

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.006/2026

Quantização simplética da eletrodinâmica escalar topologicamente massiva

Rafael Gonçalves Almeida Ottoni

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Setembro de 2026

Ottoni, Rafael Gonçalves Almeida
O918q Quantização simplética da eletrodinâmica escalar topologicamente massiva / Rafael Gonçalves Almeida Ottoni. – São Paulo, 2026
166 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar

1. Geometria simplética. 2. Campos de calibre (Física). 3. Teoria quântica de campos. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

QUANTIZAÇÃO SIMPLÉTICA DA ELETRODINÂMICA ESCALAR TOPOLOGICAMENTE MASSIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título Mestre em Ciências, área: Física.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR (Orientador)
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. RICARDO D'ELIA MATHEUS
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA
Universidade do Estado de Santa Catarina

Conceito: Aprovado

São Paulo, 11 de setembro de 2026.

Dedicado aos meus pais, Vera Lúcia e José Eloy.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Júlia, meu amor, por fazer meus dias mais felizes e sempre me apoiar nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus pais, José Eloy e Vera Lúcia, por me incentivarem desde a infância e me apresentarem a beleza do universo. Em conjunto a eles, agradeço à minha "boa"drasta Amanda e aos meus irmãos, Cecília, César e Samuel, pelo carinho a mim muito dedicado.

Agradeço aos meus grandes amigos que fiz em São Paulo, especialmente ao Guilherme, Kaynan, Fernando e Edu. Sem todos eles e sem as noites de RPG minha vida em São Paulo teria sido muito mais cinza.

Agradeço a todos os membros do Bonde pela vida de amizade, em especial ao membros do Trio Ternura e ao Agregado (e os membros do Trio Tormenta também).

Agradeço ao professor Mario Bertin pela grande ajuda ao estudar conceitos complexos que eu não poderia ter entendido sozinho.

Agradeço ao professor Pimentel pela orientação, pela gentileza e por muito ter me ensinado ao longo dos últimos dois anos.

Finalmente, agradeço enormemente à UNESP e ao IFT pela excelente estrutura que permitiu a criação desta dissertação, e também ao CNPq e à CAPES pelos financiamentos parciais que garantiram minha bolsa integral durante toda a pesquisa.

"Quando submetemos a natureza à análise pensante, o que nos salta à vista, em primeiro lugar, é a imagem de um entrelaçamento infinito de interconexões e interações, no qual nada permanece o que e como era nem onde estava, mas tudo se move, se modifica, devém e fenece."

Friedrich Engels

Resumo

Este trabalho se dedica a estudar aspectos da teoria de Chern-Simons abeliana, sua relação com o campo eletromagnético e os problemas no processo de quantização devido à simetria de gauge, que produz degenerescências nas suas soluções clássicas. O procedimento para lidar com os problemas advindos da singularidade do sistema será a chamada *quantização simplética*, que faz uso do algoritmo de Faddeev-Jackiw, com a contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek. Esta estratégia garante a determinação correta dos parênteses de Poisson, assim como a medida de integração funcional que permite sua quantização por integral de trajetória.

As ferramentas necessárias para se realizar a análise clássica e quântica da teoria serão desenvolvidas nos primeiros capítulos, passando pelas estruturas geométricas do espaço de fase, a geometria diferencial funcional na teoria clássica campos e a quantização funcional, sempre utilizando exemplos para demonstrar as aplicações dessas construções. O último capítulo, enfim, se dedica a estudar o campo eletromagnético (2+1)-dimensional com um termo de Chern-Simons, o que nos permite encontrar seu propagador livre e identificar um polo que representa uma excitação massiva. Em seguida, acopla-se um campo escalar complexo para analisar a interação do campo de gauge com a matéria e são deduzidas as equações de Schwinger-Dyson para os propagadores e vértices completos. A simetria de gauge quântica também é estudada por meio das identidades de Ward-Takahashi.

Palavras Chaves: Geometria simplética; Sistemas vinculados; Teorias de gauge; Teorias topológicas; Formas de Chern-Simons.

Áreas do conhecimento: Física; Mecânica clássica; Teoria clássica de campos; Teoria quântica de campos.

Abstract

This work investigates aspects of abelian Chern-Simons theory, its relation to the electromagnetic field and the difficulties in quantization arising from gauge symmetry, which leads to degeneracies in the classical solutions. The approach adopted to address the quantization issues arising from the singular nature of the system is *symplectic quantization*, based on the Faddeev-Jackiw algorithm, with the contributions of Barcelos-Neto and Wotzasek. This method provides the correct Poisson brackets for the system, as well as the functional integration measure required for its path integral quantization.

The theoretical tools required for the classical and quantum analysis of the theory are developed in the first chapters, covering the geometric structures of phase space, functional differential geometry in classical field theory and functional quantization, with illustrative examples throughout. The final chapter is devoted to the study of the (2+1)-dimensional electromagnetic field with a Chern-Simons term, which allows us to derive its free propagator and identify a pole corresponding to a massive excitation. We then couple the topologically massive electromagnetic field to a complex scalar field to investigate the interaction between the gauge field and matter and derive the Schwinger-Dyson equations for the full propagators and vertices. The quantum gauge symmetry is analyzed through the Ward-Takahashi identities as well.

Keywords: Symplectic geometry; Constrained systems; Gauge theories; Topological theories; Chern-Simons forms.

Knowledge areas: Physics; Classical mechanics; Classical field theory; Quantum field theory.

Índice

0.1 Introdução 1
Referências 2

1 Mecânica clássica geométrica **5**
1.1 Sistemas regulares 7
1.1.1 Formalismo lagrangiano 7
1.1.2 Geometria simplética 12
1.2 Sistemas singulares 23
1.2.1 Geometria pré-simplética 23
1.2.2 O método de Faddeev-Jackiw 30
Referências 44

2 Teoria clássica de campos **46**
2.1 Sistemas regulares 47
2.1.1 Geometria simplética funcional 50
2.2 Sistemas singulares 54
2.2.1 Faddeev-Jackiw na teoria de campos 55
Referências 62

3 Teoria quântica de campos **64**
3.1 Sistemas regulares 65
3.1.1 Quantização funcional 68
3.2 Sistemas singulares 78
3.2.1 A estratégia de quantização simplética 79
Referências 84

4 Eletrodinâmica escalar topologicamente massiva **87**
4.1 Termos topológicos 87
4.2 Campo eletromagnético topologicamente massivo 90
4.2.1 Quantização funcional 95
4.3 Eletrodinâmica escalar 105
4.3.1 Funcional gerador 112
4.3.2 Funções de correlação conexas e ação efetiva 116

4.3.3 Equações de Schwinger-Dyson . . . 118
4.3.4 Identidades de Ward-Takahashi . . . 128
Referências . . . 135

5 Conclusões e perspectivas **138**

A Variedades diferenciáveis **140**
A.1 Definição . . . 140
A.2 Espaços tangentes e cotangentes . . . 142
A.3 Campos tensoriais . . . 144
A.3.1 Fluxos e curvas integrais . . . 145
A.3.2 Derivada de Lie . . . 147
Referências . . . 150

B Formas diferenciais **152**
B.1 Cálculo exterior . . . 152
B.1.1 Características intrínsecas . . . 156
B.2 Operador dual de Hodge . . . 159
B.3 Eletromagnetismo e formas diferenciais . . . 162
B.3.1 Teoria de Chern-Simons . . . 164
Referências . . . 166

0.1 Introdução

Desde os tempos de Sir. Isaac Newton a geometria tem sido uma das mais importantes ferramentas matemáticas para a construção de nossas teorias físicas. Recentemente, inclusive, existem debates acerca da chamada "geometrização da física" [1], que relata uma crescente tendência à aplicação de teorias geométricas na construção de nosso modelos. Tendo isso em mente, este trabalho se aproveita de diversas ferramentas da geometria diferencial e da topologia com o objetivo último de estudar o procedimento a partir do qual o campo eletromagnético em um espaço-tempo $(2+1)$-dimensional adquire quanticamente uma massa de caráter topológico e as suas consequências. Estas ferramentas serão apresentadas a cada capítulo em uma construção progressiva, acompanhada de apêndices contendo as definições matemáticas pertinentes para o leitor não familiarizado com os tópicos mencionados.

O objetivo do primeiro capítulo será descrever a *estrutura simplética* de sistemas clássicos compostos de partículas pontuais, que consiste nas ferramentas geométricas das quais está munido o espaço de fase. É importante ressaltar que o fato do campo eletromagnético ser um sistema com liberdade de calibre (ou de *gauge*) traz consequências drásticas à geometria desse espaço. Para analisar essas diferenças será dedicada grande atenção à diferenciação dos chamados sistemas *regulares* e dos sistemas *singulares* ou *vinculados* (este último sendo o grupo no qual se encontram as teorias de gauge). As principais referências para esse capítulo são [2, 3, 4], mas diversos resultados serão extraídos de outras referências, como [5, 6, 7, 8]. Esse capítulo também apresenta e exemplifica o procedimento de Faddeev-Jackiw [9, 10] para lidar com sistemas singulares a partir das contribuições de Barcelos-Neto e Wotzasek [11, 12], sendo este algoritmo o primeiro passo do que denominaremos *quantização simplética* nos capítulos posteriores.

Essa construção será naturalmente generalizada para sistemas com infinitos graus de liberdade (ou *campos*) no capítulo seguinte. Apesar de não haver uma preocupação matemática tão grande com o rigor da generalização, as principais diferenças serão apontadas, bem como as referências que se aprofundam nos fundamentos matemáticos. O capítulo em questão assume uma familiaridade com a teoria clássica de campos relativísticos, mas apresenta todos os conceitos necessários, além de introduzir ferramentas da *geometria diferencial de variedades infinitas*. As principais referências desse segmento serão [3, 8, 13] e a menção é frequente de trabalhos sobre a geometria simplética de variedades infinitas

(também conhecida como *geometria multisimplética* ou *geometria k-simplética*), como, por exemplo, [14, 15, 16, 17].

O terceiro capítulo tratará da teoria quântica de campos. Novamente, uma familiaridade com o tópico é assumida, apesar de serem apresentados todos os conceitos essenciais para este trabalho. O foco será a aplicação no processo de quantização dos conceitos de geometria simplética trabalhados anteriormente, seguindo a construção de quantização funcional das referências [18, 19]. Por fim, a estratégia de quantização simplética será apresentada, baseada nas referências [18, 20], e, em seguida, aplicada ao campo eletromagnético livre para encontrar seu funcional gerador.

Finalmente, o último capítulo reúne todo o conhecimento construído nos capítulos anteriores para analisar os termos topológicos (ou *termos de Chern-Simons*) abelianos e sua interação com o campo eletromagnético. Será estudada a estrutura simplética clássica do sistema e realizado o processo de Faddeev-Jackiw, tanto para o campo eletromagnético topologicamente massivo livre quanto acoplado a um campo escalar complexo. Após a realização do procedimento de quantização simplética, a estrutura quântica será analisada através de métodos não perturbativos, de forma a entender a geração de massa topológica, deduzir as equações de Schwinger-Dyson para os propagadores e vértices completos e estudar as simetrias quânticas através das identidades de Ward-Takahashi. A estrutura topológica de termos de Chern-Simons apresentada aqui se baseia nas referências [21, 22], mas diversas referências serão apontadas ao longo do texto, tanto para seu aprofundamento do ponto de vista matemático quanto físico.

Referências

[1] H. A. Gomes. *Gauge Theory and the Geometrization of Physics*. Cambridge University Press, 2025.

[2] J. José and E. Saletan. *Classical dynamics - A contemporary approach*. Cambridge University Press, 1998.

[3] L. G. C. Mendoza. Estrutura simplética em sistemas singulares à la Faddeev-Jackiw. Master's thesis, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2020.

[4] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1994.

[5] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[6] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Texts in applied mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[7] P. Libermann and C. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and Its Applications. D. Reidel Publishing Company, 2012.

[8] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. *An Introduction to Geometrical Physics, Second Edition*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2017.

[9] L. Faddeev and R. Jackiw. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Physical Review Letters*, 60(17):1692–1694, 1988.

[10] R. Jackiw. (Constrained) Quantization Without Tears. 1993.

[11] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw quantization and constraints. *International Journal of Modern Physics*, 7(20):4981–5003, 1992.

[12] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Symplectic quantization of constrained systems. *Modern Physics Letters A*, 7(19):1737–1747, 1992.

[13] R. Aldrovandi and R. A. Kraenkel. On exterior variational calculus. *J.Phys.A 21*, pages 1329–1339, 1987.

[14] X. Gràcia, J. de Lucas, X. Rivas, and N. Román-Roy. On Darboux theorems for geometric structures induced by closed forms. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, pages 118 – 131, 2024.

[15] M. de León, M. Salgado, and S. Vilariño. *Methods of Differential Geometry in Classical Field Theories: k-Symplectic and k-Cosymplectic Approaches*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016.

[16] J. Kijowski. A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory. *Commun. Math. Phys. 30*, pages 99 – 128, 1973.

[17] J. Kijowsky and W. M. Tulczyjew. *A Symplectic Framework for Field Theories*. Springer-Verlag, 1979.

[18] L. G. C. Mendoza. *Da teoria clássica à quântica de campos através da abordagem de Faddeev-Jackiw*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2024.

[19] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro. *Effective Action in Quantum Gravity*. IOP Publishing Ltd., 1992.

[20] M. C. Bertin and B. M. Pimentel. Symplectic quantization of the BF gravity in 1+1 dimensions. *International Journal of Modern Physics A*, 40(24), 2025.

[21] R. Jackiw. S. S. Chern and Chern-Simons terms. *Differential Geometry and Physics*, pages 53–62, 2006.

[22] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics 140*, pages 372–411, 1982.

Capítulo 1

Mecânica clássica geométrica

A dinâmica de um sistema clássico de partículas tem diversas possíveis descrições, cada uma com suas vantagens e desvantagens. Neste trabalho nos debruçaremos sobre um ponto de vista específico, que é a descrição *geométrica* da mecânica clássica, mais especificamente, a *geometria simplética*, que é a estrutura geométrica do *espaço de fase*, onde é baseado o formalismo hamiltoniano.

O leitor pode se perguntar, no entanto, o porquê de se utilizar a geometria para descrever um sistema de partículas clássicas. De fato, para compreender o presente capítulo é necessário ter familiaridade com conceitos da geometria diferencial, como *variedades diferenciáveis*, *campos tensoriais*, *formas diferenciais*, *derivadas de Lie*, entre outros.[1] Pode parecer um excesso de conceitos matemáticos que somente colocam dificuldades extras em algo que à primeira vista é simples, mas o objetivo desta pequena introdução é mostrar que este não é o caso. Muito pelo contrário, a geometria diferencial deveria ser a forma **mais natural** de se examinar um sistema clássico. Vejamos o porquê.

Considere o caso de uma partícula pontual se movendo sobre o espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$. Para descrevermos sua configuração espacial, que chamamos de $\mathbf{q}$, precisamos assimilar ao nosso espaço um *sistema de coordenadas* (por exemplo, o sistema de coordenadas cartesiano), a partir do qual fazemos uma representação de sua configuração $\mathbf{q}$ (neste exemplo, por meio de uma tripla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$). Em outra situação, no entanto, podemos preferir descrever nosso sistema por meio de outro sistema de coordenadas (por exemplo, um sistema esférico), e a mesma configuração $\mathbf{q}$ será representada por um conjunto de outros três números diferentes (neste exemplo, a tripla $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3$). Estas duas representações coordenadas são mapas que levam nossa configuração $\mathbf{q}$ a diferentes pontos do espaço $\mathbb{R}^3$.

[1] Para o leitor não familiarizado com esses conceitos, no entanto, o apêndice A apresenta as principais definições e fornece alguma intuição a respeito da teoria de variedades diferenciáveis. O apêndice B constrói em cima dessas definições para introduzir a teoria de formas diferenciais.

Dizemos que o ponto $\mathbf{q}$, portanto, vive no chamado **espaço de configurações**, representado por $\mathbb{Q}$, e esse espaço deve poder ser mapeado, em todos os seus pontos, a um espaço euclidiano de mesma dimensão.[2] Podemos fazer esse mapa de diferentes formas, que resultam diferentes sistemas coordenados, mas já que todas mapeiam a mesma configuração, deve haver também mapas que relacionam um sistema coordenado a outro (nos exemplos do último parágrafo, o mapa de transição entre os sistemas coordenados é $(x, y, z) \mapsto (r, \phi, \theta)$, com $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ e $z = r\cos\theta$).

Além disso, como queremos estudar a *dinâmica*, precisamos levar em conta não só as posições mas também as *velocidades* de nossa partícula. Ou seja, a cada ponto $\mathbf{q}$ está associado também um vetor $\dot{\mathbf{q}}$. Se levarmos em conta todas as *possíveis* velocidades de uma partícula em cada ponto, veremos que o espaço de configurações espaciais dessa partícula tem um **espaço vetorial associado a cada um de seus pontos**, sendo cada vetor desse espaço aquele vetor tangente associado a uma das possíveis curvas descrevendo o movimento dessa partícula[3]. É por isso que denominamos este o **espaço tangente** ao ponto $\mathbf{q}$ de $\mathbb{Q}$, representado por $T_{\mathbf{q}}\mathbb{Q}$.

A construção feita acima nos dá algumas das principais definições de uma **variedade diferenciável**, que meramente formaliza matematicamente os conceitos de sistemas coordenados e transformações de coordenadas em superfícies n-dimensionais por meio de um ponto de vista *intrínseco* (ou seja, sem considerar que essa superfície está mergulhada em um espaço euclidiano maior), mas de "brinde" resulta em uma gama de novas estruturas matemáticas que permitem uma análise consideravelmente mais profunda, da qual daremos uma pequena demonstração. Antes de começar essa análise, no entanto, faremos um breve comentário a respeito da regularidade de sistemas clássicos.

[2] No exemplo específico de uma partícula livre em um espaço tridimensional, temos que seu espaço de configurações é $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ e seu espaço euclidiano associado também é, portanto, $\mathbb{R}^3$, o que faz com que os mapas coordenados se tornem triviais. A vantagem desse formalismo, no entanto, é que ele se mantém válido para sistemas mais complexos, com muitas partículas vivendo em espaços com geometrias mais complicadas.

[3] Mais rigorosamente, um vetor desse espaço é uma *classe de equivalência* entre os vetores tangentes a curvas consideradas equivalentes, mas esse detalhe não é relevante para a presente construção. A seção A.2 do apêndice A trata sobre isso.

1.1 Sistemas regulares

O tipo mais tradicional de sistemas clássicos são o que chamamos de sistemas *regulares*, sendo estes os que descrevem a maioria daqueles sistemas estudados na dinâmica de partículas clássicas. Veremos mais profundamente como a regularidade de um sistema afeta sua dinâmica na segunda seção deste capítulo, mas até então é suficiente saber que um sistema regular é aquele cuja *matriz Hessiana*, definida pelas segundas derivadas da sua Lagrangiana[4] em relação às suas velocidades, é também regular. Ou seja,

$$\det(W) \neq 0,\ W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \tag{1.1}$$

Para toda a construção que se seguirá nesta seção, portanto, assume-se verdadeira a relação (1.1).

1.1.1 Formalismo lagrangiano

Vimos anteriormente que as configurações espaciais de um sistema clássico de partículas são pontos $\mathbf{q}$ do espaço de configurações $\mathbb{Q}$, que é uma variedade diferenciável (por isso também o chamamos de *variedade de configurações*). As velocidades dessas partículas, quando a configuração do sistema é $\mathbf{q}$, por outro lado, são representadas, em conjunto, por um vetor $\dot{\mathbf{q}}$ no espaço tangente $T_{\mathbf{q}}\mathbb{Q}$ ao ponto $\mathbf{q}$. A união de todos esses espaços tangentes é o que chamamos de *fibrado tangente* $T\mathbb{Q}$, definido por

$$T\mathbb{Q} \equiv \bigcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{Q}} T_{\mathbf{q}}\mathbb{Q}. \tag{1.2}$$

A formulação lagrangiana de um sistema físico é descrita a partir de uma função $\mathscr{L}$, denominada *função de Lagrange*, cujo domínio (na maior parte dos casos[5]) é o fibrado tangente e o contra-domínio é a reta real, ou seja,

[4] O texto deste capítulo também assume que o leitor é familiarizado com os conceitos mais fundamentais da mecânica clássica em suas descrições lagrangiana e hamiltoniana. Para o leitor não familiarizado, ver [1, 2].

[5] Há casos específicos em que a função de Lagrange também é explicitamente dependente do tempo, e portanto teríamos que $\mathscr{L} : T\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas esse não será nosso foco, visto que todos os sistemas físicos de grande relevância para nosso trabalho não possuem dependência temporal direta. Quando a função de Lagrange não depende explicitamente do tempo, dizemos que um sistema é *autônomo*, quando ela depende, chamamos de *não-autônomo*.

$$\mathscr{L} : T\mathbb{Q} \to \mathbb{R},$$

portanto é uma função das configurações e das velocidades do sistema, $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e tem como imagem um número real $\mathscr{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Para descrever a dinâmica de um sistema de N partículas livres a se mover em um espaço D-dimensional, precisamos encontrar $n \equiv D \cdot N$ funções que determinem a evolução temporal de suas posições. Nesse caso, dizemos que nosso sistema tem *n graus de liberdade* e tanto a sua variedade de configuração quanto seus espaços tangentes têm n dimensões. Por meio da estrutura de variedade diferenciável de $\mathbb{Q}$ é possível deduzir uma estrutura de variedade diferenciável também em $T\mathbb{Q}$ (isso é feito, por exemplo, em [3]).

De fato, cada configuração $\mathbf{q}$ pode ser representada, em alguma vizinhança de $T\mathbb{Q}$, por um conjunto de n coordenadas reais $q = \{q^i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, enquanto cada velocidade $\dot{\mathbf{q}}$, nessa vizinhança, é representada por um conjunto $\dot{q} = \{\dot{q}^i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. A união desses dois conjuntos, portanto, representa as coordenadas locais $(q, \dot{q}) = (\{q^i\}, \{\dot{q}^i\})$ de um ponto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de $T\mathbb{Q}$, de acordo com a carta induzida de $\mathbb{Q}$.

Dessa forma, podemos também definir uma versão local da função de Lagrange $\mathscr{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ em cada vizinhança de $T\mathbb{Q}$, que denotamos $L(q, \dot{q})$ e a esta função damos o nome de *Lagrangiana* desse sistema físico.

Equações de Euler-Lagrange

A dinâmica de nosso sistema é representada por uma trajetória $q(t) = \{q^i(t)\}$ na variedade de configuração $\mathbb{Q}$, parametrizada pelo tempo t. Para encontrar essa trajetória por meio do formalismo Lagrangiano, definimos um objeto que denominamos o *funcional de ação* entre os tempos t_1 e t_2,

$$S[q(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))dt, \tag{1.3}$$

e a partir de um princípio variacional (no nosso caso, o *princípio de Hamilton*, que diz que a trajetória física do sistema é aquela que extremiza a ação), impomos $\delta S = 0$ e encontramos as *equações de Euler-Lagrange* (E-L),

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0, \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{1.4}$$

que determinam univocamente (mas não biunivocamente[6]) a dinâmica de qualquer sistema regular.

As equações (1.4), quando vistas como equações em $\mathbb{Q}$, são um sistema de n equações de segunda ordem cujas soluções são as n configurações $\{q^i(t)\}$ em função do tempo. Se, por outro lado, quisermos definir a dinâmica em $T\mathbb{Q}$, temos que q e $\dot{q}$ são coordenadas independentes entre si, portanto as equações de E-L seriam

$$\dot{q}^i = \frac{d}{dt}q^i, \ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0, \tag{1.5}$$

e estas são um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções são as n configurações $\{q^i(t)\}$ e as n velocidades $\{\dot{q}^i(t)\}$, resultando em uma trajetória $(q(t), \dot{q}(t)) \subset T\mathbb{Q}$. A estrutura de fibrado[7] de $T\mathbb{Q}$ garante que podemos projetar as trajetórias $(q(t), \dot{q}(t))$ em sua variedade base $\mathbb{Q}$ e o resultado serão as mesmas $q(t)$ que resolvem as equações de E-L em $\mathbb{Q}$. Analisaremos agora o significado da equação (1.5) e as características geométricas da dinâmica em $T\mathbb{Q}$.

Usando a definição (1.1) da matriz Hessiana, ao explicitar a derivada temporal nas equações de E-L, podemos reescrevê-las na forma[8]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &= W_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,\end{aligned}$$

mas como, para sistemas regulares, $\det W \neq 0$, então a matriz Hessiana é invertível, o que significa que temos

$$\ddot{q}^j = (W^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k}\dot{q}^k\right).$$

[6] De fato, prova-se ([1, 4]) que uma mesma dinâmica pode ser determinada por diferentes funções Lagrangianas. Por exemplo, se L e L' forem funções que diferem localmente apenas de uma derivada total df/dt, ou forem relacionadas entre si por uma transformação de coordenadas $q \to q'$, as equações de Euler-Lagrange têm a mesma estrutura. A última afirmação é meramente um reflexo do importante fato que a dinâmica é determinada não pela Lagrangiana, mas sim pela função global $\mathscr{L}$, que pode ter diferentes representações locais L.

[7] Para o leitor não familiarizado com a chamada "estrutura de fibrado", recomenda-se as referências [3, 5]. Não é necessário, no entanto, conhecer a teoria de fibrados para entender a maior parte do presente capítulo.

[8] Estamos utilizando a notação de soma implícita de Einstein, na qual índices repetidos são considerados somados.

Dessa forma, as equações de E-L no fibrado tangente são meramente

$$\frac{d}{dt}q^i = \dot{q}^i,\ \frac{d}{dt}\dot{q}^j = (W^{-1})^{ij}\Big(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k}\dot{q}^k\Big), \tag{1.6}$$

que podemos colocar em um mesmo objeto por meio de uma relação vetorial

$$\Big(\frac{d}{dt}q^i, \frac{d}{dt}\dot{q}^i\Big) = \Big(\dot{q}^i, (W^{-1})^{ji}\Big[\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^k}\dot{q}^k\Big]\Big).$$

No lado esquerdo dessa equação temos os componentes do chamado *campo vetorial dinâmico* em $T\mathbb{Q}$, definido por

$$\Delta_L \equiv \frac{dq^i}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d\dot{q}^i}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \equiv \frac{d}{dt}. \tag{1.7}$$

Fundamentalmente, de um ponto de vista geométrico, a determinação desse campo vetorial é nosso principal objetivo no estudo da dinâmica, já que os objetos que chamamos de *observáveis* (por exemplo, a *energia*, ou um componente da *posição*, do *momento linear*, do *momento angular*, etc) são funções $\mathscr{F} \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$[9] do fibrado tangente, cuja evolução temporal é dada por curvas $\mathscr{F}(t)$. Estas curvas, por outro lado, são justamente as *curvas integrais* do campo Δ_L, já que, se $F(q(t), \dot{q}(t))$ é a representação local desse observável, temos que

$$\Delta_L(\mathscr{F}(t)) = \frac{dq^i}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^i} + \frac{d\dot{q}^i}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} = \frac{dF}{dt} = \dot{\mathscr{F}}(t). \tag{1.8}$$

Ou seja, $\mathscr{F}(t)$ é a curva em $T\mathbb{Q}$ construída através das derivadas direcionais de $\mathscr{F}$, o que significa que sua velocidade em cada ponto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in T\mathbb{Q}$ é igual ao vetor mapeado por Δ_L nesse mesmo ponto. O processo de construir as curvas integrais de Δ_L é chamado de *integrar a dinâmica* e consiste em resolver o sistema de equações diferenciais (1.6) com determinadas condições iniciais (sendo cada conjunto de condições iniciais correspondente a uma respectiva curva integral). Nem sempre a integração da dinâmica é simples, e muitas vezes precisamos recorrer a ferramentas que facilitem esse processo (por exemplo, a análise de *simetrias* do sistema).

