
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FABIAN ARLEY POSADA BALVIN

**PRÁTICAS ALGÉBRICAS NO CONTEXTO DA MODELAGEM
COMPREENDIDA COMO PROPOSTA PEDAGÓGICA**

The background of the lower half of the cover features a large, abstract geometric design. It consists of several overlapping triangles in various shades of blue and white, creating a complex, crystalline pattern that resembles a stylized snowflake or a molecular structure.

Rio Claro
2015

FABIAN ARLEY POSADA BALVIN

**PRÁTICAS ALGÉBRICAS NO CONTEXTO DA MODELAGEM
COMPREENDIDA COMO PROPOSTA PEDAGÓGICA**

Trabalho de Conclusão de
Curso/Dissertação/Tese apresentado ao
Programa de Pós-graduação em Educação
Matemática do Instituto de Geociências e
Ciências exatas da Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus
de Rio Claro, como requisito para
obtenção do grau de Doutor em
Educação Matemática

Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

Rio Claro
2015

510.07
P855p Posada Balvin, Fabian Arley
 Práticas algébricas no contexto da modelagem compreendida como
 proposta pedagógica / Fabian Arley Posada Balvin. - Rio Claro, 2015
 212 f. : il., figs.

 Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
 Geociências e Ciências Exatas
 Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

 1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Modelagem matemática. 3. Teoria
 da atividade. 4. Práticas matemáticas. 5. Mediação artefactual. 6. Práticas
 de modelagem. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

FABIAN ARLEY POSADA BALVIN

**PRÁTICAS ALGÉBRICAS NO CONTEXTO DA MODELAGEM
COMPREENDIDA COMO PROPOSTA PEDAGÓGICA**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
IGCE/UNESP/ Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof^a. Dr^a. Ana Paula dos Santos Malheiros
IBILCE/UNESP/São José do Rio Preto (SP)

Prof. Dr. Ademir Donizeti Caldeira
CECH/UFSCar/São Carlos (SP)

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro
CMCC/UFABC/Santo André (SP)

Rio Claro, 25 de junho de 2015

Resultado: APROVADO

AGRADECIMENTOS

Ostentar o título de doutor um dia foi uma remota ideia, depois uma forte obsessão, agora uma maravilhosa materialidade. Não me maravilha ter realizado tal proeza, mas sim o fato de ser sacudido pelo carinho de tantas pessoas enquanto navegava. Carinho da família, de amigos, professores, colegas e de tantas outras pessoas que ainda nem seus nomes conheço... Saibam que estou e estarei eternamente agradecido...

Pais: Nubia y Jesús; irmãos: Fernando, Fredy, Ferney (*in memoria*), Liliana e Lida; sobrinhos: Vanessa, Alexis, Ana Maria, Samuel; Avô Celia, tios: Luz, Javier, Nazareno, Nelson, Olga, Margarita; cunhados: Yarley, Camilo, Beatriz (*in memoria*), Leonardo. Muito obrigado pelo imenso amor e por serem meu porto seguro...

Diana Jaramillo e demais colegas do grupo de pesquisa “Matemática, Educação e Sociedade” –MES-, Universidade de Antioquia, muito obrigado por el respaldo... Para meu professor, colega e grande amigo Gilberto Obando, obrigado pelas profundas e inspiradoras discussões... Para John Jairo Múnera, Maria Denis Vanegas, Jesús Maria Gutiérrez, Fanny Angulo, Jhony Villa, Alexander Jiménez, Ana Maria Cadavid, Sara María Velázquez, Dora Astrid Vásquez, obrigado pelo impulso...

Para todo o povo brasileiro muito obrigado por me fazer sentir em casa...

Ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática –PPGEM- professores, alunos e funcionários; muito obrigado por me receber e abraçar com tanto calor humano e sabedoria... Miliam Ferreira, Carmen Pinto, Elmhá Coelho, Anderson Afonso (Kochym), Jamur Venturim, Rodrigo Vechia, Sergio Dantas, Silvana Matucheski, Vinicius Sánchez, Lucas Mazzi, Felipe Pereira Heitmann, Fernando De Mello Trevisani, Kleyton Godoy, Inajara... Obrigado por fazer a diferença... Simone Queiroz, muito grato pela companhia.

Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática – GPIMEM-, Aparecida Chiari, Patricia Peralta, Daise Lago, Ana Paula Rodrigues, Jeannette Galleguillos, Luana Oliveira, Beatriz Litoldo, Nilton Silveira Domingues, Hannah Lacerda, Alex Henrique Alves, Egídio Rodrigues Martins, Helber Rangel Formiga, Juliana Samora Godoy, Laís Romanello, Regis, Maria Francisca Cunha, Maria Teresa Zampieri, Patricia Fasseira, Rejane Faria, Sandro Ricardo Pinto da Silva, Vanessa Oechsler, Tiago Giorgetti Chinelatto, Lahis, Idalise, Rejane Faria,

Ricardo Mendes, Geraldo Lima, Ricardo Scucuglia, Sueli Liberatti Javaroni, Ana Paula Malheiros, Marcus Vinicius Maltempi, Rubia Barcelos; agradeço as maravilhosas discussões, o trabalho coletivo e o apoio recebido. Muito obrigado por torcer sempre por mim...

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, obrigado pela chance, por ter aceitado ser meu orientador, pela confiança, por se preocupar em oferecer as melhores condições para meu desenvolvimento acadêmico e bem-estar pessoal. Mas, por cima de tudo pela grande amizade...

Aos professores da banca, Prof. Dra. Ana Paula Malheiros, Prof. Dra. Jussara Araújo, Prof. Dr. Marcus Maltempi, Prof. Dr. Alessandro Ribeiro, Prof. Dr. Ademir Caldeira, muito obrigado pelos apontamentos e valiosas contribuições...

Aos alunos que gentilmente participaram desta pesquisa: Barbara Farinha, Clara Machado, Gabriela Rosa, Daniel Horn, Vivian Robinson, Juliana Miranda, Nahanna Carvalho, Sabrina Godoi, Raphaela Lancelotti, Virginia Campos, Thales Babosa, Vanessa Bortolotti, Caio Silva, João Paulo Darela, Leonardo Barros. Muito obrigado pela ajuda, por me permitir participar de seus projetos e atividades acadêmicas.

À família Borba Kempeler: Anne, Leo, Tomas, enorme agradecimento por me receber sempre com um amável sorriso.

Para meus amigos hispanofalantes: Alejandra Franco Jimenez, Diego A Rojas Jaimes, SwanniTa Alvarado, Yaliana Tafurt, Make Tafurt, Jose Enver Ayala Zuluaga, Jose G. Solorzano, Blanca A. Dugarte C., Ruben Dario Contreras Aguilar, Ruben Dario Contreras Dugarte, Ana María Salazar, Paola Amaris, Yadira Ansoar Rodríguez, Amilcar Perez Riverol, Diego Escobar, Carlos Federico Ayala Zuluaga, Marcela Benavides Guzmán, Martha Atehortúa, Oscar Gutiérrez Huamani, Fredy, Carolina Tamayo Osorio..., Muito obrigado por me oferecer tanto carinho e aliviar-me da solidão...

Para a Associação Universitaria Iberoamericana de pós-graduação –AUIP- e ao Programa de Ajuda ao Estudante do Estrangeiro –PAEDEX/UNESP- Eternamente agradecido pelo patrocínio.

Um agradecimento especial para pessoas muito especiais que me acompanharam e torceram por mim na distância: Vianneth Giovanna Payan, Huber Roldán Alzate, Diana Cristina Gallego Yepes, Robert Monsalve, Sandra Milena Brand S., Claudia Marcela Aguirre Vásquez...

EPÍGRAFE

“Do lugar onde estou já foi embora...”

Manoel de Barros.

RESUMO

Analizamos as práticas algébricas constituídas por um grupo de alunos enquanto desenvolviam atividades de modelagem. Os participantes eram alunos de uma disciplina de Matemática Aplicada para os cursos de Biologia e Ecologia da UNESP, campus de Rio Claro, que foram convidados a produzir um projeto de modelagem sobre algum tema de seu próprio interesse como parte de uma das tarefas da referida disciplina. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, cujos dados foram produzidos e analisados sob a perspectiva histórico-cultural da Teoria da Atividade, que apresenta o conceito de atividade prática como princípio explicativo do desenvolvimento humano e foca a atenção principalmente em três aspectos: a mediação de artefatos culturais, as relações intersubjetivas e as condições de legitimação das ações desenvolvidas. De acordo com os padrões de relacionamento materializados nos modelos matemáticos utilizados, foi possível concluir que, entre as vertentes discutidas de práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico, as constituídas pelos alunos configuraram modos de ação que tomam o conceito de variação conjunta entre diferentes quantidades (covariação), como principal unidade de análise; isto é, adotam o enfoque variacional ou funcional como princípio de desenvolvimento. Embora este tipo de prática matemática trate com algum nível de generalidade, enfatizamos a necessidade de gerar processos de separação espaço-temporal do contexto do qual surgiram para poder ingressar no campo de significação do conhecimento algébrico. Isso significa que as quantidades significativas devem passar por um processo de “des-temporalização” e “des-espacialização”, para que sejam institucionalizadas no campo das práticas algébricas; isto é, para que os modos de ação dos sujeitos estejam orientados a operar analiticamente com relações gerais entre quantidades indeterminadas (variáveis, incógnitas, parâmetros e números generalizados). Os resultados indicam que os processos de descontextualização de padrões de correlação não são absolutos, pois estão acompanhados da constituição de diferentes níveis de generalização e do uso intencionado de artefatos culturais. Mostramos, por exemplo, como os modos de ação representados pelos modelos matemáticos reproduzidos e/ou construídos coletivamente entre professor e alunos, além de oferecerem alguma explicação do comportamento covariacional do fenômeno particular estudado segundo o objeto do projeto de modelagem, também foram tratados como métodos gerais de correlação. Desse modo, concluímos que, dependendo das finalidades das práticas constituídas, os modelos matemáticos utilizados nos projetos podem comportar um caráter simultâneo de objeto abstrato e artefato mediador.

Palavras-chave: Teoria da atividade. Práticas matemáticas. Mediação artefactual. Práticas de Modelagem.

ABSTRACT

We analyzed the algebraic practices constructed by a group of students while they were developing modeling activities. The participants were students from a course of the Applied Mathematics program for Biology and Ecology of the UNESP – Rio Claro campus, that were invited to make a modeling project in any topic of their own interest as a part of the assignments of the course. This is a qualitative research where data were produced and analyzed from the historical and cultural perspective of the Theory of Activity, that presents the concept of practical activity as an explicative principle of the human development and focuses its attention mainly in three aspects: the mediation of cultural artifacts, the intersubjective relations and the conditions of the legitimation of the developed actions. According to the relationship patterns materialized in the mathematic models used, it was possible to conclude that among the discussed strands of mathematical practices related with the algebraic knowledge, the ones constituted by the students configured modes of action that take the concept of combined variation between different quantities (covariance), as principal unit analysis; that is, they adopt the variational or functional approach as a development principle. Although this type of mathematical practice deals with some level of generality, we emphasize in the need to generate actions for the spatiotemporal separation of the context in which they appeared, to be able to enter the field of the meaning of the algebraic knowledge. This means that the significant quantities have to go through a “de-timing” and “despacialisation” process, for them to be institutionalized in algebraic practice field; that is, for the modes of action of the subjects to be oriented to operate analytically with general relations among indeterminate amounts (variables, unknowns, parameters and generalized numbers). The results indicate that the processes of decontextualisation of correlation patterns are not absolute, as they are followed by the constitution of different levels of generalization and the intentioned use of cultural artifacts. We show, for example, how the modes of action are represented by the mathematical models reproduced and/or constructed collectively between the teacher and the student, besides offering an explanation of the covariational behavior of the particular phenomenon studied according to the object of the modeling project, also were treated as general methods of correlation. Thus, we conclude that, depending on the aims of the constructed practices, the mathematical model used in the projects may involve a simultaneous character of abstract object and mediator artifact.

Keywords: Activity theory. Mathematical practices. Artifact mediation. Modeling practices.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação básica de mediação	54
Figura 2: Estrutura de um sistema de atividade	54
Figura 3: O lugar da atividade modelagem.....	96
Figura 4: A tarefa de modelagem como unidade de análise	105
Figura 5: Tensões iniciais na atividade modelagem	126
Figura 6: Convite de Daniel	128
Figura 7: Sistema de atividades grupo “Matemática e Música”	129
Figura 8: Sistema de atividades grupo “Dispersão de sementes”	132
Figura 9: Sistema de atividades grupo “Cetáceos: enfoque acústico”	133
Figura 10: Observação do professor à primeira versão do trabalho.....	134
Figura 11: Relação da frequência com o tipo de som (grave ou agudo).	156
Figura 12: Experimento com o monocórdio pitagórico	161
Figura 13: Exemplo de um estudo sobre Frequência de ocorrência.	165
Figura 14: Instrumentos de tubos abertos e fechados.....	169
Figura 15: Fabricação de flauta	170
Figura 16: Componente Quantitativo de cada ave.	174
Figura 17: Representação da situação.....	178
Figura 18: Aluna explicando o problema	178
Figura 19: Hipérbole	179
Figura 20: Aluna explicando o movimento da onda sonora	180
Figura 21: Explicação do significado da hipérbole como lugar geométrico	185
Figura 22: Explicação das alunas sobre o comportamento dos cetáceos	186

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 CAPÍTULO 1: A PESQUISA.....	17
2.1 O pensamento algébrico: foco de interesse.....	17
2.2 A modelagem: o contexto da pesquisa.....	26
<i>2.2.1 A PPM: um espaço para a produção e reprodução de conhecimento em sala de aula.....</i>	<i>30</i>
2.3 Pesquisas desenvolvidas no contexto da Perspectiva Pedagógica da Modelagem –PPM-.....	36
 3 CAPÍTULO II: SOBRE A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO: UM OLHAR HISTÓRICO-CULTURAL.....	 39
3.1 A PPM: um contexto para produção de conhecimento matemático.	43
<i>3.1.1 Sobre o conceito de Atividade</i>	<i>43</i>
<i>3.1.2 A relação sujeito e objeto na atividade humana.</i>	<i>46</i>
<i>3.1.3 O caráter ideal e material dos objetos da atividade humana</i>	<i>47</i>
<i>3.1.4 Sobre a atividade teórica e a prática dos seres humanos</i>	<i>49</i>
<i>3.1.5 Sobre a noção de prática.....</i>	<i>51</i>
<i>3.1.6 Sobre o papel dos artefatos nas práticas.....</i>	<i>53</i>
<i>3.1.7 Sobre o conhecimento entendido como horizontes de possibilidades.....</i>	<i>55</i>
3.2 Síntese das ideias deste capítulo	60
 4 CAPÍTULO III: AS PRÁTICAS MATEMÁTICAS RELACIONADAS COM O CONHECIMENTO ALGÉBRICO	 67
4.1 Sobre as práticas matemáticas	67
4.2 Sobre as práticas algébricas	71
<i>4.2.1 Sobre o conceito de número e os processos de medição</i>	<i>72</i>
<i>4.2.2 As magnitudes (grandezas) e sua medição.....</i>	<i>75</i>
<i>4.2.3 O raciocínio proporcional e a resolução de problemas.....</i>	<i>80</i>
<i>4.2.4 As relações: fundamento do método analítico e coração da álgebra</i>	<i>83</i>
4.3 Síntese das ideias deste capítulo.....	90
 5 CAPÍTULO IV: CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO.....	 93

5.1 Contexto geral da pesquisa	93
5.2 Delimitação do campo de estudo	95
5.2.1 <i>Macrocontexto da pesquisa.</i>	97
5.2.2 <i>Contexto microsocioal da modelagem.....</i>	99
5.2.3 <i>A tarefa modelagem como unidade de análise.....</i>	104
5.3 Método de produção da informação documental	107
5.4 O compromisso do pesquisador e as fontes de documentação	110
5.5 Produção dos dados em relação com as fontes documentais.....	115
5.5.1 <i>Os trabalhos produzidos.</i>	116
5.5.1.1 <i>Trabalhos produzidos pela turma de Ecologia:.....</i>	116
5.5.1.2 <i>Trabalhos produzidos pela turma de Biologia:.....</i>	119
5.6 Confiabilidade, validade e integridade dos dados	124
 6 CAPÍTULO V: AS PRÁTICAS MATEMÁTICAS NOS PROJETOS DE MODELAGEM.....	 125
6.1 Primeiro estágio: configuração do grupo e escolha do tema.....	127
6.1.1 <i>Projeto Matemática e Música.....</i>	127
6.1.2 <i>Projeto dispersão de sementes por zoocoria</i>	130
6.1.3 <i>Projeto “Cetáceos: um enfoque acústico”</i>	132
6.1.4 <i>Algumas considerações do primeiro estágio</i>	135
6.1.4.1 <i>Sobre a configuração dos grupos.....</i>	135
6.1.4.2 <i>Sobre o papel dos artefatos.....</i>	135
6.1.4.3 <i>Sobre o interesse como critério de dinamizador dos projetos.</i>	138
6.2 Segundo estágio: situações-problemas formuladas e produção de respostas	145
6.2.1 <i>Estrutura do projeto: “Matemática e Música”.</i>	146
6.2.2 <i>Estrutura do projeto: “Dispersão de sementes por zoocoria”.....</i>	149
6.2.3 <i>Estrutura do Projeto 3: “Cetáceos: um enfoque acústico”.....</i>	154
6.3 As práticas matemáticas no contexto dos projetos	157
6.3.1 <i>Processos de quantificação</i>	158
6.3.2 <i>Uso de razões e proporções.....</i>	160
6.3.2.1 <i>Uso de razões entre quantidades.....</i>	160
6.3.2.2 <i>Uso de relações proporcionais</i>	168
6.3.2.3 <i>Uso de gráficos: instrumentos para o estudo de relações.....</i>	172

6.3.3	<i>As práticas matemáticas no contexto dos projetos: uma síntese</i>	174
6.3.4	<i>Entrando na zona do pensamento algébrico.</i>	177
6.3.4.1	<i>Problema sobre localização de cetáceos</i>	177
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	191
	REFERÊNCIAS	201
	APÊNDICE A – COMPLEMENTO DA EMENTA	211
	APÊNDICE B – EXEMPLO DE ENTREVISTA	215

1 INTRODUÇÃO

Sucintamente, nosso objetivo é estudar as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico, constituídas por um grupo de alunos dos cursos de Biologia e Ecologia da Universidade Estadual Paulista (UNESP), *Campus* de Rio Claro, quando estes foram convidados a desenvolver práticas de modelagem compreendida esta como uma proposta pedagógica.

Quando falamos de prática, estamos referindo-nos, grosso modo, a um fazer (ações) intencionado e objetivado socialmente das pessoas quando encaram as diferentes situações que a vida cotidiana lhes propõe, mas que precisam transformar para satisfazer suas necessidades. Nesse sentido estamos considerando que é a partir das práticas dos indivíduos, melhor, dos sistemas de práticas, que os objetos de conhecimento são produzidos, objetivados e institucionalizados dinamicamente de acordo com contextos sociais particulares.

Dado que nossos interesses acadêmicos estão localizados num contexto educacional, a caracterização do que chamaremos de práticas adjetivadas de matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico estarão limitadas fundamentalmente à produção acadêmica que diz respeito ao desenvolvimento da matemática escolar (álgebra escolar). Para isso, no primeiro momento caracterizamos algumas das discussões e perspectivas relacionadas com o ensino e a aprendizagem da álgebra em contextos escolares e, dentre elas, apresentamos a modelagem matemática como uma das perspectivas que têm sido sugeridas para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No segundo momento, apresentamos a proposta pedagógica da modelagem (PPM) de Borba e Villarreal (2005); Borba (2009, 2011), entendendo-a como um contexto pertinente para produção e reprodução de conhecimento em sala de aula¹, em particular de conhecimento matemático. É um espaço pedagógico dividido em dois níveis ou momentos cognitivamente diferentes, onde atores humanos (professor e alunos) e não humanos (artefatos culturais) interagem com o propósito de produzir projetos. No primeiro nível, são formuladas situações problemáticas no contexto de

¹ A ideia de reprodução de conhecimento está sendo colocada aqui como aprendizagem. Entendendo que pela característica dinâmica do conhecimento em sua historicidade e condicionamento cultural, reproduzi-lo não significa simplesmente repetição.

uma temática escolhida pelos próprios alunos. No segundo, propõem-se argumentos para resolver as situações problemáticas formuladas no primeiro nível.

Vista assim, a proposta de modelagem será interpretada como um artefato pedagógico (tarefa), usado intencionalmente pelo professor, para estimular nos alunos a possibilidade de realizar práticas semelhantes às desenvolvidas por pesquisadores quando constroem projetos de pesquisa. Um dos intuitos é que parte das ações necessárias ao desenvolvimento dos projetos construídos pelos alunos requeira conceitos, raciocínios e técnicas matemáticas. Desse modo, o propósito é compreender o tipo de práticas matemáticas que constituem parte substancial desses projetos e, entre elas, as relacionadas com o conhecimento algébrico. Mas, também, parte do interesse é entender as formas como essas práticas são constituídas.

Por que práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico? Meu interesse pela álgebra escolar não é novo. Ele nasceu como uma das tantas preocupações que surgiram quando passei a lecionar Matemática em uma escola de Ensino Fundamental colombiana. Em 2003, recém-formado como licenciado em Matemática e Física pela Universidade de Antioquia, Colômbia, comecei a trabalhar no oitavo grau da Educação Básica colombiana, equivalente ao oitavo ano de Ensino Fundamental no Brasil. Nesse momento, enfrentei o que alguns autores chamam “o problema da passagem da aritmética para a álgebra”, (BALACHEFF, 2002; BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996).

Percebi que, mesmo com o título de licenciado me dizendo que eu devia estar preparado para encarar as dificuldades, realmente não sabia como agir. No começo encarei esse problema assumindo duas estratégias: de um lado, tentando lembrar e imitar as práticas dos que foram meus professores na área, tanto os do nível fundamental como da licenciatura; e de outro, pedindo ajuda para os colegas da escola. Depois de ouvir algumas sugestões, opiniões e desenvolver ações diretas com os alunos, comecei entender que o problema era mais complexo do que eu imaginava. Ainda assim, em geral, terminei minhas jornadas com a certeza de que estava fazendo um bom trabalho com meus estudantes. Acho que eles não pensavam o mesmo.

No ano de 2004, iniciei o mestrado, na mesma universidade onde me licenciiei, achando interessante fazer de minha inquietação, já um pouco mais madura em relação à álgebra escolar, o projeto de dissertação. Foi assim que, depois de muitas

discussões, foquei o objetivo no conceito de função linear a partir de uma perspectiva variacional². Como consequência desse trabalho, surgiu o interesse pela modelagem matemática, como um contexto particular para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pela via dos processos de co-variação de quantidades, (BLANTON; KAPUT, 2011; KIERAN; BOILEAU; GARANÇON, 1996). Enquanto isso, participei como pesquisador do projeto “O raciocínio proporcional na educação básica”, visando estudar as estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1991) e as estreitas relações entre a proporcionalidade direta simples e a função linear, confirmando ainda mais as possibilidades da noção de variação como um dos pilares do pensamento algébrico e o raciocínio proporcional como base desse processo, (POSADA *et al.*, 2006).

Uma vez formado em 2006, comecei trabalhar em 2007 como docente na Licenciatura em Matemática da mesma faculdade pela qual fui formado. Já como professor da faculdade, o problema sobre a formação inicial de professores de matemática começou a ser parte de meu trabalho, mas do mesmo modo, participei de processos de formação continuada de professores que ensinam matemática e outras ciências. Baseado nessas experiências, continuei aprofundado o estudo das relações complexas da álgebra escolar, acompanhando alguns trabalhos de alunos e aprendendo com as práticas dos professores de diferentes níveis escolares, além de me contatar com acadêmicos de outras universidades. Publiquei o texto, fruto desse trabalho, com o título “Pensamento Variacional y razonamiento algebraico” (POSADA *et al.*, 2006).

Paralelamente, participei como pesquisador do projeto intitulado “Aspectos teóricos e metodológicos para consolidação de uma rede de aprendizagem” e, nesse contexto, algumas das discussões dadas com relação ao uso de tecnologias computacionais me levaram ao interesse pela teoria histórico-cultural. Segundo essa perspectiva teórica, a consciência humana e o conhecimento em geral desenvolvem-se a partir das práticas sociais em que os sujeitos participam e dos artefatos culturais que auxiliam suas ações.

Foi no ano de 2011, depois de ter sido aceito pelo professor Dr. Marcelo Borba como seu orientando no curso de doutorado em Educação Matemática e auxiliado

² A perspectiva variacional diz respeito à aproximação dos conceitos matemáticos, em particular algébricos, enfatizando a noção de variação de grandezas como unidade de análise (POSADA; VILLA, 2006a, b).

financeiramente pelo Programa de Ajuda a Estudantes do Estrangeiro (PAEDEX) da UNESP e pela Associação Universitária Ibero-americana de Pós-graduação (AUIP), que cheguei ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). Carregado com essas ideias, comecei a me familiarizar com a perspectiva pedagógica da modelagem, proposta por Borba e Villarreal (2005); Borba (2009; 2011) e, relacionando-a com meus interesses pela álgebra escolar, mediada pela teoria histórico-cultural do conhecimento, foi que finalmente construí o projeto que passo a apresentar.

No primeiro capítulo, fazemos uma descrição dos principais elementos que deram origem à pergunta de pesquisa. Começamos discutindo aspectos relacionados com a álgebra enquanto objeto de práticas educacionais, destacando algumas das perspectivas de modelagem que têm servido de contexto para o ensino de conceitos algébricos. Já no segundo momento, expomos as principais características da proposta pedagógica da modelagem de Borba e Villarreal (2005) e as possibilidades que oferecem para o desenvolvimento de práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico. No segundo capítulo, apresentamos o conceito de prática como principal unidade de análise que permite entender condições gerais relacionadas com a produção e reprodução de conhecimento a partir da perspectiva teórica histórico-cultural. Particularizamos esta discussão no terceiro capítulo, enfatizando as características do conhecimento matemático. Já no quarto e quinto capítulo, apresentamos a metodologia de pesquisa e as análises respectivas, para culminar no sexto capítulo com algumas considerações que dizem respeito aos aspectos que emergiram como possíveis respostas à pergunta de pesquisa.

2 CAPÍTULO 1: A PESQUISA

2.1 O pensamento algébrico: foco de interesse

Como argumentado por Ponte e Guimarães (2014), a álgebra começou a ser de interesse para o ensino só depois do movimento político relacionado à revolução Francesa, a partir da qual, a educação pública passou ser pensada como um projeto organizado pelo Estado, dando lugar ao surgimento da escola formal. Porém, de acordo com esses autores, o ensino da álgebra, como atualmente é conhecido, foi uma criação do século XIX, nascendo, assim, o que na atualidade é conhecida com o nome de álgebra escolar. Já na segunda metade do século XX, comentam esses autores, tornou-se uma área de interesse crescente para diferentes pesquisadores e em diferentes contextos, talvez porque se tenha passado a acreditar que é uma das partes mais importantes da matemática, tanto como objeto de estudo em si, como para o estudo de outras ciências e outros campos da mesma matemática.

Para a maioria dos pesquisadores na área de Educação Matemática, parte da importância da álgebra está em ser vista como um protótipo de ações e operações, de alguma forma intencionada de generalidade, que, por sua vez, tem sido considerada um dos pilares do pensamento matemático, (BRITT; IRWIN, 2008; LINS; KAPUT, 2004). Desse modo, a álgebra é vista como um dos modelos de tratamento de conceitos científicos que auxilia a formulação e a solução de diversos problemas, inclusive, na mesma matemática.

Para Vygotsky (1986) e Davydov (1978), por exemplo, todo conceito, em particular os científicos, são por natureza expressões de generalidade. Por isso, baseados em argumentos cognitivos e pedagógicos, consideram que um dos propósitos de aprender conceitos científicos é favorecer o desenvolvimento das funções psicológicas superiores que permitem graus crescentes de autonomia nos sujeitos. Portanto, no nível cognitivo, a álgebra e seu ensino tornam-se fundamentais para esse propósito.

Percebe-se, assim, um crescente interesse de professores e outros pesquisadores por construir propostas de ensino e aprendizagem da álgebra em contextos escolares formais e não formais. Como apontam Lins e Kaput (2004), diferentes pesquisadores, apelando a argumentos cognitivos, pedagógicos,

ontológicos e epistemológicos, têm respondido à pergunta sobre qual deveria ser o melhor momento para ensinar esse campo de conhecimento, de duas formas diferentes: na primeira, esses autores consideram que o melhor momento devia ser quando os alunos tivessem uma idade mínima de doze anos; isto é, depois de ter tido ao menos cinco ou seis anos de experiência escolar com a matemática, principalmente com a aritmética; na segunda, eles apresentam a álgebra como uma forma particular de pensamento que deve ser desenvolvido lentamente desde os primeiros anos de escolaridade. Pode-se dizer que o conjunto de perspectivas e de propostas de ensino e aprendizagem da álgebra localiza-se cronologicamente em uma dessas duas respostas, (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996; CAI; KNUTH, 2011; LINS; GIMENEZ, 2001; STACEY; CHICK; KENDAL, 2004; SUTHERLAND; ROJANO; LINS, 2002).

A princípio os trabalhos desenvolvidos concentraram-se na ideia de entender as dificuldades dos alunos, na transição da aritmética para a álgebra e em propor estratégias pedagógicas para ajudar os professores no ensino. A lógica é clara, dado que a álgebra é mais abstrata, geral e difícil de entender que a aritmética, deve ser tratada depois de colocar as bases concretas da aritmética. Desses trabalhos destacamos que, mesmo muitos pesquisadores reconhecendo que a álgebra não é simplesmente uma generalização da aritmética, em geral, o predomínio nas escolas privilegiava um tratamento que contraria esse fato. A maioria das pesquisas na área mostrava que aprender e ensinar álgebra não significava somente fazer explícito o que antes era implícito nas operações aritméticas, também implicava uma mudança nas formas de pensar as operações particulares numéricas para formas mais gerais. Todavia, para muitos professores, fazer álgebra significava fazer a mesma aritmética, porém agora usando letras. Nesse sentido o paradoxo era, de um lado, certa continuidade entre a aritmética e a álgebra escolar, não sendo claras as fronteiras entre essas áreas; e de outro, a ruptura que implica entendê-las como independentes e, por essa via, seu ensino teria que ser separado.

Alguns dos estudos desenvolvidos, principalmente nas décadas de 70 e 80, focaram a atenção nas diferenças do uso do sinal igual em expressões aritméticas e algébricas (KIERAN, 1981); no papel da incógnita na solução de equações (FILLOY; ROJANO, 1989); e no papel da letra em expressões aritméticas e algébricas, (KÜCHEMANN, 1978). Alguns desses autores mostraram, por exemplo, características diferenciadas no uso de símbolos, geralmente alfanuméricas, em

operações de ambas as áreas e, como comentam Lins e Kaput (2004), a proposta de considerar a álgebra como aritmética generalizada era enfatizar que nesse nível escolar as letras representam elementos de algum conjunto numérico e não de outro tipo de conjuntos, como acontece na álgebra abstrata ou moderna³. De qualquer modo, pode-se dizer que os trabalhos realizados nessa época caracterizam-se por atentar-se à solução de dificuldades na aprendizagem de certos temas de acordo com níveis ou estágios cognitivos.

Com o propósito de sistematizar as discussões e produções até o momento conhecidas, relacionadas com o ensino e a aprendizagem da álgebra, algumas características do raciocínio algébrico e as dificuldades dos estudantes quando enfrentam a transição da aritmética para a álgebra, foi publicado, em 1996, o Handbook “Approaches to algebra: perspectives for research and teaching”, em que os autores propuseram não só situações com o intuito de propiciar um desenvolvimento mais favorável ao raciocínio algébrico, mas também outros caminhos e tendências que, segundo estudos anteriores, deveriam ser levados em conta no ensino e em futuras pesquisas na área.

Quatro perspectivas, relacionadas com alguma concepção correspondente de álgebra, forneceram novas ideias para sua introdução no ensino básico: processos de generalização, resolução de problemas, modelagem e a perspectiva funcional. Além disso, as análises de investigações baseadas nessas perspectivas foram iluminadas por um foco duplo: epistemológico (através da história do desenvolvimento de álgebra) e preocupações didáticas (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996).

Desse trabalho, além de considerá-lo muito valioso por ser uma das primeiras tentativas de sistematização e consolidação do movimento na área como campo de pesquisa, ressaltamos dois aspectos de particular importância e interesse para esta pesquisa. O primeiro trata da necessidade de diferenciar o termo *álgebra* como conteúdo ou objeto de estudo da matemática e o termo *pensar algébrico* como uma forma particular de os sujeitos organizarem as ações orientadas a transformar o mundo em que vivem e de sistematizar e manipular suas relações com ele. Parte do esperado com essa proposta era que a escola enfatizaria os processos de desenvolvimento do pensamento algébrico, mais que as características que fazem

³ (BALACHEFF, 2002; DETTORI; GARUTI; LEMUT, 2002; RADFORD, 2006a), para algumas discussões ao respeito.

da álgebra simplesmente um objeto de conhecimento matemático ou conteúdo interno da matemática, reconhecendo que o segundo está incluso no primeiro. Situação que, segundo relatórios posteriores, vem ocorrendo aos poucos⁴.

O segundo aspecto é a ênfase feita nas perspectivas funcional e de modelagem, colocando o conceito de função como parte central e constituinte do pensamento algébrico (HEID, 1996; JANVIER, 1996) (HEID, 1996; JANVIER, 1996), quando, pela evolução da mesma matemática, alguns autores têm considerado esse conceito pertencente mais ao campo da análise real do que da álgebra, (BOYER, 1949; DA PONTE; GUIMARÃES, 2014; GRATTAN-GUINNESS, 1980). Em grande medida, essa ênfase deve-se à influência que as tecnologias computacionais começavam a ter em diferentes ramos da educação matemática⁵.

Com relação ao primeiro aspecto, o termo *pensamento algébrico* ainda hoje é objeto de tentativas de definição e delimitação. Vários autores têm encarado o problema apelando a diferentes perspectivas: epistemológicas, cognitivas, pedagógicas e antropológicas, enfatizando em alguns aspectos e minimizando em outros. Para ilustrar um pouco a diversidade das produções a respeito, optamos por selecionar cinco autores, que tem gerado propostas de delimitação dessa forma particular de pensar matemática e por considerá-los representantes da produção geral do tema.

Em primeiro lugar, Charbonneau (1996), referenciando o historiador Michael Mahoney, considera que o pensar algébrico envolve basicamente três aspectos: (1) simbolismo operativo; (2) um modo de operar baseado numa lógica de relações mais que numa lógica de objetos; (3) a análise como método pelo qual o conhecimento algébrico é produzido.

Para Lins (1992), o pensar algébrico é uma forma particular de organizar o mundo, uma maneira de modelá-lo e de manipular esse modelo. Eles o caracterizam por relacionar outras três formas de pensar: pensamento aritmético, pensamento estrutural e pensamento analítico. Para esse autor, a característica aritmética não significa que a álgebra e a aritmética sejam a mesma coisa, mas que a matéria-prima de ambos os campos é a mesma: números e operações aritméticas. A característica estrutural implica supor que, no pensamento algébrico, as operações

⁴ Ver, por exemplo, algumas discussões dos “Working Groups of Algebraic Thinking” em “Proceeding of the Psychology of Mathematic Education” –PME-

⁵ Uma discussão sobre a influência das tecnologias computacionais encontra-se em (BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014)

aritméticas são objetos de estudo e ferramentas para solucionar problemas. O analítico é o método com o qual o pensamento algébrico constrói resultados e resolve problemas⁶.

A terceira pesquisadora que quero referenciar é Carolyn Kieran. Apoiada em diversos autores, considera que o pensamento algébrico pode ser sintetizado em três tipos de atividades: atividades de generalização, atividades de transformação e atividades globais e de meta/nível (KIERAN, 2004, 2006). Para ela, as atividades de generalização e transformação implicam a formação e transformação de expressões por meio de regras de tratamento simbólico. Essa autora considera estas atividades como propriamente algébricas e as atividades globais e de meta/nível como ferramentas para a resolução de problemas, estudo de variações e práticas de modelagem.

Por outro lado, Blanton e Kaput (2011) caracterizam o pensamento algébrico como aquele que consiste em dois aspectos principais: (1) construção e expressão de generalizações em sistemas cada vez mais formais e convencionais de símbolos; (2) raciocínio com formas simbólicas, incluindo as manipulações sintaticamente guiadas por essas formas. Além disso, os autores argumentaram que estes aspectos centrais atravessam três eixos longitudinais da álgebra escolar: (1) álgebra como o estudo de estruturas e sistemas abstraídos de cálculos e relações (por exemplo, álgebra como aritmética generalizada); (2) álgebra como o estudo de funções, relações e variação conjunta (covariação); (3) álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelagem para expressar e apoiar o raciocínio sobre situações que estão sendo modeladas.

Por sua vez, Godino et al. (2012), baseados no que eles chamam de “Enfoque Ontossemiótico”⁷ do conhecimento matemático, formulam que o pensamento algébrico é uma maneira particular de pensamento matemático, caracterizado essencialmente pela dialética entre processos de generalização e particularização e,

⁶ Esse autor enfatiza que a análise no pensamento algébrico pode ser entendida com um duplo sentido: de um lado, como um método para achar a verdade; e de outro, para caracterizar que em álgebra as incógnitas (o desconhecido) podem ser tratadas como algo conhecido, (VIETE, 1983).

⁷ O enfoque ontossemiótico é definido por seus criadores como uma técnica de análise dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, que permite determinar os significados institucionais e pessoais que estão em jogo nas interações didáticas. (GODINO, 2002)

consequentemente, pela intervenção e emergência de objetos intensivos⁸ com níveis progressivos de generalidade. Para eles, a relação dialética extensivo-intensiva serve para dar conta de três aspectos característicos do pensar algébrico: (1) a indeterminação e o uso de incógnitas e equações; (2) a generalização e uso de variáveis, fórmulas e parâmetros; (3) as relações binárias ou de outros tipos.

Comparando essas cinco tentativas de delimitação do que poderia chegar a ser o pensamento algébrico, pode-se observar a dificuldade para ter um consenso sobre o que significa e/ou implica essa forma particular de pensar matemática. As fronteiras entre os diferentes campos são difusas, particularmente com referência à aritmética e à análise real (aspecto funcional). No entanto, mesmo com essa falta de consenso, apreciam-se alguns pontos convergentes.

Em primeiro lugar, nas aproximações de Lins (1992) e Charbonneau (1996), leva-se em conta que a forma de construir conhecimento algébrico é o método analítico, enfatizando mais na busca de relações estruturais do que nos objetos. Considero que são autores, cujo olhar está focado principalmente na tradição do tratamento estrutural de expressões, chamadas de algébricas, tais como equações e inequações, além de eles estarem próximos à perspectiva de solução de problemas verbais, na qual a ênfase principal de interpretação dos símbolos (as letras) nas expressões é de incógnita e de números generalizados. Para esses autores, a referência aos processos de generalização e modelagem é implícita, enquanto que, para os outros três além de importante, é explícita. Isso implica que, para estes últimos autores os símbolos nas expressões algébricas também podem ser interpretados com o significado de variáveis.

Acredito que o fato de que a atenção de Lins e Charbonneau estar voltada mais para as relações estruturais das expressões algébricas do que para processos de variação, sem se referirem explicitamente ao conceito de função como aspecto importante do pensamento algébrico, foi porque estava apenas começando a discussão sobre se tinha ou não sentido esse conceito fazer parte da álgebra, quando, em geral, como já foi exposto, tinha sido assumido como parte do campo da análise real⁹. De outro lado, porque a perspectiva funcional e a de modelagem estão mais próximas da “generalização” como processos e não necessariamente no

⁸ Para esses autores, o *intensivo* seria o oposto do *extensivo*. Dizem que um objeto é *extensivo* quando intervém em uma prática matemática com um caráter de exemplo particular, enquanto objeto *intensivo* é aquele que intervém como tipo, classe ou generalidade. (GODINO *et al.*, 2012)

⁹ Freudenthal (2002) foi um dos autores pioneiros nessa discussão.

tratamento matemático do “geral”¹⁰. Isso é entendível pelos interesses acadêmicos de suas pesquisas e pelo momento histórico em que foram desenvolvidas suas ideias, quando as tecnologias computacionais apenas começavam a ter um papel importante na educação matemática.

Em relação a isso, Radford (2011) lembra-nos que na realidade, a álgebra tem suas raízes nas técnicas para resolver equações que modelam problemas práticos e não práticos de enunciados. Ele comenta que certos livros de matemática da idade medieval italiana, como é o caso de “*Liber Abaci*”, de Pisano e “*La reghola de álgebra amuchabale*” do mestre Benedetto de Florença, fornecem explicações geométricas e aritméticas sobre soluções de algoritmos que dizem respeito a casos compostos de equações, porém,

o centro e o objetivo dos trabalhos ou capítulos dedicados à álgebra não é explicar os algoritmos geométricos nem aprender como realizar cálculos em binômios, mas demonstrar como usar as técnicas da álgebra para resolver *problemas de enunciados*, (RADFORD, 2011, p. 25).

E continua:

A *família* de problemas associados a uma determinada técnica algébrica é maior do que a família associada a uma técnica análoga baseada em ferramentas numéricas ou geométricas. A álgebra surge, então, como um novo dispositivo para lidar com mais problemas de uma forma mais unificada e sistemática (RADFORD, 2011, p. 26, grifos do autor).

Kieran (2004; 2006), Blanton e Kaput (2011) e Godino et al. (2012) fazem dos processos de generalização, do conceito de função e da modelagem aspectos centrais no desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa ideia não contraria o proposto por Lins (1992) e Mahoney (1996), mas permitiria mudanças epistemológicas e pedagógicas relacionadas com o foco e o ponto de partida no ensino. Em vez de focar a atenção no tratamento geral de técnicas e operações que permitem resolver equações e inequações de forma unificada e sistemática, poder-se-ia começar com processos de modelagem de situações em contexto de variação. Em outras palavras, para efeitos curriculares, isso significa considerar, como ponto de partida, as relações funcionais e não o conceito de equação (BLANTON; KAPUT,

¹⁰ De acordo com esses autores, entre o “genérico” e o “generalizado”, há diferenças substanciais. Uma situação “generalizada” emerge quando se passa a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares. Ao passo que a situação “genérica” emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação dos casos particulares (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 114).

2011). Não seria uma mudança somente formal, mas também epistemológica e por isso comentarei algumas das possíveis implicações.

Nas expressões algébricas elementares, as letras são usadas para representar, em geral, quatro tipos de objetos matemáticos com significados diferentes: incógnitas, variáveis, parâmetros ou o que Bloedy-Vinner (2002) chama de números generalizados¹¹. Quando se fala do conceito de função, surge imediatamente uma referência ao conceito de variável e à variação entre variáveis (BLANTON; KAPUT, 2011; HEID, 1996; KIERAN; BOILEAU; GARANÇON, 1996; POSADA; VILLA, 2006b). Nesse sentido, nas expressões algébricas, que representam relações funcionais, as letras em geral representam variáveis, diferentemente de quando as expressões representam equações ou relações de equivalência, para as quais as letras geralmente significam incógnitas ou números generalizados respectivamente.

Um dos aspectos importantes dessa diferença é a possibilidade de associar letras a quantidades variáveis, impregnando com um carácter dinâmico os símbolos representados pelas letras nas expressões algébricas e, por essa via, estudar os efeitos que produzem em outras quantidades que variam conjuntamente, ou seja, quantidades *covariantes*. Desse modo, a função pode ser vista como um meio ou modelo para o estudo de fenômenos relacionados com as ciências naturais e sociais, com o uso de diferentes formas semióticas. O coração dessa perspectiva é a noção de variação.

É por isso que, de acordo com Kieran et al. (1996) e Blanton e Kaput (2011), o pensamento funcional e/ou variacional exige um sentido especial quando se desenvolve no contexto da modelagem matemática¹², pois se constitui num cenário natural para explorar os processos de variação relacionados à natureza física e à social. Porém, de acordo com Posada e Villa (2006a), na coordenação entre quantidades que covariam e na construção de correlações, nem sempre há

¹¹ Esses quatro usos estão associados a tipos de expressões algébricas: as incógnitas geralmente estão associadas a equações; as variáveis, as funções e os números generalizados, a relações de equivalência (um exemplo poderia ser: $(2 + x)^2 = 4 + 2x + x^2$, na qual todos os números reais substituídos por x constituem uma proposição verdadeira para a relação). Já os parâmetros associam-se a qualquer uma das expressões anteriores constituindo famílias, seja de funções, equações seja relações de equivalência.

¹² Em termos gerais, a modelagem matemática nesse texto é assumida como uma perspectiva de introdução e aproximação dos conceitos algébricos no contexto escolar, enfatizando a construção de conceptualizações e significações matemáticas para e na descrição e/ou interpretação de fenômenos físicos e sociais usando diferentes formas semióticas.

continuidade. Mesmo alguém raciocinando variacionalmente ajustado à situação de interesse, nem sempre consegue determinar as co-relações entre as quantidades pertinentes da situação. Entre outras coisas, porque nem sempre é possível¹³. Nesse sentido não é totalmente transparente como as pessoas, ao enfrentarem situações de modelagem matemática, em que precisam coordenar processos de covariação para construir simbolicamente formas de correlação, conseguem fazê-lo. Assim, sugere-se continuar estudando as condições teóricas e metodológicas sob as quais se desenvolve o trânsito entre o raciocínio co-variacional e o co-relacional.

Algumas pesquisas mostram que esse não é um problema somente da educação básica, senão também da educação superior. Breunig e Nehring (2013) e Villa- Ochoa (2011) discutem em seus trabalhos algumas dessas problemáticas no ensino superior, fundamentalmente em contextos de ensino e aprendizagem de Cálculo. Breunig e Nehring afirmam, por exemplo, que as principais dificuldades conceituais dos alunos que ingressam nas disciplinas de Cálculo I dos cursos de Engenharia estão relacionadas com conceitos algébricos da educação básica, em particular com o conceito de função. Enquanto Villa-Ochoa mostra como compreender o conceito de taxa de variação é fundamental para a compreensão da derivada.

É no contexto da perspectiva variacional que analisarei as características, sentidos e significados das ações e operações desenvolvidas pelos alunos e dirigidas para construir correlações de quantidades que covariam em uma atividade de modelagem. Nosso intuito é estudar as possibilidades que essa perspectiva oferece no desenvolvimento do pensamento algébrico. Assumindo que pensar algebricamente significa constituir ações orientadas para operar simbólica e intencionalmente¹⁴, com quantidades gerais de natureza indeterminada (inicialmente aritméticos), mas de uma forma eminentemente analítica. Isso implica considerar que na álgebra opera-se estruturalmente com quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas, fazendo uso de representações simbólicas¹⁵.

¹³ Um caso típico é quando se reconhece a co-variação entre o tempo medido em dias e o valor de uma moeda com relação a outra. Mesmo assim, não é possível achar uma correlação entre essas duas variáveis. Em geral as variações de natureza probabilística são casos representativos de situação como essa.

¹⁴ Lins considera que é melhor entender o pensamento algébrico como intenção, “uma maneira como eu quero fazer alguma coisa” (LINS, R., 1992, p. 11, tradução nossa).

¹⁵ O uso de letras tem sido uma tendência para o desenvolvimento desse tipo de operações, mas não é a única. (GODINO *et al.*, 2012; RADFORD, 2010). Argumentam que o uso de letras é só

2.2 A modelagem: o contexto da pesquisa

A íntima relação entre diferentes formas de conhecimento e a modelagem tem sido apresentada como muito importante por reconhecidos pesquisadores. Alguns deles consideram que o raciocínio baseado em modelos e formas associadas desse tipo de prática constitui o núcleo epistêmico de compreensão dos sistemas naturais. Para Lehrer e Schauble (2007), por exemplo, muitas das ideias científicas derivam seu poder a partir dos resultados obtidos no esforço de construir, revisar e discutir as qualidades dos modelos. Raciocinar com base em modelos tem a ver com a produção de ideias, intuições, simbolizações, tecnologias e práticas científicas.

Há quem considere que áreas de estudo, como a matemática aplicada e a modelagem matemática, começaram precisamente por se acreditar na possibilidade, quase certeza, de que grande parte dos problemas das ciências naturais podem ser resolvidos por meio da construção de modelos matemáticos ou pela aplicação de teorias matemáticas no estudo de situações das outras ciências. Para autores como Bassanezi (2002), a modelagem matemática, em termos gerais, pode ser entendida como o uso da Matemática para resolver problemas cotidianos da vida real. É uma maneira de representar, por meio dos conceitos e relações matemáticas, uma situação problemática real procurando sua solução. Em outras palavras, segundo Meyer; Caldeira e Malheiros (2011), a modelagem matemática é uma forma de estudar o mundo real com o universo da matemática.

Uma forma epistemológica geral de compreender essa ligação entre “mundo real” e “matemática”¹⁶ é usar o termo *analogia*, tal como fazem Lehrer e Schauble (2007). Esses autores, ao pensarem sobre as raízes da modelagem, expressaram:

Achamos oportuno lembrar que, em seu nível mais básico, um modelo é uma analogia. Um conjunto familiar de objetos e relações pode substituir, por analogia, outro conjunto menos familiar de objetos e relações [...] As analogias não são meras cópias, é uma maneira de testar e determinar quais aspectos e relações de um

uma possibilidade com grandes potencialidades operativas e cognitivas, mas outras formas simbólicas, frutos de processos históricos e culturais particulares, poderiam mediar as formas de pensar algébrico. Expressões verbais faladas e escritas, sons, gestos, desenhos, movimentos corporais etc., além das representações fornecidas por artefatos complexos, como sistemas computacionais ou tecnologias digitais, fariam parte dessas outras possibilidades com as quais o pensamento algébrico contaria.

¹⁶ As relações e/ou separação entre “o mundo real” e “a matemática” é um tema de discussão da maioria dos autores interessados no campo da modelagem em geral e no contexto da educação em particular. Algumas discussões podem ser achadas em Barbosa; Caldeira e Araújo (2007).

sistema, o mais familiar, são pertinentes para a compreensão do novo sistema, (LEHRER; SCHAUBLE, 2007, p. 154, tradução nossa).

Nesse sentido uma expressão matemática poderia modelar outro sistema, assumido como não matemático, não só porque a expressão está representando analogicamente os objetos e relações daquele sistema que está sendo modelado e, ao pertencer ao campo da matemática, se faz familiar para o matemático, mas também porque essas expressões matemáticas permitem formas de ação relacionadas com o sistema modelado. Porém, considerando essa perspectiva, é possível pensar que uma situação das ciências naturais ou sociais pode modelar uma expressão matemática, (URQUHART, 2008; WILLIAMS; GOOS, 2013).

Partindo desses argumentos, acadêmicos preocupados com o ensino e a aprendizagem da Matemática têm ponderado o potencial da modelagem, considerando-a um caminho didático e/ou pedagógico pertinente ao ensino de diferentes conteúdos curriculares e ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, partindo de situações de diferentes contextos das ciências naturais e sociais. As possibilidades que a modelagem oferece à educação matemática é um movimento crescente, que já vem sendo debatido há várias décadas, (ARAÚJO, 2010; BASSANEZI, 2002; BLUM *et al.*, 2007; MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011).

Uma conclusão desse intenso debate é que se torna cada vez mais clara a inexistente homogeneidade nos entendimentos e perspectivas que a modelagem tem a oferecer à educação matemática. Atualmente as discussões tocam em questões de ensino, aprendizagem, currículo, avaliação, formação inicial e continuada de professores, construção de conhecimento matemático, entre outras. De acordo com interesses e perspectivas de cunho filosófico, epistemológico, antropológico, cognitivo e pedagógico, cada uma dessas perspectivas gera práticas particulares em diferentes contextos educacionais.

Kaiser e Sriraman (2006) apresentam um mosaico de possibilidades e perspectivas, algumas, segundo eles, já abandonadas pelos proponentes e seguidores e outras, atualmente, em alto grau de desenvolvimento por diferentes pesquisadores de reconhecimento mundial. Para esses pesquisadores, até o ano

2006¹⁷, as principais perspectivas podem ser catalogadas como: realística, contextual, educacional, epistemológica, cognitiva e sócio-crítica.

Os principais objetivos da perspectiva realística são a resolução de problemas, a compreensão do mundo real e a promoção de competências de modelagem. A perspectiva contextual está interessada principalmente em aspectos psicológicos dos sujeitos envolvidos. A educacional, relacionada com interesses pedagógicos como a aprendizagem. A epistemológica, orientada a desenvolvimentos teóricos do conhecimento matemático e não matemático. A cognitiva, dirigida à análise de processos cognitivos e do pensamento matemático. O objetivo da perspectiva sócio-crítica também é pedagógico, mas nesse caso, voltado para o desenvolvimento da compreensão crítica do mundo, a autonomia e valores de cidadania nos alunos.

Para Araujo (2010), essa última perspectiva tem sido desenvolvida principalmente por educadores matemáticos brasileiros. Essa autora, a partir de uma minuciosa radiografia que faz e apresentou relacionando as raízes e tendências da modelagem na educação matemática no Brasil, conclui que seus alicerces encontram-se no movimento da etnomatemática (D'AMBRÓSIO, 1999) e nos trabalhos sobre educação matemática crítica (SKOVSMOSE, 1994).

A perspectiva sócio-crítica tem tido diferentes interpretações por autores do mesmo país. Uma delas é a de Borba e Villarreal (2005). Segundo eles, uma forma de alcançar os propósitos dessa perspectiva é pensar a modelagem fazendo parte de projetos pedagógicos, em que os alunos são convidados a escolher os temas que considerem de interesse para pesquisar. A ideia é dar protagonismo aos alunos, permitindo-lhes participação ativa no desenvolvimento do currículo e, desse modo, propiciar formas e níveis de autonomia. Esses autores assumem essa perspectiva como uma particular proposta, denominada “Proposta Pedagógica de Modelagem (PPM)”, e é entendida como um espaço para a produção e a reprodução de conhecimento em sala de aula, em sinergia com o uso de diferentes mídias. Segundo Malheiros (2008; 2004), esta proposta é desenvolvida sob a metodologia de projetos, nomeada por ela de projetos de modelagem.

A possibilidade de os alunos participarem da organização curricular, começando pela escolha das temáticas a serem estudadas na ementa até as formas de seu desenvolvimento em sala de aula e fora dela, tem sido assunto polêmico em

¹⁷ Conclusão que surge de algumas das reuniões da International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications – ICTMA-

educação, particularmente em Educação Matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005). Quem deve escolher e estruturar os conteúdos programáticos das disciplinas? Quais são os compromissos e responsabilidades dos diferentes atores na escolha, organização e desenvolvimento desses conteúdos? Para Borba e Villarreal (2005), na maioria das vezes, o aluno é quem menos participa dessa ação, em geral, ele é limitado a responder, não a propor. É o caso de muitas das propostas apresentadas para o ensino da matemática, entre elas o uso da modelagem para o ensino da álgebra (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996; STACEY; CHICK; KENDAL, 2004).

O uso da modelagem para o ensino da álgebra, por exemplo, tem respondido principalmente a duas tradições: (1) a modelagem como uma metodologia para seu ensino; (2) a modelagem como um espaço de aplicação dos conceitos algébricos aprendidos. Em ambos os casos o foco do ensino é a álgebra, entendida esta como um campo de conhecimento com suas características metodológicas e técnicas próprias que devem ser aprendidas pelos alunos: a solução de equações e principalmente solução de problemas algébricos, (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996; CAI; KNUTH, 2011; STACEY; CHICK; KENDAL, 2004; SUTHERLAND; ROJANO; LINS, 2002).

Desse modo, o termo modelagem tem sido usado próximo à metodologia de resolução de problemas, em que o professor apresenta problemas, geralmente abertos, para que os alunos trabalhem e, a partir das ações deles são apresentados e explicados os conceitos algébricos (primeira tradução). Ou, uma vez explicados os conceitos, os problemas servem de ilustração, exemplificação ou aprofundamento (segunda tradução). Para Stacey e Chick (2004), esses usos respondem ou refletem certos domínios de interesse, principalmente do professor.

Na proposta pedagógica da modelagem de Borba e Villarreal (2005), ambos os casos ou nenhum deles são possíveis, dependendo das decisões que o mesmo devir do projeto vai apresentando para os atores. Um caso particular que pode ocorrer é que os alunos decidam desenvolver alguma temática que não precise do uso explícito ou implícito de conceitos e técnicas matemáticas. Quando isso acontece, o projeto é desenvolvido à margem do processo de modelagem matemática. Se ao contrário, o projeto implica a constituição de práticas de modelagem matemática, em geral, podem acontecer ambos os casos, isto é, seria um bom motivo para ensinar e aprender conceitos matemáticos novos e/ou para aplicar conceitos previamente aprendidos.

