

Jeferson Back Vanderlinde

**PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE
TRANSMISSÃO USANDO TÉCNICAS
ESPECIALIZADAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA
MISTA**

Ilha Solteira

2017

Jeferson Back Vanderlinde

**PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE
TRANSMISSÃO USANDO TÉCNICAS
ESPECIALIZADAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA
MISTA**

Trabalho apresentado como requisito para a obtenção do título de doutor no Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Ilha Solteira.

Especialidade: Automação.

Rubén Augusto Romero Lázaro
Orientador

Yong Fu
Coorientador

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

V235p Vanderlinde, Jeferson Back.
Planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando técnicas especializadas de programação inteira mista / Jeferson Back Vanderlinde. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
153 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2017

Orientador: Rubén Augusto Romero Lázaro

Co-orientador: Yong Fu

Inclui bibliografia

1. Dual simplex canalizado. 2. Branch and bound. 3. Primal simplex canalizado. 4. Programação linear inteira mista. 5. Planejamento da expansão de sistemas de transmissão. 6. Modelos de transporte e linear disjuntivo.

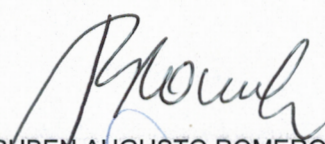
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando técnicas especializadas de programação inteira mista

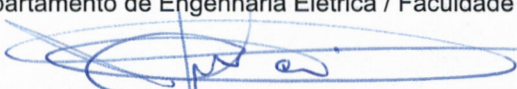
AUTOR: JEFERSON BACK VANDERLINDE

ORIENTADOR: RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

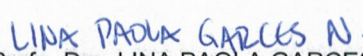
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. JOSE ROBERTO SANCHES MANTOVANI

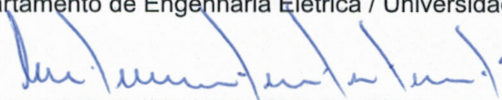
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. ANTONIO PADILHA FELTRIN

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Profa. Dra. LINA PAOLA GARCES NEGRETE

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de Goiás


Prof. Dr. LUIS GUSTAVO WESZ DA SILVA

Departamento de Industrias / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Ilha Solteira, 06 de setembro de 2017

DEDICO

Este trabalho ao meu pai, Maurício Vanderlinde, e à minha mãe, Jacinta Juliana Back Vanderlinde, que me educaram e lutaram muito para que alcançasse mais essa conquista, exemplos de vida fundamentais para mim, e à minha querida esposa, Debora Aparecida Barbosa Vanderlinde que me apoiou e lutou comigo nessa etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as bênçãos recebidas em minha vida e por me prover força, conhecimento e inteligência para que eu alcançasse mais esta vitória.

Aos meus pais, Maurício Vanderlinde e Jacinta Juliana Back Vanderlinde, pela boa educação e suporte que me deram, por terem lutado muito para que eu tivesse sucesso e pelo incentivo que me deram para que eu continuasse estudando e nunca desistisse diante dos obstáculos. Aos meus irmãos, Keila Cristina Back Vanderlinde e Douglas Vanderlinde, pelo apoio concedido nos momentos difíceis.

Eu também gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Rubén Augusto Romero Lázaro pela ajuda concedida no mestrado e doutorado, pelo apoio e dedicação em todo o período de orientação deste trabalho.

Meus agradecimentos aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. José Roberto Sanches Mantovani, Prof. Dr. Antonio Padilha Feltrin, Profa. Dra. Lina Paola Garces Negrete, Prof. Dr. Luis Gustavo Wesz da Silva pelas sugestões e críticas construtivas.

Aos professores da UNEMAT - Campus Universitário de Sinop, principalmente Dr. Rogério dos Reis Gonçalves, Dr. Milton Luiz Neri Pereira, Dr. Silvio Cesar Garcia Granja e Dra. Vera Lúcia Vieira de Camargo, pelo incentivo, ajuda e amizade.

Aos meus caríssimos amigos, Dr. João Toledo da Silva, Sueli Terezinha Ribeiro Soares Toledo da Silva e Lucas Toledo da Silva por serem quase uma família para mim, sempre me apoiando, ajudando e me ensinando coisas novas durante todo o doutorado.

Aos amigos do LAPSEE, principalmente, Diogo Rupolo, Renzo Amilcar Vargas Peralta e Leonardo Henrique Faria Macedo Possagnolo. Aos demais amigos de outros laboratórios.

Agradeço também à UNESP, ao departamento de Engenharia Elétrica da FEIS, pela estrutura oferecida para o desenvolvimento do trabalho. À CAPES pelo apoio financeiro concedido durante o doutorado e doutorado-sanduíche.

Finalmente, à minha esposa, Debora Aparecida Barbosa Vanderlinde, declaro minha completa e mais sincera admiração e agradecimento pelo amor, dedicação, companheirismo, paciência e compreensão nesta fase de minha educação e por compartilharmos nossas alegrias.

Sinceramente,

Jeferson Back Vanderlinde,

07 de setembro de 2017

“Deixem que o futuro diga a verdade e avalie cada um de acordo com o seu trabalho e realizações. O presente pertence a eles, mas o futuro pelo qual eu sempre trabalhei pertence a mim.”

Nikola Tesla

RESUMO

Neste trabalho, consideram-se a análise teórica e a implementação computacional dos algoritmos Primal Simplex Canalizado (PSC) e Dual Simplex Canalizado (DSC) especializados. Esses algoritmos foram incorporados em um algoritmo *Branch and Bound* (B&B) de modo a resolver o problema de Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão (PEST). Neste caso, o problema PEST foi modelado usando os chamados modelo de Transportes e modelo Linear Disjuntivo (LD), o que produz um problema de Programação Linear Inteiro Misto (PLIM). O algoritmo PSC é utilizado na resolução do problema de Programação Linear (PL) inicial após desconsiderar a restrição de integralidade do problema PLIM original. Juntamente com o algoritmo PSC, foi implementada uma estratégia para reduzir o número de variáveis artificiais adicionadas ao PL, consequentemente reduzindo o número de iterações do algoritmo PSC. O algoritmo DSC é utilizado na reotimização eficiente dos subproblemas gerados pelo algoritmo B&B, através do quadro ótimo do PL inicial, excluindo, assim, a necessidade da resolução completa de cada subproblema e, consequentemente, reduzindo o consumo de processamento e memória. Nesta pesquisa, é apresentada uma nova proposta de otimização, e, consequentemente, a implementação computacional usando a linguagem de programação FORTRAN que opera independentemente de qualquer *solver*.

Palavras-chave: Dual simplex canalizado. Branch and bound. Primal simplex canalizado. Programação linear inteira mista. Planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Modelo de transportes. Modelo linear disjuntivo.

ABSTRACT

In this research, the theoretical analysis and computational implementation of the specialized dual simplex algorithm (DSA) and primal simplex algorithm (PSA) for bounded variables is considered. These algorithms have been incorporated in a Branch and Bound (B&B) algorithm to solve the Transmission Network Expansion Planning (TNEP) problem. In this case, the TNEP problem is modeled using transportation model and linear disjunctive model (DM), which produces a mixed-integer linear programming (MILP) problem. After relaxing the integrality of investment variables of the original MILP problem, the PSA is used to solve the initial linear programming (LP) problem. Also, it has been implemented a strategy in PSA to reduce the number of artificial variables which are added into the LP problem, and consequently reduces the number of iterations of PSA. Through optimal solution of the initial LP, the DSA is used in efficient reoptimization of subproblems, resulting from the B&B algorithm, thus excludes the need for complete resolution of each subproblems, which results reducing the CPU time and memory consumption. This research presents the implementation of the proposed approach using the FORTRAN programming language which operates independently and does not use any commercial solver.

Keywords: Dual simplex for bounded variables. Branch and bound. Primal simplex for bounded variables. Mixed-integer linear programming. Transmission network expansion planning. Transportation model. Linear disjunctive model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema didático de 3 barras	33
Figura 2 – Uma das árvores <i>Branch and Bound</i> de solução do sistema de 3 barras com uma linha na topologia base mostrado na Figura 1.	56
Figura 3 – Determinação simplificada de estimativas através de pseudocustos para seleção do subproblema candidato a ser resolvido pelo algoritmo B&B	62
Figura 4 – Fluxograma do Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	67
Figura 5 – Fluxograma do Algoritmo Primal Simplex Canalizado	78
Figura 6 – Fluxograma do Algoritmo Dual Simplex Canalizado	90
Figura 7 – Estrutura inicial do modelo de transporte para a construção do PL	92
Figura 8 – Matriz de incidência nó-ramo para o modelo de transporte	93
Figura 9 – Matriz dos coeficientes das barras geradoras	94
Figura 10 – Estrutura completa do modelo de transporte para a construção do PL	95
Figura 11 – Matrizes de coeficientes das variáveis básicas B e não básicas N_1 e N_2	96
Figura 12 – Matriz de coeficientes das variáveis de ângulo para o modelo linear disjuntivo	99
Figura 13 – Estrutura inicial do modelo linear disjuntivo para a construção do PL	100
Figura 14 – Matriz dos coeficientes das variáveis de investimento referente à restrição do número máximo de linhas que podem ser construídas em cada caminho do sistema no modelo linear disjuntivo.	101
Figura 15 – Matriz dos coeficientes das variáveis de investimento referente à restrição que garante a construção sequencial de cada linha candidata no modelo linear disjuntivo.	102
Figura 16 – Matriz de coeficientes das variáveis de folga e artificiais, limites e vetores de custos do modelo linear disjuntivo	104
Figura 17 – Estrutura completa do modelo linear disjuntivo para a construção do PL	105
Figura 18 – Solução ótima do modelo de transporte para o sistema de 3 barras com uma linha na topologia base encontrada em P_2	110
Figura 19 – Solução ótima do modelo de transporte para o sistema de 3 barras com uma linha na topologia base encontrada em P_6	111
Figura 20 – Árvore <i>Branch and Bound</i> do modelo de transporte para o sistema de 3 barras com uma linha na topologia base	111
Figura 21 – Sistema de Garver com 6 barras e 15 caminhos	115
Figura 22 – Sistema IEEE(a) com 24 barras e 41 caminhos	116
Figura 23 – Sistema Sul-Brasileiro com 46 barras e 79 caminhos	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quadro Simplex Canalizado Alternativo	68
Tabela 2 – Notação a ser utilizada	69
Tabela 3 – Quadro Simplex Canalizado Alternativo de Duas Fases	80
Tabela 4 – Estrutura inicial do sistema de três barras no modelo de transporte para a construção do PL	108
Tabela 5 – Estrutura inicial do sistema de três barras no modelo de transporte para a construção do PL resolvido passo a passo	109
Tabela 6 – Estrutura completa do sistema de três barras no modelo de transporte para a construção do PL resolvido passo a passo	110
Tabela 7 – Estrutura inicial do sistema de três barras no modelo linear disjuntivo para a construção do PL	112
Tabela 8 – Matriz de coeficientes das variáveis de folga e artificiais, limites e vetores de custos do modelo linear disjuntivo para o sistema de três barras	113
Tabela 9 – Desempenho dos algoritmos no planejamento do sistema de Garver	118
Tabela 10 – Desempenho dos algoritmos no planejamento do sistema IEEE(a)	119
Tabela 11 – Desempenho dos algoritmos no planejamento do sistema Sul-Brasileiro	119
Tabela 12 – Soluções ótimas do sistema de Garver	121
Tabela 13 – Soluções ótimas do sistema IEEE(a)	121
Tabela 14 – Soluções ótimas do sistema Sul-Brasileiro	121
Tabela 15 – Quadro Primal Simples Canalizado Inicial de P_0	134
Tabela 16 – Quadro ótimo de P_0	139
Tabela 17 – Quadro ótimo de P_2	141
Tabela 18 – Quadro ótimo de P_1	142
Tabela 19 – Quadro ótimo de P_4	143
Tabela 20 – Quadro ótimo de P_6	145
Tabela 21 – Quadro ótimo de P_5	146
Tabela 22 – Quadro ótimo de P_8	147
Tabela 23 – Dados das barras do sistema de Garver	149
Tabela 24 – Dados dos caminhos do sistema de Garver	149
Tabela 25 – Dados das barras do sistema IEEE(a)	149
Tabela 26 – Dados dos caminhos do sistema IEEE(a)	150
Tabela 27 – Dados das barras do sistema Sul-Brasileiro	151
Tabela 28 – Dados dos caminhos do sistema Sul-Brasileiro	152

LISTA DE ALGORITMOS

1	Algoritmo de Garver	52
2	Algoritmo <i>Branch and Bound</i> Básico	55
3	Algoritmo Primal Simplex Canalizado	75
4	Algoritmo Dual Simplex Canalizado	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Meta-heurística <i>ant colony</i>
AG	Algoritmo de Garver
B&B	<i>Branch and Bound</i>
CC	Modelo de Corrente Contínua
CA	Modelo de Corrente Alternada
DSC	Dual Simplex Canalizado
EA	Algoritmos Evolutivos - <i>Evolutionary algorithms</i>
GRASP	Meta-heurística GRASP - <i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure</i>
GA	Algoritmos genéticos - <i>Genetic algorithm</i>
KKT	Condições de Karush-Kuhn-Tucker
LCK	Lei das Correntes de Kirchhoff
LIFO	<i>Last In First Out</i>
LTK	Lei das Tensões de Kirchhoff
LD	Modelo Linear Disjuntivo
LI	Limite Inferior
LS	Limite Superior
PEST	Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão
PL	Programação Linear
PLBM	Programação Linear Binário Misto
PLI	Programação linear inteiro
PLIM	Programação Linear Inteiro Misto
PNLIM	Programação Não Linear Inteiro Misto
PSO	Meta-heurística <i>particle swarm optimization</i>
PSC	Primal Simplex Canalizado
PR	<i>Path Relinking</i>

SA	Meta-heurística <i>simulated annealing</i>
SBF	Solução Básica Factível
TS	Meta-heurística <i>tabu search</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Operadores

$D(x)$ Operador que cria uma matriz quadrada com os elementos de um vetor qualquer x na diagonal principal e os demais elementos da matriz iguais a zero.

Conjuntos

$\mathbb{Z}$ conjunto dos números inteiros.

Ω_b conjunto das barras do sistema de transmissão.

Ω_l conjunto dos caminhos do sistema de transmissão.

Ω_l^0, Ω_l^1 conjunto dos caminhos nos quais já existem linhas na configuração base.

Ω_l^2 conjunto dos caminhos novos.

I conjunto das variáveis inteiras.

R_1 conjunto de índices das variáveis não básicas que estão fixadas nos seus limites inferiores.

R_2 conjunto de índices das variáveis não básicas que estão fixadas nos seus limites superiores.

Y conjunto das linhas que podem ou não ser adicionadas no caminho ij .

Constantes

$0_{m,n}$ matriz de m linhas e n colunas com todos os elementos iguais a zero.

$1_{m,n}$ matriz de m linhas e n colunas com todos os elementos iguais a um.

$\bar{\mathcal{F}}$ vetor que define os limites do fluxo total de potência ativa em cada caminho ij no modelo de transporte.

$\bar{\mathcal{F}}^0$ vetor que define os limites do fluxo total de potência ativa nas linhas existentes em cada caminho ij no modelo linear disjuntivo.

$\bar{g}_g$ vetor com os valores de $\bar{g}_i$ somente das barras que possuem geração.

$\infty_{m,n}$ matriz de m linhas e n colunas com todos os elementos iguais a infinito (∞).

$\bar{f}_{ij}$ máximo fluxo de potência ativa permitido para uma linha no caminho ij .

$\bar{f}_{ij}^0, \bar{f}_{ij}^1$	máximo fluxo de potência ativa permitido para uma linha no conjunto de linhas existentes no caminho ij .
$\bar{f}_{ij}^2$	máximo fluxo de potência ativa permitido para uma linha no conjunto de linhas novas no caminho ij .
$\bar{g}_i$	máxima capacidade de geração na barra i .
$\bar{n}_{ij}$	número máximo de linhas permitidas no caminho ij .
$\bar{n}_{ij}^1$	número máximo de linhas que pode ser adicionado em paralelo a linhas já existentes no caminho ij .
$\bar{n}_{ij}^2$	número máximo de linhas permitido em novos caminhos ij .
θ_k	ângulo de fase da barra de referência k .
A	matriz dos coeficientes das variáveis do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
A^*	parte inicial da matriz de coeficientes A , cujas colunas correspondem às variáveis originais do problema.
A^{fa}	matriz dos coeficientes das variáveis de folga e artificiais.
A_0	matriz dos coeficientes das variáveis artificiais adicionadas nas restrições de igualdade; essa matriz tem a forma de uma matriz identidade, mas o sinal de alguns elementos da diagonal principal podem ser negativos.
A_1	matriz dos coeficientes das variáveis artificiais extras que são adicionadas nas restrições de desigualdade quando necessário; cada coluna dessa matriz tem somente um elemento diferente de zero, sendo -1 na linha referente à restrição onde foi adicionada a variável artificial.
a_{ij}	um elemento da matriz de coeficientes A .
a_i	linha i da matriz de coeficientes A .
B	solução básica factível para o PL.
b	vetor de termos constantes do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
b_{fn0}	vetor com os valores da multiplicação do fluxo máximo de potência e o número de linhas existentes em cada caminho ij no modelo de transporte.

b_i	um elemento do vetor de termos constantes b .
c	vetor com valores de c_{ij} .
c	vetor de custos do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
c'	vetor de custos da função objetivo de Fase I.
c'^{fa}	vetor de custos da função objetivo de Fase I das variáveis de folga e artificiais.
c^*	vetor linha inicial de custos do PL.
c^{fa}	vetor de custo das variáveis de folga e artificiais.
c_B	custos referentes às variáveis básicas.
c_{ij}	custo de construção de uma linha no caminho ij .
c_{N_1}	custos referentes às variáveis não básicas fixadas em seus limites inferiores.
c_{N_2}	custos referentes às variáveis não básicas fixadas em seus limites superiores.
d	vetor com os valores de d_i .
d_i	demanda de potência ativa na barra i .
G	matriz dos coeficientes das barras geradoras g_i .
I_m	matriz identidade com m linhas e colunas.
l	vetor com os limites inferiores das variáveis do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
l^*	vetor coluna inicial com os limites inferiores das variáveis originais do problema.
l^{fa}	vetor com os limites inferiores das variáveis de folga e artificiais.
M	um número suficientemente grande.
m	número de restrições do problema.
n	número de variáveis do problema.
N_1	matriz de coeficientes das variáveis não básicas fixadas nos seus limites inferiores.
N_2	matriz de coeficientes das variáveis não básicas fixadas nos seus limites superiores.
n_{ij}^0	número de linhas existentes na configuração base no caminho ij .

na	número de variáveis artificiais.
nae	número de variáveis artificiais extras que são adicionadas ao PL quando uma variável de folga não pode fazer parte da SBF inicial.
nb	número de barras existentes no sistema.
nf	número de variáveis de folga.
ng	número de barras que possuem geração.
nl	número de linhas do sistema.
no	número de caminhos com linhas existentes na configuração base do sistema.
ns	número de restrições que garantem a alocação sequencial das linhas em cada caminho ij .
nt	número de variáveis de ângulo do modelo linear disjuntivo.
nw	número máximo de linhas que podem ser adicionadas ao sistema.
P_0	problema de programação linear inicial com integralidade relaxada no algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
P_k	problema de programação linear descendente do problema inicial com integralidade relaxada no algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
S	matriz de incidência nó-ramo.
S^0	matriz de incidência nó-ramo que corresponde à matriz dos coeficientes das variáveis de fluxo de potência ativa nas linhas existentes.
T	matriz dos coeficientes das variáveis de ângulo referente às restrições da lei de tensões de Kirchhof nas linhas novas no modelo linear disjuntivo.
T'	matriz dos coeficientes das variáveis de ângulo referente à restrição da lei de tensões de Kirchhof nas linhas existentes no modelo linear disjuntivo.
u	vetor com os limites superiores das variáveis do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
u^*	vetor coluna inicial com os limites superiores das variáveis originais do problema.
u^{fa}	vetor com os limites superiores das variáveis de folga e artificiais.

- W_S matriz dos coeficientes das variáveis de investimento $w_{ij,y}$ na restrição que garante a alocação sequencial das novas linhas em cada caminho ij do sistema elétrico no modelo linear disjuntivo.
- W_T matriz dos coeficientes das variáveis de investimento $w_{ij,y}$ na restrição de limite do número máximo de novas linhas que podem ser construídas em cada caminho ij do sistema elétrico no modelo linear disjuntivo.
- x_{ij} reatância no caminho ij .

Variáveis contínuas

- $\bar{b}$ vetor do quadro simplex com os valores correntes das variáveis básicas.
- $\bar{x}_0, y_{00}$ valor corrente da função objetivo no quadro simplex.
- θ_i ângulo de fase na barra i .
- $\tilde{z}_{00}$ novo valor da função objetivo, após a mudança de base, no algoritmo Dual Simplex Canalizado.
- $f_{ij,y}$ fluxo de potência ativa na linha y no caminho ij .
- f_{ij} fluxo de potência ativa total no caminho ij .
- f_{ij}^0, f_{ij}^1 fluxo de potência ativa para o conjunto de linhas existentes no caminho ij .
- f_{ij}^2 fluxo de potência ativa para o conjunto de linhas novas no caminho ij .
- f_{ij}^v fluxo de potência ativa total da topologia corrente para cada caminho ij .
- f_i^k parte fracionária de n_i^k .
- f_j^k parte fracionária de n_j^k .
- g_i geração de potência ativa da barra i .
- n_i^*, x_j^* valor corrente não inteiro da variável inteira escolhida para separar o PL do problema de programação linear inteiro misto no algoritmo *Branch and Bound*.
- P_i^+ pseudocusto de aumento da variável inteira do problema original.
- P_i^- pseudocusto de redução da variável inteira do problema original.
- P_j^+ pseudocusto de aumento da variável inteira usada na separação de um subproblema gerado pelo algoritmo *Branch and Bound*.

P_j^-	pseudocusto de redução da variável inteira usada na separação de um subproblema gerado pelo algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
v_{est}^{k+1}	valor estimado da função objetivo do subproblema descendente em que a variável inteira com valor corrente não inteiro assume um valor inteiro menor que o valor corrente da variável.
v_{est}^{k+2}	valor estimado da função objetivo do subproblema descendente em que a variável inteira com valor corrente não inteiro assume um valor inteiro maior que o valor corrente da variável.
v_{est}^k	valor estimado da função objetivo da melhor solução inteira de um subproblema candidato k do algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
V_{inc}, v^*	solução incumbente do algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
v_{inf}	limitante inferior dos subproblemas de PL descendentes no algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
v_{inf}^k	limitante inferior do subproblema de PL candidato PC^k do algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
v_{PL}	valor ótimo da função objetivo para o problema de PL corrente no algoritmo <i>Branch and Bound</i> .
v_{PL}^{k+}	valor ótimo do subproblema de PL descendente de k obtido com o aumento da variável n_j .
v_{PL}^{k-}	valor ótimo do subproblema de PL descendente de k obtido com a redução da variável n_j .
v_{PL}^k	valor ótimo do subproblema de PL relaxado k .
x	vetor das variáveis do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
$x^{a(e)}$	variáveis artificiais extras adicionadas nas restrições de desigualdade quando algumas variáveis de folga não podem fazer parte da SBF inicial.
x_0	valor da função objetivo do problema de programação linear inteiro misto na forma padrão.
x_a	vetor de variáveis artificiais.
x_{Bi}	variável básica i do quadro simplex.
x_{Bm}	última variável básica do quadro simplex.
x_{Br}	variável básica do quadro simplex escolhida para sair da base.

x_B	variáveis básicas.
x_i	um elemento do vetor de variáveis x .
x_i^a	uma variável artificial do vetor de variáveis artificiais x_a .
x_i^f	uma variável de folga.
x_j	variável não básica j do quadro simplex.
x_k	variável não básica do quadro simplex escolhida para entrar na base.
x_{N_1}	variáveis não básicas fixadas nos seus limites inferiores.
x_{N_2}	variáveis não básicas fixadas nos seus limites superiores.
y'_{0j}	coeficientes de custo relativo da variável não básica j no quadro simplex após o processo de pivotagem.
y_{0j}	coeficiente de custo relativo da variável não básica j no quadro simplex.
y_{0k}	coeficiente de custo relativo da variável não básica no quadro simplex escolhida para entrar na base.
y_{i0}	valor corrente da variável básica i no quadro simplex.
y_{ij}	valor corrente do elemento do quadro simplex correspondente à linha da variável básica i e à coluna da variável não básica j .
y_{ik}	valor corrente do elemento do quadro simplex correspondente à linha da variável básica i e à coluna da variável não básica escolhida para entrar na base.
y_{m0}	valor corrente da última variável básica no quadro simplex.
y_{mj}	valor corrente do elemento do quadro simplex correspondente à linha da última variável básica e à coluna da variável não básica j .
y_{mk}	valor corrente do elemento do quadro simplex correspondente à linha da última variável básica e à coluna da variável não básica escolhida para entrar na base.
y_{r0}	valor corrente da variável básica no quadro simplex escolhida para sair da base.
y_{rj}	valor corrente do elemento do quadro simplex correspondente à linha da variável básica escolhida para sair da base e à coluna da variável não básica j .

- y_{rk} valor corrente do elemento pivô do quadro simplex que corresponde à linha da variável básica escolhida para sair da base e à coluna da variável não básica escolhida para entrar na base.
- z_{00} valor da função objetivo, antes da mudança de base, no algoritmo Dual Simplex Canalizado.

Variáveis inteiras

- $\lfloor n_i^* \rfloor, \lfloor n_j^k \rfloor, \lfloor x_j^* \rfloor$ maior inteiro em que a variável inteira com valor corrente não inteiro escolhida para separar o PL correspondente do problema de programação linear inteiro misto no algoritmo *Branch and Bound* está contida.
- $\lfloor n_i^k \rfloor$ maior inteiro em que a variável inteira i com valor corrente não inteiro está contida, em um nó k da árvore *Branch and Bound*.
- n_{ij} número de linhas que podem ser adicionados no caminho ij .
- n_{ij}^1 número de linhas adicionadas em paralelo às linhas existentes no caminho ij .
- n_{ij}^2 número de linhas adicionadas em caminhos novos ij .
- n_i, n_j^k, x_j variável inteira com valor corrente não inteiro escolhida para separar o PL correspondente do problema de programação linear inteiro misto no algoritmo *Branch and Bound*.
- n_i^k variável inteira i com valor corrente não inteiro em um nó k da árvore *Branch and Bound*.
- $w_{ij,y}$ variável binária correspondente à linha y candidata a ser adicionada ou não no caminho ij .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	33
1.1	O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO	33
1.2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO	36
1.2.1	Modelo de Transportes	36
1.2.2	Modelo CC	37
1.2.3	Modelos Híbridos	39
1.2.3.1	<i>Modelo Híbrido Linear</i>	39
1.2.3.2	<i>Modelo Híbrido Não Linear</i>	40
1.2.4	Modelo Linear Disjuntivo	42
1.3	TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO USADAS NO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO	44
1.3.1	Métodos Clássicos de Otimização	44
1.3.2	Métodos Heurísticos	46
1.3.3	Meta-heurísticas	46
1.4	OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA	49
2	OS MODELOS DE TRANSPORTE E LINEAR DISJUNTIVO E A TÉCNICA BRANCH AND BOUND	51
2.1	O ALGORITMO DE GARVER	51
2.2	ALGORITMO BRANCH AND BOUND	53
2.3	POSSÍVEIS MELHORIAS QUE PODEM SER INCLUÍDAS NO ALGORITMO BRANCH AND BOUND	57
2.3.1	O Conceito de Pseudocusto	59
2.3.2	Seleção do Subproblema Candidato	60
2.3.3	Seleção da Variável de Separação	62
3	ALGORITMOS ESPECIALIZADOS NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND	65
3.1	PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND	65
3.2	QUADRO SIMPLEX ALTERNATIVO PARA VARIÁVEIS CANALIZADAS	67
3.2.1	Pivotagem do Quadro Simplex	69
3.3	ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO	70
3.3.1	Escolha da variável não básica que deve entrar na base	70
3.3.2	Se houver troca de base, escolher a variável básica que deve sair da base	71
3.3.2.1	<i>Uma variável não básica em seu limite inferior é candidata a entrar na base</i>	71

3.3.2.2	<i>Uma variável não básica em seu limite superior é candidata a entrar na base</i>	73
3.3.3	Algoritmo Primal Simplex Canalizado	75
3.3.4	Algoritmo Primal Simplex Canalizado de Duas Fases	77
3.4	ALGORITMO DUAL SIMPLEX CANALIZADO	81
3.4.1	Variações dos valores da função objetivo e das variáveis básicas após a mudança de base	81
3.4.2	Escolha da variável básica que deve sair da base	84
3.4.3	Escolha da variável não básica que deve entrar na base	84
3.4.4	Algoritmo Dual Simplex Canalizado	88
3.5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND	90
3.5.1	Montagem do PL padrão para o modelo de transporte	91
3.5.2	Montagem do PL padrão para o modelo linear disjuntivo	97
3.6	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO ALGORITMO DUAL SIMPLEX CANALIZADO NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND	106
3.7	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS	107
3.7.1	Modelo de Transporte	108
3.7.2	Modelo Linear Disjuntivo	112
4	TESTES COM O ALGORITMO BRANCH AND BOUND ESPECIALIZADO	115
4.1	SISTEMA DE GARVER DE 6 BARRAS E 15 CAMINHOS	115
4.2	SISTEMA IEEE(A) DE 24 BARRAS E 41 CAMINHOS	116
4.3	SISTEMA SUL-BRASILEIRO DE 46 BARRAS E 79 CAMINHOS	117
4.4	RESULTADOS	118
5	CONCLUSÕES	123
5.1	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	125
	REFERÊNCIAS	127
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO DO EXEMPLO ILUSTRATIVO	133
	ANEXO A – DADOS DOS SISTEMAS DE TRANSMISSÃO	149

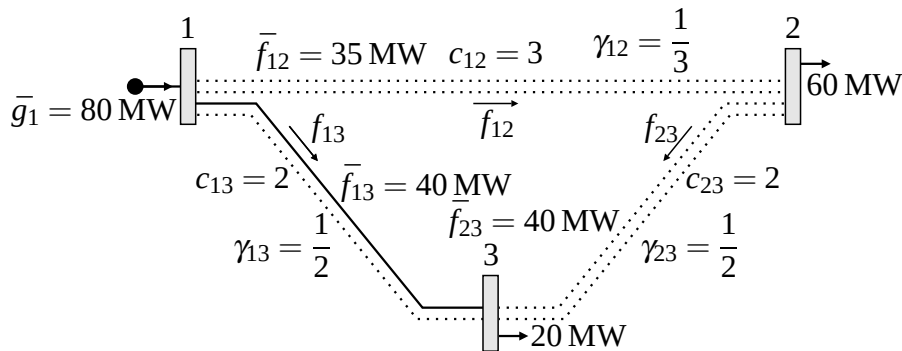
1 INTRODUÇÃO

1.1 O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

O problema de Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão (PEST), em longo prazo, é um problema clássico de sistemas de energia elétrica, onde há diversas pesquisas sobre o tema. O planejamento adequado da expansão dos sistemas de transmissão possui grande importância no mercado de energia atual, pois esses sistemas são responsáveis por transportar a energia produzida pelas usinas até as subestações das concessionárias de distribuição de energia.

Neste problema, dada uma configuração inicial para o sistema de transmissão (linhas candidatas, dados de geração e demanda, limites de operação, custos e restrições de investimento em um horizonte de planejamento), como pode ser visualizado na Figura 1, o objetivo é encontrar o plano ótimo da expansão do sistema, a um custo mínimo, definindo onde, quando e quais tipos de equipamentos e/ou recursos devem ser utilizados ao longo do horizonte de planejamento para que se satisfaça a demanda de energia exigida pelo mercado energético, seguindo especificações de qualidade e segurança do serviço impostas pelas agências reguladoras de cada país.

Figura 1 – Sistema didático de 3 barras



Fonte – Escobar, Romero e Gallego (2010)

Como a grande maioria dos problemas reais, o problema PEST, frequentemente é modelado como um problema de Programação Não Linear Inteiro Misto (PNLIM). O maior problema, ao se resolver um problema PEST modelado como um problema PNLIM, é que, geralmente, o problema não é convexo e não se pode garantir que ele satisfaça as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Isso significa que não se pode garantir que uma determinada solução encontrada seja a solução ótima global do problema. Outro fator importante que dificulta muito a sua resolução é a sua natureza combinatória que proporciona o fenômeno da explosão combinatória em sistemas de grande porte, isto é, proporciona um número elevado de alternativas de investimento.

Como todo problema de otimização matemática, o problema PEST é dividido em duas partes distintas: a modelagem matemática e as técnicas de otimização utilizadas na sua resolução.

A modelagem matemática tem como objetivo representar adequadamente problemas da vida real, através de modelos matemáticos, que, por sua vez, relacionam variáveis de decisão com relações matemáticas dos mais variados tipos e formas. Quando um problema real é modelado, o mesmo pode ser simulado e/ou solucionado, podendo, assim, obter previsões de seu comportamento sobre determinadas condições. A modelagem matemática pode representar um problema real de maneira mais exata ou mais simplificada, ficando evidente, que, quanto maior a precisão de sua representação, maior fica a complexidade de resolução do modelo matemático do problema real. Nesse contexto, é visto que deve haver um comprometimento do modelo matemático escolhido para representar o problema real com a técnica de otimização escolhida para resolvê-lo. A modelagem matemática deve representá-lo adequadamente e ainda permitir sua resolução através das técnicas de otimização com recursos computacionais atualmente existentes (ROMERO, 1999). O conceito de modelagem matemática adequada muda com o tempo, pois, com a continuidade das pesquisas na área de otimização desenvolvendo novas técnicas e com a rápida evolução dos computadores, modelos que antes eram considerados de grande complexidade podem tornar-se adequados em outro contexto.

Na literatura especializada, são apresentados vários modelos de rede elétrica como o modelo de transportes, modelo de corrente contínua (CC), modelos híbridos, modelo linear disjuntivo (LD), modelo de corrente alternada (CA), etc. A Seção 1.2, apresenta de forma mais detalhada, os modelos CC, transportes, híbridos e LD.

Para cada tipo de modelo existe uma técnica de otimização mais adequada. A Seção 1.3 faz uma breve descrição de algumas técnicas de solução empregadas na resolução do problema PEST, dentre elas encontram-se os algoritmos de Decomposição de Benders, algoritmos da família *Branch and Bound* (B&B), algoritmos heurísticos construtivos, algoritmos *simulated annealing* (SA), algoritmos genéticos (GA) e evolutivos (EA), *tabu search* (TS), GRASP, *particle swarm optimization* (PSO), *ant colony* (AC), etc. (LATORRE et al., 2003). No Capítulo 2, é apresentado o algoritmo B&B de forma mais detalhada, pois este é o algoritmo escolhido como técnica de resolução do problema PEST modelado através do modelo de transportes e LD.

Em relação ao horizonte de planejamento, o problema PEST pode ser tratado de duas formas: planejamento estático e planejamento multiestágio ou dinâmico. Naquele, considera-se somente um único período no horizonte de planejamento. Neste, o horizonte de planejamento é dividido em dois ou mais períodos ou estágios, procedimento que facilita a tomada de decisão em etapas e possibilita ao final de cada estágio a revisão do planejamento para estágios posteriores. No planejamento dinâmico da expansão de sistemas de transmissão, para cada estágio é necessário conhecer a geração e a demanda em cada barra do sistema.

Nos modelos utilizados para representar o problema PEST, podem ser adicionadas as exigências de operação segura, as quais produzem um modelo matemático que considera contingências. Em Silva et al. (2005), é apresentado o modelo CC que considera contingências do tipo $(N - 1)$, isto é, o sistema deve ser expandido de forma que opere adequadamente se

for retirada uma linha de transmissão do sistema elétrico devido às contingências. Outra forma alternativa de considerar a expansão segura consiste em abandonar a estratégia $(N - 1)$ e usar a técnica proposta no trabalho de Choi et al. (2005) para modelar o processo de expansão.

Os modelos também podem ser generalizados para considerar incertezas na demanda futura. Essa demanda, no planejamento tradicional, em cada barra é determinística, isto é, assume um valor determinado através de técnicas de previsão de demanda e, para o problema de planejamento, representa um dado de entrada. Entretanto, pode-se considerá-la como uma variável em torno de um valor de referência (SILVA et al., 2006). Assim, deve-se expandir o sistema de forma que se levem em conta as incertezas na demanda futura.

Existem ainda outras exigências que podem ser incorporadas no modelo matemático, tais como as exigências de operação em mercado competitivo do sistema expandido. Isso implica que o sistema deve ser expandido de forma que opere adequadamente no horizonte de planejamento atendendo às exigências de operação em mercado competitivo. Em outras palavras, esse sistema não deve apresentar congestão quando opera com as exigências de operação do mercado elétrico (FANG; HILL, 2003).

Nesta pesquisa, é apresentada uma nova proposta de melhoria do algoritmo B&B empregado na resolução do problema PEST, quando, este é modelado como um problema de programação linear inteiro misto (PLIM). São considerados somente os modelos de transportes e LD básicos, mas a metodologia é desenvolvida de forma que, no futuro, seja estendida para o planejamento multiestágio e que também se considerem exigências de operação segura, incertezas na demanda futura, exigências de operação em mercado competitivo, etc. A proposta apresentada nesse trabalho usa o algoritmo dual simplex canalizado (DSC) para fazer a reotimização dos subproblemas gerados pelo algoritmo B&B, durante o processo de resolução, através do quadro simplex ótimo do problema original com a restrição de integralidade relaxada. Dessa forma, consegue-se uma economia de recursos computacionais e tempo de processamento durante a resolução do problema. Para a resolução do problema original com a restrição de integralidade relaxada foi escolhido o algoritmo primal simplex canalizado (PSC) juntamente com uma estratégia para diminuir o número de variáveis artificiais canalizadas que devem ser inseridas no problema inicial.

Nas seguintes seções deste capítulo, é feita uma revisão dos principais modelos e técnicas de resolução empregados no problema PEST. Na última seção deste mesmo capítulo, são apresentados os objetivos e justificativas dessa pesquisa. O Capítulo 2 apresenta de forma mais detalhada o algoritmo B&B e também o motivo para a escolha dos algoritmos PSC e DSC para atuarem em conjunto com ele. O Capítulo 3, primeiramente, apresenta o funcionamento dos algoritmos PSC e DSC em suas formas padrão; posteriormente, são apresentadas características e peculiaridades da implementação computacional dos algoritmos na resolução do problema PEST. No Capítulo 4, são apresentados os testes realizados com o algoritmo B&B especializado juntamente com os resultados obtidos na resolução dos sistemas de transmissão de Garver com

6 barras e 15 caminhos, IEEE(a) com 24 barras e 41 caminhos, e, o Sul-Brasileiro de 46 barras e 79 caminhos. Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas nessa pesquisa. O Apêndice A apresenta o passo a passo da resolução de um sistema didático de 3 barras e caminhos utilizando a proposta apresentada nessa pesquisa. O Anexo A apresenta os dados de entrada dos sistemas de transmissão resolvidos nessa pesquisa.

1.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

A modelagem matemática pode considerar vários aspectos do problema PEST, dentre eles, modelagem da rede elétrica, forma de planejamento, exigências de segurança, riscos, incertezas na demanda futura, formas de operação devido às regras do mercado de energia elétrica, etc. A modelagem matemática ideal para o problema PEST deveria representar o problema através de relações matemáticas de fluxo de carga CA, as quais levam em consideração a geração de cargas ativa e reativa. Esse tipo de modelagem tem sido pouco explorado tanto que o modelo CA foi uma das últimas modelagens do problema PEST a ser desenvolvido devido a sua alta complexidade e a suas dificuldades de solução. A primeira publicação relevante com o modelo CA foi apresentada por Rider, Garcia e Romero (2007), onde os autores utilizaram um algoritmo heurístico construtivo (AHC) para resolver o problema PEST, juntamente com o método de pontos interiores (MPI) para resolver os problemas de programação não linear (PNL) gerados no processo iterativo do AHC.

1.2.1 Modelo de Transportes

O modelo de transportes foi a primeira proposta sistemática de modelagem do PEST proposto por Garver (1970) em cujo trabalho sugeriu-se a utilização de modelos diferentes para problemas de operação e de planejamento. Sua proposta tornou-se fundamental em pesquisas do problema PEST, pois era a única forma de otimizar o problema com as técnicas disponíveis na época. Devido às dificuldades da utilização do fluxo de carga CA, Garver sugeriu a utilização de modelos matemáticos mais relaxados, também chamados modelos de síntese de rede, que permitem encontrar topologias atrativas para o crescimento do sistema elétrico, mesmo que sejam aproximadas.