Sabemos que a variação de um objeto geométrico (como uma função, um

[9] $\mathcal{F}(M)$ é o *espaço de funções suaves* sobre uma variedade M. Essa definição, assim como as de outros espaços vetoriais obtidos de uma variedade diferenciável (por exemplo, $\mathfrak{X}(M)$, $\Omega^k(M)$, T_pM, $\bigwedge^k T_p^*M$, etc), estão no apêndice A.

campo vetorial ou uma forma diferencial) ao longo do fluxo determinado por um campo vetorial é dada justamente por sua *derivada de Lie* ao longo desse fluxo. Ou seja, para uma função $\mathscr{F} \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$,

$$\Delta_L(\mathscr{F}) = \mathbf{L}_{\Delta_L}\mathscr{F}. \tag{1.9}$$

Usando essa informação, portanto, podemos reescrever (1.6) de uma maneira mais compacta ao introduzir um novo objeto geométrico: uma *1-forma diferencial* $\theta_L \in \Omega(T\mathbb{Q})$, definida por

$$\theta_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i, \tag{1.10}$$

de forma que sua derivada de Lie se torna (utilizando as propriedades da seção A.3 do Apêndice A)

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\Delta_L}\theta_L &= \left(\mathbf{L}_{\Delta_L}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\mathbf{L}_{\Delta_L}(dq^i) \\ &= \left(\mathbf{L}_{\Delta_L}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d(\mathbf{L}_{\Delta_L}q^i),\end{aligned}$$

mas pela definição (1.7) do campo Δ_L e utilizando (1.5), perceba que temos

$$\mathbf{L}_{\Delta_L}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i},\ \mathbf{L}_{\Delta_L}q^i = \frac{d}{dt}q^i = \dot{q}^i,$$

portanto

$$\left(\mathbf{L}_{\Delta_L}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d(\mathbf{L}_{\Delta_L}q^i) = \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i = d\mathscr{L},$$

dessa forma,

$$\boxed{\mathbf{L}_{\Delta_L}\theta_L = d\mathscr{L}.} \tag{1.11}$$

Essa é a forma *intrínseca* (ou *global*) das equações de Euler-Lagrange, que recebe esse nome pois não requer menção a nenhuma carta e portanto a nenhum sistema de coordenadas, consequentemente é válida em qualquer vizinhança de $T\mathbb{Q}$. É uma relação resultante da geometria intrínseca do fibrado tangente $T\mathbb{Q}$ e mostra como a dinâmica (Δ_L) é diretamente determinada pela função $\mathscr{L}$.

1.1.2 Geometria simplética

Tendo entendido o básico da descrição geométrica da dinâmica no fibrado tangente da variedade de configurações,[10] passaremos agora para a descrição geométrica da dinâmica em outra variedade construída a partir de $\mathbb{Q}$, o *fibrado cotangente* $T^*\mathbb{Q}$, cuja definição será apresentada posteriormente. De fato, perceberemos que a geometria desse espaço é diferente da de $T\mathbb{Q}$ e consideravelmente mais rica, pois esta é uma *variedade simplética*, que definiremos a seguir.

A variedade de fase

Uma variedade simplética $(\mathbb{F}, \omega)$ é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional $\mathbb{F}$ munida de uma *forma simplética* ω. Uma forma simplética é uma 2-forma diferencial que obedece às seguintes propriedades:

1. ω é fechada, ou seja, $d\omega = 0$;
2. ω é não degenerada, ou seja, $i_X\omega = 0 \implies X = 0$ para todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{F})$.

A partir da variedade de configurações de um sistema, mostraremos que podemos construir uma variedade simplética por meio de seu fibrado cotangente. Chamaremos a esta de *variedade de fase* e a representaremos por $\mathbb{F}$.

De fato, cada ponto $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}$ também tem a ele associado um *espaço cotangente*, denotado $T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q}$, cujos elementos são covetores, e que denotamos $\mathbf{p}$. Estes objetos representam o conjunto dos possíveis momentos das partículas nessa configuração espacial específica. A variedade de fase é o *fibrado cotangente*, definido como a união desses espaços tangentes

$$\mathbb{F} \equiv T^*\mathbb{Q} \equiv \bigcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{Q}} T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q},$$

e que, assim como o fibrado tangente, tem dimensão igual a $2n$ e uma estrutura de variedade diferenciável induzida pela estrutura de $\mathbb{Q}$. As coordenadas locais de $\mathbb{F}$ em uma carta induzida por uma carta de $\mathbb{Q}$ são a $2n$-upla (q, p), em que $q = \{q^i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ são as coordenadas generalizadas e $p = \{p_i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ os *momentos canônicos*, que são as componentes locais dos momentos $\mathbf{p}$.

[10] O leitor já deve imaginar que há muito mais a ser dito a respeito da geometria do formalismo lagrangiano. Neste trabalho, no entanto, não nos aprofundaremos no tema. Para apresentações mais aprofundadas, ver [6, 7, 8].

Para mostrar que $T^*\mathbb{Q}$ é, de fato, uma variedade simplética, precisamos encontrar nela uma forma simplética resultante dessa construção. De fato, a própria estrutura de fibrado de $T^*\mathbb{Q}$ resulta na existência de um objeto conhecido como *elemento canônico*,[11] que é escrito na base natural (resultante de sua estrutura de fibrado) de uma vizinhança de $\mathbb{F}$ como

$$\theta \equiv p_i dq^i. \tag{1.12}$$

Por outro lado, a estrutura diferenciável da variedade de fase permite a extensão desse objeto a toda a variedade, resultando em uma forma diferencial que chamamos de **1-forma canônica** (ou, especificamente no caso de sistemas regulares, **1-forma de Liouville** ou **potencial simplético**).

É possível construir um mapa $\Gamma : T\mathbb{Q} \to T^*\mathbb{Q}$, $\Gamma : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p})$[12] através das projeções naturais resultantes das estruturas de fibrados de $T\mathbb{Q}$ e $T^*\mathbb{Q}$, e isso nos permite relacionar diretamente a 1-forma θ sobre $T^*\mathbb{Q}$ à 1-forma θ_L sobre $T\mathbb{Q}$, de acordo com

$$\theta_L = \Gamma_* \theta, \tag{1.13}$$

em que $\Gamma_* : \Omega(T^*\mathbb{Q}) \to \Omega(T\mathbb{Q})$ é a operação de *pullback*.

A forma simplética, portanto, é definida como a 2-forma resultante da derivada exterior da 1-forma de Liouville, que denominamos **2-forma canônica**,

$$\omega \equiv d\theta. \tag{1.14}$$

De fato, essa definição implica automaticamente que ω é *exata* e sua primitiva é a 1-forma de Liouville. Consequência direta desse fato é ω ser *fechada*, já que $d\omega = d^2\theta$, e como a derivada exterior é um operador nilpotente, temos que $d^2\theta = 0$.

Além disso, se o mapa Γ for uma bijeção, teremos que a relação entre as velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ e os momentos $\mathbf{p}$ é um pra um. Isso significa que, assim como todas as velocidades generalizadas $\dot{q}^i$ são independentes das coordenadas q^i e entre

[11] A demonstração da existência do elemento canônico (conhecido pelos matemáticos como **1-forma tautológica**) pode ser encontrada em [3, 9].

[12] O mapa Γ e seu inverso Γ^{-1} (se ele existir) são os chamados, na linguagem matemática, *isomorfismos musicais* e denotados $\flat$ (bemol) e $\sharp$ (sustenido), respectivamente. Estes são induzidos pelos tradicionais isomorfismos musicais que relacionam biunivocamente (quando Γ^{-1} existe) os campos vetoriais e as 1-formas diferenciais de $\mathbb{Q}$. Para entender melhor sua construção, ver [10, 11, 12].

si, então os momentos canônicos p_i também são. Consequentemente, utilizando (1.12), a decomposição da 2-forma canônica no sistema de coordenadas naturais de $T^*\mathbb{Q}$ é

$$\omega = dp_i \wedge dq^i. \tag{1.15}$$

E a partir dessa decomposição podemos provar sua não-degenerescência. De fato, temos que o produto interior entre um campo vetorial X de $\mathbb{F}$ e a 2-forma canônica ω, quando aplicado em outro campo Y de $\mathbb{F}$ resulta

$$i_X\omega(Y) = \omega(Y;X) = \frac{1}{2}[dp_i(Y)dq^i(X) - dq^i(Y)dp_i(X)].$$

Mas X é decomposto em suas componentes locais nesse sistema coordenado como

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial q^i} + X_i\frac{\partial}{\partial p_i},$$

em que X^i $(i = 1, 2, ..., n)$ são as n primeiras componentes e X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ as n últimas. Levando em conta que (dq, dp) é a base dual de $\left(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\right)$, temos assim as relações

$$dq^i\Big(\frac{\partial}{\partial q^j}\Big) = \delta^i_j,\ dp_i\Big(\frac{\partial}{\partial p_j}\Big) = \delta^j_i,\ dq^i\Big(\frac{\partial}{\partial p_j}\Big) = dp_i\Big(\frac{\partial}{\partial q^j}\Big) = 0,$$

ou seja,

$$dp_i(X) = dp_i\Big(X^j\frac{\partial}{\partial q^j} + X_j\frac{\partial}{\partial p_j}\Big) = X^j dp_i\Big(\frac{\partial}{\partial q^j}\Big) + X_j dp_i\Big(\frac{\partial}{\partial p_j}\Big) = X_j\delta^j_i = X_i,$$

$$dq^i(X) = dq^i\Big(X^j\frac{\partial}{\partial q^j} + X_j\frac{\partial}{\partial p_j}\Big) = X^j dq^i\Big(\frac{\partial}{\partial q^j}\Big) + X_j dq^i\Big(\frac{\partial}{\partial p_j}\Big) = X^j\delta^i_j = X^i.$$

Dessa forma, temos que

$$i_X\omega(Y) = \frac{1}{2}[dp_i(Y)dq^i(X) - dq^i(Y)dp_i(X)] = \frac{1}{2}(Y_iX^i - Y^iX_i) = 0,$$

mas se $i_X\omega(Y) = 0$ para qualquer Y arbitrário, então a relação acima só pode ser válida se $X^i = 0$ e $X_i = 0\ \forall i$. Ou seja, $X = 0$.

Essa propriedade é equivalente a dizer que o único elemento no núcleo $\mathcal{N}(\omega)$ da forma bilinear ω é o vetor nulo, e a consequência direta disso ([13]) é que

a matriz de componentes de ω tem determinante diferente de zero, portanto é regular.

É importante ressaltar que tanto a propriedade de não-degenerescência quanto a de uma forma diferencial ser exata, consequentemente fechada, são propriedades *globais*. Apesar de terem sido provadas aqui em um sistema de coordenadas específico, prova-se (ver a subseção B.1.1 do Apêndice B) que elas se mantém válidas após qualquer transformação de coordenadas.

Sistemas Hamiltonianos

A construção da dinâmica hamiltoniana é realizada a partir da transição entre as variedades $T\mathbb{Q}$ e $T^*\mathbb{Q}$, mapeada através de $\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Se este mapa for bijetivo, então é possível definir biunivocamente, em uma vizinhança local, a *Hamiltoniana* $H(q, p)$ do sistema por meio de uma transformação de Legendre da Lagrangiana,

$$H(q, p) \equiv \dot{q}^i p_i - L(q, p), \tag{1.16}$$

sendo a relação entre os momentos canônicos e as velocidades dada por

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1.17}$$

Ao estender a função H para toda a variedade, assim obtemos uma outra função $\mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ das configurações e dos momentos, denominada *função de Hamilton*. Essa função (na maior parte dos casos[13]) tem como domínio a variedade de fase e como contra-domínio a reta real,

$$\mathscr{H} : \mathbb{F} \to \mathbb{R},$$

O que chamamos de um *sistema Hamiltoniano* consiste, portanto, em uma variedade simplética $(\mathbb{F}, \omega)$ munida de uma função $\mathscr{H} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$, que escolhemos para cumprir o papel de função de Hamilton. A partir do tripleto $(\mathbb{F}, \omega, \mathscr{H})$ e de um princípio dinâmico conseguimos determinar a evolução temporal de qualquer sistema Hamiltoniano regular, que é o que mostraremos a seguir.

[13]Para sistemas não autônomos, a dependência temporal explícita na função de Lagrange se reflete na função de Hamilton, o que faz com que tenhamos $\mathscr{H} : \mathbb{F} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Novamente, esses casos não serão abordados aqui. Para o leitor interessado na geometria da variedade de fase de sistemas não-autônomos (chamada geometria *co-simplética*), ver [11].

Ao extremizar a ação como um funcional da variedade de fase, o resultado obtido são as *equações de Hamilton*,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ e } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{1.18}$$

que, em termos das *coordenadas unificadas*, definidas por

$$\xi^\mu \equiv \begin{cases} q^i & \text{se } 1 \leqslant \mu \leqslant n, \\ p_i & \text{se } n+1 \leqslant \mu \leqslant 2n, \end{cases}$$

se tornam

$$\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu = \frac{\partial H}{\partial \xi^\mu}, \ (\mu, \nu = 1, 2, ..., 2n), \tag{1.19}$$

sendo $\omega_{\mu\nu}$ as componentes da *matriz simplética*

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Perceba que as componentes da matriz simplética são também as componentes locais de uma 2-forma ω sobre $\mathbb{F}$, escrita nesse sistema de coordenadas como

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} dq^i & dp_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dq^i \\ dp_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-dq^i \wedge dp_i + dp_i \wedge dq^i)$$

$$\therefore \boxed{\omega = dp_i \wedge dq^i,} \tag{1.21}$$

ou seja, o objeto que relaciona as velocidades $\dot{\xi}$ com a Hamiltoniana H é justamente a 2-forma canônica. Perceba também que, se a matriz das componentes de ω for regular, podemos inverter a matriz simplética e escrever (1.19) como

$$\dot{\xi}^\mu = \omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu}, \tag{1.22}$$

em que $\omega^{\mu\nu}$ são as componentes de Ω^{-1}, e esse formato deixa clara a semelhança de (1.18) e (1.22) com (1.6). No lado esquerdo das equações de E-L temos as componentes do campo vetorial Δ_L, enquanto no lado esquerdo das equações de Hamilton temos as componentes do campo

$$\Delta \equiv \dot{\xi}^{\mu}\frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} = \dot{q}^{i}\frac{\partial}{\partial q^{i}} + \dot{p}_{i}\frac{\partial}{\partial p_{i}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{F}). \tag{1.23}$$

Também chamamos a esse objeto de *campo vetorial dinâmico*, pois ele cumpre exatamente a mesma função de determinar a dinâmica em $T^*\mathbb{Q}$ que Δ_L cumpre em $T\mathbb{Q}$. De fato, pode-se entender que ambos são representações matemáticas diferentes do mesmo objeto, pois, utilizando o mapa $\Gamma : T\mathbb{Q} \to T^*\mathbb{Q}$, podemos relacioná-los biunivocamente (para sistemas regulares) através da operação de *pushforward*,

$$\Delta|_{\xi} = \Gamma_{*}|_{\Gamma(\xi)}(\Delta_L|_{\Gamma(\xi)}). \tag{1.24}$$

De fato, assim como no caso das equações de E-L, a relação (1.19) é meramente uma representação local de um equação global, intrínseca à variedade $\mathbb{F}$. O próximo passo agora será encontrar essa relação. A primeira coisa que faremos é calcular o produto interior de Δ com ω (cujo resultado é uma 1-forma diferencial),

$$\begin{aligned} i_{\Delta}\omega = \omega(\bullet, \Delta) = \omega_{\mu\nu} d\xi^{\mu} \wedge d\xi^{\nu}\left(\bullet, \dot{\xi}^{\rho}\frac{\partial}{\partial \xi^{\rho}}\right) = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\rho} d\xi^{\mu} d\xi^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\rho}}\right) \\ = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\rho}\delta^{\nu}_{\rho} d\xi^{\mu} = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\nu} d\xi^{\mu}, \end{aligned}$$

mas usando (1.19),

$$\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\nu} d\xi^{\mu} = \frac{\partial H}{\partial \xi^{\mu}} d\xi^{\mu} = d\mathscr{H},$$

portanto,

$$\boxed{i_{\Delta}\omega = d\mathscr{H},} \tag{1.25}$$

e essa é a forma *intrínseca* das equações de Hamilton. Essa equação nos revela um importante resultado físico da propriedade de não-degenerescência da 2-forma canônica: o fato de que a função de Hamilton de um sistema determina **univocamente** a sua dinâmica. De fato, se houvessem duas dinâmicas diferentes, determinadas pelos campos Δ_1 e Δ_2, teríamos que

$$i_{\Delta_1}\omega = d\mathscr{H} = i_{\Delta_2}\omega,$$

portanto, levando em conta a linearidade do produto interior,

$$i_{\Delta_1}\omega - i_{\Delta_2}\omega = 0 \implies i_{(\Delta_1-\Delta_2)}\omega = 0,$$

mas pela não-degenerescência de ω, teríamos necessariamente que

$$\Delta_1 - \Delta_2 = 0 \implies \Delta_1 = \Delta_2,$$

o que é uma contradição. O inverso dessa afirmação não é verdadeiro, pois se

$$i_\Delta \omega = d\mathscr{H}_1 = d\mathscr{H}_2,$$

então

$$d\mathscr{H}_1 - d\mathscr{H}_2 = d(\mathscr{H}_1 - \mathscr{H}_2) = 0 \implies \mathscr{H}_1 - \mathscr{H}_2 = \text{const.}$$

Ou seja, o campo vetorial Δ só determina a função de Hamilton a menos de uma constante. Isso reflete o fato de que a Hamiltoniana está intimamente relacionada com a energia do sistema, mas como a energia potencial só é determinada a menos de uma constante, o mesmo acontece com $\mathscr{H}$.

Parênteses de Poisson

Uma quantidade observável é representada no formalismo hamiltoniano por uma função suave $\mathscr{F} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$ da variedade de fase, cuja versão local chamaremos de $F(\xi) = F(q,p)$[14]. Um fato importante é o de que podemos relacionar cada função $\mathscr{F}$ sobre a variedade de fase univocamente (mas não biunivocamente, como foi implicitamente demonstrado acima) a um campo vetorial X_F por meio de uma relação equivalente a (1.25), dada por

$$i_{X_F}\omega = d\mathscr{F}, \tag{1.26}$$

e a este campo damos o nome de *campo vetorial Hamiltoniano* de $\mathscr{F}$. Além disso, desde que a matriz das componentes de ω seja invertível, podemos calcular as componentes locais X_F^μ desse campo a partir dessa relação,

$$i_{X_F}\omega = \omega(\bullet, X_F) = \omega_{\mu\nu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \left(\bullet, X_F^\rho \frac{\partial}{\partial \xi^\rho}\right) = \omega_{\mu\nu} d\xi^\mu X_F^\rho \delta^\nu_\rho$$

[14]Perceba que, se a relação entre $T\mathbb{Q}$ e $T^*\mathbb{Q}$ é biunívoca, podemos sempre escrever $F(q,p) \equiv \tilde{F}(q,\dot{q}(q,p))$, com $\mathscr{F} \in T^*\mathbb{Q}$ e $\tilde{\mathscr{F}} \in T\mathbb{Q}$ funções diferentes, mas que representam o mesmo objeto físico. Se a relação não é biunívoca, no entanto, a informação física contida nessas duas funções não é mais a mesma.

$$= \omega_{\mu\nu} X_F^\nu d\xi^\mu = d\mathscr{F} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu$$

$$\therefore \; X_F^\mu = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial \xi^\nu}. \tag{1.27}$$

Novamente, perceba a semelhança com as equações de Hamilton nas formas (1.19) e (1.22).

Os *parênteses de Poisson* (PP) são uma operação $\{\,\cdot\,;\,\cdot\,\} : \mathcal{F}(\mathbb{F}) \times \mathcal{F}(\mathbb{F}) \to \mathcal{F}(\mathbb{F})$ que dá a $\mathbb{F}$ uma estrutura de álgebra de Lie e satisfaz uma identidade de Leibniz. Isso significa que, para $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ela obedece às seguintes propriedades:

1. Bilinearidade

$$\{\mathscr{F}; \lambda\mathscr{G} + \mu\mathscr{H}\} = \lambda\{\mathscr{F}; \mathscr{G}\} + \mu\{\mathscr{F}; \mathscr{H}\},$$

$$\{\lambda\mathscr{F} + \mu\mathscr{G}; \mathscr{H}\} = \lambda\{\mathscr{F}; \mathscr{H}\} + \mu\{\mathscr{G}; \mathscr{H}\};$$

2. Antissimetria

$$\{\mathscr{F}; \mathscr{G}\} = -\{\mathscr{G}; \mathscr{F}\};$$

3. Identidade de Jacobi

$$\{\mathscr{F}; \{\mathscr{G}; \mathscr{H}\}\} + \{\mathscr{H}; \{\mathscr{F}; \mathscr{G}\}\} + \{\mathscr{G}; \{\mathscr{H}; \mathscr{F}\}\} = 0;$$

4. Identidade de Leibniz

$$\{\mathscr{F}\mathscr{G}; \mathscr{H}\} = \mathscr{F}\{\mathscr{G}; \mathscr{H}\} + \{\mathscr{F}; \mathscr{H}\}\mathscr{G},$$

$$\{\mathscr{F}; \mathscr{G}\mathscr{H}\} = \{\mathscr{F}; \mathscr{G}\}\mathscr{H} + \mathscr{G}\{\mathscr{F}; \mathscr{H}\}.$$

Uma variedade $\mathbb{F}$ dotada de uma estrutura de Poisson $\{\,\cdot\,;\,\cdot\,\}$ é dita uma *variedade de Poisson* e denotada $(\mathbb{F}, \{\,\cdot\,;\,\cdot\,\})$. Dada uma variedade simplética $(\mathbb{F}, \omega)$, podemos sempre definir uma estrutura de Poisson por

$$\{\mathscr{F}; \mathscr{G}\} \equiv i_{X_G} i_{X_F} \omega = \omega(X_G, X_F), \tag{1.28}$$

em que X_F e X_G são os campos vetoriais Hamiltonianos de $\mathscr{F} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$ e $\mathscr{G} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$, respectivamente. De fato, a prova de que essa definição obedece às propriedades

1, 2 e 4 é trivial. A identidade de Jacobi, por outro lado, é equivalente à afirmação de que ω é fechada (a prova desse fato pode ser encontrada em [3]).

Vemos por meio dessa definição que **toda variedade simplética é uma variedade de Poisson**. Esse é um resultado importante que deixa claro o porquê de termos preferência a trabalhar com estruturas simpléticas na mecânica clássica, já que a existência de uma estrutura de Poisson implica em diversos resultados desejáveis, como veremos a seguir.

Considere uma função $\mathscr{F} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$, cujo campo vetorial Hamiltoniano é X_F. Perceba que sua evolução temporal é dada pela aplicação do campo vetorial dinâmico Δ, ou da derivada de Lie ao longo desse campo,

$$\dot{\mathscr{F}} = \Delta(\mathscr{F}) = \mathbf{L}_\Delta \mathscr{F},$$

mas pela identidade de Cartan ($\mathbf{L}_\Delta = d \cdot i_\Delta + i_\Delta \cdot d$) e como $\mathscr{F}$ é uma 0-forma, $i_\Delta \mathscr{F} = 0$, assim, $\mathbf{L}_\Delta \mathscr{F} = i_\Delta(d\mathscr{F})$. Além disso, usando a relação (1.26),

$$i_\Delta(d\mathscr{F}) = i_\Delta(i_{X_F}\omega) = \omega(\Delta, X_F),$$

mas usando a equação de Hamilton, (1.25), vemos que o campo Δ é justamente o campo vetorial Hamiltoniano associado à função de Hamilton $\mathscr{H}$, então pela definição (1.28),

$$\boxed{\Delta(\mathscr{F}) = \{\mathscr{F}; \mathscr{H}\},} \tag{1.29}$$

ou seja, a evolução temporal dos observáveis é determinada por seu PP com a função de Hamilton.

Por fim, faremos uma análise local das relações geométricas encontradas aqui. Dados dois observáveis $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$, cujas representações locais são $F(\xi)$ e $G(\xi)$, a representação local dos parênteses de Poisson entre esses observáveis, denotada $\{F; G\}$, é escrita por meio das componentes locais dos respectivos campos vetoriais Hamiltonianos,

$$\begin{aligned}\{F; G\} &= \omega(X_G, X_F) = \omega_{\mu\nu} X_G^\rho d\xi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\rho}\right) X_F^\sigma d\xi^\nu \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\sigma}\right) \\ &= \omega_{\mu\nu} X_G^\mu X_F^\nu = \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\rho}\frac{\partial G}{\partial \xi^\rho}\omega^{\nu\sigma}\frac{\partial F}{\partial \xi^\sigma} = \delta_\mu^\sigma \frac{\partial F}{\partial \xi^\sigma}\omega^{\mu\rho}\frac{\partial G}{\partial \xi^\rho}\end{aligned}$$

$$\therefore \ \{F;G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}. \tag{1.30}$$

E a relação entre os parênteses de Poisson e a dinâmica é facilmente entendida em coordenadas locais, pois a evolução temporal de observáveis se torna, utilizando (1.22),

$$\dot{F}(\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\dot{\xi}^\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} = \{F;H\}, \tag{1.31}$$

que é precisamente a representação da relação (1.29) em uma vizinhança de $\mathbb{F}$.

Um comentário importante é que a relação (1.30) nos permite escrever os PP em termos de q e p a partir das componentes $\omega^{\mu\nu}$ da inversa da matriz simplética (que é $\Omega^{-1} = -\Omega$),

$$\begin{aligned}\{F;G\} &= \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^1}\frac{\partial G}{\partial \xi^{n+1}} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \xi^n}\frac{\partial G}{\partial \xi^{2n}}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^{n+1}}\frac{\partial G}{\partial \xi^1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \xi^{2n}}\frac{\partial G}{\partial \xi^n}\right) \\ \therefore \ \{F;G\} &= \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i},\end{aligned} \tag{1.32}$$

e essa é exatamente a forma usual em que eles são apresentados em livros tradicionais de mecânica clássica.

Finalmente, podemos também considerar as próprias coordenadas ξ^μ como funções do espaço de fase e com isso calcular seus parênteses de Poisson,

$$\{\xi^\mu;\xi^\nu\} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\sigma}\omega^{\sigma\rho}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\rho} = \delta^\mu_\sigma\omega^{\sigma\rho}\delta^\nu_\rho,$$

o que resulta em

$$\boxed{\{\xi^\mu;\xi^\nu\} = \omega^{\mu\nu}.} \tag{1.33}$$

Podemos também explicitar as coordenadas de Ω^{-1}, encontrando

$$\{q^i;q^j\} = 0, \ \{p_i;p_j\} = 0, \ \{q^i;p_j\} = \delta^i_j, \tag{1.34}$$

que são as *relações canônicas* já conhecidas da mecânica clássica. Apesar destas só serem válidas para sistemas regulares, veremos que a relação (1.33) é mais geral e

também poderá ser utilizada para sistemas singulares, após uma redefinição de ω. Esta relação é conhecida como os *parênteses de Poisson fundamentais* da teoria e tem extrema importância na mecânica quântica, pois o processo de *quantização canônica* de uma teoria clássica é inteiramente baseado no *princípio da correspondência*, que age sobre os PP fundamentais, os transformando em comutadores da teoria quântica.

Teorema de Darboux

Perceba que os resultados (1.32) e (1.34) são válidos somente em um sistema de coordenadas específico em que a forma simplética se torna (1.21), ou seja, suas componentes são iguais às componentes da matriz simplética (1.20). Uma mudança de coordenadas arbitrária, no geral, altera essas componentes e consequentemente altera também a forma das equações de Hamilton (1.18). Isso significaria que elas não são uma relação geral, válida em qualquer vizinhança da variedade de fase, se não fosse a existência do *teorema de Darboux*. Neste trabalho, somente o enunciaremos, mas para o leitor interessado em se apronfudar no tópico e entender sua demonstração, ver [4, 14, 7].

O teorema de Darboux diz que toda variedade simplética $(\mathbb{F}, \omega)$ admite em todas as suas vizinhanças um **sistema de coordenadas canônico** (ou **sistema de coordenadas de Darboux**), representado por $\xi = (\{q^i\}, \{p_i\})$, no qual a forma simplética se torna

$$\omega = dp_i \wedge dq^i. \tag{1.35}$$

Isso significa que, localmente, toda variedade simplética é igual. Ou seja, toda variedade simplética é *localmente isomórfica*. As expressões (1.21), (1.18), (1.32) e (1.34) mencionadas anteriormente são, portanto, válidas em qualquer vizinhança de uma variedade simplética, desde que o sistema coordenado escolhido seja um sistema de coordenadas canônico.

Esta breve apresentação de forma alguma esgotou o tema da análise física da geometria simplética. De fato, o leitor interessado em aprofundar-se no tema pode conferir as diversas referências mencionadas até então.

1.2 Sistemas singulares

Na segunda parte deste capítulo, analisaremos os chamados *sistemas singulares*, que são aqueles cuja matriz Hessiana é também singular, ou seja,

$$\det(W) = 0,\ W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \tag{1.36}$$

Para entender como isso afeta a dinâmica do sistema, começaremos analisando as equações de Euler-Lagrange (1.4), novamente escrevendo explicitamente a derivada temporal,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

$$\therefore W_{ij}\ddot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j.$$

Ou, no fibrado tangente,

$$\frac{d}{dt}q^i = \dot{q}^i,\ W_{ij}\frac{d}{dt}\dot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\frac{d}{dt}q^j,$$

perceba que dessa vez, devido à singularidade de W, não é possível inverter essa matriz e escrever essas equações em termos das componentes do campo vetorial dinâmico Δ_L. Na realidade, assumindo que a matriz Hessiana tem posto $k < n$,[15] em que n é o número de graus de liberdade do sistema, podemos inverter uma submatriz $k \times k$ de W e com isso determinar Δ_L somente para aquelas coordenadas para as quais W é regular. Um conjunto de $n - k$ coordenadas, dessa forma, se mantém indeterminado.

