unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS DESCONTÍNUOS E APLICAÇÕES

Iguer Luis Domini dos Santos

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 3221-2444
Fax: (017) 3221-2445

IGUER LUIS DOMINI DOS SANTOS

Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Descontínuos e Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", *campus* de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Luis Antônio Fernandes de Oliveira

São José do Rio Preto
2008

Santos, Iguer Luis Domini dos.
Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos descontínuos e aplicações / Iguer Luis Domini dos Santos. -São José do Rio Preto: [s.n.], 2008.
52f. ; 30cm.

Orientador: Geraldo Nunes Silva
Co-orientador: Luis Antônio Fernandes de Oliveira
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos. 2. Sistemas dinâmicos descontínuos. 3. Estabilidade de Lyapunov. I. Silva, Geraldo Nunes. II. Oliveira, Luis Antônio Fernandes de. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.93

Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Descontínuos e Aplicações

Iguer Luis Domini dos Santos

Banca Examinadora

Titulares

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva - Orientador (IBILCE/UNESP)
Prof. Dr. Luis Antônio Barrera San Martin (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio (IBILCE/UNESP)

Suplentes

Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel (IBILCE/UNESP)
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (DMECC/UFSJ)

São José do Rio Preto
2008

Aos meus pais, Sebastião e Marta,
e aos meus irmãos, Adriel e Suzel,
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente, devo agradecer a Deus por ter me dado a vida e a oportunidade de poder conviver ao lado de pessoas maravilhosas.

Agradeço aos professores Geraldo Nunes e Luis Antônio por acreditarem na realização deste trabalho.

Aos meus professores e aos meus amigos de Pós-Graduação, em especial aqueles da república "casa rosada".

À todos os funcionários do Ibilce que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro.

“ Nas questões matemáticas não se compreende
a incerteza nem a dúvida, assim como tampouco
se podem estabelecer distinções entre verdades
médias e verdades de grau superior.”

Hilbert

Resumo

Neste trabalho introduzimos uma classe de sistemas dinâmicos descontínuos com espaço tempo contínuo e analisamos Teoremas que asseguram condições suficientes para a estabilidade de Lyapunov utilizando funções de Lyapunov. Além disso, consideramos também Teoremas de Recíproca, que sob algumas condições garantem uma determinada necessidade para esses Teoremas de estabilidade de Lyapunov.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos descontínuos, estabilidade de Lyapunov, funções de Lyapunov.

Abstract

In this work we introduce a class of discontinuous dynamical systems with time space continuous and we analyze Theorems that ensure sufficient conditions for the Lyapunov stability using Lyapunov functions. Moreover, we also consider Converse Theorems, which under some conditions guarantee a determined necessity for those Theorems of Lyapunov stability .

Keywords: Discontinuous dynamical systems, Lyapunov stability, Lyapunov functions.

Sumário

Capítulo 1

Introdução e Pré-Requisitos

1.1 Introdução

Nesta dissertação introduzimos uma classe de sistemas dinâmicos descontínuos considerada em [3], [4], [6], [8], [9], [10] e [18] e estudamos a estabilidade no sentido de Lyapunov de conjuntos invariantes. Tais sistemas descontínuos surgem na modelagem de uma variedade de sistemas, tais como sistemas dinâmicos híbridos, ou seja, sistemas que possuem mais de um comportamento dinâmico no tempo, tais como a dinâmica em tempo contínuo e a dinâmica em tempo discreto, sistemas com efeitos impulsivos, sistemas de controle inteligente, entre outros.

A análise de estabilidade de sistemas descontínuos cujo espaço estado é um espaço métrico genérico foi estabelecida em [6], [9], [10] e [18]. Essa análise é efetuada através de funções de Lyapunov, o que constitui o chamado Método Direto de Lyapunov. Nesse método as propriedades de estabilidade de conjuntos invariantes são deduzidas através do comportamento das funções de Lyapunov nas trajetórias do sistema dinâmico sob estudo.

O Método Direto de Lyapunov possui uma grande vantagem, já que é possível analisar a estabilidade sem o conhecimento prévio das trajetórias do sistema considerado, no entanto, uma das principais dificuldades é encontrar tais funções de Lyapunov se o sistema a ser analisado não for de fácil compreensão.

Inicialmente introduzido por A. M. Lyapunov em 1892 para estabelecer simples teoremas de estabilidade, esse método é intensivamente utilizado em problemas de Física e Engenharia. Para utilizar o Método Direto de Lyapunov em sistemas descontínuos, utilizaremos funções generalizadas de Lyapunov em relação às usuais funções usadas em sistemas de equações diferenciais, tais como em [1], [2], [7], [12], [13] e [14].

Consideramos também Teoremas de Recíproca, que sob algumas condições garantem uma determinada suficiência para os Teoremas que determinam o Método Direto de Lyapunov, garantindo a existência de funções de Lyapunov

Para fazer um pararelo com o caso contínuo, enunciamos e demonstramos também Teoremas que determinam o Método Direto de Lyapunov para sistemas dinâmicos contínuos.

Finalmente, utilizamos o Método Direto para estudar a estabilidade de sistemas descontínuos determinados por: equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais funcionais retardadas e equações integrais de Volterra.

1.2 Pré-Requisitos

Nas seções a seguir introduzimos alguns conceitos e resultados básicos que são utilizados ao longo de toda a dissertação.

Os conceitos e resultados das seções 1.4, 1.5 e 1.6 podem ser encontrados em [5]. Enquanto os da seção 1.7 podem ser achados em [1] e [12] e os da seção 1.8 em [10] e [11].

1.3 Notação

Utilizaremos as seguintes notações:
(i) $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$;
(ii) $\mathbb{R}^{n\text{x}m}$ será o conjunto das matrizes reais de ordem n por m ;
(iii) $C[X, Y]$ denotará o conjunto das funções contínuas com domínio X e contradomínio Y.
(iv) a notação $p(., a, \tau_0^p) \in S$ é identificada com a função $p(., a, \tau_0) : [\tau_0, +\infty) \to X$ univocamente determinada pelas condições iniciais $(a, \tau_0) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}_0^+ \subset X \times \mathbb{R}^+$;
(v) Dada a função $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ denotaremos a derivada superior a direita de Dini de v em $t_0 \in (a, b)$ por

$$D^+v(t_0) := \sup \lim_{h \to 0^+} \big[v(t_0 + h) - v(t_0)\big]/h \ .$$

1.4 Espaços Métricos

Definição 1.1 *Uma métrica d em um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:*
(i) $d(x, x) = 0$;
(ii) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2 *Um espaço métrico é um par (X, d), sendo d uma métrica em X.*

Definição 1.3 *Dado o espaço vetorial X, uma norma $\|.\|$ em X é uma função $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$ e λ um escalar:*
(i) $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0$;
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
(iii) $\|x + z\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.4 *Um espaço vetorial normado é um par $(X, \|.\|)$, sendo $\|.\|$ uma norma em X.*

Observação Todo espaço vetorial normado $(X, \|.\|)$ determina um espaço métrico (X, d) com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

1.5 Topologia Básica

Definição 1.5 *Uma bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de (X, d) definido como*

$$B(a; r) = \{x \in X : d(x, a) < r\} \ .$$

Observação Dado $M \subset X$, utilizaremos a seguinte convenção $B(M; r) = \{x \in X : d(x, M) < r\}$.

Definição 1.6 *Um ponto $a \in U \subset (X, d)$ é um ponto interior a U quando é centro de uma bola aberta contida em U.*

Definição 1.7 *Dizemos que $U \subset (X, d)$ é um conjunto aberto quando todos os seus pontos são interiores.*

Definição 1.8 *Um ponto $a \in M \subset (X, d)$ é um ponto aderente de M quando $d(a, M) = 0$.*

Definição 1.9 *Um conjunto $M \subset (X, d)$ é um conjunto fechado se contém todos os seus pontos aderentes.*

Definição 1.10 *O conjunto de todos os pontos aderentes de $M \subset (X, d)$ é o conjunto $\overline{M}$, chamado o fecho de M.*

Definição 1.11 *Uma cisão de um espaço métrico X é uma decomposição $X = A \cup B$ de X como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B.*

Definição 1.12 *A cisão $X = A \cup B$ é chamada de trivial quando um dos abertos, A ou B, é vazio.*

Definição 1.13 *Diremos que o espaço métrico X é conexo se a única cisão possível em X é a trivial.*

1.6 Funções Contínuas

Definição 1.14 *Sejam os espaços métricos* (X, d) *e* (Y, ρ)*. Diz-se que a aplicação* $f : X \to Y$ *é contínua no ponto* $a \in X$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $d(x, a) < \delta$ *implica* $\rho(f(x), f(a)) < \epsilon$*. Diremos que* f *é contínua se ela for contínua em todos os pontos de* X*.*

Teorema 1.1 *A função* $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ *é contínua em* $x_0 \in X$ *se, e somente se, para cada sequência* $\{x_n\} \subset X$ *tal que* $d(x_n, x_0) \to 0$ *tem-se* $\rho(f(x_n), f(x_0)) \to 0$*.*

Proposição 1.1 *Se a função* $p : [a, b) \to (X, \|.\|)$ *é contínua então* $\|p\| : [a, b) \to \mathbb{R}^+$*, tal que* $\|p\|(t) = \|p(t)\|$*, também é contínua.*

1.7 Equações Diferenciais

Considere o seguinte problema de valor inicial descrito por uma equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

sendo $t \geq t_0$, $f \in C[I \times \Omega, \mathbb{R}^n]$ e $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Lema 1.1 *Se a função* f *é contínua em* $I \times \Omega$*, o problema (1.1) é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \ .$$

Definição 1.15 *A função* $f(t, x)$ *definida em* $I \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *satisfaz a condição de Lipschitz em relação a segunda variável em um subconjunto* $C \subset I \times \Omega$*, se existe uma constante* $k = k_C$ *tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

para $(t, x), (t, y) \in C$*.*

Teorema 1.2 *Se* $f(t, x)$ *é contínua em um conjunto aberto conexo* $I \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *e satisfaz a condição de Lipschitz em relação a segunda variável para qualquer conjunto compacto* $C \subset I \times \Omega$*, então para qualquer* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$*, existe uma única solução* $x(t, x_0, t_0)$ *contínua de (1.1) em seu domínio máximo de existência* $[t_0, t_0 + \omega_+(t_0, x_0))$*, tal que* $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$*.*

Corolário 1.1 *Se $f(t,0)=0$, para todo $t \in I$, segue que $x(t,0,t_0)=0$ para todo $t \geq t_0$ e $t \in I$.*

Corolário 1.2 *Se $f(t,x) \equiv Ax$, então as soluções $x(t,x_0,t_0)$ estão definidas em qualquer $t \in [t_0,+\infty)$.*

Para o problema de valor inicial (1.1) seja $f \in C[I \times \Omega, \mathbb{R}]$ tal que $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e considere a desigualdade diferencial

$$D^+x(t) \leq f(t,x(t)) \tag{1.2}$$

tal que $x(t_0) \leq x_0$ e $t \geq t_0$. Nestas condições temos o seguinte Lema.

Lema 1.2 *Se $x(t)$ é uma solução contínua de (1.2) e ϕ_M é a solução maximal de (1.1), então $x(t) \leq \phi_M(t)$ para $t \geq t_0$ tal que t esteja no domínio dessas funções.*

1.8 Funções de Classe K, $K\mathbb{R}$ e L

Definição 1.16 *Dizemos que a função $\phi \in C[[0,r],\mathbb{R}^+]$ (respectivamente $\phi \in C[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+]$) pertence à classe K ($\phi \in K$), se $\phi(0)=0$ e se ϕ é estritamente crescente em $[0,r]$ (respectivamente em $\mathbb{R}^+$). E se $\phi \in K$ definida em $\mathbb{R}^+$ é tal que $\lim_{r\to+\infty}\phi(r)=+\infty$, dizemos que essa função pertence à classe $K\mathbb{R}$.*

Definição 1.17 *Uma função contínua $\sigma : [s_1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$, para algum $s_1 \in \mathbb{R}^+$, é de classe L se σ é estritamente decrescente em $[s_1,+\infty)$ e se $\lim_{s\to+\infty}\sigma(s)=0$.*

Lema 1.3 *Seja $\beta \in L$ definida em $\mathbb{R}^+$. Então existe uma função $\alpha \in K$ definida em $[0,\beta(0)]$ tal que para qualquer subconjunto discreto $\{\tau_0,\tau_1,... : \tau_0 < \tau_1 < ...\} \subset \mathbb{R}^+$ satisfazendo $\inf_{k\geq 0}\{\tau_{k+1}-\tau_k\} = l > 0$, é válido $\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha(\beta(\tau_i-\tau_0)) < +\infty$.*

Prova. Seja $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ e defina $\eta \in C[\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+]$ como

$$\eta(t) = \begin{cases} \beta(t)/t, & t \in (0,1) \\ \beta(t), & t \in [1,+\infty). \end{cases}$$

Temos que $\eta(t)$ é estritamente decrescente para todo $t>0$, $\lim_{t\to 0^+}\eta(t)=+\infty$ e $\eta(t) \geq \beta(t)$ para todo $t>0$. Além disso, η é invertível, η^{-1} é estritamente decrescente e $\eta^{-1}(\beta(r)) \geq \eta^{-1}(\eta(r)) = r$ para todo $r>0$.

Seja agora $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha(r) = e^{-\eta^{-1}(r)}$ para $r > 0$, logo $\alpha \in K$ e $\alpha(\beta(r)) = e^{-\eta^{-1}(\beta(r))} \leq e^{-r}$. Dessa forma, como $\tau_i - \tau_1 \geq (i-1)l$ para todo $i \geq 1$, segue que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha(\beta(\tau_i - \tau_0)) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} e^{\tau_0 - \tau_i} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{\tau_0 - \tau_i} <$$

$$1 + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{\tau_1 - \tau_i} \leq 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-(i-1)l} = 1 + \frac{1}{1 - e^{-l}} < +\infty \ . \quad \square$$

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos e também estabelecemos resultados de estabilidade para sistemas contínuos.

Os conceitos e resultados das seções 2.2 e 2.3 podem ser achados em [10] e os da seção 2.5 em [1], [2], [7], [10], [12] e [13]. Já os resultados da seção 2.6 podem ser encontrados em [12].

2.2 Definição

Definição 2.1 *Seja o espaço real* $\mathbb{R}^+$ *munido da distância e da ordem usual de números reais. Considere agora* (X, d) *um espaço métrico,* $\mathcal{A} \subset X$ *e* $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ *. Para cada* $a \in \mathcal{A}$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ *fixados, a aplicação* $p(., a, t_0) : \mathbb{R}_{a,t_0}^+ \to X$ *é chamada de uma trajetória se* $p(t_0, a, t_0) = a$*, sendo* $\mathbb{R}_{a,t_0}^+ = [t_0, +\infty)$*.*

Assim, definimos sistemas dinâmicos:

Definição 2.2 *Seja* S *um conjunto de trajetórias, isto é,*

$$S \subset \{p(., a, t_0) \in \Lambda : p(t_0, a, t_0) = a\}$$

sendo $\Lambda = \cup_{(a,t_0)\in(\mathcal{A}\times\mathbb{R}_0^+)}\{\varphi : \mathbb{R}_{a,t_0}^+ \to X\}$*. A quíntupla* $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *é chamada de sistema dinâmico.*

Observação Por simplicidade, dado o sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$, denotaremos este sistema apenas por S.

2.3 Caracterizações Qualitativas

Definição 2.3 *Diz-se que um sistema dinâmico* $\{\mathbb{R}^+, (X,d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$*:*
(a) é de dimensão finita se X *é de dimensão finita;*
(b) possui dimensão infinita se X *tem dimensão infinita;*
(c) é contínuo se todas as suas trajetórias são contínuas;
(d) é descontínuo se pelo menos uma de suas trajetórias é descontínua.

Observação Nesta dissertação estudaremos sistemas dinâmicos descontínuos cujas trajetórias $p(.,a,\tau_0) \in S$ são unicamente determinadas pelas condições iniciais $(a,\tau_0) \in \mathcal{A}\times\mathbb{R}_0^+$ e são contínuas em $[\tau_0, +\infty)$ exceto possivelmente nos pontos do conjunto ilimitado superiormente $E_p = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, ... : \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k < ...\}$.