O modelo de transportes não utiliza a Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK) e, portanto, é um problema de programação linear (PL). Outro fato importante é a utilização de variáveis inteiras na sua modelagem, o que acarreta uma maior complexidade de solução. Assim, diante dessas observações, a modelagem matemática do problema PEST com o modelo de transportes é um problema PLIM e, mesmo com a característica de ser o modelo de rede mais elementar, em sistemas de grande porte, pode apresentar dificuldades na sua resolução.

O problema PEST, usando o modelo de transportes, pode ser modelado como um problema de PLIM (LATORRE et al., 2003; SILVA, 2013; GALLEGO; MONTICELLI; ROMERO, 1998b; SILVA; GIL; AREIZA, 2000; ESCOBAR, 2008), como mostrado em (1):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} n_{ij} \quad (1a)$$

s.a.

$$\sum_{ji \in \Omega_l} f_{ji} - \sum_{ij \in \Omega_l} f_{ij} + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (1b)$$

$$|f_{ij}| \leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (1c)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (1d)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (1e)$$

$$n_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall ij \in \Omega_l. \quad (1f)$$

A função objetivo (1a) representa o custo do investimento na rede de transmissão devido à adição de novas linhas. A restrição (1b) representa o conjunto de equações de balanço de potência ativa, correspondente à Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK). A restrição (1c) representa as restrições de capacidade de transmissão dos caminhos (linhas e/ou transformadores). Na restrição (1c), o valor absoluto é necessário, pois o fluxo de potência ativa é bidirecional. A restrição (1d) define os limites de geração em cada barra. A restrição (1e) representa os limites do número de linhas que podem ser instalados em cada caminho ij . A restrição (1f) representa o número inteiro de linhas que deve ser adicionado em cada caminho ij , constituindo a maior fonte de complexidade do problema.

As grandes vantagens trazidas pelo modelo de transportes são que, sendo um PLIM, existem várias técnicas que resolvem esse tipo de problema (algumas garantem até a otimalidade da solução) e, praticamente, não existe diferença em modelar problemas conexos ou altamente ilhados, já que a técnica de otimização resolve esse tipo de problema da mesma forma que em sistemas conexos. A principal desvantagem de usar o modelo de transportes é que, no contexto atual, com o avanço no campo computacional, por se tratar do modelo de rede mais elementar e não considerar todas as características físicas do problema, geralmente a solução ótima encontrada pode assumir valores distantes da realidade e dos valores encontrados por outros modelos mais sofisticados.

1.2.2 Modelo CC

Posteriormente ao modelo de transporte, foi desenvolvido o modelo CC que é um problema PNLIM. Atualmente, o modelo CC é considerado a modelagem matemática ideal para o PEST por vários motivos. Entre os principais motivos, citam-se: (i) as dificuldades de utilizar o modelo CA; (ii) a existência de várias técnicas de otimização que resolvem o problema PEST utilizando o modelo CC (ROMERO, 1999; LATORRE et al., 2003; LEE et al., 2006) (iii) a

existência de sistemas em que não se conhece a solução ótima mesmo sendo considerado como modelo ideal e possuindo várias pesquisas em que se aplicam diversas técnicas de otimização para sua resolução. Esse modelo foi e continua sendo amplamente pesquisado pela comunidade científica.

Sendo uma generalização do fluxo de carga CC, o sistema elétrico deve operar obedecendo às duas leis de Kirchhoff. Esse modelo, o qual considera apenas a potência ativa no sistema elétrico, também é uma aproximação, com precisão aceitável, do modelo CA, sendo, portanto, um modelo simplificado da rede de transmissão. Mesmo sendo um modelo aproximado, o modelo matemático é um problema de PNLIM de alta complexidade. A não linearidade do modelo CC eleva consideravelmente o esforço computacional no processo de solução, e também, neste caso é muito difícil garantir que o problema seja convexo, e sem essa garantia não é possível afirmar que a solução encontrada é a solução ótima global do problema. Outro fator que aumenta a complexidade do processo de solução do modelo CC é a utilização de variáveis inteiras na sua modelagem. Para sistemas de grande porte não se conhecem soluções ótimas, mas sim soluções aproximadas de boa qualidade.

O problema PEST, utilizando o modelo CC, pode ser modelado como um problema de PNLIM, como mostrado em (2):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} n_{ij} \quad (2a)$$

s.a.

$$\sum_{ji \in \Omega_l} f_{ji} - \sum_{ij \in \Omega_l} f_{ij} + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (2b)$$

$$f_{ij} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (2c)$$

$$|f_{ij}| \leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (2d)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (2e)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (2f)$$

$$n_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (2g)$$

$$\theta_k = 0 \quad k \in \text{barra de referência.} \quad (2h)$$

A função objetivo (2a) representa o custo do investimento na rede de transmissão devido à adição de novas linhas. A restrição (2b) representa o conjunto de equações de balanço de potência ativa para cada barra do sistema elétrico (corresponde à LCK). A restrição (2c) representa o conjunto de equações relacionadas com a aplicação da LTK, uma relação para cada laço fundamental (laço formado por uma linha de transmissão conectada entre duas barras e as conexões dessas barras com a terra através das cargas (demanda)). Esse tipo de restrição introduz a não linearidade no modelo matemático, introduzindo nele uma fonte de complexidade. A restrição (2d) representa as restrições de capacidade de transmissão dos caminhos (linhas e/ou transformadores). Na restrição (2d), o valor absoluto é necessário, pois o fluxo de potência ativa

é bidirecional. A restrição (2e) define os limites de geração em cada barra (se $\bar{g}_i = 0$, então a barra i é consumidora, caso contrário, a barra i pode ser geradora). A restrição (2f) representa os limites do número de linhas que podem ser instalados em cada caminho ij . A restrição (2g) representa o número inteiro de linhas que deve ser adicionado, constituindo outra fonte de complexidade do problema. A restrição (2h) implica que, em uma determinada barra de referência k , o ângulo $\theta_k = 0$.

1.2.3 Modelos Híbridos

Pelas dificuldades de resolução apresentadas pelo modelo CC, na época foram criados novos modelos mais simplificados desse tipo de modelo e mais sofisticados que o modelo de transportes. Neste grupo de modelos, encontram-se os modelos híbridos linear e não linear que foram utilizados por vários autores para realizar o planejamento; dentre eles, destaca-se o trabalho apresentado por Villasana, Garver e Salon (1985).

Os modelos híbridos são versões relaxadas do modelo CC que tentam contornar as dificuldades por este apresentadas. Nos modelos híbridos, somente uma parcela do sistema elétrico deve satisfazer as duas leis de Kirchhoff. A utilização desse tipo de modelo tem como objetivo encontrar soluções mais próximas do modelo CC, sem aumentar a complexidade do problema.

1.2.3.1 Modelo Híbrido Linear

O modelo híbrido linear (MHL), apresentado por Villasana, Garver e Salon (1985), como o próprio nome diz, é uma modelagem linear do problema PEST. O problema resultante, ao utilizar a modelagem híbrida linear, é um problema PLIM. Essa modelagem é uma versão relaxada do modelo CC e mais sofisticada que o modelo de transportes. A formulação híbrida linear exige que todas as linhas (existentes e adicionadas) devem satisfazer a LCK e somente os laços existentes devem respeitar a LTK. Neste contexto, equivale considerar dois sistemas superpostos, a configuração base, que deve satisfazer as duas leis de Kirchhoff, e o sistema formado pelas linhas candidatas à adição, que devem satisfazer somente a LCK.

Na época em que foi publicado o trabalho de Villasana, Garver e Salon (1985), os recursos computacionais existentes eram limitados, e também, não havia começado a aplicação dos métodos exatos de resolução de problemas com variáveis inteiras. Diante dessas condições, a ideia foi usar um AHC para resolver o problema PEST, em que, a cada iteração, era resolvido um PL e, através de um índice de sensibilidade, escolhia-se a linha candidata mais atrativa para compor a topologia base do sistema. Desse modo, ao final de cada iteração do AHC, a topologia base do sistema de transmissão era acrescida em uma linha, e, na próxima iteração, a última linha adicionada também passava a respeitar a LTK. Ao término do processo iterativo do AHC, era obtida uma boa solução para o modelo híbrido linear, e, conseqüentemente, também uma

boa solução para o modelo CC, onde as linhas existentes e construídas respeitavam as duas leis de Kirchhoff.

O problema PEST, utilizando o modelo híbrido linear, pode ser modelado como um problema de PLIM, como mostrado em (3):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} n_{ij} \quad (3a)$$

s.a.

$$\sum_{ji \in \Omega_l} f_{ji} - \sum_{ij \in \Omega_l} f_{ij} + \sum_{ji \in \Omega_l^0} f_{ji}^0 - \sum_{ij \in \Omega_l^0} f_{ij}^0 + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (3b)$$

$$f_{ij}^0 = n_{ij}^0 \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}} \quad \forall ij \in \Omega_l^0 \quad (3c)$$

$$|f_{ij}^0| \leq n_{ij}^0 \bar{f}_{ij}^0 \quad \forall ij \in \Omega_l^0 \quad (3d)$$

$$|f_{ij}| \leq n_{ij} \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (3e)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (3f)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (3g)$$

$$n_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall ij \in \Omega_l. \quad (3h)$$

A função objetivo (3a) representa o custo do investimento na rede de transmissão devido à adição de novas linhas. A equação (3b) representa as equações de balanço de potência ativa (corresponde à LCK). A equação (3c) corresponde à LTK, válida para este modelo apenas nas linhas existentes. As equações (3d) e (3e) representam, respectivamente, as equações de capacidade de transmissão das linhas existentes e a capacidade de transmissão das linhas que devem ser adicionadas. Nas equações (3d) e (3e), o valor absoluto é necessário, pois o fluxo de potência ativa é bidirecional. A equação (3f) define os limites de geração em cada barra (se $\bar{g}_i = 0$, então a barra i é consumidora, caso contrário, a barra i pode ser geradora). A equação (3g) representa os limites do número de linhas que podem ser instaladas em cada caminho ij . A equação (3h) representa o número inteiro de linhas que deve ser adicionado. A equação (3h) representa a maior fonte de complexidade do problema.

O modelo híbrido linear é um problema de PLIM com complexidade próxima do modelo de transportes. Sendo assim, podem-se utilizar as mesmas técnicas de otimização usadas para resolver o modelo de transportes. Além disso, o modelo híbrido linear é uma versão relaxada do modelo CC, logo é evidente que o problema resultante é uma representação menos adequada do problema real e, portanto, a solução pode estar distante da solução encontrada utilizando o modelo CC.

1.2.3.2 Modelo Híbrido Não Linear

O modelo híbrido não linear (MHNL) é uma proposta a qual utiliza características do modelo CC e do modelo de transportes, com o objetivo de contornar alguns problemas

apresentados por esses modelos.

A modelagem do problema PEST, através do modelo híbrido não linear, na sua formulação mais pura, especifica que uma parcela do sistema elétrico correspondente aos caminhos que já possuem linhas na configuração base e também as linhas que são adicionadas em paralelo a essas linhas devem satisfazer as duas leis de Kirchhoff. Outra parcela a qual corresponde aos novos caminhos devem satisfazer somente a LCK.

O problema PEST, utilizando o modelo híbrido não linear, pode ser modelado como um problema de PNLIM, como mostrado em (4):

$$\begin{aligned} \min v &= \sum_{ij \in \Omega_l^1} c_{ij} n_{ij}^1 + \sum_{ij \in \Omega_l^2} c_{ij} n_{ij}^2 \\ \text{s.a.} \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\sum_{ji \in \Omega_l^2} f_{ji}^2 - \sum_{ij \in \Omega_l^2} f_{ij}^2 + \sum_{ji \in \Omega_l^1} f_{ji}^1 - \sum_{ij \in \Omega_l^1} f_{ij}^1 + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (4b)$$

$$f_{ij}^1 = (n_{ij}^1 + n_{ij}^0) \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}} \quad \forall ij \in \Omega_l^1 \quad (4c)$$

$$|f_{ij}^1| \leq (n_{ij}^1 + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij}^1 \quad \forall ij \in \Omega_l^1 \quad (4d)$$

$$|f_{ij}^2| \leq n_{ij}^2 \bar{f}_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l^2 \quad (4e)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (4f)$$

$$0 \leq n_{ij}^1 \leq \bar{n}_{ij}^1 \quad \forall ij \in \Omega_l^1 \quad (4g)$$

$$0 \leq n_{ij}^2 \leq \bar{n}_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l^2 \quad (4h)$$

$$n_{ij}^1 \in \mathbb{Z} \quad \forall ij \in \Omega_l^1 \quad (4i)$$

$$n_{ij}^2 \in \mathbb{Z} \quad \forall ij \in \Omega_l^2. \quad (4j)$$

A função objetivo (4a) representa o custo do investimento na rede de transmissão devido à adição de novas linhas. A equação (4b) representa as equações de balanço de potência ativa (corresponde à LCK). A equação (4c) define a não linearidade do modelo híbrido não linear (corresponde à LTK). As equações (4d) e (4e) representam, respectivamente, as equações de capacidade de transmissão das linhas adicionadas em paralelo às já existentes e nas linhas adicionadas em novos caminhos. Nas equações (4d) e (4e), o valor absoluto é necessário, pois o fluxo de potência ativa é bidirecional. A equação (4f) define os limites de geração em cada barra (se $\bar{g}_i = 0$, então a barra i é consumidora, caso contrário, a barra i pode ser geradora). As equações (4g) e (4h) representam os limites do número de linhas que podem ser instalados em cada caminho ij . As equações (4i) e (4j) representam, respectivamente, o número inteiro de linhas que deve ser adicionado em paralelo às já existentes e o número inteiro de linhas que deve ser adicionado nos novos caminhos. As equações (4i) e (4j) representam outra fonte de complexidade do problema.

O problema PEST definido em (4) representa um problema de PNLIM, visto que as restrições referentes à LTK são não lineares, e as variáveis n_{ij}^1 e n_{ij}^2 são inteiras. Em particular,

apresenta complexidade parecida ao do modelo CC. Nesse contexto, para encontrar a solução do problema através do modelo híbrido não linear, é necessário utilizar as mesmas técnicas de otimização empregadas no modelo CC e, portanto, pode ser mais conveniente trabalhar diretamente com o modelo CC, considerado ideal.

1.2.4 Modelo Linear Disjuntivo

Uma alternativa recente de modelagem do problema PEST foi apresentada por Bahiense et al. (2001), o modelo LD, que é um problema PLIM, ou, mais especificamente, um problema de Programação Linear Binário Misto (PLBM) cuja solução ótima é a mesma do modelo CC, pois o tipo de linearização utilizada no modelo LD não altera a solução ótima do problema. A utilização do modelo LD garante a convergência para a solução ótima através de técnicas de resolução atuais.

Em geral, sempre é possível transformar um problema não linear quadrático com variáveis inteiras e reais num problema linear com variáveis binárias e reais usando uma transformação que permite “separar” os termos quadráticos em relações lineares (SILVA, 2013).

A formulação do modelo LD parte da formulação do modelo CC, em que se separam os fluxos de potência ativa das linhas existentes na configuração base e das linhas candidatas. Esse procedimento implica na modificação da restrição (2b) e na divisão das restrições (2c) e (2d) em duas novas restrições cada. Salienta-se que a forma de calcular o fluxo de potência ativa nas linhas existentes na configuração base permanece a mesma. A variável inteira n_{ij} é transformada em um conjunto Y de variáveis binárias $w_{ij,y}$; assim, a variável inteira n_{ij} passa a ser representada por $\sum_{y \in Y} w_{ij,y}$. Para melhorar o desempenho do algoritmo B&B na resolução do problema, é necessário adicionar a restrição (5) garantindo a alocação sequencial das linhas y .

$$w_{ij,y} \leq w_{ij,y-1} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y | y > 1 \quad (5)$$

Para transformar a restrição não linear (2c) em restrições lineares, é necessário substituí-la pelas restrições (6) e (7):

$$|x_{ij} f_{ij,y} - (\theta_i - \theta_j)| \leq M(1 - w_{ij,y}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (6)$$

$$|f_{ij,y}| \leq w_{ij,y} \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (7)$$

onde M é um número suficientemente grande.

Vale notar que, se $w_{ij,y} = 1$ (a linha y é instalada no caminho ij), então $f_{ij,y} = \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}}$ e $-\bar{f}_{ij} \leq f_{ij,y} \leq \bar{f}_{ij}$; caso contrário, $f_{ij,y} = 0$, e a diferença angular é $-M \leq \theta_i - \theta_j \leq M$.

Portanto, o modelo LD pode ser modelado como um problema PLBM, como apresentado em (8):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} \sum_{y \in Y} w_{ij,y} \quad (8a)$$

s.a.

$$\sum_{ji \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ji,y} + f_{ji}^0 \right) - \sum_{ij \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ij,y} + f_{ij}^0 \right) + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (8b)$$

$$f_{ij}^0 = n_{ij}^0 \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}} \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (8c)$$

$$|f_{ij}^0| \leq n_{ij}^0 \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (8d)$$

$$|x_{ij} f_{ij,y} - (\theta_i - \theta_j)| \leq M(1 - w_{ij,y}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (8e)$$

$$|f_{ij,y}| \leq w_{ij,y} \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (8f)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (8g)$$

$$\sum_{y \in Y} w_{ij,y} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (8h)$$

$$w_{ij,y} \leq w_{ij,y-1} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y | y > 1 \quad (8i)$$

$$w_{ij,y} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (8j)$$

$$\theta_k = 0 \quad k \in \text{barra de referência.} \quad (8k)$$

A função objetivo (8a) representa o custo do investimento na rede de transmissão devido à adição de novas linhas. A restrição (8b) representa o conjunto de equações que correspondem à LCK, uma equação para o balanço de potência ativa em cada barra i . As restrições (8c) e (8d) correspondem, respectivamente, à LTK e ao limite de fluxo nas linhas existentes. As restrições (8e) e (8f) representam, respectivamente, à LTK e o limite de fluxo em linhas novas. Em (8d) e (8f), o valor absoluto é necessário, pois o fluxo de potência ativa é bidirecional. A restrição (8g) define os limites de geração em cada barra i . A restrição (8h) representa o limite do número de linhas que podem ser instaladas em cada caminho ij . A restrição (8i) é necessária para garantir a alocação sequencial das linhas y . Na equação (8j), a variável $w_{ij,y}$ deve ser binária e representa a instalação ou não de uma linha em cada caminho ij . Essa restrição representa a maior fonte de complexidade do modelo LD. A restrição (8k) implica que, em uma determinada barra de referência k , o ângulo $\theta_k = 0$.

A utilização desse modelo apresenta vantagens e desvantagens na resolução do problema PEST em relação ao modelo CC. Sua vantagem é a sua linearidade permitindo a utilização de algoritmos de resolução eficientes existentes na atualidade. Já a sua principal desvantagem é o acréscimo de muitas variáveis binárias no problema o que diminui a eficiência em sistemas de grande porte. Outra desvantagem é como encontrar o parâmetro M ideal para cada ramo do sistema, de modo a garantir o grau de liberdade da diferença angular. Uma análise detalhada da utilização do modelo LD é apresentada em Binato (2000). Em Binato, Oliveira e Araujo (2001), para calcular o valor mínimo do parâmetro M , é apresentada uma metodologia baseada na teoria de grafos, a qual resolve problemas de caminho mínimo e máximo.

1.3 TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO USADAS NO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

Como mencionado anteriormente, deve haver um comprometimento entre o modelo matemático e a técnica de otimização; sendo assim, em um determinado contexto e época, para cada modelo existe uma técnica de otimização mais adequada. Latorre et al. (2003) faz um levantamento bibliográfico das principais técnicas de otimização utilizadas na resolução do problema PEST. As técnicas de otimização são divididas em dois grupos: (a) métodos exatos, também chamados de métodos clássicos de otimização, e (b) métodos aproximados. Os métodos aproximados, por sua vez, podem ser divididos em dois subgrupos: (i) as heurísticas e as (ii) meta-heurísticas.

1.3.1 Métodos Clássicos de Otimização

Entre os métodos clássicos de otimização mais conhecidos, dedicados à programação inteira, estão o método de decomposição de Benders e os métodos da família B&B. Esses tipos de algoritmos garantem a otimalidade da solução para problemas lineares e também para problemas não lineares, desde que sejam convexos. Esses algoritmos apresentam grande eficiência em problemas pequenos e de baixa complexidade. Entretanto, em sistemas de grande porte, apresentam dificuldades de convergência e elevado esforço computacional.

Para problemas não lineares, há um decréscimo acentuado da eficiência desses algoritmos, pois é necessário resolver internamente problemas de PNL, cujos métodos empregados na resolução demandam um esforço computacional mais elevado. Outro fator complicante em problemas não lineares é garantir a sua convexidade; sem essa garantia, não é possível afirmar que a solução encontrada no final do processo iterativo é ótima global do problema.

Muitas pesquisas utilizaram o algoritmo de decomposição de Benders; na resolução do problema PEST, entre as principais, estão Granville e Pereira (1985), Pereira et al. (1985), Pereira (1987), Romero e Monticelli (1994a), Romero e Monticelli (1994b), Binato (2000) e Haffner et al. (2000).

Basicamente, a ideia do algoritmo de decomposição de Benders para resolver um PLIM ou PNLIM é resolver, em cada iteração, primeiramente um PL ou PNL, chamado no algoritmo de problema escravo, e, posteriormente, resolver o problema mestre que é um problema de programação inteira (PI). Através da teoria de dualidade em programação linear, é possível demonstrar que qualquer PLIM pode ser escrito como um problema de programação linear inteiro (PLI), cujas restrições dependem do valor numérico de um ponto ou raio extremo do poliedro convexo. Isso implica que o número de restrições é tão grande quanto o número de pontos e raios extremos existentes no poliedro convexo. O algoritmo de decomposição de Benders consegue evitar esse último inconveniente gerando somente um conjunto reduzido de

restrições essenciais do PI, de tal modo que a solução do problema resultante é equivalente à solução do problema original (GALLEGO; ESCOBAR; ROMERO, 2007).

O algoritmo de decomposição de Benders aplicado na resolução do PEST decompõe o problema original em dois subproblemas: (i) subproblema de investimento, correspondente ao problema mestre do algoritmo e (ii) subproblema de operação, correspondente ao problema escravo. Durante o processo de resolução, o problema mestre informa ao escravo sobre as decisões de investimento (adição de linhas), e o escravo informa ao mestre as necessidades do sistema de transmissão (cortes).

O artigo apresentado por Romero e Monticelli (1994a) utilizou o algoritmo de decomposição de Benders na resolução do problema PEST e foi o primeiro a apresentar as soluções ótimas globais do modelo CC para os sistemas de Garver e Sul-Brasileiro, ambos com valores de geração estática e variável. Esse fato gerou grandes expectativas sobre a aplicação do algoritmo de decomposição de Benders na resolução do problema PEST, mas mostrou-se ineficiente na resolução de problemas de grande porte (BINATO, 2000; HAFFNER et al., 2000; ROMERO; MONTICELLI, 1994a).

Várias pesquisas utilizaram os algoritmos da família B&B para resolver o problema PEST, dentre elas, Shin e Park (1993), Levi (1995), Haffner et al. (2000), Haffner et al. (2001), Asada et al. (2005), Choi et al. (2005) e Rider, Garcia e Romero (2008). A Seção 2.2 faz uma apresentação mais detalhada do algoritmo B&B.

A ideia geral para resolver um PLIM ou PNLIM, através do algoritmo B&B, é dividir o problema original, com a restrição de integralidade relaxada, em vários subproblemas descendentes mais restritos, cuja única diferença do problema original são os limites das variáveis inteiras que separaram os subproblemas antecessores. Geralmente o algoritmo B&B é ilustrado por uma árvore, onde os nós representam os subproblemas descendentes, e o ramos são as mudanças de limites das variáveis inteiras.

Devido ao fator combinatorial dos problemas, para alcançar a solução do mesmo, deveriam ser resolvidas todas as combinações possíveis de subproblemas. O algoritmo B&B consegue contornar esse problema, através das propriedades de sondagem, que identificam quando não é mais necessário dividir determinados subproblemas. O processo iterativo do algoritmo B&B termina quando não existem mais subproblemas para serem resolvidos, e a solução do problema original é a melhor solução encontrada no processo iterativo.

Os trabalhos de Haffner et al. (2000) e Haffner et al. (2001) apresentam um algoritmo B&B, para resolver o problema PEST, modelado a partir do modelo de transportes. Esses trabalhos mostraram que o algoritmo B&B possui maior eficiência comparado ao algoritmo de decomposição de Benders.

1.3.2 Métodos Heurísticos

Existem vários trabalhos na literatura que utilizam algoritmos heurísticos para resolver o problema PEST, como Garver (1970), Pereira e Pinto (1985) e Villasana, Garver e Salon (1985). Basicamente, um algoritmo heurístico é um conjunto de procedimentos simples, muitas vezes baseados no senso comum, que encontram soluções de boa qualidade (não necessariamente a ótima) de forma rápida e simples. De maneira geral, a utilização de algoritmos heurísticos torna-se interessante nos seguintes casos: (i) quando não existem métodos exatos para resolver determinado problema; (ii) quando não é necessário encontrar a solução ótima, e uma solução de boa qualidade já é suficiente; (iii) quando o tempo é um fator essencial, como, por exemplo, nos problemas que exigem solução em tempo real; e (iv) quando são utilizados para encontrar soluções que servem de ponto de partida para outros métodos.

O primeiro algoritmo de importância para o PEST foi o Algoritmo de Garver (AG) para o modelo de transportes apresentado por Garver (1970). Garver (1970) sugere resolver o modelo de transportes com integralidade relaxada, isto é, resolver o PL resultante da modelagem, para que se possa identificar qual linha é mais atrativa para ser adicionada ao sistema elétrico. A ideia de Garver pode ser estendida para os outros modelos e também generalizada para o planejamento dinâmico da expansão de sistemas de transmissão como apresentados por Romero et al. (2003), Rider, Garcia e Romero (2004) e Rider, Garcia e Romero (2007).

Os algoritmos heurísticos apresentam a vantagem de serem rápidos e robustos. No entanto, esses algoritmos só apresentam soluções de boa qualidade e, raramente, encontram a solução ótima em sistemas de grande porte. Além disso, não fornecem informações sobre a qualidade da solução obtida.

Atualmente, os algoritmos heurísticos ainda representam um interessante tema de pesquisa, e as soluções encontradas por eles podem ser usadas como base para algoritmos que demandam maior esforço computacional, como as meta-heurísticas.

1.3.3 Meta-heurísticas

No final da década de 80, iniciou-se a utilização de uma nova classe de algoritmos heurísticos chamados de meta-heurísticas para a resolução de problemas complexos de sistemas de energia elétrica. A utilização foi intensificada a partir da década de 90 e, atualmente, ainda está fortemente presente nas pesquisas, muitas vezes, sendo a única forma viável de resolver determinados tipos de problemas.

As meta-heurísticas são diferentes dos algoritmos heurísticos tradicionais, geralmente mais eficientes e com esforço computacional variável. A definição apresentada no livro de Glover e Kochenberger (2003) diz que as meta-heurísticas são métodos de resolução que conduzem uma interação entre procedimentos de melhora local e estratégias de alto nível para criar um processo

capaz de escapar de ótimos locais e exercer uma busca robusta em um espaço de soluções.

A estratégia básica das meta-heurísticas é realizar procedimentos específicos de cada tipo de algoritmo os quais desempenham um número determinado de transições dentro do espaço de soluções factíveis (para algumas meta-heurísticas também soluções infactíveis), convencionalmente chamado de espaço de busca. Portanto, a ideia é fazer uma varredura dentro do espaço de busca de problemas com elevado número de soluções possíveis, percorrendo, preferencialmente, um número reduzido de soluções para encontrar soluções da boa qualidade dentre todas as possíveis. Cada tipo de meta-heurística possui a sua própria estratégia que guia o processo de varredura; se a estratégia nesse processo é eficiente, certamente soluções de boa ou excelente qualidade, e também, possivelmente a solução ótima poderão ser visitadas. A principal diferença entre as meta-heurísticas está na estratégia escolhida para realizar a transição.

Para as meta-heurísticas, as exigências especiais de convexidade e diferenciabilidade presentes nos métodos exatos praticamente desaparecem. Dessa forma, a crucialidade para as meta-heurísticas consiste em: (i) encontrar melhores formas de identificar, representar ou codificar uma solução candidata; (ii) encontrar a forma mais adequada de quantificar a função objetivo ou a qualidade de uma solução; e (iii) encontrar a melhor estratégia de transição para cada tipo de problema.

Entre as principais vantagens e diferenças que as meta-heurísticas apresentam em comparação com os algoritmos heurísticos estão: (i) a codificação pode ser mais eficiente e mais genérica levando em conta soluções infactíveis; (ii) o indicador de desempenho é muito mais complexo e pode ser adaptativo; (iii) a estrutura de vizinhança pode variar em forma e tamanho; (iv) geralmente se trabalha com um conjunto de soluções; etc. Pertencem à classe das meta-heurísticas os algoritmos SA, GA, EA, TS, GRASP, PSO, AC, etc. (GLOVER; KOCHENBERGER, 2003).

Especificamente para o problema PEST, as meta-heurísticas estão sendo amplamente utilizadas nos últimos anos para a resolução desse tipo de problema. Romero, Gallego e Monticelli (1996) apresentaram um algoritmo SA para resolver o modelo CC. O SA é uma meta-heurística baseada no processo físico de construção de cristais perfeitos, onde o material é aquecido até uma temperatura crítica e depois esfriado lentamente até alcançar o quase equilíbrio termodinâmico, tornando-se, ao final, um cristal perfeito. O artigo de Gallego et al. (1997) apresentou um SA paralelo para resolver o modelo CC com o objetivo de diminuir o tempo computacional.

Gallego, Monticelli e Romero (1998a) utilizaram um algoritmo híbrido do SA, GA e TS para resolver o modelo CC. O GA é um algoritmo baseado no processo de seleção natural, onde o indivíduo geneticamente melhor capacitado tem maiores chances de sobrevivência. O algoritmo GA vale-se da ideia de divisão e duplicação de células reprodutivas, do fenômeno da recombinação genética, da reprodução sexuada e da mutação genética. O algoritmo TS foi desenvolvido a partir de conceitos usados na inteligência artificial, conceitos de memória de

longo e curto prazo e, basicamente, consiste em um procedimento meta-heurístico que gerencia um algoritmo heurístico de busca local; neste caso, são utilizadas estratégias para contornar ou sair de soluções ótimas locais.

O trabalho de Gallego, Monticelli e Romero (1998b) apresentou um GA modificado para resolver o modelo CC; as modificações foram realizadas na etapa de escolha dos indivíduos iniciais e na etapa de mutação. Na etapa de seleção dos indivíduos iniciais, foram utilizados métodos exatos na escolha. Por outro lado, na etapa de mutação, foram utilizados conceitos do algoritmo SA. Silva, Gil e Areiza (2000) também apresentaram um GA com outros tipos de modificações com o intuito de melhorar o desempenho do processo de resolução do modelo CC. O artigo de Silva et al. (2005) usou o GA, só que, nesse caso, para resolver o modelo CC que considera restrições de segurança do tipo $(N - 1)$.

Gallego, Monticelli e Romero (2000) apresentaram um algoritmo TS paralelo de modo a acelerar o processo de resolução do modelo CC. Em sequência, o artigo apresentado por Silva et al. (2001) usou o algoritmo TS com algumas modificações para resolver também o modelo CC.

O trabalho apresentado por Binato, Oliveira e Araujo (2001) usou a meta-heurística GRASP para resolver o modelo CC. A meta-heurística GRASP é uma evolução direta dos algoritmos heurísticos construtivos do tipo guloso. O algoritmo heurístico do tipo guloso adiciona, em cada iteração, o elemento mais atrativo na configuração corrente até não ser necessário adicionar novos elementos. Por outro lado, o GRASP seleciona aleatoriamente um elemento dentre os mais atrativos para adicionar em cada iteração. O conceito adaptativo do GRASP ocorre quando é usada uma lista de tamanho variável e que depende da evolução do processo. Em cada iteração do GRASP, depois da escolha do elemento a ser adicionado na topologia corrente, é possível fazer uma busca local tentando encontrar um ótimo local.

O artigo de Faria et al. (2005) apresentou um novo algoritmo GRASP para resolver o modelo MHNL; nesse novo algoritmo, foi utilizada a ideia de *Path Relinking* (PR) na etapa de busca local. O PR permite gerar uma nova configuração usando como base duas ou três configurações de qualidade chamadas de configurações de elite.

As grandes vantagens apresentadas pelas meta-heurísticas é que são relativamente simples de implementar, são robustas e encontram soluções ótimas, ou quase ótimas, mesmo em sistemas grandes e complexos, com um esforço de processamento elevado, mas não proibitivo. Adicionalmente, quando se aumenta a complexidade do modelo matemático a aplicabilidade das meta-heurísticas sofre pouca ou quase nenhuma alteração. Por outro lado, uma das desvantagens que elas apresentam deve-se ao elevado tempo de processamento para encontrar uma solução de qualidade além de não garantir sua otimalidade.

1.4 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Neste trabalho, é abordado um tema específico relacionado com a técnica de otimização do problema PEST. A maioria das técnicas de otimização resolve subproblemas especializados de PL dentro da estrutura de otimização (heurísticas, meta-heurísticas e técnicas de otimização clássica). Observa-se que, em grande parte das publicações apresentadas na literatura especializada, esses subproblemas de PL são resolvidos usando *solvers* de PL como MINOS e CPLEX.

Também se deve observar que, nos casos em que o sistema elétrico a ser otimizado é de complexidade média, pode ser necessário resolver milhares de problemas de PL até atingir a convergência. Adicionalmente, para sistemas elétricos de grande complexidade, como o sistema norte-nordeste brasileiro, pode ser necessário resolver dezenas ou centenas de milhares de problemas de PL até atingir a convergência.

Nesta pesquisa, resolve-se, de forma eficiente, os subproblemas de PL, quando é utilizado o algoritmo B&B para resolver o modelo de transportes e o modelo LD do problema PEST. Sendo assim, foram desenvolvidas técnicas eficientes de programação linear dos tipos PSC e DSC para resolver de forma mais eficiente os problemas de PL que são gerados pelo algoritmo B&B durante a resolução do problema PEST. O modelo de transportes e o modelo LD (cuja solução ótima é a mesma do modelo CC, que é considerado como modelo ideal para o problema PEST) resultam em problemas PLIM. Portanto, as técnicas de otimização clássicas, como o algoritmo B&B, conseguem encontrar a solução ótima global do problema, exceto em problemas muito grandes em que o algoritmo não converge para solução devido aos limites computacionais disponíveis.

Outro aspecto que deve ser mencionado é que mais de 90% do tempo de processamento usado pelo algoritmo B&B, para resolver o problema PEST, é usado para resolver e armazenar os problemas de PL que aparecem durante o processo de otimização (HASHIMOTO; ROMERO; MANTOVANI, 2003). Portanto, se for desenvolvido um algoritmo de PL altamente eficiente, o tempo total de processamento do algoritmo B&B pode diminuir de forma significativa.

O desafio é tornar o algoritmo B&B suficientemente rápido e com capacidade de resolver problemas altamente complexos. Adicionalmente, no futuro, podem ser implementadas técnicas eficientes de otimização da família B&B como, por exemplo, algoritmos tipo *Branch and Cut*, onde os módulos de PL desenvolvidos nesta pesquisa, podem ser usados de forma mais eficiente. E também possibilitando no futuro, após adaptações, utilizar os módulos de PL desenvolvidos em conjunto com outras técnicas de otimização como as heurísticas e as meta-heurísticas.

Todo o pacote de otimização foi implementado em linguagem de programação FORTRAN e opera de forma autônoma, isto é, sem o auxílio de *solvers* comerciais de PL, produzindo assim, programas de otimização independentes.

2 OS MODELOS DE TRANSPORTE E LINEAR DISJUNTIVO E A TÉCNICA BRANCH AND BOUND

No Capítulo 1, foram apresentados os diversos modelos utilizados na modelagem matemática do problema de Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão (PEST) e também os principais métodos utilizados na sua resolução. A proposta desta pesquisa é apresentar uma melhoria de um dos métodos utilizados na resolução do problema PEST, o algoritmo *Branch and Bound* (B&B) para problemas de Programação Linear Inteira Mista (PLIM), como os problemas resultantes dos modelos de transporte e linear disjuntivo (LD).

Este capítulo tem como objetivo fazer uma introdução e apresentar os fundamentos teóricos, de forma simples e didática, da técnica de otimização B&B escolhida como técnica de resolução do problema PEST, modelado a partir dos modelos de transporte e LD. Nesse capítulo, também será discutido o Algoritmo de Garver (AG) devido a sua importância na área de PEST, sendo o primeiro algoritmo utilizado na resolução do problema, e, ainda por sua versatilidade, já que o mesmo pode ser adaptado para resolver outros modelos e pode fazer parte de outras técnicas de otimização mais elaboradas como o algoritmo B&B.

2.1 O ALGORITMO DE GARVER

Garver (1970) apresentou o primeiro algoritmo de grande difusão inaugurando a fase dos algoritmos heurísticos usados para resolver o PEST. Basicamente, esses algoritmos consistem em um procedimento passo a passo, em que são adicionados em cada passo uma ou várias linhas no caminho mais atrativo para expansão do sistema elétrico, até que sejam satisfeitas todas as condições de operação. Esse caminho mais atrativo é escolhido através de um indicador de sensibilidade local que, de alguma forma, indica a variação da função objetivo devido a alguma mudança dos parâmetros do sistema elétrico corrente.

O algoritmo desenvolvido por Garver (1970) foi uma estratégia para encontrar uma solução de boa qualidade, não necessariamente a solução ótima, em sistemas grandes e complexos. A proposta de Garver foi um grande avanço na pesquisa do problema PEST, pois era a única maneira que existia naquela época para resolver problemas de PEST de grande porte. O algoritmo heurístico construtivo de Garver ou simplesmente AG é robusto e apresenta esforço computacional muito pequeno. Adicionalmente, muitas características e propriedades desse algoritmo podem ser incorporadas em algoritmos mais complexos, como, por exemplo, no algoritmo B&B, em que pode ser usado o AG para encontrar uma solução incumbente inicial de boa qualidade.

O modelo de transportes representado pelo conjunto de equações (1) e o modelo LD representado pelo conjunto de equações (8) são problemas de PLIM em que as variáveis n_{ij} devem ser inteiras, e as variáveis $w_{ij,y}$ devem ser binárias. Ao relaxar a integralidade das

variáveis n_{ij} e $w_{ij,y}$ dos problemas (1) e (8), são obtidos problemas de Programação Linear (PL), sendo que o primeiro é chamado de PL correspondente ou também de P_0 , e os demais são chamados de problemas sucessores. Dessa forma, a ideia de Garver consiste em usar a solução do PL como uma estratégia para encontrar uma boa solução do problema original.

O AG consiste em resolver o PL correspondente e encontrar a solução ótima não inteira para a configuração corrente n_{ij}^0 . Conhecidas as incógnitas n_{ij} ou $w_{ij,y}$ (encontradas através de um algoritmo para resolver o PL correspondente), podem-se encontrar os fluxos de potência em todas as linhas antigas (n_{ij}^0) e novas (n_{ij}) ou ($w_{ij,y}$). Aquele caminho ij , que apresentar o maior fluxo de potência ativa, representa o caminho mais atrativo para adição de linhas. Portanto, adiciona-se uma linha no caminho identificado como mais atrativo e atualiza-se a configuração corrente de acordo com a adição escolhida. Repete-se essa estratégia adicionando em cada passo uma linha no caminho mais atrativo. O processo termina quando a solução do PL que corresponde à topologia corrente apresenta solução com todos os $n_{ij} = 0$ ou $w_{ij,y} = 0$ (significa que não é mais necessário realizar adição ao conjunto de adições realizadas), e a configuração corrente é uma configuração factível e eventualmente ótima para o sistema elétrico. O AG pode ser resumido nos seguintes passos:

Algoritmo 1 Algoritmo de Garver

1. Assumir a configuração base n_{ij}^0 como configuração corrente;
2. Resolver o PL da configuração corrente. Se todos os $n_{ij} = 0$, então pare, pois foi encontrada uma boa configuração factível. Caso contrário, ir ao passo 3;
3. Calcular os fluxos em todas as novas linhas adicionadas pelo PL, ($n_{ij} \neq 0$), usando a relação $f_{ij}^v = n_{ij} \bar{f}_{ij}$. Identificar o caminho novo ij com o maior valor de fluxo f_{ij}^v e atualizar a configuração corrente adicionando uma linha naquele caminho ij . Voltar ao passo 2.

Fonte Escobar, Romero e Gallego (2010)

O maior esforço computacional do AG está no passo 2 em que é necessário utilizar outro algoritmo para resolver o PL da topologia corrente. Existem algumas modificações que podem tornar o AG mais rápido, isto é, o algoritmo de resolução de PL será chamado menos vezes. Essas modificações podem acelerar o AG, mas nem sempre, as soluções obtidas serão de melhor qualidade. Assim, as modificações que podem ser realizadas são as seguintes:

1. Após a resolução do primeiro PL, pode-se incorporar na configuração base, simultaneamente, a parte inteira de todos os caminhos que apresentam valores de $n_{ij} \geq 1$.
2. Em cada passo, pode-se escolher para adição de uma linha, aquele caminho com maior valor de n_{ij} em lugar de escolher o caminho com maior valor de f_{ij}^v .