Sem o campo vetorial dinâmico completo, não conseguimos calcular a evolução temporal dos observáveis físicos e é impossível integrar inteiramente a dinâmica do sistema ao encontrar suas curvas integrais. Vejamos a seguir como esses problemas se traduzem para o formalismo hamiltoniano.

1.2.1 Geometria pré-simplética

Na formulação hamiltoniana, a principal consequência da singularidade de um sistema clássico é o fato de que sua variedade de fase **pode ou não ser uma variedade simplética**. De fato, mostraremos a seguir que ela tem uma estrutura

[15] Ou seja, tem somente k linhas (ou colunas) linearmente independentes.

geométrica com uma definição mais ampla, que a categoriza como uma variedade *pré-simplética*.

A variedade de fase de um sistema singular

Uma variedade pré-simplética é uma dupla $(\mathbb{P}, \omega)$, em que $\mathbb{P}$ é uma variedade diferenciável N-dimensional e ω é uma *forma pré-simplética*, que é definida como uma 2-forma diferencial *fechada* sobre $\mathbb{P}$.

Ao afrouxar a definição de variedade simplética, retirando o requisito de que ω seja não-degenerada, veremos que a estrutura geométrica da variedade de fase passa a apresentar algumas diferenças e requer um maior cuidado no tratamento da dinâmica de seus sistemas físicos. Mas antes disso, entenderemos como a condição Hessiana resulta nessa estrutura.

O fibrado tangente de um sistema singular é construído de maneira exatamente análoga àquela feita na seção anterior. Da mesma forma que antes, podemos também encontrar um elemento canônico, que se estendido para toda a variedade resulta na 1-forma canônica,

$$\theta \equiv p_i dq^i, \ (i = 1, 2, ..., n).$$

E novamente a 2-forma canônica é definida como sua derivada exterior,

$$\omega \equiv d\theta,$$

o que implica, naturalmente, que ela seja fechada. No fibrado cotangente completo, em que todos os q^i e todos os p_i são coordenadas independentes, ω continua sendo não-degenerada. No entanto, a dinâmica não acontece nesse espaço. Isso ocorre pois, quando $\det W = 0$, o mapa $\Gamma : T\mathbb{Q} \to T^*\mathbb{Q}$, que relaciona

$$p_i \leftrightarrow \dot{q}^i$$

por meio da transformada de Legendre, deixa de ser uma bijeção (ver as seções sobre a transformada de Legendre em [4, 12, 15]). A consequência direta disso é que os momentos canonicamente conjugados agora são divididos em 2 subgrupos,

$$p \equiv \{p_\alpha\} \cup \{p_a\},$$

em que os indexados por $\alpha = 1, 2, ..., k < n$ são aqueles completamente independentes entre si e das coordenadas q, portanto são considerados variáveis linearmente independentes do espaço de fase.[16] E aqueles indexados por $a = 1, 2, ..., n - k$ são funções $p(\{q^i\}, \{p_i\})$ das coordenadas e dos outros momentos. Cada uma dessas funções define a equação de uma subvariedade de $T^*\mathbb{Q}$ com uma dimensão a menos, o que faz com que o espaço de fase seja definido justamente como a subvariedade $(n + k)$-dimensional de $T^*\mathbb{Q}$ que obedece a todas as $n - k$ restrições, ou seja

$$\mathbb{P} \equiv T^*\mathbb{Q}|_{p_a = p_a(p,q)\ \forall\ a}.$$

Nesta variedade reduzida, a 1-forma canônica agora pode ser separada como

$$\theta = p_\alpha dq^\alpha + p_a(q, p)dq^a, \tag{1.37}$$

o que resulta na sua derivada exterior

$$\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha + dp_a(q, p) \wedge dq^a = dp_\alpha \wedge dq^\alpha + \left(\frac{\partial p_a}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial p_a}{\partial p_i}dp_i\right) \wedge dq^a, \tag{1.38}$$

que, portanto, não está na forma canônica (1.15) apresentada na seção anterior. De fato, a única coisa que permitiu que utilizássemos a forma simplética em um sistema de coordenadas canônico foi a existência do *teorema de Darboux*, que é um resultado geral para variedades simpléticas. Esse teorema, no entanto, não é válido para variedades pré-simpléticas.

Felizmente existe uma série de generalizações do teorema de Darboux para variedades diferenciáveis munidas de 2-formas com alguma definição afrouxada de sua estrutura simplética. Esse é o caso das variedades pré-simpléticas, que admitem a versão que apresentaremos a seguir.

Teorema de Darboux generalizado

Considere uma variedade M munida de uma 2-forma diferencial ω fechada. Em toda vizinhança de M é possível encontrar um sistema de coordenadas locais $\xi = (\{q^i\}, \{p_i\}, \{z^a\})$, com $i = 1, 2, ..., r$ e $a = 1, 2, ..., d$ tal que

[16] Como se poderia imaginar pelo uso da mesma letra, o valor k mencionado aqui é justamente igual ao posto da matriz Hessiana.

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} dp_i \wedge dq^i, \tag{1.39}$$

em que $2r$ é o posto de ω. Chamaremos a esse sistema de um **sistema de coordenadas de Darboux generalizado**. Novamente, não faremos a demonstração, mas o leitor interessado pode conferir essa prova em [11, 12].

Utilizando esse teorema, mostraremos que a demonstração apresentada anteriormente da não-degenerescência de ω deixa de ser válida. De fato, repetindo os mesmos argumentos da seção anterior, chegamos no resultado de que o produto interior entre um campo vetorial X de $\mathbb{P}$ e a 2-forma canônica, quando aplicado em outro campo Y de $\mathbb{P}$, resulta, em um sistema de coordenadas de Darboux generalizado,

$$i_X\omega(Y) = \frac{1}{2}[dp_i(Y)dq^i(X) - dq^i(Y)dp_i(X)] = \frac{1}{2}(Y_iX^i - Y^iX_i),$$

em que a soma implícita no índice i agora só vai até r. A decomposição em componentes locais de um campo vetorial, no entanto, é dada por

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial q^i} + X_i\frac{\partial}{\partial p_i} + (X_z)^a\frac{\partial}{\partial z^a},$$

sendo $(X_z)^a$, $(a = 1, 2, ..., n-k)$ as últimas d componentes. A condição $i_X\omega(Y) = 0$ para Y arbitrário implica, portanto, que $X_i = 0$ e $X^i = 0$ para todo i. No entanto, nenhuma condição é imposta sobre as componentes $(X_z)^a$, e portanto é plenamente possível que o núcleo de ω contenha outros elementos além do vetor nulo. Nesse caso, essa forma diferencial é dita *degenerada* e a dinâmica do sistema se torna mal determinada.

Para investigar as consequências físicas de uma 2-forma canônica degenerada, definiremos a dinâmica em $\mathbb{P}$ por meio do objeto que chamamos de *Lagrangiana canônica*.

A Lagrangiana canônica

Na variedade de fase pré-simplética, as coordenadas generalizadas são todas linearmente independentes e a matriz Hessiana restrita a esse sistema é justamente a submatriz de W que é invertível. Isso nos permite relacionar biunivocamente a função Lagrangiana com a função Hamiltoniana através de sua transformada de Legendre. A definição da Lagrangiana canônica, portanto, é meramente a função

$L(q,\dot{q}) = L(q,\dot{q}(q,p)) \equiv L(q,p)$, quando vista como uma representação local de uma função $\mathscr{L}(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \mathcal{F}(\mathbb{P})$ do espaço de fase,

$$L(q,p) \equiv p_i\dot{q}^i - H(q,p).$$

Se escrevermos esse objeto em termos das coordenadas $\xi = (\{q^i\},\{p_\alpha\})$, resultantes da construção do espaço de fase feita acima (que não necessariamente é um sistema de coordenadas de Darboux generalizado), ele se torna

$$L(\xi) = \theta_\mu\dot{\xi}^\mu - H(\xi). \tag{1.40}$$

A ação, portanto, é vista como um funcional da Lagrangiana canônica. E a sua variação resulta

$$\delta S[\xi] = \int \frac{\delta L}{\delta\xi^\mu}\delta\xi^\mu dt,$$

sendo, de acordo com (1.40),

$$\frac{\delta L}{\delta\xi^\mu} = \frac{\partial L}{\partial\xi^\mu} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}^\mu}\Big) = \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu} - \frac{d}{dt}\theta_\mu = \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\dot{\xi}^\nu$$

$$= \Big(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\Big)\dot{\xi}^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu}.$$

O objeto entre parênteses é exatamente a componente (μ,ν) da 2-forma canônica, já que, partindo de $\theta = \theta_\mu d\xi^\mu$, temos que

$$\omega = d\theta = \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}d\xi^\nu \wedge d\xi^\mu,$$

mas como o produto exterior é antissimétrico, temos

$$\omega = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu} - \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}\Big)d\xi^\nu \wedge d\xi^\mu = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\Big)d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \implies \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}.$$

A variação da ação é, portanto,

$$\delta S = \int \Big(\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu}\Big)\delta\xi^\mu dt,$$

que resulta, pelo princípio de Hamilton, nas equações de movimento (1.19),

$$\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\nu} - \frac{\partial H}{\partial \xi^{\mu}} = 0,$$

ou, em sua forma intrínseca (1.25),

$$i_{\Delta}\omega = d\mathscr{H},$$

que é exatamente a equação de Hamilton como a conhecemos. Com isso vemos que a dinâmica de nosso sistema quando determinada pela Lagrangiana canônica é equivalente àquela determinada pela função Hamiltoniana. A degenerescência de ω, no entanto, traz diversos problemas na integração dessa dinâmica. De fato, essa propriedade significa que ω admite *modos nulos*, ou seja, campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{P})$ tal que

$$i_X\omega = \omega(X) = 0,\ X \neq 0.$$

Mas lembre que a não-degenerescência de ω para um sistema regular implicava, como mostramos na seção anterior, no fato de que a Hamiltoniana do sistema determina unicamente o campo vetorial dinâmico Δ, de acordo com a relação

$$i_{(\Delta_1-\Delta_2)}\omega_{\text{regular}} = d\mathscr{H} \implies \Delta_1 = \Delta_2.$$

Caso a construção realizada anteriormente resulte em uma 2-forma ω regular, o sistema pode ser resolvido normalmente pela resolução das equações de Hamilton após a restrição do fibrado cotangente. Se ω for degenerada (portanto **singular**, no sentido da álgebra linear), então existe a possibilidade de que

$$i_{\Delta_1}\omega_{\text{singular}} = i_{\Delta_2}\omega_{\text{singular}} = d\mathscr{H},\ \text{com}\ \Delta_1 \neq \Delta_2.$$

Na realidade, é possível que exista um número muito maior de dinâmicas Δ_i que satisfaçam à equação de Hamilton (ou até mesmo infinitas, que é o caso de sistemas com *liberdade de gauge*). Mas como a evolução dinâmica dos observáveis é dada pelas curvas integrais do campo vetorial dinâmico,

$$\dot{\mathscr{F}} = \Delta(\mathscr{F}),$$

temos assim uma família de soluções para o sistema. Dizemos, nesse caso, que há uma *degenerescência nas soluções* de nosso problema. A evolução temporal **não é**

unicamente determinada por nossas equações de movimento.[17]

É importante também apontar os problemas que nos impedem de construir uma estrutura de Poisson em uma variedade de fase munida de uma 2-forma canônica singular. De fato, dadas duas funções $\mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathcal{F}(\mathbb{P})$, se definirmos o parêntese de Poisson entre eles, tal como (1.28) na seção anterior, de acordo com

$$\{\mathscr{F};\mathscr{G}\} \equiv \omega(X_G, X_F),$$

em que X_F e X_G são seus respectivos campos vetoriais Hamiltonianos, esta relação não tem mais apenas um resultado possível. O que ocorre é que, assim como acontece com o campo vetorial dinâmico, a degenerescência de ω resulta na degenerescência do campo vetorial Hamiltoniano dos observáveis, já que estes são definidos em (1.26) por

$$i_{X_F}\omega = d\mathscr{F}.$$

Temos, portanto, que existem diversos (possivelmente infinitos) campos vetoriais X_F que obedecem a essa relação para cada função $\mathscr{F}$. No mais, é importante ver que a representação local (1.30) dos PP também nos permite enxergá-los como um campo tensorial antissimétrico de ordem (2,0) que é dual à 2-forma canônica, decomposto em suas componentes locais como

$$\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\} = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}\wedge\frac{\partial}{\partial\xi^\nu}.$$

No entanto esse campo só existe se a matriz de componentes de ω for invertível, que não é o caso quando ω é degenerada. Nosso objetivo ao resolver a dinâmica de um sistema é determinar esse campo tensorial, mas para isso precisamos defini-lo como o dual a uma 2-forma simplética, portanto precisamos de alguma maneira relacionar a variedade de fase do sistema a uma variedade simplética. O método desenvolvido por L. Faddeev e R. Jackiw [17], com contribuições de J. Barcelos-Neto e C. Wotzasek [18, 19], dá conta da solução da dinâmica para sistemas com uma 2-forma canônica singular, e é ele que será nosso foco até o fim deste capítulo. A formulação do procedimento segue a lógica e a notação de [20].

[17] Isso é um mero reflexo da observação matemática de que o *problema de Cauchy* de tal sistema não é bem definido. Ou seja, as condições iniciais de nossas equações diferenciais não são suficientes para determinar univocamente suas soluções ([15, 16]).

1.2.2 O método de Faddeev-Jackiw

Baseado no teorema de Darboux generalizado (1.39), Faddeev e Jackiw propuseram a ideia de restringir o espaço de fase original do sistema, retirando as coordenadas não-canônicas $z = \{z^i\}$ ao encontrar equações que as relacionam com as coordenadas canônicas, $z^i = z^i(q, p)$. Isso pode ser inviável, no entanto, quando o processo de encontrar o sistema de coordenadas que satisfaz (1.39) não é trivial. A contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek faz algumas alterações que facilitam o procedimento e o tornam mais direto e algorítmico.

Contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek

A mudança no procedimento de Faddeev e Jackiw consiste em aumentar o espaço de fase de ω singular adicionando novas variáveis independentes não-físicas até encontrar uma variedade simplética da qual nosso espaço de fase físico é um subespaço. De fato, prova-se (por exemplo, em [12]) que **toda variedade pré-simplética é uma subvariedade de alguma variedade simplética**.

A ideia principal consiste em considerar os modos nulos de ω como geradores de vínculos dinâmicos, que devem obedecer a condições de consistência, e essas condições serão impostas nessa nova variedade. De fato, temos que cada modo nulo X de ω obedece

$$i_X\omega = 0,$$

mas se aplicarmos novamente o produto interior na relação anterior (que é uma igualdade entre 1-formas), contraindo-a com o campo vetorial Δ, temos

$$0 = i_\Delta i_X\omega = \omega(\Delta, X) = -\omega(X, \Delta) = -i_X i_\Delta\omega,$$

mas, utilizando as equações de Hamilton (1.25),

$$i_X i_\Delta\omega = i_X d\mathscr{H} = X(\mathscr{H}),$$

portanto, para cada vetor X, a equação (que também pode ser decomposta em suas componentes locais)

$$X(\mathscr{H}) = X^\mu \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^\mu} = 0$$

é considerada um *vínculo* da teoria. Se $\mathcal{N}(\omega)$ tiver m vetores não nulos, então teremos m equações de vínculo

$$\chi_a \equiv X_a(\mathscr{H}) = 0, \ (a = 1, 2, ..., m).$$

A cada passo do procedimento estaremos trabalhando em uma nova variedade de fase $\mathbb{F} \equiv \mathbb{P} \times \Sigma$, em que Σ é uma variedade m-dimensional, descrita localmente pelas coordenadas $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$. Nessa nova variedade é necessário impor condições de consistência nesses vínculos, fazendo

$$\dot{\chi}_a = 0,$$

e estas condições são incorporadas no sistema por meio das coordenadas $\{u^a\}$, que agem como multiplicadores de Lagrange em nossa Lagrangiana canônica, agora redefinida como

$$L_1(\xi) \equiv L(\xi) - \dot{\chi}_a u^a = L(\xi) - \frac{d}{dt}(\chi_a u^a) + \chi_a \dot{u}^a.$$

Mas lembrando que duas Lagrangianas que diferem entre si somente por um termo de derivada temporal total resultam na mesma dinâmica, podemos ignorar o termo $d(\chi_a u^a)/dt$, resultando em

$$L_1(\xi) = L(\xi) + \chi_a \dot{u}^a = \theta_\mu \dot{\xi}^\mu + \chi_a \dot{u}^a - H.$$

Já que as coordenadas generalizadas de nosso espaço de fase estendido são $\xi_1 = (q^i, p_\alpha, u^a)$, temos que a nova Lagrangiana canônica, como função dessas coordenadas, é

$$L_1(\xi_1) = \theta_{1,\mu} \dot{\xi}_1^\mu - H_1,$$

em que $H_1 = H|_{\chi_a = 0}$, já que nessa variedade a nulidade dos vínculos precisa ser obedecida. Isso nos induz a uma redefinição da 1-forma canônica, decomposta em coordenadas locais como

$$\theta_1 \equiv \theta + \chi_a du^a = \theta + \chi_a(q^i, p_\alpha) du^a,$$

enquanto a 2-forma canônica é redefinida como sua derivada exterior,

$$\omega_1 \equiv d\theta_1 = \omega + \frac{\partial \chi_a}{\partial q^i} dq^i \wedge du^a + \frac{\partial \chi_a}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \wedge du^a.$$

Esse método torna-se iterativo. Se ω_1 continuar singular, repetimos o procedimento, encontrando os vínculos $\chi_{1,a}$ por meio dos modos nulos de ω_1 e os utilizamos para expandir novamente o espaço de fase, obtendo as coordenadas locais $\xi_2 = (\xi_1, u, u_1)$. Redefinimos a Lagrangiana canônica,

$$L_2(\xi_2) = L_1(\xi_1) + \chi_{1,a}\dot{u}_1^a$$

assim obtendo a 1-forma canônica

$$\theta_2 = \theta_1 + \chi_{1,a}du_1^a.$$

Dessa forma podemos calcular a nova 2-forma canônica por meio de $\omega_2 = d\theta_2$, que se for regular implica no fim de nosso procedimento e se for singular significa que devemos passar para a próxima iteração.

Existe, no entanto, a possibilidade de ocorrer um problema caso a Lagrangiana apresente uma *simetria de gauge*. Durante alguma das iterações é possível que o cálculo de $\chi_a = X_a(\mathscr{H})$ para todo a resulte em uma identidade ($0 = 0$). Isso nos impede de continuar o procedimento, já que não haveria o que adicionar na Lagrangiana junto a um multiplicador de Lagrange.

A solução para esse problema, em tese, é simples. É necessário impor vínculos externos, dados por condições de gauge χ_a' coerentes e atingíveis. Estes serão incorporados na Lagrangiana como qualquer outro vínculo e o procedimento segue normalmente. Caso a 2-forma canônica continue singular, saberemos que o gauge não está fixado e precisaremos adicionar novas condições de calibre. Quando o gauge estiver inteiramente fixado, o resultado será uma 2-forma canônica simplética, o que marca o fim de nosso procedimento.

Geometricamente, o que ocorre nesse caso é que a simetria de gauge não é nada mais que uma redundância não só na dinâmica, mas nos próprios estados físicos do sistema. Ou seja, duas configurações relacionadas por uma transformação de gauge representam um mesmo estado físico. O que fazemos ao fixar o gauge é simplesmente "quocientar"o espaço de fase. Isso significa tomar como uma classe de equivalência todas aquelas configurações que representam o mesmo estado físico e considerar um novo espaço de fase cujas configurações são estas classes de equivalência, dessa forma eliminando a redundância. Falaremos mais a respeito das teorias de gauge nos próximos capítulos, quando estudarmos o campo eletromagnétco. Agora vejamos alguns exemplos da aplicação do método

de Faddeev-Jackiw que, apesar de simples, demonstram claramente sua estrutura.

Exemplo 1: Lagrangiana singular com espaço de fase simplético

Tomemos como primeiro exemplo um sistema ilustrativo de uma situação incomum: uma Lagrangiana com matriz Hessiana singular cujo espaço de fase é simplético e a 2-forma canônica é não-degenerada. Seja

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z})^2 + z\dot{y} + 2y\dot{z}.$$

É fácil perceber que a matriz Hessiana é

$$W = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que tem $\det W = 0$, portanto a Lagrangiana é singular. Esse sistema vive na variedade de configurações $\mathbb{Q} \cong \mathbb{R}^3$, cujo fibrado tangente, $T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$, é 6-dimensional. Fazendo a passagem para o formalismo hamiltoniano, temos os momentos canonicamente conjugados

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z},\ p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} + z = p_x + z,$$

$$p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} + 2y = p_x + 2y.$$

Dois deles, portanto, não são variáveis independentes, e sim equações de vínculo ($p_y = p_x + z,\ p_z = p_x + 2y$). Ao substituir na Hamiltoniana, temos

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2 - x\dot{y} - 2y\dot{z},$$

mas restringindo o fibrado cotangente para o espaço de fase ao aplicar os 2 vínculos,

$$\mathbb{P} \equiv T^*\mathbb{Q}|_{vinc.} \cong \mathbb{R}^4,$$

temos que a Hamiltoniana em $\mathbb{P}$ é

$$H|_{\mathbb{P}} = p_x\dot{x} + (p_x + z)\dot{y} + (p_x + 2y)\dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2 - x\dot{y} - 2y\dot{z}$$

$$= p_x(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}) + z\dot{y} + 2y\dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2 - x\dot{y} - 2y\dot{z} = p_x(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}) - \frac{1}{2}p_x^2.$$

Mas substituindo a definição de p_x, resulta simplesmente

$$H|_{\mathbb{P}} = \frac{1}{2}p_x^2.$$

A Lagrangiana canônica é, portanto

$$L(\xi) = p_x\dot{x} + (p_x + z)\dot{y} + (p_x + 2y)\dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2,$$

e com isso identificamos as variáveis canônicas $\xi|_{\mathbb{R}} = (x, y, z, p_x)$ e a 1-forma canônica

$$\theta|_{\mathbb{P}} = p_x dx + (p_x + z)dy + (p_x + 2y)dz.$$

Calculando sua derivada exterior, identificamos a 2-forma canônica

$$\omega|_{\mathbb{P}} = d\theta|_{\mathbb{P}} = dp_x \wedge dx + dp_x \wedge dy + dz \wedge dy + dp_x \wedge dz + 2dy \wedge dz$$

$$= dp_x \wedge dx + dp_x \wedge dy + dp_x \wedge dz + dy \wedge dz,$$

cuja matriz de componentes e dada por

$$\Omega|_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.41}$$

e é direto o cálculo do seu determinante, que resulta $\det \Omega|_{\mathbb{P}} = 1$. Isso significa que $\omega|_{\mathbb{P}}$ é não-degenerada, portanto simplética. Dessa forma, não há necessidade de analisar os modos nulos de $\omega|_{\mathbb{P}}$ (pois eles não existem) e utilizá-los para estender o espaço de fase. Podemos simplesmente inverter a matriz (1.41), obtendo

$$[\Omega|_{\mathbb{P}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e utilizar a relação (1.33) para determinar os parênteses de Poisson não nulos do sistema,

$$\{x, y\} = -1,\ \{x, z\} = 1,\ \{y, z\} = -1,\ \{x, p_x\} = 1.$$

Com isso a dinâmica está completamente determinada. Passemos agora para um exemplo cuja matriz Hessiana singular resulta em uma 2-forma canônica degenerada. Esses casos serão o foco de nosso trabalho, pois representam a situação em que o procedimento de Faddeev-Jackiw se torna realmente necessário.

Exemplo 2: Partícula na esfera

Considere o problema de uma partícula de massa unitária restrita a se mover na superfície de uma esfera de raio unitário. A Lagrangiana livre de uma partícula se movendo sobre um espaço tridimensional é

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2),$$

e essa Lagrangiana é regular. De fato, calculando sua matriz Hessiana, temos

$$W = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\vec{x}}\partial\dot{\vec{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que tem o determinante diferente de zero, como esperado. Esse sistema vive na variedade de configurações $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$, cujo fibrado tangente, $T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$, é 6-dimensional. O método tradicional para restringir seu movimento à superfície da esfera é a introdução de um vínculo externo $\chi = \vec{x}^2 - 1 = 0$ na Lagrangiana por meio do multiplicador de Lagrange $u = u(t)$. Isso resulta na nova Lagrangiana

$$L' = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2 - u(\vec{x}^2 - 1),$$

mas agora, para determinar a evolução temporal do sistema, também precisamos determinar a evolução temporal de $u(t)$. Isso significa que nossa variedade de configuração agora é $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$, cujas coordenadas locais são $\vec{x}' = (\vec{x}, u)$. O fibrado tangente é, portanto, $T\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^8$. Mas agora temos um problema: o fato de que não aparece na Lagrangiana um termo cinético dependente de $\dot{u}$ faz com que a matriz Hessiana,

$$W = \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{\vec{x}}' \partial \dot{\vec{x}}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

seja singular. Esse problema é refletido na passagem para o formalismo Hamiltoniano através da transformada de Legendre, já que os momentos canonicamente conjugados são

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \dot{\vec{x}}, \ \pi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0,$$

ou seja, $\pi = 0$ se torna uma equação de vínculo. A função Hamiltoniana, após a substituição das velocidades generalizadas pelos momentos, se torna

$$H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + u(\vec{x}^2 - 1).$$

e veremos que isso faz com que nossa 2-forma canônica seja também singular. De fato, a Lagrangiana canônica é dada por

$$L(\xi) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{p}^2 - u(\vec{x}^2 - 1), \tag{1.42}$$

o que nos permite identificar que ela vive na variedade de fase estendida simplética $\mathbb{F} = T^*\mathbb{Q} = T^*\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^8$, cujas coordenadas locais são $(\vec{x}, \vec{p}, u, \pi)$. Não só isso, mas a condição de vínculo $\pi = 0$ restringe a dinâmica a uma subvariedade 7-dimensional $\mathbb{P} \equiv \mathbb{F}|_{\pi=0} \cong \mathbb{R}^7$, com coordenadas generalizadas $\xi|_{\mathbb{P}} = (\vec{x}, \vec{p}, u)$. Nessa subvariedade, podemos identificar a 1-forma canônica,

$$\theta|_{\mathbb{P}} = \vec{p} \cdot d\vec{x},$$

através da simples comparação da Lagrangiana canônica (1.42) com sua definição (1.40). Assim a 2-forma canônica se torna

$$\omega|_{\mathbb{P}} = d\theta|_{\mathbb{P}} = dp_1 \wedge dx^1 + dp_2 \wedge dx^2 + dp_3 \wedge dx^3,$$

tendo como matriz de componentes,

$$\Omega|_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & \vec{0} \\ -I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

E essa matriz tem $\det \Omega = 0$, o que significa que $\mathbb{P}$ é uma variedade pré-simplética com $\omega|_{\mathbb{P}}$ degenerada, como esperado.[18] Devemos seguir para a primeira iteração do procedimento de Faddeev-Jackiw encontrando os modos nulos dessa matriz, que são os vetores do núcleo de $\omega|_{\mathbb{P}}$. De fato, tomamos $i_{X|_{\mathbb{P}}}\omega|_{\mathbb{P}} = \omega|_{\mathbb{P}}(X|_{\mathbb{P}}) = 0$, que matricialmente é representado pelo sistema linear,

$$\begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & \vec{0} \\ -I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O resultado desse sistema é o autovetor

$$X|^{\mu}_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix} \implies X|_{\mathbb{P}} = \frac{\partial}{\partial u},$$

a partir do qual calculamos a equação de vínculo,

$$\chi_1 \equiv X|_{\mathbb{P}}(H|_{\mathbb{P}}) = \frac{\partial H|_{\mathbb{P}}}{\partial u} = \vec{x}^2 - 1,$$

portanto a Hamiltoniana 1-iterada é

$$H_1 \equiv (H|_{\mathbb{P}})|_{\chi_1=0} = \frac{1}{2}\vec{p}^2$$

e a primeira iteração da Lagrangiana canônica, que vive na variedade de fase estendida $\mathbb{P} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^8$, com coordenadas locais $(\vec{x}, \vec{p}, u, u_1)$, se torna

$$L_1(\xi_1) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{p}^2 + (\vec{x}^2 - 1)\dot{u}_1$$

[18] Perceba que a subvariedade onde vive o sistema restrito tem dimensão ímpar, o que naturalmente faz com que seja impossível existir uma estrutura simplética nela. É esperado, portanto, que a 2-forma resultante nessa iteração seja degenerada.

$$= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + (\vec{x}^2 - 1)\dot{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{p}^2 \equiv \theta_{1,\mu}\dot{\xi}_1^\mu - H_1(\vec{x},\vec{p},u_1).$$

Perceba que agora a variável u também não aparece mais na Lagrangiana canônica, o que significa que podemos novamente restringir a dinâmica do sistema a uma subvariedade determinada pela equação de vínculo $u =$ constante. O resultado é a variedade $\mathbb{F}_1 \equiv \mathbb{R}^8|_{u=\text{cte.}} \cong \mathbb{R}^7$, com coordenadas locais $\xi_1 = (\vec{x},\vec{p},u_1)$ e 1-forma canônica $\theta_1 = \theta + (\vec{x}^2-1)du_1$, o que resulta

$$\omega_1 = d\theta_1 = d\theta + 2dx_1\wedge du_1 + 2dx_2\wedge du_1 + 2dx_3\wedge du_1,$$

matricialmente,

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 2\vec{x} \\ -I_{3\times3} & 0_{3\times3} & \vec{0} \\ -2\vec{x} & \vec{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz também tem $\det\Omega_1 = 0$, portanto ω_1 continua singular e devemos aplicar o método novamente.[19] O único modo nulo de ω_1 é

$$X_1^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} \implies X_1 = 2\vec{x}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + \frac{\partial}{\partial u},$$

portanto temos o vínculo

$$\chi_1 = X_1^\mu\frac{\partial H_1}{\partial\xi_1^\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\vec{x} \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial\vec{x}} & \frac{\partial H}{\partial\vec{p}} & \frac{\partial H}{\partial u} \end{bmatrix} = 2\vec{x}\cdot\vec{p}.$$

A segunda iteração da Lagrangiana canônica é, portanto,

$$L_2(\xi_2) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + (\vec{x}^2-1)\dot{u}_1 + 2\vec{x}\cdot\vec{p}\dot{u}_2 - H_1|_{\chi_1=0},$$

e agora o espaço de fase estendido é $\mathbb{F}_2 \equiv \mathbb{F}_1\times\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^8$, sem nenhum vínculo restante para ser imposto. Dessa forma temos as coordenadas locais $\xi_2 = (\vec{x},\vec{p},u_1,u_2)$ e identificamos a 1-forma canônica $\theta_1 = \theta_1 + 2\vec{x}\cdot\vec{p}du_2$. Assim,

$$\omega_2 = d\theta_2 = d\theta_1 + 2d(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)\wedge du_2$$

$$= d\theta_1 + 2x_1dp_1\wedge du_2 + 2p_1dx_1\wedge du_2 + 2x_2dp_2\wedge du_2 + 2p_2dx_2\wedge du_2$$

[19] Perceba que, novamente, a variedade onde vive nosso sistema tem dimensão ímpar.

$$+2x_3 dp_3 \wedge du_1 + 2p_3 dx_3 \wedge du_2,$$

portanto,

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 2\vec{x} & 2\vec{p} \\ -I_{3\times3} & 0_{3\times3} & \vec{0} & 2\vec{x} \\ -2\vec{x} & \vec{0} & 0 & 0 \\ -2\vec{p} & -2\vec{x} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa vez temos $\det \Omega_2 = 4(x_1 + x_2 + x_3)^2 \neq 0$, portanto ω_2 é uma forma simplética e o procedimento está finalizado. Conseguimos assim calcular a matriz inversa,

$$[\Omega_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & A_{3\times3} & -\frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} & \vec{0} \\ -A_{3\times3} & B_{3\times3} & \frac{\vec{p}}{2\vec{x}^2} & -\frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} \\ \frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} & -\frac{\vec{p}}{2\vec{x}^2} & 0 & -\frac{1}{2\vec{x}^2} \\ 0 & \frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} & \frac{1}{2\vec{x}^2} & 0 \end{bmatrix},$$

sendo

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\vec{x}^2},\ B_{ij} = \frac{1}{\vec{x}^2}(-x_i p_j + p_i x_j).$$

E com isso, por meio da relação $\{\xi_2^\mu; \xi_2^\nu\} = \omega_2^{\mu\nu}$, determinamos os parênteses de Poisson fundamentais do sistema para as variáveis físicas de nosso espaço de fase

$$\{x_i; x_j\} = 0,\ \{x_i; p_j\} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\vec{x}^2},\ \{p_i; p_j\} = \frac{1}{\vec{x}^2}(-x_i p_j + p_i x_j).$$

No presente exemplo e no anterior foi feito o esforço de identificar exatamente a variedade em que vivia nosso sistema em cada passo do procedimento, na intenção de deixar a lógica do processo muito clara. A partir do próximo, a aplicação do algoritmo será mais direta.