No entanto, em qualquer das possibilidades, o desenvolvimento da proposta pedagógica da modelagem aparta o professor da zona de conforto, na qual tem o controle do que deve ou pode acontecer no processo (BORBA; PENTEADO, 2001). Quando esse processo instiga os alunos usarem ou produzirem conceitos matemáticos, o intuito é que vivenciem os momentos de formulação e de validação próprios de qualquer processo de modelagem, porém carregados de incerteza na medida em que dependem dos interesses dos atores (alunos e professor), do tempo definido de trabalho, das situações problemáticas formuladas e dos artefatos culturais usados.

2.2.1 A PPM: um espaço para a produção e reprodução de conhecimento em sala de aula

Como já apresentado, um dos objetivos da proposta pedagógica de modelagem de Borba e Villarreal (2005) é fornecer uma espaço para a produção e reprodução de conhecimento em relação ao uso das tecnologias¹⁸ e, para isso, consideram que são os alunos que devem escolher as temáticas a serem pesquisadas:

a modelagem pode ser entendida como uma aproximação pedagógica na qual se enfatiza que os temas que serão pesquisados na sala de aula serão escolhidos pelos alunos (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 29, tradução nossa).

Nesse sentido, modelar pode ser interpretado como um processo desenvolvido com fins educacionais que implicam um “esforço por descrever matematicamente o fenômeno escolhido pelos alunos com ajuda do professor.” (BORBA; ARAÚJO, 2004).

Borba e Villarreal (2005) discutem algumas das implicações que, em geral, as heurísticas para a resolução de problemas, propostas por George Polya (1945) e Alan Schoenfeld (1992), trouxeram para a educação matemática, mostrando o importante papel que essa perspectiva tem tido no ensino, na aprendizagem e na

¹⁸ As primeiras tentativas de desenvolvimento dessa proposta pedagógica de modelagem têm seus inícios nos anos 90 com o professor Dr. Marcelo de Carvalho Borba. Uma ampla discussão histórica encontra-se em Malheiros (2004).

formação de professores de matemática. Consideram que a solução de problemas tem sido pensada minimamente com três propósitos: como aplicação de conceitos matemáticos, como um conteúdo em si mesmo e como um meio para ensinar matemática. Quando é assumida no contexto do último propósito, ou seja, como meio para ensinar matemática, os outros dois propósitos passam a formar parte do processo. Em outras palavras, ensinar a resolver problemas matemáticos e aplicar conceitos matemáticos termina por serem propósitos pedagógicos no ensino da matemática.

Em ambos os casos, o ponto importante é ensinar a solucionar problemas, o que significa, de acordo com Polya (1945), ensinar uma arte ou uma habilidade que se aprende praticando e em cujo processo o professor tem o papel de guiar (ensinar a heurística) os alunos na busca e aplicação dos conteúdos matemáticos apropriadamente para a resolução do problema proposto. Esta ideia é ressonante com algumas perspectivas de modelagem que têm sido desenvolvidas no contexto da educação matemática que começa com uma situação concreta ou um problema que deve ser resolvido. Problemas geralmente propostos pelo professor ou pelo livro didático, mas poucas vezes pelos mesmos alunos.

Esse aspecto é ressaltado pela PPM de Borba e Villarreal (2005), que consideram importante oferecer uma oportunidade aos alunos, para que possam formular os problemas que desejariam resolver no contexto de temáticas escolhidas segundo seus próprios interesses. Essa perspectiva gera pelo menos duas implicações pedagógicas de particular importância: em primeiro lugar, reconhecer que formular os próprios problemas (sejam matemáticos ou não) é cognitivamente tão importante como aprender a resolvê-los; em segundo lugar, a possibilidade de mudar a relação vertical entre professor e alunos para uma mais horizontal, na qual os papéis possam ser trocados dependendo das circunstâncias contextuais. Como consequência, gera-se um desafio para esquematização e desenvolvimento da estrutura curricular escolar no referente, por exemplo, à área de matemática.

As formas de conceptualização dos objetos de conhecimento nos contextos escolares são normalmente definidas em relação com o currículo em que, além de se prescreverem os papéis que alunos e professores têm em seu desenvolvimento, determinam-se as ações de cada um deles. Brown (2011) considera que as ações dos professores e alunos são muitas vezes projetadas, reconhecidas e avaliadas dependendo da conformidade eles [*professor e alunos*] com essas definições.

Adicionalmente, a maneira como a aprendizagem acontece e a forma como os objetos de conhecimento são construídos e entendidos, dependeram não só das relações entre os sujeitos envolvidos, senão também das condições histórico-culturais das quais esses sujeitos participam.

Os currículos das escolas são tradicionalmente construídos por agências consultivas externas, agências reguladoras do governo, equipes de formadores, Universidades, Faculdades, entre outros, mas geralmente com pouca participação dos professores e nenhuma dos alunos. Uma das responsabilidades sociais das instituições educativas é fazer desse espaço um lugar para a formação da democracia, a participação das comunidades, a colaboração e a formação da autonomia. Para Borba e Villarreal (2005), oferecer aos alunos a chance de escolherem as temáticas e desenvolverem suas próprias pesquisas em sala de aula é uma maneira de tentar mudar a falta de participação deles e alcançar esses propósitos.

Nesse sentido, além de tentar garantir um papel mais ativo dos alunos no desenvolvimento do currículo escolar, outros três aspectos pedagógicos podem ser extrapolados da PPM: em primeiro lugar, propiciaram o desenvolvimento de valores de cidadania aos alunos (aspecto sócio-crítico); em segundo, possibilitar uma aprendizagem significativa e contextualizada (aspecto cognitivo); e em terceiro lugar, de transformar a sala de aula em um espaço para a produção de conhecimento (aspecto epistemológico).

Quando os alunos escolhem os temas de interesse, formulam as situações problemáticas que desejam resolver, fazem uso consciente das tecnologias para achar novas perguntas e respostas, apresentam-nas aos seus companheiros e recebem retornos avançando para novas questões, pode-se dizer que estão andando pelo caminho da produção e da reprodução do conhecimento. Nesse sentido, o intuito com a PPM é que a sala de aula, além de ser um lugar para o ensino e a aprendizagem de conteúdos programáticos, possa ser transformada num espaço para a pesquisa tornando os alunos pesquisadores.

A participação ativa dos alunos no processo de desenvolvimento curricular implica, como dito acima, mudanças nas ações do professor e dos alunos na sala de aula, permitindo que possam ser assumidos mutuamente como atores, bem como o uso das diferentes tecnologias no processo de conceptualização dos objetos de conhecimento. Essa ideia vai ao encontro da perspectiva de Borba e Villarreal

(2005) quando apontam que os seres humanos produzem o conhecimento em uma relação indissolúvel com outros atores humanos e não humanos.

Se o interesse é estudar as formas de raciocínio algébrico no desenvolvimento da proposta pedagógica de modelagem, levando em conta que entre seus pressupostos está em ser um espaço para a produção e a reprodução de conhecimento em contextos escolares, um dos aspectos que deve ser problematizado é como acontecem esses processos, em particular, se fosse conhecimento matemático. Transformando essa ideia em pergunta seria: como acontece a produção e reprodução de conhecimento matemático no contexto da proposta pedagógica de modelagem? É uma pergunta epistemológica e cognitivamente complexa, cujas possíveis respostas, considero, encontram-se enraizadas na forma de como se dá o processo de formação de conceitos nos sujeitos¹⁹.

Quando é pedido aos alunos para escolherem um tema de interesse para ser pesquisado e, a partir daí, construir um projeto que dê conta de pelo menos uma pergunta ou situação problemática no contexto do tema escolhido, constitui-se de fato um problema, um real desafio para o pensamento dos alunos. Mesmo as pessoas tendo interesses, inquietações, questionamentos, somente a interação com o mundo é que as leva a querer aprofundar em algum tema em particular. Nem sempre estão cientes desses interesses e menos ainda criam a necessidade de investigar ou aprofundar em alguma problemática dentro desse tema. Isso significa que nem sempre as pessoas se sentem com a necessidade ou a vontade de querer desenvolver processos sistemáticos de produção e reprodução do conhecimento, vivendo uma relação quase imediata ou espontânea com o mundo. Em parte essa situação deve-se ao fato de que pesquisar não é um processo simples nem imediato e requer preparação, dedicação e mediação pedagógica.

Interpretando Borba e Villarreal (2005), pensar matematicamente não implica somente resolver problemas, também é importante saber escolher temas de interesses individual e social e aprender a formular boas perguntas. Desse modo, no contexto da proposta pedagógica de modelagem, uma vez aceito o convite for parte

¹⁹ A ideia sobre a formação de conceitos matemáticos será discutido no próximo capítulo. Por enquanto, podemos dizer que os conceitos formam-se e desenvolvem-se como consequência da atividade prática dos sujeitos e por isso estão condicionados por permanentes tensões entre elementos contrários: sujeitos e contextos “sociais” (institucionais); conhecimento científico e espontâneo ou cotidiano; generalizações e particularizações, etc.

dos alunos²⁰ e formuladas as perguntas ou situações-problemas no interior dessa temática, o intuito é que sejam abordados não unicamente de forma espontânea, mas também usando e/ou produzindo conceitos sistematizados com a orientação permanente do professor. Isto é, produzindo e reproduzindo conhecimento coletivamente com o propósito de resolver problemas que, pelo modo como foram formulados, tanto alunos como professor estão interessados em solucioná-los.

Constitui-se, assim, um dos propósitos de processos de escolarização, que é o de ajudar intencionalmente no desenvolvimento das funções psicológicas superiores (VYGOTSKY, 1986), enquanto se reproduz por apropriação; isto é, por aprendizagem dos conceitos científicos históricos e socialmente produzidos, mas também pela produção de novos conceitos, como aponta Daniels:

O movimento entre professor e aluno, e entre texto escrito e conversa, é parte do processo pelo qual ferramentas conceituais cada vez mais poderosas são desenvolvidas. Desse modo os conceitos científicos são desenvolvidos por diferentes níveis de diálogo: no espaço social, entre o professor e o aluno; e no conceitual, entre o cotidiano e o científico. O resultado é a produção de redes ou padrões de conexão conceitual. (DANIELS, 2003, p. 73).

Isso, em termos Engestrom (2002), pode ser interpretado como a distância entre as ações dos indivíduos e as formas historicamente novas da atividade “societal”²¹ geradas como solução aos dilemas potencialmente incorporados nas práticas sociais cotidianas, ou seja, pode ser entendida como uma Zona de Desenvolvimento Proximal (ZPD) (VYGOTSKY, 1986). Partindo dessa ideia, considero que a PPM constitui uma ZPD em que o professor cria intencionalmente um espaço para a aprendizagem e a produção coletiva de conhecimento integrado ao currículo²² da disciplina. Como é um espaço criado a partir de um convite²³, o intuito é que as ações práticas dos alunos nesse processo avancem para novas e inesperadas atividades “sociais” relacionadas, por exemplo, com o encontro do

²⁰ Situação que em geral vai acontecer dado seu caráter de tarefa de uma disciplina.

²¹ Para Chaiklin (2001), a diferença entre o social e o “societal” está em que o primeiro refere-se às interações diretas entre indivíduos e o segundo faz referência às ações realizadas em resposta a, ou em relação com, instituições e tradições.

²² Entendendo o currículo não somente como a ementa da disciplina, senão como algo mais complexo e abstrato relacionado com tempos, conteúdos, propósitos, interesses e responsabilidades encomendados para as instituições educativas.

²³ Mesmo sendo um convite, carrega consigo o mecanismo de controle avaliativo com nota próprio da maioria dos processos educacionais nesse nível escolar.

conhecimento espontâneo e científico produzido pelo coletivo de alunos, professor e artefatos culturais.

É aqui que o interesse desta pesquisa está localizado. Pela natureza da PPM de Borba e Villarreal (2005), em que as ações práticas são desenvolvidas pelos sujeitos na produção, do projeto no contexto de uma disciplina de matemática para alunos dos cursos de Biologia e Ecologia da UNESP, *Campus* de Rio Claro, cria-se um espaço com potencialidade para desenvolver práticas de modelagem matemática. Assumindo como eixo central essa proposta, estamos interessados em estudar as inter-relações das ações práticas desenvolvidas por alunos e professor (práticas pedagógicas) enquanto encaram os dois grandes momentos de toda prática de modelagem: formulação e resolução de problemas no contexto de uma temática escolhida por eles mesmos segundo seus próprios interesses. Dado que as ações ali desenvolvidas são intencionalmente dirigidas para a produção e reprodução coletiva de conhecimento, o intuito é que a tendência seja a de produzir conhecimento sistemático, organizado e conceitual, em outras palavras, uma interpelação entre conhecimento científico e espontâneo.

Considerando que os processos de quantificação e de tratamento das formas, ou seja, práticas matemáticas, tornam-se importantes em muitos dos processos de produção e reprodução do conhecimento, em particular, aqueles que emergem dos projetos no contexto da proposta pedagógica de modelagem, queremos estudar essas práticas matemáticas constituídas nesse processo, em particular as relacionadas com o conhecimento algébrico. De acordo com Janvier (1996), estudar esses tipos de práticas implica fundamentalmente entender o campo de significações que os alunos dão às expressões simbólicas usadas. O foco principal da pesquisa está em compreender as características das práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico que eventualmente são constituídas pelos alunos no contexto da proposta pedagógica de modelagem de Borba e Villarreal (2005).

Sintetizo em duas perguntas orientadoras da pesquisa esse interesse: (1) *quais práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico constituem os alunos dos cursos de Biologia e Ecologia quando realizam atividade de modelagem no contexto de uma disciplina de matemática?* (2) *como são constituídas essas práticas?* Consequentemente, com estas perguntas nosso objetivo é *investigar as práticas matemáticas relacionadas ao conhecimento algébrico que alunos dos*

cursos de ciências naturais (Biologia e Ecologia) constituem quando realizam atividade de modelagem no contexto de uma disciplina de matemática.

2.3 Pesquisas desenvolvidas no contexto da Perspectiva Pedagógica da Modelagem –PPM-

Algumas pesquisas já foram desenvolvidas por membros do GPIMEM tendo como contexto a proposta pedagógica de modelagem de Borba e Villarreal. Dentre elas destaco a tese de Araújo (2002), que estudou as discussões que ocorrem em um ambiente de ensino e aprendizagem de cálculo na presença da modelagem matemática e de tecnologias informáticas. Para essa pesquisadora a modelagem matemática significa abordar por meio da matemática problemas não matemáticos da realidade, escolhidos pelos alunos reunidos em grupos de tal forma, que as questões da educação matemática crítica embasem o desenvolvimento do trabalho. A autora adotou uma abordagem de pesquisa qualitativa através de um processo de observação dos alunos durante o desenvolvimento dos projetos de modelagem, focando a atenção na maneira como constituíam processos de negociação de significados e no papel das tecnologias para o estabelecimento desse cenário para a investigação.

De outro lado, em sua pesquisa Malheiros (2004) concentrou seus esforços em investigar como os alunos utilizam conteúdos matemáticos ao desenvolverem seus trabalhos em uma disciplina de Matemática que tinha a Modelagem como estratégia pedagógica, em que, a partir de um tema ou problema de interesse dos alunos, utilizaram conteúdos matemáticos para investigá-lo ou resolvê-lo. Além disso, a pesquisadora estava interessada em saber quais são as contribuições deste fato na discussão e interpretação dos trabalhos. Para dar conta do objetivo, investigou os trabalhos desenvolvidos nos anos entre 1994 e 2004. No estudo, classificado de longitudinal, usou uma abordagem qualitativa de análise documental para analisar as versões preliminares e finais dos trabalhos escritos, além das fitas de vídeo das apresentações orais. Um dos aspectos relevantes destacados por esta pesquisadora foi a maneira como a modelagem pode favorecer a capacidade dos alunos enxergarem utilidade para diferentes conteúdos matemáticos.

Diniz (2007), por seu lado, desenvolveu o projeto com o propósito de responder à pergunta: Como os alunos utilizam as Tecnologias da Informação e Comunicação nos Projetos de Modelagem Matemática? O autor levanta três destaques principais. Em primeiro lugar, os modos de uso dos “sites web” selecionados pelos alunos foram baseados no engajamento e competência crítica deles, quando desenvolviam os projetos. Em segundo lugar, a maneira como as TIC possibilitaram várias simulações até encontrarem um modelo matemático validado por aspectos visual-matemáticos e de outra área do conhecimento. Em terceiro lugar, destacou-se a comunicação que os alunos fizeram através do “e-mail”, o qual, além de possibilitar a discussão e o envio de informações encontradas, condicionou os diferentes momentos da escrita do relatório do Projeto de Modelagem.

No caso de Herminio (2009), seu objetivo foi levantar as dimensões envolvidas no processo de escolha dos temas dos projetos de Modelagem pelos alunos, bem como discuti-las. A autora conclui que, em geral, as principais dimensões achadas podem ser resumidas em quatro categorias. A primeira relaciona-se com o interesse; a segunda é classificada de sócio-crítica; a terceira diz respeito à palavra do professor como influência na escolha do tema; e finalmente a quarta tratou sobre o conhecimento matemático.

Já Soares, pelo interesse de olhar para o uso do “software” no processo de modelagem, optou por alterar um dos elementos princípios da proposta pedagógica, escolhendo por eles o tema a ser trabalhado. Usando a metáfora da cadeia do DNA, entendido como uma hélice que possui uma série de ligações, propôs aos alunos de uma disciplina de Biologia o estudo sistemático da malária enquanto era desenvolvida a ementa da disciplina pelo professor. A proposta consistiu uma abordagem conjunta do professor e pesquisadora: enquanto o professor apresentava e discutia os conceitos matemáticos da ementa, primeira hélice do DNA, a pesquisadora analisava o modelo matemático do fenômeno biológico tentando relacioná-lo com os conteúdos da ementa. Uma das contribuições que a autora apresenta é que, mesmo o modelo da malária sendo altamente complexo para os alunos, por envolver sistemas de equações diferenciais ordinárias²⁴, quando a análise é feita com o uso de algum “software” especializado –ela usou o *Modellus*-

²⁴ Alunos de primeiro ano de ensino superior no qual, em que, geralmente o conteúdo do cálculo tem sido pouco trabalhado.

minimiza-se a complexidade e aponta-se para outras formas de entendimentos além dos analíticos propostos pelas equações.

Desse mosaico de pesquisas que têm sido desenvolvidas destacamos principalmente três elementos. Em primeiro lugar, a diversidade de interesses e abordagens metodológicos. Ainda baseados na mesma proposta de modelagem, confirmamos que é um cenário natural para o desenvolvimento de diferentes interesses relacionados com a produção e reprodução de conhecimento. Em segundo lugar, observamos a forte preocupação dos pesquisadores por entender o papel de diferentes “softwares” e outras tecnologias de informação e comunicação nos processos de modelagem. Isso pode ser apreciado no trabalho de Soares, de Diniz e de Araújo, cujo foco voltou-se explicitamente para o papel das tecnologias computacionais na produção do conhecimento. O terceiro elemento importante a ressaltar é que na proposta pedagógica da modelagem, empreender um processo de modelagem em princípio não significa modelar matematicamente. Modelar pode ser entendido como uma forma de produzir projetos relacionados com temas diversos, enquanto modelar matematicamente implica o uso da matemática para abordar problemas não matemáticos. Por isso, no contexto da modelagem entendida como proposta pedagógica, a modelagem matemática só é uma possibilidade.

Cada um desses aspectos ressaltados contribui direta ou indiretamente com esta pesquisa na medida em que tratam de algum aspecto importante de interesse. Por exemplo, em relação com as características do conhecimento matemático produzido (cálculo I, equações diferenciais), mesmo sem nenhuma delas se referir ao conhecimento algébrico. Do mesmo modo, contribuem em relação aos papéis que as tecnologias computacionais tiveram no processo de produção e reprodução de conhecimento, em particular nas formas de interação com os outros atores: professor e alunos. Além disso, os resultados e metodologias de cada uma dessas pesquisas serão de particular importância, pois me permitem entender questões relacionadas com o contexto e aspectos pontuais sobre como esses pesquisadores vivenciaram o processo.

3 CAPÍTULO II: SOBRE A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO: UM OLHAR HISTÓRICO-CULTURAL

Partindo da hipótese de que o pensamento dos seres humanos é reorganizado em relação com diferentes mídias e, por essa via, com o conhecimento em geral e o matemático em particular, é produzido numa relação recíproca entre humanos e não humanos, Borba (2001, 2009), Borba e Villarreal (2005) e Borba, Da Silva e Gadanidis (2014) discutem possíveis impactos dos computadores (atualmente chamados de tecnologias digitais) na educação matemática, em particular no referente à produção e reprodução de conhecimento. Do mesmo modo, esses autores indicam algumas consequências desses impactos em contextos escolares.

Uma delas está relacionada à tradicional perspectiva de resolução de problemas no contexto de ensino e aprendizagem da matemática. Para esses autores, o conceito de problema deve ser entendido como uma unidade de componentes subjetivos e objetivos que o relativizam de acordo com necessidades, interesses, motivos e condições espaço-temporais individuais e coletivas. Em particular, enfatizam os possíveis papéis que as mídias podem e devem ter no processo de constituição de algum problema.

Pode-se dizer que um problema está composto de uma parte objetiva e outra subjetiva. O componente objetivo pode criar obstáculos dentro da experiência de vida dos sujeitos. No entanto, um obstáculo pode passar despercebido por uma pessoa e provocar interesse substancial em outra; é isso que eu chamo componente subjetivo. Eu acredito que é hora de expandir essa discussão para enfatizar que o problema também depende dos meios disponíveis em um determinado coletivo de seres humanos-com-mídia, (BORBA, 2009, p. 458 tradução nossa).

Esse autor usa o termo composto de seres humanos-com-mídias²⁵ para mostrar que, em geral, as situações problemáticas enfrentadas pelos sujeitos são transformadas de acordo com as diferentes interações entre sujeitos, objetos e mídias. Enfatiza a importância de levar em conta as necessidades e interesse dos sujeitos no momento de constituir e encarar as situações problemáticas, assim como as mídias que são usadas, pois elas têm um papel importante nesse processo. Um dos casos ressaltados pelo autor está relacionado com o uso de tecnologias digitais

²⁵ Sem discriminar o tipo de mídia: uma pedra, um papel, uma caneta, um computador, etc.

e entre elas, a internet em diferentes âmbitos da vida social, em particular, nos contextos educacionais²⁶.

Para estes autores, do mesmo modo como sucedeu em épocas anteriores com a legitimação de outras tecnologias, como o lápis, o papel, a louça, etc., a internet está modificando significativamente as relações das pessoas com o mundo circundante, em particular os interesses acadêmicos de alunos e professores e os modos como cada um deles aborda os diferentes problemas. Algumas das implicações pedagógicas podem ser resumidas em três elementos: em primeiro lugar, na medida em que a Internet seja totalmente permitida em sala de aula, os problemas propostos para os alunos teriam que sofrer alterações. Em segundo lugar, já que as tecnologias computacionais permitiriam formular novas situações problemáticas e, por essa via, novas abordagens para problemas anteriores, mudanças cognitivas nos alunos começaram a ser percebidas. Em terceiro lugar, em disciplinas de matemática, em que tradicionalmente têm sido resolvidos somente problemas matemáticos, poderiam ser abordados outros tipos de problemas de áreas diferentes da mesma matemática.

Em face dessas implicações, esses autores apontam a modelagem, entendida por proposta pedagógica, como um dos caminhos possíveis. Interpretando suas ideias, com a popularização cada vez maior da internet, está sendo pedagogicamente mais visível o fato de que tão importante como aprender a resolver problemas é saber como formulá-los.

Uma maneira de pensar sobre possíveis problemas matemáticos em uma sala de aula onde os alunos estão autorizados a utilizar Internet é transformar a elaboração de um problema em um problema em si mesmo. (BORBA, 2009, p. 458 tradução nossa)

No entanto, não se trata unicamente de professores e alunos formulando problemas com o propósito de criar um espaço para a experimentação de métodos internos e institucionalizados de resolução de problemas e demonstrações matemáticas. É preciso entender que formular e resolver problemas são atividades

²⁶ Os argumentos dos autores não mudam ao se referirem a outras mídias, mas, pelas características das tecnologias digitais, em particular da internet como uma das mais importantes dessa categoria já desde finais do século XX, muitos dos interesses das pesquisas atuais do grupo GPIMEM focam-se nas mudanças cognitivas que essas tecnologias estão produzindo nos sujeitos. No site <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>, acha-se uma ampla produção acadêmica desse grupo de pesquisa.

importantes em todos os campos de conhecimento, não unicamente como atividade interna da matemática.

A formulação de problemas é considerada uma característica central da atividade matemática, mas não é uma atividade unicamente dos matemáticos [...] como educadores matemáticos, consideramos que essa experiência deve ir além. É preciso convidar os alunos a escolher temáticas do próprio interesse e estas podem ultrapassar as fronteiras da matemática ingressando em outras realidades (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 43 tradução nossa).

O intuito da proposta de modelagem é tentar fazer da sala de aula um espaço mais flexível em convergência com as possibilidades de interações e processamento de informação oferecido por diferentes tipos de “software” e a internet. Uma maneira de fazer isso é convidar os alunos para que em pequenos grupos escolham temas de interesse próprio e desenvolvam projetos sob a orientação do professor, permitindo que “experimentem parte do que é vivenciado por um pesquisador *no processo de produção de conhecimento*” (BORBA, 2009, p. 458 tradução nossa, grifos meus). Desse modo, a proposta de modelagem é desenvolvida sob a metodologia de projetos; isto é, projetos de modelagem.

Os principais propósitos pedagógicos dessa proposta podem ser resumidos em três: em primeiro lugar, um propósito *sócio-crítico* relacionado com a formação para a cidadania.

Nós acreditamos que essa atividade [referindo-se à modelagem] é um direito dos alunos se nosso objetivo é propiciar a formação de valores cidadãos, como a autonomia, a participação, a colaboração e a democracia (BORBA, VILLARREAL, 2005, p. 45, tradução nossa)

Em segundo lugar, propósitos *cognitivos*, relacionados com a aprendizagem de conceitos, que não necessariamente formariam parte das ementas das disciplinas. Os conceitos suscetíveis de serem aprendidos são tão variados quanto as temáticas escolhidas pelos alunos (oportunidade para a interdisciplinaridade). Nesse sentido, uma das aprendizagens mais importantes está relacionada com possíveis usos da matemática em contextos diferenciados. Um desafio para as propostas curriculares institucionais vigentes.

Na proposta pedagógica de modelagem, os alunos têm que tratar com conhecimentos matemáticos não só desenvolvidos por matemáticos, mas também por físicos, químicos, engenheiros e de

qualquer outra comunidade com que eles precisarem tratar, (BORBA, VILLARREAL, 2005, p. 47, tradução nossa).

Em terceiro lugar, com propósitos *epistêmicos*, relacionados com a produção de conhecimento, em particular de conhecimento matemático:

a modelagem, entendida como proposta pedagógica, é transformada em diferentes coletivos de seres humanos-com-mídias que produzem conhecimento na sala de aula, (BORBA, VILLARREAL, 2005, p. 101, tradução nossa)

Estudar as práticas matemáticas no contexto dessa proposta pedagógica implica entender que tal contexto, com as características apontadas, deve ser assumido como uma estratégia pedagógica no interior de um contexto maior de sala de aula. Isto é, as práticas ali desenvolvidas estão condicionadas pelas características da disciplina e pelos propósitos de acordo com o nível educativo. Em outras palavras, os propósitos pedagógicos projetados pelo desenvolvimento do projeto de modelagem (sócio-críticos, cognitivos e epistemológicos) moldam-se de acordo com as características institucionais da sala de aula.

Segundo as ideias de Chaiklin e Lave (2001, p. 17, tradução nossa), “as pessoas que atuam segundo práticas cotidianas não podem ser separadas do mundo social em que atuam”. Nesse sentido, se consideramos por contexto o mundo cultural que constitui as relações dos sujeitos atuantes e os artefatos que utilizam, como também suas necessidades e intencionalidades, então o conhecimento produzido, a aprendizagem e a formação da consciência dependem das condições contextuais nas quais as pessoas estão envolvidas e atuam. Isso cria um dilema entre o individual e o social: para pesquisar as práticas dos indivíduos, é preciso focar a atenção nas atividades que desenvolvem, entretanto toda atividade humana é, por natureza, social. Uma alternativa para encarar esse dilema é tratar as relações entre os indivíduos, os contextos sociais, as atividades e as situações problemáticas a serem resolvidas a partir do conceito de prática, sendo esta uma entidade abrangente, que indica ações orientadas à transformação e/ou produção de objetos que permitem satisfazer as necessidades biológicas e culturais dos sujeitos (CHAIKLIN, 2011; CHAIKLIN; LAVE, 2001).

Para estudar as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico no contexto da proposta pedagógica da modelagem, neste capítulo nos ateremos a duas tarefas. A primeira consiste em caracterizar o contexto geral em que as práticas de modelagem são desenvolvidas. Para isso partiremos do conceito de atividade, passando logo ao conceito de prática em geral e de prática pedagógica em particular. Baseados na noção de prática pedagógica, caracterizaremos o contexto institucional da proposta pedagógica da modelagem como uma tarefa que depende das atividades de ensino e aprendizagem. A segunda tarefa será apresentar o que estamos entendendo pelos processos de produção de conhecimento. Retomando o conceito de prática, consideraremos que, em termos gerais, produzir e reproduzir conhecimento implica criar modelos entendidos como “protótipos de ação voltada para o futuro” (WARTOFSKY, 1979). Desse modo, entenderemos que, no contexto da proposta pedagógica de modelagem, criar modelos não significa necessariamente produzir modelos matemáticos. Neste caso as ações estão orientadas para produção de projetos, com o intuito de que eventualmente parte de seu desenvolvimento implique constituir práticas de modelagem matemática. Já no próximo capítulo, encararemos a tarefa de caracterizar os aspectos que permitem entender as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico.

3.1 A PPM: um contexto para produção de conhecimento matemático.

3.1.1 Sobre o conceito de Atividade

De acordo com a quarta edição do dicionário de filosofia de Nicola Abbagnano (2000), o termo atividade é empregado, de um lado, para indicar um complexo mais ou menos homogêneo de ações voluntárias e, de outro, para indicar o modo de ser daquilo que age ou tem a possibilidade de atuar deixando de ser simplesmente receptivo ou passivo. É um termo que nos remete a algo que age, interage, reage e se transforma. Desse modo, falar de atividade implica pensar na existência de pelo menos dois elementos: um algo que atua (sujeito agente da ação) e um algo que reage e se transforma (objeto da ação). Para Vázquez (2007, p. 219), o conceito

atividade deve ser entendido, em geral, como “o ato ou conjunto de atos em virtude dos quais um sujeito ativo modifica uma matéria-prima dada”.

Pela generalidade dessa caracterização, não é especificado o tipo de sujeito ativo: pode ser físico, biológico, humano, cultural; nem a natureza da matéria-prima sobre a qual o sujeito atua: corpo físico, ser vivo, vivência psíquica, grupo ou instituição social. Do mesmo modo não é determinada a espécie de atos (físicos, psíquicos, sociais), nem mencionado quais são os resultados em termos do produto da atividade: pode ser uma nova partícula, um conceito, um instrumento, uma obra artística ou novo sistema social. Isso indica que, para caracterizar uma atividade, não basta só identificar os seus sujeitos e os objetos, também é necessário saber o que se espera obter com o processo²⁷. Isto é, qual é o fim que orienta a atividade.

É preciso que os atos singulares se articulem e se estruturem como elementos de um processo total, que desemboque na modificação de uma matéria-prima. A partir dessa perspectiva, pode-se falar, por exemplo, da atividade de um pássaro na fabricação de um ninho (neste caso o sujeito seria o pássaro; o objeto os elementos materiais necessários para construção do ninho; e o produto final, o ninho). Contudo, também podemos falar da atividade do Congresso Nacional na modificação de uma lei, da atividade de um conjunto de engenheiros e arquitetos na construção de um prédio ou da atividade investigativa de um pesquisador. Dependendo do tipo de sujeito, objeto e produto, caracterizam-se diferentes tipos de atividades, assim como os artefatos utilizados.

Somente focando a atenção nas particularidades dos seres humanos com respeito a outros agentes, já é possível apreciar a grande variedade de atividades. “A categoria atividade humana é a abstração teórica de toda a prática humana universal que tem um caráter histórico e social.” (DAVIDOV, 1988, p. 27, tradução nossa). Essa variedade de atividades está ligada fundamentalmente ao conjunto de necessidades das pessoas, que, superando o imediato, são, em geral, necessidades culturais (criadas pelas inter-relações dos mesmos seres humanos). Assim, localizá-las no contexto das atividades humanas, tentar diferenciar umas das outras implica fundamentalmente identificar os respectivos objetos, que, segundo Leontiev (1978), são os verdadeiros motivos que impulsionam o desenvolvimento de quaisquer delas.

²⁷Não faz sentido falar de uma atividade sem sujeito e sem objeto. Em alguns casos o objeto não é facilmente reconhecível, entre outras coisas; por seu caráter mutável no tempo. Segundo Leontiev (1978, 1979), não existe atividade sem objeto/motivo, a atividade que parece imotivada não carece realmente de objeto/motivo, mas possui um objeto oculto.

Aqui o objeto não se compreende como algo existente por si mesmo e atuante sobre o sujeito, mas como aquilo ao que está direcionado o ato, ou seja, como algo com o que o ser humano se relaciona, como o objeto de sua atividade, seja esta interna ou externa. (DAVIDOV, 1988, p. 28, tradução nossa)

As atividades humanas desenvolvem-se através de ações dos sujeitos, as mesmas que estão condicionadas ao resultado que deve ser alcançado. As ações estão orientadas para algum *fim*. Como apresentados por Leontiev, “de modo análogo em que o conceito de objeto ou motivo relaciona-se com a atividade em geral, os fins relacionam-se com as ações” (LEONTIEV, 1979, p. 21, tradução nossa). De acordo com a perspectiva desse autor, os seres humanos desenvolvem atividades para satisfazer suas próprias necessidades. O componente principal de cada uma dessas atividades é o objeto, que o motiva a realizar um conjunto de ações, orientadas para um determinado fim e que se traduz em algum produto. Vázquez diz:

A produção relaciona-se, em primeiro lugar, com as necessidades. As pessoas têm necessidades e, justamente por isso, produzem para satisfazê-las. Nas pessoas, a relação produção e necessidades é mediada, já que só satisfazem as necessidades na medida em que esta perdeu seu caráter físico, imediato. Para que as pessoas satisfaçam propriamente suas necessidades, têm de libertar-se delas superando-as, isto é, fazendo com que percam seu caráter meramente natural, instintivo e se tornem especificamente humanas. Isso quer dizer que as necessidades propriamente humanas têm de ser inventadas ou criadas. As pessoas, portanto, não têm apenas necessidades, mas são seres que inventam ou criam suas próprias necessidades. Assim a produção é criação de um mundo objetivo. (VÁZQUEZ, 2007, p. 127)

Desse modo, frutos do processo de produção, os sujeitos criam novas necessidades, novos objetos e por sua vez novas atividades, constituindo um complexo e interminável sistema de atividades que interagem, se contrapõem e se renovam constantemente. Em outras palavras, os sujeitos criam e renovam permanentemente suas próprias realidades.

3.1.2 A relação sujeito e objeto na atividade humana.

Para Leontiev (1978, p. 67, tradução nossa), toda atividade deve ser pensada como "uma unidade molecular, não aditiva da vida material dos sujeitos, sujeitos corpóreos". No nível psicológico, é a unidade de vida mediada pela reflexão mental, cuja função real é orientar o sujeito no mundo dos objetos. Mundo que se constitui histórica e culturalmente. A Atividade, portanto, é considerada como um sistema com sua própria estrutura, suas próprias transformações internas e seu próprio desenvolvimento.

As raízes dessa perspectiva encontram-se nos princípios filosóficos de Marx e Engels²⁸, que introduziram o conceito de atividade como principal aspecto que diferencia os seres humanos de outras formas de vida e, por essa via, o consideraram como um conceito que permite superar a clássica separação entre objeto e sujeito do conhecimento. Para esses autores, além das condições biológicas, a linha que divide os humanos e os outros seres é a atividade coletiva de produção, por exemplo, a produção de alimentos e outros materiais, como ferramentas importantes para satisfazer as necessidades humanas e garantir a vida. Segundo Leontiev (1978), antes do materialismo dialético proposto por Marx, os objetos da realidade material concebiam-se como objetos de contemplação e não como objetos produzidos pela própria atividade humana. Assim, por meio da atividade, os seres humanos não só produzem objetos, mas também criam relações sociais entre os diferentes sujeitos, constituindo-se como sujeitos.

Os seres humanos só se manifestam como tais na medida em que objetivam suas forças essenciais, genéricas, mas essa objetivação (práxis materiais, trabalho humano, *transformação da matéria*) só é possível quando entra em relação com outros seres humanos, ou seja, mediante a atuação conjunta das pessoas, (VÁZQUEZ, 2007, p. 125, tradução nossa, grifos nossos).

Desse modo, os sujeitos e os objetos da atividade humana são elementos que se opõem e se produzem mutuamente, constituindo uma unidade indissolúvel na qual um sem o outro seria materialidade inerte. Sujeitos objetivados pela produção de objetos (transformando a natureza) mediada por outros objetos.

²⁸ Uma ampla discussão sobre essa afirmação acha-se em Vázquez (2007), Prado Junior (1980), Lefebvre (1970), Ilienkov (1977) entre outros.

Enquanto os sujeitos transformam a natureza, transformam sua própria natureza, realizam-se, se objetivam. E objetos humanizados pela mesma produção fazem com que a natureza perca seu estado de pura natureza em si, para converter-se em natureza humanizada. Nesse sentido, entende-se que, em geral, a realidade humana é aquela produzida pela própria atividade, uma realidade humanizada pela ação produtiva da mesma humanidade.

3.1.3 O caráter ideal e material dos objetos da atividade humana

Através das atividades, as pessoas colocam-se em contato com os objetos do mundo circundante, experimentam sua resistência e atuam sobre eles para finalmente se subordinar a eles. A atividade é um processo em cujo desenvolvimento vão surgindo tarefas cognoscitivas, desenvolvendo-se a percepção, a consciência e o pensamento dos sujeitos. De acordo com Leontiev (1979), o sistema de atividades desenvolvidas pelos seres humanos determinam as condições de sua própria consciência.

A consciência humana determina-se por seu caráter de ser social, o que não é outra coisa senão o processo real da vida. E a vida humana não é outra coisa mais que o sistema de atividades que se substituem umas às outras. É nas atividades que têm lugar o trânsito do objeto para o sujeito e ao mesmo tempo, realiza-se o trânsito da atividade subjetiva para seus resultados objetivos, seus produtos. Por essa via, a atividade aparece como o processo em que têm lugar as transformações mútuas entre os polos “sujeito-objeto” (LEONTIEV, 1979, p. 11, tradução nossa)

Como mencionado, em quaisquer condições e formas em que transcorra a atividade humana individual, sem importar a estrutura que adote, não é possível considerá-la abstraída das distintas relações da vida social. A atividade aparece como um sistema inserido no sistema de relações sociais. Desse modo, a atividade das pessoas transcorre nas condições de uma coletividade e interage com a multiplicidade de objetos do mundo. Além de permitir compreender as formas de desenvolvimento psicológico (a consciência) desses sujeitos, explica as diferentes formas de conhecimento que se constituem em relações com os objetos também produzidos por eles.

Assim, toda atividade deve ter pelo menos um objeto. Todavia o caráter objetivo intencional da atividade propriamente humana gera uma diferença em relação à atividade de outros agentes. Para Leontiev (1979, p. 12), “o objeto da atividade humana aparece sob dois aspectos: em seu caráter independente, e como imagem psíquica”. Assim, o desenvolvimento do conteúdo objetivo da atividade encontra sua expressão no desenvolvimento do reflexo psíquico (consciência) que a regula no mundo dos objetos. Em outras palavras:

A atividade dita humana apenas se verifica quando os atos dirigidos a um objeto para transformá-lo se iniciam com um resultado ideal, ou fim, e terminam com um resultado ou produto efetivo, real. Nesse caso, os atos não só são determinados causalmente por um estado anterior que se verificou efetivamente-determinação do passado pelo presente-, como também algo que ainda não tem uma existência efetiva e que, no entanto, determina e regula os diferentes atos antes de desembocar em um resultado real; ou seja, a determinação não vem do passado, mas sim do futuro. (VÁZQUEZ, 2007, p. 220)

Leontiev (1978), dando continuidade aos trabalhos de Vygotsky, formula que pela atividade é possível perceber a natureza “societal” dos seres humanos. A forma em que sujeitos, objetos e mundo social estão conectados são reproduzidas e mudadas mutuamente, por isso é um processo carregado de contradições internas, diferenciações e transformações. Uma dessas contradições cria-se na condição ideal e na material do objeto da atividade, isto é, no estado antecipado e idealizado que o sujeito cria do objeto e no estado final obtido: o produto²⁹. Desse modo a antecipação ideal do produto direciona as ações concretas do sujeito para o fim projetado. Em virtude da antecipação do resultado a atividade propriamente humana tem um caráter consciente, ou seja, a projeção ideal do fim faz com que o sujeito adote certa posição diante da atividade e das condições materiais do mundo. Isso não significa que o produto realmente obtido termine sendo uma cópia idêntica do estado ideal antecipada, mas trata-se de uma tentativa de adequação intencional do segundo para o primeiro.

Portanto, na atividade humana, como interpretado por Roth e Radford (2011), há uma unidade não reduzível dos processos externos materiais e internos ideais dos sujeitos. Enquanto é desenvolvida uma atividade, os mundos internos e

²⁹ Esse seria uma mudança interna, que contraditória na medida em que permite identificar o estado ideal e o material do objeto que realmente se opõem.

externos dos sujeitos estão intimamente conectados, contudo, não irredutíveis. Assim, a produção de ideias e representações, entendida como atividade ideal, está intimamente ligada à produção e transformação material da natureza, entendida como atividade material. Os tipos de atividades são diferentes, apesar de terem uma construção comum: a atividade.

3.1.4 Sobre a atividade teórica e a prática dos seres humanos

A capacidade de antecipar e projetar idealmente as ações concretas para produzir um determinado fim é o que caracteriza qualquer atividade humana (Leontiev, 1978). Isso quer dizer que as ações humanas exigem certa consciência de um fim ao qual se condiciona o curso de suas ações. Desse modo, a atividade humana não é somente ação material externa, nem apenas interna da consciência. Com isso, pode-se dizer que a atividade humana é uma confluência de dois tipos de atividades opostas que se identificam: 1- atividade interna (ideal); 2- atividade externa (material). A primeira associa-se à consciência e a segunda, à transformação material da natureza objetiva, externa ao sujeito.

A atividade própria do homem não pode reduzir-se à sua mera expressão exterior, e que dela forma parte essencialmente a atividade da consciência. Essa atividade se desdobra como produção de fins que prefiguram idealmente o resultado real que se quer obter, mas manifesta, também, como produção de conhecimento, isto é na forma de conceitos hipóteses, teorias ou leis mediante as quais os sujeitos conhecem a realidade. (VÁZQUEZ, 2007, p. 223)

Como explica esse autor, pela atividade ideal da consciência, as pessoas não só se encontram unicamente em uma relação de exterioridade com seus diferentes atos e seu produto, mas também com uma relação de interioridade que lhes permite referirem-se a uma realidade passada e a uma presente que pretendem conhecer (atividade cognoscitiva) e a uma realidade futura, portanto inexistente, que pretendem produzir (atividade teleológica). A diferença entre a atividade cognoscitiva e a teleológica é que, enquanto a primeira não implica necessariamente uma ação efetiva, a segunda exige a realização, em virtude da qual se tende a fazer do fim uma causa da ação real. Desse modo, a atividade cognoscitiva por si só não leva à ação, para isso precisa da mediação da atividade teleológica (fim idealizado), na

medida em que o fim pode ser entendido como a expressão de uma necessidade, que só se satisfaz ao atingir-se o resultado que tem sido antecipado por meio das ações concretas.

Entretanto, a atividade da consciência em si tem um caráter fundamentalmente teórico, pois por ela mesma não conduz a uma transformação da realidade material, objetiva, natural e social. Devido a isso, as ações da consciência (teleológica e cognoscitiva), mesmo constituindo um tipo de atividade (atividade teórica), precisam da atividade prática (a práxis) como meio para a efetivação da transformação objetiva material da natureza. Desse modo, pode-se dizer que os objetos da *atividade teórica* são psíquicos, só tem existência subjetiva: conceitos, teorias, representações, hipóteses que têm uma existência ideal. A finalidade desse tipo de atividade é a transformação ideal desses objetos ideais, para obter como produto novas ideias, conjecturas, teorias que expliquem e/ou descrevam uma realidade possível passada e futura. Contudo, é uma atividade indispensável para transformar a realidade material na medida em que guia as ações na produção de objetos.

O que caracteriza a *atividade prática*, daqui para frente simplesmente *prática* ou *práxis*, é seu caráter real e objetivo sobre o qual o sujeito executa suas ações, os meios ou instrumentos com que se exerce a ação e seu resultado ou produto final obtido. Na prática os sujeitos agem sobre objetos materiais, que existem independentemente de sua consciência e a partir de sua própria corporeidade estendida por outros objetos (instrumentos), e os transformam para satisfazer suas necessidades e interesses. O produto final é outro objeto independente do processo pelo qual foi produzido.

Vistas assim, as atividades teóricas e práticas podem ser entendidas como opostas e de certa forma negando-se mutuamente, situação que tem sido apreciada em diferentes épocas da história³⁰. Todavia, por outro lado, é pertinente dizer que teoria e prática se constituem à medida que os produtos da consciência têm que se materializar, para que a transformação ideal penetre na transformação dos fatos reais materiais. Essa transformação só acontecerá enquanto a realidade material for idealizada, projetada, conhecida, isto é, pensada. Esta última posição é de quem,

³⁰ Um dos casos mais significativos e influentes dessa mútua negação acha-se na filosofia grega clássica. De um lado, está a corrente da ideologia especulativa, que torna a teoria onipotente em relação com a realidade, e de outro, o materialismo ingênuo do pragmatismo utilitário, próximo do senso comum, (PRADO JUNIOR, 1980).

como já tem sido apontado, considera que a ação material, objetiva, transformadora, a interesses sociais historicamente constituídos. Não só produção de uma realidade material, mas também criação e desenvolvimento incessantes de subjetividade. Dessa perspectiva, Vázquez aponta:

O problema das relações entre teoria e a prática - e portanto, o de sua autonomia e dependência mútuas- pode ser formulada em dois planos: a) em um plano histórico-social como formas peculiares de comportamento do homem, enquanto ser histórico-social, com respeito à natureza e à sociedade; b) em determinadas atividades práticas (produzir um objeto útil, criar uma obra de arte, transformar o Estado ou instaurar novas relações sociais) (VÁZQUEZ, 2007, p. 243)

Em ambos os casos, teoria e prática têm que ser entendidas como atividades diferentes, constituindo, entretanto, uma unidade indissolúvel. De um lado, práticas enriquecidas e concretadas a partir de perspectivas teóricas fazendo-lhes perder seu caráter de *prática ingênua*. De outro, constructos teóricos, cujos fundamentos e critérios de verdade só poderiam ser achados na prática, fazendo-lhe perder seu caráter de *teoria especulativa*. No entanto, a prática será o horizonte de desenvolvimento da teoria, na medida em que o conhecimento científico (teoria) experimenta avanços de acordo com os processos de transformação do mundo natural, pela produção material de objetos e instrumentos (prática).

3.1.5 Sobre a noção de prática.

Apelando para as ideias de alguns autores, como Bourdieu (2007); Chaiklin (2011); Chaiklin e Lave (2001); Vázquez (2007); chamaremos de prática, ou melhor, por sistema de práticas, o conjunto de ações organizadas e orientadas para produzir um “algo” particular que denominaremos “produto”, com o propósito de satisfazer alguma necessidade ou reproduzir alguma condição de vida. Desse modo toda prática responderá às condições objetivadas “societalmente” que orientam, limitam e permitem as diferentes formas de ações dos indivíduos: um fazer de indivíduos que atuam no mundo social. Assim, todo sistema de práticas sempre constituirá um dilema: mesmo sendo desenvolvidas por indivíduos, não podem ser entendidas fora

dos espaços sociais institucionalizados, os espaços sociais, em que são desenvolvidas. Desse modo, as práticas não são simples imitações ou repetições mecânicas de tradições sociais, são também formas subjetivas do indivíduo que atua em um aqui (espacial) e em um agora (temporal), expondo suas crenças, imaginários, sensibilidades e percepções.

Por isso, a partir da perspectiva teórica histórico-cultural do conhecimento e do desenvolvimento humano, pode-se dizer que é na variedade de conflitos entre as condições sociais e individuais que são constituídas as formas de ação, da consciência, do pensamento e do conhecimento dos seres humanos. As condições sociais limitam e impõem formas de ação aos indivíduos, enquanto estes criam espaços de resistência e reação desenvolvendo níveis de consciência: sensibilidade, percepção e entendimento (DAVIDOV, 1988). “Para que se desenvolvam novas formas de pensamento e de conhecimento, precisa-se de mudanças nos sistemas de práticas das pessoas” (CHAIKLIN, 2001, p. 425, tradução nossa). Nesse sentido, as práticas são um ponto de convergência, entretanto, também de divergências de variadas tensões e contradições entre aspectos opostos tradicionalmente discutidos nas teorias do conhecimento e do pensamento. Alguns deles são: o sujeito e o objeto, o particular e o geral, o material e o ideal, o indivíduo e o coletivo, o abstrato e o concreto, o conhecimento e a ignorância.

Uma forma de entender essa condição contrária da prática é considerando que as práticas incluem uma complexidade interna com tendências opostas que conformam sua identidade. Isso significa que, na perspectiva materialista histórico-cultural, as práticas são o seu objeto de pesquisa (CHAIKLIN, 2011) e devem ser assumidas como unidades dialéticas de contrários. De acordo com essa perspectiva teórica da qual faz parte a teoria da atividade inaugurada por Leontiev (1978, 1979) e Luria (1976) e continuada por Engeström (1987, 1999) sob a influência dos trabalhos de Vygotsky (1986), em que através da tentativa de superar as tensões geradas pela luta dos contrários, identificados nas práticas humanas, cria-se um movimento que leva ao desenvolvimento de novas realidades subjetivas e objetivas.

3.1.6 *Sobre o papel dos artefatos nas práticas.*

Como já apontado, o conceito de atividade humana é assumido como uma das principais categorias sociais e psicológicas, introduzida pela tradição filosófica Marxista-Engeliana e pela psicologia russa (VYGOTSKY, LEONTIEV, LURIA, DAVIDOV, entre outros), para a análise, compreensão e intervenção de processos sociais e de desenvolvimento da consciência humana, (CHAIKLIN; LAVE, 2001; DAVIDOV, 1988; ENGESTRÖM, 1999; LEONTIEV, 1978; RADFORD; ROTH, 2011; VYGOTSKY, 1986).

Para Leontiev (1979), sujeitos, objetos, ações e operações são os componentes principais de qualquer atividade. Porém para analisar uma atividade em particular, mais que estudar cada elemento em separado, é preciso reconhecer as relações internas e seus vínculos sistemáticos que a caracterizam. Um elemento-chave dessa perspectiva teórica é que as relações entre os diferentes componentes da atividade não diretas, mas sim mediadas. Isso quer dizer que as ações e operações realizadas pelos sujeitos no contexto de uma atividade, com o propósito de transformar e/ou produzir um determinado objeto, precisam da mediação de algum tipo de instrumento.

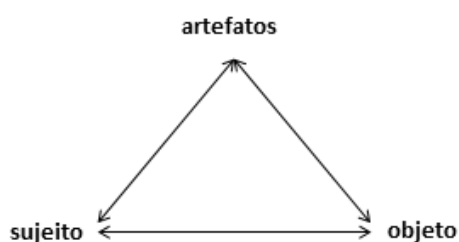
Cole (1999) sintetiza graficamente o conceito geral de mediação proposto por Vygotsky e demais psicólogos russos com um triângulo, cujos vértices representam os três elementos visíveis da atividade: sujeito, objeto e artefatos e em cujas ligações estariam as ações e as operações. Para esse autor, a relação de sujeitos e objetos pode ser dada de maneira imediata (natural) ou mediata (cultural). De acordo com Vygotsky, essa relação é fundamentalmente mediada através de dois tipos de instrumentos: materiais (ferramentas) e/ou simbólicos (sistemas de signos). As simbólicas são denominadas de instrumentos psicológicos (VYGOTSKY, 1986). De acordo com Daniels (2003), Vygotsky descreveu os instrumentos psicológicos (linguagem, sistemas simbólicos matemáticos, obras de arte, esquemas, mapas, desenhos e todos os tipos de sinais convencionais) como dispositivos para dominar processos mentais e as ferramentas como instrumentos para modificar os objetos materiais.

Quando Cole (1999) considera que tanto as ferramentas materiais como as psicológicas são um produto da atividade histórica e cultural humana, cria a categoria de artefato, reunindo em um só termo tudo aquilo impregnado de

significado e valor que existe e atua como mediador no campo das atividades humanas. Dessa forma, com o termo artefato é possível ampliar a ideia de ferramentas materiais e psicológicas para uma mediação também dos seres humanos. De acordo com Cole (1999), o desenvolvimento do trabalho de Vygostky revelou diferentes graus de ênfase nos três tipos de meios mediacionais: matérias, psicológicas e outros seres humanos³¹.

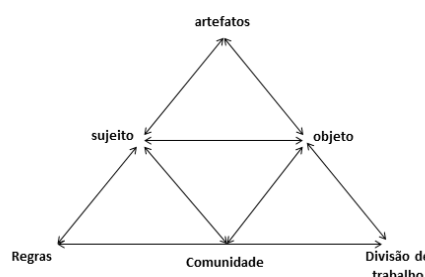
Para Engeström (1999), o esquema triangular é uma simplificação da ação mediada apresentada por Vygostky, que não mostra claramente a distinção entre atividade em geral coletiva e ação individual. Segundo Engeström, Leontiev não explicitou como o modelo triangular da ação mediada deveria ser desenvolvido ou expandido para descrever a estrutura de sistemas de atividades coletivas³². O problema, diz Engeström (1999), é que esse esquema não explica completamente a natureza “societal” e colaborativa das ações, isto é, a mediação das comunidades, que por sua vez está mediada pelas regras e divisão de trabalho. Nesse sentido, propõe expandir o modelo para um triângulo maior, adicionando esses três componentes que enfatizam e fazem explícito o caráter coletivo e colaborativo da atividade, sendo possível fazer visível o conjunto de tensões entre os diferentes componentes. Desse modo, Engeström (1987, 1999) cria o termo Sistema de Atividades, em vez de simplesmente Atividade, para se referir ao conjunto de atividades desenvolvidas nos coletivos institucionais.

Figura 1: Representação básica de mediação



Fonte: (COLE, 1999)

Figura 2: Estrutura de um sistema de atividade



Fonte: (ENGESTRÖM, 1987)

³¹ Isso significa que os seres humanos podem ser pensados como mediadores do mesmo modo como são outros artefatos. Como será apresentado mais à frente, no caso das práticas pedagógicas materializadas nas atividades de ensino e aprendizagem, professores e alunos mudam constantemente seu caráter de sujeito, objeto e meio.

³² Engeström (1999) reconhece o caráter coletivo da ação mediada formulada por Leontiev, mas considera que, para casos como o estudo de organizações ou instituições particulares, é importante fazer explícito esse caráter.

Na parte superior do esquema, aparece a relação básica da ação mediada do sujeito-meio-objeto, por meio da qual o sujeito transforma o objeto imediato atuando sobre ele com o auxílio de algum artefato³³. Mas essa ação, segundo Engeström (1987, 1999), só é possível em relação à mediação das comunidades que compartilham o mesmo objeto. As regras referem-se às normas e convenções explícitas que condicionam as ações e a divisão de trabalho, e dizem respeito à forma como as ações orientadas para um fim são repartidas entre a comunidade de acordo com o objeto em comum. Os nós e as setas que chegam a eles indicam que o modelo é sistemático.

3.1.7 *Sobre o conhecimento entendido como horizontes de possibilidades*

Através dos elementos até aqui apresentados, relacionados com o conceito geral de atividade humana (caraterizada pelas complexas inter-relações entre ações teóricas e práticas mediadas por artefatos culturais), discutiremos alguns elementos que dizem respeito ao conhecimento e à forma como é produzido. Em termos gerais, conhecimento pode ser entendido como formas de codificação de ações e reflexões constituídas histórica e culturalmente (RADFORD, 2013). As interações entre sujeitos e objetos são as que permitem entender as formas de consciência dos sujeitos na produção do conhecimento.