3. Em cada passo, pode-se manter o critério de adição daquele caminho com maior valor de f_{ij}^v , mas em lugar de adicionar uma linha simples naquele caminho, pode-se adicionar um número de linhas igual à parte inteira de n_{ij} .
4. Incorporar um processo de Fase II para retirar linhas irrelevantes adicionadas na fase inicial.

2.2 ALGORITMO BRANCH AND BOUND

O algoritmo B&B, primeiramente, foi proposto por Land e Doig (1960) para resolver problemas de programação inteira e depois tornou-se uma ferramenta muito utilizada na otimização combinatória para resolver problemas do tipo NP-completo. Esse algoritmo é geralmente utilizado para encontrar a solução ótima de vários problemas de otimização. O algoritmo B&B é conceitualmente simples e bastante eficiente para problemas lineares com variáveis inteiras, pois consegue identificar um grande número de subproblemas candidatos que terão soluções de baixa qualidade e poderão ser descartados, muitas vezes, antes mesmo de serem resolvidos. O mesmo método também pode ser estendido para resolver problemas não lineares com variáveis inteiras; neste último caso, só é possível garantir que a solução é ótima global do problema se ele for convexo.

A ideia básica para resolver um problema linear com variáveis inteiras, é resolver um conjunto de problemas de PL que são versões relaxadas do problema original, isto é, dividir a região factível do problema original em sub-regiões menores. Assim, através de um algoritmo de PL, inicialmente deve ser resolvido o problema original relaxando a integralidade das variáveis de investimento; esse problema inicial relaxado será chamado P_0 . Caso P_0 apresente solução inteira, em que todas as variáveis inteiras tenham valores inteiros, o algoritmo B&B deve parar, pois foi encontrada a solução ótima global do problema original. Caso contrário, isto é, se a solução de P_0 apresente valores não inteiros para alguma ou algumas variáveis inteiras, P_0 deve ser separado em dois subproblemas, P_1 e P_2 , em que é escolhida uma variável inteira com valor corrente não inteiro de P_0 para fazer a separação. Assim, se uma variável inteira n_i possui valor corrente não inteiro n_i^* , então os subproblemas sucessores, P_1 e P_2 , são obtidos da seguinte forma:

- Subproblema P_1 :

É o problema P_0 acrescido da restrição

$$n_i \leq \lfloor n_i^* \rfloor \quad (9)$$

em que $\lfloor n_i^* \rfloor$ é o maior inteiro contido em n_i^* ;

- Subproblema P_2 :

É o problema P_0 acrescido da restrição

$$n_i \geq \lfloor n_i^* \rfloor + 1. \quad (10)$$

Nos casos em que as variáveis inteiras n_i são binárias, os subproblemas sucessores, P_1 e P_2 , são obtidos da forma a seguir:

- Subproblema P_1 :

É o problema P_0 acrescido da restrição

$$n_i = 0; \quad (11)$$

- Subproblema P_2 :

É o problema P_0 acrescido da restrição

$$n_i = 1. \quad (12)$$

O problema P_0 é separado em dois subproblemas menores, P_1 e P_2 , isto é, são problemas mais restritos por causa da adição das novas restrições. Assim, esses subproblemas devem ser adicionados em uma lista de problemas a serem resolvidos. Depois de resolvidos, eles podem ainda apresentar valores não inteiros para variáveis inteiras e serem separados novamente em novos subproblemas mais restritos; como o problema é de minimização, implica que os novos subproblemas terão funções objetivos com valores maiores ou iguais ao da função objetivo do seu subproblema gerador. Entretanto, às vezes, a solução de um subproblema permite descobrir se ainda é necessário fazer a sua separação em novos subproblemas, ou se ele pode ser eliminado do processo de busca. Para ocorrer a eliminação do subproblema, é necessário que sua solução apresente as seguintes características:

1. A solução não é inteira, mas é de pior qualidade que a incumbente. Neste caso, o subproblema corrente pode conter soluções inteiras dentro da sua região factível, mas serão de pior qualidade que a solução incumbente.
2. A solução é infactível. Nesse caso, os subproblemas sucessores continuarão sendo infactíveis.
3. A solução é inteira, isto é, todos os valores das variáveis inteiras são inteiros. Nesse caso, se a solução do subproblema é inteira, significa que ainda podem existir outras soluções inteiras dentro de sua região factível, mas certamente todas serão de pior qualidade. Se a solução encontrada é de melhor qualidade que todas as soluções encontradas anteriormente, ela é armazenada como incumbente. Portanto, não há a necessidade de continuar buscando soluções inteiras dentro de sua região factível, e o subproblema deve ser eliminado de análises futuras.

As características apresentadas anteriormente são conhecidas como testes de sondagem. O algoritmo B&B consiste fundamentalmente de uma estratégia de separação do problema em subproblemas menores até que todos eles sejam sondados. Na verdade, no algoritmo B&B, é implementada uma estratégia de enumeração implícita e/ou explícita de todas as soluções inteiras da região factível do problema original; isso garante que a melhor solução encontrada seja ótima global do problema. Esse algoritmo termina quando todos os subproblemas gerados forem sondados. A solução ótima global é a melhor solução inteira encontrada, chamada também de solução incumbente. Um algoritmo B&B básico assume a seguinte forma:

Algoritmo 2 Algoritmo *Branch and Bound* Básico

1. Inicialização:

Escolher uma incumbente inicial $V_{inc} = v^* = \infty$. Resolver o problema original com a integralidade das variáveis inteiras relaxada que se designa como P_0 . Se a solução de P_0 for inteira, PARE, pois foi encontrada a solução ótima global do problema original.

Caso contrário, adicionar o valor da função objetivo como limitante inferior v_{inf} dos subproblemas sucessores.

2. Escolha da variável para separar o subproblema:

Escolher a primeira variável inteira n_i com valor corrente não inteiro n_i^* para fazer a separação do problema. Gerar dois novos subproblemas a partir do problema corrente adicionando a restrição (13), no primeiro subproblema, e a restrição (14), no segundo subproblema:

$$n_i \leq \lfloor n_i^* \rfloor \quad (13)$$

$$n_i \geq \lfloor n_i^* \rfloor + 1 \quad (14)$$

em que $\lfloor n_i^* \rfloor$ é o maior inteiro contido em n_i^* ;

3. Resolução do subproblema selecionado:

Pela regra LIFO (*Last In First Out*), resolver primeiro o último subproblema gerado usando o algoritmo de PL e armazenar a solução ótima $v_{PL} = v_{inf}$ como limitante inferior para prováveis subproblemas sucessores.

4. Testes de sondagem:

Verificar os testes de sondagem no subproblema resolvido. O subproblema é eliminado de análises futuras se satisfaz um dos seguintes testes de sondagem:

Teste 1 Se $v_{inf} \geq v^*$, em que v^* é o valor da incumbente;

Teste 2 Se o subproblema for infactível;

Teste 3 Se a solução do subproblema for inteira, isto é, todas as variáveis inteiras possuem valor corrente inteiro. Nesse caso, se a solução ótima do subproblema for de melhor qualidade que a incumbente, armazenar a solução como a nova incumbente e aplicar o Teste 1 para todos os subproblemas ainda não analisados.

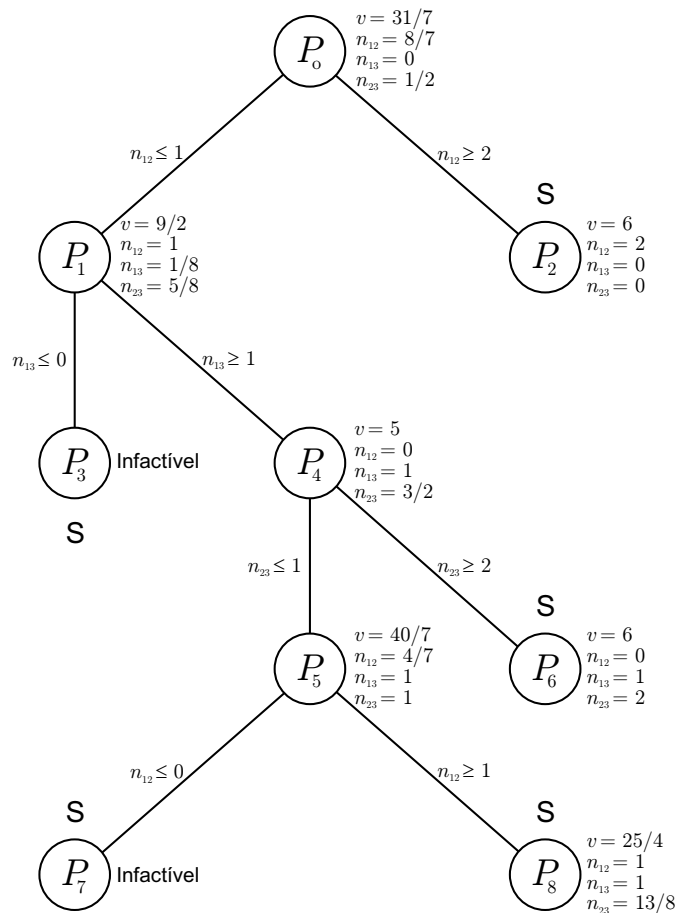
Algoritmo 2 Algoritmo *Branch and Bound* Básico (Continuação)

5. Se o problema não foi sondado, ir ao passo 2 para realizar a separação do subproblema corrente em dois subproblemas sucessores. Caso contrário, verificar se existem ainda subproblemas que não foram sondados. Se todos os problemas foram sondados, PARE, o processo termina, e a solução incumbente é a solução ótima do problema; caso contrário, voltar ao passo 3 para resolver o último problema gerado.

Fonte Gallego, Escobar e Romero (2007)

Os subproblemas gerados pelo algoritmo B&B podem ser representados em um gráfico em formato de árvore, como pode ser visto na Figura 2; esse gráfico é conhecido pelo nome *Árvore Branch and Bound*. O primeiro nó da árvore representa o problema original com a restrição de integralidade relaxada P_0 ; seus demais nós representam os subproblemas gerados pela divisão de P_0 e seus descendentes, e os ramos (arestas) da árvore representam as variáveis inteiras com valores não inteiros escolhidas para separar P_0 e seus sucessores.

Figura 2 – Uma das árvores *Branch and Bound* de solução do sistema de 3 barras com uma linha na topologia base mostrado na Figura 1.



Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Mesmo o algoritmo B&B sendo conceitualmente simples, sua implementação computacional possui maior complexidade, podendo haver problemas que envolvam esforço computacional e de memória durante a execução do algoritmo em sistemas de grande porte. Portanto, pelos motivos apresentados na Seção 1.4, foram escolhidos o modelo de transporte representado pelo conjunto de equações (1) e o modelo LD representado pelo conjunto de equações (8) por se tratarem de problemas lineares com variáveis inteiras, de modo a validar a proposta apresentada nessa pesquisa de melhoria do algoritmo B&B na resolução desse tipo de problema. A próxima seção apresenta alguns tipos de melhoria que podem ser incluídos no algoritmo B&B para aumentar sua eficiência.

2.3 POSSÍVEIS MELHORIAS QUE PODEM SER INCLUÍDAS NO ALGORITMO BRANCH AND BOUND

A eficiência do algoritmo B&B está atrelada a diversos tipos de decisão que devem ser executados durante o processo de resolução do problema. Um algoritmo B&B é eficiente obviamente se gera um número menor de nós na árvore B&B, o que significa chamar um menor número de vezes, no caso de problemas lineares, o algoritmo dedicado na resolução dos PLs advindos de cada subproblema gerado. Para melhorar o desempenho do algoritmo B&B aplicado a um tipo de problema específico, podem ser realizados dois tipos de estratégias: introduzindo melhorias gerais relacionadas com a teoria básica do algoritmo B&B, e introduzindo melhorias relacionadas com as características específicas do tipo de problema.

Existem quatro tipos principais de melhorias que estão relacionados com a teoria básica do algoritmo B&B:

1. **Determinação de uma solução inteira inicial (incumbente inicial):** O algoritmo B&B pode iniciar sem solução incumbente, mas também pode ser implementada alguma estratégia heurística, como o AG, para encontrar uma solução incumbente de boa qualidade. Encontrando rapidamente uma solução incumbente de boa qualidade aumenta a eficiência do Teste 1 de sondagem fazendo com que os subproblemas sejam sondados rapidamente, aumentando, consequentemente, a eficiência do algoritmo B&B.
2. **Escolha da melhor estratégia e técnica de resolução dos subproblemas gerados:** A maior parte do tempo gasto pelo algoritmo B&B está na resolução dos subproblemas gerados; sendo assim, é indispensável escolher a técnica mais adequada e eficiente para resolver esses subproblemas. A principal contribuição dessa pesquisa encaixa-se nesse item. O presente trabalho usa um algoritmo Primal Simplex Canalizado (PSC) para resolver os problemas (1) e (8) com a restrição de integralidade relaxada e, posteriormente, os subproblemas sucessores são reotimizados usando um algoritmo Dual Simplex Canalizado (DSC).

3. **A variável escolhida para separação:** Ao resolver o problema relaxado ou os subproblemas gerados, frequentemente aparecem soluções em que algumas variáveis inteiras tenham valores correntes não inteiros. A escolha de cada variável para realizar a separação pode gerar diferentes árvores B&B. Obviamente, existe uma variável que gera a menor árvore B&B, mas não existe uma técnica sistemática para encontrar qual é a melhor variável para fazer a separação de um subproblema. Entretanto existem técnicas empíricas, como escolher sempre a variável inteira com valor corrente não inteiro de menor índice, entre outras para a escolha da variável mais atrativa que pode ser usada na separação.
4. **Escolha do próximo subproblema a ser analisado:** Durante a execução do algoritmo B&B em certo momento pode haver muitos subproblemas a serem analisados, e a escolha de cada subproblema para ser resolvido gera uma árvore B&B diferente. Certamente existe um desses subproblemas da lista que gera a menor árvore B&B, porque ao resolver esse problema ou um subproblema descendente do mesmo, pode ser encontrada uma solução inteira de ótima qualidade, aumentando a eficiência do Teste 1 de sondagem e fazendo com que muitos dos subproblemas ainda não analisados sejam sondados. Não existe técnica sistemática para a escolha do melhor subproblema a ser resolvido, entretanto, existem técnicas empíricas que auxiliam a escolha do subproblema mais atrativo. Entre essas técnicas empíricas, existe uma técnica muito usual para a escolha do subproblema a ser resolvido que é a regra LIFO, onde sempre é escolhido o último subproblema gerado para ser resolvido primeiro. A regra LIFO permite que continuamente seja escolhido o sucessor do último subproblema resolvido como o próximo a ser resolvido, podendo ser implementado um algoritmo DSC para fazer a reotimização, através do quadro ótimo do subproblema antecessor, resolvendo o subproblema escolhido rapidamente. Essa regra permite resolver com maior velocidade muitos problemas.

Para os dois últimos itens apresentados, também existem duas estratégias que utilizam o conceito de pseudocusto. Uma usa a ideia de pseudocusto para determinar qual subproblema da lista de subproblema a ser resolvido é mais atrativo para ser resolvido primeiro. A outra também usa a ideia de pseudocusto para determinar qual variável inteira com valor corrente não inteiro é mais atrativa para fazer a divisão do subproblema corrente (GALLEGO; ESCOBAR; ROMERO, 2007). As próximas subseções deste capítulo apresentam o conceito geral de pseudocusto e como utilizá-lo, no algoritmo B&B, para escolher as variáveis que separam cada subproblema e para escolher o subproblema da lista de subproblemas para ser resolvido primeiro.

Os melhores algoritmos B&B são os algoritmos especializados que levam em consideração características específicas do problema, isto é, podem ser implementadas novas estratégias de sondagem mais eficientes e também a adição de informações adicionais como novas restrições que podem melhorar muito o desempenho dos testes de sondagem, reduzindo, assim, consideravelmente, o tamanho da árvore B&B. O livro de Escobar, Romero e Gallego (2010) sugere duas estratégias para o problema PEST: (i) a adição de restrições de cerca e, (ii) a adição

de restrições do tipo linha-transformador em novos caminhos. Esses dois tipos de restrições adicionais têm o objetivo de restringir mais o espaço busca factível e forçar com que as variáveis fiquem mais próximas dos seus valores ótimos.

Também é possível implementar alterações que levam em consideração as características específicas do problema nos algoritmos de PL que é chamado pelo algoritmo B&B para resolver o problema inicial e cada subproblema gerado. Considerando características específicas dos problemas (1) e (8), este trabalho usa uma estratégia de fixar as variáveis, de forma estratégica, nos limites mais adequados durante o processo de montagem do quadro simplex inicial do algoritmo PSC. Essa estratégia tem como objetivo deixar as variáveis o mais próximo possível do seu estado básico ou não básico no quadro ótimo.

Outras alterações que podem ser acrescentadas nos algoritmos PSC e DSC são: (i) abandonar a estratégia padrão de escolha da variável não básica candidata a entrar na base no algoritmo PSC e (ii) abandonar a estratégia padrão de escolha da variável básica que deve sair da base no algoritmo DSC e passar a escolher essas variáveis considerando características específicas do problema PEST, em que é priorizada a ordem das variáveis de acordo com a probabilidade de elas estarem na base ou não no final do processo iterativo.

2.3.1 O Conceito de Pseudocusto

Garfinkel e Nemhauser (1972) e Benichou et al. (1971) propõem o conceito de pseudocusto. Essa proposta teve como objetivo apresentar uma forma alternativa para identificar qual subproblema gerado pelo algoritmo B&B (na divisão de um subproblema antecessor) é mais atrativo para ser resolvido primeiro em relação aos outros subproblemas ainda não resolvidos. Ela também é utilizada como uma forma alternativa de identificar qual variável inteira com valor corrente não inteiro deve separar o problema.

O pseudocusto de uma variável inteira é a taxa de degradação da função objetivo quando a variável inteira com valor corrente não inteiro no PL correspondente assume o valor inteiro mais próximo. Como a variável inteira com valor corrente não inteiro pode assumir dois valores inteiros, um maior e o outro menor que o valor corrente dessa variável, são definidos os seguintes pseudocustos para uma variável n_j :

$$P_j^- = \frac{v_{PL}^{k-} - v_{PL}^k}{f_j^k} \quad (15)$$

$$P_j^+ = \frac{v_{PL}^{k+} - v_{PL}^k}{1 - f_j^k} \quad (16)$$

em que $f_j^k = n_j^k - \lfloor n_j^k \rfloor$.

Pesquisas recentes recomendam muito cuidado na utilização dos pseudocustos, pois os pseudocustos de uma variável podem variar de maneira significativa de um subproblema para

outro na árvore B&B.

Para conhecer todos os pseudocustos de todas as variáveis inteiras para todos os subproblemas gerados pelo algoritmo B&B, é necessário resolver dois problemas de PL para cada variável inteira de cada subproblema. Essa condição torna o esforço computacional proibitivo. Outro problema é que, através das equações (15) e (16), não é possível calcular o pseudocusto das variáveis inteiras com valor corrente inteiro. Existem algumas estratégias para contornar essas limitações no uso dos pseudocustos (ESCOBAR; ROMERO; GALLEGO, 2010; GARFINKEL; NEMHAUSER, 1972; GREEN, 2000):

- Fixar os pseudocustos no valor encontrado na primeira vez em que essa variável é separada.
- Fixar os pseudocustos no valor observado na última vez em que essa variável é separada.
- Calcular os pseudocustos através da média dos valores observados quando a variável é separada.
- Resolver o PL e encontrar os pseudocustos de aumento e de diminuição para cada variável inteira com valor corrente não inteiro, isto é, resolver dois problemas de PL para cada variável inteira com valor corrente não inteiro.
- Iniciar o processo do algoritmo B&B usando como pseudocustos os coeficientes das variáveis inteiras e, no decorrer do processo, atualizar os pseudocustos.
- Após a resolução de cada subproblema candidato, devem-se calcular os pseudocustos da variável usada na separação e atualizar os pseudocustos dessa variável pela média de todos os pseudocustos encontrados para essa variável.

2.3.2 Seleção do Subproblema Candidato

A escolha adequada do subproblema candidato pode reduzir, significativamente, o número de subproblemas gerados pelo algoritmo B&B para serem resolvidos através do algoritmo de PL diminuindo, portanto, o esforço computacional para encontrar a solução ótima inteira do problema original (GAUTHIER; RIBIÈRE, 1977; LINDEROTH; SAVELSBERGH, 1999). Todas as estratégias para identificar o subproblema candidato em geral são empíricas; dentre elas, apresentam-se duas: (i) o critério LIFO e, (ii) o critério baseado em pseudocustos.

A regra LIFO consiste em escolher o último subproblema gerado pelo algoritmo B&B para ser resolvido primeiro. Essa estratégia permite reotimizar o subproblema candidato através de um algoritmo DSC, utilizando-se das informações do quadro ótimo de seu subproblema antecessor. A diferença entre o subproblema antecessor e o candidato é a adição de uma nova restrição trivial no subproblema candidato; essa nova restrição muda somente o limite da variável que separou o subproblema antecessor. Utilizar a regra LIFO fornece a vantagem de

permitir resolver rapidamente muitos subproblemas através do algoritmo DSC. Entretanto, essa estratégia possui a desvantagem de poder gerar muitos subproblemas, aumentando, assim, o número de problemas de PL a serem resolvidos e, aumentando, consequentemente, o esforço computacional.

O critério baseado em pseudocustos tenta estimar o valor aproximado da melhor solução inteira que pode ser encontrada entre os descendentes de um determinado subproblema. Com essa estimativa, identifica-se qual subproblema é mais atrativo (aquele subproblema que possui o descendente com a melhor solução inteira) para continuar a ser separado. De modo geral, essa estratégia diminui o número de problemas de PL a serem resolvidos, mas aumenta a necessidade de memória para armazenar todos os subproblemas resolvidos. Uma forma de determinar o valor estimado da função objetivo da melhor solução inteira de um subproblema candidato k , utilizando pseudocustos, é obtido através da equação (17):

$$v_{est}^k = v_{inf}^k + \sum_{i \in I} \min \left[P_i^- f_i^k; P_i^+ (1 - f_i^k) \right] \quad (17)$$

em que $f_i^k = n_i^k - \lfloor n_i^k \rfloor$.

A maior desvantagem de usar essa estratégia é que, além de armazenar todos os subproblemas, é necessário resolvê-los antes de armazená-los, aumentando muito o esforço computacional.

Uma estratégia alternativa, para evitar o esforço computacional adicional da estratégia anterior, é utilizando as equações (18) e (19), que são versões modificadas da equação (17). Essa estratégia determina a melhor estimativa dos subproblemas descendentes a partir da solução do PL do subproblema antecedente (ESCOBAR; ROMERO; GALLEGU, 2010; GREEN, 2000) como ilustrado pela Figura 3.

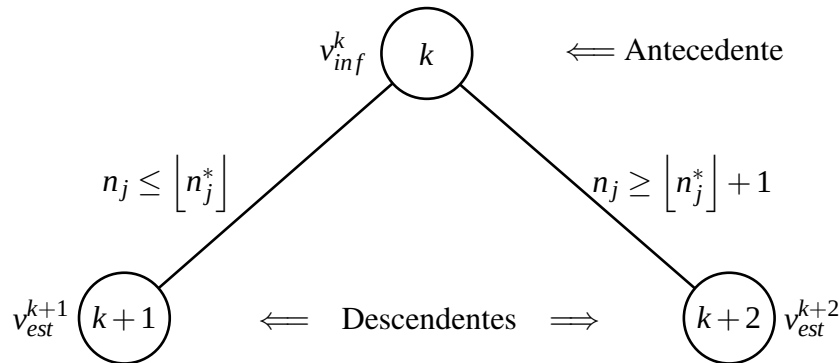
$$v_{est}^{k+1} = v_{inf}^k + P_j^- f_j^k + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \min \left[P_i^- f_i^k; P_i^+ (1 - f_i^k) \right] \quad (18)$$

$$v_{est}^{k+2} = v_{inf}^k + P_j^+ (1 - f_j^k) + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \min \left[P_i^- f_i^k; P_i^+ (1 - f_i^k) \right] \quad (19)$$

em que $f_i^k = n_i^k - \lfloor n_i^k \rfloor$ e $f_j^k = n_j^k - \lfloor n_j^k \rfloor$.

A diferença entre as equações (18) e (19) é a parcela relacionada com a variável j que foi usada para a separação do subproblema k . As estimativas feitas pelas equações (18) e (19) logicamente são de qualidade inferior em relação às estimativas encontradas pela equação (17). Entretanto, as estimativas encontradas, através das equações (18) e (19), exigem um esforço computacional bem reduzido, pois não é preciso resolver todos os subproblemas gerados. Em problemas reais, é recomendado usar estratégias adaptativas para escolher o próximo subproblema a ser analisado, com o objetivo de melhorar a eficiência do algoritmo B&B de acordo com os recursos computacionais disponíveis. Uma proposta usada por Haffner et al. (2001) e Linderroth e Savelsbergh (1999) é:

Figura 3 – Determinação simplificada de estimativas através de pseudocustos para seleção do subproblema candidato a ser resolvido pelo algoritmo B&B



Fonte – Gallego, Escobar e Romero (2007)

1. Usar a regra LIFO para escolher o subproblema a ser resolvido até encontrar uma solução inteira de boa qualidade.
2. Após encontrar uma solução inteira de boa qualidade, escolher os subproblemas utilizando a melhor estimativa da função objetivo, através de pseudocustos, até atingir a capacidade máxima da memória para o armazenamento, especificada no início do algoritmo.
3. Continuar escolhendo o subproblema a ser analisado pela melhor estimativa enquanto existir memória de armazenamento disponível. Caso contrário, usar a regra LIFO para escolher o subproblema a ser resolvido.

2.3.3 Seleção da Variável de Separação

Outra característica importante do algoritmo B&B que pode reduzir, significativamente, o número de subproblemas gerados é a escolha adequada da variável inteira com valor corrente não inteiro que deve ser usada para separar o subproblema corrente em dois descendentes. Como na escolha do subproblema candidato, não existe nenhuma regra sistemática para escolher a variável que deve separar o subproblema corrente, já que todas as propostas existentes em geral são empíricas. Dentre as propostas existentes, serão apresentadas duas propostas importantes: (i) escolha determinística previamente especificada e, (ii) escolha adaptativa usando pseudocustos.

Para utilizar a escolha determinística da variável inteira com valor corrente não inteiro que deve separar o subproblema corrente, é necessário ordenar previamente as variáveis inteiras do problema original, e para isso, segue-se algum critério especificado que, muitas vezes, depende das características específicas do problema. Depois de ordenada, escolhe-se a primeira variável inteira com valor corrente não inteiro. Para o problema PEST, uma proposta que apresenta resultados surpreendentes é ordenar as variáveis de acordo com o valor do coeficiente da função objetivo ordenadas do maior custo para o menor.

A ideia fundamental da proposta de escolha adaptativa baseada em pseudocustos é identificar a variável inteira com valor corrente não inteiro que proporcionaria o maior aumento estimado da função objetivo. O objetivo dessa estratégia é sondar rapidamente os subproblemas descendentes gerados. Existem duas formas alternativas que utilizam pseudocusto visando identificar a variável que causa a maior degradação no valor da função objetivo:

- Estratégia MAX MAX:

Essa proposta tenta identificar a variável que provoca a maior degradação da função objetivo de um dos subproblemas descendentes de forma que seja sondado rapidamente. A variável j do subproblema escolhido k é selecionada através da equação (20):

$$\max_j \left\{ \max \left[P_j^- f_j^k; P_j^+ (1 - f_j^k) \right] \right\}. \quad (20)$$

- Estratégia MAX MIN:

Essa proposta tenta identificar a variável que provoca a maior degradação da função objetivo nos dois subproblemas descendentes visando sondar ambos descendentes rapidamente. Assim, a variável j do subproblema escolhido k é selecionada através da equação (21):

$$\max_j \left\{ \min \left[P_j^- f_j^k; P_j^+ (1 - f_j^k) \right] \right\}. \quad (21)$$

3 ALGORITMOS ESPECIALIZADOS NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND

O Capítulo 1 apresentou os tipos de modelagem matemática aplicados ao problema de Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão (PEST) e as principais técnicas de otimização empregadas na resolução desse problema. O algoritmo *Branch and Bound* (B&B) geral, que é uma das técnicas de otimização utilizadas na resolução de programação inteira, e uma introdução de algumas possíveis melhorias que podem ser aplicadas no algoritmo foram apresentados no Capítulo 2. Este capítulo tem como objetivo apresentar e justificar o uso dos algoritmos Primal Simplex Canalizado (PSC) e Dual Simplex Canalizado (DSC) na estrutura do algoritmo B&B mostrando os benefícios que essa proposta traz para a eficiência do método.

A Seção 3.1 apresenta a forma geral de um problema de Programação Linear Inteiro Misto (PLIM) e, como o algoritmo B&B trata esse tipo de problema, esta seção também apresenta os motivos para o uso dos algoritmos PSC e DSC na estrutura do algoritmo B&B e quais os benefícios dessa estratégia. A montagem do quadro simplex para variáveis canalizadas é mostrada na Seção 3.2. As Seções 3.3 e 3.4 apresentam, respectivamente, a forma geral dos algoritmos PSC e DSC. As considerações importantes da implementação computacional dos algoritmos PSC e DSC na estrutura B&B são mostradas, respectivamente, nas Seções 3.5 e 3.6. Exemplos ilustrativos da implementação dos modelos de transporte e linear disjuntivo (LD) são apresentados na Seção 3.7.

3.1 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND

A técnica de solução B&B é utilizada para resolver problemas PLIM. Os problemas que se encontram nesta categoria podem ser representados da seguinte forma:

$$\text{PLIM} \Rightarrow \begin{cases} \min & x_0 = cx \\ & \text{s.a.} \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \\ & \exists i \in \{1, 2, \dots, m\} : x_i \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (22)$$

em que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$, e a matriz A possui dimensão $m \times n$.

Como o problema original é difícil de resolver diretamente, a ideia básica do algoritmo B&B é dividir, sucessivamente, o problema original em problemas menores, isto é, problemas de Programação Linear (PL) mais restritos que o problema original. Esses problemas menores são resolvidos completamente, trazendo, ao final, a solução do problema original.

Inicialmente, resolve-se o problema original relaxando a integralidade das variáveis

inteiras. O PL resultante, após relaxada a integralidade, é chamado de PL correspondente, ou P_0 .

$$PL \Rightarrow \begin{cases} \min & x_0 = cx \\ & \text{s.a.} \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq u. \end{cases} \quad (23)$$

O PL correspondente P_0 pode ser resolvido através de um algoritmo Primal Simplex. Um algoritmo Primal Simplex Padrão é capaz de resolver P_0 ; no entanto, existem variáveis canalizadas em P_0 . Para um algoritmo Primal Simplex Padrão considerar variáveis canalizadas, o número de restrições passaria de m para $m + 2n$, e o número de variáveis, de n para $3n$. Por esse motivo, faz-se necessário utilizar um algoritmo PSC que trata as variáveis canalizadas de forma implícita sem aumentar o tamanho do problema. Depois de resolvido P_0 , se ele apresentar todas as variáveis inteiras com valores inteiros, foi encontrada a solução ótima do PLIM, e o algoritmo B&B deve parar. Normalmente a resolução de P_0 apresenta valores não inteiros para algumas variáveis inteiras; assim, o algoritmo B&B separa o problema P_0 , em dois subproblemas, P_1 e P_2 , em que é escolhida uma variável inteira com valor corrente não inteiro de P_0 para fazer a separação.

Esses dois subproblemas são diferentes entre si e entre o problema antecessor, pela adição de uma nova restrição em cada um deles; essas restrições possuem a seguinte forma:

$$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor \quad (24)$$

$$x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1 \quad (25)$$

onde x_j é a variável inteira escolhida para separar o problema antecessor, x_j^* é o valor corrente não inteiro de x_j , e $\lfloor x_j^* \rfloor$ é o maior inteiro contido em x_j^* .

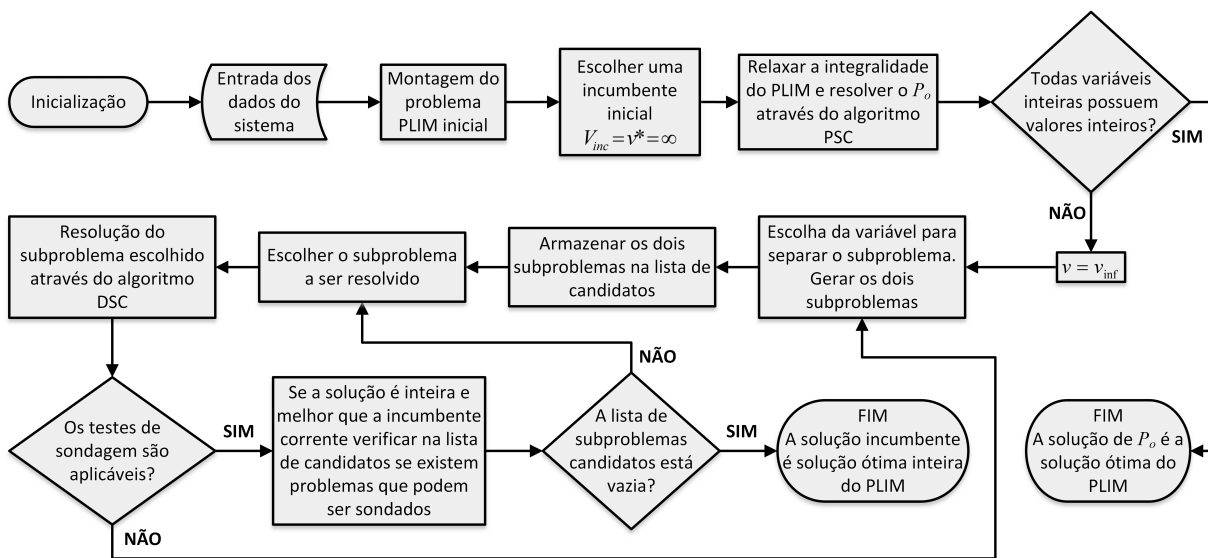
Em um dos subproblemas, é adicionada a restrição (24), e, no outro, a restrição (25). A partir desse ponto, devem ser resolvidos novamente, ou então, fazer a reotimização, através do quadro ótimo do problema antecessor, pois são diferentes somente pela adição dessas novas restrições. Com a adição da nova restrição no quadro ótimo do problema antecessor, a factibilidade é perdida, mas a otimalidade ainda é satisfeita, pois os coeficientes de custo relativo não são alterados e, neste caso, através de técnicas empregadas na análise de sensibilidade, com o uso do quadro ótimo de P_0 , verifica-se a possibilidade de reotimizar os subproblemas gerados, através de um algoritmo Dual Simplex.

As restrições (24) e (25) poderiam ser adicionadas de forma padrão, e o problema ser reotimizado utilizando o método Dual Simplex Padrão, o que aumentaria, desnecessariamente, o tamanho do problema. As restrições (24) e (25) mudam somente os limites da variável canalizada que foi escolhida para separar o problema; dessa forma, seria mais adequado utilizar o método DSC que leva em conta esse tipo de mudança sem aumentar o tamanho do problema.

No processo de reotimização, pode ser encontrada uma solução ótima finita para o problema, ou o problema pode se tornar inactível.

A aplicação dessa estratégia implica que todos os subproblemas gerados no processo iterativo do algoritmo B&B durante a resolução do problema PEST podem ser reotimizados a partir do quadro ótimo de P_0 . Dessa forma, não é necessário armazenar todos os quadros ótimos dos subproblemas gerados, somente armazenam-se o quadro ótimo de P_0 e a informação dos limites alterados. Portanto, a aplicação dessa estratégia resulta em uma economia substancial de recursos computacionais.

Figura 4 – Fluxograma do Algoritmo *Branch and Bound*



Fonte – Elaboração do autor.

A Figura 4 apresenta o fluxograma do algoritmo B&B básico, adaptado do Algoritmo 2 presente na Seção 2.2. O fluxograma apresenta de forma simples o funcionamento do algoritmo B&B. Pode-se verificar na Figura 4 o uso do algoritmo PSC para a resolução de P_0 e também o uso do algoritmo DSC para a reotimização dos subproblemas a partir de P_0 . Neste capítulo, são apresentados os algoritmos PSC e DSC, em suas formas gerais, e, posteriormente, as adaptações necessárias para a implementação em conjunto com o algoritmo B&B.

3.2 QUADRO SIMPLEX ALTERNATIVO PARA VARIÁVEIS CANALIZADAS

As formulações matemáticas desta seção foram baseadas a partir de Gallego, Escobar e Romero (2003). Considerando o problema de PL padrão (23) e seja B uma solução básica factível (SBF), desmembrando a matriz de coeficientes A e o vetor de variáveis x no sistema de equações $Ax = b$ obtém-se

$$Bx_B + N_1x_{N_1} + N_2x_{N_2} = b \quad (26)$$

onde N_1 e N_2 são, respectivamente, as matrizes de coeficientes das variáveis não básicas fixadas nos seus limites inferiores (LI) e limites superiores (LS), x_B , as variáveis básicas, x_{N_1} e x_{N_2} , as variáveis não básicas fixadas nos seus LI e LS respectivamente.

Isolando as variáveis básicas em função das variáveis não básicas na equação (26), é obtido

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1x_{N_1} - B^{-1}N_2x_{N_2}. \quad (27)$$

Para uma base B , a função objetivo $x_0 = cx$ assume a seguinte forma:

$$x_0 = c_Bx_B + c_{N_1}x_{N_1} + c_{N_2}x_{N_2} \quad (28)$$

onde c_B são os custos referentes às variáveis básicas, e c_{N_1} e c_{N_2} são os custos das variáveis não básicas fixadas em seus LI e LS respectivamente.

Substituindo a equação (27), na equação (28):

$$\begin{aligned} x_0 &= c_B [B^{-1}b - B^{-1}N_1x_{N_1} - B^{-1}N_2x_{N_2}] + c_{N_1}x_{N_1} + c_{N_2}x_{N_2} \\ x_0 &= c_BB^{-1}b + [c_{N_1} - c_BB^{-1}N_1]x_{N_1} + [c_{N_2} - c_BB^{-1}N_2]x_{N_2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Através das equações (27) e (29), é possível construir o quadro simplex inicial já adaptado para variáveis canalizadas apresentado na Tabela 1. A configuração do quadro simplex apresentada na Tabela 1 é uma configuração alternativa do quadro simplex apresentado por Bazaraa, Jarvis e Sherali (1990). Esse quadro alternativo é de menor dimensão e foi proposto por Garfinkel e Nemhauser (1972).

Tabela 1 – Quadro Simplex Canalizado Alternativo

	RHS	$-x_{N_1}$	$-x_{N_2}$
x_0	$\bar{x}_0$	$c_BB^{-1}N_1 - c_{N_1}$	$c_BB^{-1}N_2 - c_{N_2}$
x_B	$\bar{b}$	$B^{-1}N_1$	$B^{-1}N_2$

Fonte – Gallego, Escobar e Romero (2003)

em que:

$$\bar{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2u_{N_2}$$

$$\bar{x}_0 = c_BB^{-1}b + [c_{N_1} - c_BB^{-1}N_1]l_{N_1} + [c_{N_2} - c_BB^{-1}N_2]u_{N_2}.$$

Nesta pesquisa, foi adotada a mesma notação encontrada no trabalho de Gallego, Escobar e Romero (2007) como é apresentado na Tabela 2. O índice i indica a linha do quadro simplex, e $i = 0$ refere-se à linha da função objetivo. O índice j indica a coluna do quadro simplex, e $j = 0$ refere-se à coluna RHS. O índice k indica a variável não básica que é escolhida para entrar na base. O índice r indica a variável básica que é escolhida para sair da base. O índice m indica a última variável básica.

Tabela 2 – Notação a ser utilizada

	RHS	...	$-x_j$	...	$-x_k$	...
x_0	y_{00}	...	y_{0j}	...	y_{0k}	...
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_{Bi}	y_{i0}	...	y_{ij}	...	y_{ik}	...
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_{Br}	y_{r0}	...	y_{rj}	...	y_{rk}	...
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_{Bm}	y_{m0}	...	y_{mj}	...	y_{mk}	...

Fonte – Gallego, Escobar e Romero (2007)

Seguindo a notação apresentada na Tabela 2, as equações (27) e (29) assumem a forma da equação (30):

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij} x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij} x_j \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m. \quad (30)$$

em que:

R_1 representa o conjunto de índices das variáveis não básicas que estão fixadas nos seus LI.

R_2 representa o conjunto de índices das variáveis não básicas que estão fixadas nos seus LS.

3.2.1 Pivotagem do Quadro Simplex

Com a adoção da notação apresentada na Tabela 2, a pivotagem do quadro simplex com variáveis canalizadas sofre algumas alterações em relação à pivotagem tradicional apresentada por Bazaraa, Jarvis e Sherali (1990).