Exemplo 3: Lagrangiana com simetria de gauge

Tomemos agora a seguinte Lagrangiana, retirada de [10, 21], que representa uma partícula se movendo em um espaço tridimensional sob a ação de uma força que depende da distância da partícula ao eixo z,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y)z + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^2 - V(x^2 + y^2).$$

As equações de movimento são,

$$\begin{cases} \dot{y}z + xz^2 - \frac{\partial V}{\partial x} - \ddot{x} + \dot{y}z + y\dot{z} = 0, \\ -\dot{x}z + yz^2 - \frac{\partial V}{\partial y} - \ddot{y} - \dot{x}z - x\dot{z} = 0, \\ x\dot{y} - \dot{x}y + (x^2 + y^2)z = 0, \end{cases}$$

e os momentos canonicamente conjugados

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - yz,\ p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + xz,\ p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0,$$

a partir dos quais identificamos um vínculo na equação para p_z. Além disso, a função Hamiltoniana, após a substituição dos momentos, se torna

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (p_x y - p_y x)z + V(x^2 + y^2).$$

A Lagrangiana canônica é, portanto,

$$L(\xi) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - H(x, y, z, p_x, p_y),$$

o que nos permite identificar as variáveis canônicas, $\xi = (x, y, z, p_x, p_y)$ e a 1-forma canônica $\theta = p_x dx + p_y dy$. Portanto, a 2-forma canônica é

$$\omega = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy,$$

e sua matriz de componentes,

$$\Omega = \begin{bmatrix} & & & -1 & 0 \\ & 0_{3\times 3} & & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0_{2\times 2} & \end{bmatrix}.$$

Essa matriz é singular, portanto seguimos ao primeiro passo do procedimento, encontrando o modo nulo

$$X = \frac{\partial}{\partial z},$$

o que implica na equação de vínculo

$$\chi = \frac{\partial H}{\partial z} = xp_y - yp_x = 0.$$

Nossa Hamiltoniana 1-iterada é, portanto,

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x^2 + y^2)$$

e nossa Lagrangiana canônica, após a adição de um novo grau de liberdade, se torna

$$L_1(\xi_1) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + (xp_y - yp_x)\dot{u} - H_1(x, y, p_x, p_y),$$

nos permitindo identificar novamente as variáveis canônicas, $\xi_1 = (x, y, p_x, p_y, u)$, já que z não aparece mais na Lagrangiana. A 1-forma canônica se torna $\theta_1 = \theta + (xp_y - yp_x)du$ e portanto

$$\omega_1 = \omega + xdp_y \wedge du + p_y dx \wedge du - p_x dy \wedge du - ydp_x \wedge du,$$

$$\therefore \Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ -p_y & p_x & y & -x & 0 \end{bmatrix},$$

que também é singular, portanto devemos seguir para a segunda iteração. O único modo nulo de ω_1 é

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + p_y\frac{\partial}{\partial p_x} - p_x\frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{\partial}{\partial u},$$

resultando na equação de vínculo

$$\chi_1 = y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Mas perceba que a dependência de V nas variáveis x e y é dada por $V(x^2 + y^2)$, portanto temos que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial(x^2 + y^2)} = 2x\frac{\partial V}{\partial(x^2 + y^2)},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial(x^2 + y^2)} = 2y\frac{\partial V}{\partial(x^2 + y^2)},$$

dessa forma,

$$\chi_1 = 2xy\frac{\partial V}{\partial(x^2+y^2)} - 2xy\frac{\partial V}{\partial(x^2+y^2)} = 0,$$

e assim a equação de vínculo se torna uma identidade ($0 = 0$). Como comentamos anteriormente, isso é indicativo de uma simetria interna. Analisemos a Lagrangiana no sistema de coordenadas cilíndrico ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z) para compreender essa simetria. De fato, temos que

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

portanto

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - zr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}x^2r^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - z)^2] - V(r). \end{aligned}$$

Perceba que L não depende da coordenada θ, portanto a transformação

$$\theta \to \theta' = \theta + \alpha,$$
$$r \to r' = r,\ z \to z' = z,$$

é uma transformação de gauge (que nesse caso chamamos de transformação *global*, pois nosso parâmetro α é constante). Se quisermos que essa transformação seja *local*, fazemos com que o parâmetro dependa do tempo, $\alpha(t)$, mas para compensar o termo $\dot{\theta} - z$ na Lagrangiana precisamos alterar a transformação do parâmetro z,

$$\theta \to \theta' = \theta + \alpha(t),$$
$$r \to r' = r,\ z \to z' = z + \dot{\alpha}(t).$$

A escolha de gauge mais simples é $y = 0$, que é atingível, pois a equação para α deduzida por meio da condição de gauge pode ser resolvida exatamente. De fato, voltando às coordenadas cartesianas, uma rotação de um ângulo constante α no plano (x, y) resulta

$$x \to x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y \to y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$
$$z \to z' = z + \dot{\alpha}$$

e portanto, para aplicar a condição de gauge $y' = 0$, é necessário que

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \implies \tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

Aplicamos essa condição, $\chi_1' = y = 0$, na Lagrangiana canônica,

$$L_2(\xi_2) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + (xp_y - yp_x)\dot{u} + y\dot{u}_1 - \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - V(x),$$

e assim podemos identificar as novas variáveis canônicas, $\xi_2 = (x, y, p_x, p_y, u, u_1)$, e a 1-forma canônica $\theta_2 = \theta_1 + ydu_1$. A 2-forma canônica resultante tem matriz de componentes

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ -p_y & p_x & y & -x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que é regular, pois $\det\Omega_2 = x^2$, e portanto podemos calcular sua inversa,

$$[\Omega_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{y}{x} & 0 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{p_y}{x} & 0 & \frac{p_y}{x} \\ -\frac{y}{x} & 0 & -\frac{p_y}{x} & 0 & -\frac{1}{x} & -\frac{p_x}{x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x} \\ -\frac{y}{x} & 1 & -\frac{p_y}{x} & \frac{p_x}{x} & -\frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir dessa matriz, conseguimos finalmente identificar os parênteses de Poisson não-nulos de nosso sistema, que são

$$\{x, p_x\} = 1,\ \{x, p_y\} = \frac{y}{x},\ \{p_x, p_y\} = \frac{p_y}{x},$$

ou, aplicando os dois vínculos ($\chi_1 = y = 0$, $\chi = xp_y - yp_x = 0$), o único PP não-nulo restante é

$$\{x, p_x\} = 1.$$

Este exemplo é importante e ilustrativo, pois nos próximos capítulos falaremos a respeito de *teorias de gauge*, que possuem, fundamentalmente, a mesma estrutura simplética que a Lagrangiana desse problema. Veremos que, assim como fizemos

aqui, para lidar com o campo eletromagnético chegaremos em uma iteração do procedimento que não fornece mais vínculos dinâmicos e que exige que fixemos uma condição de gauge para continuar.

Referências

[1] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics, Third Edition*. Pearson Education, 2011.

[2] N. A. Lemos. *Mecânica Analítica*. LF Editorial, 2007.

[3] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. *An Introduction to Geometrical Physics, Second Edition*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2017.

[4] J. José and E. Saletan. *Classical dynamics - A contemporary approach*. Cambridge University Press, 1998.

[5] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, 2003.

[6] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Texts in applied mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[7] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[8] G. Marmo, E. Saletan, A. Simoni, and B. Vitale. *Dynamical Systems: a Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction*. John Wiley & Sons, 1985.

[9] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics, Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1978.

[10] L. G. C. Mendoza. Estrutura simplética em sistemas singulares à la Faddeev-Jackiw. Master's thesis, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2020.

[11] X. Gràcia, J. de Lucas, X. Rivas, and N. Román-Roy. On Darboux theorems for geometric structures induced by closed forms. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, pages 118 – 131, 2024.

[12] P. Libermann and C. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and Its Applications. D. Reidel Publishing Company, 2012.

[13] E. L. Lima. *Álgebra linear*. IMPA, 2020.

[14] A. Da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2006.

[15] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1994.

[16] B. Felsager. *Geometry, Particles and Fields*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, 1983.

[17] L. Faddeev and R. Jackiw. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Physical Review Letters*, 60(17):1692–1694, 1988.

[18] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw quantization and constraints. *International Journal of Modern Physics*, 7(20):4981–5003, 1992.

[19] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Symplectic quantization of constrained systems. *Modern Physics Letters A*, 7(19):1737–1747, 1992.

[20] M. C. Bertin and B. M. Pimentel. Symplectic quantization of the BF gravity in 1+1 dimensions. *International Journal of Modern Physics A*, 40(24), 2025.

[21] N. H. Christ and T. D. Lee. Operator ordering and Feynman rules in gauge theories. *Physical Review D, Volume 22, Number 4*, 1980.

Capítulo 2

Teoria clássica de campos

Para descrever a dinâmica de sistemas de campos clássicos precisamos adaptar a matemática utilizada anteriormente na dinâmica de partículas. De fato, na mecânica clássica discreta as configurações de nosso sistema são descritas localmente por uma n-upla $q = \{q^i\}$ de números reais e globalmente por um ponto $\mathbf{q}$ na variedade de configurações $\mathbb{Q}$. Por outro lado, as configurações de um sistema de campos são descritas localmente pelas *funções de campo* (ou *histórias*) $\phi(x) \equiv \{\phi^a(x)\}$, que são uma n-upla de funções ϕ^a cujo argumento são as coordenadas locais $x \equiv \{x^\mu\}$ de uma variedade diferenciável que chamamos de *espaço-tempo* $\mathcal{M}$. Perceba que, nesse caso, uma configuração é descrita por funções que associam **um valor real a cada ponto do espaço-tempo**,[1] dessa forma é necessária uma coleção **infinita** de números para descrever um estado físico. É por isso que dizemos que estes sistemas têm *infinitos graus de liberdade*.

A variedade de configurações de um sistema de campos clássicos que vive sob um espaço-tempo d-dimensional é, portanto, **localmente** um espaço vetorial de dimensão infinita cujos componentes são mapas $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$) que levam a d-upla de coordenadas locais $x = \{x^\mu\}$ do espaço-tempo até a n-upla de configurações $\phi(x) = \{\phi^a(x)\}$. Se escolhermos, por exemplo, que nossa variedade de configurações seja localmente descrita por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, então temos que nosso sistema físico é descrito por um campo escalar real ϕ sobre $\mathcal{M}$. Se escolhemos $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, nosso sistema é descrito por um escalar complexo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Se, por outro lado, tomarmos $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, então teremos localmente a variedade de configurações de um campo vetorial sobre $\mathcal{M}$, e esse é o caso do potencial A^μ, que descreve o campo eletromagnético.

A respeito da descrição **global** da variedade de configurações de campos clássicos, no entanto, é necessária uma estrutura consideravelmente mais complexa, pois um objeto cujas coordenadas locais mapeiam seus abertos em um espaço

[1] Mais geralmente, é possível construir sistemas que associam valores complexos (como o campo escalar complexo) ou uma n-upla de valores (como o campo eletromagnético) a cada ponto do espaço-tempo.

vetorial de dimensão infinita não é o mesmo de uma variedade diferenciável tradicional, que mapeia seus abertos em $\mathbb{R}^n$. Não trataremos desse tópico aqui, pois todas as análises serão locais, mas para o leitor interessado, ver [1, 2, 3, 4, 5].

2.1 Sistemas regulares

Neste trabalho a evolução temporal dos campos será determinada pelo que chamamos da *dinâmica instantânea*, que é obtida por foliações do espaço-tempo m-dimensional de Minkowski em superfícies tipo espaço Σ. Além disso, a convenção de métrica será a chamada "mostly minus", ou seja, $g = \text{diag}(+, \underbrace{-, ..., -}_{\text{d-1 vezes}})$.

A discussão a respeito da dinâmica clássica de sistemas e sua regularidade é completamente equivalente para o caso de infinitos graus de liberdade, com a diferença que nossa Lagrangiana L agora é um funcional dos campos, definido pela integral na hiperfície Σ de uma *densidade Lagrangiana* $\mathcal{L}$,

$$L[\phi, \partial_\mu \phi] \equiv \int_\Sigma d^{d-1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{2.1}$$

em que $\phi \equiv \{\phi^a\}, (a = 1, 2, ..., n)$ é o conjunto de componentes das configurações locais de um campo. A ação entre os tempos t_1 e t_2 é, portanto

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Sigma d^{d-1}x \mathcal{L} = \int_{\mathcal{M}'} d^d x \mathcal{L}, \tag{2.2}$$

em que $\mathcal{M}' \equiv \Sigma \times [t_1, t_2]$ é a fatia do espaço-tempo contida entre as hiperfícies tipo espaço definidas por $t = t_1$ e $t = t_2$. O princípio variacional de Hamilton resulta novamente nas *equações de Euler-Lagrange*,

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \Big) = 0, \tag{2.3}$$

que determinam, para um sistema regular, a evolução temporal das configurações que torna a ação estacionária, assim como na mecânica clássica. A determinação da regularidade de um sistema é dada por meio do determinante funcional da matriz Hessiana, que é definida por

$$W_{ab}(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\phi}^a(\vec{x}) \delta \dot{\phi}^b(\vec{y})} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{x})}{\partial \dot{\phi}^a \partial \dot{\phi}^b} \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.4}$$

com $\mathcal{L}(\vec{x}) = \mathcal{L}(\phi(\vec{x}), \partial^x_\mu \phi(\vec{x}))$, em que $\vec{x}$ é a parte espacial do evento $x = (x^0, \vec{x})$.

Geometria diferencial funcional

Na presente seção apresentaremos algumas definições, que podem ser interpretadas como meras generalizações para infinitos graus de liberdade dos objetos da geometria diferencial tradicional. Essas noções foram retiradas, principalmente, de [6, 7, 8]. Para o leitor interessado em uma análise mais aprofundada dos objetos geométricos de uma variedade de configurações de campos clássicos, recomenda-se as referências já citadas. Os objetos, que antes eram operadores diferenciais que agiam sobre as funções em $T\mathbb{Q}$, agora devem se tornar operadores diferenciais que agem sobre funcionais, ou seja, *derivadas funcionais*.[2] Um campo vetorial funcional $X \in \mathfrak{X}(T\mathbb{Q})$, que na mecânica clássica era decomposto em um sistema de coordenadas local $\xi = (q, \dot{q})$ como $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}$, agora se torna

$$X[X(\vec{x})] = \int_\Sigma X^\mu(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \xi^\mu(\vec{x})} d^{d-1}x, \tag{2.5}$$

em que $\{\xi^\mu(\vec{x})\} \equiv \{\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x})\}$ e $\vec{x} = (x^1, ..., x^{m-1})$ são as coordenadas espaciais de Σ. Importante ressaltar que o operador diferencial funcional dentro da integral age sobre o funcional na qual esse objeto geométrico será aplicado, muito semelhantemente ao caso da geometria diferencial discreta. Ou seja, suponha que tenhamos um funcional (por exemplo, a Lagrangiana ou a Hamiltoniana do sistema)

$$E[E(\vec{x})] = \int_\Sigma E(\vec{x}) d^{d-1}x = \int_\Sigma E(\xi(\vec{x}), \partial_i \xi(\vec{x})) d^{d-1}x,$$

então ação do campo vetorial X sobre E será

$$\begin{aligned} X(E) &= \int_{\Sigma\times\Sigma} X^\mu(\vec{x}) \frac{\delta E(\vec{y})}{\delta \xi^\mu(\vec{x})} d^{d-1}x d^{d-1}y \\ &= \int_{\Sigma\times\Sigma} X^\mu(\vec{x}) \Big[\frac{\partial E(\vec{y})}{\partial \xi^\mu} - \partial_i \Big(\frac{\partial E(\vec{y})}{\partial(\partial_i \xi^\mu)} \Big) \Big] \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y}) d^{d-1}x d^{d-1}y \\ &= \int_\Sigma X^\mu(\vec{x}) \Big[\frac{\partial E(\vec{x})}{\partial \xi^\mu} - \partial_i \Big(\frac{\partial E(\vec{x})}{\partial(\partial_i \xi^\mu)} \Big) \Big] d^{d-1}x, \end{aligned} \tag{2.6}$$

cujo resultado é um número (real ou complexo). As 1-formas funcionais, que antes eram decompostas em uma base local por $\alpha = \alpha_\mu d\xi^\mu$, se tornam

[2] Formalmente, os operadores diferenciais funcionais são definidos por meio da *derivada de Fréchet* ou da *derivada de Gateaux*. Ver [9].

$$\alpha[\alpha(\vec{x})] = \int_\Sigma \alpha_\mu(\vec{x})\delta\xi^\mu(\vec{x})d^{d-1}x. \tag{2.7}$$

A base $\{\delta\xi^\mu(\vec{x})\}$ de $\Omega(T\mathbb{Q})$ é a dual da base $\{\delta/\delta\xi^\mu(\vec{x})\}$ de $\mathfrak{X}(T\mathbb{Q})$, sendo a relação entre as duas dada por

$$\delta\xi^\mu(\vec{x})\Big[\frac{\delta}{\delta\xi^\nu(\vec{y})}\Big] = \delta^\mu_\nu\delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{2.8}$$

A decomposição de uma 2-forma diferencial, por outro lado, é dada por

$$\beta = \int_{\Sigma\times\Sigma}\frac{1}{2}\beta_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y})\delta\xi^\mu(\vec{x})\wedge\delta\xi^\nu(\vec{y})d^{d-1}xd^{d-1}y. \tag{2.9}$$

Os campos tensoriais de ordem maior se traduzem equivalentemente. A operação de derivada exterior em uma p-forma genérica agora é

$$\begin{aligned}\delta\omega_p &\equiv \delta\Big[\int_{\Sigma^p}\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p)\delta\xi^{\mu_1}(\vec{x}_1)\wedge\ldots\wedge\delta\xi^{\mu_p}(\vec{x}_p)d^{d-1}x_1\ldots d^{d-1}x_p\Big]\\ &\equiv\int_\Sigma\Big[\int_{\Sigma^p}\frac{1}{p!}\frac{\delta}{\delta\xi^\nu(\vec{y})}\Big(\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p)\Big)\delta\xi^\nu(\vec{y})\wedge\delta\xi^{\mu_1}(\vec{x}_1)\wedge\ldots\\ &\qquad\ldots\wedge\delta\xi^{\mu_p}(\vec{x}_p)d^{d-1}x_1\ldots d^{d-1}x_p\Big]d^{d-1}y,\end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo $\Sigma^p \equiv \overbrace{\Sigma\times\ldots\times\Sigma}^{\text{p vezes}}$. Perceba que, de acordo com essa definição, a variação de um funcional como conhecemos tradicionalmente não é nada mais que a derivada exterior de uma 0-forma diferencial funcional (ou simplesmente um funcional). A derivada exterior funcional δ é, portanto, uma mera generalização dessa operação. A ação de uma 1-forma em um campo vetorial, que também define o produto interior, é, portanto

$$\begin{aligned}i_X\alpha \equiv \alpha(X) &\equiv \int_\Sigma\alpha_\mu(\vec{x})\delta\xi^\mu(\vec{x})d^{d-1}x\Big(\int_\Sigma X^\nu(\vec{y})\frac{\delta}{\delta\xi^\nu(\vec{y})}d^{d-1}y\Big)\\ &=\int_{\Sigma^2}\alpha_\mu(\vec{x})X^\nu(\vec{y})\delta\xi^\mu(\vec{x})\Big(\frac{\delta}{\delta\xi^\nu(\vec{y})}\Big)d^{d-1}xd^{d-1}y\\ =\int_{\Sigma^2}\alpha_\mu(\vec{x})X^\mu(\vec{y})\delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y})d^{d-1}xd^{d-1}y &= \int_\Sigma\alpha_\mu(\vec{x})X^\mu(\vec{x})d^{d-1}x.\end{aligned} \tag{2.11}$$

O produto interior agindo em formas de ordem maior é definido de maneira análoga. As definições de produto exterior, derivada de Lie e a ação de formas

diferenciais de ordem maior em outros campos também seguem naturalmente.

É direta a percepção que uma soma implícita em um índice mudo nas definições acima sempre acompanha uma integral em alguma variável muda. Levando isso em conta, a partir daqui usaremos uma versão ainda mais compacta da notação de Einstein para o somatório (em algumas referências conhecida como a *notação de DeWitt* [10]), em que toda soma em um índice mudo **da variedade de fase** (ou do fibrado tangente)[3] implica em uma integral em uma variável muda também. Isso faz as expressões (2.5), (2.7), (2.9), (2.10) e (2.11) se tornarem, respectivamente,

$$\alpha = \alpha_\mu \delta\xi^\mu,\ X = X^\mu \frac{\delta}{\delta\xi^\mu},\ \beta = \beta_{\mu\nu}\delta\xi^\mu \wedge \delta\xi^\nu,$$

$$\delta\omega_p = \frac{1}{p!}\frac{\delta}{\delta\xi^\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\delta\xi^\nu \wedge \delta\xi^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \delta\xi^{\mu_p},\ i_X\alpha = \alpha_\mu X^\mu.$$

2.1.1 Geometria simplética funcional

Assim como no caso com finitos graus de liberdade, um *sistema Hamiltoniano* na teoria de campos é dado pela tripla $(\mathbb{F}, \omega, \mathscr{H})$, em que $(\mathbb{F}, \omega)$ é uma variedade simplética,[4] com $\mathbb{F}$ representada localmente por um espaço de funções ou tensores sobre o espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{M}$, ω uma 2-forma simplética, decomposta localmente em um sistema de coordenadas de Darboux[5] $\xi \equiv \{\xi^\mu\} = (\phi, \pi) = (\{\phi^a\}, \{\pi_a\})$ como

$$\omega = \omega_{\mu\nu}\delta\xi^\mu \wedge \delta\xi^\nu = \delta\pi_a \wedge \delta\phi^a. \tag{2.12}$$

Se escrevermos explicitamente as integrais, essa expressão se torna

$$\omega = \int \delta^a_b \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y})\delta\pi_a(\vec{x}) \wedge \delta\phi^b(\vec{y}) d^{d-1}x d^{d-1}y, \tag{2.13}$$

portanto as componentes desse objeto são escritas matricialmente como

[3] É importante notar que essa convenção se aplica **somente** a objetos geométricos, como formas diferenciais ou campos vetoriais. Objetos como a densidade Lagrangiana continuarão contendo somas implícitas, mas nenhuma integral. Espera-se que de acordo com o contexto fique claro onde há uma integral implícita e onde não há.

[4] Para ser mais preciso matematicamente, o formalismo da geometria simplética na teoria de campos é chamado de *formalismo k-simplético* ou *formalismo multisimplético*. Ver [3, 4, 5]. Neste trabalho, no entanto, continuaremos chamando de *formalismo simplético*, pois não nos aprofundaremos nos assuntos que diferenciam um formalismo do outro.

[5] Demonstrações do teorema de Darboux em variedades k-simpléticas e k-pré-simpléticas podem ser encontradas em [11].

$$\Omega(x,y) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{2.14}$$

E o funcional $\mathscr{H}$ é o *funcional de Hamilton*, cuja versão local $H(\phi,\pi)$ é dada pela transformada de Legendre da Lagrangiana,

$$H \equiv \int d^{d-1}x\mathcal{H}(\phi,\pi) = \int d^{d-1}x(\pi_a\dot{\phi}^a - \mathcal{L}), \tag{2.15}$$

em que

$$\pi_a \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^a} \tag{2.16}$$

são os momentos canônicos conjugados e

$$\mathcal{H} \equiv \pi_a\dot{\phi}^a - \mathcal{L} \tag{2.17}$$

é a *densidade Hamiltoniana* do sistema. A partir do funcional de ação e de um princípio variacional deduzimos as *equações canônicas de Hamilton*,

$$\dot{\phi}^a = \frac{\delta H}{\delta\pi_a},\ \dot{\pi}_a = \frac{\delta H}{\delta\phi^a}. \tag{2.18}$$

que são escritas em termos das coordenadas unificadas de $T^*\mathbb{Q}$ como

$$\frac{\delta H}{\delta\xi^\mu} = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu, \tag{2.19}$$

em que $\omega_{\mu\nu}$ são as componentes da forma simplética funcional. Podemos igualmente encontrar a versão global dessa equação,

$$i_\Delta\omega = \delta\mathscr{H}, \tag{2.20}$$

em que

$$\Delta \equiv \dot{\xi}^\mu\frac{\delta}{\delta\xi^\mu} = \dot{\phi}^a\frac{\delta}{\delta\phi^a} + \dot{\pi}_a\frac{\delta}{\delta\pi_a} \tag{2.21}$$

é o campo vetorial dinâmico na variedade de fase. Assumimos que um elemento canônico pode novamente ser definido por meio da estrutura de fibrado de $\mathbb{F}$, que se estendido para toda a variedade resulta na 1-forma de Liouville,

$$\theta = \pi_a\delta\phi^a, \tag{2.22}$$

e sua derivada exterior é a forma simplética (2.12).

