Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Continuidade de atratores para a discretização de problemas parabólicos usando o método de elementos finitos

Rodiak Nicolai Figueroa López

Orientador: Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz

Texto apresentado para a Defesa de Doutorado junto ao Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São José do Rio Preto

2 de Agosto de 2013

RODIAK NICOLAI FIGUEROA LÓPEZ

Continuidade de atratores para a discretização de problemas parabólicos usando o método de elementos finitos

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Matemática, área de Análise Aplicada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
ICMC - USP - São Carlos

Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira
IME - USP - São Paulo

Prof. Dr. José Antonio Langa Rosado
US - Sevilla, Espanha

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 02 de agosto de 2013

Aos meus pais,
Manuel e Felisa, às minhas irmãs,
Milenka e Tatiana
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre me dar tantas alegrias e satisfações neste mundo tão complicado e por colocar tantas pessoas boas no meu lado para poder concluir esta etapa.

Aos meus pais Manuel e Felisa por ser minha fonte de inspiração no meu dia a dia e por estar sempre ao meu lado apesar da distância. Ás minhas irmãs Milenka e Tatiana, por sempre serem minhas amigas e meu apoio nos momentos difíceis. Também, à minha tia Carmela pelo carinho e dedicação com todos nós.

À banca examinadora: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho pela ajuda, disponibilidade e incentivo a continuar nesta senda da pesquisa, Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira pelas sugestões e disponibilidade, Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos pelas orientações e Prof. Dr. José Langa Rosado pela consideração de aceitar formar parte da banca.

Ao Prof. Dr. German Lozada Cruz pela agradável convivência desde os tempos de mestrado, pelos valiosos conhecimentos transmitidos, ensinamentos e discussões da matemática, principalmente, pela confiança na minha pessoa para continuar o doutorado e concluí-lo.

Aos meus amigos de matemática e do IBILCE, em especial ao Ruikson, Eduardo, Oyran, Rafael e Danilo pela disponibilidade, ajuda e amizade.

Ao GAE por me deixar formar parte na ajuda de outros estrangeiros na chegada no IBILCE e ao pessoal da minha república.

Aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pela formação acadêmica e consideração.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Al profesor Obidio Rubio del departamento de matemática de la Universidad Nacional de Trujillo (UNT) por motivarme a seguir mis estudios de póst-grado en Brasil y a los demás profesores de este magno departamento.

Á Lina María por ser sempre meu apoio, minha alegria e á vez minha força e também minha admiração. Agradeço a Deus por te colocar no meu caminho no momento exato e por formar parte da minha vida: te amo.

A todos mis amigos de Perú, siempre tengo buenos recuerdos de todos ustedes.

À todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a concretização deste sonho.

"É somente nas misteriosas equações do amor
que qualquer lógica ou razão pode ser
encontrada."
(John Nash)

Resumo

Neste trabalho estudaremos a aproximação de equações diferenciais parabólicas semilineares através de sua discretização via o método de elementos finitos. Vamos provar que os atratores da discretização se comportam continuamente quando o tamanho do passo tende a zero estendendo os resultados de [17]. Vamos também calcular a taxa de convergência dos atratores em termos do passo da discretização.

Palavras chave: Continuidade dos atratores globais, convergência compacta, método de elementos finitos.

Abstract

In this work we study the approximation of semilinear parabolic differential equations through their discretization via the finite element method. We prove that the attractors of discretization behave continuously when the step size tends to zero extending the results of [17]. We also calculate the rate of convergence of attractors in terms of step of discretization.

***Keywords:* Continuity of global attractors, compact convergence, finite element method.**

Lista de Figuras

1.1 Sector $\mathcal{S}_{a,\phi}$ 31
1.2 Conjunto $W^u_\delta(y_j^{*,\eta})$. 48
1.3 Exemplo de $\varepsilon-$cadeia com $\mathfrak{p} = 3$. 51

2.1 Duas subdivisões: a primeira é uma triangulação e a outra não. 63
2.2 Domínio star-shaped com respeito a B mas não com B'. 67
2.3 Domínio que não é star-shaped com respeito a nenhuma bola. 67
2.4 Exemplo de um $T \in \mathcal{T}^h$ star-shaped com respeito à bola B_T em $\mathbb{R}^2$. 73

5.1 $\mathcal{S}_{0,\theta_1}$ e Σ_φ. 144
5.2 Fronteira $\Gamma_t = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_c$. 153

6.1 Curvas Γ^+_β e Γ^-_β. 176
6.2 A Variedade Instável. 188

Conteúdo

Introdução **19**

1 Preliminares **25**
1.1 Resultados básicos 25
1.2 Semigrupos não lineares 28
1.3 Operadores setoriais e semigrupos analíticos 30
1.3.1 Potências fracionarias de operadores setoriais 33
1.4 Equações de evolução com operador setorial 35
1.5 Atratores globais. Continuidade 41
1.5.1 Semigrupos gradientes e gradient-like 48
1.5.2 Taxa de convergência de atratores exponenciais 57
1.6 Grau topológico em dimensão infinita 58

2 Método dos Elementos Finitos **61**
2.1 Equivalência dos elementos 63
2.2 Teoria de aproximação polinomial em espaços de Sobolev 66
2.2.1 Limitações para o erro de interpolação 68

3 Convergência Compacta e Continuidade dos Atratores **79**
3.1 Continuidade do espectro 79
3.2 Perturbação da convergência compacta 98
3.3 Continuidade dos semigrupos lineares 99
3.4 Continuidade dos semigrupos não-lineares 101
3.5 Continuidade dos atratores 103
3.6 Continuidade dos conjuntos de equilíbrio 105

4 Atrator Global para um Problema Parabólico **113**
4.1 O operador A é setorial em X 115
4.2 O operador F é localmente Lipschitz contínuo 117
4.3 Solução local e global 123
4.4 Existência do atrator global 125

5 Discretização de Problemas Parabólicos usando o Método de Elementos Finitos 135

5.1 Aproximação do resolvente 141

5.2 Taxa de convergência da aproximação semi-discreta de elementos finitos . . . 149

5.2.1 Discretização com o método de elementos finitos do problema geral . 154

6 Continuidade de atratores de problemas parabólicos discretizados através do método de elementos finitos 157

6.1 Estimativas do resolvente e a taxa da convergência dos semigrupos 157

6.1.1 Taxa de convergência dos resolventes das linearizações 159

6.1.2 Taxas de convergência dos equilíbrios hiperbólicos e suas linearizações 162

6.1.3 Taxa de convergência dos semigrupos não lineares 178

6.2 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa das variedades instáveis locais 182

Referências Bibliográficas 197

Índice Remissivo 203

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave com $n \geq 2$. Consideremos o operador uniforme fortemente elíptico de segunda ordem dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + (c(x) + \lambda)u, \tag{1}$$

onde a_{ij}, b_j, c são funções reais suaves e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não linear de classe $C^2(\mathbb{R})$ com

$$|f'(s)| \leq C(1 + |s|^{\gamma-1}),\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{C}$$

onde $1 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $\gamma \geq 1$ se $n = 2$, e

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0. \tag{D}$$

Agora, supondo que $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ consideraremos o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(u), \quad t > 0,\ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u^0(x). \end{cases} \tag{2}$$

Seja $X = L^2(\Omega)$ e definamos o operador $A : D(A) \subset X \to X$ dado por $Au = -Lu$ com $u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Neste trabalho mostraremos que o operador A é setorial e com isto, garantiremos que $-A$ é gerador do semigrupo analítico $\{e^{-At} : t \geq 0\}$.

Assumiremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é escolhido de tal maneira que $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Então, podemos definir os espaços fracionários $X^\alpha = D(A^\alpha)$ munidos da norma do gráfico com $\alpha \geq 0$. Assim, sabemos que $X^1 = D(A)$, $X^0 = X = L^2(\Omega)$ e $X^{1/2} = H_0^1(\Omega)$.

Com esta notação o problema (2) pode ser escrito na forma abstrata no espaço X da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u) \\ u(0) = u^0 \in X^{1/2}, \end{cases} \tag{AP_0}$$

onde $F : X^{1/2} \to X$ é o funcional de Nemytskii associado à função f. Sob estas condições é sabido que existe um $\beta > 0$ tais que $\operatorname{Re}\sigma(A) > \beta$ e vale

$$\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X,X^\alpha)} \leq Mt^{-\alpha}e^{-\beta t},\ \forall t > 0. \tag{3}$$

Da condição (C) o problema (AP_0) é localmente bem posto em $X^{1/2}$ ver [10] e [37]. Agora, da condição (D), obteremos que o problema (AP_0) tem uma solução global no espaço $X^{1/2}$ seguindo o artigo [9]. Neste caso, temos que para cada $u^0 \in X^{1/2}$ tem uma solução definida globalmente $t \mapsto u(t, u^0) \in X^{1/2}$, $t \geqslant 0$. Isto nos permite definir o semigrupo não linear $\{T(t,\cdot) : t \geqslant 0\}$ associado ao problema (AP_0) com $T(t,\cdot) := T(t)(\cdot)$ da seguinte maneira $u(t, u^0) = T(t, u^0)$ com $u^0 \in X^{1/2}$ onde $T(t,\cdot)$ é dado pela fórmula da variação das constantes, isto é,

$$T(t, u^0) = e^{-tA}u^0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(T(s, u^0))ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{4}$$

Também, sob as hipóteses dadas acima, mostraremos que o semigrupo não linear $\{T(t,\cdot) : t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ em $X^{1/2}$ e

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \tag{5}$$

seguindo as ideias de [9] e [25]. A limitação em (5) nos permite cortar a não linearidade f de modo que seja limitada com a derivada até segunda ordem limitada sem alterar o atrator.

Nosso interesse é estudar a robustez do atrator $\mathcal{A}$ sob a *discretização* do problema (2) usando o *método de elementos finitos*. Este problema foi considerado em [17] para o caso unidimensional. A abordagem usada em [17] não pode ser seguida aqui para dimensões maiores já que o crescimento do "gap" entre dois autovalores consecutivos não tem o mesmo comportamento. Baseamos nossa abordagem sobre as técnicas desenvolvidas em [4] para a continuidade de atratores e [31] para as estimativas sobre os semigrupos lineares.

A seguir vamos usar a notação de [31] para descrever a discretização usando o método de elementos finitos. Sabemos que o operador A é setorial, seguindo [38] podemos associar este operador com uma forma sesquilinear $\sigma : X^{1/2} \times X^{1/2} \to \mathbb{C}$, tal que

$$\sigma(u, v) = \langle Au, v\rangle_X, \quad u \in D(A),\ v \in X^{1/2}, \tag{6}$$

$$|\sigma(u, v)| \leqslant c_1\|u\|_{X^{1/2}}\|v\|_{X^{1/2}}, \quad u, v \in X^{1/2}, \tag{7}$$

$$\operatorname{Re}\sigma(u, u) \geqslant c_2\|u\|^2_{X^{1/2}}, \quad u \in X^{1/2} \tag{8}$$

onde as constantes c_1, c_2 são positivas.

A discretização de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será feita via o método de elementos finitos com subdivisões de diâmetro igual a $h > 0$ como foi desenvolvido em [31] e seguindo as ideias feitas em [15] generalizaremos estes resultados para $n > 2$. Assim, segue que existe o espaço finito dimensional $X_h^{1/2} \subset X^{1/2}$. Para ser mais específico buscamos uma família $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ de subdivisões quase uniformes satisfazendo as condições do Teorema 2.2.2. Agora, podemos definir a projeção $P_h : X \to X_h^{1/2}$ com respeito ao produto interno de X. Neste ambiente, a aproximação $A_h : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$ do operador A é definido por

$$\langle A_h\phi_h, \psi_h\rangle = \sigma(\phi_h, \psi_h), \quad \phi_h, \psi_h \in X_h^{1/2}.$$

Em outras palavras, A_h é o operator associado com a forma sesquilinear σ_h que é a restrição sobre $X_h^{1/2} \times X_h^{1/2}$ de σ.

Com isto em mente, podemos estabelecer a discretização do problema (2) e escrevê-lo na forma

$$\begin{cases} \dot{u}_h + A_h u_h = F_h(u_h) \\ u_h(0) = u_h^0 \in X_h^{1/2}, \end{cases} \tag{AP_h}$$

onde $F_h := P_h F : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$ para todo $h \in (0, 1]$. Denotamos por $t \mapsto T_h(t, u_h^0)$ a solução $t \mapsto u_h(t, u_h^0)$ do problema (AP_h). Em [22] pode-se ver que o semigrupo não-linear discretizado $\{T_h(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator $\mathcal{A}_h$ em $X_h^{1/2}$ para todo $h \in (0, 1]$. Também, $T_h(\cdot)$ é dado pela fórmula da variação de constantes dada por

$$T_h(t, u_h^0) = e^{-tA_h}u_h^0 + \int_0^t e^{-(t-s)A_h}F_h(T_h(s, u_h^0))ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{9}$$

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a continuidade da família dos atratores $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ quando $h \to 0$ (onde $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$) no sentido da $\mathscr{P}-$convergência dada em [53] e apresentaremos as taxas desta continuidade nos espaços X e $X^{1/2}$. Também, mostraremos a atração exponencial uniforme em função do parâmetro h da família dos atratores $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in[0,1]}$.

Para atingirmos nosso objetivo, faremos isto em duas etapas:

• A primeira etapa consiste em provar a continuidade dos pontos de equilíbrio com taxa, e no caso dos equilíbrios serem hiperbólicos obtemos a continuidade das variedades instáveis lineares com taxa. Para isto seguiremos o seguinte programa:

(1) Mostraremos a $\mathscr{P}-$convergência dos operadores resolventes com taxa, isto é, mostrar que A_h^{-1} converge ao operador A^{-1} quando $h \to 0$ no sentido da $\mathscr{P}-$convergência nos espaços X e $X^{1/2}$. Este é um ponto chave de toda a análise.

(2) Escrevendo o problema estacionário como um problema de ponto fixo, isto é, u_h^* é uma solução de equilíbrio de (AP_h) (respectivamente u_0^* uma solução de equilíbrio de (AP_0)) se $u_h^* = A_h^{-1}F_h(u_h^*)$ (resp. $u^* = A^{-1}F(u^*)$) e com a $\mathscr{P}-$convergência dos operadores resolventes, mostraremos a $\mathscr{P}-$convergência dos equilíbrios com taxa nos espaços X e $X^{1/2}$. Além disso, se um ponto de equilíbrio do problema (AP_0) é hiperbólico, então este é isolado e existe um único ponto de equilíbrio do problema discretizado (AP_h) que está perto.

(3) Com a $\mathscr{P}-$convergência dos operadores resolventes e dos pontos de equilíbrio, mostraremos a $\mathscr{P}-$convergência dos operadores resolventes das linearizações em tornos destes equilíbrios, isto é, a $\mathscr{P}-$convergência de $(A_h - F_h'(u_h^*) + b)^{-1}$ para $(A - F'(u^*) + b)^{-1}$ quando $h \to 0$. Para o caso onde o equilíbrio é hiperbólico, isto implica a $\mathscr{P}-$convergência das variedades instáveis lineares com taxa nos espaços X e $X^{1/2}$.

• A segunda etapa consiste em provar a $\mathscr{P}-$convergência de semigrupos lineares e não lineares e as variedades instáveis não lineares dos pontos de equilíbrio:

(4) Com a $\mathscr{P}-$convergência dos operadores resolventes no item (**1**), mostraremos a $\mathscr{P}-$convergência com taxa dos semigrupos lineares e^{-tA_h} para e^{-tA} quando $h \to 0$ nos espaços X e $X^{1/2}$.

(5) Com ajuda da fórmula da variação das constantes, mostraremos a $\mathscr{P}-$convergências com taxa dos semigrupos não lineares $\{T_h(t,\cdot) : t \geq 0\}$ associados aos problemas (AP_h) e (AP_0) nos espaços X e $X^{1/2}$. Feito isto obteremos a semicontinuidade superior dos atratores com taxa.

(6) Assumindo que todos os equilíbrios são hiperbólicos, com a $\mathscr{P}-$convergência das variedades instáveis lineares com um argumento similar feito em [4], [5], [8], [12] e [35] provaremos a convergência com taxa das variedades instáveis locais. Usando agora que o semigrupo do problema (AP_h) é gradiente, mostraremos que os atratores são semicontínuos inferiormente com taxa e portanto contínuos.

Este programa foi usado com sucesso em [4] para a obtenção das taxas de um problema parabólico sobre um domínio singularmente perturbado, isto é, em [4] estudaram o problema (AP_h) quando $h \to 0$. Agora no nosso trabalho, sabemos da dinâmica do problema "limite" (AP_0) e queremos estudar o comportamento desta dinâmica sob a discretização do domínio usando o método de elementos finitos.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

O **Capítulo 1** é dedicado aos resultados fundamentais para o desenvolvimento do trabalho onde muitas das demonstrações podem ser achadas na bibliografia apresentada. Também, apresentamos a teoria de sistemas dinâmicos contínuos autônomos, definições e resultados, dentre eles as condições para a existência de atratores. Além disso, fazemos uma introdução aos semigrupos gradientes e gradient-like. No final deste capítulo, apresentamos resultados da continuidade dos atratores.

Neste **Capítulo 2** faremos uma introdução aos métodos de elementos finitos e a resultados gerais do erro onde está envolvido o interpolante que é uma ferramenta muito importante para o cálculo das taxas de convergência. Na última seção deste capítulo, encontram-se os resultados que servem para a generalizar o estudo feito em [31] para $n > 2$.

No **Capítulo 3** desenvolveremos as ferramentas gerais da $\mathscr{P}-$convergência em espaços discretos que variam em função de algum parâmetro h e que garantam a continuidade dos conjuntos de equilíbrio, e atratores dos semigrupos $\{T_h(t,\cdot) : t \geq 0\}$ em espaços diferentes. Também, apresentam-se a convergência compacta, definição que usaremos para o desenvolvimento de nosso trabalho.

No **Capítulo 4** mostraremos a existência do atrator global $\mathcal{A}$ para o problema (AP_0) e a limitação dele no espaço $L^\infty(\Omega)$.

O **Capítulo 5** contém a forma de como será discretizado nosso problema (2). Mostraremos, os resultados necessários para as generalizações de algumas propriedades de [31] em dimensão $n \in \mathbb{N}^*$. Além disso, mostraremos a existência do atrator global $\mathcal{A}_h$.

No **Capítulo 6** usaremos as ideias estudadas em [4], [6], [7], [8], [12], [35] e [44] para estudar a continuidade do conjunto de equilíbrios, o problema limite e a continuidade dos atratores. Assim, estudamos o comportamento da dinâmica assintótica não linear do problema (2) sob um certo tipo de perturbação dada pela discretização do domínio Ω via o método do elemento finito em função do parâmetro h.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.0.1 *Seja $\{T_h(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo gradiente não linear associado ao problema (AP_h) com atrator global $\mathcal{A}_h$. Suponhamos que existam $\theta \in (0, 1/2)$, $h_0 > 0$, $L > 0$, $\beta > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|T_h(t)u_h^0 - P_hT(t)u^0\|_{X^s} \leq Ce^{Lt}t^{-2\theta(1-s)-s}(\|u_h^0 - P_hu^0\|_X + h^{4\theta(1-s)}),$$

para todo $t > 0$ e $s = 0, 1/2$. Além disso, os pontos de equilíbrio do problema (AP_0) existam em número finito $\mathcal{E}_0 = \{u_{1,0}^*, \cdots, u_{\mathfrak{p},0}^*\}$ e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $h \in (0, h_0]$, temos

(i) O semigrupo $\{T_h(t) : t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrios $\mathcal{E}_h =$

$\{u^*_{1,h}, \cdots, u^*_{\mathfrak{p},h}\}$ *e*

$$\mathcal{A}_h = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^{\mathrm{u}}(u^*_{i,h});$$

(*ii*) *Existe* $\rho > 0$ *tal que dado* $B \subset X^{1/2}$ *limitado, existe* $c = c(B) > 0$ *tal que*

$$d_H^{X^s}(T_h(t)B, \mathcal{A}_h) \leq ce^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

(*iii*) *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$d_H^{X^s}(\mathcal{A}_h, P_h\mathcal{A}_0) + d_H^{X^s}(P_h\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_h) \leq Ch^{\frac{4\theta(1-s)\rho}{\rho+L}},$$

onde $d_H^{X^s}(A, B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|_{X^s}$ *com* $A, B \subset X$ *é a semidistância de Hausdorff.*

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo relatamos alguns resultados de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

1.1 Resultados básicos

Definição 1.1.1 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que q é o conjugado de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

Teorema 1.1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ onde p e q são conjugados com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Ver [16], página 56. ■

Uma conseqüência da desigualdade de Hölder vem na seguinte observação.

Observação 1.1.1 *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções tais que $f_1 \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ com*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então, $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.2 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.3}$$

Em particular, $u \mapsto |u|_{W^{1,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$ *define uma norma em* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, a qual é equivalente à norma* $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$*. Em* $H_0^1(\Omega)$*, a forma bilinear*

$$(u, v) \mapsto \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

define um produto interno que dá lugar à norma $|\cdot|_{W^{1,2}(\Omega)}$*, equivalente à norma* $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$*.*

Demonstração. Ver [39], página 71. ■

Corolário 1.1.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto qualquer e* $n \in \mathbb{N}$*. Então* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$*.*

Prova. Ver [16], página 71. □

Teorema 1.1.3 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) *Sejam* $m \in \mathbb{N}$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado com* $\partial\Omega$ *de classe* C^m *onde* $n \in \mathbb{N}^*$*. Seja* $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq r$*,* $q \leq \infty$*. Então, para qualquer inteiro* j*,* $0 \leq j < m$ *e qualquer número* $\theta \in [\frac{j}{m}, 1)$*, definimos*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\Big(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\Big) + (1-\theta)\frac{1}{q}. \tag{1.4}$$

Se $m - j - \frac{n}{r}$ *não é um inteiro negativo, então*

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|^\theta_{W^{m,r}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}, \tag{1.5}$$

onde D^j *denota qualquer derivada (fraca) de ordem* j *e a constante positiva* $C = C(\Omega, r, q, m, j, \theta)$*.*

Se $m - j - \frac{n}{r}$ *é um inteiro negativo, então* (1.5) *vale com* $\theta = \frac{j}{m}$*.*

Demonstração. Ver [30], página 27. ■

Lema 1.1.1 (Desigualdade de Cauchy) *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $\varepsilon > 0$*. Então,*

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2. \tag{1.6}$$

Prova. Ver [25], página 16. □

Lema 1.1.2 (Desigualdade de Young) *Seja* $\varepsilon > 0$*,* a*,* $b \geq 0$*,* p*,* $q > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$ab \leq \varepsilon\frac{a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{q}{p}}}\frac{b^q}{q}. \tag{1.7}$$

Prova. Ver [25], página 16. □

Freqüentemente o Lema 1.1.2 aparece na forma seguinte

Corolário 1.1.2 *Seja a, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ e $m > 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{1}{m}\varepsilon^m a^m + \frac{m-1}{m}\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} b^{\frac{m}{m-1}}. \tag{1.8}$$

A seguir darmos um resultado muito importante.

Lema 1.1.3 (Desigualdade de Gronwall generalizada) *Sejam $t < r$, $\phi : [t, r] \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, $a : [t, r] \to \mathbb{R}^+$ uma função integrável, $b > 0$ e $0 < \beta \leq 1$. Assumamos*

$$\phi(t) \leq a(t) + b\int_t^r (s-t)^{\beta-1}\phi(s)ds, \quad t < r. \tag{1.9}$$

Então,

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} B^k a(t),$$

onde

$$B^k a(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)}(s-t)^{k\beta-1}a(s)ds.$$

Além disso, se $a(t) = a$ constante, então

$$\phi(t) \leq ace^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)}. \tag{1.10}$$

Se $a(t) = c_0\displaystyle\int_t^r (s-t)^{-\alpha}e^{\rho(s-r)}ds$, $\rho > 0$, $\alpha = 1-\beta$, então

$$\phi(t) \leq \frac{c_0}{b}[ce^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)} - 1].$$

Finalmente, se $\psi : [t, r] \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e $a(t) = c_0\displaystyle\int_t^r (s-t)^{-\alpha}e^{\rho s}\psi(s)ds$, $\rho > 0$, $\alpha \geq 0$, então

$$\phi(t) \leq c_0 c'\Gamma(\beta)\int_t^r (s-t)^{\beta-1}e^{\rho s}e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(s-t)}\psi(s)ds.$$

Prova. Os detalhes da prova estão contidos em [37] com algumas adaptações. □

Teorema 1.1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\ell \in \mathbb{N}$. Então $C^\infty(\Omega) \cap W^{\ell,p}(\Omega)$ é denso em $W^{\ell,p}(\Omega)$ onde $1 \leq p < \infty$ e $C^\infty(\Omega) \cap \overline{C}^\ell(\Omega)$ é denso em $\overline{C}^\ell(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [18], página 47. ■

Teorema 1.1.5 (Imersões de Sobolev) *Sejam $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que satisfaz a condição do cone ou tem fronteira Lipschitz. Então,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} W^{k,q}(\Omega), & se\ m - \dfrac{n}{p} \geq k - \dfrac{n}{q},\ q \geq p \\ & (a\ menos\ que\ m - \dfrac{n}{p} = k,\ q = \infty) \\ C^{k+\mu}(\overline{\Omega}), & se\ 0 \leq \mu \leq m - k - \dfrac{n}{p} < 1, \\ & (a\ menos\ que\ m - \dfrac{n}{p} \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Além disso, para Ω limitado as inclusões acima são compactas no caso das desigualdades estritas; $m - \dfrac{n}{p} > k - \dfrac{n}{q}$ ou $m - \dfrac{n}{p} > k + \mu$, respectivamente.

Demonstração. Ver [25], página 23 e 207. ■

1.2 Semigrupos não lineares

Seja X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Definamos os seguintes conjuntos $\mathscr{L}(X) = \{\varphi : X \to X/\varphi$ é operador linear$\}$, $\mathcal{C}(X) = \{\varphi : X \to X/\varphi$ é operador contínuo$\}$, $\mathscr{K}(X) = \{\varphi : X \to X/\varphi$ é operador compacto$\}$, $\mathscr{K}_0(X) = \{\varphi : X \to X/\varphi$ é operador linear e compacto$\}$ e $\mathscr{B}(X) = \{\varphi : X \to X/\varphi$ é operador linear e limitado$\}$.

Denotemos $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais, por $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ o conjunto dos números naturais sem o zero, $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geq 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T} : t \leq 0\}$, $\mathbb{T}_n^- = n + \mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}_n^+ = n + \mathbb{T}^+$. Dado um subconjunto K de X e $\epsilon > 0$, a ϵ-vizinhança de K é o conjunto definido por $\mathcal{O}_\epsilon(K) := \{x \in X : d(x, K) < \epsilon\}$.

Definição 1.2.1 (Semigrupo) *Uma família de operadores $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ é chamada de um C_0-Semigrupo (Semigrupo fortemente contínuo) se*

i) $T(0)x = x$, *para todo* $x \in X$,

ii) $T(t + s) = T(t) \circ T(s)$, *para todo* $t, s \in \mathbb{T}^+$ *e*

iii) $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ *é contínuo em cada ponto* $(t, x) \in [0, \infty) \times X$.

Sabe-se que para os semigrupos de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X a condição (iii) vale se, e somente se, para qualquer elemento $x \in X$, tem-se

$$T(t)x \to x \text{ quando } t \to 0^+,$$

que é basicamente uma conseqüência da propriedade de limitação uniforme de Banach.

Definição 1.2.2 (Órbitas) *Dados um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, um ponto $x \in X$ e $B \subset X$, definimos*

- *Para cada $t \in \mathbb{T}$, a imagem de B sob $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, é*

$$T(t)B := \{T(t)x : x \in B\};$$

- *A órbita positiva de B, é*

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)B;$$

- *A órbita parcial entre dois números de $\mathbb{T}^+$, $t < t_0$, é*

$$\gamma^+_{[t,t_0]}(B) := \bigcup_{t\leq s\leq t_0} T(s)B;$$

- *A órbita de $T(t)B$, é*

$$\gamma^+_t(B) := \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+} T(t+s)B = \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+_t} T(s)B.$$

Definição 1.2.3 (Solução global) *Uma solução global por $x \in X$ é uma função $\phi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \in \mathbb{T}$, $T(t)(\phi(s)) = \phi(t + s)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Uma solução global constante é chamada uma solução estacionária e o seu valor um ponto de equilíbrio. Como o $T(t) : X \to X$ não é necessariamente injetiva, se uma solução global existe, ela não precisa ser única. Quando existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por $x \in X$, podemos definir a órbita global de x relativa à solução global ϕ por $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{T}\}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$ escrevemos $(\gamma_\phi)^-_t(x) = \{\phi(s) : s \leq t\}$.*

Definição 1.2.4 (ω-limite e α-limite) *O conjunto ω-limite de um subconjunto B de X é definido como segue*

$$\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+_t(B)}$$

e, se existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ que passa por x, definimos o conjunto α-limite de x relativo a ϕ por

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\phi)^-_t(x)}.$$

Proposição 1.2.1 *Se $B \subset X$, $\omega(B)$ é fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X : \exists\, \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B, \text{ tal que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } y = \lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Se $\phi : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global e $\phi(0) = x$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \exists\, \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+ \text{ tal que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } \phi(-t_n) \to v\}.$$

Prova. Primeiramente, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma seqüência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que $y_k^n = T(n + q_k^n)x_k^n$.

Sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k^n, y) < \epsilon$, se $k \geq k(n,\epsilon)$, isto é, $d(T(n + q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geq k(n,\epsilon)$. Defina então $t_n := n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})}$ e $x_n := x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, assim $d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Para a recíproca, seja $y \in X$ e seqüências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tais que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Assim, fixado $\tau \in \mathbb{T}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n\geq\tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$, e $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Isto mostra que $y \in \omega(B)$.

A caracterização de $\alpha_\phi(x)$ tem prova análoga. □

1.3 Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Definição 1.3.1 (Operador setorial) *Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ em um espaço de Banach X é um operador setorial se é um operador fechado, densamente definido tal que, para algum $\phi \in (0, \pi/2)$, algum $M \geq 1$ e um $a \in \mathbb{R}$, o setor*

$$\mathcal{S}_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C}/\phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A) \tag{1.11}$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \text{ para todo } \lambda \in \mathcal{S}_{a,\phi}. \tag{1.12}$$

Observação 1.3.1 *Note que o ângulo de abertura da seção $\mathcal{S}_{a,\phi}$ é $2\pi - 2\phi > \pi$.*

Observação 1.3.2 *Escolha um $\omega \in \mathbb{R}$ qualquer. Se A é um operador setorial se e somente se $A_\omega := A + \omega I$ é um operador setorial (ver [25], página 32).*

Proposição 1.3.1 *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido em um espaço de Banach X e consideremos os operadores $A_\omega = A + \omega I$ com $\omega \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A_ω é setorial em X para algum $\omega \in \mathbb{R}$,

b) A_ω é setorial em X para cada $\omega \in \mathbb{R}$,

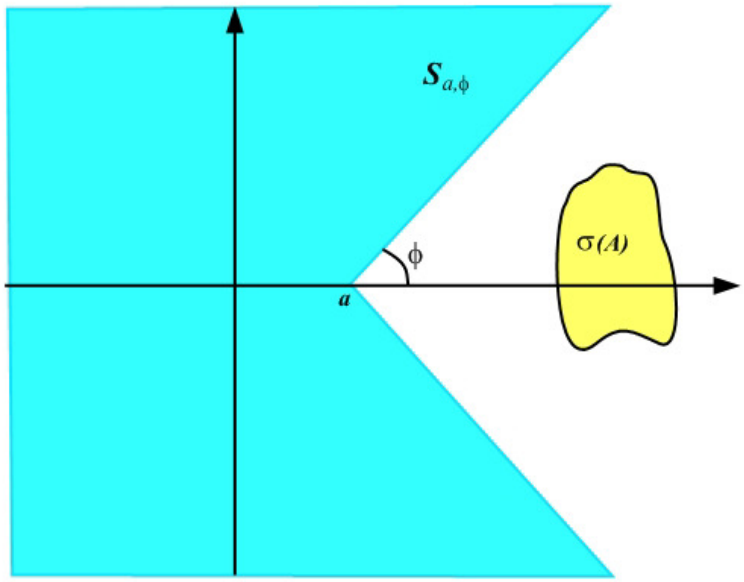


Figura 1.1: Sector $\mathcal{S}_{a,\phi}$

c) Existem $k, \omega \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto resolvente $\rho(A_\omega)$ de A_ω contem um semi-plano $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \leq k\}$ e

$$\|\lambda(\lambda I - A_\omega)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M, \text{ para } Re\,\lambda \leq k. \tag{1.13}$$

Prova. Ver [25], página 33. □

Definição 1.3.2 (Semigrupo Analítico) *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo em X. Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um **semigrupo analítico**, se existe um setor do plano complexo $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg z < \phi_2\}$ com $\phi_1 < 0 < \phi_2$ e uma família de operadores lineares limitados $T(z) : X \to X$, $z \in \mathcal{S}$, coincidindo con $T(t)$ para $t \geq 0$ e tal que*

- *$z \to T(z)x$ é analítica em $\mathcal{S}$,*
- *$\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathcal{S}}} T(z)x = x$, para todo $x \in X$,*
- *$T(z + w) = T(z) \circ T(w)$, para todo $z, w \in \mathcal{S}$.*

Teorema 1.3.1 *Seja X um espaço de Banach. Então um operador linear densamente definido $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, se e somente se A é um operador setorial em X.*

Demonstração. Ver [25, Página 35] e [37, Página 21]. ■

Proposição 1.3.2 (Perturbação de um operador setorial) *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em um espaço de Banach X e $B : D(B) \subset X \to X$ é um operador linear com $D(B) \supset D(A)$ tal que para qualquer $x \in D(A)$ cumpre-se*

$$\|Bx\|_X \leq \varepsilon \|Ax\|_X + K_\varepsilon \|x\|_X, \tag{1.14}$$

onde $\varepsilon > 0$ é uma constante arbitraria pequena e K_ε é uma constante positiva dependendo de ε, então $A + B$ é um operador setorial.

Demonstração. Ver [58], página 69. ■

Corolário 1.3.1 *Se A é setorial em um espaço de Banach X e B é um operador linear limitado em X, então o operador perturbado $A + B$ é setorial.*

Prova. Se B é linear e limitado em X, então (1.14) se mantém com $\varepsilon = 0$ e $K_\varepsilon = \|B\|_{\mathscr{L}(X)}$. O operador $A + B$ é setorial como uma conseqüência da Proposição 1.3.2. □

Definição 1.3.3 *Dizemos que $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear é **limitado inferiormente** em um espaço de Hilbert H se existe uma constante $m \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\langle Ax, x \rangle_H \geq m \|x\|_H^2, \tag{1.15}$$

para todo $x \in D(A)$.

Proposição 1.3.3 *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear, auto-adjunto, densamente definido em um espaço de Hilbert H. Se A é limitado inferiormente em H, então A é um operador setorial em H.*

Demonstração. Ver [25], página 39. ■

Exemplo 1.3.1 *$-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, com $\partial\Omega \in C^2$ é setorial.*

Teorema 1.3.2 *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador densamente definido no espaço de Banach X, satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para algum $0 < \delta < \pi/2$, $\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} / |\arg(\lambda)| \leq \delta + \pi/2\} \subset \rho(A)$ e

ii) Existe uma constante M tal que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_\delta. \tag{1.16}$$

Então, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$, para alguma constante C. Além disso,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \tag{1.17}$$

onde Γ é uma curva suave em Σ_δ indo de $\infty e^{-i\vartheta}$ a $\infty e^{i\vartheta}$ para $\pi/2 < \vartheta < \delta + \pi/2$. A integral (1.17) *converge para $t > 0$ na topologia de operador uniforme.*

Prova. Ver [45], página 30. □

1.3.1 Potências fracionarias de operadores setoriais

Seja A um operador setorial em X com $Re\,\sigma(A) > 0$. Para $\alpha > 0$, os operadores $A^{-\alpha} : X \to X$ são definidos pela fórmula integral

$$A^{-\alpha} v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} v dt. \tag{1.18}$$

Teorema 1.3.3 *Seja A um operador setorial em X com $Re\,\sigma(A) > 0$. Os $A^{-\alpha}$, para $\alpha \in (0, \infty)$, são operadores lineares limitados bem definidos em X obtendo uma correspondência injetiva entre X e a imagem $R(A^{-\alpha})$. Também, $A^{-1} : D(A) \to X$ coincide com a inversa de A e $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$, para $\alpha, \beta > 0$. Além disso, para $0 < \alpha < 1$, temos*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Demonstração. Ver [37], página 25. ■

Olhemos que cada $A^{-\alpha}$ com $\alpha > 0$ é invertível. Denotemos $A^{-(-\alpha)} = A^\alpha$, $X^\alpha := R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$ e $X^0 := X$.

Proposição 1.3.4 *Se A um operador setorial em X com $Re\,\sigma(A) > 0$, então X^α $(\alpha > 0)$ com a norma $\|v\|_{X^\alpha} := \|A^\alpha v\|_X$ são espaços de Banach enquanto que $A^\alpha : X^\alpha \to X$ são operadores lineares fechados e densamente definidos em X satisfazendo*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}, \ \alpha, \beta \geq 0. \tag{1.19}$$

Além disso, X^α é um subconjunto denso de X^β para $\alpha \geq \beta \geq 0$, as inclusões

$$X^\alpha \subset X^\beta; \ \alpha, \beta \geq 0, \tag{1.20}$$

são densas e contínuas e, elas são compactas, desde que A tem resolvente compacto.

Prova. Ver [28], página 140. □

Proposição 1.3.5 *Seja A um operador setorial em X com $Re\,\sigma(A) > a > 0$. Para $\alpha \geq 0$, $t \geq 0$, $A^\alpha e^{-At}$ é um operador linear limitado em X, tal que*

$$\left\|A^\alpha e^{-At}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{c_\alpha}{t^\alpha} e^{-at},\ t > 0, \tag{1.21}$$

$$A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha \ \text{em}\ X^\alpha,\ t \geq 0. \tag{1.22}$$

Prova. Ver [37], página 26. □

Teorema 1.3.4 *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ un operador setorial em um espaço de Banach X. Se $0 \leq \alpha \leq 1$, $v \in D(A)$, então $\|A^\alpha v\|_X \leq C\|Av\|_X^\alpha \|v\|_X^{1-\alpha}$, isto é,*

$$\|A^\alpha v\|_X \leq \varepsilon \|Av\|_X + \tilde{C}\varepsilon^{\alpha/(1-\alpha)}\|v\|_X,$$

para todo $\varepsilon > 0$. (Aqui C, $\tilde{C}$ são constantes independentes de α.)

Demonstração. Ver [37], página 26. ■

Proposição 1.3.6 *A fórmula de interpolação seguinte*

$$[X^\alpha, X^\beta]_\theta = X^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta},\ \text{para}\ \alpha, \beta \geq 0,\ \theta \in (0,1), \tag{1.23}$$

juntamente com a desigualdade

$$\|v\|_{X^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}} \leq C_\theta \|v\|_{X^\beta}^\theta \|v\|_{X^\alpha}^{1-\theta},\ v \in X^\alpha \cap X^\beta,\ \alpha, \beta \geq 0,\ \theta \in (0,1), \tag{1.24}$$

valem sempre que A é um operador setorial no espaço de Banach X tal que $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ e $\|A^{it}\|_{\mathscr{L}(X,X)} \leq const.(\varepsilon)$ para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Aqui $[\cdot,\cdot]_\theta$ denota um espaço de interpolação complexa (Ver [51]).

Prova. Ver [51], página 103. □

Corolário 1.3.2 *Os espaços X^θ, com $0 < \theta < 1$ são espaços intermediários entre X e $D(A)$, isto é,*

$$X^\theta = D(A^\theta) = [X, D(A)]_\theta, \tag{1.25}$$

e

$$\|v\|_{X^\theta} \leq c_\theta \|Av\|_X^\theta \|v\|_X^{1-\theta},\ v \in D(A). \tag{1.26}$$

Prova. Como $X = X^0$ e $D(A) = X^1$ e, escolhendo $\alpha = 0$, $\beta = 1$ na Proposição 1.3.6 o resultado segue. □

1.4 Equações de evolução com operador setorial

Consideremos o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u),\ t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{cases} \tag{PVI}$$

onde A é um operador setorial em um espaço de Banach X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, $f : X^\alpha \to X$ é localmente Lipschitz contínua e $\alpha \in [0, 1)$.

Definição 1.4.1 *Seja X um espaço de Banach, $\alpha \in [0, 1)$ e $u_0 \in X^\alpha$. Se, para algum real $\tau > 0$, a função $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$ satisfaz que $u(0) = u_0$, $u \in C^1([0, \tau), X)$, $u(t) \in D(A)$ e* (PVI) *para cada $t \in (0, \tau)$, então u é chamado uma* ***solução local em*** *X^α do* (PVI).

Teorema 1.4.1 *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ e $f : X^\alpha \to X$ localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$. Para todo $u_0 \in X^\alpha$, existe uma única solução em X^α, $u = u(t, u_0)$, do* (PVI) *definida sobre um intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$ o qual significa que ou $\tau_{u_0} = +\infty$, ou*

$$\text{Se } \tau_0 < \infty, \text{ então } \limsup_{t \to \tau_{u_0}^-} \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} = +\infty. \tag{1.27}$$

Demonstração. Ver [25], página 62. ■

Lema 1.4.1 (Fórmula Integral de Cauchy) *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, $f : X^\alpha \to X$ localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$ e $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$. Então u é uma solução local em X^α do* (PVI) *se, e somente se u satisfaz em X a equação integral*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s))ds, \text{ para } t \in [0, \tau). \tag{1.28}$$

Prova. Ver [25], página 57. □

Corolário 1.4.1 (Localmente bem posto) *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, $f : X^\alpha \to X$ localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$ e $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$. Se u satisfaz em X a equação integral* (1.28)*, então*

$$u \in C\big((0, \tau), X^1\big), \tag{1.29}$$

$$\dot{u} \in C\big((0, \tau), X^\gamma\big),\ \gamma \in [0, 1). \tag{1.30}$$

Prova. Ver [25], página 66. □

Proposição 1.4.1 *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ e $f : X^\alpha \to X$ localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$. Para qualquer conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existe $\tau_B > 0$ tal que as soluções $u(t, u_0)$ do* (PVI) *com $u_0 \in B$ existem e são limitadas em X^α uniformemente para $t \in [0, \tau_B]$ e $u_0 \in B$.*

Prova. Ver [25], página 66. □

Proposição 1.4.2 *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ e $f : X^\alpha \to X$ localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$. Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^\alpha$ e $u_n \to u_0$ em X^α, então $T_0 := \inf\{\tau_{u_n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ é positivo, $\tau_{u_0} \geq T_0$ (τ_{u_n} sendo a duração do tempo de $u(t, u_n)$) e para todo $T \in (0, T_0)$,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t, u_n) - u(t, u_0)\|_{X^\alpha} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.31}$$

Prova. Ver [25], página 67. □

Definição 1.4.2 *Uma função $u = u(t)$ é chamada de* ***solução global em*** X^α *do* (PVI) *se cumpre com os requerimentos da Definição 1.4.1 com $\tau = +\infty$.*

Teorema 1.4.2 *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ e $f : X^\alpha \to X$ localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$. Se f satisfaz a restrição de crescimento sublinear:*

$$\|f(u)\|_X \leq \nu(1 + \|u\|_{X^\alpha}), \tag{1.32}$$

onde ν é uma constante positiva, então existe uma única solução global em X^α do (PVI).

Prova. Ver [25], página 70. □

Se a qualquer dado inicial $u_0 \in X^\alpha$ corresponde-lhe uma solução global $u(t, u_0)$ do (PVI), então um C_0-Semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ correspondente ao (PVI) pode ser definido em X^α através da relação

$$T(t)u_0 = u(t, u_0), \quad t \geq 0. \tag{1.33}$$

Observação 1.4.1 *Lembremos a Definição 1.2.1 e as propriedades da família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$ definida em* (1.33)*. Da definição da solução em X^α para o* (PVI)*, segue-se imediatamente que*

$$T(0)u_0 = u(0, u_0) = u_0.$$

Como (PVI) *é autônomo, a propriedade*

$$T(t)T(s)u_0 = T(t+s)u_0, \quad t, s \geq 0, \tag{1.34}$$

é conseqüência da unicidade das soluções. Finalmente a continuidade da aplicação

$$[0, +\infty) \times X^\alpha \ni (t, u_0) \to T(t)u_0 = u(t, u_0) \in X^\alpha$$

segue da Proposição 1.4.2 e o fato que $u(\cdot, u_0) \in C([0, +\infty), X^\alpha)$ *(note que a Proposição 1.4.2, lê-se que* $T(t)u_0$ *é uniformemente continua como uma função de* u_0 *com respeito a* t *variando em subconjuntos compactos de* $[0, +\infty)$*).*

Teorema 1.4.3 *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado. Então* $\rho(A)$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e conseqüentemente* $\sigma(A)$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{C}$*.*
Além disso, se $\mu \in \rho(A)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$*, então* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1}. \tag{1.35}$$

Demonstração. Se $\mu \in \rho(A)$, então $(\mu - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, escrevemos

$$(\lambda - A) = (\mu - A)[I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}]$$

e se $|\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$, segue que $\lambda \in \rho(A)$ e (1.35) está demonstrada. ■

Teorema 1.4.4 *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear. Se* $\lambda, \mu \in \rho(A)$*, então*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \tag{1.36}$$

e

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \tag{1.37}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}[(\mu - A) + (\lambda - \mu)I](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}\end{aligned}$$

o que prova (1.36). A prova de (1.37) é imediata de (1.36). ■

Corolário 1.4.2 *Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Então, a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ é analítica e*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}.$$

Prova. Fixe $\lambda_0 \in \rho(A)$ e observe que, de (1.36) e do fato que (1.35) converge uniformemente para

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{2\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}},$$

$\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ é contínua em λ_0. Novamente utilizando (1.36) temos que $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ é derivável em λ_0 e $\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = -(\lambda - A)^{-2}$. O caso geral segue da identidade

$$(\lambda - A)^{-n} - (\mu - A)^{-n} = [(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}][(\mu - A)^{-n+1} + (\mu - A)^{-n+2}(\lambda - A)^{-1} + \cdots + (\lambda - A)^{-n+1}]$$

e de um simples argumento de indução. □

Teorema 1.4.5 (Módulo Máximo) *Seja X um espaço de Banach complexo e Ω um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$. Seja $f : \Omega \to X$ uma função analítica em Ω e suponha que $\|f(\lambda)\|_X$ não é constante em Ω. Então $\|f(\lambda)\|_X$ não pode atingir um máximo absoluto em nenhum ponto de Ω.*

Demonstração. Suponha que existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $\|f(\lambda_0)\|_X \geq \|f(\lambda)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$. Do Teorema de Hanh-Banach, existe $x^* \in X^*$ com $\|x^*\|_{X^*} = 1$ tal que $x^*(f(\lambda_0)) = \|f(\lambda_0)\|_X$. Segue que $g = x^* \circ f$ é uma função analítica em Ω com $|g(\lambda)| \leq |g(\lambda_0)|$ para todo $\lambda \in \Omega$. Do Teorema do Máximo Módulo no $\mathbb{C}$, g é constante em Ω e $x^*(f(\lambda)) = \|f(\lambda_0)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$. Por outro lado, $\|f(\lambda_0)\|_X = x^*(f(\lambda)) \leq \|f(\lambda)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$ e chegamos a uma contradição com o fato que $\|f(\lambda)\|_X$ não é constante. ■

Definição 1.4.3 *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ no espaço de Banach X com $\rho(A) \neq \emptyset$ tem resolvente compacto se seu resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathscr{K}(X)$ para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$.*

Proposição 1.4.3 *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear no espaço de Banach X com $\rho(A) \neq \emptyset$ e $X_1 := (D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ onde $\|\cdot\|_{D(A)} = \|\cdot\|_X + \|A\cdot\|_X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) O operador A tem resolvente compacto.

ii) A injeção canônica $i : X_1 \hookrightarrow X$ é compacta.

Prova. Ver [28], página 118. □

Observação 1.4.2 *Uma conseqüência da identidade* (1.36) *é, se* A *tem resolvente compacto, então* $R(\lambda, A)$ *é compacto para todo* $\lambda \in \rho(A)$*. De fato, fazemos uso de*

$$R(\lambda, A) = [I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)]^{-1}R(\lambda_0, A) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1},$$

onde $\lambda, \lambda_0 \in \rho(A)$ *com* $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}_{\mathscr{L}(X)}$ *e o resultado segue.*

Definição 1.4.4 *Um ponto* $\lambda_0 \in \sigma(A)$ *é dito ser um* ***ponto isolado de*** $\sigma(A)$*, se existe uma vizinhança* U *de* λ_0 *tal que* $\sigma(A) \cap U = \{\lambda_0\}$*. Um ponto isolado de* λ_0 *de* $\sigma(A)$ *é chamado um polo de* A*, ou simplesmente polo, se* $R(\lambda_0, A)$ *tem um polo em* λ_0*. A ordem de um polo* λ_0*,* $\nu(\lambda_0)$*, quer dizer a ordem de* λ_0 *como um polo de* $R(\lambda_0, A)$*.*

Teorema 1.4.6 *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado e com resolvente compacto no espaço de Banach* X*. Então o espectro de* A*,* $\sigma(A)$*, consiste inteiramente de autovalores isolados com multiplicidade finita.*

Demonstração. Ver [38], página 187. ■

Teorema 1.4.7 *Se* λ *é um polo de ordem* $\nu(\lambda) = m \geq 1$*, então*

i) $N[(\lambda - A)^m] = N[(\lambda - A)^{m+1}]$*;*

ii) $R[(\lambda - A)^m] = R[(\lambda - A)^{m+1}]$*;*

iii) $R[(\lambda - A)^m]$ *é fechado;*

iv) $X = N[(\lambda - A)^m] \oplus R[(\lambda - A)^m]$*;*

v) a projeção espectral $Q(\lambda, A)$ *sobre* $N[(\lambda - A)^m]$ *correspondente à decomposição em* (iv) *pode ser representada pela integral de contorno*

$$Q(\lambda, A)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} R(\xi, A)u\, d\xi, \tag{1.38}$$

onde Γ_λ *é um circulo incluindo* λ *mas não outro ponto do conjunto discreto de autovalores de* $\sigma(A)$ *e* $u \in X$*.*

Demonstração. Ver [50], página 330. ■

Teorema 1.4.8 *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado no espaço de Banach X e $T : D(T) \subset X \to X$ um operador com $D(A) \subset D(T)$ tal que*

$$\|Tu\|_X \leq a\|u\|_X + b\|Au\|_X,\ u \in D(A), \tag{1.39}$$

onde a e b são constantes não-negativas. Se existe um ponto ζ de $\rho(A)$ tal que

$$a\|(\zeta - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} + b\|A(\zeta - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < 1, \tag{1.40}$$

então $S = A + T$ é fechado e $\zeta \in \rho(S)$ com

$$\|(\zeta - S)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \|(\zeta - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\big(1 - a\|(\zeta - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} - b\|A(\zeta - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\big)^{-1}. \tag{1.41}$$

Em particular, se A tem resolvente compacto, então S tem resolvente compacto.

Demonstração. Ver [38], página 214. ■

Teorema 1.4.9 (Alternativa de Fredholm) *Seja $A \in \mathscr{K}(X)$ no espaço de Banach X. Então*

a) $N(I - A)$ é de dimensão finita,

b) $R(I - A)$ é fechado e $R(I - A) = N(I - A^*)^{\perp}$,

c) $N(I - A) = \{0\} \Longleftrightarrow R(I - A) = X$,

d) $\dim(N(I - A)) = \dim(N(I - A^*))$.

Demonstração. Ver [16], página 92. ■

Proposição 1.4.4 *Se $A : X \to Y$ é um operador linear limitado nos espaços normados X e Y com imagem sendo um subespaço vetorial de dimensão finita, então A é um operador compacto.*

Prova. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X, então $\|Au_n\|_Y \leq \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|u_n\|_X$; isto é, $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada na imagem $R(A)$ a qual é um espaço vetorial de dimensão finita. O Teorema de Bolzano-Weierstrass nos permite concluir que $\{Au_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para alguma subseqüência de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Definição 1.4.5 *O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito ser compacto se $T(t) : V \to V$ é uma aplicação compacta no espaço métrico V para cada $t > 0$, isto é, $T(t)$ leva conjuntos limitados em conjuntos precompactos.*

Teorema 1.4.10 *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ no espaço de Banach X e $f : X^\alpha \to X$ é localmente Lipschitz contínua para algum $\alpha \in [0, 1)$. Se A tem resolvente compacto e a relação $T(t)u_0 = u(t, u_0)$ define um C_0-Semigrupo $T(t) : X^\alpha \to X^\alpha$, $t > 0$, de soluções globais em X^α do* (PVI)*. Então, para cada $t > 0$, $T(t)$ é uma aplicação compacta em X^α.*

Prova. Ver [25], página 80. □

1.5 Atratores globais. Continuidade

Definição 1.5.1 (Semi-distancia de Hausdorff) *Dados A e B subconjuntos de um espaço métrico X com a métrica d, definimos a* ***Semi-distância de Hausdorff*** *como*

$$d_H(A, B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y). \tag{1.42}$$

Observação 1.5.1 *A distância usual de conjuntos é $dist(A, B) := \inf_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y)$, observemos a diferença com a semi-distancia de Hausdorff.*

Definição 1.5.2 (Atração) *Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico X. Dizemos que A atrai B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se $\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, A) = 0$, ou equivalentemente, dado $\epsilon > 0$, existe um $t_1(\epsilon, B) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(A)$ para todo $t \geq t_1(\epsilon, B)$.*

Definição 1.5.3 (Absorção) *Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico X. Dizemos que A absorve B se existe um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$, para todo $t \geq t_0$.*

Observação 1.5.2 *Em particular, se A absorve B, então A atrai B (a recíproca não é verdadeira).*

Definição 1.5.4 (Invariância) *Dizemos que um subconjunto A de um espaço métrico X é invariante pelo semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Definição 1.5.5 (Atrator) *Dizemos que $\mathcal{A}$ subconjunto de um espaço métrico X é um atrator global para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação do $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Observação 1.5.3 *O atrator global é único. De fato, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são atratores globais para este semigrupo, então*

$$d_H(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) = d_H(T(t)\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

e assim $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Analogamente $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$.

Observação 1.5.4 *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator $\mathcal{A}$ no espaço métrico X, então, dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_x(0) = x$. De fato, $[0, \infty) \ni t \mapsto \phi(t) := T(t)x \in X$ está sempre bem definida e é limitada, agora seja $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, assim existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$ e procedendo indutivamente, conseguimos uma seqüência $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, (recorde que a seqüência $\{x_{-n}\}$ não é unicamente determinada). Defina então*

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x & , t \in \mathbb{T}^+, \\ T(j+t)x_{-j} & , t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}, j = 1, 2, 3, \cdots, \end{cases}$$

que é uma solução global limitada em $\mathcal{A}$ passando por x em $t = 0$.

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{T} \to X$ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é tal que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$. Tendo dito isto, concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \textit{existe uma solução global limitada por } x\}.$$

Definição 1.5.6 (Assintoticamente compacto) *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **assintoticamente compacto** se para qualquer subconjunto fechado, limitado e não vazio $B \subset X$, para o qual $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B.*

Definição 1.5.7 (Eventualmente limitado) *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente limitado** se para cada limitado $B \subset X$, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Dizemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado, se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B fosse limitado.*

Definição 1.5.8 (Eventualmente compacto) *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente compacto** se dado $B \subset X$ limitado existe um $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_B)B$ é compacto.*

Definição 1.5.9 *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito condicionalmente eventualmente compacto se dado B limitado e positivamente invariante, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito eventualmente compacto se dado B limitado existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.*

Definição 1.5.10 *Dizemos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo (limitado disipativo/compacto dissipativo)** se existe um subconjunto limitado B do espaço métrico X que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X.*

Observação 1.5.5 *Na definição acima podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve sem mudar os significados dos conceitos.*

Teorema 1.5.1 *Seja* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se,* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *possui um atrator global* $\mathcal{A}$*.*

Demonstração. Ver [25, Corolário 1.1.3]. ■

Corolário 1.5.1 *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo sobre um espaço métrico* X*. Se* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é compacto e ponto dissipativo, então* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *tem um atrator global em* X*.*

Prova. Ver [25], página 13. □

Proposição 1.5.1 *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo sobre um espaço métrico* X*. Se* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *tem um atrator global em* X*, então o atrator poderia ser caracterizado como:*

i) $\mathcal{A} = \bigcup_{B \underset{limitado}{\subset} X} \omega(B)$*;*

ii) $\mathcal{A} = \bigcup_{K \underset{compacto}{\subset} X} \omega(K)$*;*

iii) $\mathcal{A}$ *é a união de todas as órbitas globais, invariantes e limitadas através de* $x \in X$*;*

iv) $\mathcal{A}$ *é a união de todas as órbitas globais, invariantes e precompactas através de* $x \in X$*.*

Prova. Ver [42], página 10. □

Definição 1.5.11 *Seja* X *um espaço métrico,* $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *a métrica de* X*,* Λ *um espaço topológico e* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família de subconjuntos de* X*.*

1. *Dizemos que* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é* ***semicontínua superiormente*** *em* λ_0 *se*

$$d_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_0) = \sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} d(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Dizemos que* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é* ***semicontínua inferiormente*** *em* λ_0 *se*

$$d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\lambda) = \sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} d(x, \mathcal{A}_\lambda) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

3. *Dizemos que* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é* ***contínua*** *em* λ_0 *se ela é semicontínua inferiormente e superioremente em* λ_0.

Para provarmos as semicontinuidades superior e inferior empregaremos o seguinte resultado

Lema 1.5.1 *Seja* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família de conjuntos em um espaço de Banach* X*, onde* Λ *é um espaço topológico.*

i) Se qualquer seqüência $\{x_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $x_{\lambda_n}\in\mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*, tem uma subseqüência convergente com limite pertencendo a* $\mathcal{A}_{\lambda_0}$*, então* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* λ_0.

ii) Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ *é compacto e para qualquer* $x\in\mathcal{A}_{\lambda_0}$ *existe uma seqüência* $\{x_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $x_{\lambda_n}\in\mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*, que converge para* x*, então* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua inferiormente em* λ_0.

Prova. Ver [22]. □

Definição 1.5.12 *Diremos que a família de semigrupos* $\{T_\lambda(t) : t\in\mathbb{T}^+\}_{\lambda\in\Lambda}$*, é contínua em* $\lambda=\lambda_0$ *se* $T_\lambda(t)x \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} T_{\lambda_0}(t)x$ *uniformemente para* (t,x) *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{T}^+\times X$ *quando* $\lambda\to\lambda_0$.

Teorema 1.5.2 (Semicontinuidade Superior) *Seja* $\{T_\lambda(t) : t\in\mathbb{T}^+\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família de semigrupos a qual é contínua em* $\lambda=\lambda_0$*. Se* $\{T_\lambda(t) : t\in\mathbb{T}^+\}_{\lambda\in\Lambda}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\lambda$ *para cada* $\lambda\in\Lambda$ *e* $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda}$ *é compacto, então a família* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* $\lambda=\lambda_0$.

Demonstração. Seja $\{x_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X com $x_{\lambda_n}\in\mathcal{A}_{\lambda_n}$ e $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda_0$. Como, $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda}$ é compacto em X e $\mathcal{A}_{\lambda_n}\in\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda}$, segue que existem uma subseqüência $\left\{x_{\lambda_{n_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $x_{\lambda_0}\in X$ tal que $x_{\lambda_{n_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{\lambda_0}$.

Para concluir a demonstração da semicontinuidade superior falta mostrar que $x_{\lambda_0}\in\mathcal{A}_{\lambda_0}$ e aplicar a parte (i) do Lema 1.5.1. Para este fim, é suficiente provar que existe uma solução global limitada $\{T_{\lambda_0}(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ que passa por x_{λ_0}. Da invariância dos atratores $\mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, para cada $k\in\mathbb{N}$, existe uma solução global limitada $\psi^{(\lambda_{n_k})}:\mathbb{T}\to X$ através de $x_{\lambda_{n_k}}$, pela Observação 1.5.4. Para $t\in\mathbb{T}^+$, segue da convergência uniforme de $T_\lambda(t)x \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} T_{\lambda_0}(t)x$ em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+\times X$ que

$$d(T_{\lambda_{n_k}}(t)x_{\lambda_{n_k}}, T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0}) \le d(T_{\lambda_{n_k}}(t)x_{\lambda_{n_k}}, T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_{n_k}}) + T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_{n_k}}, T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+$. Logo,

$$T_{\lambda_{n_k}}(t)x_{\lambda_{n_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0}, \tag{1.43}$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+$. Como $\psi^{(\lambda_{n_k})} : \mathbb{T} \to X$ é solução global limitada que passa por $x_{\lambda_{n_k}}$, então

$$\psi^{(\lambda_{n_k})}(t) = \psi^{(\lambda_{n_k})}(t+0) = T_{\lambda_{n_k}}(t)\psi^{(\lambda_{n_k})}(0) = T_{\lambda_{n_k}}(t)x_{\lambda_{n_k}}.$$

Disto e (1.43), obtemos

$$\psi^{(\lambda_{n_k})}(t) = T_{\lambda_{n_k}}(t)x_{\lambda_{n_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0}, \forall t \in \mathbb{T}^+. \tag{1.44}$$

Agora, construímos uma solução para trás que passa por x_{λ_0} da seguinte maneira. Se $\lambda^0_{n_k} := \lambda_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma subseqüência $\{\lambda^j_{n_k}\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $\underline{\{\lambda^{j-1}_{n_k}\}_{j\in\mathbb{N}^*}}$ e $x_{\lambda_{-j}}$ tal que $\psi^{(\lambda^j_{n_k})}(-j) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{\lambda_{-j}}$ (lembremos que $\left\{\psi^{(\lambda_{n_k})}(-j)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ está em $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$). Daí, $\psi^{(\lambda^j_{n_k})}(-j-i) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{\lambda_{-j-i}}$, para $0 \le i \le j$. Da convergência de $x \to T_{\lambda_n}(i)x$ para $x \to T_{\lambda_0}(i)x$ uniformemente em subconjuntos compactos X, segue que, para $0 \le i \le j$, obtemos

$$T_{\lambda^j_{n_k}}(t)\psi^{(\lambda^j_{n_k})}(-j-i) \longrightarrow T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_{-j-i}}, \quad \forall t \in \mathbb{T}^+. \tag{1.45}$$

Para $0 \le t = i \le j$ e como $\psi^{(\lambda_{n_k})}$ é solução global, temos

$$\psi^{(\lambda^j_{n_k})}(-j) \longrightarrow T_{\lambda_0}(i)x_{\lambda_{-j-i}}.$$

Pela unicidade do limite, resulta $T_{\lambda_0}(i)x_{\lambda_{-j-i}} = x_{\lambda_{-j}}$, para $0 \le i \le j$.