A pivotagem de todas as colunas é feita de maneira tradicional exceto na coluna RHS e na coluna da variável não básica escolhida para entrar na base x_k . A coluna RHS é atualizada, separadamente, através de procedimentos específicos de cada algoritmo, que são apresentados nas próximas seções. Depois da pivotagem, a coluna referente à variável x_k receberá a coluna da variável básica que foi escolhida para sair da base x_{Br} .

Assim, a pivotagem do quadro simplex com variáveis canalizadas é realizada da seguinte forma:

- A linha referente à variável x_{Br} é dividida pelo elemento pivô y_{rk} :

$$\frac{y_{rj}}{y_{rk}} \quad \forall j \in R_1 \text{ e } R_2; j \neq k. \quad (31)$$

- Todas as outras linhas são pivotadas seguindo o procedimento apresentado na equação (32):

$$y_{ij} - y_{ik} \left(\frac{y_{rj}}{y_{rk}} \right) \quad \begin{cases} i = 0, 1, \dots, m; & i \neq r \\ \forall j \in R_1 \text{ e } R_2; & j \neq k. \end{cases} \quad (32)$$

- Substituir a coluna k seguindo as equações (33) e (34):

$$-\frac{y_{ik}}{y_{rk}} \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m \text{ e } i \neq r \quad (33)$$

$$\frac{1}{y_{rk}} \quad \text{para } i = r. \quad (34)$$

3.3 ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO

As formulações matemáticas desta seção também foram baseadas a partir do trabalho de Gallego, Escobar e Romero (2003). O algoritmo PSC é aplicado na resolução do PL padrão apresentado em (23). Considerando o quadro simplex apresentado na Tabela 1 e a notação apresentada na Tabela 2, para o algoritmo PSC uma SBF é ótima quando:

$$\begin{cases} \text{Se } y_{0j} \leq 0 & \forall j \in R_1 \\ & e \\ \text{Se } y_{0j} \geq 0 & \forall j \in R_2. \end{cases} \quad (35)$$

Pela teoria de PL, a solução ótima global de um PL estará em um ponto extremo do espaço factível do mesmo. Um ponto extremo de um PL é descrito em função dos coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas. Se a SBF atual não é ótima, significa que existem um ou mais pontos extremos de melhor qualidade adjacentes a SBF corrente. Nesse caso, procura-se a variável não básica com coeficiente de custo relativo que causará a maior variação no valor da função objetivo, isto é, selecionar uma variável não básica candidata a entrar na base e, possivelmente, uma variável básica candidata a sair da base.

Para o algoritmo PSC, o procedimento para a escolha da variável não básica candidata a entrar na base é empírico, e podem ser implementados diversos tipos de procedimentos. A Subseção 3.3.1 apresenta um procedimento usual para escolha da variável não básica x_k candidata a entrar na base, e também comenta um procedimento alternativo que leva em consideração características do problema.

Depois de escolhida a variável não básica candidata a entrar na base, deve-se verificar se a variável apenas muda do limite onde está fixada para o seu outro limite, ou então, se existe a troca de base. Essa troca de base significa que é necessário escolher a variável básica x_{B_r} que deve sair da base deixando o lugar para x_k . Esse procedimento não é empírico e deve obedecer a regras de acordo com a variável não básica x_k escolhida para entrar na base. As regras para a escolha da variável básica que deve sair da base é apresentada na Subseção 3.3.2.

3.3.1 Escolha da variável não básica que deve entrar na base

Dentre todas as variáveis não básicas que não satisfazem a condição de otimalidade (35), deve-se escolher uma para entrar na base. Um critério usual para selecionar a variável x_k

é, através da relação (36), cujo objetivo é selecionar a variável não básica que causará a maior variação no valor da função objetivo de modo a alcançar de forma mais rápida o valor ótimo.

$$k \Rightarrow \max \left\{ y_{0j} : j \in R_1; -y_{0j} : j \in R_2 \right\}. \quad (36)$$

Não é possível garantir a eficiência do critério (36), pois a máxima variação do valor da função objetivo não depende exclusivamente do valor do coeficiente de custo relativo, e sim também, do valor máximo que as variáveis básicas podem variar sem nenhuma delas ultrapassar os próprios limites. Na existência de vários pontos extremos adjacentes de melhor qualidade que a base corrente, mesmo sabendo qual variável não básica causaria a maior variação no valor da função objetivo, também não há a garantia de que será percorrido o caminho com menos pontos extremos até alcançar a solução ótima do problema, pois esse critério é aplicado localmente abrangendo somente os pontos extremos adjacentes da base atual.

Um outro critério que pode ser mais eficiente dependendo das características do problema é ordenar todas as variáveis não básicas que não satisfazem a condição de otimalidade (35) por tipo, e priorizar a escolha pelo tipo de variável com maior probabilidade de fazer parte da base ótima. Dependendo do problema, se for possível saber quais variáveis têm maior probabilidade de fazerem parte da base ótima, é bem provável que a solução ótima seja encontrada com um número menor de iterações do PSC, pois essa estratégia fornece uma visão mais aprofundada dos melhores pontos extremos a serem percorridos até encontrar a solução ótima do problema.

3.3.2 Se houver troca de base, escolher a variável básica que deve sair da base

Como mencionado anteriormente, a máxima variação do valor da função objetivo e dos valores das variáveis básicas, depende do valor máximo que as variáveis básicas podem variar sem ultrapassar os seus limites. A variável não básica x_k candidata a entrar na base pode estar em seu LI ou em seu LS, devendo ser cada caso analisado separadamente; sendo assim, é necessário analisar se a variável x_k apenas mudará diretamente para o seu outro limite, ou se será escolhida uma variável básica x_{Br} para sair da base trocando de lugar com a variável x_k .

3.3.2.1 Uma variável não básica em seu limite inferior é candidata a entrar na base

Seja $x_k : k \in R_1 \Rightarrow y_{0j} > 0$. Quando se muda o valor desta variável x_k , podem ocorrer três situações em que duas são mudanças de valores das variáveis básicas: (1) a variável básica pode chegar ao seu LI; (2) a variável básica pode chegar ao seu LS; e (3) a própria variável não básica x_k pode chegar diretamente ao seu LS.

Seja Δ_k o máximo incremento possível para x_k ; então, através da equação (30), é obtida a equação (37):

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij}x_j - y_{ik}\Delta_k \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (37)$$

Substituindo $\bar{b}_i = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij}x_j$, na equação anterior, tem-se a equação (38) que representa a variação das variáveis básicas:

$$x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (38)$$

Também, através da equação (30), é obtida equação (39):

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_1} y_{0j}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{0j}x_j - y_{0k}\Delta_k. \quad (39)$$

Como $\bar{x}_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_1} y_{0j}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{0j}x_j$, substituindo, na equação anterior, é obtida a equação (40) que representa a variação da função objetivo

$$x_0 = \bar{x}_0 - y_{0k}\Delta_k. \quad (40)$$

Agora é necessário analisar os três casos que podem ocorrer com as variáveis básicas quando x_k muda de valor.

1. A variável básica pode chegar ao seu LI:

Através da equação (38), verifica-se que uma variável básica pode chegar ao seu LI se $y_{ik} > 0$. Nesse caso, o valor de Δ_k que leva x_{Bi} a seu LI é determinado pela equação (41):

$$l_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k$$

$$\Delta_k = \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{y_{ik}} \quad y_{ik} > 0. \quad (41)$$

2. A variável básica pode chegar ao seu LS:

$$u_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k$$

$$\Delta_k = \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{-y_{ik}} \quad y_{ik} < 0. \quad (42)$$

3. A própria variável não básica x_k pode chegar ao seu LS:

$$\Delta_k = u_k - l_k. \quad (43)$$

Dessa forma, a máxima variação de Δ_k para x_k é obtida, através da relação (44), que analisa todos os elementos diferentes de zero referentes às variáveis básicas da coluna da variável não básica x_k , analisando também se a variável não básica x_k pode passar diretamente para o seu LS ou se o problema é ilimitado.

$$\Delta_k = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0; (u_k - l_k); \infty \right\}. \quad (44)$$

Se $\Delta_k \rightarrow \infty$, significa que o problema é ilimitado. Caso contrário, para (44) existe a possibilidade da troca de base ou não. Para a possibilidade da troca de base, a variável básica pode chegar ao seu LI ou ao seu LS, e, para a possibilidade de não haver troca de base, a variável não básica x_k candidata a entrar na base que está fixada no LI passa diretamente para o seu LS.

- Existe troca de base.

A variável básica x_{Br} é escolhida de acordo com o Δ_k . A pivotagem do quadro simplex é feita conforme os procedimentos apresentados na Subseção 3.2.1. A coluna RHS é atualizada, separadamente, através das equações (38) e (40), exceto para x_{Br} como mostra a relação (45):

$$\begin{cases} x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k & i \neq r \\ x_{Br} = l_k + \Delta_k & \Leftarrow x_k \\ x_0 = \bar{x}_0 - y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (45)$$

Quando há troca de base, existem duas possibilidades para a variável básica x_{Br} escolhida para sair da base: (1) se a variável básica x_{Br} alcançou o seu LI e se torna não básica no seu LI, isto é, $r \in R_1$; e (2) se a variável básica x_{Br} alcançou o seu LS e se torna não básica em seu LS, isto é, $r \in R_2$.

- Não existe troca de base - a própria variável não básica x_k chega a seu LS.

A base não é alterada e não se faz a pivotagem do quadro simplex. No entanto, a coluna RHS deve ser atualizada, através das equações (38) e (40), como mostra a relação (46):

$$\begin{cases} x_k = u_k = l_k + \Delta_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k & \forall i \\ x_0 = \bar{x}_0 - y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (46)$$

3.3.2.2 Uma variável não básica em seu limite superior é candidata a entrar na base

Seja $x_k : k \in R_2 \Rightarrow y_{0j} < 0$. De forma parecida com caso anterior, quando se muda o valor desta variável x_k , podem ocorrer três situações em que duas são mudanças de valores das variáveis básicas: (1) a variável básica pode chegar ao seu LI; (2) a variável básica pode chegar ao seu LS; e (3) a própria variável não básica x_k pode chegar ao seu LI.

Seja Δ_k a máxima diminuição possível para x_k ; então de (30) é obtida a equação (47):

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij}x_j + y_{ik}\Delta_k \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (47)$$

Como $\bar{b}_i = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij}x_j$, substituindo, na equação anterior, tem-se a equação (48) que representa a variação das variáveis básicas:

$$x_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (48)$$

Da equação (30) também pode ser obtida a equação (49):

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_1} y_{0j}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{0j}x_j + y_{0k}\Delta_k. \quad (49)$$

Substituindo $\bar{x}_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_1} y_{0j}x_j - \sum_{j \in R_2} y_{0j}x_j$, na equação anterior, tem-se (50) que representa a variação da função objetivo

$$x_0 = \bar{x}_0 + y_{0k}\Delta_k. \quad (50)$$

A partir desse momento, devem ser analisados os três casos que podem ocorrer com as variáveis básicas quando x_k muda de valor.

1. A variável básica pode chegar ao seu LI:

Através da equação (48), verifica-se que uma variável básica pode chegar ao seu LI se $y_{ik} < 0$. Nesse caso, o valor de Δ_k que leva x_{Bi} a seu LI é determinado pela equação (51):

$$l_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k$$

$$\Delta_k = \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{-y_{ik}} \quad y_{ik} < 0. \quad (51)$$

2. A variável básica pode chegar ao seu LS:

$$u_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k$$

$$\Delta_k = \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{y_{ik}} \quad y_{ik} > 0. \quad (52)$$

3. A própria variável não básica x_k pode chegar ao seu LI:

$$\Delta_k = u_k - l_k. \quad (53)$$

Dessa forma, a máxima variação de Δ_k para x_k é obtida, através da relação (54), que analisa todos os elementos diferentes de zero referentes às variáveis básicas da coluna da variável não básica x_k , analisando também se a variável não básica x_k pode passar diretamente para o seu LI ou se o problema é ilimitado.

$$\Delta_k = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0; \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; (u_k - l_k); \infty \right\}. \quad (54)$$

Se $\Delta_k \rightarrow \infty$, implica que o problema é ilimitado. Caso contrário, para (54) existe a possibilidade da troca de base ou não. Para a possibilidade da troca de base, a variável básica pode chegar ao seu LI ou ao seu LS, e, para a possibilidade de não haver troca de base, a variável não básica x_k candidata a entrar na base que está fixada no LS passa diretamente para o seu LI.

- Existe troca de base.

A variável básica x_{Br} é escolhida de acordo com o Δ_k . A pivotagem do quadro simplex é feita conforme os procedimentos apresentados na Subseção 3.2.1. A coluna RHS é atualizada, separadamente, através das equações (48) e (50), exceto para x_{Br} como mostra a relação (55):

$$\begin{cases} x_{Br} = u_k - \Delta_k & \Leftarrow x_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k & i \neq r \\ x_0 = \bar{x}_0 + y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (55)$$

Quando há troca de base, existem duas possibilidades para a variável básica x_{Br} escolhida para sair da base: (1) se a variável básica x_{Br} alcançou o seu LI e se torna não básica no seu LI, isto é, $r \in R_1$; e (2) se a variável básica x_{Br} alcançou o seu LS e se torna não básica em seu LS, isto é, $r \in R_2$.

- Não existe troca de base - a própria variável não básica x_k chega a seu LI.

A base não é alterada e não se faz a pivotagem do quadro simplex. No entanto, a coluna RHS deve ser atualizada, através das equações (48) e (50), como mostra a relação (56):

$$\begin{cases} x_k = u_k - \Delta_k = l_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k & \forall i \\ x_0 = \bar{x}_0 + y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (56)$$

3.3.3 Algoritmo Primal Simplex Canalizado

Um resumo dos passos do algoritmo PSC para resolver o PL padrão (23), mencionados nessa seção, é apresentado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3 Algoritmo Primal Simplex Canalizado

1) Passo Inicial

Encontrar uma SBF inicial e construir o quadro simplex inicial:

	RHS	$-x_{N_1}$	$-x_{N_2}$
x_0	$\bar{x}_0$	$c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1}$	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$
x_B	$\bar{b}$	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$

em que:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= c_B B^{-1} b + [c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1] l_{N_1} + [c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2] u_{N_2} \\ \bar{b} &= B^{-1} b - B^{-1} N_1 l_{N_1} - B^{-1} N_2 u_{N_2}. \end{aligned}$$

Algoritmo 3 Algoritmo Primal Simplex Canalizado (Continuação)

2) Passo Principal
1. Verificar a otimalidade:

Se $y_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$ e $y_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$, $\Rightarrow PARE \Rightarrow$ Solução ótima. Caso contrário, selecionar a variável não básica x_k como candidata a entrar na base através da relação (57):

$$k \Rightarrow \max \{ y_{0j} : j \in R_1; -y_{0j} : j \in R_2 \}. \quad (57)$$

Se $k \in R_1$, passe para o passo 2.

Se $k \in R_2$, passe para o passo 3.

2. Uma variável não básica x_k , em seu LI, é candidata a entrar na base:

Encontrar Δ_k , através da relação (58). Se $\Delta_k \rightarrow \infty$, pare porque o problema é ilimitado. Caso contrário, verificar se existe troca de base com a variável x_{Br} saindo da base, ou se x_k simplesmente passa para seu LS.

$$\Delta_k = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0; (u_k - l_k); \infty \right\}. \quad (58)$$

- Se existe troca de base, implementar a pivotagem do quadro simplex, exceto na coluna RHS, que deve ser atualizada, separadamente, através da relação (59). Atualizar R_1 e R_2 . Na variável que sai da base, se $y_{rk} > 0$, a variável passa para seu LI. Se $y_{rk} < 0$, a variável passa para seu LS.

$$\begin{cases} x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k & i \neq r \\ x_{Br} = l_k + \Delta_k & \Leftarrow x_k \\ x_0 = \bar{x}_0 - y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (59)$$

- Se não existe troca de base, então não é necessário implementar a pivotagem do quadro simplex, mas deve-se atualizar a coluna RHS, por meio da relação (60). Atualizar R_1 e R_2 onde a variável candidata passa para seu LS.

$$\begin{cases} x_k = u_k = l_k + \Delta_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k & \forall i \\ x_0 = \bar{x}_0 - y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (60)$$

Volte ao passo 1.

3. Uma variável não básica x_k , em seu LS, é candidata a entrar na base:

Encontrar Δ_k , através da relação (61). Se $\Delta_k \rightarrow \infty$, pare porque o problema é ilimitado. Caso contrário, verificar se existe troca de base com a variável x_{Br} saindo da base, ou se x_k simplesmente passa para seu LI.

$$\Delta_k = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0; \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; (u_k - l_k); \infty \right\}. \quad (61)$$

Algoritmo 3 Algoritmo Primal Simplex Canalizado (Conclusão)

- Se existe troca de base, implementar a pivotagem do quadro simplex, exceto na coluna RHS, que deve ser atualizada, separadamente, através da relação (62). Atualizar R_1 e R_2 . Na variável que sai da base, se $y_{rk} < 0$, a variável passa para seu LI. Se $y_{rk} > 0$, a variável passa para seu LS.

$$\begin{cases} x_{Br} = u_k - \Delta_k & \Leftarrow x_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k & i \neq r \\ x_0 = \bar{x}_0 + y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (62)$$

- Se não existe troca de base, então não é necessário implementar a pivotagem do quadro simplex, mas deve-se atualizar a coluna RHS, por meio da relação (63). Atualizar R_1 e R_2 onde a variável candidata passa para seu LI.

$$\begin{cases} x_k = u_k - \Delta_k = l_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k & \forall i \\ x_0 = \bar{x}_0 + y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (63)$$

Volte ao passo 1.

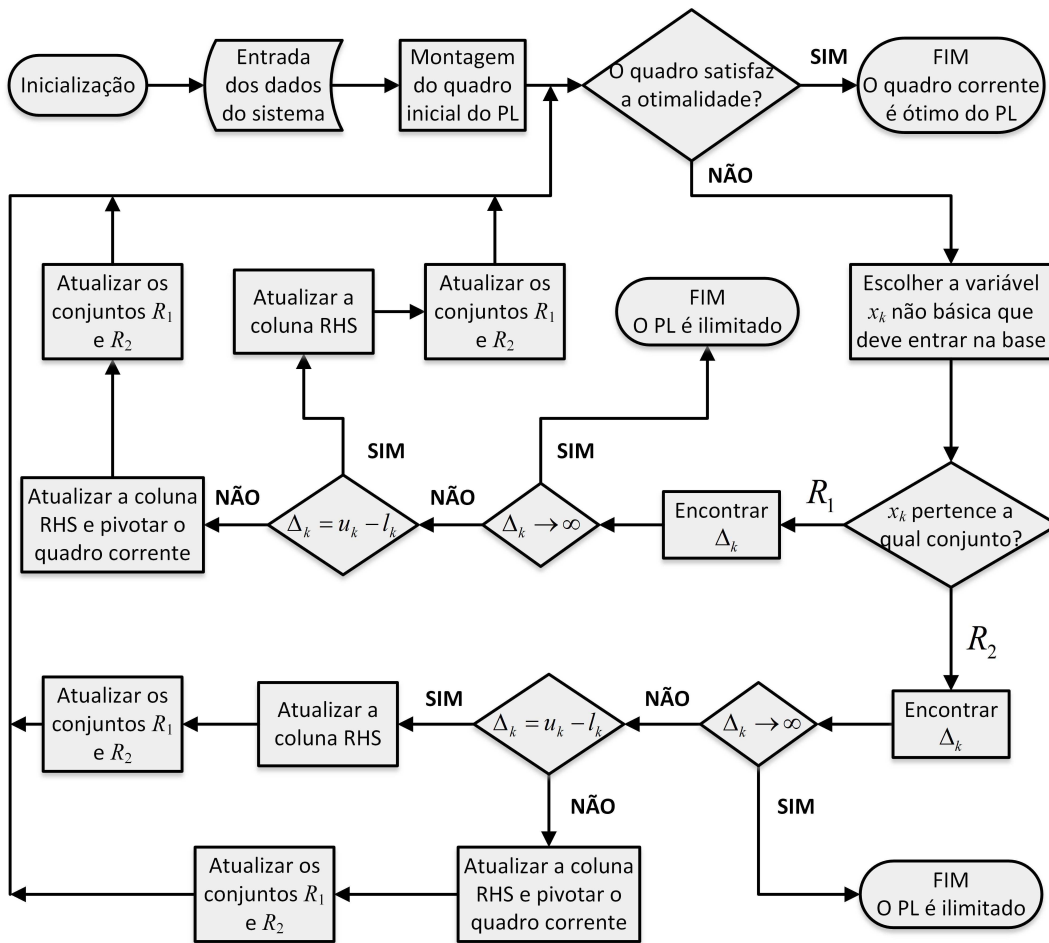
Fonte Adaptado de Gallego, Escobar e Romero (2003)

A Figura 5 apresenta o fluxograma do algoritmo PSC adaptado do Algoritmo 3. O fluxograma mostra de maneira esquematizada as etapas do algoritmo PSC.

3.3.4 Algoritmo Primal Simplex Canalizado de Duas Fases

Uma SBF ideal para um PL é aquela cujos coeficientes das variáveis básicas formam uma matriz identidade, pois $B = I = B^{-1}$, que é necessária para montar o quadro simplex apresentado na Tabela 1. O custo computacional de inversão de uma base geralmente é alto; sendo assim, tenta-se evitar escolher uma base onde é necessário calcular a sua inversa.

Para problemas que possuem também restrições de igualdade, a formação de uma SBF que gera uma matriz identidade não é muito evidente. Como são os casos dos modelos de transporte (1) e LD (8), onde as restrições representadas pelas equações (1b), (8b) e (8c) são de igualdade. Devido às restrições de igualdade, verifica-se a necessidade da utilização do algoritmo PSC de duas fases, onde é necessário fazer a adição de variáveis artificiais. No algoritmo PSC de duas fases, otimiza-se, primeiramente, a função objetivo de primeira fase que corresponde ao somatório dos coeficientes de todas as variáveis artificiais. O método tradicional de inserção de variáveis artificiais adiciona uma variável artificial para cada equação do sistema de equações, isto é, para um sistema com m equações, é necessário adicionar m variáveis artificiais, além das variáveis de folga (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 1990), aumentando, desnecessariamente, o tamanho do problema. Portanto, uma nova estratégia para que isso não

Figura 5 – Fluxograma do Algoritmo Primal Simplex Canalizado

Fonte – Elaboração do autor.

ocorra é adicionar variáveis artificiais somente nas restrições que exigem essa adição, isto é, em restrições de igualdade. As variáveis artificiais e as variáveis de folga (caso seja possível) também formam uma SBF e, portanto, são variáveis básicas. As variáveis não básicas, nessa estratégia, são as variáveis originais do problema.

Os coeficientes das variáveis artificiais, nessa nova estratégia, podem assumir os valores 1 ou -1 dependendo de cada restrição. Para as restrições de igualdade, fixando-se previamente cada variável não básica em um de seus limites é encontrado o valor numérico do lado esquerdo da igualdade ρ_i , se ρ_i é menor ou igual que o valor numérico do lado direito b_i , isto é, $\rho_i \leq b_i$ o valor do coeficiente da variável artificial será 1, caso contrário, seu coeficiente será -1 .

A estratégia anterior só é completamente válida para as variáveis artificiais (restrições de igualdade), pois o sinal do coeficiente das variáveis de folga é determinado pelo tipo de desigualdade. Assim, para restrições com $\leq$, adiciona-se uma variável de folga com coeficiente positivo para transformar a desigualdade em igualdade; caso contrário, adiciona-se uma variável de folga com coeficiente negativo.

Após fixar cada variável não básica em um de seus limites, em restrições em que é

adicionada uma variável de folga com coeficiente positivo, se houver alguma restrição com o lado esquerdo da igualdade com valor superior ao lado direito, essa variável de folga não poderá ser utilizada como variável básica. Nesse caso, é necessário adicionar uma variável artificial com coeficiente negativo na restrição para que se torne uma variável básica.

Situação semelhante ocorre com restrições em que é adicionada uma variável de folga com coeficiente negativo. Nesse caso, se há alguma restrição no lado esquerdo da igualdade com valor menor que o lado direito, essa variável de folga não pode ser utilizada como variável básica. Diante dessa circunstância, é necessário adicionar uma variável artificial com coeficiente positivo na restrição, tornando-a parte da base.

De modo a exemplificar, considere as possíveis restrições de um PL:

$$a_i x \leq b_i \quad (64)$$

$$a_i x \geq b_i \quad (65)$$

onde a_i é formado pelos elementos da linha i da matriz A , x é o vetor de variáveis, b_i é um elemento do vetor b , e $b_i \geq 0$.

Para transformar as inequações (64) e (65) em equações, adiciona-se uma variável de folga x_i^f com coeficiente positivo em (64) e uma variável de folga com coeficiente negativo em (65).

$$a_i x + x_i^f = b_i \quad (66)$$

$$a_i x - x_i^f = b_i \quad (67)$$

$$x_i^f \geq 0. \quad (68)$$

Após fixar cada variável não básica em um de seus limites, pode-se determinar o valor numérico da variável de folga; em (66) e (67), se o valor numérico encontrado para a variável de folga for maior ou igual a zero, então a variável x_i^f é básica; caso contrário, deve-se adicionar uma variável artificial x_i^a com coeficiente negativo em (66) e/ou coeficiente positivo em (67).

$$a_i x + x_i^f - x_i^a = b_i \quad (69)$$

$$a_i x - x_i^f + x_i^a = b_i \quad (70)$$

$$x_i^f \geq 0 \quad (71)$$

$$x_i^a \geq 0. \quad (72)$$

A base B formada pelas variáveis de folga (quando possível) e artificiais, na nova estratégia, é uma matriz diagonal, logo não é necessário realizar operações de inversão de matrizes, pois $B = B^{-1}$. O uso dessa proposta só é possível, porque a base obtida satisfaz as propriedades de ponto extremo em que as variáveis básicas devem estar entre seus limites, e as variáveis não básicas devem estar em um de seus limites. Portanto, seguindo essa estratégia, tem-se o seguinte PL:

$$(PL) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \min & z_0 = c'x_a \\ & \min \quad x_0 = cx \\ & \text{s.a.} \\ & Ax \pm x_a = b \\ & l \leq x \leq u \\ & 0 \leq x_a \leq \infty. \end{array} \right.$$

Para o quadro alternativo apresentado na Tabela 1, devem-se seguir os seguintes critérios:

- O quadro simplex deve conter a linha da função objetivo de Fase I (identificada por z_0) e a linha da função objetivo original.

Tabela 3 – Quadro Simplex Canalizado
Alternativo de Duas Fases

	RHS	$-x_{N_1}$	$-x_{N_2}$
z_0	$\bar{z}_0$	$c'_B B^{-1} N_1 - c'_{N_1}$	$c'_B B^{-1} N_2 - c'_{N_2}$
x_0	$\bar{x}_0$	$c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1}$	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$
x_B	b	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$

Fonte – Adaptado de Gallego, Escobar e Romero (2003)

em que:

$$\bar{z}_0 = c'_B B^{-1} b + [c'_{N_1} - c'_B B^{-1} N_1] l_{N_1} + [c'_{N_2} - c'_B B^{-1} N_2] u_{N_2}.$$

- Durante a Fase I, a linha da função objetivo original é pivoteada normalmente; no entanto, utiliza-se a linha da função objetivo de Fase I para os procedimentos de escolha das variáveis não básicas que devem entrar na base.
- A Fase I termina quando $\bar{z}_0 = 0$; isso significa que todas as variáveis artificiais foram eliminadas ou, no caso de alguma permanecer na base, a mesma será igual a zero.
- Ao final da Fase I, se existir alguma variável artificial que ainda permanece na base, essa variável deve ser imposta a sair da base, dando lugar a uma variável não básica que tenha o maior $y_{rj} > 0$. Nesse caso, é realizada novamente a pivotagem; a coluna RHS não sofre alteração, pois, nesse caso, $\Delta_k = 0$.
- Terminada a Fase I, elimina-se a linha da função objetivo de Fase I, e passa-se a utilizar a linha da função objetivo original para os procedimentos de escolha da variável não básica que deve entrar na base.
- Não se faz necessário gerar as colunas das variáveis artificiais que são retiradas da base, isto é, quando uma variável artificial é retirada da base, ela é eliminada do processo de resolução.

3.4 ALGORITMO DUAL SIMPLEX CANALIZADO

As formulações matemáticas, teoremas e demonstrações presentes nesta seção foram baseadas a partir de Garcés, Gallego e Romero (2013). Da mesma forma que o algoritmo PSC, o algoritmo DSC também considera o quadro simplex apresentado na Tabela 1 e a notação apresentada na Tabela 2. Diferentemente do algoritmo PSC, o algoritmo DSC necessita que a condição de otimalidade (35) esteja satisfeita, mas não necessariamente a condição de factibilidade.

$$l_{Bi} \leq z_{i0} \leq u_{Bi} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (73)$$

Para os casos onde a condição de otimalidade (35) não esteja satisfeita, é necessário aplicar um algoritmo DSC de duas fases. Esse não é o caso dos PLs gerados pelo algoritmo B&B na resolução dos problemas (1) e (8). Nos subproblemas gerados pelo B&B, a otimalidade está satisfeita, no quadro ótimo do problema inicial, mas a factibilidade é perdida quando os limites das variáveis são alterados nos novos PLs gerados pelo processo iterativo do algoritmo B&B.

No algoritmo DSC, escolhe-se, primeiramente, a variável básica que deve sair da base, e depois, a variável não básica para entrar na base. As variações que a mudança da base causa nos valores da função objetivo e das variáveis básicas é analisada na Subseção 3.4.1. Dentre todas as variáveis básicas que estão violando o critério de factibilidade (73), escolhe-se uma para sair da base, isto é, escolhe-se uma variável que possua violação de um dos seus limites. O critério de escolha da variável básica que deve sair da base é empírico e podem ser implementados outros procedimentos. A Subseção 3.4.2 apresenta um critério usual para a escolha da variável básica x_{Br} , que deve sair da base, e também comenta um critério alternativo que leva em conta as características do problema.

Após escolhida a variável básica x_{Br} candidata a sair da base, verifica-se se existe a possibilidade de escolher uma variável não básica x_k para compor a base. Se não for possível escolher uma variável, significa que o problema é infactível. O critério de escolha da variável não básica x_k não é empírico e deve obedecer a regras de acordo com a variável básica x_{Br} escolhida para sair da base. Essas regras são apresentadas na Subseção 3.4.3 em forma de teoremas.

3.4.1 Variações dos valores da função objetivo e das variáveis básicas após a mudança de base

Considera-se o PL padrão (23) com o quadro simplex da Tabela 1, a notação da Tabela 2, o critério de otimalidade (35) satisfeito, mas com o critério de factibilidade (73) não satisfeito. A análise de qual é a variação dos valores da função objetivo e das variáveis básicas no novo ponto extremo de melhor qualidade do problema dual depende de qual limite está sendo violado

da variável básica que deve sair da base e também de qual limite está fixada a variável não básica candidata a entrar na base. Seja z_{i0} o valor atual da variável básica i no quadro DSC, então, através da equação (30), tem-se:

$$z_{i0} = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij} l_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij} u_j. \quad (74)$$

1. Quando a variável não básica x_k , candidata a entrar na base, está no seu LI:

Neste caso, o novo valor da variável x_k deve ser:

$$x_k = l_k + \Delta_k. \quad (75)$$

Usando a equação (75), nas equações (30) e (74), é obtida a equação (76) que representa os novos valores das variáveis básicas

$$x_{Bi} = z_{i0} - y_{ik} \Delta_k \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m. \quad (76)$$

Para a variável básica x_{Br} , usando a equação (76), tem-se a equação que calcula o novo valor dela:

$$x_{Br} = z_{r0} - y_{rk} \Delta_k. \quad (77)$$

Com o objetivo de descobrir o tamanho da variação, quando a variável x_k está fixada no seu LI, é necessário analisar os dois casos, quando a variável básica que deve sair da base tem o seu LI violado, ou quando tem o seu LS violado.

- a) Quando a variável básica x_{Br} tem o LI violado, $z_{r0} < l_r$:

O valor da variável básica x_{Br} que deve sair da base é levado ao LI factível da variável; então da equação (77) tem-se a equação (78):

$$x_{Br} = z_{r0} - y_{rk} \Delta_k = l_r. \quad (78)$$

Através da equação (78), é possível obter o tamanho máximo da variação que os valores da função objetivo e das variáveis básicas podem sofrer:

$$\Delta_k = \frac{(z_{r0} - l_r)}{y_{rk}}. \quad (79)$$

- b) Quando a variável básica x_{Br} tem o LS violado, $z_{r0} > u_r$:

O valor da variável básica x_{Br} que deve sair da base é levado ao LS factível da variável e, através da equação (77), é obtida a equação (80):

$$x_{Br} = z_{r0} - y_{rk} \Delta_k = u_r. \quad (80)$$

Usando a equação (80), é obtida a equação (81) que calcula a máxima variação que pode ocorrer nos valores da função objetivo e das variáveis básicas:

$$\Delta_k = \frac{(z_{r0} - u_r)}{y_{rk}}. \quad (81)$$

2. Quando a variável não básica x_k , candidata a entrar na base, está no seu LS:

O novo valor da variável x_k deve ser:

$$x_k = u_k - \Delta_k. \quad (82)$$

Substituindo a equação (82), nas equações (30) e (74), obtém-se a equação (83) onde são calculados os novos valores da função objetivo e das variáveis básicas:

$$x_{Bi} = z_{i0} + y_{ik}\Delta_k \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m. \quad (83)$$

Para a variável básica x_{Br} , que tem seu LS violado, usando a equação (83), tem-se a equação (84) que calcula o novo valor de x_{Br} :

$$x_{Br} = z_{r0} + y_{rk}\Delta_k. \quad (84)$$

Da mesma forma que acontece quando x_k está no LI, também é necessário analisar dois casos para quando a variável x_k está no seu LS; o primeiro caso é quando a variável básica que deve sair da base tem o seu LI violado, ou o segundo caso quando tem o seu LS violado.

a) Quando a variável básica x_{Br} tem o LI violado, $z_{r0} < l_r$:

O valor da variável básica x_{Br} que deve sair da base precisa ser levado ao LI factível da variável, como pode ser observado na equação (85):

$$x_{Br} = z_{r0} + y_{rk}\Delta_k = l_r. \quad (85)$$

Nesse caso, por meio da equação (85), é possível desenvolver a equação (86) onde é encontrado o tamanho da máxima variação dos valores da função objetivo e das variáveis básicas:

$$\Delta_k = -\frac{(l_r - z_{r0})}{y_{rk}}. \quad (86)$$

b) Quando a variável básica x_{Br} tem o LS violado, $z_{r0} > u_r$:

O valor da variável básica x_{Br} que deve sair da base é levado ao LS factível da variável; então, a partir da equação (84) tem-se:

$$x_{Br} = z_{r0} + y_{rk}\Delta_k = u_r. \quad (87)$$

A equação (86) que calcula a máxima variação que os valores da função objetivo e das variáveis básicas podem sofrer é obtida através da equação anterior.

$$\Delta_k = -\frac{(z_{r0} - u_r)}{y_{rk}}. \quad (88)$$

Com exceção da variável x_{Br} , os novos valores das variáveis básicas assumem a forma da equação (89) quando a variável básica x_{Br} escolhida para sair da base tem o LI violado:

$$x_{Bi} = z_{i0} + \frac{y_{ij}}{y_{rk}}(l_r - z_{r0}) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m \quad \text{e} \quad i \neq r \quad (89)$$

e a forma da equação (90) quando a variável básica x_{Br} escolhida para sair da base tem o LS violado:

$$x_{Bi} = z_{i0} + \frac{y_{ij}}{y_{rk}}(u_r - z_{r0}) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m \quad \text{e} \quad i \neq r. \quad (90)$$

3.4.2 Escolha da variável básica que deve sair da base

De acordo com o que foi mencionado anteriormente, o critério de escolha da variável básica x_{Br} candidata a sair da base é empírico; um critério usual é escolher, dentre as variáveis candidatas, a variável com o limite mais violado como pode ser observado na equação (91):

$$r \Rightarrow \max_{i=0,1,\dots,m} \left\{ |l_i - z_{i0}| : z_{i0} < l_i; \quad |z_{i0} - u_i| : z_{i0} > u_i \right\}. \quad (91)$$

O critério apresentado, na equação (91), tenta encontrar a variável básica com limite violado, que cause a maior variação no valor da função objetivo, de modo a alcançar de forma mais rápida a solução ótima do PL. Em se tratando de um critério empírico, não é possível garantir a eficiência do mesmo, pois a máxima variação do valor da função objetivo não depende exclusivamente do valor da violação, e sim também, de qual variável não básica é escolhida para entrar na base. Na existência de mais de uma variável básica com limite violado, mesmo sabendo qual variável básica causaria a maior variação no valor da função objetivo, também não há garantia de que será percorrido o caminho com menos pontos extremos do problema dual até alcançar a solução ótima do problema, pois esse critério é aplicado, localmente, abrangendo somente os pontos extremos adjacentes do atual.

Um outro critério que pode ser mais eficiente, dependendo de características do problema, é ordenar todas as variáveis básicas que não satisfazem a condição de factibilidade (73) por tipo, e priorizar a escolha pelo tipo de variável com maior probabilidade de não fazer parte da base ótima. Dependendo do problema, se for possível saber quais variáveis têm maior probabilidade de não fazerem parte da base ótima, é bem provável que a solução ótima seja encontrada com um número menor de iterações do DSC, pois essa estratégia fornece uma visão mais aprofundada dos melhores pontos extremos a serem percorridos até encontrar a solução ótima do problema.

3.4.3 Escolha da variável não básica que deve entrar na base

A escolha da variável não básica que deve entrar na base será apresentada em forma de teoremas. Seja y'_{0j} os coeficientes de custo relativo após a pivotagem. Dessa forma:

$$y'_{0j} = y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj}. \quad (92)$$

Seja também $\tilde{z}_{00}$ o novo valor da função objetivo, após a mudança de base, e, z_{00} o valor da função objetivo, antes da mudança de base, portanto, através da equação (89), na linha da função objetivo, onde $i = 0$, é encontrada a relação da função objetivo, após a mudança de base, quando a variável básica x_{Br} escolhida para deixar a base viola o seu LI:

$$\tilde{z}_{00} = z_{00} + \frac{y_{0k}}{y_{rk}} (l_r - z_{r0}) \quad (93)$$

e, através da equação (90), na linha da função objetivo, onde $i = 0$, é encontrada a relação da função objetivo, após a mudança de base, quando a variável x_{Br} viola o seu LS:

$$\tilde{z}_{00} = z_{00} + \frac{y_{0k}}{y_{rk}} (u_r - z_{r0}). \quad (94)$$

Teorema 1. *Quando a variável básica tem o limite inferior violado.*

Se for escolhida uma variável básica que se encontra com o LI violado e se a variável não básica for escolhida usando o seguinte critério:

$$x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \right) = \min \left\{ \left(\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \right) : \begin{array}{ll} y_{rj} > 0 & e \quad x_j = u_j \\ & ou \\ y_{rj} < 0 & e \quad x_j = l_j \end{array} \right\} \quad (95)$$

então a transição para a nova base cumpre com os requisitos do algoritmo dual simplex canalizado, isto é, passa-se para um novo quadro simplex que corresponde a um ponto extremo de melhor qualidade do problema dual, e, portanto, o valor da função objetivo aumenta, e os coeficientes de custo relativo satisfazem o critério de otimalidade, isto é, $y'_{0j} \leq 0 \quad \forall j \in R_1$ e $y'_{0j} \geq 0 \quad \forall j \in R_2$.

PROVA: A prova é separada em dois casos:

Caso 1: Supor que a variável escolhida, para entrar na base, está no LI, e, portanto o coeficiente de custo relativo deve ser negativo para garantir a otimalidade, isto é, $k \in R_1$ e, $y_{0k} \leq 0$.

Através da relação da função objetivo, após a mudança de base apresentada na equação (93), verifica-se a necessidade de $\tilde{z}_{00} > z_{00}$, ou, equivalentemente, $\frac{y_{0k}}{y_{rk}} (l_r - z_{r0}) > 0$. Essa condição é fundamental para que a função objetivo seja incrementada. Como $y_{0k} < 0$ e $(l_r - z_{r0}) > 0$, então $y_{rk} < 0$ é uma condição necessária para que a função objetivo seja incrementada (um ponto de melhor qualidade no problema dual). Falta provar que $y'_{0j} \leq 0 \quad \forall j \in R_1$ e $y'_{0j} \geq 0 \quad \forall j \in R_2$.

a) Provar que $y'_{0j} \leq 0 \quad \forall j \in R_1$:

Para provar que $y'_{0j} \leq 0 \quad \forall j \in R_1$, isto é, mesmo depois da pivotagem, todos os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas que estão no seu LI devem permanecer negativos a fim de garantir a otimalidade. Considerando a equação (92) onde é calculado o novo valor do coeficiente de custo relativo e com $y_{0j} \leq 0$, $y_{0k} \leq 0$ e $y_{rk} < 0$, existem as seguintes possibilidades:

- Se $y_{rj} > 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} < 0$, e, portanto, $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} < 0$, o que prova que $y'_{0j} \leq 0$.
- Se $y_{rj} < 0$, então de (95) segue que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq \frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \geq -y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \leq 0 \Rightarrow y'_{0j} \leq 0.$$

b) Provar que $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$:

Também, considerando a equação (92) com $y_{0j} \geq 0$, $y_{0k} \leq 0$ e $y_{rk} < 0$, têm-se as duas possibilidades a seguir:

- Se $y_{rj} < 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} > 0$ e $y'_{0j} \geq y_{0j} \geq 0$, o que prova que $y'_{0j} \geq 0$.
- Se $y_{rj} > 0$, então de (95) segue que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq \frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0 \Rightarrow y'_{0j} \geq 0.$$

Caso 2: De forma semelhante que no caso anterior, supor $k \in R_2$, e, portanto, $y_{0k} \geq 0$.