Os sujeitos interagem e atuam sobre os objetos, explorando-os e testando-os. Eles resistem ou cedem às ações. Os sujeitos não só aprendem a conhecê-los, como também a transformá-los. Essa perspectiva faz da atividade prática humana, transformadora da natureza, a fonte fundamental do conhecimento, “que põe de manifesto o papel decisivo da experiência prática histórico-social das pessoas” (KURSANOV, 1966, p. 9, tradução nossa). O foco da atenção são as ações das pessoas no curso de sua existência e que, em função delas, fazem do universo o objeto de seu pensamento, confundindo-se com ele na qualidade de *sujeito*, tornando com isso a realidade do *objeto* sua própria realidade pensada, que termina sendo o conhecimento.

³³ A relação imediata ou natural entre o sujeito e o objeto é substituída pela relação mediata ou cultural. Em palavras de Cole (1999, p. 116, tradução nossa), “a incorporação das ferramentas à atividade cria uma nova relação estrutural (mediada) e natural (não mediada) operam sinergicamente”

O processo de produção de conhecimento é ocasionado pela coordenação da experiência sensível com as respectivas representações mentais (reflexos) dos objetos, com que os sujeitos entram em contato. A mais simples dessas experiências é aquela que se desenvolve numa relação direta (imediate) dos sentidos com os objetos e que, pela simplicidade, gera um nível básico de consciência e de generalidade, no entanto, os conceitos surgem das abstrações mediadas pelas práticas humanas transformadoras de onde surgem os conceitos.

O conhecimento sob a forma de conceitos abstratos, expressados mediante diversas formas simbólicas surgem e se desenvolvem no processo de atividades prática social e laboral dos seres humanos. (KURSANOV, 1966, p. 14, tradução nossa)

A produção de conceitos está mediada por formas simbólicas (principalmente a linguagem) e por processos de experimentação incessante, que implicam a elaboração e abrangência cada vez maior de dados. Esse processo conduz a um afastamento progressivo da relação direta com a experiência sensível para níveis de maior abstração, levando à elaboração dos *conceitos*. Visto assim, “cada conceito é a expressão generalizada e concreta do desenvolvimento de alguma prática humana em relação com o conhecimento precedente” (KURSANOV, 1966, p. 62, tradução nossa), pois por definição são representações mentais com caráter abstrato³⁴ que permite o conhecimento objetivo da natureza, que se vai acumulando historicamente nos novos objetos e artefatos culturais produzidos (materiais e simbólicos, a linguagem em primeiro lugar). Por isso o conhecimento é inesgotável e pode ser assumido como horizonte de possibilidade, que exprime idealmente as estruturas internas dos fenômenos do mundo natural e cultural (material).

Constituído o processo de conceituação pela coordenação das experiências sensíveis e as representações mentais mediante os artefatos culturais, outro processo se faz importante na produção de conhecimento, o qual transforma os conceitos em representações sensíveis. Trata-se de um processo inverso à coordenação que Prado Junior (1980) denomina de explicitação e que implica decompor a cadeia de entrelaçamentos conceituais até reconhecer alguma experiência sensível que o represente. Não se trata de identificar os conceitos com a

³⁴ O caráter abstrato do conceito, comenta Kursanov (1966, p. 164), acha-se em seu processo de formação e no resultado do mesmo processo.

representação sensível, senão de uma tentativa adequação do pensamento e do conhecimento conceitual aos fins a que se destina a ação humana, e desse modo exprime seus benefícios. É dessa transformação permanente, constante, ininterrupta entre representações sensíveis e representações conceituais, e vice-versa, das últimas para as primeiras (processo de coordenação e processo de explicitação), que se constitui a atividade total do pensamento como um único processo: o processo de produção de conhecimento.

Desse modo, os conceitos, como forma de pensamento, são por natureza reflexos e manifestação da essência interna e contraditória dos fenômenos do mundo material (o conteúdo) e por isso, em seu processo de formação, carregam um caráter internamente contraditório. Isto é, nos conceitos convergem aspectos logicamente opostos, que podem ser entendidos como unidades de contrários. Em particular, devem ser entendidos como a unidade de processos analíticos e sintéticos, unidade de formas gerais (universal) e particulares (singular), unidade do aspecto concreto e do abstrato.

Por meio da análise, os sujeitos esforçam-se por penetrar nos objetos, desrespeitando sua configuração natural. Esse processo, diferente de uma simples contemplação passiva, é feito mediante a ação prática ideal e a material sobre o objeto. Analisar um objeto implica rompê-lo, separar seus componentes, isolar suas partes, para estudar suas propriedades, relações e características de uma determinada parte de sua realidade.

O conhecimento dos objetos tem um começo. Deve ser atacado, geralmente por seu ponto fraco, por algum aspecto vulnerável, ou simplesmente por onde seja acessível. E isso com um instrumento destrutor. (LEFEBVRE, 2006, p. 134, tradução nossa)

O aspecto negativo que acontece com a análise, como momento inicial de ruptura no processo de formação dos conceitos, deve ser superado, e isso é feito por meio da síntese. A síntese consiste no processo positivo do reflexo da consciência de restituição das propriedades dos objetos que foram destruídos pela análise. A síntese, expressa Kursanov,

é o processo principal e determinante da formação dos conceitos como abstração, que se manifestam como generalizações e reflexos de determinadas propriedades e aspectos dos objetos que agora são conhecidos por meio dos conceitos que têm sido formados, (KURSANOV, 1966, p. 168)

Os processos de análise e síntese devem ser entendidos, então, como caminhos contrários: um rompendo e separando e o outro reconstruindo, reconfigurando e trazendo de volta o objeto inicial, não mais o mesmo, agora enriquecido. Esses dois processos se desenvolvem juntos, não há que esperar terminar um para começar o outro. A síntese, por exemplo, guia a análise permitindo-lhe reconhecer quando parar seu processo de ruptura. Por isso, diz Lefebvre (2006, p. 137, tradução nossa), “a análise só tem sentido porque o concreto resulta da natureza sintética: liga diferentes momentos, inclusive os contraditórios”.

Com respeito à unidade do geral (universal) e à do particular (singular), sintetiza-se, nos conceitos, certa ligação dos objetos isolados a partir de suas propriedades gerais. De acordo com Kursanov, o universal dos conceitos é o reflexo, em forma indireta, do universal-real no mesmo mundo material. Para esse autor,

as propriedades gerais objetivamente reais são inerentes a todas as classes de objetos materiais, com respeito às que criam os conceitos; o universal, como propriedade objetiva dos objetos materiais, determina a ligação objetiva condicionada a leis que, por sua vez determina sua pertencência de certos objetos relacionados a certos conjuntos e a certas classes reais. (KURSANOV, 1966, p. 182, tradução nossa)

Desse modo pode ser interpretado que o universal é uma maneira de abarcar aproximadamente todo particular isolado, fazendo com que este pertença a algum universal. Em outras palavras, o universal ou geral, só existe no particular e a partir do particular na medida em que, de um modo objetivo e real, representa o conjunto de propriedades e características gerais de todos os objetos particulares. Em cada particular isolado, manifestam-se reciprocamente, as características gerais de toda a classe ou conjunto que foi constituída como universal. Nesse sentido o particular só existe em relação com o que conduz ao geral, essa ligação abarca cada objeto particular como parte de uma classe determinada e só existe porque pertence a ela.

Da mesma forma que o conceito pode ser entendido como ponto de convergência da análise e da síntese, do geral e do particular, acha-se a identidade do concreto e a do abstrato. Como exposto acima, por meio da análise destrói-se e separam-se os componentes sensoriais e casuais dos objetos para penetrar neles e

determinar sua essencialidade como aspecto geral, para, mediante a síntese, reconstruí-lo. Processo que permite identificar e diferenciar cada particular isolado como pertencente a uma respectiva classe, caracterizada por diferentes gerais.

Esse processo implica passar de um concreto material real para um abstrato que, como seu reflexo, é idealização, porém pelo grau de depuração, fruto da análise, pode ser entendido como um concreto pensado. Desse modo, o que inicialmente é denominado de concreto material toma o carácter de abstrato como totalidade e diversidade que esconde sua concretude, e vice-versa. O que inicialmente é assumido como abstrato pelo afastamento progressivo do concreto material torna-se o novo concreto pensado. Esses dois aspectos que mudam de carácter durante o processo de formação conceitual (produção do conhecimento) convergem como unidade no conceito formado. De acordo com o materialismo dialético, esse processo de formação conceitual é denominado de ascensão do abstrato para o concreto (KURSANOV, 1966; ILIÉNKOV, 1977; DAVYDOV, 1978; DAVIDOV, 1988). Entendendo aqui concreto como pensamento concreto, reflexo do pensar da realidade concreta. Em palavras de Kursanov:

Isso é precisamente o que determina o novo aspecto que expressa a natureza contraditória do conceito como unidade do concreto e do abstrato, sobre a base do papel decisivo e determinante da realidade concreta, cujo reflexo é o conceito como forma de pensar. [...] no mesmo tempo, o concreto abstrato universal é um conceito concreto, precisamente porque é reflexo de uma realidade concreta. (KURSANOV, 1966, p. 195, tradução nossa).

A formação de conceitos, ou melhor, a produção de conhecimento, mesmo parecendo um processo linear, simples e reduzido, é, pelo contrário, multiforme, com vários níveis e extremamente complexo. Abrange processos intermédios múltiplos convivendo e mutuamente se constituindo. Alguns deles ficam em níveis elementares de abstração, outros altamente abstratos não chegam até a representação sensível, alguns iniciam e são truncados ou degradados por outros. Entretanto, em geral, o aspecto catalisador são os fins ou propósitos das ações objetivas dos sujeitos.

E assim surge outra relação dialética e da maior dificuldade, porém necessária nos tempos modernos: a delimitação das áreas de conhecimento. Pelo exposto, tal delimitação seria impossível, apesar de acontecer. Se partirmos da grande complexidade das práticas sociais, nas quais o processo de conceptualização

parece ser individual, cabe perguntar como é possível demarcar e diferenciar o tipo de conhecimento pelo qual se está transitando.

Ainda que não seja uma resposta fácil, nem possível de acordo com a perspectiva aqui proposta, retornamos ao ponto de partida do sistema de práticas humanas, em que os indivíduos presentes e passados verificam, compartilham e coordenam experiências particulares e específicas como divisão de trabalho. Desse modo, cada agrupamento compõe-se de uma relação de indivíduos desenvolvendo processos conceptuais e unificando-os em classes, e cada classe constitui uma função desses indivíduos.

As unidades ou classes conceituais constituídas pelos indivíduos em relação a certos coletivos mantêm graus de identidade a partir da operação de institucionalização. Os indivíduos são como tais enquanto sejam reconhecidos por outros e isso acontece na medida em que se inscrevem no conjunto de práticas socialmente compartilhadas. Essas práticas compõem um espaço simbólico que denotam as institucionalidades. O institucional implica então um espaço onde se atua com outros, um sistema simbólico estrutural que permite ao indivíduo alcançar o caráter de sujeito enquanto interage com outros. Visto assim, o termo instituição faz ressaltar que as práticas humanas são desenvolvidas sob condições que são marcas de momentos, épocas e lugares, formas de fazer, de se relacionar, meios e fins compartilhados, interesses individuais e coletivos, que condicionam as ações. Isso implica que os indivíduos, enquadrados em uma determinada institucionalidade, vivem em formas específicas de sensibilidade, compartilham formas de ação e estruturam maneiras próprias de ver e atuar em e com o mundo. É assim como a institucionalidade, que demarca as diferentes formas de produzir e reproduzir um determinado conhecimento.

3.2 Síntese das ideias deste capítulo

Sintetizamos a discussão realizada até aqui em quatro elementos de particular importância que fornecem ideais-chave relacionadas com os interesses da pesquisa.

Em primeiro lugar, ideias relacionadas com o conhecimento e com algumas implicações para sua produção e reprodução. Considerar que o conhecimento caracteriza-se por serem *formas de codificação de ações e reflexões constituídas*

histórica e culturalmente, significa que as atividades humanas estão compostas por dois tipos de ações: de um lado, ações da consciência (teleológicas e cognitivas), e de outro, ações materiais, cuja interação constitui um ciclo infindável de co-determinação entre conhecimento e prática: os sujeitos projetam suas ações à produção de determinados objetos transformando-os por meio de práticas com a intenção de satisfazer suas necessidades. Essas ações vão-se cristalizando e incorporando-se em forma de artefatos (materiais e simbólicos) que servem de base para novas práticas. Desse modo, quando um sujeito ingressa a um contexto social qualquer, desenvolve suas ações materiais baseado numa tentativa de adequá-las a determinados fins (produção de novos conhecimentos), em correspondência com o conhecimento que aprende (conhecimento já produzido). Em outras palavras, de acordo com as *atividades particulares* em que participa, cada sujeito singulariza o conhecimento entendido como *formas gerais* e encapsulado em *artefatos culturais*. Fazer parte de práticas sociais então já é condição suficiente para produzir e reproduzir (aprender) conhecimento.

No entanto, o segundo aspecto que emerge da discussão anterior é que, quando há uma intencionalidade de que os sujeitos reproduzam determinado conhecimento, não basta permiti-lhes estar no mundo participando das diferentes práticas sociais. Nesse caso se faz necessário propor práticas orientadas intencionalmente à formação de conceitos. Isso significa criar espaços designados ao ensino e à aprendizagem desses conhecimentos previamente sistematizados, codificados e institucionalizados.

Para autores, como Lev Vygotsky (1986), a formação intencionada de conceitos, além de permitir o acesso à produção cultural, também é a fonte de desenvolvimento do psiquismo humano e das formas da consciência (pensamento). Uma das hipóteses fundamentais desse autor é que o ensino precede o desenvolvimento e por isso as práticas de ensino podem ser entendidas como práticas orientadas ao desenvolvimento humano. Denominadas por diversos autores, entre eles Bernstein (2005a), de prática pedagógica. Este autor diz:

a relação de base para a reprodução e a transformação cultural é essencialmente uma relação pedagógica e a relação pedagógica é uma dialogia entre transmissores e receptores, (BERNSTEIN, 2005a, p. 56 tradução nossa).

A intenção dessa atividade é dar uma chance para que cada sujeito conheça o estágio de desenvolvimento humano atual e por essa via obtenha as ferramentas que lhe permitam superá-lo. Por isso, a prática pedagógica tem um papel central na formação dos sujeitos. Prática transformadora dos sujeitos por meio da qual adquirem conhecimentos ou desenvolvem novas formas de conduta, novos conhecimentos, novas práticas e níveis de autonomia.

Uma das instituições sociais privilegiadas para desenvolver essas práticas são as instituições escolares, constituídas como um espaço societal, organizado sistematicamente para a formação intencionada dos sujeitos. Em palavras de Rigon, et al.:

No atual estágio de acumulação do conhecimento historicamente produzido, surge a escola como espaço de transmissão formal e planejada do saber sistematizado e elaborado de conhecimento científico, filosófico e artístico, (RIGON; ASBABR; MORETTI, 2010, p. 24).

A escola, portanto, é mais um ambiente entre muitos outros em que ocorrem intensas tarefas educativas de socialização do conhecimento historicamente produzido. As instituições escolares participam da divisão do trabalho, proporcionando aos indivíduos elementos fundamentais para a vida em sociedade. Entretanto, não podem dar conta de todo o conhecimento produzido historicamente, precisando fazê-lo de forma seletiva. Assim, três perguntas surgem: na divisão de trabalho da atividade educativa, como escolher o que corresponde às instituições escolares? Metodologicamente, como devem ser desenvolvidos os processos correspondentes às instituições escolares? Qual é o papel de cada ator, em particular de professores e alunos, nesse processo? A primeira pergunta é respondida principalmente a partir do conceito do currículo. A segunda e a terceira, a partir das atividades de ensino e aprendizagem materializadas no conceito de aula.

Interpretando BERNSTEIN (2005b), o currículo pode ser entendido como o princípio pelo qual são relacionados conteúdos e períodos de tempo escolar. Essa relação constitui-se de pelo menos três maneiras diferentes: (1) em termos da quantidade de tempo atribuída a um dado conteúdo; (2) se o conteúdo é obrigatório ou facultativo para os alunos; (3) de acordo com a clara ou confusa separação entre os diferentes conteúdos. Para esse autor, a escolha dessas possíveis relações não

é intrínseca, mas sim de carácter societal e se materializa a partir das atividades de ensino e aprendizagem³⁵.

Precisamente por isso, para Rigon et al (2010), aquilo que é priorizado para compor os currículos escolares reflete, de alguma forma, a expectativa de formação que um determinado grupo social tem acerca dos indivíduos que a compõem. Desse modo, o currículo se refere a uma complexa relação entre diferentes atores (principalmente professores, alunos e diretores de cada instituição educativa), com ideologias, interesses e intencionalidades particulares. São eles quem decidem quais conhecimentos, geralmente chamados de conteúdos, devem ser ensinados e ministrados de acordo com certas unidades de tempo.

Desse aspecto surge o terceiro elemento. Em geral, pode-se dizer que as relações pedagógicas são materializadas principalmente por meio do conceito de aula. A aula, entendida aqui como ato pedagógico, é uma das formas em que professores e alunos interagem para co-produzir o processo de formação a partir da reprodução e transformação da cultura.

Para Bernstein (2005a), como acontece com toda relação pedagógica, as práticas escolares materializadas no conceito de aula estão regidas por quatro tipos de regras. Em primeiro lugar, *regras hierárquicas*, nas quais tanto professores quanto alunos precisam aprender a ser como tais; isto significa aprender a reconhecer as regras de ordem social, de carácter e de forma pelas quais cada ator assume o papel correspondente de professor e aluno. Em segundo lugar, *regras de sequenciamento*. Toda prática pedagógica escolar deve ter um antes e um depois que avança de forma progressiva. Em terceiro lugar, *regras criteriosas*, pelas quais se espera que professores e alunos apliquem os conhecimentos adquiridos em suas próprias práticas e nas dos outros. E em quarto lugar, *regras de contextualização do conteúdo*, pelas quais se discriminam ou criam os conteúdos que serão produzidos e/ou reproduzidos por meio do ato pedagógico.

Desse modo, as aulas, enquanto regidas pelas regras mencionadas, são desenvolvidas principalmente a partir de dois tipos de atividades que se determinam pela conformação mútua dos respectivos objetos: de um lado, atividade de ensino, e

³⁵ Embora para Leontiev a atividade de estudo seja dominante, só dos seis aos dez anos de idade, realmente ela continua-se desenvolvendo, mas agora não como atividade principal do adolescente senão subordinada à atividade produtiva direcionada ao trabalho. (DAVIDOV, 1988).

de outro, de aprendizagem³⁶. Isso quer dizer que, no nível do ato pedagógico chamado aula, as atividades humanas de ensino e aprendizagem constituem-se por meio de uma tensão assimétrica de objetos, que para cumprir com seu propósito, devem entrar em ressonância. Na configuração dessas duas atividades em sala de aula, experimenta-se um confronto permanente dos componentes básicos de toda atividade: necessidades, objetos, finalidades, ações, operações e condições. Em geral, as necessidades de professores e alunos são diferentes, porém o intuito é de que os objetos e fins entrem em sintonia, pois as ações de professores e alunos devem estar voltadas para a produção, reprodução e assimilação de algum tipo de conhecimento.

Entretanto, como acontece com todos os tipos de atividade, as atividades de ensino e aprendizagem contêm contradições internas fundamentalmente de dois tipos: de um lado, a contradição entre a realidade material do objeto e seu reflexo ideal na consciência, e de outro, entre o estado material e ideal atual e o futuro potencial do objeto. Para o caso das atividades de ensino e aprendizagem, essas contradições são percebidas principalmente no que Radford e Roth (2011) chamam de “contradição da aprendizagem”.

Na atividade de ensino, a tensão que se dá entre o objeto idealizado futuro (o que espera que o aluno aprenda) e o estado material atual (o que ainda não aprendeu) permite ao professor manter controle sobre suas ações pedagógicas, enquanto para os alunos esse controle não é possível, pois para isso precisariam idealizar o objeto que ainda não conhecem, que esperam conhecer por meio de sua atividade de aprendizagem. Uma forma de superar esta contradição é por meio das tarefas arquitetadas pelo professor, pensando no objeto idealizado de sua atividade e nas possíveis ações dos alunos orientadas a esse mesmo objeto.

Baseados nos três aspectos anteriores relacionados com a formação intencionada de conceitos em instituições escolares através das práticas

³⁶ Aqui dois comentários particulares relacionados à atividade de aprendizagem. Primeiro: o termo atividade de aprendizagem é tomado das traduções para o inglês de “activity learning”. Mas no texto de Davydov (1978, 1988), o termo é traduzido para o espanhol diretamente do original em russo como “Actividades de Estudio”, que em português seria “Atividade de Estudo”. Essas duas expressões estão se referindo à mesma ideia. Segundo: o próprio Davidov, no entanto, expressa que a atividade de estudo deve ser diferenciada do que tem sido chamado de aprendizagem em geral, enquanto que os sujeitos aprendem nas formas mais diversas de atividade. Desse modo, a atividade de estudo tem um conteúdo e uma estrutura especial e está direcionada a assimilar, produzir e reproduzir as formas mais desenvolvidas da consciência social, isto é, as formas ligadas ao pensamento e aos conceitos teóricos.

pedagógicas, consideramos o quarto elemento. Dado que o propósito é estudar as práticas demarcadas no campo da matemática e entre elas as delimitadas pelo conhecimento algébrico no contexto da Modelagem, entendida como tarefa, duas perguntas emergem: Da variedade de práticas sociais que os sujeitos estão permanentemente desenvolvendo, como caracterizar aquelas adjetivadas de matemáticas, em geral, e de algébricas, em particular? Como caracterizar essas práticas matemáticas quando o contexto é a escola, isto é, quando são práticas sociais com a intenção de desenvolver processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos? Uma resposta se faz necessária para tentar entender as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico, quando são constituídas por alunos de uma disciplina de matemática enquanto desenvolvem projetos de modelagem.

Partindo do pressuposto de que o conhecimento e as práticas constituem-se mutuamente, materializando-se em artefatos culturais, abordaremos essas questões considerando algumas condições epistêmicas das práticas matemáticas, que podem ser delimitadas no campo da álgebra. Desse aspecto nos ocuparemos no capítulo a seguir.

4 CAPÍTULO III: AS PRÁTICAS MATEMÁTICAS RELACIONADAS COM O CONHECIMENTO ALGÉBRICO

4.1 Sobre as práticas matemáticas

A discussão dada até aqui sobre as características da atividade humana tem-nos levado a considerar o conhecimento, em nosso caso o matemático e sua aprendizagem, como o produto das mais variadas práticas humanas e seus condicionamentos culturais. As práticas matemáticas, como quaisquer práticas humanas, são resultado da experiência sensível e das ações dos sujeitos orientadas para determinados fins desenvolvendo expressões conceituais a partir delas. Quando se realiza uma operação matemática, se está efetivamente reproduzindo alguma experiência, mesmo imemorial, de atividades humanas. Em outras palavras, as práticas matemáticas também nascem das necessidades da vida cotidiana e são uma síntese das formas de relações entre os sujeitos e destes com a realidade objetiva a partir de suas diferentes atividades (comércio, agricultura, arquitetura, medicina, governo), delimitação de espaços geométricos, medição, etc. Caraça diz,

Sem dúvida a matemática possui problemas próprios que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre, (CARAÇA, 1951, p. XIV).

Essas atividades sociais, intuições³⁷, problemas e experiências têm dividido o processo de sistematização do conhecimento matemático em uma sucessão de períodos, que, embora não estejam claramente marcados, diferenciam-se pelas práticas desenvolvidas, pelas tentativas de solução dos problemas e, sobretudo, pelos registros representados em textos, artefatos, técnicas, etc., deixados por sujeitos e comunidades anteriores. Assim, cada fase, além de mostrar os graus crescentes de conceptualização e abstração, diz também respeito às relações políticas e sociais dos indivíduos e entre as sociedades de cada época.

³⁷ Sem desconhecer que, pelo nível de abstração, hoje em dia um setor da matemática desenvolve-se relativamente apartado da experiência sensível direta. Observações de fatos históricos relativos à formação e evolução desse conhecimento, confirmam que realmente este é fundado na intuição, mas não de uma intuição pré-existente na mente dos sujeitos, mas como construção social.

A conceituação matemática, assim como outras formas de conhecimento, passa por períodos de experimentação, solução de problemas ligados a situações da vida prática e criação de ações técnicas e também por períodos de sistematização, organização e estruturação do processo anterior. Novos conceitos surgem como formas idealizadas de padrões de atividade sobre objetos culturalmente constituídos e, desse modo, novas necessidades de sistematização conceitual emergem. Desse modo se constituem os objetos matemáticos. Essas formas idealizadas e padrões de atividade fixam-se em formas simbólicas e, a partir desse momento, constituem-se em objetos de conhecimento e patrimônio cultural da humanidade. Em outras palavras, tornam-se objetos matemáticos, objetos reais, não por serem “coisas” ou “entidades” físicas individuais, mas formas simbólicas (em particular na linguagem) que “objetivam” ações, operações, técnicas e processos de conceptualização. Ou seja, os objetos matemáticos são expressões de relacionamentos efetuados por operações mentais. Radford diz:

Os objetos matemáticos são padrões fixos da atividade reflexiva embutidos no mundo em constante mudança das práticas sociais mediadas por artefatos. [...] Como todo objeto matemático, enquanto que reflexão do mundo na forma de atividade dos indivíduos, tem sido expressos de várias formas ao longo da história. Por exemplo, com palavras, desenhos, fórmulas, tabelas numéricas. Cada uma dessas expressões fornece significados diferentes, que se amarram aos anteriores e vêm a constituir, como dito por Husserl, capas de *noéticas* do objeto. Como é a atividade dos indivíduos a que forma a raiz genética do objeto conceitual, o objeto possui uma dimensão expressiva variada que vai além do simples conteúdo conceitual “científico”. Essa dimensão expressiva contém também aspectos racionais, estéticos e funcionais da cultura, (RADFORD, 2006b, p. 12 tradução nossa).

Essa constituição de objetos matemáticos, ou processo de objetivação em termos desse autor, deve ser entendida como um processo social ativo e criativo de construção de sentidos e significados, ou seja, de tomada de consciência em relação às formas de fazer e de pensar; isto é, em forma de atividades.

Obando (2014), baseado nos trabalhos de Ferreiros (2010); Kitcher (1984); Godino (2002), propõe caracterizar as práticas matemáticas historicamente constituídas em termos das relações entre os seguintes cinco elementos: (1) os objetos de conhecimento matemático com e sobre os quais se atua; (2) os conceitos matemáticos que se enunciam sobre tais objetos; (3) os artefatos (materiais e

simbólicos) usados para as ações³⁸ e os procedimentos que eles permitem; (4) as situações traduzidas em problemas e/ou perguntas que orientam as ações; (5) o conjunto de visões metamatemáticas, que permitem tomar decisões sobre as ações (cosmovisões, valorações sobre a matemática, fins e posturas filosóficas, epistemológicas e ontológicas da matemática).

Cada um desses elementos diz respeito às características da configuração epistêmica e ao campo de variações das diferentes práticas matemáticas. Desse modo, pode-se dizer que as ações que constituem as práticas matemáticas estão orientadas ao estudo, tratamento, formulação, solução, ampliação e análise de determinados problemas e/ou perguntas relacionadas com situações de “quantificação” e “formas geométricas”, tanto de um ponto vista estático (medir, contar, estimar, calcular, localizar, trocar, etc.) como dinâmico (transformações, variações, comparações, etc.³⁹). Quantidades e formas permitem exprimir o conceito de Magnitude (Grandeza), fazendo desse conceito a “célula”⁴⁰ para o desenvolvimento do conhecimento matemático (DAVYDOV, 1978; DAVIDOV, 1988). Como afirma Prado Junior (1980, p. 196, grifos do autor) “É o critério de *grandeza* (magnitude) que constitui o objeto próprio originário de conceituação matemática”.

As quantidades entendidas como formas de conceituar diferenças no interior de uma mesma qualidade como tamanhos, desgaste, luminosidade, pesos, etc., permitem organizar estados das mesmas qualidades. Nesse sentido as quantidades podem ser consideradas como uma atribuição de intensidade dada por algum sujeito a uma determinada qualidade, com o propósito de gerar tipos particulares de comparação, identificação, diferenciação, ordenação e classificação (diferenças de vermelho ou diferenças de pesos, longitudes, velocidade etc.) (PRADO JUNIOR, 1980). A partir da quantificação, é possível atribuir intensidades de qualidades de objetos, eventos e/ou fenômenos. Isto é, diferentes quantidades: pesos, volumes,

³⁸ Em particular as *formas de discursividade* (formas de dizer, escrever; em geral, de comunicar) permitem pôr as ações em alguma forma de linguagem e por essa via os sujeitos também podem ser entendidos como mediadores das ações.

³⁹ Para os gregos, o estudo das quantidades e as formas estáticas os levaram a distinguir a aritmética da geometria. Enquanto o estudo dinâmico foi desenvolvido em relação com a música e a astronomia. Em nota 209, Klein (1992, p. 256) comenta que para Ptolomeu a matemática é entendida como ciência que trata com figuras, quantidades, magnitudes e relações geométricas.

⁴⁰ O termo “célula” foi adaptado por Vygotsky (1986), Davydov (1982) e Davidov (1988) dos trabalhos de Marx para indicar a essência das abstrações iniciais que liga o geral e o particular que estão na base de concreto. Para Davydov a “célula” é entendida como uma relação simples, homogênea, que contém as condições indispensáveis gerais para o desenvolvimento do particular. “o princípio sem desenvolver de um todo desenvolvido” (DAVYDOV, 1982, p. 342).

densidades, maleabilidades, temperaturas etc. Também é possível classificar diferentes qualidades com uma mesma quantidade homogeneizando-as em relação com tal atributo de quantidade.

Embora em níveis altos do processo de quantificação, as quantidades possam ser expressas numericamente a partir do conceito de escala de intensidade⁴¹, no começo pode-se prescindir do uso da medida e, por essa via, do uso de números. Por exemplo, a intensidade de desgaste ou de luminosidade permite a comparação da quantidade de sua intensidade: dizer quando um objeto é mais ou menos desgastado ou mais ou menos luminoso etc., criando-se naturalmente relações tanto de ordem como de identidade, que permitem definir diferentes classes de equivalência desde o ponto de vista da atribuição de quantidade dada para os diferentes objetos, fenômenos e/ou eventos⁴².

Com o uso das séries numéricas, além de se criar uma forma de exprimir simbolicamente os graus de intensidade no interior de uma mesma qualidade, também relaciona uma qualidade com outras gerando unidades (“universais”) de equivalência: dez graus de luminosidade, dez graus de desgaste, etc., possibilitando operar com as quantidades. A numeração, diz Prado Junior (1980), representa a mais alta forma de organização da conceituação quantitativa e discriminação no interior das qualidades, bem como proporciona a generalização dos processos de medição.

Nesse sentido, o tratamento sistemático de situações problemáticas e perguntas relacionadas com a quantificação de diferentes magnitudes e o tratamento das formas constituem os elementos que dão origem ao processo de elaboração e desenvolvimento de práticas matemáticas, e vice-versa. No interior de algumas práticas matemáticas, os problemas por resolver e as perguntas por responder são formas particulares de permanente indagação pela quantificação e pelas formas geométricas. No entanto, é importante perguntar: que tipo de situações e/ou perguntas deram origem às práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico em particular? Como o tratamento das quantidades levou à

⁴¹ O uso do número favorece novas experiências aos sujeitos, outras ações e operações em relação com os eventos, fenômenos e/ou objetos quantificados.

⁴² Um caso particular e clássico acha-se nos Elementos de Euclides quem em diferentes momentos desenvolveu critérios e argumentos para o tratamento de magnitudes geométricas prescindindo do uso direto do número. Ver livro V, por exemplo.

constituição e consolidação da teoria matemática identificada atualmente com o nome de Álgebra?

Analisar os elementos que deram origem às práticas matemáticas relacionadas ao conhecimento algébrico que nos permita ter um suporte para entender a dinâmica das ações que os alunos desenvolvem, em relação com a tarefa modelagem, é o propósito das ideias que serão apresentadas a seguir.

4.2 Sobre as práticas algébricas

Tentar dar uma resposta à pergunta sobre o que é Álgebra não é tarefa fácil. Em primeiro lugar, porque o termo Álgebra tem sido definido e usado por matemáticos, professores e historiadores de diversas maneiras dependendo do período histórico e interesse acadêmico. Em segundo lugar, porque mesmo com o grau de independência que ganhou no início do século XIX, não pode ser assumida como uma área totalmente independente, dificultando a delimitação das fronteiras.

O que parece claro é que concordar com alguma definição a respeito da Álgebra ou discordar dela significa convergir com os, ou divergir dos pressupostos epistemológicos que a embasa e, dessa forma, legitimam-se as práticas que são desenvolvidas com os conceitos e objetos que lhe pertencem. Isso significa que qualquer tentativa de definição da Álgebra, leva a reconhecer alguns modos de uso que implícita ou explicitamente expõe a forma como tem sido “experimentada” e teorizada por quem se atreveu a defini-la. Essa situação nos leva considerar a importância de estudar as condições epistêmicas, em que os objetos algébricos têm sido constituídos e as formas conceituais que têm permitido experimentar sua produção e reprodução.

Devido a nossa compreensão de que a matemática é uma manifestação semiótica do desenvolvimento histórico-cultural na qual ela é praticada, a Álgebra, consequentemente, deve ser assumida como uma dessas manifestações culturais com características próprias, que indicam uma forma particular de pensar e atuar. Ou seja, uma forma de organizar, manipular e tratar situações problemáticas de acordo com as condições naturais e culturais de cada momento histórico. Isto implica considerá-la como um campo conceitual com níveis progressivos de legitimação

institucional, cujas ações intencionadas baseiam-se em conceitos que dizem respeito a essa forma particular de pensar.

Alguns autores consideram que, num primeiro momento da História, esses tipos de prática matemática consistiam numa forma particular de resolver diversos problemas (RADFORD, 2011). Num segundo momento focou no interesse por determinar as condições técnicas e metodológicas para resolver equações polinomiais (STEDALL, 2003, 2011). E num terceiro momento, passou a se identificar com uma forma lógica de estruturação matemática através de sistemas axiomáticos (KLEINER, 2007), gerando-se um campo da matemática que tem características com graus cada vez maiores de generalidade.

Desse modo, mesmo reconhecendo que o termo Álgebra foi proposto por matemáticos árabes do século IX, para se referir à arte de resolver problemas relacionados com achar valores para as incógnitas em equações polinomiais⁴³, embasando seus princípios, em grande parte, na tradição do pensamento grego⁴⁴, foram os matemáticos medievais e da modernidade, em particular entre os séculos XV e XIX, que elaboraram a Álgebra como é conhecida na atualidade. Autores, como Derbyshire (2006), consideram que a Álgebra é uma das formas mais antigas de pensar matematicamente, sendo hoje um dos instrumentos mais importantes para a solução de problemas em diferentes campos das ciências. Além disso, temos que, atualmente, ela é uma das ramas de maior abstração e generalidade da matemática, cujas raízes acham-se fundamentalmente em três elementos: (1) no conceito de número entendido como “*eido*” e como quantidade de magnitudes (medida); (2) nas formas de raciocínio proporcional; (3) no método *analítico* para a resolução de problemas e a demonstração de teoremas matemáticos.

4.2.1 Sobre o conceito de número e os processos de medição

O período da Grécia clássica é um dos pontos de partida para discutir alguns dos princípios filosóficos e epistemológicos que deram origem às matemáticas

⁴³ “De acordo com al-Khayyam, “a arte da álgebra e al-muqabala” é uma arte orientada à resolução de certo tipo de problemas; isto é: determinar quantidades incógnitas aritméticas e geométricas.” (PANZA, 2007, p. 125).

⁴⁴ Principalmente a herança da Geometria e da aritmética euclidiana representada nos Elementos, da Geometria de Apolônio e seu trabalho sobre as cônicas e do tratado sobre aritmética de Diofanto.

atualmente conhecidas. O número, como um dos conceitos mais importantes da matemática, foi se consolidando como fruto de variadas práticas humanas, como também de crenças, ideologias e movimentos filosóficos da época que influenciaram na maneira como os objetos algébricos foram posteriormente constituindo-se. De acordo com Klein (1992), na Grécia clássica identificam-se três concepções bastante influentes do conceito de número, associadas a três escolas filosóficas diferentes: a escola Pitagórica, a Platônica e a Aristotélica.

Para Bradley, a ideologia da escola Pitagórica resume-se no lema “todo no universo é número.” De acordo com Pitágoras, expressa esse autor que:

os números são a natureza fundamental dos seres. Ele ensinou que cada número tem sua própria característica distintiva que determina as qualidades e os comportamentos de todas as coisas. O número “um” não é considerado realmente número, ele é a essência de todos os demais números, (BRADLEY, 2006, p. 16 tradução nossa).

Dessa passagem inferem-se os dois principais aspectos que identificam a concepção de número nos pitagóricos. Em primeiro lugar, da ideia que “os números são a natureza fundamental dos seres”, em que nada pode existir fora de uma perfeita organização das coisas no mundo e, por isso, o número é a forma de ordenamento da natureza. Em segundo lugar, que “o número “um” não seja por eles considerado realmente número, mas a essência de todos os demais”, que implica assumir que só os *inteiros* podem ser considerados como números, isto é, uma coleção de “uns”. Nem as frações, nem os irracionais, por exemplo, estariam nessa categoria.

Da mesma forma que nos pitagóricos, o significado de número na escola platônica estava condicionado aos princípios ideológicos e filosóficos com que a matemática é concebida. Em termos gerais, na doutrina platônica a realidade matemática separa-se da realidade percebida pelos sentidos e pertence ao mundo contemplativo das ideias, ou seja, ao mundo do pensamento (a noética)

Como é bem conhecido, o principal postulado Platônico, em contraste com Pitágoras, é que a ciência em geral, como disciplina similarmente organizada [em termos platônicos], deve ser livre do sentido da percepção. Uma ciência cujos objetos, em última instância, indicam uma invisível e inaudível ordem “cósmica” sobre a qual o mundo dos sentidos é fundado. Essa ordem corresponde a uma estreita e interna relação de todas as ciências baseadas na medição e na contagem (KLEIN, 1992, p. 38, tradução nossa)

Platão considera que, para que a matemática fosse assumida como ciência, seus objetos devem ser ideais alcançáveis só pelo pensamento. Com essa proposta em mente, assume-se a ciência matemática com certo grau de superioridade em relação ao conhecimento obtido pelos sentidos, ainda dividindo-a em duas classes fundamentalmente: a classe da medida (magnitudes contínuas) e a classe da contagem e do cálculo (magnitudes discretas numeráveis), confirmando assim as duas ramas da matemática amplamente reconhecidas desde a idade antiga: a *geometria*, associada à primeira classe e a *aritmética* associada à segunda⁴⁵. Desse modo, o que os platônicos chamam de número pertence unicamente à rama da aritmética e é tratado através do conceito de “*arítmōs*”, cujo significado, em palavras de Klein (1992, p. 7), “não é outra coisa que um número definitivo de objetos definitivos; isto é, “*Mônadas*” ou Unidades puras”. Dessa forma Platão faz da operação contagem a base para o conhecimento do número em *si* (a aritmética) e das relações entre eles (a logística), cuja arte permite desenvolver práticas de cálculo com números.

Baseado nessa ideia, para Platão, a ciência que trata com a generalidade dos números deve ser pensada em duas direções. De um lado, a *aritmética* como o tratamento do número em *si* que representa a quantidade exata de uma multiplicidade (unidades “puras”) e de outro, a *logística* como o estudo das relações de cada número com respeito aos outros. Isto é:

“Aritmética” não é “uma teoria de números”, mas, primeira e principalmente a arte de contar corretamente [...] se alguém chega ser perfeito na arte da aritmética, é porque conhece todo em relação com o número, e a realidade do número somente pode ser conhecida sobre a base da arte de contar [...] “Logística”, por sua parte, não é meramente a arte de calcular, no sentido de operar com números (multiplicar, dividir, calcular raízes, etc.), é também conhecer as relações que conectam os números em sua singularidade. (KLEIN, 1992, p. 18-19, tradução nossa, grifos do autor)

⁴⁵ De acordo com Aristóteles, as quantidades associam-se com o discreto e as magnitudes com o contínuo; em suas palavras, “Chama-se quanto àquilo que é divisível em suas partes constituintes, das quais uma e a outra ou cada uma é por natureza *um*, algo determinado. Assim, uma multidão é quanto se é contável e é uma grandeza se é mensurável” (ARISTÓTELES, [S.d.], livro V, Cap XIII).

Com essa caracterização do tratamento da ciência dos números nas duas direções: aritmética e logística, Platão diferencia a *aritmética* prática e teórica da *logística* também prática e teórica, para mostrar que o número, mesmo sendo a base das mais variadas atividades humanas (nos cálculos comerciais, na agricultura, na arquitetura, na política) em geral, na resolução de problemas do dia a dia (aritmética e logística prática), o tratamento, enquanto pertencente ao campo da matemática, recai nas formas puras, isto é, na aritmética e na logística teórica⁴⁶.

Logística teórica trata fundamentalmente com o conhecimento das relações, tal como razões, entre unidades “puras” do qual depende qualquer forma de cálculo. Enquanto o conhecimento de unidades puras, como número em si mesmo, está reservado para a aritmética. (KLEIN, 1992, p. 24, tradução nossa)

4.2.2 As magnitudes (grandezas) e sua medição

Como apresentado acima, com base nas mais variadas atividades humanas desde a antiguidade, categorizaram-se as magnitudes em duas tipologias: as que variam de forma contínua e as que o fazem de forma discreta. A dicotomia entre o contínuo e o discreto diz respeito à diferença entre a concepção de “unidade” entendida. No primeiro caso, como “unidade” de medida relacionada com o desenvolvimento da geometria (magnitudes contínuas) e no segundo caso, como entidade indivisível. É o “um” da aritmética e da logística que permite ao pensamento diferenciar o “um” de muitos “uns” (a multiplicidade) no mesmo instante. Nesse último caso trata-se da unidade usada para contagens e processos de cálculo numérico. A unidade representada pelo “um” aritmético não é suscetível de diminuição, porém entendido como limite da decomposição. Isso significa que, por sua natureza de unidade, perde todo sentido ser dividido e por composição gera os demais números como uma multiplicidade potencialmente infinita de “uns”.

No segundo caso, trata-se de uma grandeza tomada como unidade de referência, com respeito à qual se realiza a medida das outras grandezas da mesma natureza. Desta última concepção de unidade, surge o uso dos números para

⁴⁶ Em geral, dependendo da classe social à que se pertencia, fazia sentido o uso de um ou de outro tipo de aritmética e logística. Uma discussão a respeito acha-se em (KLINE, 1972).

desenvolver práticas de medição e as frações como relação da parte com o todo, tomando o “todo” como a unidade geométrica. Desse modo, as frações ganham sentido, não como número (número apenas enquanto inteiro), mas como relação de medida.

De acordo com Caraça (1951), a contagem é a prática matemática mais elementar e antiga da vida individual e da social. É uma prática que emerge da experiência com entidades individuais, os objetos com identidade própria que podem ser assumidos como “um” ou “unidade” homogêneas⁴⁷. Dessa forma, contar implica reconhecer a quantidade de “uns” ou “unidades” de entidades homogêneas com independência própria, que há em alguma coleção. Para isso precisa-se, em primeiro lugar, ordenar as entidades da coleção e posteriormente criar uma operação que faz corresponder sucessivamente a cada entidade um número da série dos números inteiros. Para esse autor,

fazer corresponder é uma das operações mentais mais importantes e que na vida diária utilizamos constantemente [...] a correspondência ou associação mental de dois entes exige que haja um antecedente e um conseqüente; a maneira pela qual o pensar no antecedente desperta o pensar no conseqüente chama-se lei de correspondência (CARAÇA, 1951, p. 7, grifos do autor)

No caso da contagem, o antecedente é cada entidade disposta de maneira ordenada, o conseqüente seria um número da série numérica. A lei de correspondência é um número para cada entidade, em que o último número pronunciado corresponde à quantidade total da coleção. Contudo, as entidades representadas aqui pelo número indicam a unidade da multiplicidade de unidades homogêneas puras, *arítmos*, cuja pureza, de acordo com Platão, só pode ser operada pelo pensamento⁴⁸. Assim, cada número ou *arítmos* indica uma multiplicidade de unidades puras, categorizada por uma mesma espécie, figura, categoria, classe, etc. denominada por Platão de “*eido*”⁴⁹.

O *arítmos* indica a contagem de uma multiplicidade de “unidades” delimitada como casos particulares, entretanto é somente pelo *eido* que essa multiplicidade

⁴⁷ Quando a coleção de objetos não é homogênea, pode ser homogeneizada. Uma maçã e uma pera, como frutas. Uma maçã, uma banana e um cachorro como seres biológicos, etc.

⁴⁸ As entidades percebidas pelos sentidos não podem ser infinitamente particionadas perdendo o caráter de indivisibilidade da unidade.

⁴⁹ Um exemplo neste caso é o fato de ser da espécie ou classe par, ímpar, quadrado, etc.

pode ser categorizada como espécie. Os *eidos* formam agrupamentos de *mônadas*, por exemplo, *arítmos* de diferentes tipos. Desse modo, para Platão o *eido*, como espécie, constitui o caráter mais geral do número que, por sua vez, é o objeto da aritmética. O “*eido*” platônico representa, assim, a unidade como “um”, cuja principal característica é a impossibilidade de ser dividido enquanto unidade, porém também é ao mesmo tempo a multiplicidade de unidades. O “um” como espécie é a multiplicidade, mas também a indivisível unidade. Com o caráter “*eidético*” do número construído, Platão não consegue configurar argumentos coerentes dessa perspectiva para explicar os princípios da logística teórica, na medida em que sua base é a logística prática e nela permite-se a divisão da unidade e a operabilidade como frações⁵⁰.

Aristóteles foi grande conhecedor dos princípios filosóficos e epistemológicos que embasam os argumentos pitagóricos e platônicos sobre a matemática, em geral, e o número em particular. De acordo com Klein, Aristóteles considera superficial o argumento dos pitagóricos de que o mundo está primeiramente determinado pela presença de uma condição de ordem e que por isso consideram o número como o verdadeiro motivo de ser das coisas no mundo. Para Aristóteles, “a propriedade de ordem dos objetos no mundo sensível [a ordem do mundo visível] é totalmente natural” (KLEIN, 1968, p. 64). Por outro lado, considera contraditória a proposta platônica de separação entre a logística teórica e a logística prática, baseada na ideia de agrupamentos de *mônadas* puras ou *eidos*.

De acordo com a doutrina aristotélica, fundadora da escola peripatética, os objetos matemáticos emergem fruto de um processo de abstração e, por essa via, argumenta-se que os números são obtidos por abstração de coleções de coisas. Desse modo, os números como entidades abstratas dependem da condição de ser das coisas, cujo processo de abstração desenvolve-se por separação das qualidades sensíveis até constituir números “puros” gerais. Essa ideia, de acordo com Klein (1992), levou Aristóteles a diferenciar três tipos de números. Em primeiro lugar, números puros, isto é, abstraídos de toda forma sensível, chamados de *arítmos eidetikos*. Em segundo lugar, números que correspondem às coisas mesmas, *arítmos aisthetos*. Em terceiro lugar, *arítmos mathemáticos*, que

⁵⁰ O que diferencia a logística teórica da logística prática é a classe de multiplicidade com que tratam. Em um caso, trata-se de multiplicidades de objetos desiguais – e obviamente todos os objetos perceptíveis com os sentidos são assim-. No outro caso trata-se de multiplicidades de unidades iguais, e isso não pode acontecer na realidade dos objetos perceptíveis.

compartilham o caráter de pureza dos primeiros e de mutabilidade das coisas do segundo, (KLEIN, 1992, p. 91).

Para Aristóteles, diferentemente da concepção platônica, os números são revelados no mesmo processo de contagem e não como entidades que, enquanto unidades puras, são independentes e preexistem antes do processo de contagem. Com essa ideia, Aristóteles procura resolver o dilema de Platão da condição dual da unidade, que deve ser entendida como multiplicidade (muitos “uns”), todavia também tendo o “um” indivisível. Desse modo, o processo fundamental de homogeneização, que constitui o “*eido*” platônico necessário para contagem e a operabilidade teórica com números, Aristóteles o explica como fruto do processo de abstração que se desenvolve no mesmo ato de contar. O homogêneo surge enquanto são desconsideradas qualidades visíveis dos objetos contáveis expressando-se como medida comum caracterizada na unidade.

Quando consideramos que toda contagem pressupõe a *homogeneidade* do que é contado enquanto é contada, vemos não somente que cada número é composto de muitas unidades, ou seja, é muitos “uns”, mas também que ele é mantido unido por uma medida comum, ou seja, por uma unidade particular que se tornou a base da contagem; esta medida comum primeiro permite “muitos outros” para tornar-se “muitos”: Para cada número é ‘muitos’, porque cada um é [feito de] ‘uns’ e porque cada um é medido por [ele mesmo] ‘um’ [...] A prioridade de “um” sobre o número não segue a partir de uma relação de superioridade de gênero sobre as espécies, mas sim a partir do caráter de “um” como “medida”. (KLEIN, 1992, p. 108, tradução nossa, grifos do autor)

Essa forma de assumir o “um” como medida permite virar a atenção da contagem para um processo de medição, que em termos gerais consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes etc.; uma delas denominada de “unidade” de medida e a outra, a grandeza medida. Estabelece-se assim uma relação determinada pelo número de vezes (relação multiplicativa) que a unidade de medida cabe na grandeza a medir. Neste caso o número exprime a relação comparativa entre as duas grandezas e é chamado de *medida* da grandeza com relação à “unidade” de medida escolhida. Algumas consequências podem ser apreciadas:

- 1- Quando são dadas duas grandezas, por exemplo, A e B, a escolha de qual delas será a unidade de medida é arbitrária, qualquer uma poderia ser. Porém, dependendo da escolha, a relação “ser um número de vezes de” pode se transformar na relação equivalente “ser uma parte de” (ambas as relações são multiplicativas). No primeiro caso o número que exprime a relação é um inteiro, enquanto no segundo caso é uma fração. Seja, por exemplo, n esse número, então, se a unidade de medida é A, conclui-se que $B = n.A$, mas quando se muda de unidade de medida para B, a relação transforma-se para $A = \frac{1}{n}.B$.
- 2- Há uma diferença entre as grandezas que estão sendo comparadas e o número que exprime a relação (*logos*). É possível ter diferentes grandezas, cuja comparação leve à mesma relação (*logos*). Desse modo, o número aqui não é simplesmente uma entidade com vida independente senão que é quem está exprimindo a relação. Por exemplo, o número dois diz respeito à relação “ser duplo”, o três significa “ser triplo”, etc. de uma grandeza com respeito à outra. Além disso, em termos de relação são números que emergem por pares de equivalência: que “B seja o duplo de A” equivale dizer que “A é a metade de B” e assim por diante.
- 3- Pela arbitrariedade na escolha da unidade de medida, uma grandeza pode ter *várias medidas*. De acordo com Caraça (1951, p. 31) “pode haver tantas medidas como unidades”, dessa forma quando o número que exprime a relação, varia nem sempre significa que a grandeza aumentou ou diminuiu.⁵¹
- 4- Uma estratégia comumente usada, quando a unidade de medida escolhida não cabe um número inteiro de vezes na grandeza que está sendo tratada, é construir subunidades da unidade de medida original e combinar a resposta com números inteiros e frações.

Destaco três aspectos de particular importância aqui. Em primeiro lugar, com o tratamento dado por Aristóteles à unidade como parte de um processo de medição, o número continua sendo unicamente os inteiros e não é assumido como objeto em si. Como se tivesse um valor próprio e independente, mas tomando o caráter de relação: da unidade com a totalidade, isto é, uma medida relativa com respeito a

⁵¹ Uma interessante discussão relacionada com as problemáticas geradas nas práticas sociais pela na escolha arbitrária das unidades de medida, acha-se no texto “Las medidas y el hombre” de (KULA, 1980)

uma unidade (“um” em aritmética). Em segundo lugar, um tratamento assim permitiu a Aristóteles trabalhar com frações na divisão de uma totalidade, mesmo considerando, como no caso de Platão, a impossibilidade de fracionar a unidade. Em terceiro lugar, da mesma forma como Pitágoras e Platão, Aristóteles conserva a diferença entre a aritmética para o estudo das quantidades discretas e a operação de contagem e a geometria para quantidades contínuas (essa separação é percebida nos Elementos de Euclides, em que os livros VII, VIII e IX são tratados de aritmética, sendo os demais de geometria).

Um dos grandes avanços em Aristóteles com o tratamento do “um” como unidade de medida tem a ver com a relação entre a logística prática e a teórica. É possível estabelecer uma similitude (*analogia*) na relação (*logos*) entre, pelo menos, quatro grandezas tomadas de duas em duas constituindo assim o que os gregos chamaram de proporção. Para Euclides (livro V), as proporções referem-se à comparação entre grandezas que estão na mesma relação (*logos*), estabelecendo uma relação entre relações (relações entre números com o mesmo *logos*). Em outras palavras, quatro grandezas constituem uma proporção, se tomadas duas a duas, conservam a mesma medida relativa, a mesma razão.

4.2.3 O raciocínio proporcional e a resolução de problemas

A solução de problemas⁵² para alguns autores foi uma das atividades que deu origem à atividade matemática, em geral, e da álgebra, em particular. A maioria dos historiadores da matemática (BOYER, 1991; FAUVEL; GRAY, 1987; KLINE, 1972) entre outros, consideram que muitos dos conceitos, métodos, técnicas e operações matemáticas estão relacionadas com a solução de problemas “práticos” e “não práticos”⁵³. Nas antigas civilizações, (babilônicas e egípcias, principalmente) essa classe de problemas (práticos e não práticos) estava associada às duas correntes

⁵² Diferentes significações têm sido atribuídas para o termo problema. A literatura que discute as diferenças do termo de acordo com diferentes perspectivas é bastante ampla. Para uma discussão sobre formulação e resolução de problemas na educação matemática, ver Borba e Villarreal (2005).

⁵³ Neste contexto o termo “prático” nem sempre tem a mesma significação a quando nos referimos à “prática” do capítulo II e prática matemática neste capítulo. De acordo com Radford (2011, p. 119), o “não prático” dos problemas, significa que, “embora formulados em termos de uma experiência concreta semiótica da vida cotidiana, não possui uma relação direta utilitária com as necessidades da vida”.

principais da matemática já mencionadas: a aritmética e a geometria. Os problemas práticos são caracterizados como aqueles que lidavam com áreas e perímetros de figuras geométricas e cálculos, relacionados com problemas comerciais (RADFORD, 2011). De outro lado, os problemas não práticos eram atribuídos principalmente a relações numéricas. Em ambas as categorias os problemas eram frequentemente resolvidos utilizando o raciocínio proporcional (VAN DER WAERDEN, 1983).

Para Radford (2011), esse tipo de raciocínio foi, de fato, uma das mais importantes áreas desenvolvidas pelo pensamento matemático mesopotâmico, depois sistematizado por Eudoxo (408-347 a.C.) e divulgado amplamente no livro V e VII dos Elementos de Euclides (325-265 a.C.). Em geral, uma proporção diz respeito à relação invariante de relações fundamentalmente multiplicativas entre magnitudes ou números (aritmético ou geométrico). De acordo com esse autor, o raciocínio proporcional foi inicialmente materializado no método de resolução de problemas utilizado pelos povos da antiga Babilônia denominada de “falsa posição”.

O método de falsa posição é baseado na ideia de que se podem supor alguns valores falsos para as quantidades buscadas e, então, ajustá-las através de um “fator de ajuste proporcional”, que permite modificar –de um modo proporcional– os valores falsos, a fim de transformá-los em valores verdadeiros. (RADFORD, 2011, p. 120)

O método de falsa posição ou falsa solução, que perdurou no tempo e foi bem conhecido pelos matemáticos árabes, posterior à era da Grécia clássica e referenciado em alguns dos tratados matemáticos associados com a Álgebra medieval. É o caso do texto “Fibonacci’s Liber Abaci”, publicado no final do século XII por Leonardo Pisano, mais conhecido como “Fibonacci” (Pisano, 2002)⁵⁴. No capítulo XIII apresenta o método “*Elchataym*”, termo que provém do árabe e significa “método de dupla falsa posição”, amplamente utilizado porque, segundo o autor, permite resolver qualquer problema matemático.

Radford (2011) considera que o raciocínio desenvolvido no método em que tem que se supor “falsas quantidades”, pode ser interpretado como uma forma metafórica de pensar com incógnitas, similar a como acontece na Álgebra básica nos tempos modernos. Em outras palavras, para esse autor, a ação de escolher

⁵⁴ De acordo com o tradutor do latim para o inglês “Laurence Sigler”, foi o livro de matemática mais importante da idade média que difundiu por toda a Europa o sistema posicional decimal indiano e os métodos algébricos até então conhecidos.

números falsos como “fazendo uma posição” nesse método tem o mesmo sentido de quando é introduzida a incógnita na solução de problemas matemáticos na Álgebra simbólica que atualmente conhecemos e foi inaugurada nos trabalhos de Diofanto, continuada na Idade Média e desenvolvida na Europa renascentista. Porém, uma diferença na aplicação do método, técnicas e formas de raciocínio na solução de problemas nas diferentes épocas relaciona-se com o uso de formas simbólicas.