Definição 2.4 *Dado o sistema dinâmico* $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$*, chamamos o conjunto* $M \subset \mathcal{A}$ *de invariante em relação ao sistema* S *(isto é,* (S,M) *é invariante) se* $a \in M$ *implica que* $p(t,a,t_0) \in M$ *para todo* $t \in \mathbb{R}_{a,t_0}^+$ *tal que* $p(.,a,t_0) \in S$*.*

Definição 2.5 (Estabilidade de Lyapunov) *Seja o sistema dinâmico* $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *e* $M \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante de* S*.*
(i) Diz-se que (S,M) *é estável se para todo* $\epsilon > 0$ *existir um* $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ *tal que, quando* $d(a,M) < \delta$ *tem-se* $d(p(t,a,t_0), M) < \epsilon$ *para* $t \in \mathbb{R}_{a,t_0}^+$ *e* $p(.,a,t_0) \in S$*.*
(ii) (S,M) *é uniformemente estável se* $\delta = \delta(\epsilon)$*, independente de* t_0*.*
(iii) Se (S,M) *é estável e para* $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ *existir um* $\eta = \eta(t_0) > 0$ *tal que, para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $t_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *de modo que* $d(p(t,a,t_0), M) < \epsilon$ *para todo* $t \geq t_\epsilon$*, quando* $d(a,M) < \eta$ *e* $p(.,a,t_0) \in S$*, então* (S,M) *é dito assintoticamente estável.*
(iv) Chamamos (S,M) *de uniformemente assintoticamente estável se* (S,M) *é uniformemente estável e se existe* $\delta > 0$ *tal que, para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe* $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ *de modo que* $d(p(t,a,t_0), M) < \epsilon$ *para todo* $t \in \mathbb{R}_{a,t_0}^+$ *tal que* $t - t_0 \geq \tau$*, quando* $d(a,M) < \delta$ *e* $p(.,a,t_0) \in S$*.*
(v) Diz-se que (S,M) *é exponencialmente estável se existe* $\alpha > 0$ *tal que, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *de modo que* $d(p(t,a,t_0), M) < \epsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}_{a,t_0}^+$*, quando* $d(a,M) < \delta$ *e* $p(.,a,t_0) \in S$*.*

Definição 2.6 (Instabilidade) *Diz-se que (S,M) é instável se não é estável. Dessa forma, existe* $\epsilon_0 > 0$ *de modo que para cada* $\delta > 0$ *existe* $a \in \mathcal{A}$ *com* $d(a,M) < \delta$ *e* $a \notin M$*, tal que* $d(p(t_1,a,t_0), M) \geq \epsilon_0$ *para algum* $t_1 \in \mathbb{R}_{a,t_0}^+$*.*

Em relação a definição de estabilidade de Lyapunov temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1 *Vale as seguintes implicações*

$$(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$$

$$(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

Lema 2.1 *Dado o sistema dinâmico* $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *e* $M \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante de* S*, temos:*
(i) (S, M) *é uniformemente estável se, e somente se, existe* $\psi \in K$ *definida em* $[0, r_0]$*, para algum* $r_0 > 0$*, tal que*

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq \psi(d(a, M))$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+_{a,t_0}$*, quando* $d(a, M) < r_0$ *e* $p(., a, t_0) \in S$*;*
(ii) (S, M) *é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existe* $\sigma \in L$ *e* $\psi \in K$ *definida em* $[0, r_0]$*,* $r_0 > 0$*, tal que*

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq \psi(d(a, M))\sigma(t - t_0)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+_{a,t_0}$*, quando* $d(a, M) < r_0$ *e* $p(., a, t_0) \in S$*;*
(iii) (S, M) *é exponencialmente estável se, e somente se, existe* $\alpha > 0$ *e* $\psi \in K$ *definida em* $[0, r_0]$*,* $r_0 > 0$*, de modo que*

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq \psi(d(a, M))e^{-\alpha(t-t_0)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+_{a,t_0}$*, quando* $d(a, M) < r_0$ *e* $p(., a, t_0) \in S$ *.*

2.4 Exemplos

Exemplo 2.3.1 Seja o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

para $t \geq t_0$, sendo $x(t) \in \mathbb{R}$ e $a < 0$. Dessa forma, seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $0 \in \mathcal{A}$ o conjunto dos estados iniciais x_0, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(2.1)} = \{p(., x_0, t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+\}$ o conjunto das trajetórias $p(t, x_0, t_0) = x_0 e^{a(t-t_0)}$, então, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+, \mathcal{A}, S_{(2.1)}, \mathbb{R}_0^+\}$. Temos os seguintes resultados:
(i) $(S_{(2.1)}, \{0\})$ é invariante, já que se $x_0 = 0$, temos $p(t, x_0, t_0) = 0e^{a(t-t_0)} = 0 \in \{0\}$ para $t \geq t_0$.
(ii) Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon$, logo, se $d(x_0, \{0\}) = x_0 < \delta$ para $t \geq t_0$ temos

$$d(p(t, x_0, t_0), \{0\}) = x_0 e^{a(t-t_0)} < \delta e^{a(t-t_0)} = \epsilon e^{a(t-t_0)}.$$

Assim, $(S_{(2.1)}, \{0\})$ é exponencialmente estável.

Exemplo 2.3.2 Considere agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

para $t \geq t_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{nxn}$. Assim , seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in \mathcal{A}$ o conjunto dos estados iniciais x_0, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(2.2)}$ o conjunto das trajetórias $p(., x_0, t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ tais que $p(t, x_0, t_0) = e^{A(t-t_0)}x_0$, logo, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n, \mathcal{A}, S_{(2.2)}, \mathbb{R}_0^+\}$.

Temos que $(S_{(2.2)}, \{0\})$ é invariante, já que $p(t, 0, t_0) = e^{A(t-t_0)}0 = 0$ para $t \geq t_0$.

Observação Na seção 2.5 utilizaremos funções de Lyapunov para analisar a estabilidade do sistema $S_{(2.2)}$ quando a matriz A for simétrica.

Exemplo 2.3.3 Considere agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

para $t \geq t_0$, $x(t) \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Então, seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $0 \in \mathcal{A}$ o conjunto dos estados iniciais x_0, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(2.3)}$ o conjunto das trajetórias $p(., x_0, t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ tais que $p(t, x_0, t_0) = x_0e^{a(t-t_0)}$, logo, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+, \mathcal{A}, S_{(2.3)}, \mathbb{R}_0^+\}$.

Temos que $(S_{(2.3)}, \{0\})$ é instável. De fato: para qualquer $\delta > 0$, com $\delta < 1/2$, seja $x_0 \neq 0$ tal que $d(x_0, \{0\}) = x_0 < \delta$ e seja $p(., x_0, t_0) \in S_{(2.3)}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ fixado aleatoriamente. Então, se $t_1 = \frac{1}{a}ln\frac{1}{2x_0} + t_0 > t_0$ segue que $x_0e^{a(t_1-t_0)} = \frac{1}{2}$, isto é, $d(p(t_1, x_0, t_0), \{0\}) = \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.3.4 Seja o espaço métrico $X = (C[[0, 1], \mathbb{R}^n], d)$ munido da métrica d induzida pela norma

$$\|f\| = \max_{s\in[0,1]} \|f(s)\|, \quad f \in C[[0, 1], \mathbb{R}^n] \ .$$

Seja $\mathcal{A} \subset X$ o conjunto dos estados iniciais f_0 de modo que $0 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e defina as trajetórias $p(., f_0, t_0) : [t_0, +\infty) \to X$ como

$$\begin{cases} p(t_0, f_0, t_0) = f_0 \\ p(t, f_0, t_0) = f_t, \ t > t_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

tal que $f_t \in X$ é dada por $f_t(s) = \frac{f_0(s)}{t-t_0+1}$. Assim, se $S_{(2.4)}$ é o conjunto das trajetórias $p(., f_0, t_0)$ obtemos o sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S_{(2.4)}, \mathbb{R}_0^+\}$. Temos que:

(a) Para todo $t' \geq t_0$, seja a sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to t'$, logo, para cada $s \in [0, 1]$ temos

$$f_{t_n}(s) = \frac{f_0(s)}{t_n - t_0 + 1} \to \frac{f_0(s)}{t' - t_0 + 1} = f_{t'}(s) \ .$$

Dessa forma $\|f_{t_n} - f_{t'}\| = \max_{s\in[0,1]} \|f_{t_n}(s) - f_{t'}(s)\| \to 0$ e portanto cada $p(.,f_0,t_0) \in S_{(2.4)}$ é contínua em todo $t' \geq t_0$, isto é, o sistema $S_{(2.4)}$ é contínuo.
(b) Temos que $(S_{(2.4)}, \{0\})$ é invariante, uma vez que, se $f_0 = 0$, para $t \geq t_0$ temos $p(t,f_0,t_0) = f_t = 0$, já que $f_t(s) = \frac{f_0(s)}{t-t_0+1} = 0$, $s \in [0,1]$.
(c) Dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$, logo, se $d(f_0,\{0\}) = \|f_0 - 0\| = \|f_0\| < \delta$ então

$$d(p(t,f_0,t_0),\{0\}) = \|f_t\| = \max_{s\in[0,1]} \|f_t(s)\| = \max_{s\in[0,1]} \|\frac{f_0(s)}{t-t_0+1}\| =$$

$$\frac{1}{t-t_0+1} \max_{s\in[0,1]} \|f_0(s)\| = \frac{1}{t-t_0+1}\|f_0\| \leq \|f_0\| < \epsilon$$

para todo $t \geq t_0$, ou seja, $(S_{(2.4)}, \{0\})$ é uniformemente estável.
(d) Fixando $\delta > 0$, se $d(f_0,\{0\}) = \|f_0\| < \delta$ segue que

$$\lim_{t\to+\infty} d(p(t,f_0,t_0),\{0\}) = \lim_{t\to+\infty} \|f_t\| =$$

$$\lim_{t\to+\infty} \max_{s\in[0,1]} \|f_t(s)\| = \lim_{t\to+\infty} \max_{s\in[0,1]} \|\frac{f_0(s)}{t-t_0+1}\| = 0$$

e então $(S_{(2.4)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável.
Exemplo 2.3.5 Considere o seguinte sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t)) + Bu^{(k)}(\tau_k), \ \tau_k \leq t < \tau_{k+1} \\ u^{(k+1)}(\tau_{k+1}) = Cu^{(k)}(\tau_k) + Dx^{(k)}(\tau_{k+1}^-), \quad u^{(0)}(\tau_0) = u_0 \\ x^{(0)}(\tau_0) = x_0, \quad x^{(k+1)}(\tau_{k+1}) = Ax^{(k)}(\tau_{k+1}^-) \end{cases} \tag{2.5}$$

sendo $x^{(k+1)}(\tau_{k+1}^-) = \lim_{s\to\tau_{k+1}^-} x^{(k)}(s)$, $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ e $\{\tau_1,...,\tau_k,... : \tau_0 = t_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ...\}$ um conjunto fixado. Além disso, $x^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u^{(k)}(\tau_k) \in \mathbb{R}^m$ e as matrizes A,B,C,D são tais que $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxm}$, $C \in \mathbb{R}^{mxm}$ e $D \in \mathbb{R}^{mxn}$. Temos também que $f \in C[\Omega,\mathbb{R}^n]$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Suponhamos que f seja contínua, Ω seja um conjunto conexo aberto e para cada conjunto compacto $C \subset \Omega$ a função f satisfaz a condição de Lipschitz. Logo $F_k(u_0) \in C[\Omega,\mathbb{R}^n]$ tal que $F_k(u_0)(x) = f(x) + Bu(\tau_k)$ também satisfaz a condição de Lipschitz. De fato, dados $x,y \in C$ temos que

$$\|F_k(u_0)(x) - F_k(u_0)(y)\| = \|f(x) + Bu(\tau_k) - f(y) - Bu(\tau_k)\| =$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k_C\|x-y\| \ .$$

Logo, para qualquer $x_k \in \Omega$ existe uma única solução $x^{(k)}(.,x_k,\tau_k) : [\tau_k,\tau_{k+1}) \to \mathbb{R}^n$. Dessa forma, seja $\mathcal{A} \subset \Omega$ o conjunto dos estados iniciais x_0 tal que $0 \in \mathcal{A}$ e $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais τ_0. Então, para qualquer $x_0 \in \mathcal{A}$ e $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+$ existe uma única função $\phi(., x_0, \tau_0) : [\tau_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi(t, x_0, \tau_0) = x^{(k)}(t, x_k, \tau_k), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}).$$

Considere também que $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ seja o conjunto dos controles iniciais u_0 de modo que $0 \in \mathcal{U}$. Defina as trajetórias $p(., a, t_0) : \mathbb{R}_{a,t_0}^+ \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ no tempo t, $\tau_k \le t < \tau_{k+1}$, como

$$\begin{cases} p(t, a, t_0) = [\phi(t)^T, u(\tau_k)^T]^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \quad p(t_0, a, t_0) = a = [\phi(\tau_0)^T, u(\tau_0)^T]^T \end{cases}$$

então

$$p(\tau_{k+1}, a, t_0) = \begin{pmatrix} \phi(\tau_{k+1}) \\ u(\tau_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\tau_{k+1}) \\ u(\tau_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax(\tau_{k+1}^-) \\ Cu(\tau_k) + Dx(\tau_{k+1}^-) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x(\tau_{k+1}^-) \\ u(\tau_k) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \phi(\tau_{k+1}^-) \\ u(\tau_k) \end{pmatrix} = G.p(\tau_{k+1}^-, a, t_0) \ .$$

Seja $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ o conjunto dos estados iniciais $a = [x_0^T, u_0^T]^T$ e suponha que

$$G.p(\tau_{k+1}^-, a, t_0) = p(\tau_{k+1}, a, t_0) \neq p(\tau_{k+1}^-, a, t_0)$$

para pelo menos um $k \in \mathbb{N}$ e algum $a \neq 0$. Então $p(t, a, t_0)$ é descontínua no ponto τ_{k+1} em relação à métrica d induzida por uma norma $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Assim, se $S_{(2.5)}$ é conjunto das trajetórias $p(., a, t_0)$ definidas anteriormente, para todo $a \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$ e todo $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, obtemos o sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathcal{A} \times \mathcal{U}, S_{(2.5)}, \mathbb{R}_0^+\}$, sendo $\{\tau_{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos possíveis pontos de descontinuidade das trajetórias $p(., a, t_0) \in S_{(2.5)}$.
Observação Se $f(0) = 0$ então $(S_{(2.5)}, \{0\})$ é invariante. De fato:
Se $a = [x_0^T, u(\tau_0)^T]^T = 0$ temos $x(r) = 0$, $r \in [\tau_0, \tau_1)$, logo $x(\tau_1) = Ax(\tau_1^-) = 0$. Por indução verifica-se que $x(\tau_k) = 0$ e $u(\tau_k) = 0$ para todo $k \geq 0$, então $x(t) = 0$ para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.
Assim

$$p(t, a, t_0) = [\phi(t)^T, u(\tau_k)^T]^T = [x(t)^T, u(\tau_k)^T]^T = 0$$

para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, isto é, $(S_{(2.5)}, \{0\})$ é invariante.

2.5 Funções de Lyapunov

Considere as trajetórias $p(., x_0, \tau_0^p) \in S$ de um determinado sistema dinâmico contínuo. Tomando M invariante em relação a S e $U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$ para algum $r > 0$, a seguir definimos as usuais funções de Lyapunov para sistemas contínuos.

Definição 2.7 *A função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de Lyapunov se:*
(i) para $t \geq 0$ tem-se $V(x,t) > 0$ se $x \notin M$ e $V(x,t) = 0$ se $x \in M$;
(ii) $V(p(t,x_0,\tau_0^p),t)$ é continuamente diferenciável e $\frac{d}{dt}V(p(t,x_0,\tau_0^p),t) \leq 0$ para todo $x_0 \in U$ e $t \geq \tau_0^p$.

Observe que a condição (i) é satisfeita se existirem funções $\psi_1, \psi_2 \in K$ definidas em $[0,r]$ tais que

$$\psi_1(d(x,M)) \leq V(x,t) \leq \psi_2(d(x,M)) \ .$$

Na condição (ii) é usual considerar também $D^+V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq 0$.
Considere agora um sistema dinâmico descontínuo e sejam $p(.,x_0,\tau_0^p) \in S$ as trajetórias que definem esse sistema, sendo $\{\tau_1^p, \tau_2^p, ... : \tau_1^p < \tau_2^p < ...\}$ o conjunto de possíveis pontos de descontinuidade de cada trajetória $p(.,x_0,\tau_0^p)$. Assim, se M é invariante em relação a S, para sistema descontínuos utilizaremos a seguinte definição de funções de Lyapunov.

Definição 2.8 *A função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de Lyapunov se:*
(i) para $t \geq 0$ tem-se $V(x,t) > 0$ se $x \notin M$ e $V(x,t) = 0$ se $x \in M$;
(ii) se $x_0 \in U$ temos que $\{V(p(\tau_k^p,x_0,\tau_0^p),\tau_k^p)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

2.6 Resultados para Sistemas Dinâmicos Contínuos

A seguir enunciamos os usuais resultados que garantem condições suficientes para a estabilidade de Lyapunov de sistema contínuos.

Teorema 2.1 *Seja $\{\mathbb{R}^+, (X,d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ um sistema dinâmico contínuo e $M \subset \mathcal{A}$ fechado. Suponha que exista uma função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua e funções $\psi_1, \psi_2 \in K$ definidas em $[0,r]$ tais que*

$$\psi_1(d(x,M)) \leq V(x,t) \leq \psi_2(d(x,M))$$

para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{R}^+$.
(a) Suponha que para todo $a \in U = B(M;r) \subset \mathcal{A}$ e $t \geq \tau_0^p$ se tenha $\frac{d}{dt}V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq 0$. Então (S,M) é invariante e uniformemente estável.
(b) Se além disso existir uma função $\psi_3 \in K$ definida em $[0,r]$ tal que

$$\frac{d}{dt}V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq -\psi_3(d(p(t,a,\tau_0^p),M))$$

para todo $a \in U$ e $t \geq \tau_0^p$, então (S,M) é uniformemente assintoticamente estável.