Assim, também através da relação (89), constata-se a necessidade de $\tilde{z}_{00} > z_{00}$, ou, equivalentemente, $\frac{y_{0k}}{y_{rk}}(l_r - z_{r0}) > 0$, para que a função objetivo sofra um incremento. Como $y_{0k} > 0$ e $(l_r - z_{r0}) > 0$, segue que $y_{rk} > 0$ é uma condição necessária para que a função objetivo tenha um incremento de seu valor (um ponto de melhor qualidade no problema dual). Falta provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$ e $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$.

a) Provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$:

É necessário provar que, mesmo após a pivotagem, todos coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas fixadas no LI sejam negativos para garantir a otimalidade; sendo assim, considerando (92) com $y_{0j} \leq 0$, $y_{0k} \geq 0$ e $y_{rk} > 0$

- Se $y_{rj} > 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$, e, portanto, $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$, o que prova que $y'_{0j} \leq y_{0j} \leq 0$.
- Se $y_{rj} < 0$, então de (95) segue que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq \frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq -y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0 \Rightarrow y'_{0j} \leq 0.$$

b) Provar que $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$:

Através da equação (92) com $y_{0j} \geq 0$, $y_{0k} \geq 0$ e $y_{rk} > 0$, existem duas condições a serem provadas:

- Se $y_{rj} < 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0$ e $y'_{0j} \geq y_{0j} \geq 0$, o que prova que $y'_{0j} \geq 0$.
- Se $y_{rj} > 0$, então de (95) segue que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq \frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0 \Rightarrow y'_{0j} \geq 0.$$

Teorema 2. *Quando a variável básica tem o limite superior violado.*

Se for escolhida uma variável básica que se encontra com o LS violado e se a variável não básica for escolhida usando o seguinte critério:

$$x_k \Rightarrow \left(-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \right) = \min \left\{ \left(-\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \right) : \begin{array}{ll} y_{rj} < 0 & e \quad x_j = u_j \\ & ou \\ y_{rj} > 0 & e \quad x_j = l_j \end{array} \right\} \quad (96)$$

então a transição para a nova base cumpre com os requisitos do algoritmo dual simplex canalizado, isto é, passa-se para um novo quadro simplex que corresponde a um ponto extremo de melhor qualidade do problema dual, e, portanto, o valor da função objetivo aumenta, e os coeficientes de custo relativo satisfazem o critério de otimalidade, isto é, $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$ e $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$.

PROVA: A prova é separada em dois casos:

Caso 1: Supor que a variável que é escolhida para entrar na base está no LI, e, portanto o coeficiente de custo relativo deve ser negativo para garantir a otimalidade, isto é, $k \in R_1$ e $y_{0k} \leq 0$.

A partir da equação (94), é necessário que $\tilde{z}_{00} > z_{00}$, ou, equivalentemente, $\frac{y_{0k}}{y_{rk}}(u_r - z_{r0}) > 0$, para que a função objetivo seja incrementada. Como $y_{0k} < 0$ e $(u_r - z_{r0}) < 0$, assim $y_{rk} > 0$ é uma condição necessária para que a função objetivo seja incrementada (um ponto de melhor qualidade no problema dual). Falta provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$ e $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$.

a) Provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$:

Para provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$, isto é, todos os coeficientes de custo relativo referente às variáveis não básicas fixadas no LI devem permanecer negativas depois do processo de pivotagem, para que continue sendo satisfeita a condição de otimalidade. Dessa forma, considerando a equação (92), que traz o valor dos coeficientes de custo relativo após a pivotagem, com $y_{0j} \leq 0$, $y_{0k} \leq 0$ e $y_{rk} > 0$, têm-se as seguintes condições:

- Se $y_{rj} < 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$ e, portanto, $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$, o que prova que $y'_{0j} \leq 0$.
- Se $y_{rj} > 0$, então de (96) segue que:

$$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq -y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0 \Rightarrow y'_{0j} \leq 0.$$

b) Provar que $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$:

Similarmente ao item anterior, considerando os novos coeficientes de custo relativo trazidos pela equação (92) com $y_{0j} \geq 0$, $y_{0k} \leq 0$ e $y_{rk} > 0$:

- Se $y_{rj} > 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0$ e $y'_{0j} \geq y_{0j} \geq 0$, o que prova que $y'_{0j} \geq 0$.
- Se $y_{rj} < 0$, então de (96) segue que:

$$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq -y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0 \Rightarrow y'_{0j} \geq 0.$$

Caso 2: Supor $k \in R_2$ e $y_{0k} \geq 0$.

De forma semelhante ao caso anterior, é necessário que $\tilde{z}_{00} > z_{00}$, ou, equivalentemente, $\frac{y_{0k}}{y_{rk}}(u_r - z_{r0}) > 0$, para que a função objetivo sofra um incremento. Como $y_{0k} > 0$ e $(u_r - z_{r0}) < 0$, então $y_{rk} < 0$ também é uma condição necessária para que a função objetivo tenha um incremento de seu valor, portanto falta provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$ e $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$.

a) Provar que $y'_{0j} \leq 0 \forall j \in R_1$:

Neste caso, também é necessário que todos os coeficientes de custo relativo referentes às variáveis não básicas fixadas no LI permaneçam negativos após a pivotagem, para que a condição de otimalidade continue sendo satisfeita; assim, os coeficientes de custo relativo obtidos, através da equação (92), juntamente com $y_{0j} \leq 0$, $y_{0k} \geq 0$ e $y_{rk} < 0$ implica que:

- Se $y_{rj} < 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} < 0$ e, portanto, $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} < 0$, o que prova que $y'_{0j} \leq 0$.
- Se $y_{rj} > 0$, então de (96) segue que:

$$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq -y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0 \Rightarrow y'_{0j} \leq 0.$$

b) Provar que $y'_{0j} \geq 0 \forall j \in R_2$:

Similarmente ao item anterior, mesmo depois da pivotagem, todos os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas que estão no LS devem permanecer positivos a fim de garantir a otimalidade. Levando em conta a equação (92), que traz os novos valores de coeficientes de custo relativo, e, com $y_{0j} \geq 0$, $y_{0k} \geq 0$ e $y_{rk} < 0$, têm-se as duas condições a seguir:

- Se $y_{rj} > 0$, então $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} > 0$ e $y'_{0j} \geq y_{0j} \geq 0$, o que prova que $y'_{0j} \geq 0$.
- Se $y_{rj} < 0$, então de (96) segue que:

$$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \Rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq -y_{0j} \Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0 \Rightarrow y'_{0j} \geq 0.$$

3.4.4 Algoritmo Dual Simplex Canalizado

Um resumo dos passos de desenvolvimento e execução do algoritmo DSC, mencionados nesta seção, estão descritos no Algoritmo 4.

Algoritmo 4 Algoritmo Dual Simplex Canalizado

1. Construir um quadro dual simplex inicial que satisfaça a *OTIMALIDADE*;
2. Verificar a factibilidade do quadro:

Se o quadro é *FACTÍVEL*, PARE, pois $l_{Bi} \leq z_{i0} \leq u_{Bi}$ para $i = 1, 2, \dots, m$;

Algoritmo 4 Algoritmo Dual Simplex Canalizado (Continuação)

3. Selecionar a variável x_{Br} que deve sair da base:

Escolher a variável básica x_{Br} que tem o limite mais violado.

4. Selecionar a variável não básica x_k que deve entrar na base:

- Se x_{Br} for escolhida tal que seu LI foi violado, $l_r > z_{r0}$, selecionar x_k usando a relação (97):

$$x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \right) = \min \left\{ \left(\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \right) : \begin{array}{ll} y_{rj} > 0 & \text{e } x_j = u_j \\ & \text{ou} \\ y_{rj} < 0 & \text{e } x_j = l_j \end{array} \right\}. \quad (97)$$

- Se x_{Br} for escolhida tal que seu LS foi violado, $z_{r0} > u_r$, selecionar x_k usando a relação (98):

$$x_k \Rightarrow \left(-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \right) = \min \left\{ \left(-\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \right) : \begin{array}{ll} y_{rj} < 0 & \text{e } x_j = u_j \\ & \text{ou} \\ y_{rj} > 0 & \text{e } x_j = l_j \end{array} \right\}. \quad (98)$$

- Se não for possível escolher x_k , então o problema é *INFACTÍVEL*, PARE.

5. Pivotar o quadro na forma padrão, mas a coluna RHS deve ser atualizada da seguinte forma:

- Se $l_r > z_{r0}$ e $x_k : k \in R_1 \Rightarrow y_{rk} < 0$, isto é, x_{Br} é escolhido usando (97), e x_k está em seu LI, portanto, atualizar RHS através da relação (99);

$$\begin{cases} \Delta_k = -\frac{(l_r - z_{r0})}{y_{rk}} > 0 \\ x_k = l_k + \Delta_k & \leftarrow \tilde{z}_{r0} \\ x_{Bi} = z_{i0} - y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r & \leftarrow \tilde{z}_{i0}. \end{cases} \quad (99)$$

- Se $l_r > z_{r0}$ e $x_k : k \in R_2 \Rightarrow y_{rk} > 0$, isto é, x_{Br} é escolhido usando (97), e x_k está em seu LS, portanto, atualizar RHS através da relação (100);

$$\begin{cases} \Delta_k = \frac{(l_r - z_{r0})}{y_{rk}} > 0 \\ x_k = u_k - \Delta_k & \leftarrow \tilde{z}_{r0} \\ x_{Bi} = z_{i0} + y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r & \leftarrow \tilde{z}_{i0}. \end{cases} \quad (100)$$

- Se $z_{r0} > u_r$ e $x_k : k \in R_1 \Rightarrow y_{rk} > 0$, isto é, x_{Br} é escolhido usando (98), e x_k está em seu LI, portanto, atualizar RHS através da relação (101);

$$\begin{cases} \Delta_k = \frac{(z_{r0} - u_r)}{y_{rk}} > 0 \\ x_k = l_k + \Delta_k & \leftarrow \tilde{z}_{r0} \\ x_{Bi} = z_{i0} - y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r & \leftarrow \tilde{z}_{i0}. \end{cases} \quad (101)$$

- Se $z_{r0} > u_r$ e $x_k : k \in R_2 \Rightarrow y_{rk} < 0$, isto é, x_{Br} é escolhido usando (98), e x_k está em seu LS, portanto, atualizar RHS através da relação (102);

Algoritmo 4 Algoritmo Dual Simplex Canalizado (Conclusão)

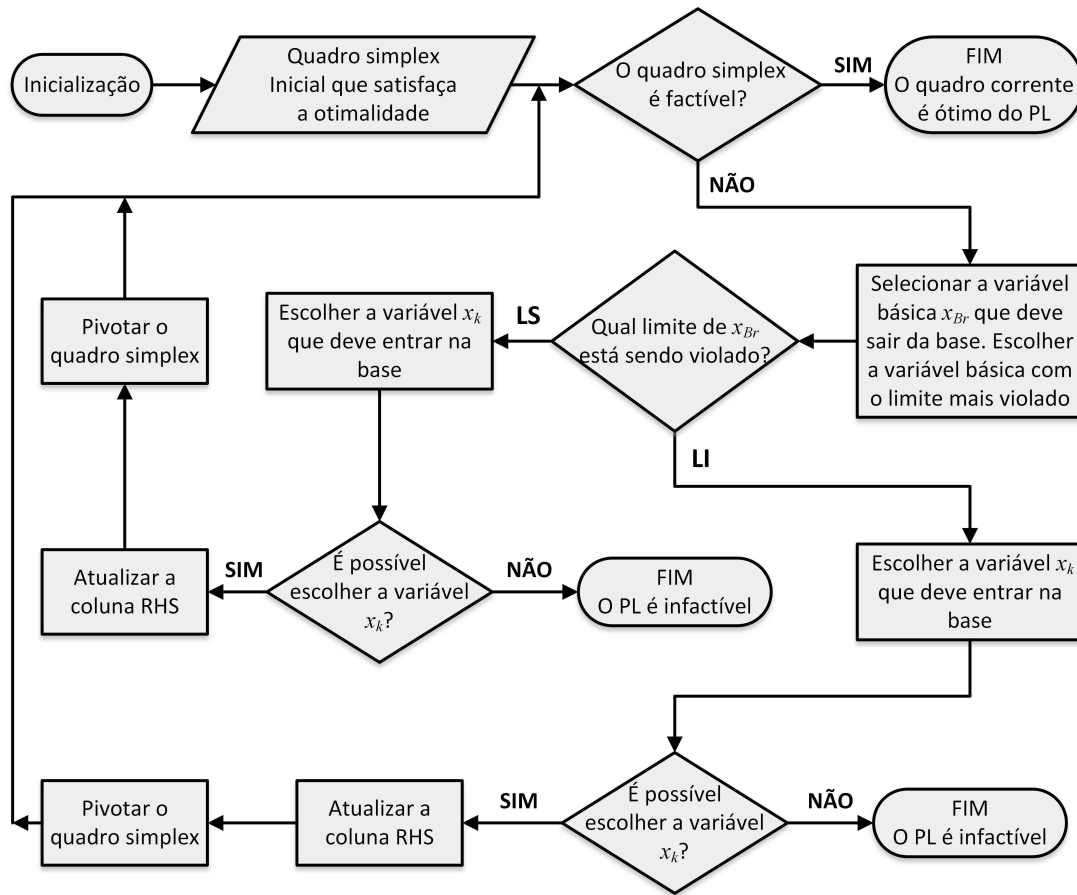
$$\begin{cases} \Delta_k = -\frac{(z_{r0}-u_r)}{y_{rk}} > 0 \\ x_k = u_k - \Delta_k & \leftarrow \tilde{z}_{r0} \\ x_{Bi} = z_{i0} + y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r & \leftarrow \tilde{z}_{i0}. \end{cases} \quad (102)$$

Regressar ao passo 2.

Fonte Garcés, Gallego e Romero (2013)

A Figura 6 apresenta o fluxograma do algoritmo DSC adaptado do Algoritmo 4. O fluxograma mostra de maneira esquematizada as etapas do algoritmo DSC.

Figura 6 – Fluxograma do Algoritmo Dual Simplex Canalizado



Fonte – Elaboração do autor.

3.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND

Para a execução dos algoritmos, é necessário organizar os dados do sistema para os modelos de transporte (1) e LD (8), de forma que seja possível a montagem do quadro simplex

inicial. O passo mais importante dessa etapa é transformar os problemas (1) e (8) para a forma do PL padrão (23) que os algoritmos resolvem, isto é, encontrar o vetor c que são os custos de todas as variáveis, a matriz A dos coeficientes de todas as restrições, o vetor b de termos constantes de todas as restrições e os vetores l e u que são, respectivamente, os limites inferiores e superiores de todas as variáveis.

A Subseção 3.5.1 apresenta a estrutura de construção desses vetores e matrizes para o modelo de transporte, e a Subseção 3.5.2 apresenta para o modelo LD. Na Seção 3.7, são apresentados exemplos ilustrativos de como são transformados os problemas (1) e (8) para a forma do PL padrão (23).

Os dados dos sistemas para o problema PEST são geralmente os seguintes: custos de construção das linhas c_{ij} ; geração máxima de cada barra do sistema $\bar{g}_i$; demanda de cada barra do sistema d_i ; número de linhas existentes em cada caminho n_{ij}^0 ; reatância de cada linha x_{ij} ; fluxo de potência máximo de cada linha $\bar{f}_{ij}$; e o número máximo de linhas que podem ser construídas em cada caminho $\bar{n}_{ij}$.

3.5.1 Montagem do PL padrão para o modelo de transporte

Seja o modelo de transportes apresentado pelo conjunto de equações (1). O primeiro passo para colocar o modelo de transporte na forma do PL padrão é identificar quais são os dados e variáveis do problema, depois escolher a ordem das variáveis e organizar o problema de acordo com a ordem escolhida. Pode ser escolhida qualquer ordem para as variáveis desde que a organização do problema esteja coerente com a ordem das variáveis.

No modelo de transporte c_{ij} , $\bar{f}_{ij}$, n_{ij}^0 , d_i , $\bar{g}_i$ e $\bar{n}_{ij}$, são dados do sistema, e as variáveis são n_{ij} , f_{ij} e g_i . A ordem escolhida para as variáveis é $x^{PL} = \begin{bmatrix} n_{ij} & f_{ij} & g_i \end{bmatrix}^T \forall i \in \Omega_b$ e $\forall ij \in \Omega_l$. Para deixar as variáveis n_{ij} na primeira posição, é trocada a posição das equações (1b) e (1c) (esse procedimento não é necessário, mas faz com que as variáveis inteiras fiquem em primeiro lugar). Devido ao valor absoluto da restrição (1c) de capacidade de transmissão dos caminhos, é necessário dividir a restrição em duas novas restrições. Assim, nessa nova organização, o problema PEST modelado a partir do modelo de transportes é representado pelo conjunto de equações (103):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} n_{ij} \quad (103a)$$

s.a.

$$-\bar{f}_{ij} n_{ij} - f_{ij} \leq \bar{f}_{ij} n_{ij}^0 \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (103b)$$

$$-\bar{f}_{ij} n_{ij} + f_{ij} \leq \bar{f}_{ij} n_{ij}^0 \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (103c)$$

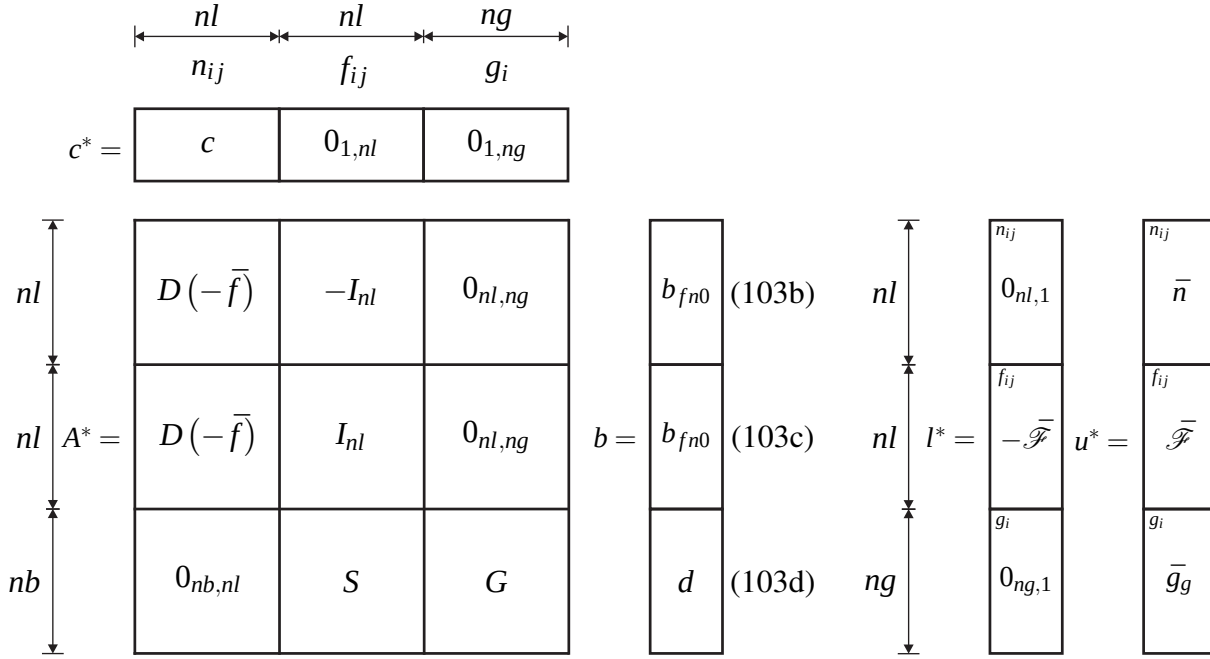
$$\sum_{ji \in \Omega_l} f_{ji} - \sum_{ij \in \Omega_l} f_{ij} + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (103d)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (103e)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (103f)$$

A partir do problema (103), já é possível montar a primeira parte do PL padrão para o modelo de transportes, como pode ser visto na Figura 7. Somente as restrições (103b)-(103d) fazem parte do sistema de equações principal, pois as restrições (103e) e (103f) são restrições que definem os limites das variáveis.

Figura 7 – Estrutura inicial do modelo de transporte para a construção do PL



Fonte – Elaboração do autor.

onde:

$D(x)$ operador que cria uma matriz quadrada com os elementos de um vetor qualquer x na diagonal principal e os demais elementos da matriz iguais a zero.

nb número de barras existentes no sistema.

nl número de linhas do sistema.

ng número de barras que possuem geração.

A^* parte inicial da matriz de coeficientes A , cujas colunas correspondem às variáveis originais do problema.

c^* vetor linha inicial de custos do PL.

l^* vetor coluna inicial com os LI das variáveis originais do problema.

u^* vetor coluna inicial com os LS das variáveis originais do problema.

$0_{m,n}$ matriz de m linhas e n colunas com todos os elementos iguais a zero.

I_m matriz identidade com m linhas e colunas.

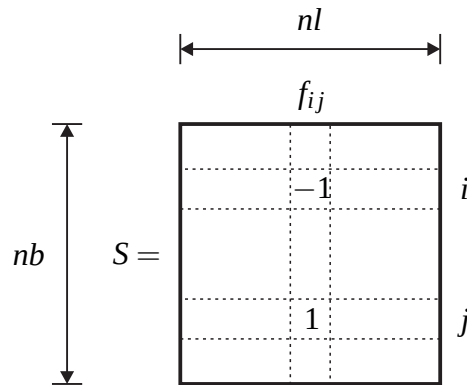
b_{fn0} vetor com os valores da multiplicação do fluxo máximo de potência e o número de linhas existentes em cada caminho ij , isto é, $\bar{f}_{ij}n_{ij}^0$.

c vetor com valores de c_{ij} que são os valores dos custos das variáveis de investimento para

- cada caminho ij .
- $\bar{\mathcal{F}}$ vetor com os valores calculados por $(n_{ij}^0 + \bar{n}_{ij}) \bar{f}_{ij}$ que define os limites do fluxo total de potência ativa em cada caminho ij .
- S matriz de incidência nó-ramo que corresponde à matriz dos coeficientes das variáveis de fluxo de potência ativa referente à equação (103d). A Figura 8 apresenta, de forma mais detalhada, a estrutura da matriz S .
- G matriz dos coeficientes das barras geradoras g_i . A Figura 9 apresenta, de forma mais detalhada, a estrutura da matriz G .
- d vetor com os valores de d_i que são as demandas de cada barra do sistema.
- $\bar{g}_g$ vetor com os valores de $\bar{g}_i$ que são a máxima capacidade de geração somente das barras que possuem geração.

A Figura 8 apresenta, de forma mais detalhada, a estrutura da matriz S que representa a matriz de incidência nó-ramo do modelo de transporte correspondendo à matriz dos coeficientes de f_{ij} referente à equação (103d). Na coluna de cada caminho ij , há somente dois elementos diferentes de zero, -1 para linha i da matriz S , e 1 para linha j .

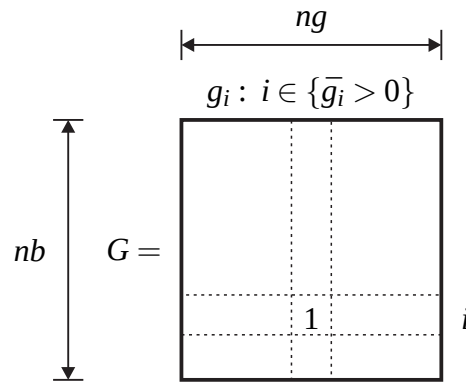
Figura 8 – Matriz de incidência nó-ramo para o modelo de transporte



Fonte – Elaboração do autor.

A Figura 9 apresenta, de forma mais detalhada, a estrutura da matriz G que representa a matriz dos coeficientes das barras geradoras g_i . A matriz G tem ng colunas; ng é o número de barras geradoras, isto é, o número de barras que possuem valor de geração máxima maior que zero, $\bar{g}_i > 0$. Em cada coluna de barras geradoras, há somente um elemento diferente de zero, 1 na linha i da matriz G .

Como mencionado na Subseção 3.3.4, devido às restrições de igualdade (103d) do modelo de transportes (103) é necessária a utilização de variáveis artificiais. Seguindo o procedimento apresentado na Subseção 3.3.4, adiciona-se uma variável de folga com coeficiente positivo para cada restrição (103b), e, uma para cada restrição (103c) para transformar as desigualdades em igualdades; depois adiciona-se uma variável artificial para cada restrição (103d) com o sinal do coeficiente momentaneamente positivo.

Figura 9 – Matriz dos coeficientes das barras geradoras

Fonte – Elaboração do autor.

Para encontrar uma SBF na forma da matriz identidade, todas as variáveis originais do problema são variáveis não básicas, juntamente com algumas variáveis de folga que não satisfazem os requisitos para fazerem parte da SBF. O próximo passo é definir em que limites cada variável não básica será fixada. Esse procedimento pode ser escolhido aleatoriamente, ou então, utilizar características específicas do problema para definir a melhor escolha. No problema PEST, representado pelo modelo de transporte (103), pode ser definido que as barras que possuem geração g_i ficarão no LS, as variáveis n_{ij} , no LI, e as variáveis f_{ij} , no LI para aquelas que não estão conectadas diretamente em uma barra geradora, e, no LS para as demais. Esse procedimento pode acelerar o algoritmo B&B.

Como só existe uma variável básica em cada restrição, substituem-se as variáveis não básicas pelos limites definidos delas e encontra-se o valor da variável básica referente à restrição. Para as restrições (103b) e (103c), se os valores das variáveis de folga forem maiores ou iguais a zero, as variáveis de folga permanecem como variáveis básicas; caso contrário, se alguma variável de folga tiver valor menor que zero, essa variável não pode fazer parte da base e é necessário adicionar uma variável artificial com coeficiente negativo na restrição correspondente, para fazer parte da base. Analisando separadamente, nas restrições do tipo (103b), as variáveis n_{ij} estão fixadas no LI, então $n_{ij} = 0$; se f_{ij} estiver fixado no LS, então a variável de folga é aproveitada para fazer parte da SBF, caso contrário, a variável de folga não pode fazer parte da SBF, tornando-se, assim, uma variável não básica fixada no seu LI. De forma semelhante, as restrições do tipo (103c), se f_{ij} estiver fixado no LI, então a variável de folga é aproveitada para fazer parte da SBF, caso contrário, a variável de folga não pode fazer parte da SBF, tornando-se, também, uma variável não básica fixada no seu LI. É importante salientar que, devido à estrutura das restrições do modelo de transportes, se forem fixadas todas as variáveis n_{ij} no seu LS, todas as variáveis de folga serão básicas, consequentemente, o número de variáveis artificiais e o número de iterações serão menores. Para as restrições do tipo (103d), após a substituição dos valores das variáveis não básicas, o sinal do coeficiente da variável artificial será negativo somente se o valor do lado direito da igualdade for menor que o valor encontrado no esquerdo

após fixar os valores das variáveis básicas.

A estrutura final da matriz de coeficientes A é apresentada na Figura 10. Sendo as restrições (103b) e (103c) do tipo menor ou igual, todos os coeficientes das variáveis de folga são positivos. Pela adição de variáveis artificiais, agora é necessário também criar a linha da função objetivo de Fase I, com somente os custos das variáveis artificiais diferentes de zero, e sendo esses custos iguais a um. Na Figura 10, também está representada a matriz de coeficientes das variáveis artificiais extras que são adicionadas se alguma ou algumas variáveis de folga não podem fazer parte da SBF inicial e sendo estes coeficientes iguais a -1 . Como se pode concluir, o número de variáveis artificiais extras só é encontrado após a substituição das atuais variáveis não básicas pelos limites fixados delas. As variáveis de folga e artificiais sempre devem ser positivas; sendo assim, os LI dessas variáveis são iguais a zero. Como a única exigência é que essas variáveis sejam maiores ou iguais a zero, logo não existe um LS definido, e, portanto, considera-se que essas variáveis tenham LS igual a infinito.

Figura 10 – Estrutura completa do modelo de transporte para a construção do PL

	nl	nl	ng	nl	nl	nb	nae	
	n_{ij}	f_{ij}	g_i	x^f	x^a	$x^{a(e)}$		
$l =$	l^*		$0_{2nl,1}$		$0_{nb,1}$	$0_{nae,1}$	^{T}	
$u =$	u^*		$\infty_{2nl,1}$		$\infty_{nb,1}$	$\infty_{nae,1}$	^{T}	
$c' =$	$0_{1,(2nl+nb)}$		$0_{1,2nl}$		$1_{1,nb}$	$1_{1,nae}$		
$c =$	c^*		$0_{1,2nl}$		$0_{1,nb}$	$0_{1,nae}$		
nl	$A =$		I_{2nl}		$0_{2nl,nb}$		A_1	
nl								
nb			$0_{nb,2nl}$		A_0		$0_{nb,nae}$	
							$b =$	
							b_{fn0} (103b)	
							b_{fn0} (103c)	
							d (103d)	

Fonte – Elaboração do autor.

em que:

nae número de variáveis artificiais extras que são adicionadas ao PL quando uma variável de folga não pode fazer parte da SBF inicial.

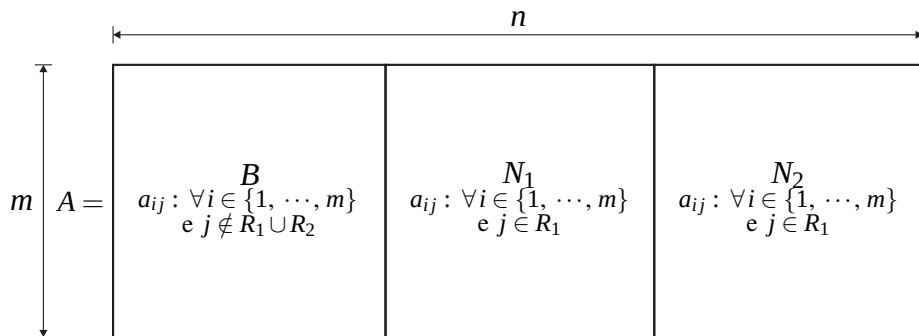
$\infty_{m,n}$ matriz de m linhas e n colunas com todos os elementos iguais a infinito (∞).

$1_{m,n}$ matriz de m linhas e n colunas com todos os elementos iguais a um (1).

- x^f variáveis de folga necessárias para transformar as desigualdades do PL em igualdades.
- x^a variáveis artificiais adicionadas nas restrições de igualdade para encontrar uma SBF inicial na forma da matriz identidade.
- $x^{a(e)}$ variáveis artificiais extras adicionadas nas restrições de desigualdade quando algumas variáveis de folga não podem fazer parte da SBF inicial.
- c' vetor de custos da função objetivo de Fase I.
- A_0 matriz dos coeficientes das variáveis artificiais adicionadas nas restrições de igualdade; essa matriz tem a forma de uma matriz identidade, mas o sinal de alguns elementos da diagonal principal podem ser negativos.
- A_1 matriz dos coeficientes das variáveis artificiais extras que são adicionadas nas restrições de desigualdade quando necessário; cada coluna dessa matriz tem somente um elemento diferente de zero, sendo -1 na linha referente à restrição onde foi adicionada a variável artificial.

Com as informações apresentadas na Figura 10, já é possível separar as colunas da matriz de coeficientes A referentes às variáveis básicas, às variáveis não básicas fixadas no seu LI e às variáveis não básicas fixadas no seu LS. Portanto, a matriz B contém as colunas das variáveis de folga que podem fazer parte da SBF e todas as colunas das variáveis artificiais. A matriz N_1 contém as colunas referentes às variáveis não básicas fixadas no LI delas, isto é, as colunas referentes às variáveis n_{ij} , f_{ij} para as linhas não conectadas diretamente com uma barra de geração e as variáveis de folga x^f que não podem fazer parte da SBF. Finalmente, a matriz N_2 contém as colunas das variáveis não básicas fixadas no LS delas, isto é, as colunas referentes às variáveis f_{ij} para as linhas conectadas diretamente com uma barra de geração e as variáveis das barras de geração g_i . A Figura 11 apresenta a estrutura das matrizes B , N_1 e N_2 .

Figura 11 – Matrizes de coeficientes das variáveis básicas B e não básicas N_1 e N_2



Fonte – Elaboração do autor.

onde $m = 2nl + nb$, e $n = 4nl + nb + ng + nae$.

Nessa etapa, já existem todas as informações necessárias para a montagem do quadro simplex inicial. No entanto, como estão sendo utilizadas variáveis artificiais, é necessária a implementação do quadro simplex de duas fases apresentado na Tabela 3. Por fim, o algoritmo PSC apresentado na Seção 3.3 já é capaz de resolver esse quadro simplex.

3.5.2 Montagem do PL padrão para o modelo linear disjuntivo

Seja o modelo LD apresentado pelo conjunto de equações (8). Da mesma forma que no modelo de transporte, o primeiro passo para colocar o modelo LD, na forma do PL padrão, é identificar quais são os dados e variáveis do problema; depois escolher a ordem das variáveis e organizar o problema de acordo com a ordem escolhida. Pode ser escolhida qualquer ordem para as variáveis desde que a organização do problema esteja coerente com essa ordem.

No modelo LD, d_i , $\bar{g}_i$, c_{ij} , $\bar{f}_{ij}$, x_{ij} , n_{ij}^0 , e $\bar{n}_{ij}$, são dados do sistema, e as variáveis são $w_{ij,y}$, f_{ij}^0 , $f_{ij,y}$, g_i e θ_i . A ordem escolhida para as variáveis é $x^{PL} = \begin{bmatrix} w_{ij,y} & f_{ij}^0 & f_{ij,y} & g_i & \theta_i \end{bmatrix}^T$ $\forall i \in \Omega_b$, $\forall ij \in \Omega_l$ e $\forall y \in Y$. Para facilitar a organização, a ordem das restrições do modelo (8) é alterada para deixar as variáveis $w_{ij,y}$ na primeira posição e também para fazer com que as restrições de igualdade fiquem por último na matriz de coeficientes A . Assim, nessa nova organização, o problema PEST modelado a partir do modelo LD é representado pelo conjunto de equações (104):

$$\begin{aligned} \min v &= \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} \sum_{y \in Y} w_{ij,y} \\ \text{s.a.} \end{aligned} \quad (104a)$$

$$|x_{ij} f_{ij,y} - (\theta_i - \theta_j)| \leq M(1 - w_{ij,y}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (104b)$$

$$|f_{ij,y}| \leq w_{ij,y} \bar{f}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (104c)$$

$$\sum_{y \in Y} w_{ij,y} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (104d)$$

$$w_{ij,y} \leq w_{ij,y-1} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y | y > 1 \quad (104e)$$

$$f_{ij}^0 = n_{ij}^0 \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}} \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (104f)$$

$$\sum_{ji \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ji,y} + f_{ji}^0 \right) - \sum_{ij \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ij,y} + f_{ij}^0 \right) + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (104g)$$

$$|f_{ij}^0| \leq n_{ij}^0 \bar{f}_{ij}^0 \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (104h)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (104i)$$

$$0 \leq w_{ij,y} \leq 1 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (104j)$$

$$\theta_k = 0 \quad k \in \text{barra de referência.} \quad (104k)$$

Devido ao valor absoluto das restrições (104b) e (104c), que correspondem respectivamente à LTK e à capacidade de transmissão das linhas novas, é necessário dividir as restrições em duas novas restrições cada. Como $\bar{f}_{ij}^0$ e n_{ij}^0 são dados do sistema e como só tem uma variável dentro do valor absoluto na restrição (104h), não é necessário dividir essa restrição em duas, pois essa restrição somente define os limites canalizados da variável f_{ij}^0 . Após as divisões, tem-se o modelo (105):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} \sum_{y \in Y} w_{ij,y} \quad (105a)$$

s.a.

$$Mw_{ij,y} + x_{ij}f_{ij,y} - \theta_i + \theta_j \leq M \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (105b)$$

$$Mw_{ij,y} - x_{ij}f_{ij,y} + \theta_i - \theta_j \leq M \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (105c)$$

$$-\bar{f}_{ij}w_{ij,y} + f_{ij,y} \leq 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (105d)$$

$$-\bar{f}_{ij}w_{ij,y} - f_{ij,y} \leq 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (105e)$$

$$\sum_{y \in Y} w_{ij,y} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (105f)$$

$$-w_{ij,y-1} + w_{ij,y} \leq 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y | y > 1 \quad (105g)$$

$$f_{ij}^0 - n_{ij}^0 \frac{(\theta_i - \theta_j)}{x_{ij}} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (105h)$$

$$\sum_{ji \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ji,y} + f_{ji}^0 \right) - \sum_{ij \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ij,y} + f_{ij}^0 \right) + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (105i)$$

$$-\bar{f}_{ij}^0 n_{ij}^0 \leq f_{ij}^0 \leq \bar{f}_{ij}^0 n_{ij}^0 \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (105j)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (105k)$$

$$0 \leq w_{ij,y} \leq 1 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (105l)$$

$$\theta_k = 0 \quad k \in \text{barra de referência.} \quad (105m)$$

No modelo (105), ainda existe o problema que as variáveis θ_i são irrestritas. Para fornecer maior estabilidade no processo de solução, as variáveis θ_i são substituídas pela diferença de duas novas variáveis não negativas, isto é, $\theta_i = \theta'_i - \theta''_i$ com $\theta'_i \geq 0$ e $\theta''_i \geq 0$ (essa estratégia permite fixar cada $\theta'_i = 0$ e $\theta''_i = 0$ no quadro inicial). Portanto, tem-se o modelo (106):

$$\min v = \sum_{ij \in \Omega_l} c_{ij} \sum_{y \in Y} w_{ij,y} \quad (106a)$$

s.a.

$$Mw_{ij,y} + x_{ij}f_{ij,y} - \theta'_i + \theta''_i + \theta'_j - \theta''_j \leq M \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (106b)$$

$$Mw_{ij,y} - x_{ij}f_{ij,y} + \theta'_i - \theta''_i - \theta'_j + \theta''_j \leq M \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (106c)$$

$$-\bar{f}_{ij}w_{ij,y} + f_{ij,y} \leq 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (106d)$$

$$-\bar{f}_{ij}w_{ij,y} - f_{ij,y} \leq 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (106e)$$

$$\sum_{y \in Y} w_{ij,y} \leq \bar{n}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (106f)$$

$$-w_{ij,y-1} + w_{ij,y} \leq 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y | y > 1 \quad (106g)$$

$$f_{ij}^0 - \frac{n_{ij}^0}{x_{ij}} \theta'_i + \frac{n_{ij}^0}{x_{ij}} \theta''_i + \frac{n_{ij}^0}{x_{ij}} \theta'_j - \frac{n_{ij}^0}{x_{ij}} \theta''_j = 0 \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (106h)$$

$$\sum_{ji \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ji,y} + f_{ji}^0 \right) - \sum_{ij \in \Omega_l} \left(\sum_{y \in Y} f_{ij,y} + f_{ij}^0 \right) + g_i = d_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (106i)$$

$$-\bar{f}_{ij}^0 n_{ij}^0 \leq f_{ij}^0 \leq \bar{f}_{ij}^0 n_{ij}^0 \quad \forall ij \in \Omega_0 \quad (106j)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (106k)$$

$$0 \leq w_{ij,y} \leq 1 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall y \in Y \quad (106l)$$

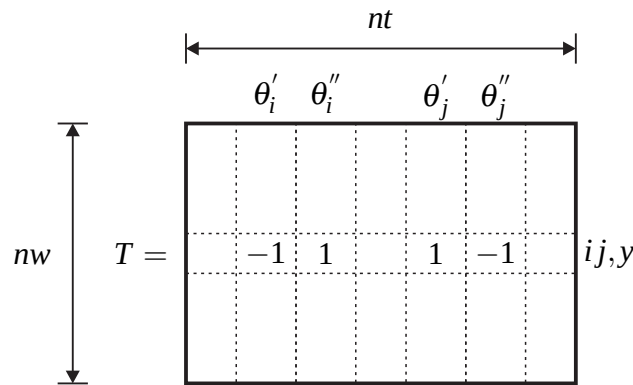
$$\theta_k = 0 \quad k \in \text{barra de referência} \quad (106m)$$

$$0 \leq \theta'_i \leq \infty \quad \forall i \in \Omega_b | i \neq k \quad (106n)$$

$$0 \leq \theta''_i \leq \infty \quad \forall i \in \Omega_b | i \neq k. \quad (106o)$$

Qualquer barra do sistema pode ser a barra com ângulo de referência, mas, convencionalmente, escolhe-se a barra com o menor índice, isto é, a barra de número 1. Como mencionado anteriormente, o ângulo de referência é fixado em zero e deixa de ser uma variável; isso implica que não é necessário considerar a coluna do ângulo de referência na matriz de coeficientes A . Seja nw o número máximo de linhas que podem ser adicionadas ao sistema, onde $nw = \sum_{ij \in \Omega_l} \bar{n}_{ij}$, e seja nt o número de variáveis de ângulo, que, no modelo (106), é $nt = 2(nb - 1)$. A Figura 12 apresenta de forma mais detalhada a estrutura da matriz T que representa a matriz de coeficientes das variáveis de ângulo do modelo LD referente às restrições da lei de tensões de Kirchhoff nas linhas existentes e novas.