Agora, definindo

$$\psi^{(\lambda_0)}(t) := \begin{cases} T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0} & , \text{ se } t \in \mathbb{T}^+ \\ T_{\lambda_0}(t+j)x_{\lambda_{-j}}, & \text{se } t \in [-j,-j+1) \cap \mathbb{T}, j \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

temos que $\psi^{(\lambda_0)} : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global de $\{T_{\lambda_0}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ que passa por x_{λ_0}, pois

- $\psi^{(\lambda_0)}(0) = x_{\lambda_0}$.
- Se $s \in \mathbb{T}^+$:

$$T_{\lambda_0}(t)\psi^{(\lambda_0)}(s) = T_{\lambda_0}(t)T_{\lambda_0}(s)x_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}(t+s)x_{\lambda_0} = \psi^{(\lambda_0)}(t+s).$$

• Se $s \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}$, $j \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{\lambda_0}(t)\psi^{(\lambda_0)}(s) = T_{\lambda_0}(t)T_{\lambda_0}(s+j)x_{\lambda_{-j}} = T_{\lambda_0}(t+s+j)x_{\lambda_{-j}} = \psi^{(\lambda_0)}(t+s).$$

Também,

$$\psi^{(\lambda^k_{n_k})}(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi^{(\lambda_0)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

De fato, usando (1.44), obtemos

$$\psi^{(\lambda^k_{n_k})}(t) = T_{\lambda^k_{n_k}}(t)x_{\lambda^k_{n_k}} \longrightarrow T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0} = \psi^{(\lambda_0)}(t),$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e de (1.45), temos

$$\psi^{(\lambda^k_{n_k})}(-k) = T_{\lambda^k_{n_k}}(i)\psi^{(\lambda^k_{n_k})}(-k-i) \longrightarrow T_{\lambda_0}(i)x_{\lambda_{-k-i}} = T_{\lambda_0}(-k+(i+k))x_{\lambda_{-k-i}} = \psi^{(\lambda_0)}(-k),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda}$ é limitada em X e $\psi^{(\lambda_0)}(t) = \lim_{k\to\infty} \psi^{(\lambda^k_{n_k})}(t) \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda}$, para todo $t \in \mathbb{T}$, então $\psi^{(\lambda_0)}$ é limitada para todo $t \in \mathbb{T}$. Portanto, $\psi^{(\lambda_0)}(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e em particular $x_{\lambda_0} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$. ■

Observação 1.5.6 *Se em particular a hipótese que $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$ seja compacto no Teorema 1.5.2, pode ser enfraquecida assumindo em seu lugar uma compacidade coletiva; isto é, dada uma seqüência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,1]$ com $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e uma seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n \in \mathcal{A}_{\eta_n}$, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente. Note que isto implica que existe $\eta_0 \in (0,1]$ tal que $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_{\eta_n}$ é limitado. A demonstração do Teorema 1.5.2 com esta hipótese mais fraca é inteiramente análoga a demonstração acima.*

Teorema 1.5.3 *Seja $\{T_\lambda(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de semigrupos que tem um atrator global $\mathcal{A}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Se $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ é relativamente compacto em X e para qualquer $x_\lambda \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} x_{\lambda_0}$ em X com $x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \neq \lambda_0$, satisfaz*

$$\|T_\lambda(t)x_\lambda - T_{\lambda_0}(t)x_{\lambda_0}\|_X \longrightarrow 0,$$

quando $\lambda \to \lambda_0$ para qualquer $t \in \mathbb{T}^+$, então a família $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$.

Demonstração. A demonstração é análoga à do Teorema 1.5.2. ■

Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e M um conjunto invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, já vimos que existe uma solução global por a, para cada $a \in M$. As soluções

globais mais simples são as constantes; isto é, os pontos de equilíbrio. A classe das soluções globais que tendem a um equilíbrio y^* quando t tende a $-\infty$ formam um conjunto invariante que chamamos de conjunto instável $W^u(y^*)$ de y^*; isto é,

$$W^u(y^*)=\{y \in X : \exists \text{ solução global } \phi_y : \mathbb{T} \to X \text{ tal que } \phi_y(0) = y \text{ e } \phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*\}. \tag{1.46}$$

Dada uma vizinhança V de y^*, o conjunto dos pontos y de V tais que existe solução global $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_y(0) = y$, $\phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*$ e $\phi_y(t) \in V$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ é chamado conjunto instável local de y^* e é denotado por $W^u_{\text{loc}}(y^*)$.

A órbita γ_ϕ de uma solução global não constante $\phi : \mathbb{T} \to X$ que tende a um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $\pm\infty$ é chamada uma órbita homoclinica em y^*.

Observamos que quando existe uma órbita homoclinica em y^*, $W^u_{\text{loc}}(y^*)$ pode não coincidir com a interseção de $W^u(y^*)$ com uma vizinhança de y^*.

Teorema 1.5.4 (Semicontinuidade Inferior) *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família contínua em $\eta = 0$ de semigrupos em um espaço métrico X que satisfaz*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0, 1]$.

b) Se $\mathcal{E}_\eta$ denota o conjunto das soluções estacionárias de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, existe $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$ e $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \overset{\eta\to0}{\longrightarrow} 0$.

c) Se $W^u_\delta(y_j^{*,\eta}) = \{y \in B(y_j^{*,\eta}) :$ existe solução global $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_y(0) = y, \phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_j^{*,\eta}$ e $\phi_y(t) \in B(y_j^{*,\eta})$, para todo $t \in \mathbb{T}^-\}$. Suponha que, para algum $\delta > 0$ pequeno, $\{W^u_\delta(y_j^{*,\eta})\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

d) $\mathcal{A}_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$.

Então, $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Note primeiramente, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, então $u_0 \in W^u(y_\ell^{*,0})$, para algum $1 \leq \ell \leq \mathfrak{p}$ pela hipótese (d). Logo, existem uma solução global $\phi_\ell^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ por u_0 ($\phi_\ell^{(0)}(0) = u_0$) tal que $\phi_\ell^{(0)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_\ell^{*,0}$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\phi_\ell^{(0)}(-\tau) \in W^u_\delta(y_\ell^{*,0})$.

Da hipótese (b), dado $\delta > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que $0 < \eta < \delta_0$, então $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) < \delta$ para todo $i = 1, \dots, \mathfrak{p}$. Assim, $y_\ell^{*,\eta} \in B_\delta(y_\ell^{*,0})$ (Ver figura 1.2).

De (c), existe uma solução global $\phi_\ell^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ com $\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau) \in W^u_\delta(y_\ell^{*,\eta})$ tal que $\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau) \overset{\eta\to0}{\longrightarrow} \phi_\ell^{(0)}(-\tau)$ pela parte (2) da Definição 1.5.11.

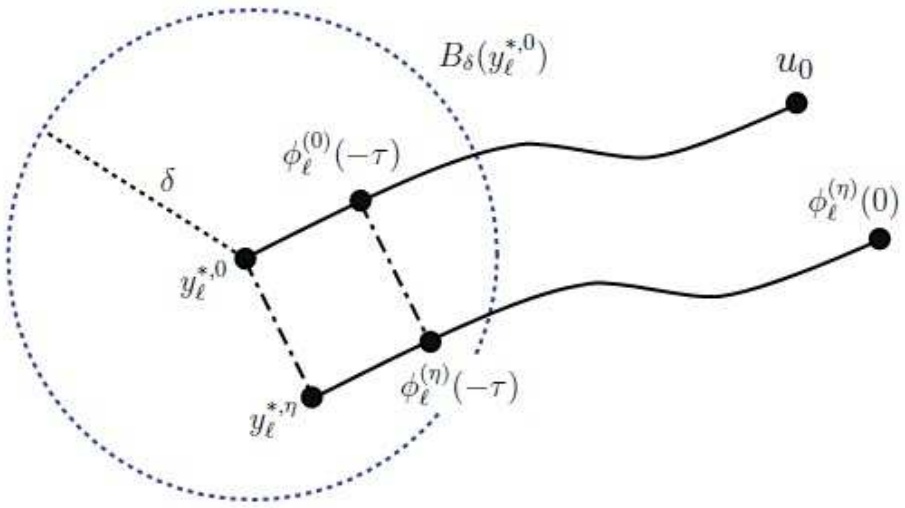


Figura 1.2: Conjunto $W_\delta^u(y_j^{*,\eta})$.

Usando a hipótese a) e a continuidade de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$, segue

$$d(T_\eta(\tau)\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau), T_0(\tau)\phi_\ell^{(0)}(-\tau)) \leq d(T_\eta(\tau)\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau), T_0(\tau)\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau)) + d(T_0(\tau)\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau), T_0(\tau)\phi_\ell^{(0)}(-\tau)) \xrightarrow{\eta\to 0} 0.$$

Assim,

$$T_\eta(\tau)\phi_\ell^{(\eta)}(-\tau) \to u_0.$$

Logo, dado $u_0 \in \mathcal{A}_0$ com $\mathcal{A}_0$ compacto, existe uma seqüência $\{u_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ com $u_\eta = \phi_\ell^{(\eta)}(0) \in W^u(y_\ell^{*,\eta}) \subset \mathcal{A}_\eta$ tal que $u_\eta \xrightarrow{\eta\to 0} u_0$. Do Lema 1.5.1 segue o resultado. ■

1.5.1 Semigrupos gradientes e gradient-like

Nesta seção vamos considerar os semigrupos chamados gradientes, mostraremos que os atratores destes semigrupos podem ser caracterizados como a variedade instável de seu conjunto de equilíbrio.

Definição 1.5.13 *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito **semigrupo gradiente**, quando existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

(i) Para cada $x \in C$ a aplicação $t \in [0,\infty) \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é não crescente;

(ii) Se x em X é tal que existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to X$ por $x = \phi(0)$ e existe um $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(t)) = V(x)$ para todo $t \geq t^*$ ou para todo $t \leq t^*$, então x é um ponto de equilíbrio para o semigrupo.

A função $V : X \to \mathbb{R}$ é chamada de função de Liapunov para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Lema 1.5.2 *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente e $\mathcal{E}$ é o conjunto dos seus pontos de equilíbrios, então $\omega(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Se existe uma solução para trás $\phi : (-\infty, 0] \to X$ por x então $\alpha_\phi(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$. Além disso, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ e todas as soluções estacionárias são isoladas, então existe somente um número finito delas e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é um conjunto unitário. Se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global através de x, $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.*

Prova. Se $\omega(x) = \emptyset$, o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \emptyset$, temos que $V(T(t)x) \to c$ quando $t \to \infty$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Como $T(\omega(x)) \subset \omega(x)$, para cada $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)y) = c = V(y)$ e da propriedade (ii) na Definição 1.5.13 temos que $y \in \mathcal{E}$. Supondo que existe uma solução para trás $\phi : (-\infty, 0] \to X$ através de x. Se $\alpha_\phi(x) = \emptyset$ o resultado é trivial. Se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$. Como $T(\alpha_\phi(x)) \subset \alpha_\phi(x)$ para cada $y \in \alpha_\phi(x)$ temos que $V(T(t)y) = c = V(y)$ e $y \in \mathcal{E}$.

Suponhamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então $\mathcal{E}$ é finito.

Resta-nos mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Como $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos e o conjunto das soluções estacionárias é finito, segue que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. □

Teorema 1.5.5 *Suponhamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente que é eventualmente limitado, assintoticamente compacto e possui um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}$ limitado. Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X : \textit{existe uma solução para trás } \phi : (-\infty, 0] \to X \textit{ por } y \textit{ tal que } \phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}\}$$

é chamado de variedade instável do conjunto $\mathcal{E}$, e $\phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}$ significa que $\lim_{t\to-\infty} d(\phi(t), \mathcal{E}) = 0$. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_n^*\}$ é finito, então $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n W^u(y_i^*)$, onde

$$W^u(y_i^*) := \{y \in X : \textit{existe uma solução para trás } \phi : (-\infty, 0] \to X \textit{ por } y \textit{ tal que } \phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^*\}$$

é chamado de variedade instável de y_i^*. Finalmente, se existe um conjunto conexo limitado B que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é conexo.

Demonstração. Ver [33, Teorema 1.32]. ■

Em geral, não se espera que uma perturbação de um semigrupo não-linear gradiente dará origem a um novo semigrupo não-linear gradiente, a principal dificuldade é provar que o problema perturbado tem uma função de Liapunov. Assim, define-se o conceito de semigrupo gradient-like, onde nos preocupamos somente com as propriedades dinâmicas que a função de Liapunov introduz em um semigrupo gradiente. Com esta nova definição mostramos que nesta nova classe os atratores podem ser caracterizados como nos semigrupos gradientes e também mostramos que este conceito é estável sob pequenas perturbações, logo conseguimos mostrar a continuidade da estrutura dos atratores para este tipo de semigrupos com relação à pequenas perturbações.

Antes de continuarmos, vamos enfatizar a distinção entre semigrupos gradientes e semigrupos que têm atratores gradient-like. Como na Definição 1.5.13, um semigrupo gradiente é um semigrupo que possui uma função de Liapunov.

Definição 1.5.14 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que o conjunto das soluções estacionárias $\mathcal{E}$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ é finito; isto é, para algum $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$, temos que $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^*\}$. Se $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^*)$, então dizemos que $\mathcal{A}$ é um* ***atrator gradient-like*** *e que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um* ***semigrupo com atrator gradient-like****.*

Como provado no Teorema 1.5.5, um semigrupo gradiente com um atrator global e um número finito de equilíbrios é um semigrupo com atrator gradient-like. Não é difícil ver (veja exemplo em Hale [33] páginas 2 e 3) que um atrator gradiente-like pode vir de um semigrupo que não é gradiente e também que uma perturbação de um semigrupo com um atrator gradient-like pode não ter atrator gradient-like. Isto nos leva a questionar sobre quais propriedades dinâmicas dos semigrupos seguem que estes possuem atratores gradient-like e se estas são estáveis sobre perturbações. Pelo que vimos, tais propriedades devem ser satisfeitas por semigrupos gradientes e suas perturbações.

Com isto em mente, o seguinte conceito de semigrupos gradient-like generaliza o conceito de semigrupos gradientes enquanto mantém suas propriedades dinâmicas essenciais. Em [4] e [12] mostraram que as propriedades que definem os semigrupos gradient-like são estáveis por perturbações.

Definição 1.5.15 *Considere um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$. Seja*

$$2\delta_0 = \min_{\substack{1 \leqslant i,j \leq \mathfrak{p} \\ i \neq j}} d(y_i^*, y_j^*) > 0.$$

*Seja $\varepsilon_0 < \delta_0$, $y^* \in \mathcal{E}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Uma $\varepsilon-$**cadeia** de y^* para y^* é um subconjunto $\{y_{\ell_1}^*, \ldots, y_{\ell_k}^*\}$ de $\mathcal{E}$, juntamente com $\{y_1, \cdots, y_k\}$ um subconjunto de pontos de X e*

constantes $\{t_1, s_1, \ldots, t_k, s_k\}$, $0 < s_i < t_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq \mathfrak{p}$, *tais que* $d(y_i, y^*_{\ell_i}) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq k+1$, $y^* = y^*_{\ell_1} = y^*_{\ell_{k+1}}$, $d(T(s_i)y_i, \mathcal{E}) > \varepsilon_0$ *e* $d(T(t_i)y_i, y^*_{\ell_{i+1}}) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq k$. *Dizemos que* $y^* \in \mathcal{E}$ *é* ***recorrente por cadeias*** *se existe um* $\varepsilon_0 > 0$ *e uma* $\varepsilon-$*cadeia de* y^* *para* y^* *para cada* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

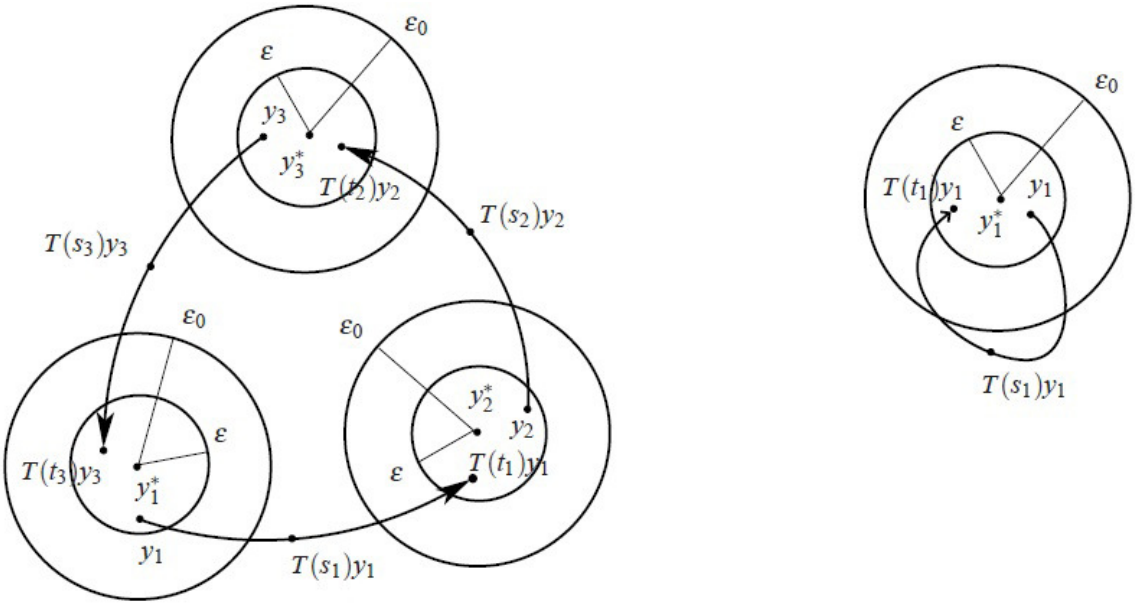


Figura 1.3: Exemplo de $\varepsilon-$cadeia com $\mathfrak{p} = 3$.

Definição 1.5.16 *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y^*_1, \cdots y^*_{\mathfrak{p}}\}$ *e assuma que ele tem um atrator global* $\mathcal{A}$. *Diremos que,* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é um* ***semigrupo gradient-like*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

$(g.1)$ *Dada uma solução global* $\xi : \mathbb{R} \to X$ *em* $\mathcal{A}$, *existem* $i, j \in \{1, \cdots, \mathfrak{p}\}$ *tais que*

$$\lim_{t \to -\infty} d(\xi(t), y^*_i) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{t \to \infty} d(\xi(t), y^*_j) = 0;$$

$(g.2)$ $\mathcal{E} = \{y^*_1, \cdots, y^*_{\mathfrak{p}}\}$ *não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.*

As hipóteses $(g.1)$ e $(g.2)$ carregam importantes propriedades dinâmicas de um semigrupo com uma função de Liapunov. Claramente, de $(g.1)$, temos que $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y^*_i)$, isto é, um semigrupo gradient-like é um semigrupo com atrator gradient-like. Também, a hipótese $(g.2)$ diz que nenhum número finito de órbitas pode produzir um contorno fechado.

Todo semigrupo gradiente é um semigrupo gradient-like. Segundo o Teorema 1.5.6 abaixo, os semigrupos gradient-like são estáveis sob perturbações, por isso, uma perturbação de um semigrupo gradiente é um semigrupo gradient-like.

Por outro lado, um atrator pode exibir a estrutura definida pela união finita das variedades instáveis em torno dos pontos de equilíbrios e para $u_0 \in X$ seu conjunto omega limite não exatamente formado por um único ponto de equilíbrio y_i^*. Assim, as propriedades $(g.1)$ e $(g.2)$ não são válidas.

Já mencionamos que uma perturbação de um semigrupo com atrator gradient-like pode possuir um atrator que não é gradient-like. No entanto, este pode se comportar semicontinuamente superiormente e inferiormente, isto mostra que a classe dos semigrupos com atrator gradient-like é maior que a classe dos semigrupos gradient-like. Disto, concluímos que a noção de semigrupo gradient-like é intermediária entre a de semigrupo gradiente e a de semigrupo com atrator gradient-like.

Definição 1.5.17 *Diremos que o semigrupo* $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ *é* ***coletivamente assintoticamente compacto*** *se, dada uma seqüência* $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *com* $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, uma seqüência limitada* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* X *e uma seqüência* $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de números não negativos com* $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$*, temos que* $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *é relativamente compacta.*

A maior vantagem dos semigrupos gradient-like sobre os semigrupos gradientes é a sua estabilidade sob perturbações. Este fato possibilitará a caracterização dos atratores de semigrupos que são pequenas perturbações de semigrupos gradientes, tais semigrupos perturbados são capazes de fornecer uma caracterização do atrator do semigrupo não perturbado.

Teorema 1.5.6 *Seja* $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, $\eta \in [0,1]$, *uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacto, tal que*

a) para cada $\eta \in [0,1]$ $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ *possui um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$*;*

b) $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ *tem um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$*, para todo* $\eta \in [0,1]$*, e* $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$*,* $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$*. Adicionalmente, existem* $\delta > 0$ *e* $\eta_0 > 0$ *tais que a única solução global contida em* $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ *é* $y_i^{*,\eta}$*,* $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$*,* $0 \leq \eta \leq \eta_0$*;*

c) existe $\delta > 0$ *tal que, se uma solução* $\xi^{(\eta)} : \mathbb{R} \to X$ *em* $\mathcal{A}_\eta$ *é tal que* $d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) \leq \delta$*, para todo* $t \geq t_0$ *(ou para todo* $t \leq t_0$*),* $t_0 \in \mathbb{R}$*, então* $\xi^{(\eta)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^{*,\eta}$ *(ou* $\xi^{(\eta)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^{*,\eta}$*);*

d) $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \xrightarrow{\eta\to 0} 0$ *uniformemente para* (t,u) *em subconjuntos compactos de* $[0,\infty)\times X$*;*

e) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ *é um semigrupo gradient-like.*

Então, existe $\eta_0 > 0$ *tal que, para todo* $\eta \in [0,\eta_0]$*, o semigrupo* $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ *é gradient-like.*

Demonstração. Ver [20, Teorema 1.5]. ■

Corolário 1.5.2 *Sob as hipóteses do Teorema 1.5.6, existe um* $\eta_0 > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^{*,\eta}), \text{ para todo } \eta \in [0,\eta_0].$$

Observação 1.5.7 *Até este ponto não usamos a hiperbolicidade dos equilíbrios* y_i^**,* $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$*. Portanto, os resultados são válidos, em alguns casos sem a hiperbolicidade. Nas aplicações, a hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio para* $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ *é usada para provar as condições* (b) *e* (c) *do Teorema 1.5.6.*

Podemos substituir o conjunto finito de equilíbrios por uma família de conjuntos disjuntos invariantes isolados, adaptando a definição de semigrupo gradient-like e os resultados análogos possuem provas similares.

A fim de obter a existência de atratores globais exponenciais, seguiremos o feito em [4], [12], [19] e [20].

Definição 1.5.18 *Diremos que* $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ *é uma família de* ***conjuntos invariantes isolados*** *se existe* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j^*) = \emptyset$*,* $1 \leq i < j \leq \mathfrak{p}$*, e* Ξ_i^* *é o subconjunto invariante maximal de* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) := \{z \in X : d(z,\Xi_i^*) < \delta\}$*.*

Definição 1.5.19 *Diremos que a família* $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ *de* ***conjuntos invariantes isolados atrai pontos de*** X*, se a união* $\bigcup_{\Xi_i^* \in \Xi} \Xi_i^*$ *atrai cada ponto de* X*.*

Consideremos $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família finita de conjuntos disjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$.

Definição 1.5.20 *Sejam* δ *e* $\varepsilon_0 \in (0,\delta)$ *fixos. Para* $\Xi^* \in \Xi$ *e* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$*, uma* $\varepsilon-$***cadeia*** *de* Ξ^* *para* Ξ^* *é uma seqüência* $\{\Xi_{\ell_i}^*, \cdots, \Xi_{\ell_k}^*\} \subset \Xi$*, uma seqüência de números reais* $t_1, \kappa_1, \cdots, t_k, \kappa_k$*, com* $t_i > \kappa_i$*,* $1 \leq i \leq k$*,* $k \leq \mathfrak{p}$*, e uma seqüência de pontos* u_i*,* $1 \leq i \leq k$*, tais que* $u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\ell_i}^*)$*,* $T(\kappa_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\bigcup_{i=1}^{k}(\Xi_{\ell_i}^*))$ *e* $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\ell_{i+1}}^*)$*,* $1 \leq i \leq k$*, com* $\Xi^* = \Xi_{\ell_{k+1}}^* = \Xi_{\ell_1}^*$*. Diremos que* $\Xi^* \in \Xi$ *é recorrente por cadeias, se existe um* $\varepsilon_0 \in (0,\delta)$ *e* $\varepsilon-$*cadeias de* Ξ^* *para* Ξ^* *para cada* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$*.*

Definição 1.5.21 *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo e $\mathcal{A}$ um atrator global para o semigrupo. Diremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um* ***semigrupo gradient-like generalizado****, se existe uma família $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ de conjuntos invariantes isolados em $\mathcal{A}$, tal que*

$(gg.1)$ *Para cada solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ em $\mathcal{A}$, existem $1 \leq i, j \leq \mathfrak{p}$ tais que*

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), \Xi_i^*) = 0 \ e \ \lim_{t\to\infty} d(\xi(t), \Xi_j^*) = 0.$$

$(gg.2)$ *Os elementos de $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ não são recorrentes por cadeias.*

Como anteriormente introduzimos as definições de variedades instáveis e estáveis.

Definição 1.5.22 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo. A* ***variedade instável de um conjunto invariante isolado*** *Ξ^* é dada por*

$$W^{\mathrm{u}}(\Xi^*) = \{\zeta \in X : \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \to X \text{ com } \xi(0) = \zeta \ e \lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), \Xi^*) = 0\}.$$

A ***variedade estável de um conjunto invariante isolado*** *Ξ^* para $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dada por*

$$W^{\mathrm{s}}(\Xi^*) = \{\zeta \in X : \lim_{t\to+\infty} d(T(t)\zeta, \Xi^*) = 0\}.$$

A ***variedade instável local*** *$W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}$* ***de*** *$\Xi^*$ é dada por, dado $\varepsilon > 0$,*

$$W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(\Xi^*) = \{\zeta \in W^{\mathrm{u}}(\Xi^*) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi^*) : \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \to X \text{ com } \xi(0) = \zeta \ e$$
$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), \Xi^*) = 0 \ e \ \xi(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi^*) \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Lema 1.5.3 *Suponha que $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ seja uma família de conjuntos invariantes isolados que atrai pontos de X e para cada $\Xi_i^* \in \Xi$, existam constantes positivas C_0, ρ_0 e δ_0 tais que*

$$d(T(t)u_0, W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(\Xi_i^*)) \leq C_0 e^{-\rho_0 t}, \tag{1.47}$$

sempre que $u_0 \in \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i^*)$ e $\gamma_{[0,t]}(u_0) \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i^*)$ para todo $t \geq 0$. Então, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é exponencialmente ponto dissipativo.

Prova. Uma vez que Ξ atrai pontos, para cada $u \in X$, existem um compacto isolado invariante Ξ_j^* e $t_u > 0$ tais que $\gamma^+(T(t_u)u) \subset \mathcal{O}_{\delta_j}(\Xi_j^*)$ e, conseqüentemente

$$d(T(t)u, W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(\Xi_j^*)) \leq C_0 e^{-\rho_0(t-t_u)}, \ t \geq t_u.$$

Tomando o subconjunto limitado $B = \bigcup_{j=1}^{k} W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(\Xi_j^*)$ de X, temos

$$d(T(t)u, B) \leq C_0 e^{\rho_0 t_u} e^{-\rho_0 t},\ t \geq t_u.$$

□

Lema 1.5.4 *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com uma família de conjuntos invariantes isolados* $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ *que atrai pontos de* X*, onde cada* $\Xi_i^* \in \Xi$ *verifica propriedade* (1.47) *e que dado qualquer ponto* v_0*, existe uma bola* $\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0)$ *tal que* $\gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)(v_0)})$ *é limitado e, para algumas constantes* c_0 *e* $L_0 > 0$*, temos*

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq c_0 e^{L_0 t} d(w_1, w_2), \tag{1.48}$$

para todos $w_1, w_2 \in \gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0))$ *e* $t \geq 0$*. Então, o semigrupo é localmente compacto dissipativo. Em particular, existe um conjunto (maximal) compacto invariante* J *que atrai exponencialmente uma vizinhança de um conjunto compacto dado, isto é, dado* $K \subset X$ *existe um conjunto aberto* $\mathcal{O}(K)$ *contendo* K *tal que*

$$d(T(t)\mathcal{O}(K), J) \leq Ce^{-\rho t},\ t > 0. \tag{1.49}$$

Prova. Ver [19, Teorema 2.18]. □

Teorema 1.5.7 *Suponha que as seguintes condições são válidas:*

i) O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com órbitas limitadas de conjuntos limitados e com uma família de conjuntos disjuntos isolados invariantes* $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$*;*

ii) A família de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ *atrai pontos de* X*;*

iii) O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ *satisfaz uma condição de Lipschitz da forma*

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq ce^{Lt} d(w_1, w_2),$$

para todos $B \subset X$ *limitado e* $w_1, w_2 \in B$*, onde* $c, L > 0$*;*

iv) Cada conjunto $\Xi_i^* \subset \Xi$ *verifica a propriedade* (1.47)*.*

Então, o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é exponencialmente limitado dissipativo. Isto é, existe um atrator global* $\mathcal{A}$ *que atrai exponencialmente, da seguinte forma, existem* $\rho > 0$ *e* $C > 0$ *tais que*

$$d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \leq Ce^{-\rho t}, \text{ para todo } t > 0.$$

Demonstração. Ver [19, Teorema 2.16]. ■

Teorema 1.5.8 *Suponha que* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *seja um semigrupo gradient-like generalizado, compacto para* $t > t_0 \geq 0$ *e que satisfaça a condição de Lipschitz* (1.48)*. Suponha também que exista uma família finita* Ξ *de conjuntos invariantes isolados que atrai pontos de* X *e que cada* $\Xi_i^* \in \Xi$ *verifica a propriedade* (1.47)*. Então,* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é exponencialmente limitado dissipativo. Isto é, existe um atrator que atrai exponencialmente, da seguinte forma, existem* $\rho > 0$ *e* $C > 0$ *tais que*

$$d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \leq Ce^{-\rho t}, \text{ para todos } t > 0 \text{ e } B \text{ limitado.}$$

Demonstração. Ver [19, Teorema 3.9]. ■

Teorema 1.5.9 *Seja* $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$, *uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compactos definidos em* X*. Suponhamos que*

i) $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ *possui atrator global* $\mathcal{A}_\eta$*, para cada* $\eta \in [0, 1]$*;*

ii) $\mathcal{A}_\eta$ *tem um número finito de conjuntos invariantes isolados* $\Xi_\eta = \{\Xi_{1,\eta}^*, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p},\eta}^*\}$, $\eta \in [0, 1]$, *que se comportam semicontinuamente superiormente e inferiormente quando* $\eta \to 0$*, isto é,*

$$\sup_{1 \leq i \leq \mathfrak{p}} \left[d_H(\Xi_{i,\eta}^*, \Xi_{i,0}^*) + d_H(\Xi_{i,0}^*, \Xi_{i,\eta}^*) \right] \overset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Adicionalmente, existem $\delta > 0$ *e* $\eta_0 > 0$ *tais que somente as soluções globais contidas em* $B_\delta(\Xi_{i,\eta}^*)$ *estão em* $\Xi_{i,\eta}^*$, $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$*;*

iii) $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \overset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$ *para cada* $t \geq 0$ *e uniformemente para* u *em subconjuntos compactos de* X*;*

iv) Existem $\delta > 0$ *e* $\eta_0 \in (0, 1]$ *tais que, se* $\eta < \eta_0$, $\xi^{(\eta)} : \mathbb{R} \to X$ *é uma solução global em* $\mathcal{A}_\eta$*, e* $d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_{i,\eta}^*) < \delta$ *para todo* $t \leq 0$ $(d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_{i,\eta}^*) < \delta$ *para todo* $t \geq 0)$*, então* $d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_{i,\eta}^*) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ $(d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_{i,\eta}^*) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0)$*;*

v) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ *é um semigrupo gradient-like generalizado.*

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \leq \eta_0$, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado. Conseqüentemente, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(\Xi^*_{i,\eta}),\ \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Corolário 1.5.3 *Assumindo as hipóteses do Teorema 1.5.9 e do Teorema 1.5.7 para cada $\eta \in [0,1]$, para cada conjunto limitado $B \subset X$, existe $\eta_0 > 0$ e uma constante $c(B) > 0$ tal que*

$$d(T_\eta(t)u_0, \mathcal{A}_\eta) \leq c(B)e^{-\rho t},\ \textit{para todos } u_0,\ \eta \in [0, \eta_0]\ \textit{e}\ t \geq 1.$$

Seguindo o plano de [35] se assumirmos que $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator gradient-like $\mathcal{A}_0$ e todas as soluções estacionárias são hiperbólicas, então $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator $\mathcal{A}_\eta$ e com uma propriedade de continuidade de semigrupos é possível mostrar que os atratores $\mathcal{A}_\eta$ comportam-se continuamente quando $\eta \to 0$, isto é,

$$d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \overset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

1.5.2 Taxa de convergência de atratores exponenciais

O resultado mais importante desta seção diz que a atração exponencial local uniforme garante que a taxa de convergência de semigrupos não-lineares determinam a taxa de convergência dos atratores.

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não-linear com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que $\mathcal{A}$ é um **atrator exponencial** , se existem $\rho > 0$ e para cada conjunto limitado $B \subset X$ uma constante positiva $C(B)$ tal que

$$d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \leq C(B)e^{-\rho t},\ \forall t \geq 0.$$

Suponha que para cada conjunto limitado B, existem $c = c(B) > 0$ e $L > 0$ tais que

$$d(T(t)u, T(t)v) \leq ce^{Lt}d(u, v),\ \text{para todo } u, v \in B, t \geq 0. \tag{1.50}$$

Teorema 1.5.10 *Suponhamos que $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ seja uma família de semigrupos possuindo atratores globais $\mathcal{A}_\eta$ para todo $\eta \in [0,1]$. Assumamos que, existam $\eta_0 > 0$, $\rho > 0$, um conjunto limitado $B_0 \supset \bigcup_{\eta \in [0,\eta_0]} \mathcal{A}_\eta$, tais que para cada conjunto $B \subset X$ limitado, existe uma constante $c = c(B) > 0$ tal que*

$$d_H(T_\eta(t)B_0, \mathcal{A}_\eta) \leq c\, e^{-\rho t},\ \textit{para todo } \eta \in [0, \eta_0]\ \textit{e}\ t \geq 1. \tag{1.51}$$

Suponhamos também que, existem c *e* $L > 0$ *tais que*

$$d(T_\eta(t)u, T_0(t)v) \leq ce^{Lt}(d(u,v)+\eta), \text{ para todo } u, v \in B_0, \ \forall \eta \in [0, \eta_0] \text{ e } t \geq 1. \quad (1.52)$$

Então,

$$d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq \bar{c}\,\eta^{\frac{\rho}{\rho+L}}. \quad (1.53)$$

Demonstração. Ver [11, Teorema 8.2.2]. ■

1.6 Grau topológico em dimensão infinita

Definição 1.6.1 *Sejam* X *um espaço de Banach real e* Ω *um subconjunto de* X*. Dizemos que a tripleta* $(I-F, \Omega, u)$ *é* ***admissível****, se* $\Omega \subset X$ *é um aberto e limitado,* $F \in \mathscr{K}(\overline{\Omega}, X)$ *e* $u \notin (I-F)(\partial\Omega)$*, denotamos por* $\mathfrak{D}$ *o conjunto de todas as tripletas admissíveis. A função* $\gamma : \mathfrak{D} \to \mathbb{Z}$*, com as propriedades*

1. $\gamma(I, \Omega, u) = 1$ *para* $u \in \Omega$*;*
2. $\gamma(I-F, \Omega, u) = \gamma(I-F, \Omega_1, u) + \gamma(I-F, \Omega_2, u)$ *sempre que* Ω_1 *e* Ω_2 *são subconjunto abertos disjuntos de* Ω *tal que* $u \notin (I-F)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$*;*
3. $\gamma(I - H(t,\cdot), \Omega, u(t))$ *é independente de* $t \in [0,1]$ *sempre que* $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ *é compacta,* $u : [0,1] \to X$ *é contínua e* $u(t) \notin (I - H(t,\cdot))(\partial\Omega)$ *sobre* $[0,1]$*;*

é chamada o Grau de Leray-Schauder.

Definição 1.6.2 *Seja* $F \in \mathscr{K}(\overline{\Omega}, X)$*,* $u \in \Omega$ *e* $\epsilon_0 > 0$*. Se, para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$*,* $\gamma(I - F, B(u,\epsilon), u)$ *é uma tripleta admissível e* $\gamma(I-F, B(u,\epsilon), u)$ *é independente de* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$*, dizemos que este valor comum é o* ***índice de*** u ***relativo à aplicação*** $I-F$ *e denota-se por* $\mathrm{ind}(u, I-F)$*.*

Teorema 1.6.1 *Existe uma única função* $\gamma : \mathfrak{D} \to \mathbb{Z}$ *que satisfaz as propriedades* (1)*,* (2) *e* (3) *da Definição 1.6.1.*

Demonstração. Ver [27], página 57. ■

Teorema 1.6.2 *Seja* $A : X \to X$ *um operador compacto e contínuo em um espaço de Banach* X *que* A *é Fréchet diferenciável em* u_0*. Então, a derivada* $A'(u_0)$ *é um operador linear compacto e contínuo.*

Demonstração. Ver [40], página 77. ■

Teorema 1.6.3 *Sejam $\Omega \subset X$ um conjunto aberto limitado, $A : X \to X$ um operador compacto e contínuo em um espaço de Banach X, o operador $I - A$ está definido na $\partial\Omega$ e $(I - A)(\partial\Omega) \neq 0$. Se A tem um número finito de pontos fixos $u_1, \ldots, u_k$ em Ω, então*

$$\gamma(I - A, \Omega, 0) = \operatorname{ind}(u_1, I - A) + \cdots + \operatorname{ind}(u_k, I - A).$$

Demonstração. Ver [40], página 101. ■

Teorema 1.6.4 *Sejam $\Omega \subset X$ um domínio convexo e fechado e, $A : X \to X$ um operador compacto e contínuo em um espaço de Banach X o qual está definido na $\partial\Omega$. Se $A(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$ e A não tem pontos fixos na $\partial\Omega$, então $(I - A)(\partial\Omega) \neq 0$ e $\gamma(I - A, \Omega, 0) = 1$.*

Demonstração. Ver [40], página 108. ■

Lema 1.6.1 *Sejam X um espaços de Banach e Ω um subconjunto e aberto e limitado de X. Suponhamos que o operador $T \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, X)$ é compacto, $1 \notin \sigma(T'(u_0))$ e $u_0 \in X$ é um ponto fixo de T. Então,*

$$\gamma(I - T, B(u_0, \varepsilon), u_0) = \gamma(I - T'(u_0), B(u_0, \varepsilon), u_0), \tag{1.54}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Prova. Ver [2], página 39. □

Teorema 1.6.5 *Sejam $A : X \to X$ um operador compacto e contínuo em um espaço de Banach X, $u_0 \in X$ é um ponto fixo de A, A está definido em uma vizinhança de u_0 e A é Fréchet diferenciável em u_0. Se $1 \notin \sigma(A'(u_0))$, então u_0 é um ponto fixo isolado de A e*

$$\operatorname{ind}(u_0, I - A) = (-1)^{\beta}, \tag{1.55}$$

onde β é a soma das multiplicidades dos autovalores reais do operador linear $A'(u_0)$ em $(1, \infty)$.

Demonstração. Ver [40], página 108. ■

Teorema 1.6.6 (Ponto Fixo de Schauder) *Seja X um espaço de Banach e M um subconjunto convexo, fechado e não vazio de X. Se $A : X \to X$ é um operador contínuo tal que $A(M) \subset N$ onde $N \subseteq M$ é um conjunto compacto, então A tem ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Ver [40], página 222. ■

Capítulo

2

Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos do elemento finito e as estimativas do erro do interpolante global nos espaços de Sobolev adequados.

Definição 2.0.3 (Elemento Finito) *Sejam*

i) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio com fronteira suave por partes (o* ***domínio elementar****),*

ii) $\mathcal{P}$ *um espaço de dimensão finita de funções em* K *(o* ***espaço de funções forma****) e*

iii) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$ *uma base para* $\mathcal{P}'$ *(o* ***conjunto de variáveis nodais****),*

então $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ *é chamado de um* ***elemento finito****.*

Na Definição 2.0.3, $\mathcal{P}'$ denota o dual algébrico do espaço linear $\mathcal{P}$ e $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Definição 2.0.4 (Base nodal) *Dado* $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ *um elemento finito e seja* $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$ *a base para* $\mathcal{P}$*, dual a* $\mathcal{N}$*; isto é,* $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$*. Esta base é chamada de* ***base nodal*** *para* $\mathcal{P}$*.*

Definição 2.0.5 (O Interpolante) *Dado um elemento de finito* $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$*, seja o conjunto* $\{\phi_i : 1 \leq i \leq k\} \subseteq \mathcal{P}$ *a base dual para* $\mathcal{N}$*. Se* v *é uma função, na qual todos os* $N_i \in \mathcal{N}$*,* $i = 1, \ldots, k$*, estão definidos, então definimos o* ***Interpolante Local*** *por*

$$\mathcal{I}_K v := \sum_{i=1}^{k} N_i(v)\phi_i. \tag{2.1}$$

Proposição 2.0.1 *O Interpolante Local* $\mathcal{I}_K$ *(*$v \mapsto \mathcal{I}_K v$*) é linear.*

Prova. Como cada N_i, $i = 1, \ldots, k$ são funcionais lineares, temos

$$\mathcal{I}_K(v + \alpha\omega) = \sum_{i=1}^{k} N_i(v + \alpha\omega)\phi_i = \sum_{i=1}^{k} \big(N_i(v) + \alpha N_i(\omega)\big)\phi_i = \mathcal{I}_K(v) + \alpha\mathcal{I}_K(\omega).$$

□

Proposição 2.0.2 $N_i\big(\mathcal{I}_K v\big) = N_i(v)$, $i = 1, \ldots, k$.

Prova. Da definição de $\mathcal{I}_K$, linearidade de N_i e $\{\phi_j\}$ dual a $\mathcal{N}$, segue

$$N_i\big(\mathcal{I}_K v\big) = N_i\bigg(\sum_{j=1}^{k} N_j(v)\phi_j\bigg) = \sum_{j=1}^{k} N_j(v)N_i(\phi_j) = \sum_{j=1}^{k} N_j(v)\delta_{ij} = N_i(v).$$

□

Observação 2.0.1 *A Proposição* 2.0.2 *diz-se que o* $\mathcal{I}_K(v)$ *é a única função forma que tem os mesmos valores nodais como* v.

Proposição 2.0.3 $\mathcal{I}_K(v) = v$, *para* $v \in \mathcal{P}$. *Em particular,* $\mathcal{I}_K$ *é idempotente, isto é,* $\mathcal{I}_K^2 = \mathcal{I}_K$.

Prova. Ver [15, Proposição 3.3.7]. □

Agora, podemos colar os elementos do domínio para obter uma subdivisão do domínio de cálculo e, unir os interpolantes locais e obter um interpolante global.

Definição 2.0.6 *Uma* ***subdivisão*** *do domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é uma coleção finita* $\{K_i\}$ *de abertos com* $K_i \subset \Omega$, *para todo* i, *tal que*

1) $K_i \cap K_j = \emptyset$, *se* $i \neq j$ *e*

2) $\bigcup \overline{K}_i = \overline{\Omega}$.

Definição 2.0.7 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio com uma subdivisão* $\mathcal{T}$. *Assumamos que cada elemento do domínio,* K, *na subdivisão esta equipado com algum tipo de função forma,* $\mathcal{P}$, *e variáveis nodais,* $\mathcal{N}$, *tal que* $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ *forma um elemento finito. Seja* m *a ordem mais alta das derivadas parciais envolvidas nas variáveis nodais. Para* $f \in C^m(\overline{\Omega})$, *o interpolante global esta definido por*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f\big|_{K_i} = \mathcal{I}_{K_i} f, \tag{2.2}$$

para todo $K_i \in \mathcal{T}$ *e* $m \in \mathbb{N}$.

Na ausência de outras condições relativas à subdivisão não é possível afirmar a continuidade da interpolação global. Em seguida, devemos formular uma condição simples que garante que a interpolação global é uma função contínua no $\overline{\Omega}$. Para manter a simples apresentação, nos restringir ao caso de duas dimensões espaciais, ou seja, quando $\mathbb{R}^2$. Mais adiante faremos a generalização desta definição para o $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.0.8 *Uma* ***triangulação*** *de um domínio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma subdivisão de Ω consistindo de triângulos que tem a propriedade que*

3) Nenhum vértice de um triângulo está no interior de um lado de um outro triângulo.

Exemplo 2.0.1 *A Figura do lado esquerdo da Figura 2.1, mostra uma triangulação de um domínio dado. A Figura do lado direito não é uma triangulação.*

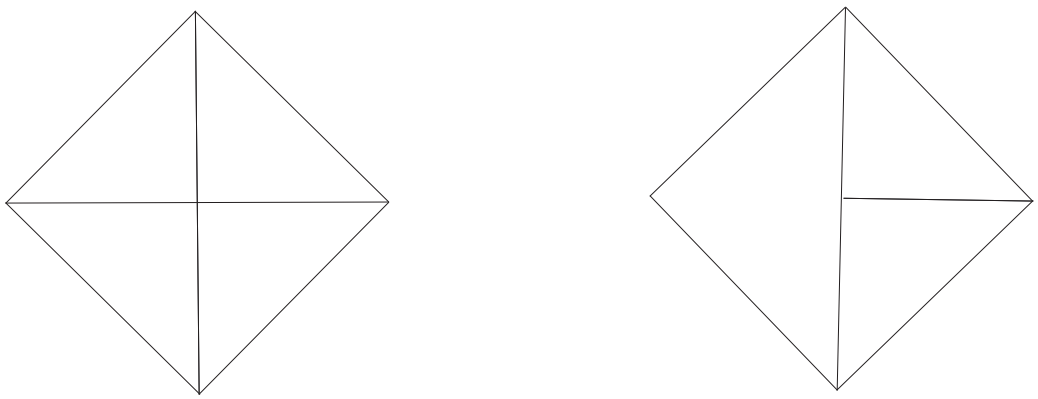


Figura 2.1: Duas subdivisões: a primeira é uma triangulação e a outra não.

Definição 2.0.9 *Dizemos que um interpolante tem* ***ordem de continuidade*** *r (ou abreviadamente, que é "C^r") se $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f \in C^r$, para todo $f \in C^m(\overline{\Omega})$. O espaço,*

$$V_{\mathcal{T}} = \{\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f : f \in C^m(\overline{\Omega})\}, \tag{2.3}$$

é dito ser um espaço elemento finito "C^r", onde $r \in \mathbb{N}$.

2.1 Equivalência dos elementos

Na aplicação do interpolante global, é essencial que encontremos uma limitação uniforme (independente de $T \in \mathcal{T}$) para a norma do operador de interpolação local $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$. Portanto, queremos comparar o operador interpolante local sobre elementos diferentes.

Definição 2.1.1 *Sejam $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ um elemento finito com $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação afim dada por $F(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular e $\mathbf{b}$ é um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. O elemento finito $(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{N}})$ é* ***equivalente afim*** *a $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ se*

i) $F(K) = \widehat{K}$,

ii) $F^*\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ *e*

iii) $F_*\mathcal{N} = \widehat{\mathcal{N}}$,

onde F^* é o "pull-back"de F definido por $F^*(\hat{f}) := \hat{f} \circ F$, e F_* é a "push-forward"de F definido por $(F_*N)(\hat{f}) := N(F^*(\hat{f})) = N(\hat{f} \circ F)$.
Denotamos $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \tilde{F} (\widehat{K}, \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{N}})$ se eles são equivalente afim.

Proposição 2.1.1 *A Equivalência afim é uma relação de equivalência.*

Prova. A reflexividade e simetria é imediata, fazendo uso da aplicação identidade e do fato que a aplicação afim tem inversa.

Vamos mostrar a transitividade. De fato, sejam $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \tilde{F} (\widehat{K}, \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{N}})$ e $(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{N}}) \tilde{G} (\widetilde{K}, \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{N}})$, isto é,

$$\begin{aligned} F(K) = \widehat{K}, \qquad & G(\widehat{K}) = \widetilde{K} \\ \hat{f} \circ F = f, \qquad & \tilde{f} \circ G = \hat{f} \\ N(\hat{f} \circ F) = \widehat{N}(\hat{f}), \qquad & \widehat{N}(\tilde{f} \circ G) = \widetilde{N}(\tilde{f}), \end{aligned}$$

onde $f \in \mathcal{P}$, $\hat{f} \in \widehat{\mathcal{P}}$, $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $N \in \mathcal{N}$, $\widehat{N} \in \widehat{\mathcal{N}}$ e $\widetilde{N} \in \widetilde{\mathcal{N}}$. Disto, tomando $H := G \circ F$, segue que $H(K) = \widetilde{K}$, $\tilde{f} \circ H = f$ e

$$N(\tilde{f} \circ H) = N(\tilde{f} \circ G \circ F) = N(\hat{f} \circ F) = \widehat{N}(\hat{f}) = \widehat{N}(\tilde{f} \circ G) = \widetilde{N}(\tilde{f}),$$

onde $f \in \mathcal{P}$, $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $N \in \mathcal{N}$ e $\widetilde{N} \in \widetilde{\mathcal{N}}$. Portanto, $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \tilde{H} (\widetilde{K}, \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{N}})$. □

Observação 2.1.1 *Como um resultado da Proposição 2.1.1 vemos que existe uma classe de equivalência con respeito à equivalência afim, isso significa que podemos fazer equivalentes afins todos estes elementos com um elemento, o qual chamaremos de elemento de referência.*

Definição 2.1.2 *Os elementos finitos $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ e $(K, \mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{N}})$ são* ***equivalente interpolante*** *se*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f = \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f, \ \forall f \text{ suficientemente suave}, \tag{2.4}$$

onde $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ (respectivamente $\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}}$) é definido pelo lado direito de (2.1) *com $N_i \in \mathcal{N}$ (respectivamente $N_i \in \widetilde{\mathcal{N}}$).*
Escrevemos $(K,\mathcal{P},\mathcal{N}) \overset{\sim}{\mathcal{I}} (K,\mathcal{P},\widetilde{\mathcal{N}})$ se eles são equivalente interpolante.

Proposição 2.1.2 *Suponha que $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ e $(K,\mathcal{P},\widetilde{\mathcal{N}})$ são elementos finitos. Cada variável nodal em $\mathcal{N}$ é uma combinação linear de variáveis nodais em $\widetilde{\mathcal{N}}$ (quando é um subconjunto de $[C^m(K)]'$) se e somente se $(K,\mathcal{P},\mathcal{N}) \overset{\sim}{\mathcal{I}} (K,\mathcal{P},\widetilde{\mathcal{N}})$.*

Prova. [$\Longrightarrow$] Devemos mostrar que $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f = \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f$, $\forall f \in C^m(K)$. Para $N_i \in \mathcal{N}$, podemos escrever $N_i = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{N}_j$, já que cada variável nodal em $\mathcal{N}$ é uma combinação linear de variáveis nodais em $\widetilde{\mathcal{N}}$. Portanto, usando a Proposição 2.0.2, temos

$$N_i(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f) = \Big(\sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{N}_j\Big)(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f) = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{N}_j(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f) = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{N}_j(f) = N_i(f) = N_i(\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f).$$

Disto e da Proposição 2.0.3, segue que $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f = \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f$, já que $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f, \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f \in \mathcal{P}$.
[$\Longleftarrow$] Se $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f = \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f$ para todo $f \in C^m(K)$, então $N_i(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f) = N_i(\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f)$, para todo $f \in C^m(K)$ e $N_i \in \mathcal{N}$. Logo, usando a Proposição 2.0.2, obtemos $N_i(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} f) = N_i(f)$, para todo $f \in C^m(K)$ e $N_i \in \mathcal{N}$. Assim, dado $f \in C^m(K)$ e $N_i \in \mathcal{N}$, obtemos

$$N_i(f) = N_i\Big(\sum_{j=1}^{k} \widetilde{N}_j(f)\phi_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} N_i(\phi_j)\widetilde{N}_j(f) = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{N}_j(f),$$

onde $c_j := N_i(\phi_j)$. Portanto $N_i = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{N}_j$, para todo $N_i \in \mathcal{N}$. □

Para ver exemplos deste tipo de elementos finitos ver [15, Seção 3.4.8].

Definição 2.1.3 *Se $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ é um elemento finito que é equivalente afim a $(\widehat{K},\widehat{\mathcal{P}},\widehat{\mathcal{N}})$ e $(\widehat{K},\widehat{\mathcal{P}},\widehat{\mathcal{N}})$ é equivalente interpolante a $(\widetilde{K},\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{\mathcal{N}})$, então dizemos que $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ é* ***equivalente afim interpolante*** *a $(\widetilde{K},\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{\mathcal{N}})$.*

Proposição 2.1.3 *Se $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ é equivalente afim interpolante a $(\widetilde{K},\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{\mathcal{N}})$, então $\mathcal{I} \circ F^* = F^* \circ \widetilde{\mathcal{I}}$, onde $F : K \to \widetilde{K}$ é a aplicação afim, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ e $\widetilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}}$.*

Prova. Dado f suficientemente suave, temos

$$\mathcal{I} \circ F^*(f) = \mathcal{I}_{\mathcal{N}} \circ f \circ F \overset{\text{Hip.}}{=} \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}} \circ f \circ F = F^* \circ \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{N}}}(f).$$

□

2.2 Teoria de aproximação polinomial em espaços de Sobolev

Nesta seção a nossa atenção esta voltada a encontrar uma aproximação polinomial de ordem $m \in \mathbb{N}^*$ para uma função em um espaço de Sobolev. Os resultados desta seção encontram-se inteiramente em [15]. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $n \in \mathbb{N}^*$.

Definição 2.2.1 *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $B := B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$. Uma função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com as propriedades:*

(i) supp $\phi = \overline{B}$ *e*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1,$

será chamada de uma ***função cut-off****.*

Agora vamos considerar $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.2.2 *Suponhamos que u tem derivada fraca de ordem estritamente menor que m em uma região Ω tal que $B \subset\subset \Omega$. A* ***média do Polinômio de Taylor de ordem*** *m* ***de*** *u* ***sobre*** *B é definido por*

$$Q^m u(x) = \int_B \sum_{|\alpha|<m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y)(x-y)^\alpha \phi(y)dy, \tag{2.5}$$

onde B é a bola centrada em x_0 com raio ρ e ϕ é a função cut-off com suporte em $\overline{B}$.

Proposição 2.2.1 *$Q^m u$ é um polinômio de grau menor que m em x.*

Corolário 2.2.1 *Se Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, então para algum $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\|Q^m u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \leq C_{m,n,\rho,\Omega} \|u\|_{L^1(B)}, \ \forall u \in L^1(B). \tag{2.6}$$

Definição 2.2.3 *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é* ***"star-shaped"com respeito a*** *B se, para todo $x \in \Omega$, o envoltório convexo fechado de $\{x\} \cup B$ é um subconjunto de Ω. Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é* ***star-shaped com respeito a uma bola*** *se para alguma bola $B \subset \Omega$, Ω é star-shaped com respeito à bola B.*

Exemplos 2.2.1

1) Todo intervalo aberto $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ é star-shaped com respeito a uma bola (intervalos).

2) Uma estrela (com um número arbitrário de pontas) em $\mathbb{R}^2$ é star-shaped com respeito a uma bola suficientemente pequena centrada no centro da estrela.

3) O conjunto dado na Figura 2.2 é "star-shaped"com respeito à bola B, mas não com respeito à bola B'.

4) O conjunto dado na Figura 2.3 é um exemplo de um domínio que não é "star-shaped"com respeito a nenhuma bola.

5) Um domínio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é star-shaped com respeito a qualquer bola $B \subset \Omega$.

6) A união de domínios, os quais são star-shaped com respeito a uma bola dada, é star-shaped com respeito a essa bola. A união (inclusive de um número finito) de domínios star-shaped com respeito a bolas diferentes em geral não é star-shaped com respeito a uma bola.

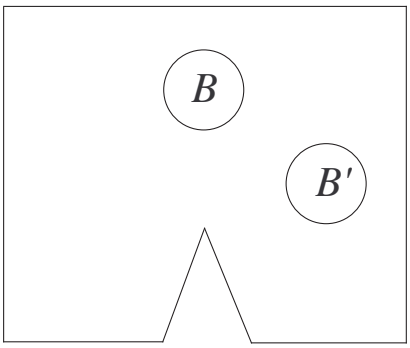


Figura 2.2: Domínio star-shaped com respeito a B mas não com B'.

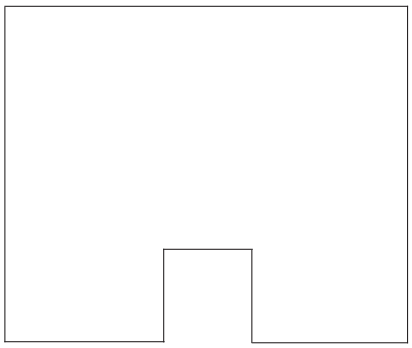


Figura 2.3: Domínio que não é star-shaped com respeito a nenhuma bola.

Para mais detalhes respeito deste tipo de domínios e alguns resultados podemos ver [18, Seção 3.2].

Observações 2.2.1

Se um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é star-shaped com respeito a uma bola, então satisfaz a condição do cone (Ver [18], página 98).

Se um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é star-shaped com respeito a uma bola $B \subset \Omega$, então Ω tem uma fronteira Lipschitz com os parâmetros dependendo somente do $\operatorname{diam}(B)$, $\operatorname{diam}(\Omega)$ *e n (Ver [18], página 151).*

Lema 2.2.1 (Desigualdade de Sobolev) *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem* $\operatorname{diam}(\Omega) = d$ *e é star-shaped com respeito à bola B. Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ onde ou (i) $1 < p < \infty$ e $m > n/p$ ou (ii) $p = 1$ e $m \geq n$, então u é contínuo sobre Ω e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{m,n,\gamma,d} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Lema 2.2.2 (Bramble-Hilbert) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado com* $\mathrm{diam}(\Omega) = d$*, o qual é star-shaped com respeito à bola $B \subset \Omega$ com raio $\rho > (1/2)\rho_{\max}$. Se $p \geq 1$ e $Q^m u$ é a média do polinômio de Taylor de ordem m de $u \in W^{m,p}(\Omega)$ sobre B, então*

$$|u - Q^m u|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C_{m,n,\gamma}\, d^{m-k} |u|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{2.8}$$

Para um domínio geral $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathrm{diam}(\Omega) = d$, definimos

$$\widehat{\Omega} = \{(1/d)x : x \in \Omega\}. \tag{2.9}$$

Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definamos $\hat{u}(y) := u(dy)$. Podemos, ver que

$$D^\alpha \hat{u}(y) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(dy)}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} = (d^{\alpha_1} \ldots d^{\alpha_n}) \frac{\partial^{|\alpha|} u(dy)}{\partial (dy_1)^{\alpha_1} \ldots \partial (dy_n)^{\alpha_n}} = d^{|\alpha|} D^\alpha u(dy),$$

para todo $|\alpha| \leq m$. Logo, usando a mudança de variáveis entre Ω e $\widehat{\Omega}$, temos

$$\int_{\widehat{\Omega}} |D^\alpha \hat{u}(y)|^p dy = \int_{\widehat{\Omega}} d^{|\alpha|p} |D^\alpha u(dy)|^p dy = d^{|\alpha|p} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p |d^{-1}|^n dx = d^{|\alpha|p-n} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx.$$

Assim, $\hat{u} \in W^{m,p}(\widehat{\Omega})$ e também

$$|\hat{u}|_{W^{k,p}(\widehat{\Omega})} = d^{k-n/p} |u|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{para } 0 \leq k \leq m. \tag{2.10}$$

2.2.1 Limitações para o erro de interpolação

Agora estimaremos o erro de interpolação. Começaremos por estimar a norma do operador de interpolação.

Lema 2.2.3 *Seja $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ um elemento finito tal que* $\mathrm{diam}(K) = 1$*, $\mathcal{P} \subseteq W^{m,\infty}(K)$ e $\mathcal{N} \subseteq \left(C^l(\overline{K})\right)'$ (isto é, as variáveis nodais em $\mathcal{N}$ envolve derivadas até a ordem l), onde $l, m \in \mathbb{N}$. Então o operador de interpolação $\mathcal{I}_K : C^l(\overline{K}) \to W^{m,p}(K)$ é limitado para $1 \leq p \leq \infty$.*

Prova. Sejam $\mathcal{N} = \{N_1, \ldots, N_k\} \subseteq \left(C^l(\overline{K})\right)'$ e $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq \mathcal{P}$ a base dual. O interpolante esta definido em (2.1) e cada $\phi_i \in W^{m,\infty}(K) \subseteq W^{m,p}(K)$ pela hipótese. Então,

$$\|\mathcal{I}_K v\|_{W^{m,p}(K)} \leq \sum_{i=1}^{k} |N_i(v)| \|\phi_i\|_{W^{m,p}(K)} \leq \|v\|_{C^l(\overline{K})} \sum_{1 \leq i \leq k} \|N_i\|_{C^l(\overline{K})'} \|\phi_i\|_{W^{m,p}(K)} = C \|v\|_{C^l(\overline{K})}.$$

□

Definição 2.2.4 *Se* $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ *satisfaz as condições do Lema 2.2.3, então* $\sigma(K) := \|\mathcal{I}_K\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),W^{m,p}(K))}$.

Definição 2.2.5 *Para qualquer região limitada* K*, definimos*

$$\widehat{K} := \big\{(1/\operatorname{diam}(K))x : x \in K\big\}. \tag{2.11}$$

Seja $\mathcal{P}_k$ o conjunto de polinômios de n variáveis e de grau menor ou igual que k com $\dim(\mathcal{P}_k) = \binom{n+k}{k}$.

Lema 2.2.4 *Sejam* $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ *e* $(\widehat{K},\widehat{\mathcal{P}},\widehat{\mathcal{N}})$ *elementos finitos afim equivalentes com a aplicação* $F : K \to \widehat{K}$ *e* $\mathcal{I}_K : C^l(\overline{K}) \to \mathcal{P}$ *e* $\widehat{\mathcal{I}}_{\widehat{K}} : C^l(\overline{\widehat{K}}) \to \widehat{\mathcal{P}}$ *seus operadores de interpolação com* $l \in \mathbb{N}$*. O seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccc} C^l(\overline{K}) & \xrightarrow{\ \widehat{\ }\ } & C^l(\overline{\widehat{K}}) \\ {\scriptstyle \mathcal{I}_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\mathcal{I}}_{\widehat{K}}} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\ \widehat{\ }\ } & \widehat{\mathcal{P}} \end{array}$$

Prova. A aplicação$\widehat{\ }$: $C^l(\overline{K}) \to C^l(\overline{\widehat{K}})$ é dada por $\hat{v} = v \circ F^{-1}$, onde $F : K \to \widehat{K}$ é uma aplicação afim. Usando a Definição 2.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{I}_K f} &= \sum_{N\in\mathcal{N}} \widehat{N(f)\phi_N} = \sum_{N\in\mathcal{N}} N(f)\widehat{\phi_N} = \sum_{N\in\mathcal{N}} N(f)(\phi_N \circ F^{-1}) \\ &= \sum_{\widehat{N}\in\widehat{\mathcal{N}}} \widehat{N}(\hat{f})(\phi_N \circ F^{-1}) = \sum_{\widehat{N}\in\widehat{\mathcal{N}}} \widehat{N}(\hat{f})\widehat{\phi}_N = \widehat{\mathcal{I}}_{\widehat{K}}\hat{f}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.1 *Seja* $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ *um elemento finito, satisfazendo*

(*i*) K *é star-shaped com respeito a alguma bola,*

(*ii*) $\mathcal{P}_{m-1} \subseteq \mathcal{P} \subseteq W^{m,\infty}(K)$ *e*

(*iii*) $\mathcal{N} \subseteq \big(C^l(\overline{K})\big)'$.

Suponha $1 \le p \le \infty$ *e ou* $m - l - n/p > 0$ *quando* $p > 1$ *ou* $m - l - n \ge 0$ *quando* $p = 1$*. Então, para* $0 \le i \le m$ *e* $v \in W^{m,p}(K)$*, temos*

$$|v - \mathcal{I}_K v|_{W^{i,p}(K)} \le C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})}\big(\operatorname{diam}(K)\big)^{m-i}|v|_{W^{m,p}(K)}, \tag{2.12}$$

onde $\widehat{K} = \{(1/\operatorname{diam}(K))x : x \in K\}$ *e* γ *é o parâmetro de chunkiness para* K.