Prova. (a) Como $M \subset U$, dado $a \in M$ temos que $V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ é decrescente para todo $t \geq \tau_0^p$. Então

$$V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) = V(a, \tau_0^p) \leq \psi_2(d(a, M)) = \psi_2(0) = 0$$

e assim

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_1^{-1}(0) = 0.$$

Como M é fechado segue que (S, M) é invariante.
Agora, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \psi_2^{-1}(\psi_1(\epsilon))$ tal que $d(a, M) < \delta$ e $a \in U$. Logo

$$\psi_1\big(d(p(t, a, \tau_0^p), M)\big) \leq V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) =$$

$$V(a, \tau_0^p) \leq \psi_2(d(a, M)) < \psi_2(\delta) = \psi_1(\epsilon)$$

e portanto $d(p(t, a, \tau_0^p), M) < \epsilon$ para todo $t \geq \tau_0^p$, isto é, (S, M) é uniformemente estável.
(b) Fixe um $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq r$, tal que $\psi_2(\delta_1) < \psi_1(r)$ e seja $\epsilon > 0$ de modo que $0 < \epsilon \leq r$. Seja agora um $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$ tal que $\delta_2 < \delta_1$ e $\psi_2(\delta_2) < \psi_1(\epsilon)$.
Definindo $T = \psi_1(r)/\psi_3(\delta_2)$, para algum $a \in U$ tal que $d(a, M) < \delta_1$ afirmamos que $d(p(t^*, a, \tau_0^p), M) < \delta_2$ para algum $t^* \in [\tau_0^p, \tau_0^p + T]$. Realmente, pois do contrário teríamos $d(p(t, a, \tau_0^p), M) \geq \delta_2$ para todo $t \in [\tau_0^p, \tau_0^p + T]$, logo

$$0 < \psi_1(\delta_2) \leq \psi_1(d(p(t, a, \tau_0^p), M)) \leq V(p(t, a, \tau_0^p), t) =$$

$$V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) + \int_{\tau_0^p}^{t} \frac{d}{ds} V(p(s, a, \tau_0^p), s) ds \leq$$

$$V(a, \tau_0^p) - \int_{\tau_0^p}^{t} \psi_3(d(p(s, a, \tau_0^p), M)) ds \leq \psi_2(d(a, M)) - \int_{\tau_0^p}^{t} \psi_3(\delta_2) ds <$$

$$\psi_2(\delta_1) - (t - \tau_0^p)\psi_3(\delta_2).$$

Dessa forma, se $t = \tau_0^p + T$ temos

$$0 < \psi_2(\delta_1) - T\psi_3(\delta_2) = \psi_2(\delta_1) - \psi_1(r) < 0$$

o que é uma contradição e então t^* existe. Para $t \geq t^*$ temos

$$\psi_1(d(p(t, a, \tau_0^p), M)) \leq V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq V(p(t^*, a, \tau_0^p), t^*) \leq$$

$$\psi_2(d(p(t^*, a, \tau_0^p), M)) < \psi_2(\delta_2) < \psi_1(\epsilon)$$

e então $d(p(t, a, \tau_0^p), M) < \epsilon$ para todo $t \geq t^*$, logo para todo $t \geq t_0 + T$. Assim (S, M) é uniformemente assintoticamente estável. $\square$

Exemplo 2.5.1 Considerando o sistema $S_{(2.2)}$, seja a função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como $V(x,t) = V(x) = \|x\|$, logo, se $\psi_1, \psi_2 \in K$ definidas em $[0,r]$ são tais que $\psi_1(s) = s/2$ e $\psi_2(s) = 2s$, temos que $\psi_1(\|x\|) \leq V(x,t) \leq \psi_2(\|x\|)$ para todo $x \in U$. Além disso, para $x_0 \in U = B(0;r) \subset \mathcal{A}$, $x_0 \neq 0$, segue que

$$\frac{d}{dt}V(p(t,x_0,t_0)) = \frac{d}{dt}\|p(t,x_0,t_0)\| =$$

$$\frac{p(t,x_0,t_0)^T}{\|p(t,x_0,t_0)\|}\ \frac{d}{dt}p(t,x_0,t_0) = \frac{p(t,x_0,t_0)^T}{\|p(t,x_0,t_0)\|}\ Ap(t,x_0,t_0)\ .$$

Dessa forma, supondo que A seja simétrica seus autovalores são reais, e se supormos que seus autovalores não nulos são negativos segue que $y^T Ay \leq 0$ para todo $y \in U$ e então do Teorema 2.1 temos que $(S_{(2.2)}, \{0\})$ é uniformemente estável.

Exemplo 2.5.2 Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + cx(t)(x^2(t) + y^2(t)) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + cy(t)(x^2(t) + y^2(t)) \end{cases} \tag{2.6}$$

sendo $c < 0$. Temos que $f(x,y) = y + cx(x^2 + y^2)$ e $g(x,y) = -x + cy(x^2 + y^2)$ são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, logo, dado $\mathcal{A} = B(0;\delta_1) \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto de estados iniciais $a = (x_0, y_0)$, existe uma única solução contínua $(x(t,x_0,0), y(t,y_0,0))$ de (2.6) para todo $t \in [0, \omega_+(a))$ de modo que $(x(0,x_0,0), y(0,y_0,0)) = (x_0, y_0)$. Dessa forma, considerando $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ um conjunto de instantes iniciais t_0 e $S_{(2.6)} = \{p(.,a,t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^2\}$ o conjunto das trajetórias $p(t,a,t_0) = (x(t,x_0,t_0), y(t,y_0,t_0))$, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2, \mathcal{A}, S_{(2.6)}, \mathbb{R}_0^+\}$.

Observamos que, se $a = (x_0, y_0) = (0,0)$ então $p(t,a,t_0) = (x(t,0,t_0), y(t,0,t_0)) = (0,0)$ para todo $t \geq t_0$, isto é, $(S_{(2.6)}, \{0\})$ é invariante.

Para analisar a estabilidade deste sistema utilizaremos a função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$V((x,y),t) = V(x,y) = x^2 + y^2\ .$$

Considerando $\psi_1, \psi_2 \in K$ de modo que $\psi_1(s) = s^2/2$ e $\psi_2(s) = 2s^2$ para $s \in [0,r]$, temos que $\psi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \psi_2(\|x\|)$ para todo $x \in U$. Também, para $a \in U = B(0;r) \subset \mathcal{A}$ e $p(.,a,t_0) \in S_{(2.6)}$ temos

$$\frac{d}{dt}V(p(t,a,t_0)) = \frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = 2c(x^2(t) + y^2(t))^2 =$$

$$-2|c|\|p(t,a,t_0)\|^4 = -\psi_3(\|p(t,a,t_0)\|)$$

sendo $\psi_3 \in K$ tal que $\psi_3(s) = 2|c|(s)^4$. Logo, do Teorema 2.1 segue que $(S_{(2.6)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável.

Teorema 2.2 *Seja* $\{\mathbb{R}^+, (X,d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *um sistema dinâmico contínuo e seja* $M \subset \mathcal{A}$ *fechado. Suponha que existem uma função* $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *contínua e constantes positivas* c_1, c_2, c_3 *e* b *tais que*

$$c_1(d(x,M))^b \leq V(x,t) \leq c_2(d(x,M))^b$$

para todo $x \in U$ *e* $t \in \mathbb{R}^+$.
Além disso, suponha que para todo $a \in U = B(M;r) \subset \mathcal{A}$ *e* $t \geq \tau_0^p$ *se tenha*

$$D^+V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq -c_3\big[d(p(t,a,\tau_0^p),M)\big]^b \ .$$

Então (S,M) *é exponencialmente estável.*

Prova. (a) Considerando $\psi_1, \psi_2 \in K$ tal que $\psi_1(s) = c_1(s)^b$ e $\psi_2(s) = c_2(s)^b$, $s \in [0,r]$, do Teorema 2.1 temos que (S,M) é invariante, já que para todo $a \in M$ temos $V(p(t,a,\tau_0^p),t)$ decrescente para todo $t \geq \tau_0^p$, pois $D^+V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq 0$.
(b) Dado $a \in U$, seja $p_0(t) = p(t,a,\tau_0^p)$ e $V(p_0(t),t) = v(t)$. Então, para todo $t \geq \tau_0^p$ temos

$$D^+v(t) = D^+V(p_0(t),t) \leq -c_3\big[d(p_0(t),M)\big]^b \leq$$

$$-\big(c_3/c_2\big)V(p_0(t),t) = -\big(c_3/c_2\big)v(t)$$

e então a função $v(t)$ satisfaz a desigualdade diferencial

$$D^+v(t) \leq -\big(c_3/c_2\big)v(t) \ .$$

Além disso, $v(\tau_0^p) = V(p_0(\tau_0^p),\tau_0^p) = V(p(\tau_0^p,a,\tau_0^p),\tau_0^p) = V(a,\tau_0^p) \leq c_2(d(a,M))^b$ e do Lema 1.2 segue que

$$v(t) \leq c_2(d(a,M))^b e^{-(c_3/c_2)(t-\tau_0^p)}$$

logo

$$c_1(d(p_0(t),M))^b \leq v(t) \leq c_2(d(a,M))^b e^{-(c_3/c_2)(t-\tau_0^p)}$$

e então

$$d(p_0(t),M) \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/b} d(a,M)e^{-(c_3/bc_2)(t-\tau_0^p)} \ .$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ se $\delta = \epsilon\big(\frac{c_1}{c_2}\big)^{1/b}$ é tal que $d(a,M) < \delta$ e $a \in U$ segue que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) < \epsilon e^{-\alpha(t-\tau_0^p)}$$

para todo $t \geq \tau_0^p$ e $\alpha = c_3/bc_2$, isto é, (S,M) é exponencialmente estável. □

Exemplo 2.5.3 Considere o sistema descrito pelas equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a(t)x(t) - by(t) \\ \dot{y}(t) = bx(t) - c(t)y(t) \end{cases} \tag{2.7}$$

sendo $b \in \mathbb{R}$ e $a, c : I \to \mathbb{R}$, tal que $I \supset \mathbb{R}^+$ é um intervalo aberto, funções continuamente deriváveis tais que $a(t), c(t) \geq \delta > 0$ para todo $t \geq 0$. Temos que $f(x, y, t) = -a(t)x - by$ e $g(x, y, t) = bx - c(t)y$ são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \times I$, logo, dado $\mathcal{A} = B(0; \delta_1) \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto de estados iniciais $a = (x_0, y_0)$ e $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ um conjunto de instantes iniciais t_0, para cada $(a, t_0) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}_0^+$ existe uma única solução contínua $(x(t, x_0, t_0), y(t, y_0, t_0))$ de (2.7) para todo $t \in [t_0, t_0 + \omega_+(t_0, a))$ de modo que $(x(t_0, x_0, t_0), y(t_0, y_0, t_0)) = (x_0, y_0)$. Dessa forma, considerando $S_{(2.7)} = \{p(., a, t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^2\}$ o conjunto das trajetórias $p(t, a, t_0) = (x(t, x_0, t_0), y(t, y_0, t_0))$, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2, \mathcal{A}, S_{(2.7)}, \mathbb{R}_0^+\}$.
Observamos que, se $a = (x_0, y_0) = (0, 0)$ então $p(t, a, t_0) = (x(t, 0, t_0), y(t, 0, t_0)) = (0, 0)$ para todo $t \geq t_0$, isto é, $(S_{(2.7)}, \{0\})$ é invariante.
Seja a função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$V((x, y), t) = V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\ .$$

Dessa forma, para todo $x \in U$ temos $(1/4)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \|x\|^2$. Também, para $a \in U = B(0; r) \subset \mathcal{A}$ e $p(., a, t_0) \in S_{(2.7)}$ temos

$$\frac{d}{dt}V(p(t, a, t_0)) = \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = -a(t)x^2(t) - c(t)y^2(t) \leq$$

$$-\delta(x^2(t) + y^2(t)) = -\delta\|p(t, a, t_0)\|^2$$

e do Teorema 2.2, considerando $c_1 = 1/4, c_2 = 1, c_3 = \delta$ e $b = 2$ segue que $(S_{(2.7)}, \{0\})$ é exponencialmente estável.

Teorema 2.3 (Instabilidade) *Seja* $\{\mathbb{R}^+, (X, d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *um sistema dinâmico contínuo tal que* $M \subset \mathcal{A}$ *é um conjunto fechado invariante. Se supormos a existência de uma função* $V : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *tal que:*
(i) *existe* $\psi \in K\mathbb{R}$ *tal que*

$$V(x, t) \leq \psi(d(x, M))$$

para todo $(x, t) \in X \times \mathbb{R}^+$ *;*
(ii) *para algum* $r > 0$*, dado* $a \in U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$ *existe* $\phi \in K$ *definida em* $\mathbb{R}^+$ *de modo que*

$$\frac{d}{dt}V(p(t, a, \tau_0^p), t) \geq \phi\big(d(p(t, a, \tau_0^p), M)\big)$$

para todo $t \geq \tau_0^p$*;*
(iii) *para a sequência de abertos* $\{U_k = B(M; 1/k)\}_{k\geq 1}$*, com* $U_k \subset U$ *para todo* $k \geq 1$*, suponha que exista pelo menos um* $x_k \in U_k$ *de modo que* $V(x_k, \tau_0^p) > 0$*.*
Então (S, M) *é instável.*

Prova. Da suposição (iii) existe uma sequência $\{x_k\}_{k\geq 1}$ de pontos em X, sendo $x_k \in U_k$ e $V(x_k, \tau_0^p) > 0$, de modo que $d(x_k, M) > 0$ para todo k e para $k \to +\infty$ temos $d(x_k, M) \to 0$. Assim, considere $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0 = r$ e sejam $p_k(t) = p(t, x_k, \tau_0^p)$ e $v_k(t) = V(p_k(t), t)$. Sabemos da condição (ii) que $V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ é crescente para todo $t \geq \tau_0^p$ tal que $a \in U$, logo

$$\psi(d(p_k(t), M)) \geq V(p_k(t), t) = v_k(t) \geq v_k(\tau_0^p) =$$

$$V(p_k(\tau_0^p), \tau_0^p) = V(x_k, \tau_0^p) > 0$$

isto é

$$d(p_k(t), M) \geq \psi^{-1}(V(x_k, \tau_0^p)) = \alpha_k > 0.$$

Assim,

$$\psi(d(p_k(t), M)) \geq v_k(t) = v_k(\tau_0^p) + \int_{\tau_0^p}^{t} \frac{d}{ds}\, v_k(s)ds =$$

$$v_k(\tau_0^p) + \int_{\tau_0^p}^{t} \frac{d}{ds}\, V(p_k(s), s)ds \geq v_k(\tau_0^p) + \int_{\tau_0^p}^{t} \phi\big(d(p(s, x_k, \tau_0^p), M)\big)ds =$$

$$v_k(\tau_0^p) + \int_{\tau_0^p}^{t} \phi\big(d(p_k(s), M)\big)ds \geq v_k(\tau_0^p) + \int_{\tau_0^p}^{t} \phi(\alpha_k)ds =$$

$$v_k(\tau_0^p) + \phi(\alpha_k)(t - \tau_0^p) > \phi(\alpha_k)(t - \tau_0^p)$$

isto é,

$$d(p_k(t), M) > \psi^{-1}\big(\phi(\alpha_k)(t - \tau_0^p)\big)$$

e então para $t \to +\infty$ temos $d(p_k(t), M) \to +\infty$, ou seja, (S, M) é instável. □

Exemplo 2.5.4 Para o sistema $S_{(2.2)}$ considere a função $V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como $V(x, t) = V(x) = \|x\|$, logo, se $\psi \in K\mathbb{R}$ é definida como $\psi(s) = 2s$, temos que $V(x, t) \leq \psi(\|x\|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, para $x_0 \in U = B(0; r) \subset \mathcal{A}$, $x_0 \neq 0$, segue que

$$\frac{d}{dt} V(p(t, x_0, t_0)) = \frac{d}{dt}\|p(t, x_0, t_0)\| =$$

$$\frac{p(t, x_0, t_0)^T}{\|p(t, x_0, t_0)\|}\, \frac{d}{dt} p(t, x_0, t_0) = \frac{p(t, x_0, t_0)^T}{\|p(t, x_0, t_0)\|}\, Ap(t, x_0, t_0)\ .$$

Então, se A é simétrica e seus autovalores são todos positivos, considerando $\lambda_m = \min\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$, sendo λ_i os autovalores de A, segue que

$$y^T A y \geq \lambda_m \|y\|^2$$

para todo $y \in \mathbb{R}^2$. Logo

$$\frac{d}{dt}V(p(t,x_0,t_0)) = \frac{p(t,x_0,t_0)^T}{\|p(t,x_0,t_0)\|}\ Ap(t,x_0,t_0) \geq$$

$$\lambda_m\|p(t,x_0,t_0)\| = \phi(\|p(t,x_0,t_0)\|)$$

sendo $\phi \in K$ dada por $\phi(s) = \lambda_m s$. Além disso, para a sequência de abertos $\{U_k = B(0;1/k)\}_{k\geq 1}$ temos que $x_k = (1/(k+1), 0) \in U_k$ e $V(x_k, t_0) = 1/(k+1) > 0$, portanto, do Teorema 2.3 temos que $(S_{(2.2)}, \{0\})$ é instável.

Exemplo 2.5.5 Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c_1 x(t) + x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = -c_2 y(t) + x^2(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

sendo $c_1, c_2 > 0$. Como $f(x,y) = c_1x + xy$ e $g(x,y) = -c_2y + x^2$ são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, dado $\mathcal{A} = B(0;\delta_1) \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto de estados iniciais $a = (x_0, y_0)$, existe uma única solução contínua $(x(t,x_0,0), y(t,y_0,0))$ de (2.8) para todo $t \in [0, \omega_+(a))$ de modo que $(x(0,x_0,0), y(0,y_0,0)) = (x_0, y_0)$. Dessa forma, se $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ é um conjunto de instantes iniciais t_0 e $S_{(2.8)} = \{p(.,a,t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^2\}$ é o conjunto das trajetórias $p(t,a,t_0) = (x(t,x_0,t_0), y(t,y_0,t_0))$, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2, \mathcal{A}, S_{(2.8)}, \mathbb{R}_0^+\}$.

Temos que, se $a = (x_0, y_0) = (0,0)$ então $p(t,a,t_0) = (x(t,0,t_0), y(t,0,t_0)) = (0,0)$ para todo $t \geq t_0$, ou seja, $(S_{(2.8)}, \{0\})$ é invariante.

Considere a função $V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$V((x,y),t) = V(x,y) = x^2 - y^2\ .$$

Considerando $\psi \in K\mathbb{R}$ de modo que $\psi(s) = s^2$, temos $V(x) \leq \psi(\|x\|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Também, para $a \in U = B(0;r) \subset \mathcal{A}$ e $p(.,a,t_0) \in S_{(2.8)}$ temos

$$\frac{d}{dt}V(p(t,a,t_0)) = \frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = 2(c_1x^2(t) + c_2y^2(t)) \geq 2\min\{c_1,c_2\}\|x\|^2 = \phi(\|x\|)$$

sendo $\phi \in K$ tal que $\phi(s) = 2\min\{c_1,c_2\}(s)^2$. Além disso, considerando a sequência $\{U_k = B(0;1/k)\}_{k\geq 1}$ temos que $x_k = (1/(k+1), 0) \in U_k$ e $V(x_k, t_0) = (1/(k+1))^2 > 0$. Então, do Teorema 2.3 segue que $(S_{(2.8)}, \{0\})$ é instável.