Desse apontamento emerge uma pergunta de particular importância: Qual o papel das formas simbólicas no desenvolvimento da álgebra? Uma possível resposta é que, assim como acontece na matemática em geral, são formas de objetivação dos conceitos matemáticos. Entretanto, na Idade Média tiveram um papel particular: foi uma maneira de fixar padrões de práticas aritméticas e geométricas, mas também de exprimir o método *analítico* para solucionar problemas, demonstrar teoremas e redefinir técnicas de cálculo. Isso significa que, com as formas simbólicas, foi possível objetivar, generalizar e unificar os objetos matemáticos (aritméticos e geométricos) com os métodos pelos quais esses objetos são constituídos e operados para solucionar problemas, como exposto por Henk Bos:

álgebra refere-se às teorias e práticas matemáticas que envolvem incógnitas e/ou indeterminadas, empregando técnicas e operações algébricas, solução de equações e tratando com números e/ou com magnitudes geométricas; isto é, com magnitudes em sentido geral. Na medida em que trata com números, álgebra é parte da aritmética, mas por tratar também com magnitudes (geométricas ou abstratas) pressupostas (tácita ou explicitamente), as operações algébricas são aplicáveis à geometria, (BOS, 2001, p. 129, tradução nossa).

De acordo com Klein (1992), pensar matematicamente com *indeterminadas* foi o elemento chave para entender o significado do início da Idade Média, situação que somente foi possível pela introdução de formas simbólicas. Em palavras desse autor,

um novo tipo de generalização, o que pode ser chamado de “*símbolo gerador de abstração*”, leva diretamente para a criação de uma nova disciplina universal chamada de “*analítica geral*”, que ocupa um lugar central na arquitetura da nova concepção de ciência. (KLEIN, 1992, p. 125)

Vista assim, Álgebra poderia ser assumida como um “nome genérico” para referir-nos a um tipo de prática que trata com incógnitas, números indeterminados e quantidades em geral. Isto é, “quantidades abstratas” que podem ser operadas como se se tratasse de operações aritméticas generalizadas⁵⁵. Processo que, de acordo com alguns historiadores (BOS, 2001; HEATH, 1885; KLEIN, 1992), começou com o trabalho de Diofanto, que desenvolveu o que poderia ser chamado de “aritmética de números indeterminados” (HEATH, 1885). Continuando com os trabalhos dos matemáticos árabes, em particular Al-Khwarizmi (780-850) e Al-Khayyam (1048-1131), que propuseram o termo “*Kitab al-jabr wa al-muqabala*” (RASHED, 1994), espalhado por todo ocidente simplesmente como Álgebra. E posteriormente com matemáticos medievais, como François Viète, com sua *arte analítica* (VIETE, 1983) e Thomas Harriot que, independente de Galileu Galilei, aplicou a teoria da proporcionalidade e o *método analítico* para formular e solucionar problemas de corpos cadentes e de balística (SCHEMMEL, 2008; STEDALL, 2003). Culminando⁵⁶ nos matemáticos renascentistas, como é o caso de René Descartes, com seu trabalho de geometria analítica (DESCARTES, 1954).

4.2.4 As relações: fundamento do método analítico e coração da álgebra

Como exposto, uma das dificuldades achadas na matemática grega clássica foi a separação entre seus objetos e o método geral pelo qual esses objetos foram constituídos (KLEIN, 1992). Sendo os objetos da aritmética números, enquanto os da geometria, pontos, linhas, planos e sólidos. A pergunta se relacionava ao método, isto é, qual o método para demonstrar os teoremas e resolver os problemas matemáticos? Alguns autores (BOS, 2001; KLEIN, 1992; PANZA, 2007) utilizam o método de *análise e síntese*. Porém, como Panza (2007) mostra, o método analítico e o sintético em matemática têm sido utilizados, dependendo da época para a

⁵⁵ Uma implicação com caráter pedagógico disso é que a álgebra pode ser entendida como um sistema de técnicas para operar com objetos aritméticos, geométricos e/ou de ambas as ramas. Técnicas para adicionar multiplicar, restar, dividir e resolver equações polinomiais.

⁵⁶ Culminando é uma forma de dizer, na medida em que a axiomática formal através da teoria de conjuntos permitiu que a álgebra evoluísse nos séculos XVIII e XIX para o que atualmente é conhecido como álgebra moderna ou abstrata a partir dos trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Arthur Cayley (1821-1895), Évariste Galois (1811-1832), entre outros. Ver (KLEINER, 2007). Dado que o foco da pesquisa está no campo do pensamento algébrico básico, não faço referência explícita a esses trabalhos sobre álgebra abstrata.

solução de problemas geométricos e algébricos. De acordo com Thomas Heath (1885), o método foi explicitamente usado por Pappus de Alexandria (290-350) na solução de variados problemas geométricos. Em termos gerais, o método pode ser assim resumido,

Por meio da análise supõe-se já admitido o que está sendo requerido, e por meio das consequências chega-se a um resultado assumido como verdadeiro. Já por meio da síntese supõe-se admitido o que foi achado por meio da análise e por meio das consequências no final constitui-se o que estava sendo requerido. (EUCLIDES, 2009, p.)

É interessante observar como a análise e a síntese são apresentadas como caminhos inversos. O ponto de partida é a análise, supondo a existência de algo que não é realmente dado ou estabelecido, cujo ponto final é algo achado como consequência lógica desse suposto. Enquanto o ponto de partida da síntese é o ponto final da análise, cuja finalização é o ponto de partida. De acordo com Bos (2001), na forma como François Viète aplicou o método à álgebra, mostra que a propriedade de inversão da análise e a síntese não se cumprem estritamente. Em geral, o método foi aplicado por Viète nos seguintes termos:

O problema é assumido como resolvido; um elemento desconhecido é escolhido, que, caso fosse conhecido, iria fornecer a solução; ele é chamado de A; as relações necessárias são traduzidas para o formalismo algébrico e transformados até conseguir uma ou várias equações para A. As equações são resolvidas; isto é, uma expressão explícita para A é achada. Finalmente, esta expressão é provada na construção geométrica. (BOS, 2001, p. 105, tradução nossa)

Assim, o método aplicado à álgebra pode ser desmembrado nos seguintes quatro passos:

- 1- A transformação do problema em pelo menos uma equação que relacione os termos conhecidos com os desconhecidos do problema.
- 2- Achar a solução da equação, caso seja possível. Isto é, achar uma expressão para os termos desconhecidos por meio de técnicas de redução ou transformando a equação para uma forma canônica já conhecida.

- 3- Resolver o problema baseado na expressão achada no item 2, ou reformular as equações construídas no item 1.
- 4- Provar que a solução é correta.

Segundo Bos (2001) os itens (1) e (2) constituiriam a análise: na transformação do problema em equações, assume-se a existência da solução, relacionando-a com os parâmetros dados do problema. Desse modo opera-se com ela como se fosse um desses parâmetros conhecidos, obtendo-se, assim, uma expressão que relaciona o conhecido com o desconhecido. A solução é obtida por transformação da expressão como consequência da estrutura da equação. A síntese correspondente ao passo (4) continua sendo oposta à análise, entretanto neste caso nem sempre refaz completamente o caminho percorrido com a análise.

Aqui se encontraram três elementos relacionados com nossos interesses de pesquisa. Primeiro: os passos (1) e (2) não são passos simples de realizar e nem sempre possíveis. Realmente o processo depende da natureza do problema e que seja possível construir um sistema de equações. Isso nos leva ao segundo elemento: as formas de raciocínio entre cada um desses momentos são diferentes.⁵⁷ O terceiro elemento, é que, a partir da existência do sistema formal de equações, o processo deixa de depender da natureza do problema ganhando certa independência.

Nesse sentido surge uma pergunta fundamental: que tipo de problemas poderia ser reduzido a um sistema de equações, em particular de equações polinomiais? Pensando em “quantidades indeterminadas”, que representam objetos aritméticos ou geométricos, pode-se dizer que, quando essas quantidades estão relacionadas com problemas aritméticos, todos podem ser reduzidos a equações, na medida em que as operações básicas com números seriam as mesmas que as com quantidades abstratas. Porém, se os símbolos representam quantidades geométricas, o princípio de homogeneidade teria que ser cumprido. Nesse caso, a

⁵⁷ Viète, consciente disso, diferencia a “Zetetic”, a “poristic” e a “exegetic”. “Zetetic” é o processo pelo qual as equações são construídas relacionando as magnitudes conhecidas e as desconhecidas do problema. “Poristic” é o processo através do qual é examinada a verdade dos teoremas por meio das equações construídas. E “Exegetic” é a arte pela qual são estabelecidas as magnitudes desconhecidas a partir das equações construídas (KLEIN, 1992). Esses elementos cobram especial sentido quando se trata de práticas de modelagem em que um elemento conatural é tratar com processos de covariação e correlação.

maneira de transformar os problemas em equações seria por meio de relações proporcionais entre segmentos, retângulos e sólidos.

O que realmente mostra isso é que o coração da álgebra são as *relações* entre objetos inicialmente aritméticos e geométricos. Desse modo, pode-se dizer que os objetos algébricos são *relações* entre *quantidades indeterminadas* tratadas por meio do método analítico e sintético. Interpretando Flaumenhaft (2000) isso foi um ponto chave para o desenvolvimento da matemática. Para esse autor,

Quando as equações substituíram as proporções como o coração da matemática e o método de teorema-demonstração geométrico perdeu sua primazia e deu passo à solução de problemas algébricos por meio da análise-síntese, um imenso poder foi gerado. Foi por isso que a geometria de Descartes chamou-se de o maior passo para o progresso das ciências exatas. (FLAUMENHAFT, 2000, p, xxii, tradução nossa)

É nesse sentido que as proporções podem ser entendidas: como uma relação entre relações. Precisamente esse aspecto relacional, como expressa Prado Junior (1980), é o que virá ser exprimido com as expressões algébricas.

Numa expressão algébrica, cada letra que nela figura representa por si, segundo parece, uma *grandeza* própria e à parte das demais. Mas de fato essas *grandezas*, ao contrário do que ocorre como os números onde ainda se pode ter a ilusão de tratar com “individualidades” bem caracterizadas, as *grandezas algébricas* evidenciam desde logo e ao menor exame, que não têm por si sós, sentido algum; e que é somente no conjunto da expressão a que pertencem que significam algo. E esse conjunto é uma relação, ou exprime uma relação: nada mais (PRADO JUNIOR 1980, p. 217)

Entender que as relações proporcionais é o que exprime as expressões algébricas nos permite considerar que as raízes da álgebra são tão antigas como as da aritmética e da geometria. Pode-se dizer que, da mesma forma que a aritmética e a geometria, a álgebra é fruto de movimentos sociais, políticos, comerciais, de produção, etc., das diferentes comunidades, na medida em que são formas particulares de pensar e de conceituar algumas das feições do mundo social e natural que os seres humanos enfrentam. Nesse sentido, embora só em tempos relativamente recentes, a álgebra tem sido reconhecida como uma área da

matemática, quando se assume que ela (a álgebra⁵⁸) trata com o aspecto relacional além de ser considerada um braço da matemática, pode ser também assumida como um *método* para pensar: “o raciocínio ou pensamento algébrico”⁵⁹.

Com os novos sistemas para representar quantidades abstratas, as razões e as proporções e, por essa via, com as novas técnicas para operar com essas quantidades, desenvolvidas nos finais da Idade Média, o caráter relacional da matemática, fundamentalmente de relações proporcionais, teve importantes avanços, principalmente pela mudança nos interesses dos matemáticos. Como comenta Klein (1992) e Schemmel (2008), sem desconhecer as bases apresentadas pelos matemáticos da antiguidade, os interesses científicos dos matemáticos da Idade Média em diante caracterizam-se por estarem voltados para a solução de problemas relacionados à mecânica, ótica, balística, arquitetura, construção de máquinas, etc., em geral, à matemática aplicada.

Por exemplo, os trabalhos de Fibonacci no início da Idade Média para enfrentar problemas cotidianos de cálculo e comerciais. Continuando com Oresme, Harriot e Galileo e seus estudos sistemáticos das proporções aplicados ao Movimento e à queda de corpos; Kepler e seu trabalho sobre astronomia; Bombelli e Cardano com seus estudos sobre equações algébricas de segundo e terceiro grau; Viète e sua aplicação da análise e a síntese (“logística especiosa”) à aritmética e à geometria, baseado na teoria das proporções e no uso de símbolos para representar quantidades generalizadas; Napier e os logaritmos oferecendo novas técnicas para o cálculo de quantidades que variam proporcionalmente no tempo, e Descartes com sua geometria analítica, entre muitos outros também importantes no processo de desenvolvimento do método relacional, que foi amplamente discutido e utilizado nesse período da História, criando as bases para consolidar a álgebra como área de conhecimento e também abrindo espaço para novas ideias relacionadas principalmente com o Cálculo diferencial.

O que interessava para esses cientistas eram as relações que determinam a circunstância que produz o fenômeno, cujo ponto de partida era a relações entre as magnitudes. Por exemplo, no estudo do Movimento, o importante foi entender a

⁵⁸ Uma possível explicação para a tardia aparição da álgebra como área particular da matemática deve-se talvez ao caráter inicial de método, não de objeto, diferente do acontecido com a aritmética e a geometria.

⁵⁹ A sistematização desse método constitui uma das principais contribuições de Descartes para as ciências com as obras “Regras para a direção do espírito” e sua “Geometria”. (Descartes, 1996)

relação entre as variações de espaço e de tempo, que em sua composição constituem as mudanças de velocidade. Desse modo, relacionar espaço, tempo e velocidade não existe separadamente, relação esta que o inglês Tomas Harriot e o italiano Galileu exprimiram por meio de seus experimentos sobre a queda dos corpos, partindo da hipótese de que a mudança na velocidade de um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao tempo percorrido em sua queda. (SCHEMMEL, 2008)

Entretanto, para que Newton pudesse desenvolver seu trabalho que o levou à construção das leis universais do movimento, teve que acontecer a sistematização da álgebra como método analítico e de produção de conhecimento. Sistematização esta devida aos trabalhos de Descartes e apresentada em sua obra sobre “A Geometria analítica”, (DESCARTES, 1954). Um dos elementos de base que alavancaram o método cartesiano é o conceito de “Unidade”, que, para efeitos do método, teria o papel de unidade de medida. Para o processo de medição (comparação), Descartes toma como unidade de medida uma grandeza arbitrária considerada como ponto de referência. As demais grandezas tornam-se quantidades absolutas representadas a partir da grandeza unidade. Isso facilita o tratamento da medição como relacionamento, pois as proporções entre grandezas se reduzem às proporções entre quantidades abstratas ou números generalizados e, por essa via, as regras de tratamento da álgebra são aplicáveis a quaisquer quantidades em geral (ÁLVAREZ, 2000).

Desse modo, é redefinido o conceito de quantidade: as quantidades deixam de ser apenas resultado de contagens de multidão discretas e/ou medidas relativas de magnitudes contínuas, para se tornarem medidas absolutas: medida (o número) de quantidades que são comparadas com uma unidade arbitrária de referência. Medir assim não é outra coisa que numerar as medidas relativas de magnitudes, ou seja, determinar o número que a representa (DESCARTES, 1996, regra XIV). Uma implicação disso é a possibilidade de tratar em um problema quantidades gerais desconhecidas como se fossem conhecidas (método analítico).

O método é provado pelo próprio Descartes transformando a geometria clássica Euclidiana em uma nova geometria, a Geometria Cartesiana, atualmente chamada de “Analítica”, desenvolvida posteriormente por vários matemáticos em diferentes áreas. Uma dessas áreas é o Cálculo. Nesta geometria as figuras geométricas são representadas por linhas, isto é, representadas por segmentos um

em *função* de outro, constituindo uma função que indica um *lugar geométrico* da figura, podendo-se expressar por meio de *equações algébricas*. Dessa maneira, com o método analítico cartesiano, que em termos gerais indica o estudo de relações entre magnitudes sintetizadas na álgebra, foi possível exprimir também relações de relações: um relacionamento generalizado.

Foi assim que a álgebra, além de dar conta de relacionamentos geométricos e aritméticos, como método analítico, mostrou-se também amplamente valorizado para o estudo de outras ciências. Um dos saltos importantes que permitiu o trabalho cartesiano foi ter um método não só para resolver problemas práticos e não práticos segundo a tradição dos povos mesopotâmicos, gregos e europeus de início da Idade Média, mas também problemas da maior envergadura como o são as leis da física (as leis do movimento universal, por exemplo).

Com quaisquer fatos ou fenômenos redutíveis a grandezas o método cartesiano representa um processo geral de relacionamento capaz de exprimir conceptualmente, como a sua aplicação crescente demonstrará, todas as relações quantitativas; o que quer dizer conhecer largos aspectos da Realidade objetiva e das feições universais. Para aplicá-lo bastará em cada caso considerado desdobrar o objeto da observação em diferentes grandezas, e fundamentalmente em pelo menos duas, procedendo-se em seguida a estudar suas variações simultâneas e reportá-las respectivamente em duas coordenadas, obtendo-se com isso um relacionamento expresso indiferentemente por uma figura (lugar geométrico; “uma curva”) ou então uma equação (PRADO JUNIOR, 1980, p. 254).

Nessa referência destacam-se três ideias. Em primeiro lugar, o aspecto relacional entre quantidades abstratas, como coração da álgebra, pode ser expresso em pelo menos duas formas: em equações, simbolicamente construídas e para as quais o trabalho de Viète foi decisivo; e outra como forma gráfica ou lugar geométrico, construída a partir de uma unidade de referência, que se representa pelo cruzamento de duas linhas retas (não necessariamente perpendiculares). Em segundo lugar, as equações e os gráficos, que representar relações entre quantidades, bem como variações simultâneas das mesmas quantidades. Em terceiro lugar, infere-se que como método, além de poder ser aplicado a outras ciências, pode aplicar-se a si mesmo, criando um desenvolvimento da própria matemática (“matemática pura” em geral como hoje em dia se costuma chamar, tendo como caso particular a álgebra abstrata).

4.3 Síntese das ideias deste capítulo.

Baseados nos elementos anteriores que dizem respeito ao processo de produção de conhecimento algébrico como uma forma particular de conhecimento matemático, passamos a apresentar algumas considerações que servirão de base para analisar a produção dos alunos no desenvolvimento de práticas de modelagem.

Em primeiro lugar, apresentamos alguns assuntos relacionados com a álgebra como campo de conhecimento. Continuando com a lógica apresentada no capítulo anterior, se o conhecimento, em geral, e o matemático em particular, pode ser entendido como *formas gerais de codificação de ações e reflexões constituídas histórica e culturalmente*, o conhecimento algébrico deve carregar esses mesmos traços.

De acordo com o exposto no capítulo, o conhecimento algébrico tem seu ponto de partida no tratamento *geral* de relações entre *quantidades*. Nesse ponto aparece uma ligação com a aritmética e a geometria, na medida em que na álgebra as quantidades unificam numericamente as relações aritméticas que foram separadas desde a antiguidade em números inteiros (quantidades discretas) e as relações geométricas que dizem respeito a quantidades contínuas, por meio do conceito de *quantidade indeterminada*. Isso significa que não indicam uma quantidade em particular, mas sim *qualquer uma*, quantidades *gerais*. Quantidades desconhecidas, que variam e podem representar totalidades e individualidades ao mesmo tempo. Desse modo, pode-se dizer que os objetos com que a álgebra trata são números e operações aritméticas, sendo na álgebra operados analiticamente. Ou seja, se opera com o desconhecido como se fosse conhecido. Isso nos leva a assumir que as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico são aquelas que tratam analiticamente com relações e operações de quantidades indeterminadas (variáveis, incógnitas, parâmetros e números generalizados).

O segundo aspecto resumem-se em três implicações que emergem da conclusão anterior sobre esse tipo de práticas matemáticas: em primeiro lugar, o tratamento analítico de quantidades indeterminadas só é possível através de formas simbólicas que permitem operar com diferentes graus de abstração. Em segundo, pensar analiticamente com quantidades indeterminadas com a mediação de formas simbólicas (pensamento algébrico) favorece a formulação e solução de novos problemas tanto em matemática quanto em outras áreas de conhecimento. Em

terceiro lugar, pelas características apontadas, *aprender* álgebra tornou-se de particular importância, devido às oportunidades que fornece no desenvolvimento do pensamento, em geral, e do pensamento matemático, em particular.

Decorrente dessas implicações surge a terceira consideração. Já que a aprendizagem da álgebra torna-se importante, práticas pedagógicas orientadas a esse propósito resultam necessárias, o que significa constituir ações intencionadas para a produção de significados algébricos. De acordo com Kieran (2004), essas ações devem ser de três tipos: de generalização, de transformação e de meta-nível. O primeiro envolve a formação de expressões e equações. O segundo inclui, por exemplo, fatorações, expansões, substituições, adições e multiplicações de expressões polinomiais, resolução de equações, simplificando expressões, e assim por diante. Já o terceiro tipo diz respeito a atividades para as quais os conceitos algébricos são usados como instrumentos, que não são exclusivos da álgebra. Elas incluem a resolução de problemas, modelagem, o estudo da variação, processos de generalização, análises de relações e demonstrações.

Dado que as ações com significação exclusivamente algébricas enquadram-se nos dois primeiros tipos de ações, pretendemos desenvolver um processo de produção de significado de conceitos algébricos partindo do terceiro tipo que implicaria arquitetar formas de encaminhamento intencional das ações aí desenvolvidas, para fazer ingressar os sujeitos nos tipos anteriores. Interpretando Radford (2010), seria tentar fazer ingressar intencionalmente os sujeitos na zona do pensamento algébrico. Esse é o caso da presente pesquisa. Os alunos de uma disciplina de matemática são convidados a desenvolver projetos de modelagem e, a partir desse momento, se inicia um processo de mediação artefactual intencionado, com o propósito de fazer com que os alunos constituam ações cada vez mais próximas de raciocínios algébricos. De como aconteceu o processo e dos resultados obtidos nos encarregaremos nos próximos capítulos.

5 CAPÍTULO IV: CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO

Nos capítulos anteriores fizemos uma descrição geral do problema e da pergunta de pesquisa (capítulo I), identificamos a proposta pedagógica da modelagem como um espaço para a produção e reprodução de conhecimento (capítulo II) e delimitamos as características das práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico (capítulo III). Baseado no conceito geral de prática apresentado no capítulo II, no primeiro momento deste capítulo, descrito o contexto geral da pesquisa como uma tarefa no interior de uma prática pedagógica escolar. No segundo momento, apresentamos o processo metodológico desenvolvido para produzir os dados relacionados com a pergunta de pesquisa. Finalmente apresentamos os dados e a estratégia utilizada para a análise.

5.1 Contexto geral da pesquisa

Como considerado no capítulo I, o foco geral da pesquisa foram os sistemas de práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico (KIERAN, 2006; SUTHERLAND; ROJANO; LINS, 2002), constituídas por um grupo de alunos, enquanto desenvolviam atividade de Modelagem entendida como proposta pedagógica (BORBA E VILLARREAL, 2005; BORBA, 2009; BORBA, 2011), no contexto de uma disciplina de Matemática Aplicada. Conforme o conceito de prática apresentado, que diz respeito ao conjunto de ações orientadas para um fim (VÁZQUEZ, 2007; CHAIKLIN, 2011), optei por um método que favorecesse entender o desenvolvimento das ações e interpretações tanto individuais quanto coletivas dos sujeitos participantes, em relação com o contexto cultural (DANIELS; COLE; WERTSCH, 2007).

Duas ideias apresentamos aqui. Na primeira temos: assumir que as práticas são definidas por indivíduos em instituições “societais” significa assumir que as ações dos indivíduos e os interesses coletivos relacionam-se dialeticamente, formando parte de tradições particulares⁶⁰. Não é possível reduzir os indivíduos à condição de atores mecânicos das demandas institucionais, como também não faz

⁶⁰ Referimo-nos a tradições educativas exercidas neste caso por uma instituição de educação superior (UNESP, campus de Rio Claro).

sentido concebê-los totalmente independentes em relação com essas demandas. Falar de indivíduo ou de coletivo já é condição suficiente para reconhecer a existência de instituições e indivíduos que as compõem. De acordo com essa relação dialética entre ações individuais e demandas institucionais, a segunda ideia refere-se às particularidades das práticas humanas definidas fundamentalmente por configurações epistêmicas, que inclui como um de seus componentes o conjunto de artefatos culturais usados.

Nesse sentido, para estudar a natureza das práticas, foi preciso recorrer a metodologias que permitiram um olhar próximo das ações das pessoas, sem desconhecer as condições “societais” nas quais estão sendo desenvolvidas. Ou seja, uma metodologia, cujas unidades de análise permitiram compreender as inter-relações entre processos culturais de desenvolvimento macro e microsociais e epistemológicos do conhecimento. Essas unidades foram achadas e constituídas no sistema de atividades, no qual as pessoas se engajam segundo suas necessidades e interesses (ENGESTRÖM, 1999; LEONTIEV, 1978).

Desse modo, embasados nos fundamentos da pesquisa qualitativa (POUPART *et al.*, 2012), assumimos a perspectiva histórico-cultural da atividade humana (KURSANOV, 1966; ILIÉNKOV, 1977; DAVIDOV, 1988; VÁZQUEZ, 2007) como mapa marítimo para o posicionamento teórico diante do movimento gerado pela incerteza do campo de estudo e, em meio a essa perspectiva, a teoria da atividade (LEONTIEV, 1978; VYGOTSKY, 1986; ENGESTRÖM, 1987) como o quadro metodológico a partir do qual foram estudadas essas práticas.

Dado que, em particular, a pesquisa diz respeito às práticas matemáticas (FERREIROS, 2010; KERKHOVE; BENDEGEM, 2007; OBANDO, 2014), relacionadas com o conhecimento algébrico (KIERAN, 2006; LINS; GIMENEZ, 2001; RADFORD, 2010), tendo como unidade de análise a atividade modelagem, no contexto de uma disciplina de matemática. Ou seja, essa unidade emerge das atividades pedagógicas de ensino e aprendizagem (DAVYDOV, 1978; MOURA, 2010) no contexto da uma disciplina de matemática aplicada para estudantes de Biologia e Ecologia, e os fundamentos metodológicos e analíticos recaem na perspectiva da pesquisa qualitativa em educação matemática, (BIKNER-AHSBAHS; KNIPPING; PRESMEG, 2015; BORBA; ARAÚJO, 2004).

5.2 Delimitação do campo de estudo

De acordo com Chaiklin (2011), toda pesquisa embasada na perspectiva teórica histórico-cultural deve ter por objeto de estudo alguma forma de prática humana. Podem ser *práticas ideais*, que indagam por ações constituídas em tradições institucionais generalizadas⁶¹ (as práticas educativas são um exemplo). Ou *práticas específicas* relacionadas com a produção de artefatos para satisfazer necessidades gerais em comunidades específicas (é o caso das práticas desenvolvidas por instituições educativas). Ou *práticas concretas* relacionadas com condições histórico-culturais particulares (societais) de produção de objetos, que satisfazem necessidades em um tempo e espaço determinado (por exemplo, as práticas pedagógicas em sala de aula⁶²).

O âmbito geral da pesquisa enquadra-se em um contexto de escola de nível superior, em particular em uma sala de aula de matemática. Isso significa que as práticas de interesse são desenvolvidas para satisfazer necessidades emergentes de atividades de ensino e de aprendizagem e precisam ser desenvolvidas em um tempo e espaço determinado, configurando, assim ações próprias de uma *prática concreta*. Estudar as práticas nesse contexto implica assumir que acontecem em meio a um conjunto de tensões, contradições e, por vezes, identificações. Contradições que em realidade são a força transformadora das ações (ENGESTRÖM, 1999).

Alguns dos conflitos são gerados pelo fato de a escola, em geral, e a sala de aula, em particular, serem espaços impregnados de interesses sociais e políticos. Desse modo, a sala de aula, pensada como um espaço para a produção, reprodução e transformação da cultura, não pode ser assumida como um molde para que professores e alunos neles se encaixem. É por meio das ações desses atores, no contexto localizado materialmente, que a sala de aula se constitui ativamente. As ações do professor e dos alunos, além de comporem as

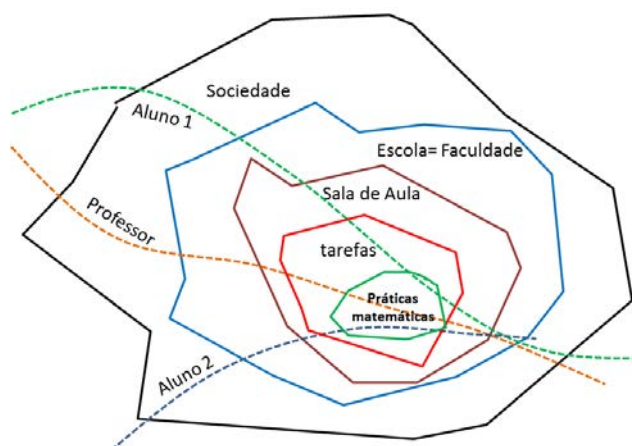
⁶¹ A necessidade da reprodução do conhecimento em condições “societais” é apresentada pelo autor como um dos exemplos mais significativos das práticas ideais. Acrescenta que, embora a reprodução do conhecimento possa ser dada por diferentes meios, por exemplo, enquanto as pessoas se engajam em práticas particulares, se reconhece que essas ações têm sido tradicionalmente desenvolvidas por instituições educativas.

⁶² No texto (HEDEGAARD; CHAIKLIN, 2005), acha-se uma discussão relacionada com as práticas educativas ideais, específicas institucionais e concretas de ensino e aprendizagem.

particularidades da sala de aula, estão condicionadas pelas relações com os outros níveis sociais.

Os alunos participantes da pesquisa cursam uma disciplina de Matemática Aplicada para Biologia e de Cálculo I para Ecologia. Por isso, as atividades de ensino e aprendizagem ali desenvolvidas não respondem unicamente a interesses individuais, mas também estão condicionadas pelos outros níveis sociais nos quais estão inscritas as ações dos alunos. A figura 3 representa uma forma de entender o lugar das atividades em que acontecem as práticas matemáticas de interesse.

Figura 3: O lugar da atividade modelagem



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, o fato de serem práticas desenvolvidas no contexto de uma disciplina de matemática, de um curso de educação superior, significa que responde às condições histórico-culturais em que os alunos estão em um período de desenvolvimento particular cuja atividade dominante é a de estudo orientada para o trabalho (LEONTIEV, 1978; VYGOTSKY, 1986). Portanto, o intuito com essas práticas é satisfazer necessidades em tempos e espaços determinados (práticas concretas). Contudo, do mesmo modo, devem responder de maneira indireta às necessidades da Faculdade (práticas específicas), que também devem satisfazer os objetivos gerais impostos pela sociedade a partir de práticas educacionais (práticas ideais). Em outras palavras, a dimensão societal das práticas matemáticas de interesse na pesquisa, em teoria, está localizada nos objetivos das disciplinas de Matemática Aplicada e Cálculo I para os cursos de Biologia e Ecologia

respectivamente, oferecidos pela Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro, São Paulo/Brasil, que, por sua vez, espera responder também aos propósitos gerais da educação superior brasileira. É por isso que precisam ser consideradas, para entender melhor as práticas matemáticas constituídas no contexto da disciplina, questões como: quais as intenções do professor ao desenvolver sua atividade? Por que pode ser considerada pertinente para esse tipo de alunos? Qual é a disposição dos alunos para aceitar ou não o convite? Estão esses alunos em condições de desenvolvê-la? Quais sentidos e significados estão em jogo?

Parte das respostas para essas perguntas estão inclusas nas mesmas práticas de ensino e aprendizagem. Outras podem ser achadas nas características de dois outros níveis de prática: ideais e específicas, pois muitas das decisões que cada um dos atores toma relacionam-se com os diferentes aspectos que contextualizam a disciplina.

5.2.1 Macrocontexto da pesquisa.

Dado que os participantes da pesquisa foram alunos de uma instituição acadêmica de educação superior brasileira, o macrocontexto recai nas condições desse sistema educativo. De acordo com a Lei que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional brasileira - LDB -⁶³ e o decreto⁶⁴ que a regula, os três principais focos de ação das universidades são a formação superior, o desenvolvimento de pesquisas e a extensão, cujos propósitos são:

Formação profissional voltada para o mercado de trabalho, formação acadêmica e em pesquisa; formação em pós-graduação; oferta de cursos sequenciais e de extensão; desenvolvimento de atividades práticas e de pesquisa integradas à formação em nível de graduação, como instrumento para preparação de profissionais críticos e aptos ao permanente autodesenvolvimento intelectual. (STALLIVIERI, 2010, p. 14)

Baseados na informação do “site” oficial do Instituto de Biociências⁶⁵, constatamos que as disciplinas que compõem esses cursos são organizadas em

⁶³ Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

⁶⁴ Decreto Nº 3.860, de 9 de julho de 2001.

⁶⁵ <http://ib.rc.unesp.br/#!/instituicao/>

uma sequência que busca garantir o aprofundamento no tema, partindo de disciplinas de conteúdo básico e instrumental e terminando com aquelas diretamente relacionadas à área de conhecimento. Para o instituto, os currículos têm o objetivo de colocar o estudante em contato com diferentes abordagens e métodos de estudo que lhe permitam, uma vez formado, ampliar e produzir conhecimento na área.

De acordo com o observado, temos que os cursos de Ecologia e de Ciências Biológicas da UNESP, Campus de Rio Claro, mostram traços de serem estruturados com o intuito de responder aos propósitos da LDB. O propósito da instituição é formar sujeitos para que assumam o ato de pesquisar como principal atividade. Em outras palavras, a forma de produção mercantil e de trabalho dos formados nessas áreas será fundamentalmente de produção de conhecimento. Em termos da teoria histórico-cultural, as necessidades fisiológicas e culturais dos formados nessas áreas serão satisfeitas a partir da “*atividade pesquisar*”, cujo objeto principal é produzir conhecimento nos campos da Biologia e da Ecologia. Com isso, as ementas de cada uma das disciplinas, que compõem a estrutura curricular, em teoria, devem contribuir com a formação de profissionais com capacidade para pesquisar segundo os métodos de cada área.

Quando alguém ingressa em quaisquer desses programas, seja como professor ou como aluno, deve entender que começa a fazer parte de um novo contexto “societalmente” constituído com suas próprias regras, condições, artefatos, modos de legitimação etc. e, por conseguinte, espera-se que comece a criar consciência da responsabilidade que, como indivíduo, assume nesse contexto institucional. Contudo, os alunos nem sempre estão cientes da responsabilidade que esse contexto lhes impõe, em relação com seu papel como futuro pesquisador⁶⁶. Enquanto para os professores é quase uma obrigação estarem cientes dessa responsabilidade. Por isso espera-se que o professor exerça cabalmente o papel encomendado pela instituição educativa e projete suas ações focando nos possíveis resultados de sua atividade, confiados pela sociedade e instituição educativa (Neste caso, a UNESP).

Do acordo com o professor que ministra as disciplinas de Matemática Aplicada para Biologia e Calculo I para Ecologia, os propósitos delas são:

⁶⁶ Mesmo só considerando a possível falta de consciência dos alunos, também pode acontecer com os professores. Porém o ponto de partida ideal é que os professores sejam realmente conscientes de seu papel e responsabilidade nesse contexto institucional.

permitir que os alunos deem mais um passo na construção de um alicerce matemático básico para as suas atividades enquanto Biólogos (Ecólogos). A matemática tem estado cada vez mais presente em várias áreas da Biologia e ciências afins. A biomatemática, por exemplo, já é área consolidada de pesquisa. É importante que vocês aprendam algumas ideias básicas de matemática e re-visitem outras já estudadas no Ensino Médio. É também relevante que a matemática seja vista em contexto. (trecho tomado do texto que complementa a ementa)

Pode-se inferir desse apontamento que, na consciência do professor⁶⁷, o conhecimento matemático que será ensinado e talvez aprendido pelos alunos na disciplina, terá um papel de ferramenta ou artefato na sua formação de Biólogos e Ecólogos. Para o professor, os alunos são assumidos como sujeitos que estão sendo formados para participar das práticas que lhes farão pertencer ao contexto societal de pesquisadores nessas áreas. Porém, também espera que aprendam conceitos matemáticos gerais. Neste caso o termo contexto diz respeito a espaços de significação dos conceitos matemáticos. Por isso, o objetivo do professor é que, além de aprenderem os conceitos matemáticos, de acordo com as práticas dos matemáticos, também os saibam usar para elaborar outras formas de conhecimento (matemática vista em contexto).

Desse modo, o professor, como representante consciente dos propósitos da Universidade e da sociedade em geral (práticas ideais e específicas), pretende contribuir com a formação de conhecimento matemática dos alunos, não por ser seu objeto direto de estudo, mas por considerar e concordar que a matemática auxilia a tomada de decisões e a realização de ações, enquanto pesquisadores no campo da Biologia e da Ecologia, satisfazendo assim, a partir de suas ações individuais em sala de aula (práticas concretas), a responsabilidade que, como professor de matemática, lhe foi encomendada societalmente.

5.2.2 Contexto microsocial da modelagem

O curso de Biologia da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Rio Claro é oferecido em duas modalidades: integral (diurno) e noturno. A disciplina

⁶⁷ Uma forma de entender consciência neste caso é assumi-la como a possibilidade de projeção e orientação de suas ações para um fim determinado. Leontiev (1978)

de Matemática Aplicada é programada no primeiro ano para a modalidade integral e no terceiro, para o noturno com sessenta horas presenciais por semestre, repartidas em quatro horas semanais. O curso de Ecologia é oferecido somente na modalidade diurna, e a disciplina de Cálculo I é vista no primeiro ano. As ementas das duas disciplinas abordam conteúdos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral. Os conteúdos estudados são: Funções (conceitos e tipos: linear, quadrática, exponencial e logarítmica), Gráficos, noções de Continuidade, noções de Derivada e de Integral com algumas aplicações. Além desse conteúdo programático, na disciplina de Cálculo I para Ecologia, são adicionadas as temáticas de funções trigonométricas seno e cosseno e suas respectivas regras de derivação.

Embora nas ementas para as duas disciplinas sejam consideradas duas referências de livros didáticos, em geral, os temas são desenvolvidos de acordo com a proposta do texto intitulado “Cálculo: um curso moderno e suas aplicações”, sétima edição, 2002, cujo autor é de Laurence D. Hoffmann e Gerald L. Bradley. É um livro dividido em sete capítulos, dos quais só se trabalham os primeiros cinco (excluindo alguns temas).

O professor de ambas as disciplinas é o mesmo⁶⁸, cuja metodologia para o desenvolvimento das aulas compõe-se fundamentalmente de seis estratégias⁶⁹: momentos expositivos, momentos de experimentação, utilização de vídeos temáticos, momentos de resolução de problemas, o uso da rede social “Facebook” e a estratégia de modelagem como proposta pedagógica. As três primeiras são estratégias utilizadas fundamentalmente em sala aula, enquanto as três últimas misturam momentos em sala e momentos extras sala.

Os momentos expositivos são falas do professor, utilizados, em geral, para introduzir, desenvolver e/ou exemplificar algum conteúdo particular com o propósito de avançar na temática de acordo com o conteúdo programático. O professor usa geralmente “slides”, produzidos com o “software Microsoft Powerpoint”, para apoiar suas exposições em aula, “slides” que, em geral, são usados em dois momentos: de

⁶⁸ As duas disciplinas são ministradas por meu orientador, o professor Marcelo de Carvalho Borba.

⁶⁹ O resumo que apresento aqui sobre a metodologia utilizada pelo professor é feito com base nas minhas observações das aulas por um período de três semestres consecutivos (2012-2, 2013-1, 2013-2), enquanto acompanhava o professor como aluno estagiário e pesquisador. As aulas do semestre 2013-1 ficaram registradas em vídeo. No semestre 2012-2, foi assumido como piloto da pesquisa e, no semestre 2013-1, foram produzidos os dados que serão objetos de análise na próxima sessão.

revisão e de avanço. Na revisão é apresentada uma síntese do abordado nas aulas anteriores e no avanço o conteúdo programático novo, que será trabalhado na aula correspondente.

Os momentos de experimentação e de estratégias de visualização são geralmente acompanhados de instrumentos computacionais, em particular pelo programa “Geogebra”. Em diversos momentos o professor propõe problemas abertos relacionados com os conteúdos programáticos, para que os alunos, reunidos em pequenos grupos (depende do número de computadores que há em sala⁷⁰), experimentem, visualizem, conjecturem e proponham soluções, ou tentativas para solucionar, segundo o problema em questão. Essa estratégia é utilizada tanto para introduzir como para desenvolver alguns conteúdos⁷¹. Por serem problemas abertos, o professor instiga os alunos a exporem suas soluções pedindo para explicarem os caminhos percorridos, os raciocínios desenvolvidos e as conjecturas criadas no processo. Esta estratégia culmina geralmente com um encerramento por parte do professor, tentando amarrar as ideias principais de cada grupo aos conceitos que estão sendo trabalhados no momento.

A estratégia de uso de vídeo, segundo o professor, visa introduzir temáticas, exemplificar usos de conceitos, fazer explicações, mostrar aplicações de algum conteúdo, revisar alguma temática e gerar reflexões e debates relacionados com a alguma temática importante, própria ou não, do conteúdo programático interagindo com as outras estratégias⁷². Alguns dos vídeos utilizados são tomados da Internet e outros, produzidos pelo professor ou por algum membro de sua equipe de trabalho⁷³.

A solução de problemas, por sua parte, é uma estratégia constante que o professor usa nas aulas, para provocar nos alunos a necessidade de pensar os conceitos em casos particulares ou problemas específicos, geralmente usando os propostos pelo livro didático. Alguns desses problemas são resolvidos em pequenos

⁷⁰ Com antecipação, o professor pede que os alunos levem os “laptops” pessoais para a sala de aula.

⁷¹ Um exemplo de introdução de um conteúdo com a estratégia de experimentação é o caso da introdução da derivada, cujo problema proposto pelo professor foi: “Suponha que não seja possível digitar no Geogebra expressões como x^2 , $x.x$, etc. Dada tal restrição, esboce $y=x^2$ utilizando retas.” Um exemplo para o desenvolvimento de conteúdo foi o caso do estudo sistemático das variações que eram visualizadas no gráfico de uma função linear e quadrática quando fazem variar experimentalmente os valores dos parâmetros.

⁷² Uma discussão mais ampla sobre o uso de vídeos na sala de aula, no contexto dessas disciplinas, pode ser achada na dissertação de mestrado de (Domingues, 2014).

⁷³ O grupo GPIMEM conta com um canal próprio de Youtube em que vão sendo postados os vídeos produzidos pelos membros de acordo com os respectivos interesses acadêmicos.

grupos; outros, de forma individual; e algumas vezes, pelo grupo todo. Quando é em pequenos grupos ou individual, o professor geralmente pede para compartilhar as respectivas soluções com os demais alunos da sala, pedindo para enfatizar os caminhos usados para chegar à solução. Algumas das aulas são programadas pelo professor com o único propósito de resolver problemas e dúvidas dos alunos. Comumente, isso acontece quando ele encerra algum ciclo programático.

Do mesmo modo que a estratégia do vídeo, a rede social “Facebook”, em grupos fechados, tem-se constituído de uma importante estratégia para o desenvolvimento da disciplina. No começo da disciplina, o professor cria um grupo fechado e convida todos os alunos participar dele⁷⁴. As funções principais desse grupo são de três tipos. Em primeiro lugar, como canal de comunicação: informações, apontamentos e programações voltados para a disciplina. Em segundo, como lugar para postar e compartilhar arquivos de interesse comum para serem consultados em qualquer momento. Em geral os arquivos são documentos, textos, vídeos, “slider” das aulas, etc. E terceiro lugar, como espaço de discussão para resolver dúvidas, problemas ou inquietações diversas relacionadas com o conteúdo curricular.

Finalmente, a estratégia de Modelagem, apresentada aos alunos como uma perspectiva pedagógica, tem como principal característica convidá-los para que, em pequenos grupos, de no mínimo quatro e máximo seis pessoas, escolham um tema de comum interesse, formulem alguma situação problemática e/ou pergunta referente ao tema escolhido, para, a partir daí, construírem soluções ou proponha respostas a tais problemáticas e/ou perguntas. Como produto os grupos devem entregar um texto escrito como síntese do processo de investigação e desenvolvimento do tema. Durante o semestre, o professor solicita aos grupos que entreguem diferentes versões do texto escrito e uma versão final pouco antes de culminar o calendário da disciplina. Durante o tempo letivo, o professor combina uma data para que os grupos apresentem os resultados do projeto (pessoas externas podem ser convidadas também a participarem). Como parte do projeto é solicitada também a produção ou edição de um vídeo relacionado com a temática escolhida. Esta estratégia de modelagem é o foco principal de minha pesquisa.

⁷⁴ Isso não implica que todos os alunos sejam obrigados a ter uma conta ou, mesmo tendo quem não quiser participar do grupo também não é cobrado.

O objetivo do professor com a solicitação da entrega de diferentes versões no percurso do semestre letivo e da apresentação oral pública é fazer parte ativa das equipes de trabalho na tomada de decisões coletivas orientadas para a produção do projeto. O intuito com a produção do vídeo é explorar com os alunos o que Domingues (2014) propõe em sua dissertação como formas de comunicação multimodal. Esse pesquisador, apoiado em diferentes autores, considera que a multimodalidade refere-se a processos de comunicação, “especialmente da forma como os significados são comunicados através de diferentes recursos semióticos ou como eles são construídos em diferentes contextos sociais” (DOMINGUES, 2014, p. 19). Para esse autor, a produção de vídeos como parte da proposta de modelagem favorece a comunicação multimodal.

Em geral, a proposta de avaliação da disciplina é somativa⁷⁵, com duas provas parciais de diferentes pesos na nota final, e outra nota para o trabalho de modelagem. O valor de nota da primeira prova tem um peso menor que a da segunda, pela dificuldade e abrangência crescente dos conteúdos. Para o caso do trabalho de modelagem, o professor o avalia pela quantidade e qualidade das versões entregues no decorrer do semestre, pela qualidade da apresentação oral e pelos usos que dão ao vídeo produzido ou editado⁷⁶.

Embora o professor seja diretamente responsável pela disciplina que ministra, muitas das decisões acadêmicas são tomadas apoiando-se em uma equipe de trabalho, que o acompanha durante o semestre. Essa equipe é composta por um ou dois alunos do programa de pós-graduação em Educação Matemática, que atua (ou atuam), geralmente, como estagiário(s) e, por vezes, e (são) orientando(s) do mesmo professor. Além disso, dependendo das condições administrativas do instituto ao que pertence o curso, pode contar com alunos de graduação, para atuar como monitores da disciplina, geralmente com uma bolsa paga pela mesma Universidade.

⁷⁵ Este tipo de avaliação diz respeito ao produto demonstrado pelo aluno em situações previamente estipuladas e definidas pelo professor materializando-se em uma nota, (CHUEIRI, 2008).

⁷⁶ Como já exposto, toda prática pedagógica leva implícitos processos de regulação que, de acordo com Bernstein (2005), permitem que os atores assumam seu caráter de professor e/ou aluno materializado nas ações de uns e outros. Nesse sentido, conseguir uma boa nota será um dos objetos latentes para as atividades de ensino e aprendizagem.

5.2.3 A tarefa modelagem como unidade de análise

De acordo com Vygotsky (1986), uma unidade designa um produto de análise que possui as características básicas do todo. Nesse sentido a unidade é uma parte vital e irreduzível do todo. A unidade de análise, desta pesquisa está constituída pela tarefa modelagem, como uma entre outras do conjunto proposto pelo professor para dinamizar o sistema de atividades de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, o processo de análise concentrou-se nas ações conjuntas orientadas ao desenvolvimento da tarefa de modelagem. Parte do caráter pedagógico da modelagem está representada no fato de surgir dessa interseção. Usando o modelo figural do sistema de atividades Engeström (1987), na figura 4 apresentamos uma tentativa de organização e ilustração gráfica que resume o lugar da tarefa modelagem, entendida como unidade geral de análise da pesquisa⁷⁷.

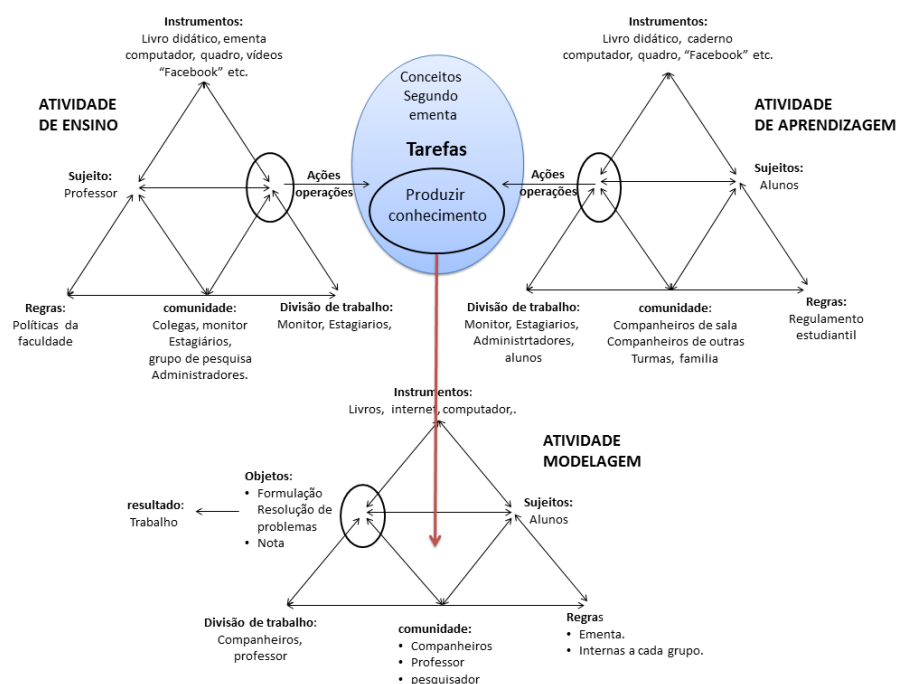
As tarefas são entendidas aqui como um dos pontos de partida e/ou condição inicial que o professor cria para materializar suas intencionalidades, além de uma forma de regular as ações dos alunos juntamente com as diferentes propostas de avaliação. Vistas assim, as tarefas, em particular a modelagem, não são apenas o que o professor propõe aos alunos para serem feitas fora de aula com caráter de “dever de casa”, mas também como formas de ele se expor cognitiva, epistemológica e politicamente a seus alunos. Desse modo as características teóricas da proposta de modelagem (apresentadas no capítulo II), a forma como são apresentadas aos alunos e como depois são desenvolvidas (como acima exposto) permitem entender não só como acontecem as interações que emergem dessa atividade, mas também seus sentidos e significados. É possível reconhecer, por exemplo: (1) o que o professor está querendo ensinar ou o que está querendo que os alunos aprendam; (2) as perspectivas teóricas e metodológicas de conhecimento; e (3) os propósitos e tendências esperadas para o uso dos conhecimentos ensinados e aprendidos de acordo com algum contexto societal.

O propósito da tarefa modelagem enquadra-se nos objetivos gerais tanto da disciplina quanto do curso e pode ser inferido no texto elaborado pelo professor para complementar o conteúdo programático oficial da disciplina (ver apêndice A),

⁷⁷ É importante acrescentar que a tarefa modelagem pode ser assumida ela mesma como um sistema de atividades de acordo com outras atividades de cada aluno.

...Porém é mais importante ainda que vocês aprendam como estudar e onde achar novas informações que vocês precisarão ao longo da sua vida profissional...

Figura 4: A tarefa de modelagem como unidade de análise



Fonte: O autor

Da frase “aprender como estudar” é possível interpretar que o intuito do professor é a criação de um espaço para a produção e reprodução não só dos conceitos considerados no conteúdo programático da disciplina, mas também daqueles necessários ao aprofundamento em algum outro tema pertinente às vidas dos alunos como profissionais. Isso pode ser entendido como uma forma de o professor fornecer um espaço para instigar a investigação e não focar apenas em temas relacionado com algum conteúdo preestabelecido na ementa. Sendo o ato de “pesquisar” entendido como uma prática orientada à produção de conhecimento, visando, de acordo com Wartofsky (1979), desenvolver práticas de modelagem (ver capítulo II)⁷⁸.

⁷⁸ Para Wartofsky (1979), o conhecimento é fruto da evolução histórica dos seres humanos, e qualquer análise relacionada com a produção de conhecimento deve ser feita a partir da principal característica das práticas cognitivas humanas: a habilidade para representar. E isso implica a

Para avançar na procura desse propósito o professor propõe aos alunos que se organizem:

...em grupos de no mínimo quatro e máximo seis alunos, vocês estão convidados a escolherem um tema, de comum interesse do grupo, para trabalharem ao longo do semestre. Embasados neste tema, deverão construir possíveis respostas e/ou soluções à(s) uma(s) pergunta(s) e/ou problema(s) de interesse que surjam enquanto o grupo aprofunda no tema... (Texto introdutório que acompanha a ementa)

De acordo com as características da proposta, o convite é para produzir um projeto útil para não só para si próprio, mas também para a comunidade acadêmica eventualmente interessada no mesmo tema. Isso significa que o produto final será alguma forma de organização conceitual, fruto do ato de pesquisar.

Pensem em como o trabalho poderia ser útil para vocês ou para outras pessoas e que talvez ele *possa ser publicado em algum jornal ou ter um impacto em alguma comunidade*. Mas o fundamental é escolher um tema e construir a(s) pergunta(s) e/ou o(s) problema(s) que despertem a curiosidade e o interesse do grupo. Curiosidade é fundamental tanto para o pesquisador quanto para o professor e também para o aluno, (Texto introdutório que acompanha a ementa).

Visto assim, o processo inclui quatro momentos intimamente conectados por níveis que, de acordo com a dinâmica do processo desenvolvido no tempo, podem garantir ou não o sucesso do produto final. No primeiro momento, os alunos devem constituir uma equipe de trabalho. Num segundo momento, devem escolher um tema de interesse coletivo. No terceiro, devem constituir algum enfoque dentro o tema escolhido. No quarto momento, precisam formular alguma situação problemática que os leve à necessidade de criar argumentos para responder ou resolver a situação problemática formulada.

As intencionalidades da modelagem podem ser interpretadas como diferentes das relacionadas com as tarefas associadas às outras estratégias de ensino da disciplina. Enquanto as últimas estratégias têm uma relação direta com as temáticas da disciplina, ficando condicionadas ao cumprimento do conteúdo programático, as intenções com a tarefa modelagem são de tentar desafiar a linearidade da ementa

proposta pela institucionalidade (romper com a rigidez no currículo), assim como de transformar o “status” vertical do relacionamento tradicionalmente estabelecido entre professor e aluno. Isso pode ser inferido do apontamento do professor quando fala aos alunos sobre a relação da tarefa modelagem com a matemática: “...*O trabalho deve ter matemática? Não, tem que ter vontade de fazer um bom trabalho para vocês, só isso...*” (fala do professor na aula 2 para Biologia).

Em conclusão, o propósito da tarefa modelagem idealizado pelo professor pode ser interpretado como ensinar a pesquisar, quando propõe que os alunos assumam o papel de pesquisadores. No entanto, assumir ações de pesquisador implica ganhar autonomia e aptidão de liderança. Por isso, um dos intuitos do professor é que há uma grande chance de que esses valores sejam desenvolvidos quando os alunos se apropriam do processo, assumem as ações de escolha do tema, formulam os objetos de pesquisa (situações problemáticas) e constroem argumentos para respondê-las. Tudo sem estar totalmente preso em desdobrar suas ações sob a lógica de uma simples tarefa para se obter uma nota.

5.3 Método de produção da informação documental

Como uma forma de organizar o processo de análise, a proposta pedagógica da modelagem foi interpretada como o método de estimulação dupla ou dual⁷⁹, proposto por Vygotsky (1986)⁸⁰, para dar conta do desenvolvimento humano como um processo de permanente transformação. De acordo com Daniels (2011), o método de estimulação dupla é “um modo de estudar o funcionamento humano à medida que se desenvolve, em vez de considerar as funções que haviam se desenvolvido” (DANIELS, 2003, p. 183). Segundo esse autor, o método de estimulação dual consiste em apresentar aos indivíduos dois estímulos simultâneos: o primeiro é um problema que estimula a realização de ações e o segundo oferece a possibilidade de construir os meios para solucioná-lo. Em palavras de Daniels, a essência desse método é que:

⁷⁹ Também denominado método experimental-genético, método instrumental ou método instrumental genético (Engeström, 2007; Daniels, 2011)

⁸⁰ Neste site <http://www.marxists.org/archive/vygotsky/>, acha-se um arquivo com as referências mais significativas desse autor.

Os sujeitos sejam colocados numa situação em que um problema é identificado e eles também são munidos de ferramentas para solucionar o problema *ou do meio pelo qual podem construir ferramentas para solucioná-lo*. (DANIELS, 2011, p. 72).