Demonstração. Suponhamos que o $\operatorname{diam}(K) = 1$ (ou seja o caso que $K = \widehat{K}$). Também, o operador de interpolação $\mathcal{I}_K$ está bem definido em $W^{m,p}(K)$ pelo Teorema 1.1.5 e a Observação 2.2.1, já que $W^{m,p}(K) \hookrightarrow C^l(\overline{K})$, para $l \leq m - \dfrac{n}{p}$ e $1 \leq p \leq \infty$, logo

$$\|\mathcal{I}_K v\|_{W^{m,p}(K)} \leq C\|v\|_{C^l(\overline{K})} \leq Const.\|v\|_{W^{m,p}(K)}.$$

Seja B uma bola em K com raio $\rho > (1/2)\rho_{\max}$, K é star-shaped com respeito a B. Seja $Q^m v$ a média do polinômio de Taylor de ordem m de v em B. Como $\mathcal{I}_K f = f$ para $f \in \mathcal{P}$,

$$\mathcal{I}_K Q^m v = Q^m v \quad \text{por que} \quad Q^m v \in \mathcal{P}_{m-1} \subseteq \mathcal{P}. \tag{2.13}$$

Agora, usando o Teorema 1.1.5 e o Lema 2.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v - \mathcal{I}_K v\|_{W^{m,p}(K)} &\leq \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} + \|Q^m v - \mathcal{I}_K v\|_{W^{m,p}(K)} \\
&\overset{(2.13)}{=} \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} + \|\mathcal{I}_K(Q^m v - v)\|_{W^{m,p}(K)} \\
&\leq \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} + \sigma(K)\|Q^m v - v\|_{C^l(\overline{K})} \\
&\overset{(1.1.5)}{\leq} \big(1 + \sigma(K)C\big)\|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} = \big(1 + \sigma(K)C\big)\sum_{i=0}^{m} |v - Q^m v|_{W^{i,p}(K)} \\
&\overset{(2.2.2)}{\leq} \big(1 + \sigma(K)C\big)\sum_{i=0}^{m} C_{m,n,\gamma}|v|_{W^{m,p}(K)} = C_{m,n,\gamma,\sigma(K)}|v|_{W^{m,p}(K)},
\end{aligned}$$

onde $C_{m,n,\gamma,\sigma(K)} := \big(1 + \sigma(K)C\big)C_{m,n,\gamma}(m+1)$. Portanto, pela definição da semi-norma em $W^{m,p}(K)$, temos

$$|v - \mathcal{I}_K v|_{W^{i,p}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(K)}|v|_{W^{m,p}(K)}, \text{ para } 0 \leq i \leq m. \tag{2.14}$$

O caso geral segue pelo argumento de homogeneidade. De fato, seja K com $\operatorname{diam}(K) = d$, logo $\widehat{K} = \{x/d : x \in K\}$ tem $\operatorname{diam}(\widehat{K}) = 1$ e usando (2.14), temos

$$|\hat{v} - \widehat{\mathcal{I}}_{\widehat{K}}\hat{v}|_{W^{i,p}(\widehat{K})} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})}|\hat{v}|_{W^{m,p}(\widehat{K})}, \text{ para } 0 \leq i \leq m,$$

nesta última desigualdade temos usado o Lema 2.2.4. Agora, usando (2.10), obtemos

$$d^{i-n/p}\,|v - \mathcal{I}_K v|_{W^{i,p}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})} d^{m-n/p}\,|v|_{W^{m,p}(K)}, \text{ para } 0 \leq i \leq m.$$

Conseqüentemente,

$$|v - \mathcal{I}_K v|_{W^{i,p}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})}\big(\operatorname{diam}(K)\big)^{m-i}\,|v|_{W^{m,p}(K)}, \text{ para } 0 \leq i \leq m.$$

■

Corolário 2.2.2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.1, exceto que $i \leq l$, temos*

$$|\upsilon - \mathcal{I}_K\upsilon|_{W^{i,\infty}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})} \big(\operatorname{diam}(K)\big)^{m-i-n/p} |\upsilon|_{W^{m,p}(K)}. \tag{2.15}$$

Prova. Tomando $\operatorname{diam}(K) = 1$. Pelos Teorema 1.1.5 e 2.2.1, obtem-se

$$|\upsilon - \mathcal{I}_K\upsilon|_{W^{l,\infty}(K)} \leq C\|\upsilon - \mathcal{I}_K\upsilon\|_{W^{m,p}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(K)}|\upsilon|_{W^{m,p}(K)}.$$

Então,

$$|\upsilon - \mathcal{I}_K\upsilon|_{W^{i,\infty}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(K)}|\upsilon|_{W^{m,p}(K)} \text{ para } 0 \leq i \leq l,$$

pois $m - i - n/p \geq m - l - n/p \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Finalmente, usando o argumento de homogeneidade como na demonstração do Teorema 2.2.1, obtemos

$$d^i\, |\upsilon - \mathcal{I}_K\upsilon|_{W^{i,\infty}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})} d^{m-n/p}\, |\upsilon|_{W^{m,p}(K)}.$$

Portanto,

$$|\upsilon - \mathcal{I}_K\upsilon|_{W^{i,\infty}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})} \big(\operatorname{diam}(K)\big)^{m-i-n/p}\, |\upsilon|_{W^{m,p}(K)}.$$

□

Devemos encontrar uma limitação uniforme para $C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{K})}$, onde K varia sobre uma coleção de elementos, isto é, estudar a dependência de $\sigma(\widehat{K})$ sobre as transformações afim.

Proposição 2.2.2 *Se $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ é um elemento de referência o qual é equivalente afim ao elemento finito $(\widetilde{K}, \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{N}})$ através da aplicação afim $\mathbf{A}(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ com $\mathbf{a} = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz não-singular e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, então*

$$\sigma(\widetilde{K}) \leq C_{ref}\, \chi(\mathbf{a}), \tag{2.16}$$

onde $\chi : GL(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua dada por

$$\chi(\mathbf{a}) := \left(1 + \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|\right)^l \left(1 + \max_{1\leq i,j\leq n} \left|(a^{-1})_{ij}\right|\right)^m |\det(\mathbf{a})|^{1/p}, \tag{2.17}$$

onde $\mathbf{a^{-1}} = ((a^{-1})_{ij})_{n\times n}$.

Prova. Dado o elemento de referência $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ equivalente afim a $(\widetilde{K}, \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{N}})$ através da transformação $\mathbf{A}(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{a} = (a_{ij})_{n\times n}$ tem $\det(\mathbf{a}) \neq 0$. Da Definição 2.1.1 e da

prova do Lema 2.2.4, resulta

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{K}}\tilde{v}(\tilde{x}) = \sum_{\widetilde{N}\in\widetilde{\mathcal{N}}} \widetilde{N}(\tilde{v})\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(\tilde{x}) = \sum_{N\in\mathcal{N}} (\mathbf{A}_* N)\tilde{v}\cdot(\mathbf{A}^{-1})^*\phi_N(\tilde{x}). \tag{2.18}$$

Lembremos que $(\mathbf{A}_*N)\tilde{v} = N(\mathbf{A}^*\tilde{v})$, onde $(\mathbf{A}^*\tilde{v})x = \tilde{v}(\mathbf{A}x)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&|(\mathbf{A}_*N)\tilde{v}| = |N(\mathbf{A}^*\tilde{v})| \le \|N\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),\mathbb{R})}\|\mathbf{A}^*\tilde{v}\|_{C^l(\overline{K})} = \|N\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),\mathbb{R})} \max_{|\alpha|\le l}\sup_{x\in K}|D^\alpha(\tilde{v}\circ\mathbf{A})(x)| \\
&\le \|N\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),\mathbb{R})} \max_{|\alpha|\le l}\sup_{\mathbf{A}x\in\widetilde{K}}|D^\alpha\tilde{v}(\mathbf{A}(x))|\|\mathbf{a}\|^{|\alpha|} \le \|N\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),\mathbb{R})}\|\mathbf{a}\|^l \max_{|\alpha|\le l}\sup_{\mathbf{A}x\in\widetilde{K}}|D^\alpha\tilde{v}(\mathbf{A}(x))| \\
&= \|N\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),\mathbb{R})}\Big(n\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|\Big)^l\|\tilde{v}\|_{C^l\left(\overline{\widetilde{K}}\right)} \le C_{N,n,l}\Big(1+\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|\Big)^l\|\tilde{v}\|_{C^l\left(\overline{\widetilde{K}}\right)},
\end{aligned}$$

onde $C_{N,n,l} := n^l\|N\|_{\mathscr{L}(C^l(\overline{K}),\mathbb{R})}$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{A}^{-1})^*\phi_N\|_{W^{m,p}(\widetilde{K})} = \|\phi_N\circ\mathbf{A}^{-1}\|_{W^{m,p}(\widetilde{K})} &= \Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\widetilde{K}}|D^\alpha(\phi_N\circ\mathbf{A}^{-1})(\tilde{x})|^p d\tilde{x}\Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\widetilde{K}}|D^\alpha(\phi_N(\mathbf{A}^{-1}(\tilde{x})))|^p\|\mathbf{a}^{-1}\|^{|\alpha|p}d\tilde{x}\Big)^{1/p} \\
&\le \|\mathbf{a}^{-1}\|^m\Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_K|D^\alpha\phi_N(x)|^p|\det(\mathbf{a})|dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(n\max_{1\le i,j\le n}|(a^{-1})_{ij}|\Big)^m|\det(\mathbf{a})|^{1/p}\|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)} \\
&\le C'_{n,m}\Big(1+\max_{1\le i,j\le n}\big|(a^{-1})_{ij}\big|\Big)^m|\det(\mathbf{a})|^{1/p}\|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)},
\end{aligned}$$

onde $C'_{n,m} := n^m$. Como $\|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)}$ é limitado em K ($W^{m,\infty}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_{\widetilde{K}}\tilde{v}\|_{W^{m,p}(\widetilde{K})} &= \sum_{N\in\mathcal{N}}|\mathbf{A}_*N(\tilde{v})|\|(\mathbf{A}^{-1})^*\phi_N\|_{W^{m,p}(\widetilde{K})} \\
&\le C_{\mathrm{ref}}\Big(1+\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|\Big)^l\Big(1+\max_{1\le i,j\le n}\big|(a^{-1})_{ij}\big|\Big)^m|\det(\mathbf{a})|^{1/p}\|\tilde{v}\|_{C^l\left(\overline{\widetilde{K}}\right)},
\end{aligned}$$

onde

$$C_{\mathrm{ref}} := C'_{n,m}\cdot|\mathcal{N}|\cdot\max_{N\in\mathcal{N}}\{C_{N,n,l}\}\cdot\max_{N\in\mathcal{N}}\left\{\|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)}\right\}$$

e $|\mathcal{N}|$ denota o número de variáveis nodais ($=\dim(\mathcal{P})$). Portanto,

$$\sigma(\widetilde{K}) \le C_{\mathrm{ref}}\Big(1+\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|\Big)^l\Big(1+\max_{1\le i,j\le n}\big|(a^{-1})_{ij}\big|\Big)^m|\det(\mathbf{a})|^{1/p}. \tag{2.19}$$

□

Definição 2.2.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ uma família de subdivisões de Ω (Definição 2.0.6) tal que*

$$\max\{\operatorname{diam}(T) : T \in \mathcal{T}^h\} \leq h \operatorname{diam}(\Omega). \tag{2.20}$$

A família $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ é dita ***quase-uniforme*** *se existe $\rho > 0$ tal que*

$$\min\{\operatorname{diam}(B_T) : T \in \mathcal{T}^h\} \geq \rho h \operatorname{diam}(\Omega),\ \forall h \in (0,1], \tag{2.21}$$

onde B_T é a maior bola contida em T tal que T é star-shaped com respeito à B_T. A família $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ é dita ***não-degenerada*** *ou* ***regular*** *se existe $\rho > 0$ tal que para todo $T \in \mathcal{T}^h$ e para todo $h \in (0,1]$,*

$$\operatorname{diam}(B_T) \geq \rho \operatorname{diam}(T). \tag{2.22}$$

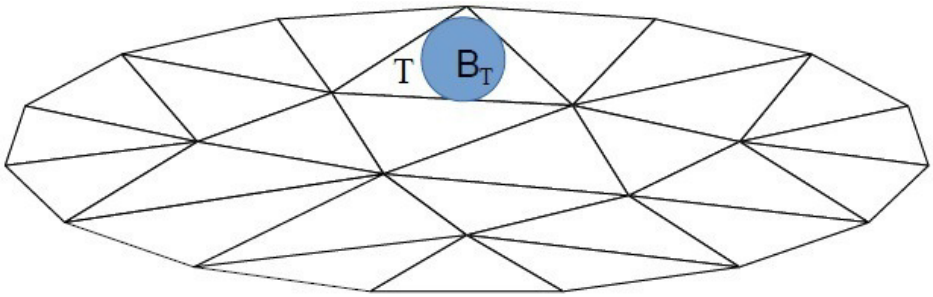


Figura 2.4: Exemplo de um $T \in \mathcal{T}^h$ star-shaped com respeito à bola B_T em $\mathbb{R}^2$.

Observação 2.2.1 *Se uma família é quase-uniforme então é não-degenerada, mas a recíproca não é verdade.*

Definição 2.2.7 *Um elemento finito $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ é dito um elemento C^r se r é menor inteiro não negativo para o qual*

$$V^h = \mathcal{I}^h(C^l(\overline{\Omega})) \subseteq C^r(\Omega) \cap W^{r+1,\infty}(\Omega), \tag{2.23}$$

onde $\mathcal{I}^h : C^l(\overline{\Omega}) \to L^1(\Omega)$ é o operador de ***interpolação global*** *definido por*

$$\mathcal{I}^h v\big|_T := \mathcal{I}_T^h v,\ \text{para } T \in \mathcal{T}^h,\ h \in (0,1], \tag{2.24}$$

e $\mathcal{I}_T^h$ é o operador de interpolação para o elemento equivalente afim $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$.

Teorema 2.2.2 *Sejam $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ uma família não-degenerada de subdivisões de um domínio poliédrico $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ um elemento de referência, satisfazendo as condições do Teorema 2.2.1 para alguns l, m e p. Para todo $T \in \mathcal{T}^h$, $h \in (0,1]$, seja $(T,\mathcal{P}_T,\mathcal{N}_T)$ o elemento equivalente afim. Então existe uma constante positiva C dependendo do elemento do referência, n, m, p e o número ρ em (2.22) tal que para $0 \le s \le m$,*

$$\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}^h} \|\upsilon - \mathcal{I}_T^h\upsilon\|^p_{W^{s,p}(T)}\Big)^{1/p} \le Ch^{m-s}|\upsilon|_{W^{m,p}(\Omega)},\ \forall \upsilon \in W^{m,p}(\Omega). \tag{2.25}$$

Quando $p = \infty$, o lado esquerdo da desigualdade (2.25) pode ser interpretado como $\max\limits_{T\in\mathcal{T}^h} \|\upsilon - \mathcal{I}_T^h\upsilon\|_{W^{s,\infty}(T)}$. Assim, para $0 \le s \le l$,

$$\max_{T\in\mathcal{T}^h} \|\upsilon - \mathcal{I}_T^h\upsilon\|_{W^{s,\infty}(T)} \le Ch^{m-s-n/p}|\upsilon|_{W^{m,p}(\Omega)}, \quad \forall \upsilon \in W^{m,p}(\Omega). \tag{2.26}$$

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que

$$\sup\{\sigma(\widehat{T}) : T \in \mathcal{T}^h, 0 < h \le 1\} = C(\rho,m,n,p,K) < \infty. \tag{2.27}$$

De fato, como $(\widehat{T},\widehat{\mathcal{P}}_T,\widehat{\mathcal{N}}_T)$ é também equivalente afim a $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ (devido á relação entre T e $\widehat{T}$) com alguma aplicação afim, digamos $\mathbf{A}(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, temos $\sigma(\widehat{T}) \le C_{\text{ref}}\,\chi(a)$ onde χ é contínua em $GL(\mathbb{R}^n)$ pela Proposição 2.2.2.

Necessitamos mostrar que a não-degeneração implica que $\mathbf{a}$ é um elemento de um subconjunto compacto de $GL(\mathbb{R}^n)$, o qual então implica (2.27). Como a família $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ é não-degenerada, existe $\rho > 0$ e uma bola $\widehat{B} \subset \widehat{T}$ tal que $\operatorname{diam}(\widehat{B}) \ge \rho \operatorname{diam}(\widehat{T}) > 0$ por (2.22); mas como $\operatorname{diam}(\widehat{T}) = 1$ segue que $\operatorname{diam}(\widehat{B}) \ge \rho > 0$. Assim,

$$|\widehat{B}| \le |\widehat{T}| = \int_{\widehat{T}} d\hat{x} = |\det(\mathbf{a})| \int_K dx \le |\det(\mathbf{a})||K|.$$

Por outro lado, como $\operatorname{diam}(\widehat{B}) \ge \rho$ implica que $2r \ge \rho$, onde r é o raio de $\widehat{B}$. Logo,

$$|\widehat{B}| = \int_{\widehat{B}} d\hat{x} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} r^n \ge C_n\rho^n,$$

onde $C_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(1+n/2)}$. Portanto, $0 < C_n\rho^n \le |\det(\mathbf{a})||K|$; em outras palavras, $|\det(\mathbf{a})| \ge \epsilon > 0$, onde $\epsilon = C_n\rho^n/|K|$ depende de ρ, K e n. Assim, $\mathbf{a} \in \{D \in GL(\mathbb{R}^n) : |\det(D)| \ge \epsilon > 0\}$ o qual é um subconjunto fechado.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$H = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq t_0, x_i > 0 \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\} \subset K,$$

onde t_0 depende somente de K. Seja e^i o i-ésimo vetor unitário em $\mathbb{R}^n$. Então,

$$\mathbf{A}(te^i) = t\mathbf{a}e^i + \mathbf{b} \in \overline{\widehat{T}},$$

para $0 \leq t \leq t_0$, pois $te^i \in H$ e $\mathbf{A}(K) = \widehat{T}$. Conseqüentemente,

$$\|t_0\mathbf{a}e^i\| \leq \|\mathbf{A}(t_0\mathbf{a}e^i)\| \leq \operatorname{diam}(\widehat{T}) = 1,$$

para $1 \leq i \leq n$. Disto, resulta

$$|a_{ij}| \leq \|\mathbf{a}\| = \sup_{1\leq i\leq n} \|\mathbf{a}e^i\| \leq 1/t_0,$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. Portanto, $\mathbf{a}$ é um elemento do conjunto compacto $\{D \in GL(\mathbb{R}^n) : |\det(D)| \geq \epsilon > 0, |D_{ij}| \leq 1/t_0\}$. Assim, (2.27) vale e em vista da continuidade de χ, segue-se que $\sigma(\widehat{T}) \leq C$, para todo $T \in \mathcal{T}^h$ e $h \in (0, 1]$, onde C depende do elemento de referência, n, m, l e ρ. Para provar (2.25), observe

$$\begin{aligned}
\sum_{T\in\mathcal{T}^h} \|\upsilon - \mathcal{I}_T^h\upsilon\|^p_{W^{s,p}(T)} &= \sum_{T\in\mathcal{T}^h} \sum_{i=0}^{s} |\upsilon - \mathcal{I}_T^h\upsilon|^p_{W^{i,p}(T)} \\
&\overset{(2.12)}{\leq} \sum_{T\in\mathcal{T}^h} C^p_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})} \sum_{i=0}^{s} [\operatorname{diam}(T)]^{p(m-i)} |\upsilon|^p_{W^{m,p}(T)} \\
&\overset{(2.20)}{\leq} \sum_{T\in\mathcal{T}^h} C^p_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})} \sum_{i=0}^{s} [h \operatorname{diam}(\Omega)]^{p(m-i)} |\upsilon|^p_{W^{m,p}(T)} \\
&\leq \sum_{T\in\mathcal{T}^h} C^p_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})} \sum_{i=0}^{s} [\operatorname{diam}(\Omega)]^{p(m-i)} \sum_{i=0}^{s} h^{p(m-i)} |\upsilon|^p_{W^{m,p}(T)} \\
&\leq \left\{\sum_{i=0}^{s} [\operatorname{diam}(\Omega)]^{m-i}\right\}^p (s+1) h^{p(m-s)} \sum_{T\in\mathcal{T}^h} C^p_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})} |\upsilon|^p_{W^{m,p}(T)} \\
&\leq \left\{\sum_{i=0}^{s} \Big[\sum_{K} \operatorname{diam}(\overline{K})\Big]^{m-i}\right\}^p (m+1) h^{p(m-s)} \sum_{T\in\mathcal{T}^h} C^p_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})} |\upsilon|^p_{W^{m,p}(T)} \\
&\overset{(2.27)}{=} C^p h^{p(m-s)} |\upsilon|^p_{W^{m,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde C depende de m, n, p, ρ e do elemento de referência K, pois γ depende do K. A desigualdade (2.26), segue-se

$$\begin{aligned}
\max_{T\in\mathcal{T}^h}\|v-\mathcal{I}_T^h v\|^p_{W^{s,\infty}(T)} &\overset{(2.15)}{\leq} \max_{T\in\mathcal{T}^h} C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})}\sum_{i=0}^{s}[\operatorname{diam}(T)]^{m-i-n/p}|v|_{W^{m,p}(T)}\\
&\overset{(2.20)}{\leq} \max_{T\in\mathcal{T}^h} C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})}\sum_{i=0}^{s}[h\operatorname{diam}(\Omega)]^{m-i-n/p}|v|_{W^{m,p}(T)}\\
&\leq \max_{T\in\mathcal{T}^h} C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})}\sum_{i=0}^{s}[\operatorname{diam}(\Omega)]^{m-i-n/p}\sum_{i=0}^{s}h^{m-i-n/p}|v|_{W^{m,p}(T)}\\
&\leq \sum_{i=0}^{s}[\operatorname{diam}(\Omega)]^{m-i-n/p}(s+1)h^{m-s-n/p}\max_{T\in\mathcal{T}^h} C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})}|v|_{W^{m,\infty}(T)}\\
&\leq \sum_{i=0}^{s}\Big[\sum_{K}\operatorname{diam}(\overline{K})\Big]^{m-i-n/p}(m+1)h^{m-s-n/p}\max_{T\in\mathcal{T}^h} C_{m,n,\gamma,\sigma(\widehat{T})}|v|_{W^{m,p}(T)}\\
&\overset{(2.27)}{=} Ch^{m-s-n/p}|v|_{W^{m,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 2.2.3 *Sejam $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,1]}$ uma família não-degenerada de subdivisões de um domínio poliédrico $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ e $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ um elemento de referência, satisfazendo as condições do Teorema 2.2.1 para alguns l, m e p. Suponha que todos os $(T,\mathcal{P}_T,\mathcal{N}_T)$, para todo $T\in\mathcal{T}^h$, $h\in(0,1]$, são equivalente afim interpolante a $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$. Então existe uma constante positiva C dependendo do elemento do referência, l, m, n, p e o número ρ em* (2.22) *tal que para $0\leq s\leq m$,*

$$\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}^h}\|v-\mathcal{I}_T^h v\|^p_{W^{s,p}(T)}\Big)^{1/p}\leq Ch^{m-s}|v|_{W^{m,p}(\Omega)},\ \forall v\in W^{m,p}(\Omega). \tag{2.28}$$

Quando $p=\infty$, o lado esquerdo da desigualdade (2.28) *pode ser interpretado como $\max_{T\in\mathcal{T}^h}\|v-\mathcal{I}_T^h v\|_{W^{s,\infty}(T)}$. Assim, para $0\leq s\leq l$,*

$$\max_{T\in\mathcal{T}^h}\|v-\mathcal{I}_T^h v\|_{W^{s,\infty}(T)}\leq Ch^{m-s-n/p}|v|_{W^{m,p}(\Omega)},\quad \forall v\in W^{m,p}(\Omega). \tag{2.29}$$

Prova. Como $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ é equivalente afim interpolante a $(T,\mathcal{P}_T,\mathcal{N}_T)$, existe um elemento finito $(\widetilde{T},\mathcal{P}_{\widetilde{T}},\mathcal{N}_{\widetilde{T}})$ tal que

$$(K,\mathcal{P},\mathcal{N})\overset{\cong}{F}(\widetilde{T},\mathcal{P}_{\widetilde{T}},\mathcal{N}_{\widetilde{T}})\overset{\cong}{\mathcal{I}}(\widehat{K},\widehat{\mathcal{P}},\widehat{\mathcal{N}}).$$

Pelo Teorema 2.2.2, dado $v \in W^{m,p}(\Omega)$, temos

$$\Big(\sum_{\widetilde{T} \in \mathcal{T}^h} \|v - \widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{T}}^h v\|_{W^{s,p}(\widetilde{T})}^p \Big)^{1/p} \leq C h^{m-s} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}, \tag{2.30}$$

para $0 \leq s \leq m$, e

$$\max_{\widetilde{T} \in \mathcal{T}^h} \|v - \widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{T}}^h v\|_{W^{s,\infty}(\widetilde{T})} \leq C h^{m-s-n/p} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}, \tag{2.31}$$

para $0 \leq s \leq l$, pois $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \tilde{F} (\widetilde{T}, \mathcal{P}_{\widetilde{T}}, \mathcal{N}_{\widetilde{T}})$. Como $(\widetilde{T}, \mathcal{P}_{\widetilde{T}}, \mathcal{N}_{\widetilde{T}}) \overset{\sim}{\mathcal{I}} (\widehat{K}, \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{N}})$, segue

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{T}}^h v = \mathcal{I}_T^h v, \ \forall v \in C^l(\overline{\Omega}). \tag{2.32}$$

Finalmente, substituindo (2.32) em (2.30) e (2.31), segue (2.28) e (2.29). □

Observação 2.2.2 *No caso em que os elementos de referência $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ nos resultados anteriores foram C^r, para algum $r \geq 0$, então para $0 \leq s \leq r+1$, temos*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}_T^h v\|_{W^{s,p}(T)}^p = \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \tag{2.33}$$

e

$$\max_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}_T^h v\|_{W^{s,\infty}(T)} = \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,\infty}(\Omega)}. \tag{2.34}$$

Substituindo estas expressões no lado esquerdo das estimativas no Teorema 2.2.2, obtemos

$$\|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C h^{m-s} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}, \tag{2.35}$$

para todo $v \in W^{m,p}(\Omega)$ e $0 \leq s \leq \min\{m, r+1\}$, também

$$\|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,\infty}(\Omega)} \leq C h^{m-s-n/p} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}, \tag{2.36}$$

para todo $v \in W^{m,p}(\Omega)$ e $0 \leq s \leq \min\{l, r+1\}$.

Teorema 2.2.3 (Estimativa inversa) *Seja $\{\mathcal{T}^h\}_{h \in (0,1]}$ uma família quase-uniforme de subdivisões do domínio poliédrico $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ um elemento finito de referência tal que $\mathcal{P} \subseteq W^{l,p}(K) \cap W^{m,q}(K)$ onde $1 \leq p, q \leq \infty$ e $0 \leq m \leq l$. Para $T \in \mathcal{T}^h$, seja $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$ um elemento afim-equivalente, e $V^h = \{v : v \text{ é mensurável e } v_{|T} \in \mathcal{P}_T, \forall T \in \mathcal{P}_T\}$. Então, existe uma constante $C = C(l, p, q, \rho)$ tal que*

$$\Big[\sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{l,p}(T)}^p \Big]^{1/p} \leq C h^{m-l+\min(0, \frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \Big[\sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{m,q}(T)}^q \Big]^{1/q} \tag{2.37}$$

para todo $v \in V^h$. *Quando* $p = \infty$ *(respectivamente,* $q = \infty$*),* $\left[\sum_{T\in\mathcal{T}^h} \|v\|^p_{W^{l,p}(T)}\right]^{1/p}$ *(respectivamente,* $\left[\sum_{T\in\mathcal{T}^h} \|v\|^q_{W^{m,q}(T)}\right]^{1/q}$*) é interpretado como* $\max_{T\in\mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{l,\infty}(T)}$ *(respectivamente,* $\max_{T\in\mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{m,\infty}(T)}$*).*

Demonstração. Ver [15, Teorema 4.5.11]. ■

Capítulo

3

Convergência Compacta e Continuidade dos Atratores

3.1 Continuidade do espectro

Nesta seção estamos interessados em estudar os fenômenos que podem ser escritos como uma equação da forma

$$\dot{u}_h + A_h u_h = F_h(u_h) \tag{3.1}$$

em um espaço de Banach X_h, para todo $h \in [0,1]$. Para estudar o comportamento assintótico da (3.1) vamos fazer um análise espectral cuidadoso do operador linear $A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h$ obtido através das propriedades da convergência, em um sentido a ser descrito, das soluções dos problemas lineares

$$A_h u_h = y_h \in X_h \quad \text{e} \quad A_0 u_0 = y_0 \in X_0.$$

O esquema da discretização geral estudado em [22] pode ser visto da seguinte maneira. Denotamos por $\mathbb{N}', \mathbb{N}''$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Sejam $\{X_h\}_{h\in[0,1]}$ uma família de espaços de Banach e $\{P_h\}_{h\in(0,1]}$ uma seqüência de operadores lineares limitados $P_h : X_0 \to X_h$, $P_h \in \mathscr{B}(X_0, X_h)$, $h \in (0,1]$, com a seguinte propriedade:

$$\|P_h u_0\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|u_0\|_{X_0},\ \forall u_0 \in X_0. \tag{3.2}$$

Introduzimos também, os operadores

$$P_h^\alpha = A_h^{-\alpha} P_h A_0^\alpha \in \mathscr{B}(X_0^\alpha, X_h^\alpha) \tag{3.3}$$

e mostramos que eles tem a propriedade (3.2) para os espaços fracionários X_0^α e X_h^α, onde $\alpha \in (0,1]$. Então, escrevemos $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0$ se e somente se $\|u_h - P_h^\alpha u_0\|_{X_h^\alpha} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Assim, obtemos

$$\|u_h - P_h^\alpha u_0\|_{X_h^\alpha} = \|A_h^\alpha(u_h - A_h^{-\alpha}P_hA_0^\alpha u_0)\|_{X_h} = \|A_h^\alpha u_h - P_hA_0^\alpha u_0\|_{X_h}$$

e

$$\|P_h^\alpha u_0\|_{X_h^\alpha} = \|A_h^\alpha(A_h^{-\alpha}P_hA_0^\alpha u_0)\|_{X_h} = \|P_hA_0^\alpha u_0\|_{X_h} = \lim_{h\to 0}\|A_0^\alpha u_0\|_{X_0} = \|u_0\|_{X_0^\alpha},$$

para todo $u \in D(A^\alpha)$ e a propriedade (3.2) é satisfeita. Para visualizar melhor a relação das projeções P_h e P_h^α, vejamos o seguinte gráfico:

$$\begin{array}{ccc} X_0^\alpha & \xrightarrow{P_h^\alpha} & X_h^\alpha \\ \Big\downarrow{\scriptstyle A_0^\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle A_h^\alpha} \\ X_0 & \xrightarrow{P_h} & X_h \end{array}$$

Maiores detalhes podem ser visto nas referências [6], [49], [54], [53] e [55].

Definição 3.1.1 *Diremos que uma seqüência $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$, com $u_h \in X_h$ para todo $h \in (0,1]$ é $\mathscr{P}-$**convergente** para $u_0 \in X_0$ se $\|u_h - P_hu_0\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Denotemos $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ para dizer que a seqüência $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ $\mathscr{P}-$converge para u_0 quando $h \to 0$.*

Lema 3.1.1 *Seja $P_h \in \mathscr{B}(X_0, X_h)$ satisfazendo (3.2), então existem constantes $h_0 \in (0,1]$ e $M > 0$ tais que $\sup\limits_{h\in(0,h_0]}\|P_h\|_{\mathscr{B}(X_0,X_h)} \leq M$.*

Prova. Seja $F_n = \{u_0 \in X_0 : \|P_hu_0\|_{X_h} \leq n, \forall h \in [0,1]\} \subset X_0$. Logo, $\cup_{n=1}^\infty F_n \subset X_0$. Observemos que F_n é fechado. De (3.2) para todo $u_0 \in X_0$, temos

$$\|u_0\|_{X_0} = \lim_{h\to 0}\|P_hu_0\|_{X_h} \leq n.$$

Assim, $X_0 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Logo, $X_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Do Teorema Baire existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}F_{n_0} \neq \emptyset$. Sejam $u_0 \in X_0$ e $r > 0$ tais que $B(u_0, r) \subset F_{n_0}$. Assim, tomando $u = u_0 + rz \in B(u_0, r)$ para $z \in B(0,1)$. Daí, $\|P_hu\|_{X_h} \leq n_0$ para qualquer $h \in [0,1]$. Então,

$$r\|P_hz\|_{X_h} \leq \|P_hu\|_{X_h} + \|P_hu_0\|_{X_h} \leq 2n_0.$$

Portanto, a afirmação segue tomando o supremo no lado esquerdo para $h_0 \in [0,1]$ e $z \in B(0,1)$. □

Propriedades 3.1.1 *A $\mathscr{P}-$convergência tem as seguintes:*

i) *Se* $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ *e* $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} v_0$, *então* $u_0 = v_0$.

ii) *Se* $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ *e* $v_h \xrightarrow{\mathscr{P}} v_0$, *então* $\alpha u_h + \beta v_h \xrightarrow{\mathscr{P}} \alpha u_0 + \beta v_0$, *onde* α *e* β *são constantes.*

iii) *Se* $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$, *então* $\|u_h\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|u_0\|_{X_0}$.

iv) $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} 0_{X_0}$ *se, e somente se* $\|u_h\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

v) *Para todo* $u_0 \in X_0$, *temos que* $P_h u_0 \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$.

vi) *Se* $\|u^{(h)} - u_0\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$ *para todo* $u^{(h)}, u_0 \in X_0$, *então* $P_h u^{(h)} \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$.

Prova. Ver [49] e [53]. □

Exemplo 3.1.1 *Sejam* $X_h = X_0$ *e* $P_h = I$ *o operador identidade para* $h \in (0, 1]$. *Então* $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ *significa que* $\|u_h - u_0\|_{X_0} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Exemplo 3.1.2 *Consideremos o espaço de Banach* $X = C([0, 1])$ *com a norma*

$$\|u\|_X = \max_{0\le t\le 1} |u(t)|, \quad \forall u \in X.$$

Definamos $X_h = C_h(\Omega_h)$ *o espaço de Banach das funções malha* $u_h : \Omega_h \to \mathbb{K}^n$ *dada por* $u_h(\Omega_h) = \{u_h(0), \ldots, u_h((n-1)h)\}$ *com* $\Omega_h = \{ih : i = 0, \ldots, n-1\}$, $h = 1/n$, *e a norma*

$$\|u_h\|_{X_h} = \max_{0\le i\le n-1} |u_h(ih)|, \quad \forall u_h \in X_h.$$

Os operadores $P_h \in \mathscr{B}(X, X_h)$ *e* $\bar{P}_h \in \mathscr{B}(X, X_h)$ *são dados por*

$$P_h u = \Big\{\frac{1}{h}\int_0^h u(s)ds, \frac{1}{h}\int_h^{2h} u(s)ds, \ldots, \frac{1}{h}\int_{(n-1)h}^{1} u(s)ds\Big\}, \tag{3.4}$$

$$\bar{P}_h u = \Big\{u(0), u(h), \ldots, u((n-1)h)\}, \tag{3.5}$$

são lineares e limitadas com $\|P_h\|_{\mathscr{L}(X,X_h)} = \|\bar{P}_h\|_{\mathscr{L}(X,X_h)} = 1$. *De fato, a linearidade é imediata. Assim,*

$$\|P_h u\|_{X_h} = \max_{0\le i\le n-1} \Big|\frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} u(s)ds\Big| = \max_{0\le i\le n-1} |u(ih + \theta h)| = \max_{0\le t\le 1} |u(t)| = \|u\|_X,$$

onde $t = ih + \theta h$ *com* $\theta \in [0, 1]$ *e temos usado o Teorema de Valor Médio para Integrais e*

$$\|\bar{P}_h u\|_{X_h} = \max_{0\le i\le n-1} |u(ih)| \overset{(t=ih)}{=} \max_{0\le t\le 1} |u(t)| = \|u\|_X.$$

Com estes últimos resultados, obtemos

$$\|P_h u\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|u\|_X \qquad e \qquad \|\bar{P}_h u\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|u\|_X.$$

Podemos ver que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u$ *significa que* $\max\limits_{0\le i\le n-1} |u_h(ih) - u(ih+\theta h)| \xrightarrow{h\to 0} 0$. *Também,* $u_h \xrightarrow{\bar{\mathscr{P}}} u$ *significa que* $\max\limits_{0\le i\le n-1} |u_h(ih) - u(ih)| \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Exemplo 3.1.3 *Sejam os espaços de Banach* $X = L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $X_h = L^p(\Omega_h)$ *onde* Ω_h *foi definido no Exemplo 3.1.2, com as normas*

$$\|u\|_X = \Big(\int_0^1 |u(t)|^p dt \Big)^{1/p}, \quad \forall u \in \widetilde{X} \ e$$

$$\|u_h\|_{X_h} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h|u_h(ih)|^p \Big)^{1/p}, \quad \forall u_h \in X_h,$$

respectivamente. Os operadores $P_h \in \mathscr{B}(X, X_h)$ *e* $\bar{P}_h \in \mathscr{B}(X, X_h)$ *são dados por* (3.4) *e* (3.5) *são lineares e limitadas com* $\|P_h\|_{\mathscr{B}(X,X_h)} \le 1$ *e* $\|\bar{P}_h\|_{\mathscr{B}(X,X_h)} \le 1$. *De fato, a linearidade é imediata. Logo,*

$$\begin{aligned}
\|P_h u\|_{X_h} &= \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h \Big| \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} u(s)ds \Big|^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h^{1-p} \Big| \int_{ih}^{(i+1)h} u(s)ds \Big|^p \Big)^{1/p} \\
&\le \Big[\sum_{i=0}^{n-1} h^{1-p} \int_{ih}^{(i+1)h} |u(s)|^p ds \Big(\int_{ih}^{(i+1)h} ds \Big)^{p/q} \Big]^{1/p} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h^{1-p+p/q} \int_{ih}^{(i+1)h} |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h^0 \int_{ih}^{(i+1)h} |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{ih}^{(i+1)h} |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{ih}^{(i+1)h} |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} = \Big(\int_0^1 |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} = \|u\|_X
\end{aligned}$$

e

$$\|\bar{P}_h u\|_{X_h} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h|u(ih)|^p \Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} h|u(ih)|^p \Big)^{1/p} = \Big(\int_0^1 |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} = \|u\|_X,$$

onde temos usado a Fórmula de Quadratura da função $|u(s)|^p$. *Assim,*

$$\|P_h u\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|u\|_X \quad e \quad \|\bar{P}_h u\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|u\|_X.$$

Definição 3.1.2 *Uma seqüencia* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $u_n \in X_{h_n}$ *e* $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, *é dita*

*$\mathscr{P}-$**relativamente compacta** se, para cada subseqüência $\{u_{n'}\}$ de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subseqüência $\{u_{n''}\}$ de $\{u_{n'}\}$ e um elemento $u_0 \in X_0$ tal que $u_{h_{n''}} \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$. A seqüência $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ é dita $\mathscr{P}-$relativamente compacta se cada seqüencia $\{u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, é $\mathscr{P}-$relativamente compacta.*

Propriedades 3.1.2 *Apresentamos algumas propriedades da $\mathscr{P}-$convergência:*

1. *Se $X_h \ni u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0 \in X_0$, então $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacta.*
2. *Se $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacta, então $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ é limitada em X_h.*
3. *Se $\{u_h\}_{h\in(0,1]}, \{u'_h\}_{h\in(0,1]}$ são $\mathscr{P}-$relativamente compactas, então $\{au_h + a'u'_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacta, onde $a, a' \in \mathbb{K}$.*
4. *Se $\{u^{(h)}\}_{h\in(0,1]} \subset X_0$ é relativamente compacta, então $\{P_h u^{(h)}\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacta.*

Suponhamos que Y_h é uma família de espaços de Banach com $h \in [0,1]$ e $\{Q_h\}_{h\in(0,1]}$ uma seqüência de operadores lineares limitados $Q_h : Y_0 \to Y_h$, com a seguinte propriedade:

$$\|Q_h v_0\|_{Y_h} \xrightarrow{h\to 0} \|v_0\|_{Y_0},\ \forall v_0 \in Y_0. \tag{3.6}$$

Definição 3.1.3 *Diremos que uma família de operadores $\{A_h \in \mathscr{B}(X_h, Y_h) : h \in (0,1]\}$ $\mathscr{P}\mathscr{Q}-$**convergente** para o operador $A_0 \in \mathscr{B}(X_0, Y_0)$ quando $h \to 0$, se $A_h u_h \xrightarrow{\mathscr{Q}} A_0 u_0$ sempre que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0 \in X_0$. Escrevemos $A_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} A_0$ quando $h \to 0$ para denotar que $\{A_h \in \mathscr{B}(X_h, Y_h) : h \in (0,1]\}$ $\mathscr{P}\mathscr{Q}-$convergente para A_0.*

Com isto, podemos fazer o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\quad A \quad} & Y_0 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle P_h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q_h} \\ X_h & \xrightarrow{\quad A_h \quad} & Y_h \end{array}$$

Agora, temos um resultado que simplifica nossos cálculos para mostrar a $\mathscr{P}\mathscr{Q}-$convergência de operadores lineares.

Proposição 3.1.1 *Sejam $\{A_h \in \mathscr{B}(X_h, Y_h) : h \in [0,1]\}$, $A_0 \in \mathscr{B}(X_0, Y_0)$ e os operadores lineares limitados $P_h : X_0 \to X_h$ e $Q_h : Y_0 \to Y_h$ satisfazendo (3.2) e (3.6), respectivamente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $A_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} A_0$ *quando* $h \to 0$.

ii) $\|A_h\|_{\mathscr{B}(X_h,Y_h)} \leq \alpha$, *onde* $\alpha > 0$ *é uma constante e* $\|A_h P_h u_0 - Q_h A_0 u_0\|_{Y_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$, *para todo* $u_0 \in X_0$.

iii) $\|A_h\|_{\mathscr{B}(X_h,Y_h)} \leq \alpha$, *onde* $\alpha > 0$ *é uma constante e existe um conjunto* E *denso em* X_0 *de tal forma que* $\|A_h P_h v - Q_h A_0 v\|_{Y_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$, *para todo* $v \in E$.

Prova. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Vamos mostrar que $\|A_h\|_{\mathscr{B}(X_h,Y_h)} \leq \alpha$. Suponhamos que isto não acontece, isto é, existem uma seqüencia $\{w_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $w_{h_n} \in X_{h_n}$ com $\|w_{h_n}\|_{X_{h_n}} = 1$ e $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tal que $0 < \alpha_n = \|A_{h_n} w_{h_n}\|_{Y_{h_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Construímos uma seqüência $\{u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_{h_n} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n}} w_{h_n} \in X_{h_n}$. Logo, aplicando a parte (iv) das Propriedades 3.1.1, obtemos

$$\|u_{h_n}\|_{X_{h_n}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} 0.$$

Também,

$$\|A_{h_n} u_{h_n}\|_{Y_{h_n}} = \sqrt{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Como $u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$, da hipótese resulta que $A_{h_n} u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{Q}} 0$. Usando a parte (iii) das Propriedades 3.1.1, temos $\|A_{h_n} u_{h_n}\|_{Y_{h_n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, o que é uma contradição com a unicidade do limite. Da parte (v) das Propriedades 3.1.1 e da hipótese (i), segue-se que $A_h P_h u_0 \xrightarrow{\mathscr{Q}} A_0 u_0$, para todo $u_0 \in X_0$. Logo, $\|A_h P_h u_0 - Q_h A_0 u_0\|_{Y_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$, para todo $u_0 \in X_0$.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ O resultado é imediato.
$(iii) \Longrightarrow (i)$ Suponhamos que $X_h \ni u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0 \in X_0$. Sabemos que, $Q_h \circ A_0 = A_h \circ P_h$ do diagrama anterior. Como E é denso em X_0, temos que dados $\varepsilon > 0$ e $u_0 \in X_0$, existe um $v \in E$ tal que $\|u_0 - v\|_{X_0} < \varepsilon$. Assim, tomando $\varepsilon = h$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|A_h u_h - Q_h A_0 u_0\|_{X_h} &\leq \|A_h u_h - A_h P_h u_0\|_{X_h} + \|A_h P_h u_0 - A_h P_h v\|_{X_h} \\
&\quad + \|A_h P_h v - Q_h A_0 v\|_{X_h} + \|Q_h A_0 v - Q_h A_0 u_0\|_{X_h} \\
&\leq \|A_h\|_{\mathscr{B}(X_h,Y_h)} \|u_h - P_h u_0\|_{X_h} + 2\|A_h P_h\|_{\mathscr{B}(X_0,Y_h)} \|u_0 - v\|_{X_0} + \|A_h P_h v - Q_h A_0 v\|_{X_h} \\
&\leq \alpha \|u_h - P_h u_0\|_{X_h} + 2C(\alpha) h + \|A_h P_h v - Q_h A_0 v\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} 0,
\end{aligned}$$

onde $C(\alpha) > 0$ é uma constante que depende de α. Portanto, $A_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} A_0$ quando $h \to 0$. □

Definição 3.1.4 *Diremos que uma família de operadores* $\{A_h \in \mathscr{K}_0(X_h, Y_h) : h \in (0,1]\}$ ***converge compactamente*** *para um operador* $A_0 \in \mathscr{K}_0(X_0, Y_0)$ *se, para toda seqüencia* $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ *com* $u_h \in X_h$ *tal que* $\|u_h\|_{X_h} = 1$, *para todo* $h \in (0,1]$, *a seqüencia* $\{A_h u_h\}_{h\in(0,1]}$

é $\mathscr{Q}-$relativamente compacta e $A_h \xrightarrow{\mathscr{PQ}} A_0$. Escrevemos $A_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0$ quando $h \to 0$ para denotar que $\{A_h \in \mathscr{K}_0(X_h, Y_h)\}_{h\in(0,1]}$ converge compactamente para A_0.

Exemplo 3.1.4 *Seja o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + c(t)x(t) = y(t),\ 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde a, c e y são funções contínuas em $[0,1]$. Suponhamos que $h = 1/n$ e $x_i \approx x(ih)$, para $i = 0, \ldots, n$. Usando as fórmulas de diferenciação numérica

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}x'''(t + \theta_1 h), \tag{3.8}$$

$$x''(t) = \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}x^{\prime v}(t + \theta_2 h), \tag{3.9}$$

onde $|\theta_1| < 1$ e $|\theta_2| < 1$. Construímos a equação de diferenças

$$\begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} + a(ih)\dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} + c(ih)x_i = y(ih), \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ x_0 = x_n = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

A questão é se o sistema de equações (3.10) tem uma solução e, se esta converge para a solução do problema (3.7).

Sejam os espaços de Banach $X = C_0^2[0,1]$, $Y = C[0,1]$, $X_h = C_{0h}^2 = \{x_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{K}^{n+1} : x_0 = x_n = 0\}$ e $Y_h = C_h[0,1] = \{y_h = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \in \mathbb{K}^{n-1}\}$ e as normas

$$\begin{aligned} \|x\|_X &= \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x''(t)|, \quad \forall x \in X, \\ \|y\|_Y &= \max_{0\le t\le 1}|y(t)|, \quad \forall y \in Y, \\ \|x_h\|_{X_h} &= \max_{0\le i\le n}|x_i| + \max_{0\le i\le n}|\partial x_i| + \max_{0\le i\le n}|\bar\partial\partial x_i|, \quad \forall x_h \in X_h, \\ \|y_h\|_{Y_h} &= \max_{1\le i\le n-1}|y_i|, \quad \forall y_h \in Y_h, \end{aligned}$$

onde temos usado

$$\partial x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, \quad \bar\partial x_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{h}, \quad \bar\partial\partial x_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}.$$

Sejam operadores $P_h \in \mathscr{B}(X, X_h)$ *e* $Q_h \in \mathscr{B}(Y, Y_h)$ *dados por*

$$P_h x = \Big\{x(0), x(h), \ldots, x(nh)\}, \quad \forall x \in X,$$
$$Q_h y = \Big\{y(h), \ldots, y((n-1)h)\}, \quad \forall y \in Y.$$

Podemos ver

$$\begin{aligned}
\|P_h x\|_{X_h} &= \max_{0\le i\le n} |x(ih)| + \max_{0\le i\le n} |\partial x(ih)| + \max_{0\le i\le n} |\bar{\partial}\partial x(ih)| \\
&= \max_{0\le i\le n} |x(ih)| + \max_{0\le i\le n} |x'(ih) + \mathcal{O}(h)| + \max_{0\le i\le n} |x''(ih) + \mathcal{O}(h^2)| \\
&\le \max_{0\le i\le n} |x(ih)| + \max_{0\le i\le n} |x'(ih)| + \max_{0\le i\le n} |x''(ih)| + \mathcal{O}(h) \\
&\le \max_{0\le t\le 1} |x(t)| + \max_{0\le t\le 1} |x'(t)| + \max_{0\le t\le 1} |x''(t)| + \mathcal{O}(h) \quad (t = ih) \\
&= \|x\|_X + \mathcal{O}(h). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Como a equação (3.11) *é para todo* $h \in (0, 1]$*, em particular podemos escolher* $h \to 0$*, assim*

$$\|P_h x\|_{X_h} \le \|x\|_X. \qquad (3.12)$$

Analogamente como foi feito no Exemplo 3.1.2, obtemos

$$\|Q_h y\|_{Y_h} = \|y\|_Y. \qquad (3.13)$$

Logo, de (3.12) *e* (3.13)*, temos*

$$\|P_h x\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} \|x\|_X \qquad e \qquad \|Q_h y\|_{Y_h} \xrightarrow{h\to 0} \|y\|_Y.$$

Notemos que

$$x_h \xrightarrow{\mathscr{P}} x \Leftrightarrow \max_{0\le i\le n} |x_i - x(ih)| \xrightarrow{h\to 0} 0, \max_{0\le i\le n} |\partial x_i - \partial x(ih)| \xrightarrow{h\to 0} 0, \max_{0\le i\le n} |\bar{\partial}\partial x_i - \bar{\partial}\partial x(ih)| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Também,

$$y_h \xrightarrow{\mathscr{Q}} y \Leftrightarrow \max_{0\le i\le n} |y_i - y(ih)| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Do problema de valor inicial (3.7) *podemos definir o operador* $A \in \mathscr{B}(X, Y)$ *dado por*

$$Ax := x'' + a(t)x' + c(t)x = y.$$

Agora, o problema de valor inicial discretizado (3.10) *podemos definir o operador* $A_h \in$

$\mathscr{B}(X_h, Y_h)$ *dado por*

$$A_h x_h := \bar{\partial}\partial x_h + (Q_h a)\frac{\partial + \bar{\partial}}{2} x_h + (Q_h c)x_h = Q_h y.$$

Sabemos que $C^4[0,1]$ *é denso em* X*. Logo,*

$$\begin{aligned}
\|A_h x_h\|_{Y_h} &\leq \max_{0\leq i\leq n}\left|\bar{\partial}\partial x_i\right| + \|Q_h\|_{\mathscr{B}(Y,Y_h)} \max_{0\leq t\leq 1}|a(t)| \max_{0\leq i\leq n}\left|\frac{\partial+\bar{\partial}}{2}x_i\right| \\
&\quad + \|Q_h\|_{\mathscr{B}(Y,Y_h)} \max_{0\leq t\leq 1}|c(t)| \max_{0\leq i\leq n}\left|x_i\right| \\
&\leq \max\left\{1, \max_{0\leq t\leq 1}|a(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|c(t)|\right\}\left(\max_{0\leq i\leq n}\left|\bar{\partial}\partial x_i\right| + \max_{0\leq i\leq n}\left|\frac{\partial+\bar{\partial}}{2}x_i\right| + \max_{0\leq i\leq n}\left|x_i\right|\right) \\
&\leq \max\left\{1, \max_{0\leq t\leq 1}|a(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|c(t)|\right\}\left(\max_{0\leq i\leq n}\left|\bar{\partial}\partial x_i\right| + \max_{0\leq i\leq n}\left|\frac{\partial}{\partial t}x_i + \mathcal{O}(h^2)\right| + \max_{0\leq i\leq n}\left|x_i\right|\right) \\
&\leq \max\left\{1, \max_{0\leq t\leq 1}|a(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|c(t)|\right\}\left(\max_{0\leq i\leq n}\left|\bar{\partial}\partial x_i\right| + \max_{0\leq i\leq n}\left|\partial x_i\right| + \max_{0\leq i\leq n}\left|x_i\right|\right) \\
&\leq \max\left\{1, \max_{0\leq t\leq 1}|a(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|c(t)|\right\}\|x_h\|_{X_h}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|A_h\|_{\mathscr{B}(X_h,Y_h)} \leq \max\left\{1, \max_{0\leq t\leq 1}|a(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|c(t)|\right\}. \tag{3.14}$$

Seja $x \in C^4[0,1]$*, usando* (3.8) *e* (3.9)*, obtemos*

$$\begin{aligned}
A_h P_h x - Q_h A x &= \{A_h x(0), A_h x(h), \ldots, A_h x(nh)\} - (Q_h x'' + Q_h a(t)x' + Q_h c(t)x) \\
&= \{0, \bar{\partial}\partial x(h) + (Q_h a)\frac{\partial+\bar{\partial}}{2}x(h) + (Q_h c)x(h), \ldots, 0\} - (Q_h x'' + Q_h a(t)x' + Q_h c(t)x) \\
&= \{\bar{\partial}\partial x(h) + (Q_h a)\frac{\partial+\bar{\partial}}{2}x(h) + (Q_h c)x(h), \ldots\} - (\{x''(h), \ldots, x''((n-1)h)\} \\
&\quad + \{a(h)x'(h), \ldots, a((n-1)h)x'((n-1)h)\} + \{c(h)x(h), \ldots, c((n-1)h)x((n-1)h)\}) \\
&= \{\bar{\partial}\partial x(h) + (Q_h a)\frac{\partial+\bar{\partial}}{2}x(h) + (Q_h c)x(h), \ldots\} - \{\bar{\partial}\partial x(h) + (Q_h a)\frac{\partial+\bar{\partial}}{2}x(h) \\
&\quad + (Q_h c)x(h) - \frac{h^2}{6}x'''(h+\theta_1 h) - \frac{h^2}{12}x'^{v}(h+\theta_2 h), \ldots\} \\
&= \left\{\frac{h^2}{6}x'''(h+\theta_1 h) + \frac{h^2}{12}x'^{v}(h+\theta_2 h), \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|A_h P_h x - Q_h A x\|_{Y_h} \leq h^2 \max_{1\leq i\leq n-1}\left|\frac{1}{6}x'''(ih+\theta_1 h) + \frac{1}{12}x'^{v}(ih+\theta_2 h)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0, \tag{3.15}$$

para todo $x \in C^4[0,1]$. *Usando a Proposição 3.1.1 segue que* $A_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} A$.

Dada uma seqüência $\{x_h\}_{h\in(0,1]}$ *com* $x_h \in X_h$ *tal que* $\|x_h\|_{X_h} = 1$. *Vamos mostrar que* $\{A_h x_h\}_{h\in(0,1]}$ *é* $\mathscr{P}-$*relativamente compacta. De fato, construímos uma subseqüência* $\{x_h\}_{h\in(0,1]}$ *das linhas poligonais* $x^{(n)} \in Y$, *de modo que* $x^{(n)}(ih) = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. *De* $\|x_h\|_{X_h} = 1$, *obtemos*

$$\max_{0\le i\le n} |x_i| \le 1, \quad \max_{0\le i\le n} |\partial x_i| \le 1. \tag{3.16}$$

Assim,

$$|x^{(n)}(t)| \le 1, \qquad |x^{(n)}(t_1) - x^{(n)}(t_2)| \le \max_{0\le i\le n} |(x^{(n)})'||t_1 - t_2| \le |t_1 - t_2|, \tag{3.17}$$

para todo $t, t_1, t_2 \in [0,1]$. *Logo, pelo Teorema de Ascoli (ver Teorema IV.24 em [16, página 72]) temos que* $\{x^{(n)}\}_{h\in(0,1]}$ *é relativamente compacto em* F. *Daí,* $\{x_h\}_{h\in(0,1]}$ *é* $\mathscr{Q}-$*relativamente compacto pela parte* (4) *das Propriedades 3.1.2 (onde* $x_h = Q_h x^{(n)}$). *Novamente de* $\|x_h\|_{X_h} = 1$, *obtemos*

$$\max_{0\le i\le n} |\partial x_i| \le 1, \quad \max_{0\le i\le n} |\bar\partial \partial x_i| \le 1. \tag{3.18}$$

Analogamente como foi feito anteriormente, temos que $\{\partial x_h\}_{h\in(0,1]}$ *e* $\{\bar\partial x_h\}_{h\in(0,1]}$ *são* $\mathscr{Q}-$*relativamente compactas. Podemos ver*

$$\bar\partial \partial x_h = \frac{\partial x_h - \bar\partial x_h}{h}.$$

Com isto, e usando a parte (3) *das Propriedades 3.1.2, obtemos que* $\{\bar\partial\partial x_h\}_{h\in(0,1]}$ *é* $\mathscr{Q}-$*relativamente compacta. Logo,* $\{A_h x_h\}_{h\in(0,1]}$ *é* $\mathscr{Q}-$*relativamente compacta pela parte* (3) *das Propriedades 3.1.2. Portanto,* $A_h \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} A$.

Lema 3.1.2 *Seja* $\{B_h \in \mathscr{K}_0(X_h) : h \in [0,1]\}$ *tal que* $B_h \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} B_0$ *quando* $h \to 0$. *Então,*

i) existe $h_0 \in (0, h]$ *tal que* $\sup_{h\in(0,h_0]} \|B_h\|_{\mathscr{B}(X_h)} < \infty$.

ii) Se $N(I + B_0) = \{0\}$, *existem* $h_0 > 0$ *e* $M > 0$ *tal que*

$$\|(I + B_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} \le M, \ \forall h \in [0, h_0]. \tag{3.19}$$

Prova. *i)* Se $\{\|B_h\|_{\mathscr{B}(X_h)} : h \in (0, h_0]\}$ não é limitada para qualquer escolha de $h_0 \in (0,1]$, existe uma seqüencia $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e $u_{h_n} \in X_{h_n}$ com $\|u_{h_n}\|_{X_{h_n}} = 1$ tal que $\|B_{h_n} u_{h_n}\|_{X_{h_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e isto está em contradição com a convergência compacta de B_h para B_0, pois existe uma subseqüência (que denotamos novamente $\{B_{h_n} u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$) de

$\{B_{h_n}u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que $\mathscr{P}-$convergente para $u_0 \in X_0$, então $\|B_{h_n}u_{h_n}\|_{X_{h_n}} \to \|u_0\|_{X_0}$ quando $n \to \infty$.

ii) Primeiramente mostremos que $N(I + B_h) = \{0\}$ (com isto $(I + B_h)^{-1}$ existe). Suponhamos que não acontece este fato. Seja $u_h \in N(I + B_h)$ com $\|u_h\|_{X_h} = 1$, logo $(I + B_h)u_h = 0$. Da convergência compacta temos que $B_h u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} B_0 u_0$ sempre que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0 \in X_0$ e $\|u_0\|_{X_0} = 1$ (pelas Propriedades 3.1.1, parte (iii)). Assim, $(I + B_0)u_0 = 0$ com $u_0 \neq 0$, o que contradiz o fato que $N(I + B_0) = \{0\}$.

Como $B_h \in \mathscr{K}_0(X_h)$ para cada $h \in [0, 1]$ e $N(I + B_h) = \{0\}$, segue do Teorema 1.4.9 que $R(I + B_h) = X_h$. Com este resultado, vemos que a estimativa (3.19) é equivalente a

$$\|(I + B_h)u_h\|_{X_h} \geq \frac{1}{M},\ \forall h \in [0, h_0] \text{ e } \forall u_h \in X_h \text{ com } \|u_h\|_{X_h} = 1.$$

Suponhamos que isto é falso; isto é, existe uma seqüência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in X_{h_n}$, $\|u_n\|_{X_{h_n}} = 1$ e $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tal que $\|(I + B_{h_n})u_n\|_{X_{h_n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pelas Propriedades 3.1.1 parte (iv), temos que $(I + B_{h_n})u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$. Como $\{B_{h_n}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência $\mathscr{P}-$convergente, que novamente denotamos por $\{B_{h_n}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para $u_0 \in X_0$, $\|u_0\|_{X_0} = 1$, segue que $u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} -u_0$. Isto implica que $(I + B_0)u_0 = 0$, pois $B_{h_n}u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} B_0(-u_0)$ sempre que $u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} -u_0$ e as Propriedades 3.1.1 parte (i), isto está em contradição com a hipótese que $N(I+B_0) = \{0\}$.□

Observação 3.1.1 *Os seguintes resultados são necessários no desenvolvimento desta seção.*

1. *Dada uma seqüência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in X_{h_n}$ e $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se toda subseqüência de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência $\mathscr{P}-$convergente para um vetor $u \in X_0$ independente da subseqüência tomada, então $u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u$.*

2. *Se $B_n \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0$ e $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_0$ em $\mathbb{C}$, então $\lambda_n B_n \xrightarrow{\mathscr{CC}} \lambda_0 B_0$.*

3. *Se $X_h = X$ para todo $h \in [0, 1]$ e $\mathscr{K}_0(X) \ni B_h \xrightarrow{h\to 0} B_0 \in \mathscr{K}_0(X)$ em $\mathscr{B}(X)$, então $B_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0$. Reciprocamente, se X é reflexivo e $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$ implica $B_{h_n}u_n \xrightarrow{n\to\infty} B_0 u$ sempre que $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e $B_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0$, então $B_h \xrightarrow{h\to 0} B_0$ na norma de $\mathscr{B}(X)$.*

4. *Seja X um espaço de Banach. Se M e N são subespaços de X com $\dim(M) > \dim(N)$, então existe $u \in M$, $\|u\|_X = 1$ tal que $d(u, N) = 1$.*

Lema 3.1.3 *Se $\mathscr{K}_0(X_h) \ni B_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0 \in \mathscr{K}_0(X_0)$ e $\mathscr{B}(X_h) \ni T_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} T_0 \in \mathscr{B}(X_0)$, então $T_h B_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} T_0 B_0$ e $B_h T_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0 T_0$.*

Prova. Primeiramente, notemos que $T_h B_h(u_h) = T_h(B_h u_h)$ e $B_h T_h(u_h) = B_h(T_h u_h)$. Vamos mostrar que $B_h T_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0 T_0$. De fato, dada a seqüência $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ com $u_h \in X_h$ tal

que $\|u_h\|_{X_h} = 1$, temos que $\{T_h u_h\}_{h\in(0,1]}$ é limitada pois $T_h \in \mathscr{B}(X_h)$. Pela convergência compacta de B_h para B_0, segue que $\{B_h(T_h u_h)\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacta. Além disso, se $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$, então $T_h u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} T_0 u_0$, e por conseguinte, $B_h T_h u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} B_0 T_0 u_0$, já que $B_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} B_0$. Portanto, $B_h T_h \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} B_0 T_0$.

Por último, seja $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$. Analogamente como foi feito anteriormente, obtemos que $T_h B_h u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} T_0 B_0 u_0$. Além disso, se $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ uma seqüência tal que $\|u_h\|_{X_h} = 1$, então $\{B_h u_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacto, pois $B_h \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} B_0$. Logo, existe uma subseqüência $\{B_{h_n} u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{P}-$convergente. Assim, $\{T_{h_n}(B_{h_n} u_{h_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ é $\mathscr{P}-$convergente, já que $T_h \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} T_0$. Portanto, $T_h B_h \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} T_0 B_0$. □

Definição 3.1.5 *Dada uma seqüência limitada $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in X_n$, onde X_n são espaços de Banach. Definimos a* ***medida de não-compacidade*** *μ de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in X_n$ como*

$$\mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \inf\{\varepsilon / \forall\, \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}, \exists(\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}', u_0 \in X_0) : \|u_n - P_n u_0\|_{X_n} \leq \varepsilon (n \in \mathbb{N}'')\}.$$

Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada; isto é, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} = \infty$ então $\mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \infty$.

Propriedades 3.1.3 *A medida de não-compacidade μ possui as seguintes:*

a) $0 \leq \mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{X_n}$;

b) $\mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0 \Longleftrightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é $\mathscr{P}-$relativamente compacto;*

c) $\mu(\{a u_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = |a|\mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, $a \in \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$;

d) $\mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq \mu(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}) + \mu(\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são seqüências limitadas.*

Considere a família de operadores lineares $\{A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h, h \in [0,1]\}$ e suponha que, para todo $h \in [0,1]$,

$$\boxed{A_h \text{ é fechado, tem resolvente compacto }, 0 \in \rho(A_h), \text{ e } A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} A_0^{-1}.} \qquad (H_h)$$

Lema 3.1.4 *Suponha que a família de operadores $\{A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h, h \in [0,1]\}$ satisfaz (H_h). Então, para cada $\lambda \in \rho(A_0)$, existe $h_\lambda > 0$ tal que $\lambda \in \rho(A_h)$ para todo $h \in [0, h_\lambda]$ e existe uma constante $M_\lambda > 0$ tal que*

$$\|(\lambda - A_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} \leq M_\lambda,\ \forall h \in [0, h_\lambda]. \qquad (3.20)$$

Além disso, $(\lambda - A_h)^{-1} \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $h \to 0$.

