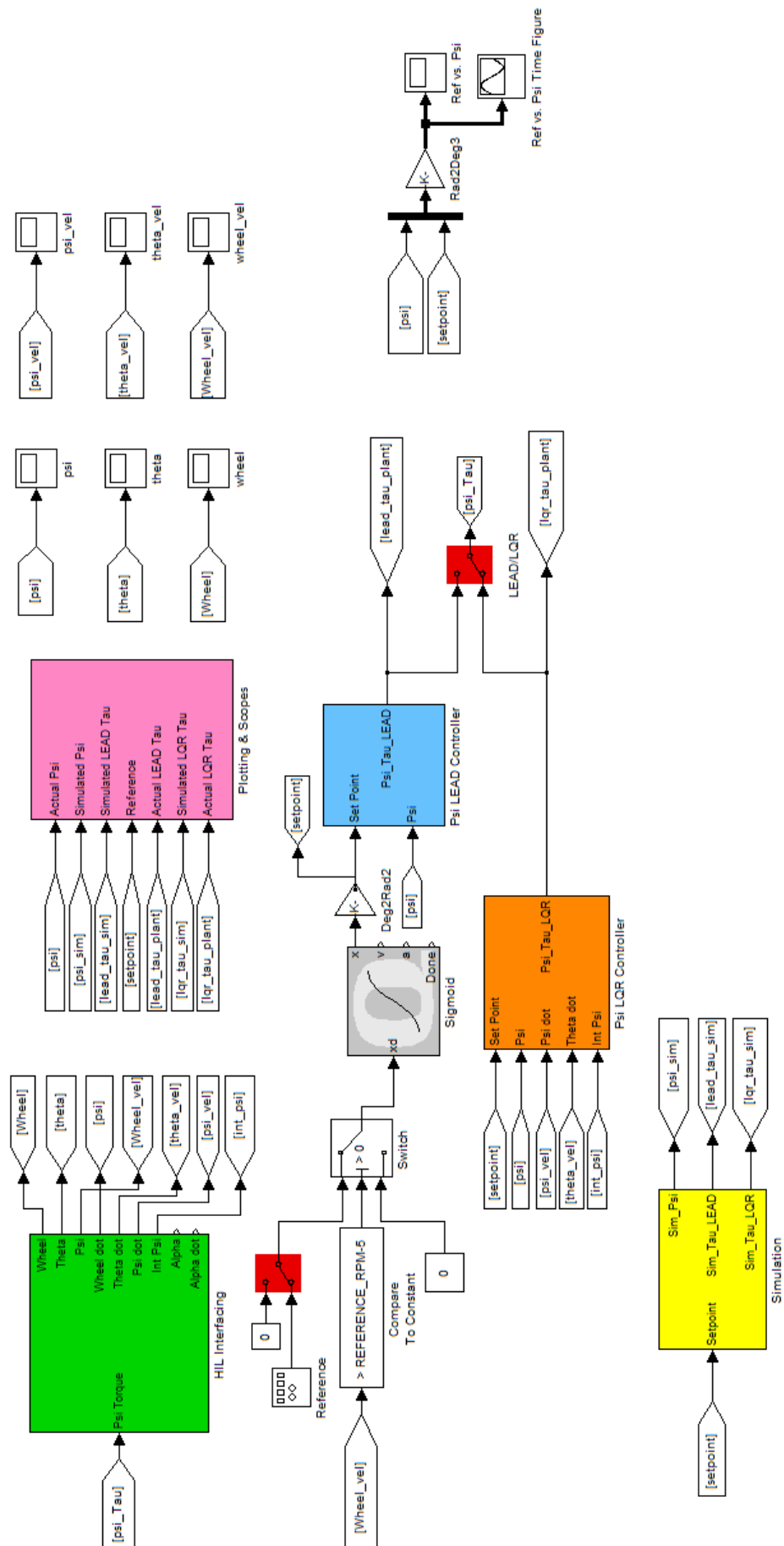
e igualando as duas e isolando-se a parcela $\ddot{\psi}$, tem-se:

$$\ddot{\psi} = \frac{I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - 2(I_{x_2} - I_{z_2})\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{I_{x_2} \sin^2 \theta + I_{z_2} \cos^2 \theta} \quad (\text{A.10})$$

Da equação (A.6), na direção y , isolando-se $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{M_{y_2} - I_{x_2}\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + (I_{x_2} - I_{z_2})\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta}{I_{y_2}} \quad (\text{A.11})$$

Assim tem-se as equações que descrevem o movimento do giroscópio representada pelas equações (13) e (14).



APÊNDICE C – Diagrama Simulink® do controlador *on/off*