A tarefa modelagem, de acordo com sua descrição acima apresentada (ver também o capítulo II), é considerada uma estratégia pedagógica com características semelhantes às do método de estimulação dupla, na medida em que: (1) em pequenos grupos os alunos são convidados a constituir um projeto de pesquisa, entendido como projeto de modelagem (primeiro estímulo)⁸¹; (2) durante o processo, os alunos são munidos com diferentes artefatos culturais, que os auxiliam para a solução do problema⁸² (segundo estímulo).

O apoio direto de pessoas com diferentes experiências relacionadas com a temática escolhida (professor da disciplina, alunos de pós-graduação em educação matemática que atuam como estagiários na disciplina, monitores, pesquisadores da mesma universidade e de outras) são considerados mediadores (mediação intersubjetiva). Do mesmo modo, outros meios artefatuais físicos e simbólicos necessários para desenvolver o projeto, tais como: a internet, livros, revistas, relatórios de pesquisa, instrumentos de laboratórios, etc. foram disponibilizados intencionalmente. Em particular, destaco o papel dos artefatos simbólicos matemáticos, que se vão imbricando com as ações dos alunos orientadas para produção do projeto. Podemos dizer que essa complexa imbricação é o foco da análise.

Em outras palavras, como acima exposto, tomando por unidade de análise as ações orientadas para o desenvolvimento da tarefa modelagem, focamos em *dois elementos* fundamentalmente: (1) as ações dos alunos no processo de construção do projeto; (2) as ações artefatuais para a realização dessas ações, dando ênfase em dois dos três propósitos implícitos da proposta pedagógica da modelagem: a produção e a reprodução (aprendizagem) de conhecimento (ver capítulo II).

⁸¹ Pesquisas desenvolvidas pelo grupo GPIMEM, baseadas nas ideias da proposta pedagógica de modelagem de Borba e Villarreal (2005), têm mostrado que a escolha de alguma tem de interesse e a formulação de perguntas e problemas relacionados com tal tema é já um verdadeiro problema.

⁸² Neste caso o problema não remete aos problemas formulados por eles como parte do projeto (comentário anterior), senão ao problema que implica formular e desenvolver um projeto de pesquisa.

O primeiro elemento diz respeito às ações dos alunos para a construção do projeto (*primeiro estímulo*), que implicou: (1) a identificação do coletivo de alunos para cada trabalho e sua organização, no sentido de Souto (2013)⁸³, como equipe de trabalho; (2) a determinação do objeto da atividade modelagem⁸⁴, assumindo que toda atividade se transforma em períodos de tempo, de acordo com as mudanças do objeto da atividade: (a) escolha do tema; (b) formulação dos problemas e/ou perguntas no contexto dos temas escolhidos; e (c) produção de respostas às perguntas e/ou resolução aos problemas formulados. Esse grupo de ações foi dividido em dois momentos constituídos pelos itens a e b; e o segundo, pelo item c.

Já o segundo elemento focado (*segundo estímulo*) é transversal a todo o processo de modelagem, porém uma das ênfases foi colocada no papel que tiveram as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico nos diferentes momentos da modelagem, principalmente, mas não unicamente, no momento da construção dos argumentos, que permitiram a solução das situações problemáticas formuladas pelos alunos. Papel que, nesse caso, indicou os diferentes usos que foram dados às técnicas, conceitos e objetos matemáticos institucionalizados historicamente (capítulo III) e tiveram significados algébricos em algum dos diferentes momentos do desenvolvimento do projeto, em que significado, interpretando Vygostky (1986), implica reconhecer as formas de legitimação local relativas às expressões ditas a respeito de algum objeto no contexto de uma atividade (neste caso da atividade modelagem).

De acordo com a perspectiva teórica adotada na qual um dos aspectos fundamentais está relacionado com a possibilidade de contribuir com processos de transformação das práticas, metodologicamente, foi necessário criar condições para que eu, como pesquisador, pudesse participar ativamente tanto das aulas como do processo de desenvolvimento da atividade modelagem. A seguir descreverei as ações realizadas, as dificuldades superadas e as decisões tomadas para estabelecer tais condições, visando à produção da informação requerida para a análise.

⁸³ Essa autora prefere o termo organização à divisão de trabalho, na medida em que o primeiro indica mais um processo coletivo.

⁸⁴ Pode-se dizer objeto secundário na medida em que o objeto primário continua sendo obter uma boa nota final e aprovação na disciplina. Nesse sentido o objeto secundário pode ser assumido como uma expansão do primário.

5.4 O compromisso do pesquisador e as fontes de documentação

Um dos aspectos mais importantes de todo processo de pesquisa relaciona-se com os critérios para determinar o grupo focal, com as formas de construção das fontes documentais e com a definição das estratégias do pesquisador para coletar as informações pertinentes que lhe permitam dar respostas válidas às inquietações de interesse. Deslauriers e Kérisit (2012, p. 139) propõem três critérios de validade para os instrumentos de coleta da informação que determinam as fontes documentais em ciências sociais: o primeiro refere-se à capacidade dos instrumentos de trazerem as informações desejadas; o segundo alude à eficácia desses instrumentos, principalmente no quesito rentabilidade, tempo da pesquisa, custos, e acessibilidade permitida e possível; o terceiro diz respeito às características do meio social (critério da ética). Este último implica responder até que ponto o pesquisador tem direito de intervir no campo e na vida dos sujeitos participantes da pesquisa.

Levando em consideração que a pesquisa qualitativa se preocupa principalmente com práticas de pessoas em toda sua complexidade, a tentativa de atender ao critério ético predominou durante o processo. Algumas das dificuldades e decisões tomadas relacionadas à obtenção da informação desejada (primeiro critério) e sua eficiência (segundo critério) dependeram do processo de negociação que tive com os alunos e o professor da disciplina, para poder intervir no campo, para ter o direito de participar ativamente das diferentes práticas, tanto de estudo incluindo as relacionadas com as práticas de modelagem, quanto de ensino. Nesse sentido, as ideias que apresento a seguir têm por objetivo descrever como foi o processo de produção de dados, que condicionou cada um dos critérios mencionados.

No segundo semestre de 2012, após o projeto de pesquisa ter sido avaliado e aprovado por meu orientador e demais instâncias acadêmicas do programa de pós-graduação, considerou-se que vários ajustes ainda tinham que ser feitos pensando na produção dos dados. Esses ajustes só eram possíveis se eu conhecesse mais de perto as condições reais em que a proposta pedagógica da modelagem era realizada⁸⁵. Com isso, decidimos que eu deveria acompanhar o professor (meu

⁸⁵ Até esse momento eu nunca tinha tido a chance de vivenciar o processo com os estudantes.

orientador), o desenvolvimento da disciplina Matemática Aplicada para Biologia desse semestre, com o propósito de entender as características do processo, e preparar melhor a coleta real dos dados.

Resumo em quatro ideias principais o que foi considerado relevante dessa experiência e que serviram de base para o desenvolvimento dos instrumentos que permitiram produzir os dados no semestre 2013-1. As conclusões deste primeiro momento que vou apresentar dependem basicamente de minhas observações registradas no diário de campo, dos trabalhos escritos entregue para o professor e da filmagem das apresentações dos projetos.

O primeiro aspecto são as características gerais dos alunos. Encontrei um grupo de 35 alunos com uma idade média entre 18 e 22 anos (segundo o professor, eram 43 alunos oficialmente matriculados). Pode-se dizer que a maioria dos alunos manifestou uma visão negativa da Matemática e entre eles ainda alguns disseram ter certeza de não gostar, quase odiar os assuntos que têm a ver com a Matemática. Essas respostas explícitas foram dadas à pergunta feita pelo professor. Nas palavras do professor (falando para eles), isso deveria criar um clima de desafio para o grupo, pois, de um lado, poderia se assumir como uma oportunidade de mudar a visão negativa da matemática e, de outro, o reconhecimento da dificuldade poderia ser uma forma de começar a solucioná-la. Achei de particular importância esse ponto, pois a visão negativa da matemática⁸⁶ pode chegar a ser determinante para seu uso nos trabalhos de modelagem.

Outro aspecto que se destacou foi o relacionado com o nível acadêmico dos alunos, no referente ao conhecimento matemático e ao papel que esse conhecimento representa para eles nas atividades cotidianas. De modo geral, considero que o domínio matemático dos alunos no nível de educação em que se encontram (educação superior) está aquém do desejável. Essa preocupação também foi manifestada pelo professor e ficou a grande questão sobre o que fazer para tentar resolver essa problemática⁸⁷. Uma possibilidade cogitada foi pensar em retomar parte dos conteúdos prévios e necessários para garantir o desenvolvimento da ementa. Em discussões com o professor, consideramos que talvez grande parte das dificuldades dos alunos e do insucesso na disciplina tem mais a ver com vazios

⁸⁶ Conforme apresentado no capítulo III a visão metamatemática é um elemento importante das práticas matemáticas.

⁸⁷ Essa não é uma problemática nova. Algumas pesquisas se referem a esse tipo de questão. Ver por exemplo, (BREUNIG; NEHRING, 2013; SOUSA *et al.*, 2013).

conceituais do ensino básico, em particular, com conceitos relacionados com a compreensão e técnicas básicas de manipulação algébrica, do que com os conceitos próprios do Cálculo.

Dois aspectos chamam a atenção para essa situação: em primeiro lugar, o dilema do professor entre querer preencher esses vazios em sala de aula, correndo o risco de não atender ao conteúdo programático da disciplina, e seguir com a ementa da disciplina, admitindo que os vazios sejam responsabilidade dos alunos e do ensino básico. Em segundo lugar, as possíveis implicações negativas que esses vazios podem gerar na compreensão dos conceitos próprios da disciplina. Essa crença não é nova, como apontam Ponte e Guimarães (2014) ao fazerem um percurso histórico do ensino da Álgebra na escola formal.

A grande mudança na política de admissão no ensino superior (especialmente cursos de engenharia) durante o século XVIII aumentou a importância da álgebra no nível do ensino básico. Na época, a álgebra era um pré-requisito fundamental para o estudo do cálculo infinitesimal, (PONTE; GUIMARÃES, 2014, p. 464, tradução nossa).

O terceiro elemento diz respeito ao projeto de modelagem e à estrutura programática da disciplina. Quando o professor convida os alunos a escolherem uma temática sem condição prévia, salvo os interesses dos alunos, e ainda sem necessidade de relacioná-la com a Matemática, são inúmeras as possibilidades esperadas, chegando a produzir perda de controle sobre os temas que surgirão e da forma como acontecerá seu desenvolvimento.⁸⁸ Nesse sentido, eu corria um grande risco, pois como o projeto de pesquisa refere-se às práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico, eu precisava que os temas escolhidos pelos alunos tivessem alguma conexão com conteúdos matemáticos, em particular com a Álgebra.

Finalmente, talvez o mais importante de todos os aspectos cogitados, foi pensar como devia ser minha participação enquanto pesquisador. Quando Creswell (2007) comparou as cinco possíveis variações de pesquisa qualitativa (narrativa, fenomenologia, teoria enraizada, etnografia e estudos de caso), ressaltou que, de acordo com cada variação, o papel do pesquisador é um dos fatores determinantes para a produção de dados e a análise destes. Interpretando Fetterman (2010), o

⁸⁸ Borba e Penteado (2001) usam expressão “sair da zona de conforto” para discutir algumas das dificuldades enfrentadas neste tipo de situações.

pesquisador qualitativo é como um instrumento humano que entra em campo com a mente aberta, entretanto carregado de inquietações, diretrizes conceituais e conhecimentos prévios sobre o contexto de pesquisa, com o propósito de desenvolver análises de algum fenómeno cultural. Nesse sentido, e seguindo as considerações de Yamagata-Lynch (2010), o pesquisador pode adotar um papel que vai de um simples observador até um participante totalmente ativo das atividades contextualizadas, passando a ser um observador participante. Partindo dessa proposta, considerei que, pelos propósitos de minha pesquisa e tentando ser coerente com a perspectiva teórica e metodológica histórico-cultural da atividade humana, o ideal era ter um papel participante ativo nas atividades e para isso teria que conquistar a confiança dos alunos. Em outras palavras, em face de minhas limitações temporais, sociais e culturais, o principal desafio era saber como ganhar a confiança suficiente dos alunos no curto tempo (um semestre letivo), para que me permitissem participar naturalmente dos grupos e fazer parte de suas atividades de modelagem.

Ancorado nos resultados dessa experiência-piloto e depois de algumas discussões com meu orientador, as decisões a seguir foram tomadas com o intuito de conseguir a informação pertinente à pergunta de pesquisa:

- 1- Mesmo correndo o risco de que as temáticas não tivessem relação direta com a matemática, decidimos não colocar restrição alguma para a escolha da temática, cabendo aos alunos a liberdade de formular seus próprios problemas e perguntas. Isso por duas razões: a primeira porque se perderia a principal condição da proposta pedagógica da modelagem, que é a de dar a chance aos alunos de escolherem temas de interesse, além de formularem e construírem os argumentos para resolver os próprios problemas; e a segunda razão, porque, revisando o banco de projetos desenvolvidos nos semestres anteriores, em geral, cada turma tem produzido pelo menos um ou dois trabalhos que fazem referência a algum conteúdo matemático.
- 2- Para ampliar as possibilidades de ter grupos interessados em usar ou construir conceitos matemáticos para o desenvolvimento dos trabalhos de modelagem, decidimos produzir os dados nas duas turmas que o professor ministraria aula: Matemática Aplicada para Biologia e Cálculo I para o curso de Ecologia.
- 3- Para ganhar confiança e conhecer melhor os alunos, combinamos que eu seria o monitor nas duas turmas nesse semestre. Além da confiança, a ideia de ser

monitor também foi impulsada por Deslauriers e Kérisit (2012), que recomendam aos pesquisadores em ciências sociais saberem quem são os sujeitos pesquisados e inventar alguma forma de recompensá-los. Mesmo sendo eu o monitor, o professor conseguiu uma bolsa para outro, com quem trabalhei. Desse modo a equipe de trabalho ficou conformada por quatro pessoas: o professor, um estagiário (aluno de pós-graduação), um monitor com bolsa paga pelo instituto e eu, que além de ser estagiário em uma das turmas, também atuaria como monitor e pesquisador.

- 4- Consideramos importante gravar em vídeo todas as aulas das duas disciplinas para termos um panorama mais amplo das práticas específicas de ensino e aprendizagem em sala de aula e uma chance maior de possíveis análises das relações entre essas atividades com as práticas de modelagem (foco principal).
- 5- Com o propósito de reconhecer algumas das dificuldades e potencialidades dos alunos e tentar preencher parte das lacunas conceituais percebidas no grupo⁸⁹ relacionadas com os conceitos algébricos, foi criado um conjunto de situações-problemas, para que eles resolvessem no decorrer do semestre. O intuito era entender melhor como eles agiam quando se deparavam com problemas para resolver e talvez comparar parte dos resultados com os obtidos, quando encarassem a formulação e resolução de problemas nas práticas de modelagem. Além disso, tentar acompanhar um pouco mais de perto os alunos que tivessem mais dificuldades e, por essa via, ganhar mais confiança.
- 6- Finalmente, decidimos também continuar com a iniciativa do professor de acompanhar o desenvolvimento acadêmico dos alunos através de um grupo fechado na rede social “Facebook”.

Como já foi exposto, meu papel como pesquisador era de participante ativo nas ações relacionadas com a atividade modelagem. Nesse sentido algumas das decisões adotadas tiveram o propósito de ganhar essa confiança esperada e fazer com que os alunos se sentissem suficientemente próximos para me permitirem ser parte de seus grupos.

⁸⁹ Pela ampla experiência do professor como titular dessa disciplina, o esperado era que as turmas do semestre seguinte (2013-1) teriam as mesmas dificuldades.

5.5 Produção dos dados em relação com as fontes documentais

A disciplina de Cálculo I para o curso de Ecologia começou com uma turma de trinta e oito alunos e a de Matemática Aplicada para Biologia (modalidade noturna), foi de vinte e cinco alunos. O curso de Biologia tinha um grande percentual de alunos trabalhadores, e a idade média deles era um pouco maior que a da turma da Ecologia. A visão negativa e as dificuldades conceituais que tinham ambas as turmas com a Matemática foi bastante similar às do grupo-piloto.

A introdução feita pelo professor foi similar à da disciplina da experiência no semestre anterior, começando pelas características do projeto de modelagem e os compromissos acadêmicos dos alunos e professor nesse processo. Da mesma forma que no piloto, o texto introdutório complementar da ementa oficial⁹⁰ entregue aos alunos foi o referente à metodologia e à forma de avaliação.

Embora o professor continuasse sendo diretamente responsável pela aula, nesse semestre me permitiu uma maior participação principalmente nos momentos de solução de problemas em aula, assim como na discussão de conceitos nas aulas e monitorias. Como apresentado, um dos propósitos do meu papel como monitor era, em primeiro lugar, compreender melhor as dificuldades dos alunos em relação com o conteúdo da disciplina e, em segundo lugar, ganhar confiança para que me permitissem participar ativamente no trabalho de modelagem e assim tentar entender melhor as relações das ações orientadas à produção do projeto com as orientadas para ensino e a aprendizagem.

No início das monitorias, pedi permissão aos alunos para filmá-las, todavia, mesmo eles aceitando, pude perceber que não estavam tendo uma reação positiva, pois com a filmagem eu estava bloqueando a minha tentativa de conquistar a confiança deles. Foi assim que decidi registrar minhas observações apenas em notas escritas no diário de campo.

Todas as aulas foram gravadas em vídeo, também com a aprovação da turma, com o objetivo de compreender melhor seu desenvolvimento e as possíveis relações com a atividade de modelagem. Entretanto, do mesmo modo que nas

⁹⁰ As ementas oficiais poder ser baixadas do site da UNESP, nos endereços:
http://ib.rc.unesp.br/Home/DivisaoTecnicaAcademica/SecaodeGraduacao/calculo_i_eco.pdf
http://ib.rc.unesp.br/Home/DivisaoTecnicaAcademica/SecaodeGraduacao/matematica_aplicada_not.pdf

monitorias, em alguns momentos os alunos reagiram negativamente, quando tentei filmar de perto as produções e discussões particulares. Ficou registrado apenas o trabalho do professor, as participações na lousa dos alunos, algumas aproximações ao trabalho particular dos alunos e minhas notas no diário de campo. Essas filmagens constituem outra das fontes de dados que foram analisadas.

5.5.1 Os trabalhos produzidos.

Como de costume, o projeto de modelagem iniciou com o convite do professor para desenvolver um trabalho como uma das tarefas que teriam um peso na nota final.

...Então vocês escolhem um tema, aí vão pensar um pouco mais o problema, o que vocês vão querer ver. Aí, depois que vocês virem aquele problema, vão a pensar em uma apresentação por escrito e um pouco mais para frente, vocês vão preparar uma apresentar oral que vamos marcar um horário depois para isso. Temos que ver os horários de todos; ainda não adianta combinar isso... A gente também vai ter a apresentação de um vídeo... Caso vocês não saibam mexer com vídeo, podem pedir ajuda para mim, para o Mazzi (o aluno estagiário), para o Fabian (monitor e pesquisador) ou a gente pede para Nilton (aluno de mestrado orientado pelo professor) que ele sabe muito e pode-nos ajudar. E se vocês quiserem, ele (Nilton) pode oferecer um curso... (trecho tomado da fala do professor na primeira aula para a turma de Biologia)⁹¹

5.5.1.1 Trabalhos produzidos pela turma de Ecologia:

- a- Por um grupo de cinco alunos foi elaborado o trabalho intitulado de “Alelopatia”, que teve como objetivo analisar o uso do potencial alelopático⁹² das plantas em substituição de agrotóxicos. Começaram apresentando as ideias gerais da alelopatia e seu potencial na substituição de agrotóxicos, que agem como controle biológico de espécies daninhas para certos cultivos. Compararam os

⁹¹ Os nomes das pessoas, tanto dos alunos como dos demais participantes, são os reais, pois eles autorizaram a usá-los.

⁹² De acordo com os autores do trabalho, a Alelopatia consiste em um processo envolvendo metabólitos secundários (substâncias responsáveis pelas relações entre o indivíduo e o ambiente) produzidos pelas plantas e microrganismos, que influenciam o crescimento e o desenvolvimento de sistemas agrícolas e biológicos.

custos econômicos, sociais e de saúde pública com essas duas maneiras de proteger os cultivos de plantas parasitas, controlar as doenças e ataque de insetos. Após isso, apresentaram alguns modelos matemáticos para quantificar a capacidade alelopática de uma planta. Consideraram que o potencial alelopático de uma planta pode ser quantificado a partir dos parâmetros de bioensaios de germinação: porcentagem de germinação, frequência relativa de germinação, tempo médio de germinação e coeficiente de variação.

- b- O segundo trabalho, produzido igualmente por um grupo de cinco alunos, foi intitulado de “Compostagem”. Trataram do processo de transformação de lixo orgânico em compostagem, focando nas particularidades das diferentes técnicas, para no final analisarem as possibilidades de sua aplicação na produção do desperdício orgânico do restaurante da UNESP, Campus de Rio Claro. Iniciaram mostrando como a compostagem gera um benefício para o uso agrícola, considerando que este processo constitui uma chave para o alcance de um desenvolvimento sustentável, pelo fato de atuar na minimização de impactos ambientais e na maximização da separação de lixo e reciclagem. Defenderam que com o uso de composto orgânico podem-se substituir os fertilizantes químicos por minerais.
- c- Com o título de “Consumismo exagerado”, um grupo de quatro alunos discutiram algumas ideias que relacionam o crescente consumo das pessoas e a quantidade de produção de lixo, fruto do consumismo inconsciente. Discutiram os conceitos de obsolescência programada e obsolescência perceptiva mostrando como essas duas invenções ideológicas têm transformado o modo de consumo médio das pessoas em um consumismo exagerado. De um lado, os produtos estão sendo programados para que fiquem fora de serviço em períodos determinados, previamente programados pelos fabricantes, e de outro, a ideia é que as pessoas desejam substituir um produto ainda em boas condições por outro com aparência mais atual. Uma vez desenvolvida essa discussão, iniciaram uma reflexão relacionada com as implicações do consumismo exagerado na produção de lixo sólido e orgânico. Para finalizar, apresentaram algumas estatísticas relacionando taxas comparativas de crescimento da população, do lixo e dos níveis de consumismo.

- d- O quarto trabalho, intitulado de “Matemática e música: a história e as relações entre ambas no decorrer do tempo”, foi desenvolvido por um grupo de quatro alunos (inicialmente de cinco, mas um dos membros abandonou a disciplina). O objetivo tratado nesse trabalho foi descrever algumas das características que permitem transformar o som, em geral, em música. Para isso, apresentaram alguns conceitos básicos da Física, relacionados ao som, tais como: frequência, comprimento de onda, período e timbre. Para falar das notas conhecidas, usaram o conceito de frequência e algumas relações de proporcionalidade. Finalizaram usando uma fórmula matemática, que relaciona a frequência de onda do ar quando é soprado num tubo aberto, em ambos os lados, ou aberto só num lado com seu respectivo comprimento e velocidade do ar. Desse modo, tentaram explicar como podem ser construídos alguns instrumentos de vento. Fazem referência ao tratamento matemático pitagórico para o monocórdio e as relações de proporcionalidade entre os comprimentos de corda.
- e- O foco do quinto trabalho foi abordar a dinâmica do fogo, como agente evolutivo e ecológico do Cerrado, sendo desenvolvido por um grupo de seis alunos, intitulado de “O fogo como princípio de regeneração em uma Unidade de conservação com característica de Cerrado”. O cerrado é considerado o segundo maior bioma do Brasil, depois da Floresta Amazônica. Para delimitar melhor o trabalho, focaram na Unidade de Conservação Serra do Tombador, localizada em Goiás. O fogo é visto aqui como um modelador estrutural dos diferentes fragmentos presentes nesse bioma. Apresentaram um método de pesquisa que envolve o fogo como objeto de manejo nessa unidade de conservação e a maneira como isso afeta a sucessão ecológica do fragmento. Expuseram conceitos básicos e fundamentais que estão envolvidos na correlação fogo/cerrado.
- f- Foi apresentado por um grupo de quatro integrantes o trabalho intitulado “Os Jogos Eletrônicos no Brasil”. O trabalho dos alunos foi abordar a história dos jogos eletrônicos no Brasil, algumas questões culturais envolvidas no uso e venda de jogos, além de propor sugestões para seu uso como meio didático e reabilitação de pessoas doentes. Mostraram como os jogos eletrônicos no Brasil

têm ganhado maior visibilidade e espaço no mercado de vendas, durante o último ano, devido à expansiva evolução da tecnologia, havendo uma maior facilidade para adquiri-los, além da maior variabilidade de jogos disponíveis para todos os tipos de públicos. Essa ascensão tem causado divergências de opiniões sobre seus benefícios e malefícios. Apresentaram, por exemplo, as seguintes questões: até que ponto os jogos eletrônicos são bons para a sociedade? Como a população brasileira, usuária desse entretenimento, lida com questões tributárias? Quais serão os benefícios e malefícios que certos jogos proporcionam?

5.5.1.2 Trabalhos produzidos pela turma de Biologia:

- a- Um grupo de cinco alunos desenvolveu o projeto “A influência da música no ser humano”, cujo objetivo foi apresentar algumas das influências que a música tem sobre o ser humano. Iniciaram a discussão com algumas ideias sobre como a música age em nosso cérebro e seus reflexos no corpo. Afirmaram que o som é formado por timbre, altura, duração e intensidade e explicaram que a forma como acontece a organização desses elementos pode representar a cultura e a arte de um grupo de pessoas,; sendo impossível definir permanentemente o que é a música, por se tratar de um conceito particular, movido pela afeição de pessoas ou grupos. O foco da proposta era defender que, ainda sem poder definir o que é a música, ela influencia a pessoa física e psicologicamente, independentemente dos gostos musicais.
- b- Com o objetivo de conhecer a mecânica dos sentidos dos cetáceos e a forma como é utilizada para sua alimentação, localização no espaço e comunicação, um grupo de cinco alunos fez o trabalho sobre os “Cetáceos: um enfoque acústico”. Apresentaram ideias relacionadas com a Física do som e o aplicaram aos sons emitidos pelas baleias e golfinhos. Explicaram que as características desses sons são em geral ultrassônicos e baseados nessa explicação, mostraram como são usados por eles para se comunicarem, caçarem alimentos e às vezes para fugirem de predadores. Do mesmo modo mostraram como cientistas podem usar conceitos matemáticos, para localizar cetáceos no mar.

- c- O terceiro grupo, composto por quatro alunos, apresentou o projeto “Comportamentos ditos humanos praticados por outros Primatas” para questionar os limites das diferenças entre os seres humanos e outros animais, em particular com um grupo de macacos. Discutiram como alguns dos comportamentos ditos humanos, como a agressão, a resolução de conflitos, a sexualidade por lazer, as relações parentais, a comunicação, a linguagem, a psicopatologia, o uso de ferramentas, o senso de justiça, entre outros, são também praticados por outros primatas.
- d- Este grupo construiu o projeto para explicar as diferentes estratégias naturais de dispersão de sementes, além de apresentar formas de quantificação do processo desses processos, focando a atenção no método de zoocoria ou dispersão de sementes por animais. O projeto é intitulado “Dispersão de sementes” e desenvolvido por um grupo de quatro membros. Do mesmo modo, mostraram como as interações mutualísticas entre plantas e animais são importantes para a manutenção da estrutura e diversidade das florestas tropicais, convertendo-se numa ferramenta natural para o manejo e regeneração de áreas degradadas.
- e- Outro grupo de três alunos focou o projeto na Engenharia Genética, mostrando os processos de produção transgênica e de manipulação gênica de seres vivos. Além disso, mostraram as principais técnicas de análise e aplicações voltadas para três temas centrais sobre o assunto: a área industrial, o campo médico e organismos transgênicos que podem ser usados em doenças.
- f- Um grupo de três estudantes apresentou o projeto intitulado “O Horror na Sétima Arte”, cujo propósito foi delimitar o desenvolvimento histórico com as principais características do horror no cinema. Começaram apresentando as origens do cinema, apelidado de sétima arte, seguindo com o nascimento dos filmes que mexem com o sentimento de temor das pessoas e que foi usado depois para o entretenimento. Concluíram o trabalho apresentando um conjunto de exemplos que mostram a evolução histórica dos aspectos que causam o sentimento de

horror nas pessoas e como a indústria tem aproveitado isso para produzir esses filmes com o intuito de garantir o sucesso.

Dos doze trabalhos apresentados, escolhi três para a análise: dois do curso de Biologia e um de Ecologia. A escolha respondeu a dois critérios principais. De um lado, porque são grupos que decidiram usar conceitos matemáticos para desenvolver a temática e, de outro, pela disposição dos alunos em me permitiram formas de participação no processo de Modelagem. Esses projetos foram: “música e matemática”, do curso de Ecologia e “Dispersão de sementes” e “Cetáceos: um enfoque acústico”, do curso de Biologia. Como já exposto, alguns dos problemas enfrentados para obter a informação requerida foram: em primeiro lugar, ser aceito pelos alunos para participar ativamente do processo, o que significava ser mais um membro do grupo com direito a opinar e ter responsabilidades relacionadas com a construção do projeto. Em segundo lugar, uma vez aceito, ter a permissão deles para registrar os encontros em vídeo e/ou gravador de sons. Como expressa Yamagata-Lynch (2010), quando a pesquisa está relacionada com o estudo de sujeitos em atividade,

[...] os investigadores precisam de se sentir confiantes de que os seus critérios de seleção irão permitir-lhes (a) ter acesso às experiências dos participantes que são mais relevantes para o estudo, (b) poder entrar no mundo dos participantes, e (c) explicar o fenómeno em termos das atividades desenvolvidas. (YAMAGATA-LYNCH, 2010, p. 69).

Foram várias as estratégias usadas para obter os três elementos propostos por esse autor. A primeira foi através do convite feito no texto introdutório da disciplina. Nele foi explicitado que eu estava disposto a acompanhá-los como co-orientador. Depois o professor reforçou esse convite verbalmente apresentando-me como aluno do programa de doutorado em educação matemática e informando que participaria das aulas com três intencionalidades: acompanhá-los no desenvolvimento do trabalho; ajudá-los nas dificuldades conceituais relacionadas com a disciplina enquanto monitor; e, como pesquisador, iria produzir dados para minha pesquisa.

A atividade como monitor foi de particular importância. Foi nesses espaços de monitoria que pude me aproximar mais deles e criar laços de confiança e de ajuda compartilhada. Enquanto os ajudava com as dificuldades da disciplina, eles se tornavam mais receptivos e progressivamente me permitiam participar de suas

equipes de trabalho. Para as discussões relacionadas com o projeto, lhes foi proposta a construção de um grupo fechado pela rede social “Facebook”. Infelizmente essa estratégia não teve efeito esperado com nenhum desses três grupos.

Depois de algumas conversas, o grupo que desenvolveu o trabalho intitulado “Matemática e música” permitiu que eu participasse das reuniões de preparação do projeto. Foram realizados três encontros durante o semestre, todos gravados digitalmente. Desse modo, consegui me tornar um pesquisador com o papel de participante ativo. No entanto, nenhum dos outros grupos aceitou totalmente meu convite, impossibilitando-me de participar ativamente do processo, tendo que transformar meu papel de pesquisador e a estratégia para conhecer mais de perto as características do processo por eles vivido enquanto produziam o projeto.

Araújo e Borba (2004) relatam que essas situações em pesquisas de abordagem qualitativa tornam-se bastante comuns porque o “*design*”⁹³ das pesquisas naturalísticas geralmente é emergente, ou seja, “vai sendo construído à medida que se desenvolve e seus passos não podem ser rigidamente determinados *a priori*” (BORBA, ARAÚJO, 2004, p. 31, grifos dos autores). No meu caso, a mudança de papel implicou passar de participante ativo para um observador participante (YAMAGATA-LYNCH, 2010), e a estratégia para me aproximar do processo vivido pelos alunos foi através de entrevistas individuais, depois de terem concluído a disciplina.

A opção pela técnica de coleta de dados através da entrevista deve ser feita quando o pesquisador/entrevistador precisar valer-se de respostas mais profundas para que os resultados da sua pesquisa sejam realmente atingidos e de forma fidedigna, (ROSA, ARNOLDI, 2006, p. 14).

Esse foi outro dos critérios para escolher os projetos já mencionados para a análise: os alunos que aceitaram ser entrevistados e permitiram ser registrados em formato de vídeo.

As entrevistas foram esquematizadas com o propósito de criar mais um clima de conversa do que um processo de pergunta-resposta cerrado, para que os alunos verbalizassem os pensamentos que acompanharam as ações e operações

⁹³ O termo design é tomado por esses autores de Lincoln e Guba (1985) que o usam para se referir as transformações que experimentam as pesquisas naturalísticas no seu desenvolvimento.

realizadas nas práticas de modelagem. Em outras palavras, e seguindo as ideias de Rosa e Arnoldi (2006), foi uma entrevista com caráter semiestruturado.

As questões numa entrevista semiestruturada deverão ser formuladas de forma a permitir que os sujeitos discorram e verbalizem seus pensamentos, tendências e reflexões sobre os temas apresentados. O questionamento é mais profundo e, também, mais subjetivo, levando ambos a um relacionamento recíproco, muitas vezes, de confiabilidade, (ROSA, ARNOLDI, 2006, p. 30).

Dado que, diferentemente do projeto “Matemática e música” que acompanhei, a única informação que tinha desses outros projetos relacionava-se com as diferentes versões escritas entregues para o professor, o vídeo da apresentação oral com seu respectivo material e os apontamentos no diário de campo. O propósito da entrevista foi o de descobrir algumas das características do processo que não foi possível revelar com as fontes de informação já produzidas (processo de triangulação (BORBA; ARAÚJO, 2004)). Nesse sentido, mesmo as entrevistas conservando certo padrão por estarem os alunos orientados a responder questões relacionadas com a forma como foram construídas as situações-problemas, de acordo com o tema escolhido e suas respectivas soluções, realmente cada entrevista tomou rumo próprio por estar condicionada à temática e ao devir das ações de acordo com cada projeto a partir da visão de cada aluno entrevistado.⁹⁴ (as perguntas aparecem no apêndice B)

Em conclusão, as fontes de informação diretas para a produção dos dados estão constituídas por: diferentes versões do trabalho escrito com as observações do professor; minhas notas registradas no diário de campo; a filmagem e o debate gerado nas apresentações orais do trabalho para os demais companheiros; os materiais produzidos pelos alunos que auxiliaram as apresentações (“slide” e vídeo editado por eles); as gravações dos encontros com os alunos que realizaram o projeto “matemática e música” e o conjunto de entrevistas realizadas para os outros grupos escolhidos. Do mesmo modo, outras que chamo de fonte de informação indireta, tais como: gravações das aulas, as notas de campo, tomadas enquanto foram desenvolvidas as monitorias e conversas informais, a troca de “e-mails” com os alunos e a participação no grupo de “facebook”.

⁹⁴ Em anexo B apresenta-se um exemplo das perguntas realizadas em uma das entrevistas.

5.6 Confiabilidade, validade e integridade dos dados

Dado que o interesse da pesquisa tinha sido o sistema de práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico dos indivíduos (estudantes) em contextos institucionais específicos (sala de aula de matemática) e na singularidade da tarefa modelagem, o foco principal esteve nas práticas: sua organização e estrutura, reconhecendo os propósitos pedagógicos da tarefa (produção e reprodução de conhecimento). Nesse sentido, o fato de ter analisado a produção dos alunos de duas turmas de cursos diferentes, cabendo a mim papéis diferenciados como pesquisador (ativo e semiativo), não se tornou critério de invalidez nem de falta de integralidade dos dados coletados. Pelo contrário, permitiu-me ampliar a compreensão de diferentes aspectos das ações dos alunos.

Como apresentado acima, dispus-me de diferentes fontes de informação com o propósito de aumentar a validade e a integralidade dos dados produzidos. Desse modo, foi possível comparar, complementar e afinar a produção e análise dos dados. Seguindo o proposto por Borba e Araújo (2004a), recorri a processo de triangulação para validar e aumentar a confiabilidade da pesquisa. Em palavras desses autores:

A triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. (BORBA, ARAÚJO, 2004, p. 37).

Além da triangulação por fontes e por métodos, foi feito um processo de validação por pesquisadores na medida em que, desde o começo da constituição da pesquisa, na formulação dos instrumentos, na produção dos dados e nas análises, contei com a colaboração de diferentes pares e pesquisadores, pertencentes principalmente ao grupo de pesquisa GPIMEM, e de outros pesquisadores da área. A maioria da informação encontra-se digitalizada e foi organizada e tratada com o auxílio do “software Nvivo”, décima versão, cuja licença de funcionamento pertence ao GPIMEM.

6 CAPÍTULO V: AS PRÁTICAS MATEMÁTICAS NOS PROJETOS DE MODELAGEM

Resumindo as ideias até aqui construídas, o propósito da pesquisa era estudar as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico no contexto da modelagem entendida como uma proposta pedagógica. O termo prática faz aqui alusão ao conjunto de ações orientadas para produção de algum objeto que permita satisfazer alguma necessidade. Neste caso estamos falando de três tipos de prática intimamente ligadas e afetando-se mutuamente: práticas pedagógicas, práticas de modelagem e práticas matemáticas. As primeiras caracterizam-se por estar orientadas para reprodução e apropriação dos bens da cultura. As práticas de modelagem orientam-se para produção de conhecimento, à aprendizagem e à formação de pensamento crítico enquanto localizadas em contextos educativos. Já as práticas matemáticas orientam-se ao estudo, tratamento, formulação, solução, ampliação e análise de situações problemáticas relacionadas com formas geométricas e processos de quantificação. Quando essas práticas matemáticas dizem respeito ao tratamento analítico de relações e operações de quantidades indeterminadas (variáveis, incógnitas, parâmetros e números generalizados), relacionam-se com o conhecimento algébrico.

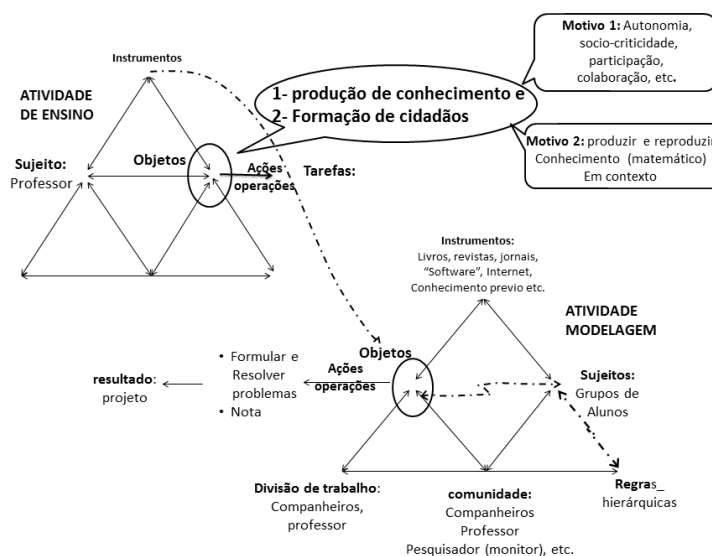
No começo do processo, a tarefa modelagem assume uma primeira tensão representada no duplo papel: como artefato explícito na atividade de ensino e como projeto. Nesse momento mais duas tensões podem ser identificadas. A primeira entre os sujeitos (grupos de alunos) e o objeto da atividade (estruturar o projeto); e a segunda entre os sujeitos e as regras da atividade representadas fundamentalmente pelas regras pedagógicas de hierarquia explicadas no capítulo II (mecanismos de controle, como a nota). Estas três tensões geraram o movimento que dá início ao processo que pode ser dividido em três momentos dependentes em forma sucessiva; isto é, o terceiro depende do segundo e o segundo, do primeiro. Ver figura 5.

Primeiro momento: Ações orientadas para configuração do grupo e a escolha de um tema de interesse comum.

Segundo momento: Ações orientadas para formulação das situações problemáticas. Este momento passa pela constituição de um enfoque particular de acordo com o tema escolhido.

Terceiro momento: Ações orientadas para produção de argumentos com o intuito de resolver a situação formulada.

Figura 5: Tensões iniciais na atividade modelagem



Fonte: Elaborado pelo autor

Como apresentado no capítulo anterior, a prática de modelagem pode ser interpretada como um processo de estimulação dupla (ver capítulo IV), em que os artefatos com que os alunos foram munidos para desenvolver o processo (segundo estímulo) mostram-se na figura 5. Esses artefatos foram de dois tipos: instrumentos (livros, revistas, jornais, internet, etc.) e comunidade (professor, alunos estagiários, monitor, etc.). Baseados nessa metodologia, dividimos a análise em dois grandes estágios: o **primeiro estágio** está relacionado com os dois primeiros momentos acima apresentados e o **segundo estágio**, com o terceiro.

Já no *segundo estímulo* sugerimos analisar as formas como foram usados os artefatos que auxiliaram as ações nos dois estágios, isto é, na problemática enfrentada pelos alunos no desenvolvimento total do projeto. Visto assim, o segundo estímulo é transversal e vai acontecendo enquanto a atividade é desenvolvida.

Para efeito de organização da análise, apresentarei uma descrição de como foram desenvolvidos os dois estágios para cada um dos projetos, culminando com

uma síntese que nos leve a pensar sobre as contribuições desses resultados em relação com a pergunta da pesquisa. No final do processo, apresentamos uma síntese que diz respeito às práticas matemáticas convergentes nos três projetos. Baseados nessa descrição, apresentaremos uma reflexão a respeito dessas práticas matemáticas, que podem ser assumidas na zona de emergência do pensamento algébrico, e quais delas alcançam o “status” de conhecimento algébrico de acordo com o exposto no capítulo III.

6.1 Primeiro estágio: configuração do grupo e escolha do tema.

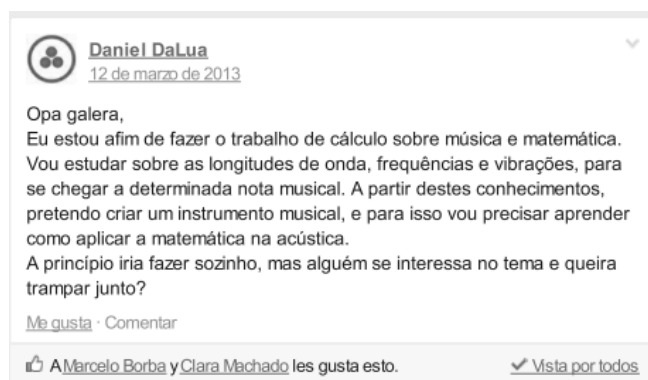
Uma vez explicado o esquema e as condições para a tarefa de modelagem pelo professor, os alunos utilizaram diferentes estratégias para se organizar nos grupos. A variedade de possibilidades e critérios gerais utilizados pode ser resumida em seis tipos: (1) por proximidade na moradia, 2- por afinidade em interesses acadêmicos, (3) por amizade, (4) por terem trabalhado juntos anteriormente, (5) por compatibilidade de horários disponíveis, (6) e por não restar alternativa. Implícita ou explicitamente, a constituição do grupo já levava uma ideia clara para alguns alunos e nebulosa para outros, a respeito dos possíveis temas que seriam a base do projeto. No caso dos três trabalhos analisados, os critérios de organização foram: o (1) e o (2) para o projeto “Matemática e Música”; o (2) e o (3) para o projeto “Dispersão de sementes por zoocoria”; o (3) e o (4) para o projeto, “Cetáceos: um enfoque acústico”.

6.1.1 Projeto Matemática e Música

O grupo que desenvolveu o projeto sobre “Matemática e música” constituiu-se a partir do interesse explícito do aluno Daniel. Ele manifestou publicamente, por meio do grupo fechado da rede social *facebook*, seu interesse para estudar as possíveis relações que a matemática tem com a música, e em particular o papel que a matemática poderia ter na construção de instrumentos de sopro. (figura 6)

Quatro companheiras, Clara, Gabriela, Deise e Barbara, responderam positivamente, interessando-se por pertencer ao grupo. Clara interessou-se por achar o tema “legal”, enquanto Gabriela manifestou que sempre desejou aprender sobre as possíveis relações entre a matemática e a música. Posteriormente Deise e Barbara mostraram interesse, talvez pela relação de amizade que têm com Clara e Gabriela e/ou pela facilidade que ofereceu o fato de estarem morando juntas.

Figura 6: Convite de Daniel



Fonte: Grupo fechado do “Facebook”

Desse modo, não só se constituiu o grupo, mas também se escolheu o tema. Inicialmente o grupo ficou constituído por cinco alunos (Daniel, Barbara, Gabriela, Clara e Deise), mas finalizou somente com quatro porque a aluna Deise trancou a disciplina. Mesmo assim, ela participou das duas primeiras reuniões. Embora todos os membros se achassem muito interessados na temática, o fato de Daniel tê-lo proposto, a nosso ver, ofereceu-lhe certo caráter de liderança no grupo.

Os quatro alunos que finalmente consolidaram o grupo mostraram-se apaixonados pela música, mas não precisamente nas mesmas proporções pela matemática. Daniel, por exemplo, tem experiência com construção de instrumentos musicais principalmente de sopro e de percussão e, do mesmo modo que Gabriela, participava em um grupo que produz música autóctone brasileira (Maracatu⁹⁵). Barbara considera que o gosto pela música é de família (tem na família músicos de

⁹⁵ Maracatu é uma manifestação cultural da música folclórica pernambucana afro-brasileira. É formada por uma percussão que acompanha um cortejo real. Como a maioria das manifestações populares do Brasil, é uma mistura das culturas indígena, africana e europeia. Surgiu em meados do século XVIII. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Maracatu_Na%C3%A7%C3%A3o>, acesso: 19 de maio de 2014.

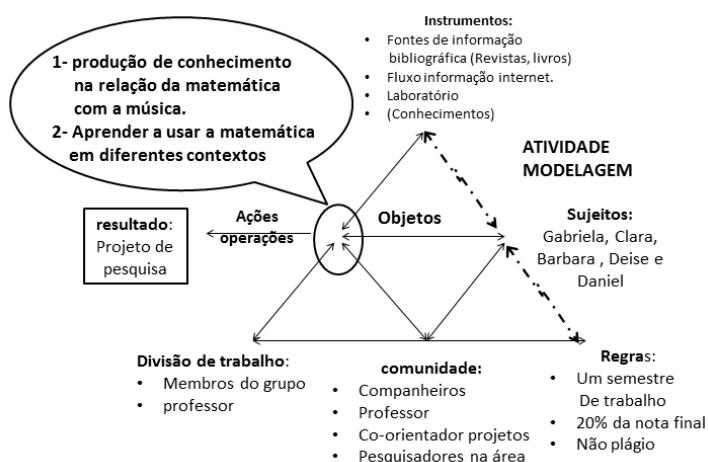
profissionais). Clara, embora sem o mesmo contato que os demais nesse campo, demonstrou ter gosto por diferentes ritmos musicais. Já Deise manifestou:

...Eu acho que o tema é interessante, mas para mim é indiferente se fosse outro, pois meu interesse é cumprir com a tarefa de maneira efetiva e já que estou morando com as meninas, fica mais fácil... (transcrição da fala na segunda reunião)

Infere-se daí a rápida conformação do grupo e escolha do tema.

De outro lado, todos manifestam que sua relação com a matemática tem estado limitada fundamentalmente aos compromissos associados com a escola básica. Não expressam ódio por ela (como aconteceu com outros alunos da mesma turma), mas também não a consideram um campo muito atraente. Reconhecem as dificuldades com sua aprendizagem, mesmo assim encararam a disciplina de Cálculo I com determinação. Barbara, Clara e Gabriela foram, por exemplo, três das alunas que registrei com maior número de participação nas monitorias e se apoiaram constantemente na ajuda oferecida pelo grupo fechado criado pelo professor na rede social “Facebook” para superar as próprias dificuldades conceituais relacionadas com a disciplina. Enquanto se percebia que Daniel era mais confiante em relação com esses conteúdos. Todos foram aprovados na disciplina, mas Gabriela e Daniel obtiveram notas bem acima da média. Na figura 7, aparece a configuração da atividade para o grupo.

Figura 7: Sistema de atividades grupo “Matemática e Música”



Fonte: Elaborado pelo autor

O processo de construção do projeto iniciou-se na primeira reunião, que foi desenvolvida em sala de aula quando o professor abriu um espaço de tempo para que os grupos conversassem rapidamente sobre o trabalho⁹⁶. Pude aproximar-me do grupo percebendo que já tinham algumas ideias gerais sobre a temática. Porém também percebi que a conversa não passava de comentários sobre experiências pessoais com a música e algumas ideias simples de sua relação com conceitos matemáticos. A conclusão dessa curta reunião foi que a melhor forma de começar o processo tinha que ser investigando por meio de diferentes fontes, por exemplo, fazendo mínimas leituras relacionadas com o assunto.

6.1.2 *Projeto dispersão de sementes por zoocoria*

A aluna Vivian cursava pela segunda vez a disciplina de Matemática Aplicada com o mesmo professor. Isso significa que, em termos gerais, já conhecia a ementa, a metodologia do professor e as exigências acadêmicas próprias da disciplina. Além disso, para ela a proposta de modelagem não era novidade. O novo era o convite do professor para que os alunos escolhessem livremente o tema de pesquisa, pois na primeira vez que cursou a disciplina foi o professor quem propôs o tema geral⁹⁷.

Quando o professor anunciou as características da tarefa e os convidou para se juntarem em pequenos grupos e escolherem um tema de interesse comum, com o propósito de desenvolver um projeto, a amizade de longo tempo que Vivian tinha com Vanessa não só levou a constituir o grupo, mas também a escolher o tema sobre dispersão de sementes. Vivian, que estava trabalhando na dispersão de sementes por aves, como parte do trabalho de conclusão de curso (TCC) em uma empresa de restauração vegetal de áreas degradadas, propôs para Vanessa fazer desse tema o eixo central do projeto e ela se sentiu atraída pelo assunto. Posteriormente a Sabrina e o Thales juntaram-se a elas. Sabrina tornou-se interessada porque também estava desenvolvendo algumas ideias relacionadas com o tema, mas focada em pequenos mamíferos, e Thales, além da proximidade com as meninas por ter cursado outras disciplinas com elas, interessou-se pelo tema,

⁹⁶ Essa ação foi intencional com o propósito de se tentar uma aproximação aos grupos e começar a ganhar um pouco de confiança.

⁹⁷ A temática trabalhada foi sobre a Malária.

pois, segundo ele, já tinha tido algumas experiências em campo coletando e classificando sementes.

Percebi que, mesmo sendo enfatizada pelo professor a não obrigatoriedade de o trabalho ter uma relação explícita com a matemática, pareceu claro que, além da experiência com o tema da maioria dos integrantes, o reconhecimento que Vivian e Sabrina tinham (as de maior experiência no tema) do papel dos processos de quantificação e cálculo na compreensão e aplicações dos métodos da dispersão de sementes foi outro aspecto preponderante na escolha do tema. Isso se faz evidente na resposta de Thales quando foi indagado sobre tal escolha:

Fabian: Como foi que vocês escolheram o tema?

Thales: Os quatro integrantes do grupo tínhamos um gosto em comum pelo tema: a dispersão de semente. Aí Vivian trabalha com dispersão de aves e Sabrina trabalha com dispersão por pequenos roedores. Elas já tinham uns cálculos que fazem no trabalho delas, então elas falaram para a gente que tinham esses dois cálculos aqui, daí a gente pensou em juntar tudo e fazer um trabalho sobre a dispersão de sementes... (transcrição da entrevista)

Do mesmo modo, quando foi pedida a opinião da Vivian a respeito da liberdade que o professor dava aos alunos para decidir se o trabalho iria ter ou não alguma relação direta com a matemática, ela manifestou:

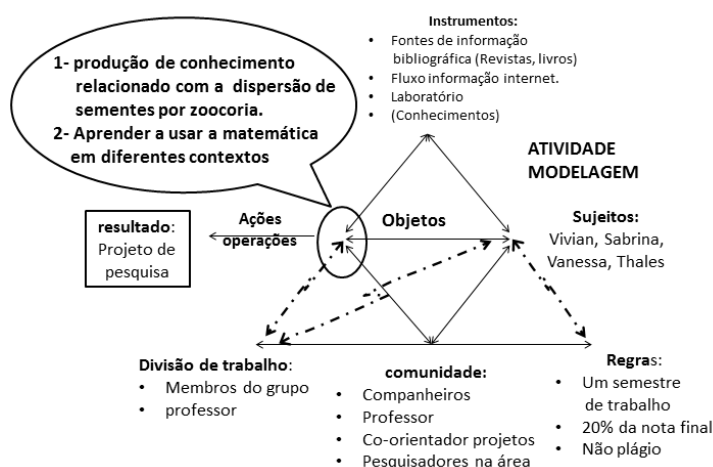
Vivian: Para a gente isso foi irrelevante porque na hora que ele (o professor) falou do que a gente tinha que fazer no trabalho escolhendo um tema livre, eu estava estudando muito para fazer meu TCC e ele já tem matemática. Aí a outra menina (se referindo à Sabrina), que também trabalha com algo parecido falou com a gente para entrar em nosso grupo e colocou a parte dela que também tem matemática... Então entrou matemática porque entrou... (transcrição da entrevista)

Vanessa, que tinha menos experiência no tema, comentou ter ficado muito interessada, porque viu uma oportunidade de mostrar para os colegas da disciplina algumas aplicações de conceitos matemáticos em um ramo particular da biologia.

Vanessa: Nem todos os colegas conhecem as técnicas de estudo da dispersão de sementes e considero muito importante a chance de um professor de matemática nos permitir realizar um trabalho livre [algo que, segundo ela, nenhum professor de matemática tinha feito até então] para compartilhar alguns dos métodos matemáticos que a Vivian e a Sabrina já conheciam pela experiência com seus respectivos TCC. (transcrição da entrevista)

Da mesma forma que o grupo anterior, nenhum deles sentia-se muito à vontade com a matemática. Manifestaram interesse em estudá-la só porque essa disciplina faz parte do currículo do curso, mas ao mesmo tempo, os quatro alunos reconhecem sua importância para compreender alguns assuntos próprios da área de interesse. Eles consideram que a matemática ajuda a compreender processos, técnicas e conceitos da biologia, principalmente a estatística. Sabrina, por exemplo, pondera que o estudo da biologia sem matemática deixaria um vazio, a biologia perderia muito sentido, mas que muitos dos conteúdos trabalhados nas diferentes disciplinas da proposta curricular não lhes são úteis. Para ela o interesse pela matemática se dá enquanto seja possível entendê-la, e parte de seu entendimento, aponta, está relacionado com os sentidos e significados que tem em diferentes contextos.

Figura 8: Sistema de atividades grupo “Dispersão de sementes”



Fonte: Elaborado pelo autor

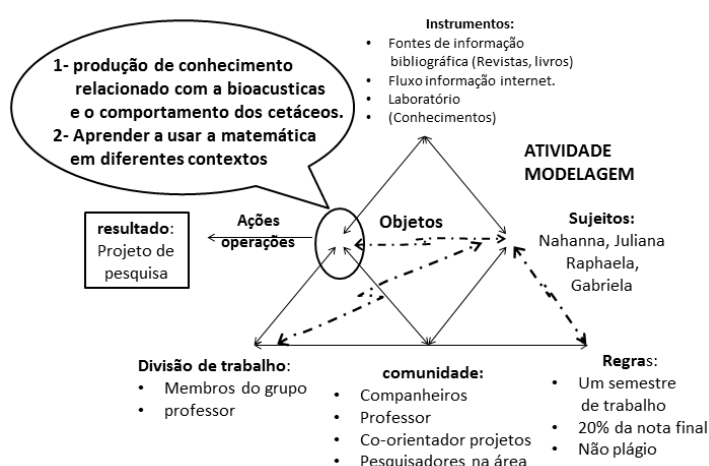
6.1.3 Projeto “Cetáceos: um enfoque acústico”

Este grupo, cujos integrantes foram Juliana, Gabriella, Nahanna, Raphaela e Virginia, constituiu-se principalmente pela proximidade das integrantes por amizade e parceria, pois já tinham trabalhado juntas em alguma atividade de outras disciplinas. No entanto, Raphaela, que passava pela segunda vez pela disciplina, só conhecia suas companheiras por atividades extraescolares, pois, embora tivesse ingressado no curso de Biologia no mesmo ano, ela o fez para a modalidade integral

(diurno) enquanto as demais para o noturno. Desse modo, Raphaela, por conhecer a estratégia do professor em relação à proposta de modelagem, antes que ele anunciasse as condições da tarefa, ela previamente, já havia comentado com algumas companheiras sobre a possibilidade de ela pertencer ao grupo.