Prova. De (H_h) e do fato que $\lambda \in \rho(A_0)$ segue que $(\lambda - A_0)^{-1} = -A_0^{-1}(I - \lambda A_0^{-1})^{-1}$. Também, temos que $N(I - \lambda A_0^{-1}) = \{0\}$. Se este não for o caso, existe um $u_0 \in X_0$ com $u_0 \neq 0$ tal que $(I - \lambda A_0^{-1})u_0 = 0$, equivalentemente, $(\lambda - A_0)u_0 = 0$ o que contradiz o fato que $N(\lambda - A_0) = \{0\}$, já que A_0 é fechado.

Como $A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0^{-1}$, resulta que $-\lambda A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} -\lambda A_0^{-1}$ usando a parte (ii) das Propriedades 3.1.1 e da teoria de operadores compactos, $-\lambda A_h^{-1} \in \mathscr{K}_0(X_h)$, para todo $h \in [0, 1]$.

Aplicando o Lema 3.1.2 parte (i) e (ii) e, o fato que $-A_h^{-1} \in \mathscr{K}_0(X_h)$, obtemos que o operador $-A_h^{-1}(I - \lambda A_h^{-1})^{-1}$ está bem definido e é limitado tomando $h_\lambda \in (0, h_0)$. Com isto mostramos que $-A_h^{-1}(I - \lambda A_h^{-1})^{-1} = (\lambda - A_h)^{-1} \in \mathscr{B}(X_h)$. Como $N(I - \lambda A_0^{-1}) = \{0\}$, obtemos que $N(I - \lambda A_h^{-1}) = \{0\}$, para $h \in (0, h_\lambda]$, como foi mostrado no Lema 3.1.2. Do Teorema 1.4.9, temos que $R(I - \lambda A_h^{-1}) = X_h$. Agora, mostramos que $R(\lambda - A_h) = X_h$, suponhamos que isto não acontece, logo existe $v_h \in X_h$ para todo $u_h \in D(\lambda - A_h)$ tal que $(\lambda - A_h)u_h \neq v_h$, equivalentemente $\lambda A_h^{-1}u_h - u_h \neq A_h^{-1}v_h$. Se $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ e $v_h \xrightarrow{\mathscr{P}} v_0$, então $A_h^{-1}u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} A_0^{-1}u_0$ e $A_h^{-1}v_h \xrightarrow{\mathscr{P}} A_0^{-1}v_0$, respectivamente. Logo, $\lambda A_0^{-1}u_0 - u_0 \neq A_0^{-1}v_0$, isto é, $(\lambda - A_0)u_0 \neq v_0$ o que contradiz o fato que $R(\lambda - A_0) = X_0$, já que A_0 é fechado. Logo $\lambda \in \rho(A_h)$ e obtemos (3.1.4).

Para provar a convergência compacta de $(\lambda - A_h)^{-1}$ para $(\lambda - A_0)^{-1}$ procedemos da seguinte maneira: Como A_h^{-1} converge compactamente para A_0^{-1} e como $\{(I - \lambda A_h^{-1})^{-1} : h \in (0, h_\lambda]\}$ é limitado, concluímos que

- Se $\|u_h\|_{X_h} = 1$, então $(\lambda - A_h)^{-1}u_h = -A_h^{-1}w_h$ com $w_h = (I - \lambda A_h^{-1})^{-1}u_h$ que é uniformemente limitado em $h \in (0, h_\lambda]$. Logo $(\lambda - A_h)^{-1}u_h$ tem uma subseqüência $\mathscr{P}-$convergente.

- Se $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$, então $A_h^{-1}u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} A_0^{-1}u_0$. Agora, para qualquer subseqüência de $\{(\lambda - A_h)^{-1}u_h\}_{h\in(0,1]}$ existe uma subseqüência (que novamente denotamos por $\{(\lambda - A_h)^{-1}u_h\}_{h\in(0,1]}$) e $y_0 \in X_0$ tal que,

$$(\lambda - A_h)^{-1}u_h = -(I - \lambda A_h^{-1})^{-1}A_h^{-1}u_h = -A_h^{-1}(I - \lambda A_h^{-1})^{-1}u_h = z_h \xrightarrow{\mathscr{P}} y_0.$$

  Logo, pela parte (ii) das Propriedades 3.1.1, obtemos

$$A_0^{-1}u_0 \xleftarrow{\mathscr{P}} A_h^{-1}u_h = -(I - \lambda A_h^{-1})z_h \xrightarrow{\mathscr{P}} -(I - \lambda A_0^{-1})y_0$$

  e isto implica que $y_0 = (\lambda - A_0)^{-1}u_0$, fazendo uso da parte (i) das Propriedades 3.1.1. Em particular, y_0 é independente da subseqüência tomada (Observação 3.1.1 parte (1)). Isto implica que a seqüência inteira $(\lambda - A_h)^{-1}u_h$ $\mathscr{P}-$converge para

$y_0 = (\lambda - A_0)^{-1}u_0$ quando $h \to 0$. Portanto, $(\lambda - A_h)^{-1} \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $h \to 0$.

Disto segue a convergência compacta $(\lambda - A_h)^{-1} \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $h \to 0$ e, assim o resultado está provado. □

Lema 3.1.5 *Suponha que a família de operadores lineares* $\{A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h, h \in [0,1]\}$ *satisfaz* (H_h). *Se* Σ *é um subconjunto compacto de* $\rho(A_0)$, *então existe* $h_\Sigma > 0$ *tal que* $\Sigma \subset \rho(A_h)$ *para todo* $h \leq h_\Sigma$ *e*

$$\sup_{h\in[0,h_\Sigma]} \sup_{\lambda\in\Sigma} \|(\lambda - A_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} < \infty. \tag{3.21}$$

Além disso, se existe $h_0 \in (0,1]$ *tal que* $\sup_{h\in[0,h_0]} \|P_h\|_{\mathscr{B}(X_0,X_h)} < \infty$, *então para cada* $u_0 \in X_0$, *temos*

$$\sup_{\lambda\in\Sigma} \|(\lambda - A_h)^{-1}P_h u_0 - P_h(\lambda - A_0)^{-1}u_0\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} 0. \tag{3.22}$$

Prova. Primeiramente mostremos que existe $\hat{h}_\Sigma > 0$ tal que $\Sigma \subset \rho(A_h)$ para todo $h \in [0, \hat{h}_\Sigma)$. Se este não fosse o caso, existiriam seqüências $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\Sigma \subset \sigma(A_{h_n})$ (que podemos supor convergente para um $\lambda \in \Sigma$, pois Σ é compacto) e $u_{h_n} \in X_{h_n}$, $\|u_{h_n}\|_{X_h} = 1$ tais que $A_{h_n}u_{h_n} - \lambda_n u_{h_n} = 0$ ou, equivalentemente, $\lambda_n A_{h_n}^{-1}u_{h_n} = u_{h_n}$. Da convergência compacta $\{u_{h_n}\}$ tem uma subseqüência $\mathscr{P}-$convergente para $u_0 \in X_0$, $\|u_0\|_{X_0} = 1$ e $\lambda A_0^{-1}u_0 = u_0$. Assim, $A_0u_0 = \lambda u_0$ o que está em contradição com $\sigma(A_0) \cap \Sigma = \emptyset$.

Mostremos que existe $h_\Sigma \in (0, \hat{h}_\Sigma)$ tal que (3.21) vale. Para isto, é suficiente provar que existe $h_\Sigma \in (0,1]$ tal que

$$\{\|(I - \lambda A_h^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} : h \in [0,h_\Sigma] \text{ e } \lambda \in \Sigma\} \text{ é limitado,}$$

pois $-A_h^{-1} \in \mathscr{K}_0(X_h)$ para todo $h \in [0,1]$. Se este não fosse o caso, existiriam uma seqüência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ (que podemos supor convergente para um certo $\tilde{\lambda} \in \Sigma$) e uma seqüência $\{h_n\}$ em $(0,1]$ com $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tal que $\|(I - \lambda_n A_{h_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Do Lema 3.1.2 obtemos uma contradição, já que $-\lambda_n A_{h_n}^{-1} \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{C}} -\tilde{\lambda}A_0^{-1}$ quando $n \to \infty$ (usando (2) da Observação 3.1.1) e $N(I - \tilde{\lambda}A_0^{-1}) = \{0\}$ vem do fato que $\tilde{\lambda} \in \rho(A_0)$ então $N(\tilde{\lambda} - A_0) = \{0\}$.

Vamos provar (3.22) por contradição. Suponha que existem seqüências $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $h_n \to 0$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ com $\lambda_n \to \bar{\lambda} \in \Sigma$ e $\eta > 0$ tal que

$$\|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - P_{h_n}(\lambda_n - A_0)^{-1}u_0\|_{X_{h_n}} \geq \eta. \tag{3.23}$$

Usando a identidade do resolvente (1.36) para $\lambda_n, \bar{\lambda} \in \rho(A_{h_n})$, temos

$$(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - (\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 = (\bar{\lambda} - \lambda_n)(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}(\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0. \quad (3.24)$$

Disto e de (3.21), segue

$$\begin{aligned}
&\|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - (\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} = \|(\bar{\lambda} - \lambda_n)(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}(\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} \\
&\leq |\bar{\lambda} - \lambda_n| \sup_{h_n \in [0,h_\Sigma]} \sup_{\lambda_n \in \Sigma} \|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} \sup_{\bar{\lambda} \in \Sigma} \|(\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} \|P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} \\
&\leq C|\bar{\lambda} - \lambda_n| \sup_{\substack{h_n \in [0,h_\Sigma] \\ \lambda_n \in \Sigma}} \|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} \sup_{\bar{\lambda} \in \Sigma} \|(\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} \|u_0\|_{X_0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Do Lema 3.1.4 e a parte (v) das Propriedades 3.1.1, temos

$$\|(\bar{\lambda}_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - P_{h_n}(\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u_0\|_{X_{h_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (3.26)$$

Finalmente, da continuidade do resolvente (Corolário 1.4.2), resulta

$$\|(\lambda_n - A_0)^{-1}u_0 - (\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u_0\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (3.27)$$

Agora, (3.25), (3.26) e (3.27) estão em contradição com (3.24), pois

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - P_{h_n}(\lambda_n - A_0)^{-1}u_0\|_{X_{h_n}} &\leq \|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - (\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} \\
&+ \|(\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - P_{h_n}(\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u_0\|_{X_{h_n}} + \|P_{h_n}(\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u_0 - P_{h_n}(\lambda_n - A_0)^{-1}u_0\|_{X_{h_n}} \\
&\leq \|(\lambda_n - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - (\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} + \|(\bar{\lambda} - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}u_0 - P_{h_n}(\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u_0\|_{X_{h_n}} \\
&+ \|P_{h_n}\|_{\mathscr{B}(X_0,X_{h_n})}\|(\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u_0 - (\lambda_n - A_0)^{-1}u_0\|_{X_0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

e o resultado está provado. □

Lema 3.1.6 *Seja $A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h$ um operador setorial no espaço de Banach X_h satisfazendo a condição (H_h) para todo $h \in (0, 1]$, então $A_h^{-\theta} \overset{\mathscr{CC}}{\longrightarrow} A_0^{-\theta}$, para todo $\theta \in (0, 1)$.*

Prova. Sejam $S_{a,\phi}$ o setor do operador A_h e Γ a fronteira de $S_{a,\phi}$. Como $A_h^{-\theta} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \lambda^{-\theta}(\lambda - A_h)^{-1}d\lambda$, esta integral é absolutamente uniformemente convergente para $h \in (0, h_0]$. Logo, dado $\epsilon > 0$, podemos dividir $\Gamma = \Gamma_1^\epsilon \cup \Gamma_2^\epsilon$ de tal maneira que Γ_1^ϵ seja limitada e a integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^\epsilon} \|\lambda^{-\theta}(\lambda - A_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)}d\lambda \leq \epsilon,$$

para todo $h \in (0, h_0]$. Agora, sobre Γ_1^ϵ, reescrevemos a integral como

$$B_h := \frac{A_h^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^\epsilon} \lambda^{-\theta} A_h (\lambda - A_h)^{-1} d\lambda,$$

e usando que $\|\lambda^{-\theta} A_h(\lambda - A_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} = \|\lambda^{-\theta}(I - \lambda A_h^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)}$ é uniformemente limitado para $h \in (0, h_0]$ devido a que $A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0^{-1}$ e o Lema 3.1.2, segue-se que $B_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} B_0^{-1}$. Agora, tomando as seqüências $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in X_{h_n}$ tal que $\|u_n\|_{X_{h_n}} = 1$, obtemos

$$\mu(\{A_{h_n}^{-\theta} u_n\}) \leq \mu(\{B_{h_n} u_n\}) + \mu\Big(\Big\{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\epsilon} \lambda^{-\theta} (\lambda - A_{h_n})^{-1} d\lambda u_n\Big\}\Big) \leq \epsilon.$$

Segue-se que $\mu(\{A_{h_n}^{-\theta} u_n\}) = 0$, então $\{A_{h_n}^{-\theta} u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacta em X_{h_n}. Do Lema 3.1.4, temos

$$\|A_h^{-\theta} u_h - P_h A_0^{-\theta} u_0\|_{X_h} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^{-\theta} \|(\lambda - A_h)^{-1} u_h - P_h (\lambda - A_0)^{-1} u_0\|_{X_h} d\lambda \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

para todo $\lambda \in \Gamma \subset \rho(A_h)$ e sempre que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$. □

Para cada $\delta > 0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ defina $S_\delta(\lambda_0) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$. Podemos ver que $S_\delta(\lambda_0)$ é compacto.

A um ponto isolado $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$ associamos o seu auto-espaço generalizado $W(\lambda_0, A_0) = Q(\lambda_0, A_0) X_0$, onde

$$Q(\lambda_0, A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda_0| = \delta} (\xi I - A_0)^{-1} d\xi$$

e δ é escolhido de forma que não haja nenhum outro ponto de $\sigma(A_0)$ no disco $\overline{B}_\delta^{\mathbb{C}}(\lambda_0) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda_0| \leq \delta\}$. Segue do Lema 3.1.5 que existe $h_{S_\delta(\lambda_0)} > 0$ tal que $\rho(A_h) \supset S_\delta(\lambda_0)$ para todo $h \in (0, h_{S_\delta(\lambda_0)}]$. Seja $\mathscr{W}(\lambda_0, A_h) := Q(\lambda_0, A_h) X_h$, onde

$$Q(\lambda_0, A_h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda_0| = \delta} (\xi I - A_h)^{-1} d\xi.$$

Observação 3.1.2 *Sabemos que*

$$\mathscr{W}(\lambda_0, A_0) = \bigcup_{k\geq 1} \big\{u \in X : (\lambda_0 - A_0)^k u = 0\big\} = \bigcup_{k\geq 1} N\big[(\lambda_0 - A_0)^k\big].$$

Logo, pelo Teorema 1.4.6, temos que a $\dim(\mathscr{W}(\lambda_0, A_0)) < \infty$. *Também, pelo Teorema 1.4.7 vemos que* $\mathscr{W}(\lambda_0, A_0) = Q(\lambda_0, A_0) X_0$.

O seguinte resultado diz que o espectro de A_h, para h pequeno, se aproxima do espectro de A_0.

Teorema 3.1.1 *Suponha que a família de operadores* $\{A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h, h \in [0,1]\}$ *satisfaz* (H_h). *Então, valem as seguintes afirmativas:*

i) *Se* $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$, *então existem seqüências* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(0,1]$ *com* $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{C}$ *com* $\lambda_n \in \sigma(A_{h_n})$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *tal que* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$.

ii) *Se* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência em* $(0,1]$ *com* $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência em* $\mathbb{C}$ *com* $\lambda_n \in \sigma(A_{h_n})$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, *então* $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$.

Além disso, se existe $h_0 \in (0,1]$ *tal que* $\sup_{h\in[0,h_0]} \|P_h\|_{\mathscr{B}(X_0,X_h)} < \infty$, *valem as seguintes afirmativas:*

iii) *Existe* $h_1 \in (0,h_0)$, *tal que*

$$\dim(\mathscr{W}(\lambda_0, A_h)) = \dim(\mathscr{W}(\lambda_0, A_0)),$$

para todo $h \in [0,h_1]$.

iv) *Se* $u \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_0)$, *então existe uma seqüência* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(0,1]$ *com* $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $u_{h_n} \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_{h_n})$ *e tal que* $u_{h_n} \overset{\mathscr{P}}{\longrightarrow} u_0$ *quando* $n \to \infty$.

v) *Se* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência em* $(0,1]$ *com* $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *e* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência com* $u_n \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_{h_n})$, $\|u_n\|_{X_{h_n}} = 1$, *então* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tem uma subseqüência* $\mathscr{P}-$*convergente para um vetor* u_0 *em* $\mathscr{W}(\lambda_0, A_0)$ *e* $\|u_0\|_{X_0} = 1$.

Prova.

(i) Sejam $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$ e $\delta > 0$ tal que $\overline{B}_\delta^{\mathbb{C}}(\lambda_0) \cap \sigma(A_0) = \{\lambda_0\}$. Do Lema 3.1.5, existe $h_0 > 0$ tal que $\{\|(\lambda - A_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} : h \in [0,h_0] \text{ e } \lambda \in S_\delta(\lambda_0)\}$ é limitado.

Suponha agora que, existem $\delta > 0$ e uma seqüência $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que, $\overline{B}_\delta^{\mathbb{C}}(\lambda_0) \subset \rho(A_{h_n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{B}_\delta^{\mathbb{C}}(\lambda_0) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A_{h_n})^{-1} \in \mathscr{B}(X)$ é analítica para cada $n \in \mathbb{N}$, da prova do Lema 3.1.5 e do Teorema 1.4.5, temos

$$\|(I - \lambda_0 A_{h_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} = \|(I - \lambda A_{h_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} \leq \sup_{\substack{|\lambda-\lambda_0|=\delta \\ n\in\mathbb{N}}} \|(I - \lambda A_{h_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_{h_n})} < \infty.$$

Disto e do Teorema 1.4.9, temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|(I - \lambda_0 A_{h_n}^{-1})u_{h_n}\|_{X_{h_n}} \geq c\|u_{h_n}\|_{X_{h_n}}, \tag{3.28}$$

onde $u_{h_n} \in X_{h_n}$. Da hipótese sabemos que, se $u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$, então $-\lambda_0 A_{h_n}^{-1} u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} -\lambda_0 A_0^{-1} u_0$, fazendo uso da parte (iii) das Propriedades 3.1.1 e (3.28), temos

$$\|(I - \lambda_0 A_0^{-1})u_0\|_{X_0} \geq c\|u\|_{X_0}.$$

Logo, $(I - \lambda_0 A_0^{-1})^{-1} \in \mathscr{B}(X_0)$. Conseqüentemente, $\lambda_0 \in \rho(A_0)$, pois $-A_0^{-1} \in \mathscr{K}_0(X_0)$. Isto contradiz a escolha de λ_0 e prova que, para cada $\delta > 0$, $\overline{B}_\delta^{\mathbb{C}}(\lambda_0)$ contém algum ponto, λ_δ, de $\sigma(A_h)$, para todo h suficientemente pequeno.

(ii) Sejam $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $(0,1]$ com $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(A_{h_n})$ tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência com $u_n \in X_{h_n}$ tal que $\|u_n\|_{X_{h_n}} = 1$ e $\lambda_n u_n = A_{h_n} u_n$; isto é, $(I - \lambda_n A_{h_n}^{-1})u_n = 0$. Então,

$$\|(I - \lambda_0 A_{h_n}^{-1})u_n\|_{X_{h_n}} \leq \|(I - \lambda_n A_{h_n}^{-1})u_n\|_{X_{h_n}} + |\lambda_0 - \lambda_n|\|A_{h_n}^{-1}u_n\|_{X_{h_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tomando subseqüências se fosse necessário, se $u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ então $\lambda A_{h_n}^{-1} u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$ e $\|u_0\|_{X_0} = 1$, pois

$$\|\lambda_0 A_{h_n}^{-1} u_n - P_{h_n} u_n\|_{X_{h_n}} \leq \|\lambda_0 A_{h_n}^{-1} u_n - u_n\|_{X_{h_n}} + \|u_n - P_{h_n} u_n\|_{X_{h_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $u_0 - \lambda A_0^{-1} u_0 = 0$ (parte (i) e (ii) das Propriedades 3.1.1), $u_0 \neq 0$ e $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$.

(iii) Como $(\lambda - A_h)^{-1} \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} (\lambda - A_0)^{-1}$ uniformemente para $\lambda \in S_\delta(\lambda_0)$ (veja (3.22) no Lema 3.1.5), segue que $Q(\lambda_0, A_h) \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} Q(\lambda_0, A_0)$ quando $h \to 0$, pois

$$\|Q(\lambda_0, A_h)P_h u_0 - P_h Q(\lambda_0, A_0)u_0\|_{X_h} \leq \delta \sup_{\xi\in S_\delta(\lambda_0)} \|(\xi - A_h)^{-1}P_h u_0 - P_h(\xi - A_0)^{-1}u_0\|_{X_h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

já que $P_h u_0 \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0 \in X_0$.

Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base para $\mathscr{W}(\lambda_0, A_0) = Q(\lambda_0, A_0)X_0$, então para h suficientemente pequeno,

$$\{Q(\lambda_0, A_h)P_h v_1, \ldots, Q(\lambda_0, A_h)P_h v_k\}$$

é um conjunto linearmente independente em $Q(\lambda_0, A_h)X_h = \mathscr{W}(\lambda_0, A_h)$. De fato, suponhamos que $\{Q(\lambda_0, A_h)P_h v_1, \ldots, Q(\lambda_0, A_h)P_h v_k\}$ não é linearmente independente em $Q(\lambda_0, A_h)X_h$. Logo, $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i w_i = 0$, $\gamma_k = 0$, $\gamma_i \neq 0$, para $i = 1, \ldots, k-1$ e $w_i = Q(\lambda_0, A_h)P_h v_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Assim,

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \Big(-\frac{\gamma_i}{\gamma_k}\Big) w_i.$$

Disto,

$$Q(\lambda_0, A_h)P_h v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \Big(- \frac{\gamma_i}{\gamma_k}\Big) Q(\lambda_0, A_h)P_h v_i.$$

Daí,

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \Big(- \frac{\gamma_i}{\gamma_k}\Big) v_i.$$

O que contradiz o fato de ser base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ para $\mathscr{W}(\lambda_0, A_0) = Q(\lambda_0, A_0)X_0$. Disto, segue

$$\dim(Q(\lambda_0, A_h)(X_h)) \geq \dim(Q(\lambda_0, A_0)(X_0)).$$

Provamos a igualdade supondo que $Q_h(\lambda_0) \xrightarrow{\mathscr{CC}} Q(\lambda_0)$. Suponha, por redução ao absurdo que, para alguma seqüência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0, 1]$ com $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\dim(Q(\lambda_0, A_{h_n})(X_{h_n})) > \dim(Q(\lambda_0, A_0)(X_0)).$$

Da Observação 3.1.1, parte (4), segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_{h_n})$ com $\|u_n\|_{X_0} = 1$ tal que $d(u_n, P_{h_n}\mathscr{W}(\lambda_0, A_0)) = 1$. Da convergência compacta podemos supor que $Q(\lambda_0, A_{h_n})u_n = u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} Q(\lambda_0, A_0)u_0 = u_0$ e temos um absurdo, já que

$$1 \leq \|u_n - P_{h_n}Q_0(\lambda_0)u\|_{X_{h_n}} = \|Q_{h_n}(\lambda_0)u_n - P_{h_n}Q_0(\lambda_0)u_0\|_{X_{h_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim precisamos apenas provar a convergência compacta $Q(\lambda_0, A_h) \xrightarrow{\mathscr{CC}} Q(\lambda_0, A_0)$ quando $h \to 0$ e isto segue de $Q(\lambda_0, A_h) \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} Q(\lambda_0, A_0)$, da convergência compacta $A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0^{-1}$ quando $h \to 0$, da limitação uniforme de $\|(\xi A_h^{-1} - I)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)}$ para $\xi \in S_\delta(\lambda_0)$ e $h \in [0, h_0]$, dada na prova do Lema 3.1.5, e da fórmula

$$Q(\lambda_0, A_h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-\lambda_0|=\delta} (\xi I - A_h)^{-1} d\xi = A_h^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-\lambda_0|=\delta} (\xi A_h^{-1} - I)^{-1} d\xi,$$

pois, $\Xi_h = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi-\lambda_0|=\delta} (\xi A_h^{-1} - I)^{-1} d\xi$ é uniformemente limitada, logo $\{Q(\lambda_0, A_h)u_h\}_{h\in(0,h_0]}$ tem uma subseqüência $\mathscr{P}-$convergente onde $u_h \in X_h$ com $\|u_h\|_{X_h} = 1$.

(iv) Segue tomando $u_{h_n} = Q(\lambda_0, A_{h_n})P_{h_n}u_0 \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_{h_n})$, para cada $u_0 \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_0)$. Logo,

$$\|u_{h_n} - P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} = \|Q(\lambda_0, A_{h_n})P_{h_n}u_0 - P_{h_n}u_0\|_{X_{h_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(v) Segue da convergência compacta de $Q(\lambda_0, A_h)$ para $Q(\lambda_0, A_0)$ provada em (iii). De fato, dada uma seqüência $\{x_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{h_n} \in X_{h_n}$, com $\|x_{h_n}\|_{X_{h_n}} = 1$, tal que $u_n = Q(\lambda_0, A_{h_n})x_{h_n} \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_{h_n})$ e $\|u_n\|_{X_{h_n}} = 1$. Logo, existe uma subseqüência de

$\{Q(\lambda_0, A_{h_n})x_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotamos da mesma forma) que $\mathscr{P}-$converge para $u_0 \in X_0$ e $\|u_0\|_{X_0} = 1$. Mas, quando $x_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} x_0 \in X_0$, temos que $Q(\lambda_0, A_{h_n})x_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} Q(\lambda_0, A_0)x_0$. Assim, da parte (i) das Propriedades 3.1.1, temos que $u_0 = Q(\lambda, A_0)x_0 \in \mathscr{W}(\lambda_0, A_0)$. □

3.2 Perturbação da convergência compacta

Em diversas circunstâncias estaremos interessados em analisar o comportamento, em termos de convergência compacta, espectro, etc., de operadores que surgem como linearização em torno de certas soluções estacionárias de problemas semi-lineares. Isto nos conduz a estudar o comportamento de operadores da forma $A_h + V_h$ onde $V_h : X_h \to X_h$ é um operador limitado (tipicamente a multiplicação por um potencial). Veremos que sob hipóteses bastante gerais, uma vez que se tenha convergência compacta de A_h^{-1} para A_0^{-1} quando $h \to 0$, podemos obter o mesmo para operadores da forma $A_h + V_h$.

Iremos supor que a seguinte condição esteja satisfeita

$$\boxed{(H_h) \text{ vale e } V_h \in \mathscr{B}(X_h),\ h \in [0,1] \text{ tal que } A_h^{-1}V_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0^{-1}V_0.} \qquad (CC_h)$$

Além disso, suporemos que

$$\boxed{0 \notin \sigma(A_0 + V_0).} \qquad (E_0)$$

Podemos ver que A_0+V_0 tem resolvente compacto, pois $0 \in \rho(A_0+V_0)$, da Observação 1.4.2 e o Lema 3.1.2, obtemos que $(A_0+V_0)^{-1} = (I+A_0^{-1}V_0)^{-1}A_0^{-1} \in \mathscr{K}_0(X_0)$. Seja $\bar{A}_h = A_h+V_h$, com $h \in [0,1]$.

Proposição 3.2.1 *Suponha que (CC_h) e (E_0) estejam satisfeitas. Então, existe $h_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(A_h + V_h)$ para todo $h \in (0, h_0]$, $\sup_{h\in(0,h_0]} \|(A_h + V_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h)} < \infty$. Além disso,*

$$(A_h + V_h)^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} (A_0 + V_0)^{-1} \text{ quando } h \to 0.$$

Prova. Primeiramente, suponhamos que existe uma seqüência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e $0 \in \sigma(A_h + V_h)$. Logo, existe um $u_{h_n} \in X_{h_n}$ com $u_{h_n} \neq 0$ tal que $(A_{h_n} + V_{h_n})u_{h_n} = 0$, ou equivalentemente, $u_{h_n} + A_{h_n}^{-1}V_{h_n}u_{h_n} = 0$. Agora, se for necessário tomando subseqüências, $A_{h_n}^{-1}V_{h_n}u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} A_0^{-1}V_0u_0$ sempre que $u_{h_n} \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$. Assim, $u_0 + A_0^{-1}V_0u_0 = 0$. Disto, segue que $0 \in \sigma(A_0 + V_0)$ o que é uma contradição.

Para provar a limitação do operador $(A_h + V_h)^{-1}$, note

$$(A_h + V_h)^{-1} = (I + A_h^{-1}V_h)^{-1}A_h^{-1}.$$

Como $A_h^{-1}V_h$ converge compactamente para $A_0^{-1}V_0$ e $-A_h^{-1}$ converge compactamente para $-A_0^{-1}$, a limitação uniforme segue do Lema 3.1.2.

Finalmente, para provar que $(A_h + V_h)^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} (A_0 + V_0)^{-1}$ observe que, para cada seqüência $u_h \in X_h$ com $\|u_h\|_{X_h} \leq 1$, temos

$$v_h = (A_h + V_h)^{-1}u_h = (I + A_h^{-1}V_h)^{-1}A_h^{-1}u_h$$

é uma seqüência limitada e que

$$v_h = -A_h^{-1}V_h v_h + A_h^{-1}u_h.$$

Tomando subseqüências podemos supor que $\{A_h^{-1}V_h v_h\}_{h\in(0,1]}$ e $\{A_h^{-1}u_h\}_{h\in(0,1]}$ são convergentes e segue que $\{v_h\}_{h\in(0,1]}$ tem uma subseqüência convergente. Além disso, se $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$converge para u, do que foi provado acima segue que $\{v_h\}_{h\in(0,1]}$ ao converge para v com

$$v = -A_0^{-1}V_0 v + A_0^{-1}u$$

e $v = (A_0 + V_0)^{-1}u$, com isto o resultado segue. □

Corolário 3.2.1 *Sob as hipóteses da Proposição 3.2.1, todos os resultados do Lema 3.1.5 e do Teorema 3.1.1, permanecem válidos para a família de operadores $\bar{A}_h = A_h + V_h$, com $0 \leq h \leq 1$.*

Prova. Simplesmente observe que, da Proposição 3.2.1, os operadores $\bar{A}_h$ satisfazem a condição (H_h). □

3.3 Continuidade dos semigrupos lineares

Do estudo feito na seção anterior sobre a continuidade do espectro do operador A_0 nos permite obter estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares da equação (3.31). Agora, estudamos a dinâmica da família de equações

$$\begin{cases} \dot{u}_h + A_h u_h = 0, \quad t > 0, \\ u_h(0) = u_h^0 \in X_h^\alpha, \end{cases} \tag{3.29}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $A_h : D(A_h) \subset X_h^\alpha \to X_h^\alpha$ são operadores setoriais nos espaços fracionários X_h^α imersos nos espaços de Banach X_h com $\operatorname{Re}\sigma(A_h) > a > 0$ satisfazendo a condição de

estabilidade:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Existem constantes } \phi \in (0,\pi/2), M \geq 1 \text{ e } a \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \mathcal{S}_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C}/\phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A_h), \text{para todo } h \in [0,1] \\ \text{e } \|(\lambda - A_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h^\alpha)} \leq \dfrac{M}{|\lambda - a|}, \text{ para todo } \lambda \in \mathcal{S}_{a,\phi} \text{ e } h \in [0,1].\end{array}} \quad (S_h)$$

Está última condição pode ser vista em [33, página 23]. Agora podemos mostrar uma versão do Teorema de Trotter - Kato para uma família de semigrupos $S_h(t) := e^{-A_h t} \in \mathscr{B}(X_h^\alpha)$, para todo $t \geq 0$.

Teorema 3.3.1 *Sejam $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $(0,1]$ tal que $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{u_{h_n}^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência com $u_{h_n}^0 \in X_{h_n}^\alpha$ e $u_0^0 \in X_0^\alpha$ com $u_{h_n}^0 \overset{\mathscr{P}^\alpha}{\longrightarrow} u_0^0$. Se A_h satisfaz (H_h), então*

$$\|S_{h_n}(t)u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha S_0(t)u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.30}$$

uniformemente em $[t_1, t_2] \subset (0,\infty)$.

Demonstração. Primeiramente, vemos

$$\begin{aligned}\|S_{h_n}(t)u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha S_0(t)u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} &\leq \|S_{h_n}(t)u_{h_n}^0 - S_{h_n}(t)P_{h_n}^\alpha u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} + \|S_{h_n}(t)P_{h_n}^\alpha u_0^0 - P_{h_n}^\alpha S_0(t)u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} \\ &\leq \|A_{h_n}^\alpha S_{h_n}(t)(u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha u_0^0)\|_{X_{h_n}} + \|A_{h_n}^\alpha (S_{h_n}(t)P_{h_n}^\alpha u_0^0 - P_{h_n}^\alpha S_0(t)u_0^0)\|_{X_{h_n}} \\ &\leq c_\alpha t^{-\alpha}e^{-at}\|u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha u_0^0\|_{X_{h_n}} + \|S_{h_n}(t)A_{h_n}^\alpha P_{h_n}^\alpha u_0^0 - P_{h_n}A_0^\alpha S_0(t)u_0^0\|_{X_{h_n}} \\ &\leq \tilde{c}_\alpha t^{-\alpha}e^{-at}\|u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} + \|S_{h_n}(t)P_{h_n}A_0^\alpha u_0^0 - P_{h_n}S_0(t)A_0^\alpha u_0^0\|_{X_{h_n}},\end{aligned}$$

onde temos usado a Proposição 1.3.5 e (3.3). Logo, basta mostrar

$$\|S_{h_n}(t)P_{h_n}A_0^\alpha u_0^0 - P_{h_n}S_0(t)A_0^\alpha u_0^0\|_{X_{h_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

uniformemente em $[t_1, t_2]$ e o resultado segue. De fato, fazendo uso do Teorema 1.3.2, obtemos

$$S_{h_n}(t)P_{h_n} - P_{h_n}S_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda t}\big[(\lambda - A_{h_n})^{-1}P_{h_n} - P_{h_n}(\lambda - A_0)^{-1}\big]d\lambda,$$

onde Γ é a fronteira do setor $\Sigma_\phi = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \phi\}$ e independe de h. Assim,

$$\begin{aligned}\|S_{h_n}(t)P_{h_n}v_0 - P_{h_n}S_0(t)v_0\|_{X_{h_n}} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{-\lambda t}||d\lambda|\|(\lambda - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}v_0 - P_{h_n}(\lambda - A_0)^{-1}v_0\|_{X_{h_n}} \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-t\rho\cos\phi - at}d\rho\|(\lambda - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}v_0 - P_{h_n}(\lambda - A_0)^{-1}v_0\|_{X_{h_n}} \\ &= \frac{t^{-1}e^{-at}}{2\pi\cos\phi}\|(\lambda - A_{h_n})^{-1}P_{h_n}v_0 - P_{h_n}(\lambda - A_0)^{-1}v_0\|_{X_{h_n}},\end{aligned}$$

onde $v_0 = A_0^\alpha u_0^0 \in X_0$. Logo, do Teorema 3.1.5 segue o resultado. ■

3.4 Continuidade dos semigrupos não-lineares

Nesta seção estudamos a dinâmica da família de equações não-lineares

$$\begin{cases}\dot{u}_h + A_h u_h = F_h(u_h), \quad t > 0, \\ u_h(0) = u_h^0 \in X_h^\alpha,\end{cases} \tag{3.31}$$

onde $0 < \alpha < 1$, $A_h : D(A_h) \subset X_h^\alpha \to X_h^\alpha$ são operadores setoriais nos espaços de Banach X_h^α com $\operatorname{Re}\sigma(A_h) > a > 0$ satisfazendo (S_h) e $F_h : X_h^\alpha \to X_h$ um operador não-linear limitado, globalmente Lipschitz e continuamente diferenciável segundo Fréchet.

Teorema 3.4.1 *Seja $T_h(t)u_h^0$ a solução do problema (3.31). Se A_h satisfaz (H_h) no espaço X_h^α com $0 < \alpha < 1$, $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $X_h^\alpha \ni u_{h_n}^0 \overset{\mathscr{P}^\alpha}{\longrightarrow} u_0^0 \in X_0^\alpha$ e $t \in [0,\tau]$ com $\tau \in (0,\infty)$, então*

$$\|T_{h_n}(t)u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha T_0(t)u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.32}$$

Demonstração. Os semigrupos não-lineares $T_h(t)u_h^0$ estão dadas pela fórmula da variação das constantes (1.28) do problema (3.31) para $t \in [0,\tau]$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\|T_{h_n}(t)u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha T_0(t)u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} &\leq \|e^{-A_{h_n}t}u_{h_n}^0 - P_{h_n}^\alpha e^{-A_0 t}u_0^0\|_{X_{h_n}^\alpha} \\ &\quad + \int_0^t \underbrace{\left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}F_{h_n}(T_{h_n}(s)u_{h_n}^0) - P_{h_n}^\alpha e^{-A_0(t-s)}F_0(T_0(s)u_0^0)\right\|_{X_{h_n}^\alpha}}_{:=I} ds.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I &\leq \left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}F_{h_n}(T_{h_n}(s)u^0_{h_n}) - e^{-A_{h_n}(t-s)}P_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}P_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0) - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\leq \left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}[F_{h_n}(T_{h_n}(s)u^0_{h_n}) - P_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0)]\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}P_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0) - e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0) - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\leq \hat{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}\left\|F_{h_n}(T_{h_n}(s)u^0_{h_n}) - P_{h_n}F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X_{h_n}} \\
&\quad + \left\|e^{-A_{h_n}(t-s)}[A^\alpha_{h_n}P^\alpha_{h_n}A_0^{-\alpha} - A^\alpha_{h_n}A_{h_n}^{-\alpha}P^\alpha_{h_n}]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \left\|\left[e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}\right]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}}.
\end{aligned}
$$

Logo, usando $P_h \circ F_0 = F_h \circ P^\alpha_h$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I &\leq \hat{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}\left\|F_{h_n}(T_{h_n}(s)u^0_{h_n}) - F_{h_n}(P^\alpha_{h_n}T_0(s)u^0_0)\right\|_{X_{h_n}} \\
&\quad + \bar{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}\left\|[P^\alpha_{h_n}A_0^{-\alpha} - A_{h_n}^{-\alpha}P^\alpha_{h_n}]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \left\|\left[e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}\right]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\leq \hat{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}L\left\|T_{h_n}(s)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(s)u^0_0\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \bar{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}\left\|[P^\alpha_{h_n}A_0^{-\alpha} - A_{h_n}^{-\alpha}P^\alpha_{h_n}]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \left\|\left[e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}\right]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}},
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

onde temos usado que F_h é globalmente Lipschitz com constante de Lipschitz L e a Proposição 1.3.5. Substituindo (3.34) em (3.33), resulta

$$
\begin{aligned}
\|T_{h_n}(t)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(t)u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} &\leq \|e^{-A_{h_n}t}u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0t}u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} \\
&\quad + \int_0^t \hat{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}L\left\|T_{h_n}(s)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(s)u^0_0\right\|_{X^\alpha_{h_n}}ds \\
&\quad + \int_0^t \bar{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}\left\|[P^\alpha_{h_n}A_0^{-\alpha} - A_{h_n}^{-\alpha}P^\alpha_{h_n}]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}}ds \\
&\quad + \int_0^t \left\|\left[e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}\right]F_0(T_0(s)u^0_0)\right\|_{X^\alpha_{h_n}}ds.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Do Teorema 3.3.1 e o Lema 3.1.6, podemos obter a seguinte majoração

$$\begin{aligned}\|e^{-A_{h_n}t}u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0t}u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} &+ \int_0^t \bar{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}\big\|[P^\alpha_{h_n}A_0^{-\alpha} - A_{h_n}^{-\alpha}P^\alpha_{h_n}]F_0(T_0(s)u^0_0)\big\|_{X^\alpha_{h_n}}ds\\ &+ \int_0^t \big\|\big[e^{-A_{h_n}(t-s)}P^\alpha_{h_n} - P^\alpha_{h_n}e^{-A_0(t-s)}\big]F_0(T_0(s)u^0_0)\big\|_{X^\alpha_{h_n}}ds\\ &\leq c_\alpha e^{-at}\|u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} + o(1) + \int_0^t \bar{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}o(1)ds + \int_0^t o(1)ds\\ &\leq c_\alpha\|u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} + o(1) + \bar{c}_\alpha\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}o(1) + o(1)\tau \leq \tilde{M}v(h_n), \qquad (3.36)\end{aligned}$$

onde $\tilde{M} = \max\{c_\alpha, 1, \bar{c}_\alpha\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \tau\} > 0$ e $v(h_n) = \|u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} + o(1)$ tal que $v(h_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, também temos estendido os resultados usados para elementos em X_0 devido à densidade dos espaços X^α_0 em X_0 e a Proposição 3.1.1. Agora, substituindo (3.36) em (3.35), obtemos

$$\begin{aligned}\|T_{h_n}(t)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(t)u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} &\leq \tilde{M}v(h_n)\\ &+ \int_0^t \hat{c}_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-a(t-s)}L\big\|T_{h_n}(s)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(s)u^0_0\big\|_{X^\alpha_{h_n}}ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}e^{at}\|T_{h_n}(t)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(t)u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}} &\leq \bar{M}v(h_n)\\ &+ \hat{c}_\alpha L\int_0^t (t-s)^{-\alpha}e^{as}\big\|T_{h_n}(s)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(s)u^0_0\big\|_{X^\alpha_{h_n}}ds,\end{aligned}$$

onde $\bar{M} = e^{a\tau}\tilde{M}$. Agora, fazendo $\varphi_{h_n}(t) = e^{at}\|T_{h_n}(t)u^0_{h_n} - P^\alpha_{h_n}T_0(t)u^0_0\|_{X^\alpha_{h_n}}$, temos

$$\varphi_{h_n}(t) \leq \bar{M}v(h_n) + \hat{c}_\alpha L\int_0^t (s-t)^{-\alpha}\varphi_{h_n}(s)ds \text{ em } (0,\tau).$$

Do Lema 1.1.3, mais precisamente a equação (1.10), segue

$$\varphi_{h_n}(t) \leq \hat{M}v(h_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde $\hat{M} = \hat{M}(L,\alpha,\tau)$ é uma constante independente de h_n. Com isto, o resultado segue. ■

3.5 Continuidade dos atratores

Nesta seção darmos o enfoque adequado para a continuidade de atratores na linguagem da convergência compacta.

As hipóteses dadas na seção anterior garantem que os semigrupos $\{T_h(t) : t \geq 0\}_{h\in[0,1]}$

associados à família de equações (3.31) possuem atratores globais $\mathcal{A}_h$ em X_h^α, para cada $h \in [0, h_0]$ e $\alpha \in [0, 1]$. Além disso, garantem sua limitação uniforme, a seguir

$$\sup_{h\in[0,h_0]} \sup_{u_h\in\mathcal{A}_h} \|u_h\|_{X_h^\alpha} < \infty.$$

Na seguinte definição de semicontinuidade superior e inferior da família de atratores $\mathcal{A}_h$ temos dado o sentido apropriado tendo em consideração a variação dos espaços funcionais:

Definição 3.5.1 *Seja $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in[0,1]}$ uma família de conjuntos em X_h^α.*

- *Dizemos que a família de conjuntos $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}^\alpha-$**semicontínua superiormente** em $h = 0$ se $\sup\limits_{u_h\in\mathcal{A}_h} \inf\limits_{u_0\in\mathcal{A}_0} \|u_h - P_h^\alpha u_0\|_{X_h^\alpha} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.*
- *Dizemos que a família de conjuntos $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}^\alpha-$**semicontínua inferiormente** em $h = 0$ se $\sup\limits_{u_0\in\mathcal{A}_0} \inf\limits_{u_h\in\mathcal{A}_h} \|u_h - P_h^\alpha u_0\|_{X_h^\alpha} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.*
- *A família $\{A_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}^\alpha-$ **contínua** em $h = 0$ se for $\mathscr{P}^\alpha-$semicontínua superior e inferior em $h = 0$.*

Lema 3.5.1 *Seja $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ uma família de conjuntos em X_h^α.*

i) Se qualquer seqüência $\{u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_{h_n} \in \mathcal{A}_{h_n}$, $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tem uma subseqüência $\mathscr{P}^\alpha-$convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_0$, então a família $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ é semicontínua $\mathscr{P}^\alpha-$superiormente em $h = 0$.

ii) Se $\mathcal{A}_0$ é compacto e para qualquer $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existe uma seqüência $\{u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_{h_n} \in \mathcal{A}_{h_n}$, $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que $u_{h_n} \overset{\mathscr{P}^\alpha}{\longrightarrow} u_0$, então a família $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ é semicontínua $\mathscr{P}^\alpha-$inferiormente em $h = 0$.

Prova. Análoga ao Lema 1.5.1. □

Teorema 3.5.1 *Se a família de atratores $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in[0,h_0]}$, satisfaz*

$$\sup_{h\in[0,h_0]} \sup_{u_h\in\mathcal{A}_h} \|u_h\|_{X_h^\alpha} < \infty, \tag{3.37}$$

então $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in[0,h_0]}$ é semicontínua superiormente em $h = 0$, ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u_h\in\mathcal{A}_h} \inf_{u_0\in A_0} \|u_h - P_h u_0\|_{X_h^\alpha} = 0. \tag{3.38}$$

Demonstração. Consideremos as seqüências $h_{nn\in\mathbb{N}}$ e $\{u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $u_{h_n} \in \mathcal{A}_{h_n}$. Pela hipótese (3.37), obtemos que $\cup_{h_n\in[0,h_0]}\mathcal{A}_{h_n}$ é relativamente compacto em X_0^α. Portanto, existe $u_0 \in X_0^\alpha$ tal que $u_{h_n} \overset{\mathscr{P}^\alpha}{\longrightarrow} u_0$.

O resto da demonstração é análoga com o feito no Teorema 1.5.2, só mudar as convergências pelas $\mathscr{P}^\alpha-$convergências. ■

Teorema 3.5.2 *Seja $\{T_h(t) : t \geq 0\}_{h\in[0,1]}$ uma família contínua em $h = 0$ (isto é, (3.32) vale) de semigrupos em um espaço de Banach X_h^α com $\alpha \in [0, 1)$, que satisfaz*

a) $\{T_h(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_h$, para cada $h \in [0, 1]$.

b) Se $\mathcal{E}_h$ o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\{T_h(t) : t \geq 0\}$, existe $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_h = \{u^*_{h,1}, \ldots, u^*_{h,\mathfrak{p}}\}$, para todo $h \in [0, 1]$ e $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant\mathfrak{p}} \|u^*_{h,i} - P_h^\alpha u^*_{0,i}\|_{X_h^\alpha} \overset{h\to0}{\longrightarrow} 0$.

c) Se $W^u_\delta(u^*_{h,j}) = \{u_h \in B_\delta(u^*_{h,j}) :$ existe solução global $\phi_{u_h} : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_{u_h}(0) = u_h, \phi_{u_h}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} u^*_{h,j}$ e $\phi_{u_h}(t) \in B_\delta(u^*_{h,j})$, para todo $t \leq 0\}$. Suponha que, para algum $\delta > 0$ pequeno, $\{W^u_\delta(u^*_{h,j})\}_{\eta\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}^\alpha-$semicontínua inferiormente em $h = 0$.

d) $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(u^*_{0,j})$.

Então, $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}^\alpha-$semicontínua inferiormente em $h = 0$.

Demonstração. Análoga ao Teorema 1.5.4 basta ter em consideração a convergência dos espaços. ■

3.6 Continuidade dos conjuntos de equilíbrio

Nesta seção vamos a descrever a estrutura dos elementos mais simple que moram no atrator global, as soluções de equilíbrio. As soluções de equilíbrio de (3.31) são aquelas soluções as quais são independentes do tempo $u_h(t) = u_h^*$, para todo $t \geq 0$; isto é, as soluções da equação em X_h de

$$A_h u_h - F_h(u_h) = 0, \tag{3.39}$$

onde $A_h : D(A_h) \subset X_h \to X_h$ é um operador linear e $F_h : X_h^\alpha \subset X_h \to X_h$ é um operador limitado e diferenciável (segundo Fréchet) nos espaços de Banach X_h, para todo $h \in (0, 1]$ e $\alpha \in [0, 1]$. Denotamos por $\mathcal{E}_h$ o conjunto de soluções de (3.39); isto é,

$$\mathcal{E}_h = \{u_h^* \in X_h : A_h u_h^* - F_h(u_h^*) = 0\}.$$

Definição 3.6.1 *Dizemos que a solução $u_h^* \in \mathcal{E}_h$ é hiperbólica se o espectro $\sigma(A_h - F_h'(u_h^*))$ é disjunto do eixo imaginário; isto é, $\sigma(A_h - F_h'(u_h^*)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.*

Assumamos que A_h e F_h para $h \in [0,1]$, satisfaz

$$\boxed{A_h \text{ satisfaz } (H_h) \text{ e } A_h^{-1}F_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0^{-1}F_0.} \qquad (J_h)$$

Teorema 3.6.1 *Se $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ é um ponto de equilíbrio tal que $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$, $A_0^{-1}F_0 : X_0^\alpha \to X_0^\alpha$ é um operador compacto e F_0 é Fréchet diferenciável, então u_0^* é um ponto isolado e $|\operatorname{ind}(u_0^*, I - A_0^{-1}F_0'(u_0^*))| = 1$.*

Demonstração. Seja $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ se e somente é ponto fixo do operador compacto $A_0^{-1}F_0 : X_0^\alpha \to X_0^\alpha$. Também,

$$\begin{aligned} 0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*)) &\iff \big(A_0 - F_0'(u_0^*)\big)v \neq 0, \text{ para todo } v \neq 0 \text{ e } v \in X_0. \\ &\iff v \neq A_0^{-1}F_0'(u_0^*)v, \text{ para todo } v \neq 0 \text{ e } v \in X_0. \\ &\iff 1 \notin \sigma(A_0^{-1}F_0'(u_0^*)) \iff 1 \in \rho(A_0^{-1}F_0'(u_0^*)). \end{aligned}$$

E segue que existe uma constante $\eta > 0$ tal que $\|v - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)v\|_{X_0^\alpha} \geq 2\eta\|v\|_{X_0^\alpha}$. Se escrevermos

$$w_0(u_0^*, v) = A_0^{-1}F_0(u_0^* + v) - A_0^{-1}F_0(u_0^*) - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)v,$$

então pela diferenciabilidade de F_0, temos

$$\frac{\|w_0(u_0^*, v)\|_{X_0^\alpha}}{\|v\|_{X_0^\alpha}} \xrightarrow{v \to 0} 0.$$

Em particular, existe $r > 0$ tal que $\|w_0(u_0^*, v)\|_{X_0^\alpha} \leq \eta\|v\|_{X_0}$ para $\|v\|_{X_0^\alpha} \leq r$. Então, para $\|u_0^* - u\|_{X_0^\alpha} \leq r$, temos

$$\begin{aligned} \|u - A_0^{-1}F_0(u)\|_{X_0^\alpha} &= \|u - u_0^* - (A_0^{-1}F_0(u) - A_0^{-1}F_0(u_0^*))\|_{X_0^\alpha} \\ &= \|u - u_0^* - (A_0^{-1}F_0(u) - A_0^{-1}F_0(u_0^*) - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)(u - u_0^*)) - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)(u - u_0^*)\|_{X_0^\alpha} \\ &= \|u - u_0^* - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)(u - u_0^*) - w_0(u_0^*, u - u_0^*)\|_{X_0^\alpha} \\ &\geq \|u - u_0^* - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)(u - u_0^*)\|_{X_0^\alpha} - \|w(u_0^*, u - u_0^*)\|_{X_0^\alpha} \\ &\geq 2\eta\|u - u_0^*\|_{X_0^\alpha} - \eta\|u - u_0^*\|_{X_0^\alpha} = \eta\|u - u_0^*\|_{X_0^\alpha} > 0. \end{aligned}$$

Logo, $u \notin \mathcal{E}_0$. Portanto u_0^* é um ponto de equilíbrio isolado. O restante da prova decorre do Teorema 1.6.5 da equação (1.55) junto ao Lema 1.6.1. ■

Corolário 3.6.1 *Se $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico, então u_0^* é um equilíbrio isolado e $|\operatorname{ind}(u_0^*, I - A_0^{-1}F_0'(u_0^*))| = 1$.*

Prova. Segue da Definição 3.6.1 e o Teorema 3.6.1. □

Proposição 3.6.1 *Se $\mathcal{E}_0$ é um conjunto discreto, então $\mathcal{E}_0$ é um conjunto finito. Se $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$ para todo $u_0^* \in \mathcal{E}_0$, então $\mathcal{E}_0$ é um conjunto finito. Além disso, se todos os pontos de $\mathcal{E}_0$ são hiperbólicos esse número é ímpar.*

Prova. Observemos primeiramente que para todo $u_0^* \in \mathcal{E}_0$, temos que $u_0^* = A_0^{-1}F_0(u_0^*)$ e

$$\|u_0^*\|_{X_0^\alpha} = \|A_0^{-1}F_0(u_0^*)\|_{X_0^\alpha} = \|A^{-1+\alpha}\|_{\mathscr{L}(X_0)}\|F_0(u_0^*)\|_{X_0}.$$

Assim, se consideramos $K = \sup_{u\in X_0^\alpha} \|F_0(u)\|_{X_0}$, o operador $A_0^{-1}F_0$ aplica a bola $B_0 = B(0, \|A_0^{-1+\alpha}\|_{\mathscr{L}(X_0)}K) \subset X_0^\alpha$ nela mesma, pois $u_0^* \in B_0$. Como $A_0^{-1}F_0(B_0) \subset B_0$ e $A_0^{-1}F_0$ é contínuo, obtemos

$$A_0^{-1}F_0(\overline{B_0}) \subset \overline{A_0^{-1}F_0(B_0)} \subset \overline{B_0}.$$

Logo, pelo Teorema 1.6.6, existe ao menos um ponto fixo u^* de $A_0^{-1}F_0$ na bola B_0; isto é,

$$u^* - A_0^{-1}F_0(u^*) = 0 \text{ com } u^* \in B_0.$$

Sendo o operador $A_0^{-1}F_0 : X_0 \to X_0$ compacto (daí, limitado), temos que $\mathcal{E}_0 = \{u_0^* : A_0u_0^* - F_0(u_0^*) = 0\}$ é compacto em X_0^α, pois dada uma seqüência $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{E}_0$, segue que $A_0v_n = F_0(v_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\|v_n\|_{X_0^\alpha} = \|A_0^{-1}F_0(v_n)\|_{X_0^\alpha} \leq \widetilde{K}$. Logo, pelo fato do $A_0^{-1}F_0$ ser compacto, existe uma subseqüência $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $v_{n_k} = A_0^{-1}F_0(v_{n_k})$ converge em X_0. Agora, como $\mathcal{E}_0$ é discreto e compacto, segue que $\mathcal{E}_0$ é finito.

Além disso, se $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$ para todo $u_0^* \in \mathcal{E}_0$, então pelo Teorema 3.6.1 todo ponto fixo u_0^* é isolado e $|\operatorname{ind}(u_0^*, I - A_0^{-1}F_0'(u_0^*))| = 1$. Se o número de pontos fixos fosse infinito, existiria uma seqüência $\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{E}_0$, tal que a seqüência $A_0^{-1}F_0(u_n^*) = u_n^* \to u_\infty^*$ converge para alguma subseqüência $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, contradizendo o fato que cada ponto fixo u_∞^* é isolado. Assim, o número de pontos de equilíbrio é finito.

Por último, pela hipótese temos que $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$ para todo $u_0^* \in \mathcal{E}_0$. Logo, $\mathcal{E}_0 = \{u_{0,i}^* : i = 1, \ldots, d\}$ e $|\operatorname{ind}(u_{0,i}^*, I - A_0^{-1}F_0'(u_{0,i}^*))| = 1$ para $i = 1, \ldots, d$. Assim, pelos Teorema 1.6.4 e Teorema 1.6.3, obtemos

$$1 = \gamma(I - A_0^{-1}F_0, B, 0) = \sum_{i=1}^{d} \operatorname{ind}(u_{0,i}^*, I - A_0^{-1}F_0),$$

e do Lema 1.6.1 segue que $|\operatorname{ind}(u_{0,i}^*, I - A_0^{-1}F_0)| = |\operatorname{ind}(u_{0,i}^*, I - A_0^{-1}F_0'(u_{0,i}^*))| = 1$. Portanto o número $d = 2k + 1$ para algum inteiro $k \geq 0$. □

O Próximo Teorema garante a semicontinuidade inferior da família de equilíbrios $\mathcal{E}_h$.

Teorema 3.6.2 *Sejam $\Omega_h \subset X_h$ abertos e limitados e $T_h : \overline{\Omega}_h \to X_0$ onde X_h são espaços de Banach para $h \in [0,1]$. Suponhamos válidas as seguintes hipóteses*

i) Os operadores $T_h : \overline{\Omega}_h \to X_h$ são operadores compactos e contínuos, T_0 não possui ponto fixo em $\partial\Omega_0$ e $\operatorname{ind}(I - T_0, \Omega_0) \neq 0$;

ii) Os abertos Ω_h são tais que

- *para todo $u_0 \in \overline{\Omega}_0$ existe uma família $\{u_h\}$, $u_h \in \Omega_h$ tal que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$;*
- *se $u_h \in \overline{\Omega}_h$ é tal que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$, então $u_0 \in \overline{\Omega}_0$;*
- *se $u_h \in \partial\Omega_h$ é tal que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}} u_0$, então $u_0 \in \partial\Omega_0$.*

iii) $T_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} T_0$.

Então existe h_0 tal que para $0 < h < h_0$ os operadores T_h possuem ponto fixo u_h^* em $\overline{\Omega}_h$. Além disso, qualquer seqüência $\{u_h^*\}$ de pontos fixos de T_h é $\mathscr{P}-$relativamente compacto e seus $\mathscr{P}-$limites são pontos fixos de T_0 em Ω_0. Em particular, se T_0 possui somente um único ponto fixo u_0^* de índice não nulo, então $\|u_h^* - P_h u_0^*\|_{X_h} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Demonstração. Ver [52], Teorema 3. ■

O seguinte resultado mostra a $\mathscr{P}^\alpha-$semicontinuidade superior em $h = 0$ da família de conjuntos de equilíbrios $\{\mathcal{E}_h\}_{h\in(0,1]}$.

Proposição 3.6.2 *Assumamos que a condição (J_h) é satisfeita e que os problemas (3.39) têm soluções $\{u_h^*\}$, para $h \in (0,1]$. Então, tomando subseqüências se é necessário, existe uma solução u_0^* de (3.39) com $h = 0$ tal que $\|u_h^* - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \to 0$ quando $h \to 0$.*

Prova. Se u_h^* é uma solução de (3.39) ou $u_h^* \in \mathcal{E}_h \subset \mathcal{A}_h$, temos que $u_h^* = A_h^{-1}F_h(u_h^*)$. Do fato que $A_h^{-1}F_h : X_h^\alpha \to X_h^\alpha$ é uniformemente limitado (pois $A_h^{-1}F_h$ é compacto) para $h \in [0,1]$ segue-se que $\{u_h^*\}$ é limitado para $h \in [0,1]$. De (J_h), temos que existe uma subseqüência, que denotamos outra vez por u_h^*, tal que $u_h^* \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0^*$. Novamente de (J_h), temos que

$$u_0^* - A_0^{-1}F_0(u_0^*) = 0,$$

assim $u_0^* \in \mathcal{E}_0$. □

Teorema 3.6.3 *Assuma que $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ seja um equilíbrio hiperbólico e a condição (J_h) vale. Então, existem h_0 e $\delta > 0$ tais que para $0 < h \leq h_0$ existe ao menos um equilíbrio $u_h^* \in \mathcal{E}_h \cap \{w_h : \|w_h - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \leq \delta\}$. Além disso, $\|u_h^* - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \xrightarrow{h\to 0} 0$.*

Demonstração. Como no Corolário 3.6.1 existe uma bola $B(u_0^*, \delta)$ tal que não existem outros pontos fixos nela exceto u_0^* e junto ao Lema 1.6.1 segue que $|\operatorname{ind}(u_0^*, I - A_0^{-1}F_0)| = 1$. Agora, colocando $\Omega_0 = B(u_0^*, \delta)$, $\Omega_h = B(P_h^\alpha u_0^*, \delta)$, $T_0 = I - A_0^{-1}F_0$ e $T_h = I - A_h^{-1}F_h$ no Teorema 3.6.2 as condições (i) e (iii) ficam claramente satisfeitas das hipóteses. Mas, a condição (ii) é mostrada a continuação:

- Se $u_0 \in \overline{\Omega}_0 = \{u_0 \in X_0^\alpha : \|u_0 - u_0^*\|_{X_0^\alpha} \leq \delta\}$. Logo,

$$\lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha u_0 - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} = \lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha (u_0 - u_0^*)\|_{X_h^\alpha} = \|u_0 - u_0^*\|_{X_0^\alpha} \leq \delta.$$

  Assim, $P_h^\alpha u_0 \in \Omega_h$ para h suficientemente pequeno e ainda $u_h = P_h^\alpha u_0 \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0$.

- Se $u_h \in \overline{\Omega}_h = \{u_h \in X_h^\alpha : \|u_h - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \leq \delta\}$ é tal que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0$. Logo,

$$\begin{aligned}\|u_0 - u_0^*\|_{X_0^\alpha} &= \lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha (u_0 - u_0^*)\|_{X_h^\alpha} = \lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha u_0 - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha u_0 - u_h\|_{X_h^\alpha} + \lim_{h\to 0} \|u_h - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \leq 0 + \delta = \delta.\end{aligned}$$

  Então, $u_0 \in \overline{\Omega}_0$.

- Se $u_h \in \partial\Omega_h = \{u_h \in X_h^\alpha : \|u_h - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} = \delta\}$ é tal que $u_h \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0$. Logo,

$$\begin{aligned}0 \leq \big|\|u_0 - u_0^*\|_{X_0^\alpha} - \delta\big| &= \big|\lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha (u_0 - u_0^*)\|_{X_h^\alpha} - \delta\big| = \big|\lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha u_0 - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h} - \delta\big| \\ &\leq \big|\lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha u_0 - u_h\|_{X_h^\alpha} + \lim_{h\to 0} \|u_h - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} - \delta\big| \\ &\leq \lim_{h\to 0} \|P_h^\alpha u_0 - u_h\|_{X_h^\alpha} = 0.\end{aligned}$$

  Então, $u_0 \in \partial\Omega_0$.

Portanto, existe pelo menos um ponto fixo u_h^* na bola $\overline{B(P_h^\alpha u_0^*, \delta)}$. Ainda mais, $u_h^* \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0^*$. ■

Os dois últimos resultados, Proposição 3.6.2 e Teorema 3.6.3, mostram a continuidade do conjunto de equilíbrio no seguinte sentido: Se $\{u_h^*\}_{h\in(0,1]}$ é uma seqüência de pontos de equilíbrios 5.1, então podemos obter uma subseqüência tal que $u_h^* \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0^*$, que é um equilíbrio do limite das equações e vice-versa. Se u_0^* é uma solução de equilíbrio que é hiperbólico, então existe uma seqüência de soluções u_h^* para todo $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $u_h^* \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0^*$.