Figura 12 – Matriz de coeficientes das variáveis de ângulo para o modelo linear disjuntivo



Fonte – Elaboração do autor.

As linhas da matriz T representam cada possível linha que pode ser adicionada ao sistema, em outras palavras, $\forall ij,y : ij \in \Omega_l$ e $y \in Y$. As colunas da matriz T representam as variáveis de ângulo do sistema, onde, no modelo (106), são representadas pela diferença de duas variáveis maiores que zero e onde o ângulo de referência é zero. Desconsiderando o índice do ângulo de referência, em cada linha da matriz existem, no máximo, quatro elementos diferentes de zero, onde as colunas de $\theta'_i, \theta''_i, \theta'_j$ e θ''_j recebem, respectivamente, os coeficientes $-1, 1, 1$ e -1 .

A partir do problema (106), já é possível montar a primeira parte do PL padrão para o modelo LD, como pode ser visto na Figura 13. Somente as restrições (106b)-(106i) fazem parte do sistema de equações principal, pois as restrições (106j), (106k), (106n) e (106o) são restrições que definem os limites das variáveis, a restrição (106l) não é usada na resolução do PL inicial, e a restrição (106m) fixa o ângulo da barra de referência em zero, isto é, deixa de ser uma variável.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
nw \quad no \quad nw \quad ng \quad nt \\
\leftarrow w_{ij,y} \quad f_{ij}^0 \quad f_{ij,y} \quad g_i \quad \theta_i' \text{ e } \theta_i'' \rightarrow \\
\hline
l^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0_{nl,1} & -\bar{\mathcal{F}}^0 & -\bar{f} & 0_{ng,1} & 0_{nt,1} \\ \hline \end{array}^T \\
\hline
u^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1_{1,nw} & \bar{\mathcal{F}}^0 & \bar{f} & \bar{g} & \infty_{nt,1} \\ \hline \end{array}^T \\
\hline
c^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline c & 0_{1,no} & 0_{1,nw} & 0_{1,ng} & 0_{1,nt} \\ \hline \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
nw \\
\downarrow \\
nw \\
\downarrow \\
nw \\
\downarrow \\
nw \\
\downarrow \\
nl \\
\downarrow \\
ns \\
\downarrow \\
no \\
\downarrow \\
nb
\end{array}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline D(M) & 0_{nw,no} & D(x) & 0_{nw,ng} & T \\ \hline D(M) & 0_{nw,no} & D(-x) & 0_{nw,ng} & -T \\ \hline D(-\bar{f}) & 0_{nw,no} & I_{nw} & 0_{nw,ng} & 0_{nw,nt} \\ \hline D(-\bar{f}) & 0_{nw,no} & -I_{nw} & 0_{nw,ng} & 0_{nw,nt} \\ \hline W_T & 0_{nl,no} & 0_{nl,nw} & 0_{nl,ng} & 0_{nl,nt} \\ \hline W_S & 0_{ns,no} & 0_{ns,nw} & 0_{ns,ng} & 0_{ns,nt} \\ \hline 0_{no,nw} & I_{no} & 0_{no,nw} & 0_{no,ng} & T' \\ \hline 0_{nb,nw} & S^0 & S & G & 0_{nb,nt} \\ \hline \end{array}
\begin{array}{c}
b = \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow
\end{array}
\begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline M \\ \hline 0_{nw,1} \\ \hline 0_{nw,1} \\ \hline \bar{n} \\ \hline 0_{ns,1} \\ \hline 0_{no,1} \\ \hline d \\ \hline \end{array}
\begin{array}{l}
(106b) \\
(106c) \\
(106d) \\
(106e) \\
(106f) \\
(106g) \\
(106h) \\
(106i)
\end{array}$$

onde:

ns número de restrições que garantem a alocação sequencial das linhas em cada caminho ij , onde para o modelo (106) é $ns = nw - nl$.

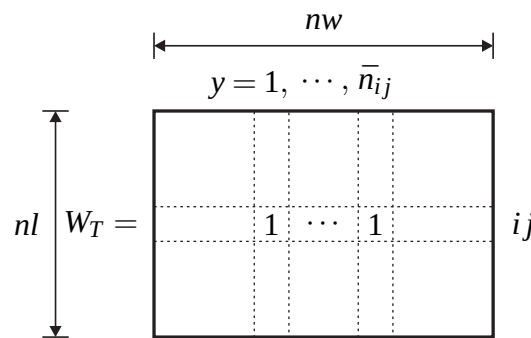
$\mathcal{F}^0$ vetor com os valores calculados por $n_{ij}^0 \bar{f}_{ij}^0$ que define os limites do fluxo total de potência

ativa nas linhas existentes em cada caminho ij .

- S^0 matriz de incidência nó-ramo que corresponde à matriz dos coeficientes das variáveis de fluxo de potência ativa nas linhas existentes referente à equação (106i). A matriz S^0 tem a mesma forma da matriz S apresentada na Figura 8, mas, nesse caso, usando a variável f_{ij}^0 .
- T' matriz dos coeficientes das variáveis de ângulo referente às restrições (106h). Essa matriz tem a mesma forma de construção da matriz T , mas aplicada aos caminhos onde já existem linhas e, nesse caso, também todos os elementos são multiplicados por $\frac{n_{ij}^0}{x_{ij}}$.
- W_T matriz dos coeficientes das variáveis de investimento $w_{ij,y}$, na restrição de limite do número máximo de novas linhas, que podem ser construídas em cada caminho ij . A Figura 14 apresenta, de forma mais detalhada, a construção da matriz W_T .
- W_S matriz dos coeficientes das variáveis de investimento $w_{ij,y}$ na restrição que garante a alocação sequencial das novas linhas em cada caminho ij . A Figura 15 apresenta, de forma mais detalhada, a construção da matriz W_S .

A Figura 14 apresenta, de forma mais detalhada, a estrutura da matriz W_T que representa a matriz dos coeficientes das variáveis de investimento $w_{ij,y}$ referente à restrição que define o número máximo de linhas que podem ser construídas em cada caminho ij . A matriz W_T tem nl linhas e nw colunas, sendo que cada linha da matriz refere-se a cada caminho ij do sistema elétrico, e cada coluna refere-se a uma variável de investimento $w_{ij,y}$. Em cada linha, só existe $\bar{n}_{ij}$ valores diferentes de zero e, conseqüentemente, iguais a 1, isto é, para cada linha ij da matriz existem $y = 1, \dots, \bar{n}_{ij}$ colunas com valor igual a 1.

Figura 14 – Matriz dos coeficientes das variáveis de investimento referente à restrição do número máximo de linhas que podem ser construídas em cada caminho do sistema no modelo linear disjuntivo.

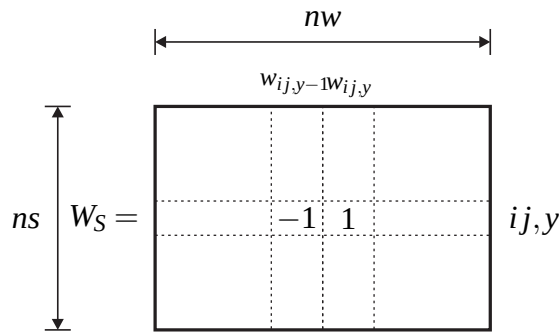


Fonte – Elaboração do autor.

A construção da matriz W_S de coeficientes das variáveis de investimento $w_{ij,y}$ referente à restrição (106g) que garante a construção sequencial de cada linha candidata, no modelo LD, é apresentada na Figura 15. Essa restrição tem por objetivo diminuir o espaço de busca factível do problema, pois ela diminui o número de possíveis combinações na construção das linhas candidatas em cada caminho ij do sistema elétrico, forçando a construção sequencial das linhas.

Uma segunda linha só pode ser construída se a primeira já foi construída, em outras palavras, para uma linha $w_{ij,2} = 1$ implica também que a linha $w_{ij,1} = 1$. A matriz W_S possui $ns = nw - nl$ linhas e nw colunas, onde $y = 2, \dots, \bar{n}_{ij}$. Só existem dois coeficientes diferentes de zero, em cada linha da matriz W_S ; esses coeficientes são -1 para a variável $w_{ij,y-1}$, e, 1 para a variável $w_{ij,y}$.

Figura 15 – Matriz dos coeficientes das variáveis de investimento referente à restrição que garante a construção sequencial de cada linha candidata no modelo linear disjuntivo.



Da mesma forma que no modelo de transportes, também é necessária a utilização de variáveis artificiais no modelo LD (106) devido às restrições de igualdade (106h) e (106i). Seguindo o procedimento apresentado na Subseção 3.3.4, adiciona-se uma variável de folga com coeficiente positivo para cada restrição (106b)-(106g) para transformar as desigualdades em igualdades; depois adiciona-se uma variável artificial para cada restrição (106h) e (106i) com o sinal do coeficiente momentaneamente positivo.

Para encontrar uma SBF na forma da matriz identidade, todas as variáveis originais do problema são variáveis não básicas, juntamente com algumas variáveis de folga que não satisfazem os requisitos para fazerem parte da SBF. O próximo passo é definir em que limites cada variável não básica será fixada. Esse procedimento pode ser escolhido aleatoriamente, ou então utilizar características específicas do problema para definir a melhor escolha. No problema PEST representado pelo modelo LD (106), pode ser definido que todas as variáveis de investimentos $w_{ij,y}$, todas as variáveis de fluxo de potência nas novas linhas $f_{ij,y}$ e todas as variáveis de ângulo ficarão fixadas no LI delas; todas as barras que possuem geração g_i ficarão fixadas no LS delas, e as variáveis de fluxo de potência nas linhas existentes f_{ij}^0 que não estão conectadas diretamente em uma barra geradora ficarão fixadas no LI delas, e as demais ficarão fixadas no LS delas. Esse procedimento pode acelerar o algoritmo B&B deixando as variáveis mais próximas do seu valor ótimo.

No modelo LD (106), é possível descobrir quais variáveis de folga farão parte da base, mesmo antes da substituição das variáveis não básicas pelos limites delas, portanto, cada restrição de desigualdade do problema (106) deve ser analisada separadamente.

- Restrição (106b):

Seja ρ_i o valor do lado esquerdo de cada restrição e considerando que as variáveis $w_{ij,y}$, $f_{ij,y}$, θ'_i e θ''_i estão fixadas no LI delas, logo $\rho_i = -x_{ij}\bar{f}_{ij}$ e, como $\rho_i \leq M$, portanto, a variável de folga pode ser usada na SBF inicial com valor $x_i^f = M - \rho_i$.

- Restrição (106c):

É válido o mesmo raciocínio aplicado na restrição (106b), logo $\rho_i = x_{ij}\bar{f}_{ij}$ e, como $\rho_i \leq M$, portanto, a variável de folga pode ser usada na SBF inicial com valor $x_i^f = M - \rho_i$.

- Restrição (106d):

Considerando que as variáveis $w_{ij,y}$ e $f_{ij,y}$ estão fixadas no LI delas, e, como nesse caso, $f_{ij,y} < 0$, logo $f_{ij,y} + x_i^f = 0 \Rightarrow x_i^f = -f_{ij,y} > 0$, portanto, a variável de folga pode ser usada na SBF inicial.

- Restrição (106e):

Com raciocínio semelhante ao da restrição (106d), considerando que as variáveis $w_{ij,y}$ e $f_{ij,y}$ estão fixadas no LI delas, e, como nesse caso, $f_{ij,y} < 0$, logo $-f_{ij,y} + x_i^f = 0 \Rightarrow x_i^f = f_{ij,y} < 0$, portanto, a variável de folga não pode ser usada na SBF inicial e passa a ser uma variável não básica fixada no seu LI. Como as variáveis de folga das restrições (106e) não podem fazer parte da SBF, isso implica que é necessário adicionar variáveis artificiais com coeficiente negativo nessas restrições.

- Restrição (106f):

Como as variáveis $w_{ij,y}$ estão fixadas no LI delas, logo $x_i^f = \bar{n}_{ij}$, portanto, a variável de folga pode ser usada na SBF inicial.

- Restrição (106g):

Também considerando que as variáveis $w_{ij,y}$ estão fixadas no LI delas, logo $x_i^f = 0$, portanto, a variável de folga pode ser usada na SBF inicial.

- Restrição (106h):

Devido à igualdade contida nessas restrições, é necessário adicionar uma variável artificial na restrição correspondente para fazer parte da base. Considerando que θ'_i e θ''_i estão fixadas no LI delas, se $f_{ij}^0 = -\bar{f}_{ij}$, a variável artificial assume a forma x_i^a e, se $f_{ij}^0 = \bar{f}_{ij}$, a variável artificial assume a forma $-x_i^a$ na restrição correspondente.

- Restrição (106i):

Também devido à igualdade contida nessas, restrições é necessário adicionar uma variável artificial na restrição correspondente para fazer parte da base. Sendo ρ_i o valor numérico do lado esquerdo da igualdade após a substituição das variáveis não básicas pelos seus limites fixados, se $\rho_i \geq d_i$, logo a variável artificial assume a forma $-x_i^a$ na restrição correspondente ou a forma x_i^a , caso contrario.

O restante da matriz de coeficientes A referente às variáveis de folga e artificiais juntamente com os LI e LS delas e o restante dos vetores de custo da função objetivo original e de Fase I são apresentados na Figura 16. Verifica-se que as restrições (106b)-(106g) são todas do tipo menor ou igual, logo todos os coeficientes das variáveis de folga são positivos. Pela adição

onde:

nf número de variáveis de folga.

na número de variáveis artificiais.

ne número de restrições em (106f)-(106j), isto é, $ne = nl + ns + no + nb$.

l^{fa} vetor com o LI das variáveis de folga e artificiais.

u^{fa} vetor com o LS das variáveis de folga e artificiais.

c'^{fa} vetor de custos da função objetivo de Fase I das variáveis de folga e artificiais.

c^{fa} vetor de custo das variáveis de folga e artificiais.

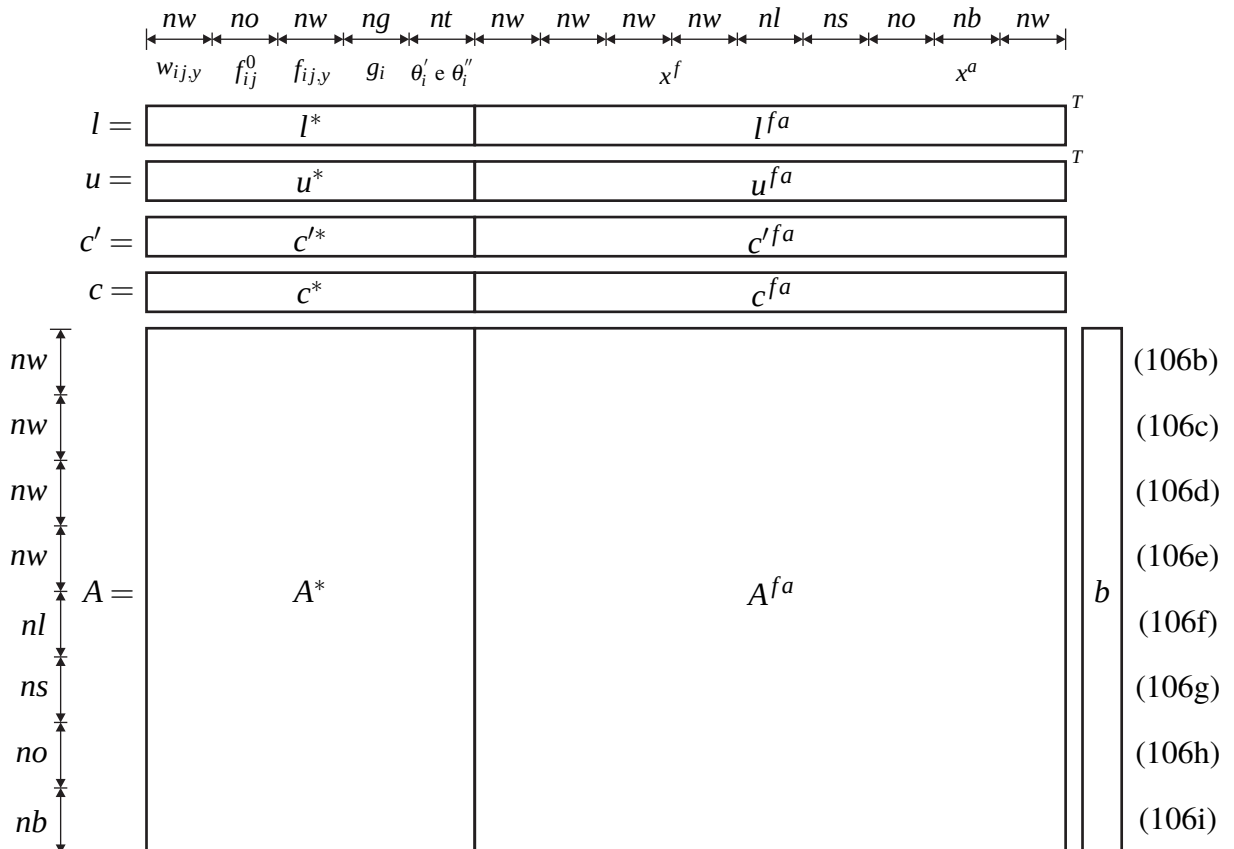
A^{fa} matriz dos coeficientes das variáveis de folga e artificiais.

A_0 como no modelo de transporte, representa a matriz de coeficientes das variáveis artificiais.

A_1 também, como no modelo de transporte, representa a matriz de coeficientes das variáveis artificiais extras.

Por limitação de espaço, a estrutura do PL para o modelo LD foi dividida em duas partes, sendo a primeira parte referente às variáveis originais do problema apresentada pela Figura 13, e, a segunda parte referente às variáveis de folga e artificiais apresentada pela Figura 16. A Figura 17 mostra, em uma escala menor, as duas partes juntas formando a estrutura completa do PL para o modelo LD.

Figura 17 – Estrutura completa do modelo linear disjuntivo para a construção do PL



Fonte – Elaboração do autor.

Com as informações apresentadas na Figura 17, já é possível separar as colunas da matriz de coeficientes A referente às variáveis básicas, às variáveis não básicas fixadas no seu LI e às variáveis não básicas fixadas no seu LS. Portanto, a matriz B contém as colunas das variáveis de folga, exceto das variáveis de folga da restrição (106e), e todas as colunas das variáveis artificiais. A matriz N_1 contém as colunas referentes às variáveis não básicas fixadas no seu LI, isto é, as colunas referentes às variáveis $w_{ij,y}$, $f_{ij,y}$, θ'_i , θ''_i e f_{ij}^0 para as linhas não conectadas diretamente com uma barra de geração, e as variáveis de folga x^f da restrição (106e). Finalmente, a matriz N_2 contém as colunas das variáveis não básicas fixadas no LS delas, isto é, as colunas referentes às variáveis f_{ij}^0 para as linhas conectadas diretamente com uma barra de geração e as variáveis das barras de geração g_i . A Figura 11 também pode ser usada para representar a estrutura das matrizes B , N_1 e N_2 , no modelo LD, só que, nesse caso, $m = 4nw + nl + nb + ns + no$ e $n = 7nw + 2no + nl + nb + ng + nt$.

Nessa etapa, já existem todas as informações necessárias para a montagem do quadro simplex inicial. No entanto, como estão sendo utilizadas variáveis artificiais, é necessária a implementação do quadro simplex de duas fases apresentado na Tabela 3. Por fim, o algoritmo PSC apresentado na Seção 3.3 já é capaz de resolver esse quadro simplex.

3.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO ALGORITMO DUAL SIMPLEX CANALIZADO NA ESTRUTURA BRANCH AND BOUND

De acordo com a Seção 3.1, a partir do quadro ótimo de P_0 , é possível reotimizar todos os subproblemas descendentes dele gerados pelo algoritmo B&B. Todos os subproblemas descendentes de P_0 são mais restritos que ele, isto é, possuem restrições adicionais. A reotimização só é possível, pois, no quadro ótimo de P_0 , está garantida a otimalidade. O algoritmo B&B altera somente os limites das variáveis que separam os subproblemas, portanto, nesses subproblemas, somente a factibilidade pode ser perdida nas variáveis que separam P_0 até o subproblema corrente.

Nesta pesquisa, foi implementado um algoritmo B&B que reotimiza qualquer subproblema descendente através do quadro ótimo de P_0 . Nesse tipo de estratégia, armazena-se somente o quadro ótimo P_0 e as restrições de mudança de limite de cada subproblema gerado. A vantagem dessa estratégia é que não é necessário armazenar todos os quadros simplex dos subproblemas gerados, evitando-se, assim, o consumo excessivo de memória. A desvantagem é que a resolução de um subproblema, a partir do quadro ótimo de P_0 , pode ser mais lenta que a partir de um subproblema antecedente imediato. Para contornar parte desse problema, foi adotado, nesta pesquisa, que, se for escolhido um subproblema para ser resolvido que é descendente imediato do último subproblema resolvido (caso muito recorrente quando usado a regra LIFO para selecionar o próximo subproblema a ser resolvido no algoritmo B&B), utiliza-se o quadro ótimo desse último subproblema resolvido para reotimizar seu descendente, caso

contrário, utiliza-se o quadro ótimo de P_0 para se realizar a reotimização.

Para armazenar de forma eficiente todas as informações necessárias para a resolução de um determinado subproblema e também para gerenciar a lista de problemas que devem ser resolvidos, gerados pelo algoritmo B&B, foi implementado um novo tipo de variável derivada. Esse novo tipo de variável usa a estrutura de uma lista duplamente encadeada que liga um problema a outros dois subproblemas na lista, facilitando o ordenamento da lista tanto quando usado a regra LIFO ou quando usado pseudocustos. Nesta mesma variável, também são armazenados os valores estimados e do limitante inferior (valor da função objetivo do subproblema ascendente imediato) do subproblema corrente, além das informações das restrições que dividiram o problema P_0 até o presente subproblema.

As informações das restrições que separam o subproblema corrente são armazenadas internamente na variável derivada em uma matriz com o número de linhas determinado pelo número de restrições adicionais do subproblema e com cinco colunas. Em cada uma das colunas, são armazenadas, respectivamente, número de separações (nível de profundidade na árvore B&B), índices do subproblema corrente e dos ancestrais, índices das variáveis que separam o subproblema, tipos de restrições que separam o subproblema (1 para restrições do tipo $\leq$ e 2 para restrições do tipo $\geq$) e os limites das variáveis que separam o subproblema.

Durante a execução do algoritmo B&B, em uma certa profundidade da árvore B&B, existe a possibilidade de algumas variáveis não básicas em P_0 terem seus limites alterados para algum subproblema descendente. Nesse caso, é necessário atualizar primeiro a coluna RHS de P_0 antes de iniciar o processo de reotimização. Para realizar a atualização da coluna RHS, é utilizada a equação (74) com a informação dos novos limites das variáveis não básicas em P_0 .

Para os algoritmos B&B e DSC não existe quase diferença em resolver ou reotimizar os modelos de transporte (103) e LD (106); as maiores diferenças dos problemas estão no tamanho, pois o modelo LD é muito maior que o de transporte, e no tipo de variável de investimento, já que, no modelo LD, é binária, o que implica que as variáveis só podem assumir os valores zero ou um, diferentemente do modelo de transporte, em que as variáveis podem assumir qualquer valor inteiro dentro de um intervalo.

3.7 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

De modo a exemplificar o processo de resolução dos modelos de transporte (103) e LD (106) no problema PEST, será feito, primeiramente, o planejamento com o modelo de transporte e, posteriormente, com o modelo LD de um sistema de transmissão com três barras e uma linha na topologia base apresentado na Figura 1, utilizando o algoritmo B&B, juntamente com o algoritmo PSC para resolução do problema de PL inicial e, com o algoritmo DSC, no processo de reotimização dos subproblemas gerados pelo algoritmo B&B.

3.7.1 Modelo de Transporte

Através das equações do modelo de transporte (103) e dos dados obtidos na Figura 1, é possível construir as equações do modelo de transporte para o sistema de três barras proposto na Figura 1, tendo-se, portanto, o problema PLIM:

$$\begin{aligned}
 \min v &= 3n_{12} + 2n_{13} + 2n_{23} \\
 \text{s.a.} \\
 &-35n_{12} - f_{12} \leq 0 \\
 &-40n_{13} - f_{13} \leq 40 \\
 &-40n_{23} - f_{23} \leq 0 \\
 &-35n_{12} + f_{12} \leq 0 \\
 &-40n_{13} + f_{13} \leq 40 \\
 &-40n_{23} + f_{23} \leq 0 \\
 &-f_{12} - f_{13} + g_1 = 0 \\
 &f_{12} - f_{23} = 60 \\
 &f_{13} + f_{23} = 20 \\
 &0 \leq g_1 \leq 80 \\
 &0 \leq n_{12} \leq 2 \\
 &0 \leq n_{13} \leq 2 \\
 &0 \leq n_{23} \leq 2 \\
 &n_{12}, n_{13}, n_{23} \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Transformando o problema acima na forma matricial da Figura 7, tem-se a Tabela 4 e considerando $x = \begin{bmatrix} n_{12} & n_{13} & n_{23} & f_{12} & f_{13} & f_{23} & g_1 \end{bmatrix}^T$:

Tabela 4 – Estrutura inicial do sistema de três barras no modelo de transporte para a construção do PL

	<i>nl</i>			<i>nl</i>			<i>ng</i>		
	<i>n</i> ₁₂	<i>n</i> ₁₃	<i>n</i> ₂₃	<i>f</i> ₁₂	<i>f</i> ₁₃	<i>f</i> ₂₃	<i>g</i> ₁		
<i>l</i> ^{*T} =	0	0	0	-70	-120	-80	0		
<i>u</i> ^{*T} =	2	2	2	70	120	80	80		
min <i>v</i> =	3	2	2	0	0	0	0	· <i>x</i> ^T	
<i>nl</i>	-35	0	0	-1	0	0	0	0	(103b)
	0	-40	0	0	-1	0	0	40	
	0	0	-40	0	0	-1	0	0	
<i>nl</i>	-35	0	0	1	0	0	0	0	(103c)
	0	-40	0	0	1	0	0	40	
	0	0	-40	0	0	1	0	0	
<i>nb</i>	0	0	0	-1	-1	0	1	0	(103d)
	0	0	0	1	0	-1	0	60	
	0	0	0	0	1	1	0	20	

Fonte – Elaboração do autor.

As restrições (103b) e (103c) foram intercaladas no planejamento do sistema de três barras com o modelo de transportes resolvido passo a passo. Esse procedimento não é necessário, mas, para usar a solução manual do problema presente no Apêndice A, a Tabela 5 apresenta a estrutura inicial do PL com a intercalação das restrições.

Tabela 5 – Estrutura inicial do sistema de três barras no modelo de transporte para a construção do PL resolvido passo a passo

	nl			nl			ng		
	n_{12}	n_{13}	n_{23}	f_{12}	f_{13}	f_{23}	g_1		
$l^{*T} =$	0	0	0	-70	-120	-80	0		
$u^{*T} =$	2	2	2	70	120	80	80		
$\min v =$	3	2	2	0	0	0	0	$\cdot x^T$	
$2nl$	-35	0	0	-1	0	0	0	$\cdot x =$	0
	-35	0	0	1	0	0	0		0
	0	-40	0	0	-1	0	0		40
	0	-40	0	0	1	0	0		40
	0	0	-40	0	0	-1	0		0
	0	0	-40	0	0	1	0		0
nb	0	0	0	-1	-1	0	1		0
	0	0	0	1	0	-1	0		60
	0	0	0	0	1	1	0		20

(103b) e (103c)

(103d)

Fonte – Elaboração do autor.

De modo a facilitar o desenvolvimento, será feita a troca das variáveis $v = x_0$, $n_{12} = x_1$, $n_{13} = x_2$, $n_{23} = x_3$, $f_{12} = x_4$, $f_{13} = x_5$, $f_{23} = x_6$, $g_1 = x_7$. Para não aumentar o tamanho do problema, foi utilizada a mesma estratégia apresentada na Subseção 3.3.4 e na Seção 3.5 em que se adicionam variáveis artificiais somente nas restrições onde são necessárias. Seguindo os passos da estratégia, primeiro foi escolhido, aleatoriamente, que $R_1 = \{4, 6, 7\}$ e $R_2 = \{1, 2, 3, 5\}$ definindo em que limites as variáveis não básicas devem ficar. Inicialmente, adicionam-se no PL as variáveis de folga $x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ e x_{13} uma para cada restrição de desigualdade, e, as variáveis artificiais x_{14}, x_{15} e x_{16} uma para cada restrição de igualdade.

Os valores das variáveis de folga e artificiais que são variáveis básicas, no quadro inicial, são encontrados substituindo os limites das variáveis não básicas nas restrições do PL, obtendo-se, assim:

$$\begin{aligned}
 -35x_1 - x_4 + x_8 &= 0 \Rightarrow -70 + 70 + x_8 = 0 \Rightarrow x_8 = 0 \\
 -35x_1 + x_4 + x_9 &= 0 \Rightarrow -70 - 70 + x_9 = 0 \Rightarrow x_9 = 140 \\
 -40x_2 - x_5 + x_{10} &= 40 \Rightarrow -80 - 120 + x_{10} = 40 \Rightarrow x_{10} = 240 \\
 -40x_2 + x_5 + x_{11} &= 40 \Rightarrow -80 + 120 + x_{11} = 40 \Rightarrow x_{11} = 0 \\
 -40x_3 - x_6 + x_{12} &= 0 \Rightarrow -80 + 80 + x_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = 0 \\
 -40x_3 + x_6 + x_{13} &= 0 \Rightarrow -80 - 80 + x_{13} = 0 \Rightarrow x_{13} = 160 \\
 -x_4 - x_5 + x_7 + x_{14} &= 0 \Rightarrow 70 - 120 + 0 + x_{14} = 0 \Rightarrow x_{14} = 50 \\
 x_4 - x_6 + x_{15} &= 60 \Rightarrow -70 + 80 + x_{15} = 60 \Rightarrow x_{15} = 50 \\
 x_5 + x_6 + x_{16} &= 20 \Rightarrow 120 - 80 + x_{16} = 20 \Rightarrow x_{16} = -20.
 \end{aligned}$$

Diante dos valores encontrados, verifica-se que as variáveis de folga possuem valor positivo, portanto, todas as variáveis de folga farão parte da base. Também se verifica que a única variável artificial que terá o valor de seu coeficiente com sinal negativo é a variável x_{16} .

Como foi necessária a adição de variáveis artificiais, deve ser utilizado o algoritmo PSC de duas fases para resolver o primeiro PL, isto é, o problema P_0 . Assim, deve ser adicionado também a função objetivo de Fase I em P_0 denominada z_0 .

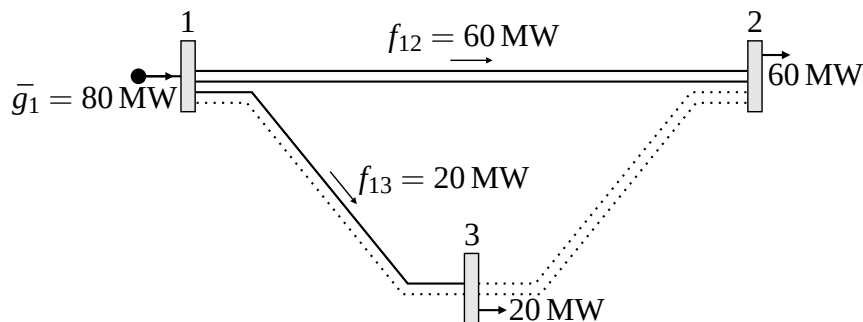
Tabela 6 – Estrutura completa do sistema de três barras no modelo de transporte para a construção do PL resolvido passo a passo

	<i>nl</i>			<i>nl</i>			<i>ng</i>	<i>nl</i>			<i>nl</i>			<i>nb</i>			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
$l^T =$	0	0	0	-70	-120	-80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x^T
$u^T =$	2	2	2	70	120	80	80	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x^T
$\min z_0 =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
$\min x_0 =$	3	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$2nl$	-35	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$x =$
	-35	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	-40	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
	0	-40	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	0	0	-40	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
	0	0	-40	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
nb	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0 0 40 40 0 0 0 60 20
	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	

Fonte – Elaboração do autor.

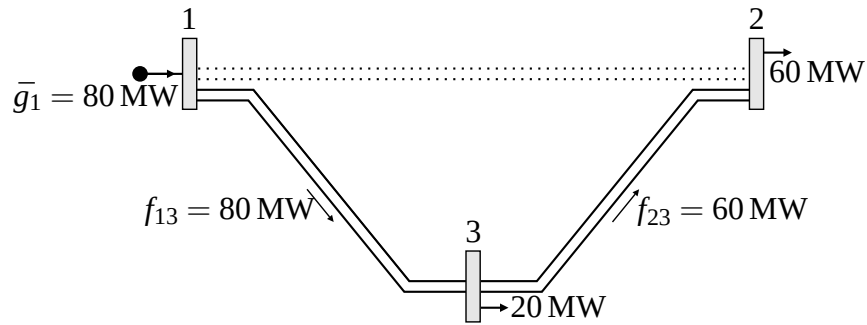
A solução completa deste exemplo é apresentada no Apêndice A. No planejamento do sistema apresentado na Figura 1 durante a execução do Passo 2 no algoritmo B&B, foi escolhido utilizar sempre a primeira variável inteira com valor não inteiro para fazer a separação dos subproblemas. No Passo 3 do algoritmo B&B, foi escolhido utilizar somente a regra LIFO para escolha do subproblema a ser resolvido, isto é, sempre será escolhido o último subproblema gerado. O algoritmo B&B encontrou duas soluções ótimas globais alternativas apresentadas nas Figuras 18 e 19.

Figura 18 – Solução ótima do modelo de transporte para o sistema de 3 barras com uma linha na topologia base encontrada em P_2



Fonte – Escobar, Romero e Gallego (2010)

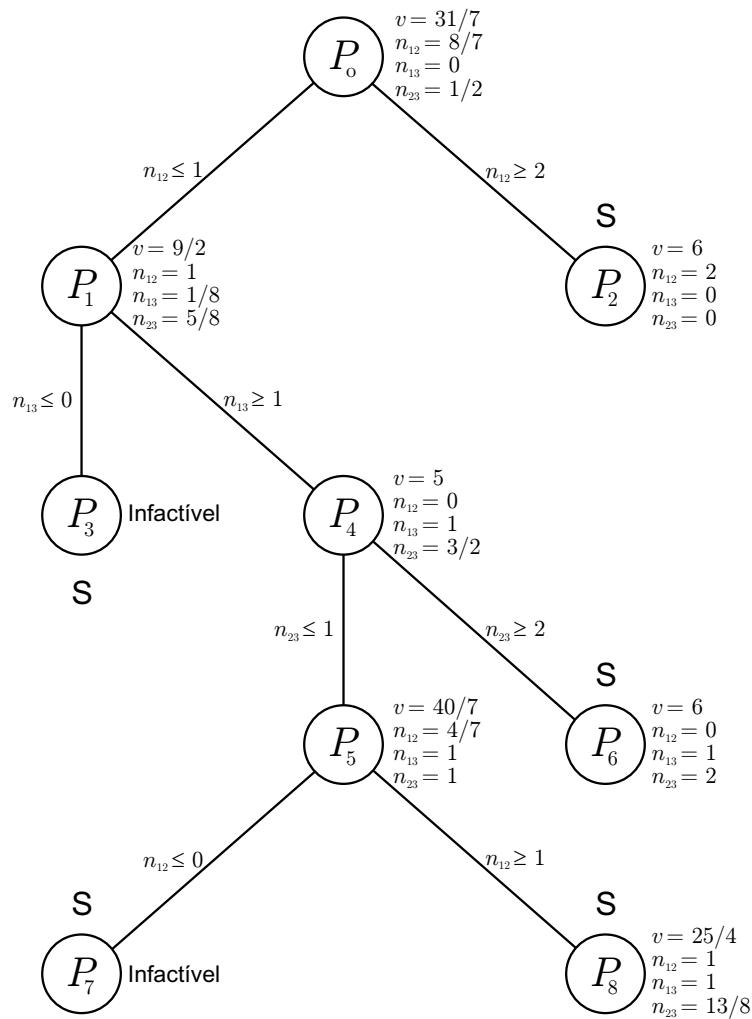
Figura 19 – Solução ótima do modelo de transporte para o sistema de 3 barras com uma linha na topologia base encontrada em P_6



Fonte – Escobar, Romero e Gallego (2010)

A árvore B&B produzida pelo algoritmo B&B para o sistema de três barras com uma linha na topologia na base está na Figura 20.

Figura 20 – Árvore *Branch and Bound* do modelo de transporte para o sistema de 3 barras com uma linha na topologia base



Fonte – Dados da pesquisa do autor.

3.7.2 Modelo Linear Disjuntivo

Através das equações do modelo LD (106) e dos dados obtidos na Figura 1, é possível construir a estrutura inicial do PL, no modelo LD, para o sistema de três barras proposto na Figura 1. Devido ao grande número de restrições e variáveis produzidas no modelo LD, é apresentada diretamente a estrutura inicial do PL na forma matricial da Figura 13, obtendo-se, portanto, a Tabela 7.

Tabela 7 – Estrutura inicial do sistema de três barras no modelo linear disjuntivo para a construção do PL

		nw						no	nw						ng	nt						
		w _{12,1}	w _{12,2}	w _{13,1}	w _{13,2}	w _{23,1}	w _{23,2}	f ₁₃ ⁰	f _{12,1}	f _{12,2}	f _{13,1}	f _{13,2}	f _{23,1}	f _{23,2}	g ₁	θ ₂ '	θ ₂ ''	θ ₃ '	θ ₃ ''			
l ^{*T} =		0	0	0	0	0	0	-40	-35	-35	-40	-40	-40	-40	0	0	0	0	0			
u ^{*T} =		1	1	1	1	1	1	40	35	35	40	40	40	40	80	∞	∞	∞	∞			
min v =		3	3	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x ^T		
nw	M	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	M		
	0	M	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	M		
	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	-1	M		
	0	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	-1	M		
	0	0	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	-1	1	1	-1	M		
	0	0	0	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	1	1	-1	M		
nw	M	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	M		
	0	M	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	M		
	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	-1	1	M		
	0	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-1	1	M		
	0	0	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	1	-1	-1	1	M		
	0	0	0	0	0	M	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1	-1	-1	1	M		
nw	-35	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	-35	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
nw	-35	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	-35	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	-40	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0		
nl	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2		
	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2		
	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2		
ns	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
no	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0		
nb	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	60		
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	20		

Fonte – Elaboração do autor.

Para não aumentar o tamanho do problema, foi utilizada a mesma estratégia apresentada na Subseção 3.3.4 e na Seção 3.5 em que se adicionam variáveis artificiais somente nas restrições

onde são necessárias. Seguindo os passos da estratégia, primeiro foi escolhido que $w_{ij,y}$, $f_{ij,y}$, θ'_i e θ''_i ficarão fixadas no LI delas; f_{ij}^0 que não estão conectadas diretamente em uma barra geradora ficarão fixadas no LI delas, e as demais ficarão fixadas no seu LS, e g_i ficará fixada no seu LS. Na Subseção 3.5.2, foi mostrado que, através dessa escolha, somente as variáveis de folga referente às restrições do tipo (106e) não podem fazer parte da SBF inicial e para essas restrições é necessário adicionar variáveis artificiais extras com coeficiente negativo. Também devido ao tamanho do problema, na Tabela 8, somente são apresentadas as matrizes de coeficientes, limites e vetores de custos das variáveis de folga e artificiais.