Diferente dos grupos anteriores, a escolha do tema para esse grupo foi bastante difícil. Considero que isso foi devido ao critério de conformação do grupo. Para os grupos anteriores, o interesse e a experiência com o tema de pelo menos um dos integrantes foram o elemento constitutivo dos grupos. Isto é, o interesse ocorreu prévia ou simultaneamente com a constituição do grupo, enquanto que, neste caso configurou-se o grupo e posteriormente surgiu o interesse por alguma temática em particular. Esse foi um ponto de discussão e tensão no interior do grupo.

Figura 9: Sistema de atividades grupo “Cetáceos: enfoque acústico”



Fonte: Elaborado pelo autor

As meninas desse grupo consideraram várias ideias que, embora convergissem inicialmente para estudar a relação entre a matemática e a música, depois de apresentar a primeira versão do trabalho ao professor, mudaram de ideia. Essa mudança desviou-se porque um dos comentários recebidos do professor foi que esse tema já tinha sido bastante trabalhado por outros grupos. (ver figura 10)

Da fala das alunas, infere-se que, pelo fato de estar em uma disciplina de Matemática Aplicada, era importante que o tema a ser escolhido estivesse envolvido de alguma forma com a área. Temas como, Sequência de Fibonacci e Fractais,

foram alguns dos candidatos, mas depois de muitas discussões decidiram trabalhar com o tema “A Bioacústica nos cetáceos”. O processo dessa foi explicado por Raphaela na entrevista.

Figura 10: Observação do professor à primeira versão do trabalho

Neste trabalho iremos citar as principais contribuições matemáticas na história da música.

*Tem muito batido!!
Digam o que quiserem!
Acho o tema perfeito!
29/3*

Fonte: Texto escrito da primeira versão do trabalho

Raphaela: Nosso tema ia ser outra coisa; ia ser matemática e música. Esse foi o que a gente entregou, só que o professor falou que já tinha sido muito batido, que outros grupos já tinham falado sobre... Então aí eu falei, gente vamos mudar, [...] aí a gente tinha outros temas como Frequências de Fibonacci, ideias sobre Fractais, eu dei umas ideias, lembrei de um trabalho que um pessoal de minha sala tinha feito sobre Fractais o ano anterior e que tinha ficado muito bom mesmo, aí a gente estava que não sabia o que fazer e aí eu joguei essa ideia sobre cetáceos. [...]

Fabian: O que aconteceu com os outros temas e como ficou firme esse sobre cetáceos?

Raphaela: Na verdade deu para perceber que a gente não ficou muito contente com esses outros temas. Por exemplo, a gente escolheu a série de Fibonacci e foi procurar mais sobre. Só que a gente não achava muita coisa e o que achava a gente não entendia muito. Aí, não lembro quem tinha feito um trabalho sobre esse tema e tinha tirado nota ruim. Aí as meninas falaram: Então eu não vou fazer... (risos). Então a gente achou que a ideia que eu tinha dado de fazer sobre cetáceos e a bioacústica era o mais legal e todo mundo curtiu e aí ficou... (Transcrição da entrevista)

O papel que Raphaela teve na escolha e no desenvolvimento do projeto foi importante, pois ficou claro nas conversas com as alunas que ela foi uma das que propôs e defendeu constantemente que o trabalho tivesse pelo menos uma parte que envolvesse conteúdos matemáticos. Na divisão das tarefas foi ela quem ficou encarregada de estudar esse componente.

6.1.4 *Algumas considerações do primeiro estágio*

6.1.4.1 Sobre a configuração dos grupos

Uma vez configurados os grupos de trabalho e escolhidas os temas, como ilustrado nas figuras 7, 8 e 9, foi possível apreciar como no começo do processo as diferenças nos componentes que caracterizam a atividade foram mínimas: somente os sujeitos (integrantes do grupo) e um dos motivos do objeto (tema de interesse escolhido). Os demais componentes, pelas características do contexto pedagógico da atividade, tiveram certo padrão. Contudo, cada grupo mostrou algumas tensões iniciais diferenciadas.

No primeiro grupo (Matemática e Música), dado que o tema já estava escolhida, a principal tensão deu-se com relação aos instrumentos que lhes permitissem obter informação para começar a determinar o foco do projeto. No caso do grupo sobre “dispersão de sementes”, do mesmo modo que o anterior, a temática foi escolhida com a constituição do grupo. Porém neste caso, a informação mínima para começar fazia parte de dois trabalhos de TCC das integrantes. Nesse sentido a principal tensão foi mais entre a divisão de trabalho com o objeto e os sujeitos, na medida em que o interesse era passar rapidamente à estruturação do projeto dividindo as respectivas responsabilidades dos membros. Já no caso do projeto sobre “cetáceos”, a principal tensão apresentou-se na escolha de um tema que deixasse todos os integrantes satisfeitos, principalmente depois do comentário do professor sobre o tema inicialmente escolhido. Percebeu-se que a tensão entre os sujeitos e as regras foi natural em todos os grupos, na medida em que a obtenção de uma boa nota final foi, em grande parte, a principal fonte de dinamização do processo.

6.1.4.2 Sobre o papel dos artefatos

Observamos que os artefatos mediadores, embora tinham sido disponibilizados para todos os alunos no começo da atividade, no desenvolvimento do processo cumpriram diferentes funções em cada grupo. Essas funções dependeram fundamentalmente de dois aspectos: de um lado, do caráter implícito

ou explícito dos artefatos fornecidos para os sujeitos em atividade, e, de outro, das decisões que os sujeitos foram tomando de acordo com o movimento da atividade (esses movimentos são apresentados nas próximas sessões).

Interpretando Wertsch (2007), a mediação é explícita pelo menos em dois sentidos. Primeiro, na medida em que seja aberta e intencionalmente introduzida para estimular os sujeitos a realizarem alguma ação com o propósito de produzir certos significados. Em segundo lugar, é explícita no sentido de que a materialidade dos estímulos e dos signos envolvidos tende a ser óbvia, mas não necessariamente transitória. Já em contraste com a mediação explícita, a mediação implícita é menos óbvia e mais complicada de detectar; mas está relacionada fundamentalmente com a posição social dos sujeitos e com aquilo que Vygotsky chamou de “fala interna ou discurso interno” dos indivíduos (Vygotsky, 1986)⁹⁸. Pelas características das mediações implícitas e sua dificuldade de ser captadas nas práticas humanas, geralmente seu papel mediador é despercebido. A respeito disso, Wertsch comenta:

Por causa da natureza efêmera estas formas de mediação [mediação implícita], são muitas vezes “invisíveis” para o observador incauto e são, portanto, menos facilmente tomadas como objetos de reflexão ou manipulação consciente. Além disso, a mediação implícita normalmente não precisa ser artificial e intencionalmente introduzida nas ações. Em vez disso, é parte de um fluxo de interações já em curso, que é levada ao contato com outras formas de ação. (Wertsch, 2007, p. 180, tradução nossa)

A partir desse apontamento, pode-se dizer que os artefatos de mediação implícita são geralmente de carácter simbólico, cuja principal função está relacionada com as operações mentais que formam parte do fluxo natural da comunicação através da linguagem. Nesse sentido, diferentemente da mediação explícita, na maioria das vezes, a mediação implícita não é propositalmente introduzida nas ações dos sujeitos. Ela emerge como resposta da natureza social e da cultural dos sujeitos como pensamento verbal. É importante enfatizar que ambos os tipos de mediação artefactual estão carregados de significações (explícita e implícita) e por isso, geralmente, a mediação explícita é ao mesmo tempo implícita.

⁹⁸ Uma discussão sobre o discurso interior e o exterior dos sujeitos pode ser achado no capítulo sete do texto “Thought and word” traduzido para o português “Pensamento e linguagem”, de Lev Vygotsky (<http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf>).

Os artefatos de mediação fornecidos *explicitamente* para os alunos foram os mostrados na representação gráfica das atividades: (1) fontes de informação bibliográfica (livros, jornais, revistas, etc.), (2) fluxo de informação através da internet, (3) e o auxílio da comunidade, representada no grupo de trabalho pelo professor, pelo aluno estagiário e por mim, que, além de pesquisador, tinha também o papel de co-orientador dos projetos e de monitor da disciplina.

Os dois primeiros, embora já façam parte da cultura acadêmica dos alunos e possam ser assumidos como implícitos, assumem-se como mediações explícitas, na medida em que são fornecidos, material e intencionalmente, por algum dos agentes do terceiro tipo de mediação para produzir certos resultados particulares. No entanto, a mediação da internet, cuja característica é de autogestão, dificulta ainda mais determinar seu caráter como explícito e implícito no desenvolvimento da atividade. Por exemplo, os alunos não precisaram esperar o fornecimento intencional desse tipo de artefato para acessar a informação que estavam precisando, mas o artefato também tem mecanismos próprios de discriminação do tipo de informação que oferece criando “hiper-vínculos” para novas informações relacionadas. De maneira igual, o papel mediador do professor como principal agente regulador do processo.

Um exemplo da forma como funciona a mediação artefactual (explícita e implícita) é ilustrado nos comentários que o professor fez na primeira versão do projeto sobre “Cetáceos” (ver figura 10). Os alunos inicialmente tinham escolhido o tema “Matemática e Música”, mas quando receberam as observações do professor como “*tema batido*” e “*acho o tema perigoso*”, decidiram mudar de tema. É possível apreciar nessa forma de mediação simbólica carregada de significação o caráter explícito e implícito ao mesmo tempo. Explícito enquanto apresentado intencionalmente pelo professor para gerar nas alunas uma reflexão a respeito dos possíveis níveis de exigência que ele estaria esperando. A intenção do professor não era que as alunas mudassem de tema, mas que tentassem ser originais. Isso pode ser interpretado da outra observação feita pelo professor: “*Digam o que querem ver*”. Contudo, implicitamente produziu nas alunas significações de desinteresse pelo tema escolhido e “necessidade” de trocá-lo. Necessidade entendida como “*necessidade de aprovação*”: “*é preciso desenvolver um projeto em que o professor também fique contente e interessado porque isso pode garantir uma boa nota final*”, como mostra o diálogo com Raphaela.

A liberdade de pesquisar no tema aquilo de que gosta e/ou o que deseja, deve ser interpretada em termo de um gosto em potencial ou relativo às condições coletivas e institucionais (por ser um trabalho em grupo e para uma disciplina) e contextuais (limitação com o tempo, por exemplo), incluindo o professor como parte das equipes e cuja influência não pode ser deixada de lado.

É claro que o professor ajuda os alunos a definir os problemas e a se segurar de que seja viável no interior da estrutura da instituição educativa. Portanto, nessa perspectiva de modelagem, as escolhas dos alunos são partilhadas também com o contexto cultural, em particular pela forma como a escola está organizada (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 55, tradução nossa)

Mesmo parecendo individual, a escolha da temática por parte dos alunos responde a *interesses* compartilhados, altamente condicionados pela tentativa de agradar o professor (Herminio, 2009). Nessa escolha também estão em jogo *interesses* do professor, que, a partir de sua experiência, orienta os alunos quando um tema não é suficientemente pertinente para os propósitos da tarefa e/ou reconhece dificuldades temporais e especiais insuperáveis. Considero que o conceito de *interesse*, entendido como um produto coletivo, representa um dos elementos que pode favorecer ou retrair a constituição de práticas matemáticas nos projetos. E isso minimamente por duas razões: em primeiro lugar, pela conexão dos interesses com a visão metamatemática (crenças, valores, atitudes) dos sujeitos envolvidos (professor e alunos); em segundo lugar, porque parte dos *interesses* das práticas educacionais no campo da educação matemática (interesses institucionalizados) é constituir mudanças nas formas de pensar sobre os sistemas matemáticos e, em grande medida, isso depende da criação intencional de possibilidades para que emergja nos alunos o interesse pelo uso destes tipos de sistema no contexto dos diferentes projetos (singularização dos interesses gerais institucionalizados).

6.1.4.3 Sobre o interesse como critério de dinamizador dos projetos.

Antes de passar ao segundo momento de análise (ações para a formulação e resolução das situações problemáticas), discutiremos o conceito de “*interesse*” como

uma categoria que perpassa as relações entre os componentes da atividade modelagem e constitui um elemento de particular importância nas configurações das práticas matemáticas nos projetos. De acordo com Hermínio e Borba (2010), o *interesse* tem sido colocado como um dos principais argumentos da maioria das perspectivas relacionadas com a modelagem matemática em contextos escolares, pois, segundo professores e pesquisadores, modelar é uma forma de mostrar aos alunos por que é importante e *interessante* aprender matemática.

Mas, esses autores também enfatizam que, mesmo sendo um aspecto recorrente nos argumentos para considerar importante o trabalho com modelagem em sala de aula, na maioria dos casos não se expressa o entendimento com respeito aos sentidos e significados do *interesse* nesses contextos e, por essa via, não explicam o papel que tem nas análises.

É possível encontrar exemplos na literatura de Modelagem Matemática que apontam o interesse dos alunos como um fator importante e necessário no uso desta estratégia de ensino, porém, em quase nenhum deles há um estudo profundo sobre como se dá esse interesse da parte dos alunos e como ele pode ser entendido pelo professor. (HERMINIO; BORBA, 2010, p. 116)

Como apresentado no capítulo II, desde uma perspectiva histórico-cultural, as ações que compõem as atividades humanas estão fortemente condicionadas pelo contexto que as envolve. Nesse sentido, os motivos que as geram não estão localizados somente nos sujeitos e nas situações nem nas situações ou condições externas. Os motivos que impulsionam as pessoas a realizar alguma atividade emergem da tentativa de adequação das ações aos fins que idealizam para satisfazer suas necessidades. Tentativa de adequação que está condicionada culturalmente e por isso tem também um componente coletivo e institucional. É pela confluência de intencionalidades entre os diferentes indivíduos mediados pelas instituições e pela tentativa de resolver as tensões geradas, que é possível entender por que certos tipos de ações são desenvolvidos.

Por exemplo, para alguns alunos pareceu contraditório que o professor os convidasse a desenvolver uma tarefa no contexto de uma disciplina de matemática com a opção de prescindir precisamente da sua matéria-prima: a matemática. Situação que, por um lado, gerou tranquilidade, mas por outro, preocupação. No primeiro caso, pela pouca afinidade que muitos desses alunos tinham com a

matemática, e no segundo, porque ficou a dúvida de como iriam ser avaliados. Para alguns alunos, prescindir de relacionar o projeto com a matemática implicava uma diminuição da nota final. Desse modo, tentar envolver de alguma forma conceitos matemáticos no projeto foi uma das maneiras achadas de resolver o dilema. Isso nos leva de volta não só à tensão entre sujeitos e as regras da atividade modelagem já mencionada, mas também a ter que discutir as possíveis relações entre o *objeto* da atividade e os *interesses* que a motivam.

Como apresentado no capítulo II, toda atividade é orientada a transformar algo material (matéria-prima) em outra coisa assumida como resultado da atividade (o produto). A diferença entre o estado inicial da matéria-prima e o estado final (aquilo que se está desejando obter) pode ser entendida como o reflexo na consciência do objeto da atividade. Por isso, o objeto da atividade tem uma aparência dual: na consciência e no mundo material; isto é, uma aparência material e outra ideal (Iliénkov, 1977; Leontiev, 1978). Assim, na capacidade dos sujeitos de “projetar” e transformar as condições naturais do mundo circundante e satisfazer suas necessidades, acha-se a unidade indissolúvel dos aspectos internos e externos de toda atividade humana. Como unidade, a realidade material e o reflexo ideal na consciência não podem ser separados, mas como componentes carregam funções diferentes. Desse fato infere-se que as atividades humanas comportam duas classes de contradições principalmente: de um lado, entre o estado material e o ideal; e de outro, entre o estado presente (atual) e o futuro (potencial) do produto.

Dessas complexas relações, é que surge um dos problemas fundamentais no contexto da teoria da atividade: determinar o objeto das atividades humanas. Problema que deve ser pensado para o caso particular da atividade modelagem como considerado por Araújo et al (2010). Kaptelinin (2005) adverte que, quando Leontiev (1978, p. 82), define “o *objeto de uma atividade como seu verdadeiro motivo*”, está equiparando o objeto da atividade com aquilo que a motiva e isso tem gerado dificuldades em processos analíticos. Interpretando esse autor, a principal dificuldade se dá porque, em geral, os objetos ou os motivos⁹⁹ da atividade refletem o conjunto de *interesses* de um coletivo. Isso significa que os objetos das atividades humanas acarretam um importante componente afetivo e/ou emocional dos sujeitos que estão envolvidos na atividade. Valores emocionais que, segundo Radford e Roth

⁹⁹ Alguns autores preferem utilizar a expressão objeto/motivo para evitar que seja reduzido ou ao componente material ou ao ideal. Ver Radford e Roth (2010).

(2010), podem ser mais bem entendidos como a “*motivação*” para realizar a atividade, sem se tratar de uma nova categoria analítica separada do objeto. Para esses autores, a motivação constitui simplesmente a dimensão emocional que diz respeito à diferença em qualidade de vida entre a orientação presente e a futura da atividade.

A natureza motivadora de uma atividade não depende simplesmente da antecipação de resultados concretos, mas do aumento (material, cognitivo, espiritual, etc.) da qualidade de vida que pode ser alcançada por meio da atividade. A natureza motivadora da atividade é o resultado de considerações que dizem respeito à totalidade de conexões incorporadas na ação a partir da perspectiva do indivíduo. Neste sentido, constitui o “aspecto emocional” do pensamento. A motivação é o aspecto antecipatório emocional do planejamento da ação e de sua execução, (RADFORD; ROTH, 2011, p. 14, tradução nossa).

Nesse sentido, o sujeito, além de avaliar antecipadamente questões relacionadas com a matéria-prima e o produto final que será obtido com a atividade (objeto da atividade), também antecipa a qualidade de vida no final da atividade e o valor emocional da maneira pela qual a atividade será realizada, isto é, o futuro esforço e os riscos que pode correr (motivação como convergência de *interesses*). Um termo que talvez nos permita apreciar a relação do objeto e interesses nos sujeitos é a *intencionalidade* das ações.

Para ligar esta ideia com a atividade modelagem, partiremos do movimento de seu objeto. Retomando o já dito, a atividade modelagem está orientada a produzir um projeto em que se apresentem respostas ou possíveis soluções a situações problemáticas formuladas de acordo com um tema escolhido pelos mesmos alunos. Essa atividade, enquanto tarefa de uma disciplina de matemática, assume-se como uma atividade que busca satisfazer necessidades pedagógicas, ou seja, de produção e reprodução (ensino/aprendizagem) de conhecimento.

Percebe-se, assim, uma complexa relação entre os interesses que motivam a realização da atividade modelagem variando de acordo com os indivíduos envolvidos (alunos e professor). Isso nos leva às questões apresentadas por Hermínio e Borba (2009) relacionadas com o papel dos *interesses* que impulsam as ações na tarefa modelagem: “Que tipo de interesse tem os alunos? Será que o

interesse só tem um lado e este é positivo? O interesse em agradar o professor, ao escolher o tema, seria algo considerado bom?” (HERMINIO; BORBA, 2010, p. 113).

Do lado do professor, o interesse é ensinar aos alunos como usar a matemática em contextos diferenciados, eventualmente no contexto da área na qual os alunos estão sendo formados. Do lado dos alunos, o interesse é, em primeiro lugar, ser aprovado na disciplina para dar mais um passo no processo de formação como profissionais, em segundo lugar, aprender a produzir conhecimento usando conceitos matemáticos. Este último é visível para o professor (por ser seu interesse), mas, em princípio, oculto para os alunos que se vai tornando visível com o desenvolvimento da tarefa à medida que interagem com o professor, (contradição da aprendizagem, ver capítulo II).

Separando o objeto da atividade dos motivos que impulsionam as ações impregnadas de valores emocionais representados pelos interesses, pode-se inferir que em princípio o objeto da atividade modelagem é igual para o coletivo formado pelo professor e todos os alunos (a produção de um projeto como uma das tarefas da disciplina de matemática aplicada). Mas, em um segundo momento, fruto da confluência de interesses individuais que afetam a atividade constituem-se os pequenos grupos modificando levemente o objeto inicial: agora o coletivo total é dividido em pequenos grupos e o projeto, que antes era um projeto em geral, passa ser um projeto sobre um tema em particular. Interpretando Kaptelinin (2005), inclui-se um novo motivo para a mesma atividade. Uma das implicações dessa leve modificação diz respeito ao rumo que toma a atividade, provocado pelo conflito de interesses individuais e coletivos no interior de cada pequeno grupo.

Para o caso dos três projetos que estamos analisando, essa implicação permite entender algumas das características de cada grupo e das decisões que foram tomadas para produzir o projeto. Por exemplo, ficou claro que os interesses por obter uma boa nota e fazer uma ligação direta com a matemática foram dois critérios determinantes para a escolha do tema nos projetos. Em particular, nos projetos sobre “Matemática e Música” e “Dispersão de sementes”, a escolha respondeu principalmente a interesses de uma pessoa, que posteriormente influenciou seus colegas. Daniel, no primeiro caso, cujo interesse era totalmente pessoal ancorado no gosto pela música e na sua experiência em construção de instrumentos de sopro. E no segundo caso, o interesse acadêmico de Vivian vinculado ao trabalho de culminação de curso –TCC.-. Em ambos os casos, esses

dois alunos foram impregnando de seus *interesses* os colegas, até entrar num espaço de ressonância no qual se constituiu de interesse coletivo materializado no tema para pesquisar. Enquanto no caso do projeto sobre Cetáceos, no começo o interesse foi o primário e coletivo; isto é, voltado principalmente para o compromisso de realizar a tarefa da disciplina e posteriormente constituiu-se um novo objeto da atividade como confluência dos interesses do grupo (incluindo o professor), mas sem descuidar o objeto anterior.

Tentar entender o papel dos interesses como componente emocional no processo é importante ao menos por duas razões: o primeiro, porque foi possível perceber que, mesmo os projetos sendo pensados e desenvolvidos coletivamente, as práticas matemáticas configuradas tornaram-se objeto de *interesse* explícito só de alguns membros de cada equipe. Na divisão de trabalho, por exemplo, foram essas pessoas que se encarregaram de desenvolver esse componente do projeto. Daniel e Gabriela no projeto sobre “Matemática e Música”; Vivian no projeto sobre “Dispersão de sementes”; e Raphaela no projeto sobre “Cetáceos”. A segunda razão desses interesses dependeu do tipo de situação problemática formulada nos projetos e, por essa via, os argumentos construídos para tentar respondê-la. Essas duas razões explicariam algumas das dificuldades que os alunos têm para formular situações problemáticas que precisem de sistemas matemáticos para resolvê-las.

Desse modo, não se trata unicamente de dizer que os *interesses* tiveram o papel importante na escolha do tema, na configuração dos grupos e no processo de formulação de situações problemáticas, condições necessárias para empreender processos de tentativa de resposta, mas também que os *interesses* não surgem nem se desenvolvem como um processo individual, isolado e pessoal; é possível intervir externamente neles. Por isso, nos contextos escolares, a pergunta não deveria ser se os alunos estão motivados para desenvolver tal atividade (em nosso caso a atividade modelagem), senão em quais atividades os alunos poderiam estar interessados e ajudar a orientar suas ações particulares para que assumam certos objetos. Em termos da atividade modelagem, significa orientá-los na formulação de situações que impliquem o tratamento de sistemas matemáticos para sua solução.

Diante disso, uma das conclusões que deve ser levada em conta é o fato de que ter e compartilhar *interesses*, para materializar em um projeto, não garante a necessidade de configurar práticas matemáticas. Escolher tanto um tema de interesse quanto formular situações problemáticas são condições necessárias, mas

não suficientes, para que o projeto necessite da matemática. Dependendo do tipo de pergunta ou situação-problema formulada, poderia fazer ou não sentido usar esse tipo de conhecimento. Mas também, se é possível motivar ou não (nos termos acima apresentados) um enfoque matemático para a situação formulada.

Por exemplo, quando se trata de estudar o sentimento de medo que os filmes de terror produzem nos assistentes¹⁰⁰, nem sempre se precisa usar ou produzir sistemas matemáticos (modelagem matemática) para desenvolver o objeto de estudo em questão, mesmo assim é possível criar um enfoque onde seja necessário. No entanto, no estudo do índice de eficácia de um animal dispersor de semente, os processos de quantificação e de técnicas matemáticas tornam-se fundamentais, porém do mesmo modo é possível tratar o tema sem esse conteúdo. Isso significa que, estar interessado em pesquisar em algum tema é um bom começo para desenvolver um projeto, isto é, constituir práticas de modelagem (MALHEIROS, 2008), mas não necessariamente para constituir práticas matemáticas.

Em termos gerais, pode-se dizer que uma prática de modelagem é um processo desenvolvido (projeto) para ir além do que pode ser observado de forma direta e implica uma tentativa de entender o sistema do qual depende (o tema). Entendimento que somente poderia ser encontrado através da construção de novas conjecturas, hipóteses, representações e experimentações com os elementos que compõem o sistema e o uso intencionado de artefatos culturais (outro sistema). Quando algumas dessas informações demandadas dizem respeito a processos de quantificação e/ou tratamento de formas em geral, a situação eventualmente precisará de práticas matemáticas. Isso leva-nos a perguntar: nos projetos que estamos analisando, que tipo de situações problemáticas foram formuladas e quais os argumentos desenvolvidos para tentar resolvê-las? Em segundo lugar, entre esses argumentos, que tipos de prática matemática precisaram ser constituídos? Uma terceira pergunta seria: qual e como foi o apoio recebido que permitiu orientar intencionalmente as ações para o uso de conceitos matemáticos?

A seguir serão apresentadas as situações problemáticas formuladas pelos grupos que, de acordo com a temática escolhida, exigiram um tratamento matemático para propor possíveis respostas e/ou soluções.

¹⁰⁰ Esse foi o tema de um grupo de alunos de Biologia quando foram convidados para desenvolver um projeto numa disciplina de Cálculo.

6.2 Segundo estágio: situações-problemas formuladas e produção de respostas

Constituídas as equipes de trabalho e ajustados os temas escolhidos aos interesses coletivos, as novas ações estiveram orientadas para elaborar três produtos diferentes: a construção de um texto escrito, a preparação da apresentação oral e a produção ou edição de um vídeo. De modo geral, o processo de estruturação dos projetos seguiu uma lógica dividida em três momentos: partindo da temática escolhida, foi feita a delimitação de um enfoque no interior da temática e finalmente foi esquematizado um conteúdo do projeto cujas conexões mostram a perspectiva de “coerência” considerada pelos autores.

As situações problemáticas formuladas e os argumentos construídos para respondê-las aparecem encapsulados sinteticamente nos produtos como um dos componentes fundamentais dessa coerência, por isso não é possível aceder a elas explicitamente. Para determiná-las, foi necessário analisar os três produtos, triangulando a informação obtida nas diferentes versões escritas do trabalho, nas reuniões com os grupos, nas conversas informais em diferentes espaços (sala de aula, monitorias, reuniões, pelo grupo fechado de “facebook”, etc), na apresentação oral e, em particular, nas entrevistas semiestruturadas com cada um dos alunos.

Visto assim, o projeto final deve ser entendido como uma síntese da sintonia de uma complexa rede de intencionalidades individuais que convergiram para uma “coerência” materializada em cada um dos resultados produzidos de acordo com os três produtos acima mencionados. Desse modo, as ações e decisões relacionadas com o projeto, mesmo sendo individuais, carregam um caráter coletivo e, por isso, as práticas matemáticas constituídas nesses projetos serão descritas em seu conjunto como estrutura coletiva, não como se tivesse sido obra de um indivíduo só¹⁰¹.

O exercício que será realizado na continuação está dividido em três momentos: inicialmente vai ser apresentada uma síntese descritiva de cada um dos projetos, enfatizando as relações das situações problemáticas formuladas com os argumentos construídos para respondê-las, focando principalmente o uso de

¹⁰¹ Como apresentado no estágio anterior, nem todos os membros dos grupos estiveram interessados em desenvolver o componente matemático dos projetos. Mas isso pode ser visto como algo natural pelas condições da divisão de trabalho entre as equipes.

conceitos matemáticos nesse processo. No segundo momento, categorizamos as práticas matemáticas comuns que emergiram dos três projetos e finalmente realizo algumas reflexões que dizem respeito ao papel dos artefatos culturais nesse processo e da relação dessas práticas com o conhecimento algébrico.

6.2.1 Estrutura do projeto: “Matemática e Música”.

O propósito ou objeto da atividade modelagem nesse projeto pode ser resumido no interesse de dar resposta à pergunta orientadora: o que faz um som qualquer virar música? Situação problemática que levou os alunos a projetar um processo estruturado em cinco momentos: aproximação histórica, conceituação da física do som, conceituação musical, representações semântica e sintática da música e construção de instrumentos de sopro. Nessa mesma ordem foi apresentado o texto final entregue para o professor.

Na primeira parte, expressaram um percurso histórico relacionado com momentos específicos que marcaram mudanças nas formas de conceber a música. A segunda parte foi dedicada a descrever e conceituar o som a partir do ponto de vista da física: velocidade de propagação de uma onda; longitude, amplitude, frequência e período de uma onda. Além disso, algumas ideias relacionadas com formas de representação gráfica de ondas (senoidal e cossenoidal). Na terceira parte, trabalharam os conceitos de ritmo, andamento e textura da música, para seguidamente tratar os conceitos de nota e escala musical a partir de alguns conceitos apresentados no momento anterior. Na quarta parte, foi trabalhada a linguagem musical (o pentagrama) a partir das ideias desenvolvidas nas partes anteriores: física do som, notas e escalas musicais (cromática e diatônica). Finalmente foram apresentadas algumas características (entre elas, as de caráter matemático) que devem ser levadas em conta na construção de um instrumento de sopro. Esse processo é exemplificado com um “Didgeridoo” e a “Zampoña”, instrumentos antigos criados por povos aborígenes e que constam de tubos abertos e fechados.

De acordo com os alunos, o som é uma perturbação (ou vibração) que se propaga no meio. Trata-se de uma onda mecânica esférica e tridimensional, que se propaga longitudinal e transversalmente somente na presença de um meio material

e é captada pelo ouvido através da pressão produzida pelo movimento vibratório dos corpos sonoros e que são transmitidos pelo ar. Comentam que, para medir as vibrações do meio, é usado o conceito de frequência, cuja unidade de medida é Hertz (Hz).

As frequências dos sons audíveis pelos humanos compreendem entre 20 e 20000 Hz. Isto quer dizer que o tímpano é capaz de oscilar de 20 a 20000 vezes por segundo. Esses dados tornaram-se importantes para os alunos, na medida em que a frequência é assumida como o conceito central para entender as características físicas do som e para mostrar que as frequências que representam as notas musicais devem estar entre esse intervalo.

Outros conceitos considerados por eles fundamentais para tentar responder a pergunta foram: altura, período, intensidade e timbre. A **altura** foi definida como o resultado da frequência produzida por um corpo sonoro, que determina a gravidade ou agudeza do som. Quando o som tem poucas vibrações, categoriza-se de som grave, mas se tiver muitas vibrações, seria agudo. O **período** é o tempo que duram as vibrações que produzem um som. Já a **intensidade** representa a força com que o som é produzido e associa-se à amplitude da vibração sonora indicando a energia utilizada pela fonte sonora (sons fortes ou fracos). Por último, tem-se o **timbre** que é a qualidade ou propriedade dos instrumentos e vozes que permite distingui-los.

Baseados nesses conceitos, definiram música como, a *arte de combinação dos sons*. Combinação que pode ser tão simples como a batida de duas baquetas ou tão complexa como uma orquestra filarmônica. Para explicar melhor o significado dessa definição, debruçaram-se em quatro conceitos que dizem respeito às formas nas quais tal combinação pode acontecer de acordo com o tipo de música que se espera produzir. Os conceitos são: andamento, ritmo, textura e intervalo. A ideia que aparece como pano de fundo é que a música deve ser entendida como a arte de controlar o som por meio desses conceitos.

O **andamento** indica a velocidade com que o som é executado. O **ritmo** é o que determina a duração de cada som; também é contada a duração dos silêncios. Assim, o ritmo indica a distância de tempo que existe entre sons e silêncios que se alternam. A **textura** diz respeito à qualidade global do som de uma obra musical, mais frequentemente definida pelo número de vozes na música e na relação entre essas vozes. A textura percebida de uma obra pode ser afetada pelo caráter e número das partes que são executadas em conjunto, pelo timbre dos instrumentos

ou vozes executando essas partes e pela harmonia, andamento e ritmo utilizado. Já o **intervalo** é definido como a distância entre duas notas musicais diferentes. Eles são muito importantes, pois, por meio do conhecimento deles, é possível formar qualquer acorde. Através dos intervalos, formam-se as notas musicais, os acordes e as diversas escalas. A unidade de medida de um intervalo é o tom. Definem matematicamente os intervalos pela fórmula.

$$I = \frac{F_2}{F_1}$$

I = intervalo

F_1 = frequência de uma nota

F_2 = frequência de outra nota

Baseados em ideias pitagóricas, os sons agradáveis ao ouvido correspondem a números proporcionais, e esses números e proporções seriam a causa da beleza musical. Quanto mais simples é a relação numérica, mais harmonioso é o intervalo. Com base no conceito de relação proporcional entre dois números, os alunos passam a explicar como é construído o conceito de escala musical tanto diatônica como cromática. Interpretando a fala dos alunos, podemos deduzir quais as *relações proporcionais entre as medidas de vibração*, ou seja, *relações por cociente entre frequências*, são os conceitos que permitem explicar as escalas musicais diatônicas e cromáticas com as que são produzidas na maioria das melodias musicais atualmente conhecidas.

De acordo com os alunos, a escala diatônica está composta por oito notas e sete intervalos de cinco tons e dois semitons. Cada nota indica sons diferentes organizados de mais agudos para mais graves constituindo a denominada escala que vai de DÓ até o mesmo DÓ uma oitava acima (DÓ-RE-MI-FÁ-SOL-LÁ-SI-DÓ), chamadas de notas musicais naturais. O tom é entendido como a unidade de medida para medir a diferença entre duas notas consecutivas ou intervalos. O caráter de diatônica é pelo fato de os intervalos terem só dois tipos de medidas: o tom e o semitom. Entre as notas DÓ e RE, RE e MI, FÁ e SOL, SOL e LÁ, LA e SI, a medida é de tons, enquanto entre MI e FÁ, e SI e DÓ, a medida é de semitons. A escala cromática é construída de tal forma que os intervalos fiquem com uma medida regular de um semitom, ficando doze notas e só um intervalo de semitom.

Desse modo, os alunos mostraram como ambas as escalas, mesmo sendo diferentes, permitem produzir melodias musicais utilizando os conceitos próprios da música (ritmo, andamento e textura). Com a escala diatônica, a partir da relação por cociente de números inteiros entendidos como sendo a divisão sucessiva de uma corda vibrante e, com a escala cromática, entendida como uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Finalmente, para mostrar os possíveis papéis da matemática na construção de instrumentos de sopro (“Didgeridoo” e “Zanpoña”), começaram a explicar o comportamento físico de vibração do ar em tubos abertos e fechados por meio de duas fórmulas que relacionam a frequência de vibração, quando o tubo de comprimento dado é soprado com uma determinada velocidade. As fórmulas são:

$F = \frac{N \times V}{2L}$	$F = \frac{N \times V}{4L}$
Para instrumentos de sopro aberto/aberto	Para instrumentos de sopro aberto/fechado
F=frequência, N=constante que depende do material do instrumento, V=velocidade, L=comprimento total do tubo de ressonância.	

Apelando às fórmulas e apresentado alguns exemplos, os alunos concluíram que a frequência relaciona-se em *proporção direta* com a velocidade do sopro, enquanto que com o comprimento do tubo, em *proporção inversa*.

6.2.2 Estrutura do projeto: “Dispersão de sementes por zoocoria”

De acordo com os alunos, a dispersão de sementes é um processo vital para os ciclos de reprodução das espécies vegetais, que consiste na transferência de sementes de certo local, que terá elevada chance de mortalidade, para outro, com estrato favorável para seu desenvolvimento. O objetivo explícito do trabalho era discutir diferentes tipos de dispersão natural de sementes fazendo ênfase na zoocoria: dispersão por animais. Apresentaram, desse modo, métodos de quantificação e critérios de efetividade da dispersão, mostrando como esses métodos podem ser utilizados no estudo de *padrões* que se revelam na interação

mutualística entre plantas e animais, ajudando na escolha intencionada de animais e plantas eficazes, para a regeneração de determinadas áreas degradadas.

Com esse propósito em foco, os alunos estruturaram o projeto em quatro partes. Na primeira, apresentaram uma introdução geral do fenômeno: a importância dos processos de dispersão de sementes no ciclo reprodutivo das plantas e as diferentes estratégias utilizadas de acordo com a configuração genética da planta. Descreveram cinco tipos de estratégias: (1) por interação com animais (zoocoria), (2) pelo vento, (3) por abertura explosiva das cápsulas de sementes, (4) por quedas do fruto por ação da gravidade (5) e por meio de correntes de água. Na segunda parte, aprofundaram nas estratégias zoocóricas de dispersão, atentando principalmente aos métodos de dispersão por frugívoros (animais que se alimentam de frutas). Na terceira parte, focaram nas estratégias de dispersão por pequenos mamíferos e na quarta, por aves.

Embora no texto escrito não apareça uma pergunta explícita para ser respondida com o desenvolvimento do projeto, as respostas dos alunos nas respectivas entrevistas relacionadas com essa questão convergiram para a pergunta respondida: *Como aplicar a dispersão de sementes por animais na restauração de áreas degradadas?*

Dois conceitos foram considerados de fundamental importância na tentativa de responder essa pergunta: *estratégia e eficiência da dispersão*. No contexto da zoocoria, a estratégia apresentada é a de atrair algum tipo de animal dispersor, e a eficiência é entendida como *a medida* do nível de condições para que a germinação e o desenvolvimento da planta deem certo. Vivian explicou a importância desses conceitos e a complexidade para ser compreendidos e usados:

Fabian: Vocês falaram de dois conceitos importantes: estratégia e eficiência na dispersão de sementes. Eu gostaria que você explicasse o que significam esses conceitos e a forma como estão relacionados.

Vivian: Estratégia é para planta. Ela tem para atrair um dispersor, então cada espécie de planta é adaptada geneticamente de uma forma diferente. Por exemplo, ela tem mais cheiro ou os frutos são mais claros se destacando na noite. Vamos pensar no caso das plantas que produzem nozes; elas produzem muita quantidade porque elas "sabem" (bom, elas não sabem), elas são geneticamente adaptadas para que os dispersores peguem bastante. Eles comem e, como não comem todas, então as que sobram são armazenadas. Aí eles muitas vezes não lembram onde foram que os armazenaram. Essas que guarda e esquece podem germinar. Então, ser eficaz na dispersão é *quanto...*

(pausa), a ave é eficaz se ela consegue levar a semente para um lugar seguro e que ela germine, se consegue fazer isso para várias sementes e dispersa uma grande quantidade e de uma maneira efetiva, de uma maneira que dê certo... (Transcrição da entrevista).

Interpretando o discurso dessa aluna, a estratégia e a eficiência nos processos Zoocóricos devem ser entendidas como uma *relação mutualística entre* plantas e animais, em que os animais dispersam as sementes das plantas durante a sua alimentação. Isso é confirmado nas afirmações de Sabrina, quando lhe foi feita a mesma pergunta:

Sabrina: É uma situação de equilíbrio e ecologia natural. Você tem que pensar nos dois lados: por exemplo, as aves têm diferentes tipos de bicos, então eles têm sua estratégia para consumir certo tipo de frutos, enquanto as plantas produzem diferentes tipos de frutos que atraem certo grupo de animais. Já a eficácia depende da probabilidade de germinação da planta que de novo implica entender as relações constituídas entre animais e plantas... (Transcrição da entrevista).

Esse esclarecimento é necessário na medida em que se faz importante entender os *processos de quantificação* da dispersão como um dos métodos para avaliar a qualidade, o que, de acordo com os alunos, significa considerar a eficiência na dispersão e implica afirmar quando se dá um bom ou ruim processo de dispersão indicado pela efetiva germinação da semente. Entendimento que, para o caso da estratégia por zoocoria, depende principalmente dessa relação mutualística. Em outras palavras, o processo de *quantificação* apresentada pelos alunos nesse contexto tem como base principal o estudo das possíveis relações entre plantas e animais. Isso é apontado por Vivian.

Fabian: Então, quando vocês falaram que a dispersão se estuda de forma qualitativa e quantitativa, esse qualitativo e quantitativo tem algo a ver com os conceitos de estratégia e de eficiência?

Vivian: Bom, o qualitativo e o quantitativo são duas coisas diferentes: o quantitativo de quantidade e o qualitativo, que a gente fala pouco que é a qualidade que seria (pausa)... Bom, o animal vai-se alimentar, se o passarinho come o fruto, engole o fruto inteiro, ele é o melhor dispersor porque a semente vai sair inteira, se ele mastiga ele é pior. Também depende se ele voa grandes distâncias, ou seja, que tenha esse hábito de voar grandes distâncias, então ele é melhor que se fica no mesmo lugar. Têm vários elementos que você pode usar para dizer que ele é bom em qualidade, se ele é o melhor ou pior dispersor. Mas isso é **difícil até na fórmula**, porque são muitas coisas... (Transcrição da entrevista).

De acordo com essas ideias, a qualidade e a quantidade na dispersão precisam ser entendidas como aspectos diferentes. Como apresentado no capítulo II, qualidade é uma propriedade, atributo ou condição das coisas ou das pessoas capazes de distingui-las das outras e de lhes determinar a natureza. Um desses atributos é o quantitativo, que diz respeito à intensidade, nesse sentido o quantitativo tem a ver com a possibilidade de ser mensurável. Para os alunos, qualquer estudo no contexto da dispersão de sementes implica levar em conta ambas as condições, porém implicitamente o aspecto *quantitativo* é o ponto de partida para avaliar a eficiência (aspecto qualitativo). Processo que, de acordo com Vivian, é desenvolvido com o auxílio de uma tecnologia (fórmula). Isso se faz evidente na forma como a aluna terminou seu relato: “...isso é **difícil até na fórmula**, porque são muitas coisas...” e na continuação da fala:

Vivian: Existem duas formas de verificar a dispersão: uma qualitativa e outra quantitativa. Mas obviamente a quantitativa é mais fácil de você ver porque você imagina **uma fórmula** que meça a distância que a ave voa, se ela fica ou não numa árvore, se ela regurgita as sementes, não sei, nem imagino uma fórmula desse jeito para quantificar essas coisas. Então a gente usa muito a quantificação (Transcrição da entrevista ou da fala).

Mas, como se *quantifica* a dispersão de sementes? Como é usado esse processo para tomar decisões relacionadas à eficácia? Ou seja, o que significa quantificar a relação mutualística entre plantas e animais e como são usados os resultados?

Segundo os alunos, as estratégias de dispersão das plantas por animais frugívoros podem ser classificadas em três categorias: a) espécies de plantas que produzem pequenas quantidades de frutos altamente nutritivos, por longo espaço de tempo, para animais frugívoros especialistas; b) espécies que produzem grande quantidade de frutos, em pequeno intervalo de tempo, para frugívoros generalistas; c) e espécies que produzem grande quantidade de frutos, em pequeno período, de tempo, para frugívoros com alto risco de serem predados por outros animais.

Mas, também é necessário levar em conta que vários animais são atraídos pelos mesmos frutos, e o processo de tratamento que cada espécie animal dá aos frutos é diferente: a forma como o fruto é apanhado, manipulado, transportado, consumido, digerido e expulso. Disso podemos interpretar que, em geral, a relação mutualística entre plantas e animais não é de um para um, nem de um para muitos,

senão de muitos para muitos, cujo grau de complexidade aprecia-se mais fortemente em florestas de grandes proporções.

Dos comentários dos alunos, podemos inferir que, de modo geral, neste contexto, quantificar significa *medir a qualidade da dispersão a partir da relação mutualística entre uma diversidade indeterminada de espécies de aves e plantas*. Pelas características das magnitudes que são quantificadas (quantidade de aves e plantas) e os propósitos (medir a *eficácia* na restauração vegetal) os alunos embasaram o processo nos fundamentos teóricos da *medida da diversidade ecológica* (MAGURRAN, 1988), particularmente a partir de processos de contagens, mas não de contagens simples, senão *multivariadas*: variadas plantas que produzem frutos em diversas quantidades e que atraem diferentes tipos de animais também em diferentes quantidades. Ambas as quantidades são aleatórias e com probabilidade de interagir.

Isso significa que não se trata de uma correspondência um a um, de uma quantidade de magnitude discreta (espécie de animais e espécie de plantas) e os números inteiros como é o caso das contagens simples, mas também de contagem a partir das análises de *padrões* do comportamento dessa interação. Daqui deduzimos que as quantidades que estão sendo tratadas são de natureza escalar, discretas e aleatórias (LIPPMAN, 2011), cuja relação mutualística quantificada é entre populações classificadas por famílias, gêneros e espécies tanto de aves quanto de marsupiais e frutos.

De acordo com Marrugan (1988), medir a diversidade implica entender a relação entre dois componentes principais: a *riqueza da espécie* que indica a quantidade numérica da espécie e a *regularidade*, também conhecida como a “equitatividade”, que diz respeito à abundância relativa das espécies. Assim, essa autora propõe dividir a medida da diversidade em três categorias: em primeiro lugar, por registro da riqueza indicando pelo número de espécies em um fragmento amostral. Em segundo lugar, por modelos de abundância das respectivas espécies descritas por padrões de distribuição. Em terceiro lugar, índices baseados em proporções de abundância das espécies em grupos determinados (MARRUGAN, 1988, p. 8).

Os alunos materializaram essas ideias nos conceitos de “*frequência de ocorrência*” e “*índice de importância relativa*”, que, em sua forma primária, indicam o percentual de cada item alimentar consumido pelo animal (uma forma de achar e

analisar padrões de acordo com Sabrina). Para exemplificar o processo, apresentaram o caso da dispersão de dois tipos de animais: marsupiais e aves, desconsiderando a interação entre essas duas espécies para simplificar as análises. No caso das aves, a ideia de frequência de ocorrência e a importância relativa foram substituídas pelos conceitos de componente quantitativo de remoção de sementes – QC-.

No trabalho esse processo de quantificação é resumido com duas fórmulas:

$$QC = \log \left[\left(\frac{V}{T} \right) \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{I}{N} \right) \right], \text{ onde } V = \text{n}^\circ \text{ de visitas, } T = \text{tempo (10 horas), } N = \text{n}^\circ \text{ de}$$

frutos manipulados, $I = \text{n}^\circ$ de frutos ingeridos, para achar o componente quantitativo de remoção de sementes –QC- e a outra formula para achar o índice de importância

$$\text{das aves para a comunidade de vegetais -IJ- } IJ = \sum \left[\frac{\frac{C_{ij}}{T_i}}{S} \right], \text{ onde } T_i = \text{n}^\circ \text{ total de}$$

espécies de aves que se alimentam dos frutos da planta i , $S = \text{o n}^\circ \text{ total de espécies de plantas amostradas, } C_{ij} = \text{a } 1 \text{ se a espécie de ave consome o fruto da planta } i \text{ ou } 0 \text{ se a espécie de ave não consome o fruto da planta } i.$

6.2.3 Estrutura do Projeto 3: “Cetáceos: um enfoque acústico”

O objetivo desse projeto era conhecer a mecânica dos sentidos dos cetáceos e a forma como são utilizados por eles mesmos para se alimentar, se localizar e se comunicar. Focaram principalmente nos métodos de comunicação acústica, que é a forma de comunicação mais eficiente entre eles. Com base nesse objetivo, o projeto foi dividido em quatro partes: na primeira fizeram uma breve introdução ao trabalho, e descreveram as principais características morfológicas das baleias e dos golfinhos, bem como apresentaram alguns fatores que levam a considerar os golfinhos uma das espécies mais inteligentes. Na segunda parte, apresentaram alguns conceitos básicos da bioacústica, a mesma que está baseada na física do som: frequência, potência e intensidade. Na terceira parte, discutiram as principais características e funcionamento dos aparelhos anatômicos emissores e receptores de sons desses animais.

Tomando como ponto de partida essa descrição, na quarta parte, apresentaram duas formas de aplicar os conceitos que constituem o campo da bioacústica: em primeiro lugar, explicaram a ecolocalização, que estuda as formas como esses animais usam o som para se comunicar, achar alimento e fugir de predadores (tudo de acordo com a espécie). Em segundo lugar, explicaram uma das técnicas que os cientistas utilizam para localizar animais em mar aberto a partir do som emitido por eles capturado por hidrofones estrategicamente localizados.

De acordo com as alunas, o som define-se como a energia de uma onda mecânica (precisa de um meio material e elástico), a qual transfere energia de um lugar para outro, resultante de um movimento vibratório ou uma perturbação. Segundo elas, a frequência, a intensidade e a potência são os conceitos ou variáveis fundamentais que identificam qualquer onda sonora. A frequência, definida como o número de oscilações por segundo do movimento vibratório, é medida em ciclos por unidade de tempo (denominada Hertz quando a unidade de tempo é o segundo); os sons agudos, comentaram, são caracterizados por ter frequências grandes e os graves por frequências pequenas. A *intensidade* é definida pela quantidade de *energia* contida no movimento e interpretada pela amplitude da onda propagada. Para *medir* a energia, utilizaram o conceito de potência por unidade de *área* que recebe a onda. Desse modo, comentaram que a intensidade pode ser interpretada como o nível de *pressão sonora*, utilizada para determinar a potência do som.

Esses conceitos e suas relações são materializados em três equações:

$f = \frac{c}{\lambda}$, onde f é a frequência; c , a *velocidade da luz no vácuo*; e λ , o comprimento de onda.

$I = \frac{Pot}{\text{área}}$, onde I representa intensidade; Pot , a potência da fonte; e *área*, a medida da superfície que recebe a onda sonora.

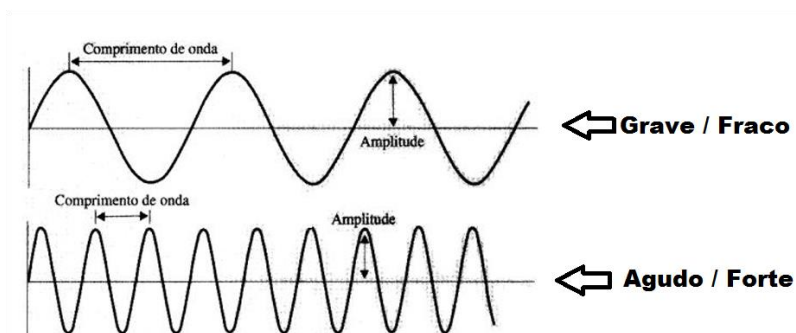
$N = 10 \log \frac{I}{I_{ref}}$, onde N representa o nível de pressão sonora; I , a intensidade sonora do estudo; e I_{ref} , intensidade de referência.

Com base na figura 11, que se mostra a seguir, as alunas explicaram o significado da frequência de uma onda sonora, conceito que consideram um dos

mais importantes da biocústica básica. Esclareceram que a primeira imagem representa um som grave por ser de frequência baixa, enquanto a segunda, um som agudo por ser de frequência alta.

Seguindo o trabalho escrito e algumas das falas das alunas, tanto na apresentação oral como nas entrevistas, verificamos que, embora dois dos possíveis usos das anteriores fórmulas se relacionem com as funções do som nos cetáceos e com as possibilidades de determinar a localização desses animais no mar (bioacústica e ecolocalização), na prática elas são pouco usadas de forma direta, mas sim indireta. Pois, como comentaram, as técnicas da bioacústica geralmente funcionam por classificação e comparação gráfica.

Figura 11: Relação da frequência com o tipo de som (grave ou agudo).



Fonte: Versão final do trabalho

O processo inicia com a captura de diferentes sons produzidos por esses animais por meio de hidrofones. Os sons capturados são digitalizados e processados por um computador, que mostra um gráfico com as principais características: frequências, amplitudes, timbre e comprimento de onda permitindo a classificação de espécies (baleias e golfinhos) e o estudo das ações que estão realizando ou pretendem realizar (alimentação, acasalamento, comunicação e/ou avisos de proximidade de predadores). Isso significa que, em geral, os cientistas usam as fórmulas indiretamente por meio dos audiogramas: representações gráficas dos sons capturados em forma de ondas. Para esse processo, comentaram as alunas, atualmente existem instrumentos bem construídos especialmente para captar e gravar os sons, produzir audiogramas e fazer os cálculos de interesse.

Por isso, sempre que as alunas foram indagadas pelo uso que os conceitos e as fórmulas apresentadas de bioacústica poderiam ter em estudos com cetáceos, a

resposta esteve relacionada principalmente com a classificação de espécies por meio de audiogramas. Por exemplo, Hanna na entrevista explica olhando para o trabalho escrito: “Os sons produzidos pelos mamíferos marinhos variam entre 0,1 kHz e 200 kHz”. Dessa forma podem ser classificadas as espécies assim:

- Baleia-fin:155-186
- Baleia-azul:155-188
- Baleia-cinzenta:142-185
- Baleia-da-groenlândia:128-189

Outra das possibilidades de uso da bioacústica apresentada pelas alunas relaciona-se com técnicas para localizar cetáceos em mar aberto. A situação geral é como determinar a posição de um animal marinho a partir da captura dos sons produzidos por ele quando é desconhecido o lugar exato de sua localização. Por terem esta particularidade de dependerem dos próprios sons para sobreviver, os cetáceos (baleias e golfinhos), são alvos de estudos denominados de localização pelos sons emitidos.

A técnica envolve o uso de vários hidrofones arranjos em diferentes formas. De acordo com Raphaela, dependendo das condições do local de estudo, são utilizados entre dois e cinco hidrofones e arranjos em forma linear, triangular ou de outros modos dependendo dos interesses e do número de hidrofones. Geralmente são separados por distâncias fixas um do outro, dependendo do estudo, para facilitar os cálculos. Os hidrofones capturam e enviam os sinais por cabo para um computador localizado em um barco relativamente próximo. Calculando as diferenças de tempo na captura do som de cada um dos hidrofones e com a ajuda do conceito matemático de hipérbole, é possível achar o ponto de localização do animal com margens de erro relativamente confiáveis.

6.3 As práticas matemáticas no contexto dos projetos

Baseados nas sínteses anteriores de cada um dos projetos, passamos a categorizar as práticas matemáticas comuns que emergiram dos três projetos,

finalizando com algumas reflexões sobre a relação dessas práticas com o conhecimento algébrico.

6.3.1 Processos de quantificação

Como discutido no capítulo II, o conhecimento matemático é produzido e reproduzido dialeticamente por meio de ações conceituais e empíricas, orientadas para o tratamento de formas e quantificações. O ponto de partida natural neste tipo de situações é apelar à memória coletiva materializada em livros, revistas e na internet para reproduzir os conceitos que, de acordo com os sujeitos, não só descreveram e explicaram as situações de interesse, mas também permitem cumprir com propósitos de produção a que se propõem. Desse modo, foi possível explicitar as *magnitudes* envolvidas nas situações propostas pelos alunos em cada um dos projetos, bem como os processos de *quantificação* gerados e as *relações quantitativas* que favoreceram a obtenção de possíveis respostas. Para isso os alunos tiveram que: (1) criar maneiras de refinar suas formas atuais de pensar sobre a situação; (2) constituir formas de expressar seus entendimentos da situação para poder testar e rever quantas vezes fossem necessárias; (3) constituir critérios para avaliar que os artefatos conceituais encontrados e/ou produzidos respondiam às condições da situação formulada.

Em um dos projetos, particularmente, os alunos pretendiam entender diferentes tipos de dispersão natural de sementes e encontrar critérios para determinar *padrões* efetivos de dispersão com o propósito de saber como manipular a relação mutualística entre plantas e animais pensando em possibilidades de regeneração natural de áreas vegetais degradadas. Para isso discutiram ideias sobre a medida da diversidade ecológica, entendida como uma forma de medir a multiplicidade e a abundância relativa de interações probabilísticas entre espécies de animais e plantas em determinados fragmentos espaciais e temporais. Desse modo, pôde-se inferir que as quantidades significativas da situação foram: quantidade de animais e quantidade de plantas (sementes), cujo processo de quantificação baseou-se em princípios de *contagem* estatística. Tratou-se, portanto, de quantidades discretas

que dizem respeito a número de espécies (animais e plantas) que interagem aleatoriamente.

Os alunos dos outros dois projetos focaram nas características físicas do som, para estudar, por um lado, como manipular diferentes tipos de sons e transformá-los em algo harmônico para o ouvido (música), tentando usar esse conhecimento na fabricação de um instrumento de sopro. Por outro lado, para estudar o comportamento dos cetáceos, que dependem do som para sobreviver, com o propósito de construir técnicas de classificação e controle.

Para o caso do projeto de “Matemática e Música”, partiram de dois grupos de definições: (1) o som como uma feição física que indica a propagação num meio de uma vibração. Desse fato é deduzível que as magnitudes fundamentais são o *som*, o *tempo* e a *velocidade* materializados no conceito de frequência; (2) definições diretamente relacionadas com a teoria musical: andamento, ritmo, textura e intervalo. Cada uma delas pode ser entendida como *grandezas físicas e musicais respectivamente*. Diferentemente do projeto anterior, as magnitudes são contínuas, pois aceitam processos de quantificação por meio de números reais.