Vamos impor algumas condições de diferenciabilidade uniforme sobre o operador F_h não linear . Para isto, definamos

$$w_h(u_h^*, v) := A_h^{-1}F_h(u_h^* + v) - A_h^{-1}F_h(u_h^*) - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)v.$$

Consideremos a seguinte hipótese

$$\boxed{\begin{array}{c}(J_h) \text{ vale e, se } u_h^* \in \mathcal{E}_h \text{ com } u_h^* \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_0^*, \text{ então } A_h^{-1}F_h'(u_h^*) \xrightarrow{\mathscr{CC}} A_0^{-1}F_0'(u_0^*) \\ \text{e } \dfrac{\|w_h(u_h^*, v_h)\|_{X_h^\alpha}}{\|v_h\|_{X_h^\alpha}} = o(1) \text{ quando } \|v_h\|_{X_h^\alpha} \to 0, \text{uniformemente em } h.\end{array}} \qquad (L_h)$$

Observemos que dizer $\dfrac{\|w_h(u_h^*, v_h)\|_{X_h^\alpha}}{\|v_h\|_{X_h^\alpha}} = o(1)$ uniformemente em h, significa que para cada $\mu > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\|w_h(u_h^*, v_h)\|_{X_h^\alpha} \leq \mu \|v_h\|_{X_h^\alpha}^s$ para todo $v \in X_h$ com $\|v_h\|_{X_h^\alpha} \leq \delta$ e $s \geq 0$.

A seguir, mostramos a semicontinuidade inferior da família de conjuntos de equilíbrios $\mathcal{E}_h$.

Teorema 3.6.4 *Assumamos que (L_h) vale. Se $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ é um ponto de equilíbrio tal que $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$, então existe um $\delta_0 > 0$ de maneira que existe um único $u_h^* \in \mathcal{E}_h \cap B(P_h^\alpha u_0^*, \delta_0)$.*

Além disso, se $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ é tal que $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$, então da Proposição 3.6.1 sabemos que existem um número impar finito r de elementos em $\mathcal{E}_0 = \{u_{0,1}^*, \ldots, u_{0,r}^*\}$. Neste caso, existe um $h_0 > 0$ tal que $\mathcal{E}_h$ possui exatamente r elementos $u_{h,1}^*, \ldots, u_{h,r}^*$, para todo $h \leq h_0$ e $u_{h,i}^* \xrightarrow{\mathscr{P}^\alpha} u_{0,i}^*$ para $1 \leq i \leq r$.

Além disso, se u_0^* é hiperbólico então u_h^* e também o é.

Demonstração. Observemos que, $u_h^* \in \mathcal{E}_h$ se e somente se u_h^* é ponto fixo do operador compacto $A_h^{-1}F_h : X_h^\alpha \to X_h^\alpha$. Como $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$ segue que u_0^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico. Assim, podemos aplicar os resultados da Teorema 3.6.3, obtendo que existem h_0 e δ positivos tal que para $0 < h \leq h_0$ tem ao menos um $u_h^* \in \mathcal{E}_h \cap \overline{B(P_h^\alpha u_0^*, \delta)}$ e $\|u_h^* - P_h^\alpha u_0^*\|_{X_h^\alpha} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

Vamos mostrar a unicidade do ponto de equilíbrio u_h^*. Sabemos que, $0 \notin \sigma(A_0 - F_0'(u_0^*))$ se e somente se $1 \notin \sigma(A_0^{-1}F_0'(u_0^*))$. Logo, $N(I - A_0^{-1}F_0'(u_0^*)) = \{0\}$. Da hipótese (L_h) tem-se $-A_h^{-1}F_h'(u_h^*) \xrightarrow{\mathscr{CC}} -A_0^{-1}F_0'(u_0^*)$. Agora, usando o Lema 3.1.2 temos que existem $h_0 > 0$ e $\eta > 0$ (independente de $h \in [0, h_0]$) tal que, para qualquer $h \leq h_0$, $0 \notin \sigma(A_h - F_h'(u_h^*))$ e $\|(I - A_h^{-1}F_h'(u_h^*))v_h\|_{X_h^\alpha} \geq 2\eta \|v_h\|_{X_h^\alpha}$. Se escrevermos,

$$w_h(u_h^*, v) := A_h^{-1}F_h(u_h^* + v) - A_h^{-1}F_h(u_h^*) - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)v,$$

$$\frac{\|w_h(u_h^*, v_h)\|_{X_h^\alpha}}{\|v_h\|_{X_h^\alpha}} \leq h(\|v_h\|_{X_h^\alpha}),$$

onde $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ pode ser tomada contínua com $h(0) = 0$ da hipótese (J_h). Logo, sem perda de generalidade, existe $\delta > 0$ (independente de h) tal que $\|w_h(u_h^*, v_h)\|_{X_h^\alpha} \leq \eta \|v_h\|_{X_h^\alpha}$, para $\|v_h\|_{X_h^\alpha} \leq 2\delta$. Então, para $\|u_h^* - u_h\|_{X_h^\alpha} \leq 2\delta$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u_h - A_h^{-1}F_h(u_h)\|_{X_h^\alpha} &= \|u_h - u_h^* - (A_h^{-1}F_h(u_h) - A_h^{-1}F_h(u_h^*))\|_{X_h^\alpha} \\
&= \|u_h - u_h^* - (A_h^{-1}F_h(u_h) - A_h^{-1}F_h(u_h^*) - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)(u_h - u_h^*)) - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)(u_h - u_h^*)\|_{X_h^\alpha} \\
&= \|u_h - u_h^* - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)(u_h - u_h^*) - w_h(u_h^*, u_h - u_h^*)\|_{X_h^\alpha} \\
&\geq \|u_h - u_h^* - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)(u_h - u_h^*)\|_{X_h^\alpha} - \|w(u_h^*, u_h - u_h^*)\|_{X_h^\alpha} \\
&\geq 2\eta\|u_h - u_h^*\|_{X_h^\alpha} - \eta\|u_h - u_h^*\|_{X_h^\alpha} = \eta\|u_h - u_h^*\|_{X_h^\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

Disto, segue que $u_h \notin \mathcal{E}_h$. Assim, u_h^* é o único ponto de equilíbrio em $B(u_h^*, 2\delta)$. Anteriormente, temos mostrado que $0 \notin \sigma(A_h - F_h'(u_h^*))$ para $h \leq h_0$, então u_h^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico. ■

Observação 3.6.1 *Podemos observar que com os resultados do Teorema 3.6.4 podemos aplicar o Corolário 3.2.1. Em particular, a variedade instável linear de u_h^* $\mathscr{P}^\alpha-$converge para a variedade instável linear de u_0^*.*

Como A_h é um operador setorial, tem resolvente compacto e $F_h'(u_h^*) \in \mathscr{B}(X_h^\alpha, X_h)$, então o operador $\bar{A}_h = A_h - F_h'(u_h^*)$ está definido em $D(A_h)$ e é setorial com resolvente compacto com $0 \in \rho(\bar{A}_h)$ do Corolário 3.2.1 e Teorema 1.4.8. Agora, usando as hipóteses (H_h), (L_h) e o fato que $\bar{A}_h^{-1} = (I - A_h^{-1}F_h'(u_h^*))^{-1}A_h^{-1}$, segue que $\bar{A}_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{C}} \bar{A}_0^{-1}$. Assim, $\bar{A}_h$ satisfaz (H_h).

Lema 3.6.1 *Suponhamos que a família de operadores lineares $-\bar{A}_h$ satisfaz (H_h). Se Σ é um subconjunto compacto de $\rho(-\bar{A}_0)$, então existe $h_\Sigma > 0$ tal que $\Sigma \subset \rho(-\bar{A}_h)$ para todo $h \leq h_\Sigma$, $\alpha \in [0, 1)$ e*

$$\sup_{h\in[0,h_\Sigma]} \sup_{\mu\in\Sigma} \|(\mu + \bar{A}_h)^{-1}\|_{\mathscr{B}(X_h^\alpha)} < \infty.$$

Além disso, se existe $h_0 \in (0, 1]$ tal que $\sup_{h\in[0,h_0]} \|P_h^\alpha\|_{\mathscr{B}(X_0^\alpha, X_h^\alpha)} < \infty$, então para cada $u_0 \in X_0^\alpha$, temos

$$\sup_{\mu\in\Sigma} \|(\mu + A_h)^{-1}P_h^\alpha u_0 - P_h^\alpha(\mu + A_0)^{-1}u_0\|_{X_h^\alpha} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Prova. Segue imediatamente do Lema 3.1.5. □

Já que $\bar{A}_h$ possui as mesmas propriedades que A_h para todo $h \in [0, 1)$, podemos definir para h suficientemente pequeno os auto-espaços generalizados $\mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_h) = Q_h(\lambda_0, -\bar{A}_h)X_h^\alpha$, onde

$$Q_h(\lambda_0, -\bar{A}_h) = \int_{|\xi-\lambda_0|=\delta} (\xi + \bar{A}_h)^{-1} d\xi,$$

com $\lambda_0 \in \sigma(-\bar{A}_0)$.

Com isto, podemos obter o seguinte resultado

Teorema 3.6.5 *Suponha que a família de operadores $-\bar{A}_h$ satisfaz (H_h). Então, valem as seguintes afirmativas:*

i) Se $\lambda_0 \in \sigma(-\bar{A}_0)$, então existem seqüências $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(-\bar{A}_{h_n})$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$.

ii) Se $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $(0,1]$ com $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(-\bar{A}_{h_n})$, $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, então $\lambda_0 \in \sigma(-\bar{A}_0)$.

Além disso, se existe $h_0 \in (0,1]$ tal que $\sup_{h\in[0,h_0]} \|P_h^\alpha\|_{\mathscr{B}(X_0^\alpha, X_h^\alpha)} < \infty$, valem as seguintes afirmativas:

iii) Existe $h_1 \in (0,h_0)$, tal que

$$\dim(\mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_h)) = \dim(\mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_0)),$$

para todo $h \in [0,h_1]$.

iv) Se $u_0 \in \mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_0)$, então existe uma seqüência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $u_{h_n} \in \mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_{h_n})$ e tal que $u_{h_n} \overset{\mathscr{P}^\alpha}{\longrightarrow} u_0$ quando $n \to \infty$.

v) Se $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $(0,1]$ com $h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência com $u_n \in \mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_{h_n})$, $\|u_n\|_{X_{h_n}^\alpha} = 1$, então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência $\mathscr{P}^\alpha-$convergente para um vetor u_0 em $\mathscr{W}(\lambda_0, -\bar{A}_0)$ e $\|u_0\|_{X_0^\alpha} = 1$.

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.1.1. ■

Capítulo

4

Atrator Global para um Problema Parabólico

Este capítulo é dedicado ao estudo da dinâmica assintótica do problema (4.1), isto é, o estudo sob que condições se terão a existência do atrator e a limitação uniforme dele no espaço $L^\infty(\Omega)$. Começaremos o capítulo explicando o problema a estudar e que condições de não linearidade serão exigidas.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(u), \quad t > 0,\ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u^0(x) \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, L é o operador elíptico de segunda ordem dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + (c(x)+\lambda)u, \tag{4.2}$$

onde os coeficientes $a_{ij}, b_j, c : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, $\lambda \in \mathbb{R}$ e, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não linear de classe $C^2(\mathbb{R})$ com

$$|f'(s)| \leq C(1 + |s|^{\gamma-1}), \tag{C}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ onde $1 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $\gamma \geq 1$ se $n = 2$ e

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0. \tag{D}$$

Vamos supor que L é uniforme fortemente elíptico, isto é, existe uma constante $\vartheta > 0$,

tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \vartheta\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big), \tag{4.3}$$

para todo $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ com $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

Seja $X = L^2(\Omega)$, definamos o operador $A : D(A) \subset X \to X$ dado por $Au = -Lu$ para todo $u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Se A é um operador setorial temos que A gera um semigrupo analítico $\{e^{-tA} : t \geqslant 0\}$ seguindo o Teorema 1.3.1. Suponhamos que λ é escolhido tal que $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Então podemos definir as potências fracionarias A^α de A e os correspondentes espaços de potências fracionarias $X^\alpha := D(A^\alpha)$ com $\alpha \geqslant 0$ dotados da norma do gráfico pelo Corolário 1.3.2.

Vemos que $X^1 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $X^0 = L^2(\Omega)$ e $X^{1/2} = H_0^1(\Omega)$. Com esta notação o problema (4.1) pode ser escrito na forma abstrata

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u) \\ u(0) = u^0 \in X^{1/2}, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $F : X^{1/2} \to X$ é o operador de Nemytskii dado por $F(u(t))x = f(u(x,t))$.

Denotemos por $u := u(t, u^0)$ a solução de (4.4) e por $T(t, u^0)$ o semigrupo não-linear associado a (4.4) o qual é dado pela fórmula da variação das constantes

$$T(t, u^0) = e^{-tA}u^0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(T(s, u^0))ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.5}$$

Observação 4.0.2 *Em particular o Teorema 1.1.5 pode ser visto como: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado, $\partial\Omega \in C^1$.*

i) Se $n \geq 3$, então $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \in \Big[1, \dfrac{2n}{n-2}\Big]$;

ii) Se $n = 2$, então $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \in [1, \infty)$;

iii) Se $n = 1$, então $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Observação 4.0.3 *A Observação 4.0.2 junto com o fato do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ser limitado, nos permite aplicar a desigualdade de Poincaré (Teorema 1.1.2). Assim,*

i) Se $n \geq 3$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \in \Big[1, \dfrac{2n}{n-2}\Big]$;

ii) Se $n = 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \in [1, \infty)$;

iii) Se $n = 1$, então $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

4.1 O operador A é setorial em X

Esta seção tem como objetivo mostrar que o operador A é setorial.

Lema 4.1.1 *Seja o operador linear $A_0 : D(A_0) = D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$A_0 u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big). \tag{4.6}$$

Então, A_0 é um operador setorial em X.
Além disso, existe uma constante positiva ϱ tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \varrho \|A_0 u\|_X, \quad \forall u \in X. \tag{4.7}$$

Prova. Primeiramente, se mostrarmos que $A_0 + \lambda_0 I$ é setorial para $\lambda_0 > 0$ qualquer, segue da Observação 1.3.2 que o operador A_0 é setorial.

Claramente, $D(A_0) = D(A_0 + \lambda_0 I)$. Podemos ver que, dados $u, v \in D(A_0)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle (A_0 + \lambda_0 I)u, v\rangle_X &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) v dx + \lambda_0 \int_\Omega uv dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \lambda_0 \int_\Omega uv dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{j\,i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \lambda_0 \int_\Omega uv dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{j\,i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) dx + \lambda_0 \int_\Omega uv dx = \int_\Omega u\Big[-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{j\,i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) + \lambda_0 v\Big] dx \\
&= \langle u, (A_0 + \lambda_0 I)v\rangle_X,
\end{aligned}$$

logo $A_0 + \lambda_0 I$ é um operador simétrico.

Observamos também que o operador $A_0 + \lambda_0 I$ é densamente definido em X, isto é, conseguido fazendo uso das imersões de Sobolev (Teorema 1.1.5) e o Corolário 1.1.1, pois

$$C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_0) \subset L^2(\Omega),$$

aplicando as propriedades do fecho, segue

$$L^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset \overline{D(A_0)} \subset L^2(\Omega).$$

Daí, $D(A_0)$ é denso em $L^2(\Omega) = X$.

Vamos mostrar que $R(A_0 + \lambda_0 I) = X$, isto é, para todo $f \in X$ existe $u \in D(A_0)$ tal que $(A_0 + \lambda_0 I)u = f$. Este resultado, segue imediatamente dos resultados da Seção IX.5

em [16] com $a_0(x) = \lambda_0 > 0$.

Usando o Teorema 13.11(ver [47, página 334]) item (d), segue que $A_0 + \lambda_0 I$ é auto-adjunto.

Vemos que $A_0 + \lambda_0 I$ é limitado inferior, pois

$$\begin{aligned}\langle (A_0 + \lambda_0 I)u, u\rangle_X &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)u dx + \lambda_0 \int_\Omega u^2 dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \lambda_0 \int_\Omega u^2 dx \geq \vartheta \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2 dx + \lambda_0 \int_\Omega |u|^2 dx \\ &= \vartheta \sum_{k=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_X^2 + \lambda_0 \|u\|_X^2 \geq \min\{\vartheta, \lambda_0\}\|u\|_{X^{1/2}}^2 \geq \min\{\vartheta, \lambda_0\}\|u\|_X^2,\end{aligned}$$

onde temos usado (4.3) e $\min\{\vartheta, \lambda_0\} > 0$ para todo $u \in D(A_0)$. O resultado é estendido a todo X via o argumento de densidade do $D(A_0)$. Da Proposição 1.3.3, temos que $A_0 + \lambda_0 I$ é um operador setorial em X.

Finalmente, como $A_0 : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ e usando os resultados de regularidade para operadores elípticos para $m = 1$, $k = 0$, $p = 2$ e $B_j =$ Identidade com $j = 1$, temos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \varrho \|A_0 u\|_{L^2(\Omega)},$$

onde ϱ é uma constante positiva e $\ker(A_0) = \{0\}$, pois se $v \in \ker(A_0) \cap D(A_0)$, então

$$0 = \langle A_0 v, v\rangle_X \geq \vartheta \|v\|_X \Rightarrow v = 0.$$

Este último resultado é estendido para todo X via o argumento de densidade do $D(A_0)$. □

Lema 4.1.2 *O operador A é setorial em X.*

Prova. Vamos definir o operador $B : D(B) \subset X \to X$, dado por

$$-Bu = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + (c(x) + \lambda)u,$$

onde

$$\begin{aligned}D(B) &= \{u \in L^2(\Omega) : Bu \in L^2(\Omega) \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega\} \\ &= \{u \in L^2(\Omega) : u \in H^1(\Omega) \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega\} = H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Agora, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (Teorema 1.1.3), com $m = r = p = 2$, $j = 1$ e $\theta = 1/2$, obtemos

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

Da desigualdade de Young (Lema 1.1.2) e (4.8), temos

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{2}\|u\|_{H^2(\Omega)} + \frac{C^2}{2\epsilon}\|u\|_{L^2(\Omega)}, \forall \epsilon > 0. \tag{4.9}$$

Substituindo (4.7) em (4.9), resulta

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\varrho\epsilon}{2}\|A_0 u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C^2}{2\epsilon}\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|Bu\|_X &= \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + (c(x)+\lambda)u \right\|_X \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_X + \|(c(x)+\lambda)u\|_X \\
&\leq \max_{x\in\overline{\Omega}} |b_j(x)| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_X + \max_{x\in\overline{\Omega}} |c(x)+\lambda| \|u\|_X \leq \tau\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{\tau\varrho\epsilon}{2}\|A_0 u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau C^2}{2\epsilon}\|u\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde na última desigualdade temos usado (4.10) e $\tau = \max\left\{ \max_{x\in\overline{\Omega}} |b_j(x)|, \max_{x\in\overline{\Omega}} |c(x)+\lambda| \right\}$.

Podemos ver facilmente que $A = A_0 + B$ com A_0 setorial em X pelo Lema 4.1.1, $D(A_0) \subset D(B)$ e a condição (1.14) é satisfeita pela desigualdade (4.11). Portanto, pela Proposição 1.3.2 segue que A é um operador setorial. □

4.2 O operador F é localmente Lipschitz contínuo

Mostraremos que o funcional F e F' são localmente Lipschitz contínuos, estas afirmações serão feitas em duas partes: Para o caso $n = 1$ usaremos a imersão *iii*) da Observação 4.0.3 e para o caso $n \geq 2$ usaremos a condição de crescimento (C) da $f \in C^2(\mathbb{R})$ e as imersões *i*) e *ii*) da Observação 4.0.3.

Lema 4.2.1 *Se $n = 1$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$, então $F : X^{1/2} \to X$ é localmente Lipschitz contínuo.*

Prova. Vemos que, para qualquer $\phi \in X^{1/2}$, temos que $\phi \in C(\overline{\Omega})$ pela parte *iii*) da Observação 4.0.3 e $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{X^{1/2}}$, pois

$$|\phi(x)|^2 = |\phi(x) - \phi(0)|^2 \leq \int_0^x |\phi'(s)|^2 ds \leq \|\phi'\|_X^2 \leq \|\phi\|_{X^{1/2}}^2.$$

Dado um $r > 0$ tal que $\phi, \psi \in X^{1/2}$ com $\|\phi\|_{1/2}, \|\psi\|_{1/2} \leq r$, implica que $|\phi(x)|, |\psi(x)| \leq r$ e como $f \in C^1(\mathbb{R})$ implica que existe uma constante $c = c_r$ tal que $\sup\{f'(s) : |s| \leq r\} \leq c^{\frac{1}{2}}$, logo

$$\begin{aligned}\|F(\phi) - F(\psi)\|_X^2 &= \int_\Omega |f(\phi(x)) - f(\psi(x))|^2 dx = \int_\Omega \Big| \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f'(s) ds \Big|^2 dx \\ &\leq \Big(\sup_{|s|\leq r} |f'(s)| \Big)^2 \int_\Omega \Big| \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} ds \Big|^2 dx \leq c \int_\Omega |\phi(x) - \psi(x)|^2 dx \\ &= c\|\phi - \psi\|_X^2 \leq c\|\phi - \psi\|_{X^{1/2}}^2.\end{aligned}$$

Portanto, F é localmente Lipschitz contínua. □

Lema 4.2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Se f satisfaz* (C) *e $n \geq 2$, então $F : X^{1/2} \to X$ é localmente Lipschitz contínuo. Além disso, dado $R > 0$ existe uma constante $C(R) > 0$ tal que*

$$\|F(u)\|_X \leq C(R), \tag{4.12}$$

para todo $u \in B_R := \{w \in X^{1/2} : \|w\|_{X^{1/2}} \leq R\}$.

Prova. Usando o Teorema de Valor Meio e (C), podemos mostrar que

$$\begin{aligned}|f(s) - f(r)| &= |f'(\theta s + (1-\theta)r)||s - r| \leq C(1 + |\theta s + (1-\theta)r|^{\gamma-1})|s - r| \\ &\leq C(1 + |s + r|^{\gamma-1})|s - r| \leq C(1 + 2^{\gamma-2}(|s|^{\gamma-1} + |r|^{\gamma-1}))|s - r| \\ &\leq C_1(1 + |s|^{\gamma-1} + |r|^{\gamma-1})|s - r|, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $\theta \in [0, 1]$, $1 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $\gamma \geq 1$ se $n = 2$.

Agora, vamos mostrar que para um $p > 1$ tal que $p\gamma = \frac{2n}{n-2}$, a função $F : L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ será localmente Lipschitz contínua. De fato, usando (4.13), temos

$$\begin{aligned}&\|F(u) - F(v)\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^p dx \\ &\leq \int_\Omega C_1^p \big(1 + |u(x)|^{\gamma-1} + |v(x)|^{\gamma-1}\big)^p |u(x) - v(x)|^p dx \\ &\leq C_2 \int_\Omega |u(x) - v(x)|^p \big(1 + |u(x)|^{p(\gamma-1)} + |v(x)|^{p(\gamma-1)}\big) dx \\ &\leq C_2 \Big(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^{p\gamma} dx \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_\Omega \big(1 + |u(x)|^{p(\gamma-1)} + |v(x)|^{p(\gamma-1)}\big)^r dx \Big)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_3 \Big(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \Big)^{\frac{p(n-2)}{2n}} \Big(\int_\Omega (1 + |u(x)|^{p(\gamma-1)r} + |v(x)|^{p(\gamma-1)r}) dx \Big)^{\frac{1}{r}},\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade temos usado a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1.1) para γ e r, onde $\frac{1}{r} = 1 - \frac{p(n-2)}{2n}$; já que, $u, v \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) = L^{p\gamma}(\Omega)$ e do fato de γ e r serem conjugados, temos $p(\gamma-1)r = p\gamma$, logo $(u-v)^p \in L^{\gamma}(\Omega)$ e como $u^{p(\gamma-1)},\ v^{p(\gamma-1)} \in L^r(\Omega)$, segue que $1 + u^{p(\gamma-1)} + v^{p(\gamma-1)} \in L^r(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned}\|F(u) - F(v)\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq C_4\|u-v\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big(1 + \|u\|^{p\gamma}_{L^{p\gamma}(\Omega)} + \|v\|^{p\gamma}_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_5\|u-v\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big(1 + \|u\|_{L^{p\gamma}(\Omega)} + \|v\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big)^{\frac{p\gamma}{r}} \\ &= C_5\|u-v\|^p_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big(1 + \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big)^{p(\gamma-1)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_6\|u-v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big(1 + \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big)^{\gamma-1}.$$

Em particular, para $p = 2$, usando a parte $i)$ e $ii)$ da Observação 4.0.3, obtemos

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_7\|u-v\|_{H^1_0(\Omega)}\big(1 + \|u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|v\|_{H^1_0(\Omega)}\big)^{\gamma-1}.$$

Finalmente, dado um $\delta > 0$ tal que $u, v \in X^{1/2}$ com $\|u\|_{X^{1/2}}, \|v\|_{X^{1/2}} \leq \delta$. Então,

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq C_{\delta,\gamma}\|u-v\|_{X^{1/2}},$$

onde $C_{\delta,\gamma} = C_7(1+2\delta)^{\gamma-1}$. Assim, F é localmente Lipschitz contínua.

Por último, do fato que $f \in C^1(\mathbb{R})$, temos

$$\|F(0)\|_X = \left(\int_\Omega |f(0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = |f(0)||\Omega|^{\frac{1}{2}} \leq K_0.$$

Como F é Lipschitz contínua em B_R, resulta

$$\|F(u)\|_X \leq \|F(u) - F(0)\|_X + \|F(0)\|_X \leq C_{R,\gamma}\|u\|_{X^{1/2}} + K_0 \leq C_{R,\gamma}R + K_0 = C(R).$$

□

Lema 4.2.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não linear de classe $C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo* (C). *Então, $F : X^{1/2} \to X$ é continuamente diferenciável com derivada $F'(u) \in \mathscr{L}(X^{1/2}, X)$ dado por $(F'(u)h)(x) = f'(u(x))h(x)$, para todo $u, h \in X^{1/2}$. Também, dado $u \in B_R$, existe uma constante $\widetilde{C}(R)$ tal que*

$$\|F'(u)h\|_X \leq \widetilde{C}(R)\|h\|_{X^{1/2}},\ \forall h \in X^{1/2}. \tag{4.14}$$

Além disso,

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{\mathscr{L}(X^{1/2},X)} \leq C\|u-v\|_{X^{1/2}}\big(1 + \|u\|_{X^{1/2}} + \|v\|_{X^{1/2}}\big)^{\gamma-2}, \tag{4.15}$$

para todo $u, v \in X^{1/2}$. Com isto, a desigualdade (4.15) nos diz que $F'(u)$ é localmente Lipschitz contínua em $\mathscr{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$.

Prova. Primeiro vamos a obter a diferencial de Gateaux do operador de Nemytskii. Assim, dado $u, h \in X^{1/2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta F(u,h)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{F(u+th)(x) - F(u)(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(u(x)+th(x)) - f(u(x))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{f'(u(x)+sth(x))(u(x)+th(x)-u(x))}{t} ds \qquad (s = s(x) \in [0,1]) \\
&= \int_0^1 \lim_{t\to 0} f'(u(x)+sth(x))h(x)ds = \int_0^1 f'(u(x))h(x)ds = f'(u(x))h(x),
\end{aligned}$$

onde temos usado o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o fato que $f \in C^2(\mathbb{R})$. Da condição (C), podemos obter

$$|f''(s)| \leq C_\gamma(1 + |s|^{\gamma-2}), \tag{CC}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ com $2 \leq \gamma \leq \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $\gamma \geq 2$ se $n = 2$.

Analogamente como foi feito para (4.13) usando (CC), temos

$$|f'(s) - f'(r)| \leq C_{1,\gamma}(1 + |s|^{\gamma-2} + |r|^{\gamma-2})|s-r|, \tag{4.16}$$

onde $2 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $\gamma \geq 2$ se $n = 2$.

Agora, podemos mostrar que o F é de classe C^1 no sentido de Fréchet. Denotemos

$$\Phi(x) := F(u+h)(x) - F(u)(x) - f'(u(x))h(x),$$

para todo $u, h \in L^{\frac{2n}{n-2}}$ e $x \in \Omega$. Logo, seja $p > 1$ tal que $p\gamma = \frac{2n}{n-2}$ e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega \big|f(u(x)+h(x)) - f(u(x)) - f'(u(x))h(x)\big|^p dx \\
&= \int_\Omega \Big|\Big\{\int_0^1 \big[f'(u(x)+sh(x)) - f'(u(x))\big]ds\Big\}h(x)\Big|^p dx \\
&\leq C^p_{1,\gamma}\int_\Omega \Big|\int_0^1 (1+|u(x)+sh(x)|^{\gamma-2}+|u(x)|^{\gamma-2})|sh(x)||h(x)|ds\Big|^p dx \\
&\leq C^p_{2,\gamma}\int_\Omega |h(x)|^{2p}\Big|\int_0^1 \big(1+2^{\gamma-2}|u(x)|^{\gamma-2}+2^{\gamma-2}s^{\gamma-2}|h(x)|^{\gamma-2}+|u(x)|^{\gamma-2}\big)sds\Big|^p dx \\
&\leq C^p_{3,\gamma}\int_\Omega |h(x)|^{2p}\big(1+|u(x)|^{p(\gamma-2)}+|h(x)|^{p(\gamma-2)}\big)dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1.1) para $\frac{\gamma}{2}$ e $\frac{\gamma}{\gamma-2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq C^p_{3,\gamma}\Big(\int_\Omega |h(x)|^{p\gamma}dx\Big)^{\frac{2}{\gamma}}\Big(\int_\Omega \big(1+|u(x)|^{p(\gamma-2)}+|h(x)|^{p(\gamma-2)}\big)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}dx\Big)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \\
&\leq C^p_{4,\gamma}\|h\|^{2p}_{L^{p\gamma}(\Omega)}\Big(\int_\Omega \big(1+|u(x)|^{p\gamma}+|h(x)|^{p\gamma}\big)dx\Big)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \\
&\leq C^p_{5,\gamma}\|h\|^{2p}_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big(1+\|u\|^{p\gamma}_{L^{p\gamma}(\Omega)}+\|h\|^{p\gamma}_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \\
&\leq C^p_{6,\gamma}\|h\|^{2p}_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big(1+\|u\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}+\|h\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big)^{p(\gamma-2)}.
\end{aligned}$$

Então, $\|\Phi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{6,\gamma}\|h\|^2_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big(1+\|u\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}+\|h\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}\big)^{\gamma-2}$.

Logo, usando a Observação 4.0.3, obtemos

$$\frac{\|\Phi\|_{L^p(\Omega)}}{\|h\|_{H^1_0(\Omega)}} \leq C_{7,\gamma}\|h\|_{H^1_0(\Omega)}\big(1+\|u\|_{H^1_0(\Omega)}+\|h\|_{H^1_0(\Omega)}\big)^{\gamma-2} \to 0 \text{ quando } \|h\|_{H^1_0(\Omega)} \to 0.$$

Com o mostrado anteriormente para o caso $p = 2$ segue que F é de classe C^1 no sentido de Fréchet com $(F'(u))h(x) = f'(u(x))h(x)$, para todo $u, h \in H^1_0(\Omega)$.

Vamos mostrar (4.14). Para $n = 1$, dado $u \in B_R \subset X^{1/2}$, temos $u \in C(\overline{\Omega})$ (ver Observação 4.0.3) e $|u(x)| \leq R$. Como $f \in C^2(\mathbb{R})$, segue que existe uma constante $\widetilde{C}(R) > 0$ tal que $|f'(u(x))| \leq \tilde{C}(R)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|F'(u)h\|_{L^2(\Omega)} &= \|f'(u(\cdot))h(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f'(u(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sup_{x\in\Omega}|f'(u(x))|\,\|h\|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}(R)\|h\|_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para $n \geq 2$, usamos (C), a Observação 4.0.3 e a Observação 1.1.1 com $\frac{1}{2} = \frac{\gamma-1}{q} + \frac{1}{\sigma}$ (com $\sigma = q = 2\gamma$ se $n \geq 3$ e $\sigma \in [3, \infty)$, $\gamma \neq 1$ se $n = 2$), então

$$\begin{aligned}
\|F'(u).h\|_{L^2(\Omega)} &= \Big(\int_\Omega |f'(v(x))h(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leq C \Big(\int_\Omega \big|(1 + |u(x)|^{\gamma-1})h(x)\big|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|(1 + |u|^{\gamma-1})h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|1 + |u|^{\gamma-1}\|_{L^{\frac{q}{\gamma-1}}(\Omega)} \|h\|_{L^\sigma(\Omega)} \\
&\leq \bar{C}\big(1 + \||u|^{\gamma-1}\|_{L^{\frac{q}{\gamma-1}}(\Omega)}\big)\|h\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \bar{C}\big(1 + \|u\|^{\gamma-1}_{L^q(\Omega)}\big)\|h\|_{L^\sigma(\Omega)} \\
&\leq \bar{C}_2\big(1 + \|u\|^{\gamma-1}_{H^1_0(\Omega)}\big)\|h\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \bar{C}_3(1 + R)^{\gamma-1}\|h\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \widetilde{C}(R)\|h\|_{H^1_0(\Omega)},
\end{aligned}$$

para todo $u \in B_R$ e $h \in H^1_0(\Omega)$.

Agora, vamos mostrar a estimativa (4.15). Para isto seguiremos o mesmo raciocínio feito no Lema 4.2.2. De fato, para $u, v, h \in L^{p\gamma}(\Omega)$ denotamos

$$\Delta F(u, v) := F'(u) - F'(v).$$

Usando (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
&\big\|\Delta F(u, v)h\big\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |f'(u(x)) - f'(v(x))|^p |h(x)|^p dx \\
&\leq C^p_{1,\gamma} \int_\Omega \big(1 + |u(x)|^{\gamma-2} + |v(x)|^{\gamma-2}\big)^p |u(x) - v(x)|^p |h(x)|^p dx \\
&\leq C^p_{2,\gamma} \int_\Omega \big(1 + |u(x)|^{p(\gamma-2)} + |v(x)|^{p(\gamma-2)}\big) |u(x) - v(x)|^p |h(x)|^p dx \\
&\leq C^p_{2,\gamma} \Big(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^{p\gamma} dx \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_\Omega |h(x)|^{p\gamma} dx \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \Big[\int_\Omega \big(1 + |u(x)|^{p(\gamma-2)} + |v(x)|^{p(\gamma-2)}\big)^\theta dx \Big]^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq C^p_{3,\gamma} \|u - v\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)} \|h\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)} \Big[\int_\Omega \big(1 + |u(x)|^{p\theta(\gamma-2)} + |v(x)|^{p\theta(\gamma-2)}\big) dx \Big]^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq C^p_{4,\gamma} \|u - v\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)} \|h\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)} \big(1 + \|u\|^{p\theta(\gamma-2)}_{L^{p\theta(\gamma-2)}(\Omega)} + \|v\|^{p\theta(\gamma-2)}_{L^{p\theta(\gamma-2)}(\Omega)}\big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq C^p_{5,\gamma} \|u - v\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)} \|h\|^p_{L^{p\gamma}(\Omega)} \big(1 + \|u\|_{L^{p\theta(\gamma-2)}(\Omega)} + \|v\|_{L^{p\theta(\gamma-2)}(\Omega)}\big)^{p(\gamma-2)} \\
&\leq C^p_{5,\gamma} \|u - v\|^p_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|h\|^p_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \big(1 + \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big)^{p(\gamma-2)},
\end{aligned}$$

onde $\theta = \theta(\gamma)$ e temos usado também, a desigualdade de Hölder generalizada (Observação 1.1.1) para γ, γ e θ com $\theta = \frac{\gamma}{\gamma-2}$, então $p(\gamma-2)\theta = p\gamma$ e $u^{p(\gamma-2)}, v^{p(\gamma-2)} \in L^\theta(\Omega)$. Portanto,

$$\|F'(u)h - F'(v)h\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{5,\gamma} \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|h\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \big(1 + \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big)^{\gamma-2}.$$

Finalmente, usando a parte $i)$ e $ii)$ da Observação 4.0.3, obtemos

$$\|F'(u)h - F'(v)h\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{6,\gamma}\|u-v\|_{H_0^1(\Omega)}\big(1 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\big)^{\gamma-2}\|h\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Desta ultima desigualdade com $p = 2$ segue imediatamente (4.15). □

4.3 Solução local e global

Nesta seção mostraremos a existência da solução local e global do problema (4.4) e, também um resultado de estabilidade das soluções do mesmo problema.

Lema 4.3.1 (Solução local) *Sob a hipótese de crescimento* (C) *o problema* (4.4) *tem solução local em* $X^{1/2}$.

Prova. Fazendo uso dos Lema 4.2.1, Lema 4.2.2 e Lema 4.1.2, vemos que as hipóteses do Teorema 1.4.1 são satisfeitas, daí o resultado buscado. □

Lema 4.3.2 (Solução local limitada) *Suponhamos que a condição* (C) *vale. Se* $u^0 \in B_R$ *no problema* (4.4)*, então existe* $\tau = \tau(R) > 0$ *tal que as soluções* $u(t, u^0)$ *do problema* (4.4) *existem e são limitadas em* $X^{1/2}$ *uniformemente para* $t \in [0, \tau]$.

Prova. Usando o Lema 4.2.1, Lema 4.2.2 e Lema 4.1.2, as hipóteses da Proposição 1.4.1 são satisfeitas e o resultado segue. □

Teorema 4.3.1 (Solução global limitada) *Suponhamos que* (C) *e* (D) *valem, então a solução do problema* (4.4) *com* $u^0 \in B_R$ *é globalmente definida e existe uma constante* K_1 *tal que*

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t, u^0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_1. \tag{4.17}$$

Demonstração. De (4.21) e o Lema 4.4.1, obtemos que $u \in L^\infty(\Omega)$, então $\|F(u)\|_X \leq C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)})$. Assim, se $u^0 \in X^\alpha$, então u é uma solução local em X^α do (4.4) satisfazendo (1.28). Agora, usando a Proposição 1.3.5, temos

$$\begin{aligned}
\|u(t, u^0)\|_{X^\alpha} &\leq \|A^\alpha e^{-At}u^0\|_X + \int_0^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\|_{\mathscr{L}(X)}\|F(u(s, u^0))\|_X ds \\
&\leq c_0 e^{-\beta t}\|u^0\|_{X^\alpha} + \int_0^t c_1(t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}\|F(u(s, u^0))\|_X ds \\
&\leq c_0\|u^0\|_{X^\alpha} + c_1 C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)})\int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds,
\end{aligned}$$

onde c_0, c_1 são constantes positivas com $\alpha \in (0,1)$ e $\operatorname{Re}\sigma(A) > \beta > 0$. Segue-se que $u(t,u^0)$ na norma de de X^α fica limitado em intervalos finitos de tempo com $\alpha < 1$. Portanto, para $\alpha = 1/2$ a solução é global.

Como antes, usando a fórmula da variação das constantes e do fato que $\|u(t,u^0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_\infty$ para todo $t \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|u(t,u^0)\|_{X^\alpha} &\leq c_\alpha t^{-\alpha}e^{-\beta t}\|u^0\|_X + \int_0^t c_1(t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}C(K_\infty)ds \\ &\leq c_\alpha t^{-\alpha}e^{-\beta t}\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + c_1C(K_\infty)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}ds.\end{aligned}$$

Disto, segue-se

$$\limsup_{t\to\infty}\|u(t,u^0)\|_{X^\alpha} \leq \limsup_{t\to\infty} c_1C(K_\infty)\int_0^t r^{-\alpha}e^{-\beta r}ds = c_1C(K_\infty)\Gamma(1-\alpha)\beta^{\alpha-1} =: K_1.$$

■

Como conseqüência do Teorema 4.3.1 resulta

Corolário 4.3.1 *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, segue-se que o semigrupo* $\{T(t,u^0) : t \geq 0\}$ *é ponto dissipativo.*

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo em $X^{1/2}$ dado por $T(t)u^0 = u(t,u^0), \forall t \geq 0$. Da Observação 1.4.1 segue que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo em $X^{1/2}$ e $u(t,u^0)$ pode-se expressar pela fórmula da variação das constantes (1.28).

Teorema 4.3.2 (Diferenciabilidade em relação às condições iniciais) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função não linear de classe* $C^2(\mathbb{R})$ *satisfazendo* (C)*, então dado* $r > 0$ *tal que para todo* $u^0 \in X^{1/2}$ *com* $\|u^0\|_{X^{1/2}} \leq r$ *existem* $\tau > 0$ *e uma única solução local* $u(\cdot,0,u^0) \in C([0,\tau),X^{1/2})$ *do problema* (4.4) *satisfazendo* $u(0,0,u^0) = u^0$ *em* $X^{1/2}$*. Além disso, esta solução é continuamente diferenciável com relação ao dado inicial* $u^0 \in X^{1/2}$ *e ela é uma solução clássica para* $t > 0$*.*

Demonstração. Definamos um subconjunto limitado $B = \{v \in X^{1/2} : \|v\|_{X^{1/2}} \leq r\}$ em $X^{1/2}$. Pela hipótese $u^0 \in B$. Agora, usando a Proposição 1.4.1, segue que existe um $\tau > 0$ tal que $u(\cdot,u^0) \in C([0,\tau),X^{1/2})$, para todo $u^0 \in B$. Com isto último e os Lemas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, vemos que as hipóteses do Teorema 3.4.4 (ver [37, página 64]) são satisfeitas. Logo, $u^0 \to u(t,0,u^0)$ é continuamente diferenciável de $X^{1/2}$ em $X^{1/2}$ satisfazendo $u(0,0,u^0) = u^0$.

Do Lema 4.2.3 e o Corolário 3.4.5 (ver [37, página 64]) segue que $u^0 \to u(t,0,u^0)$ é solução clássica para todo $t > 0$. ■

4.4 Existência do atrator global

Nesta seção estudaremos a existência do atrator global $\mathcal{A}$ para o problema (4.4) e a limitação uniforme deste atrator no espaço $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 4.4.1 *O C_0-semigrupo $\{T(t,u^0) : t \geq 0\}$ associado ao problema (4.4) tem um atrator global $\mathcal{A}$ em $X^{1/2}$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que o C_0-semigrupo $\{T(t,u^0) : t \geq 0\}$ é compacto em $X^{1/2}$. De fato, vemos que o resolvente de A é compacto, posto que $X^1 = D(A)$ está compactamente imerso em $X = L^2(\Omega)$ e da Proposição 1.4.3, segue o resultado. Agora, usando o Teorema 1.4.10, temos que o C_0-semigrupo $\{T(t,u^0) : t \geq 0\}$ é compacto em $X^{1/2}$. Finalmente, usando os Corolários 4.3.1 e 1.5.1 o resultado segue. ■

Lema 4.4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não-linear de classe $C^2(\mathbb{R})$ que satisfaz (D), então dado $\epsilon > 0$, existe $m_\varepsilon =: m > 0$ tal que*

$$vf(v) \leq \epsilon v^2 + m, \tag{4.18}$$

para todo $v \in \mathbb{R}$.

Prova. Da hipótese (D), segue-se

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, M > 0 : f(u) \leq \epsilon u,\ \forall |u| \geq M. \tag{4.19}$$

isto implica que $vf(v) \leq \epsilon v^2$, para todo $|v| \geq M$. Como o subconjunto $\{x \in \overline{\Omega} : |v| \leq M\}$ de $\mathbb{R}^n$ é limitado onde temos considerado $v = v(x)$ e f é continua, temos $|vf(v)| \leq m_\epsilon$. Portanto, juntando estes dois fatos resulta (4.18). □

A seguir, obteremos limitações uniformes para o atrator do (4.4), para maiores detalhes ver [9] e [25].

Lema 4.4.2 *Seja problema (4.1) com todas as hipóteses para a existência da soluções globais e satisfazendo*

$$uf(u) \leq \zeta u^2 + \tau, \tag{4.20}$$

onde ζ e τ são constantes positivas. Então,

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t,u^0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3n}{4}+1} \max\Big\{\|u^0\|_{L^2(\Omega)}, 1\Big\}, \tag{4.21}$$

onde $\delta > 0$ está definido em (4.39) abaixo.

Prova. Para mostrar isto usaremos a técnica de iteração de Moser - Alikakos (ver [25], página 213) que permite-nos obter estimativas em $L^\infty(\Omega)$ para as soluções de equações parabólicas de segunda ordem. De fato, primeiro multiplicamos a equação do problema (4.1) por u^{2^k-1} com $k = 1, 2, \ldots$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\underbrace{\int_\Omega u_t u^{2^k-1} dx}_{=:\mathrm{I}} = \underbrace{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)u^{2^k-1}dx}_{=:\mathrm{II}} + \underbrace{\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}u^{2^k-1}dx}_{=:\mathrm{III}}$$
$$+ \int_\Omega (c(x)+\lambda)u^{2^k}dx + \int_\Omega f(u)u^{2^k-1}dx. \tag{4.22}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \frac{1}{2^k}\int_\Omega 2^k u_t u^{2^k-1}dx = \frac{1}{2^k}\Big(\int_\Omega (2^k-1)u_t u^{2^k-1}dx + \int_\Omega u_t u^{2^k-1}dx\Big)\\ &= \frac{1}{2^k}\Big(\langle (2^k-1)u^{2^k-2}u_t, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u^{2^k-1}, u_t\rangle_{L^2(\Omega)}\Big) = \frac{1}{2^k}\frac{d}{dt}\langle u^{2^k-1}, u\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &= \frac{1}{2^k}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial (u^{2^k-1})}{\partial x_j}dx = -(2^k-1)\int_\Omega u^{2^k-2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\\ &= -\frac{(2^k-1)}{2^{2k-2}}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\Big(2^{k-1}u^{2^{k-1}-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\Big(2^{k-1}u^{2^{k-1}-1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)dx\\ &= -\frac{(2^k-1)}{2^{2k-2}}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial (u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\frac{\partial (u^{2^{k-1}})}{\partial x_j}dx.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)u^{2^{k-1}-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}u^{2^{k-1}}dx = \frac{1}{2^{k-1}}\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)2^{k-1}u^{2^{k-1}-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}u^{2^{k-1}}dx\\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)u^{2^{k-1}}\frac{\partial (u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}dx.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Substituindo (4.23), (4.24) e (4.25) em (4.22), obtemos

$$\frac{1}{2^k}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx = -\frac{(2^k-1)}{2^{2k-2}}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_j}dx + \int_\Omega f(u)u^{2^k-1}dx$$
$$+\frac{1}{2^{k-1}}\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\,u^{2^{k-1}}dx + \int_\Omega (c(x)+\lambda)u^{2^k}dx. \tag{4.26}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx = -\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_j}dx + 2^k\int_\Omega uf(u)u^{2^k-2}dx$$
$$+2\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\,u^{2^{k-1}}dx + 2^k\int_\Omega (c(x)+\lambda)u^{2^k}dx.$$

Agora, usando (4.3) e a condição (4.20), resulta

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \le -\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2 dx + 2^k\int_\Omega (\zeta u^2+\tau)u^{2^k-2}dx$$
$$+2B^*_\infty\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\,u^{2^{k-1}}dx + 2^k(c(x)+\lambda)\int_\Omega u^{2^k}dx, \tag{4.27}$$

onde $B^*_\infty := \max\limits_{1\le i\le n}\sup\limits_{x\in\Omega}|b_i(x)|$ e $C^*_\infty := \sup\limits_{x\in\Omega}|c(x)|$. Usando a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1.1) em (4.27), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \le -\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2 dx + 2^k\zeta\int_\Omega u^{2^k}dx + 2^k\tau\int_\Omega u^{2^k-2}dx$$
$$+2B^*_\infty\left(\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \left(u^{2^{k-1}}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2^k(C^*_\infty+\lambda)\int_\Omega u^{2^k}dx. \tag{4.28}$$

Do fato que $u^{2^k-2}\le u^{2^k}+1$, para todo $k=1,2,\ldots$ e da desigualdade $(d_1+\cdots+d_n)^r \le n^{r-1}(d_1^r+\cdots+d_n^r)$ com $d_i\ge 0$ e $r\ge 1$ em (4.28), resulta

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \le -\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2 dx + 2^k\tau\int_\Omega (u^{2^k}+1)dx$$
$$+2B^*_\infty\left(\int_\Omega n\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^{2^k}dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2^k(\zeta+C^*_\infty+\lambda)\int_\Omega u^{2^k}dx.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \leq -\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx + 2^k(\zeta+\tau+C_\infty^*+\lambda)\int_\Omega u^{2^k}dx$$
$$+ 2B_\infty^*\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(n\int_\Omega u^{2^k}dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2^k\tau|\Omega|. \tag{4.29}$$

Fazendo uso da desigualdade de Cauchy (Lema 1.1.1) com $\bar{\varepsilon}=\frac{\vartheta}{B_\infty^*}$ em (4.29), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \leq -\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx + 2^k(\zeta+\tau+C_\infty^*+\lambda)\int_\Omega u^{2^k}dx$$
$$+ 2B_\infty^*\Big(\frac{\bar{\varepsilon}}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx + \frac{1}{2\bar{\varepsilon}}n\int_\Omega u^{2^k}dx\Big) + 2^k\tau|\Omega|$$
$$= \Big(-\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta + B_\infty^*\bar{\varepsilon}\Big)\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx + \Big[2^k(\zeta+\tau+C_\infty^*+\lambda)+\frac{nB_\infty^*}{\bar{\varepsilon}}\Big]\int_\Omega u^{2^k} + 2^k\tau|\Omega|$$
$$= \Big(-\frac{(2^k-1)}{2^{k-2}}\vartheta+\vartheta\Big)\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx$$
$$+ \big[2^k(\zeta+\tau+C_\infty^*+\lambda)+\frac{n(B_\infty^*)^2}{\vartheta}\big]\int_\Omega u^{2^k} + 2^k\tau|\Omega|. \tag{4.30}$$

Como, $2\leq\dfrac{2^k-1}{2^{k-2}}\leq 4$ para todo $k=1,2,\ldots,$ a (4.30) pode-se expressar

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \leq -\vartheta\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(u^{2^{k-1}})}{\partial x_i}\right]^2dx + \Big[2^k(\zeta+\tau+C_\infty^*+\lambda)+\frac{n(B_\infty^*)^2}{\vartheta}\Big]\int_\Omega u^{2^k} + 2^k\tau|\Omega|. \tag{4.31}$$

Considerando a desigualdade de Gagliardo - Nirenberg (Teorema 1.1.3) com $j=0$, $p=2$, $m=1$, $r=2$, $q=1$, $\theta=\frac{n}{n+2}$, obtemos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq\widetilde{C}\|v\|_{H^1(\Omega)}^{\theta}\|v\|_{L^1(\Omega)}^{1-\theta},\ \forall v\in H^1(\Omega), \tag{4.32}$$

onde a constante $\widetilde{C}=\widetilde{C}(\Omega,n)$. Fazendo uso do Corolário 1.1.2 com $m=\frac{1}{\theta}>1$ e $\varepsilon\in(0,1)$ aplicado à (4.32), temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\frac{1}{m}\varepsilon^m\|v\|_{H^1(\Omega)}^{2\theta m}+\frac{m-1}{m}\varepsilon^{\frac{-m}{m-1}}\widetilde{C}^{\frac{2m}{m-1}}\|v\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2m(1-\theta)}{m-1}}\leq\varepsilon\|v\|_{H^1(\Omega)}^2+C_\varepsilon\|v\|_{L^1(\Omega)}^2, \tag{4.33}$$

onde $C_\varepsilon := \xi\varepsilon^{-\frac{n}{2}-1}$ e $\xi := \frac{2}{n+2}\widetilde{C}^{n+2}$. Da definição da norma em $H^1(\Omega)$, vemos que (4.33), pode-se expressar como

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{C_\varepsilon}{\varepsilon}\|v\|^2_{L^1(\Omega)} \leq \|v_x\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.34}$$

Agora, usando (4.34) em (4.31) com $v = u^{2^{k-1}}$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx &\leq -\frac{\vartheta(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\int_\Omega u^{2^k}dx + \frac{\vartheta C_\varepsilon}{\varepsilon}\Big(\int_\Omega u^{2^k}dx\Big)^2 \\ &\quad + \Big[2^k(\zeta+\tau+C^*_\infty+\lambda) + \frac{n(B^*_\infty)^2}{\vartheta}\Big]\int_\Omega u^{2^k} + 2^k\tau|\Omega| \\ &= \Big[-\frac{\vartheta(1-\varepsilon)}{\varepsilon} + 2^k(\zeta+\tau+C^*_\infty+\lambda) + \frac{n(B^*_\infty)^2}{\vartheta}\Big]\int_\Omega u^{2^k}dx \\ &\quad + \frac{\vartheta C_\varepsilon}{\varepsilon}\Big(\int_\Omega u^{2^k}dx\Big)^2 + 2^k\tau|\Omega|. \end{aligned}\tag{4.35}$$

Então, fixando $\varepsilon = \varepsilon_k$ para $k = 1, 2, \ldots$, tal que

$$-\frac{\vartheta(1-\varepsilon)}{\varepsilon} + 2^k(\zeta+\tau+C^*_\infty+\lambda) + \frac{n(B^*_\infty)^2}{\vartheta} \leq -2^k$$

e $\varepsilon_k = \varrho 2^{-k}$ com ϱ uma constante, chegamos à estimativa

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2^k}dx \leq -2^k\int_\Omega u^{2^k}dx + \mu(2^k)^{\frac{n}{2}+2}\Big(\int_\Omega u^{2^k}dx\Big)^2 + 2^k\tau|\Omega|, \tag{4.36}$$

onde $\mu := \vartheta\xi\varrho^{-\frac{n}{2}-2}$. Aplicando o Lema 1.2.5 (ver [25, página 17]) com $y(t) = \int_\Omega u^{2^k}dx$ em (4.36), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2^k}dx &\leq \max\Big\{\int_\Omega (u^0)^{2^k}dx, \mu(2^k)^{\frac{n}{2}+1}\Big(\int_\Omega u^{2^k}dx\Big)^2 + \tau|\Omega|\Big\} \\ &\leq \max\Big\{\int_\Omega (u^0)^{2^k}dx, \mu(2^k)^{\frac{n}{2}+1}m^{2^k}_{k-1} + \tau|\Omega|\Big\}, \end{aligned}\tag{4.37}$$

onde $m_{k-1} := \sup\limits_{t\geq 0}\Big(\int_\Omega u^{2^{k-1}}dx\Big)^{2^{-k+1}}$. Tomando a 2^k-ésima raiz em ambos lados da (4.37) e logo o supremos no lado esquerdo, chegamos à expressão

$$m_k \leq \max\Big\{\|u^0\|_{L^{2^k}(\Omega)}, \Big(\mu(2^k)^{\frac{n}{2}+1}m^{2^k}_{k-1} + \tau|\Omega|\Big)^{\frac{1}{2^k}}\Big\}. \tag{4.38}$$

Como,

$$\|u^0\|_{L^{2^k}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (u^0(x))^{2^k} dx\right)^{\frac{1}{2^k}} \leq \left(\int_\Omega \sup_{x\in\Omega} |(u^0(x))^{2^k}| dx\right)^{\frac{1}{2^k}}$$
$$\leq \sup_{x\in\Omega} |u^0(x)| \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{2^k}} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2^k}} \leq \max\left\{1, |\Omega|\right\} \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} =: \mathcal{K}.$$

Vemos que o primeiro termo da (4.38) é uniformemente estimado para todo $k \in \mathbb{N}$ pelo $\mathcal{K}$. Agora, aumentando o tamanho da μ para o valor

$$\delta := \max\left\{\mu, 1, \tau|\Omega|, \mathcal{K}^2\right\}. \tag{4.39}$$

Aumentando também o valor de m_1 (definido como $\sup_{x\in\Omega} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$) para $x_1 := \max\{m_1, 1\}$. Logo, usando (4.39) em (4.38), temos

$$m_k \leq \max\left\{\mathcal{K}, \left(\delta(2^k)^{\frac{n}{2}+1} m_{k-1}^{2^k} + \delta\right)^{\frac{1}{2^k}}\right\},\ k = 2, 3, \ldots. \tag{4.40}$$

Podemos ver que todos os números m_k com $k = 1, 2, \ldots$ são limitados pelos correspondentes números x_k satisfazendo a recorrência

$$x_k = \max\left\{\mathcal{K}, \left(\delta(2^k)^{\frac{n}{2}+1} x_{k-1}^{2^k} + \delta\right)^{\frac{1}{2^k}}\right\},\ k = 2, 3, \ldots. \tag{4.41}$$

Como $\delta \geq 1$ e $x_1 \geq 1$, podemos ver que a seqüência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente, pois

$$x_{k+1} - x_k = \max\left\{\mathcal{K}, \left(\delta(2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} x_k^{2^{k+1}} + \delta\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right\} - x_k \geq \left(\delta(2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} x_k^{2^{k+1}} + \delta\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} - x_k$$
$$\geq \left((2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} x_k^{2^{k+1}} + 1\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} - x_k \geq \left((2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} x_k - x_k \geq 0. \tag{4.42}$$

Além disso, para $k = 2$ o segundo termo de (4.41) é sempre limitado, pois

$$x_2 = \max\left\{\mathcal{K}, \left(\delta(2)^{n+2} x_1^4 + \delta\right)^{\frac{1}{4}}\right\} \leq \max\left\{\mathcal{K}, \left(2\delta(2)^{n+2} x_1^4\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$$
$$\leq \max\left\{\mathcal{K}, \left(2\delta(2)^{n+2}\right)^{\frac{1}{4}} x_1\right\} \leq \max\left\{\mathcal{K}, \left(2\delta(2)^{n+2}\right)^{\frac{1}{4}} \max\{m_1, 1\}\right\}. \tag{4.43}$$

A sua vez, a seqüência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é dominada pela seqüência $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_k = \left(2\delta(2^k)^{\frac{n}{2}+1}\right)^{\frac{1}{2^k}} z_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

observar que $x_k \geq 1$. Da dominância da sequencia $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sobre a $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e aplicando o limite $k \to \infty$, obtemos

$$x_\infty := \lim_{k\to\infty} x_k \leq z_\infty := \lim_{k\to\infty} z_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq z_1 \prod_{k=2}^{\infty} \big(2\delta(2^k)^{\frac{n}{2}+1}\big)^{\frac{1}{2^k}} \leq z_1\big(\delta(2)^{\frac{n}{2}+2}\big)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \big(2\delta(2^k)^{\frac{n}{2}+1}\big)^{\frac{1}{2^k}} \\
&\leq z_1\big(\delta(2)^{\frac{n}{2}+2}\big)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \big(2\delta\big)^{\frac{1}{2^k}} \Big[\prod_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2^k}}\Big]^{\frac{n}{2}+1} \\
&\leq z_1\big(\delta(2)^{\frac{n}{2}+2}\big)^{-\frac{1}{2}} \big(2\delta\big)^{\lim_{k\to\infty}\big(1-\frac{1}{2^k}\big)} \Big[2^{\lim_{k\to\infty}\big(2-\frac{k+2}{2^k}\big)}\Big]^{\frac{n}{2}+1} \\
&\leq \delta^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3n}{4}+1} \max\Big\{\sup_{t\geq 0} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}, 1\Big\}. \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Finalmente vamos mostrar que $\sup_{t\geq 0} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma$, onde $\gamma > 0$ é uma constante. De fato, multiplicamos a equação do problema (4.1) por u e integramos sobre Ω, assim

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t u dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) u dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} u dx \\
+ \int_\Omega (c(x)+\lambda)u^2 dx + \int_\Omega f(u) u dx. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Agora, usando a integração por parte em (4.45), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} u dx \\
+ \int_\Omega (c(x)+\lambda)u^2 dx + \int_\Omega f(u) u dx. \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

Das condições (4.3) e (4.20) em (4.46), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \leq -\vartheta \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + B_\infty^* \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx \\
+ (C_\infty^* + \lambda)\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega (\zeta u^2 + \tau) dx, \qquad (4.47)
\end{aligned}$$

onde B_∞^* e C_∞^* são definidos anteriormente. Fazendo uso das desigualdades Poincaré (Teorema 1.1.2) e Hölder (Teorema 1.1.1), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx \leq -2C\vartheta\int_\Omega u^2dx + 2B_\infty^*\Big(\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(n\int_\Omega u^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} + 2(C_\infty^*+\lambda)\int_\Omega u^2dx + 2\zeta\int_\Omega u^2dx + 2\tau|\Omega|, \tag{4.48}$$

Da desigualdade de Cauchy (Lema 1.1.1) com $\varepsilon_0 > 0$ em (4.48), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx &\leq 2(-C\vartheta + C_\infty^* + \lambda + \zeta)\int_\Omega u^2dx + 2B_\infty^*\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx \\ &\quad + \frac{n}{2\varepsilon_0}\int_\Omega u^2dx\Big) + 2\tau|\Omega| \\ &\leq 2(-C\vartheta + C_\infty^* + \lambda + \zeta + \frac{nB_0^*}{2\varepsilon_0})\int_\Omega u^2dx + B_\infty^*\varepsilon_0\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx + 2\tau|\Omega|. \end{aligned}\tag{4.49}$$

Novamente aplicando a desigualdade de Poincaré à equação (4.49), temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx \leq 2(-C\vartheta + \frac{CB_\infty^*\varepsilon_0}{2} + C_\infty^* + \lambda + \zeta + \frac{nB_0^*}{\varepsilon_0})\int_\Omega u^2dx + 2\tau|\Omega|. \tag{4.50}$$

Vamos escolher um ε_0 tal que

$$-C\vartheta + \frac{CB_\infty^*\varepsilon_0}{2} + C_\infty^* + \lambda + \zeta + \frac{nB_\infty^*}{\varepsilon_0} \leq -1.$$

Assim, a equação (4.50), resulta

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx \leq -2\int_\Omega u^2dx + 2\tau|\Omega|. \tag{4.51}$$

Usando o Lema 1.2.4. (ver [25, página 17]) em (4.51), obtemos

$$\sup_{t\geq 0}\|u(t,u^0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \max\Big\{\|u^0\|^2_{L^2(\Omega)}, \tau|\Omega|\Big\}.$$

Assim,

$$\sup_{t\geq 0}\|u(t,u^0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max\Big\{\|u^0\|_{L^2(\Omega)}, \tau|\Omega|\Big\}. \tag{4.52}$$

Portanto, usando (4.52) em (4.44), resulta

$$\sup_{t\geq 0}\|u(t,u^0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta^{\frac{3}{2}}2^{\frac{3n}{4}+1}\max\Big\{\|u^0\|_{L^2(\Omega)}, 1\Big\}.$$

□

Como resultado do Lema 4.4.1 e Lema 4.4.2, temos o seguinte

Teorema 4.4.2 *Com as hipóteses do Lema 4.4.2, obtemos*

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < K_0, \tag{4.53}$$

onde $K_0 = K_0(\Omega, n, \zeta, \tau, \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)})$ *é uma constante positiva.*

Observação 4.4.1 *A limitação* (4.53) *significa que o atrator* $\mathcal{A}$ *é limitado em* $L^\infty(\Omega)$*. Isto nos permite cortar a não linearidade de* f *de tal modo que ela seja limitada e com a derivadas limitadas até segunda ordem sem alterar o atrator. De agora em diante vamos assumir que* f*,* f' *e* f'' *são limitadas.*

Capítulo

5

Discretização de Problemas Parabólicos usando o Método de Elementos Finitos

Neste capítulo descreveremos a discretização do domínio Ω usando o método de elementos finitos. Assim, estaremos em condições de poder discretizar o problema (4.4) e estudar a existência do atrator para o novo problema discretizado. Também, neste capítulo estenderemos os resultados obtidos em [31] utilizando a teoria feita em [15].