Capítulo 3

Resultados para Sistemas Dinâmicos Descontínuos

3.1 Introdução

Prova-se em [8] que se um sistema dinâmico contínuo satisfaz as hipóteses dos Teoremas que determinam o Método Direto de Lyapunov, então as hipóteses do correspondente resultado da seção 3.2 para sistemas descontínuos também são satisfeitas, mostrando que os resultados para sistemas descontínuos são consistentes com os resultados clássicos para sistemas contínuos.

Tendo como referência [3], [4], [6], [9], [10] e [18], na seção 3.2 estabelecemos o Método Direto de Lyapunov para sistemas descontínuos.

Agora, utilizando [10] e [18] na seção 3.3 estabelecemos Teoremas de Recíproca para os Teoremas da seção 3.2 .

Finalmente, na seção 3.4 enunciamos e demonstramos um resultado que garante condições suficientes para a instabilidade de conjuntos invariantes, tendo como referência [3], [10] e [18] .

3.2 Método Direto de Lyapunov

Teorema 3.1 *Seja* $\{\mathbb{R}^+, (X,d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *um sistema dinâmico descontínuo e* $M \subset \mathcal{A}$ *um conjunto fechado. Suponha que exista uma função* $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *e funções* $\psi_1, \psi_2 \in K$ *definidas em* $[0, r]$ *tais que*

$$\psi_1(d(x,M)) \leq V(x,t) \leq \psi_2(d(x,M))$$

para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{R}^+$.
(a) Para todo $p(.,a,\tau_0^p) \in S$ tal que $a \in U = B(M;r) \subset \mathcal{A}$, seja $V(p(t,a,\tau_0^p),t)$ contínua em $t \geq \tau_0^p$ exceto em um conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$, sendo $E_p = \{\tau_0^p, \tau_1^p, ... : 0 \leq \tau_0^p < \tau_1^p < ...\}$ o conjunto ilimitado superiormente dos possíveis pontos de descontinuidade de $p(.,a,\tau_0^p)$. Além disso, se $a \in U$ seja $\{V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\}_{k\in\mathbb{N}}$ decrescente e suponha também que exista uma função crescente $h \in C[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+]$, com $h(0) = 0$, tal que para $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ vale

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq h(V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)).$$

Então (S,M) é invariante e uniformemente estável.
(b) Se, além do mais, em (a) existir uma função $\psi_3 \in K$ definida em $[0,r]$ tal que

$$DV(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \leq -\psi_3(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))$$

para $k \in \mathbb{N}$ quando $a \in U$, sendo

$$DV(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) := \frac{\left[V(p(\tau_{k+1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\right]}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p}$$

então (S,M) é uniformemente assintoticamente estável.

Prova.
(a) Provemos que (S,M) é invariante. Se $a \in M \subset U$ então $V(p(\tau_0^p,a,\tau_0^p),\tau_0^p) = 0$, uma vez que

$$V(p(\tau_0^p,a,\tau_0^p),\tau_0^p) = V(a,\tau_0^p) \leq \psi_2(d(a,M)) = \psi_2(0) = 0.$$

Logo $V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) = 0$ para todo $k \geq 0$, já que $\{V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\} \subset \mathbb{R}^+$ é decrescente. Dessa forma $\psi_1(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M)) \leq V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) = 0$ e então $d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M) = 0$, isto é, $p(\tau_k^p,a,\tau_0^p) \in M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, já que M é fechado.
Além disso $V(p(t,a,\tau_0^p),t) = 0$ para $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, já que

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq h(V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)) = h(0) = 0.$$

Então $\psi_1(d(p(t,a,\tau_0^p),M)) \leq V(p(t,a,\tau_0^p),t) = 0$, logo $d(p(t,a,\tau_0^p),M) = 0$ e portanto $p(t,a,\tau_0^p) \in M$ para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, pois M é fechado. Assim (S,M) é invariante.
Como h é contínua e $h(0) = 0$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $h(y) < \psi_1(\epsilon)$ quando $0 \leq y < \delta$. Suponha que $\delta < \psi_1(\epsilon)$, assim, para qualquer trajetória $p(.,a,\tau_0^p) \in S$, quando $d(a,M) < \psi_2^{-1}(\delta)$ e $a \in U$, segue que

$$V(p(\tau_0^p,a,\tau_0^p),\tau_0^p) = V(a,\tau_0^p) \leq \psi_2(d(a,M)) < \psi_2(\psi_2^{-1}(\delta)) = \delta$$

logo $V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) < \delta$ para todo k, já que $\{V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)\}$ é decrescente e então

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_1^{-1}(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)) < \psi_1^{-1}(\delta) < \epsilon \ .$$

Além disso, para qualquer $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ segue que

$$V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)) < \psi_1(\epsilon)$$

e então

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_1^{-1}(V(p(t, a, \tau_0^p), t)) < \psi_1^{-1}(\psi_1(\epsilon)) = \epsilon.$$

Assim (S, M) é uniformemente estável.
(b) Colocando $z_k^p = V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)$, com $a \in U$, obtemos das suposições do teorema que

$$-(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\psi_3(\psi_2^{-1}(z_k^p)) = -(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\psi_3(\psi_2^{-1}(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p))) \geq$$
$$-(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\psi_3(d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)) \geq$$
$$V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_0^p), \tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) = z_{k+1}^p - z_k^p.$$

Se denotarmos $\psi = \psi_3 \circ \psi_2^{-1}$, a última desigualdade se torna

$$z_{k+1}^p - z_k^p \leq -(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\psi(z_k^p).$$

Como $\{z_k^p\}$ é decrescente, para todo $n \leq k$ segue que

$$z_{n+1}^p - z_n^p \leq -\psi(z_n^p)(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p) \leq -\psi(z_k^p)(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p)$$

e então

$$z_{k+1}^p - z_0^p = (z_{k+1}^p - z_k^p) + (z_k^p - z_{k-1}^p) + ... + (z_1^p - z_0^p) \leq$$
$$-\psi(z_k^p)(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) - \psi(z_k^p)(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p) - ... - \psi(z_k^p)(\tau_1^p - \tau_0^p) =$$
$$-\psi(z_k^p)\big((\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) + (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p) + ... + (\tau_1^p - \tau_0^p)\big) =$$
$$-\psi(z_k^p)(\tau_{k+1}^p - \tau_0^p)$$

logo

$$\psi(z_k^p) \leq \frac{z_0^p - z_{k+1}^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_0^p} \leq \frac{z_0^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_0^p} \ . \tag{3.1}$$

Considere um $\delta > 0$ fixado. Dado $\epsilon > 0$ escolha um $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ tal que

$$\max\{\psi_1^{-1}(\psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau})), \psi_1^{-1}(h(\psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau})))\} < \epsilon.$$

Para qualquer $a \in U \subset \mathcal{A}$ tal que $d(a, M) < \delta$ e $\tau_0^p \in \mathbb{R}_0^+$, mostremos que $d(p(t, a, \tau_0^p), M) < \epsilon$ quando $t \geq \tau_0^p + \tau$.
Para todo $t \geq \tau_0^p + \tau$, t deve pertencer à algum intervalo $[\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ para algum k, logo $\tau_{k+1}^p - \tau_0^p > \tau$. De (3.1) segue que

$$\psi(z_k^p) \leq \frac{z_0^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_0^p} = \frac{V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p)}{\tau_{k+1}^p - \tau_0^p} = \frac{V(a, \tau_0^p)}{\tau_{k+1}^p - \tau_0^p} \leq \frac{V(a, \tau_0^p)}{\tau} \leq$$

$$\frac{\psi_2(d(a, M))}{\tau} < \frac{\psi_2(\delta)}{\tau}$$

o que implica

$$z_k^p = V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) < \psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}) \tag{3.2}$$

e

$$V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)) \leq h(\psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau})) \tag{3.3}$$

se $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$. Quando $t = \tau_k^p$, de (3.2) temos

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_1^{-1}(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)) < \psi_1^{-1}(\psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau})) < \epsilon$$

e quando $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, de (3.3) concluimos que

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_1^{-1}(V(p(t, a, \tau_0^p), t)) \leq \psi_1^{-1}(h(\psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}))) < \epsilon.$$

Isto prova que (S, M) é uniformemente assintoticamente estável. □

Teorema 3.2 *Seja $\{\mathbb{R}^+, (X, d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ um sistema dinâmico descontínuo e seja $M \subset \mathcal{A}$ fechado. Suponha que existe uma função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e constantes positivas c_1, c_2 e b tais que*

$$c_1(d(x, M))^b \leq V(x, t) \leq c_2(d(x, M))^b \tag{3.4}$$

para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{R}^+$.
(i) Para cada $p(., a, \tau_0^p) \in S$ tal que $a \in U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$, $V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ é contínua em $t \geq \tau_0^p$ exceto em um conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$, sendo $E_p = \{\tau_0^p, \tau_1^p, ... : 0 \leq \tau_0^p < \tau_1^p < ...\}$ o conjunto ilimitado superiormente dos possíveis pontos de descontinuidade de $p(., a, \tau_0^p)$. Também, suponha exista uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$, com $h(0) = 0$, tal que

$$V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)) \tag{3.5}$$

para $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, e para alguma constante positiva q, h satisfaz

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{h(r)}{r^q} = 0.$$

(ii) Além disso, existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) \leq -c_3\big[d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)\big]^b$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ quando $a \in U$, sendo $DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)$ definido no Teorema anterior. Então (S, M) é exponencialmente estável.

Prova. Dado $a \in M \subset U$, de (ii) temos $DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) \leq 0$, logo $\{V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)\}$ é decrescente, assim, do item (a) do Teorema anterior segue que (S, M) é invariante e uniformemente estável.

Para $a \in U$ seja $z_k^p = V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)$ e $z^p(t) = V(p(t, a, \tau_0^p), t)$. De (3.4) temos

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \geq \big(z_k^p/c_2\big)^{1/b}$$

logo, de (ii) segue que

$$\frac{z_{k+1}^p - z_k^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} \leq -c_3\big[d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)\big]^b \leq -\frac{c_3}{c_2} z_k^p$$

assim, se $\alpha = c_3/c_2$ obtemos

$$z_{k+1}^p \leq \big[1 - \alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\big] z_k^p. \tag{3.6}$$

Se $1 - \alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) \leq 0$ é válido para algum k, segue que $z_{k+1}^p \leq 0$ e então $z_{k+1}^p = 0$, pois $V(U \times \mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Além disso, de (ii) temos que $\{z_k^p\}$ é decrescente e então $z_n = V(p(\tau_n^p, a, \tau_0^p), \tau_n^p) = 0$ para todo $n > k$. De (3.4) temos

$$d(p(\tau_n^p, a, \tau_0^p), M) \leq \big(\frac{z_n}{c_1}\big)^{1/b} = 0$$

logo $d(p(\tau_n^p, a, \tau_0^p), M) = 0$. Utilizando agora (3.5) segue que $z(t) = V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq h(z_n) = 0$, isto é, $z(t) = 0$ para todo $t \in (\tau_n^p, \tau_{n+1}^p)$, então, usando novamente (3.4) obtemos

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) \leq \big(\frac{z(t)}{c_1}\big)^{1/b} = 0.$$

Dessa forma, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$, logo, para $d(a, M) < \delta$ e $a \in U$, fixando arbitrariamente um $\alpha_1 > 0$ temos

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) = 0 < \epsilon e^{-\alpha_1(t - \tau_0^p)}$$

para todo $t \geq \tau_{k+1}^p$. Se $t = \tau_0^p$, para $\epsilon > 0$ dado seja $\delta = \epsilon$ tal que $d(a, M) < \delta$, logo

$$d(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), M) = d(a, M) < \epsilon = \epsilon e^{-\alpha_1(\tau_0^p - \tau_0^p)}.$$

Se $t \in (\tau_0^p, \tau_{k+1}^p)$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \epsilon$, então, se $d(p(t, a, \tau_0^p), M) = 0$ temos

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) = 0 < \epsilon e^{-\alpha_1(t-\tau_0^p)}.$$

No entanto, se $d(p(t, a, \tau_0^p), M) \neq 0$, seja $\epsilon > 0$ tal que $d(p(t, a, \tau_0^p), M)/\epsilon < 1$ e tome um $\alpha_2 > 0$ de modo que

$$\alpha_2 < \frac{-1}{t-\tau_0^p} \ \ln \left\{ \frac{d(p(t, a, \tau_0^p), M)}{\epsilon} \right\}$$

e então

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) < \epsilon e^{-\alpha_2(t-\tau_0^p)}$$

quando $d(a, M) < \delta = \epsilon$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$ e então se $\beta = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ segue que

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) < \epsilon e^{-\beta(t-\tau_0^p)}$$

quando $d(a, M) < \delta$ e $t \geq \tau_0^p$, isto é, (S, M) é exponencialmente estável.
Suponha agora que $1 - \alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) > 0$ para todo $k \geq 0$. Como $e^{-\alpha x} \geq 1 - \alpha x$, de (3.6) temos

$$z_{k+1}^p \leq \left[1 - \alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\right] z_k^p \leq \left[1 - \alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\right]\left[1 - \alpha(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)\right] z_{k-1}^p \leq ..... \leq$$

$$\left[1 - \alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)\right]\left[1 - \alpha(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)\right]...\left[1 - \alpha(\tau_1^p - \tau_0^p)\right] z_0^p \leq$$

$$e^{-\alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} e^{-\alpha(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)} ... e^{-\alpha(\tau_1^p - \tau_0^p)} z_0^p = e^{-\alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_0^p)} z_0^p$$

ou seja, $z_{k+1}^p \leq e^{-\alpha(\tau_{k+1}^p - \tau_0^p)} z_0^p$ para todo $k \geq 0$. Então, para todo $k \geq 1$ temos

$$z_k^p \leq e^{-\alpha(\tau_k^p - \tau_0^p)} z_0^p \ . \tag{3.7}$$

Utilizando (3.4), para $k \geq 1$ obtemos

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \leq \left(\frac{z_k^p}{c_1}\right)^{1/b} \leq \left(\frac{z_0^p}{c_1}\right)^{1/b} e^{-\frac{\alpha}{b}(\tau_k^p - \tau_0^p)} \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/b} d(a, M) e^{-\frac{\alpha}{b}(\tau_k^p - \tau_0^p)}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 = \epsilon\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/b}$ tal que $d(a, M) < \delta_1$ e $a \in U$, logo

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/b} d(a, M) e^{-\frac{\alpha}{b}(\tau_k^p - \tau_0^p)} < \epsilon e^{-\frac{\alpha}{b}(\tau_k^p - \tau_0^p)} = \epsilon e^{-\beta_1(\tau_k^p - \tau_0^p)}$$

para todo $k \geq 1$. Se $\tau_k^p = \tau_0^p$, para $\epsilon > 0$ dado tome $\delta_2 = \epsilon$ de modo que $d(a, M) < \delta_2$, então

$$d(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), M) = d(a, M) < \delta_2 = \epsilon = \epsilon e^{-\beta_1(\tau_0^p - \tau_0^p)}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e então

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) < \epsilon e^{-\beta_1(\tau_k^p - \tau_0^p)}$$

quando $d(a,M) < \delta_3$ e $k \geq 0$.
Temos que $h(s)/s^q$ é contínua em $(0,+\infty)$, pois é um quociente de funções contínuas, além disso $\lim_{s\to 0^+} \frac{h(s)}{s^q} = 0$. Considerando um $\delta > 0$ fixado tal que $d(a,M) < \delta$ e $a \notin M$, seja

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{ c_2\big(d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)\big)^b \Big\} = \theta > 0.$$

Dessa forma, se

$$\Psi_{d(a,M)} = \sup_{s\in\left(0,\theta\right]} \frac{h(s)}{s^q}$$

então $h(s) \leq s^q \Psi_{d(a,M)}$ para todo $s \in \big[0,\theta\big]$. Através de (3.4) sabemos que

$$z_k^p \in \Big[0, c_2\big(d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)\big)^b\Big] \subset \big[0,\theta\big]$$

assim, para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ de (3.5) e de (3.7) temos que

$$z^p(t) \leq h(z_k^p) \leq (z_k^p)^q \Psi_{d(a,M)} \leq \Psi_{d(a,M)} e^{-\alpha q(\tau_k^p - \tau_0^p)} (z_0^p)^q =$$

$$\Psi_{d(a,M)} e^{\alpha q(t-\tau_k^p)} e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)} (z_0^p)^q \leq \Psi_{d(a,M)} e^{\alpha q(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)} (z_0^p)^q \leq$$

$$\Psi_{d(a,M)} e^{\alpha q(1/\alpha)} e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)} (z_0^p)^q = \Psi_{d(a,M)} e^q e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)} (z_0^p)^q.$$

Assim, se $\Psi_{d(a,M)} = 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_4 = \epsilon > 0$ tal que $d(a,M) < \delta_4$ e $a \in U$, e então

$$z^p(t) \leq \Psi_{d(a,M)} e^q e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)} (z_0^p)^q = 0$$

para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, logo $z^p(t) = 0$ e portanto

$$d(p(t,a,\tau_0^p), M) \leq \left\{ \frac{z^p(t)}{c_1} \right\}^{1/b} = 0 < \epsilon e^{-\beta_1(t-\tau_0^p)}$$

para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$. Dessa forma, dado $\epsilon > 0$ se tomarmos $\delta = \min\{\delta_3, \delta_4\}$ segue que

$$d(p(t,a,\tau_0^p), M) < \epsilon e^{-\beta_1(t-\tau_0^p)}$$

para todo $t \geq \tau_0^p$ quando $d(a,M) < \delta$ e então (S,M) seria exponencialmente estável.
Por outro lado, se $\Psi_{d(a,M)} \neq 0$ dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_5 = \epsilon^{1/q} \left\{ \left\{ \frac{c_1}{e^q c_2^q \Psi_{d(a,M)}} \right\}^{1/b} \right\}^{1/q}$ tal que $d(a,M) < \delta_5$ e $a \in U$, então

$$d(p(t,a,\tau_0^p), M) \leq \left\{ \frac{z^p(t)}{c_1} \right\}^{1/b} \leq \left\{ \frac{\Psi_{d(a,M)} e^q e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)} (z_0^p)^q}{c_1} \right\}^{1/b} \leq$$

$$\left\{\frac{\Psi_{d(a,M)}e^q e^{-\alpha q(t-\tau_0^p)}(c_2)^q\big(d(a,M)\big)^{bq}}{c_1}\right\}^{1/b} < \epsilon e^{-\alpha\frac{q}{b}(t-\tau_0^p)} = \epsilon e^{-\beta_2(t-\tau_0^p)}$$

para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$. Portando, dado $\epsilon > 0$ tomando $\delta = \min\{\delta_3, \delta_5\}$ e $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ segue que

$$d(p(t,a,\tau_0^p), M) < \epsilon e^{-\beta(t-\tau_0^p)}$$

para todo $t \geq \tau_0^p$ quando $d(a,M) < \delta$, isto é, (S,M) é exponencialmente estável. □

3.3 Teoremas de Recíproca

Em todos os Teoremas de Recíproca desta seção faremos as seguintes suposições para o sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ considerado:
(i) $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+$;
(ii) para todo $(a, t_0) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}^+$ existe um único $p(., a, t_0) \in S$;
(iii) cada $p(., a, \tau_0^p) \in S$ é contínua em $[\tau_0^p, +\infty)$, exceto possivelmente em um conjunto $E_p = \{\tau_0^p, \tau_1^p, ... : \tau_0^p < \tau_1^p < ...\}$ ilimitado superiormente, sendo $l = \inf_{k\in\mathbb{N}}\{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p\} > 0$ e $L = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p\} < \infty$.