Tabela 8 – Matriz de coeficientes das variáveis de folga e artificiais, limites e vetores de custos do modelo linear disjuntivo para o sistema de três barras

	nw	nw	nw	nw	nl	ns	no	nb	nw
	x^l						x^a		
$l^{faT} =$	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
$u^{faT} =$	$\infty \infty \infty \infty \infty \infty$	$\infty \infty \infty \infty \infty \infty$	$\infty \infty \infty \infty \infty \infty$	$\infty \infty \infty \infty \infty \infty$	$\infty \infty \infty$	$\infty \infty \infty$	∞	$\infty \infty \infty$	$\infty \infty \infty \infty \infty \infty$
$c^{fa} =$	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	1	1 1 1	1 1 1 1 1 1
$c^{fa} =$	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
nw	1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
nw	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
nw	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
nw	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	-1 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 -1 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 -1 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 -1 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 -1 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 -1
nl	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 1 0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 1	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
ns	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	1 0 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 1 0	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 1	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
no	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	-1	0 0 0	0 0 0 0 0 0
nb	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	-1 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 1 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 1	0 0 0 0 0 0

Fonte – Elaboração do autor.

Como foi necessária a adição de variáveis artificiais, pode se verificar, na Tabela 8, que existe o vetor de custos da função objetivo de Fase I referente às variáveis de folga e artificiais. Também se podem verificar os coeficientes negativos das variáveis artificiais extras das restrições do tipo (106e) nas últimas colunas da tabela. Juntando as Tabelas 7 e 8 é obtida a estrutura completa do modelo linear disjuntivo para a construção do quadro simplex de duas fases de P_0 para o sistema de três barras da Figura 1.

No planejamento do sistema apresentado na Figura 1 durante a execução do Passo 2 no algoritmo B&B, foi escolhido utilizar sempre a primeira variável inteira com valor não inteiro para fazer a separação dos subproblemas. No Passo 3 do algoritmo B&B, foi escolhido utilizar somente a regra LIFO para escolha do subproblema a ser resolvido, isto é, sempre será escolhido o último subproblema gerado.

O algoritmo B&B encontrou para o modelo LD também as mesmas duas soluções ótimas globais alternativas encontradas no modelo de transporte apresentadas nas Figuras 18 e 19; no entanto, foram necessárias 32 iterações do algoritmo PSC (19 na Fase I e 13 na Fase II) e 11 iterações do algoritmo B&B, onde a média de iterações do algoritmo DSC, para cada iteração do algoritmo B&B, na reotimização dos subproblemas foi de 3 a 4 iterações. O planejamento passo a passo do sistema de três barras para o modelo LD não é apresentado devido ao tamanho do problema e da quantidade de iterações.

4 TESTES COM O ALGORITMO BRANCH AND BOUND ESPECIALIZADO

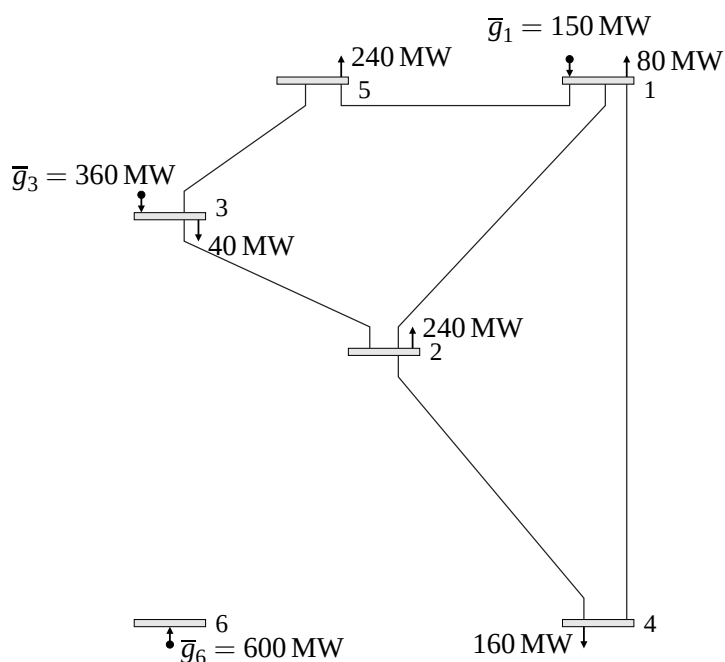
Este capítulo apresenta os sistemas de transmissão Garver de 6 barras e 15 caminhos (Seção 4.1), IEEE(a) de 24 barras e 41 caminhos (Seção 4.2) e o Sul-Brasileiro de 46 barras e 79 caminhos (Seção 4.3) que foram utilizados para validar a proposta de melhoria do algoritmo *Branch and Bound* (B&B). Na Seção 4.4 deste capítulo, também são apresentadas as informações de desempenho do *software* desenvolvido em linguagem de programação Fortran Moderno e os resultados obtidos por ele no planejamento dos sistemas de transmissão mencionados anteriormente.

O *software* produzido nesta pesquisa opera de forma autônoma, sem o auxílio de *solvers* comerciais. Neste *software* foi implementado o algoritmo B&B, onde, internamente, também foram implementados os algoritmos primal simplex canalizado (PSC), para a resolução do problema PL inicial com integralidade relaxada, e o algoritmo dual simplex canalizado (DSC), para a reotimização de todos os subproblemas gerados pelo algoritmo B&B.

4.1 SISTEMA DE GARVER DE 6 BARRAS E 15 CAMINHOS

O sistema de Garver, como mostra a Figura 21, possui 6 barras e 15 caminhos; dentre as barras, 3 possuem geração de potência ativa com capacidade de geração total máxima de 1110 MW, cargas em 5 barras com demanda total de 760 MW e permite, no máximo, a construção de 4 linhas em cada caminho.

Figura 21 – Sistema de Garver com 6 barras e 15 caminhos



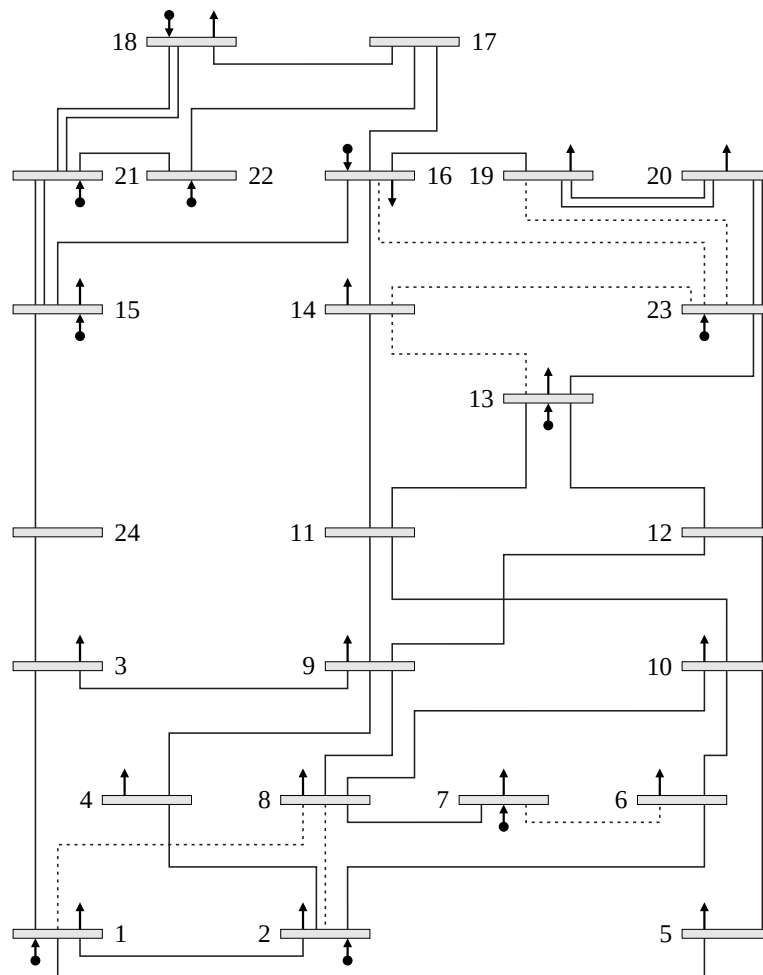
Fonte – Romero e Monticelli (1994a)

As informações sobre geração e demanda de energia em cada barra, caminhos, linhas já existentes, máximo fluxo de potência ativa permitido em cada linha e os custos para construção de novas linhas em cada caminho do sistema de Garver utilizado para o planejamento são apresentadas nas Tabelas 23 e 24 no Anexo A.

4.2 SISTEMA IEEE(A) DE 24 BARRAS E 41 CAMINHOS

O sistema IEEE(a), como mostra a Figura 22, possui 24 barras e 41 caminhos; dentre as barras, 10 possuem geração de potência ativa com capacidade de geração total máxima de 10215 MW, cargas em 17 barras com demanda total de 8550 MW e permite no máximo a construção de 4 linhas em cada caminho.

Figura 22 – Sistema IEEE(a) com 24 barras e 41 caminhos



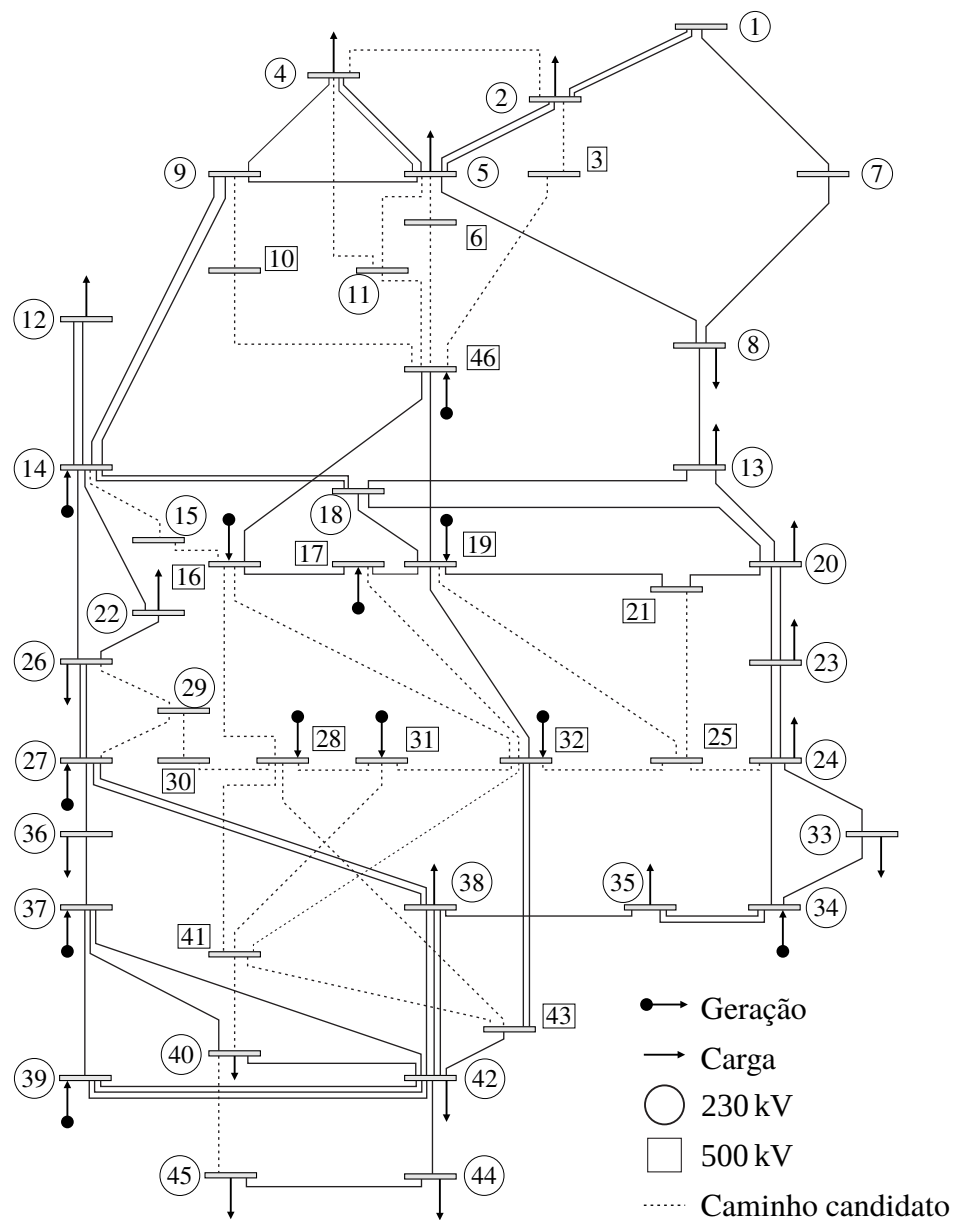
Fonte – Romero et al. (2005)

As informações sobre geração e demanda de energia em cada barra, caminhos, linhas já existentes, máximo fluxo de potência ativa permitido em cada linha e os custos para construção de novas linhas em cada caminho do sistema IEEE(a) utilizado para o planejamento são apresentadas nas Tabelas 25 e 26 também no Anexo A.

4.3 SISTEMA SUL-BRASILEIRO DE 46 BARRAS E 79 CAMINHOS

O sistema Sul-Brasileiro, como mostra a Figura 23, possui 46 barras e 79 caminhos; dentre as barras, 12 possuem geração de potência ativa com capacidade de geração total máxima de 10545 MW, cargas em 19 barras com demanda total de 6880 MW e permite também no máximo a construção de 4 linhas em cada caminho.

Figura 23 – Sistema Sul-Brasileiro com 46 barras e 79 caminhos



Fonte – Romero e Monticelli (1994b)

As informações sobre geração e demanda de energia em cada barra, caminhos, linhas já existentes, máximo fluxo de potência ativa permitido em cada linha e os custos para construção de novas linhas em cada caminho do sistema Sul-Brasileiro utilizado para o planejamento são apresentadas nas Tabelas 27 e 28 também no Anexo A.

4.4 RESULTADOS

O planejamento dos sistemas de Garver de 6 barras e 15 caminhos, IEEE(a) de 24 barras e 41 caminhos e Sul-Brasileiro de 46 barras e 79 caminhos, através dos modelos de transporte e linear disjuntivo (LD) foi realizado utilizando o algoritmo B&B, juntamente com algoritmo PSC, na resolução do problema inicial com integralidade relaxada, e com o algoritmo DSC, para a reotimização dos subproblemas gerados pelo algoritmo B&B. Foi utilizada também a estratégia apresentada na Subseção 3.3.4 de redução do número de variáveis artificiais a serem inseridas no problema inicial. O algoritmo B&B desenvolvido neste trabalho foi o Algoritmo 2 (Seção 2.2 na página 55) em que, no passo 1, foi escolhido $V_{inc} = \infty$ como incumbente inicial, no passo 2 foi utilizada a estratégia de sempre escolher a variável inteira com valor não inteiro de menor subíndice, e, no passo 3, foi utilizada a regra LIFO. Esses algoritmos e as estratégias utilizadas foram implementados, através da linguagem computacional Fortran Moderno, resultando em um programa capaz de realizar o planejamento dos sistemas de transmissão.

O computador utilizado na execução do programa para resolver o planejamento dos sistemas de Garver, IEEE(a) e Sul-Brasileiro é um Dell XPS 8920 com processador Intel Core i7-7700 (8 MB Cache, 3,60 GHz) com 4 núcleos, 8 threads e máxima velocidade de clock de 4,20 GHz, memória RAM 2×8 GB DDR4 de 2400 MHz e sistema operacional Microsoft Windows 10 Pro 64 bits. Durante a aplicação do programa, não estavam sendo executados processos de usuários e não foi encontrada perceptível mudança no desempenho do computador. As informações sobre o desempenho do programa no planejamento dos três sistemas são apresentadas nas Tabelas 9, 10 e 11.

Tabela 9 – Desempenho dos algoritmos no planejamento do sistema de Garver

Modelo	Transporte			Linear Disjuntivo		
Número de variáveis	84			511		
Número de variáveis básicas	36			312		
Número de variáveis não básicas	48			199		
Número de variáveis inteiras	15			60		
Número de variáveis artificiais	20			71		
Número iterações do algoritmos PSC para resolver P_0	Total 51	Fase I 32	Fase II 19	Total 500	Fase I 198	Fase II 302
Solução ótima de P_0	US\$ 99×10^6			US\$ 99×10^6		
Tempo computacional do algoritmo PSC	0,015 s			0,594 s		
Número de iterações do algoritmo B&B	113			165		
Número de nós da árvore B&B	112			164		
Tempo computacional do algoritmo B&B	0,015 s			1,453 s		
Número médio de iterações do DSC para cada nó	3 a 4			33 a 34		
Tempo computacional total do algoritmo DSC	0 s			0,937 s		
Tempo computacional total	0,046 s			2,234 s		

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Tabela 10 – Desempenho dos algoritmos no planejamento do sistema IEEE(a)

Modelo	Transporte			Linear Disjuntivo		
Número de variáveis	239			1460		
Número de variáveis básicas	106			878		
Número de variáveis não básicas	133			582		
Número de variáveis inteiras	41			164		
Número de variáveis artificiais	64			221		
Número iterações do algoritmos PSC para resolver P_0	Total	Fase I	Fase II	Total	Fase I	Fase II
	172	110	62	1790	934	856
Solução ótima de P_0	US\$ 67,706 $\times 10^6$			US\$ 74,529 $\times 10^6$		
Tempo computacional do algoritmo PSC	0,109 s			30,172 s		
Número de iterações do algoritmo B&B	59			2493		
Número de nós da árvore B&B	58			2492		
Tempo computacional do algoritmo B&B	0,109 s			213,031 s		
Número médio de iterações do DSC para cada nó	6 a 7			90 a 91		
Tempo computacional total do algoritmo DSC	0,062 s			203,859 s		
Tempo computacional total	0,234 s			244,016 s		

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Tabela 11 – Desempenho dos algoritmos no planejamento do sistema Sul-Brasileiro

Modelo	Transporte			Linear Disjuntivo		
Número de variáveis	453			2770		
Número de variáveis básicas	204			1673		
Número de variáveis não básicas	249			1097		
Número de variáveis inteiras	79			316		
Número de variáveis artificiais	124			408		
Número iterações do algoritmos PSC para resolver P_0	Total	Fase I	Fase II	Total	Fase I	Fase II
	320	209	111	4567	2815	1752
Solução ótima de P_0	US\$ 32,993 $\times 10^6$			US\$ 41,018 $\times 10^6$		
Tempo computacional do algoritmo PSC	0,265 s			105,015 s		
Número de iterações do algoritmo B&B	431			7825		
Número de nós da árvore B&B	430			7824		
Tempo computacional do algoritmo B&B	1,250 s			1912,578 s		
Número médio de iterações do DSC para cada nó	11 a 12			143 a 144		
Tempo computacional total do algoritmo DSC	0,578 s			1871,906 s		
Tempo computacional total	1,578 s			2020,547 s		

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Como foi utilizada a regra LIFO, no passo 3 do algoritmo B&B, todos os nós da árvore B&B foram resolvidos antes de passarem pelos testes de sondagem, e, portanto, o número de nós da árvore B&B corresponde ao número de subproblemas de PL que foram resolvidos.

Verifica-se, nas Tabelas 9, 10 e 11, que, tanto para o modelo de transportes quanto para o modelo LD, para resolver P_0 , o programa executou um número elevado de iterações do PSC em comparação com a média de iterações do algoritmo DSC, para reotimizar cada subproblema gerado pelo algoritmo B&B, mesmo não sendo armazenadas as informações dos subproblemas descendentes. A estratégia de se utilizar o algoritmo DSC e as informações do quadro ótimo de P_0 para reotimizar seus subproblemas descendentes, mostrou-se eficiente reduzindo significativamente o consumo de memória e também mostrou que não é necessária a execução do algoritmo PSC para resolver inteiramente os subproblemas descendentes.

Nas Tabelas 9, 10 e 11, também se verifica a eficiência da estratégia da redução do número de adições de variáveis artificiais. Na forma mais básica do problema de PL com variáveis canalizadas, são adicionadas duas variáveis artificiais por cada restrição de igualdade; outras formas ligeiramente mais sofisticadas adicionam apenas uma variável artificial para cada restrição de igualdade. Utilizando as estratégias convencionais de adição de variáveis artificiais no sistema de Garver, seria necessária a adição de pelo menos 36 variáveis artificiais no modelo de transporte, e, 312, no modelo LD; no sistema IEEE(a), 106 variáveis artificiais no modelo de transporte, e 878, no LD; e, no sistema Sul-Brasileiro, 204 variáveis artificiais no modelo de transporte, e 1673, no LD. Isso significa que o número mínimo de iterações do algoritmo PSC, em Fase I, seria igual ao número de variáveis artificiais adicionadas em cada sistema. Com a estratégia de redução do número de adições de variáveis artificiais apresentada na Subseção 3.3.4, foram respectivamente adicionadas para os modelos de transporte e LD, somente 20 e 71 variáveis artificiais no sistema de Garver, 64 e 221 variáveis artificiais, no sistema IEEE(a), e 124 e 408 variáveis artificiais, no sistema Sul-Brasileiro.

Os tempos computacionais do algoritmo PSC apresentados nas Tabelas 9, 10 e 11 significam os tempos totais gastos pelo algoritmo PSC para resolver os PLs resultantes dos problemas originais após relaxar a restrição de integralidade das variáveis de investimento. Os tempos computacionais do algoritmo DSC apresentados nas Tabelas 9, 10 e 11 significam o somatório dos tempos gastos na reotimização de cada subproblema gerado pelo algoritmo B&B. O tempo computacional total do algoritmo DSC igual a zero segundos para o modelo de transporte na Tabela 9 significa que o tempo gasto em cada reotimização foi inferior ao passo da função que faz a leitura do tempo; isso provoca uma resposta igual a zero segundos, logo o somatório de zeros resulta em zero. As Tabelas 9, 10 e 11 também apresentam os tempos computacionais do algoritmo B&B para o modelo de transporte e LD em cada sistema de transmissão. Esses tempos apresentados significam o tempo total gasto pelo algoritmo B&B no planejamento dos sistemas de transmissão, incluindo o tempo gasto pelo algoritmo DSC na reotimização de cada subproblema gerado, isto é, o tempo gasto pelo algoritmo B&B é a soma do tempo total do algoritmo DSC e o tempo dos procedimentos internos do algoritmo B&B. Portanto, o tempo computacional total apresentado nas Tabelas 9, 10 e 11 para o planejamento dos sistemas de transmissão é a soma dos tempos dos algoritmos PSC, B&B (onde já está incluso o tempo do algoritmo DSC) e os tempos gastos com procedimentos de montagem do problema inicial e demais procedimentos internos.

Através dos tempos computacionais do algoritmo B&B e DSC apresentados nas Tabelas 9, 10 e 11, pode-se confirmar também a afirmação, apresentada na Seção 1.4, onde diz que mais de 90% do tempo de processamento usado pelo algoritmo B&B é para resolver e armazenar os problemas de PL.

As soluções do modelo de transporte encontradas pelo programa no planejamento dos sistemas de Garver, apresentadas na Tabela 12, e Sul-Brasileiro, apresentada na Tabela 14,

são as mesmas encontradas em Haffner et al. (2001). O programa desenvolvido encontrou para o modelo de transporte do sistema IEEE(a) (Tabela 13) a mesma solução encontrada pelo *solver* CPLEX 12.6.3 (ILOG, 2008). As soluções do modelo LD encontradas pelo programa no planejamento do sistemas de Garver, IEEE(a) e Sul-Brasileiro apresentadas, respectivamente, nas Tabelas 12, 13 e 14 são as mesmas encontradas em Rider, Garcia e Romero (2008), onde foi utilizado o modelo CC e resolvido com um algoritmo B&B não linear juntamente com o método de pontos interiores.

Tabela 12 – Soluções ótimas do sistema de Garver

Modelo	Transporte				Linear Disjuntivo
Função objetivo	US\$ 110×10^6				US\$ 110×10^6
Iteração do algoritmo B&B onde foi encontrada a solução	96	101	106	109	161
Número do problema onde foi encontrada a solução	P_{98}	P_{104}	P_{110}	P_{112}	P_{164}
Soluções	$n_{35} = 1$ $n_{46} = 3$	$n_{26} = 1$ $n_{35} = 1$ $n_{46} = 2$	$n_{26} = 2$ $n_{35} = 1$ $n_{46} = 1$	$n_{26} = 3$ $n_{35} = 1$	$n_{35} = 1$ $n_{46} = 3$

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Tabela 13 – Soluções ótimas do sistema IEEE(a)

Modelo	Transporte	Linear Disjuntivo
Função objetivo	US\$ 102×10^6	US\$ 152×10^6
Iteração do algoritmo B&B onde foi encontrada a solução	3	1470
Número do problema onde foi encontrada a solução	P_6	P_{1474}
Soluções	$n_{610} = 1$ $n_{78} = 2$ $n_{1416} = 1$	$n_{610} = 1$ $n_{78} = 2$ $n_{1012} = 1$ $n_{1416} = 1$

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Tabela 14 – Soluções ótimas do sistema Sul-Brasileiro

Modelo	Transporte	Linear Disjuntivo
Função objetivo	US\$ $53,334 \times 10^6$	US\$ $72,870 \times 10^6$
Iteração do algoritmo B&B onde foi encontrada a solução	213	6629
Número do problema onde foi encontrada a solução	P_{218}	P_{6638}
Soluções	$n_{3334} = 1$ $n_{2021} = 2$ $n_{4243} = 1$ $n_{511} = 2$ $n_{4611} = 1$	$n_{25} = 1$ $n_{1320} = 1$ $n_{2023} = 1$ $n_{2021} = 2$ $n_{4243} = 1$ $n_{466} = 1$ $n_{56} = 2$

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

5 CONCLUSÕES

Esta pesquisa apresentou uma proposta de melhoria do algoritmo *Branch and Bound* (B&B), onde é utilizado o algoritmo dual simplex canalizado (DSC), para reotimizar todos os subproblemas descendentes gerados pelo algoritmo B&B, durante a resolução do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão (PEST). Nesta trabalho foram utilizados os modelos de transporte e linear disjuntivo (LD) na modelagem matemática do problema PEST, cujos resultantes são problemas de programação linear inteiro misto (PLIM).

O problema de programação linear (PL) inicial, após o relaxamento da restrição de integralidade das variáveis de investimento do problema original, foi resolvido, utilizando o algoritmo primal simplex canalizado (PSC). Junto com o algoritmo PSC, a pesquisa também apresentou uma estratégia para reduzir o número de adições de variáveis artificiais, que devem ser inseridas ao problema.

No capítulo inicial, realizou-se uma revisão bibliográfica e histórica do problema PEST e dos principais modelos e técnicas de resolução desse problema. Dentre as principais formas de modelagem do problema PEST, foram escolhidos os modelos de transporte e LD para validar a proposta desta pesquisa de melhoria do algoritmo B&B, por se tratarem de problemas PLIM.

A estrutura e o funcionamento do algoritmo B&B foram apresentados no Capítulo 2. Nesse mesmo capítulo, foi apresentado passo a passo do algoritmo B&B básico e também possíveis melhorias, que possam aperfeiçoar o seu desempenho.

No terceiro capítulo, foi apresentada a viabilidade de utilizar a proposta deste trabalho na melhoria do algoritmo B&B. Nesse capítulo, também foram apresentados o funcionamento e os detalhes de implementação dos algoritmos PSC e DSC, na resolução de problemas de PL com variáveis canalizadas, dentro da estrutura B&B. Por se tratar de um algoritmo bastante consolidado, foi escolhido o algoritmo PSC, para resolver o problema inicial com a restrição de integralidade relaxada. Junto com o algoritmo PSC, foi apresentada a estratégia para reduzir o número de variáveis artificiais, que devem ser inseridas ao problema de PL inicial, de modo, a possibilitar sua resolução através do algoritmo.

Consequentemente, no terceiro capítulo, também foi possível demonstrar que, através de uma análise de sensibilidade, o quadro ótimo do problema de PL inicial e os demais subproblemas de PL, gerados pelo algoritmo B&B, satisfazem as condições necessárias para serem um quadro inicial do algoritmo DSC. Dessa forma, com o quadro ótimo do problema de PL inicial, ou então, com o quadro ótimo do subproblema antecedente direto, foi possível usar o algoritmo DSC para reotimizar todos os subproblemas de PL gerados pelo algoritmo B&B, na resolução de um problema PLIM com variáveis canalizadas, conforme é o caso dos modelos de transporte e LD no problema PEST.

O Capítulo 4 apresentou os sistemas de transmissão Garver, IEEE(a) e Sul-Brasileiro,

escolhidos para serem resolvidos e, dessa forma, validar a proposta da pesquisa. As Tabelas 12, 13 e 14 apresentaram as soluções dos planejamentos para os sistemas de transmissão citados anteriormente, as quais foram encontradas através da técnica de resolução especializada proposta nesta pesquisa. Neste mesmo capítulo, as Tabelas 9, 10 e 11 apresentaram informações importantes sobre o desempenho de todos os algoritmos e as estratégias implementados.

Este trabalho também foi desenvolvido com o intuito de apresentar um texto bastante didático e explicativo, de modo que futuros pesquisadores do tema possam usá-lo como base de suas pesquisas, e, a partir disso, possam melhorar a ideia apresentada. Por esse motivo, no Apêndice A é resolvido passo a passo um exemplo ilustrativo através da proposta apresentada.

A principal contribuição desta pesquisa foi apresentar a viabilidade da utilização do algoritmo DSC, na resolução dos subproblemas gerados no algoritmo B&B, onde, através de uma análise de sensibilidade, foi possível fazer o algoritmo DSC reotimizar todos os subproblemas, a partir da solução do PL inicial ou do subproblema antecedente direto, se este ainda estiver disponível em memória, evitando resolver inteiramente todos os subproblemas. Esse fato pode ser observado nas Tabelas 9, 10 e 11, que apresentam as informações sobre o desempenho do programa desenvolvido.

Se for comparado o número de iterações do algoritmo PSC na resolução do problema de PL inicial, com o número médio de iterações do algoritmo DSC, verifica-se que há uma economia muito significativa na quantidade de processamento, visto que, sem a adoção da estratégia apresentada, seria necessário resolver inteiramente cada subproblema gerado pelo algoritmo B&B.

De modo a testar a eficiência da proposta para o sistema Sul-Brasileiro, usando o modelo LD, foi imposto um número máximo de 400 iterações do algoritmo DSC, mas, em nenhum dos subproblemas, foi alcançado esse limite, cuja média ficou entre 143 e 144 iterações em contraste com as 4567 iterações do algoritmo PSC, na resolução do PL inicial.

Através dos resultados apresentados, também é possível verificar o bom desempenho da estratégia usada para diminuir o número de adições de variáveis artificiais, que devem ser inseridas ao problema inicial, de tal forma, a construir uma solução básica factível (SBF) trivial para o algoritmo PSC. Consequentemente, com o número reduzido de variáveis artificiais, inseridas somente nas restrições necessárias, foi possível diminuir o número de iterações da fase I do algoritmo PSC de duas fases.

Outra contribuição desta pesquisa foi a implementação de todos os algoritmos em linguagem de programação de alto nível Fortran Moderno, resultando em um programa independente e autônomo, capaz de resolver problemas PLIM, sem a necessidade de chamar outras rotinas e *solvers* comerciais. O programa desenvolvido permite um controle maior das operações que são realizadas na resolução dos problemas, diferentemente do que se tem ao utilizar *solvers* comerciais, onde não se sabe ao certo quais procedimentos estão sendo tomados no processo

de resolução. Em futuros trabalhos também é possível usar módulos de PL implementados em conjunto com outras técnicas de solução, que necessitam resolver problemas de PL durante o processo iterativo.

Portanto, através dos resultados apresentados no planejamento dos sistemas de Garver, IEEE(a) e Sul-Brasileiro, pode-se concluir que esta pesquisa conseguiu alcançar o seu objetivo principal. Foi possível demonstrar a viabilidade e eficiência da proposta de melhoria do algoritmo B&B ao se utilizar o algoritmo DSC na reotimização dos subproblemas gerados na resolução de problemas PLIM.

5.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

- Implementar as melhorias básicas no algoritmo B&B padrão apresentadas na Subseção 2.3 e analisar o ganho de eficiência;
- Implementar as melhorias específicas do problema no algoritmo B&B, apresentadas na Subseção 2.3 e analisar o ganho de eficiência;
- Ampliar o modelo LD, para fazer o planejamento dos sistemas, considerando novas características como multiestágios, multicenários, restrições de segurança, etc. e adaptar o programa para resolver o problema resultante dessas novas modelagens;
- Empregar técnicas de processamento paralelo, para aproveitar de forma eficiente, os recursos computacionais com múltiplos núcleos e processadores, pois o único tipo de paralelização empregada no programa foi o que está intrínseco na linguagem onde é feita a divisão de operações matriciais para os diversos *threads* do processador.
- Empregar técnicas especializadas que trabalham com esparsidade de matrizes, de modo a melhorar a eficiência do *software*, pois, geralmente, os sistemas resultantes dos problemas resolvidos nesta pesquisa, apresentam características de esparsidade.

REFERÊNCIAS

- ASADA, E.; CARRENO, E.; ROMERO, R.; GARCIA, A. A branch-and-bound algorithm for the multi-stage transmission expansion planning. In: IEEE POWER ENGINEERING SOCIETY GENERAL MEETING, 2005, San Francisco. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2005. v. 1, p. 171–176. Citado na página 45.
- BAHIENSE, L.; OLIVEIRA, G. C.; PEREIRA, M.; GRANVILLE, S. A mixed integer disjunctive model for transmission network expansion. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 16, n. 3, p. 560–565, ago. 2001. ISSN 0885-8950. Citado na página 42.
- BAZARAA, S.; JARVIS, J.; SHERALI, H. *Linear programming and network flows*. 2. ed. New York: John Wiley and Sons, 1990. ISBN 0-471-63681-9. Citado 3 vezes nas páginas 68, 69 e 77.
- BENICHO, M.; GAUTHIER, J.; GIRODET, P.; HENTGES, G.; RIBIERE, G.; VINCENT, O. Experiments in mixed-integer linear programming. *Mathematical Programming*, Heidelberg, v. 1, n. 1, p. 76–94, dez. 1971. ISSN 0025-5610. Citado na página 59.
- BINATO, S. *Expansão ótima de sistemas de transmissão através de decomposição de benders e técnicas de planos cortantes*. 2000. 203 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) — Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- BINATO, S.; OLIVEIRA, G. de; ARAUJO, J. de. A greedy randomized adaptive search procedure for transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 16, n. 2, p. 247–253, maio 2001. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 48.
- CHOI, J.; TRAN, T.; EL-KEIB, A. A.; THOMAS, R.; OH, H.; BILLINTON, R. A method for transmission system expansion planning considering probabilistic reliability criteria. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 20, n. 3, p. 1606–1615, ago. 2005. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 45.
- ESCOBAR, A.; ROMERO, R.; GALLEGO, R. *Modelos usados en el planeamiento de la expansión a largo plazo de sistemas de transmisión de energía eléctrica*. Pereira (Colombia): Universidad Tecnológica de Pereira, 2010. 217 p. ISBN 978-958-722-077-3. Citado 7 vezes nas páginas 33, 52, 58, 60, 61, 110 e 111.
- ESCOBAR, A. H. Z. *Análise crítica de aspectos de modelagem matemática no planejamento da expansão a longo prazo de sistemas de transmissão*. 2008. 224 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008. Citado na página 37.
- FANG, R.; HILL, D. A new strategy for transmission expansion in competitive electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 18, n. 1, p. 374–380, fev. 2003. ISSN 0885-8950. Citado na página 35.
- FARIA, H. J.; BINATO, S.; RESENDE, M.; FALCAO, D. Power transmission network design by greedy randomized adaptive path relinking. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 20, n. 1, p. 43–49, fev. 2005. ISSN 0885-8950. Citado na página 48.

- GALLEGO, R. A.; ALVES, A. B.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Parallel simulated annealing applied to long term transmission network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 12, n. 1, p. 181–188, fev. 1997. ISSN 0885-8950. Citado na página 47.
- GALLEGO, R. A.; ESCOBAR, A.; ROMERO, R. *Optimización en sistemas eléctricos I: Programacion Lineal*. Pereira (Colombia): Universidad Tecnológica de Pereira, 2003. 394 p. ISBN 958-8065-67-4. Citado 5 vezes nas páginas 67, 68, 70, 77 e 80.
- GALLEGO, R. A.; ESCOBAR, A.; ROMERO, R. *Programación lineal entera*. Pereira (Colombia): Universidad Tecnológica de Pereira, 2007. 251 p. ISBN 978-958-8272-69-6. Citado 6 vezes nas páginas 45, 56, 58, 62, 68 e 69.
- GALLEGO, R. A.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Comparative studies of non-convex optimization methods for transmission network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 13, n. 3, p. 822–828, ago. 1998. ISSN 0885-8950. Citado na página 47.
- GALLEGO, R. A.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Transmission system expansion planning by extended genetic algorithm. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 145, n. 3, p. 329–335, maio 1998. ISSN 1350-2360. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 48.
- GALLEGO, R. A.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Tabu search algorithm for network synthesis. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 15, n. 2, p. 490–495, maio 2000. ISSN 0885-8950. Citado na página 48.
- GARCÉS, L. P.; GALLEGO, L. A.; ROMERO, R. Bounded dual simplex algorithm: Definition and structure. In: _____. *Handbook of Optimization: From Classical to Modern Approach*. [S.l.]: Springer, 2013. cap. 2, p. 29–50. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 90.
- GARFINKEL, R.; NEMHAUSER, G. *Integer programming*. New York: John Wiley and Sons, 1972. (Series in decision and control). ISBN 0-471-29195-1. Citado 3 vezes nas páginas 59, 60 e 68.
- GARVER, L. Transmission network estimation using linear programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, PAS-89, n. 7, p. 1688–1697, set. 1970. ISSN 0018-9510. Citado 3 vezes nas páginas 36, 46 e 51.
- GAUTHIER, J. M.; RIBIÈRE, G. Experiments in mixed-integer linear programming using pseudo-costs. *Mathematical Programming*, v. 12, n. 1, p. 26–47, dez. 1977. ISSN 1436-4646. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01593767>>. Citado na página 60.
- GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G. A. *Handbook of metaheuristics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 557 p. ISBN 1-4020-7263-5. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- GRANVILLE, S.; PEREIRA, M. V. F. *Analysis of the linearized power flow model in Benders decomposition*. Palo Alto: Stanford University, 1985. 182 p. EPRI-Report, Research Project 2473-6. Citado na página 44.
- GREEN, R. Competition in generation: the economic foundations. *Proceedings of the IEEE*, Piscataway, v. 88, n. 2, p. 128–139, fev. 2000. ISSN 0018-9219. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

HAFFNER, S.; MONTICELLI, A.; GARCIA, A.; MANTOVANI, J.; ROMERO, R. Branch and bound algorithm for transmission system expansion planning using a transportation model. *IEEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Piscataway, v. 147, n. 3, p. 149–156, maio 2000. ISSN 1350-2360. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

HAFFNER, S.; MONTICELLI, A.; GARCIA, A. V.; ROMERO, R. Specialized branch and bound algorithm for transmission network expansion planning. *IEEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Piscataway, v. 148, n. 5, p. 482–488, set. 2001. ISSN 1350-2360. Citado 3 vezes nas páginas 45, 61 e 121.

HASHIMOTO, S.; ROMERO, R.; MANTOVANI, J. Efficient linear programming algorithm for the transmission network expansion planning problem. *IEEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Piscataway, v. 150, n. 5, p. 536–542, set. 2003. ISSN 1350-2360. Citado na página 49.

ILOG. *CPLEX Optimization subroutine library guide and reference, version 11.0*. Incline Village: ILOG, 2008. Citado na página 121.

LAND, A. H.; DOIG, A. G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, Chichester, v. 28, n. 3, p. 497, jul. 1960. ISSN 00129682. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1910129?origin=crossref>>. Citado na página 53.

LATORRE, G.; CRUZ, R.; AREIZA, J.; VILLEGAS, A. Classification of publications and models on transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 18, n. 2, p. 938–946, maio 2003. ISSN 0885-8950. Citado 3 vezes nas páginas 34, 37 e 44.

LEE, C.; NG, S.; ZHONG, J.; WU, F. Transmission expansion planning from past to future. In: IEEE PES POWER SYSTEMS CONFERENCE AND EXPOSITION - PSCE, 2006, Atlanta. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2006. p. 257–265. Citado na página 37.

LEVI, V. A. A new mixed-integer methodology for optimal transmission expansion planning. *Electric Power Systems Research*, Lausanne, v. 32, n. 3, p. 227–238, mar. 1995. ISSN 0378-7796. Citado na página 45.

LINDEROTH, J.; SAVELSBERGH, M. A computational study of search strategies for mixed integer programming. *INFORMS Journal on Computing*, Catonsville, v. 11, p. 173–187, maio 1999. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

PEREIRA, M.; PINTO, L. Application of sensitivity analysis of load supplying capability to interactive transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, PAS-104, n. 2, p. 381–389, fev. 1985. ISSN 0018-9510. Citado na página 46.

PEREIRA, M. V. F. *Composite generation transmission expansion planning*. Palo Alto: EPRI, 1987. 102 p. Citado na página 44.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G.; CUNHA, S. H. F.; OLIVEIRA, G. A decomposition approach to automated generation/transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, PAS-104, n. 11, p. 3074–3083, nov. 1985. ISSN 0018-9510. Citado na página 44.