Sabemos que o operador A é setorial como foi mostrado anteriormente (Lema 4.1.2), logo pode ser associado com uma forma sesquilinear $\sigma : X^{1/2} \times X^{1/2} \to \mathbb{C}$, tal que

$$|\sigma(u,v)| \leqslant c_1 \|u\|_{X^{1/2}} \|v\|_{X^{1/2}}, \quad u, v \in X^{1/2} \tag{5.1}$$

$$\operatorname{Re}\sigma(u,u) \geqslant c_2 \|u\|^2_{X^{1/2}} - \delta_1 \|u\|^2_X, \quad u \in X^{1/2} \tag{5.2}$$

$$\sigma(u,v) = \langle Au, v\rangle_X, \quad u \in D(A),\ v \in X^{1/2}, \tag{5.3}$$

onde as constantes c_1, $c_2 = \vartheta/2$ são positivas e $\delta_1 < \infty$ (Ver [15, Seção 5.6]). Em particular, pela propriedades do operador A ser elíptico, podemos escolher $\delta_1 = 0$. Assim,

$$\operatorname{Re}\sigma(u,u) \geqslant c_2 \|u\|^2_{X^{1/2}}. \tag{5.4}$$

Como A é um operador setorial, da Proposição 1.3.1 segue que existem constantes positivas θ_1 $(0 < \theta_1 < \pi/2)$ e M_1 com as seguintes propriedades:

$$\mathcal{S}_{0,\theta_1} = \{z \in \mathbb{C}/\theta_1 \leq |\arg(z)| \leq \pi, z \neq 0\} \subset \rho(A) \tag{5.5}$$

e

$$\|(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M_1}{|z|}, \text{ para todo } z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}. \tag{5.6}$$

Além disso, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = a, \end{cases} \tag{5.7}$$

é dada por $u(t) = e^{-tA}a$, $t \geq 0$, onde $\{e^{-tA} : t \geq 0\}$ é o semigrupo analítico gerado por $-A$ (ver Teorema 1.3.1). Também do Teorema 1.3.2, vemos que

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{-zt}(z - A)^{-1} dz, \tag{5.8}$$

onde Γ_1 é a fronteira orientada positivamente, percorrendo de $\infty e^{-i\theta_1}$ a $\infty e^{i\theta_1}$, do setor

$$\Sigma_1 = \{z \in \mathbb{C} / |\arg(z)| < \theta_1\}. \tag{5.9}$$

De (5.6) e (5.8) segue que

$$\begin{aligned} \|A(z - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} &= \big\| \big((-z + A) + z\big)(z - A)^{-1} \big\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \|I\|_{\mathscr{L}(X)} + \|z(z - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\leq 1 + M_1, \quad \forall z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1} \end{aligned} \tag{5.10}$$

e também o operador A satisfaz a Proposição 1.3.5.

Daqui em diante, vamos supor o domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem uma família $\{\mathcal{T}^h\}_{h \in (0,1]}$ de subdivisões quase-uniformes satisfazendo as condições do Teorema 2.2.2.

A discretização do elemento finito é considerada no espaço $X_h^{1/2}$, dado por

$$X_h^{1/2} = \{\mathcal{I}^h v : v \in C^l(\overline{\Omega}), v\big|_{\partial\Omega} = 0\} \subset X^{1/2} \cap C(\Omega), \tag{5.11}$$

onde temos usado o caso $r = 0$ em (2.23). Sabemos que, o espaço $X_h^{1/2}$ tem dimensão finita pelo visto no Capítulo 2.

Nesse contexto, nossa aproximação $A_h : D(A_h) = X_h^{1/2} \to X_h^{1/2} = R(A_h)$ de A pelo método do elemento finito é definida por

$$\langle A_h \phi_h, \psi_h \rangle_X = \sigma(\phi_h, \psi_h), \quad \phi_h, \psi_h \in X_h^{1/2}. \tag{5.12}$$

Em outras palavras, A_h é o operador associado com a forma sesquilinear σ_h a qual é a restrição de σ a $X_h^{1/2} \times X_h^{1/2}$.

Seja $u_h : [0, \infty) \to X_h^{1/2}$ a solução de

$$\begin{cases} \langle \frac{d}{dt} u_h, \phi_h \rangle_X + \sigma(u_h, \phi_h) = 0, \quad \phi_h \in X_h^{1/2} \\ u_h(0) = a_h. \end{cases} \tag{5.13}$$

Então podemos escrever ao invés de (5.13) o seguinte problema

$$\frac{d}{dt} u_h + A_h u_h = 0, \quad u_h(0) = a_h \tag{5.14}$$

e, temos

$$u_h(t) = e^{-tA_h} a_h.$$

Observação 5.0.2 *A desigualdade* (5.4) *implica que* $\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle_X \geq 0$, *com* $u \in D(A)$ *e, daí* A *é acretivo. Conseqüentemente,* e^{-tA} *é uma contração:* $\|e^{-tA}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1$, *para* $t > 0$. *Isto é também o caso com* e^{-tA_h} *(Teorema Lummer-Phillips).*

Definição 5.0.1 *A* ***projeção ortogonal*** $P_h : X \to X_h^{1/2}$ *com relação ao produto interno de* X *é definida por*

$$\langle P_h g, v\rangle_X = \langle g, v\rangle_X, \ \forall v \in X_h^{1/2}. \tag{5.15}$$

Lema 5.0.3 *A projeção ortogonal* $P_h : X \to X_h^{1/2}$, *satisfaz*

$$\|P_h f\|_X \leq \|f\|_X, \forall h \in (0, 1]. \tag{5.16}$$

Prova. Seja $f \in X$ qualquer. Devido a (5.15), temos

$$\langle P_h f, \chi\rangle_X = \langle f, \chi\rangle_X, \ \forall \chi \in X_h^{1/2}.$$

Definamos que $\chi := P_h f \in X_h^{1/2}$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|P_h f\|_X^2 = |\langle P_h f, P_h f\rangle_X| = |\langle f, P_h f\rangle_X| \leq \|f\|_X \|P_h f\|_X, \forall F \in X.$$

Portanto, $\|P_h f\|_X \leq \|f\|_X$. □

Lema 5.0.4 *Se* (5.1) *e* (5.4) *valem, então*

$$\|P_h v - v\|_X \leq C h^2 |v|_{H^2(\Omega)}, \forall v \in X. \tag{5.17}$$

Prova. Dado $v \in X^1$, obtemos

$$\|P_h v - v\|_X^2 \leq |\langle P_h v - v, P_h v - v\rangle_X| \leq \|\chi_h - v\|_X \|P_h v - v\|_X,$$

onde $\chi_h = P_h v \in X_h^{1/2}$. Assim,

$$\|P_h v - v\|_X \leq \min_{\chi_h \in X_h^{1/2}} \|\chi_h - v\|_X.$$

Logo, usando (2.35) com $m = 2 = p$ e $s = 0$ e, a imersão de X^1 em X o resultado segue. □

Definição 5.0.2 *A aplicação $\tilde{P}_h : X^{1/2} \to X_h^{1/2}$ definida por*

$$\sigma(\tilde{P}_h v, \chi) = \sigma(v, \chi), \ \forall \chi \in X_h^{1/2}. \tag{5.18}$$

é chamada de ***Projeção de Ritz ou Projeção Elíptica ou Projeção Ortogonal*** *em $X^{1/2}$.*

Lema 5.0.5 *A aplicação $\tilde{P}_h : X^{1/2} \to X_h^{1/2}$ está bem definida, isto é, para todo $v \in X^{1/2}$, existe uma única $v_h \in X_h^{1/2}$ tal que*

$$\sigma(v - v_h, \chi) = 0, \ \forall \chi \in X_h^{1/2}. \tag{5.19}$$

Além disso,

$$\|\tilde{P}_h v\|_{X^{1/2}} \leq C \|v\|_{X^{1/2}}, \ \forall v \in X^{1/2}. \tag{5.20}$$

Prova. Seja $v \in X^{1/2}$ qualquer. Definamos $g(w) := \sigma(v, w)$ com $g \in (X_h^{1/2})^*$. Das propriedade (5.1), (5.4) e $X_h^{1/2} \subset X^{1/2}$, a afirmação decorre do teorema de Lax-Milgram. Também,

$$c_2 \|\tilde{P}_h v\|_{X^{1/2}}^2 \leq \operatorname{Re} \sigma(\tilde{P}_h v, \tilde{P}_h v) \leq |\sigma(\tilde{P}_h v, \tilde{P}_h v)| = |\sigma(v, \tilde{P}_h v)| \leq c_1 \|v\|_{X^{1/2}} \|\tilde{P}_h v\|_{X^{1/2}}.$$

Portanto, $\|\tilde{P}_h v\|_{X^{1/2}} \leq C \|v\|_{X^{1/2}}$, onde $C = c_1/c_2$. □

Lema 5.0.6 *Se* (5.1) *e* (5.4) *valem, então*

$$\|P_h v - v\|_{X^{1/2}} \leq \frac{c_1}{c_2} \inf_{v_h \in X^{1/2}} \|v_h - v\|_{X^{1/2}}, \forall v \in X. \tag{5.21}$$

Prova. Primeiro lembremos da definição do operador projeção $P_h : X \to X^{1/2}$ que $A_h u_h = P_h v$. Agora, de (5.1) e (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} c_2 \|P_h v - v\|_{X^{1/2}}^2 &\leq \operatorname{Re} \sigma(P_h v - v, P_h v - v) = \operatorname{Re} \sigma(P_h v - v, v_h - v) + \operatorname{Re} \sigma(P_h v - v, 0) \\ &\leq c_1 \|P_h v - v\|_{X^{1/2}} \|v_h - v\|_{X^{1/2}}, \end{aligned}$$

onde $v_h := A_h u_h \in X_h^{1/2}$. Logo, o resultado segue da última desigualdade. □

Lema 5.0.7 *Se* (5.1) *e* (5.4) *valem, então*

$$\|P_h v - v\|_{X^{1/2}} \leq \frac{c_1 c_I}{c_2} h|v|_{H^2(\Omega)}, \forall v \in X. \tag{5.22}$$

Prova. Usando (5.21) e, (2.35) com $s = 1$ e $m = 2 = p$ para $v \in X^1$, resulta

$$\|P_h v - v\|_{X^{1/2}} \leq \frac{c_1}{c_2} \inf_{v_h \in X_h^{1/2}} \|v_h - v\|_{X^{1/2}} \leq \frac{c_1}{c_2} \|\mathcal{I}^h v - v\|_{X^{1/2}} \leq \frac{c_1 c_I}{c_2} h|v|_{H^2(\Omega)},$$

onde c_I é a constante positiva da (2.35). Devido que X^1 é denso em X, a desigualdade acima pode ser estendida para X. □

Lema 5.0.8 *Existe uma relação entre* P_h *e* $\tilde{P}_h$ *dada por*

$$A_h \tilde{P}_h = P_h A. \tag{5.23}$$

Prova. Dado $v \in X^{1/2}$, segue-se

$$\langle A_h \tilde{P}_h v, \chi \rangle_X = \sigma(\tilde{P}_h v, \chi) = \sigma(v, \chi) = \langle Av, \chi \rangle_X = \langle P_h Av, \chi \rangle_X,$$

para todo $\chi \in X_h^{1/2}$. Disto, o resultado segue. □

Se $\hat{u}^h := \mathcal{I}^h u$ representa a função em $X_h^{1/2}$ a qual coincide com uma função dada u em todo ponto nodal, então, para $u \in H^2(\Omega)$, usando (2.35), temos

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}^h\|_X &\leqslant Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|u - \hat{u}^h\|_{X^{1/2}} &\leqslant Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

A projeção $\tilde{P}_h : X^{1/2} \to X_h^{1/2}$ dada por $\tilde{P}_h u = \tilde{u}^h$ com relação à norma do produto interno de $H^1(\Omega)$, temos

$$\|u - \tilde{u}^h\|_X \leqslant Ch \|u\|_{X^{1/2}}, \quad u \in X^{1/2}, \tag{5.25}$$

$$\|u - \tilde{u}^h\|_{X^{1/2}} \leqslant Ch \|u\|_{X^1}, \quad u \in X^1, \tag{5.26}$$

$$\|u - \tilde{u}^h\|_X \leqslant Ch^2 \|u\|_{X^1}, \quad u \in X^1. \tag{5.27}$$

• Vamos mostrar as desigualdades (5.25), (5.26) e (5.27). Denotando por $e = u - \tilde{u}^h$ e usando (5.19), temos

$$(e, \varphi_h)_{X^{1/2}} = 0, \quad \forall \varphi_h \in X_h^{1/2}. \tag{5.28}$$

Dai, tomando $\varphi_h = \tilde{u}^h - \hat{u}^h$, usando (5.28), temos

$$\begin{aligned}\|e\|^2_{X^{1/2}} =&(e,e)_{X^{1/2}} + 0 = (e, e+\varphi_h)_{X^{1/2}} = (e, u-\hat{u}^h)_{X^{1/2}} \\ &\leq \|e\|_{X^{1/2}}\|u-\hat{u}^h\|_{X^{1/2}} \leq Ch\|e\|_{X^{1/2}}\|u\|_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

o qual implica (5.26). Sabemos que

$$\|e\|_X = \sup_{0\neq\phi\in X} \frac{|(e,\phi)_X|}{\|\phi\|_X} \tag{5.29}$$

Sabemos da Seção 4.3 que dado $\phi \in X$, existe um $\psi \in X^{1/2}$, tal que

$$\operatorname{Re}\sigma(v,\psi) = (v,\phi)_X, \quad \forall v \in X^{1/2}. \tag{5.30}$$

Além disso, $\psi \in H^2(\Omega)$ e

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\phi\|_X. \tag{5.31}$$

Agora, substituindo (5.30) e (5.31) em (5.29), obtemos

$$\|e\|_X \leq C \sup_{0\neq\psi\in X^1} \frac{|\operatorname{Re}\sigma(e,\psi)|}{\|\psi\|_{H^2(\Omega)}}. \tag{5.32}$$

Mas, usando novamente a Ortogonalidade de Galerkin, obtemos

$$\operatorname{Re}\sigma(e,\psi) = \operatorname{Re}\sigma(e,\psi) - \operatorname{Re}\sigma(e,\psi_h) = \operatorname{Re}\sigma(e,\psi-\psi_h), \quad \forall\psi_h \in X_h^{1/2}. \tag{5.33}$$

Da continuidade de σ e (5.33), resulta

$$|\operatorname{Re}\sigma(e,\psi)| = |\operatorname{Re}\sigma(e,\psi-\psi_h)| \leq c_1\|e\|_{X^{1/2}}\|\psi-\psi_h\|_{X^{1/2}}. \tag{5.34}$$

Escolhendo ψ_h satisfazendo a desigualdade (5.26), temos

$$\|\psi-\psi_h\|_{X^{1/2}} \leq \tilde{C}h\|\psi\|_{H^2(\Omega)}. \tag{5.35}$$

Então, de (5.32), (5.34) e (5.35), obtemos

$$\|e\|_X \leq C \sup_{0\neq\psi\in X^1} \frac{c_1\|e\|_{X^{1/2}}\|\psi-\psi_h\|_{X^{1/2}}}{\|\psi\|_{H^2(\Omega)}} \leq Cc_1 \sup_{0\neq\psi\in X^1} \frac{\|e\|_{X^{1/2}}\tilde{C}h\|\psi\|_{H^2(\Omega)}}{\|\psi\|_{H^2(\Omega)}}.$$

Logo,

$$\|e\|_X \leq \bar{C}h\|e\|_{X^{1/2}}. \tag{5.36}$$

Como, $\|e\|_{X^{1/2}} \leq \|u\|_{X^{1/2}}$ pela definição de $\tilde{u}^h$, (5.36) obtemos (5.25) Finalmente, substituindo (5.26) em (5.36) tem-se (5.27).

Lema 5.0.9 *A projeção ortogonal $P_h : X \to X_h^{1/2}$, satisfaz*

$$\|P_h v\|_{X^{1/2}} \leq C\|v\|_{X^{1/2}}, \, \forall h \in (0,1] \; e \; v \in X^{1/2}, \tag{5.37}$$

se a subdivisão $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in(0,1]}$ é quase-uniforme.

Prova. Do Lema 5.0.3 sabemos que $\|P_h f\|_X \leq \|f\|_X$, temos que simplesmente mostrar

$$\|\nabla(P_h - I)v\|_X \leq \bar{C}\|v\|_{X^{1/2}}, \tag{5.38}$$

para todo $v \in X^{1/2}$. Pois,

$$\begin{aligned}\|P_h v\|^2_{X^{1/2}} = \|P_h v\|^2_X + \|\nabla P_h v\|^2_X &\leq \|P_h v\|^2_X + \|\nabla(P_h - I)v\|^2_X + \|\nabla v\|^2_X \\ &\leq \|v\|^2_X + \bar{C}^2\|v\|^2_{X^{1/2}} + \|\nabla v\|^2_X \leq (1+\bar{C}^2)\|v\|^2_{X^{1/2}}\end{aligned}$$

e o resultado segue.

Agora, mostraremos (5.38). Sabemos que $P_h|_{X_h^{1/2}} = I_h$, denotando $\chi_h := \tilde{P}_h v \in X_h^{1/2}$ e usando o Teorema 2.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla(P_h - I)v\|_X = \|\nabla(P_h - I)(v - \chi_h)\|_X &\leq \|\nabla P_h(v-\chi_h)\|_X + \|\nabla(v-\chi_h)\|_X \\ &\overset{(2.2.3)}{\leq} Ch^{-1}\|P_h(v-\chi_h)\|_X + \|v\|_{X^{1/2}} + \|\chi_h\|_{X^{1/2}} \\ &\leq Ch^{-1}\|v-\chi_h\|_X + \|v\|_{X^{1/2}} + \|v\|_{X^{1/2}} \\ &\overset{(5.25)}{\leq} C\|v\|_{X^{1/2}} + 2\|v\|_{X^{1/2}} = C\|v\|_{X^{1/2}},\end{aligned}$$

para todo $v \in X^{1/2}$. □

5.1 Aproximação do resolvente

Em [31] foram provados os seguintes resultados, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

Teorema 5.1.1 *Existe uma constante $C > 0$ e um ângulo agudo θ_1 tal que para qualquer $a \in X$ e $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1} = \{z \in \mathbb{C} : \theta \leqslant |\arg(z)| \leqslant \pi\}$, temos*

$$\begin{aligned}\|(z-A)^{-1}a - (z-A_h)^{-1}P_h a\|_{X^{1/2}} &\leqslant Ch\|a\|_X, \\ \|(z-A)^{-1}a - (z-A_h)^{-1}P_h a\|_X &\leqslant Ch^2\|a\|_X, \\ \|(z-A)^{-1}a - (z-A_h)^{-1}P_h a\|_X &\leqslant Ch|z|^{-1/2}\|a\|_X.\end{aligned}$$

Teorema 5.1.2 *Se $a \in X^{1/2}$, temos*

$$\begin{aligned}\|e^{-tA}a - e^{-tA_h}P_h a\|_{X^{1/2}} &\leqslant Ch\, t^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}},\\ \|e^{-tA}a - e^{-tA_h}P_h a\|_{X} &\leqslant Ch\|a\|_{X^{1/2}},\\ \|e^{-tA}a - e^{-tA_h}P_h a\|_{X} &\leqslant Ch^2 t^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}.\end{aligned}$$

Vamos a estender estes Teoremas quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Primeiro vamos ver alguns resultados referentes à imagem numérica da forma sesquilinear σ.

Lema 5.1.1 *Existem constantes positivas δ_0 and γ_0, tal que*

$$|\operatorname{Im}\sigma(\varphi,\varphi)| \leq \delta_0\big(\operatorname{Re}\sigma(\varphi,\varphi) - \gamma_0\|\varphi\|^2_{X^{1/2}}\big), \tag{5.39}$$

para todo $\varphi \in X^{1/2}$.

Prova. Da continuidade (5.1), segue que

$$|\operatorname{Im}\sigma(\varphi,\varphi)| \leq |\sigma(\varphi,\varphi)| \leq c_1\|\varphi\|^2_{X^{1/2}}. \tag{5.40}$$

Da desigualdade (5.2), temos

$$c_1\|\varphi\|^2_{X^{1/2}} \leq \frac{2c_1}{c_2}\operatorname{Re}\sigma(\varphi,\varphi) - c_1\|\varphi\|^2_{X^{1/2}}. \tag{5.41}$$

De (5.40) e (5.41), obtemos

$$|\operatorname{Im}\sigma(\varphi,\varphi)| \leq \frac{2c_1}{c_2}(\operatorname{Re}\sigma(\varphi,\varphi) - \frac{c_2}{2}\|\varphi\|^2_{X^{1/2}}). \tag{5.42}$$

Assim, a desigualdade (5.39) resulta, se denotamos

$$\delta_0 = \frac{2c_1}{c_2} \quad \text{e} \quad \gamma_0 = \frac{c_2}{2}, \tag{5.43}$$

e aplicamos na desigualdade (5.42). □

De agora em diante, δ_0 e γ_0 serão denotados como em (5.43) e, chamamos

$$\theta_0 = \arctan\delta_0 \quad (0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}), \tag{5.44}$$

sempre que, escolhemos θ_1 satisfazendo $\theta_0 < \theta_1 < \pi/2$ e definimos os setores $\mathcal{S}_{0,\theta_1}$, Σ_1 por (5.5) e (5.9) com este θ_1, conforme for. Γ_1 denota a fronteira orientada positivamente de Σ_1.

Lema 5.1.2 *Existe uma constante positiva δ_1, tal que*

$$|z|\|\varphi\|_X^2 + \|\varphi\|_{X^{1/2}}^2 \leq \delta_1 \big|z\|\varphi\|_X^2 - \sigma(\varphi,\varphi)\big|, \tag{5.45}$$

para todo $\varphi \in X^{1/2}$ e $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$.

Prova. Se $\varphi = 0$ a desigualdade (5.45) é satisfeita imediatamente. Vamos supor que $\varphi \neq 0$ e definamos

$$\mu(\varphi) = \gamma_0\|\varphi\|_{X^{1/2}}^2/\|\varphi\|_X^2 \quad \text{e} \quad \zeta(\varphi) = \sigma(\varphi,\varphi)/\|\varphi\|_X^2.$$

Consideremos o setor Σ_φ com vértice em $\mu(\varphi)$ dado por $\Sigma_\varphi = \{z : |\arg(z-\mu(\varphi))| \leq \theta_0\}$. Observemos que

$$\zeta(\varphi) - \mu(\varphi) = \frac{\sigma(\varphi,\varphi) - \gamma_0\|\varphi\|_{X^{1/2}}^2}{\|\varphi\|_X^2}. \tag{5.46}$$

De (5.46), segue que

$$\operatorname{Re}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big) = \frac{\operatorname{Re}\sigma(\varphi,\varphi) - \gamma_0\|\varphi\|_{X^{1/2}}^2}{\|\varphi\|_X^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big) = \frac{\operatorname{Im}\sigma(\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|_X^2}. \tag{5.47}$$

Agora, fazendo uso de (5.47) e (5.39), temos

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big) &\leq \big|\operatorname{Im}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big)\big| = \frac{|\operatorname{Im}\sigma(\varphi,\varphi)|}{\|\varphi\|_X^2} \leq \delta_0\frac{\operatorname{Re}\sigma(\varphi,\varphi) - \gamma_0\|\varphi\|_{X^{1/2}}^2}{\|\varphi\|_X^2} \\ &= \delta_0 \operatorname{Re}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big).\end{aligned}$$

Disto, resulta

$$\big|\arg\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big)\big| = \left|\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big)}{\operatorname{Re}\big(\zeta(\varphi)-\mu(\varphi)\big)}\right)\right| \leq \arctan\delta_0 = \theta_0. \tag{5.48}$$

Assim, $\zeta(\varphi) \in \Sigma_\varphi$. Por outro lado, na Figura 5.1, podemos ver

$$d(z,\Sigma_\varphi) = \inf\{|z-\xi| : \xi \in \Sigma_\varphi\} \geq d(z,\mu(\varphi)) = |z|\sin(\theta_1-\theta_0) + \mu(\varphi)\sin\theta_0, \tag{5.49}$$

onde $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$. Assim, colocando $\delta_1 = (\min\{\sin(\theta_1-\theta_0), \gamma_0\sin\theta_0\})^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}|z\|\varphi\|_X^2 - \sigma(\varphi,\varphi)| &= \|\varphi\|_X^2\big|z-\zeta(\varphi)\big| \geq \|\varphi\|_X^2 d(z,\Sigma_\varphi) \\ &\geq \|\varphi\|_X^2|z|\sin(\theta_1-\theta_0) + \|\varphi\|_X^2\mu(\varphi)\sin\theta_0 \\ &\geq \sin(\theta_1-\theta_0)\|\varphi\|_X^2|z| + \delta_0\sin\theta_0\|\varphi\|_{X^{1/2}}^2 \geq \frac{1}{\delta_1}\big(|z|\|\varphi\|_X^2 + \|\varphi\|_{X^{1/2}}^2\big),\end{aligned}$$

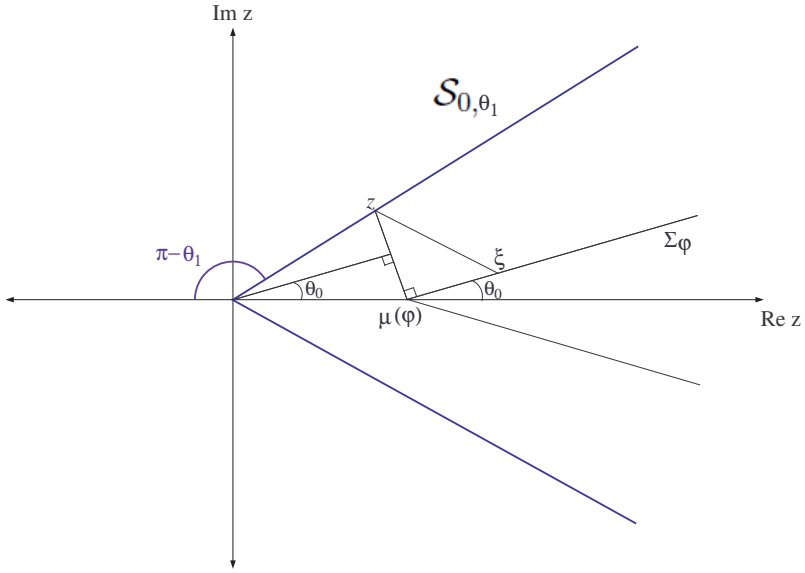


Figura 5.1: $\mathcal{S}_{0,\theta_1}$ e Σ_φ.

isto prova (5.45). □

Corolário 5.1.1 *Para o operador A_h, dado $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$ vale*

$$|z|\|\varphi_h\|_X^2 + \|\varphi_h\|_{X^{1/2}}^2 \leq \delta_1 \big|\langle (z - A_h)\varphi_h, \varphi_h\rangle_X\big|, \quad \varphi_h \in X_h^{1/2}. \tag{5.50}$$

Além disso, $\mathcal{S}_{0,\theta_1} \subset \rho(A_h)$ = o conjunto resolvente de A_h, e as seguintes desigualdades são válidas

$$\|(z - A_h)^{-1} f_h\|_X \leq \delta_1 \|f_h\|_X / |z|, \tag{5.51}$$

$$\|(z - A_h)^{-1} f_h\|_{X^{1/2}} \leq \delta_1 \|f_h\|_X / |z|^{1/2}, \tag{5.52}$$

$$\|A_h(z - A_h)^{-1} f_h\|_X \leq (1 + \delta_1)\|f_h\|_X, \tag{5.53}$$

para todo $f_h \in X_h^{1/2}$ e $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$.

Prova. De (5.12) segue que

$$z\|\varphi_h\|_X^2 - \sigma(\varphi_h, \varphi_h) = z\langle \varphi_h, \varphi_h\rangle_X - \langle A_h\varphi_h, \varphi_h\rangle_X = \langle (z - A_h)\varphi_h, \varphi_h\rangle_X. \tag{5.54}$$

Substituindo (5.73) em (5.45), obtemos (5.50).

Dados $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$ e $f_h \in X_h^{1/2}$, existe $w_h \in D(A_h)$ dado por $w_h = (z - A_h)^{-1} f_h$. Pondo $\varphi_h = w_h$ em (5.50), temos

$$|z|\|w_h\|_X^2 + \|w_h\|_{X^{1/2}}^2 \leq \delta_1 |\langle f_h, w_h \rangle_X| \leq \delta_1 \|f_h\|_X \|w_h\|_X. \tag{5.55}$$

Logo,

$$\|w_h\|_X^2 \leq \|w_h\|_{X^{1/2}}^2 \leq \delta_1 \|f_h\|_X \|w_h\|_X.$$

Daí, $\|w_h\|_X \leq \delta_1 \|f_h\|_X$. Assim, $z \in \rho(A_h)$.

De (5.55), seguem

$$\begin{aligned}
&|z|\|w_h\|_X \leq \delta_1 \|f_h\|_X, \\
&\|w_h\|_{X^{1/2}}^2 \leq \delta_1 \|f_h\|_X \|w_h\|_X \leq \delta_1^2 \|f_h\|_X^2 / |z| \\
&\|A_h w_h\|_X = \|z w_h - f_h\|_X \leq |z|\|w_h\|_X + \|f_h\|_X \leq (\delta_1 + 1)\|f_h\|_X,
\end{aligned}$$

disto segue o Corolário. □

Teorema 5.1.3 *O operador linear $A_h : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$ é setorial para todo $h \in (0, 1]$.*

Prova. Primeiramente, o operador A_h é densamente definido, pois $D(A_h) = X_h^{1/2}$. Dada uma seqüência $\{\varphi_h^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_h^{1/2}$ com $\varphi_h^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_h$ e $A_h\varphi_h^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_h$. Usando (5.12), temos

$$\langle A_h\varphi_h^n, \varphi_h^n \rangle_X = \sigma(\varphi_h^n, \varphi_h^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma(\varphi_h, \varphi_h) = \langle A_h\varphi_h, \varphi_h \rangle_X.$$

Logo, A_h é fechado, já que $y_h = A_h\varphi_h$. Finalmente, usando o Corolário 5.1.1 o operador A_h é setorial. □

Observação 5.1.1 *De* (5.45) *segue que para todo $f \in X^{1/2}$ e $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$ valem*

$$\|(z - A)^{-1} f\|_X \leq \delta_1 \|f\|_X / |z|, \tag{5.56}$$

$$\|(z - A)^{-1} f\|_{X^{1/2}} \leq \delta_1 \|f\|_X / |z|^{1/2}, \tag{5.57}$$

$$\|A(z - A)^{-1} f\|_X \leq (1 + \delta_1)\|f\|_X, \tag{5.58}$$

onde A é o operador setorial. Também do Teorema 1.3.4, (5.56) *e* (5.58)*, obtemos*

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha (z - A)^{-1} f\|_X &\leq C \|A(z - A)^{-1} f\|_X^\alpha \|(z - A)^{-1} f\|_X^{1-\alpha} \\
&\leq C(1 + \delta_1)^\alpha \frac{\delta_1^{1-\alpha}}{|z|^{1-\alpha}} \|f\|_X \leq C_\alpha |z|^{-1+\alpha} \|f\|_X,
\end{aligned} \tag{5.59}$$

onde $C_\alpha := C(1 + \delta_1)^\alpha \delta_1^{1-\alpha}$, para $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Além disso, (5.59) *é válida com a mesma constante* C_α *quando substituímos* A *por* A_h.

Observação 5.1.2 *Como* $0 \in \rho(A)$ *segue-se que* $z \in \rho(A)$ *para* $|z| < 1/M_0$ *onde* $M_0 = \|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}$ *(pelo Teorema 1.4.3), e que* $\|(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 2M_0$ *para* $|z| \leq 1/(2M_0)$. *Daí, a limitação em* (5.6) *poderia ser escrita como*

$$\|(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{1+|z|},\ \forall z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}\ e\ \alpha \in [0,1]. \tag{5.60}$$

Também,

$$\|(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})} \leq \frac{M}{1+|z|^{1/2}},\ \forall z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}\ e\ \alpha \in [0,1]. \tag{5.61}$$

Usando a interpolação de (5.60), (5.61) *e* (5.59), *segue-se*

$$\|(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{\alpha})} \leq \frac{M}{1+|z|^{1-\alpha}},\ \forall z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}\ e\ \alpha \in [0,1]. \tag{5.62}$$

Além disso, (5.62) *continua válida com a mesma constante* M *quando substituímos* A *por* A_h.

O seguinte resultado é a generalização do Teorema 5.1.1.

Teorema 5.1.4 *Existe uma constante* $C > 0$ *e um ângulo agudo* θ_1 *tal que para qualquer* $f \in X$ *e* $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, *temos*

$$\|e_h(z)\|_{X^{1/2}} \leqslant Ch\|f\|_X, \tag{5.63}$$

$$\|e_h(z)\|_X \leqslant Ch^2\|f\|_X, \tag{5.64}$$

$$\|e_h(z)\|_X \leqslant Ch|z|^{-1/2}\|f\|_X, \tag{5.65}$$

onde $e_h(z) = (z-A)^{-1}f - (z-A_h)^{-1}P_hf$.

Demonstração. Para $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$ e $f \in X$, definimos

$$w = (z-A)^{-1}f \quad \text{e} \quad w_h = (z-A_h)^{-1}P_hf,$$

onde $w \in D(A)$ e $w_h \in D(A_h)$. Pela definição e (5.15), estes elementos w e w_h, satisfazem

$$z\langle w, \varphi\rangle_X - \sigma(w,\varphi) = \langle f, \varphi\rangle_X,\ \text{para}\ \varphi \in X^{1/2},$$

e

$$z\langle w_h, \varphi_h\rangle_X - \sigma(w_h,\varphi_h) = \langle f, \varphi_h\rangle_X,\ \text{para}\ \varphi_h \in X_h^{1/2},$$

respectivamente. Podemos ver que $e_h(z) = w(z) - w_h(z)$ e usando as duas igualdades anteriores, obtemos

$$z\langle e_h, \varphi_h\rangle_X - \sigma(e_h, \varphi_h) = 0,\ \forall \varphi_h \in X_h^{1/2}. \tag{5.66}$$

Assim, usando (5.45) e (5.66) temos que para qualquer $\varphi_h \in X_h^{1/2} \subset X^{1/2}$

$$\begin{aligned}
|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 &\leq \delta_1|z\|e_h\|_X^2 - \sigma(e_h, e_h)| \\
&= \delta_1|z\langle e_h, e_h\rangle_X - \sigma(e_h, e_h) + z\langle e_h, \varphi_h\rangle_X - \sigma(e_h, \varphi_h)| \\
&= \delta_1|z\langle e_h, e_h + \varphi_h\rangle_X - \sigma(e_h, e_h + \varphi_h)|.
\end{aligned}$$

Tomando $\varphi_h = w_h - \tilde{w}^h$ e usando (5.25) e (5.26), obtemos

$$\begin{aligned}
|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 &\leq \delta_1|z\langle e_h, w - \tilde{w}^h\rangle_X - \sigma(e_h, w - \tilde{w}^h)| \\
&\leq \delta_1\big(|z|\|e_h\|_X\|w - \tilde{w}^h\|_X + c_1\|e_h\|_{X^{1/2}}\|w - \tilde{w}^h\|_{X^{1/2}}\big) \qquad (5.67) \\
&\leq \delta_1 Ch|z|\|e_h\|_X\|w\|_{X^{1/2}} + \delta_1 c_1 Ch\|e_h\|_{X^{1/2}}\|w\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq C_3 h\big(|z|\|e_h\|_X\|w\|_{X^{1/2}} + \|e_h\|_{X^{1/2}}\|w\|_{H^2(\Omega)}\big), \qquad (5.68)
\end{aligned}$$

onde $C_3 := \max\{C\delta_1, C\delta_1 c_1\}$. Por outro lado, de (5.4) e (5.3), temos que $\ker(A) = 0$. Logo, usando a desigualdade (1.3.26) de [58, página 14] e (5.56), obtemos

$$\begin{aligned}
\|w\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_4\|Aw\|_X = C_4\|\big(-(z - A) + z\big)(z - A)^{-1}f\|_X \\
&\leq C_4\|f\|_X + C_4|z|\|(z - A)^{-1}f\|_X \leq C_5\|f\|_X, \qquad (5.69)
\end{aligned}$$

onde $C_5 := \max\{C_4, C_4\delta_1\}$. Fazendo uso de (5.57) e (5.69) em (5.68), obtemos

$$\begin{aligned}
|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 &\leq C_3 h\big(\delta_1|z|^{1/2}\|e_h\|_X\|f\|_X + C_5\|e_h\|_{X^{1/2}}\|f\|_X\big) \\
&\leq C_6 h\|f\|_X\big(|z|^{1/2}\|e_h\|_X + \|e_h\|_{X^{1/2}}\big), \qquad (5.70)
\end{aligned}$$

onde $C_6 := \max\{C_3\delta_1, C_3C_5\}$. Assim, de (5.70), temos

$$\begin{aligned}
|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 &\leq C_6 h\|f\|_X\big(|z|^{1/2}\|e_h + \varphi_h\|_X + \|e_h + \varphi_h\|_{X^{1/2}}\big) \\
&\leq C_6 h\|f\|_X\big(|z|^{1/2}\|w - \tilde{w}^h\|_X + \|w - \tilde{w}^h\|_{X^{1/2}}\big) \\
&\leq C_6 h\|f\|_X\big(|z|^{1/2}Ch\|w\|_{X^{1/2}} + Ch\|w\|_{H^2(\Omega)}\big) \\
&\leq C_6 Ch^2\|f\|_X\big(|z|^{1/2}\|w\|_{X^{1/2}} + \|w\|_{H^2(\Omega)}\big) \\
&\leq C_6 Ch^2\|f\|_X\big(\delta_1\|f\|_X + C_5\|f\|_X\big) \leq C_7 h^2\|f\|_X^2, \qquad (5.71)
\end{aligned}$$

onde $C_7 := \max\{C_6C\delta_1, C_6CC_5\}$. De (5.71), segue facilmente (5.63) e (5.65).

Resta mostrar (5.64), seja A^* o operador adjunto de A. Notemos que A^* é o operador acretivo associado com a forma sesquilinear $\sigma^*(u,v) = \overline{\sigma(v,u)}$ (ver [37], página 203). Sabemos que $D(A^*) = X^{1/2} \cap H^2(\Omega) = D(A)$. Dado $g \in X$ e $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, definamos

$$v = (z - A^*)^{-1} g \quad \text{e} \quad v_h = (z - A_h^*)^{-1} P_h g.$$

Aplicando (5.63) e (5.65) e substituindo A e A_h por A^* e A_h^*, respectivamente. Obtemos

$$\begin{aligned} |(e_h, g)| &= |z(e_h, v) - \sigma(e_h, v)| = |z(e_h, v - v_h) - \sigma(e_h, v - v_h)| \\ &\leq C(|z|\|e_h\|_X \|v - v_h\|_X + \|e_h\|_{X^{1/2}} \|v - v_h\|_{X^{1/2}}) \\ &\leq C(h|z|^{1/2}\|f\|_X h\|v\|_{X^{1/2}} + h\|f\|_X h\|v\|_{H^2(\Omega)}) \leq Ch^2\|f\|_X\|g\|_X. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Usando (5.29) e (5.72), resulta (5.64). ■

Observação 5.1.3 *Vemos que* (5.63) *e* (5.64) *valem para* $z = 0$.

Observação 5.1.4 *Note que* (5.64) *e* (5.65) *podem ser escritos, como*

$$\|(z - A)^{-1} - (z - A_h)^{-1} P_h\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ch^2 \tag{5.73}$$

e

$$\|(z - A)^{-1} - (z - A_h)^{-1} P_h\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ch/|z|^{1/2}. \tag{5.74}$$

Em outras palavras, as estimativas no Teorema 5.1.4 dá a taxa da medida da convergência na norma do operador.

Observação 5.1.5 *De* (5.56)*, da desigualdade de* (5.51) *e do Lema 5.0.3, obtemos*

$$\|e_h(z)\|_X \leq \|w\|_X + \|w_h\|_X \leq \delta_1 \frac{\|f\|_X}{|z|} + \delta_1 \frac{\|P_h f\|_X}{|z|} \leq 2\delta_1 \frac{\|f\|_X}{|z|} \leq C_8 \frac{\|f\|_X}{|z|}. \tag{5.75}$$

Usando (5.64) *e* (5.75)*, dado* $\alpha \in [0,1]$*, temos*

$$\|e_h(z)\|_X \leq C\|e_h(z)\|_X^{\alpha} \|e_h(z)\|_X^{1-\alpha} \leq C^{\alpha} h^{2\alpha} \|f\|_X^{\alpha} C_9^{1-\alpha} \frac{\|f\|_X^{1-\alpha}}{|z|^{1-\alpha}} \leq C_{\alpha} \frac{h^{2\alpha}}{|z|^{1-\alpha}} \|f\|_X. \tag{5.76}$$

Observação 5.1.6 *Do Teorema 5.1.4, os Lemas 5.0.4 e 5.0.7 e* (5.69)*, obtemos*

$$\begin{aligned} \|(z - A_h)^{-1} P_h f - P_h (z - A)^{-1} f\|_{X^s} &\leq \|e_h(z)\|_{X^s} + \|P_h w - w\|_{X^s} \\ &\leq Ch^{2-2s}\|f\|_X + Ch^{2-2s}\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{2-2s}\|f\|_X, \end{aligned} \tag{5.77}$$

para todo $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$*,* $f \in X$ *e* $s = 0, 1/2$.

5.2 Taxa de convergência da aproximação semi-discreta de elementos finitos

Nesta seção estudaremos a convergência de $u(t) = e^{-tA}a$ a solução do problema (5.7) com $u_h = u_h(t) = e^{-tA_h}a_h$ a solução aproximada do problema (5.14) com o valor inicial $a_h \in X_h^{1/2}$.

Teorema 5.2.1 *Se $a_h = P_h a$ então as seguintes estimativas valem*

$$\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} \leq Cht^{-1}\|a\|_X, \forall\, t > 0, \tag{5.78}$$

$$\|\varepsilon_h(t)\|_X \leq Ch^2t^{-1}\|a\|_X, \forall\, t > 0, \tag{5.79}$$

onde $\varepsilon_h(t) = u(t) - u_h(t)$.

Demonstração. Sejam θ_1 e Γ_1 como em (5.5), (5.9) e usando (5.8), temos

$$\begin{aligned}\varepsilon_h(t) &= u(t) - u_h(t) = e^{-tA}a - e^{-tA_h}a_h \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{-tz}\big((z-A)^{-1}a - (z-A_h)^{-1}P_h a\big)dz.\end{aligned} \tag{5.80}$$

Usando (5.80), (5.63) com f sendo substituído por a e $z = \rho e^{i\theta_1}$ com $\rho > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} |e^{-tz}|\|e_h(z)\|_{X^{1/2}}|dz| \leq \frac{C}{\pi}\int_0^\infty |e^{-t(\rho\cos\theta_1 + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}|h\|a\|_X|e^{i\theta_1}|d\rho \\ &\leq C'\int_0^\infty e^{-t\rho\cos\theta_1}h\|a\|_X d\rho \leq \frac{C'}{t\cos\theta_1}\int_0^\infty e^{-t\rho\cos\theta_1}h\|a\|_X d(t\rho\cos\theta_1) \\ &= Cht^{-1}\|a\|_X.\end{aligned}$$

De (5.80) e (5.64), obtemos

$$\|\varepsilon_h(t)\|_X \leq Ch^2\|a\|_X\int_0^\infty e^{-t\rho\cos\theta_1}d\rho = Ch^2t^{-1}\|a\|_X,$$

e isto mostra (5.79), ■

Observação 5.2.1 *A desigualdade* (5.79) *diz que*

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_h}P_h\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})} \leq Cht^{-1}. \tag{5.81}$$

Agora vamos escolher a_h de uma forma mais geral, ou seja vamos supor que a_h está em $X_h^{1/2}$ mas não necessariamente igual a $P_h a$.

Teorema 5.2.2 *Seja $a_h \in X_h^{1/2}$. Então com a mesma notação como no Teorema 5.2.1, temos*

$$\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} \leq C(ht^{-1}\|a_h\|_X + t^{-1/2}\|a - a_h\|_X) \tag{5.82}$$

e

$$\|\varepsilon_h(t)\|_X \leq C(h^2t^{-1}\|a_h\|_X + \|a - a_h\|_X). \tag{5.83}$$

Demonstração. Como $P_h a_h = a_h$ para todo $a_h \in X_h^{1/2}$, podemos escrever

$$\varepsilon_h(t) = e^{-tA}a - e^{-tA_h}a_h = e^{-tA}(a - a_h) + (e^{-tA} - e^{-tA_h}P_h)a_h.$$

Denotando por $\varepsilon_h^{(1)}(t) = e^{-tA}(a - a_h)$ e $\varepsilon_h^{(2)}(t) = (e^{-tA} - e^{-tA_h}P_h)a_h$, temos

$$\varepsilon_h(t) = \varepsilon_h^{(1)}(t) + \varepsilon_h^{(2)}(t).$$

Vamos estimar $\varepsilon_h^{(1)}(t)$ e $\varepsilon_h^{(2)}(t)$ respectivamente. De fato, usando o Teorema 1.3.4, a Proposição 1.3.5 com $\operatorname{Re}\sigma(A) > \beta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_h^{(1)}(t)\|_{X^{1/2}} = \|e^{-tA}(a - a_h)\|_{X^{1/2}} &\leq C_{1/2}\|Ae^{-tA}(a - a_h)\|_X^{1/2}\|e^{-tA}(a - a_h)\|_X^{1/2} \\
&\leq C_{1/2}\widetilde{C}_1 t^{-1/2}e^{-\beta t/2}\|a - a_h\|_X^{1/2}(\widetilde{C}_0\, e^{-\beta t/2}\|a - a_h\|_X^{1/2}) \\
&\leq C\, t^{-1/2}e^{-\beta t}\|a - a_h\|_X \leq Ct^{-1/2}\|a - a_h\|_X,
\end{aligned}$$

e, daí

$$\|\varepsilon_h^{(1)}(t)\|_X \leq \|e^{-tA}\|_{\mathscr{L}(X)}\|(a - a_h)\|_X \leq \|a - a_h\|_X.$$

O termo $\varepsilon_h^{(2)}(t)$ é tratado fazendo uso do Teorema 5.2.1. Agora usando estas últimas desigualdades segue (5.82) e (5.83). ■

Teorema 5.2.3 *Suponha que $a \in X^{1/2}$ e $a_h = P_h a$. Então com a mesma notação como no Teorema 5.2.1, temos*

$$\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} \leq Cht^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}, \tag{5.84}$$

$$\|\varepsilon_h(t)\|_X \leq Ch\|a\|_{X^{1/2}} \quad e \tag{5.85}$$

$$\|\varepsilon_h(t)\|_X \leq Ch^2t^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}. \tag{5.86}$$

Demonstração. Primeiro, podemos ver que fazendo uso do Teorema 5.1.4, podemos modificar (5.63) e (5.64) como:

$$\|e_h(z)\|_{X^{1/2}} \leq Ch|z|^{-1/2}\|f\|_{X^{1/2}} \tag{5.87}$$

e

$$\|e_h(z)\|_X \leq Ch^2|z|^{-1/2}\|f\|_{X^{1/2}}, \tag{5.88}$$

respectivamente. De fato, de (5.67) e $\varphi_h = w_h - \tilde{w}^h$ segue a desigualdade:

$$\begin{aligned}|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 &\leq \delta_1\big(|z|\|e_h+\varphi_h\|_X\|w-\tilde{w}^h\|_X + c_1\|e_h+\varphi_h\|_{X^{1/2}}\|w-\tilde{w}^h\|_{X^{1/2}}\big)\\ &\leq \delta_1\big(|z|\|_X\|w-\tilde{w}^h\|_X^2 + c_1\|w-\tilde{w}^h\|_{X^{1/2}}^2\big)\\ &\leq C(|z|\|w-\tilde{w}^h\|_X^2 + \|w-\tilde{w}^h\|_{X^{1/2}}^2).\end{aligned} \tag{5.89}$$

Logo, usando as desigualdades (5.25) e (5.26) em (5.89), obtemos

$$|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 \leq Ch^2(|z|\|w\|_{X^{1/2}}^2 + \|w\|_{H^2(\Omega)}^2). \tag{5.90}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|w\|_{X^{1/2}} &= \|A^{1/2}w\|_X = \|A^{1/2}(z-A)^{-1}f\|_X\\ &= \|(z-A)^{-1}A^{1/2}f\|_X \leq \|(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|A^{1/2}f\|_X \leq \delta_1|z|^{-1}\|f\|_{X^{1/2}}\end{aligned} \tag{5.91}$$

e

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_4\|Aw\|_X = C_4\|A(z-A)^{-1}f\|_X = C_4\|A^{1/2}(z-A)^{-1}A^{1/2}f\|_X\\ &\leq C_4\|A^{1/2}(z-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|A^{1/2}f\|_X \leq C|z|^{-1/2}\|f\|_{X^{1/2}},\end{aligned} \tag{5.92}$$

onde temos usado (5.59). Agora, substituindo as desigualdades (5.91) e (5.92) em (5.90), obtemos

$$|z|\|e_h\|_X^2 + \|e_h\|_{X^{1/2}}^2 \leq Ch^2|z|^{-1}\|f\|_{X^{1/2}}^2. \tag{5.93}$$

De (5.93) segue (5.87) e também

$$\|e_h(z)\|_X \leq Ch|z|^{-1}\|f\|_{X^{1/2}}. \tag{5.94}$$

Para mostrar (5.88), seguimos o mesmo raciocínio feito para provar a desigualdade (5.64) no Teorema 5.1.4. Assim,

$$\begin{aligned}
|(e_h, g)| &\leq C(|z|\|e_h\|_X\|v - v_h\|_X + \|e_h\|_{X^{1/2}}\|v - v_h\|_{X^{1/2}}) \\
&\leq Ch(|z|\|e_h\|_X\|v\|_{X^{1/2}} + \|e_h\|_{X^{1/2}}\|v\|_{H^2(\Omega)}) \\
&\leq Ch^2(\|f\|_{X^{1/2}}\|v\|_{X^{1/2}} + |z|^{-1/2}\|f\|_{X^{1/2}}\|v\|_{H^2(\Omega)}) \qquad \text{(por 5.94 e 5.87)} \\
&\leq Ch^2(|z|^{-1/2}\|g\|_X + |z|^{-1/2}\|g\|_X)\|f\|_{X^{1/2}} \qquad \text{(por 5.59 e 5.69)} \\
&\leq Ch^2|z|^{-1/2}\|f\|_{X^{1/2}}\|g\|_X. \qquad (5.95)
\end{aligned}$$

Usando (5.29) e (5.95), resulta (5.88). Agora, de (5.80) e (5.87), temos

$$\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} |e^{-tz}|\|e_h(z)\|_{X^{1/2}}|dz| \leq \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\int_{\Gamma_1} |e^{-tz}||z|^{-1/2}|dz|. \qquad (5.96)$$

Podemos ver que em (5.96) a função $z^{-1/2}$ não está definida para $z = 0$, por isso mudaremos o caminho de integração Γ_1 para $\Gamma_t = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_c$ para todo $t > 0$, onde $\Gamma_a = \{\rho e^{i\theta_1} : t^{-1} \leq \rho \leq \infty\}$, $\Gamma_b = \{t^{-1}e^{i\vartheta} : \theta_1 \leq |\vartheta| \leq \pi\}$ e $\Gamma_c = \{\rho e^{-i\theta_1} : t^{-1} \leq \rho \leq \infty\}$ (ver Figura 5.2). Logo,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} &\leq \frac{C}{2\pi}\int_{\Gamma_t} |e^{-tz}||z|^{-1/2}h\|a\|_{X^{1/2}}|dz| \\
&= \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(\int_{\Gamma_a}\frac{|e^{-tz}|}{|z|^{1/2}}|dz| + \int_{\Gamma_b}\frac{|e^{-tz}|}{|z|^{1/2}}|dz| + \int_{\Gamma_c}\frac{|e^{-tz}|}{|z|^{1/2}}|dz|\right) \\
&= \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(\int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{|e^{-t(\rho\cos\theta_1 + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}|}{|\rho e^{i\theta_1}|^{1/2}}|e^{i\theta_1}|d\rho\right. \\
&\quad + \int_{\theta_1}^{\pi}\frac{|e^{-t\,t^{-1}e^{i\vartheta}}|}{|t^{-1}e^{i\vartheta}|^{1/2}}|it^{-1}e^{i\vartheta}|d\vartheta + \left.\int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{|e^{-t(\rho\cos\theta_1 - i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}|}{|\rho e^{-i\theta_1}|^{1/2}}| - ie^{-i\theta_1}|d\rho\right) \\
&= \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(\int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}|e^{-i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1}|}{\rho^{1/2}}d\rho\right. \\
&\quad + \left.\int_{\theta_1}^{\pi}\frac{e^{-\cos\vartheta}|e^{-i\,\mathrm{sen}\,\vartheta}|}{t^{1/2}}d\vartheta + \int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}|e^{i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1}|}{\rho^{1/2}}d\rho\right). \qquad (5.97)
\end{aligned}$$

Sabemos que $|e^{i\xi}| = 1$, então

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_h(t)\|_{X^{1/2}} &\leq \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(2\int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}}{\rho^{1/2}}d\rho + \int_{\theta_1}^{\pi}\frac{e^{-\cos\vartheta}}{t^{1/2}}d\vartheta\right)\\
&= \frac{Cht^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(\frac{2}{(\cos\theta_1)^{1/2}}\int_{\cos\theta_1}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s^{1/2}}ds + \int_{\theta_1}^{\pi}e^{-\cos\vartheta}d\vartheta\right)\\
&\leq \frac{Cht^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(\frac{2}{(\cos\theta_1)^{1/2}}\int_{\cos\theta_1}^{\infty}\frac{e^{-s}}{(\cos\theta_1)^{1/2}}ds + \int_{\theta_1}^{\pi}e\,d\vartheta\right)\\
&\leq \frac{Cht^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(\frac{2}{\cos\theta_1}e^{-\cos\theta_1} + (\pi-\theta_1)e\right) = C_{11}ht^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}}, \qquad (5.98)
\end{aligned}$$

assim temos mostrado (5.84). Similarmente, usando (5.80) e (5.88) obtemos

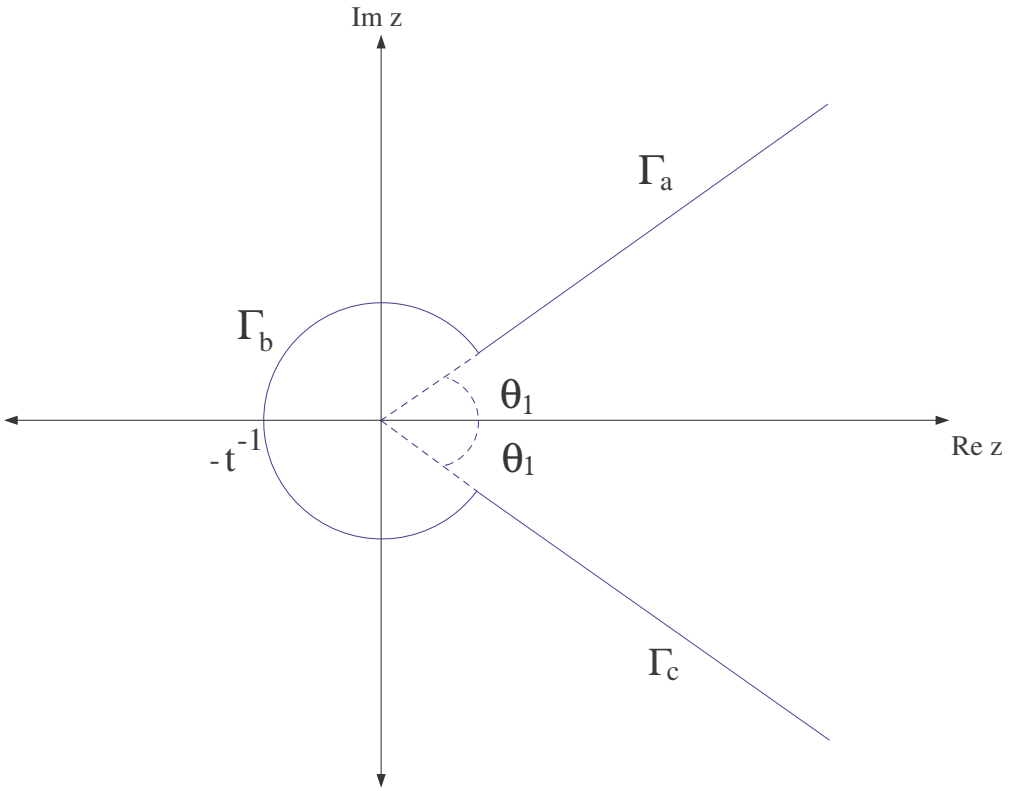


Figura 5.2: Fronteira $\Gamma_t = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_c$.

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_h(t)\|_X &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}|e^{-tz}|\|e_h(z)\|_X|dz| \leq \frac{Ch^2\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\int_{\Gamma_1}|e^{-tz}||z|^{-1/2}|dz|\\
&\leq \frac{Ch^2\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\int_{\Gamma_t}|e^{-tz}||z|^{-1/2}|dz| \leq C_{11}h^2t^{-1/2}\|a\|_{X^{1/2}},
\end{aligned}$$

temos mostrado (5.86). Resta mostrar (5.85), para isto, usamos (5.80) e (5.94), então

$$\|\varepsilon_h(t)\|_X \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}|e^{-tz}|\|e_h(z)\|_X|dz| \leq \frac{Ch^2\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\int_{\Gamma_t}|e^{-tz}||z|^{-1}|dz|$$
$$= \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(2\int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}|e^{\mp i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1}|}{\rho}d\rho + \int_{\theta_1}^{\pi}e^{-\cos\vartheta}|e^{-i\,\mathrm{sen}\,\vartheta}|d\vartheta\right).$$

Novamente como $|e^{i\xi}| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_h(t)\|_X &\leq \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(2\int_{t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}}{\rho}d\rho + \int_{\theta_1}^{\pi}e^{-\cos\vartheta}d\vartheta\right)\\ &= \frac{Cht\|a\|_{X^{1/2}}}{2\pi}\left(2\int_{\cos\theta_1}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds + (\pi-\theta_1)e\right)\\ &= \frac{Cht\|a\|_{X^{1/2}}}{\pi}\left(2\int_{\cos\theta_1}^{\infty}\frac{e^{-s}}{\cos\theta_1}ds + (\pi-\theta_1)e\right)\\ &\leq \frac{Ch\|a\|_{X^{1/2}}}{\pi}\left(\frac{2e^{-\cos\theta_1}}{\cos\theta_1} + (\pi-\theta_1)e\right)\\ &= C_{12}h\|a\|_{X^{1/2}},\end{aligned}$$

■

Observação 5.2.2 *Note que no Teorema 5.2.3 as constantes que aparece são independente de t e h.*

5.2.1 Discretização com o método de elementos finitos do problema geral

A seguir descrevemos o problema discretizado não-linear correspondente a (4.4).

Com os resultados obtidos nas seções anteriores a discretização de (4.4) pode ser escrita como

$$\begin{cases}\dot{u}_h + A_h u_h = F_h(u_h)\\ u_h(0) = u_h^0 \in X_h^{1/2},\end{cases} \tag{5.99}$$

onde $F_h = P_h F : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$, para todo $h \in (0,1]$.

Denotemos por $u_h(t, u_0^h)$ a solução de (5.99) e por $T_h(t, u_0^h)$ o semigrupo não-linear associado a (5.99) o qual é dado pela fórmula da variação das constantes

$$T_h(t,u_0^h) = e^{-A_h t}u_0^h + \int_0^t e^{-A_h(t-s)}F_h(T_h(s,u_0^h))ds, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } h \in (0,1]. \tag{5.100}$$

Sob as hipóteses feitas anteriormente (como no Capítulo 4) pode ser provado que

Teorema 5.2.4 *Suponhamos que* (C), (D) *e* (5.15) *valem, então a solução do problema* (5.99) *com* $u_h^0 \in B_R \cap X_h^{1/2}$ *é globalmente definida e existe uma constante* $K_2 = K_2(R)$ *tal que*

$$\limsup_{t\to\infty} \|u_h(t, u_h^0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_2(R). \tag{5.101}$$

Demonstração. Seguindo o Lema 4.4.2 para o problema (5.99) e o Teorema 4.3.1. ■

Conseqüentemente,

Teorema 5.2.5 *O problema* (5.99) *tem um atrator global* $\mathcal{A}_h$ *em* $X_h^{1/2}$ *para todo* $h \in (0, 1]$.

Capítulo

6

Continuidade de atratores de problemas parabólicos discretizados através do método de elementos finitos

Neste capítulo vamos aplicar os resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores para mostrar a atração exponencial uniforme em h dos atratores. Além disso, obteremos a taxa da $\mathscr{P}-$continuidade dos atratores. Neste trabalho refinamos os resultados obtidos em [35, Exemplo 4.1].

6.1 Estimativas do resolvente e a taxa da convergência dos semigrupos

No que segue vamos calcular a taxa de convergência dos resolventes do operador A_h, $h \in (0,1]$ fazendo uso das projeções P_h e dos semigrupos lineares quando parâmetro $h \to 0$. Conseqüentemente, obteremos a convergência dos semigrupos não lineares via a fórmula de variação das constantes.

Primeiramente começaremos mostrando $A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} A^{-1}$ quando $h \to 0$ e estimaremos a $\mathscr{P}-$convergência em termos do parâmetro h. Denotaremos o operador $A =: A_0$ quando seja necessário.

Lema 6.1.1 *A família de operadores $A_h^{-1} : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$ com $h \in (0,1]$ converge compactamente para o operador $A^{-1} : X \to X$ com*

$$\|A_h^{-1}P_h v - P_h A^{-1} v\|_{X^s} \leq Ch^{2(1-s)}\|v\|_X, \ \forall v \in X \ \ e \ s = 0, 1/2. \tag{6.1}$$

Prova. Primeiro, mostraremos que a família $\{A_h^{-1}\}_{h\in[0,h_0]}$ é formada por operadores compactos (e a compacidade independe de h). Para $h=0$, sabemos que $0<\operatorname{Re}\sigma(A)$, logo $0\in\rho(A)$. Lembrando que A tem resolvente compacto, pela Observação 1.4.2 segue que A tem resolvente compacto em 0. Então, $A^{-1}\in\mathscr{K}(X)$.

Agora, para $h\in(0,1]$. Como A_h é bijetivo e fechado (Teorema 5.1.3), temos que A_h^{-1} é fechado, e do Teorema do Gráfico Fechado segue que A_h^{-1} é contínuo. Logo, $0\in\rho(A_h)$. Seja $g_h\in X_h^{1/2}$ tal que $\|g_h\|_{X^{1/2}}\leq 1$. Então, para $v_h=A_h^{-1}g_h$, temos $\sigma(v_h,v_h)=\langle g_h,v_h\rangle_X$. Logo, usando (5.4), c sendo a constante de imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e a desigualdade 1.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}c_2\|v_h\|^2_{X^{1/2}}\leq|\sigma(v_h,v_h)|\leq\|g_h\|_X\|v_h\|_X\leq c\|g_h\|_{X^{1/2}}c\|v_h\|_{X^{1/2}}\\ \leq\frac{c^2\|g_h\|^2_{X^{1/2}}}{2\delta}+\frac{\delta c^2\|v_h\|^2_{X^{1/2}}}{2}\leq\frac{c^2}{2\delta}+\frac{\delta c^2\|v_h\|^2_{X^{1/2}}}{2}.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\|v_h\|^2_{X^{1/2}}\leq\frac{c^2}{(2c_2-\delta c^2)\delta},\ \forall\delta>0.$$

Portanto, existe $c_0>0$ tal que

$$A_h^{-1}(B_{X_h^{1/2}}(0,1))\subset B_{X_h^{1/2}}(0,c_0),\ \forall h\in[0,h_0],$$

onde $B_Y(0,r)$ denota a bola no espaço Y centrada na origem de raio r. Assim, $A_h^{-1}\in\mathscr{B}(X_h^{1/2})$, então A_h^{-1} é compacto (Ver Proposição 1.4.4). Da Observação 5.1.6 para $z=0$, obtemos

$$\|A_h^{-1}P_hv-P_hA^{-1}v\|_{X^s}\leq Ch^{2(1-s)}\|v\|_X,$$

para todo $v\in X$. Pela Proposição 3.1.1, segue-se $A_h^{-1}\xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{D}}A^{-1}$.