No caso do projeto sobre “cetáceos”, o interesse estava associado à bioacústica, que por definição pode ser entendida como uma imbricação de resultados da física-matemática da acústica com alguns princípios próprios da biologia. Assim, da mesma forma que no projeto anterior, os alunos começaram com definições da física do som apresentando a *frequência como o principal conceito que exprimem a magnitude do som, tempo e velocidade* de uma onda mecânica, mas, pelo interesse do projeto, o meio de transmissão da onda era a água. Neste caso, a forma de quantificação e de relacionamento das magnitudes foi gráfica, em particular, por meio de audiogramas.

Neste momento temos três elementos: em primeiro lugar, as magnitudes de natureza contínua tratadas nos três projetos, como foi o caso da velocidade de propagação do som e do tempo, foram “discretizadas” para gerar processos de quantificação; isto é, as magnitudes contínuas foram transformadas em unidades absolutas para ser operadas como unidades inteiras, “eidos” e/ou “aritmós” (como apresentado no capítulo III). Em segundo lugar, os processos de quantificação nos projetos faziam sentido enquanto representantes de alguma forma de relacionamento entre as variáveis significativas da situação; isso significa que, mais que quantificações aritméticas diretas, foram tratadas *relações entre quantidades*. O

terceiro elemento diz respeito ao papel das *fórmulas*: nos três projetos foram utilizadas como artefatos que indicavam formas inquestionáveis de ação, e por isso pode-se dizer que tiveram um papel de metodologia para obter as respostas “certas” das situações. É nesse sentido que as fórmulas podem ser entendidas como modelos matemáticos (concretos abstratos).

6.3.2 *Uso de razões e proporções.*

Em geral, dois tipos de relacionamentos entre as quantidades significativas das situações foram percebidos: razões e proporções simples, diretas e inversas. Razões entre quantidades foram utilizadas nos projetos sobre “Matemática e Música” e “Dispersão de sementes”, em que foram comparadas quantidades da mesma natureza e materializadas em resultados numéricos. Já as práticas vinculadas às relações proporcionais foram visíveis em diferentes momentos dos três projetos.

6.3.2.1 *Uso de razões entre quantidades*

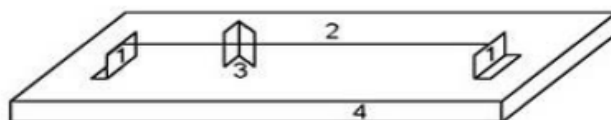
No projeto sobre “Matemática e Música”, os alunos referenciaram os sons harmônicos com uma *relação de frequências de vibração entre duas cordas, cujos comprimentos mantêm certa relação*. Justificaram essa afirmação apoiando-se nas conclusões pitagóricas, produto dos experimentos com o instrumento chamado de monocórdio pitagórico (ver figura 12). Com base nessas conclusões, definiram um *harmônico* como uma combinação de sons qualificados e agradáveis para o ouvido, isto é, sons musicais.

Ressaltamos aqui três elementos. Em primeiro lugar, como apresentado no capítulo III, para os gregos era clara a diferença entre o tratamento dos números como objetos puros e o das quantidades nas atividades práticas. Em ambos os casos usavam os termos aritmética e logística para se referir aos usos dos números em si e para as relações (razões) entre eles. Desse modo, consideravam a existência de uma aritmética e uma logística pura e uma aritmética e uma logística

prática. O tratamento da música em Pitágoras associa-se com a logística pura (KLEIN, 1992), o que implica relações por cociente (razões) entre números puros.

Em segundo lugar, nesse contexto a razão como relação indica algo diferente do que a representa. Por exemplo, o fato de a relação (razão) ser meio ou uma terceira parte, etc. não implicava a existência de um número que a representasse, entre outras coisas, porque as frações (números como modernamente são conhecidas), para os matemáticos gregos, não tinham “status” ontológico de número; número significava ser número inteiro (unidade de unidades).

Figura 12: Experimento com o monocórdio pitagórico



1 – Bases (cavaletes fixos): seguram a corda

2 – Corda: produz o som

3 – Cavalete Móvel: regula a distância da corda e consequentemente o som emitido.

Considerando um monocórdio com uma corda de distância d que emite o som s , Pitágoras observou que quando o comprimento do segmento vale $3/4$ da distância inicial d_i , o som emitido é $1/4$ acima do som emitido com a corda solta (corda sem o cavalete). A relação entre distâncias e os sons observados segue na tabela abaixo em que:

s = som

d = distância

s_i = som inicial (som com a corda solta)

d_i = distância inicial (distância sem o cavalete)

Comprimento do segmento separado pelo cavalete	Tom emitido
$d = 3/4 d_i$	$s = s_i + 1/4 s_i$
$d = 2/3 d_i$	$s = s_i + 1/5 s_i$
$d = 1/2 d_i$	$s = s_i + 1/8 s_i$

Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Em terceiro lugar, uma razão deve ser entendida como uma medida relativa que só é possível constituir enquanto se esteja referindo a quantidades da mesma natureza (EUCLIDES, livro V). Nesse sentido, na concepção pitagórica de razão, mesmo reconhecendo uma variação na intensidade do som quando é variado o comprimento de corda, não faz sentido determinar uma expressão para

correlacionar a medida do comprimento e a medida da intensidade do som por serem quantidades de natureza diferentes.

Com base nestas três comentários, observamos que, na perspectiva pitagórica, as expressões usadas pelos alunos na figura 12, que indicam as medidas relativas ou razões entre o comprimento da corda e as medidas relativas do som, mesmo sugerindo a existência de uma relação (razão) entre duas quantidades, não podem ser entendidas como expressões de caráter algébrico, pois não estão expressando uma relação geral entre relações, senão simplesmente o resultado de uma comparação (medição) dos comprimentos com as frequências (relações singulares) representadas pelas “frações” que aparecem na expressão.

Os números que os alunos usaram nessa expressão, sob um ponto de vista ontológico, não seriam senão formas que representam a relação por comparação de duas magnitudes, ou seja, uma forma de expressar a medida relativa entre duas quantidades. Assim, os símbolos $1/2$, $2/3$, $3/4$, e $1/4$, $1/5$ e $1/8$ da tabela, devem ser lidos como: o comprimento da corda d é meio, dois terços, três quartos, do comprimento da corda d_i (unidade de medida); ou no mesmo sentido, a razão entre o comprimento da corda d e da corda d_i é meio, etc. Já as expressões um quarto, um quinto e um oitavo indicam relações de medida de sons com respeito ao som unidade S_i . Nesse caso “som” representado com S_i e S deve ser entendido como medida da frequência.

No entanto, pela forma das expressões e pelo tratamento que os alunos deram, indicando que estão raciocinando em termos de uma variação de proporcionalidade entre duas quantidades de diferente natureza e, desse modo, as letras sugerem um tratamento de variáveis.

Gabriela: Um monocórdio é um instrumento construído de uma tábua e uma corda com extremos fixos. Quando ela é pulsada emite um som. Agora conforme essa paletinha é afastada para lá ou para cá, a vibração vai diminuindo e do outro lado vai aumentando. Então essa expressão mostra a relação de frequência com o comprimento da corda. Se, por exemplo, a paletinha é localizada a uma distância de um meio da corda original, o som sai um quarto acima do som original. E assim por diante, para cada comprimento uma nota diferente. (Transcrição da apresentação oral).

Se fosse a partir da perspectiva pitagórica as representações numéricas deveriam significar razões entre números inteiros, mas para os alunos as

expressões pareciam indicar a relação da intensidade do som com respeito ao comprimento da corda. Do mesmo modo, é possível apreciar que as letras usadas nessas expressões, mesmo representando quantidades, não indicam quantidades indeterminadas gerais, somente nomes que rotulam quantidades aritméticas. Isso significa que as letras não estão representando variáveis ou incógnitas (BLOEDY-VINNER, 2002; JANVIER, 1996). Porém, os alunos interpretaram o fenômeno como se tratando de uma variação proporcional, mesmo sem sê-lo. Atribuímos a isso a indução que a forma de representação exerce sobre eles.

Esse mesmo caso pode ser observado quando explicaram o funcionamento dos tempos das escalas musicais utilizando o conceito de progressão geométrica, entendida como uma proporção que relaciona o tempo de qualquer nota musical com a posição na escala. Conhecendo os parâmetros: primeiro tempo da nota na escala tomada como ponto de referência e a razão da progressão que seria $\frac{1}{2}$, calcularam os diferentes tempos das notas na escala. A fórmula que representa a progressão é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

a_1 : primeira nota da escala.

a_n : nota que estaria na posição n da partitura.

$q = 1/2$

Embora represente uma relação de medida com razão fixa, da mesma forma que no caso anterior, a expressão foi interpretada pelos alunos como se fosse uma variação entre duas quantidades de distinta natureza, tal e como explicado por Barbara na apresentação oral, “...*Para que cada nota mude na escala você tem que dividir por um médio para achar a próxima nota...*”. Assim, uma das quantidades é representada pela nota e a outra pela escala na partitura.

Outro episódio em que os alunos usaram técnicas de cálculo por razões numéricas (aritméticas), mas o tipo de raciocínio que fizeram pode ser enquadrado em variações proporcionais, foi o projeto sobre dispersão de sementes. Como apresentado, a situação problemática formulada era *medir a diversidade ecológica* como uma forma de quantificar a interação mutualística de número de animais de acordo com a espécie e de frutos ingeridos. Um dos propósitos era determinar padrões quantitativos de interação. Os dois exemplos apresentados foram com marsupiais e aves. Na apresentação oral, o primeiro exemplo foi explicado por Sabrina e o segundo, por Vivian:

Fabian: Como é o processo de quantificação da relação mutualística entre plantas e marsupiais?

Sabrina: Bom, são coletadas amostras de fezes dos animais durante um tempo determinado, geralmente por 12 meses em diferentes períodos do ano. Para isso são instaladas armadilhas em lugares estratégicos. Depois são contadas as sementes que aparecem nas fezes e classificadas por família, gênero e espécie. Com isso se sabe o que é que o animal prefere comer. Sabendo quantas sementes passaram pelo trato digestivo, bom realmente é uma estimativa, se faz um cálculo de porcentagens.

Fabian: Num estudo de dispersão de sementes por marsupiais, o que diz a Frequência de ocorrência e o índice relativo de importância?

Sabrina: A frequência de ocorrência (FO) dá uma ideia de quantas vezes um item aparece, ou seja, a porcentagem da que falei. Por exemplo, vamos supor que eu fiz uma coleta por um tempo. Ai como expliquei, preciso contar o número total de sementes e classificá-las. Aí a frequência de ocorrência significaria a porcentagem de número de sementes de uma espécie que foi encontrada em relação à quantidade total coletada na amostra. Ordenando a frequência de ocorrência, pode-se obter o índice de importância relativa (IIR), que significa o tipo de animal que consome mais determinados frutos (Transcrição da entrevista).

Do mesmo modo a Vivian explica:

Fabian: O que significa quantificar a dispersão de sementes por aves?

Vivian: É que depende da **fórmula** que você esteja usando para quantificar. Se você usa o elemento quantitativo, você está quantificando quantos frutos aquela espécie come, basicamente. Se você pensa que ela pega e o que come também sai, então ela está dispersando. Mas você não pode inferir com certeza que dispersou tudo aquilo porque às vezes pode ter derrubado alguma semente enquanto ele comia, dependendo do fruto ela o pode danificar no trato digestivo. Mas a princípio você quantifica quantos frutos a ave come e o índice de importância.

Fabian: Mas isso ainda não diz o que significa quantificar a dispersão, só diz quantos frutos de uma determinada espécie algum animal e/ou uma espécie comeu...

Vivian: Então, por isso eu disse que é muito difícil porque quantificar a dispersão é tudo, **e a fórmula não dá conta de tudo...**

Fabian: Então, além dos frutos que a ave come, o que mais se quantifica?

Vivian: É complicado. A quantificação de dispersão é por fruto. O que a gente inicialmente quantifica são os frutos, porque dependendo do fruto, pode ter uma quantidade diferente de semente. Há fruto que tem a mesma quantidade, outras que por vezes muda. Por semente não dá para quantificar, porque você não sabe quantas sementes o animal ingeriu e quantas ele pode ter quebrado

ingerindo, então a gente quantifica o fruto do que ela se alimentou. Quantidade tem duas formas, (ou seja, dois tipos de quantificações). Em meu trabalho eu uso duas: quantidade de fruto por tempo que o animal (espécie de pássaro) mexe, consequentemente quantas vezes ele mexe e depois vai embora e obviamente aquelas que come. E o outro analise que eu faço é a importância na quantificação, que vai ser a importância daquela espécie para a área, como ele se alimenta. Por exemplo, o "Sabiá" pode se alimentar de dez espécies daquela área, mas só está se alimentando de duas. Então ele é o único que consegue dispersar aquelas duas. Então na hora de fazer uma conta, você não vê só de qual se alimenta, você vê de quais se alimenta demais e quais são mais ou menos muito importantes. Por exemplo, se eles não estivessem lá, aquelas duas espécies de plantas não seriam dispersas (Transcrição da entrevista)

Da fala de Sabrina destaco dois elementos que ilustram usos de razões aritméticas com justificativa de raciocínio variacional. Ela declarou duas quantidades de natureza diferente: número de fezes coletadas em um intervalo de tempo (12 meses) e número de sementes (classificadas em famílias, gêneros e espécies). A primeira tratada como variável independente, enquanto a segunda depende da primeira. A quantidade tempo, mesmo sendo variável, realmente é usada como parâmetro. Porém os cálculos são feitos pela *técnica* de porcentagem; isto é, um cociente que determinar a medida relativa com respeito à totalidade (relação por cociente parte-todo). Com o número obtido, são tomadas as decisões que determinam o grau de eficiência na dispersão para cada espécie de animal. Ver figura 13.

Figura 13: Exemplo de um estudo sobre Frequência de ocorrência.

Família	Gêneros	Espécies	Amostras (N)	PO (%)	Meses
Fabaceae	9	10	208	79.1	12
Solanaceae	1	1	110	41.8	12
Myrtaceae	1	1	85	32.3	12
Annonaceae	2	4	76	28.9	11
Arecaceae	4	4	68	25.9	12
Sterculiaceae	2	2	32	12.2	6
Verbenaceae	1	1	27	10.3	11
Malpighiaceae	1	1	23	8.7	8
Ebenaceae	1	1	21	8.0	3
Rubiaceae	3	3	21	8.0	9
Melastomataceae	1	1	12	4.6	2
Apocynaceae	1	1	10	3.8	4
Rutaceae	1	2	9	3.4	6
Moraceae	1	1	6	2.3	6
Clusiaceae	2	2	5	1.9	4
Smilacaceae	1	1	4	1.5	4
Burseraceae	1	1	3	1.1	2
Dilleniaceae	1	1	2	0.8	2
Anacardiaceae	1	1	1	0.4	1

Fonte: Versão final do trabalho dos alunos

Já no caso explicado por Vivian, é possível apreciar que as variáveis definidas são: número de aves que visitam uma determinada planta, número de manipulações

da ave, número de frutos ingeridos e o tempo (10 horas). Mas, é possível inferir que, mesmo o processo levando em conta que são várias variáveis, da mesma forma que no caso anterior, declara-se uma como principal e independente, neste caso frutos ingeridos por unidade de tempo. Mas o tempo, como sucede com marsupiais, pode ser entendido como *um parâmetro* que, para efeitos do experimento, equivale a 10 horas. De acordo com a aluna, o processo técnico consiste em três passos: em primeiro lugar, contar o número de aves por espécie que visitam determinada família de plantas. Em segundo lugar, quantificar cada espécie de fruto que cada espécie de ave manipula. E finalmente quantificar o número de frutos ingeridos pela espécie durante o tempo que dura o experimento. Essa informação é processada por meio das seguintes fórmulas:

$$QC = \log \left[\left(\frac{V}{T} \right) \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{I}{N} \right) \right];$$

Componente quantitativo

$$IJ = \sum \left[\frac{\frac{C_{ij}}{T_i}}{S} \right]$$

Índice de importância

Quando os alunos foram indagados pela maneira como as fórmulas são usadas na prática de cálculo e pelo significado das letras, todos responderam a segunda pergunta nomeando o que as letras representavam enquanto quantidade numérica: *V* representa o número de visitas; *T*, o tempo (10 horas); *N*, número de frutos manipulados pelo animal; e *I*, número de frutos ingeridos, para a primeira fórmula. Na segunda, *T_i* = nº total de espécies de aves que se alimentam dos frutos da planta; *i*, *S* = o nº total de espécies de plantas amostradas; *C_{ij}* = a 1 se a espécie de ave consome o fruto da planta; *i* ou 0 se a espécie de ave não consome o fruto da planta *i*. Porém, com respeito à primeira pergunta, isto é, aos usos que têm na prática, somente a Vivian argumentou:

Vivian: No cálculo do QC total, para cada espécie de planta, deve ser calculado o número de visitas por unidade de tempo que é 10 horas de observação, que multiplicado pelo número de frutos manipulados em cada visita e o número de frutos ingeridos durante as visitas, resulta na *probabilidade de dispersão* que indica os frutos ingeridos no tempo constante de observação. Determinando assim o QC de cada espécie de ave e para cada espécie de planta, podem ser colocados de maneira

decrecente em uma tabela bidimensional, a fim de ser mais fácil a visualização da eficiência quantitativa de cada espécie de ave... (Transcrição apresentação oral)

A partir da fala da aluna, interpreta-se que cada uma das frações que compõem a fórmula para o cálculo do QC não é um simples quociente, mas podem ser entendidas como razões que indicam probabilidades: a probabilidade de a planta ser visitada V num período de tempo T , $\frac{V}{T}$;

a probabilidade de o fruto ser manipulado N por número de vistas V , $\frac{N}{V}$; e

a probabilidade de o fruto ser ingerido I por número de manipulações N , $\frac{I}{N}$.

Na entrevista os alunos foram indagados sobre por que não é possível cortar as variáveis V e a N na fórmula $QC = \log \left[\left(\frac{V}{T} \right) \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{I}{N} \right) \right]$, e nenhum dos alunos soube responder. No entanto, Vivian comentou,

Realmente não sei. Não parei para pensar, porque meu papel é ir ao campo de observadora para coletar dados. Aí o que eu faço é marcar numa tabela as aves observadas, os tipos de fruto em que elas mexem e assim por diante como já expliquei. Depois eu introduzo a informação na fórmula e obtenho os resultados... (Transcrição da entrevista)

Depois de uns minutos olhando para o trabalho apontou,

Talvez seja bom manter o produto indicado das três razões já que, ao ficar indicado, cada uma delas poderia oferecer informação diferente para o pesquisador além do simples resultado final. Pode acontecer, por exemplo, que uma alta taxa de visitas da ave em um tempo determinado não implique necessariamente manipulação do fruto; ou seja, pode visitar, mas não manipular e obviamente não ingerir. Ou pelo fato da planta ser visitada num período de tempo e ter um alto grau de manipulação do fruto, não necessariamente implique que o animal os ingira. Mas o importante é que o animal coma o fruto. Caso isso acontecer, é muito provável que disperse... (Transcrição de entrevista)

Considero que a explicação da aluna foi coerente com o mostrado pela fórmula, na medida em que, ao cortar as variáveis V e N de $QC = \log\left[\left(\frac{V}{T}\right)\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{I}{N}\right)\right]$, resultado seria $QC = \log\left[\left(\frac{I}{T}\right)\right]$ que, seguindo a explicação anterior, representa a probabilidade de dispersão que, no final das contas, depende basicamente de que o animal consuma o fruto.

Em ambos os casos, tanto o método usado por Sabrina quanto o usado por Vivian, pode-se apreciar que o resultado numérico final, obtido pelo cálculo da razão entre duas quantidades numéricas, termina sendo o aspecto mais importante para tomar as decisões relacionadas com a situação problemática. No entanto, por trás desse resultado aritmético produzido por meio das fórmulas, realmente se esconde um raciocínio variacional entre quantidades numéricas.

6.3.2.2 Uso de relações proporcionais

O raciocínio proporcional é um das formas mais antigas de organização conceitual matemática, mas atualmente está eclipsado pelas modernas teorias dos números reais e da álgebra simbólica. Em geral, as práticas matemáticas relacionadas com problemas multiplicativos embasam sua operabilidade no uso sistemático do conceito de proporção entre quantidades de distinta natureza e em diversas formas de medição. Nesse sentido, o raciocínio proporcional associa-se ao estudo de razões constantes entre quantidades relativas, que permitem comparações com quantidades de outra natureza que variam conjuntamente.

No projeto sobre “Matemática e Música”, foi possível apreciar explicitamente esse tipo de raciocínio quando explicaram as características dos instrumentos “Didgeridoo” e “Zampoña” e as condições em que a matemática pode auxiliar na sua fabricação.

Um “Didgeridoo”, comentou Daniel,

Daniel: Pode ser definido como um tubo aberto qualquer com um bocal de um diâmetro em que seja possível posicionar os lábios e soprar. Já uma “Zampoña” consiste em um sistema de tubos abertos e fechados de

diferente comprimento dispostos em sequência de tamanho. O som desses instrumentos é produzido através da vibração que a coluna de ar causa na parede do tubo ao sair da boca e percorrer toda a sua extensão. (Transcrição da apresentação oral).

Do mesmo modo, esse aluno explica o funcionamento desses instrumentos da seguinte maneira:

Figura 14: Instrumentos de tubos abertos e fechados



Daniel: A primeira relação com a física e a matemática que aparece aqui é com respeito ao material do instrumento e ao comprimento do tubo. O material dá o timbre e o comprimento dá a nota. Se você tiver um instrumento fabricado com o mesmo material e grossura, mas de comprimentos diferentes e sopra com a mesma velocidade, as frequências produzidas são diferentes, ou seja, produzem notas diferentes. Isso se pode ver nessas equações, $f = \frac{N \cdot V}{2L}$ e $f = \frac{N \cdot V}{4L}$, em que a primeira é para tubos abertos e a segunda para tubos fechados. A letra f representa a frequência de vibração do ar, N é um valor constante que depende do material do instrumento, V representa a velocidade com que ingressa o ar e L , o comprimento do tubo. (Transcrição da apresentação oral).

Fonte: Apresentação dos alunos

Para esse aluno há uma clara correspondência entre as variáveis significativas do fenômeno e a representação na fórmula. Isso é explicado com mais detalhe quando disse que essas fórmulas não só permitem entender a forma de produzir frequências em instrumentos, como “Didgeridoos” e “Zampoñas”, mas também a maneira como poderiam ser usadas em práticas de fabricação de outros instrumentos similares e ainda mais complexos, como flautas e quenás. Por exemplo, expressou o aluno,

Figura 15: Fabricação de flauta

Fonte: Apresentação alunos

Daniel: os buraquinhos de instrumentos, como a flauta são para a gente poder controlar o comprimento do tubo e produzir as diferentes notas. Isso tem que ser calculado perfeitamente no momento em que o instrumento é fabricado. Para o tamanho dos buraquinhos existem outras fórmulas. (Transcrição da apresentação oral).

Percebe-se como é claro para esse aluno que as letras F , V e L representam variáveis enquanto N , uma constante. Porém não conseguiu explicar como se calcula o valor dessa constante, mesmo manifestando que depende das propriedades do material com que é construído o instrumento. Além de reconhecer o papel das variáveis na expressão e os efeitos que produz no fenômeno quando são variadas, mostrou certa compreensão na correlação entre elas.

Daniel: Tomemos as duas equações, $f = \frac{N \cdot V}{2L}$ e $f = \frac{N \cdot V}{4L}$. A gente

percebe aqui que a frequência é colocada em relação com o comprimento e a velocidade. Se a gente não alterar a velocidade do sopro e dobramos o comprimento do tubo, a frequência do primeiro é duas vezes maior do que o segundo. Por quê? Justamente porque a relação do comprimento e a frequência é inversamente proporcional. Ou seja, nessas condições, quanto maior o comprimento, menor vai ser a frequência, o que significa que é uma nota mais grave. Já a frequência em relação à velocidade do sopro, são diretamente proporcionais; se a gente mantiver o mesmo comprimento e eu dobrar a velocidade do sopro, você sobe uma oitava acima. Ou se quero dobrando a frequência, teria que aumentar a velocidade ajustada com a constante universal N . (Transcrição da apresentação oral).

Pela explicação que fez das fórmulas, Daniel demonstrou que, além de parecer claras a ele as relações entre as frequências, velocidade de sopro e comprimento de tubos abertos e fechados, também reconheceu possíveis *padrões* de ação encapsulados nelas. Isso significa que além de entender que frequência e velocidade ou frequência e comprimento são quantidades relacionadas direta ou inversamente proporcionais, dependendo de qual delas é fixada como constante, entende que, da mesma forma como aconteceu com os alunos do projeto sobre Dispersão de semente, as fórmulas são artefatos culturais que indicam formas de

ação a serem executadas de acordo com a finalidade que o sujeito se propõe a cumprir. Em outras palavras, as fórmulas utilizadas podem ser entendidas como *modelos matemáticos* que, além de explicar o fenômeno, permitem transformá-lo.

Uma diferença marcante entre a forma de raciocínio dos alunos do projeto sobre Dispersão de sementes e este é que o interesse dos primeiros (explicado por Sabrina e Vivian) estava no resultado numérico, enquanto para Daniel, o cálculo numérico foi menos importante. Quando Daniel explicou as formas como a frequência, ou seja, as notas, dependem da variável velocidade e comprimento do tubo, realmente estava mostrando a compreensão de que a fórmula encarna uma *lei de variação* entre variáveis ou padrão de relacionamento entre quantidades indeterminadas. Além disso, apoiado nas fórmulas, construiu argumentos para mostrar que elas auxiliam o controle das variações entre variáveis dependentes (frequência), quando as variáveis independentes (velocidade ou comprimento) variam, produzindo um fim determinado e esperado: neste caso, as notas musicais (frequências particulares). Aspecto necessário para construir os instrumentos.

Essa forma de raciocínio do aluno pode ser interpretada como uma forma de operar com a estrutura do fenômeno através da estrutura das ações encarnadas nas fórmulas, em que o tratamento das quantidades indeterminadas (variáveis), mesmo sem ser totalmente abstraído espaço-temporalmente, está próximo da zona do pensamento algébrico proposto por Radford (2010).

Isso significa que há uma tentativa de uso das letras com caráter *geral* para mostrar, independentemente de valores numéricos particulares, não só possíveis formas de construir um conjunto determinado de frequências que indicam sons produzíveis com esse instrumento, mas também que apenas alguns sons podem ser assumidos como agradáveis para o ouvido: notas musicais. Isso indica constituir uma tentativa de singularização de um conhecimento geral de acordo com uma atividade particular, como acontece nas formas de produção de conhecimento conforme apresentado no capítulo II. Processo que pode ser controlado pelo sujeito usando a fórmula como artefato simbólico, cuja técnica é inserida em ato no objeto material (a flauta) a partir das ações de modificação das variáveis independentes. Aqui pode ser percebido um uso diferente nas letras dessa expressão, comparado com as expressões anteriores. A letra como variável indeterminada se faz mais visível e, além de ressaltar o aspecto de dependência de uma variável com respeito

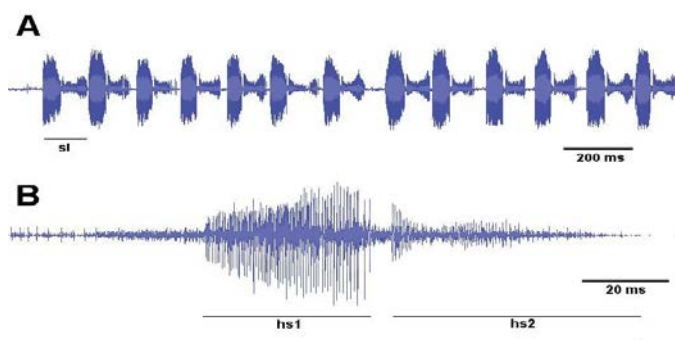
à outra, se manifesta na existência de uma lei de formação: ser quantidade direta ou inversamente proporcional respectivamente.

6.3.2.3 Uso de gráficos: instrumentos para o estudo de relações

Com relação às práticas constituídas pelos alunos que desenvolveram o projeto sobre “cetáceos”, algumas das ações também indicaram usos de conceitos associados à variação entre quantidades, principalmente quando explicavam os processos de classificação de comportamento dos cetáceos em situações que dependiam dos diferentes sons emitidos por eles. Porém as ações realizadas pelos alunos estiveram baseadas principalmente na leitura de gráficos. Os audiogramas foram os mais usados por este grupo para representar variações de variáveis físicas fundamentais: energia, frequência, intensidade, comprimento de onda, velocidade do som num meio determinado.

À pergunta, se você estivesse interessada em estudar os cetáceos, como usaria os conceitos e as fórmulas de frequência, intensidade e potência para esse propósito? As respostas das alunas resumiram-se em que são os conceitos que servem para construir padrões de classificação a partir da frequência dos sons emitidos pelos animais, e uma das técnicas usadas para isso é a leitura de audiogramas. Nahanna explicou alguns dos usos possíveis desse tipo de artefatos.

Fabian: Vamos supor que você é uma cientista interessada em estudar a função do som que diferentes tipos de cetáceos emitem e em determinado experimento fosse captado um som representado no gráfico (audiograma), como esse que vocês apresentaram no trabalho. O que você interpretaria do cetáceo que produz esse som? Ou seja, que informação oferece e o que você faria com essa informação?



Nahanna: Poderia ser um som emitido como um chamado para reprodução, por exemplo. Mas, também poderia ser para comunicação, tipo a mãe e filho estão no fundo do mar e o pai está lá em cima e eles querem se comunicar. Como são da mesma família, eles emitem essa canção. Ou poderia ser que algum deles avistou uma presa, ou também avisando de algum perigo.

Fabian: Como você faria para obter essas informações só olhando para as características particulares do gráfico?

Nahanna: Pode ser comparando com outros estudos. Por exemplo, em outros estudos já captaram essa frequência e intensidade enquanto acontece entre os animais um processo de reprodução. Assim, você olha essa representação que está aqui, analisa a frequência que diria algo sobre a espécie e vê o que acontece com eles e aí vai comparando. Por exemplo, se dez vezes aconteceu essa representação e logo em seguida eles começaram a se reproduzir, então quer dizer que isso aqui é um chamado para reprodução. Então seria analisando os estudos que foram feitos por testes de repetição. Ou seja, por padrões de comportamento e padrões de gráficos. Aí caso não tenha uma classificação em estudos anteriores, então você registra como uma nova classificação e talvez pode publicá-los para outros estudos. Mas, eu não tenho muita experiência, e isso deve ser bem mais complexo. Eu teria que estudar mais o tema. Com a experiência isso melhora. Têm cientistas que já batem o olho e imediatamente dizem: esse é um som de reprodução porque levam muito tempo fazendo testes e estudando o fenômeno. (Transcrição da entrevista)

Do apontamento da aluna, é possível apreciar que, através da leitura e compreensão de gráficos, não é preciso usar fórmulas ou expressões algébricas para determinar formas aproximadas de variação entre variáveis, achar estados particulares do fenômeno estudado e reconhecer taxas de variação médias e instantâneas. Isso significa determinar padrões de comportamento sem ter que recorrer a cálculos numéricos nem algébricos.

Algo similar foi apresentado pelos alunos que desenvolveram o projeto sobre “dispersão de sementes” quando comentaram que uma forma de entender os resultados obtidos com a fórmula $QC = \log \left[\left(\frac{V}{T} \right) \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{I}{N} \right) \right]$ é passando a informação para uma representação gráfica. De acordo com Vivian, fica mais fácil reconhecer padrões de importância de dispersão. Por exemplo, no seguinte gráfico mostram-se os dados de uma experiência real efetuada por Vivian. Na tabela 1, aparecem os resultados numéricos registrados para valores de Componentes Quantitativos de remoção de sementes de diferentes espécies de aves em uma planta particular.

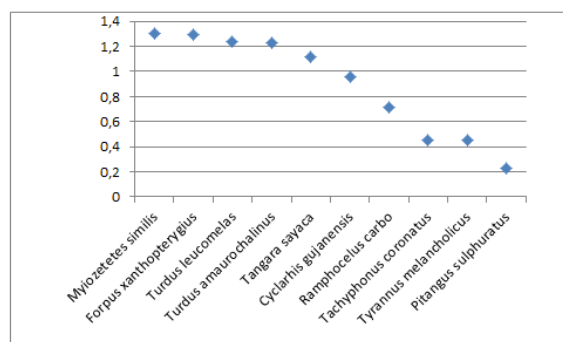
Tabela 1: – Componente Quantitativo (QC) de remoção de sementes de espécies de aves visitantes na árvore *Schinus terebinthifolius*.

Espécie de ave	QC com Log
Myiozetetes similis	1,3010
Forpus xanthopterygius	1,2976
Turdus leucomelas	1,2353
Turdus amaurochalinus	1,2240
Tangara sayaca	1,1197
Cyclarhis gujanensis	0,9610
Ramphocelus carbo	0,7146
Tachyphonus coronatus	0,4539
Tyrannus melancholicus	0,4497
Pitangus sulphuratus	0,2304

Fonte: Versão final do trabalho

Com base nos resultados gráficos, comentou a aluna, é possível visualizar a espécie de ave mais eficiente para determinada espécie de planta. Padrões de comportamento que, de acordo com a aluna, não é fácil de apreciar através da informação numérica que aparece na tabela.

Figura 16: Componente Quantitativo de cada ave.



Fonte: Versão final do trabalho

6.3.3 As práticas matemáticas no contexto dos projetos: uma síntese

O exercício anterior é uma síntese do conjunto de ações que dizem respeito ao tratamento de diferentes quantidades e relações (práticas matemáticas), constituídas pelos alunos e orientadas para a formulação e tentativa de resolução das situações problemáticas formuladas nos projetos. Práticas matemáticas que foram parte

constitutiva do processo de modelagem enquanto projeto desenvolvido como uma das tarefas no contexto da disciplina de matemática aplicada.

Acharam-se três categorias de práticas matemáticas dominantes, que, por terem sido constituídas à medida que o projeto se desenvolvia, tiveram um carácter de emergentes. Elas foram classificadas em: (1) ações orientadas para a discriminação de quantidades consideradas significativas para a situação; (2) ações que dizem respeito ao tratamento de medida (razões); (3) ações orientadas para o uso de variações proporcionais; (4) e uso de gráficos para a análise de variações e relações entre quantidades. Em termos gerais, são práticas matemáticas que implicam o estudo sistemático de fenômenos cujas variáveis e de relações entre variáveis. De acordo com Blanton e Kaput (2011); Heid (1996); Kieran (2004, 2006), esses tipos de prática matemática enquadram-se na perspectiva denominada de funcional ou, conforme Cantoral e Farfán (1998); Posada et al. (2006), variacional. Em ambas os casos tomam o conceito de *variação* como principal unidade de análise.

Para esses autores, os processos de modelagem matemática, aplicação de modelos matemáticos e/ou a análise qualitativa de modelos, como apresentado por Soares e Javaroni (2013), têm como elemento transversal o tratamento sistemático de quantidades que variam conjuntamente, respondendo ou não, a padrões determinísticos e/ou aleatórios. Dar ênfase ao conceito de variação permite entender que muitos dos processos e conceitos matemáticos tradicionalmente localizados no campo da álgebra, do cálculo e da análise, como é o caso da função, equação, parábola, equação diferencial etc., são frutos de dois processos diferentes, porém intimamente ligados: a variação conjunta de quantidades (covariação) e a relação entre relações de padrões de variação (correlações).

A primeira recorre ao sentido variacional que, em termos gerais, significa apreciar, estudar e coordenar quantidades que variam com a variação de outras quantidades. De acordo com Posada e Villa (2006a), esse processo de coordenação implica, em primeiro lugar, saber discriminar ou definir as quantidades pertinentes ou de interesse de uma determinada situação e, em segundo lugar, saber perceber qualitativamente as variações que acontecem no sistema quando alguma das quantidades é variada intencionalmente. A correlação, por sua parte, implica construir algum padrão de interdependência quantitativa entre as variáveis com a ajuda de formas simbólicas, em particular com símbolos algébricos.

De acordo com Posada e Villa (2006a), na passagem da coordenação de quantidades de covariação para a construção de padrões de correlação nem sempre há continuidade. Mesmo alguém conseguindo construir formas de variação conjunta entre quantidades ajustadas à situação de interesse, nem sempre consegue determinar as formas de correlações respectivas, entre outras coisas, porque nem sempre é possível. Nesse sentido não é totalmente transparente que as pessoas, ao enfrentarem situações de modelagem matemática, em que precisam coordenar processos de covariação para construir simbolicamente formas de correlação, consigam fazê-lo, e vice-versa, conhecendo expressões simbólicas, consigam determinar os padrões de covariação que tais expressões estão codificando.

Seguindo as considerações anteriores em correspondência com as ideias desenvolvidas no capítulo III, podemos apreciar que a coordenação de processos de covariação e de correlação é um aspecto importante do pensamento matemático que pode ser entendido como uma atividade que favorece a construção, experimentação e justificação de diferentes formas de generalização, em particular, um contexto para o tratamento geral com quantidades indeterminadas. Como apontado por Blanton e Kaput (2011); Kieran (2006), é um contexto produtivo para a produção de significação no raciocínio algébrico.

No entanto, como comenta Kieran (2004), quando as práticas de modelagem são usadas em contextos escolares com o propósito de incentivar processos de formação de conceitos algébricos, não se deve passar por alto a necessidade de desenvolver ações intencionais orientadas para o tratamento geral e estrutural das situações problemáticas. Isso significa criar ações para que os alunos avancem a níveis cada vez mais próximos do raciocínio algébrico. Uma forma de alcançar esse propósito é pela mediação pedagógica que favoreça os alunos nos processos de coordenação e análises de ações de covariação e correlação ligados às situações-problemas de acordo com cada projeto de modelagem.

Um desses atos pedagógicos realizados pelo professor foram as diferentes revisões às versões escritas. Outro foi a apresentação oral pública dos projetos por parte dos alunos. A importância dessas estratégias radica nas possibilidades que a interação verbal oferece à formação de conceitos e ao desenvolvimento do pensamento, em particular do pensamento matemático. Essas formas de interação, de acordo com Vygotsky (1986), se dão por meio dos significados dos símbolos, principalmente das palavras, e deve ser entendida como um processo, um

movimento que vai do pensamento aos símbolos, e vice-versa, dos símbolos para o pensamento.

O exercício que será feito é para pôr em destaque um episódio em que foi possível evidenciar como a estratégia de apresentação oral favoreceu, como mediação intersubjetiva, os propósitos pedagógicos de coordenação de processos de covariação e correlação no projeto sobre “Cetáceos”. Em particular, como a interação entre professor e alunos permite mudanças cognitivas favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico pela via do raciocínio variacional.

6.3.4 Entrando na zona do pensamento algébrico.

6.3.4.1 Problema sobre localização de cetáceos

Uma das discussões geradas na apresentação oral do projeto sobre “Cetáceos” partiu da aplicação da bioacústica à localização desse tipo de animais em mar aberto. A situação problemática proposta foi responder à pergunta: como determinar a posição de um cetáceo a partir da captura dos sons que ele produz?

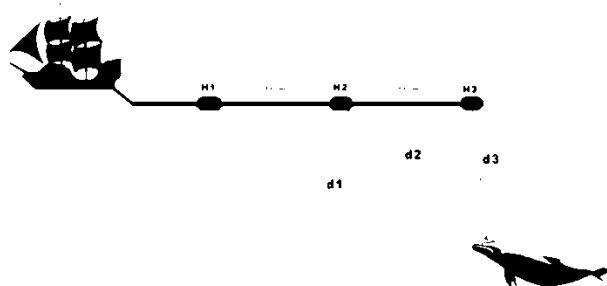
A técnica apresentada envolvia o uso de vários hidrofones arranjados em diferentes formas. De acordo com Raphaela, dependendo das condições do local de estudo, são utilizados entre dois e cinco hidrofones arranjados em forma linear, triangular ou outros arranjos geométricos dependendo dos interesses e número de hidrofones. Geralmente são separados por distâncias fixas um do outro para facilitar os cálculos. Esses hidrofones recebem e depois enviam os sinais por cabo para um computador localizado em um barco relativamente próximo. Calculando as diferenças dos tempos que cada hidrofone leva para capturar o som, é possível determinar o ponto de localização do animal com margens de erro relativamente confiáveis, levando em conta que a velocidade do som na água é um valor constante de aproximadamente 1500 m/s.

Para exemplificar o processo, as alunas apresentaram uma situação que envolvia três hidrofones arranjados linearmente e separados entre si a uma distância de 15 metros. A situação é: considerando que um pesquisador captura o som de uma baleia com uma diferença de 0,006 segundos entre o primeiro e o segundo hidrofone e de 0,0007 entre o primeiro e o terceiro hidrofone, determinar as

coordenadas onde a baleia deve estar localizada. Raphaela, a encarregada de explicar essa parte do projeto, afirmou que os alicerces da técnica apresentada acham-se nos conceitos matemáticos de hipérbole.

A aluna explicou o processo da seguinte forma¹⁰²:

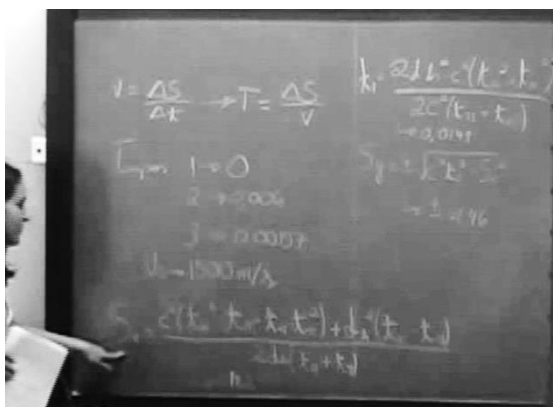
Figura 17: Representação da situação



Raphaela: Como mostra a figura 16, se colocou a distância do hidrofone H₃ que é d₃, H₂ é d₂ e H₁ é d₁. E a distância entre cada hidrofone é de 15 metros.

Fonte: Apresentação oral

Figura 18: Aluna explicando o problema



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow T = \frac{\Delta s}{v}$$

Tempos $\rightarrow 1 \rightarrow 0$

2 $\rightarrow 0,006$

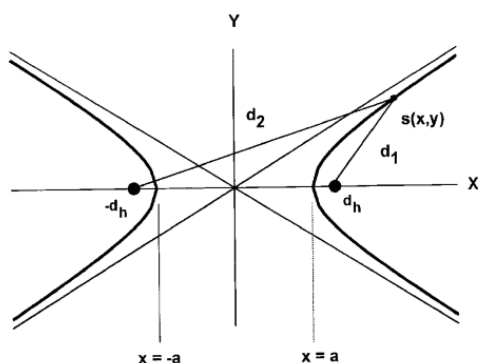
3 $\rightarrow 0,0007$

$V = 1500 \text{ m/s}$

Fonte: Vídeo apresentação oral

Aí eu coloquei aqui [apontando para lousa] as equações, acho que dá pra todo mundo ver. A gente sabe da física que a velocidade é a distância pelo tempo, ou seja, eu posso achar o tempo como a distância pela velocidade, que é a mesma coisa. E vamos supor que o tempo que demora o som para chegar até o hidrofone um é zero segundos, até o hidrofone dois 0,006 segundos e até o hidrofone três 0,0007 segundos. A velocidade do som na água é 1500 m/s

¹⁰² O texto é transcrição textual diretamente do vídeo gravado da apresentação oral. Nesse sentido, pode ter erros conceituais ou algumas ideias confusas.

Figura 19: Hipérbole

Fonte: Apresentação oral

Aqui [*mostrando o gráfico que aparece na tela do computador*] é uma hipérbole, o gráfico de uma hipérbole com aquilo ali [*mostrando a asa direita da hipérbole*] sendo o som que está sendo transmitido e aqui [*mostrando a asa esquerda da hipérbole*] o é o som que está voltando. Dá até para ver as distâncias d_2 e d_1 , (figura 18).

Eu tenho aqui já pronta a fórmula da hipérbole. Substituindo os valores que eu tenho: t_{21} que é a “distância” [*realmente deveria ser tempo*] do hidrofone 1-2, t_{31} entre 1 e 3, e assim por diante. Seria essa equação f_x para eu achar esse ponto cartesiano onde está [*referindo-se à baleia*], com c a velocidade do som na água e d_h a distância entre cada microfone.

$$f_x = \frac{c^2(t_{21}^2 t_{31} - t_{21} t_{31}^2) + d_h^2(t_{21} - t_{31})}{2d_h(t_{21} + t_{31})}$$

Esse valor, depois de substituir todos os valores vai dar $f_x = 6,182$. Que é o ponto x do gráfico. Para achar Y , eu preciso achar o valor t_1 . E temos aqui uma fórmula para achar o valor de t_1 [*mostrando-a na louça*]

$$y = \pm \sqrt{c^2 t_1^2 - S_x^2}$$

$$t_1 = \frac{d_h^2 - c^2(t_{21}^2 - t_{31}^2)}{2c^2(t_{31} + t_{21})}$$

E com essa fórmula eu vou achar que t_1 é 0,0149 segundos. E aí y é mais fácil de achar que é a velocidade ao quadrado, t_1 ao quadrado menos S_x ao quadrado. O mais ou menos é dependendo se a baleia está na parte de cima ou na parte de baixo do eixo X . Assim eu acho o valor de mais ou menos 21,46. Isso quer dizer que a baleia pode estar tanto na parte de cima se é +21,46 ou na parte de baixo a uma distância de -21,46. Matematicamente não tem como saber onde a baleia está, em cima ou abaixo.

Uma vez culminada a apresentação, as alunas foram indagadas sobre porquê precisamente do conceito de hipérbole e por que suas propriedades podem ser usadas como o melhor instrumento conceitual para resolver o problema de localização de baleias em mar aberto.

Professor: Por que a curva que descreve o fenômeno tem que ser uma hipérbole? Por que não uma parábola, por exemplo?

Todas ficaram caladas por um tempo com gestos de não saber explicar por que precisamente a matemática desse lugar geométrico permite desenvolver a técnica e resolver o problema apresentado. No entanto, Raphaela (talvez por se sentir responsável por essa parte do trabalho) atreveu-se a dar uma resposta.

Figura 20: Aluna explicando o movimento da onda sonora

Raphaela: Pelo som da baleia que faz assim [*mostrando com os braços a forma de uma das asas da curva*] e depois quando volta e faz assim [*mostrando com os braços a forma da outra asa da curva*]. Então o gráfico fica, um que vai porque ela emitiu o som, e o outro que volta porque o som voltou [*mostrando de novo com os braços a forma das duas asas da curva*]. Fica assim a imagem de uma hipérbole como mostra na figura...



Fonte: Vídeo apresentação oral

A partir da fala da aluna acompanhada dos gestos realizados, pudemos inferir que ela estava em um campo de significação intermediário em que a situação quanto e o conceito matemático interagem trocando de papel como instrumento e como objeto. Com a ajuda dos significados construídos da situação-problema, tentou entender e explicar o conceito de hipérbole, mas ao mesmo tempo, com os significados do conceito hipérbole, tentou entender e explicar a situação problemática. O problema que está por trás é a necessidade de coordenar a covariação de duas quantidades físicas: tempo e distância particularizadas no movimento de uma baleia, com a correlação entre essas mesmas duas quantidades encapsuladas em dois sistemas simbólicos: gráfico e algébrico.

Embora a aluna tivesse dado uma resposta, é claro que o fenômeno físico de covariação não correspondia à forma de correlação explicada por ela usando o gráfico. Os argumentos que mostram a falta de correspondência entre a covariação e a correlação são pelo menos dois. Em primeiro lugar, porque caso fosse como a aluna disse, estar-se-ia referindo a uma onda sonora que realmente tem frente circular (esférica) e não hiperbólica.

O som num meio homogêneo e isotrópico é como uma pequena esfera que se expande uniformemente criando uma região adjacente

ligeiramente de maior densidade e pressão. A região de maior densidade é chamada uma condensação. Esta condensação de "impulso" ou "pulso" irá se mover para fora em todas as direções formando uma onda longitudinal esférica. (MEDWIN; CLAY, 1998, p. 18 tradução nossa)

Em segundo lugar, porque, de acordo com o esquema mímico mostrado pela aluna, interpreta-se que a forma gráfica da hipérbole indicaria a forma física da onda sonora emitida pelo animal viajando em direção dos hidrofones, batendo contra eles e cujo reflexo voltaria interferindo na primeira onda emitida. Nesse caso a forma gráfica da hipérbole não poderia ser a melhor representação dessa situação, desde que as ramas da hipérbole não se cortem. Isso significa que o fenômeno analisado não é realmente de ecolocalização, mas sim de bioacústica em que um observador externo estuda o som emitido por um animal sem levar em conta o que acontece com a fonte do som quando recebe o eco de volta.

O professor, mesmo sem ter uma melhor explicação para o fenômeno, ficou insatisfeito e considerou que a resposta da aluna não ilustrava o porquê da hipérbole na técnica apresentada de localização. Com o propósito de aprofundar na discussão, pediu para voltar ao gráfico apresentado e comentou:

Professor: Vamos tentar entre todos decifrar a informação que aparece aqui no gráfico. E fiquem tranquilas que ninguém vai perder ponto da nota por isso, mas o problema está muito interessante para todos. Eu ainda não consegui entender, mas talvez entre Mazzi¹⁰³, Fabian e eu podemos ajudar vocês entender melhor o problema e a contar história direitinho.

Professor: Aquele d_h é o quê?

Raphaela: o d_h é a distância de cada microfone [*com dúvida*]. É que eu peguei este gráfico de outro livro e está algo diferente do exemplo que eu dei. Eu trouxe mais para ilustrar que a situação é de uma hipérbole e como é que a baleia seria localizada desse jeito. Então não sei se o gráfico corresponde com o exercício que eu achei.

Professor: O que significa o ponto $s(x,y)$?

Raphaela: O ponto $s(x,y)$ mostra onde é que ela está [a baleia]

Professor: E o que é d_h e $-d_h$?

Raphaela: São os microfones...

¹⁰³ O aluno estagiário.

Fabian: Se a diferença entre d_1 e d_2 é uma constante, então se pode explicar por que é uma hipérbole.

Professor: É isso, eu estou falando. O que disse Fabian é a característica principal da hipérbole, mas o que eu estou querendo entender é o que tem a ver a hipérbole com os dois em movimento [referindo-se ao navio e ao animal]. Estou tentando ver assim, se o navio está vindo para cá e o animal também está indo, como se forma a hipérbole?

O problema está muito legal, mas eu ainda estou tentando ver por que é uma hipérbole e não uma parábola, por exemplo. Onde está essa diferença constante? Eu acho que isso tem a ver... [pausa] Realmente não estou conseguindo verbalizar, mas eu acho que isso tem a ver com o movimento simultâneo do navio e da baleia. Eu acho que, se vocês conseguissem explicar porquê da hipérbole nessa situação, pode ser independente das equações, o trabalho ficaria fantástico. Podem pensar em explicar qualitativamente o que é que leva assumir a hipérbole. Seria uma aprendizagem importante para vocês e para seus companheiros. Já vocês entenderam a principal característica da hipérbole, mas ainda falta entender como essa característica é usada no contexto do problema.

Raphaella: É uma parte muito complexa que eu achei, e que achei interessante eu colocar porque achei bem legal como a partir do estudo do som emitido pelas baleias e a matemática podem ser construídos instrumentos de localização.

Professor: Mas falta ainda um pouquinho para vocês entenderem porque da hipérbole. Aliás, se vocês baterem em “google”, podem achar alguma coisa que os ajude.

Raphaella: Eu fiz isso, mas há muita coisa e não dá para entender todas as passagens da equação.

Professor: Não, mas eu não quero que vocês coloquem todas as passagens das equações. Eu quero que vocês saibam explicar e coloquem no trabalho uma explicação qualitativa do porquê precisamente da hipérbole nessa situação (Transcrição da apresentação oral).

Um dos aspectos desse episódio que considero de grande importância para efeitos da pesquisa, é que as práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico no contexto da modelagem constituem fruto da complexa interação entre a linguagem comum, a linguagem acadêmica conceitual (matemático e físico para este caso) e a produção de significados de campos diferentes. Não se trata de uma tradução direta do campo de significação da situação (física e biológica) para o campo de significação matemática. Essa interação é de natureza bem mais complexa, porque, dentro dos diferentes campos, os sujeitos agem de maneiras diferentes sobre a relevância dos fatos, da justificativa das afirmações, da aceitação de declarações, das regras de validação dos raciocínios entre outros aspectos.

A mediação pedagógica intencionada tanto explícita quanto implícita é uma forma de começar a estabelecer essa interação entre campos de significação em atividade. Para o caso em questão, trata-se de provocar ações intencionadas de coordenação de processos de covariação e correlação. Seguindo o proposto por Vygotsky (1986), o ponto de ancoragem deve ter como unidade fundamental de análise “a significação simbólica”, em particular no significado das palavras.

O significado duma palavra representa uma amálgama tão estreita de pensamento e linguagem que é difícil dizer se se trata de um fenômeno de pensamento, ou se se trata de um fenômeno de linguagem. Uma palavra sem significado é um som vazio; o significado, portanto, é um critério da palavra e seu componente indispensável. Pareceria portanto que poderia ser encarado como um fenômeno linguístico. Mas o significado de cada palavra é uma generalização, um conceito. E, como as generalizações e os conceitos são inegavelmente atos de pensamento, podemos encarar o significado como um fenômeno do pensar. No entanto, daqui não se segue que o pensamento pertença a duas esferas diferentes da vida psíquica. Vygotsky (1986, p. 212)

Como apontado nessa referência, a relação entre o pensamento e o significado dos símbolos, em particular das palavras, deve ser entendida como um processo, que muda com o tempo e as condições culturais dos sujeitos carregando consigo desenvolvimento. Pode-se dizer, então, que toda prática social se faz através da troca de signos materiais e simbólicos carregados de diferentes tipos de significado. É o caso das ações relacionadas com a coordenação de quantidades que covariam no campo das situações física e o estabelecimento de correlações associadas ao campo da matemática.

Na materialidade dos símbolos, veiculam-se intenções orientadas para algum objeto (práticas). Isso quer dizer que nos símbolos, especialmente nas palavras, envolvem-se elementos de colisão e conflito pela relação dialética, entre abstrações e a generalizações historicamente construídas, e intencionalidades localizadas espaço-temporalmente de acordo com as práticas executadas pelos sujeitos.

No diálogo apresentado, percebe-se, por exemplo, como cada ator do diálogo manifesta em suas palavras certas intencionalidades, mas respondendo aos significados que a institucionalidade do contexto requeria. Raphela colocou, no cenário da apresentação do problema discutido, um conjunto de fórmulas, várias figuras e um gráfico para ilustrar as características da hipérbole. A intencionalidade

era desenvolver um processo de coordenação da situação física de covariação e a situação matemática de correlação. Possibilidade não totalmente bem sucedida segundo o professor. Com a intenção de incitar os alunos a revisarem a coerência dos argumentos apresentados, que dizem respeito da correspondência dos padrões de covariação do fenômeno físico com a correlação matemática, o professor colocou como artefato pedagógico a pergunta, *porque uma hipérbole?* Desse modo, os artefatos utilizados podem ser entendidos como formas de organização das ações intencionadas de cada ator.

O caráter da pergunta do professor foi de mediação explícita na medida em que foi introduzida com uma intencionalidade: a de tentar atualizar o conhecimento particularizado na prática de coordenação dos dois campos de significação (físico e matemático) num fluxo contínuo de ações que para eles, talvez não, existam. Isto é, gerar coerência e clareza do papel dos conceitos matemáticos na resolução do problema. Essas mediações explícitas misturam-se com as mediações implícitas próprias da linguagem e da categoria social de acordo com o contexto (ser o professor, ser aluno, por exemplo) para produzir novos significados.

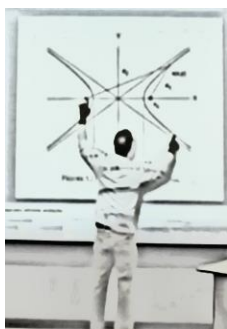
Um dos aspectos mais importantes a serem destacados nessa interação é a hipótese de que a introdução intencional de mediações simbólicas externas permite aos agentes, neste caso alunos e professores, níveis qualitativamente diferentes de cognição distribuída. No caso dos alunos, tentar aumentar a fluidez simbólica e a compreensão da situação para, desse modo, ganhar autonomia acadêmica e autocontrole no comportamento. Para o professor, geram-se novas aprendizagens enquanto tem que enfrentar problemas desconhecidos e, por essa via, novos desafios.