RIDER, M.; GARCIA, A.; ROMERO, R. Power system transmission network expansion planning using ac model. *IET Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 1, n. 5, p. 731–742, set. 2007. ISSN 1751-8687. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 46.

RIDER, M.; GARCIA, A.; ROMERO, R. Transmission system expansion planning by a branch-and-bound algorithm. *Generation, Transmission Distribution, IET*, v. 2, n. 1, p. 90–99, January 2008. ISSN 1751-8687. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 121.

RIDER, M. J.; GARCIA, A. V.; ROMERO, R. A constructive heuristic algorithm to short term transmission network expansion planning. In: IEEE POWER ENGINEERING SOCIETY GENERAL MEETING, 2004, Denver. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2004. p. 2107–2113. Citado na página 46.

ROMERO, R.; GALLEGOS, R. A.; MONTICELLI, A. Transmission system expansion planning by simulated annealing. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 364–369, fev. 1996. ISSN 0885-8950. Citado na página 47.

ROMERO, R.; MONTICELLI, A. A hierarchical decomposition approach for transmission network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 9, n. 1, p. 373–380, fev. 1994. ISSN 0885-8950. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 115.

ROMERO, R.; MONTICELLI, A. A zero-one implicit enumeration method for optimizing investments in transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 9, n. 3, p. 1385–1391, ago. 1994. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 117.

ROMERO, R.; ROCHA, C.; MANTOVANI, J.; SANCHEZ, I. Constructive heuristic algorithm for the DC model in network transmission expansion planning. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, v. 152, n. 2, p. 277–282, 2005. ISSN 13502360. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-gtd\20041>>. Citado na página 116.

ROMERO, R.; ROCHA, C.; MANTOVANI, M.; MANTOVANI, J. R. S. Analysis of heuristic algorithms for the transportation model in static and multistage planning in network expansion systems. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 150, n. 5, p. 521–526, set. 2003. ISSN 1350-2360. Citado na página 46.

ROMERO, R. A. *Planejamento a longo prazo da expansão de sistemas de transmissão de energia elétrica*. 1999. 138 f. Tese (Livres de docência) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.

SHIN, J. R.; PARK, Y. M. Optimal long-term transmission planning by expert system approach. In: IEEE REGION 10 CONFERENCE ON COMPUTER, COMMUNICATION, CONTROL AND POWER ENGINEERING - TENCON, 1993, Beijing. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 1993. v. 2, p. 713–717. Citado na página 45.

SILVA, E. F. *Planejamento estocástico da expansão da rede de transmissão de energia elétrica multiestágio considerando restrições de segurança*. 2013. 179 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 42.

SILVA, E. L. D.; AREIZA, J. M.; OLIVEIRA, G. C. D.; BINATO, S. Transmission network expansion planning under a tabu search approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 16, n. 1, p. 62–68, fev. 2001. ISSN 0885-8950. Citado na página 48.

- SILVA, E. L. D.; GIL, H. A.; AREIZA, J. M. Transmission network expansion planning under an improved genetic algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 15, n. 3, p. 1168–1174, ago. 2000. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 48.
- SILVA, I.; RIDER, M.; ROMERO, R.; MURARI, C. Transmission network expansion planning considering uncertainty in demand. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 21, n. 4, p. 1565–1573, nov. 2006. ISSN 0885-8950. Citado na página 35.
- SILVA, I. J.; RIDER, M. J.; R.; GARCIA, A. V.; MURARI, C. A. Transmission network expansion planning with security constraints. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 152, n. 6, p. 828–836, nov. 2005. ISSN 1350-2360. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 48.
- UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP: Faculdade de Engenharia. Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica - LaPSEE. *Transmission Expansion Planning Test Systems*. Ilha Solteira, 2015. Disponível em: <<<http://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pesquisas-e-projetos/lapsee/downloads/materiais-de-cursos1193/>>>. Acesso em: 14 nov. 2015. Citado 5 vezes nas páginas 149, 150, 151, 152 e 153.
- VILLASANA, R.; GARVER, L.; SALON, S. Transmission network planning using linear programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, PAS-104, n. 2, p. 349–356, fev. 1985. ISSN 0018-9510. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 46.

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DO EXEMPLO ILUSTRATIVO

Segue a resolução detalhada do exemplo ilustrativo apresentado na Seção 3.7 em que se deve realizar o planejamento da expansão do sistema de 3 barras com uma linha na topologia base representado pela Figura 1. De posse do problema P_0 , inicia-se o algoritmo *Branch and Bound* (B&B).

Passo 1 - Inicialização

A solução incumbente é escolhida $Z_{inc} = z^* = \infty$.

Agora deve ser resolvido o problema P_0 com variáveis canalizadas. Para isso, deve-se montar o quadro PSC inicial do problema P_0 .

$$A = \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \end{bmatrix}$$

$$x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_{N_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c'_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c'_{N_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c'_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_{N_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_{N_2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar o valor da função objetivo original e da função objetivo de Fase I no

quadro inicial, devem ser substituídos os valores dos limites das variáveis nas funções objetivos.

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & -1 \\ 0 & -40 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{x}_0 &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \bar{x}_0 &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 14 \\ \bar{z} &= x_{14} + x_{15} + x_{16} \\ \bar{z} &= 50 + 50 + 20 = 120 \\ \bar{c}'_{N_1} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{c}_{N_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{c}'_{N_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \bar{c}_{N_2} &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com as informações encontradas anteriormente, pode-se construir o quadro PSC de duas fases do problema P_0 mostrado na Tabela 15.

Tabela 15 – Quadro Primal Simples Canalizado Inicial de P_0

	RHS	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	
x_0	14	-3	-2	-2	0	0	0	0	L_0
z	120	0	0	0	0	-2	-2	1	$L_z - 2L_9$
x_8	0	-35	0	0	-1	0	0	0	L_1
x_9	140	-35	0	0	1	0	0	0	L_2
x_{10}	240	0	-40	0	0	-1	0	0	$L_3 - L_9$
x_{11}	0	0	-40	0	0	1	0	0	$L_4 + L_9$
x_{12}	0	0	0	-40	0	0	-1	0	L_5
x_{13}	160	0	0	-40	0	0	1	0	L_6
x_{14}	50	0	0	0	-1	-1	0	1	$L_7 - L_9$
x_{15}	50	0	0	0	1	0	-1	0	L_8
x_{16}	20	0	0	0	0	-1	-1	0	$-L_9$

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

No algoritmo PSC, a escolha da variável não básica que deve entrar na base é feita através da relação (107):

$$k \Rightarrow \max \left\{ y_{0j} : j \in R_1; \quad -y_{0j} : j \in R_2 \right\}. \quad (107)$$

Se a variável x_k , escolhida para entrar na base, está no LI, Δ_k é encontrado através da relação (108), e a atualização da coluna de RHS, após a pivotagem, é feita pela relação (109).

$$\Delta_k = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; \quad \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0; \quad (u_k - l_k); \quad \infty \right\}. \quad (108)$$

$$\begin{cases} x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k & i \neq r \\ x_{Br} = l_k + \Delta_k & \Leftarrow x_k \\ x_0 = \bar{x}_0 - y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (109)$$

Se a variável x_k , escolhida para entrar na base, está no LS, Δ_k é encontrado através da relação (110), e a atualização da coluna de RHS, após a pivotagem, é feita pela relação (111).

$$\Delta_k = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0; \frac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; (u_k - l_k); \infty \right\}. \quad (110)$$

$$\begin{cases} x_{Br} = u_k - \Delta_k & \Leftarrow x_k \\ x_{Bi} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k & i \neq r \\ x_0 = \bar{x}_0 + y_{0k}\Delta_k. \end{cases} \quad (111)$$

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_5 que está no seu LS para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (110).

$$\Delta_k = \min \left\{ \frac{240 - 0}{1}; \frac{\infty - 0}{1}; \frac{50 - 0}{1}; \frac{20 - 0}{1}; (120 - (-120)); \infty \right\} = 20$$

Como $\Delta_k = 20 \Rightarrow x_{16}$ deve sair da base e passar para seu LI. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (111). Os novos conjuntos são $R_1 = \{4, 6, 7\}$ e $R_2 = \{1, 2, 3\}$. Após a pivotagem do quadro inicial de P_0 e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	RHS	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_6$	$-x_7$	
x_0	14	-3	-2	-2	0	0	0	L_0
z	80	0	0	0	0	0	1	$L_z - L_7$
x_8	0	-35	0	0	-1	0	0	L_1
x_9	140	-35	0	0	1	0	0	L_2
x_{10}	220	0	-40	0	0	1	0	L_3
x_{11}	20	0	-40	0	0	-1	0	L_4
x_{12}	0	0	0	-40	0	-1	0	L_5
x_{13}	160	0	0	-40	0	1	0	L_6
x_{14}	30	0	0	0	-1	1	1	L_7
x_{15}	50	0	0	0	1	-1	0	L_8
x_5	100	0	0	0	0	1	0	L_9

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_7 que está no seu LI para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (108); dessa forma, $\Delta_k = 30 \Rightarrow x_{14}$ deve sair da base e passa para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{4, 6\}$ e $R_2 = \{1, 2, 3\}$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (109). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	<i>RHS</i>	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_6$	
x_0	14	-3	-2	-2	0	0	L_0
z	50	0	0	0	1	-1	$L_z - L_8$
x_8	0	-35	0	0	-1	0	$L_1 + L_8$
x_9	140	-35	0	0	1	0	$L_2 - L_8$
x_{10}	220	0	-40	0	0	1	L_3
x_{11}	20	0	-40	0	0	-1	L_4
x_{12}	0	0	0	-40	0	-1	L_5
x_{13}	160	0	0	-40	0	1	L_6
x_7	30	0	0	0	-1	1	$L_7 + L_8$
x_{15}	50	0	0	0	1	-1	L_8
x_5	100	0	0	0	0	1	L_9

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_4 que está no seu LI para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (108); assim, $\Delta_k = 50 \Rightarrow x_{15}$ deve sair da base e passa para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{6\}$ e $R_2 = \{1, 2, 3\}$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (109). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro seguinte, onde é verificado que a função objetivo de Fase I é igual a zero, terminando a Fase I do método PSC e iniciando a Fase II:

	<i>RHS</i>	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_6$	
x_0	14	-3	-2	-2	0	$L_0 - (3/35)L_1$
x_8	50	-35	0	0	-1	$L_1/(-35)$
x_9	90	-35	0	0	1	$L_2 - L_1$
x_{10}	220	0	-40	0	1	L_3
x_{11}	20	0	-40	0	-1	L_4
x_{12}	0	0	0	-40	-1	L_5
x_{13}	160	0	0	-40	1	L_6
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	-20	0	0	0	-1	L_8
x_5	100	0	0	0	1	L_9

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_1 que está no seu LS para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (110), resultando em $\Delta_k = \frac{10}{7} \Rightarrow x_8$ deve sair da base e passa para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{6, 8\}$ e $R_2 = \{2, 3\}$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (111). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	<i>RHS</i>	$-x_8$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_6$	
x_0	68/7	-3/35	-2	-2	3/35	$L_0 - (1/20)L_1$
x_1	4/7	-1/35	0	0	1/35	L_1
x_9	40	-1	0	0	2	L_2
x_{10}	220	0	-40	0	1	$L_3 - L_4$
x_{11}	20	0	-40	0	-1	$-L_4/40$
x_{12}	0	0	0	-40	-1	L_5
x_{13}	160	0	0	-40	1	L_6
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	-20	0	0	0	-1	L_8
x_5	100	0	0	0	1	L_9

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_2 que está no seu LS para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (110); assim, $\Delta_k = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{11}$ deve sair da base e passar para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{6, 8, 11\}$ e $R_2 = \{3\}$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (111). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	<i>RHS</i>	$-x_8$	$-x_{11}$	$-x_3$	$-x_6$	
x_0	61/7	-3/35	-1/20	-2	19/140	$L_0 - (1/20)L_5$
x_1	4/7	-1/35	0	0	1/35	L_1
x_9	40	-1	0	0	2	L_2
x_{10}	200	0	-1	0	2	$L_3 - L_4$
x_2	3/2	0	-1/40	0	1/40	L_4
x_{12}	0	0	0	-40	-1	$-L_5/40$
x_{13}	160	0	0	-40	1	$L_6 - L_5$
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	-20	0	0	0	-1	L_8
x_5	100	0	0	0	1	L_9

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_3 que está no seu LS para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (110); assim, $\Delta_k = 0 \Rightarrow x_{12}$ deve sair da base e passar para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{6, 8, 11, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (111). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	<i>RHS</i>	$-x_8$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_6$	
x_0	61/7	-3/35	-1/20	-1/20	13/70	$L_0 - (13/140)L_5$
x_1	4/7	-1/35	0	0	1/35	$L_1 - (1/70)L_2$
x_9	40	-1	0	0	2	$L_2/2$
x_{10}	200	0	-1	0	2	$L_3 - L_2$
x_2	3/2	0	-1/40	0	1/40	$L_4 - (1/80)L$
x_3	2	0	0	-1/40	1/40	$L_5 - (1/80)L_2$
x_{13}	160	0	0	-1	2	$L_6 - L_2$
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	-20	0	0	0	-1	$L_8 + (1/2)L_2$
x_5	100	0	0	0	1	$L_9 - (1/2)L_2$

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_6 que está no seu LI para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (108); portanto, $\Delta_k = 20 \Rightarrow x_9$ deve sair da base e passar para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{8, 9, 11, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (109). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	<i>RHS</i>	$-x_8$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_9$	
x_0	5	1/140	-1/20	-1/20	-13/140	$L_0 - (4/7)L_4$
x_1	0	-1/70	0	0	-1/70	$L_1 + (8/7)L_4$
x_6	-60	-1/2	0	0	1/2	$L_2 + 40L_4$
x_{10}	160	1	-1	0	-1	$L_3 - 80L_4$
x_2	1	1/80	-1/40	0	-1/80	$80L_4$
x_3	3/2	1/80	0	-1/40	-1/80	$L_5 - L_4$
x_{13}	120	1	0	-1	-1	$L_6 - 80L_4$
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	0	-1/2	0	0	1/2	$L_8 + 40L_4$
x_5	80	1/2	0	0	-1/2	$L_9 - 40L_4$

Através da relação (107), foi escolhida a variável não básica x_8 que está no seu LI para entrar na base. Para determinar Δ_k , foi usada a relação (108); dessa forma, $\Delta_k = 80 \Rightarrow x_2$ deve sair da base e passar para seu LI. Os novos conjuntos são $R_1 = \{2, 9, 11, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (109). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_0 mostrado na Tabela 16. Solução ótima encontrada: $x_0 = \frac{31}{7}$, $x_1 = \frac{8}{7}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 40$, $x_5 = 40$, $x_6 = -20$, $x_7 = 80$, $x_8 = 80$, $x_9 = 0$, $x_{10} = 80$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 40$.

Tabela 16 – Quadro ótimo de P_0

	<i>RHS</i>	$-x_2$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_9$
x_0	31/7	-4/7	-1/28	-1/20	-3/35
x_1	8/7	8/7	-1/35	0	-1/35
x_6	-20	40	-1	0	0
x_{10}	80	-80	1	0	0
x_8	80	80	-2	0	-1
x_3	1/2	-1	1/40	-1/40	0
x_{13}	40	-80	2	-1	0
x_7	80	0	0	0	0
x_4	40	40	-1	0	0
x_5	40	-40	1	0	0

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 2 - Escolha da variável para separação

A primeira variável, x_1 com valor corrente não inteiro é usada para realizar a separação do subproblema. Assim, P_0 é separado em dois novos subproblemas, P_1 e P_2 :

$$P_1 = \begin{cases} P_0 \\ x_1 \leq 1; \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} P_0 \\ x_1 \geq 2. \end{cases}$$

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

Através da regra LIFO, P_2 é escolhido para ser resolvido primeiramente. O subproblema P_2 será resolvido fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_0 através do algoritmo DSC.

$$P_2 = \begin{cases} P_0 & R_1 = \{2, 9, 11, 12\} \\ x_1 \geq 2 & R_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Seja o quadro ótimo de P_0 :

	RHS	$-x_2$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_9$	
x_0	31/7	-4/7	-1/28	-1/20	-3/35	$L_0 - (5/4)L$
x_1	8/7	8/7	-1/35	0	-1/35	$-35L_1$
x_6	-20	40	-1	0	0	$L_2 - 35L_1$
x_{10}	80	-80	1	0	0	$L_3 + 35L_1$
x_8	80	80	-2	0	-1	$L_4 - 70L_1$
x_3	1/2	-1	1/40	-1/40	0	$L_5 + (7/8)L$
x_{13}	40	-80	2	-1	0	$L_6 + 70L_1$
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	40	40	-1	0	0	$L_8 - 35L_1$
x_5	40	-40	1	0	0	$L_9 + 35L_1$

Por ter seu LI violado a variável básica x_1 deve sair da base. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (97); consequentemente, $x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}}\right) = \min \left\{ \frac{3/35}{1/35}, \frac{1/28}{1/35} \right\} = \frac{5}{4} \Rightarrow x_{11}$ deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{1, 2, 9, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (99). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	RHS	$-x_2$	$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_9$	
x_0	11/2	-2	-5/4	-1/20	-1/20	$L_0 - (1/40)L_6$
x_{11}	30	-40	-35	0	1	$L_1 + (1/2)L_6$
x_6	10	0	-35	0	1	$L_2 + (1/2)L_6$
x_{10}	50	-40	35	0	-1	$L_3 - (1/2)L_6$
x_8	140	0	-70	0	1	$L_4 + (1/2)L_6$
x_3	-1/4	0	7/8	-1/40	-1/40	$L_5 - (1/80)L_6$
x_{13}	-20	0	70	-1	-2	$-L_6/2$
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	70	0	-35	0	1	$L_8 + (1/2)L_6$
x_5	10	0	35	0	-1	$L_9 - (1/2)L_6$

Por ter seu LI mais violado a variável básica x_{13} deve sair da base. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (97); assim, $x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}}\right) = \min \left\{ \frac{1/20}{2}, \frac{1/20}{1} \right\} = \frac{1}{40} \Rightarrow x_9$ deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{1, 2, 12, 13\}$ e $R_2 = \emptyset$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (99). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_2 mostrado na Tabela 17. Solução ótima encontrada: $x_0 = 6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 60$, $x_5 = 20$, $x_6 = 0$, $x_7 = 80$, $x_8 = 130$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 60$, $x_{11} = 20$, $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 0$.

Tabela 17 – Quadro ótimo de P_2

	<i>RHS</i>	$-x_2$	$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_{13}$
x_0	6	-2	-3	$-1/40$	$-1/40$
x_{11}	20	-40	0	$-1/2$	$1/2$
x_6	0	0	0	$-1/2$	$1/2$
x_{10}	60	-40	0	$1/2$	$-1/2$
x_8	130	0	-35	$-1/2$	$1/2$
x_3	0	0	0	$-1/80$	$-1/80$
x_9	10	0	-35	$1/2$	$-1/2$
x_7	80	0	0	0	0
x_4	60	0	0	$-1/2$	$1/2$
x_5	20	0	0	$1/2$	$-1/2$

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Como a solução obtida de P_2 é inteira, é acionado o Teste 3 de sondagem; assim, o subproblema P_2 é sondado, e a incumbente, atualizada para $z^* = 6$.

Passo 5

O subproblema foi sondado, portanto, deve-se voltar ao passo 3.

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

O subproblema P_1 deve ser resolvido, fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_0 , através do algoritmo DSC.

$$P_1 = \begin{cases} P_0 & R_1 = \{2, 9, 11, 12\} \\ x_1 \leq 1 & R_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_0 , mostrado na Tabela 16, a variável básica x_1 deve sair da base, pois seu LS está sendo violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (98); consequentemente, $x_k = x_2$ (único candidato) deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{9, 11, 12\}$ e $R_2 = \{1\}$. Após a pivotagem do quadro ótimo de P_0 e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_1 mostrado na tabela (18). Solução ótima encontrada: $x_0 = \frac{9}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_3 = \frac{5}{8}$, $x_4 = 35$, $x_5 = 45$, $x_6 = -25$, $x_7 = 80$, $x_8 = 70$, $x_9 = 0$, $x_{10} = 90$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 50$.

Tabela 18 – Quadro ótimo de P_1

	<i>RHS</i>	$-x_1$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_9$
x_0	9/2	1/2	-1/20	-1/20	-1/10
x_2	1/8	7/8	-1/40	0	-1/40
x_6	-25	-35	0	0	1
x_{10}	90	70	-1	0	-2
x_8	70	-70	0	0	1
x_3	5/8	7/8	0	-1/40	-1/40
x_{13}	50	70	0	-1	-2
x_7	80	0	0	0	0
x_4	35	-35	0	0	1
x_5	45	35	0	0	-1

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Em P_1 , nenhum teste de sondagem é satisfeito.

Passo 5

O subproblema não foi sondado, e, portanto, deve-se voltar ao passo 2.

Passo 2 - Escolha da variável para separação

A primeira variável x_2 , com valor corrente não inteiro, é usada para realizar a separação do subproblema. Assim, P_1 é separado em dois novos subproblemas, P_3 e P_4 :

$$P_3 = \begin{cases} P_1 \\ x_2 \leq 0; \end{cases}$$

$$P_4 = \begin{cases} P_1 \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

Através da regra LIFO, P_4 é escolhido para ser resolvido primeiramente. O subproblema P_4 será resolvido fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_1 através do algoritmo DSC:

$$P_4 = \begin{cases} P_1 & R_1 = \{9, 11, 12\} \\ x_2 \geq 1 & R_2 = \{1\}. \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_1 , mostrado na Tabela 18, x_2 deve sair da base, pois seu LI está sendo violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada

através da relação (97); dessa forma, $x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}}\right) = \min \left\{ \frac{1/2}{7/8}, \frac{1/10}{1/40}, \frac{1/20}{1/40} \right\} = \frac{4}{7} \Rightarrow x_1$ deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{2, 9, 11, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. Após a pivotagem do quadro ótimo de P_1 e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_4 mostrado na tabela (19). Solução ótima encontrada: $x_0 = 5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = 80$, $x_6 = -60$, $x_7 = 80$, $x_8 = 0$, $x_9 = 0$, $x_{10} = 160$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 120$.

Tabela 19 – Quadro ótimo de P_4

	RHS	$-x_2$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_9$
x_0	5	$-4/7$	$-1/28$	$-1/20$	$-3/35$
x_1	0	$8/7$	$-1/35$	0	$-1/35$
x_6	-60	40	-1	0	0
x_{10}	160	-80	1	0	0
x_8	0	80	-2	0	-1
x_3	$3/2$	-1	$1/40$	$-1/40$	0
x_{13}	120	-80	2	-1	0
x_7	80	0	0	0	0
x_4	0	40	-1	0	0
x_5	80	-40	1	0	0

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Em P_4 , nenhum teste de sondagem é satisfeito.

Passo 5

O subproblema não foi sondado; assim, deve-se voltar ao passo 2.

Passo 2 - Escolha da variável para separação

A única variável com valor corrente não inteiro, x_3 , é usada para realizar a separação do subproblema. Assim, P_4 é separado em dois novos subproblemas, P_5 e P_6 :

$$P_5 = \begin{cases} P_4 \\ x_3 \leq 1; \end{cases}$$

$$P_6 = \begin{cases} P_4 \\ x_3 \geq 2. \end{cases}$$

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

Através da regra LIFO, P_6 é escolhido para ser resolvido primeiramente. O subproblema P_6 será resolvido fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_4 através do algoritmo DSC:

$$P_6 = \begin{cases} P_4 & R_1 = \{2, 9, 11, 12\} \\ x_3 \geq 2 & R_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_4 , mostrado na Tabela 19, x_3 deve sair da base, pois seu LI está sendo violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (97); assim, $x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}}\right) = \min \left\{ \frac{4/7}{1}; \frac{1/20}{1/40} \right\} = \frac{4}{7} \Rightarrow x_2$ deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{3, 9, 11, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. Após a pivotagem do quadro ótimo de P_4 e da atualização da coluna RHS, é obtido o seguinte quadro:

	RHS	$-x_3$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_9$	
x_0	37/7	-4/7	-1/20	-1/28	-3/35	$L_0 - (1/56)L$
x_1	-4/7	8/7	0	-1/35	-1/35	$L_1 - (1/70)L_4$
x_6	-80	40	0	-1	0	$L_2 - (1/2)L_4$
x_{10}	200	-80	-1	2	0	$L_3 + L_4$
x_8	-40	80	0	-2	-1	$-L_4/2$
x_2	3/2	-1	-1/40	1/40	0	$L_5 + (1/80)L_4$
x_{13}	160	-80	0	1	0	$L_6 + (1/2)L_4$
x_7	80	0	0	0	0	L_7
x_4	-20	40	0	-1	0	$L_8 - (1/2)L_4$
x_5	100	-40	0	1	0	$L_9 + (1/2)L_4$

A variável básica x_8 deve sair da base, pois seu LI está sendo o mais violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (97); dessa forma, $x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}}\right) = \min \left\{ \frac{3/35}{1}; \frac{1/28}{2} \right\} = \frac{1}{56} \Rightarrow x_{12}$ deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{3, 8, 9, 11\}$ e $R_2 = \emptyset$. A atualização da coluna RHS é feita pela relação (99). Após a pivotagem do quadro anterior e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_6 mostrado na Tabela 20. Solução ótima encontrada: $x_0 = 6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 80$, $x_6 = -60$, $x_7 = 80$, $x_8 = 0$, $x_9 = 0$, $x_{10} = 160$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 20$ e $x_{13} = 140$.

Tabela 20 – Quadro ótimo de P_6

	<i>RHS</i>	$-x_3$	$-x_{11}$	$-x_8$	$-x_9$
x_0	6	-2	$-1/20$	$-1/56$	$-19/280$
x_1	0	0	0	$-1/70$	$-1/70$
x_6	-60	0	0	$-1/2$	$1/2$
x_{10}	160	0	-1	1	-1
x_{12}	20	-40	0	$-1/2$	$1/2$
x_2	1	0	$-1/40$	$1/80$	$-1/80$
x_{13}	140	-40	0	$1/2$	$-1/2$
x_7	80	0	0	0	0
x_4	0	0	0	$-1/2$	$1/2$
x_5	80	0	0	$1/2$	$-1/2$

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Como a solução obtida de P_6 é inteira, então o Teste 3 de sondagem é acionado; assim, o subproblema P_6 é sondado, e a solução de P_6 apresenta o valor da função objetivo exatamente igual ao valor da incumbente corrente. Assim, existem duas soluções candidatas a soluções ótimas globais alternativas.

Passo 5

O subproblema foi sondado e como ainda existem subproblemas não sondados, deve-se voltar ao passo 3.

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

O subproblema P_5 deve ser resolvido fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_4 através do algoritmo DSC:

$$P_5 = \begin{cases} P_4 & R_1 = \{2, 9, 11, 12\} \\ x_3 \leq 1 & R_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_4 , mostrado na Tabela 19, x_3 deve sair da base, pois seu LS está sendo violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (98); consequentemente, $x_k = x_{11}$ (único candidato) deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{2, 9, 12\}$ e $R_2 = \{3\}$. Após a pivotagem do quadro ótimo de P_4 e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_5 mostrado na Tabela 21. Solução ótima encontrada: $x_0 = \frac{40}{7}$, $x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 20$, $x_5 = 60$, $x_6 = -40$, $x_7 = 80$, $x_8 = 40$, $x_9 = 0$, $x_{10} = 140$, $x_{11} = 20$, $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 80$.

Tabela 21 – Quadro ótimo de P_5

	<i>RHS</i>	$-x_2$	$-x_3$	$-x_{12}$	$-x_9$
x_0	40/7	-2	10/7	-3/35	-3/35
x_1	4/7	0	8/7	-1/35	-1/35
x_6	-40	0	40	-1	0
x_{10}	140	-40	-40	1	0
x_8	40	0	80	-2	-1
x_{11}	20	-40	40	-1	0
x_{13}	80	0	-80	1	0
x_7	80	0	0	0	0
x_4	20	0	40	-1	0
x_5	60	0	-40	1	0

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Em P_5 , nenhum teste de sondagem é satisfeito.

Passo 5

O subproblema não foi sondado; assim, deve-se voltar ao passo 2.

Passo 2 - Escolha da variável para separação

A única variável com valor corrente não inteiro, x_1 , é usada para realizar a separação do subproblema. Assim, P_5 é separado em dois novos subproblemas, P_7 e P_8 :

$$P_7 = \begin{cases} P_5 \\ x_1 \leq 0; \end{cases}$$

$$P_8 = \begin{cases} P_5 \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$$

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

Através da regra LIFO, P_8 é escolhido para ser resolvido primeiramente. O subproblema P_8 será resolvido fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_5 através do algoritmo DSC:

$$P_8 = \begin{cases} P_5 & R_1 = \{2, 9, 12\} \\ x_1 \geq 1 & R_2 = \{3\}. \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_5 , mostrado na tabela (21), x_1 deve sair da base, pois seu LI está sendo violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada

através da relação (97); assim, $x_k \Rightarrow \left(\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \right) = \min \left\{ \frac{10/7}{8/7}, \frac{3/35}{1/35} \right\} = \frac{5}{4} \Rightarrow x_3$ deve entrar na base. Os novos conjuntos são $R_1 = \{1, 2, 9, 12\}$ e $R_2 = \emptyset$. Após a pivotagem do quadro ótimo de P_5 e da atualização da coluna RHS, é obtido o quadro ótimo de P_8 mostrado na tabela (22). Solução ótima encontrada: $x_0 = \frac{25}{4}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{13}{8}$, $x_4 = 35$, $x_5 = 45$, $x_6 = -25$, $x_7 = 80$, $x_8 = 70$, $x_9 = 0$, $x_{10} = 125$, $x_{11} = 35$, $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 50$.

Tabela 22 – Quadro ótimo de P_8

	RHS	$-x_2$	$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_9$
x_0	25/4	-2	-5/4	-1/20	-1/20
x_3	13/8	0	7/8	-1/40	-1/40
x_6	-25	0	-35	0	1
x_{10}	125	-40	35	0	-1
x_8	70	0	-70	0	1
x_{11}	35	-40	-35	0	1
x_{13}	50	0	70	-1	-2
x_7	80	0	0	0	0
x_4	35	0	-35	0	1
x_5	45	0	35	0	-1

Fonte – Dados da pesquisa do autor.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Em P_8 , é acionado o Teste 1, pois $x_0 = \frac{25}{4} = 6,25 > z^* = 6$. Assim, o subproblema P_8 é sondado.

Passo 5

Como o subproblema foi sondado e ainda existem subproblemas não sondados, deve-se voltar ao passo 3.

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

Pela regra LIFO o subproblemas P_7 deve ser resolvido, fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_5 , através do algoritmo DSC:

$$P_7 = \begin{cases} P_5 & R_1 = \{2, 9, 12\} \\ x_1 \leq 0 & R_2 = \{3\}. \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_5 , mostrado na Tabela 21, x_1 deve sair da base, pois seu LS está sendo violado. A escolha da variável não básica que deve entrar na base x_k , é encontrada através da relação (98), mas não existe candidato para entrar na base, portanto, o subproblema P_7 é infactível.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Em P_7 , é acionado o Teste 2, pois é infactível, portanto o subproblema P_7 é sondado.

Passo 5

Como o subproblema foi sondado e ainda existem subproblemas não sondados, deve-se voltar ao passo 3.

Passo 3 - Resolução do subproblema escolhido

O subproblema P_3 deve ser resolvido, fazendo a reotimização do quadro ótimo de P_1 , através do algoritmo DSC.

$$P_3 = \begin{cases} P_1 & R_1 = \{9, 11, 12\} \\ x_2 \leq 0 & R_2 = \{1\} \end{cases}$$

Através do quadro ótimo de P_1 , mostrado na Tabela 18, x_2 deve sair da base, pois seu LS está sendo violado. A escolha da variável não básica x_k , que deve entrar na base, é encontrada através da relação (98), mas não existe candidato para entrar na base, portanto, o problema P_3 é infactível.

Passo 4 - Testes de Sondagem

Em P_3 , é acionado o Teste 2, pois é infactível, portanto, o subproblema P_3 é sondado.

Passo 5

Como o subproblema foi sondado e não existem subproblemas que devem ser analisados, então é finalizado o algoritmo B&B.

As soluções para esse exemplo ilustrativo são apresentadas nas Figuras 18 e 19 apresentadas na Seção 3.7. A árvore B&B resultante da sua solução também é apresentada na Seção 3.7 pela Figura 20.

ANEXO A – DADOS DOS SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

Neste anexo, são apresentados todos os dados dos sistemas testes usados no trabalho: Garver de 6 barras e 15 caminhos, IEEE(a) de 24 barras e 41 caminhos e Sul-Brasileiro de 46 barras e 79 caminhos. Para cada sistema, são apresentadas duas tabelas: a primeira, com número de barras, geração e demanda, e a segunda, com os caminhos ou corredores, linhas existentes, fluxo máximo e custo. Esses dados estão disponíveis em UNESP (2015).

Tabela 23 – Dados das barras do sistema de Garver

Barra	Geração (MW)	Demanda (MW)
1	150	80
2	0	240
3	360	40
4	0	160
5	0	240
6	600	0

Fonte – UNESP (2015)

Tabela 24 – Dados dos caminhos do sistema de Garver

Caminho	Linhas Existentes	Reatância	Máximo Fluxo de Potência Ativa (MW)	Custo (Milhões US\$)
1-2	1	0,40	100	40
1-3	0	0,38	100	38
1-4	1	0,60	80	60
1-5	1	0,20	100	20
1-6	0	0,68	70	68
2-3	1	0,20	100	20
2-4	1	0,40	100	40
2-5	0	0,31	100	31
2-6	0	0,30	100	30
3-4	0	0,59	82	59
3-5	1	0,20	100	20
3-6	0	0,48	100	48
4-5	0	0,63	75	63
4-6	0	0,30	100	30
5-6	0	0,61	78	61

Fonte – UNESP (2015)

Tabela 25 – Dados das barras do sistema IEEE(a)
(continua)

Barra	Geração (MW)	Demanda (MW)
1	576	324
2	576	291
3	0	540
4	0	222
5	0	213
6	0	408
7	900	375
8	0	513
9	0	525
10	0	585

Tabela 25 – Dados das barras do sistema IEEE(a)
(conclusão)

Barra	Geração (MW)	Demanda (MW)
11	0	0
12	0	0
13	1773	795
14	0	582
15	645	951
16	465	300
17	0	0
18	1200	999
19	0	543
20	0	384
21	1200	0
22	900	0
23	1980	0
24	0	0

Fonte – UNESP (2015)

Tabela 26 – Dados dos caminhos do sistema IEEE(a)

Caminho	Linhas Existentes	Reatância	Máximo Fluxo de Potência Ativa (MW)	(continua) Custo (Milhões US\$)
1-2	1	0,0139	175	3
1-3	1	0,2112	175	55
1-5	1	0,0845	175	22
2-4	1	0,1267	175	33
2-6	1	0,1920	175	50
3-9	1	0,1190	175	31
3-24	1	0,0839	400	50
4-9	1	0,1037	175	27
5-10	1	0,0883	175	23
6-10	1	0,0605	175	16
7-8	1	0,0614	175	16
8-9	1	0,1651	175	43
8-10	1	0,1651	175	43
9-11	1	0,0839	400	50
9-12	1	0,0839	400	50
10-11	1	0,0839	400	50
10-12	1	0,0839	400	50
11-13	1	0,0476	500	66
11-14	1	0,0418	500	58
12-13	1	0,0476	500	66
12-23	1	0,0966	500	134
14-16	1	0,0865	500	54
15-16	1	0,0389	500	24
15-21	2	0,0173	500	68
15-24	1	0,0490	500	72
16-17	1	0,0519	500	36
16-19	1	0,0259	500	32
17-18	1	0,0231	500	20
17-22	1	0,0144	500	146
18-21	2	0,1053	500	36
19-20	2	0,0259	500	55
20-23	2	0,0396	500	30
21-22	1	0,0216	500	94
1-8	0	0,0678	500	35

Tabela 26 – Dados dos caminhos do sistema IEEE(a)

(conclusão)

Caminho	Linhas Existentes	Reatância	Máximo Fluxo de Potência Ativa (MW)	Custo (Milhões US\$)
2-8	0	0,1344	500	33
6-7	0	0,1267	500	50
13-14	0	0,0447	500	62
14-23	0	0,0620	500	86
16-23	0	0,0822	500	114
19-23	0	0,0606	500	84

Fonte – UNESP (2015)

Tabela 27 – Dados das barras do sistema Sul-Brasileiro
(continua)

Barra	Geração (MW)	Demanda (MW)
1	0	0
2	0	443,1
3	0	0
4	0	300,7
5	0	238
6	0	0
7	0	0
8	0	72,2
9	0	0
10	0	0
11	0	0
12	0	511,9
13	0	185,8
14	1257	0
15	0	0
16	2000	0
17	1050	0
18	0	0
19	1670	0
20	0	1091,2
21	0	0
22	0	81,9
23	0	458,1
24	0	478,2
25	0	0
26	0	231,9
27	220	0
28	800	0
29	0	0
30	0	0
31	700	0
32	500	0
33	0	229,1
34	748	0
35	0	216
36	0	90,1
37	300	0
38	0	216
39	600	0
40	0	262
41	0	0
42	0	1607,9

Tabela 27 – Dados das barras do sistema Sul-Brasileiro
(conclusão)

Barra	Geração (MW)	Demanda (MW)
43	0	0
44	0	79,1
45	0	86,7
46	700	0

Fonte – UNESP (2015)

Tabela 28 – Dados dos caminhos do sistema Sul-Brasileiro
(continua)

Caminho	Linhas Existentes	Reatância	Máximo Fluxo de Potência Ativa (MW)	Custo (US\$)
1-7	1	0,0616	270	4349
1-2	2	0,1065	270	7076
4-9	1	0,0924	270	6217
5-9	1	0,1173	270	7732
5-8	1	0,1132	270	7480
7-8	1	0,1023	270	6823
4-5	2	0,0566	270	4046
2-5	2	0,0324	270	2581
8-13	1	0,1348	240	8793
9-14	2	0,1756	220	11267
12-14	2	0,0740	270	5106
14-18	2	0,1514	240	9803
13-18	1	0,1805	220	11570
13-20	1	0,1073	270	7126
18-20	1	0,1997	200	12732
19-21	1	0,0278	1500	32632
16-17	1	0,0078	2000	10505
17-19	1	0,0061	2000	8715
14-26	1	0,1614	220	10409
14-22	1	0,0840	270	5712
22-26	1	0,0790	270	5409
20-23	2	0,0932	270	6268
23-24	2	0,0774	270	5308
26-27	2	0,0832	270	5662
24-34	1	0,1647	220	10611
24-33	1	0,1448	240	9399
33-34	1	0,1265	270	8288
27-36	1	0,0915	270	6167
27-38	2	0,2080	200	13237
36-37	1	0,1057	270	7025
34-35	2	0,0491	270	3591
35-38	1	0,1980	200	12631
37-39	1	0,0283	270	2329
37-40	1	0,1281	270	8389
37-42	1	0,2105	200	13388
39-42	3	0,2030	200	12934
40-42	1	0,0932	270	6268
38-42	3	0,0907	270	6116
32-43	1	0,0309	1400	35957
42-44	1	0,1206	270	7934
44-45	1	0,1864	200	11924
19-32	1	0,0195	1800	23423
46-19	1	0,0222	1800	26365
46-16	1	0,0203	1800	24319

Tabela 28 – Dados dos caminhos do sistema Sul-Brasileiro
(conclusão)

Caminho	Linhas Existentes	Reatância	Máximo Fluxo de Potência Ativa (MW)	Custo (US\$)
18-19	1	0,0125	600	8178
20-21	1	0,0125	600	8178
42-43	1	0,0125	600	8178
2-4	0	0,0882	270	5965
14-15	0	0,0374	270	2884
46-10	0	0,0081	2000	10889
4-11	0	0,2246	240	14247
5-11	0	0,0915	270	6167
46-6	0	0,0128	2000	16005
46-3	0	0,0203	1800	24319
16-28	0	0,0222	1800	26365
16-32	0	0,0311	1400	36213
17-32	0	0,0232	1700	27516
19-25	0	0,0325	1400	37748
21-25	0	0,0174	2000	21121
25-32	0	0,0319	1400	37109
31-32	0	0,0046	2000	7052
28-31	0	0,0053	2000	7819
28-30	0	0,0058	2000	8331
27-29	0	0,0998	270	6672
26-29	0	0,0541	270	3894
28-41	0	0,0339	1300	39283
28-43	0	0,0406	1200	46701
31-41	0	0,0278	1500	32632
32-41	0	0,0309	1400	35957
41-43	0	0,0139	2000	17284
40-45	0	0,2205	180	13994
15-16	0	0,0125	600	8178
46-11	0	0,0125	600	8178
24-25	0	0,0125	600	8178
29-30	0	0,0125	600	8178
40-41	0	0,0125	600	8178
2-3	0	0,0125	600	8178
5-6	0	0,0125	600	8178
9-10	0	0,0125	600	8178

Fonte – UNESP (2015)