A evolução temporal de um observável é dada pelas curvas integrais do campo vetorial dinâmico Δ

$$\dot{F} = \frac{\delta F}{\delta \phi^a}\frac{\delta H}{\delta \pi_a} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a}\frac{\delta H}{\delta \phi^a} \tag{2.23}$$

ou, explicitando a integral,

$$\dot{F} = \int \Big(\frac{\delta F}{\delta \phi^a(\vec{x})}\frac{\delta H}{\delta \pi_a(\vec{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a(\vec{x})}\frac{\delta H}{\delta \phi^a(\vec{x})}\Big) d^{d-1}x$$

e essa é precisamente a definição dos *parênteses de Poisson a tempos iguais*

$$\{F(\vec{x},t); G(\vec{y},t)\} = \int \Big(\frac{\delta F}{\delta \phi^a(\vec{z})}\frac{\delta G}{\delta \pi_a(\vec{z})} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a(\vec{z})}\frac{\delta G}{\delta \phi^a(\vec{z})}\Big) d^{d-1}z, \tag{2.24}$$

ou, em termos das coordenadas unificadas $\xi = (\phi, \pi)$,

$$\{F; G\} \equiv \int \frac{\delta F}{\delta \xi^\mu(\vec{x})}\omega^{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y})\frac{\delta G}{\delta \xi^\nu(\vec{y})} d^{d-1}x d^{d-1}y = \frac{\delta F}{\delta \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\delta G}{\delta \xi^\nu}, \tag{2.25}$$

em que na última igualdade voltamos a omitir as integrais. A partir desse resultado obtemos os PP fundamentais

$$\omega^{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y}) = \{\xi^\mu(\vec{x}); \xi^\nu(\vec{y})\}, \tag{2.26}$$

e este será o objeto utilizado na quantização canônica de um sistema. Agora veremos um breve exemplo de como aplicar esse formalismo em um caso simples, mas importante.

Exemplo 1: Campo escalar complexo

A (densidade)[6] Lagrangiana mais simples de um campo escalar complexo livre é dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \tag{2.27}$$

[6] É comum na literatura "esquecer" da palavra *densidade* e chamar à quantidade $\mathcal{L}$ somente de *Lagrangiana*. A partir deste ponto adotaremos a mesma linguagem.

cujas equações de movimento são calculadas de acordo com (2.3). De fato, um campo complexo possui dois graus de liberdade: sua componente real e sua componente imaginária. Podemos equivalentemente considerar as quantidades ϕ e ϕ^* como graus de liberdade independentes e a informação que teremos a respeito da dinâmica será exatamente a mesma. Nesse caso, as equações de E-L são

$$(\Box + m^2)\phi = 0,\ (\Box + m^2)\phi^* = 0. \tag{2.28}$$

Além disso, temos que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*\partial\dot{\phi}^*} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}\partial\dot{\phi}} = 0,\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*\partial\dot{\phi}} = 1,$$

portanto a matriz Hessiana é

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y}),$$

que tem $\det W = -1$, portanto nosso sistema é regular. Calculamos os momentos canônicos,

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^*,\ \pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = \dot{\phi}, \tag{2.29}$$

e com isso construímos a (densidade)[7] Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi^*\pi + \partial_i\phi^*\partial_i\phi + m^2\phi^*\phi. \tag{2.30}$$

As equações de Hamilton resultam

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \pi^*,\ \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta\phi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} + \partial_i\Big(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi)}\Big) = \partial_i\partial_i\phi^* - m^2\phi^*$$

$$\dot{\phi}^* = \frac{\delta H}{\delta\pi^*} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^*} = \pi,\ \dot{\pi}^* = -\frac{\delta H}{\delta\phi^*} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^*} + \partial_i\Big(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi^*)}\Big) = \partial_i\partial_i\phi - m^2\phi.$$

Além disso, a 1-forma de Liouville é meramente

$$\theta = \pi\delta\phi + \pi^*\delta\phi^*, \tag{2.31}$$

e levando em conta que as coordenadas canônicas são $\xi = (\phi, \phi^*, \pi, \pi^*)$, calcula-

[7] Deixaremos de usar a palavra *densidade* para nos referir ao objeto $\mathcal{H}$ também.

mos a forma simplética

$$\omega = \delta\pi \wedge \delta\phi + \delta\pi^* \wedge \delta\phi^*, \tag{2.32}$$

representada matricialmente por

$$\Omega(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & -I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix} \delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{2.33}$$

Sua inversa é

$$\Omega^{-1}(\vec{x},\vec{y}) = -\Omega(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ -I_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix} \delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.34}$$

portanto temos os parênteses de Poisson fundamentais, de acordo com (2.26),

$$\{\phi,\pi\} = \delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y}),\ \{\phi^*,\pi^*\} = \delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{2.35}$$

que são os PP canônicos já conhecidos na literatura.

2.2 Sistemas singulares

A generalização para geometria pré-simplética no caso contínuo (ou seja, o que os matemáticos chamam de geometria *k-pré-simplética*) é natural. O elemento canônico do fibrado cotangente $T^*\mathbb{Q}$ resulta na *1-forma canônica*,

$$\theta = \pi_a \delta\phi^a, \tag{2.36}$$

cuja derivada exterior é a definição da 2-forma canônica,

$$\omega \equiv \delta\pi_a \wedge \delta\phi^a. \tag{2.37}$$

Ao impor os vínculos resultantes da transformada de Legendre,

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\alpha} = \pi_\alpha(\phi^a,\pi_a), \tag{2.38}$$

definimos a subvariedade de $T^*\mathbb{Q}$ onde vive a dinâmica do sistema, que é o que chamamos de *variedade de fase*, $\mathbb{P} \equiv T^*\mathbb{Q}|_{\pi_\alpha=\pi_\alpha(\phi,\pi)\forall\alpha}$. E quando restrita a essa subvariedade, (2.38) passa a ser uma forma *pré-simplética*, ou seja, fechada mas possivelmente degenerada. A dinâmica é novamente determinada pela

Lagrangiana canônica

$$L(\xi(\vec{x})) = \int [\theta_\mu(\vec{x})\dot{\xi}^\mu(\vec{x}) - \mathcal{H}(\xi(\vec{x}))]d^{d-1}x,$$

ou, em termos de sua densidade,

$$\mathcal{L}(\xi) = \theta_\mu \dot{\xi}^\mu - \mathcal{H}(\xi). \tag{2.39}$$

As equações de movimento resultantes dessa Lagrangiana são precisamente as equações de Hamilton,

$$\frac{\delta L}{\delta \xi^\mu} = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\delta H}{\delta \xi^\mu} = 0. \tag{2.40}$$

2.2.1 Faddeev-Jackiw na teoria de campos

O procedimento de encontrar a variedade simplética da qual nossa variedade de fase pré-simplética é uma subvariedade segue igualmente. Para cada modo nulo de ω, agora calculado por meio da equação de autovalor para matrizes funcionais,

$$\int \Omega(\vec{x};\vec{y})X(\vec{y})d^{d-1}y = a(\vec{x})X(\vec{x}), \tag{2.41}$$

que, para o autovalor $a(\vec{x}) = 0$, nos dá uma equação de vínculo

$$\chi = X(H) = X^\mu \frac{\delta H}{\delta \xi^\mu} \tag{2.42}$$

ou, explicitando a integral,

$$\chi = \int X^\mu(\vec{x}) \frac{\delta H}{\delta \xi^\mu(\vec{x})} d^{d-1}x.$$

Isso nos permite redefinir a Lagrangiana canônica,

$$\mathcal{L}_1(\xi) = \theta_{1,\mu}\dot{\xi}_1^\mu - \mathcal{H}|_{\chi=0}, \tag{2.43}$$

a partir da qual identificamos as novas variáveis e a 1-forma canônica no espaço de fase estendido. O procedimento segue iterativamente até obtermos uma forma simplética (ou até encontrarmos uma identidade como resultante da equação de vínculo, o que exige que fixemos uma condição de gauge).

A seguir, ilustraremos esse procedimento para o caso mais tradicional de um sistema singular na teoria de campos: o campo eletromagnético. Além disso, o

leitor interessado em mais aplicações pode conferir, por exemplo, [12, 13, 14].

Exemplo 2: Campo eletromagnético

Somente neste exemplo não usaremos a notação de soma e integral de DeWitt, de forma a exibir mais claramente os cálculos do procedimento (usaremos somente a soma implícita de Einstein). A partir do próximo e até o final deste texto a notação será recuperada.

Para ilustrar o método de Faddeev-Jackiw, iremos aplicá-lo para o mais tradicional sistema singular na teoria de campos, o campo eletromagnético, cuja Lagrangiana é, no sistema de unidades naturais ($c = 1$),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{2.44}$$

em que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de Faraday. Em um espaço-tempo 4-dimensional ele toma sua forma mais conhecida, que é

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} E^i = F^{0i}, \ (i = 1,2,3) \\ B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk}, \ (i,j,k = 1,2,3). \end{cases} \tag{2.45}$$

Neste exemplo, no entanto, não fixaremos a dimensão do espaço-tempo, ao invés disso a considerando como simplesmente $d = (m+1)$, e o leitor perceberá que as expressões mais importantes do procedimento não se alteram em nada pela escolha da dimensionalidade. A primeira coisa que fazemos em nossa análise é calcular a matriz Hessiana, que é um resultado simples ao perceber que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -\dot{A}_i + \partial_i A_0,$$

o que implica

$$W(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x} - \vec{y}),$$

e tem obviamente determinante nulo, portanto o sistema é realmente singular,

como esperado. O próximo passo é calcular os momentos conjugados aos campos, resultando em

$$\pi_\mu = F_{\mu 0}, \tag{2.46}$$

e imediatamente percebemos que, devido à antissimetria do tensor de Faraday, $\pi_0 = F_{00} = 0$, e isso resulta em um vínculo do sistema. Os outros momentos canônicos, por outro lado, são

$$\pi_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \partial_i A_0 - \dot{A}_i = \partial_i A_0 + \dot{A}^i.$$

A partir deles encontramos a Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_i \pi_i - \pi_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}, \tag{2.47}$$

o que faz com que a Lagrangiana canônica seja

$$\mathcal{L}(\xi) = \pi_i \dot{A}^i - \frac{1}{2}\pi_i \pi_i + \pi_i \partial_i A_0 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}. \tag{2.48}$$

Assim, ao aplicar a equação de vínculo $\pi_0 = 0$, nossas coordenadas canônicas são $\xi = (A^0, A^i, \pi_i)$ e nossa 1-forma canônica se torna

$$\theta = \int \pi_i(\vec{x}) \delta A^i(\vec{x}) d^m x. \tag{2.49}$$

A partir disso calculamos sua derivada exterior para encontrar a 2-forma canônica

$$\omega = \delta\theta = \int \frac{\delta \pi_i(\vec{x})}{\delta \xi^\mu(\vec{y})} \delta\xi^\mu(\vec{y}) \wedge \delta A^i(\vec{x}) d^m x d^m y$$

$$= \int \frac{\delta \pi_i(\vec{x})}{\delta \pi_j(\vec{y})} [-\delta A^i(\vec{x}) \wedge \delta \pi_j(\vec{y})] d^m x d^m y = \int -\delta_{ij} \delta^m(\vec{x} - \vec{y}) \delta A^i(\vec{x}) \wedge \delta \pi_j(\vec{y}) d^m x d^m y. \tag{2.50}$$

A matriz de componentes é, portanto,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & 0_{m\times m} & -I_{m\times m} \\ \vec{0} & I_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.51}$$

vemos facilmente que $\det \Omega = 0$, portanto ω é singular. Seguindo para a primeira iteração do procedimento de Faddeev-Jackiw, calculamos os modos nulos pela equação de autovalor

$$\int \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & 0_{m\times m} & -I_{m\times m} \\ \vec{0} & I_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(\vec{y}) \\ \vec{\beta}(\vec{y}) \\ \vec{\gamma}(\vec{y}) \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x}-\vec{y}) d^m y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{\gamma}(\vec{x}) \\ \vec{\beta}(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix},$$

portanto o único autovetor não nulo no núcleo de ω é

$$X^\mu(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \alpha(\vec{x}) \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}. \tag{2.52}$$

A partir dele calculamos a equação de vínculo

$$\chi = \int X(\vec{x}) \frac{\delta H}{\delta \xi(\vec{x})} d^m x = \int \begin{bmatrix} \alpha(\vec{x}) \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta H}{\delta A^0} & \frac{\delta H}{\delta A^i} & \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \end{bmatrix} d^m x = \int \alpha(\vec{x}) \frac{\delta H}{\delta A^0(\vec{x})} d^m x,$$

mas

$$\frac{\delta H}{\delta A^0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A^0} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i A^0)} = 0 - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i A_0)} = \partial_i \pi_i.$$

Então

$$\chi = \int \alpha(\vec{x}) \partial_i \pi_i(\vec{x}) d^m x = 0,$$

que vale para qualquer função $\alpha(\vec{x})$, portanto temos a relação

$$\partial_i \pi_i = 0. \tag{2.53}$$

Levando em conta que a componente do tensor de Faraday $F_{i0} = \pi_i$ é definida como a componente E^i do campo elétrico, temos então que essa densidade de vínculo não é nada mais que a **lei de Gauss**, ou seja,

$$\partial_i E^i = 0 \implies \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0.} \tag{2.54}$$

Redefinindo a Hamiltoniana e a Lagrangiana canônica, temos

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}|_{\chi=0} = \Big[\frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \pi_i\partial_i A_0 + \partial_i(\pi_i A_0) + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\Big]_{\partial_i\pi_i=0}$$
$$= \Big[\frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \partial_i\pi_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\Big]_{\partial_i\pi_i=0} = \pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \tag{2.55}$$

e também

$$\mathcal{L}_1 = \pi_i\dot{A}^i + \partial_i\pi_i\dot{u} - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \equiv \theta_{1,\mu}\dot{\xi}_1^\mu - \mathcal{H}_1, \tag{2.56}$$

assim, já que A^0 não aparece mais na Lagrangiana canônica, as novas coordenadas generalizadas se tornam $\xi_1 = (A^i, \pi_i, u)$ e a primeira iteração da 1-forma canônica

$$\theta_1 = \theta + \int \partial_i^x \pi_i(\vec{x})\delta u(\vec{x})d^m x + \int [\pi_i(\vec{x})\delta A^i(\vec{x}) + \partial_i^x \pi_i(\vec{x})\delta u(\vec{x})]d^m x. \tag{2.57}$$

Calculando sua derivada exterior, temos a primeira iteração da 2-forma canônica

$$\omega_1 = \delta\theta_1 = \omega + \int \frac{\delta(\partial_i^x \pi_i(\vec{x}))}{\delta\xi_1^\mu(\vec{y})}\delta\xi_1^\mu(\vec{y}) \wedge \delta u(\vec{x})d^m x d^m y$$
$$= \omega - \int \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\delta\pi_i(\vec{x})}{\delta\pi_j(\vec{y})}\delta u(\vec{x}) \wedge \delta\pi_j(\vec{y})d^m x d^m y$$
$$= \int -\Big[\delta A^i(\vec{x}) \wedge \delta\pi_j(\vec{y}) + \delta u(\vec{x}) \wedge \delta\pi_j(\vec{y})\frac{\partial}{\partial x^i}\Big]\delta_i^j\delta^d(\vec{x}-\vec{y})d^d x d^d y, \tag{2.58}$$

e portanto sua matriz de componentes é

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & -I_{m\times m} & \vec{0} \\ I_{m\times m} & 0_{m\times m} & \nabla_x \\ \vec{0} & -\nabla_x & 0 \end{bmatrix}\delta^m(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.59}$$

que também tem $\det\Omega_1 = 0$, portanto é singular. Seguimos então para a segunda iteração, primeiro encontrando seus modos nulos,

$$\int \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & -I_{m\times m} & \vec{0} \\ I_{m\times m} & 0_{m\times m} & \nabla_x \\ \vec{0} & -\nabla_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{\alpha}(\vec{y}) \\ \vec{\beta}(\vec{y}) \\ \gamma(\vec{y}) \end{bmatrix}\delta^m(\vec{x}-\vec{y})d^m y = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -\vec{\beta}(\vec{x}) \\ \vec{\alpha}(\vec{x}) + \nabla_x\gamma(\vec{x}) \\ -\nabla_x\cdot\vec{\beta}(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \vec{\beta}(\vec{x}) = 0,\ \vec{\alpha}(\vec{x}) = -\nabla_x \gamma(\vec{x}),$$

então o único é

$$X_1^\mu(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -\nabla_x \gamma(\vec{x}) \\ \vec{0} \\ \gamma(\vec{x}) \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

E assim montamos

$$\chi_1 = \int X_1^\mu(\vec{x}) \frac{\delta H_1}{\delta \xi_1^\mu(\vec{x})} d^m x = \int \Big[-\nabla_x \gamma(\vec{x}) \frac{\delta H_1}{\delta A^i(\vec{x})} + \gamma(\vec{x}) \frac{\delta H_1}{\delta \lambda(\vec{x})} \Big] d^m x,$$

mas

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = 0,$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta A^i} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial A^i} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial(\partial_j A^i)} = 0 - \partial_j \Big[\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{kl} F^{kl})}{\partial(\partial_j A^i)} \Big]$$

$$= -\partial_j F^j{}_i = \partial_j F^{ji} = -\partial_j F^{ij},$$

então

$$\chi_1 = \int -\partial_i \gamma \partial_j F^{ij} d^m x = \int \gamma \underbrace{\partial_i \partial_j F^{ij}}_{=0} d^m x,$$

$$\therefore\ \chi_1 = 0 = 0. \tag{2.61}$$

Temos uma identidade. Isso é um indicativo de que a Lagrangiana possui uma simetria interna e portanto não há um novo vínculo para se aplicar na Lagrangiana. Para seguir em frente, precisamos de uma condição de gauge.

Para o nosso caso, escolheremos o *gauge de Coulomb*, em que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Impomos essa condição,

$$\chi_1 = \int \partial_i^x A^i(\vec{x}) d^m x = 0, \tag{2.62}$$

como um novo vínculo na Lagrangiana canônica e obtemos

$$\mathcal{L}_2 = \pi_i \dot{A}^i + \partial_i \pi_i \dot{u} + \partial_i A^i \dot{u}_1 - \mathcal{H}_2, \tag{2.63}$$

dessa forma as coordenadas generalizadas são $\xi_2 = (A^i, \pi_i, u, u_1)$ e a 1-forma canônica

$$\theta_2 = \theta_1 + \int \partial_i^x A^i(\vec{x}) \delta u_1(\vec{x}) d^m x. \tag{2.64}$$

A 2-forma canônica se torna

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + \int \frac{\delta(\partial_i^x A^i(\vec{x}))}{\delta \xi^\mu(\vec{y})} \delta\xi^\mu(\vec{y}) \wedge \delta u_1(\vec{x}) d^m x d^m y \\ &= \omega_1 - \int \partial_j^x \delta^d(\vec{x} - \vec{y}) \delta u_1(\vec{x}) \wedge \delta A^j(\vec{y}) d^m x d^m y, \end{aligned} \tag{2.65}$$

com a forma matricial

$$\Omega_2(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & -I_{m\times m} & \vec{0} & \nabla \\ I_{m\times m} & 0_{m\times m} & \nabla & \vec{0} \\ \vec{0} & -\nabla & 0 & 0 \\ -\nabla & \vec{0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.66}$$

Essa matriz tem $\det \Omega_2 \propto (\det \nabla^2)^2$. O resultado desse determinante funcional, em geral, depende das condições de contorno do problema em questão. Assume-se, portanto, condições de contorno coerentes que anulem esse determinante. Dessa forma, a matriz é regular e chegamos ao final do nosso procedimento, obtendo uma 2-forma canônica simplética. Isso nos permite calcular sua inversa,

$$\Omega_2^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & M_{m\times m} & \vec{0} & -\nabla/\nabla^2 \\ -M_{m\times m} & 0_{m\times m} & -\nabla/\nabla^2 & \vec{0} \\ \vec{0} & \nabla/\nabla^2 & 0 & 1/\nabla^2 \\ \nabla/\nabla^2 & \vec{0} & -1/\nabla^2 & 0 \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.67}$$

em que $1/\nabla^2$ é a função de Green do operador laplaciano e M é a matriz cujos componentes são

$$M_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}.$$

Com isso temos os parênteses de Poisson fundamentais da teoria

$$\{A^i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)\} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\right) \delta^m(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.68}$$

Importante notar que a expressão entre parênteses é simplesmente o projetor

transversal para os graus de liberdade físicos do sistema.

Referências

[1] L. G. C. Mendoza. Estrutura simplética em sistemas singulares à la Faddeev-Jackiw. Master's thesis, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2020.

[2] L. Fatibene and M. Francaviglia. *Natural and Gauge Natural Formalism for Classical Field Theorie: A Geometric Perspective including Spinors and Gauge Theories*. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2003.

[3] M. de León, M. Salgado, and S. Vilariño. *Methods of Differential Geometry in Classical Field Theories: k-Symplectic and k-Cosymplectic Approaches*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016.

[4] J. Kijowski. A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory. *Commun. Math. Phys. 30*, pages 99 – 128, 1973.

[5] J. Kijowsky and W. M. Tulczyjew. *A Symplectic Framework for Field Theories*. Springer-Verlag, 1979.

[6] L. G. C. Mendoza. *Da teoria clássica à quântica de campos através da abordagem de Faddeev-Jackiw*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2024.

[7] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. *An Introduction to Geometrical Physics, Second Edition*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2017.

[8] R. Aldrovandi and R. A. Kraenkel. On exterior variational calculus. *J.Phys.A 21*, pages 1329–1339, 1987.

[9] R. Coleman. *Calculus on Normed Vector Spaces*. Springer, 2012.

[10] B. DeWitt. *The Global Approach to Quantum Field Theory, Volume 1*. The International Series of Monographs on Physics. Oxford Science Publications, 2003.

[11] X. Gràcia, J. de Lucas, X. Rivas, and N. Román-Roy. On Darboux theorems for geometric structures induced by closed forms. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, pages 118 – 131, 2024.

[12] B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano. Faddeev-Jackiw quantization of Proca Electrodynamics. *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, 267-269:183–185, 2015. X Latin American Symposium of High Energy Physics.

[13] L. G. Caro, G. B. de Gracia, A. A. Nogueira, and B. M. Pimentel. Path integral quantization of generalized Stuckelberg electrodynamics: A Faddeev-Jackiw approach. *Nuclear Physics B*, 994:116311, 2023.

[14] A. A. Nogueira, C. Palechor, and A. F. Ferrari. Reduction of order and Faddeev-Jackiw formalism in generalized electrodynamics. *Nuclear Physics B*, 939:372–390, 2019.

Capítulo 3

Teoria quântica de campos

Na introdução deste trabalho foi explicitada a intenção de estudar a física por trás das chamadas *formas de Chern-Simons*. Como será demonstrado no próximo capítulo, no entanto, o comportamento clássico e quântico desses sistemas é profundamente diferente. Isso acontece pois estes são termos que podem ser transformados em derivadas totais, que por sua vez são irrelevantes dinamicamente (a não ser que estejamos trabalhando em um espaço que admita dinâmica em sua fronteira). Na teoria clássica, portanto, tais termos podem ser ignorados na maior parte das vezes, enquanto na teoria quântica eles podem gerar resultados físicos, desde que sejam permitidos pelas simetrias do sistema.

Neste capítulo daremos uma breve introdução à teoria de campos quantizados, na qual estes deixam de representar estados físicos do sistema e se tornam operadores agindo sobre os estados físicos, que por sua vez são vetores $|\psi\rangle$ em um *espaço de Hilbert*. Apesar de a intenção do texto ser apresentar os objetos mais importantes desde suas definições iniciais, recomenda-se que o leitor já tenha alguma familiaridade com o tema. Caso contrário, ver [1, 2, 3].

Enquanto no caso clássico os objetos medidos por experimentos eram os chamados *observáveis* da teoria, no caso quântico a observação se torna consideravelmente mais difícil. Por razões práticas, os experimentos na física de partículas não são capazes de observar em detalhes o comportamento de cada partícula individual e suas interações. Ao invés disso, o que se observa na maior parte das vezes são as probabilidades de transição entre estados iniciais e finais de muitas partículas livres. A distribuição espacial dessas probabilidades é determinada pelo que chamamos de *seções de choque*. Não entraremos em detalhes aqui a respeito de como calculá-las ou como relacioná-las às medidas experimentais,[1] mas o que importa para nós é que as seções de choque de uma teoria são determinadas por meio de suas *funções de correlação*, ou *funções de n-pontos*. Para o caso de um sistema

[1] O leitor interessado pode se aprofundar no assunto ao conferir a referência [1], por exemplo.

com um único campo bosônico real ϕ,[2] a **função de n-pontos** da teoria é definida por

$$G_n(x_1, ..., x_n) \equiv \langle \Omega | T\{\hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}(x_2)...\hat{\phi}(x_n)\} | \Omega \rangle, \tag{3.1}$$

em que T é o operador de *ordenação temporal*,[3] $|\Omega\rangle$ é o estado de menor energia do sistema (que denominamos *vácuo*) e $\hat{\phi}$ são os operadores de campo na descrição de Heinsenberg. É a partir desses objetos que calculamos as quantidades observáveis, e portanto o grande problema da teoria se torna o de determiná-los. Falaremos a seguir a respeito de como fazer isso.

3.1 Sistemas regulares

Assumimos que nosso sistema clássico é descrito por um único campo escalar ϕ, que vive em um espaço-tempo de Minkowski d-dimensional (com $d = m + 1$) e cuja dinâmica é determinada pela Lagrangiana

$$L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^m \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{3.3}$$

tal que a matriz Hessiana do sistema,

$$W(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}) \delta \dot{\phi}(\vec{y})} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{x})}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\phi}} \delta^m(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.4}$$

é regular, ou seja $\det(W) \neq 0$. Como vimos no capítulo anterior, nesse caso podemos encontrar seu momento conjugado

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \tag{3.5}$$

e assim fazer a transformada de Legendre de maneira biunívoca para determinar

[2] A generalização desse formalismo para um sistema de campos bosônicos é simples e será comentada posteriormente. A inclusão de campos fermiônicos, no entanto, não será tratada aqui. Para o leitor interessado, as fontes já citadas também falam a respeito desse tópico.

[3] Para o caso de um campo bosônico agindo em dois eventos x_1 e x_2, essa operação é definida como

$$T\{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\} = \Theta(x_1^0 - x_2^0)\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_1), \tag{3.2}$$

em que Θ é a função de Heaviside (conhecida popularmente como "função degrau"). Como estamos trabalhando na dinâmica instantânea, a primeira coordenada do espaço-tempo parametriza a evolução temporal do sistema, daí vem o nome de *ordenação temporal*: o evento que "acontece antes" é sempre colocado à direita do evento que "acontece depois". A generalização dessa operação para mais de dois eventos é natural.

a dinâmica Hamiltoniana. Nesse formalismo a dinâmica é determinada pela extremização do funcional de ação

$$S[\phi, \pi] = \int d^d x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(\phi, \pi)], \tag{3.6}$$

ou, em termos das coordenadas unificadas $\xi \equiv \{\xi^\mu\}, (\mu = 1, 2)$, da variedade de fase $\mathbb{F}$,

$$S[\xi] = \int d^d x [\theta_\mu(x)\dot{\xi}^\mu(x) - \mathcal{H}(\xi)], \tag{3.7}$$

em que θ_μ são as componentes da 1-forma de Liouville. A variação desse funcional resulta em equações diferenciais que nos permitem encontrar as curvas integrais do campo vetorial dinâmico de $\mathbb{F}$, que é uma variedade simplética. Veremos que esta característica geométrica é essencial para a construção do formalismo quântico, que será introduzido pela quantização canônica mas mais profundamente desenvolvido pela quantização funcional.