Embora as características matemáticas da hipérbole fossem claras para o professor, não entendia as razões pelas quais podiam ser usadas na solução desse problema. Aos alunos nem as propriedades da hipérbole, nem os argumentos para que fossem usadas na solução do problema eram claras, mas o papel deles nesse momento era se esforçar para tentar explicá-las. Isso significa que, mesmo sem entender completamente a situação, tanto o professor quanto os alunos conseguiram gerar ideias, pensar em possíveis usos, produzir comunicações e reflexões sobre esses conceitos. Em palavras de Vygotsky (1986), a compreensão não precede o uso. Assim, da mesma forma que a pergunta do professor tinha interesse de instigar a revisão da coerência, também deve ser entendida como um

ato instrutivo que buscava gerar aprendizagem coletiva relacionada com a problemática.

Nos contextos escolares, os atos instrutivos podem ser vistos como formas de domesticação da cultura (talvez um melhor termo para isso seja de enculturação) intencionada que limitam ou impulsionam novos comportamentos nos sujeitos. Os atos instrutivos estão carregados de padronizações culturais, que sem o auxílio de quem já teve algumas experiências, isto é, de alguém que tem construído alguns conhecimentos a respeito, seria mais difícil e por vezes impossível aprender. O comentário de Fabian sobre o padrão codificado no conceito de hipérbole (a diferença constante) é exemplo disso. Mas o professor também tem tido diferentes experiências com esse mesmo padrão materializado na simbologia matemática: equações e gráfico. Além disso, tem tido experiências conceituais com fenômenos físicos relacionados com o movimento e a acústica. Conhecimento que é disponibilizado, como ato instrutivo, com o intuito de que as alunas possam melhorar seu processo de coordenação. Ver figura 21.

Figura 21: Explicação do significado da hipérbole como lugar geométrico



Quando eu pego qualquer ponto na hipérbole e tenho esses dois pontos especiais chamados focos, a diferença da distância daqui [*do ponto ao foco 1*], com essa outra aqui [*do ponto ao foco 2*], é igual à diferença dessa que está desenhada aqui. Então essa diferença sempre é constante sem importar qual ponto eu pego. Essa é a caracterização do lugar geométrico chamada hipérbole. Agora o que eu queria estar entendendo é essa diferença, o que é que tem a ver com os dois movimentos [*do navio e da baleia*]... (Fala do professor, na apresentação oral das alunas)

Fonte: Vídeo da apresentação oral

Porém, mesmo mínimas, as alunas também tinham tido algumas experiências teóricas com o comportamento biológico dos cetáceos e também foi disponibilizado para o grupo em geral. Ver figura 22.

Figura 22: Explicação das alunas sobre o comportamento dos cetáceos



Os cetáceos emitem um som e quando bate contra algum objeto volta. Aí, o que eu entendi, que foi o que eu li no livro, foi isso, que um lado é o eco [referindo-se a um lado do gráfico] e o outro é o som [referindo-se o outro lado do gráfico]

Fonte: Vídeo da apresentação oral

A aluna continuou insistindo que o gráfico representava o som que vai e volta. Parecia que a forma da representação gráfica continuava orientando a compreensão que a aluna tinha da situação. Porém, para o professor, essa compreensão continuava em um campo de significação pouco coerente. Por isso insistia em continuar discutindo e questionando o assunto.

Em geral, com os atos instrutivos não se trata simplesmente de gerar uma transmissão de conhecimentos do professor para os alunos ou vice-versa, nem de determinar quem tem a verdade. O importante é entender que o conhecimento se produz e reproduz por *camadas de compreensão de significações* e, por isso, todos os participantes podem comentar, comunicar, operar, calcular, entre muitas outras ações com diferentes formas simbólicas, mesmo sem ter um domínio total de significação delas (entre outras coisas, porque nunca existirá tal totalidade). Isso indica que é possível empregar, nas formas de interação social, mais símbolos dos que realmente compreendemos. Essas camadas de compreensão provêm de diferentes fontes.

Quando Raphaela insistiu em explicar que o problema se resolvia com o conceito de hipérbole, porque o gráfico representa o som emitido que bate e volta, justificando sua afirmação, porque era o que tinha entendido do livro (“...foi o que eu li no livro...”), estava querendo dizer que uma das compreensões que tinha, mesmo sendo errada¹⁰⁴, era essa que está expressando no momento, sem que por isso fosse a única, mas também ressaltava que esse entendimento provinha das compreensão que outro *sujeito* sintetizava no livro lido. Em palavras de Wertsch (2007) essa situação pode ser entendida como um processo de “intersubjetivação” na qual as formas simbólicas encarnadas nos meios materiais acarretam significados, mesmo sem que os sujeitos estejam presentes. Foi o que tentou fazer o

¹⁰⁴ O errado aqui não indica falta de compreensão da aluna, mas que no campo de significação conceitual da matemática e da física, outras formas de legitimação das afirmações têm acontecido.

professor quando propôs: “se vocês baterem em “google”, podem achar alguma coisa que os ajude”.

Pode-se dizer que as compreensões de Raphaela estão em um nível ou camada particular, que, avaliado por outros sujeitos, pode ser assumido de alto ou baixo nível; ou estar em graus diferentes de veracidade e/ou falsidade. Para o professor, por exemplo, a explicação de que o gráfico da hipérbole significa “...o som emitido pela baleia [uma das asas] e o eco [a outra asa]...” foi pouco convincente duvidando que no livro lido pela aluna aparecesse essa explicação (outro tipo de mediação explícita e implícita). Por isso a réplica dele foi: “...eu ainda estou tentando ver por que é uma hipérbole e não uma parábola, por exemplo...”.

O professor não conseguia aceitar a explicação da aluna, e isso porque as compreensões dele e as dela estavam em níveis ou camadas diferentes. Ele sabe, seja por definição, por experiência, por crença, por ideologia, por aprendizagem e/ou entre outras razões, que uma hipérbole “sempre” deve cumprir com a propriedade de ser “o lugar geométrico de todos os pontos P de um plano cujo valor absoluto da diferença de P a dos pontos fixos chamados focos é uma constante”. Precisamente por isso expressa:

...Onde está essa diferença constante? [referindo-se à diferença constante que caracteriza o lugar geométrico chamado hipérbole] Eu acho que isso tem a ver... [pausa] Realmente não estou conseguindo verbalizar, mas eu acho que isso tem a ver com o movimento simultâneo do navio e da baleia... (fala do professor na apresentação oral)

A pergunta pela “*diferença constante*” que define “qualquer” lugar geométrico chamado hipérbole e a explicação que o professor deu aproveitando o gráfico apresentado pelas alunas podem ser interpretadas como mediações explícitas que foram introduzidas com a intenção de ressaltar o conceito “celular” ou, em palavras de Davidov (1988), o “abstrato concreto” que permite entender “qualquer” problema sobre hipérbole (problema geral) e, por essa via, o problema particular sobre a localização de cetáceos em mar aberto, individualizado com os dados apresentados pelas alunas.

Em outras palavras, o conceito “diferença constante”, tal como acontece com qualquer conceito, é a confluência do “geral” e do “particular” que se singularizam em exemplos individuais (Wartofsky, 1979; Davidov, 1988; Radford, 2013) (ver

capítulo II). O professor sabe que nas equações e no gráfico apresentados pelas alunas tem sido codificada historicamente essa “diferença constante” (abstrato concreto), e deveria corresponder com a situação problemática particular ou fenômeno físico e biológico.

Isso explica a insistência do professor, pois enquanto as alunas não ingressassem no nível de compreensão do significado matemático da “diferença constante” da hipérbole, não conseguiriam manipular simbolicamente as correlações das quantidades como um caso geral, particularizável com as formas de covariações das quantidades numéricas da situação. Quando isso acontece, pode-se dizer que as alunas estão ingressando à zona do pensamento algébrico, na medida em que será possível operar de forma “*geral*” e/ou “*estrutural*” por meio das técnicas de manipulação algébrica com quantidades indeterminadas e a situação-problema passara a ser entendida como um caso particular. Por isso pedia para elas, que primeiro tentassem explicar qualitativamente a relação entre o conceito matemática de hipérbole e o problema de localização de cetáceos.

Professor: ...eu acho que se vocês conseguissem explicar o porquê da hipérbole nessa situação, pode ser independente das equações, o trabalho ficaria fantástico. Podem pensar em explicar qualitativamente o que é que leva a assumir a hipérbole... (Transcrição da apresentação oral).

É evidente que, para o professor, as técnicas de cálculo algébrico são inicialmente menos importantes que a compreensão qualitativa dos conceitos, pois sem minimizar o papel das expressões simbólicas nessa compreensão, pode-se dizer que o significado matemático não está nas expressões, mas sim na sua relação com as formas de ação intencionadas dos sujeitos nas variadas atividades. “Explicar por que a hipérbole nessa situação” significa compreender o significado de por que “o abstrato concreto” materializado na “diferença constante” é o geral que permite ser singularizado por elas nessa situação em particular.

O que apresentamos aqui foi só um exemplo do papel da mediação explícita artefactual e intersubjetiva, entendidas como atos pedagógicos nos processos de produção e reprodução de conhecimento em sala de aula. Cada forma de mediação artefactual (gráficos, expressões algébricas, tabelas, linguagem natural, “software”, internet, quadro-negro, giz) pode ser entendida como maneiras de materializar padrões de ação histórica e culturalmente constituídas e, por isso, são a confluência

de aspectos materiais e simbólicos que, em interação com os sujeitos e suas intencionalidades, permitem a formação de significados locais e institucionais. Interpretando Borba e Villarreal (2005), o conhecimento é produzido pela interação de seres humanos e tecnologias, cada uma delas condicionando de forma diferente a construção de diversos níveis ou camadas de generalidade e, por essa via, auxiliando a possibilidade de fazer ingressar aos alunos na zona do pensamento algébrico.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando as tecnologias computacionais ingressaram nos contextos escolares e passaram a ser um dos artefatos condicionantes das práticas pedagógicas, em particular do ensino e da aprendizagem da matemática, gerou-se um conjunto de discussões em vários níveis. Uma delas relacionava-se com a álgebra escolar, especialmente com assuntos metodológicos e curriculares. Por exemplo, se os computadores executam transformações com expressões simbólicas e resolvem diferentes tipos de equações, inclusive algumas que as pessoas nem conseguiriam solucionar utilizando lápis e papel, o que deveria ser ensinado na escola então?

Uma das respostas voltou-se para a resolução de problemas, pois a álgebra, além de ser assumida como um conjunto de técnicas para resolver equações e transformar expressões simbólicas, também foi entendida como uma ferramenta para pensar diferentes tipos de problema. Nesse sentido, se o objetivo com o ensino da álgebra é dotar as pessoas com instrumentos conceituais para que possam resolver problemas, a pergunta passou a ser: como ensinar álgebra nesse contexto?

Essa nova questão implicou discutir a relação dos conteúdos curriculares e a resolução de problemas em termos de duas possibilidades: (1) passar dos conceitos e técnicas algébricas para sua aplicação na solução de problemas, (2) e/ou partindo dos problemas, extrair deles os conteúdos a serem ensinados. Em ambos os casos há uma tentativa de classificação de conteúdos e problemas que, aparentemente, deveriam ser ensinados de acordo com o nível escolar.

Dois questionamentos emergem dessa situação. Em primeiro lugar, quais as fronteiras do que pode ser entendido como pertencente à álgebra escolar? Em segundo lugar, como saber quais problemas se ajustam melhor a essa delimitação? Algumas propostas convergiram para apresentar as equações polinomiais como principal conteúdo matemático da educação básica e, por essa via, aos problemas que se ajustam à resolução destes tipos de equações. No entanto, pensar um currículo para a álgebra pelo conteúdo e pelos problemas que podem ser resolvidos gera a dificuldade da suficiência; isto é, como saber se há algum conteúdo que faz falta ou que sobra? A partir de que critério pode-se afirmar que o conceito de função, por exemplo, pertence ao campo da álgebra?

Outro aspecto que as tecnologias computacionais ofereceram à educação matemática relaciona-se à possibilidade de operar com diferentes sistemas

simbólicos matemáticos, tais como gráficos e tabelas em conexão com as, já mencionadas, ações de transformação de expressões algébricas. Desse modo, as fronteiras que delimitam os conteúdos e os possíveis problemas na álgebra escolar ampliaram-se consideravelmente. Situações que requerem o processamento de grandes quantidades de informação, mas também do tratamento de quantidades que variam conjuntamente, começaram a formar parte do conjunto de problemas solucionáveis com ferramentas algébricas. Algumas destas situações são: análises de padrões de variação em diferentes contextos, análises de taxas de variação, processos de generalização e construção e análises de modelos. Como resultado, a relação entre problemas e conteúdos algébricos passou a fazer parte da categoria pensar algebricamente. Foi assim que atividades escolares que implicam processos de modelagem passaram a ser assumidas como um dos contextos importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Algumas das relações da álgebra escolar com o processo de modelagem foram o foco central desta pesquisa. Da variedade de perspectivas sobre modelagem, que na atualidade permeiam o campo da educação matemática, esta pesquisa desenvolveu-se baseada na proposta pedagógica de modelagem que inclui, como um de seus princípios, estimular os alunos a atuarem analogamente a um pesquisador que desenvolve processos de investigação. O objetivo central dessa proposta não é o ensino da matemática em geral, nem da álgebra em particular, mas a produção coletiva de conhecimento em sala de aula por meio do desenvolvimento dos denominados projetos de modelagem. Nosso interesse foi estudar o processo de constituição de práticas algébricas que, eventualmente, um grupo de alunos produziria enquanto desenvolvia projetos de modelagem no contexto da uma disciplina de matemática.

As condições básicas que tal proposta de modelagem ofereceu para nossa pesquisa foram: (1) os participantes eram alunos de uma disciplina de matemática aplicada, do primeiro ano dos cursos de Biologia e Ecologia da UNESP, campus de Rio Claro; (2) o processo de modelagem aconteceu como uma das tarefas sugeridas pelo professor da disciplina e por isso esteve regulado pelos princípios de toda prática pedagógica; (3) pelo fato de ser uma proposta que coloca os alunos em uma condição análoga à enfrentada por investigadores enquanto desenvolvem projetos de pesquisa, as ações estiveram orientadas por três fins sequenciais: primeiramente, em equipes de trabalho os alunos escolheram temáticas de interesse

coletivo; seguidamente, baseados nas temáticas escolhidas, formularam situações problemáticas; e finalmente, construíram argumentos para tentar responder as situações formuladas.

Essas características imprimiram condições particulares de flexibilidade às práticas de modelagem, que implicaram na tomada de um conjunto de decisões relacionadas aos interesses de nossa pesquisa. Uma delas diz respeito ao foco, pois, como acima exposto, nossa preocupação era estudar as formas de ação dos alunos orientadas para produção de conhecimento matemático, em particular de conhecimento algébrico. Porém, nem todo projeto de modelagem precisa desse tipo de conhecimento como um de seus componentes. Baseados nessa ideia, decidimos intervir intencionalmente no processo. Intervenção que foi entendida como atos de mediação pedagógica, realizados enquanto desenvolviam seus projetos. Além da orientação do professor, os alunos contaram com meu apoio, tanto como co-orientador dos projetos quanto como monitor da disciplina. A intenção desse tipo de intervenção foi a de ampliar as possibilidades de que os alunos efetivamente constituíssem práticas matemáticas.

Fundamentados na perspectiva teórica histórico-cultural das *práticas humanas*, tal intervenção no processo não só era possível, mas também desejável, pois de acordo com os princípios dessa teoria, para estudar as práticas humanas e compreender suas características, é importante tornar-se parte delas. De acordo com essa perspectiva, as práticas humanas são entendidas como um conjunto de ações orientadas intencionalmente para transformar e/ou produzir determinados “objetos”. Práticas que, em termos gerais, estão condicionadas pela mediação de diferentes artefatos culturais (materiais e simbólicos). As aspas do termo objetos indicam que as ações nem sempre estão orientadas para a produção de algum produto material, também podem ser orientadas para produção de conhecimento, de subjetividades, de instituições, de condições sociais, de leis, etc.

Dado que nosso objeto de interesse na pesquisa relacionava-se com a produção do conhecimento matemático, para efeito da análise, foi necessário começar pela caracterização do que assumiríamos por conhecimento em geral e sua relação com a modelagem. Partindo da ideia de que as práticas humanas estão constituídas por *modos de ação e reflexão* e que, além de estarem materializados em artefatos, são mediados por eles, assumimos que tais modos de ação podiam

ser entendidos como *modelos*, na medida em que são protótipos para orientar conscientemente outras ações projetadas para o futuro.

Essa forma de entender os modelos ressaltou a ideia de que eles não são apenas artefatos visíveis para criar o futuro projetado, mas que se tornam o próprio futuro. Consideramos assim que, nos modelos, as intencionalidades das ações vão se incorporando e materializando em alguma forma artefactual, precedendo a mesma ação visível. Desse modo, foi possível entender que, dependendo dos fins para os quais os sujeitos orientam suas ações quando desenvolvem determinadas práticas, o conhecimento em geral e o matemático em particular podem adotar diferentes papéis, não necessariamente disjuntos: como objeto, como artefato e/ou como modelo.

Para estudar as práticas algébricas no contexto da proposta pedagógica da modelagem, consideramos a álgebra como um tipo particular de prática matemática, que orienta suas ações a operar analiticamente com quantidades indeterminadas (variáveis, incógnitas, parâmetros e números generalizados), codificadas não só em expressões simbólicas literais, gráficos, tabelas de valores, mas também em expressões corporais, fisionômicas, sonoras, gesticulações. Desse modo, analisar as práticas algébricas implicou o reconhecimento de alguma forma de generalização das práticas matemáticas constituídas de acordo com as situações-problemas formuladas nos projetos. Formas de generalização que, enquanto processo, mostraram-se principalmente nos modos de ação, nas afirmações, nas argumentações e nas justificativas dos sujeitos envolvidos.

Os três projetos analisados foram classificados como fenômenos físicos e biológicos, constituídos pela interação de processos experimentais empíricos e conceituais. O propósito deles era entender relações causais que produzem determinados efeitos, cujo objetivo era a manipulação de variáveis de um sistema para explicar e/ou gerar certos resultados em outros sistemas. Nas análises destacou-se, principalmente, o papel dos modelos matemáticos para manipular esses tipos de fenômenos.

No primeiro projeto, o intuito era estudar *padrões* de dispersão de sementes por zoocoria (marsupiais e aves) com o propósito de controlar processo de regeneração de áreas vegetais degradadas. Os outros dois focaram a atenção em características físicas do som, buscando entender, por um lado, *padrões* de combinação de sons com o propósito de produzir música e fabricar instrumentos de

sopro. Por outro lado, para estudar *padrões* de comportamento dos cetáceos que dependem do som para sobreviver, com o objetivo de construir técnicas de classificação e controle desses animais.

Verificamos que as práticas matemáticas constituídas nos projetos estavam condicionadas principalmente a três elementos: (1) os *interesses* pedagógicos e de pesquisa dos alunos e do professor; (2) o tipo de situações problemáticas formuladas; e (3) as formas de mediação instrumental que auxiliaram a configuração dos métodos e operações realizadas. Tais práticas matemáticas foram categorizadas igualmente em três modos de ação.

Em primeiro lugar, modos de ações orientados para discriminação e determinação das quantidades consideradas pertinentes para cada uma das situações problemáticas. Pelas características dos projetos, tanto as quantidades quanto as formas de relacionamento foram derivadas de experimentações conceituais. Isso significa que as quantidades discriminadas provieram principalmente de um processo teórico de reprodução de conhecimento (aprendizagem), de acordo com os interesses particulares de cada projeto. Para o caso do projeto sobre “Dispersão de sementes”, as quantidades discriminadas foram: quantidade de animais, quantidade de frutos e quantidade de sementes. Já nos outros dois projetos, principal quantidade discriminada foi a da vibração representada na frequência do som. Em segundo lugar, a discriminação de *técnicas* entendidas como *padrões* matemáticos codificados em *fórmulas* e *gráficos*. Em terceiro lugar, fazendo uso das *técnicas*, os alunos operaram com relações entre as diferentes quantidades e, desse modo, construíram os argumentos para responder às situações problemáticas formuladas nos projetos.

Foi nesse sentido que as *fórmulas*, os *gráficos* e as *tabelas* tiveram, em geral, os papéis de *modelos matemáticos*, mas também de meios artefatuais. Os padrões de relacionamento entre quantidades encapsuladas nesses modelos foram classificados em duas categorias: (1) padrões de relacionamento que dizem respeito a razões entre quantidades da mesma natureza (tratamento de medidas); e (2) padrões de relacionamento que indicam variações proporcionais. A forma como os alunos procederam com os modelos matemáticos explica por que na maioria dos casos não precisaram discutir as razões pelas quais as técnicas usadas, além de atuarem como método para obter os resultados esperados em cada projeto, designavam formas de validação do processo, pois, como artefatos culturais que

são, indicavam experiências de ações institucionalizadas com diferentes graus de validade e veracidade. Percebemos que os alunos constituíram altos níveis de aceitação dos modelos usados.

De acordo com os modos de utilização dos modelos, concluímos que as práticas matemáticas constituídas pelos alunos no contexto da modelagem configuraram formas de ação que enquadrámos na perspectiva teórica “funcional e/ou variacional”, que tomam o conceito de *variação* conjunta (covariação) entre quantidades da mesma e de diferente natureza, como principal unidade de análise. Apontamos, ainda, que esses tipos de prática matemática não estão totalmente submersos no campo de significação do conhecimento algébrico, na medida em que, de acordo com as práticas algébricas institucionalizadas, não estão separadas da situação espaço-temporal de onde surgiram.

Isso significou ter que discutir as possibilidades de “des-temporalização” e “des-especialização” que as práticas matemáticas teriam que sofrer para torná-las práticas algébricas e tratar as quantidades envolvidas como quantidades indeterminadas e gerais. Pudemos inferir que, em termos gerais, esses processos de “des-temporalização” e “des-especialização”, isto é, de “des-contextualização”, quando fazem parte de projetos de modelagem, não alcançam o grau de absoluto; ou seja, não conseguem estar totalmente fora, nem totalmente dentro do campo do raciocínio algébrico, pois foi possível notar um tratamento simultâneo, com graus diferentes de generalidade, e conseqüentemente, de particularidade durante todo o processo. Em outras palavras, percebemos que, à medida que os alunos constituíam as práticas matemáticas de acordo com os projetos de modelagem, gerava-se um movimento permanente pela tentativa de superação da contradição que acontece na unidade dialética do particular e do geral. Foi a partir dessa tensão que pudemos entender os diferentes níveis de práticas algébricas.

Ao considerar as práticas algébricas nesses termos, emergiu a necessidade de diferenciar o que é entendido por “generalização” como um processo do que é “geral” como um objeto. A generalização como processo implica reconhecer aquilo que é comum num conjunto de elementos particulares e, por isso, é indutivo, comparativo e classificativo. Pode-se dizer que é uma habilidade cognitiva básica que permite aos sujeitos diferenciar e classificar tudo aquilo que é percebido por meio dos sentidos. Processo que é desenvolvido por experiência própria e pela experiência acumulada histórica e culturalmente, isto é, por experiência dos (e com)

outros em espaços institucionalizados. Por isso não é um processo espontâneo, imediato nem simples, pelo contrário, é estruturado, mediado e complexo.

No entanto, como processo cognitivo não cessa na percepção das particularidades e na classificação do comum; o processo continua com o tratamento desse comum como se fosse um novo “objeto” que representa todos os particulares, mas sem ser nenhum deles. Este novo “objeto”, entendido como “geral”, pode ser considerado “abstrato concreto”, na medida em que permite operar diretamente com ele sem precisar da intermediação direta de algum dos casos particulares que representa. Embora, o processo de generalização e o tratamento dos objetos gerais sejam processos cognitivos intimamente ligados, operar com objetos gerais favorece o tratamento de relações estruturais entre quantidades indeterminadas, isto é, permite constituir práticas matemáticas relacionadas com o conhecimento algébrico. Práticas que só podem ser constituídas enquanto auxiliadas por sistemas simbólicos e regras de operabilidade (sistemas simbólicos algébricos).

Podemos dizer que os alunos conseguiram chegar a níveis de generalização que, mesmo sem ser totalmente descontextualizada das situações problemáticas, aproximaram-se bastante de operações com padrões gerais de correlação entre quantidades aritméticas indeterminadas. Isso foi observado, por exemplo, na forma como utilizaram as diferentes fórmulas e gráficos (modelos matemáticos), pois, para eles, representaram não só esquemas que permitiam explicar o comportamento covariacional do fenômeno particular estudado (objeto da atividade modelagem), mas também, ao serem assumidos como métodos gerais de correlação, comportavam um caráter simultâneo de objeto abstrato e artefato simbólico.

Dessa observação emergiu outra conclusão relacionada com as perguntas de pesquisa. Para que os alunos constituam práticas algébricas que impliquem operar com objetos gerais, indeterminados por meio de sistemas simbólicos algébricos, requerem-se atos intencionados de mediação pedagógica. Isso, traduzido para os projetos de modelagem, significa entender que sem esses tipos de ato diminui consideravelmente a chance de que os alunos constituam ações orientadas para coordenar processos de covariação entre quantidades empíricas com seus respectivos processos de correlação entre quantidades indeterminadas mediante expressões algébricas e, por essa via, diminui a possibilidade de conseguirem operar com objetos abstratos gerais que toma o projeto desenvolvido como um caso particular.

A importância dos atos pedagógicos executados por pessoas mais experientes na área foi ilustrada por meio das intervenções exercidas pelo professor e por mim, como co-orientador e monitor durante o desenvolvimento dos projetos. Esse acompanhamento implicou munir intencional e estrategicamente os alunos de diferentes artefatos: compartilhando informações específicas de diferentes fontes; indicando livros, artigos, “blogs” etc.; fazendo observações pontuais para os produtos apresentados, oferecendo explicações conceituais, gerando discussões em diferentes espaços, entre outras ações, sempre dependendo das necessidades particulares dos grupos. Desse modo, os atos pedagógicos foram interpretados como oportunidades para transformar o sistema de atividades (ensino, aprendizagem e modelagem), a partir da tentativa de resolver as tensões que se constituíram não só na interação entre sujeitos da atividade (alunos e professor) com os respectivos objetos (situações problemáticas dos projetos), mas também desses sujeitos com os artefatos culturais, especialmente com o conhecimento matemático.

Algumas questões para pesquisas futuras

Baseados nas conclusões expostas, podemos apontar algumas ideias para futuras pesquisas. Em primeiro lugar, ao conceber o conhecimento como formas gerais de ações e reflexões codificadas em artefatos culturais historicamente institucionalizados e os projetos de modelagem como um espaço para a produção de conhecimento em sala de aula, manteve-se aberta a pergunta sobre o papel dos atores que constituem a unidade indissolúvel de seres humanos e não humanos (mídias) na produção de conhecimento. Em particular é importante estudar mais a fundo a seguinte questão: como favorecer a adoção de um olhar crítico dos alunos para os artefatos culturais que auxiliam o processo de produção de conhecimento, de tal maneira que se tornem objetos de estudo em sala de aula?

Em segundo lugar, dado que a intenção explícita da proposta pedagógica de modelagem não é a produção de conhecimento matemático, mas sim de conhecimentos gerais em contextos educacionais, produzir conhecimento matemático não é uma tarefa direta nem simples. Nesse sentido, uma questão precisa ser mais aprofundada: na produção de projetos de modelagem, quais as particularidades das ações que permitem manter uma coerência entre a escolha da temática, a formulação de problemas e a construção de argumentos orientados para

solução, de tal maneira que o conhecimento matemático constitua um dos componentes do processo?

Diretamente relacionado com esta pergunta, outro questionamento torna-se importante. Se o propósito pedagógico dos projetos de modelagem fizer com que os alunos, efetivamente, consigam produzir conhecimento matemático, precisa-se da criação de condições para transformar o conhecimento matemático historicamente produzido em objeto da consciência dos alunos, ou seja, é necessário desenvolver ações para a aprendizagem de conhecimento matemático contextualizado de acordo com a temática escolhida e a situação problemática formulada. No entanto, para aprender a formular e resolver problemas matemáticos relacionados com a vida cotidiana, é importante formar um pensamento crítico com níveis de aceitação e dúvida do conhecimento matemático aprendido. Nesse sentido, a pergunta que emerge é: como interligar as práticas pedagógicas orientadas para produção de conhecimento matemático, situado de acordo com os projetos de modelagem, que implica recorrer à dúvida e à crítica, com as práticas pedagógicas orientadas para a aprendizagem do conteúdo programático da disciplina que geralmente apela à certeza do conhecimento?

Em terceiro lugar, considerando as particularidades dos projetos de modelagem e a dificuldade para demarcarem as fronteiras do terreno de ação das práticas algébricas, conseguir que os alunos operem analiticamente com quantidades gerais indeterminadas fazendo parte do processo de modelagem não é uma tarefa pedagógica simples. Uma condição necessária, mas não suficiente, para tornar isso possível no contexto das práticas de modelagem é gerar processos de coordenação de padrões de covariação e correlação entre as quantidades significativas das situações formuladas de acordo com as condições de cada projeto. Nesse sentido, uma pergunta que continua aberta e precisa de novas pesquisas é: como constituir condições pedagógicas para fazer com que os alunos entrem na zona de emergência do pensamento algébrico, partindo de atividades de modelagem, isto é, para passar do tratamento de fenômenos de variação para operações com objetos abstratos gerais que tomam o projeto como um caso particular?

Cada um dos momentos próprios dos projetos de modelagem e das práticas matemáticas que fazem parte deles propõe grandes desafios, mostrando que o caminho que vai da escolha da temática, passando pela formulação de situações

problemáticas até produzir argumentos de solução nos quais argumentos matemáticos possam ser plausíveis, não é direto e nem simples. Cada um desses momentos apresenta seus próprios modos de significação, requer diferentes atos intencionados de mediação pedagógica e por isso novas pesquisas devem ser desenvolvidas tendo esses interesses em foco. Os exemplos aqui descritos e analisados não são suficientes para dar conta da complexidade subjacente dos processos de produção de conhecimento matemático, em particular, de conhecimento algébrico, em sala de aula, tomando como ponto de partida a proposta pedagógica da modelagem.

REFERÊNCIAS

- ÁLVAREZ, C. Descartes lector de Euclides. In: ÁLVAREZ, C.; MARTÍNEZ, R. (Org.). *. Descartes y la ciencia del siglo XVII*. Mexico: Siglo XXI Editores, 2000. .
- ARAÚJO, J. Brazilian research on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, p. 337–348, 2010.
- ARAÚJO, J. *Cálculo, tecnologia e modelagem matemática: as discussões dos alunos*. 2002. Doutorado – UNESP, Rio Claro, SP, 2002. Disponível em: <<http://rc.unesp.br/gpimem/teses.php>>.
- ARAÚJO, J.; SANTOS, M.; SILVA, T. Identificando o(s) objeto(s) em atividade(s) de modelagem matemática. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 2010, [S.l: s.n.], 2010.
- ARISTÓTELES. *Metafísica*. Berlin: Academia Regia Borussica, [S.d.].
- BALACHEFF, N. Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. In: SUTHERLAND, R. *et al.* (Org.). *. Perspectives on school algebra*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 249–260.
- BARBOSA, J.; CALDEIRA, A.; ARAÚJO, J. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: Biblioteca do educador matemático, 2007. v. 3. (Coleção do SBEM).
- BASSANEZI, R. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Netherlands: Kluwer Academic Publish, 1996.
- BERNSTEIN, B. *Class, codes and control: The Structuring of Pedagogic Discourse*. USA: Routledge, 2005a. v. IV.
- BERNSTEIN, B. *Class, Codes and Control: Towards a Theory of Educational Transmission*. USA: Routledge, 2005b. v. III.
- BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (Org.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods*. New York: Springer, 2015. (Advances in Mathematics Education).
- BLANTON, M.; KAPUT, J. Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Org.). *. Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. New York: Springer, 2011. .
- BLOEDY-VINNER, H. Beyond Unknowns and Variables - Parameters and Dummy Variables in High School Algebra. In: SUTHERLAND, R. *et al.* (Org.). *. Perspectives on School Algebra*. New York: Kluwer Academic Publisher, 2002. .

BLUM, W. *et al.* (Org.). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007.

BORBA, M. Can modelling be taught and learnt? -A commentary-. In: KAISER, G. *et al.* (Org.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. .

BORBA, M. Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, v. 41, p. 453–465, 2009.

BORBA, M.; ARAÚJO, J. (Org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autentica, 2004. (Tendências em educação Matemática).

BORBA, M.; DA SILVA, R.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte, Brasil: Editora Autêntica, 2014. (Coleção tendências em educação matemática).

BORBA, M.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Editora Autentica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M.; VILLARREAL, M. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. United State of America: Springer, 2005.

BOS, H. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer Science+Business Media, 2001.

BOURDIEU, P. *El sentido práctico*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores, 2007.

BOYER, C. *A history of mathematics*. United States of America: John Wiley and Son, Inc., 1991.

BOYER, C. *The history of the calculus and its conceptual development*. Canada: Dover Publications, 1949.

BRADLEY, M. J. *The Birth of mathematics: Ancient Times to 1300*. New York: Chelsea house, 2006.

BREUNIG, R. T.; NEHRING, C. M. A passagem da matemática da educação básica para o ensino superior: concepção inicial de função por alunos de cálculo. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA -ENEM-: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, RETROSPECTIVAS E PERSPECIVAS, 2013, Curitiba - PR. *Anais...* Curitiba - PR: [s.n.], 2013.

BRITT, M. S.; IRWIN, K. C. Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM Mathematics Education*, v. 40, p. 39–53, 2008.

BROWN, T. *Mathematics Education and Subjectivity: Cultures and Cultural Renewal*. 2011.

CAI, J.; KNUTH, E. *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Berlin: Springer, 2011.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R. M. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, p. 353–369, 1998.

CARAÇA, B. DE J. Conceitos fundamentais da matemática. 1951.

CHAIKLIN, S. Comprensión de la práctica científico-social de estudiar las prácticas. In: CHAIKLIN, S.; LAVE, J. (Org.). *Estudiar las prácticas: perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 2001. .

CHAIKLIN, S. The role of practice in Cultural-Historical science. In: KONTOPODIS, M.; WULF, C.; FICHTNER, B. (Org.). *Children, Development and Education: Cultural Historical, Anthropological Perspectives*. International Perspectives on Early Childhood Education and Development. London: Springer, 2011. v. 3. .

CHAIKLIN, S.; LAVE, J. *Estudiar las prácticas: perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires: Amorrortu editores, 2001.

CHUEIRI, M. S. F. Concepções sobre a Avaliação Escolar. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 19, n. 39, p. 49–64, 2008.

COLE, M. *Psicología cultural: Una disciplina del pasado y del futuro*. España: Ediciones Morata, 1999.

CRESWELL, J. *Qualitative inquiry research design: Choosing among five approaches*. Second ed. California: Sage Publications, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. *Mathematical thinking and learning*, v. 1, p. 131–153, 1999.

DANIELS, H. *Vygotsky y la pedagogía*. Barcelona: Paidós, 2003. (Temas de Educación).

DANIELS, H.; COLE, M.; WERTSCH, J. V. (Org.). *The Cambridge Companion to Vygotsky*. United States of America: Cambridge University Press, 2007.

DA PONTE, J. P.; GUIMARÃES, H. M. Notes for a History of the Teaching of Algebra. In: KARP, A.; SCHUBRING, G. (Org.). *Handbook on the History of Mathematics Education*. New York: Springer, 2014. p. 459–472.

DAVIDOV, V. *La enseñanza escolar y su desarrollo psicologico*. Moscu: Editorial progreso, 1988.

DAVYDOV, V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. Habana, Cuba: Editorial Pueblo y educación, 1978.

DERBYSHIRE, J. *Unknown quantity: a real and imaginary history of algebra*. USA: Penguin book Plume, 2006.

DESCARTES, R. *The Geometry of René Descartes*. New York: Dover Publications, 1954.

DESLAURIERS, J.-P.; KÉRISIT, M. O delineamento da pesquisa qualitativa. In: POUPART, J. *et al.* (Org.). *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. 3. ed. Petrópolis Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2012. .

DETTORI, G.; GARUTI, R.; LEMUT, E. From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In: SUTHERLAND, R. *et al.* (Org.). *Perspectives on school algebra*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 191–207.

DINIZ, L. *O Papel das Tecnologias da Informação e Comunicação nos Projetos de Modelagem Matemática*. 2007. UNESP, Rio Claro, SP, 2007.

DOMINGUES, N. *O papel do vídeo nas aulas multimodais de matemática aplicada: uma análise do ponto de vista dos alunos*. 2014. 125 f. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2014. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/gpimem/dissertacoes.php>>.

ENGESTRÖM, Y. Activity theory and individual and social transformation. In: ENGESTRÖM, Y.; MIETTINEN, R.; PUNAMAKI, R.-L. (Org.). *Perspectives on activity theory*. United States of America: Cambridge University Press, 1999. .

ENGESTRÖM, Y. *Learning by Expanding: An Activity - Theoretical Approach to Developmental Research*. Disponível em: <<http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>>. Acesso em: 29 jan. 2014.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução Irineu Bicudo. São Paulo, Brasil: Editora UNESP, 2009.

FAUVEL, J.; GRAY, J. *The history of mathematics: a reader*. [S.l.]: Macmillam press, the open university, 1987.

FERREIROS, J. Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices. In: SUÁREZ, M.; DORATO, M.; RÉDEI, M. (Org.). *EPSA Philosophical Issues in the Sciences: Launch of the European Philosophy of Science Association*. EPSA Philosophical Issues in the Sciences. London: Springer Science + Business Media B.V., 2010. v. 2. .

FETTERMAN, D. *Ethnography Step-by-Step*. 3. ed. United Estate of America: Sage Publications, 2010. v. 17.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *Learning of Mathematics*, v. 2, p. 19–25, 1989.

FLAUMENHAFT, H. An introductory note on Apollonius. *Apollonius of Perga: Conics, books I-III*. Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press, 2000. .

FREUDENTHAL, H. *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

GODINO, J. *et al.* Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, v. 26, n. 42B, p. 483–511, 2012.

GODINO, J. Um enfoque ontológico e semiótico da cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf. v. 22, n. 2.3, p. 237–284, 2002.

GRATTAN-GUINNESS, I. *From the calculus to set theory*. New Jersey: Princeton University Press, 1980.

HEATH, T. L. *Diophantus of Alexandria: a study of the history of Greek algebra*. London: Cambridge at the university press, 1885.

HEDEGAARD, M.; CHAIKLIN, S. *Radical-Local Teaching and Learning: A Cultural-Historical Approach*. United Kingdom: Aarhus University Press, 2005.

HEID, K. A technology-intensive funtional approach to the emergence of algebraic thinking. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). *Approaches to algebra perspectives for research and teaching*. Netherlands: Springer, 1996. p. 239–255.

HERMINIO, M. H. *O processo de escolha dos temas dos projetos de Modelagem Matemática*. 2009. UNESP, Rio Claro, Brasil, 2009.

HERMINIO, M. H.; BORBA, M. A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 12, n. 1, p. 111–127, 2010.

JANVIER, C. Modeling and the initiation into algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 225–236.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, v. 38, n. 3, p. 302–310, 2006.

KAPTELININ, V. The Object of Activity: Making Sense of the Sense-Maker. v. 12, n. 1, p. 4–18, 2005.

KERKHOVE, B.; BENDEGEM, J. P. *Perspectives on Mathematical Practices: Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 5. (Logic, Epistemology, and The Unity of Science).

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, p. 317–326, 1981.

KIERAN, C. Research on the learning and teaching of algebra: A Broadening of Sources of Meaning. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Org.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future*. UK: Sense Publishers, 2006. .

KIERAN, C. The core of algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Org.). *The future of the teaching and learning of algebra*:

the 12th ICMI study. New ICMI Study Series. United Estate of America: Kluwer Academic Publishers, 2004. v. 8. p. 21–33.

KIERAN, C.; BOILEAU, A.; GARANÇON, M. Introducing algebra by means of a technology supported, functional approach. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). . *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Netherlands: Kluwer Academic Publish, 1996. p. 257–294.

KITCHER, P. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York, EEUU: Oxford University Press, 1984.

KLEINER, I. *A History of Abstract Algebra*. Boston: Birkhauser, 2007.

KLEIN, J. *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. United Estate of America: Dover publications, 1992.

KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to the modern times*. New York: Oxford University Press, 1972. v. 3.

KÜCHEMANN, D. children's understanding of numerical variable. *Mathematics in School*,
<http://faculty.weber.edu/eamsel/Research%20Groups/Math%20Research/Kuchemann%20%281978%29.pdf>. v. 7, n. 4, p. 23–26, 1978.

KULA, W. *Las medidas y los hombre*. España: Siglo XXI, 1980.

KURSANOV, G. *Materialismo dialéctico y el concepto*. México D.F.: Editorial Grijalbo, 1966.

LEFEBVRE, H. *Lógica formal, lógica dialéctica*. México: Siglo XXI, siglo veintiuno editores, 2006.

LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. A developmental approach for supporting the epistemology of modeling. In: BLUM, W. et al. (Org.). . *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p. 153–160.

LEONTIEV, A. N. *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del hombre, 1978.

LEONTIEV, A. N. *La actividad en la psicología*. La Habana: Libros para la educación, 1979.

LINS, R. *A framework for understanding what algebraic thinking is*. 1992. University of Nottingham, 1992. Disponível em:
<http://etheses.nottingham.ac.uk/3227/1/316414.pdf>.

LINS, R.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. 4. ed. Campinas: Papirus Editora, 2001.

LINS, R.; KAPUT, J. The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Org.). . *The Future of*

the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study. United Estate of America: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 47–70.

LIPPMAN, D. *Math in Society*. United State of America: Pierce College Ft Steilacoom, 2011.

LURIA, A. *Cognitive development*. Harvard University Press: [s.n.], 1976.

MAGURRAN, A. *Ecological diversity and its measurement*. United State of America: Princeton University press, 1988.

MALHEIROS, A. P. *A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem*. 2004. Mestrado – Universidade Estadual Paulista, <http://www.rc.unesp.br/gpimem/teses.php>, 2004.

MALHEIROS, A. P. *Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem*. 2008. Doutorado – UNESP - Rio Claro, SP, <http://www.rc.unesp.br/gpimem/teses.php>, 2008.

MEDWIN, H.; CLAY, C. *Fundamentals of Acoustical Oceanography*. USA: Academic Press, 1998.

MEYER, J. F.; CALDEIRA, A.; MALHEIROS, A. P. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MOURA, M. O. DE (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília, Brasil: Liber livro, 2010.

OBANDO, G. *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa de la Educación Básica*. 2014. Universidad del Valle, Santiago de Cali, 2014.

PANZA, M. What is new and what is old in Viète's analysis restituta and algebra nova, and where do they come from? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viète. *Revue d'histoire des mathématiques*, http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/13/html/smf_rhm_13_85-153.html. v. 13, p. 85—153, 2007.

POSADA, F. et al. (Org.). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. Medellín: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, 2006.

POSADA, F.; VILLA, J. *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. 2006a. Mestrado – Universidad de Antioquia, Medellín, 2006.

POSADA, F.; VILLA, J. Razonamiento algebraico y la modelación matemática. In: POSADA, F. et al. (Org.). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. Medellín: Secretaria de Educación para la cultura de Antioquia, 2006b. p. 127 – 163.

POUPART, J. *et al. A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Petrópolis: Editora Vozes, 2012.

PRADO JUNIOR, C. *Dialética do conhecimento*. São Paulo, Brasil: Editora Brasiliense, 1980.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: PROCEEDINGS OF THE 28TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, NORTH AMERICAN CHAPTER, 2006a, Merida-México. *Anais...* Merida-México: [s.n.], 2006. p. 2–21.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, v. 12, n. 1, p. 1–19, 2010.

RADFORD, L. *Cognição matemática: historia, antropologia e epistemologia*. São Paulo: Editora Livreria da Física, 2011.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, p. 103–129, 2006b.

RADFORD, L. Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, v. 2, n. 1, p. 7–44, 2013.

RADFORD, L.; ROTH, W.-M. *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Netherlands: Sense Publishers, 2011. (SEMIOTIC PERSPECTIVES ON THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS SERIES).

RASHED, R. *The development of arabic mathematics: between arithmetic and algebra*. Tradução A. F. W. Armstrong. USA: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1994.

RIGON, A. J.; ASBABR, F. DE S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. DE (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília, Brasil: Liber Livro, 2010. .

ROSA, M. V. DE F. P. DO C.; ARNOLDI, M. A. G. C. *A entrevista na pesquisa qualitativa: mecanismos para validação dos resultados*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica Editora, 2006.

SCHEMMEL, M. *The english Galileo: Thomas Harriot's work on motion as an example of preclassical mechanics*. USA: Springer Science + Business Media B.V., 2008. v. 268. (BOSTON STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF SCIENCE).

SKOVSMOSE, O. *Towards a philosophy of critical mathematical education*. [S.l.]: Dordrecht Kluwer, 1994.

SOARES, D.; JAVARONI, S. Análise de modelos: possibilidades de trabalhos com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M.; CHIARI, A. (Org.). *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: [s.n.], 2013. p. 195–219.

SOUSA, G. A. DE *et al.* A transição do ensino médio para o superior: Dificuldades em problemas de taxas relacionadas. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA -ENEM-: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, RETROSPECTIVAS E PERSPECIVAS, 2013, Curitiba - PR. *Anais...* Curitiba - PR: [s.n.], 2013.

STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. *The future of the learning and teaching of algebra: the 12th ICMI study*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2004.

STALLIVIERI, L. O sistema de ensino superior do brasil características, tendências e perspectivas.

http://www.ucs.br/ucs/tplPadrao/tplCooperacaoCapa/cooperacao/assessoria/artigos/imprimir/sistema_ensino_superior.pdf. 2010.

STEDALL, J. *From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*. United Kingdom: European Mathematical Society, 2011.

STEDALL, J. *The Greate Invention of Algebra: Thomas Harriot's treatise on equations*. New York: Oxford University Press, 2003.

SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; LINS, R. *Perspectives on School Algebra*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

URQUHART, A. The Boundary Between Mathematics and Physics. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press: Paolo Mancosu, 2008. .

VAN DER WAERDEN, B. L. *Geometry and Algebra in ancient civilizations*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.

VÁZQUEZ, A. S. *Filosofia da práxis*. São Paulo: CLACSO Livros, 2007. (Pensamento social latino-americano).

VERGNAUD, G. *El Niño, Las Matemáticas y la Realidad: Problemas de la Enseñanza de Las Matemáticas en la Escuela Primaria*. [S.l.]: Trillas, 1991.

VIETE, F. *The analytic art: nine studies in algebra, geometry and trigonometry from tue Opus restitutae mathematicae analyseos, seu algebrâ Novâ*. Tradução Richard Witmer. Ohio: The Kent state University Press, 1983.

VILLA-OCHOA, J. *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. 2011. Universidad de Antioquia, 2011.

VYGOTSKY, L. *Thought and language*. Tradução Alex Kozulin. USA: The Massachusetts Institute of Technology, 1986.

WARTOFSKY, M. W. *Models: Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1979. (, Boston studies in the philosophy of science).

WILLIAMS, J.; GOOS, M. Modelling with mathematics and technologies. In: CLEMENTS, M. A. K. *et al.* (Org.). . *Third international hanbook of mathematics education*. London: Springer, 2013. p. 549–569.

YAMAGATA-LYNCH, L. *Activity Systems Analysis Methods: Understanding Complex Learning Environments*. London: Springer, 2010.

APÊNDICE A – COMPLEMENTO DA EMENTA

Matemática Aplicada - Biologia - 1º Semestre 2013 – Quarta-Feira à noite

Professor Dr. Marcelo C. Borba - Depto. de Matemática - E-mail: mborba@rc.unesp.br

Este curso permitirá que os alunos deem mais um passo na construção de um alicerce matemático básico para as suas atividades enquanto biólogos. A matemática tem estado cada vez mais presente em várias áreas da Biologia e ciências afins. A biomatemática, por exemplo, já é área consolidada de pesquisa. É importante que vocês aprendam algumas ideias básicas de matemática e revisitem outras já estudadas no Ensino Médio. É também relevante que a matemática seja vista em contexto. Porém é mais importante ainda que vocês aprendam como estudar e onde achar novas informações que precisarão ao longo da sua vida profissional.

Dentro desta perspectiva, em grupos de no mínimo 4 alunos e máximo 6 alunos, vocês estão convidados a escolherem um tema, de comum interesse do grupo, para trabalharem ao longo do semestre. Embasados neste tema, deverão construir possíveis respostas e/ou soluções a/às uma pergunta(s) e/ou problema(s) de interesse que surjam enquanto o grupo aprofunda os estudos no tema. Durante o desenvolvimento deste trabalho, vocês terão acompanhamento do professor Fabian Posada (biunesp@gmail.com). Pensem em como o trabalho poderia ser útil para vocês ou para outras pessoas e que talvez ele possa ser publicado em algum jornal ou ter um impacto em alguma comunidade. Mas o fundamental é escolher um tema e construir a(s) pergunta(s) e/ou o(s) problema(s) que despertem a curiosidade e o interesse do grupo. Curiosidade é fundamental tanto para o pesquisador quanto para o professor e também para o aluno. Nesse trabalho, será obrigatório apresentar um vídeo relacionado ao tema abordado. Com relação ao vídeo, vocês devem produzi-lo por meio de edição de vídeos, sejam eles próprios ou não, e discutido na apresentação do trabalho. Caso haja necessidade para auxiliar na edição e criação de vídeos, disponibilizaremos um minicurso temático de aproximadamente 6 horas, ensinando a utilizar ferramentas presentes no editor de vídeos e imagens do “YouTube”. Mesmo o minicurso sendo voltado a um único “software”, por questões

de foco e tempo, outros “softwares” de edição de vídeos e imagens poderão ser utilizados por alunos familiarizados com estes programas. Ao longo do semestre, relatórios deverão ser elaborados sobre o desenvolvimento do trabalho e deverão ser entregues ou enviados ao e-mail do professor Marcelo com cópia para o professor Lucas (lucascarato12@gmail.com) e para o professor Fabian. Próximo ao término das aulas, os alunos irão apresentar suas pesquisas, em uma data a combinar. Estas atividades fazem parte de uma pesquisa desenvolvida pelo GPIMEM que tem como um dos seus objetivos compreender como os estudantes pensam ao trabalharem com um projeto aberto em aulas de “Cálculo I”. Os alunos que não se sentirem à vontade com relação a este fato podem comunicá-lo, e suas produções não serão usadas como dados da pesquisa, ou os seus nomes serão ocultados, como preferirem.

Devido à importância do estudo aludido acima, a média final do curso será calculada pela seguinte fórmula: $M_f = \frac{3P_1 + 4P_2 + 2T + 1P}{10}$, ou seja, a nota é dividida em quatro partes: 30% na primeira prova, 40% na segunda prova, 20% no trabalho e 10% de participação representado na elaboração e entrega de relatórios relacionados com atividades que serão dadas no percorrer do curso. O trabalho deverá conter as informações pesquisadas sobre o tema escolhido e, se emergir, deverá conter também os resultados matemáticos que se enquadrem em sua pesquisa e que foram discutidos nas aulas e nas orientações. O primeiro rascunho do trabalho deverá ser entregue no máximo até dia 27 de março, embora seja desejável que a entrega ocorra antes. Versões também podem ser entregues na Secretaria do Departamento de Matemática. Estas versões serão avaliadas pelo professor Marcelo, por Lucas e por Fabian, o que permitirá que exista uma colaboração da parte deles no desenvolvimento dos trabalhos e vídeos. A data de entrega da versão final do trabalho ainda será determinada. Criamos um grupo da disciplina no “Facebook” (acesse em: <https://www.facebook.com/groups/matematicaaplicada.bio/>) para dar suporte às aulas. Neste grupo iremos postar os materiais utilizados em aula, administrativos como prazos dos trabalhos, aulas extras, além de gerar discussões sobre os assuntos relacionados às aulas.

É obrigatório o uso do livro didático, Cálculo 1 - Um Curso Moderno e suas Aplicações, Laurence Hoffmann & Gerald L. Bradley: - Livro Técnico e Científico, 7ª

edição. Há 10 cópias na biblioteca que podem ser retiradas. (Localização na biblioteca: 517 - H699c). Favor ter o livro em sala todos os dias. Recomendo a compra do livro para composição de sua biblioteca particular. A parte que será utilizada deste livro durante o curso está disponível para cópias no Xerox da biblioteca.

Vocês devem pensar em horários para aulas extras e reposição de aulas comuns. Devido a feriados e a viagens científicas, é muito provável que tenhamos aulas extras. O melhor é que estas aulas aconteçam logo, enquanto o semestre ainda está no começo! Sábado é considerado dia letivo na UNESP. Participem também das aulas de "reforço" (monitorias – entrar em contato com Fabian–biunesp@gmail.com). As aulas de monitoria serão em horários a serem combinados (com antecedência). Proponho que a primeira prova seja no dia 24 de abril e a segunda, no dia 26 de junho.

APÊNDICE B – EXEMPLO DE ENTREVISTA

Cada entrevista dependeu das condições particulares do projeto e da evolução da conversa, por isso algumas das perguntas foram diferentes. Contudo em termos gerais conservam uma mesma linha estrutural. A continuação é apresentado um exemplo.

Entrevista para uma das alunas do projeto sobre “Dispersão de sementes”.

1. Uma rápida biográfica: nome, idade, estudos, como foi o processo de escolha do curso Biologia. Geralmente, a que gosta dedicar seu tempo livre?
2. Por que você acha que é importante ou necessário o estudo de conceitos matemáticos na sua área de Biologia?
3. O que você opina da estratégia usada pelo professor de pedir, numa disciplina de matemática aplicada à Biologia, um trabalho final em que os alunos em grupos escolhem livremente um tema para pesquisar?
4. Fale-me de seu trabalho. De que trata o tema escolhido, ou seja, sem perder os aspectos mais importantes e relevantes, como você descreveria e/ou explicaria resumidamente seu trabalho?
5. Explique a estratégia usada para desenvolver o trabalho: como foi o método para escolher o tema, os primeiros contatos com o tema e os conteúdos? qual(uais) pergunta(s) pretendiam responder? Quais foram as fontes consultadas? Que papel teve a internet no processo?
6. Como foram distribuídas as tarefas no grupo e como foi a relação do trabalho escrito com o vídeo produzido?

7. Já que entregou seu trabalho, se você tivesse a oportunidade de fazê-lo de novo, usaria a mesma estratégia ou mudaria, ou seja, como o faria?
8. Levando em conta que: a) estudar a matemática em contextos diferenciados e b) aprender como estudar e onde achar novas informações (assumindo-se como pesquisadores e professores) foram os principais propósitos colocados pelo professor para a realização do trabalho, por que considera que seu trabalho cumpriu com esses objetivos?
9. Em que sentido você considera que o trabalho teve alguma relação com os conceitos estudados na disciplina?
10. Porque considera importante estudar as formas de dispersão de sementes e, mais ainda, porque considera importante quantificar esse processo de dispersão?
11. Vocês falaram de *estratégias*, *efetividade* e *eficácia* na dispersão de sementes. Você poderia definir esses termos e explicar um pouco em que consistem nesse contexto? Quais são as relações entre eles?
12. Vocês disseram que, utilizando as frequências de ocorrência, podem achar a porcentagem de cada item alimentar consumido por todos os animais frugívoros. Como poderiam ser usadas, por exemplo, as frequências de ocorrência apresentadas na tabela 1?

Família	Gêneros	Espécies	Amostras (N)	PO (%)	Meses
Fabaceae	9	10	208	79.1	12
Solanaceae	1	1	110	41.8	12
Myrtaceae	1	1	85	32.3	12
Annonaceae	2	4	76	28.9	11
Arecaceae	4	4	68	25.9	12
Sterculiaceae	2	2	32	12.2	6
Verbenaceae	1	1	27	10.3	11
Malpighiaceae	1	1	23	8.7	8
Ebenaceae	1	1	21	8.0	3
Rubiaceae	3	3	21	8.0	9
Melastomataceae	1	1	12	4.6	2
Apocynaceae	1	1	10	3.8	4
Rutaceae	1	2	9	3.4	6
Moraceae	1	1	6	2.3	6
Clusiaceae	2	2	5	1.9	4
Smilacaceae	1	1	4	1.5	4
Burseraceae	1	1	3	1.1	2
Dilleniaceae	1	1	2	0.8	2
Anacardiaceae	1	1	1	0.4	1

13. Vocês disseram que o componente quantitativo (**QC**) de remoção de sementes e o índice de importância (**IJ**) das aves para a comunidade de vegetais são duas das maneiras de quantificar as diferenças na efetividade da dispersão realizada por distintas espécies de aves. Poderia explicar detalhadamente como são feitos esses cálculos?
14. No contexto de pesquisa, como poderiam ser usados os valores obtidos com as fórmulas para calcular os componentes quantitativos (**QC**) de remoção de sementes e de índice de importância (**IJ**)?
15. Para finalizar, o que você opina da nota final obtida? Por que considera que representa ou não seu esforço, seu aprendizado, seu interesse e, particularmente, o fato de ter alcançado ou não o propósito definido para este projeto?
16. Gostaria de apresentar mais alguma outra ideia relacionada com o desenvolvimento do projeto?