3.3.1 Estabilidade uniforme

Teorema 3.3 *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ um sistema dinâmico descontínuo e $M \subset \mathcal{A}$ um conjunto invariante fechado, sendo $\mathcal{A} = B(M; r)$. Seja (S, M) uniformemente estável. Então, existem abertos A_1 e X_1 de M tal que $A_1 \subset X_1 \subset \mathcal{A}$ e uma aplicação $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz:*
(a)existem $\psi_1, \psi_2 \in K$ tal que

$$\psi_1(d(x,M)) \leq V(x,t) \leq \psi_2(d(x,M))$$

para todo $(x,t) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$.
(b) para cada $p(., a, \tau_0^p) \in S$, com $a \in A_1$, $V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ é decrescente para $t \geq \tau_0^p$.

Prova. Como (S,M) é uniformemente estável, do Lema 2.1 existe $\phi \in K$ definida em $[0, r_0]$, $r_0 > 0$, tal que

$$d(p(t,a,\tau_0^p), M) \leq \phi(d(a,M)) \tag{3.8}$$

para todo $t \geq \tau_0^p$ quando $d(a,M) < r_0$.
Sendo $\mathcal{A} = B(M; r)$ segue que $X_1 = \{x \in \mathcal{A} : d(x,M) < r_0\}$ também é um aberto de M.

Assim, definimos $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ como

$$V(x,t) = \sup_{t' \geq t}\{d(p(t',x,t),M)\} \; .$$

Para todo $(x,t) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$ temos

$$V(x,t) \geq d(p(t,x,t),M) = d(x,M)$$

logo, tomando $\psi_1 \in K$ definida em $\mathbb{R}^+$ tal que $\psi_1(s) = s$ temos $V(x,t) \geq \psi_1(d(x,M))$. Além disso, de (3.8) segue que

$$V(x,t) = \sup_{t' \geq t}\{d(p(t',x,t),M)\} \leq \sup_{t' \geq t}\{\phi(d(x,M))\} = \phi(d(x,M))$$

então, tomando $\psi_2 \in K$ definida como

$$\begin{cases} \psi_2(t) = \phi(t), \;\; t \in [0, r_0] \\ \psi_2(t) = \frac{\psi_2(r_0)}{r_0}\; t, \;\; t \geq r_0 \end{cases}$$

o item (a) fica demonstrado.
Por outro lado, seja $A_1 = \{a \in X_1 : d(a,M) < \phi^{-1}(r_0)\}$ se $\phi^{-1}(r_0) < r_0$ e $A_1 = X_1$ se $r_0 \geq \phi(r_0)$.
Dado $a \in A_1$, se $\phi^{-1}(r_0) < r_0$ temos que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \phi(d(a,M)) < r_0$$

e se $r_0 \geq \phi(r_0)$ segue que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \phi(d(a,M)) < \phi(r_0) \leq r_0$$

logo, se $a \in A_1$ temos que $p(t,a,\tau_0^p) \in X_1$ para todo $t \geq \tau_0^p$. Assim, se $\tau_0^p \in \mathbb{R}^+$ e $a \in A_1$, para qualquer $t_2, t_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $t_2 \geq t_1 \geq \tau_0^p$ segue que

$$p(t', p(t_2,a,\tau_0^p), t_2) = p(t', p(t_1,a,\tau_0^p), t_1)$$

para todo $t' \geq t_2$. Então

$$V(p(t_2,a,\tau_0^p),t_2) = \sup_{t' \geq t_2}\{d(p(t',p(t_2,a,\tau_0^p),t_2),M)\} = \sup_{t' \geq t_2}\{d(p(t',p(t_1,a,\tau_0^p),t_1),M)\} \leq$$

$$\sup_{t' \geq t_1}\{d(p(t',p(t_1,a,\tau_0^p),t_1),M)\} = V(p(t_1,a,\tau_0^p),t_1)$$

e portanto $V(p(t,a,\tau_0^p),t)$ é decrescente para todo $a \in A_1$. $\square$

3.3.2 Estabilidade assintótica

Teorema 3.4 *Seja* $\{\mathbb{R}^+, (X,d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}^+\}$ *um sistema dinâmico descontínuo e seja* $M \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante fechado, sendo* $\mathcal{A} = B(M;r)$. *Suponha que* (S,M) *seja uniformemente assintoticamente estável. Então, existem abertos* A_1 *e* X_1 *de* M *tal que* $A_1 \subset X_1 \subset \mathcal{A}$, *e uma aplicação* $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *que satisfaz as seguintes condições:*
(a) existem $\psi_1, \psi_2 \in K$ *tal que*

$$\psi_1(d(x,M)) \leq V(x,t) \leq \psi_2(d(x,M))$$

para todo $(x,t) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$.
(b) existe $\psi_3 \in K$ *tal que para cada* $p(.,a,\tau_0^p) \in S$ *é válido*

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) \leq -\psi_3(d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M))$$

com $a \in A_1$ *e* $k \in \mathbb{N}$.
(c) existe uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$, *com* $h(0) = 0$, *tal que*

$$V(p(t,a,\tau_0^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p))$$

para cada $p(.,a,\tau_0^p) \in S$, *quando* $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, $a \in A_1$ *e* $\tau_0^p \in \mathbb{R}^+$.

Prova. Como (S,M) é uniformemente assintoticamente estável, (S,M) é uniformemente estável, logo, do Teorema 3.3 existem abertos $\tilde{A}_1$ e $\tilde{X}_1$ de M tais que $\tilde{A}_1 \subset \tilde{X}_1 \subset \mathcal{A}$ e uma aplicação $\tilde{V} : \tilde{X}_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes condições:
(i) existem $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \in K$ tal que

$$\tilde{\psi}_1(d(x,M)) \leq \tilde{V}(x,t) \leq \tilde{\psi}_2(d(x,M))$$

para todo $(x,t) \in \tilde{X}_1 \times \mathbb{R}^+$.
(ii) para cada $p(.,a,\tau_0^p) \in S$, com $a \in \tilde{A}_1$, $\tilde{V}(p(t,a,\tau_0^p),t)$ é decrescente para $t \geq \tau_0^p$.
De (i) e (ii) temos

$$\tilde{\psi}_1(d(p(t,a,\tau_0^p),M)) \leq \tilde{V}(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq \tilde{V}(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \leq \tilde{\psi}_2(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))$$

o que implica em

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \tilde{\psi}_1^{-1}\big[\tilde{\psi}_2(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))\big] \tag{3.9}$$

para todo $t \in [\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ e $a \in \tilde{A}_1$.
Do Lema 2.1, existe uma função $\psi \in K$ definida em $[0,h_0]$, para algum $h_0 > 0$, e uma função $\sigma \in L$ tal que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \psi(d(a,M))\sigma(t-\tau_0^p) \tag{3.10}$$

para todo $p(.,a,\tau_0^p) \in S$ e $t \geq \tau_0^p$, quando $d(a,M) < h_0$.
Sendo $\tilde{A}_1$ um aberto de M, segue que $X_1 = \{x \in \tilde{A}_1 : d(x,M) < h_0\}$ também é um aberto de M. Seja também $A_1 = \{a \in X_1 : d(a,M) < \psi^{-1}(h_0)\}$ se $\psi^{-1}(h_0) < h_0$ e $A_1 = X_1$ se $\psi(h_0) \leq h_0$.
Como (S,M) é uniformemente estável, do Lema 2.1 existe $\phi \in K$ definida em $[0,r_0]$, $r_0 > 0$, tal que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \phi(d(a,M))$$

para todo $t \geq \tau_0^p$ quando $d(a,M) < r_0$ e então os abertos $\tilde{A}_1$ e $\tilde{X}_1$ são definidos como $\tilde{X}_1 = \{x \in \mathcal{A} : d(x,M) < r_0\}$ e $\tilde{A}_1 = \{a \in \tilde{X}_1 : d(a,M) < \phi^{-1}(r_0)\}$ se $\phi^{-1}(r_0) < r_0$ e $\tilde{A}_1 = \tilde{X}_1$ se $\phi(r_0) \leq r_0$.
Dessa forma, considerando h_0 tal que $h_0 \leq \min\{\phi^{-1}(r_0),(r_0)\}$, dado $a \in A_1$, se $\psi^{-1}(h_0) < h_0$ temos que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \psi(d(a,M))\sigma(t-\tau_0^p) < h_0\sigma(t-\tau_0^p) \leq h_0\sigma(0)$$

e se $\psi(h_0) \leq h_0$ segue que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \psi(d(a,M))\sigma(t-\tau_0^p) <$$

$$\psi(h_0)\sigma(t-\tau_0^p) \leq h_0\sigma(t-\tau_0^p) \leq h_0\sigma(0).$$

Logo, tomando σ de modo que $\sigma(0) \leq 1$, se $a \in A_1$ temos que $p(t,a,\tau_0^p) \in X_1$ para todo $t \geq \tau_0^p$.
Então, dado $a \in A_1$, para $\tau_0^p \in \mathbb{R}^+$ e qualquer $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $t \geq \tau_0^p$ segue que

$$p(t',p(t,a,\tau_0^p),t) = p(t',a,\tau_0^p)$$

para todo $t' \geq t$.
Para cada $(x,\tau_0^p) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$ defina $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ como

$$V(x,\tau_0^p) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(d(p(\tau_n^p,x,\tau_0^p),M)) \tag{3.11}$$

sendo que $u \in K$ será especificada no decorrer da demonstração.
Temos que $V(x,\tau_0^p) \geq u(d(p(\tau_0^p,x,\tau_0^p),M)) = u(d(x,M))$, logo, se definirmos $\psi_1 = u$ temos $V(x,\tau_0^p) \geq \psi_1(d(x,M))$ para todo $(x,\tau_0^p) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$.
Para $a \in A_1$ seja $p(.,a,\tau_0^p) \in S$ e seu correspondente conjunto $\{\tau_1^p,\tau_2^p,...\}$ de descontinuidades. Denotando $\tilde{x} = p(\tau_k^p,a,\tau_0^p) \in X_1$ e $\tilde{\tau}_0^p = \tau_k^p$ para algum $k \geq 1$, existe uma única

trajetória $\tilde{p}(.,\tilde{x},\tilde{\tau}_0^p) \in S$ contínua em $t \geq \tilde{\tau}_0^p$ exceto possivelmente em $\{\tilde{\tau}_1^p, \tilde{\tau}_2^p, ...\}$. Da propriedade de unicidade segue $\tilde{\tau}_n^p = \tau_{k+n}^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e então da definição da função V temos

$$V(\tilde{x},\tilde{\tau}_0^p) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(d(\tilde{p}(\tilde{\tau}_n^p,\tilde{x},\tilde{\tau}_0^p),M)) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(d(\tilde{p}(\tilde{\tau}_n^p, p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tilde{\tau}_0^p),M)) =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(d(\tilde{p}(\tau_{k+n}^p, p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p),M)) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(d(p(\tau_{k+n}^p,a,\tau_0^p),M)) =$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} u(d(p(\tau_n^p,a,\tau_0^p),M))$$

isto é

$$V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) = \sum_{n=k}^{+\infty} u(d(p(\tau_n^p,a,\tau_0^p),M)) \ .$$

Logo, para $a \in A_1 \subset X_1$ tem-se

$$DV(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) = \big[V(p(\tau_{k+1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\big]/(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) =$$

$$\big[\sum_{n=k+1}^{+\infty} u(d(p(\tau_n^p,a,\tau_0^p),M)) - \sum_{n=k}^{+\infty} u(d(p(\tau_n^p,a,\tau_0^p),M))\big]/(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) =$$

$$-u(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))/(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)$$

para $k = 0,1,2,...$. Como $\tau_{k+1}^p - \tau_k^p \leq L$, segue que

$$DV(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \leq -u(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))/L = -\psi_3(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))$$

sendo $\psi_3 \in K$ definida como $\psi_3(s) = u(s)/L$, $s \in [0,h_0]$.
A seguir mostramos como escolher $u \in K$ de modo que a série em (3.11) seja convergente. De (3.10), para qualquer $(x,\tau_0^p) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$ tem-se

$$u(d(p(t,x,\tau_0^p),M)) \leq u(\psi(d(x,M))\sigma(t-\tau_0^p)) \leq$$

$$[u(\psi(d(x,M))\sigma(0))]^{1/2}[u(\psi(h_0)\sigma(t-\tau_0^p))]^{1/2}. \tag{3.12}$$

Definindo $\beta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ como $\beta(r) = \psi(h_0)\sigma(r)$ segue que $\beta \in L$. Logo, do Lema 1.2 existe $\alpha \in K$ definida em $[0,\beta(0)]$ de modo que $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha(\beta(\tau_{i+1}^p - \tau_0^p)) < +\infty$.
Se definirmos $u \in K$ como

$$\begin{cases} u(t) = [\alpha(t)]^2, \ t \in [0,\beta(0)] \\ u(t) = \frac{u(\beta(0))}{\beta(0)}\ t, \ t \geq \beta(0) \end{cases}$$

segue que

$$[u(\psi(h_0)\sigma(t-\tau_0^p))]^{1/2} = \alpha(\psi(h_0)\sigma(t-\tau_0^p)) = \alpha(\beta(t-\tau_0^p)). \tag{3.13}$$

Então, de (3.11)-(3.13) e do Lema 1.2 conluimos que

$$V(x,\tau_0^p) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(d(p(\tau_i^p, x, \tau_0^p), M)) \leq$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}[u(\psi(d(x,M))\sigma(0))]^{1/2}[u(\psi(h_0)\sigma(\tau_i^p-\tau_0^p))]^{1/2} =$$

$$[u(\psi(d(x,M))\sigma(0))]^{1/2}\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha(\beta(\tau_i^p-\tau_0^p)) \leq [u(\psi(d(x,M))\sigma(0))]^{1/2}[1+1/(1-e^{-l})].$$

Definindo $\psi_2 \in K$ como

$$\begin{cases} \psi_2(t) = [u(\psi(t)\sigma(0))]^{1/2}[1+1/(1-e^{-l})],\ t\in[0,h_0] \\ \psi_2(t) = \frac{\psi_2(h_0)}{h_0}\ t,\ t\geq h_0 \end{cases}$$

temos $V(x,\tau_0^p) \leq \psi_2(d(x,M))$ e provamos as partes (a) e (b) do Teorema.
Provemos agora a parte (c). Dado $a \in A_1 \subset \tilde{A}_1$ a relação (3.9) é satisfeita, então para $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ temos

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq \psi_2(d(p(t,a,\tau_0^p),M)) \leq (\psi_2\circ\tilde{\psi}_1^{-1}\circ\tilde{\psi}_2)(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M)). \tag{3.14}$$

Por outro lado, como $V(x,\tau_0^p) \geq \psi_1(d(x,M))$ para todo $(x,\tau_0^p) \in X_1\times\mathbb{R}^+$, segue que

$$V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \geq \psi_1(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))$$

o que implica em

$$(\psi_1^{-1}\circ V)(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \geq d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M). \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15) obtemos

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq (\psi_2\circ\tilde{\psi}_1^{-1}\circ\tilde{\psi}_2\circ\psi_1^{-1})(V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p))$$

para todo $t \in (\tau_k^p,\tau_{k+1}^p)$, $k\in\mathbb{N}$ e $(a,\tau_0^p)\in A_1\times\mathbb{R}^+$. Se definirmos $h\in C[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+]$ como $h(s) = (\psi_2\circ\tilde{\psi}_1^{-1}\circ\tilde{\psi}_2\circ\psi_1^{-1})(s)$ temos que $h(0)=0$ e

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq h(V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p))$$

e concluimos a demonstração. □

3.3.3 Estabilidade exponencial

Teorema 3.5 *Seja* $\{\mathbb{R}^+, (X,d), \mathcal{A}, S, \mathbb{R}_0^+\}$ *um sistema dinâmico descontínuo e seja* $M \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante fechado, sendo* $\mathcal{A} = B(M;r)$*. Suponha que* (S, M) *seja exponencialmente estável. Então, existem abertos* A_1 *e* X_1 *de* M *tal que* $A_1 \subset X_1 \subset \mathcal{A}$*, e uma aplicação* $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *que satisfaz as seguintes condições:*
(a) existem $\psi_1, \psi_2 \in K$ *tal que*

$$\psi_1(d(x,M)) \leq V(x,t) \leq \psi_2(d(x,M))$$

para todo $(x,t) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$*;*
(b) existe uma constante $c > 0$ *de modo que*

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) \leq -c.d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)$$

para $k \in \mathbb{N}$ *e* $a \in A_1$ *;*
(c) existe uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$*, com* $h(0) = 0$ *e* $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{h(\theta)}{\theta^q} = 0$ *para alguma constante* $q > 0$*, satisfazendo*

$$V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p))$$

para $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$*,* $a \in A_1$ *e* $\tau_0^p \in \mathbb{R}^+$*.*