Quantização canônica

Como vimos nos capítulos anteriores, toda variedade simplética é uma variedade de Poisson. Esse fato é essencial para a quantização canônica de um sistema, visto que esta se baseia no chamado *princípio da correspondência*, desenvolvido por Paul Dirac em meados da década de 1920 [4]. Este princípio consiste em fazer uma associação direta entre a estrutura de Poisson da variedade simplética do sistema clássico com a estrutura de comutadores entre os operadores do espaço de Hilbert do sistema quântico, representada por

$$\{A, B\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}], \tag{3.8}$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. Como estamos trabalhando em unidades naturais, temos que $\hbar = 1$ e a relação (3.8) se torna

$$\{A, B\} \mapsto \frac{1}{i}[\hat{A}, \hat{B}]. \tag{3.9}$$

No nosso caso de um único campo bosônico, temos que a estrutura de Poisson de $\mathbb{F}$ é dada por

$$\{\xi^\mu(t, \vec{x}), \xi^\nu(t, \vec{y})\} = \omega^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}), \tag{3.10}$$

em que $\omega^{\mu\nu}$ são os componentes do campo tensorial dual à forma simplética ω. Dessa forma, ao escolher um sistema de coordenadas de Darboux, essas componentes são simplesmente

$$\Omega^{-1}(\vec{x}-\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.11}$$

e com isso obtemos os parênteses de Poisson canônicos,

$$\begin{aligned} \{\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})\} &= \delta^m(\vec{x}-\vec{y}) \\ \{\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})\} &= \{\pi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})\} = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

a partir dos quais encontramos as relações de comutação da teoria

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{y})] &= i\hat{I}\delta^m(\vec{x}-\vec{y}) \\ [\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\phi}(t,\vec{y})] &= [\hat{\pi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{y})] = 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

escritos em termos de coordenadas unificadas como

$$[\hat{\xi}^\mu(t,\vec{x}), \hat{\xi}^\nu(t,\vec{y})] = i\hat{\omega}^{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y}). \tag{3.14}$$

O procedimento se segue pela definição de um *espaço de Fock* onde vive esse sistema, portanto para determinar as funções de correlação é necessário calcular valores esperados no vácuo (VEV's) desse espaço. Este é um processo longo e trabalhoso, no qual se faz uso do *Teorema de Wick* para encontrar todas as possíveis funções de correlação da teoria. A partir destas, obtemos as componentes da chamada *matriz S*, que determina a evolução temporal de um estado assintótico passado a um estado assintótico futuro, representando as partículas livres antes (ou depois) de interagirem em um processo de espalhamento. No geral esse resultado não é possível de ser calculado exatamente, por isso recorremos à teoria de perturbação, e daí surgem as chamadas *regras de Feynman*, amplamente estudadas na literatura. Referencia-se novamente as fontes já citadas para um tratamento aprofundado do tema, além de muitas outras, como por exemplo [5, 6].

Existe um método mais prático, apesar de matematicamente mais complexo que o da quantização canônica: a quantização funcional, ou, como é mais frequentemente conhecida, a quantização por *integrais de trajetória*. Esse ferramental nos

permite obter uma grande quantidade de informações a respeito de um sistema de maneira mais direta, e é ele que será o foco de nosso trabalho a partir daqui.

3.1.1 Quantização funcional

Esta seção se baseia majoritariamente nas referências [7, 8] e assume um conhecimento básico de cálculo funcional. Para o leitor não familiarizado com o assunto, recomenda-se o capítulo a respeito disso da referência [9].

Funcional gerador e equações de Schwinger-Dyson

Como dito anteriormente, as quantidades mais importante da teoria quântica de campos são as funções de correlação, definidas em (3.1). É de grande utilidade, portanto, um único objeto que contém dentro dele a informação a respeito de todas as funções de correlação da teoria. Chamamos esse objeto de **funcional gerador** e o definimos por meio da série infinita

$$Z[J] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^d x_1 ... d^d x_n G_n(x_1, ..., x_n) J(x_1) ... J(x_n), \tag{3.15}$$

o que significa que, ao derivá-lo funcionalmente n vezes, obtemos justamente

$$\frac{\delta^n Z[J]}{i\delta J(x_1) ... i\delta J(x_n)}\Big|_{J=0} = G_n(x_1, ..., x_n). \tag{3.16}$$

A forma de $Z[J]$ definida acima, no entanto, não é muito útil para se obter resultados físicos. Para encontrar uma forma mais útil, substituímos (3.1) em sua definição, obtendo

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \Omega | \int d^d x_1 ... d^d x_n T\{\hat{\phi}(x_1) J(x_1), ... \hat{\phi}(x_n) J(x_n)\} | \Omega \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \Omega | T\Big\{ \Big(\int d^d x \hat{\phi}(x) J(x) \Big)^n \Big\} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T\Big\{ \exp\Big(i \int d^d x \hat{\phi}(x) J(x) \Big) \Big\} | \Omega \rangle,$$

em que foi usada a definição da exponencial temporalmente ordenada. Para explicitar melhor a estrutura desse objeto, definiremos uma versão mais geral, simétrica no espaço de fase, na qual um campo de fontes $K(x)$ também é definido para os momentos,

$$Z[J, K] \equiv \langle \Omega | T\Big\{ \exp\Big[i \int d^d x \Big(\hat{\phi}(x) J(x) + \hat{\pi}(x) K(x) \Big) \Big] \Big\} | \Omega \rangle, \tag{3.17}$$

sendo $Z[J,0] = Z[J]$. Perceba que podemos enxergar esse objeto como definido em um sistema de coordenadas de Darboux $\xi \equiv \{\xi^\mu\} = (\phi, \pi)$, dessa forma, se definirmos a quantidade $\mathcal{J} \equiv \{\mathcal{J}_\mu\} = (J, K)$, podemos reescrever (3.17) como

$$Z[\mathcal{J}] \equiv \langle \Omega | T\Big\{ \exp\Big[i \int d^d x \, \hat{\xi}^\mu(x) \mathcal{J}_\mu(x) \Big] \Big\} | \Omega \rangle. \tag{3.18}$$

Este objeto dentro da integral é um escalar do espaço de fase, invariante por transformações de coordenadas. Até o final dessa seção, portanto, voltaremos a usar a notação condensada de DeWitt, que para este objeto geométrico se torna

$$\int_{\mathcal{M}} d^d x \, \hat{\xi}^\mu(x) \mathcal{J}_\mu(x) \equiv \xi^\mu \mathcal{J}_\mu. \tag{3.19}$$

Importante notar que agora consideramos integrais em todo o espaço-tempo $\mathcal{M}$, não só em fatias espaciais Σ, como no capítulo anterior. O funcional gerador em coordenadas unificadas pode ser escrito como

$$Z[\mathcal{J}] = \langle \Omega | T\{\exp(i\xi^\mu \mathcal{J}_\mu)\} | \Omega \rangle. \tag{3.20}$$

Agora perceba que temos

$$\frac{\delta Z[J,K]}{i\delta \mathcal{J}_\mu(x)} = \langle \Omega | T\{\hat{\xi}^\mu \exp(i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu)\} | \Omega \rangle,$$

mas calculando a derivada temporal (na coordenada temporal de x) desse objeto resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta Z[J,K]}{i\delta \mathcal{J}_\mu(x)} = \langle \Omega | \frac{\partial}{\partial t} T\{\hat{\xi}^\mu(x) \exp(i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu)\} | \Omega \rangle, \tag{3.21}$$

o que exige que calculemos a derivada temporal de um produto temporalmente ordenado. Utilizando a definição mencionada anteriormente, veja que esse cálculo para o caso de dois operadores genéricos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T\{\hat{A}(t)\hat{B}(t')\} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Theta(t-t')\hat{A}(t)\hat{B}(t') + \Theta(t'-t)\hat{B}(t')\hat{A}(t)\Big) \\ = \frac{\partial}{\partial t}\Theta(t-t')\hat{A}(t)\hat{B}(t') + \Theta(t-t')\dot{\hat{A}}(t)\hat{B}(t') &+ \frac{\partial}{\partial t}\Theta(t'-t)\hat{B}(t')\hat{A}(t) \\ &+ \Theta(t'-t)\hat{B}(t')\dot{\hat{A}}(t). \end{aligned}$$

No entanto a função de Heaviside não é contínua na origem, portanto não é derivável nesse ponto, o que nos daria como resultado uma derivada indefinida

em $t = 0$. Se a enxergarmos como uma distribuição, contudo, ela se torna derivável em todo o seu domínio e o resultado é a distribuição delta de Dirac, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}T\{\hat{A}(t)\hat{B}(t')\} = \delta(t-t')\hat{A}(t)\hat{B}(t') + \Theta(t-t')\dot{\hat{A}}(t)\hat{B}(t')$$

$$-\delta(t-t')\hat{B}(t')\hat{A}(t) + \Theta(t'-t)\hat{B}(t')\dot{\hat{A}}(t) = \delta(t-t')[\hat{A}(t), \hat{B}(t')] + T\{\dot{\hat{A}}(t)\hat{B}(t')\}.$$

No nosso caso específico, esse comutador é

$$[\hat{\xi}^\mu(x), e^{i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu}],$$

mas usando a identidade para operadores lineares

$$[\hat{A}, e^{\hat{B}}] = \int_0^1 ds\, e^{(1-s)\hat{B}}[\hat{A}, \hat{B}]e^{s\hat{B}}, \tag{3.22}$$

(que é uma consequência da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff), temos

$$[\hat{\xi}^\mu(x), e^{i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu}] = \int_0^1 ds\, e^{i(1-s)\xi^\nu \mathcal{J}_\nu}[\hat{\xi}^\mu(x), i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu]e^{is\xi^\nu \mathcal{J}_\nu}$$

$$= i\int d^dx'\, \mathcal{J}_\nu(x') \int_0^1 ds\, e^{i(1-s)\xi^\rho \mathcal{J}_\rho}[\hat{\xi}^\mu(x), \hat{\xi}^\nu(x')]e^{is\xi^\sigma \mathcal{J}_\sigma}. \tag{3.23}$$

A presença do delta de Dirac $\delta(t-t')$ multiplicando esse objeto faz com que esse comutador se transforme no comutador a tempos iguais (3.14), portanto

$$i\int d^dx'\, \mathcal{J}_\nu(x')\delta(t-t') \int_0^1 ds\, e^{i(1-s)\xi^\rho \mathcal{J}_\rho} i\omega^{\mu\nu}\delta^{d-1}(\vec{x}-\vec{x}')e^{is\xi^\sigma \mathcal{J}_\sigma}$$

$$= -\omega^{\mu\nu}\int d^dx'\, \mathcal{J}_\nu(x')\delta^d(x-x') \int_0^1 ds\, e^{i(1-s)\xi^\rho \mathcal{J}_\rho}e^{is\xi^\sigma \mathcal{J}_\sigma}$$

$$= -\omega^{\mu\nu}\int d^dx'\, \mathcal{J}_\nu(x')\delta^d(x-x')e^{i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu} = -\omega^{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu(x)e^{i\xi^\rho \mathcal{J}_\rho}, \tag{3.24}$$

em que $\omega^{\mu\nu}$ são simplesmente as componentes da inversa da matriz simplética, definida em (1.20). A derivada temporal (3.21) é, com isso,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Z[\mathcal{J}]}{i\delta \mathcal{J}_\mu(x)} = \langle\Omega|T\{\dot{\hat{\xi}}^\mu(x)\exp(i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu)\}|\Omega\rangle - \omega^{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu(x)Z[\mathcal{J}].$$

Mas perceba que temos, de acordo com (3.7),

$$\frac{\delta S[\xi]}{\delta \xi^\mu} = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\delta H[\xi]}{\delta \xi^\mu} = 0 \implies \dot{\xi}^\mu = \omega^{\mu\nu}\frac{\delta H[\xi]}{\delta \xi^\nu}, \tag{3.25}$$

consequentemente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Z[\mathcal{J}]}{i\delta\mathcal{J}_\mu(x)} = \langle\Omega|T\Big\{\omega^{\mu\nu}\frac{\delta H[\xi]}{\delta\xi^\nu(x)}\exp(i\xi^\rho\mathcal{J}_\rho)\Big\}|\Omega\rangle - \omega^{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu(x)Z[\mathcal{J}]$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\xi^\mu(x)Z[\mathcal{J}]\Big|_{\xi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{J}}} = \omega^{\mu\nu}\frac{\delta H[\xi]}{\delta\xi^\nu(x)}\Big|_{\xi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{J}}}Z[\mathcal{J}] - \omega^{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu(x)Z[\mathcal{J}]$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\xi^\mu(x) - \omega^{\mu\nu}\frac{\delta H[\xi]}{\delta\xi^\nu(x)}\Big)|_{\xi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{J}}}Z[\mathcal{J}] = -\omega^{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu(x)Z[\mathcal{J}]$$

$$\Big(\dot{\xi}^\mu(x) - \omega^{\mu\nu}\frac{\delta H[\xi]}{\delta\xi^\nu(x)}\Big)|_{\xi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{J}}}Z[\mathcal{J}] = -\omega^{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu(x)Z[\mathcal{J}], \tag{3.26}$$

multiplicando os dois lados pelas componentes da matriz simplética,

$$\Big(\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu(x) - \frac{\delta H[\xi]}{\delta\xi^\mu(x)}\Big)|_{\xi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{J}}}Z[\mathcal{J}] = -\mathcal{J}_\mu(x)Z[\mathcal{J}],$$

portanto, usando (3.25),

$$\boxed{\Big(\frac{\delta S[\xi]}{\delta\xi^\mu(x)}\Big)\Big|_{\xi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{J}}}Z[\mathcal{J}] = -\mathcal{J}_\mu(x)Z[\mathcal{J}],} \tag{3.27}$$

ou, em termos das coordenadas de Darboux,

$$\begin{cases}\Big(\frac{\delta S[\phi,\pi]}{\delta\phi(x)}\Big)\Big|_{\phi=\frac{\delta}{i\delta J},\pi=\frac{\delta}{i\delta K}}Z[J,K] = -J(x)Z[J,K],\\ \Big(\frac{\delta S[\phi,\pi]}{\delta\pi(x)}\Big)\Big|_{\phi=\frac{\delta}{i\delta J},\pi=\frac{\delta}{i\delta K}}Z[J,K] = -K(x)Z[J,K].\end{cases} \tag{3.28}$$

Essas são as **equações de Schwinger-Dyson** [10, 11] no espaço de fase, que são o que podemos chamar de *versão quântica das equações de movimento*. Isso é devido à semelhança da primeira equação de (3.28) com a equação de movimento clássica para um sistema agindo sobre a ação de uma fonte $J(x)$. Perceba também que, na forma (3.27), essas equações são facilmente generalizadas para um sistema com n campos bosônicos, pois tudo o que precisamos fazer é redefinir

$$\phi(x) \equiv \{\phi^a(x)\}, \pi(x) \equiv \{\pi_a(x)\}, J(x) \equiv \{J_a(x)\}, K(x) \equiv \{K^a(x)\}, \tag{3.29}$$

para $a = (1, 2, ..., n)$ e sua dedução será exatamente análoga.

Para resolver essas equações, consideramos a *transformada de Fourier funcional* de $Z[\mathcal{J}]$, denotada $\tilde{Z}[\xi]$ e definida pela relação

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\xi \tilde{Z}[\xi] \exp(i\xi^\mu \mathcal{J}_\mu). \tag{3.30}$$

Esse objeto é conhecido como uma *integral funcional*, cuja medida no espaço de funções é definida por

$$\mathcal{D}\xi \equiv \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\pi \equiv \prod_{x\in\mathbb{R}^{3,1}} d\phi(x) \prod_{x\in\mathbb{R}^{3,1}} d\pi(x). \tag{3.31}$$

Por meio de (3.30), podemos identificar as relações

$$\frac{\delta Z[\mathcal{J}]}{i\delta\mathcal{J}_\mu(x)} = \int \mathcal{D}\xi\ \xi^\mu(x)\tilde{Z}[\xi] \exp(i\xi^\nu \mathcal{J}_\nu),$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\mu(x)Z[\mathcal{J}] &= \int \mathcal{D}\xi\tilde{Z}[\xi]\frac{\delta}{i\delta\xi^\mu(x)}\exp(i\xi^\nu\mathcal{J}_\nu)\\ &= -\int \mathcal{D}\xi\frac{\delta\tilde{Z}[\xi]}{i\delta\xi^\mu(x)}\exp(i\xi^\nu\mathcal{J}_\nu),\end{aligned}$$

em que integramos por partes na última igualdade. Essas relações implicam na seguinte forma para as equações de S-D no espaço de Fourier

$$\frac{\delta S[\xi]}{\delta\xi^\mu(x)}\tilde{Z}[\xi] = \frac{\delta\tilde{Z}[\xi]}{i\delta\xi^\mu(x)}.$$

A solução para esse sistema de equações funcionais parciais deve ser (muito similarmente a um sistema de equações diferenciais) da forma

$$\tilde{Z}[\xi] = \mathcal{N}\exp(iS[\xi]),$$

em que $\mathcal{N}$ é uma constante arbitrária. Temos, enfim, que a solução para o funcional gerador completo é

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\xi \exp(iS[\xi])\exp(i\xi^\mu\mathcal{J}_\mu), \tag{3.32}$$

ou, em termos das coordenadas de Darboux,

$$Z[J,K] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\pi e^{iS[\phi,\pi]}\exp\left\{i\int d^dx\Big[\phi(x)J(x)+\pi(x)K(x)\Big]\right\}, \tag{3.33}$$

e fazendo $K = 0$, obtemos o funcional gerador de funções de correlação

$$\boxed{Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi e^{iS[\phi,\pi]} e^{i \int d^d x \phi(x) J(x)}.} \tag{3.34}$$

A constante $\mathcal{N}$ na definição acima é meramente um fator de normalização, pois $Z[J]$ deve ser um objeto adimensional. Podemos plenamente ignorá-la ao redefinir as funções de correlação (3.1) com uma normalização explícita

$$G_n(x_1, ..., x_n) \equiv \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^n Z[J]}{i\delta J(x_1)...i\delta J(x_2)}\Big|_{J=0}, \tag{3.35}$$

em que

$$Z_0 \equiv Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi e^{iS[\phi,\pi]}. \tag{3.36}$$

é o *funcional gerador sem fontes*. Dessa forma, em termos da integral funcional temos que a função de n-pontos pode ser calculada por

$$\begin{aligned} G_n(x_1, ..., x_n) &= \frac{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \, \phi(x_1)...\phi(x_n) \, e^{iS[\phi,\pi]}}{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \, e^{iS[\phi,\pi]}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \, \phi(x_1)...\phi(x_n) \, e^{iS[\phi,\pi]}}{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \, e^{iS[\phi,\pi]}}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

e consequentemente, comparando com a definição original (3.1), conseguimos fazer a relação entre as operações

$$\langle \Omega | \hat{\mathcal{O}}(\hat{\phi}(x)) | \Omega \rangle \leftrightarrow \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \, \mathcal{O}(\phi(x)) \, e^{iS[\phi,\pi]}}{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \, e^{iS[\phi,\pi]}}, \tag{3.38}$$

para qualquer operador $\hat{\mathcal{O}}$ que depende do campo $\hat{\phi}$. Dessa expressão percebemos a forte semelhança da teoria de campos com a mecânica estatística, sendo o funcional gerador um paralelo direto à função de partição de um sistema. Mais uma informação importante a se destacar é que, caso seja possível realizar a integral nos momentos, obtendo somente um número (possivelmente infinito), podemos redefinir $\mathcal{N}$ com esse valor embutido. Dessa forma, reduzimos Z_0 de um objeto definido em $T^*\mathbb{Q}$ a um objeto definido somente na subvariedade de configurações $\mathbb{Q}$. A expressão (3.36) se torna

$$Z_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}, \tag{3.39}$$

e daí vem a noção popular de que esse objeto é meramente uma média ponderada

de todas as possíveis configurações de campo, cada uma com um peso exponencial que depende do seu respectivo valor do funcional de ação. Essa noção novamente reforça o paralelo com a função de partição de um sistema estatístico, que é definido de maneira bastante análoga.

Funções de correlação conexas e ação efetiva

Para fazer uma análise mais profunda dos nossos sistemas quânticos, definimos alguns objetos que serão bastante úteis posteriormente. O primeiro é outro funcional gerador, denotado $W[J]$ e definido pela relação

$$Z[J] \equiv e^{iW[J]}. \tag{3.40}$$

Esse é o chamado *funcional gerador de funções de correlação conexas*, que são definidas por meio de suas derivadas funcionais

$$G_n^c(x_1, ..., x_n|J) \equiv \frac{\delta^n W[J]}{i\delta J(x_1)...i\delta J(x_2)}, \tag{3.41}$$

na presença de fontes externas, ou

$$G_n^c(x_1, ..., x_n) \equiv \frac{\delta^n W[J]}{i\delta J(x_1)...i\delta J(x_2)}\Big|_{J=0}, \tag{3.42}$$

sem fontes externas. Na linguagem de diagramas de Feynman, esses objetos representam aqueles diagramas topologicamente conexos, ou seja, excluindo todos aqueles que representam um processo na qual uma das partículas iniciais não interage com nenhuma outra. A relevância desses diagramas reside no fato que estes são os únicos cuja contribuição é relevante para a matriz S do sistema. De fato, pode-se provar (ver, por exemplo, [1]) que a contribuição para a matriz S de qualquer diagrama contendo uma parte desconexa é automaticamente anulada.

Perceba que a primeira função de correlação conexa na presença de fontes externas é simplesmente

$$G_1^c(x|J) = \frac{\delta W[J]}{i\delta J(x)} = -i\frac{\delta}{i\delta J(x)} \ln(Z[J]) = -i\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{i\delta J(x)} \equiv -iG_1(x|J),$$

em que definimos a primeira *função de correlação na presença de fontes externas*

$$G_1(x|J) = \frac{\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\pi\ \phi(x)\ e^{iS[\phi,\pi]+i\phi\cdot J}}{\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\pi\ e^{iS[\phi,\pi]+i\phi\cdot J}} \equiv \langle\Omega_J|\hat{\phi}(x)|\Omega_J\rangle \equiv \langle\hat{\phi}(x)\rangle_J. \tag{3.43}$$

O objeto $\langle\Omega_J|\hat{\phi}(x)|\Omega_J\rangle = \langle\hat{\phi}(x)\rangle_J$ é conhecido como o VEV (valor esperado no vácuo) do campo na presença de fontes externas, também chamado *valor clássico do campo* e denotado $\phi_{cl}(x)$. Sua relação com a primeira derivada funcional de $W[J]$,

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \tag{3.44}$$

indica que podemos fazer uma transformada de Legendre funcional de $W[J]$ para definir mais um funcional gerador cujo argumento é ϕ_{cl}. Chamamos esse objeto de *ação efetiva quântica* e o definimos por

$$\Gamma[\phi_{cl}] \equiv W[J] - \int d^dx[\phi_{cl}(x)J(x)], \tag{3.45}$$

em que J agora é expresso como um funcional do valor clássico do campo, $J(x) = J[\phi_{cl}(x)]$, obtido por meio da relação (3.44). Por meio da relação (3.45), podemos perceber que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} = J(x). \tag{3.46}$$

Dessa forma, se fizermos um paralelo entre o valor médio $\langle\hat{\phi}\rangle_J = \phi_{cl}$ do campo e a função de campo clássica $\phi(x)$, percebemos que (3.46) toma exatamente a mesma forma da equação de movimento obtida pela variação da ação clássica de um sistema na presença de fontes externas. É por esse motivo que o objeto $\Gamma[\phi_{cl}]$ recebe seu nome e pode ser interpretado como a "ação quântica" do sistema. Além disso, esse funcional também é o gerador das chamadas *funções de correlação irredutíveis*, definidas por

$$\Gamma_n(x_1,..x_n) \equiv \frac{\delta^n\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x_1)...\delta\phi_{cl}(x_2)}. \tag{3.47}$$

Na linguagem de diagramas de Feynman, estas são as funções de correlação que não podem ser reduzidas a funções menores ao "cortar" somente uma linha conectando dois vértices (ou seja, um propagador interno).

Os dois funcionais definidos anteriormente têm grande utilidade no estudo das correções radiativas das teorias e também das simetrias quânticas de siste-

mas de gauge. Estas últimas são feitas por meio das chamadas *identidades de Ward-Takahashi* e das relações entre diagramas introduzidas pelas equações de Schwinger-Dyson (que também podem ser escritas em termos de $W[J]$ e $\Gamma[\phi_{cl}]$). Faremos grande parte dessas análises para a eletrodinâmica escalar topologicamente massiva no próximo capítulo.

Exemplo 1: Campo escalar complexo

Para ilustrar alguns dos conceitos apresentados, faremos uma análise inicial da teoria quântica de um campo escalar complexo livre. Como visto no capítulo anterior, sua Lagrangiana é definida por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \tag{3.48}$$

E utilizando os resultados obtidos anteriormente, temos os parênteses de Poisson

$$\{\phi, \pi\} = \delta^m(\vec{x} - \vec{y}),\ \{\phi^*, \pi^*\} = \delta^m(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.49}$$

que resultam, ao aplicar o princípio da correspondência, nas relações de comutação canônicas

$$[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = i\hat{I}\delta^m(\vec{x} - \vec{y}),\ [\hat{\phi}^*, \hat{\pi}^*] = i\hat{I}\delta^m(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.50}$$

A partir desses comutadores podemos realizar todo o procedimento de quantização canônica do sistema. A quantização funcional, por outro lado, resulta no funcional gerador livre

$$Z_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\xi \exp\left\{ i \int d^d x \mathcal{L}(\xi) \right\},$$

em que $\xi = (\phi, \phi^*, \pi, \pi^*)$ e a Lagrangiana canônica é

$$\mathcal{L} = \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \pi^*\pi - \partial_i\phi^*\partial_i\phi - m^2\phi^*\phi, \tag{3.51}$$

ou seja,

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\pi\mathcal{D}\pi^* \exp\left\{ i \int d^d x [\pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \pi^*\pi - \partial_i\phi^*\partial_i\phi - m^2\phi^*\phi] \right\}.$$

Podemos realizar um procedimento de completar quadrados para calcular a integral funcional nos momentos. De fato, veja que ela é igual a

$$\int \mathcal{D}\vec{\pi} \exp\left\{ i \int d^d x \left[\frac{1}{2} \vec{\pi}^T \cdot A \cdot \vec{\pi} + \vec{b}^T \cdot \vec{\pi} \right] \right\}, \tag{3.52}$$

em que

$$\vec{\pi} \equiv \begin{bmatrix} \pi \\ \pi^* \end{bmatrix}, \; A \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; \vec{b} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\phi}^* \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

A forma de resolver essa integral é bem conhecida na literatura. Chamamos o procedimento de "expansão em torno do valor clássico" de $\vec{\pi}$. O motivo desse nome ficará claro no próximo capítulo, quanto usarmos esse procedimento novamente durante o cálculo do propagador livre do campo eletromagnético topologicamente massivo. De fato, considere como o valor clássico de $\vec{\pi}$ aquele que obedece

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\pi}} \left(\frac{1}{2} \vec{\pi}^T \cdot A \cdot \vec{\pi} + \vec{b}^T \cdot \vec{\pi} \right) \Big|_{\vec{\pi} = \vec{\pi}_{cl}} = 0,$$

então, nesse caso, $\vec{\pi}_{cl} = -A^{-1} \cdot \vec{b}$. Isso implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\vec{\pi} - \vec{\pi}_{cl})^T \cdot A \cdot (\vec{\pi} - \vec{\pi}_{cl}) - \frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} (\vec{\pi}^T \cdot A \cdot \vec{\pi} - \vec{\pi}_{cl}^T \cdot A \cdot \vec{\pi} \\ &- \vec{\pi}^T \cdot A \cdot \vec{\pi}_{cl} + \vec{\pi}_{cl}^T \cdot A \cdot \vec{\pi}_{cl}) - \frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} [\vec{\pi}^T \cdot A \cdot \vec{\pi} + \vec{b}^T \cdot (A^{-1})^T \cdot A \cdot \vec{\pi} + \vec{\pi}^T \cdot A \cdot A^{-1} \cdot \vec{b} \\ &+ \vec{b}^T \cdot (A^{-1})^T \cdot A \cdot A^{-1} \cdot \vec{b}] - \frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} \vec{\pi}^T \cdot A \cdot \vec{\pi} + \vec{b}^T \cdot \vec{\pi}, \end{aligned}$$

ou seja, temos simplesmente

$$\exp\left\{ i \int d^d x \left[-\frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b} \right] \right\} \int \mathcal{D}\vec{\pi} \exp\left\{ i \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\vec{\pi} - \vec{\pi}_{cl})^T \cdot A \cdot (\vec{\pi} - \vec{\pi}_{cl}) \right] \right\},$$

e a integral restante é uma gaussiana, cujo valor é uma constante (possivelmente infinita) $\mathcal{N}_1$. Portanto, definindo $\mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{N}\mathcal{N}_1$, temos

$$Z_0 = \mathcal{N}_2 \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp\left\{ i \int d^d x [-\partial_i \phi^* \partial_i \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b}] \right\}$$

$$= \mathcal{N}_2 \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\left\{i \int d^d x[-\partial_i\phi^*\partial_i\phi - m^2\phi^*\phi + \dot{\phi}\dot{\phi}^*]\right\}$$

$$= \mathcal{N}_2 \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\left\{i \int d^d x[\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi]\right\}$$

$$= \mathcal{N}_2 \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\{iS[\phi,\phi^*]\}. \tag{3.54}$$

Não nos aprofundaremos aqui no estudo quântico do campo escalar complexo livre, que é amplamente documentado na literatura. No próximo capítulo, no entanto, entenderemos algumas de suas características ao acoplá-lo ao campo eletromagnético topologicamente massivo.

3.2 Sistemas singulares

Suponha agora um sistema singular composto por n campos bosônicos $\phi = \{\phi^a\}$. Como vimos no primeiro capítulo, ao fazer a transformada de Legendre de $T\mathbb{Q}$ para $T^*\mathbb{Q}$ e reduzir nosso espaço para uma variedade $\mathbb{P}$ em que todos os graus de liberdade são verdadeiramente independentes, o resultado é uma variedade *pré-simplética*, na qual existe a possibilidade da 2-forma ω ser degenerada. Os problemas do processo de quantização decorrem diretamente dessa característica geométrica.