Seja uma seqüência $\{v_h\}_{h\in(0,1]}$ com $v_h\in X_h^{1/2}$ e $\|v_h\|_{X^{1/2}}=1$. Como $(\lambda-A)^{-1}$ é compacto para algum λ (pois A tem resolvente compacto) e das equações (5.63) e (5.64), segue-se

$$\begin{aligned}\mu((z-A_h)^{-1}v_h)&\leq\mu((z-A)^{-1}v_h)+|-1|\mu((z-A)^{-1}v_h-(z-A_h)^{-1}v_h)\\ &\leq 0+\limsup_{h\to0}\|(z-A)^{-1}v_h-(z-A_h)^{-1}P_hv_h\|_{X^s}=0,\end{aligned}$$

onde $(z-A_h)^{-1}v_h$ é limitada por (5.51). Logo,

$$\mu(A_h^{-1}v_h)=\mu\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}z^{-1}(z-A_h)^{-1}v_hdz\Big)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}z^{-1}\mu((z-A_h)^{-1}v_h)dz=0.$$

Com isto, temos mostrado que $\{A_h^{-1}v_h\}_{h\in(0,1]}$ é $\mathscr{P}-$relativamente compacto. Portanto, $A_h^{-1} \xrightarrow{\mathscr{CC}} A^{-1}$. □

Corolário 6.1.1 *O operador $A_h \in \mathscr{L}(X_h^{1/2})$ satisfaz a condição (H_h) para todo $h \in [0,1]$.*

Prova. Pelo Teorema 5.1.3 e o Lema 4.1.2 sabemos que os operadores A_h são setoriais para todo $h \in [0,1]$, logo os operadores A_h são fechados para todo $h \in [0,1]$. Pela hipótese do problema inicial sabemos que $0 \in \rho(A)$ e como A tem resolvente compacto, da Observação 1.4.2 resulta que A tem resolvente compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Do Lema 6.1.1, vemos que $0 \in \rho(A_h)$ e $A_h^{-1} \in \mathcal{K}_0(X_h^{1/2})$. Logo, A_h tem resolvente compacto para todo $h \in (0,1]$ e $\lambda \in \rho(A_h)$. Concluímos a prova usando o Lema 6.1.1. □

6.1.1 Taxa de convergência dos resolventes das linearizações

Calcularemos a taxa da $\mathscr{P}-$convergência da família de operadores $\{(A_h + P_hV_h)^{-1}\}_{h\in(0,1]}$ quando $h \to 0$. Daqui em diante, denotaremos por $V_h = P_hF'(u_h^*)$ tendo em conta que $V_0 = F'(u^*)$ e $P_0 = I$.

Lema 6.1.2 *Seja $P_h : X \to X_h^{1/2}$ a projeção definida em (5.15). Se $A_h : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$ é um operador linear invertível e V_0 um operador linear limitado tais que $(A+V_0)$ e $(A_h+P_hV_0)$ são ambos invertíveis, então*

$$(A_h + P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1} = \\ [I - (A_h + P_hV_0)^{-1}P_hV_0](A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]. \quad (6.2)$$

Prova. Primeiro, vemos que $I + A_h^{-1}P_hV_0$ é o operador inverso do operador $I - (A_h + P_hV_0)^{-1}P_hV_0$, pois

$$\begin{aligned} I &= [(A_h + P_hV_0)^{-1}A_h][(A_h + P_hV_0)^{-1}A_h]^{-1} \\ &= [(A_h + P_hV_0)^{-1}(A_h + P_hV_0 - P_hV_0)][A_h^{-1}(A_h + P_hV_0)] \\ &= [I - (A_h + P_hV_0)^{-1}P_hV_0](I + A_h^{-1}P_hV_0). \end{aligned}$$

Assim, a igualdade (6.2) pode ser escrita da forma

$$(I + A_h^{-1}P_hV_0)[(A_h + P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1}] = \\ (A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]. \quad (6.3)$$

Como $V_0(A+V_0)^{-1} = I - A(A+V_0)^{-1}$, expandindo o lado direito de (6.3), obtemos

$$\begin{aligned}(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}] \\ &= A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1} - A^{-1}P_hV_0(A+V_0)^{-1} + P_hA^{-1}V_0(A+V_0)^{-1} \\ &= A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1} - A^{-1}P_hV_0(A+V_0)^{-1} + P_hA^{-1}[I - A(A+V_0)^{-1}] \\ &= A_h^{-1}P_h - A^{-1}P_hV_0(A+V_0)^{-1} + P_h(A+V_0)^{-1} \\ &= A_h^{-1}P_h - A^{-1}P_hP_hV_0(A+V_0)^{-1} + P_h(A+V_0)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Também, vemos que $A_h^{-1} = (I + A_h^{-1}P_hV_0)(A_h + P_hV_0)^{-1}$. Logo, expandindo o lado esquerdo de (6.3), temos

$$\begin{aligned}(I + A_h^{-1}P_hV_0)[(A_h + P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1}] &= A_h^{-1}P_h - (I + A_h^{-1}P_hV_0)P_h(A+V_0)^{-1} \\ &= A_h^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1} - A_h^{-1}P_hV_0P_h(A+V_0)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Por último, note que $P_h \circ V_0 = V_0 \circ P_h$, pois

$$\langle P_h \circ V_0 f, v\rangle_X = \langle V_0 f, v\rangle_X = \langle f, (V_0)^* v\rangle_X = \langle P_h f, (V_0)^* v\rangle_X = \langle V_0 \circ P_h f, v\rangle_X,$$

para todo $f \in X$ e $v \in X_h^{1/2}$. Portanto, (6.4) e (6.5) são iguais e o resultado segue. □

Proposição 6.1.1 *Se $(A+V_0) : D(A) \subset X \to X$ possui inversa limitada, então existe um $h_0 > 0$ tal que*

$$\|(A_h + P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \leq Ch^{2-2s},\ s = 0, 1/2, \tag{6.6}$$

para todo $h \in (0, h_0]$ e onde a constante $C > 0$ não depende de h.

Prova. Sabemos que se $A + V_0$ é invertível, então $A_h + P_hV_0$ é invertível para h suficientemente pequeno (pelo Teorema 3.2.1). Logo, a estimativa (6.6) faz sentido. Sabemos do Lema 6.1.2 que vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\psi_h := (A_h + P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1} = \\ [I - (A_h + P_hV_0)^{-1}P_hV_0](A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Na identidade (6.7) adicionando e subtraindo o termo $[P_h(A+V_0)^{-1}V_0(A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]$, temos

$$\begin{aligned}\psi_h = &-[(A_h+P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1}]V_0[(A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]\\ &+[I-P_h(A+V_0)^{-1}V_0](A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]. \end{aligned}\tag{6.8}$$

Primeiro, estimaremos

$$\Theta_h := -[(A_h+P_hV_0)^{-1}P_h - P_h(A+V_0)^{-1}]V_0(A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}].$$

Note que, da Observação 5.1.6, (5.16) e o Lema 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Theta_h a\|_X &\le \|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}\|V_0(A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X\\ &\le \widetilde{C}(R)\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}\|(A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}}\\ &\le \widetilde{C}(R)Ch\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}\|[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X\\ &\le \widetilde{C}(R)Ch\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}[\|a\|_X+\|V_0(A+V_0)^{-1}a\|_X]\\ &\le \widetilde{C}(R)Ch\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}[\|a\|_X+\widetilde{C}(R)\|(A+V_0)^{-1}a\|_{X^{1/2}}]\\ &\le \widetilde{C}(R)C(1+\widetilde{C}(R)K)h\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}\|a\|_X\\ &\le Ch\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}\|a\|_X, \end{aligned}\tag{6.9}$$

para todo $a\in X$, onde $C=C(R,K)$ com $K\ge\|(A+V_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})}$. Logo,

$$\|\Theta_h\|_{\mathscr{L}(X)}\le Ch\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X)}.$$

Escolhendo $h_1>0$ tal que $Ch\le 1/2$, para todo $h\in(0,h_1]$ e substituindo em (6.8), obtemos

$$\|\psi_h a\|_X \le 1/2\|\psi_h a\|_X + \|[I-P_h(A+V_0)^{-1}V_0](A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\psi_h a\|_X &\le 2\|[I-P_h(A+V_0)^{-1}V_0](A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X\\ &\le 2\|I-P_h(A+V_0)^{-1}V_0\|_{\mathscr{L}(X)}\|(A_h^{-1}P_h-P_hA^{-1})[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X\\ &\le 2(1+\|(A+V_0)^{-1}V_0\|_{\mathscr{L}(X)})Ch^2\|[I-V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X\\ &\le 2(1+K)[\|a\|_X+\|V_0(A+V_0)^{-1}a\|_X]\le 2(1+K)(1+\widetilde{C}(R)K)\|a\|_X\le Ch^2\|a\|_X.\end{aligned}$$

Analogamente como foi feito para (6.9), temos

$$\|\Theta_h\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})} \leq Ch\|\psi_h\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})}.$$

Logo, escolhendo $h_2 > 0$ tal que $Ch \leq 1/2$, para todo $h \in (0, h_2]$ e (5.37), resulta

$$\begin{aligned}
\|\psi_h a\|_{X^{1/2}} &\leq 2\|[I - P_h(A+V_0)^{-1}V_0](A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\leq 2(\|(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\quad + \|P_h(A+V_0)^{-1}V_0(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}}) \\
&\leq 2(\|(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\quad + C\|(A+V_0)^{-1}V_0(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}}).
\end{aligned}$$

Como, $K \geq \|(A+V_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\psi_h a\|_{X^{1/2}} &\leq 2(\|(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\quad + CK\|V_0(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_X) \\
&\leq 2(\|(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\quad + CK\widetilde{C}(R)\|(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}}) \\
&\leq 2(1 + CK\widetilde{C}(R))\|(A_h^{-1}P_h - P_hA^{-1})[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\leq 2(1 + CK\widetilde{C}(R))Ch\|[I - V_0(A+V_0)^{-1}]a\|_{X^{1/2}} \\
&\leq 2(1 + CK\widetilde{C}(R))(1+K)Ch\|a\|_X \\
&\leq Ch\|a\|_X.
\end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $h_0 := \min\{h_1, h_2\}$ o resultado segue. □

6.1.2 Taxas de convergência dos equilíbrios hiperbólicos e suas linearizações

Esta seção tem como objetivo achar a taxa da $\mathscr{P}-$convergência dos equilíbrios hiperbólicos dos problemas (4.4) e (5.99). Também, a $\mathscr{P}-$convergência com taxa da família de operadores $\{V_h\}_{h\in(0,1]}$. Além disso, este mesmo análise será feito para o operador $\Lambda_h = A_h + V_h + b$ e obteremos a $\mathscr{P}-$convergência do semigrupo linear gerado pelo operador Λ_h.

As soluções de equilíbrio de (4.4) e (5.99) respectivamente são dadas por

$$Au^* = F(u^*) \tag{6.10}$$

e

$$A_h u_h^* = P_h F(u_h^*),\ \forall h \in (0,1]. \tag{6.11}$$

Denotemos por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}_h$ o conjunto de soluções de (6.10) e (6.11) em $X^{1/2}$ e $X_h^{1/2}$, respectivamente.

Os problemas (6.10) e (6.11) podem ser vistos da seguinte forma

$$A_h u_h^* = P_h F(u_h^*),\ h \in [0,1] \tag{6.12}$$

onde $X_0^{1/2} = X^{1/2}$, $u_0^* = u^*$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $A_0 = A$ e $P_0 = I$.

Lema 6.1.3 *O conjunto de $\mathcal{E}_h$ é uniformemente limitado em $X^{1/2}$, para todo $h \in [0,1]$.*

Prova. Multiplicando a equação (6.12) por u_h^*, integrando sobre Ω e usando (5.4), (5.15) com (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} c_2\|u_h^*\|^2_{X^{1/2}} &\leq |\sigma(u_h^*, u_h^*)| = |\langle P_h F(u_h^*), u_h^*\rangle_X| = |\langle F(u_h^*), u_h^*\rangle_X| \\ &= \int_\Omega |u_h^*(x) f(u_h^*(x))| dx \leq \epsilon \int_\Omega |u_h^*(x)|^2 dx + m_\epsilon |\Omega| \leq C\epsilon \|u_h^*\|^2_{X^{1/2}} + m_\epsilon |\Omega|. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\epsilon_0 > 0$ tal que $C\epsilon_0 \leq c_2/2$, obtemos

$$\|u_h^*\|^2_{X^{1/2}} \leq \frac{2m_{\epsilon_0}|\Omega|}{c_2} =: R^2.$$

Portanto,

$$\|u_h^*\|_{X^{1/2}} \leq R.$$

□

Lema 6.1.4 *Sejam $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$ e g_0 dado sobre $\Gamma_0 = \partial\Omega$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -Lu = g, \ \text{em } \Omega \\ \quad u = g_0, \ \text{em } \Gamma_0. \end{cases}$$

Então

(i) *Se $g \in L^p(\Omega)$, $g_0 \in L^\infty(\Gamma_0)$ e $\frac{2n}{n+2} \leq p < \frac{n}{2}$, então $u \in L^{\frac{pn}{n-2p}}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{L^{\frac{pn}{n-2p}}(\Omega)} \leq C(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|g_0\|_{L^\infty(\Gamma_0)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

para alguma constante $C = C(\Omega, \inf_\Omega |a_{ij}|, \max_\Omega |b_j|, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}, n, p)$.

(ii) Se $g \in L^p(\Omega)$, $g_0 \in L^\infty(\Gamma_0)$ *e* $p > \frac{n}{2}$, *então* $u \in L^\infty(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|g_0\|_{L^\infty(\Gamma_0)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

para alguma constante $C = C(\Omega, \inf_\Omega |a_{ij}|, \max_\Omega |b_j|, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}, n, p)$.

Prova. Os detalhes da prova podem ser vistos em [9, Lema B.1] onde usamos a identidade

$$\int_\Omega b_j(x)\nabla u(x)\,|u(x)|^{r-2}u(x)dx = \frac{2}{r}\int_\Omega b_j(x)\nabla(|u(x)|^{\frac{r}{2}})\,|u(x)|^{\frac{r}{2}}dx,\ r \geq 2,\ j = 1, \cdots, n.$$

□

Corolário 6.1.2 *Sob as hipóteses do Lema 6.1.4, segue-se que a solução* u_h^* *do problema* (6.12)*, satisfaz os items* (*i*) *e* (*ii*) *do Lema 6.1.4.*

Prova. Se $\frac{2n}{n+2} \leq p < \frac{n}{2}$, então $r = \frac{(n-2)p}{n-2p} \geq 2$. Sejam $k \geq \|g_0\|_{L^\infty(\Gamma_0)}$ e $\phi = (u-k)^+$. Logo, podemos ver

$$|\langle -L\phi, |\phi|^{r-2}\phi\rangle_X| = |\langle A\phi, |\phi|^{r-2}\phi\rangle_X| \geq \min\Big\{1, \frac{4(r-1)}{r^2}, \frac{2}{r}\Big\}|\langle A|\phi|^{\frac{r}{2}}, |\phi|^{\frac{r}{2}}\rangle_X|$$

e

$$|\langle -Lk, |\phi|^{r-2}\phi\rangle_X| = |\langle Ak, |\phi|^{r-2}\phi\rangle_X| = |\langle c(x)k, |\phi|^{r-2}\phi\rangle_X|.$$

Como $\langle A_h\phi_h, \phi_h\rangle_X = \sigma(\phi_h, \phi_h)$, para todo $\phi_h \in X_h^{1/2}$ e $h \in [0,1]$. Segue-se

$$|\langle -L\phi_h, |\phi_h|^{r-2}\phi_h\rangle_X| \geq \min\Big\{1, \frac{4(r-1)}{r^2}, \frac{2}{r}\Big\}(c_1\||\phi_h|^{\frac{r}{2}}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \delta_1\|\phi_h|^{\frac{r}{2}}\|^2_X).$$

Logo, o resto da prova conclui-se do Lema 6.1.4. □

Lema 6.1.5 *Com as hipóteses do Lema 6.1.4, segue-se que a inclusão* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *é contínua e a constante da inclusão depende de* Ω, $\inf_{x\in\Omega}|a_{ij}(x)|$, $\max_{x\in\Omega}|b_j(x)|$, $\|c\|_{L^\infty}$ *e* n.

Prova. Ver os detalhes em [9, Lema 4.2]. □

Lema 6.1.6 *Sejam* $u^* \in H_0^1(\Omega)$ *e* $u_h^* \in X_h^{1/2}$. *Sob as hipóteses do Lema 4.2.3, segue-se*

(i) $F'(u^*)u_h^* \in H_0^1(\Omega)$.

(ii) $F(u_h^*) \in H_0^1(\Omega)$.

(iii) Além disso,

$$\|F(u_h^*) + F'(u^*)u_h^*\|_{X^s} \leq C_0(R),\ s = 0, 1/2. \tag{6.13}$$

Prova. (i) Denotemos por $u^* = u$ e $u_h^* = w$. Primeiramente vamos calcular a derivada clássica de $D^\alpha(F'(u)w)(x)$.

De fato, para $u, w \in C_0^\infty(\Omega)$, segue da regra da cadeia que

$$D^\alpha(F'(u)w)(x) = f''(u(x))D^\alpha u(x)w(x) + f'(u(x))D^\alpha w(x), \tag{6.14}$$

onde $|\alpha| \leq 1$. Com isto, obtemos que $F'(u)w \in H_0^1(\Omega)$.

Agora vamos construir a derivada fraca $(F'(u)w)^\alpha$. Para isto consideremos $u, w \in H_0^1(\Omega) \cap B_R$ arbitrários, e definimos $(F'(u)w)^\alpha$ analogo a (6.14), dado por

$$(F'(u)w)^\alpha(x) = f''(u(x))D^\alpha u(x)w(x) + f'(u(x))D^\alpha w(x).$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é um subconjunto denso de $H_0^1(\Omega)$, segue-se que existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{e} \qquad \|w - w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Afirmamos:

$$(F'(u)w)^\alpha \text{ é a derivada fraca de } F'(u)w. \tag{6.15}$$

De fato, vamos mostrar que

$$(F'(u)w)^\alpha = \lim_{n\to\infty} D^\alpha(F'(u_n)w_n), \tag{6.16}$$

no sentido de $L^2(\Omega)$. Mas mostrar (6.16) é equivalente a mostrar:

$$\|F'(u)w - F'(u_n)w_n\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6.17}$$

e

$$\|(F'(u)w)^\alpha - D^\alpha(F'(u_n)w_n)\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{6.18}$$

para $|\alpha| = 1$.

Do Lema 4.2.3, segue que

$$\begin{aligned}\|F'(u)w - F'(u_n)w_n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|F'(u)w - F'(u_n)w\|_{L^2(\Omega)} + \|F'(u)(w - w_n)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \widetilde{C}(R)(\|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w - w_n\|_{H_0^1(\Omega)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

e daí obtemos (6.17).

Agora observemos que

$$\begin{aligned}
&\|(F'(u)w)^\alpha - D^\alpha(F'(u_n)w_n)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = \|f''(u).D^\alpha u.w + F'(u)D^\alpha w - f''(u_n).D^\alpha u_n.w_n - F'(u_n)D^\alpha w_n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = \underbrace{\|f''(u).D^\alpha u.w - f''(u_n).D^\alpha u_n.w\|_{L^2(\Omega)}}_{=:T_1(n)} + \underbrace{\|f''(u_n).D^\alpha u_n.w - f''(u_n).D^\alpha u_n.w_n\|_{L^2(\Omega)}}_{=:T_2(n)} \\
&\qquad + \underbrace{\|F'(u)D^\alpha w - F'(u_n)D^\alpha w\|_{L^2(\Omega)}}_{=:T_3(n)} + \underbrace{\|F'(u_n)D^\alpha w - F'(u_n)D^\alpha w_n\|_{L^2(\Omega)}}_{=:T_4(n)}. \qquad (6.19)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $T_j(n) \to 0$, $n \to \infty$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

De fato, usando os Lema 4.2.2 e Lema 6.1.4 e $A(u - u_n) = F(u) - F(u_n)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|u - u_n\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C(\|F(u) - F(u_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)}) \\
&\le C(C(R) + 1)\|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \le C(C(R) + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}) + 1 \le C(C(R) + R) + 1 =: r_0. \quad (6.20)$$

Com isto e usando o fato que $f \in C^2(\mathbb{R})$, temos

$$\|f''(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{|y|\le r_0} |f''(y)| =: r < \infty. \quad (6.21)$$

Logo, da desigualdade de Hölder (com $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty}$) e o Lema 6.1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
T_1(n) &= \|f''(u).D^\alpha u.w - f''(u_n).D^\alpha u_n.w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f''(u_n).D^\alpha(u - u_n).w\|_{L^2(\Omega)} + \|(f''(u) - f''(u_n)).D^\alpha u.w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f''(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|D^\alpha(u - u_n)\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f''(u) - f''(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\le (r\|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f''(u) - f''(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)})C(C(R) + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}) \\
&\le (r\|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f''(u) - f''(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}R)C(C(R) + R) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Pois, como $f \in C^2(\mathbb{R})$ e definindo $I = [-r_0, r_0]$, segue-se que f'' é uniformemente contínua em I. Logo, $u(x), u_n(x) \in I$ para $x \in \Omega$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta_0 > 0$ tal que $|u(x) - u_n(x)| \le \delta_0$ para todo $n \ge n_0$ e $x \in \Omega$, portanto $|f''(u(x)) - f''(u_n(x))| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Usando a desigualdade de Hölder como antes e o Lema 6.1.5, obtemos

$$T_2(n) = \|f''(u_n).D^\alpha u_n.w - f''(u_n).D^\alpha u_n.w_n\|_{L^2(\Omega)} = \|f''(u_n).D^\alpha u_n.(w-w_n)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \|f''(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|D^\alpha u_n\|_{L^2(\Omega)}\|w-w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq rC(\|u-u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + R)\|w-w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Novamente, usando a desigualdade de Hölder e o fato que f' é uniformemente contínua em I, obtemos

$$\begin{aligned} T_3(n) &= \|F'(u)D^\alpha w - F'(u_n)D^\alpha w\|_{L^2(\Omega)} = \|(f'(u)-f'(u_n))D^\alpha w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f'(u)-f'(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|D^\alpha w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f'(u)-f'(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq R\|f'(u)-f'(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Finalmente, usando a desigualdade de Hölder para $T_4(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} T_4(n) &= \|F'(u_n)D^\alpha w - F'(u_n)D^\alpha w_n\|_{L^2(\Omega)} = \|f'(u_n)D^\alpha(w-w_n)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f'(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|D^\alpha(w-w_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{r}\|w-w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

onde $r = \sup_{|u_n|\leq r_0} |f'(u_n)|$.

Voltando a (6.19), obtemos

$$\|(F'(u)w)^\alpha - D^\alpha(F'(u_n)w_n)\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.22}$$

Assim, (6.18) fica mostrado.

Finalmente, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $|\alpha| \leq 1$, segue-se

$$\begin{aligned} &\Big|\int_\Omega (F'(u)w)(x)D^\alpha\phi(x)dx - (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (F'(u)w)^\alpha(x)\phi(x)dx\Big| \\ &= \Big|\int_\Omega [F'(u)w - F'(u_n)w_n](x)D^\alpha\phi(x)dx - (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega [(F'(u)w)^\alpha - D^\alpha(F'(u_n)w_n)](x)\phi(x)dx\Big| \\ &\leq \|[F'(u)w - F'(u_n)w_n]D^\alpha\phi\|_{L^1(\Omega)} + \|[(F'(u)w)^\alpha - D^\alpha(F'(u_n)w_n)]\phi\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|F'(u)w - F'(u_n)w_n\|_{L^2(\Omega)}\|D^\alpha\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|(F'(u)w)^\alpha - D^\alpha(F'(u_n)w_n)\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

onde temos usado (6.17) e (6.18). Com isto, concluímos a demonstração de (i).

O item (ii) segue do item (i), pois $(F(w))^\alpha(x) = f'(w(x))D^\alpha w(x), \forall\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq 1$.

Finalmente vamos mostrar o item (iii). Usando o Lema 4.2.3 e o Lema 6.1.3, obtemos

$$\begin{aligned}\|F(u_h^*)+F'(u^*)u_h^*\|_X &\le \|F(u_h^*)\|_X + \|F'(u^*)u_h^*\|_X \\ &\le C(R)+\widetilde{C}(R)\|u_h^*\|_{X^{1/2}} \le C(R)+\widetilde{C}(R)R =: C_0(R).\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Poincaré e Hölder (com $\frac{1}{2}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2}$), obtemos

$$\begin{aligned}\|F(u_h^*)\|_{X^{1/2}} &\le (\|F(u_h^*)\|_X^2+\|\nabla F(u_h^*)\|_X^2)^{1/2} \le C\|\nabla F(u_h^*)\|_X \\ &\le C\|\nabla f(u_h^*(\cdot))\|_X \le C\|f'(u_h^*(\cdot))\nabla u_h^*(\cdot)\|_X \\ &\le C\|F'(u_h^*)\nabla u_h^*\|_X \le C\|F'(u_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_h^*\|_X \\ &\le C\tilde{c}\|u_h^*\|_{X^{1/2}} \le C\tilde{c}R =: C_0(R),\end{aligned}$$

onde $\|F'(u_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \tilde{c}$ devido que $\|u_h^*\|_{L^\infty(\Omega)} \le CR$ (pelos Lemas 6.1.3 e 6.1.4).

Novamente usando as desigualdades de Poincaré e Hölder (com $\frac{1}{2}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\infty}$), temos

$$\begin{aligned}\|F'(u^*)u_h^*\|_{X^{1/2}} &\le (\|F'(u^*)u_h^*\|_X^2+\|\nabla F'(u^*)u_h^*\|_X^2)^{1/2} \le C\|\nabla F'(u^*)u_h^*\|_X \\ &\le C\|\nabla f'(u^*(\cdot))u_h^*(\cdot)\|_X \\ &\le C\|f''(u^*(\cdot))\nabla u^*(\cdot)u_h^*(\cdot)+f'(u^*(\cdot))\nabla u_h^*(\cdot)\|_X \\ &\le C\|f''(u^*(\cdot))\nabla u^*(\cdot)u_h^*(\cdot)\|_X + C\|F'(u^*)\nabla u_h^*\|_X \\ &\le C\|f''(u^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u^*\|_X\|u_h^*\|_{L^\infty(\Omega)} + C\tilde{c}_0R \\ &\le C\hat{r}\|u^*\|_{X^{1/2}}\|u_h^*\|_{X^{1/2}} + C\tilde{c}_0R \\ &\le C\hat{r}R^2 + C\tilde{c}_0R =: C_0(R),\end{aligned}$$

onde $\|f''(u^*)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \hat{r}$ pois $\|u^*\|_{L^\infty(\Omega)} \le CR$. Com isto, o resultado segue. □

Proposição 6.1.2 *Sejam u^* um equilíbrio hiperbólico de (6.10) e $\{u_h^*\}_{h\in(0,1]}$ uma seqüência de equilíbrios hiperbólicos de (6.11), satisfazendo que $u_h^* \xrightarrow{\mathscr{P}} u^*$ em X e $X^{1/2}$, respectivamente. Então,*

$$\|u_h^* - P_hu^*\|_{X^s} \le Ch^{2-2s},\ s=0,1/2, \tag{6.23}$$

para todo $h\in(0,h_0]$ e onde $C>0$ não depende de h.

Prova. Seja u^* um equilíbrio hiperbólico para (6.10) com $\|u_h^*-P_hu^*\|_{X^s}\to 0$ quando $h\to 0$ para $s=0,1/2$. Denotando por $V_0=F'(u^*)$, temos

$$u_h^* = (A_h+P_hV_0)^{-1}P_h(F(u_h^*)+V_0u_h^*) \quad \text{e} \quad u^* = (A+V_0)^{-1}(F(u^*)+V_0u^*).$$

Tomando a norma em X^s para $s = 0, 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_h^* - P_h u^*\|_{X^s} &= \|(A_h + P_h V_0)^{-1} P_h (F(u_h^*) + V_0 u_h^*) - P_h (A + V_0)^{-1} (F(u^*) + V_0 u^*)\|_{X^s} \\
&\leq \|[(A_h + P_h V_0)^{-1} P_h - P_h (A + V_0)^{-1}](F(u_h^*) + V_0 u_h^*)\|_{X^s} \\
&\quad + \|P_h (A + V_0)^{-1} [F(u^*) + V_0 u^* - (F(u_h^*) + V_0 u_h^*)]\|_{X^s} \\
&\leq C(h^{2-2s} \|F(u_h^*) + V_0 u_h^*\|_X + \|(A + V_0)^{-1} z_h\|_{X^s}) \\
&\leq C(h^{2-2s} \|F(u_h^*) + V_0 u_h^*\|_X + K\|z_h\|_{X^s}), \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

onde $z_h = F(u_h^*) - F(u^*) + V_0(u_h^* - u^*)$ e $\|(A + V_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X, X^{1/2})} \leq K$, temos usado a Proposição 6.1.1 e Lema 6.1.6.

Além disso, para z_h tem-se

$$\begin{aligned}
|z_h(x)| &= |F(u_h^*)(x) - F(u^*)(x) + V_0(x)(u_h^* - u^*)(x)| \\
&= |f(u_h^*(x)) - f(u^*(x)) + f'(u^*(x))(u_h^*(x) - u^*(x))| \\
&\leq [|f'(\xi_h^*(x))| + |f'(u^*(x))|]|u_h^*(x) - u^*(x)|,
\end{aligned}$$

onde $\xi_h^*(x) := \theta(x) u_h^*(x) + (1 - \theta(x)) u^*(x)$ com $0 \leq \theta(x) \leq 1$ e $x \in T$, para todo $T \in \mathcal{T}^h$. Isto, implica

$$\begin{aligned}
\|z_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq [\|F'(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|F'(u^*)\|_{L^\infty(\Omega)}]\|u_h^* - u^*\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\|u_h^* - P_h u^*\|_{L^2(\Omega)} + \|P_h u^* - u^*\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\leq C\|u_h^* - P_h u^*\|_{L^2(\Omega)} + C_0 h^2.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré e Hölder temos

$$\begin{aligned}
\|z_h\|_{H_0^1(\Omega)} &= (\|z_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_h\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \leq C\|\nabla z_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C\|\nabla[f'(\xi_h^*(\cdot))w(\cdot) + f'(u^*(\cdot))w(\cdot)]\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C\|f''(\xi_h^*(\cdot))\nabla\xi_h^*(\cdot)w(\cdot) + F'(\xi_h^*)\nabla w + f''(u^*(\cdot))\nabla u^*(\cdot)w(\cdot) + F'(u^*)\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\big(\|f''(\xi_h^*(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\xi_h^*\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^\infty(\Omega)} + \|F'(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|f''(u^*(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u^*\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^\infty(\Omega)} + \|F'(u^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}\big),
\end{aligned}$$

onde $w = u_h^* - u^*$. Como, $\xi_h^* \in \bigcup_{h\in(0,1]} \mathcal{E}_h$ é uniformemente limitado em $H_0^1(\Omega)$ (Lema 6.1.3),

f'' é limitado em $L^\infty(\Omega)$ (por (6.21)), segue-se

$$\begin{aligned}\|z_h\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C(\|\xi_h^*\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^*\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}) \\ &\leq C\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|u_h^* - P_h u^*\|_{H_0^1(\Omega)} + C_{\frac{1}{2}} h.\end{aligned}$$

Logo, juntando os resultados anteriores para $s = 0, 1/2$, obtemos

$$\|z_h\|_{X^s} \leq C_s h^{2-2s} + C\|u_h^* - P_h u^*\|_{X^s}.$$

Com isto, substituindo em (6.24), temos

$$\|u_h^* - P_h u^*\|_{X^s} \leq C(h^{2-2s}\|F(u_h^*) + V_0 u_h^*\|_X + K(C_2 h^{2-2s} + C\|u_h^* - P_h u^*\|_{X^s})) \leq Ch^{2-2s}.$$

Portanto, substituindo $s = 0$ e $s = 1/2$ os resultados seguem. □

Definimos os seguintes operadores $V_h = -P_h F'(u_h^*) \in \mathscr{L}(X_h^{1/2}, X_h^{1/2})$ e $V_0 = -F'(u^*) \in \mathscr{L}(X^{1/2}, X)$. Também, denotamos por $W_h = V_h + b$ e $W_0 = V_0 + b$ com $b \in \mathbb{R}$ de tal maneira que W_h e W_0 são operadores positivos.

Como $\|u_h^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ para alguma constante $C > 0$, segue que

$$|V_h(x)| = |P_h F'(u_h^*)(x)| = |P_h f'(u_h^*(x))| = |f'(u_h^*(x))| \leq b,$$

onde $b = \sup\{|f'(s)| : |s| < \infty\}$ e daí $V_h \in L^\infty(\Omega)$, para todo $h \in [0, 1]$.

Com as notações anteriores escrevemos $\Lambda_h = A_h + W_h$, o operador Λ_h é setorial em $X_h^{1/2}$ pois o operador A_h é setorial e o operador linear W_h é limitado (pelo Teorema 3.2.1) e verifica a estimativa (pela Observação 5.1.1)

$$\|(z - \Lambda_h)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X, X^s)} \leq \frac{M}{|z|^{1-s}}, \forall z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}, h \in [0, 1] \text{ e } s \in [0, 1]. \tag{6.25}$$

A seguir, estudaremos a convergência dos operadores resolventes Λ_h^{-1}, onde W_h converge para W_0 em algum sentido específico. Precisamos deste estudo porque desejamos comparar os operadores resolventes da linearização em torno de um equilíbrio.

Corolário 6.1.3 *Nas condições da Proposição 6.1.2, segue-se*

$$\|V_h - P_h V_0\|_{X^s} \leq Ch^{2-2s}, \ \forall s = 0, 1/2. \tag{6.26}$$

Prova. Usando a Proposição 6.1.2, o Lema 4.2.2 e Lema 6.1.3, obtemos

$$\begin{aligned}\|V_h - P_hV_0\|_X &= \|P_hF'(u_h^*) - P_hF'(u^*)\|_X \leq \|F'(u_h^*) - F'(u^*)\|_X \\ &\leq \|f''(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_h^* - u^*\|_X \leq \|f''(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}(\|u_h^* - P_hu^*\|_X + \|P_hu^* - u^*\|_X) \\ &\leq \|f''(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}(Ch^2 + Ch^2\|u^*\|_{H^2(\Omega)}) \leq \|f''(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}(Ch^2 + Ch^2\|Au^*\|_X) \\ &\leq \|f''(\xi_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}(Ch^2 + Ch^2\|F(u^*)\|_X) \leq Ch^2. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Por último, usando (2.37) (com $l = 1$, $m = 0$ e $p = 2 = q$) e (6.27), temos

$$\|V_h - P_hV_0\|_{X^{1/2}} = \|P_h(F'(u_h^*) - F'(u^*))\|_{X^{1/2}} \leq Ch^{-1}\|P_h(F'(u_h^*) - F'(u^*))\|_X \leq Ch.$$

Portanto, a desigualdade (6.26) fica mostrada. □

Observação 6.1.1 *Do Corolário 6.1.3, segue que W_h e W_0 satisfaz* (6.26).

Proposição 6.1.3 *Dada $f \in X$, existem uma constante $C > 0$ e $h_0 > 0$, independente de h tal que*

$$\|\Lambda_h^{-1}P_hf - P_h\Lambda_0^{-1}f\|_{X^s} \leq Ch^{2-2s}\|f\|_X, \ \forall h \in (0, h_0] \ e \ s = 0, 1/2. \tag{6.28}$$

Prova. Definamos $v_h = \Lambda_h^{-1}P_hf = (A_h + W_h)^{-1}P_hf$ e $v_0 = \Lambda_0^{-1}f = (A + W_0)^{-1}f$. Logo,

$$\begin{aligned} A_hv_h + W_hv_h = P_hf &\iff A_hv_h + P_hW_0v_h = P_hf - (W_h - P_hW_0)v_h \\ &\iff (A_h + P_hW_0)v_h = P_hf - (W_h - P_hW_0)v_h. \end{aligned}$$

Assim,

$$v_h = (A_h + P_hW_0)^{-1}P_hf - (A_h + P_hW_0)^{-1}(W_h - P_hW_0)v_h.$$

Daí, usando a Proposição 6.1.1 e Lema 6.1.5, obtemos

$$\begin{aligned}\|v_h - P_hv_0\|_X &= \|(A_h + P_hW_0)^{-1}P_hf - (A_h + P_hW_0)^{-1}\bar{W}_hv_h - P_h(A + W_0)^{-1}f\|_X \\ &\leq \|(A_h + P_hW_0)^{-1}P_hf - P_h(A + W_0)^{-1}f\|_X + \|(A_h + P_hW_0)^{-1}\bar{W}_hv_h\|_X \\ &\leq Ch^2\|f\|_X + \|(A_h + P_hW_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|\bar{W}_h\|_X\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq Ch^2\|f\|_X + \bar{C}Ch^2\|v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch^2\|f\|_X + \bar{C}Ch^2\|v_h\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^2\|f\|_X + \bar{C}Ch^2\|\Lambda_hv_h\|_X \leq Ch^2\|f\|_X + \bar{C}Ch^2\|P_hf\|_X \\ &\leq Ch^2\|f\|_X, \end{aligned}$$

onde temos denotando $\bar{W}_h = W_h - P_hW_0$. Daí, como v_h e P_hv_0 pertencem ao espaço $X_h^{1/2}$

e usando (2.37) (com $l = 1$, $m = 0$ e $p = 2 = q$), obtemos

$$\|v_h - P_h v_0\|_{X^{1/2}} \leq Ch^{-1}\|v_h - P_h v_0\|_X \leq Ch\|f\|_X.$$

Disto, segue o resultado. □

Proposição 6.1.4 *Existem $C = C(\theta_1) > 0$ e $h_0 > 0$, tais que*

$$\|(z - \Lambda_h)^{-1}P_h - P_h(z - \Lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \leq Ch^{2-2s}, \tag{6.29}$$

para todo $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, $s = 0, 1/2$ e $h \in (0, h_0]$.

Prova. Substituindo A_h por $-\Lambda_h$ e z por V_0 em (6.7), obtemos

$$\begin{aligned}\|(z - \Lambda_h)^{-1}P_h - P_h(z - \Lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \\ \leq \|I - z(z - \Lambda_h)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|\Lambda_h^{-1}P_h - P_h\Lambda_0^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|I - z(z - \Lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}.\end{aligned}$$

Por outro lado, note que os espectros dos operadores Λ_h e Λ_0 são subconjuntos de $[1, \infty)$. Portanto, se $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, então ambos $(z - \Lambda_h)^{-1}$ e $(z - \Lambda_0)^{-1}$ fazem perfeito sentido para $h \in (0, h_0]$.

Usando a estimativa setorial (6.25), temos

$$\|z(z - \Lambda_h)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M,$$

para todo $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$ e $h \in [0, 1]$. Com isso, usando (6.28), concluímos que

$$\|(z - \Lambda_h)^{-1}P_h - P_h(z - \Lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ch^{2-2s}.$$

Por último, como $(z - \Lambda_h)^{-1}P_h f$ e $P_h(z - \Lambda_0)^{-1}f$ pertencem ao espaço $X_h^{1/2}$ para todo $f \in X$ e usando (2.37) (com $l = 1$, $m = 0$ e $p = 2 = q$), obtemos

$$\|(z-\Lambda_h)^{-1}P_h f - P_h(z-\Lambda_0)^{-1}f\|_{X^{1/2}} \leq Ch^{-1}\|(z-\Lambda_h)^{-1}P_h f - P_h(z-\Lambda_0)^{-1}f\|_X \leq Ch\|f\|_X.$$

Portanto, juntando os resultados anteriores segue (6.29). □

Observação 6.1.2 *A Proposição 6.1.4 é válida para o operador A_h, se fazemos $W_h = W_0 = 0$ nos operadores Λ_h, para todo $h \in [0, 1]$.*

Corolário 6.1.4 *Existem $C = C(\theta_1) > 0$ e $h_0 > 0$, tais que*

$$\|(z - \Lambda_h)^{-1}P_h - P_h(z - \Lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \leq Ch^{4\theta(1-s)}|z|^{(1-s)(2\theta-1)}, \tag{6.30}$$

para todo $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, $s = 0, 1/2$, $\theta \in (0, 1/2)$ *e* $h \in (0, h_0]$.

Prova. Primeiro, denotemos por $\widehat{\Lambda}_h = (z - \Lambda_h)^{-1}P_h - P_h(z - \Lambda_0)^{-1}$. Logo, usando (6.25) e os Lema 5.0.3 e 5.0.9, obtemos

$$\begin{aligned}\|\widehat{\Lambda}_h f\|_{X^s} &\leq \|(z - \Lambda_h)^{-1}P_h f\|_{X^s} + \|P_h(z - \Lambda_0)^{-1}f\|_{X^s} \\ &\leq M\frac{\|P_h f\|_X}{|z|^{1-s}} + \max\{C, 1\}\|(z - \Lambda_0)^{-1}f\|_{X^s} \\ &\leq M\frac{\|f\|_X}{|z|^{1-s}} + \max\{C, 1\}M\frac{\|f\|_X}{|z|^{1-s}} \leq C\frac{\|f\|_X}{|z|^{1-s}}, \end{aligned} \tag{6.31}$$

para todo $z \in \mathcal{S}_{0,\theta_1}$, $f \in X$ e $s = 0, 1/2$.

Finalmente, usando (6.29) e (6.31), obtemos

$$\begin{aligned}\|\widehat{\Lambda}_h f\|_{X^s} &\leq C\|\widehat{\Lambda}_h f\|_{X^s}^{\alpha}\|\widehat{\Lambda}_h f\|_{X^s}^{1-\alpha} \leq Ch^{2(1-s)\alpha}\|f\|_X^{\alpha}\|f\|_X^{1-\alpha}|z|^{(1-s)(\alpha-1)} \\ &\leq Ch^{2(1-s)\alpha}|z|^{(1-s)(\alpha-1)}\|f\|_X,\end{aligned}$$

para todo $\alpha = 2\theta \in (0, 1/2)$. Com isto, fica mostrado (6.30). □

Observação 6.1.3 *De* (6.1), (6.26) *e o Lema 3.1.3, segue-se*

$$A_h^{-1}V_h \xrightarrow{\mathscr{CC}} A^{-1}V_0.$$

Sabendo que, $w_h(u_h^*, v) = A_h^{-1}F_h(u_h^* + v) - A_h^{-1}F_h(u_h^*) - A_h^{-1}F_h'(u_h^*)v$. *Tem-se,*

$$\|w_h(u_h^*, v)\|_{X^s} \leq C\|v\|_{X^{1/2}}^2,\ s = 0, 1/2.$$

De fato, lembremos que A_h^{-1} *é um operador compacto, logo* $\|A_h^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})} \leq C$. *Assim, usando* (4.15), *obtemos*

$$\begin{aligned}\|w_h(u_h^*, v)\|_{X^{1/2}} &\leq \|A_h^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})}\|F_h(u_h^* + v) - F_h(u_h^*) - F_h'(u_h^*)v\|_X \\ &\leq \|A_h^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^{1/2})}\|P_h\|_{\mathscr{L}(X)}\|F(u_h^* + v) - F(u_h^*) - F'(u_h^*)v\|_X \\ &\leq C\|[F'(u_h^* + \mu v) - F'(u_h^*)]v\|_X \leq CC(R)\|\mu v\|_{X^{1/2}}\|v\|_{X^{1/2}} \leq C(R)\|v\|_{X^{1/2}}^2,\end{aligned}$$

onde $0 \leq \mu \leq 1$. *Com isto, vemos que a condição* (L_h) *é satisfeita.*

Nosso seguinte objetivo é o estudo das propriedades de convergência dos semigrupos lineares gerados pelos operadores $A_h + V_h$ e $A + V_0$, onde V_h e V_0 satisfazem (6.26). Para isto,

consideramos o semigrupo gerado por Λ_h, dado por

$$e^{-\Lambda_h t} := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{-zt}(z-\Lambda_h)^{-1}\,dz,\ \forall h\in[0,1], \tag{6.32}$$

com as condições definidas para (5.8).

Proposição 6.1.5 *Existem constantes $C = C(\theta_1)$, $b\in\mathbb{R}$, $h_0 > 0$ e $\theta\in(0,1/2)$ tais que*

$$\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h - P_h e^{-(A+V_0)t}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \le Ce^{bt}t^{2\theta(s-1)-s}h^{4\theta(1-s)}, \tag{6.33}$$

para todo $t>0$, $s=0,1/2$ e $h\in(0,h_0]$.

Prova. Primeiramente, observemos que

$$e^{-(A_h+V_h)t}P_h - P_h e^{-(A+V_0)t} = e^{bt}(e^{-\Lambda_h t}P_h - P_h e^{-\Lambda_0 t}),$$

isto é, somente precisamos analisar a diferença $e^{-\Lambda_h t}P_h - P_h e^{-\Lambda_0 t}$. Como

$$\|e^{-\Lambda_h t}P_h - P_h e^{-\Lambda_0 t}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}|e^{-zt}|\|(z-\Lambda_h)^{-1}P_h - P_h(z-\Lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}|dz|.$$

Logo, usando (6.30), obtemos

$$\|e^{-\Lambda_h t}P_h - P_h e^{-\Lambda_0 t}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \le \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}\int_{\Gamma_1}|e^{-zt}||z|^{(1-s)(2\theta-1)}|dz|.$$

Daí, utilizando argumentos similares com em (5.97) e (5.98), segue-se

$$\begin{aligned}\|e^{-\Lambda_h t}P_h - P_h e^{-\Lambda_0 t}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} &\le \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}\Big(\frac{2e^{-\cos\theta_1}}{\cos\theta_1} + (\pi-\theta_1)e\Big)t^{2\theta s-2\theta-s}\\ &= C(\theta_1)t^{2\theta s-2\theta-s}h^{4\theta(1-s)},\end{aligned}$$

onde $C(\theta_1) = \dfrac{C}{2\pi}\Big(\dfrac{2e^{-\cos\theta_1}}{\cos\theta_1} + (\pi-\theta_1)e\Big)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h - P_h e^{-(A+V_0)t}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} &= e^{bt}\|e^{-\Lambda_h t}P_h - P_h e^{-\Lambda_0 t}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}\\ &\le C(\theta_1)e^{bt}t^{2\theta s-2\theta-s}h^{4\theta(1-s)},\end{aligned}$$

para todo $t>0$. □

Lembremos que o operador $A+V_0$ é setorial que satisfaz a condição (H_h) e o $\sigma(A+V_0)$ é um conjunto discreto com $\operatorname{Re}\sigma(A+V_0) > \beta > 0$ (pelo Corolário 3.2.1, o Teorema 1.4.6

e o Teorema 1.4.8). Pela continuidade do espectro de $A_h + V_h$ para um h suficientemente pequeno (Teorema 3.1.1) segue que $\sigma(A_h+V_h)$ é um conjunto discreto com $\operatorname{Re}\sigma(A_h+V_h) > \beta > 0$.

Com isto, segue que existe um $\delta > 0$ tal que $[\beta-\delta, \beta+\delta] \cap \sigma(A+V_0) = \emptyset$. Assim, o espectro do operador $A+V_0$ está dividido em duas partes disjuntas, $\sigma(A+V_0) = \sigma_0^+ \cap \sigma_0^-$, onde o conjunto σ_0^+ que está abaixo de $\beta-\delta$ e é um conjunto finito e, σ_0^- que está acima de $\beta+\delta$ e é um conjunto infinito (tem uma seqüência que converge para ∞). Novamente, pela continuidade do espectro de $A+V_0$ para h suficientemente pequeno, segue que $[\beta-\delta, \beta+\delta] \cap \sigma(A_h+V_h) = \emptyset$ e o espectro de A_h+V_h está dividido em duas partes, σ_h^+ que está abaixo de $\beta-\delta$ e é um conjunto finito e, σ_h^- que esta acima de $\beta+\delta$ e é um conjunto infinito. Além disso, pedimos ainda que o δ seja tal que exista uma curva fechada fixa $\Gamma_\beta^+ \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq \beta-\delta\}$ em torno de σ_h^+ e a curva $\Gamma_\beta^- \supset \sigma_h^-$, dada por

$$\begin{aligned}\Gamma_\beta^- = &\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta_1} + \beta, \rho \geq d\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \beta+\delta, |\operatorname{Im}(z)| \leq \mathrm{g}\} \\ &\cup \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-i\theta_1} + \beta, \rho \geq d\},\end{aligned} \tag{6.34}$$

onde $d = \delta(\cos\theta_1)^{-1}$ e $\mathrm{g} = \delta\tan\theta_1$, para todo h suficientemente pequeno, respectivamente. (Ver Figura 6.1)

Logo disto, podemos decompor o espaço $X^{1/2}$ pelo operador projeção $Q_0^+(\sigma_0^+)$ determinada por σ_0^+, isto é,

$$Q_0^+ := Q_0^+(\sigma_0^+) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\beta^+} [z-(A+V_0)]^{-1} dz.$$

Agora, vamos decompor o espaço $X_h^{1/2}$ pela projeção $Q_h^+(\sigma_h^+) : X_h^{1/2} \to X_h^{1/2}$ dada por

$$Q_h^+ := Q_h^+(\sigma_h^+) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\beta^+} [z-(A_h+V_h)]^{-1} dz, \tag{6.35}$$

para todo h suficientemente pequeno.

Proposição 6.1.6 *Existem constantes $C > 0$, $h_0 > 0$ e $\theta \in (0, 1/2)$ tais que*

$$\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+) - P_h e^{-(A+V_0)t}(I-Q_0^+)\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \leq Ce^{-\beta t}t^{2\theta(s-1)-s}h^{4\theta(1-s)}, \tag{6.36}$$

para todo $h \in (0, h_0]$, $t > 0$ e $s = 0, 1/2$ e,

$$\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+)\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \leq Ce^{-\beta t}t^{-s}, \tag{6.37}$$

para todo $h \in [0, h_0]$, $t > 0$ e $s = 0, 1/2$.

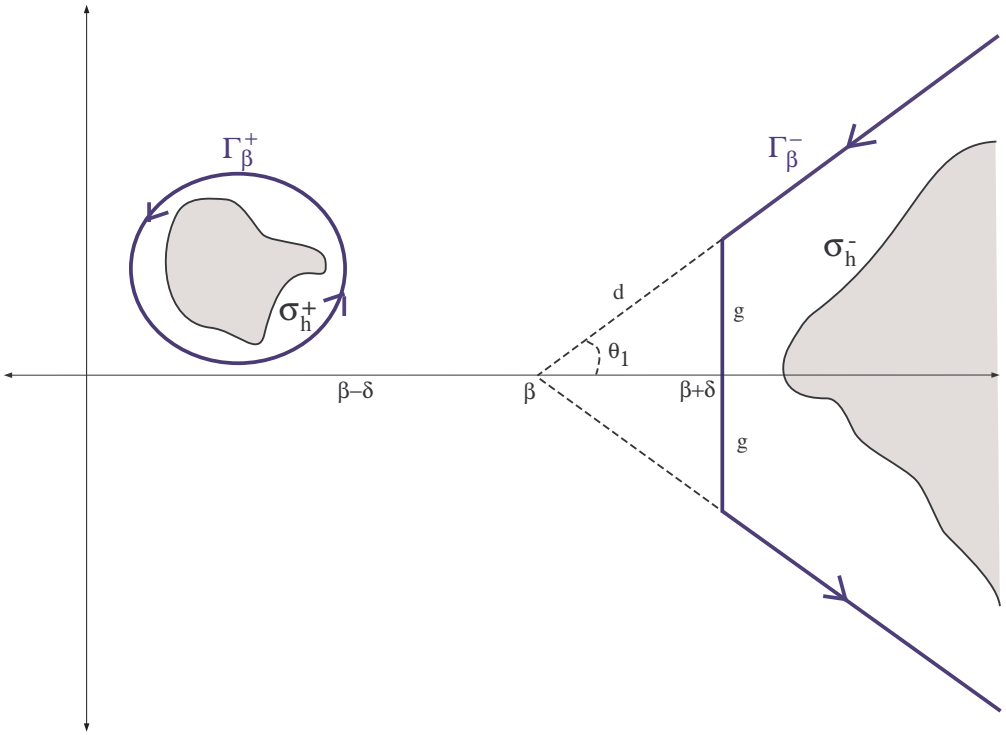


Figura 6.1: Curvas Γ_β^+ e Γ_β^-.

Prova. Podemos ver

$$e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+)-P_he^{-(A+V_0)t}(I-Q_0^+) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\beta^-} e^{-zt}[(z-A_h-V_h)^{-1}P_h-P_h(z-A-V_0)^{-1}]dz.$$

Assim, usando o Corolário 6.1.4, temos

$$\begin{aligned}
&\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+) - P_he^{-(A+V_0)t}(I-Q_0^+)\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\beta^-} |e^{-zt}|\,\|(z-A_h-V_h)^{-1}P_h - P_h(z-A-V_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}|dz| \\
&\qquad \leq \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}\int_{\Gamma_\beta^-} |e^{-zt}|\,|z|^{(1-s)(2\theta-1)}|dz|.
\end{aligned}$$

Logo, usando (6.34) e denotando $\vartheta := (1-s)(2\theta-1) < 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+) - P_he^{-(A+V_0)t}(I-Q_0^+)\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}\\
&= \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}\left[2\int_d^\infty e^{-t(\rho\cos\theta_1+\beta)}|\rho e^{\pm i\theta_1}+\beta|^\vartheta |e^{\pm i\theta_1}|d\rho + \int_{-\mathrm{g}}^{\mathrm{g}} e^{-(\beta+\delta)t}|(\beta+\delta)+iy|^\vartheta |i|dy\right]\\
&\le \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}\left[2^\vartheta\int_d^\infty e^{-t(\rho\cos\theta_1+\beta)}(\rho^\vartheta+\beta^\vartheta)d\rho + 2^{\vartheta-1}\int_{-\mathrm{g}}^{\mathrm{g}} e^{-(\beta+\delta)t}\big((\beta+\delta)^\vartheta+y^\vartheta\big)dy\right]\\
&\le \frac{Ch^{4\theta(1-s)}e^{-\beta t}}{2\pi}\left[2^\vartheta\int_d^\infty \frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}(\rho t\cos\theta_1)^\vartheta}{(t\cos\theta_1)^{\vartheta+1}}\,d(\rho t\cos\theta_1) + 2^\vartheta\beta^\vartheta\int_d^\infty \frac{e^{-t\rho\cos\theta_1}}{t\cos\theta_1}\,d(\rho t\cos\theta_1)\right.\\
&\quad \left. + 2^{\vartheta-1}e^{-\delta t}\big(2\mathrm{g}(\beta+\delta)^\vartheta + 2\mathrm{g}(0)^\vartheta\big)\right]\\
&\le \frac{Ch^{4\theta(1-s)}e^{-\beta t}}{2\pi}\left[2^\vartheta\int_{dt\cos\theta_1}^\infty \frac{e^{-u}u^\vartheta}{(t\cos\theta_1)^{\vartheta+1}}\,du + 2^\vartheta\beta^\vartheta\int_{dt\cos\theta_1}^\infty \frac{e^{-u}}{t\cos\theta_1}\,du + C_{\vartheta,\beta,\delta,\mathrm{g}}e^{-\delta t}\right]\\
&\le \frac{Ch^{4\theta(1-s)}e^{-\beta t}}{2\pi}\left[\frac{2^\vartheta\Gamma(1+\vartheta)}{(\cos\theta_1)^{\vartheta+1}}t^{-\vartheta-1} + \frac{2^\vartheta\beta^\vartheta}{\cos\theta_1}t^{-1}e^{-\delta t} + C_{\vartheta,\beta,\delta,\mathrm{g}}e^{-\delta t}\right],
\end{aligned}
$$

onde $u = \rho t\cos\theta_1$ e $C_{\vartheta,\beta,\delta,\mathrm{g}} = 2^\vartheta \mathrm{g}(\beta+\delta)^\vartheta$. Daí, escolhendo $\delta > 0$ de tal maneira que $\max\{t^{-1}e^{-\delta t}, e^{-\delta t}\} \le \bar{C}t^{-\vartheta-1}$, segue-se

$$
\begin{aligned}
&\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+) - P_he^{-(A+V_0)t}(I-Q_0^+)\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}\\
&\le \frac{C}{2\pi}\left[\frac{2^\vartheta\Gamma(1+\vartheta)}{(\cos\theta_1)^{\vartheta+1}} + \frac{2^\vartheta\beta^\vartheta\bar{C}}{\cos\theta_1} + C_{\vartheta,\beta,\delta,\mathrm{g}}\bar{C}\right]e^{-\beta t}t^{-\vartheta-1}h^{4\theta(1-s)} := Ce^{-\beta t}t^{2\theta(s-1)-s}h^{4\theta(1-s)}.
\end{aligned}
$$

De maneira similar, usando (6.25) e supondo que $\vartheta = s-1$, temos

$$
\|e^{-(A_h+V_h)t}P_h(I-Q_h^+)\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \le C\int_{\Gamma_\beta^-}|e^{-zt}||z|^{s-1}|dz| \le Ce^{-\beta t}t^{-s}.
$$

□

Corolário 6.1.5 *No caso que $V_0 = V_h \equiv 0$ e $Q_h^+ \equiv 0$ para h suficientemente pequeno, temos*

$$
\|e^{-A_ht}P_h - P_he^{-At}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} \le Ce^{-\beta t}t^{2\theta(s-1)-s}h^{4\theta(1-s)}, \tag{6.38}
$$

para todo $t > 0$ e $s = 0, 1/2$.

Observação 6.1.4 *Observemos que, Q_h^+ é um operador uniformemente limitado para todo*

$h \in [0,1]$. *De fato,*

$$\begin{aligned}\|Q_h^+\|_{\mathscr{L}(X,X^s)} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\beta^+} \|(z-A_h-V_h)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}|dz| \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_\beta^+} |z|^{(s-1)}|dz| \leq \frac{M}{2\pi}(\beta-\delta)^{s-1}|\Gamma_\beta^+|,\end{aligned}$$

onde $|\Gamma_\beta^+|$ *é o cumprimento de* Γ_β^+.

6.1.3 Taxa de convergência dos semigrupos não lineares

A continuação, estudaremos a $\mathscr{P}-$convergência com taxa dos semigrupos não lineares em função do parâmetro h.

Lema 6.1.7 *Seja* $u \in C([0,\tau(u^0)), X^{1/2})$ *a solução correspondente à equação integral* (4.5) *com dado inicial* $u^0 \subset X^{1/2}$ *no intervalo de existência maximal* $[0,\tau(u^0))$. *Além disso, dado* $R>0$ *e* $t_0 \in (0,\tau(u^0))$ *com* $\|u(t)\|_{X^{1/2}} \leq R$ *para todo* $t \in [0,t_0]$. *Então,*

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C(R,t_0)t^{-1/2},\ \forall t \in (0,t_0]. \tag{6.39}$$

Prova. Fazendo uso do Teorema 3.5.2 (ver [37, página 71]) para $\alpha = 1/2$, $\gamma = 0$ e t_0=0, a regularidade elíptica e $0 < t^{\frac{1}{2}} \leq t_0^{\frac{1}{2}}$, segue-se

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\|Au(t)\|_X = C\|F(u(t)) - \dot{u}(t)\|_X \leq C\|F(u(t))\|_X + C\|\dot{u}(t)\|_X \\ &\leq CC(R) + \tilde{C}t^{-\frac{1}{2}} = \left[CC(R)t^{\frac{1}{2}} + \tilde{C}\right]t^{-\frac{1}{2}} \leq C(R,t_0)t^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

para todo $t \in (0,t_0]$. □

Lema 6.1.8 *Seja* $u \in C([0,\tau(u^0)), X^{1/2})$ *a solução correspondente à equação integral* (4.5) *com dado inicial* $u^0 \in X^{1/2}$ *no intervalo de existência maximal* $[0,\tau(u^0))$. *Além disso, dado* $R>0$, $\theta \in (0,1/2)$ *e* $t_0 \in (0,\tau(u^0))$ *com* $\|u(t)\|_{X^{1/2}} \leq R$ *para todo* $t \in [0,t_0]$. *Então,*

$$\|P_h u(t) - u(t)\|_{X^s} \leq \tilde{C}(R,t_0)t^{-\theta}h^{4\theta(1-s)},\ \forall t \in (0,t_0]\ e\ s = 0, 1/2. \tag{6.40}$$

Prova. Seja $u(t)$ dada por (4.5) satisfazendo $\|u(t)\|_{X^{1/2}} \leq R$ para todo $t \in (0,t_0]$. Logo,

$$\begin{aligned}\|P_h u(t) - u(t)\|_{X^s} &\leq \|P_h u(t)\|_{X^s} + \|u(t)\|_{X^s} \leq (\max\{C,1\}+1)\|u(t)\|_{X^{1/2}} \\ &\leq (\max\{C,1\}+1)R := \tilde{C}_0,\end{aligned} \tag{6.41}$$

onde temos usado (5.16) e (5.37). Por outro lado, usando (5.17), (5.22) e (6.39), obtemos

$$\|P_h u(t) - u(t)\|_{X^s} \leq Ch^{2-2s}\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C_0 t^{-\frac{1}{2}} h^{2-2s}, \tag{6.42}$$

onde $C_0 := CC(R, t_0)$. Interpolando as expressões (6.41) e (6.42) com $1 - 2\theta$ e 2θ, respectivamente. Tem-se

$$\|P_h u(t) - u(t)\|_{X^s} \leq \tilde{C}(R, t_0) t^{-\theta} h^{4\theta(1-s)},$$

onde $\tilde{C}(R, t_0) = \tilde{C}_0^{1-2\theta} C_0^{2\theta}$. □

Teorema 6.1.1 *Seja* $T(t)a \in C([0, \tau(a)), X^{1/2})$ *(ou* $T_h(t)a_h \in C([0, \tau(a_h)), X_h^{1/2})$*), a solução correspondente da equação integral* (4.5) *(ou* (5.100)*) com dado inicial* $a := u^0 \in X^{1/2}$ *(ou* $a_h := u_h^0 \in X_h^{1/2}$*), a qual existe no intervalo máximo* $[0, \tau(a))$ *(ou* $[0, \tau(a_h))$*). Além disso, dado* $R > 0$, $\theta \in (0, 1/2)$ *e* $0 < t_0 < \tau := \min\{\tau(a), \tau(a_h)\}$ *com* $\|T(t)a\|_{X^{1/2}} \leq R$ *e* $\|T_h(t)a_h\|_{X^{1/2}} \leq R$*, para todo* $t \in [0, t_0]$*. Então, existem constantes* $C > 0$ *e* $L > 0$ *tais que*

$$\|T_h(t)a_h - P_h T(t)a\|_{X^s} \leq Ce^{Lt} t^{-2\theta(1-s)-s}(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}),\ t > 0,\ s = 0, 1/2.$$

Demonstração. Da fórmula da variação das constantes, segue que

$$T_h(t)a_h = e^{-tA_h}a_h + \int_0^t e^{-(t-r)A_h} P_h F(T_h(r)a_h)dr,\ 0 < h \leq h_0,$$

onde $t \in (0, \tau)$, $\tau < \infty$.

Denotando por $\Theta_h(t) := T_h(t)a_h - P_h T(t)a$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Theta_h(t)\|_{X^s} \leq\ & \|e^{-tA_h}a_h - P_h e^{-tA}a\|_{X^s} \\ & + \int_0^t \|e^{-(t-r)A_h} P_h F(T_h(r)a_h) - P_h e^{-(t-r)A} F(T(r)a)\|_{X^s} dr. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Para o primeiro termo do lado direito de (6.43), segue que

$$\|e^{-tA_h}a_h - P_h e^{-tA}a\|_{X^s} \leq \|e^{-tA_h}a_h - e^{-tA_h}P_h a\|_{X^s} + \|e^{-tA_h}P_h a - P_h e^{-tA}a\|_{X^s}. \tag{6.44}$$

Usando (1.21) e o Corolário 6.1.5 em (6.44), obtemos

$$\begin{aligned}\|e^{-tA_h}a_h - P_h e^{-tA}a\|_{X^s} &\leq \tilde{c}\, e^{-\beta t} t^{-s}\|a_h - P_h a\|_X + Ce^{-\beta t} t^{-2\theta(1-s)-s} h^{4\theta(1-s)}\|a\|_X \\ &\leq \big(\tilde{c}\tau^{2\theta(1-s)}\|a_h - P_h a\|_X + CRh^{4\theta(1-s)}\big) e^{-\beta t} t^{-2\theta(1-s)-s} \\ &\leq C_{R,\tau,\theta,s}\big(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}\big) e^{-\beta t} t^{-2\theta(1-s)-s}, \end{aligned} \tag{6.45}$$

onde $C_{R,\tau,\theta,s} = \max\{\tilde{c}\tau^{2\theta(1-s)}, CR\}$.