Prova. Como (S, M) é exponencialmente estável, do Lema 2.1 existe uma função $\psi_2 \in K$ definida em $[0, r_0]$ e uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_2(d(a,M))e^{-\alpha(t - \tau_0^p)} \tag{3.16}$$

para todo $t \geq \tau_0^p$, quando $d(a, M) < r_0$. Seja $X_1 = \{x \in \mathcal{A} : d(x,M) < r_0\}$ e seja $A_1 = \{a \in X_1 : d(a,M) < \psi_2^{-1}(r_0)\}$ se $\psi_2^{-1}(r_0) < r_0$ e $A_1 = X_1$ se $\psi_2(r_0) \leq r_0$.
Para $(x,t) \in X_1 \times \mathbb{R}^+$, defina

$$V(x,t) = \sup_{t' \geq t}\{d(p(t', x, t), M).e^{\alpha(t'-t)}\}.$$

Assim, temos que $V(x,t) \geq d(p(t,x,t), M) = d(x, M)$, logo, tomando $\psi_1 \in K$ definida em $[0, r_0]$ tal que $\psi_1(s) = s$ temos $V(x,t) \geq \psi_1(d(x,M))$. Além disso, de (3.16) segue que

$$V(x,t) = \sup_{t' \geq t}\{d(p(t', x, t), M).e^{\alpha(t'-t)}\} \leq$$

$$\sup_{t' \geq t}\{\psi_2(d(x,M)).e^{-\alpha(t'-t)}.e^{\alpha(t'-t)}\} = \psi_2(d(x,M))$$

e o item (a) fica demonstrado.
Dado $a \in A_1$, se $\psi_2^{-1}(r_0) < r_0$ temos que

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \psi_2(d(a,M))e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} < r_0 e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \leq r_0$$

e se $\psi_2(r_0) \leq r_0$ obtemos

$$d(p(t,a,\tau_0^p),M) \leq \psi_2(d(a,M))e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} < \psi_2(r_0)e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \leq r_0 e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \leq r_0.$$

Logo, se $a \in A_1$ temos que $p(t,a,\tau_0^p) \in X_1$ para todo $t \geq \tau_0^p$. Dessa forma, se $a \in A_1$ e $t \geq \tau_0^p \in \mathbb{R}^+$, temos

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) = \sup_{t' \geq t}\{d(p(t',p(t,a,\tau_0^p),t),M).e^{\alpha(t'-t)}\} =$$

$$\sup_{t' \geq t}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M).e^{\alpha(t'-t)}\} \tag{3.17}$$

e então

$$V(p(\tau_{k+1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k+1}^p) = \sup_{t' \geq \tau_{k+1}^p}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_{k+1}^p)}\} =$$

$$\sup_{t' \geq \tau_{k+1}^p}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}e^{-\alpha(\tau_{k+1}^p-\tau_k^p)}\} =$$

$$e^{-\alpha(\tau_{k+1}^p-\tau_k^p)}\sup_{t' \geq \tau_{k+1}^p}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}\} \leq e^{-\alpha l}\sup_{t' \geq \tau_{k+1}^p}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}\} \leq$$

$$e^{-\alpha l}\sup_{t' \geq \tau_k^p}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}\} = e^{-\alpha l}V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p).$$

Colocando $c = (1/L)(1-e^{-\alpha l})$, obtemos

$$DV(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) = \frac{V(p(\tau_{k+1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)}{\tau_{k+1}^p-\tau_k^p} \leq$$

$$-\frac{1}{\tau_{k+1}^p-\tau_k^p}\big(1-e^{-\alpha l}\big)V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \leq$$

$$-\frac{1}{L}\big(1-e^{-\alpha l}\big)V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \leq -\frac{1}{L}\big(1-e^{-\alpha l}\big)d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M) =$$
$$-c.d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M)$$

e provamos o item (b). De (3.17), para cada $a \in A_1$, $\tau_0^p \in \mathbb{R}^+$ e $t \in (\tau_k^p,\tau_{k+1}^p)$ temos

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) = \sup_{t' \geq t}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-t)}\} =$$

$$\sup_{t' \geq t}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}e^{-\alpha(t-\tau_k^p)}\} \leq$$

$$\sup_{t'\geq t}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}\} \leq \sup_{t'\geq \tau_k^p}\{d(p(t',a,\tau_0^p),M)e^{\alpha(t'-\tau_k^p)}\} = V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p).$$

Assim, se $h \in C[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+]$ é tal que $h(r) = r$ e $q = \frac{1}{2}$, temos que $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{h(\theta)}{\theta^q} = \frac{\theta}{\theta^{1/2}} = 0$ e

$$V(p(t,a,\tau_0^p),t) \leq V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) = h(V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p))$$

e então o item (c) também é demonstrado. $\square$

3.4 Instabilidade

Teorema 3.6 *Seja $\{\mathbb{R}^+,(X,d),\mathcal{A},S,\mathbb{R}_0^+\}$ um sistema dinâmico descontínuo e $M\subset\mathcal{A}$ um conjunto fechado invariante. Suponha que existe uma função $V : X\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ e uma função $\phi\in K\mathbb{R}$ tal que*

$$\phi(d(x,M)) \geq V(x,t)$$

para todo $x\in X$ e $t\in\mathbb{R}^+$.
(a) Suponha que para todo $p(.,a,\tau_0^p)\in S$, $V(p(t,a,\tau_0^p),t)$ é contínua em $t\in[\tau_0^p,+\infty)$ exceto em um conjunto de descontinuidades $E_{V(p)}\subset E_p$, sendo $E_p=\{\tau_0^p,\tau_1^p,...:0\leq\tau_0^p<\tau_1^p<...\}$ o conjunto ilimitado superiormente dos possíveis pontos de descontinuidade de $p(.,a,\tau_0^p)$. Também, suponha que $\inf_{k\in\mathbb{N}}\{\tau_{k+1}^p-\tau_k^p\}=\beta>0$ e que exista uma função $\psi\in K$ definida em $\mathbb{R}^+$ tal que

$$DV(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p) \geq \psi(d(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),M))$$

para todo $k\in\mathbb{N}$ e $a\in U=B(M;r)$.
(b) Para a sequência de abertos $\{U_k=B(M;1/k)\}_{k\geq 1}$, com $U_k\subset U$ para todo $k\geq 1$, suponha que exista pelo menos um $x_k\in U_k$ de modo que $V(x_k,\tau_0^p)>0$.
Então (S,M) é instável.

Prova. Para cada $\delta>0$ e $\tau_0^p\in\mathbb{R}_0^+$ seja $k\geq 1$ tal que $\delta\geq 1/k$ e $1/k=\max\{1/n:\delta\geq 1/n\}$, logo, da suposição (b) existe $a=a_\delta\in U_k$ de modo que $d(a,M)<\delta$ e $V(a,\tau_0^p)>0$. Também, sendo $\psi(s)\geq 0$, $s\in\mathbb{R}^+$, de (a) temos

$$\frac{\left[V(p(\tau_{k+1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k+1}^p)-V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\right]}{\tau_{k+1}^p-\tau_k^p}\geq 0$$

logo

$$V(p(\tau_{k+1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k+1}^p)\geq V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)$$

isto é, $\{V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente.
Além disso, para $k\geq 1$ segue que

$$V(p(\tau_k^p,a,\tau_0^p),\tau_k^p)\geq V(p(\tau_{k-1}^p,a,\tau_0^p),\tau_{k-1}^p)+(\tau_k^p-\tau_{k-1}^p)\psi(d(p(\tau_{k-1}^p,a,\tau_0^p),M))\geq$$

$$V(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_0^p), \tau_{k-1}^p) + (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)\psi(\phi^{-1}(V(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_0^p), \tau_{k-1}^p))) \geq$$

$$V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) + (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)\psi(\phi^{-1}(V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p))) =$$

$$V(a, \tau_0^p) + (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)\psi(\phi^{-1}(V(a, \tau_0^p))) > (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)\psi(\phi^{-1}(V(a, \tau_0^p))) \geq \beta\psi(\phi^{-1}(V(a, \tau_0^p))).$$

Dessa forma, sendo

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \geq \phi^{-1}(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)) \geq \phi^{-1}(\beta\psi(\phi^{-1}(V(a, \tau_0^p)))) > 0$$

tome $\epsilon_0 = \phi^{-1}(\beta\psi(\phi^{-1}(V(a, \tau_0^p))))$ e então para $\tau_k^p \in \mathbb{R}^+_{a,\tau_0^p}$ temos $d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M) \geq \epsilon_0$, isto é, (S, M) é instável. $\square$

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Introdução

No presente capítulo aplicamos os resultados da seção 3.2 em três casos específicos.

Dessa forma, com base nas referências [10] e [15] na seção 4.2 introduzimos os conceitos e resultados para sistemas determinados por equações diferenciais funcionais retardadas .

Agora, os resultados para os sistemas determinados por equações diferenciais ordinárias da seção 4.3 podem ser achados em [10].

Quanto ao resultado básico de existência e unicidade de solução para equações integrais de Volterra de segunda espécie da seção 4.4, este pode ser achado em [16]. Já o resultado de estabilidade de sistemas determinados por equações integrais de Volterra é estabelecido com base no resultado para os sistemas determinados por equações diferenciais funcionais retardadas.

4.2 Sistemas com Retardamento

Suponha que C_r^n denota o conjunto $C[[-r,0],\mathbb{R}^n]$, com norma definida por

$$\|\phi\|_{C_r^n} = \|\phi\| = \max\{\|\phi(t)\| : -r \le t \le 0\},\ \phi \in C_r^n$$

e métrica d induzida por esta norma. Para $x \in C[[t_0 - r, t_0 + t_f), \mathbb{R}^n]$, defina $x_t \in C_r^n$ para $t \in [t_0, t_0 + t_f)$, $t_f > 0$, através da relação $x_t(s) = x(t+s)$, $-r \le s \le 0$.

Definição 4.1 *Se $I_\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R} \times C_r^n$, $F : I_\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada e "." representa a derivada à direita, dizemos que a relação*

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) \tag{4.1}$$

é uma equação diferencial funcional retardada com atraso r em $I_\Omega \times \Omega$.

Uma função x é uma solução da equação (4.1) em $[t_0 - r, t_0 + t_f)$ se $x \in C[[t_0 - r, t_0 + t_f), \mathbb{R}^n]$, $(t, x_t) \in I_\Omega \times \Omega$ e $x(t)$ satisfaz a equação (4.1) para $t \in [t_0, t_0 + t_f)$.
Dado $(t_0, \psi) \in I_\Omega \times \Omega$, associado com a equação (4.1) temos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) \\ x_{t_0} = \psi \end{cases} \tag{4.2}$$

sendo $t \geq t_0$.

Lema 4.1 *Se para* (4.1) *a função $F : I_\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então o problema (4.2) é equivalente a*

$$\begin{cases} x(t) = \psi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0] \\ x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s) ds, \ t > t_0 \ . \end{cases}$$

Denotaremos uma solução contínua de (4.2) sobre um intervalo $[t_0, t_0 + t_f)$, $t_f > 0$, por $x(t, \psi, t_0)$, ou equivalentemente, por $x_t(\psi, t_0) \in C_r^n$.

Lema 4.2 *Se $x \in C[[t_0 - r, t_0 + t_f], \mathbb{R}^n]$, então x_t é uma função contínua de t no intervalo $t \in [t_0, t_0 + t_f]$.*

Teorema 4.1 *Se $F : I_\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua em um conjunto aberto conexo $I_\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R} \times C_r^n$ e para cada conjunto compacto $K \subset I_\Omega \times \Omega$, F satisfaz a condição de Lipschitz em relação a segunda variável*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L_K \|x - y\|_{C_r^n}$$

para todo $(t, x), (t, y) \in K$, sendo L_K uma constante que depende apenas de K, $\|.\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ e $\|.\|_{C_r^n}$ é a norma definida em C_r^n.
Então para qualquer $(t_0, \psi) \in I_\Omega \times \Omega$, existe uma única solução $x(t, \psi, t_0)$ de (4.2) contínua em seu domínio máximo de existência $t \in [t_0, t_0 + \omega_+(t_0, \psi_0))$, tal que $x_{t_0}(\psi, t_0) = \psi$.

Corolário 4.1 *Nas condições do Teorema anterior, se $F(t, 0) = 0$ então $x(t, 0, t_0) = 0$ para todo $t \geq t_0$ e $t \in I_\Omega$.*

Exemplo 4.1.1 Se em (4.2) tivermos $F(t, \phi) = A\phi(0) + B\phi(-r) + u(t)$, sendo $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$ e $u \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^n]$, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - r) + u(t) \\ x_{t_0} = \psi \end{cases} \tag{4.3}$$

para $t \geq t_0$.

Teorema 4.2 *Dada a função $\psi \in C_r^n$, existe uma única solução $x(t,\psi,t_0)$ contínua de (4.3) definida em todo $t \in [t_0,+\infty)$ tal que $x_{t_0}(\psi,t_0)=\psi$. Além disso*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\psi(0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}[Bx(s-r)+u(s)]ds, \qquad t \geq t_0 \ .$$

Assim, supondo que $\mathbb{R}^+ \subsetneq I_\Omega$, $\mathcal{A} \subset C_r^n$ é o conjunto dos estados iniciais ψ tal que $0 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ é o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(4.3)} = \{x_{(.)}(\psi,t_0) : [t_0,+\infty) \to C_r^n\}$, sendo $x(t,\psi,t_0)$ as soluções de (4.3) para toda $\psi \in \mathcal{A}$ e todo $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, obtemos o sistema dinâmico contínuo $\{\mathbb{R}^+, C_r^n, \mathcal{A}, S_{(4.3)}, \mathbb{R}_0^+\}$.

4.2.1 Sistema dinâmico descontínuo

Consideramos agora a seguinte família de problemas de valores iniciais de equações diferenciais funcionais retardadas

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k)}(t) = F_k(t, x_t^{(k)}), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \\ x_{\tau_{k+1}}^{(k+1)} = g_k(x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}) \\ x_{\tau_0}^{(0)} = \psi_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

sendo $g_k : C_r^n \to C_r^n$, $F_k \in C[I_\Omega \times C_r^n, \mathbb{R}^n]$ e para cada $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ um conjunto $\{\tau_1, ..., \tau_k, ... : t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ...\} \subset \mathbb{R}^+$ é fixado. Também, suponha que $I_\Omega \supset [-r,+\infty)$ e para cada k se tenha $\tau_k < \tau_{k+1} - r$, sendo r o atraso das equações $\dot{x}(t) = F_k(t, x_t)$.
Se $I_\Omega \times C_r^n \subset \mathbb{R} \times C_r^n$ é um conjunto aberto conexo tal que F_k satisfaz a condição de Lipschitz em relação a segunda variável para cada conjunto compacto $C_k \subset I_\Omega \times C_r^n$, segue do Teorema 4.1 que para qualquer $(\tau_k, \psi_k) \in I_\Omega \times C_r^n$ existe uma única solução $x^{(k)}(t, \psi_k, \tau_k)$ contínua em $[\tau_k, \tau_{k+1})$ tal que $x_{\tau_k}^{(k)}(\psi_k, \tau_k) = \psi_k$.
Dessa forma, seja $\mathcal{A} \subset C_r^n$ o conjunto dos estados iniciais ψ_0 tal que $0 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(4.4)} = \{\phi_{(.)}(\psi_0, t_0) : [t_0, +\infty) \to C_r^n\}$ para toda $\psi_0 \in \mathcal{A}$ e todo $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, sendo $\phi_t(\psi_0, t_0) = x_t^{(k)}(\psi_k, \tau_k)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), k \in \mathbb{N}$. Suponha também que

$$g_k(x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}) = x_{\tau_{k+1}}^{(k+1)}(\psi_{k+1}, \tau_{k+1}) \neq x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)$$

para pelo menos um $k \in \mathbb{N}$ e alguma $\psi_0 \neq 0$, logo a trajetória $\phi_{(.)}(\psi_0, t_0)$ é descontínua em τ_{k+1} com relação à métrica d de C_r^n. Então obtemos o sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, C_r^n, \mathcal{A}, S_{(4.4)}, \mathbb{R}_0^+\}$, sendo $\{\tau_{k+1}(t_0) : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de possíveis pontos de descontinuidade das trajetórias $\phi_{(.)}(\psi_0, t_0) \in S_{(4.4)}$ com relação à métrica d.

Observe que $S_{(4.4)}$ é um sistema dinâmico de dimensão infinita, visto que C_r^n possui dimensão infinita.

Observação. Se $F_k(t,0)=0$ e $g_k(0)=0$ então $(S_{(4.4)},\{0\})$ é invariante.

Exemplo 4.1.2 Considere o seguinte sistema de controle com atrasos

$$\left\{\begin{array}{r} \dot{x}^{(k)}(t)=A_kx^{(k)}(t)+B_kx^{(k)}(t-r)+C_k\bar{u}^{(k)}(t)\ ,\quad t\in[\tau_k,\tau_{k+1}) \\ x^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}=g_k(x^{(k)}_{\tau^-_{k+1}})\ ,\quad u(\tau_{k+1})=D_ku(\tau_k)+E_kx^{(k)}(\tau^-_{k+1}) \\ x^{(0)}_{\tau_0}=\psi_0\ ,\quad u(\tau_0)=u_0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

sendo $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $\bar{u}(t)\in\mathbb{R}^m$, $A_k,B_k\in\mathbb{R}^{n\mathrm{x}n}$, $C_k\in\mathbb{R}^{n\mathrm{x}m}$, $D_k\in\mathbb{R}^{m\mathrm{x}m}$ e $E_k\in\mathbb{R}^{m\mathrm{x}n}$. Também, para cada $\tau_0\in\mathbb{R}_0^+$ fixe um conjunto $\{\tau_1,\tau_2,...: t_0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<...\}$ de modo que $\tau_{k+1}-r>\tau_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$, além disso, seja

$$\bar{u}^{(k)}(t)=u(\tau_k)\ ,\ t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$$

e

$$\bar{u}^{(k+1)}(\tau_{k+1}+s)=D_k\bar{u}^{(k)}(\tau^-_{k+1}+s)+E_kx^{(k)}(\tau^-_{k+1}+s),\quad s\in[-r,0].$$

Seja também $g_k: C_r^n\to C_r^n$ tal que para $y\in C_r^n$ tem-se $g_k(y)(s)=G_k.y(s)$, $s\in[-r,0]$, sendo $G_k\in\mathbb{R}^{n\mathrm{x}n}$.