Para a quantização canônica, no caso de ω degenerada, a estrutura de Poisson de $\mathbb{P}$ não é bem definida, o que nos impede de aplicar o princípio da correspondência. O procedimento de Faddev-Jackiw, no entanto, resolve esse problema ao estender nosso sistema a uma variedade simplética. De fato, o exemplo do campo eletromagnético demonstra isso claramente, pois encontramos em (2.68) os parênteses de Poisson

$$\{A^i(\vec{x},t), \pi_j(\vec{y},t)\} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^m(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.55}$$

O leitor pode perceber que qualquer outro processo de quantização canônica do campo eletromagnético (por exemplo, em [3, 12]) de alguma forma chega exatamente nesses mesmos parênteses, que resultam no comutador

$$[\hat{A}^i(\vec{x},t), \hat{\pi}_j(\vec{y},t)] = i\left(\hat{I}\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^m(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.56}$$

Para a quantização funcional, no entanto, esse problema se reflete de uma forma diferente. Entende-se que a degenerescência de configurações causa divergências no cálculo das "médias ponderadas" sobre todas as configurações, que

determinam o funcional gerador da teoria. De uma forma mais direta, a não-invertibilidade da matriz simplética se torna um problema durante diversas das passagens realizadas na seção anterior, quando foi assumido que os componentes $\omega^{\mu\nu}$ eram bem-definidos. Não só isso, mas a estrutura de Poisson da variedade de fase foi explicitamente utilizada na passagem da Equação (3.23) para a seguinte.

O procedimento de Faddev-Jackiw, novamente, resolve esses problemas ao fornecer uma estrutura de Poisson para a variedade estendida e também ao quocientar o espaço de fase pelas órbitas de gauge, eliminando as degenerescências. O resultado desse processo, no entanto, nos dá uma forma simplética escrita em termos de um sistema de coordenadas que não é canônico, portanto são necessárias algumas modificações no que foi feito na seção anterior, que assume um sistema de coordenadas de Darboux. Além disso, é preciso lidar com os graus de liberdade não físicos introduzidos ao estender a variedade de fase. Veremos a seguir como se lida com esse problema.

3.2.1 A estratégia de quantização simplética

Nesta subseção, seguiremos principalmente as referências [7, 13] para o procedimento que consiste em um definir o funcional gerador sem fontes em um sistema de coordenadas de Darboux (que chamamos de ζ), assim como foi feito anteriormente,

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\zeta \exp(iS[\zeta]). \tag{3.57}$$

No entanto, as quantidades obtidas para a variedade de fase (que assumimos n-dimensional) do procedimento de Faddeev-Jackiw estão claramente em um sistema de coordenadas (que chamamos de η) não-canônico. Devemos, portanto, fazer uma mudança de coordenadas $\zeta \to \eta$ em (3.57) para escrever o funcional no sistema obtido. Isso resulta na mudança da medida de integração funcional

$$\mathcal{D}\zeta = \det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right)\mathcal{D}\eta, \tag{3.58}$$

em que $\det(\delta\zeta/\delta\eta)$ é o determinante funcional da matriz Jacobiana de mudança de coordenadas, definida por meio de seus componentes como

$$J^{\mu}_{\ \nu}(\vec{x},\vec{y}) \equiv \frac{\delta\zeta^{\mu}[\eta(\vec{x})]}{\delta\eta^{\nu}(\vec{y})} = \frac{\partial\zeta^{\mu}(\vec{x})}{\partial\eta^{\nu}}\delta^{m}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.59}$$

Nesse novo sistema de coordenadas, o funcional gerador se torna

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\eta \det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right) \exp(iS[\eta]),$$

mas conseguimos reescrever esse jacobiano de uma forma mais interessante ao levar em conta que, quando fazemos $\zeta \to \eta$, a matriz simplética obedece à seguinte mudança de componentes

$$\Omega^{\zeta} \to \Omega^{\eta} = \left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right)^{T} \Omega^{\zeta} \frac{\delta\zeta}{\delta\eta}, \tag{3.60}$$

que é uma forma simplificada de escrever a relação

$$\omega^{\zeta}_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y}) \to \omega^{\eta}_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y}) = \int d^m z d^m w \frac{\delta\zeta^{\rho}[\eta(\vec{x})]}{\delta\eta^{\mu}(\vec{z})} \omega^{\zeta}_{\rho\sigma}(\vec{z},\vec{w}) \frac{\delta\zeta^{\sigma}[\eta(\vec{y})]}{\delta\eta^{\nu}(\vec{w})}.$$

Calculando o determinante dos dois lados de (3.60),

$$\det(\Omega^{\eta}) = \det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right)^{T} \det(\Omega^{\zeta}) \det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right) = \left[\det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right)\right]^2 \det(\Omega^{\zeta})$$

$$\therefore \det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right) = \sqrt{\frac{\det(\Omega^{\eta})}{\det(\Omega^{\zeta})}},$$

mas sabendo que, em um sistema de coordenadas de Darboux,

$$\Omega^{\zeta}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \delta^m(\vec{x}-\vec{y}),$$

percebe-se claramente que seu determinante funcional é simplesmente igual a 1. Dessa forma,

$$\det\left(\frac{\delta\zeta}{\delta\eta}\right) = \sqrt{\det\Omega^{\eta}}, \tag{3.61}$$

portanto (3.57), nas coordenadas do procedimento de Faddev-Jackiw, se reduz a

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\eta \sqrt{\det\Omega^{\eta}} \exp(iS[\eta]). \tag{3.62}$$

O próximo passo é separar as coordenadas de nossa variedade de fase estendida em $\eta = (\xi, u)$, em que $\xi = \{\xi^{\mu}\}$ são as coordenadas que restaram do sistema de coordenadas inicial e $u = \{u^{\alpha}\}$ os multiplicadores de Lagrange adicionados durante o procedimento. Sabendo que a última iteração da Lagrangiana canônica toma a forma

$$\mathcal{L}(\xi) = \theta_\mu \dot{\xi}^\mu + \chi_\alpha \dot{u}^\alpha - \mathcal{H}(\xi),$$

em que θ_μ são as componentes da 1-forma canônica inicial e χ_α os vínculos adicionados posteriormente, podemos decompor o funcional gerador (3.62) como

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}u \sqrt{\det \Omega} \exp\left(i \int d^d x \, \chi_\alpha \dot{u}^\alpha\right) \exp\left\{i \int d^d x [\theta_\mu \dot{\xi}^\mu - \mathcal{H}(\xi)]\right\}.$$

Mas, levando em conta a identidade que define o delta de Dirac funcional

$$\delta[f] = \int \mathcal{D}g \exp\left(i \int d^d x \, f(x) g(x)\right), \tag{3.63}$$

temos que

$$\int \mathcal{D}u \exp\left(i \int d^d x \, \chi_\alpha \dot{u}^\alpha\right) = \int \mathcal{D}u \exp\left(-i \int d^d x \, \dot{\chi}_\alpha u^\alpha\right) = \delta[-\dot{\chi}_\alpha].$$

Além disso, temos também a seguinte identidade

$$\delta[\mathcal{A} f] = \frac{\delta[f]}{\det(\mathcal{A})}, \tag{3.64}$$

em que $\mathcal{A}$ é um operador linear agindo sob o espaço de funções no qual vive f. Consequentemente,

$$\delta[-\dot{\chi}_\alpha] = \frac{\delta[\chi_\alpha]}{\det(-\partial_t)},$$

mas o valor desse determinante é meramente uma constante (possivelmente infinita) que é irrelevante para a definição de Z, portanto podemos ignorá-lo. Dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \mathcal{D}\xi \, \sqrt{\det \Omega} \prod_\alpha \delta[\chi_\alpha] \exp\left(i \int d^d x \, \theta_\mu \dot{\xi}^\mu - \mathcal{H}(\xi)\right) \\ &= \int \mathcal{D}\xi \, \sqrt{\det \Omega} \prod_\alpha \delta[\chi_\alpha] \exp(iS[\xi]), \end{aligned} \tag{3.65}$$

e esse é precisamente o mesmo resultado obtido no chamado *procedimento de Faddeev-Senjanovic* para a quantização de sistemas com vínculos de segunda classe [14, 15, 16].

Exemplo 2: Campo eletromagnético

Para ilustrar o procedimento descrito anteriormente, usaremos os resultados do capítulo anterior para o campo eletromagnético livre, que nos forneceu os vínculos $\chi = \partial_i \pi^i$, $\chi_1 = \partial_i A^i$, no espaço de fase estendido, cujas coordenadas são $\xi_2 = (A^i, \pi_i, u, u_1)$. Utilizando a relação (3.65), podemos escrever o funcional gerador sem fontes como

$$Z_0 = \int \mathcal{D}[A^i]\mathcal{D}[\pi_i]\sqrt{\det(\Omega_2)}\delta[\chi]\delta[\chi_1]\exp\left[i\int d^dx\mathcal{L}_2(\xi_2)\right], \tag{3.66}$$

sendo a segunda iteração da Lagrangiana canônica

$$\mathcal{L}_2 = \pi_i\dot{A}^i + \partial_i\pi_i\dot{u} + \partial_i A^i\dot{u}_1 - \mathcal{H}_2, \tag{3.67}$$

em que

$$\mathcal{H}_2 = \left(\frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right)_{\partial_i A^i = 0}. \tag{3.68}$$

Além disso, temos o determinante da matriz simplética $\sqrt{\det(\Omega_2)} \propto \det(\nabla^2)$, sendo a constante de proporcionalidade exata dessa relação irrelevante. Com isso, (3.66) se torna

$$Z_0 = \int \mathcal{D}[A^i]\mathcal{D}[\pi_i]\det(\nabla^2)\delta[\partial_i\pi^i]\delta[\partial_i A^i]\exp\left\{i\int d^dx\left(\pi_i\dot{A}^i - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right)\right\}$$

$$= \underbrace{\det(\nabla^2)}_{=\mathcal{N}}\int \mathcal{D}[A^i]\mathcal{D}[\pi_i]\delta[\partial_i\pi^i]\delta[\partial_i A^i]\exp\left\{i\int d^dx\left(\pi_i\dot{A}^i - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right)\right\},$$

já que $\det(\nabla^2)$ não depende dos campos nem dos momentos conjugados. Isso implica[4]

$$Z_0 = \int \mathcal{D}[A^i]\mathcal{D}[\pi_i]\delta[\partial_i\pi^i]\delta[\partial_i A^i]\exp\left\{i\int d^dx\left(\pi_i\dot{A}^i - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right)\right\}.$$

Para chegar a uma expressão mais familiar, usaremos as seguintes identidades

[4] A partir daqui, a presença de constantes tal qual $\mathcal{N}$ será sempre ignorada devido à sua irrelevância física. Sempre que estas aparecerem, entenda os sinais de igualdade seguintes como redefinições de Z_0 com todas as constantes implicitamente embutidas.

$$\begin{cases} \delta[\partial_i \pi^i] = \int \mathcal{D}\sigma \exp\left\{ i \int d^3x \sigma \partial_i \pi^i \right\} = \int \mathcal{D}\sigma \exp\left\{ -i \int d^3x \partial_i \sigma \ \pi^i \right\}, \\ 1 = \int \mathcal{D}\tilde{A}_0 \delta[\tilde{A}_0] \exp\left\{ i \int d^3x \tilde{A}_0 \partial_i \pi^i \right\} = \int \mathcal{D}\tilde{A}_0 \delta[\tilde{A}_0] \exp\left\{ -i \int d^3x \partial_i \tilde{A}_0 \ \pi^i \right\}, \end{cases} \tag{3.69}$$

de forma que

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\tilde{A}_0 \mathcal{D}[A^i] \mathcal{D}[\pi_i] \mathcal{D}\sigma \delta[\tilde{A}_0] \delta[\partial_i A^i] \exp\Big\{ i \int d^d x \Big(\pi_i \dot{A}^i - \frac{1}{2}\pi_i \pi_i$$

$$- \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \partial_i \sigma \ \pi^i - \partial_i \tilde{A}_0 \ \pi^i \Big) \Big\}.$$

Fazemos agora a mudança de coordenadas $A_0 = \tilde{A}_0 + \sigma$, que não altera a medida de integração funcional, $\mathcal{D}A_0 = \mathcal{D}\tilde{A}_0$, pois é meramente uma translação. Assim,

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}[A^i] \mathcal{D}[\pi_i] \mathcal{D}\sigma \delta[\tilde{A}_0 - \sigma] \delta[\partial_i A^i] \exp\Big\{ i \int d^d x \Big(\pi_i \dot{A}^i$$

$$- \frac{1}{2}\pi_i \pi_i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \partial_i A_0 \ \pi^i \Big) \Big\}.$$

Além disso, sabendo que

$$\int \mathcal{D}\sigma \ \delta[A_0 - \sigma] = 1, \tag{3.70}$$

temos

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}[\pi_i] \delta[\partial_i A^i] \exp\Big\{ i \int d^d x \Big[\pi_i (\dot{A}^i - \partial^i A_0) - \frac{1}{2}\pi_i \pi_i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \Big] \Big\}$$

$$= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}[\pi_i] \delta[\partial_i A^i] \exp\Big\{ i \int d^d x \Big[\pi^i F_{0i} - \frac{1}{2}\pi_i \pi_i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \Big] \Big\},$$

em que foi definido $\mathcal{D}A \equiv \mathcal{D}[A^\mu] = \prod_{\mu=0}^{m} \mathcal{D}A^\mu$. Mas podemos completar o quadrado para fazer a integral dos momentos,

$$\int \mathcal{D}[\pi_i] \exp\Big\{ i \int d^m x \Big[\pi^i F_{0i} - \frac{1}{2}\pi_i \pi_i \Big] \Big\} = \int \mathcal{D}[\pi_i] \exp\Big\{ \frac{i}{2} \int d^d x \Big[\pi_i \pi^i + 2\pi^i F_{0i} \Big] \Big\}$$

$$= \int \mathcal{D}[\pi_i] \exp\Big\{ \frac{i}{2} \int d^d x \Big[\pi_i \pi^i + 2\pi^i F_{0i} + F_{0i} F^{0i} - F_{0i} F^{0i} \Big] \Big\}$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^dx\Big(-F_{0i}F^{0i}\Big)\right\}\int \mathcal{D}[\pi_i]\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^dx\Big[\pi_i\pi^i + 2\pi^i F_{0i} + F_{0i}F^{0i}\Big]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^dx\Big(-F_{0i}F^{0i}\Big)\right\}\int \mathcal{D}[\pi_i]\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^dx(\pi_i + F_{0i})^2\right\}. \tag{3.71}$$

Essa integral é meramente uma gaussiana, cujo resultado é um valor (possivelmente infinito) constante $\mathcal{N}_1$, que pode ser ignorado na definição do funcional gerador. Temos, consequentemente,

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A\delta[\partial_i A^i]\exp\left\{i\int d^dx\Big[-\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\Big]\right\}$$

$$= \int \mathcal{D}A\delta[\partial_i A^i]\exp\left\{i\int d^dx\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big)\right\} = \int \mathcal{D}A\delta[\partial_i A^i]\exp\{iS[A]\},$$

e esse é justamente o formato tradicional do funcional gerador sem fontes de uma teoria de gauge, dado por

$$Z_0 = \int \mathcal{D}[\phi^a]\prod_\alpha \delta[\mathcal{G}_\alpha]\exp\{iS[\phi]\}, \tag{3.72}$$

em que ϕ^a são os campos de gauge, $\mathcal{G}_\alpha = 0$ as condições fixadoras de calibre, que restringem o espaço de configurações à subvariedade quocientada pelas órbitas de gauge, e $S[\phi]$ é a ação livre do campo. Pode-se mostrar (por exemplo, em [7]) que, utilizando a estratégia de Faddeev e Popov [17], é possível fazer mudanças de gauge na condição $\mathcal{G}$, e a forma do funcional continua igualmente válida. Faremos isso explicitamente no capítulo seguinte.

Aqui não comentaremos sobre as equações de Schwinger-Dyson e as identidades de Ward-Takashi aplicadas às interações do campo eletromagnético, pois é um tema plenamente presente na literatura (por exemplo, [2, 7, 18, 19]). O próximo capítulo, no entanto, contém essa análise para a eletrodinâmica escalar topologicamente massiva.

Referências

[1] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Volume I*. Cambridge University Press, 1995.

[2] K. Huang. *Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals, Second Edition*. John Wiley & Sons, 2010.

[3] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill College, 1965.

[4] O. Darrigol. *From c-Numbers to q-Numbers: The Classical Analogy in the History of Quantum Theory*. University of California Press, 1993.

[5] L. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.

[6] M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.

[7] L. G. C. Mendoza. *Da teoria clássica à quântica de campos através da abordagem de Faddeev-Jackiw*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2024.

[8] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro. *Effective Action in Quantum Gravity*. IOP Publishing Ltd., 1992.

[9] B. Hartfield. *Quantum field theory of point particles and strings*. CRC Press, 1992.

[10] J. Schwinger. On the Green's functions of quantized fields. i. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37(7):452–455, 1951.

[11] F. J. Dyson. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75:1736–1755, 1949.

[12] H. Nastase. *Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2019.

[13] M. C. Bertin and B. M. Pimentel. Symplectic quantization of the BF gravity in 1+1 dimensions. *International Journal of Modern Physics A*, 40(24), 2025.

[14] L. D. Faddeev. The Feynman integral for singular Lagrangians. *Theor Math Phys*, 1:1–13, 1969.

[15] P. Senjanovic. Path integral quantization of field theories with second-class constraints. *Annals of Physics*, 100(1):227–261, 1976.

[16] Yang-Gang Miao. Erratum. *Annals of Physics*, 209(1):248, 1991.

[17] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters B*, 25(1):29–30, 1967.

[18] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Publications, 2006.

[19] E. Fradkin. *Quantum field theory: An Integrated Approach*. Princeton University Press, 2021.

Capítulo 4

Eletrodinâmica escalar topologicamente massiva

Ao longo das décadas de 1970 e 1980, físicos e matemáticos se reuniram para estudar o recém descoberto fenômeno da *anomalia axial* [1, 2] da eletrodinâmica espinorial. Na teoria quântica de campos, uma *anomalia* é o nome dado a uma simetria clássica que é explicitamente quebrada no sistema quântico. No caso da anomalia axial da QED, o diagrama responsável por quebrar explicitamente essa simetria tem uma relação direta com as formas de Chern-Simons, pois é dada por um *termo topológico*, mais especificamente, a *densidade de Chern-Pontryagin*, que definiremos posteriormente.

Termos topológicos são amplamente estudados na matemática e produzem uma gama de fenômenos físicos interessantes. Entre eles, o surgimento de uma massa de caráter topológico no campo eletromagnético $(2+1)$-dimensional, que será explicitamente demonstrado neste capítulo. Antes disso, no entanto, comentaremos brevemente sobre o que é um termo de Chern-Simons e qual o significado de sua denominação como "topológico".

4.1 Termos topológicos

O diagrama da anomalia axial resulta em um objeto conhecido como *densidade de Chern-Pontryagin* $\mathcal{P}$, que é definido em um espaço-tempo 4-dimensional $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{P}_{(4)} \equiv \frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \tag{4.1}$$

em que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o símbolo de campo eletromagnético e $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ o tensor de Levi-Civita. Quando integrada em todo $\mathcal{M}$, essa densidade se torna uma quantidade independente da métrica,

$$P_{(4)} \equiv \frac{1}{8}\int_{\mathcal{M}} d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tag{4.2}$$

que, portanto, contém somente informações *topológicas* a respeito de $\mathcal{M}$.[1] A densidade $\mathcal{P}_{(2n)}$ pode ser definida em qualquer espaço-tempo de dimensão par $2n$, e ela será sempre igual a uma derivada total de outro objeto. De fato, perceba que no caso 4-dimensional,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma) \\
&= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu \partial^\sigma A^\rho - \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma - \partial^\nu A^\mu \partial^\sigma A^\rho + \partial^\nu A^\mu \partial^\rho A^\sigma) \\
&= 4\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu A^\nu \partial^\sigma A^\rho = 4\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} [\partial^\mu (A^\nu \partial^\sigma A^\rho) - A^\nu \partial^\mu \partial^\sigma A^\rho],
\end{aligned}$$

mas o último termo é o produto de um tensor simétrico com um anti-simétrico em (μ, σ), portanto é nulo. Ou seja,

$$\mathcal{P}_{(4)} = \frac{1}{2}\partial^\mu (\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} A^\nu \partial^\sigma A^\rho) \equiv \frac{1}{2}\partial^\mu C_\mu,$$

em que

$$C_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} A^\nu \partial^\sigma A^\rho, \tag{4.3}$$

e esse vetor é denominado a **forma de Chern-Simons** (ou *corrente de Chern-Simons*, ou *corrente de anomalia*, no contexto de anomalias) para $\mathcal{M}$.

O fato de (4.1) ser um termo de derivada total indica que ele não tem verdadeiramente um significado clássico, pois podemos usar o teorema de Stokes para redefinir (4.2) como uma integral orientada na fronteira de $\mathcal{M}$, o que não gera nenhuma implicação física nas equações de movimento. Sua categorização como um anomalia, no entanto, dá a entender que o processo de quantização confere uma importância muito maior a esse tipo de objeto topológico.

Ao enxergar (4.2) como uma integral em $\partial\mathcal{M}$, temos

$$P_{(4)} \equiv \frac{1}{8}\int_{\mathcal{M}} d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3x\, n^\mu (\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} A^\nu \partial^\sigma A^\rho)$$

em que n^μ é um vetor unitário que define a orientação dessa superfície, portanto

[1] Isso significa que deformações suaves de $\mathcal{M}$, que implicam deformações suaves em sua métrica, não alteram o valor de $P_{(4)}$, já que este não depende da métrica em um espaço-tempo semi-Riemanniano arbitrário.

podemos interpretar (4.3) como um objeto definido no espaço-tempo $\mathcal{M}' \equiv \partial\mathcal{M}$ de dimensão ímpar $2n-1$. De fato, ao escolher uma direção para a orientação de $\mathcal{M}'$, por exemplo, $n^\mu = (0,0,0,1)$, e ignorarmos a dependência dos potenciais nessa direção, podemos definir o tensor de Levi-Civita tridimensional $\varepsilon^{3\mu\nu\rho} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho}$ e obter a seguinte integral, definida em um espaço-tempo tridimensional arbitrário

$$\int_{\mathcal{M}'} d^3x \, \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho = \int_{\mathcal{M}'} d^3x \, \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu F^{\nu\rho} \equiv C_{(3)}, \tag{4.4}$$

conhecida como *termo de Chern-Simons* tridimensional.

Esses objetos são invariantes topológicos de $\mathcal{M}'$ e foram introduzidos por S. S. Chern e J. Simons em 1974 [3], ao estudar invariantes topológicos de fibrados cuja variedade base tem dimensão ímpar. Eles foram inicialmente aplicados por A. S. Schwarz na teoria quântica de campos em 1978 [4] e desde então vêm sido amplamente estudados. Para uma análise introdutória a respeito do tema, indica-se [5, 6, 7], e para o leitor interessado em aprofundar-se no assunto, tanto pelo ponto de vista físico quanto matemático, recomenda-se [8, 9, 10, 11, 12].

É curioso notar que, tendo surgido na matemática e encontrado um propósito na física, a evolução do estudo de formas de Chern-Simons na teoria quântica de campos voltou a render resultados na matemática. Isso aconteceu ao se descobrir a relação de certos observáveis de uma teoria cuja ação é igual a (4.4) com a topologia algébrica e a teoria de nós. Duas importantes referências são [13, 14], mas recomenda-se o último capítulo da referência [15] para uma leitura introdutória.

Neste trabalho veremos como a adição desse termo à ação do campo eletromagnético em um espaço-tempo (2+1)-dimensional resulta em excitações que podem ser compreendidas como partículas massivas, ou seja, fótons dotados de uma *massa topológica*. Veremos que esse termo não afeta as identidades de Ward-Takahashi para a eletrodinâmica escalar (mais especificamente a identidade de Ward, $k_\mu\Pi^{\mu\nu} = 0$, se mantém idêntica) e interpretaremos como esses resultados se comportam em dois limites: tanto para o campo eletromagnético tradicional, dado somente pela ação de Maxwell sem o termo topológico, quanto para o termo topológico puro, sem o termo cinético de Maxwell. Começaremos nossa análise estudando o campo eletromagnético livre.

4.2 Campo eletromagnético topologicamente massivo

Para garantir a possibilidade de analisar com clareza o comportamento do nosso sistema em ambos os limites categorizados acima, definimos a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_{\alpha}, \tag{4.5}$$

em que γ e μ são constante arbitrárias. O limite do eletromagnetismo de Maxwell é obtido ao fazer $\mu \to 0, \gamma = 1$, e o limite topológico puro ao fazer $\gamma \to \infty$. As equações de movimento para esse sistema são

$$\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\gamma}\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0, \tag{4.6}$$

que são invariantes de gauge a menos de um termo de derivada total [9]. No caso de uma teoria de gauge abeliana, como é o caso do eletromagnetismo, esse termo extra não resulta em consequências físicas, mas o mesmo não pode ser dito para uma teoria de gauge não-abeliana. Isso leva a consequências interessantes, que são intimamente relacionadas à topologia do espaço-tempo e do grupo de gauge, mas não trateremos desse assunto, que é debatido na referência citada anteriormente e largamente explorado em [16].

Para construir a dinâmica Hamiltoniana, calculamos os momentos canônicos

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^{\mu}} = \frac{1}{\gamma}F^{\mu 0} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu 0\alpha}A_{\alpha}, \tag{4.7}$$

e imediatamente percebemos que nossa Lagrangiana é singular, pois tem uma equação de vínculo $\pi^0 = 0$. Devemos, portanto, utilizar o procedimento de Faddeev-Jackiw com a contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek para encontrar a estrutura simplética subjacente a esse sistema. Para isso, construímos a Hamiltoniana substituindo (4.7) na transformada de Legendre, que resulta

$$\mathcal{H} = \pi^i\partial_i A_0 - \frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i + \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^i A^j - \frac{\gamma\mu^2}{8}A^i A_i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij}A_0 + \frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}. \tag{4.8}$$

Mas lembrando que, para o eletromagnetismo em 2+1 dimensões, os campos elétrico e magnético são definidos em função do tensor de Faraday (de maneira análoga a (2.45) no caso (3+1)-dimensional) como

$$E^i = F^{0i},\ B = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij}, \tag{4.9}$$

em que agora $\vec{E}$ é um vetor 2-dimensional e B é uma quantidade escalar.[2] Em função dos campos, a Hamiltoniana do sistema é escrita como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\gamma}(E^2 + B^2) + \left(\frac{1}{\gamma}\partial_i E^i - \mu B\right)A_0, \tag{4.10}$$

que é a Hamiltoniana tradicional do eletromagnetismo, mais um termo da lei de Gauss tradicional, mais um termo magnético resultado da massa topológica. Voltando a sua forma em termos dos potenciais, a partir da Hamiltoniana construímos a Lagrangiana canônica,

$$\mathcal{L}(\xi) = \pi_i \dot{A}^i - \mathcal{H}(A^0, A^i, \pi_i), \tag{4.11}$$

o que nos permite identificar nossas variáveis canônicas como $\xi^\mu = (A^0, A^i, \pi_i)$ e a 1-forma canônica como

$$\theta = \pi_i \delta A^i, \tag{4.12}$$

na notação condensada de DeWitt. A 2-forma canônica é dada por

$$\omega = \delta\pi_i \wedge \delta A^i, \tag{4.13}$$

escrita matricialmente como

$$\Omega(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & 0_{2\times 2} & -I_{2\times 2} \\ \vec{0} & I_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.14}$$

e pode-se ver facilmente que essa matriz é singular. A primeira iteração do procedimento de Fadeev-Jackiw resulta em um único modo nulo

$$X = \alpha \frac{\delta}{\delta A^0}, \tag{4.15}$$

em que $\alpha(\vec{x})$ é uma função arbitrária, e com isso montamos o vínculo dinâmico

[2] Mais precisamente, B é um *pseudo-escalar*, pois é um objeto que troca de sinal ao se fazer uma transformação de paridade. Analogamente, no caso (3+1)-dimensional, o campo magnético $\vec{B}$ não é um vetor, e sim um *pseudo-vetor*.

$$\chi = \alpha \frac{\delta H}{\delta A^0} = \alpha \Big(-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} - \partial_i \pi^i \Big).$$

Portanto a equação de vínculo é

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + \partial_i \pi^i = 0 \\ &\therefore \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} = -\partial_i \pi^i. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Em termos dos campos elétrico e magnético, essa equação é escrita como

$$\boxed{\mu B = \frac{1}{\gamma}\partial_i E^i,} \tag{4.17}$$

que é a nova forma da **lei de Gauss**, alterada pela massa topológica. Perceba que no limite topológico puro, $\gamma \to \infty$, temos simplesmente $B = 0$, e portanto esse vínculo implica em uma dinâmica sem campo magnético. Além disso, se aplicada na Hamiltoniana, essa equação resulta

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i + \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^i A^j - \frac{\gamma\mu^2}{8}A^i A_i + \frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}, \tag{4.18}$$

ou, em termos dos campos,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2\gamma}(E^2 + B^2), \tag{4.19}$$

que é a Hamiltoniana tradicional do eletromagnetismo quando $\gamma = 1$. O limite $\gamma \to \infty$ implica $\mathcal{H}_1 = 0$ e consequentemente não temos **nenhuma dinâmica**. Essa é uma característica curiosa, mas não específica da teoria de Chern-Simons. A anulação da Hamiltoniana é um fato presente em qualquer *teoria topológica de tipo Schwarz*[3] e a teoria de Chern-Simons é o exemplo mais proeminente destas.