Para o segundo termo do lado direito de (6.43) denotemos por $\Psi_h(t,r) := \|e^{-(t-r)A_h}P_hF(T_h(r)a_h) - P_he^{-(t-r)A}F(T(r)a)\|_{X^s}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^t \Psi_h(t,r)ds \leq & \int_0^t \left\|e^{-(t-r)A_h}P_h\big[F(T_h(r)a_h) - F(P_hT(r)a)\big]\right\|_{X^s}dr \\ & + \int_0^t \left\|\big[e^{-(t-r)A_h}P_h - P_he^{-(t-r)A}\big]F(P_hT(r)a)\right\|_{X^s}dr \\ & + \int_0^t \left\|P_he^{-(t-r)A}\big[F(P_hT(r)a) - F(T(r)a)\big]\right\|_{X^s}dr.\end{aligned}$$

Pela desigualdade (1.21), Corolário 6.1.5, Lema 5.0.3 e Lema 5.0.9, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \Psi_h(t,r)dr \leq & \int_0^t \bar{C}_0e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-s}\|F(T_h(r)a_h) - F(P_hT(r)a)\|_X dr \\ & + \int_0^t Ce^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-\vartheta}h^{4\theta(1-s)}\|F(P_hT(r)a)\|_X dr \\ & + \int_0^t \tilde{C}_0e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-s}\|F(P_hT(r)a) - F(T(r)a)\|_X dr,\end{aligned}$$

onde $\vartheta = 2\theta(1-s)+s$. Denotando por L_F a constante de Lipschitz de F, usando o Lema 4.2.2 e (6.40), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \Psi_h(t,r)dr \leq & \bar{C}_0L_F\int_0^t e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-s}\|\Theta_h(r)\|_X dr \\ & + CC(R)h^{4\theta(1-s)}\int_0^t e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-\vartheta}dr \\ & + \tilde{C}_0L_F\tilde{C}(R,\tau)h^{4\theta(1-s)}\int_0^t e^{-\beta(t-r)}r^{-\theta}dr. \qquad (6.46)\end{aligned}$$

Chamando $y = \beta(t-r)$ na segunda expressão do lado direito de (6.46), resulta

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-r)^{-\vartheta}e^{-\beta(t-r)}dr &= \frac{1}{\beta^{1-\vartheta}}\int_0^{\beta t} y^{-\vartheta}e^{-y}dy \leq \frac{1}{\beta^{1-\vartheta}}\int_0^{\infty} y^{-\vartheta}e^{-y}dy \\ &\leq \frac{1}{\beta^{1-\vartheta}}\Gamma(1-\vartheta) =: C_{\beta,\vartheta}. \qquad (6.47)\end{aligned}$$

Também, para a terceira expressão do lado direito de (6.46), tem-se

$$\int_0^t r^{-\theta}e^{-\beta(t-r)}dr \leq \int_0^{\tau} r^{-\theta}dr = \frac{\tau^{1-\theta}}{1-\theta} =: C_{\tau,\theta}. \qquad (6.48)$$

Assim, substituindo (6.45), (6.46), (6.47) e (6.48) em (6.43), obtemos

$$\begin{aligned}\|\Theta_h(t)\|_{X^s} &\leq C_{R,\tau,\theta,s}\big(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}\big)e^{-\beta t}t^{-\vartheta} + \big(\tilde{C}_0 L_F \tilde{C}(R,\tau)C_{\tau,\theta}\\ &+ CC_{\beta,\vartheta}C(R)\big)h^{4\theta(1-s)} + \bar{C}_0 L_F\int_0^t e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-s}\|\Theta_h(r)\|_{X^s}dr\\ &\leq C_{R,\tau,\theta,s}\big(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}\big)e^{-\beta t}t^{-\vartheta} + \big(\tilde{C}_0 L_F \tilde{C}(R,\tau)C_{\tau,\theta}\\ &+ CC_{\beta,\vartheta}C(R)\big)\tau^{\vartheta}e^{\beta\tau}e^{-\beta t}t^{-\vartheta}h^{4\theta(1-s)} + \bar{C}_0 L_F\int_0^t e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-s}\|\Theta_h(r)\|_{X^s}dr\\ &\leq \tilde{c}_1(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)})t^{-\vartheta}e^{-\beta t} + \bar{C}_0 L_F\int_0^t e^{-\beta(t-r)}(t-r)^{-s}\|\Theta_h(r)\|_{X^s}dr,\end{aligned}$$

onde $\tilde{c}_1 = \max\{C_{R,\tau,\theta,s}, \big(\tilde{C}_0 L_F \tilde{C}(R,\tau)C_{\tau,\theta} + CC_{\beta,\vartheta}C(R)\big)\tau^{\vartheta}e^{\beta\tau}\}$.

Logo, multiplicando a expressão acima por $e^{\beta t}$, temos

$$e^{\beta t}\|\Theta_h(t)\|_{X^s} \leq \tilde{c}_1(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)})t^{-\vartheta} + \bar{C}_0 L_F\int_0^t e^{\beta r}(t-r)^{-s}\|\Theta_h(r)\|_{X^s}dr.$$

Agora, escrevendo

$$\phi_h(t) := e^{\beta t}\|\Theta_h(t)\|_{X^s},\ \alpha_h := \tilde{c}_1(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}) \text{ e } b_0 := \bar{C}_0 L_F,$$

reescrevemos a última desigualdade da seguinte forma

$$\phi_h(t) \leq \alpha_h t^{-\vartheta} + b_0\int_0^t (t-r)^{-s}\phi_h(r)dr$$

e usando a Desigualdade de Gronwall (Lema 1.1.3), obtemos

$$\phi_h(t) \leq C\alpha_h t^{-\vartheta}.$$

Agora, vamos supor que existe $\epsilon > 1$ tal que

$$e^{-\epsilon\beta t}e^{\beta t}\|T_h(t)a_h - P_h T(t)a\|_{X^s} \leq Ct^{-2\theta(1-s)-s}(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}).$$

Portanto, denotando por $L = \beta(\epsilon - 1) > 0$, obtemos

$$\|T_h(t)a_h - P_h T(t)a\|_{X^s} \leq Ce^{Lt}t^{-2\theta(1-s)-s}(\|a_h - P_h a\|_X + h^{4\theta(1-s)}).$$

■

6.2 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa das variedades instáveis locais

Nesta seção mostraremos que as variedades instáveis dos pontos de equilíbrio estão próximas no sentido da $\mathscr{P}-$convergência. Para isto, vamos começar nosso estudo do problema (5.99) entorno de uma vizinhança do ponto de equilíbrio u_h^*, fazendo a mudança $w_h = u_h - u_h^*$, obtemos

$$w_h' + (A_h - F_h'(u_h^*))w_h = F_h(w_h + u_h^*) - F_h(u_h^*) - F_h'(u_h^*)w_h, \tag{6.49}$$

onde $F_h = P_h F$. Considerando o operador projeção Q_h^+ dado em (6.35) com $\beta = 0$ obtemos a seguinte decomposição do espaço $X_h^{1/2} = \mathscr{W}_h^+ \oplus \mathscr{W}_h^-$ onde $\mathscr{W}_h^+ = Q_h^+ X_h^{1/2}$ e $\mathscr{W}_h^- = (I - Q_h^+)X_h^{1/2}$, esta decomposição induz a representação da solução do problema (6.49) na forma $w_h = v_h + z_h$.

Denotando por $\bar{A}_h^+$ a restrição da projeção de $A_h + V_h$ a imagem de Q_h^+ e por $\bar{A}_h^-$ a restrição de $A_h + V_h$ ao núcleo de Q_h^+ podemos reescrever o problema (6.49) como um sistema acoplado

$$\begin{cases} v_h' + \bar{A}_h^+ v_h = H_h(v_h, z_h), \\ z_h' + \bar{A}_h^- z_h = G_h(v_h, z_h), \end{cases} \tag{6.50}$$

onde

$$\begin{aligned} H_h(v_h, z_h) &= Q_h^+[F_h(v_h + z_h + u_h^*) - F_h(u_h^*) - F_h'(u_h^*)(v_h + z_h)], \\ G_h(v_h, z_h) &= (I - Q_h^+)[F_h(v_h + z_h + u_h^*) - F_h(u_h^*) - F_h'(u_h^*)(v_h + z_h)]. \end{aligned}$$

Observemos que $H_h(0,0) = 0 = G_h(0,0)$. Além disso, sob as hipóteses dadas para F e P_h segue que H_h e G_h são continuamente Fréchet diferenciáveis com $H_h'(0,0) = 0 = G_h'(0,0)$.

Usando a Observação 6.1.3 e a Observação 6.1.4, segue que, dado $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $(v_h, z_h) \in B_\delta(0,0)$ e $h \in (0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned} &\|H_h(v_h, z_h)\|_{\mathscr{W}_h^+} \leq \rho, \quad \|G_h(v_h, z_h)\|_{X^s} \leq \rho, \\ &\|H_h(v_h, z_h) - H_h(\tilde{v}_h, \tilde{z}_h)\|_{\mathscr{W}_h^+} \leq \rho(\|v_h - \tilde{v}_h\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|z_h - \tilde{z}_h\|_{X^s}), \\ &\|G_h(v_h, z_h) - G_h(\tilde{v}_h, \tilde{z}_h)\|_{X^s} \leq \rho(\|v_h - \tilde{v}_h\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|z_h - \tilde{z}_h\|_{X^s}). \end{aligned} \tag{6.51}$$

para $s = 0, 1/2$. Estamos interessados em estudar o comportamento das soluções próximas ao $(0,0)$, deste modo podemos cortar a não-linearidade H_h e G_h fora da bola $B_\delta(0,0)$ de

modo que as estimativas (6.51) permaneçam válidas para todo $(v_h, z_h) \in X_h^{1/2}$. Não é difícil de mostrar que os resultados do Teorema 3.6.5 são válidos também para $\bar{A}_h^+$.

Como $A_h + V_h$ é setorial, podemos tomar $M > 0$ e $\beta > 0$ apropriadas independentes de $h \in [0, h_0]$ tais que

$$\begin{aligned} &\|e^{-t\bar{A}_h^+} v\|_{\mathscr{W}_h^+} \leq M e^{\beta t} \|v\|_{\mathscr{W}_h^+},\ t \leq 0, \\ &\|e^{-t\bar{A}_h^-} z\|_{X^s} \leq M e^{-\beta t} \|z\|_{X^s},\ t \geq 0, \\ &\|e^{-t\bar{A}_h^-} z\|_{X^s} \leq M t^{-s} e^{-\beta t} \|z\|_{X^s},\ t > 0. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Teorema 6.2.1 *Seja u^* um equilíbrio hiperbólico de (4.4). Então, sabemos que existe uma única $u_h^* \in \mathcal{E}_h$ suficientemente proxima de u^* para todo $h \in [0, h_0]$. Para $D > 0$, $M > 0$, $\varsigma > 0$ e $0 < \vartheta < 1$ dados, seja $\rho_0 > 0$ tal que para todo $0 < \rho \leq \rho_0$, valha*

$$\begin{aligned} \rho M \beta^{s-1} \Gamma(1-s) \leq D, \quad \rho M^2 (1+\varsigma) \beta^{s-1} \Gamma(1-s) \leq \varsigma \\ \frac{\beta}{2} \leq \beta - \rho M(1+\varsigma) \leq \beta, \quad \rho M \Gamma(1-s) \beta^{s-1} \left[1 + \frac{\rho M(1+\varsigma)}{\beta - \rho M(1+\varsigma)} \right] \leq \vartheta < 1 \\ e\ \rho M \beta^{s-1} \Gamma(1-s) + \rho^2 M^2 (1+\varsigma) \beta^{-1} [2\beta - \rho M(1+\varsigma)]^{s-1} \Gamma(1-s) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então, existem $\mathscr{S}_h^* : \mathscr{W}_h^+ \to \mathscr{W}_h^-$ tal que

$$|||\mathscr{S}_h^*|||_{X^s} := \sup_{v \in \mathscr{W}_h^+} \|\mathscr{S}_h^*(v)\|_{X^s} \leq D, \quad \|\mathscr{S}_h^*(v) - \mathscr{S}_h^*(\tilde{v})\|_{X^s} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathscr{W}_h^+}$$

para $s = 0, 1/2$ e, a variedade instável de u_h^* é dada como sendo o gráfico da aplicação $\mathscr{S}_h^*$, por

$$W_h^u := W_h^u(u_h^*) = \{(v_h, z_h) \in X^{1/2} : z_h = \mathscr{S}_h^*(v_h), v_h \in \mathscr{W}_h^+\}.$$

Além disso, existem $\rho_1 > 0$ e $\tilde{M} \geq 1$ independente de h tais que

$$\|z_h(t) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t))\|_{X^s} \leq \tilde{M}(t - t_0)^{-\gamma} e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z_h(t_0) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t_0))\|_{X^s},$$

para todo $t \geq t_0$ e $s = 0, 1/2$, durante o período em que a órbita $(v_h(t), z_h(t))$ permanece na vizinhança de u_h^*.

Por conseguinte, existe $\tilde{C}_0 > 0$ tal que

$$|||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s} \leq \tilde{C}_0 h^{4\theta(1-s)},$$

para todo $h \in (0, h_0]$.

Demonstração. Primeiramente, definamos o seguinte conjunto

$$\mathscr{X}_h = \big\{\mathscr{S}_h^* : \mathscr{W}_h^+ \to \mathscr{W}_h^- \big/ \sup_{v\in\mathscr{W}_h^+} \|\mathscr{S}_h^*(v)\|_{X^s} \leq D, \\ \|\mathscr{S}_h^*(v) - \mathscr{S}_h^*(\tilde{v})\|_{X^s} \leq \varsigma\|v-\tilde{v}\|_{\mathscr{W}_h^+}, v, \tilde{v} \in \mathscr{W}_h^+\big\},$$

munido da aplicação $\|\cdot\|_{\mathscr{X}_h} : \mathscr{X}_h \to [0,\infty)$ dada por

$$\|\mathscr{S}_h^*\|_{\mathscr{X}_h} = \sup_{v\in\mathscr{W}_h^+} \|\mathscr{S}_h^*(v)\|_{X^s}.$$

Não é difícil de verificar que $(\mathscr{X}_h, \|\cdot\|_{\mathscr{X}_h})$ é um espaço métrico completo.

Seja $v_h(t) = \psi(t,\tau,\eta,\mathscr{S}_h^*)$ a solução de

$$\begin{cases} v_h' + \bar{A}_h^+ v_h = H_h(v_h, \mathscr{S}_h^*(v_h)), \quad t < \tau, \\ v_h(\tau) = \eta, \end{cases} \tag{6.53}$$

com $\mathscr{S}_h^* \in \mathscr{X}_h$ e $\eta \in \mathscr{W}_h^+$. Definimos $\Phi : \mathscr{X}_h \to \mathscr{X}_h$ por

$$\Phi(\mathscr{S}_h^*)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)} G_h(v_h(r), \mathscr{S}_h^*(v_h(r)))dr. \tag{6.54}$$

Usando (6.52), obtemos

$$\|\Phi(\mathscr{S}_h^*)(\eta)\|_{X^s} \leq \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau-r)^{-s} e^{-\beta(\tau-r)}\rho dr = \rho M\beta^{s-1}\Gamma(1-s). \tag{6.55}$$

Logo, $\|\Phi(\mathscr{S}_h^*)\|_{\mathscr{X}_h} \leq D$.

Suponhamos agora que $\mathscr{S}_h, \tilde{\mathscr{S}}_h \in \mathscr{X}_h$; $\eta, \tilde{\eta} \in \mathscr{W}_h^+$, e sejam $v_h(t) = \psi(t,\tau,\eta,\mathscr{S}_h)$, $\tilde{v}_h(t) = \psi(t,\tau,\tilde{\eta},\tilde{\mathscr{S}}_h)$. Então,

$$v_h(t) - \tilde{v}_h(t) = e^{-\bar{A}_h^+(t-\tau)}(\eta-\tilde{\eta}) + \int_{\tau}^{t} e^{-\bar{A}_h^+(t-r)}\big[H_h(v_h, \mathscr{S}_h(v_h)) - H_h(\tilde{v}_h, \tilde{\mathscr{S}}_h(\tilde{v}_h))\big]dr.$$

Logo, usando (6.51), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|v_h(t)-\tilde{v}_h(t)\|_{\mathscr{W}_h^+}\\
&\quad\le Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}\big\|H_h(v_h,\mathscr{S}_h(v_h))-H_h(\tilde{v}_h,\tilde{\mathscr{S}}_h(\tilde{v}_h))\big\|_{\mathscr{W}_h^+}dr\\
&\quad\le Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}\big[\|\mathscr{S}_h(v_h)-\tilde{\mathscr{S}}_h(\tilde{v}_h)\|_{X^s}+\|v_h-\tilde{v}_h\|_{\mathscr{W}_h^+}\big]dr\\
&\quad\le Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}\big[\|\mathscr{S}_h(v_h)-\mathscr{S}_h(\tilde{v}_h)\|_{X^s}\\
&\qquad\qquad+\|\mathscr{S}_h(\tilde{v}_h)-\tilde{\mathscr{S}}_h(\tilde{v}_h)\|_{X^s}+\|v_h(r)-\tilde{v}_h(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}\big]dr\\
&\quad\le Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}\big[\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}+(1+\varsigma)\|v_h(r)-\tilde{v}_h(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}\big]dr\\
&\quad\le Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}dr\\
&\qquad\qquad+(1+\varsigma)M\rho\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}\|v_h(r)-\tilde{v}_h(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr.
\end{aligned}
$$

Definamos $\phi(t)=e^{-\beta(t-\tau)}\|v_h(t)-\tilde{v}_h(t)\|_{\mathscr{W}_h^+}$, então

$$
\phi(t)\le M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\int_t^\tau e^{\beta(\tau-r)}dr+(1+\varsigma)M\rho\int_t^\tau\phi(r)dr.
$$

Pelo Lema 1.1.3 supondo sem perda de generalidade $c=1$ e como $\Gamma(1)=1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|v_h(t)-\tilde{v}_h(t)\|_{\mathscr{W}_h^+}&\le\Big(Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}dr\Big)e^{\rho M(1+\varsigma)(\tau-t)}\\
&\le\big(Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\beta^{-1}(1-e^{\beta(t-\tau)})\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\big)e^{\rho M(1+\varsigma)(\tau-t)}\\
&\le\big(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\beta^{-1}\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\big)e^{[\rho M(1+\varsigma)-\beta](\tau-t)},
\end{aligned}
\tag{6.56}
$$

lembrando que $t<\tau$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(\mathscr{S}_h)(\eta)-\Phi(\tilde{\mathscr{S}}_h)(\eta)\|_{X^s}&\le M\int_{-\infty}^\tau(\tau-r)^{-s}e^{-\beta(\tau-r)}\|G_h(v_h,\mathscr{S}_h(v_h))-G_h(\tilde{v}_h,\tilde{\mathscr{S}}_h(\tilde{v}_h))\|_{X^s}dr\\
&\le M\rho\int_{-\infty}^\tau(\tau-r)^{-s}e^{-\beta(\tau-r)}\big(\|\mathscr{S}_h(v_h)-\tilde{\mathscr{S}}_h(\tilde{v}_h)\|_{X^s}+\|v_h-\tilde{v}\|_{\mathscr{W}_h^+}\big)dr\\
&\le M\rho\int_{-\infty}^\tau(\tau-r)^{-s}e^{-\beta(\tau-r)}\big((1+\varsigma)\|v_h-\tilde{v}\|_{\mathscr{W}_h^+}+\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\big)dr.
\end{aligned}
$$

Agora, usando (6.56), resulta

$$\|\Phi(\mathscr{S}_h)(\eta)-\Phi(\tilde{\mathscr{S}}_h)(\eta)\|_{X_h^\alpha}\leq M\rho(1+\varsigma)\big(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\beta^{-1}\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\big)$$
$$\times\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-s}e^{-[\beta-M\rho(1+\varsigma)](\tau-r)}dr+M\rho\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-s}e^{-\beta(\tau-r)}dr.$$

Das propriedades da função Gamma, temos

$$\begin{aligned}\|\Phi(\mathscr{S}_h)(\eta)-\Phi(\tilde{\mathscr{S}}_h)(\eta)\|_{X_h^\alpha}&\leq M\rho(1+\varsigma)\big(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+M\rho\beta^{-1}\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\big)\\&\quad\times[\beta-M\rho(1+\varsigma)]^{s-1}\Gamma(1-s)+M\rho\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\beta^{s-1}\Gamma(1-s)\\&=\big\{M^2\rho^2(1+\varsigma)\beta^{-1}[\beta-M\rho(1+\varsigma)]^{s-1}\Gamma(1-s)+M\rho\beta^{s-1}\Gamma(1-s)\big\}\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\\&\quad+M^2\rho(1+\varsigma)[\beta-M\rho(1+\varsigma)]^{s-1}\Gamma(1-s)\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}\\&=M\rho\Gamma(1-s)\left\{\frac{M\rho(1+\varsigma)\beta^{-1}[\beta-M\rho(1+\varsigma)]^s}{\beta-M\rho(1+\varsigma)}+\beta^{s-1}\right\}\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\\&\quad+M^2\rho(1+\varsigma)[\beta-M\rho(1+\varsigma)]^{s-1}\Gamma(1-s)\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}\\&=M\rho\Gamma(1-s)\beta^{s-1}\left[\frac{M\rho(1+\varsigma)}{\beta-M\rho(1+\varsigma)}+1\right]\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}\\&\quad+M^2\rho(1+\varsigma)\beta^{s-1}\Gamma(1-s)\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+},\end{aligned}$$

onde temos usado que $\beta-M\rho(1+\varsigma)\leq\beta$.

Sejam,

$$I_{\mathscr{S}}(h):=M\rho\Gamma(1-s)\beta^{s-1}\left[1+\frac{M\rho(1+\varsigma)}{\beta-M\rho(1+\varsigma)}\right]\text{ e}$$
$$I_\eta(h):=M^2\rho(1+\varsigma)\beta^{s-1}\Gamma(1-s).$$

Dado $\vartheta<1$, existe ρ_0 tal que, para $\rho\leq\rho_0$, $I_{\mathscr{S}}(h)\leq\vartheta$ e $I_\eta(h)\leq\varsigma$. Assim,

$$\|\Phi(\mathscr{S}_h)(\eta)-\Phi(\tilde{\mathscr{S}}_h)(\eta)\|_{X_h^\alpha}\leq\varsigma\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathscr{W}_h^+}+\vartheta\|\mathscr{S}_h-\tilde{\mathscr{S}}_h\|_{\mathscr{X}_h}.\tag{6.57}$$

As desigualdades (6.55) e (6.57), garantem que Φ é uma contração em $\mathscr{X}_h$. Portanto, existe um único ponto fixo $\mathscr{S}_h^*=\Phi(\mathscr{S}_h^*)\in\mathscr{X}_h$.

A seguir, provaremos que $W_h^u:=\big\{(v,z)\in X_h^\alpha:z=\mathscr{S}_h^*(v),v\in\mathscr{W}_h^+\big\}$ é uma variedade invariante para (6.50). Sejam $(v_0,z_0)\in W_h^u$ com $z_0=\mathscr{S}_h^*(v_0)$ e $v_h^*(t)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases}v_h'+\bar{A}_h^+v_h=H_h(v_h,\mathscr{S}_h^*(v_h))\\v_h(0)=v_0.\end{cases}$$

Isto, define uma curva $(v_h^*(t), \mathscr{S}_h^*(v_h^*(t))) \in W_h^u$, $t \in \mathbb{R}$. Podemos ver que a única solução de

$$z_h' + \bar{A}_h^- z_h = G_h(v_h^*, \mathscr{S}_h^*(v_h^*)),$$

que permanece limitada quando $t \to -\infty$ é

$$z_h^*(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\bar{A}_h^-(t-r)} G_h(v_h^*(r), \mathscr{S}_h^*(v_h^*(r)))dr = \mathscr{S}_h^*(v_h^*(t)).$$

Portanto, $(v_h^*(t), \mathscr{S}_h^*(v_h^*(t)))$ é uma solução de (6.50) passando por (v_0, z_0), mostrando assim a invariância de W_h^u.

Agora, mostraremos que a variedade instável é exponencialmente atratora. Provaremos que se H_h e G_h satisfazem (6.51) para todo $(v_h, z_h) \in \mathscr{W}_h^+ \oplus \mathscr{W}_h^-$ com ρ suficientemente pequeno, e $(v_h(t), z_h(t))$, $t \in \mathbb{R}$ é uma solução global de (6.50) que está em W_h^u, então $z_h(t) = \mathscr{S}_h^*(v_h(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Com esta idéia mostraremos que existe $\gamma > 0$, independente de h, tal que

$$\|z_h(t) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t))\|_{X^s} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}(t-t_0)^{-s}\|z_h(t_0) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t_0))\|_{X^s}, \forall t \geq t_0.$$

Note que, para $t \geq t_0 + 1$, temos

$$\|z_h(t) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t))\|_{X^s} \leq Me^{-(t-t_0)}\|z_h(t_0) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t_0))\|_{X^s}.$$

Quando $t_0 \to -\infty$, obtemos $z_h(t) = \mathscr{S}_h^*(v_h(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $y_h(r,t)$ com $r \leq t$ a solução de

$$\begin{cases} y_h' + \bar{A}_h^+ y_h = H_h(y_h, \mathscr{S}_h^*(y_h)),\ r \leq t \\ y_h(t,t) = v_h(t). \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra o que ocorre em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Definindo $\xi_h(t) = z_h(t) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t))$ e usando (6.52), temos

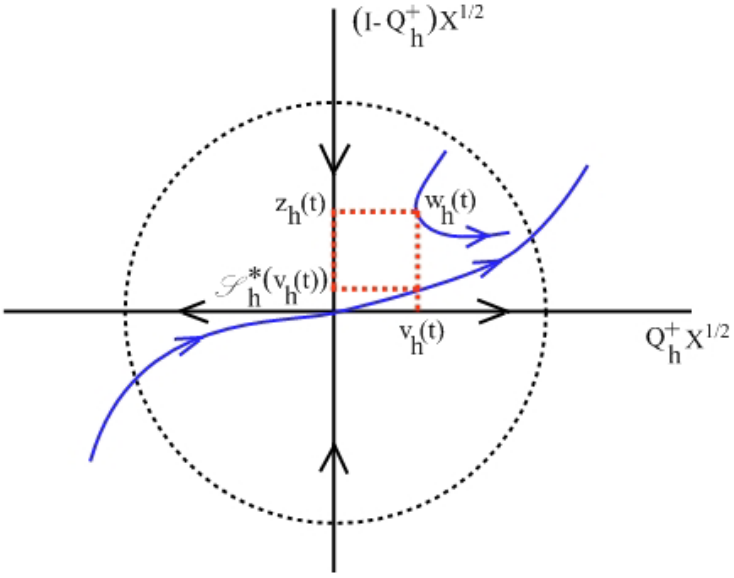


Figura 6.2: A Variedade Instável.

$$
\begin{aligned}
\|y_h(r,t)-v_h(r)\|_{\mathscr{W}_h^+} &= \Big\| e^{-\bar{A}_h^+(r-t)}y_h(t,t) + \int_t^r e^{-\bar{A}_h^+(r-\theta)}H_h(y_h(\theta,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t)))d\theta \\
&\qquad - e^{-\bar{A}_h^+(r-t)}v_h(t) - \int_t^r e^{-\bar{A}_h^+(r-\theta)}H_h(v_h(\theta),z_h(\theta))d\theta\Big\|_{\mathscr{W}_h^+} \\
&\le \Big\| \int_t^r e^{-\bar{A}_h^+(r-\theta)}\big[H_h(y_h(\theta,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t))) - H_h(v_h(\theta),z_h(\theta))\big]d\theta\Big\|_{\mathscr{W}_h^+} \\
&\le \rho M\int_r^t e^{\beta(r-\theta)}\big[\|y_h(\theta,t)-v_h(\theta)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t))) - z_h(\theta)\|_{X^s}\big]d\theta \\
&\le \rho M\int_r^t e^{\beta(r-\theta)}\big[\|y_h(\theta,t)-v_h(\theta)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t)) - \mathscr{S}_h^*(v_h(\theta))\|_{X^s} \\
&\qquad + \|\mathscr{S}_h^*(v_h(\theta)) - z_h(\theta)\|_{X^s}\big]d\theta \\
&\le \rho M\int_r^t e^{\beta(r-\theta)}\big[(1+\varsigma)\|y_h(\theta,t)-v_h(\theta)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|\xi_h(\theta)\|_{X^s}\big]d\theta.
\end{aligned}
$$

Se $\varphi_h(t) = e^{-\beta r}\|y_h(r,t)-v_h(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}$, então

$$
\varphi_h(t) \le \rho M(1+\varsigma)\int_r^t \varphi_h(\theta)d\theta + \rho M\int_r^t e^{-\beta\theta}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta, \quad r\le t.
$$

Pelo Lema 1.1.3 e supondo sem perda de generalidade que $d = 1 = c'$, obtemos

$$
\|y_h(r,t)-v_h(r)\|_{\mathscr{W}_h^+} \le \rho M\int_r^t e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-r)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta, \quad r\le t. \tag{6.58}
$$

Agora, seja $r \leq t_0 \leq t$, então

$$\begin{aligned}
\|y_h(r,t)-y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+} &\leq \left\|e^{-\bar{A}_h^+(r-t_0)}[y_h(t_0,t)-v_h(t_0)]\right\|_{\mathscr{W}_h^+} \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^{r} e^{-\bar{A}_h^+(r-\theta)}[H_h(y_h(\theta,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t))) - H_h(y_h(\theta,t_0),\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t_0)))]d\theta \right\|_{\mathscr{W}_h^+} \\
&\leq Me^{\beta(r-t_0)}\|y_h(t_0,t)-v_h(t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+} \\
&\quad + M\int_{r}^{t_0} e^{\beta(r-\theta)}\|H_h(y_h(\theta,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t))) - H_h(y_h(\theta,t_0),\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t_0)))\|_{\mathscr{W}_h^+}d\theta \\
&\leq Me^{\beta(r-t_0)}\|y_h(t_0,t)-v_h(t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+} \\
&\quad + \rho M\int_{r}^{t_0} e^{\beta(r-\theta)}[\|y_h(\theta,t)-y_h(\theta,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|\mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t)) - \mathscr{S}_h^*(y_h(\theta,t_0))\|_{X^s}]d\theta \\
&\leq \rho M^2 e^{\beta(r-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-t_0)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta \\
&\qquad + \rho M(1+\varsigma)\int_{r}^{t_0} e^{\beta(r-\theta)}\|y_h(\theta,t)-y_h(\theta,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+}d\theta,
\end{aligned}$$

onde temos usado (6.58).

Supondo que $\kappa(r) = e^{-\beta r}\|y_h(r,t)-y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+}$, temos

$$\kappa(r) \leq \rho M^2 e^{-\beta t_0}\int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-t_0)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta + \rho M(1+\varsigma)\int_{r}^{t_0}\kappa(\theta)d\theta.$$

Novamente, usando o Lema 1.1.3, mais especificamente a desigualdade (1.10), obtemos

$$\|y_h(r,t)-y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+} \leq \rho M^2\int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-r)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta. \tag{6.59}$$

Agora, vamos estimar o termo $\|\xi_h(t)\|_{X^s}$. Para isto, observemos

$$\begin{aligned}
\xi_h(t)-e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}\xi_h(t_0) &= z_h(t) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t)) - e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}[z_h(t_0)-\mathscr{S}_h^*(v_h(t_0))] \\
&= \int_{t_0}^{t} e^{-\bar{A}_h^-(t-r)}G_h(v_h(r),z_h(r))dr - \mathscr{S}_h^*(v_h(t)) + e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}\mathscr{S}_h^*(v_h(t_0)) \\
&= \int_{t_0}^{t} e^{-\bar{A}_h^-(t-r)}G_h(v_h(r),z_h(r))dr - \int_{-\infty}^{t} e^{-\bar{A}_h^-(t-r)}G_h(y_h(r,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t)))dr \\
&\quad + e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\bar{A}_h^-(t_0-r)}G_h(y_h(r,t_0),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t_0)))dr \\
&= \int_{t_0}^{t} e^{-\bar{A}_h^-(t-r)}\big[G_h(v_h(r),z_h(r)) - G_h(y_h(r,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t)))\big]dr \\
&\quad - \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\bar{A}_h^-(t-r)}\big[G_h(y_h(r,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t))) - G_h(y_h(r,t_0),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t_0)))\big]dr.
\end{aligned}$$

Logo, usando (6.51) e (6.52), resulta

$$
\begin{aligned}
&\|\xi_h(t) - e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}\xi_h(t_0)\|_{X_h^\alpha} \\
&\quad \le M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|G_h(v_h(r),z_h(r)) - G_h(y_h(r,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t)))\|_{X^s}dr \\
&\qquad + M\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\|G_h(y_h(r,t),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t))) - G_h(y_h(r,t_0),\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t_0)))\|_{X^s}dr \\
&\quad \le \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\big[\|v_h(r) - y_h(r,t)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|z_h(r) - \mathscr{S}_h^*(y_h(r,t))\|_{X^s}\big]dr \\
&\qquad + \rho M\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\big[\|y_h(r,t) - y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|\mathscr{S}_h^*(y_h(r,t)) - \mathscr{S}_h^*(y_h(r,t_0))\|_{X_h^\alpha}\big]ds \\
&\quad \le \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\big[\|v_h(r) - y_h(r,t)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|z_h(r) - \mathscr{S}_h^*(y_h(r,t))\|_{X^s}\big]dr \\
&\qquad + \rho M(1+\varsigma)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\|y_h(r,t) - y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr \\
&\quad \le \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\big[\|v_h(r) - y_h(r,t)\|_{\mathscr{W}_h^+} + \|z_h(r) - \mathscr{S}_h^*(v_h(r))\|_{X^s} \\
&\quad + \|\mathscr{S}_h^*(v_h(r)) - \mathscr{S}_h^*(y_h(r,t))\|_{X^s}\big]dr + \rho M(1+\varsigma)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\|y_h(r,t) - y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr \\
&\quad \le \rho M(1+\varsigma)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|v_h(r) - y_h(r,t)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr + \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|\xi_h(r)\|_{X^s}dr \\
&\qquad + \rho M(1+\varsigma)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\|y_h(r,t) - y_h(r,t_0)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr.
\end{aligned}
$$

Assim, usando (6.58), (6.59) e o Teorema de Fubini, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|\xi_h(t) - e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}\xi_h(t_0)\|_{X_h^\alpha} \le \rho^2M^2(1+\varsigma)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\int_{r}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-r)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta dr \\
&\quad + \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|\xi_h(r)\|_{X_h^\alpha}dr + \rho^2M^3(1+\varsigma)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-r)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}d\theta dr \\
&\quad \le \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|\xi_h(r)\|_{X^s}dr \\
&\quad + \rho^2M^2(1+\varsigma)e^{-\beta t}\int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)]\theta}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}\int_{t_0}^{\theta} e^{[2\beta-\rho M(1+\varsigma)]r}drd\theta \\
&\quad + \rho^2M^3(1+\varsigma)e^{-\beta t}\int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)]\theta}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s}\int_{-\infty}^{t_0} e^{[2\beta-\rho M(1+\varsigma)]r}drd\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|\xi_h(t) - e^{-\bar{A}_h^-(t-t_0)}\xi_h(t_0)\|_{X_h^\alpha} \leq \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\varsigma)}{2\beta - \rho M(1+\varsigma)}\right] \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|\xi_h(r)\|_{X^s} dr$$
$$+ \frac{\rho^2 M^3(1+\varsigma)}{2\beta - \rho M(1+\varsigma)} e^{-\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-[\beta-\rho M(1+\varsigma)](\theta-t_0)}\|\xi_h(\theta)\|_{X^s} d\theta.$$

Das propriedades da norma, a desigualdade (6.52) e $\beta - \rho M(1+\varsigma) \leq \beta$, obtemos

$$e^{\beta(t-t_0)}\|\xi_h(t)\|_{X^s} \leq M\|\xi_h(t_0)\|_{X^s} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\varsigma)}{2\beta - \rho M(1+\varsigma)}\right] \int_{t_0}^{t} e^{\beta(r-t_0)}\|\xi_h(r)\|_{X^s} dr$$
$$+ \frac{\rho^2 M^3(1+\varsigma)}{2\beta - \rho M(1+\varsigma)} \int_{t_0}^{t} e^{-[2\beta-\rho M(1+\varsigma)](r-t_0)} e^{\beta(r-t_0)}\|\xi_h(r)\|_{X^s} dr$$
$$\leq M\|\xi_h(t_0)\|_{X^s} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\varsigma)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\varsigma)}\right] \int_{t_0}^{t} e^{\beta(r-t_0)}\|\xi_h(r)\|_{X^s} dr.$$

Do Lema 1.1.3, segue

$$\|\xi_h(t)\|_{X^s} \leq M\|\xi_h(t_0)\|_{X^s} e^{-\gamma(t-t_0)},$$

onde

$$\gamma = \beta - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\varsigma)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\varsigma)}\right] > 0,$$

com γ independente de h, sempre que, β, M, ρ e ς independem de h para $0 \leq h \leq \bar{h}_0$. Assim,

$$\|z_h(t) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t))\|_{X^s} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\|z_h(t_0) - \mathscr{S}_h^*(v_h(t_0))\|_{X^s}, \ \forall t \geq t_0.$$

Logo, fazendo $t_0 \to \infty$, temos $z_h(t) = \mathscr{S}_h^*(v_h(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Com um abuso de notação, acabamos de mostrar que para cada vizinhança $B(u_h^*, \delta)$ de u_h^* com $\delta < \bar{\delta}_0$, se $u_h \in B(u_h^*, \delta)$, então existem $\gamma > 0$ e $M > 0$, independentes de h, tais que

$$d(T_h(t)u_h, W^u(u_h^*)) \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}$$

durante o tempo em que a órbita $T_h(t)u_h$ de u_h permanece em $B(u_h^*, \delta)$.

Finalmente mostraremos a continuidade das variedades instáveis dos pontos de equilíbrio. Isto é, se $u_h^* \in \mathcal{E}_h$ com $h \leq \bar{h}_0$ é tal que sua variedade instável é dada pelo gráfico de $\mathscr{S}_h^*$, mostremos que

$$|||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s} = \sup_{\eta \in B(0,r_0)} \|\mathscr{S}_h^*(P_h\eta) - P_h\mathscr{S}_0^*(\eta)\|_{X^s} \leq Ch^{4\theta(1-s)},$$

onde $B(0, r_0)$ é uma bola em $\mathscr{W}_0^+$ e lembremos que $\dim(\mathscr{W}_0^+) = \dim(\mathscr{W}_h^+) < \infty$. De fato,

observemos

$$
\begin{aligned}
&\|\mathscr{S}_h^*(P_h\eta) - P_h\mathscr{S}_0^*(\eta)\|_{X^s} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\|e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}G_h(v_h(r),\mathscr{S}_h^*(v_h(r))) - P_h e^{-\bar{A}_0^-(\tau-r)}G_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\right\|_{X^s} dr \\
&\leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\|e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}G_h(v_h(r),\mathscr{S}_h^*(v_h(r))) - e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}G_h(P_hv_0(r),P_h\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\right\|_{X^s} dr \\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} \left\|e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}G_h(P_hv_0(r),P_h\mathscr{S}_0^*(v_0(r))) - e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}P_hG_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\right\|_{X^s} dr \\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} \left\|e^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}P_hG_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r))) - P_he^{-\bar{A}_h^-(\tau-r)}G_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\right\|_{X^s} dr.
\end{aligned}
\tag{6.60}
$$

Denotemos as três últimas integrais por I_1, I_2 e I_3, respectivamente. Assim,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{-\infty}^{\tau} Me^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-s}\left\|G_h(v_h(r),\mathscr{S}_h^*(v_h(r))) - G_h(P_hv_0(r),P_h\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\right\|_X dr \\
&\leq \int_{-\infty}^{\tau} Me^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-s}\rho\big[(1+\varsigma)\|v_h(r)-P_hv_0(r)\|_{\mathscr{W}_h^+} + |||\mathscr{S}_h^*P_h - P_h\mathscr{S}_0^*|||_{X^s}\big]dr \\
&\leq \rho M\beta^{s-1}\Gamma(1-s)|||\mathscr{S}_h^*P_h - P_h\mathscr{S}_0^*|||_{X^s} \\
&\qquad + \rho M(1+\varsigma)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-s}\|v_h(r)-P_hv_0(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr.
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

Agora,

$$
I_2 \leq \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau-r)^{-s}e^{-\beta(\tau-r)}\left\|G_h(P_hv_0(r),P_h\mathscr{S}_0^*(v_0(r))) - P_hG_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\right\|_X dr.
$$

Podemos observar

$$
\begin{aligned}
&G_h(P_hv_0,P_hS_0) - P_hG_0(v_0,S_0) \\
&\qquad = (I-Q_h^+)[F_h(P_hv_0+P_hS_0+u_h^*) - F_h(u_h^*) - F_h'(u_h^*)(P_hv_0+P_hS_0)] \\
&\qquad - (I-Q_h^+)[P_hF(v_0+S_0+u_0^*) - P_hF(u^*) - P_hF'(u^*)(v_0+S_0)] \\
&\qquad + (I-Q_h^+)[P_hF(v_0+S_0+u^*) - P_hF(u^*) - P_hF'(u^*)(v_0+S_0)] \\
&\qquad - P_h(I-Q_0^+)[F(v_0+S_0+u^*) - F(u^*) - F'(u^*)(v_0+S_0)] \\
&\qquad = (I-Q_h^+)\Upsilon_h + (P_hQ_0^+ - Q_h^+P_h)[F(v_0+S_0+u^*) - F(u^*) - F'(u^*)(v_0+S_0)],
\end{aligned}
$$

onde $S_h = \mathscr{S}_h^*(v_h(r))$, $v_0 = v_0(r)$ e

$$\begin{aligned}\Upsilon_h = {} & F_h(P_h v_0 + P_h S_0 + u_h^*) - F_h(u_h^*) - F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0) \\ & - P_h[F(v_0 + S_0 + u^*) - F(u^*) - F'(u^*)(v_0 + S_0)].\end{aligned}$$

Usando (6.40), (6.26), (5.17), (5.22) e (4.53), obtemos

$$\begin{aligned}&\|F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0) - P_h F'(u^*)(v_0 + S_0)\|_X \\ &\quad \le \|F'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0 - v_0 - S_0)\|_X + \|P_h(F'(u_h^*) - F'(u^*))(v_0 + S_0)\|_X \\ &\quad \le \|F'(u_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|P_h(v_0 + S_0) - (v_0 + S_0)\|_X + \|P_h(F'(u_h^*) - F'(u^*))\|_X\|v_0 + S_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad \le \|F'(u_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}\|P_h(v_0 + S_0) - (v_0 + S_0)\|_{X^s} + \|P_h(F'(u_h^*) - F'(u^*))\|_{X^s}\|v_0 + S_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad \le C\tilde{C}(R,\tau)r^{-\theta}h^{4\theta(1-s)} + Ch^{2(1-s)}C_\infty \\ &\quad \le Ch^{2(1-s)}C_\infty, \qquad (6.62)\end{aligned}$$

pois $r \in (-\infty, \tau]$.

Por outro lado, usando (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}\|F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0) - & P_h F'(u^*)(v_0 + S_0)\|_X \\ & \le \|F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0)\|_X + \|P_h F'(u^*)(v_0 + S_0)\|_X \\ & \le \tilde{C}(R)(\|P_h v_0 + P_h S_0\|_{X^{1/2}} + \|v_0 + S_0\|_{X^{1/2}}) \\ & \le 2C\tilde{C}(R)\rho. \qquad (6.63)\end{aligned}$$

Interpolando (6.62) e (6.63) com 2θ e $1 - 2\theta$, respectivamente. Tem-se,

$$\|F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0) - P_h F'(u^*)(v_0 + S_0)\|_X \le C(R,\tau,\rho)h^{4\theta(1-s)}. \qquad (6.64)$$

Agora, usando (6.40), (6.23) e (6.64), obtemos

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_h\|_X \le {} & \|F_h(P_h v_0 + P_h S_0 + u_h^*) - P_h F(v_0 + S_0 + u_0^*)\|_X \\ & + \|F_h(u_h^*) - P_h F(u^*)\|_X + \|F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0) - P_h F'(u^*)(v_0 + S_0)\|_X \\ & \le \|F'(\bar{\xi}_h^*)\|_{L^\infty(\Omega)}(\|P_h(v_0 + S_0) - (v_0 + S_0)\|_{X^s} + \|u_h^* - u^*\|_{X^s}) + C(R)h^{4\theta(1-s)} \\ & + \|F_h'(u_h^*)(P_h v_0 + P_h S_0) - P_h F'(u^*)(v_0 + S_0)\|_X \\ & \le C(\tilde{C}(R,t_0)r^{-\theta}h^{4\theta(1-s)} + C(R)h^{4\theta(1-s)}) + C(R)h^{4\theta(1-s)} + C(R,\tau,\rho)h^{4\theta(1-s)} \\ & \le \tilde{C}(R,\tau,\rho)h^{4\theta(1-s)}.\end{aligned}$$

Note que, usando

$$\|Q_h^+P_h - P_hQ_0^+\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\beta^+} \|(z-A_h-V_h)^{-1}P_h - P_h(z-A-V_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,X^s)}|dz|$$
$$\leq \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}\int_{\Gamma_\beta^+}|z|^{(1-s)(2\theta-1)}|dz| \leq \frac{Ch^{4\theta(1-s)}}{2\pi}(\beta-\delta)^{(1-s)(2\theta-1)}|\Gamma_\beta^+|,$$

onde $|\Gamma_\beta^+|$ é o cumprimento de Γ_β^+. Logo,

$$I_2 \leq \Big(M\beta^{s-1}\Gamma(1-s)\tilde{C}(R,\tau,\rho) + \frac{C\rho(\beta-\delta)^{(1-s)(2\theta-1)}|\Gamma_\beta^+|}{2\pi}\Big)h^{4\theta(1-s)}. \tag{6.65}$$

Por último, usando o Corolário 6.1.5, obtemos

$$I_3 \leq C\rho h^{4\theta(1-s)}\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-(2\theta(1-s)+s)}dr$$
$$\leq C\rho\beta^{(2\theta-1)(1-s)}\Gamma(1-2\theta(1-s)-s)h^{4\theta(1-s)}. \tag{6.66}$$

Assim, substituindo (6.61), (6.65) e (6.66) em (6.60), temos

$$\|\mathscr{S}_h^*(P_h\eta) - P_h\mathscr{S}_0^*(\eta)\|_{X^s} \leq \bar{C}h^{4\theta(1-s)} + \rho M\beta^{s-1}\Gamma(1-s)|||\mathscr{S}_h^*P_h - P_h\mathscr{S}_0^*|||_{X^s}$$
$$+ \rho M(1+\varsigma)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-s}\|v_h(r) - P_hv_0(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr,$$

onde $\bar{C} = \max\{M\beta^{s-1}\Gamma(1-s)\tilde{C}(R,\tau,\rho) + \dfrac{C\rho(\beta-\delta)|\Gamma_\beta^+|}{2\pi}, C\rho\beta^{(2\theta-1)(1-s)}\Gamma(1-2\theta(1-s)-s)\}$.

Portanto é suficiente estimar $\|v_h(t)-P_hv_0(t)\|_{\mathscr{W}_h^+}$. Como $\eta \in B(0,r)$, de maneira análoga com o feito anteriormente, obtemos

$$\|v_h(t) - P_hv_0(t)\|_{\mathscr{W}_h^+} \leq \big\|e^{-\bar{A}_h^+(t-\tau)}P_h\eta - P_he^{-\bar{A}_0^+(t-\tau)}\eta\big\|_{\mathscr{W}_h^+}$$
$$+ \int_t^\tau \big\|e^{-\bar{A}_h^+(t-r)}H_h(v_h(r),\mathscr{S}_h^*(v_h(r))) - e^{-\bar{A}_h^+(t-r)}H_h(P_hv_0(s),P_h\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\big\|_{\mathscr{W}_h^+}dr$$
$$+ \int_t^\tau \big\|e^{-\bar{A}_h^+(t-r)}H_h(P_hv_0(r),P_h\mathscr{S}_0^*(v_0(r))) - e^{-\bar{A}_h^+(t-r)}P_hH_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\big\|_{\mathscr{W}_h^+}dr$$
$$+ \int_t^\tau \big\|e^{-\bar{A}_h^+(t-r)}P_hH_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r))) - P_he^{-\bar{A}_0^+(t-r)}H_0(v_0(r),\mathscr{S}_0^*(v_0(r)))\big\|_{\mathscr{W}_h^+}dr$$
$$\leq \bar{C}_0e^{\beta(t-\tau)}h^{4\theta(1-s)} + \rho M|||\mathscr{S}_h^*P_h - P_h\mathscr{S}_0^*|||_{X^s}\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}dr$$
$$+ \rho M(1+\varsigma)\int_t^\tau e^{\beta(t-r)}\|v_h(r) - P_hv_0(r)\|_{\mathscr{W}_h^+}dr.$$

Seja $\zeta(t) = e^{\beta(\tau-t)}\|v_h(t) - P_h v_0(t)\|_{\mathscr{W}_h^+}$. Então,

$$\zeta(t) \leq \bar{C}_0 h^{4\theta(1-s)} + \rho M |||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s} \int_t^\tau e^{\beta(\tau-r)} dr + \rho M(1+\varsigma) \int_t^\tau \zeta(r) dr.$$

Como antes, usando o Lema 1.1.3, temos

$$\|v_h(t) - P_h v_0(t)\|_{\mathscr{W}_h^+} \leq \big[\bar{C}_0 h^{4\theta(1-s)} + \rho M \beta^{-1} |||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s}\big] e^{[\rho M(1+\varsigma)-\beta](\tau-t)}.$$

Com isto, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{S}_h^*(P_h\eta) - P_h\mathscr{S}_0^*(\eta)\|_{X^s} \leq \bar{C} h^{4\theta(1-s)} + \rho M \beta^{s-1}\Gamma(1-s) |||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s} \\
&\quad + \rho M(1+\varsigma) \int_{-\infty}^\tau e^{[\rho M(1+\varsigma)-2\beta](\tau-r)} (\tau-r)^{-s} \big[\bar{C}_0 h^{4\theta(1-s)} + \rho M \beta^{-1} |||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s}\big] dr \\
&\leq \tilde{C}_0 h^{4\theta(1-s)} \\
&+ \Big\{\rho M \beta^{s-1}\Gamma(1-s) + \rho^2 M^2 (1+\varsigma)\beta^{-1}[2\beta - \rho M(1+\varsigma)]^{s-1}\Gamma(1-s)\Big\} |||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_0 = \Big\{\bar{C} + \rho M(1+\varsigma)[2\beta - \rho M(1+\varsigma)]^{s-1}\Gamma(1-s)\bar{C}_0\Big\}$. Portanto,

$$|||\mathscr{S}_h^* P_h - P_h \mathscr{S}_0^*|||_{X^s} \leq \tilde{C}_0 h^{4\theta(1-s)}.$$

■

A seguir, vamos mostrar o resultado principal do trabalho, no qual obteremos as taxas da convergência da continuidade da família dos atratores nos espaços X e $X^{1/2}$.

Teorema 6.2.2 *Seja $\{T_h(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo gradiente não linear associado ao problema (5.99) com atrator global $\mathcal{A}_h$. Suponhamos que existam $\theta \in (0, 1/2)$, $h_0 > 0$, $L > 0$, $\beta > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|T_h(t)u_h^0 - P_h T(t)u^0\|_{X^s} \leq C e^{Lt} t^{-2\theta(1-s)-s}(\|u_h^0 - P_h u^0\|_X + h^{4\theta(1-s)}),$$

para todo $t > 0$ e $s = 0, 1/2$. Além disso, os pontos de equilíbrio do problema (4.4) existam em número finito $\mathcal{E}_0 = \{u_{1,0}^*, \cdots, u_{\mathfrak{p},0}^*\}$ e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $h \in (0, h_0]$,

(i) O semigrupo $\{T_h(t) : t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrios $\mathcal{E}_h = \{u_{1,h}^*, \cdots, u_{\mathfrak{p},h}^*\}$ e

$$\mathcal{A}_h = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^{\mathrm{u}}(u_{i,h}^*);$$

(*ii*) *Existe* $\rho > 0$ *tal que dado* $B \subset X^{1/2}$ *limitado, existe* $c = c(B) > 0$ *tal que*

$$d_H^{X^s}(T_h(t)B, \mathcal{A}_h) \leq ce^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

(*iii*) *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$d_H^{X^s}(\mathcal{A}_h, P_h\mathcal{A}_0) + d_H^{X^s}(P_h\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_h) \leq Ch^{\frac{4\theta(1-s)\rho}{\rho+L}},$$

onde $d_H^{X^s}(A, B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \|a - b\|_{X^s}$ *com* $A, B \subset X$ *é a semidistância de Hausdorff.*

Demonstração. (*i*) Segue-se da Observação 6.1.3, a Proposição 6.1.2 e o Teorema 3.6.4.
(*ii*) Segue-se da caracterização dos atratores obtida no item (*i*) do Teorema 1.5.7, Teorema 1.5.8 e do Teorema 6.2.1, pois

$$d_H^{X^s}(T_h(t)B, \mathcal{A}_h) \leq ce^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

onde $c > 0$ e $\rho > 0$ independente de h.
(*iii*) Segue-se do Teorema 1.5.10, com isto obtemos

$$d_H^{X^s}(\mathcal{A}_h, P_h\mathcal{A}_0) + d_H^{X^s}(P_h\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_h) \leq Ch^{\frac{4\theta(1-s)\rho}{\rho+L}},$$

para alguma constante $C > 0$ independente de h e para todo $h \in (0, h_0]$. ■

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] AMBROSETTI, A.; ARCOYA, D. **An introduction to nonlinear functional analysis and elliptic problems**. New York: Springer, 2011.

[3] AMBROSETTI, A.; PRODI, G. **A primer of nonlinear analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[4] ARRIETA, J. M.; BEZERRA, F. D. M.; CARVALHO, A. N. Rate of convergence of attractors for some singularly perturbed parabolic problems. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, Torun, v. 41, n. 2, p. 229–253, 2013.

[5] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N. Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of the domain. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 199, n. 1, p. 143–178, 2004.

[6] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; LOZADA-CRUZ, G. J. Dynamics in dumbbell domains I: continuity of the set of equilibria. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 231, n. 2, p. 551–597, 2006.

[7] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; LOZADA-CRUZ, G. J. Dynamics in dumbbell domains II: the limiting problem. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 247, n. 1, p. 174–202, 2009a.

[8] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; LOZADA-CRUZ, G. J. Dynamics in dumbbell domains III: continuity of attractors. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 247, n. 1, p. 225–259, 2009b.

[9] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A. Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions: uniform bounds. **Communications in Partial Differential Equations**, New York, v. 25, n. 1/2, p. 1–37, 2000.

[10] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A. Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 156, n. 2, p. 376–406, 1999.

[11] BABIN, A. V.; VISHIK, M. I. **Attractors in evolutionary equations**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1992. (Studies in mathematics and its applications, v. 25).

[12] BEZERRA, F. D. M. **Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão perturbadas**. 2009. 147 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-06042010-142547/pt-br.php>. Acesso em: 9 mar. 2010.

[13] BOLLOBÁS, B. **Linear analysis:** an introductory course. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1999.

[14] BRAMBLE, J. H.; ZLÁMAL, M. Triangular elements in the finite element method. **Mathematics of Computation**, Providence, v. 24, n. 112, p. 809–820, 1970.

[15] BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. **The mathematical theory of finite element methods**. New York: Springer-Verlag, 1996.

[16] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle:** théorie et applications. Paris: Masson, 1987. (Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise).

[17] BRUSCHI, S. M.; CARVALHO, A. N.; RUAS-FILHO, J. G. The dynamics of a one-dimensional parabolic problem versus the dynamics of its discretization. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 168, n. 1, p. 67–92, 2000.

[18] BURENKOV, V. I. **Sobolev spaces on domains**. Leipzig: B. G. Teubner, 1998. (Teubner-texte zur mathematik, v. 137).

[19] CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W.; Exponential global attractors for semigroups in metric spaces with applications to differential equations. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge, v. 31, n. 6, p. 1641–1667, 2011.

[20] CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; An extension of the concept of gradient semigroup wich is stable under perturbations. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 246, n. 7, p. 2646–2668, 2009.

[21] CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. Finite-dimensional global attractors in Banach spaces. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 249, n. 12, p. 3099–3109, 2010.

[22] CARVALHO, A. N., PISKAREV, S. A general approximations scheme for attractors of abstract parabolic problems. **Numerical Functional Analysis and Optimization**, New York, v. 27, n. 7/8, p. 785–829, 2006.

[23] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. **Attractors for equations of mathematical physics**. Providence: American Mathematical Society, 2002. (American mathematical society colloquium publications, v. 49).

[24] CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T. Global attractor for sectorial evolutionary equation. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 125, n. 23, p. 27-39, 1996.

[25] CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T. **Global attractors in abstract parabolic problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[26] CHUESHOV, I. D. **Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems**. Kharkov: ACTA Scientific Publishing House, 2002.

[27] DEIMLING, K. **Nonlinear functional analysis**. New York: Springer-Verlag, 1984.

[28] ENGEL, K. J.; NAGEL, R. **One-parameter semigroups for linear evolution equations**. New York: Springer-Verlag, 2000. (Graduate texts in mathematics, v. 194).

[29] EVGRAFOV, M. A. **Asymptotic estimatives and entire functions**. New York: Gordon and Breach, 1961.

[30] FRIEDMAN, A. **Partial differential equations**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[31] FUJITA, H.; MIZUTANI, A. On the finite element method for parabolic equations I: approximation of holomorphic semi-groups. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, Tokyo, v. 28, n. 4, p. 749–771, 1976.

[32] FUJITA, H.; SAITO, N.; SUZUKI, T. **Operator theory and numerical methods**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 2001. (Studies in mathematics and its applications, v. 30).

[33] HALE, J. K. **Asymptotic behavior of dissipative systems**. Providence: American Mathematical Society, 1988.

[34] HALE, J. K.; MAGALHÃES, L. T.; OLIVA, W. M. **Dynamics in infinite dimensions**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2002. (Applied mathematical sciences, v. 47).

[35] HALE, J. K.; RAUGEL, G. Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Bologna, v. 154, n. 4, p. 281–326, 1989.

[36] HENRY, D. **Dan Henry's manuscripts:** evolution equations in Banach spaces. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm>. Acesso em: 10 set. 2009.

[37] HENRY, D. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[38] KATO, T. **Perturbation theory for linear operators**. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[39] KESAVAN, S. **Topics in functional analysis and applications**. New Delhi: New Age International, 2003.

[40] KRASNOSEL'SKIĬ, M. A.; ZABREIKO, P.P. **Geometrical methods of nonlinear analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 1884. (Grundlehren der mathematischen wissenschaften, v. 263).

[41] LADAS, G. E.; LAKSHMIKANTHAM, V. **Differential equations in abstract spaces**. New York: Academic Press, 1972.

[42] LADYZHENSKAYA, O. **Attractors for semigroups and evolution equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[43] MITROVIĆ, D.; ŽUBRINIĆ, D. **Fundamentals of applied functional analysis:** distributions - Sobolev spaces - nonlinear elliptic equations. Harlow: Longman, 1998. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, v. 91).

[44] OTTEN, D. **Attraktoren für finite-elemente diskretisierungen parabolischer differentialgleichungen**. 2009. 182 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, 2009. Disponível em: <http://www.

math.uni-bielefeld.de/%7Edotten/publikationen.shtml>. Acesso em: 10 jan. 2012.

[45] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. 2nd ed. New york: Springer-Verlag, 1992.

[46] ROBINSON, J. C. **Infinite-dimensional dynamical systems:** an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[47] RUDIN, W. **Functional analysis**. New York: McGraw-Hill, 1973.

[48] SELL, G. R.; YOU, Y. **Dynamics of evolutionary equations**. New York: Springer-Verlag, 2002. (Applied mathematical sciences, v. 143).

[49] STUMMEL, F. Diskrete konvergenz linearer operatoren I. **Mathematische Annalen**, Berlin, v. 190, p. 45–92, 1970.

[50] TAYLOR, A.; LAY, D. **Introduction to functional analysis**. New York: Wiley, 1980.

[51] TRIEBEL H., **Interpolation theory, function spaces, differential operators**. Berlin: VEB Deutscher, 1978.

[52] VAINIKKO, G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). **Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications**, Oxford, v. 2, n. 6, p. 647–687, 1978.

[53] VAINIKKO, G. **Funktionalanalysis der diskretisierungsmethoden**. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1976.

[54] VAINIKKO, G. **Multidimensional weakly singular integral equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[55] VAINIKKO, G. Regular convergence of operators and approximate solution of equations. **Itogi Nauki i Tehniki**: Seriya Matematicheskii Analiz, Moscow, v. 16, p. 5–53, 1979.

[56] VRABIE, I. I. **C_0-semigroups and applications**. Amsterdam: Elsevier, 2003.

[57] WOLF-JÜRGEN, B.; PISKAREV, S. Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. **Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B**, Springfield, v. 10, n. 1, p. 19–42, 2008.

[58] ZHENG, S. **Nonlinear evolution equations**. Boca Raton: Chapman and Hall, 2004. (Monographs and surveys in pure and applied mathematics 133).

[59] ZLÁMAL, M. Curved elements in the finite element method I. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Philadelphia, v. 10, n. 1, p. 229–240, 1973.

[60] ZLÁMAL, M. Curved elements in the finite element method II. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Philadelphia, v. 11, n. 2, p. 347–362, 1974.

[61] ZLÁMAL, M. Finite element methods for parabolic equations. **Mathematics of Computation**, Providence, v. 28, n. 126, p. 393–404, 1974.

Índice

$\alpha-$limite, 29
$\mathscr{P}\mathscr{Q}-$convergência, 83
$\mathscr{P}-$convergência, 80
$\mathscr{P}-$relativamente compacta, 83
$\mathscr{P}^{\alpha}-$contínua, 104
$\mathscr{P}^{\alpha}-$semicontínua
    inferior, 104
    superior, 104
$\omega-$limite, 29
$\varepsilon-$cadeia, 50
    do conjunto Ξ^*, 53
Índice relativo, 58
Órbitas, 29

Absorção, 41
Admissível, 58
Assintoticamente compacto, 42
Atração, 41
Atrator, 41
    gradient-like, 50
    exponencial, 57

Base nodal, 61

Compacto
    dissipativo, 42
Conjunto
    de variáveis nodais, 61
    Star-Shaped, 66
Conjuntos
    invariantes isolados, 53
    invariantes isolados atrai pontos de X, 53
Continuidade, 44
Convergência
    compacta, 84

Desigualdade
    de Hölder, 25
    de Cauchy, 26
    de Gagliardo-Nirenberg, 26
    de Gronwall generalizada, 27
    de Poincaré, 25
    de Sobolev, 67
    de Young, 26
Domínio elementar, 61

Elemento finito, 61
    de classe C^r, 73
    equivalente afim, 64
    equivalente afim interpolante, 65
    equivalente interpolante, 64
Espaço
    de funções forma, 61
Eventualmente compacto, 42
Eventualmente limitado, 42

Fórmula Integral de Cauchy, 35
Função cut-off, 66
Função de Liapunov, 48

Imersões de Sobolev, 28
Interpolante
    global, 73
    local, 61
Invariância, 41

Lema
de Bramble-Hilbert, 68
Limitado
dissipativo, 42

Média do Polinômio de Taylor, 66
Medida de não-compacidade, 90

Operador
setorial, 30

Perturbação
de um operador setorial, 32
Ponto
dissipativo, 42
hiperbólico, 105
isolado de $\sigma(A)$, 39
recorrente por cadeias, 51
Projeção
de Ritz, 138
ortogonal, 137

Semi-distância de Hausdorff, 41
Semicontinuidade
inferior, 43
superior, 43
Semigrupo, 28
analítico, 31
coletivamente assintoticamente compacto, 52
com atrator gradient-like, 50
gradient-like, 51
gradient-like generalizado, 54
gradiente, 48
Solução
global em X^α, 36
local em X^α, 35
Subdivisão, 73
do domínio, 62
não-degenerada ou regular, 73
quase-uniforme, 73

Teorema
da Alternativa de Fredholm, 40
de estimativas inversas, 77
do Módulo máximo, 38
Ponto Fixo de Schauder, 59

Variedade
estável de Ξ^*, 54
instável, 49
instável de Ξ^*, 54
instável instável local de Ξ^*, 54