Do Teorema 4.2 , para cada $\psi_k\in C_r^n$ existe uma única solução $x^{(k)}(t,\psi_k,\tau_k)$ contínua em $t\geq\tau_k$ tal que $x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k,\tau_k)=\psi_k$.

Assim, seja $\mathcal{A}\subset C_r^n$ o conjunto dos estados iniciais ψ_0 tal que $0\in\mathcal{A}$ e $\mathbb{R}_0^+\subset\mathbb{R}$ o conjunto dos instantes iniciais t_0, logo, para cada $\psi_0\in\mathcal{A}$ e $t_0\in\mathbb{R}_0^+$ existe uma única aplicação $\phi_{(.)}(\psi_0,t_0):[t_0,+\infty)\to C_r^n$ tal que $\phi_t(\psi_0,t_0)=x_t^{(k)}(\psi_k,\tau_k)$, $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$.

Seja agora $\mathcal{U}\subset C_r^m$ o conjunto das funções de controle $u^{(0)}$ tal que $0\in\mathcal{U}$ e $u^{(0)}(s)=\bar{u}^{(0)}(t_0+s)$, $s\in[-r,0]$, e defina as trajetórias p como

$$\left\{\begin{array}{l} p(t,a,t_0)=[\phi(t,\psi_0,t_0)^T,\bar{u}^{(k)}(t)^T]^T\in\mathbb{R}^{n+m}\ ,\quad t\in[\tau_k,\tau_{k+1}) \\ p_{t_0}(a,t_0)=a=\begin{pmatrix}\phi_{t_0}(\psi_0,t_0)\\ \bar{u}^{(0)}_{t_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_0\\ u^{(0)}\end{pmatrix}\in C_r^{n+m}\ . \end{array}\right.$$

Assim, seja $\mathcal{A}\times\mathcal{U}$ o conjunto dos estados iniciais $a=\begin{pmatrix}\psi_0\\ u^{(0)}\end{pmatrix}\in C_r^{n+m}$, $S_{(4.5)}$ o conjunto das trajetórias $p_{(.)}(a,t_0)=\begin{pmatrix}\phi_{(.)}(\psi_0,t_0)\\ \bar{u}^{(k)}_{(.)}\end{pmatrix}\in C_r^{n+m}$, $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$, para todo $a\in\mathcal{A}\times\mathcal{U}$ e $t_0\in\mathbb{R}_0^+$. Dessa forma, para $s\in[-r,0]$ temos

$$p_{\tau_{k+1}}(a,t_0)(s)=\begin{pmatrix}\phi_{\tau_{k+1}}(\psi_0,t_0)(s)\\ \bar{u}^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}(s)\\ \bar{u}^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(k+1)}(\tau_{k+1}+s)\\ \bar{u}^{(k+1)}(\tau_{k+1}+s)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} G_k x^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) \\ D_k \bar{u}^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) + E_k x^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_k & 0 \\ E_k & D_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) \\ \bar{u}^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} G_k & 0 \\ E_k & D_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(k)}_{\tau_{k+1}^-}(s) \\ \bar{u}^{(k)}_{\tau_{k+1}^-}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_k & 0 \\ E_k & D_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{\tau_{k+1}^-}(\psi_0, t_0)(s) \\ \bar{u}^{(k)}_{\tau_{k+1}^-}(s) \end{pmatrix} = H_k \ p_{\tau_{k+1}^-}(a, t_0)(s)$$

Considere agora $h_k : C_r^{n+m} \to C_r^{n+m}$ tal que $h_k(z)(s) = H_k z(s)$, $s \in [-r, 0]$. Então, suponha que para pelo menos um $k \geq 0$ se tenha

$$p_{\tau_{k+1}}(a, t_0) = h_k(p_{\tau_{k+1}^-}(a, t_0)) \neq p_{\tau_{k+1}^-}(a, t_0)$$

para algum $a \neq 0$, logo $p_{(.)}(a, t_0)$ é descontínua no ponto τ_{k+1} em relação a métrica de C_r^{n+m} e portanto obtemos o sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, C_r^{n+m}, \mathcal{A} \times \mathcal{U}, S_{(4.5)}, \mathbb{R}_0^+\}$, sendo $\{\tau_{k+1}(t_0) : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos possíveis pontos de descontinuidade das trajetórias $p_{(.)}(a, t_0) \in S_{(4.5)}$.

Observação Temos que $(S_{(4.5)}, \{0\})$ é invariante. De fato:

Se $a = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ u^{(0)} \end{pmatrix} = 0 \in C_r^{n+m}$, para $t \in [t_0, \tau_1)$ temos $\bar{u}^{(0)}(t) = u(t_0) = u^{(0)}(0) = 0$ e $\bar{u}^{(0)}(t_0 + s) = u^{(0)}(s) = 0$, $s \in [-r, 0]$, logo $\bar{u}_t^{(0)} = 0$.

Além disso, sendo $x(t_0 + s) = \psi_0(s) = 0$, $s \in [-r, 0]$, para $t \in [t_0, \tau_1)$ temos

$$x(t) = e^{A_0(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)}\big[B_0 x(s-r) + C_0 \bar{u}^{(0)}(s)\big]ds =$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} B_0 x(s-r) ds.$$

Para $s \in [t_0, t_0 + r]$ temos que $x(s - r) = \psi_0(s - t_0 - r) = 0$, logo $x(t) = 0$ para $t \in [t_0, t_0 + r]$, isto é, $x_t = 0$. Sendo $\tau_1 > t_0 + r$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 + nr \geq \tau_1$, então, repetindo o raciocínio anterior para $s \in [t_0 + (i-1)r, t_0 + ir]$, $i = 2, ..., n$, como $x(s - r) = 0$ segue que $x(t) = 0$ para $t \in [t_0 + (i-1)r, t_0 + ir]$, ou seja, $x_t = 0$.

Dessa forma $p(t, a, t_0) = \begin{pmatrix} x^{(0)}(t) \\ \bar{u}^{(0)}(t) \end{pmatrix} = 0$ para $t \in [t_0, \tau_1)$ e $p_{t_0}(a, t_0) = a = 0$, segue então que $p_t(a, t_0) = 0$. Suponha agora que $p(t, a, t_0) = \begin{pmatrix} x^{(k)}(t) \\ \bar{u}^{(k)}(t) \end{pmatrix} = 0$ para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ e $p_{\tau_k}(a, t_0) = \begin{pmatrix} x^{(k)}_{\tau_k} \\ \bar{u}^{(k)}_{\tau_k} \end{pmatrix} = 0$ e mostremos que $p_t(a, t_0) = 0$ para $t \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$.

Tomando $t \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$ temos $\bar{u}^{(k+1)}(t) = u(\tau_{k+1}) = D_k u(\tau_k) + E_k x^{(k)}(\tau_{k+1}^-) = 0$ e

$$\bar{u}^{(k+1)}(\tau_{k+1} + s) = D_k \bar{u}^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) + E_k x^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) =$$

$$D_k u(\tau_k) + E_k x^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) = 0, s \in [-r, 0],$$

então $\bar{u}_t^{(k+1)} = 0$. Além disso

$$x(t) = e^{A_{k+1}(t-\tau_{k+1})}x(\tau_{k+1}) + \int_{\tau_{k+1}}^{t} e^{A_{k+1}(t-s)}\left[B_{k+1}x(s-r) + C_{k+1}\bar{u}^{(k+1)}(s)\right]ds$$

e sendo $x^{(k+1)}(\tau_{k+1} + s) = G_k x^{(k)}(\tau_{k+1}^- + s) = 0$, $s \in [-r, 0]$, segue que

$$x(t) = \int_{\tau_{k+1}}^{t} e^{A_{k+1}(t-s)}B_{k+1}x(s-r)ds.$$

Temos também que $x(s-r) = 0$ para $s \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+1} + r]$ e de modo análogo ao caso $s \in [t_0, t_0 + r]$ podemos concluir que $x(t) = 0$ para $t \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$. Então $p_t(a, t_0) = 0$ no intervalo $[\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$ e por indução segue que $p_t(a, t_0) = 0$ para todo $t \geq t_0$, ou seja, $(S_{(4.5)}, \{0\})$ é invariante.

4.2.2 Análise de estabilidade

Para o sistema $S_{(4.4)}$ suponha que as funções $F_k \in C[I_\Omega \times C_r^n, \mathbb{R}^n]$ são tais que $F_k(t, x_t) \equiv F_k(x_t)$, logo, (4.4) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k)}(t) = F_k(x_t^{(k)}), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \\ x_{\tau_{k+1}}^{(k+1)} = g_k(x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}) \\ x_{\tau_0}^{(0)} = \psi_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Dessa forma, denotaremos as trajetórias do sistema assim obtido por $S_{(4.6)}$ ao invés de $S_{(4.4)}$. Suponha que para todo $k \in \mathbb{N}$ as funções F_k satisfazem a condição de Lipschitz

$$\|F_k(\xi) - F_k(\eta)\| \leq C_k\|\xi - \eta\|$$

para todo $\xi, \eta \in C_r^n$, logo, obtemos a seguinte limitação superior

$$\|x_t^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| \leq e^{C_k(t-\tau_k)}\|\psi_k\| \tag{4.7}$$

para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ e $\psi_k \in C_r^n$. Suporemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} C_k = C < +\infty. \tag{4.8}$$

Também, para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$\|g_k(\eta)\| \leq \gamma_k\|\eta\| \tag{4.9}$$

para todo $\eta \in C_r^n$, sendo

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k = \Gamma < +\infty. \tag{4.10}$$

Além disso, colocando $\tau_{k+1} - \tau_k = \lambda_k$, suponha que

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \lambda \geq r, \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \Lambda < +\infty. \tag{4.11}$$

Teorema 4.3 *Sejam $C_k, \gamma_k, \lambda_k, C, \Gamma$ e Λ os parâmetros enumerados acima de* (4.7) *a* (4.11).
(a) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \leq 1$, então $(S_{(4.6)}, \{0\})$ é invariante e uniformemente estável.
(b) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \leq \alpha < 1$, então:
(i) $(S_{(4.6)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável;
(ii) $(S_{(4.6)}, \{0\})$ é exponencialmente estável.

Prova. (a) Seja a função $V : C_r^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como $V(\psi, t) = \|\psi\|$, $\psi \in C_r^n$, $t \in \mathbb{R}^+$. Logo, considerando as trajetórias $\phi_{(.)}(\psi_0, t_0) \in S_{(4.6)}$, temos

$$V(\phi_t(\psi_0, t_0), t) = \|\phi_t(\psi_0, t_0)\| = \|x_t^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| \ , \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \ .$$

Tomando as funções $\psi_1, \psi_2 \in K\mathbb{R}$ tal que $\psi_1(s) = s/2$ e $\psi_2(s) = 2s$, $s \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\psi_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \psi_2(\|x\|)$$

para todo $x \in C_r^n$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Também, se $\phi_{(.)}(\psi_0, t_0) \in S_{(4.6)}$ temos $V(\phi_t(\psi_0, t_0), t) = \|\phi_t(\psi_0, t_0)\|$ e então da Proposição 1.1 temos que $V(\phi_t(\psi_0, t_0), t)$ é contínua em $[t_0, +\infty)$ exceto possivelmente em um subconjunto $E_{V(\phi)} \subset E_\phi = \{t_0 < \tau_1 < \tau_2 < ...\}$ do conjunto das descontinuidades de $\phi_{(.)}(\psi_0, t_0)$.
De (4.7) segue que

$$\|x_t^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| \leq e^{C_k(t-\tau_k)}\|\psi_k\| = e^{C_k(t-\tau_k)}\|x_{\tau_k}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| \tag{4.12}$$

para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Se $t = \tau_{k+1}$, de (4.9) temos

$$\|x_{\tau_{k+1}}^{(k+1)}(\psi_{k+1}, \tau_{k+1})\| = g_k\big(x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\big) \leq \gamma_k\|x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\|. \tag{4.13}$$

Como de (4.12) temos

$$\|x_{\tau_{k+1}^-}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| \leq e^{C_k(\tau_{k+1}^- - \tau_k)}\|x_{\tau_k}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| =$$

$$e^{C_k(\tau_{k+1}-\tau_k)}\|x_{\tau_k}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\| = e^{C_k\lambda_k}\|x_{\tau_k}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\|$$

segue que

$$\|x_{\tau_{k+1}}^{(k+1)}(\psi_{k+1}, \tau_{k+1})\| \leq \gamma_k e^{C_k\lambda_k}\|x_{\tau_k}^{(k)}(\psi_k, \tau_k)\|. \tag{4.14}$$

Logo, utilizando a suposição $\gamma_k e^{C_k \lambda_k} \leq 1$ obtemos

$$V(x^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}(\psi_{k+1}, \tau_{k+1}), \tau_{k+1}) \leq V(x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k), \tau_k)$$

e então $V(\phi_{\tau_k}(\psi_0, t_0), \tau_k)$ é decrescente para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, sendo $\sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \Lambda$ e $\sup_{k\in\mathbb{N}} C_k = C$ de (4.12) tem-se

$$V(x^{(k)}_t(\psi_k, \tau_k), t) = \|x^{(k)}_t(\psi_k, \tau_k)\| \leq e^{C_k(t-\tau_k)}\|x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k)\| \leq$$

$$e^{C\lambda_k}\|x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k)\| \leq e^{C\Lambda}\|x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k)\| = e^{C\Lambda}V(x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k), \tau_k)$$

para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, logo, considerando a função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ tal que $h(s) = e^{C\Lambda}s$, $s \in \mathbb{R}^+$, temos

$$V(\phi_t(\psi_0, t_0), t) \leq h\big(V(\phi_{\tau_k}(\psi_0, t_0), \tau_k)\big)$$

e portanto do Teorema 3.1 segue que $(S_{(4.6)}, \{0\})$ é invariante e uniformemente estável.
(b) Se supormos que $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \leq \alpha < 1$ de (4.14) temos

$$V(x^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}(\psi_{k+1}, \tau_{k+1}), \tau_{k+1}) \leq \alpha V(x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k), \tau_k)$$

e então

$$\frac{V(x^{(k+1)}_{\tau_{k+1}}(\psi_{k+1}, \tau_{k+1}), \tau_{k+1}) - V(x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k), \tau_k)}{\tau_{k+1} - \tau_k} \leq \frac{(\alpha-1)V(x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k), \tau_k)}{\tau_{k+1} - \tau_k}$$

$$\leq \frac{(\alpha-1)V(x^{(k)}_{\tau_k}(\psi_k, \tau_k), \tau_k)}{\Lambda}\ .$$

Logo, tomando $\psi_3 \in K\mathbb{R}$ tal que $\psi_3(s) = \frac{(1-\alpha)}{\Lambda}(s)$, $s \in \mathbb{R}^+$, obtemos

$$DV(\phi_{\tau_k}(\psi_0, t_0), \tau_k) \leq -\psi_3(\|\phi_{\tau_k}(\psi_0, t_0)\|) \tag{4.15}$$

e então do Teorema 3.1 segue que $(S_{(4.6)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável. Considerando agora o Teorema 3.2, tome $c_1 = 1/2$, $c_2 = 2$ e $b = 1$, então

$$c_1\|x\| \leq V(x, t) \leq c_2\|x\|$$

para todo $x \in C^n_r$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Também, colocando $c_3 = \frac{(1-\alpha)}{\Lambda}$ a relação (4.15) é válida considerando c_3 ao invés de ψ_3, além disso,

$$\lim_{s\to0^+} \frac{h(s)}{s^{1/2}} = \lim_{s\to0^+} \frac{e^{C\Lambda}s}{s^{1/2}} = \lim_{s\to0^+} e^{C\Lambda}s^{1/2} = 0$$

e obtemos do Teorema 3.2 que $(S_{(4.6)}, \{0\})$ é exponencialmente estável. $\square$

4.3 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Seja a seguinte família de problemas de valores iniciais de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k)}(t) = f_k(t, x^{(k)}(t)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \\ x^{(k+1)}(\tau_{k+1}) = g_k(x^{(k)}(\tau_{k+1}^-)) \\ x^{(0)}(\tau_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.16}$$

sendo $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e para cada $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ um conjunto $\{\tau_1, ..., \tau_k, ... : t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ...\} \subset \mathbb{R}^+$ é fixado. Seja também $f_k \in C[I_\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ e $\mathbb{R}^+ \subsetneq I_\Omega$.
Suponha que $I_\Omega \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ seja um conjunto aberto conexo e para cada $k \in \mathbb{N}$ as funções f_k satisfazem a condição de Lipschitz em relação a segunda variável para cada conjunto compacto $C_k \subset I_\Omega \times \mathbb{R}^n$. Do Teorema 1.2 segue que para qualquer $(\tau_k, x_k) \in I_\Omega \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $x^{(k)}(t, x_k, \tau_k)$ contínua em $[\tau_k, \tau_{k+1})$ tal que $x^{(k)}(\tau_k, x_k, \tau_k) = x_k$.
Dessa forma, seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto dos estados iniciais x_0 tal que $0 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(4.16)} = \{p(., x_0, t_0) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n\}$ para todo $x_0 \in \mathcal{A}$ e todo $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, sendo $p(t, x_0, t_0) = x^{(k)}(t, x_k, \tau_k)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), k \in \mathbb{N}$. Suponha também que

$$g_k(x^{(k)}(\tau_{k+1}^-)) = x^{(k+1)}(\tau_{k+1}) \neq x^{(k)}(\tau_{k+1}^-)$$

para pelo menos um $k \in \mathbb{N}$ e algum $x_0 \neq 0$, logo a trajetória $p(., x_0, t_0)$ é descontínua em τ_{k+1}. Dessa forma, obtemos o sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n, \mathcal{A}, S_{(4.16)}, \mathbb{R}_0^+\}$, sendo $\{\tau_{k+1}(t_0) : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de possíveis pontos de descontinuidade das trajetórias $p(., x_0, t_0) \in S_{(4.16)}$.
Observação Se $g_k(0) = 0$ e $f_k(t, 0) = 0$ então $(S_{(4.16)}, \{0\})$ é invariante.
Para o sistema $S_{(4.16)}$ suponha que as funções $f_k \in C[I_\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ são tais que $f_k(t, x(t)) \equiv f_k(x(t))$, então (4.16) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k)}(t) = f_k(x^{(k)}(t)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \\ x^{(k+1)}(\tau_{k+1}) = g_k(x^{(k)}(\tau_{k+1}^-)) \\ x^{(0)}(\tau_0) = x_0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Assim, denotaremos as trajetórias do sistema obtido por $S_{(4.17)}$ ao invés de $S_{(4.16)}$.
Suponha que para todo $k \in \mathbb{N}$ as funções f_k satisfazem a condição de Lipschitz

$$\|f_k(\xi) - f_k(\eta)\| \leq C_k \|\xi - \eta\|$$

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, logo, obtemos a seguinte estimativa

$$\|x^{(k)}(t, x_k, \tau_k)\| \leq e^{C_k(t - \tau_k)} \|x_k\| \tag{4.18}$$

para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ e $x_k \in \mathbb{R}^n$. Suporemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} C_k = C < +\infty. \tag{4.19}$$

Também, para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$\|g_k(\eta)\| \leq \gamma_k \|\eta\| \tag{4.20}$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$, sendo

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k = \Gamma < +\infty. \tag{4.21}$$

Além disso, colocando $\tau_{k+1} - \tau_k = \lambda_k$, suponha que

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \lambda > 0, \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \Lambda < +\infty. \tag{4.22}$$

Teorema 4.4 *Sejam $C_k, \gamma_k, \lambda_k, C, \Gamma$ e Λ os parâmetros enumerados anteriormente.*
(a) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \leq 1$, então $(S_{(4.17)}, \{0\})$ é invariante e uniformemente estável.
(b) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \leq \alpha < 1$, então:
(i) $(S_{(4.17)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável;
(ii) $(S_{(4.17)}, \{0\})$ é exponencialmente estável.

Prova. A demostração deste resultado é análoga ao Teorema 4.3 .
Exemplo 4.2.1 Se em (4.17) tivermos $f_k(x(t)) = A_k x(t)$ e $g_k(x(\tau_{k+1}^-)) = B_k x(\tau_{k+1}^-)$, sendo $A_k, B_k \in \mathbb{R}^{nxn}$, então (4.17) se reduz a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_k x(t), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \\ x(t) = B_k x(t^-), \ t = \tau_{k+1} \\ x(\tau_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.23}$$

e denotaremos o sistema assim obtido por $S_{(4.23)}$. Neste caso as trajetórias $p(., x_0, t_0)$ serão dadas por $p(t, x_0, t_0) = e^{A_k(t-\tau_k)} x(\tau_k)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.
Além disso,

$$\|x^{(k)}(t, x_k, \tau_k)\| = \|e^{A_k(t-\tau_k)} x_k\| \leq e^{\|A_k\|(t-\tau_k)} \|x_k\| \ , \ t \geq \tau_k$$

e $\|g_k(\eta)\| = \|B_k\eta\| \leq \|B_k\|\|\eta\|$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Logo, do Teorema 4.4 temos o seguinte resultado:

Corolário 4.2 *Suponha que $S_{(4.23)}$ satisfaça as seguintes condições:*
(a) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|B_k\| e^{\|A_k\|\lambda_k} \leq 1$, então $(S_{(4.23)}, \{0\})$ é uniformemente estável.
(b) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|B_k\| e^{\|A_k\|\lambda_k} \leq \alpha < 1$, então:
(i) $(S_{(4.23)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável;
(ii) $(S_{(4.23)}, \{0\})$ é exponencialmente estável.

Proposição 4.1 *Para o sistema $S_{(4.23)}$ suponha que B_k é inversível e $\|B_k^{-1}\|e^{\|A_k\|\Lambda} \leq \beta < 1$, para algum $\beta > 0$. Então $(S_{(4.23)}, \{0\})$ é instável.*

Prova. Tomando $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como $V(x,t) = \|x\|$, seja $\phi \in K\mathbb{R}$ tal que $\phi(s) = 2s$, $s \in \mathbb{R}^+$, logo

$$\phi(\|x\|) \geq V(x,t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Também, se $p(.,x_0,t_0) \in S_{(4.23)}$ da Proposição 1.1 temos $V(p(t,x_0,t_0),t)$ contínua em $[t_0,+\infty)$ exceto possivelmente no subconjunto $E_{V(p)} \subset E_p = \{t_0 < \tau_1 < \tau_2 < ...\}$.
Se $k \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in A$ segue que

$$DV(p(\tau_k,x_0,t_0),\tau_k) = \frac{\|p(\tau_{k+1},x_0,t_0)\| - \|p(\tau_k,x_0,t_0)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} =$$

$$\frac{\|x(\tau_{k+1})\| - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} = \frac{\|B_k x(\tau_{k+1}^-)\| - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} = \frac{\|B_k e^{A_k(\tau_{k+1}^- - \tau_k)}x(\tau_k)\| - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} =$$

$$\frac{\|B_k e^{A_k(\tau_{k+1}-\tau_k)}x(\tau_k)\| - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} \geq \frac{\frac{\|x(\tau_k)\|}{\left\|\left(B_k e^{A_k(\tau_{k+1}-\tau_k)}\right)^{-1}\right\|} - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} =$$

$$\frac{\frac{\|x(\tau_k)\|}{\|e^{-A_k(\tau_{k+1}-\tau_k)}B_k^{-1}\|} - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} \geq \frac{\frac{\|x(\tau_k)\|}{e^{\|A_k\|(\tau_{k+1}-\tau_k)}\|B_k^{-1}\|} - \|x(\tau_k)\|}{\tau_{k+1}-\tau_k} =$$

$$\frac{\frac{1}{e^{\|A_k\|(\tau_{k+1}-\tau_k)}\|B_k^{-1}\|} - 1}{\tau_{k+1}-\tau_k}\|x(\tau_k)\| \geq \frac{\frac{1}{e^{\|A_k\|\Lambda}\|B_k^{-1}\|} - 1}{\Lambda}\|x(\tau_k)\| \geq$$

$$\frac{\frac{1}{\beta}-1}{\Lambda}\|x(\tau_k)\| = \frac{\frac{1}{\beta}-1}{\Lambda}\|p(\tau_k,x_0,t_0)\|.$$

Logo, tomando $\psi \in K$ definida em $\mathbb{R}^+$ de modo que $\psi(s) = \frac{\frac{1}{\beta}-1}{\Lambda}s$, $s \in \mathbb{R}^+$, temos

$$DV(p(\tau_k,x_0,t_0),\tau_k) \geq \psi(\|p(\tau_k,x_0,t_0)\|).$$

Além disso, para os abertos $B(0;1/k) = U_k \subset \mathbb{R}^n$ existe $x_k \in U_k$, $x_k \neq 0$, tal que $V(x_k,t_0) = \|x_k\| > 0$. Portanto, do Teorema 3.6 temos que $(S_{(4.23)}, \{0\})$ é instável. $\square$

4.4 Sistemas Determinados por Equações Integrais de Volterra

Definição 4.2 *Dadas as funções reais $N(t,s)$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que N está definida no plano ts para $t \in [a,b]$ e $s \in [a,t]$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação*

$$x(t) - \lambda \int_a^t N(t,s)x(s)ds = f(t)$$

é chamada de equação integral de Volterra de segunda espécie. Dizemos que N é o núcleo desta equação integral.

Teorema 4.5 *A equação integral de Volterra de segunda espécie*

$$x(t) - \lambda \int_a^t N(t,s)x(s)ds = f(t)$$

tal que o núcleo N e a função f são funções contínuas, tem uma única solução contínua. Esta solução é dada pela fórmula

$$x(t) = f(t) - \lambda \int_a^t H(t,s;\lambda)f(s)ds$$

sendo o núcleo resolvente $H(t,s;\lambda)$ dado pela série de núcleos iterados

$$-H(t,s;\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n N_{n+1}(t,s)$$

tal que

$$N_{n+1}(t,s) = \int_s^t N(t,z)N_n(z,s)dz \quad n = 1,2,...$$

e $N_1(t,s) \equiv N(t,s)$.

A seguir introduzimos um sistema descontínuo de equações integrais. Para tal, considere uma família de equações integrais de Volterra de segunda espécie da forma

$$x^{(k)}(t) - \lambda_k \int_{\tau_k}^t N^{(k)}(t,s)x^{(k)}(s)ds = f^{(k)}(t) \tag{4.24}$$

para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, tal que para cada $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+$ um conjunto $\{\tau_1, ..., \tau_k, ... : \tau_0 = t_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ...\} \subset \mathbb{R}^+$ é fixado . Suponhamos que $N^{(k)}$ seja contínua em seu domínio e $f^{(0)}(t) = x_0 \in \mathbb{R}, t \in [\tau_0, \tau_1]$, logo $f^{(0)}$ é contínua e então do Teorema 4.5 temos que a solução $x^{(0)}$ é contínua.
Considerando as funções $g_{k-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, tal que $g_{k-1}(0) = 0$, seja

$$f^{(k)}(t) = g_{k-1}(x^{(k-1)}(\tau_k^-))$$

para $k \geq 1$ e $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, logo, $f^{(1)}$ é contínua e então a solução $x^{(1)}$ é contínua. Assim, por indução conclui-se que $f^{(k)}$ é contínua e do Teorema 4.5 as soluções $x^{(k)}$ são contínuas e dadas por

$$x^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - \lambda_k \int_{\tau_k}^t H^{(k)}(t,s;\lambda_k)f^{(k)}(s)ds$$

para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$.
Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos estados iniciais x_0 tal que $0 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos instantes iniciais τ_0 e seja $S_{(4.24)}$ o conjunto das trajetórias $p(., x_0, \tau_0) : [\tau_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, sendo $p(t, x_0, \tau_0) = x^{(k)}(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), k \in \mathbb{N}$, para todo $x_0 \in \mathcal{A}$ e para todo $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+$.
Observamos que $p(., x_0, \tau_0) \in S_{(4.24)}$ é unicamente determinada pelas condições iniciais (x_0, τ_0), já que é constituída em cada intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ por funções $x^{(k)}$ unicamente determinadas pelas funções $f^{(k)}$ e $N^{(k)}$. Assim, se para algum $x_0 \in \mathcal{A}$ tal que $x_0 = x^{(0)}(\tau_0) \neq 0$ para $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+$ fixado arbitrariamente, supormos que exista pelo menos um $k \geq 1$ tal que

$$g_{k-1}(x^{(k-1)}(\tau_k^-)) \neq x^{(k-1)}(\tau_k^-)$$

segue que

$$x^{(k)}(\tau_k) = f^{(k)}(\tau_k) = g_{k-1}(x^{(k-1)}(\tau_k^-)) \neq x^{(k-1)}(\tau_k^-)$$

e então pelo menos uma trajetória $p(., x_0, \tau_0)$ é descontínua e obtemos o sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \mathcal{A}, S_{(4.24)}, \mathbb{R}_0^+\}$, sendo $\{\tau_{k+1}(\tau_0) : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de possíveis pontos de descontinuidade das trajetórias $p(., x_0, \tau_0) \in S_{(4.24)}$.
Observação Temos que $(S_{(4.24)}, \{0\})$ é invariante. Realmente:
Se $x_0 = 0$, $f^{(0)}(t) = x_0 = 0$ para $t \in [\tau_0, \tau_1]$ e então

$$x^{(0)}(t) = f^{(0)}(t) - \lambda_0 \int_{\tau_0}^{t} H^{(0)}(t, s; \lambda_0) f^{(0)}(s) ds = 0 - \lambda_0 \int_{\tau_0}^{t} H^{(0)}(t, s; \lambda_0) 0 ds = 0 \ .$$

De modo análogo, sendo $f^{(1)}(t) = g_0(x^{(0)}(\tau_1^-)) = g_0(0) = 0$ para $t \in [\tau_1, \tau_2]$, temos

$$x^{(1)}(t) = 0 - \lambda_1 \int_{\tau_1}^{t} H^{(1)}(t, s; \lambda_1) 0 ds = 0 \ .$$

Por indução segue que $x^{(k)}(t) = 0$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $p(t, 0, \tau_0) = x^{(k)}(t) = 0$ para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, logo, $p(t, 0, \tau_0) = 0$ para todo $t \geq \tau_0$, isto é, $(S_{(4.24)}, \{0\})$ é invariante.
A seguir determinamos um resultado de estabilidade para $S_{(4.24)}$. Assim, para $p(., x_0, \tau_0) \in S_{(4.24)}$ e $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ temos que

$$|p(t, x_0, \tau_0)| = |x^{(k)}(t)| = |f^{(k)}(t) - \lambda_k \int_{\tau_k}^{t} H^{(k)}(t, s; \lambda_k) f^{(k)}(s) ds| \leq$$

$$|f^{(k)}(t)| + |\lambda_k \int_{\tau_k}^{t} H^{(k)}(t, s; \lambda_k) f^{(k)}(s) ds| = |f^{(k)}(t)| + |\lambda_k| |\int_{\tau_k}^{t} H^{(k)}(t, s; \lambda_k) f^{(k)}(s) ds| \leq$$

$$|f^{(k)}(t)| + |\lambda_k| \int_{\tau_k}^{t} |H^{(k)}(t, s; \lambda_k) f^{(k)}(s)| ds = |f^{(k)}(t)| + |\lambda_k| \int_{\tau_k}^{t} |H^{(k)}(t, s; \lambda_k)| |f^{(k)}(s)| ds =$$

$$|x^{(k)}(\tau_k)| + |\lambda_k| \int_{\tau_k}^{t} |H^{(k)}(t,s;\lambda_k)||x^{(k)}(\tau_k)|ds =$$

$$|x^{(k)}(\tau_k)| + |\lambda_k||x^{(k)}(\tau_k)| \int_{\tau_k}^{t} |H^{(k)}(t,s;\lambda_k)|ds \le |x^{(k)}(\tau_k)| + |\lambda_k||x^{(k)}(\tau_k)|A_k =$$

$$|x^{(k)}(\tau_k)|\big(1 + |\lambda_k|A_k\big) \le |x^{(k)}(\tau_k)|e^{C_k(\tau_{k+1}-\tau_k)}$$

sendo $C_k = \ln(1 + |\lambda_k|A_k)/\lambda$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$|g_k(\eta)| \le \gamma_k|\eta| \tag{4.25}$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}$, sendo

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k = \Gamma < +\infty. \tag{4.26}$$

Além disso, colocando $\tau_{k+1} - \tau_k = \lambda_k$, suponha que

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \lambda > 0, \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \Lambda < +\infty \tag{4.27}$$

e

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} C_k = C < +\infty\ . \tag{4.28}$$

Proposição 4.2 *Sejam $C_k, \gamma_k, \lambda_k, C, \Gamma$ e Λ os parâmetros enumerados acima de* (4.25) *a* (4.28).
(a) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \le 1$, então $(S_{(4.24)}, \{0\})$ é uniformemente estável.
(b) Se para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k e^{C_k\lambda_k} \le \alpha < 1$, então:
(i) $(S_{(4.24)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável;
(ii) $(S_{(4.24)}, \{0\})$ é exponencialmente estável.

Prova. A demonstração deste resultado segue nas mesmas linhas do Teorema 4.3 .

Referências Bibliográficas

[1] Hale,J.K., "Ordinary Differential Equations", Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, 1980.

[2] Hale,J.K., "Theory of Functional Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1977.

[3] Hou,L., "Qualitative Analysis of Discontinuous Deterministic and Stochastic Dynamical Systems", Ph.D. Thesis, University of Notre Dame, Indiana, 2000.

[4] Hou,L., Michel,A.N., Stability Analysis of a General Class of Hybrid Dynamical Systems, em " Proceedings of the American Control Conference",pp. 2805-2809, Albuquerque, New Mexico, 1997.

[5] Lima,E.L., "Espaços Métricos", Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2003.

[6] Michel, A.N., Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 45, No. 1, pp. 120-134, 1999.

[7] Michel, A.N., Miller, R.K., "Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems", Academic Press, New York, 1977.

[8] Michel,A.N., Hou,L., Stability of Continuous, Discontinuous and Discrete-Time Dynamical Systems: Unifying Results, em " Proceedings of the American Control Conference", pp. 2418-2423, Minnesota, USA, 2006.

[9] Michel,A.N., Hu,B., Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems, *Automatica*, Vol.35, pp. 371-384, 1999.

[10] Michel,A.N., Hu,B., Wang,K., "Qualitative Theory of Dynamical Systems", Marcel Dekker, New York, 2001.

[11] Michel,A.N., Sun,Y., Stability of discontinuous Cauchy problems in Banach space, *Nonlinear Analysis*, Vol.65, pp. 1805-1832, 2006.

[12] Miller,R.K., Michel,A.N., "Ordinary Differential Equations", Academic Press, New York, 1982.

[13] Rao,M.R.M., "Ordinary Differential Equations", Edward Arnold, London, 1981.

[14] Sotomayor, J., "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias", Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[15] Sun,Y., Michel,A.N., Zhai,G., Stability of discontinuous retarded functional differential equations with applications, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.50, No. 8, pp. 1090-1105, 2005.

[16] Tricomi, F.G., "Integral Equations", Dover Publications Inc., Londres, 1985.

[17] Ye,H., Michel,A.N., Antsaklis,P.J., A General Model for the Qualitative Analysis of Hybrid Dynamical Systems, em " Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control", pp. 1473-1477, New Orleans, USA, 1995.

[18] Ye,H., Michel,A.N., Hou,L., Stability theory for hybrid dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 461-474, 1998.