A primeira iteração da Lagrangiana canônica, utilizando os resultados acima, se torna

$$\mathcal{L}_1(\xi_1) = \pi_i \dot{A}^i + \Big(-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} - \partial_i \pi^i \Big)\dot{u} - \mathcal{H}_1(A^i, \pi_i) \tag{4.20}$$

e a partir dela identificamos as novas variáveis canônicas $\xi_1 = (A^i, \pi_i, u)$ e calculamos a 2-forma canônica,

[3] Uma referência para teorias topológicas, que diferencia claramente aquelas de tipo Schwarz e de tipo Witten e analisa ambas com grande profundidade é [17].

$$\omega_1 = \delta\pi_i \wedge \delta A^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i \delta A^j \wedge \delta u + \partial_i \delta\pi_i \wedge \delta u, \tag{4.21}$$

em que os operadores diferenciais estão agindo sobre os deltas de Dirac, implícitos nessa notação condensada. As componentes dessa 2-forma são

$$\Omega_1(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0_{2\times 2} & -I_{2\times 2} & \begin{matrix} -\frac{\mu}{2}\partial_2 \\ \frac{\mu}{2}\partial_1 \end{matrix} \\ I_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \begin{matrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{matrix} \\ \frac{\mu}{2}\partial_2 \quad -\frac{\mu}{2}\partial_1 & -\partial_1 \quad -\partial_2 & 0 \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.22}$$

que ainda é uma matriz singular, pois calcula-se $\det \Omega_1 = 0$. Seguimos para a segunda iteração do procedimento, encontrando o único modo nulo

$$X_1 = -\partial_i \alpha \frac{\delta}{\delta A^i} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_j \alpha \frac{\delta}{\delta \pi_i} + \alpha \frac{\delta}{\delta u}, \tag{4.23}$$

em que $\alpha(\vec{x})$ é uma função arbitrária. Isso resulta na equação de vínculo

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ji}\pi^j \partial_i \alpha + \frac{\mu^2}{4} A_i \partial_i \alpha + \partial_j F^j{}_i \partial_i \alpha + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\pi^i \partial_j \alpha - \frac{\mu^2}{4}\varepsilon^{ij} A_j \varepsilon^{ik}\partial_k \alpha \\ &= -\partial_j F^{ji}\partial_i \alpha = \alpha \underbrace{\partial_i \partial_j}_{\text{sim.}} \underbrace{F^{ji}}_{\text{antissim.}} = 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

que é exatamente a mesma encontrada para o campo eletromagnético tradicional. Temos, portanto, uma tautologia ($0 = 0$).

Para resolver isso, precisamos fixar o gauge escolhendo a condição de Coulomb, dada por $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Substituindo a equação de vínculo por essa condição, obtemos a segunda iteração da Lagrangiana canônica,

$$\mathcal{L}_2(\xi_2) = \pi_i \dot{A}^i + \Big(-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} - \partial_i \pi^i \Big)\dot{u} + \partial_i A^i \dot{u}_1 - \mathcal{H}_1|_{\chi_1 = 0}, \tag{4.25}$$

o que nos dá as variáveis canônicas $\xi_2 = (A^i, \pi_i, u, u_1)$ e nos permite calcular $\omega_2 = \omega_1 + \partial_i \delta A^i \wedge \delta u_1$, ou seja,

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & -I_{2\times2} & \begin{matrix} -\frac{\mu}{2}\partial_2 & \partial_1 \\ \frac{\mu}{2}\partial_1 & \partial_2 \end{matrix} \\ I_{1\times2} & 0_{2\times2} & \begin{matrix} \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\mu}{2}\partial_2 & -\frac{\mu}{2}\partial_1 \\ -\partial_1 & -\partial_2 \end{matrix} & \begin{matrix} -\partial_1 & -\partial_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.26}$$

Dessa vez, ω_2 é regular, com $\det\Omega_2 \propto [\det(\nabla^2)]^2 \neq 0$. Calculamos então sua inversa,

$$[\Omega_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & \begin{matrix} 1-\frac{\partial_1^2}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1\partial_2}{\nabla^2} \\ -\frac{\partial_2\partial_2}{\nabla^2} & 1-\frac{\partial_2^2}{\nabla^2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \frac{\partial_1}{\nabla^2} \\ 0 & \frac{\partial_2}{\nabla^2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1+\frac{\partial_1^2}{\nabla^2} & \frac{\partial_1\partial_2}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_1\partial_2}{\nabla^2} & -1+\frac{\partial_2^2}{\nabla^2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -\mu/2 \\ \mu/2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\partial_1}{\nabla^2} & \frac{\mu}{2}\frac{\partial_2}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_2}{\nabla^2} & -\frac{\mu}{2}\frac{\partial_1}{\nabla^2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -\frac{\partial_1}{\nabla^2} & -\frac{\partial_2}{\nabla^2} \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{\partial_1}{\nabla^2} & -\frac{\partial_2}{\nabla^2} \\ -\frac{\mu}{2}\frac{\partial_2}{\nabla^2} & \frac{\mu}{2}\frac{\partial_1}{\nabla^2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\ -\frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.27}$$

e com isso temos, enfim, os parênteses de Poisson para os graus de liberdade físicos do sistema,

$$\begin{aligned} \{A^i, \pi_j\} &= \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Big)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \\ \{\pi_i, \pi_j\} &= -\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \end{aligned} \tag{4.28}$$

a partir dos quais podemos aplicar o princípio da correspodência e obter os comutadores da teoria quântica

$$\begin{aligned} [\hat{A}^i, \hat{\pi}_j] &= i\Big(\hat{I}\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Big)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \\ [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] &= -i\hat{I}\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{4.29}$$

dessa forma finalizando o procedimento de quantização canônica. Como esperado, no limite de Maxwell o segundo comutador se anula e temos simplesmente o resultado (2.68), enquanto o limite topológico puro tem exatamente as mesmas relações de comutação. Agora seguiremos para a quantização funcional, de forma

a obter o funcional gerador do sistema quântico.

4.2.1 Quantização funcional

Tendo encontrado uma variedade de fase estendida em que nosso sistema é regular, podemos aplicar o procedimento de quantização simplética explicitado no capítulo anterior. Para isso utilizaremos os vínculos $\chi = -\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} - \partial_i\pi^i$ e $\chi_1 = \partial_i A^i$. Sabemos que as coordenadas do espaço de fase estendido são $\xi_2 = (A^i, \pi_i, u, u_1)$ e a Lagrangiana canônica (4.25) é

$$\mathcal{L}_2 = \pi_i \dot{A}^i + \Big(-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} - \partial_i\pi^i\Big)\dot{u} + \partial_i A^i \dot{u}_1 - \mathcal{H}_2,$$

sendo a Hamiltoniana 2-iterada,

$$\mathcal{H}_2 = \Big(-\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i + \frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij} + \frac{\mu\gamma}{2}\varepsilon_{ij}\pi^i A^j - \frac{\gamma\mu^2}{8}A^i A_i\Big)\Big|_{\partial_i A^i = 0}.$$

Além disso, o determinante da matriz de componentes da forma simplética nesse sistema de coordenadas é $\det\Omega_2 \propto \det^2(\nabla^2)$, com uma constante de proporcionalidade irrelevante para nossos propósitos. Aplicando esses resultados na equação obtida em (3.65), temos o gerador funcional sem fontes

$$\begin{aligned} Z_0 = \int \mathcal{D}A^i\mathcal{D}\pi_j \det(\nabla^2)\delta\Big[-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} - \partial_i\pi^i\Big]\delta[\partial_i A^i]\exp\Big\{ i\int d^3x\Big[\pi^i\dot{A}_i \\ +\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i - \frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij} - \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^i A^j + \frac{\gamma\mu^2}{8}A^i A_i\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Para que cheguemos em uma expressão mais familiar, usaremos uma estratégia equivalente àquela utilizada no exemplo do campo eletromagnético, por meio das identidades

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\tilde{A}_0\delta[\tilde{A}_0]\exp\Big\{ i\int d^3x\tilde{A}_0\partial_i\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j + \pi^i\Big)\Big\} \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{A}_0\delta[\tilde{A}_0]\exp\Big\{ -i\int d^3x\partial_i\tilde{A}_0\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j + \pi^i\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

e

$$\delta\Big[-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij}-\partial_i\pi^i\Big]=\int\mathcal{D}\sigma\exp\Big\{i\int d^3x\sigma\Big(\frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij}+\partial_i\pi^i\Big)\Big\}$$
$$=\int\mathcal{D}\sigma\exp\Big\{i\int d^3x\sigma\partial_i\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j+\pi^i\Big)\Big\}$$
$$=\int\mathcal{D}\sigma\exp\Big\{-i\int d^3x\partial_i\sigma\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j+\pi^i\Big)\Big\},$$

dessa forma,

$$Z_0=\int\mathcal{D}A_j\mathcal{D}\tilde{A}_0\mathcal{D}\pi^j\mathcal{D}\sigma\det(\nabla^2)\delta[\partial_iA^i]\delta[\tilde{A}_0]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\pi^i(\dot{A}_i-\partial_i\tilde{A}_0-\partial_i\sigma)$$
$$-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j(\partial_i\tilde{A}_0+\partial_i\sigma)+\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}-\frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^iA^j+\frac{\gamma\mu^2}{8}A^iA_i\Big]\Big\}.$$

Fazemos a mudança de coordenadas $A_0=\tilde{A}_0+\sigma$, que não altera a medida de integração funcional, pois é meramente uma translação. Assim,

$$Z_0=\int\mathcal{D}A_j\mathcal{D}A_0\mathcal{D}\pi^j\mathcal{D}\sigma\det(\nabla^2)\delta[\partial_iA^i]\delta[A_0-\sigma]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\pi^i(\dot{A}_i-\partial_iA_0)$$
$$-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_iA_0+\frac{1}{2}\pi^i\pi_i-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}-\frac{\mu\gamma}{2}\varepsilon_{ij}\pi^iA^j+\frac{\gamma\mu^2}{8}A^iA_i\Big]\Big\},$$

e já que $\int\mathcal{D}\sigma\,\delta[A_0-\sigma]=1$, temos

$$Z_0=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\pi^j\det(\nabla^2)\delta[\partial_iA^i]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\pi^i\Big(\dot{A}_i-\partial_iA_0-\frac{\mu\gamma}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)$$

$$-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_iA_0+\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}+\frac{\gamma\mu^2}{8}A^iA_i\Big]\Big\}$$

$$=\int\mathcal{D}A_\mu\det(\nabla^2)\delta[\partial_iA^i]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}+\frac{\gamma\mu^2}{8}A^iA_i$$
$$-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_iA_0\Big]\Big\}\cdot\int\mathcal{D}\pi^j\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i+\pi^i\Big(F_{0i}-\frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)\Big]\Big\}.$$

Podemos completar o quadrado para fazer a integral dos momentos,

$$\int \mathcal{D}\pi^j \exp\Big\{i\int d^3x\Big[\frac{1}{2}\pi^i\pi_i+\pi^i\Big(\frac{1}{\gamma}F_{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)\Big]\gamma\Big\} = \int \mathcal{D}\pi^j \exp\Big\{\frac{i}{2}\int d^3x\Big[\pi^i\pi_i$$

$$+2\pi^i\Big(\frac{1}{\gamma}F_{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)+\Big(\frac{1}{\gamma}F_{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)^2-\Big(\frac{1}{\gamma}F_{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)^2\Big]\gamma\Big\}$$

$$= \exp\Big\{-\frac{i}{2}\int d^3x\Big[\Big(\frac{1}{\gamma}F_{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)^2\Big]\gamma\Big\}\underbrace{\int \mathcal{D}\pi^j \exp\Big\{\frac{i\gamma}{2}\int d^3x\Big[\pi^i+\frac{1}{\gamma}F^{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\Big]^2\Big\}}_{=\mathcal{N}},$$

e essa integral se torna uma gaussiana, que resulta em um valor constante (possivelmente infinito) $\mathcal{N}$ que será embutido nas igualdades subsequentes, como no capítulo anterior. Dessa forma,

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A_\mu \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}+\frac{\gamma\mu^2}{8}A^iA_i$$
$$-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_i A_0\Big]\Big\}\cdot\exp\Big\{-\frac{i}{2}\int d^3x\Big[\Big(\frac{1}{\gamma}F_{0i}-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)^2\Big]\gamma\Big\},$$

$$= \int \mathcal{D}A_\mu \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}-\frac{1}{2\gamma}F_{0i}F^{0i}$$
$$+\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j A_0+\frac{\mu}{2}F_{0i}\varepsilon^{ij}A_j\Big]\Big\},$$

no entanto, sabemos que

$$-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}-\frac{1}{2\gamma}F_{0i}F^{0i} = -\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j A_0+\frac{\mu}{2}F_{0i}\varepsilon^{ij}A_j = \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij0}F_{ij}A_0+\frac{\mu}{2}\varepsilon^{0ij}F_{0i}A_j = \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha,$$

portanto temos finalmente

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A_\mu \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[-\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha\Big]\Big\}$$

$$\equiv \int \mathcal{D}A \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i]\exp(iS[A]). \tag{4.31}$$

e essa é exatamente a forma esperada, como em (3.36), para o funcional gerador de

uma teoria de gauge. Em seguida, faremos a mudança de variável $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, que por ser uma translação não altera a medida de integração e por ser uma transformação de gauge não altera a ação, portanto

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i + \nabla^2 \Lambda] \exp(iS[A]),$$

e integrando os dois lados no campo Λ,

$$Z_0 \underbrace{\int \mathcal{D}\Lambda}_{=\mathcal{N}_1} = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Lambda \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i + \nabla^2 \Lambda] \exp(iS[A])$$

$$\therefore Z_0 = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Lambda \det(\nabla^2)\delta[\partial_i A^i + \nabla^2 \Lambda] \exp(iS[A]).$$

A seguir usaremos a seguinte identidade, inicialmente provada por L. Faddeev e V. Popov ([18]), e cuja aplicação posteriormente se tornou o que chamamos de *método de Faddeev-Popov*,

$$1 = \int \mathcal{D}\Lambda \delta[G[\Lambda]] \det\Big(\frac{\delta G[\Lambda]}{\delta \Lambda}\Big), \tag{4.32}$$

que é resultado de uma simples mudança de variáveis $\Lambda \to G[\Lambda]$, pois

$$\mathcal{D}G = \det\Big(\frac{\delta G[\Lambda]}{\delta \Lambda}\Big)\mathcal{D}\Lambda,$$

o que implica

$$\int \mathcal{D}\Lambda \delta[G[\Lambda]] \det\Big(\frac{\delta G[\Lambda]}{\delta \Lambda}\Big) = \int \mathcal{D}G\delta[G] = 1.$$

Voltando ao nosso funcional gerador, fazendo $G[\Lambda] = \partial_i A^i + \nabla^2 \Lambda$, temos que

$$\det\Big(\frac{\delta G[\Lambda]}{\delta \Lambda}\Big) = \det(\nabla^2),$$

portanto

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A \underbrace{\mathcal{D}\Lambda \det\Big(\frac{\delta G[\Lambda]}{\delta \Lambda}\Big)\delta[G[\Lambda]]}_{=1} \exp(iS[A])$$

$$= \int \mathcal{D}A \exp(iS[A]). \tag{4.33}$$

Essa é a forma tradicional do funcional gerador, que permite identificá-lo como uma média ponderada sobre todas as configurações de campo. Importante perce-

ber que esse objeto não foi postulado dessa forma, mas deduzido por meio de um procedimento coerente, que exige necessariamente uma estrutura simplética sobre a qual a dinâmica do sistema clássico é construída.

Para podermos retirar informações desse resultado é necessário colocá-lo em uma forma mais propícia, o que será feito por meio de uma transformação de gauge.

Gauge de Feynman-t'Hooft-Landau

Usaremos novamente o método de Faddeev-Popov para fazer uma mudança de variáveis ao chamado *gauge de Feynman-t'Hooft-Landau* (também conhecido como *gauge de Lorenz* no contexto de eletromagnetismo clássico) e redefinir a ação do sistema com um termo extra de *gauge-fixing*. Esse gauge é dado pela condição

$$G[A] = \partial_\mu A^\mu(x) + w(x) = 0, \tag{4.34}$$

ou, em termos do campo transformado,

$$G[A'[\Lambda]] \equiv G[\Lambda] = \partial_\mu A'^\mu[\Lambda] + w = \partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu\Lambda) + w = \partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda + w,$$

que nos dá a seguinte identidade, usando (4.32),

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\Lambda\delta[\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda + w]\det\left(\frac{\delta(\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda + w)}{\delta\Lambda}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\Lambda\delta[\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda + w]\det(\Box). \end{aligned}$$

Inserindo em (4.33),

$$\begin{aligned} Z_0 &= \underbrace{\det(\Box)}_{=\mathcal{N}_2}\int \mathcal{D}A\int \mathcal{D}\Lambda\delta[\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda + w]\exp(iS[A]), \\ &= \int \mathcal{D}A\int \mathcal{D}\Lambda\delta[\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda + w]\exp(iS[A]) \end{aligned}$$

mas fazendo $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$, temos a mesma situação que anteriormente,

$$Z_0 = \underbrace{\int \mathcal{D}\Lambda}_{=\mathcal{N}_1}\int \mathcal{D}A\delta[\partial_\mu A^\mu + w]\exp(iS[A])$$

$$= \int \mathcal{D}A\delta[\partial_\mu A^\mu + w]\exp(iS[A]). \tag{4.35}$$

Agora integramos os dois lados sobre $w(x)$ fazendo uso de um peso gaussiano, $\exp(-i\int d^3x w^2/2\alpha)$, resultando em

$$Z_0\int \mathcal{D}w\exp\Big(-i\int d^3x\frac{w^2}{2\alpha}\Big) = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}w\delta[\partial_\mu A^\mu + w]\exp(iS[A])\exp\Big(-i\int d^3x\frac{w^2}{2\alpha}\Big),$$

mas no lado esquerdo temos apenas uma integral gaussiana, cujo resultado é uma constante $\mathcal{N}_3$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}w\delta[\partial_\mu A^\mu + w]\exp(iS[A])\exp\Big(-i\int d^3x\frac{w^2}{2\alpha}\Big) \\ &= \int \mathcal{D}A\exp(iS[A])\exp\Big(-i\int d^3x\frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\alpha}\Big) \\ &\equiv \int \mathcal{D}A\exp(iS_{GF}[A]), \end{aligned} \tag{4.36}$$

sendo

$$S_{GF} \equiv \int d^3x\Big(-\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\alpha}\Big) \tag{4.37}$$

a ação gauge-fixada. De fato, esse procedimento é necessário pois a ação do campo eletromagnético não gauge-fixada possui um operador singular agindo entre os campos. Isso faz com que ele seja não-invertível, e dessa forma não somos capazes de achar o propagador do fóton, que depende do seu operador inverso.

O propagador livre do fóton

O próximo passo é nos aproveitar da regularidade do operador acima para encontrar o propagador livre de fóton. De fato, este objeto é definido como a função de 2-pontos da teoria, dada (de acordo com (3.35)), por

$$\frac{1}{Z_0}\frac{\delta^2 Z[J]}{i\delta J_\mu(x_1)i\delta J_\nu(x_2)}\Big|_{J_\mu=0} = \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle. \tag{4.38}$$

Essa relação nos permite entendê-lo como a amplitude de transição do vácuo assintótico passado para um estado de excitação de uma partícula em um certo evento do espaço-tempo (sendo este evento aquele entre x_1 e x_2 cujo valor da coordenada temporal é o menor) e em seguida para o estado de excitação de

uma partícula em outro evento (aquele entre x_1 e x_2 cujo valor da coordenada temporal é o maior), e por fim o vácuo assintótico futuro. Vemos, assim, que é uma interpretação possível a ideia de que uma partícula é criada no evento x_1 (ou x_2), em seguida ela se *propaga* até x_2 (ou x_1) e por fim é aniquilada.

Para calcular esse objeto, é conveniente escrever o funcional gerador com fontes da seguinte forma

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp\Big[i \int d^3x \Big(\frac{1}{2} A_\mu (\Delta^{-1})^{\mu\nu} A_\nu + J^\mu A_\mu\Big)\Big], \tag{4.39}$$

para algum operador diferencial $(\Delta^{-1})^{\mu\nu}$, e é isso que faremos agora. De fato, temos que a ação gauge-fixada é

$$S_{GF} = \int d^3x \Big(-\frac{1}{4\gamma} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\alpha}\Big)$$

$$= \int d^3x \Big[-\frac{1}{4\gamma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu A_\nu A_\rho - \frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \Big]$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{\gamma} (A_\mu \Box A^\mu - A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu) - \mu \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\rho A_\nu + \frac{1}{\alpha} A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \Big]$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} A_\mu \Big[\frac{\Box}{\gamma} g^{\mu\nu} - \frac{(\alpha - \gamma)}{\alpha\gamma} \partial^\mu \partial^\nu - \mu \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \Big] A_\nu.$$

Portanto nosso funcional gerador se torna (4.39) se escrevemos o operador que age entre os campos como

$$(\Delta^{-1})^{\mu\nu} \equiv \frac{\Box}{\gamma} g^{\mu\nu} - \frac{(\alpha - \gamma)}{\alpha\gamma} \partial^\mu \partial^\nu - \mu \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho. \tag{4.40}$$

Essa forma de $Z[J]$ nos permite fazer uma mudança de variáveis para centralizar essa integral funcional no que chamamos de "valor clássico" do campo e assim transformá-la em uma integral gaussiana, utilizando uma estratégia análoga àquela usada no Exemplo 3.1.1 do capítulo anterior. De fato, veja que, se considerarmos a ação com fontes,

$$S = \int d^3x \Big[\frac{1}{2} A_\mu(x) (\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x) A_\nu(x) + J^\mu(x) A_\mu(x) \Big]$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{2} A_\mu(x_1) (\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) + \int d^3x_1 J^\mu(x_1) A_\mu(x_1),$$

então temos que

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = \int d^3x_2 \frac{1}{2}(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x-x_2)A_\nu(x_2) + \int d^3x_1 \frac{1}{2}A_\rho(x_1)(\Delta^{-1})^{\rho\mu}(x_1-x) + J^\mu(x),$$

mas, definindo o valor clássico do campo A^{cl}_μ como aquele valor que extremiza seu funcional de ação, temos que

$$\int d^3x_2 \frac{1}{2}(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x-x_2)A^{cl}_\nu(x_2) + \int d^3x_1 \frac{1}{2}A^{cl}_\rho(x_1)(\Delta^{-1})^{\rho\mu}(x_1-x) + J^\mu(x) = 0,$$

sendo

$$\int d^3x_1 \frac{1}{2}A^{cl}_\rho(x_1)(\Delta^{-1})^{\rho\mu}(x_1-x) \equiv \int d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{2}A_\rho(x_1)\frac{\delta[(\Delta^{-1})^{\rho\nu}(x_1-x_2)A_\nu(x_2)]}{\delta A_\mu(x)}$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{2}(\Delta^{-1})^{\nu\rho}(x_2-x_1)A_\rho(x_1)\frac{\delta A_\nu(x_2)}{\delta A_\mu(x)} = \int d^3x_2 \frac{1}{2}(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x-x_2)A^{cl}_\nu(x_2),$$

em que a primeira igualdade é resultado de integrações por partes nas derivadas dentro de $(\Delta^{-1})^{\mu\nu}$, seguida pelo uso do teorema de Stokes, e a segunda é resultado de fazermos a integral em x_1, para em seguida renomear o índice e a variável muda. Portanto, utilizando a notação condensada de DeWitt,

$$\begin{aligned}(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x-x_2)A^{cl}_\nu(x_2) &= -J^\mu(x)\\ \therefore A^{cl}_\mu(x) &= -\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y).\end{aligned} \tag{4.41}$$

Agora veja que

$$\frac{1}{2}(A_\mu - A^{cl}_\mu)(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(A_\nu - A^{cl}_\nu) - \frac{1}{2}J^\mu\Delta_{\mu\nu}J^\nu = \frac{1}{2}[A_\mu(\Delta^{-1})^{\mu\nu}A_\nu$$

$$+A_\mu \underbrace{(\Delta^{-1})^{\mu\nu}\Delta_{\nu\rho}}_{\delta^\mu_\rho} J^\rho + \Delta_{\mu\rho}J^\rho(\Delta^{-1})^{\mu\nu}A_\nu + \Delta_{\mu\rho}J^\rho \underbrace{(\Delta^{-1})^{\mu\nu}\Delta_{\nu\sigma}}_{\delta^\mu_\sigma} J^\sigma] - \frac{1}{2}J^\mu\Delta_{\mu\nu}J^\nu$$

$$= \frac{1}{2}A_\mu(\Delta^{-1})^{\mu\nu}A_\nu + A_\mu J^\mu = S.$$

Dessa forma,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp\left[i\Big(\frac{1}{2}A_\mu(\Delta^{-1})^{\mu\nu}A_\nu + J^\mu A_\mu\Big)\right]$$

$$= \int \mathcal{D}A \exp\Big[i\Big(\frac{1}{2}(A_\mu - A^{cl}_\mu)(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(A_\nu - A^{cl}_\nu) - \frac{1}{2}J^\mu \Delta_{\mu\nu} J^\nu\Big)\Big]$$

$$= \exp\Big(-\frac{i}{2}J^\mu \Delta_{\mu\nu} J^\nu\Big) \int \mathcal{D}A \exp\Big[i\frac{1}{2}(A_\mu - A^{cl}_\mu)(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(A_\nu - A^{cl}_\nu)\Big],$$

já que o termo de fontes não depende mais do campo A_μ. Agora fazemos uma translação na variável de integração $A_\mu \to A_\mu - A^{cl}_\mu$, assim

$$Z[J] = \exp\Big(-\frac{i}{2}J^\mu \Delta_{\mu\nu} J^\nu\Big) \int \mathcal{D}A \exp\Big[i\frac{1}{2}A_\mu(\Delta^{-1})^{\mu\nu}A_\nu\Big], \tag{4.42}$$

e essa última integral é somente uma gaussiana. Consequentemente eliminamos inteiramente a integral funcional e obtivemos o funcional gerador do nosso sistema em termos do operador $\Delta_{\mu\nu}$,

$$Z[J] = \exp\Big(-\frac{i}{2}J^\mu \Delta_{\mu\nu} J^\nu\Big)$$

$$= \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^3x_1 d^3x_2 J^\mu(x_1)\Delta_{\mu\nu}(x_1 - x_2)J^\nu(x_2)\Big], \tag{4.43}$$

explicitando as integrais. Agora podemos relacionar esse objeto diretamente ao propagador, calculado por meio de suas derivadas funcionais,

$$\langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle = \frac{1}{Z_0}\frac{\delta^2 Z[J]}{i\delta J_\mu(x_1) i\delta J_\nu(x_2)}\Big|_{J_\mu=0}$$

$$= -\frac{1}{2i}\Delta_{\mu\nu}(x_1 - x_2) - \frac{1}{2i}\Delta_{\nu\mu}(x_2 - x_1) = i\Delta_{\mu\nu}(x_1 - x_2), \tag{4.44}$$

pois $\Delta_{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \Delta_{\nu\mu}(x_2 - x_1)$. Mas isso significa que, se $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k)$ é o propagador no espaço dos momentos, então

$$\langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x_1 - x_2)}\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k),$$

e é justamente $\tilde{\Delta}$ que calcularemos ao inverter o operador $\tilde{\Delta}^{-1}$. Encontramos este último fazendo a transformada de Fourier de Δ^{-1},

$$S_{GF} = \int d^3x \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} A_\mu(k)\Big[\frac{\Box}{\gamma}g^{\mu\nu} - \frac{(\alpha - \gamma)}{\alpha\gamma}\partial^\mu\partial^\nu - \mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\Big]\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{ik'x} A_\nu(k')$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{ix(k+k')} A_\mu(k)\Big[\frac{i(k')^\rho i(k')_\rho}{\gamma}g^{\mu\nu}$$

$$-\frac{(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma}i(k')^{\mu}i(k')^{\nu}-\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}i(k')_{\rho}\Big]A_{\nu}(k').$$

Usando

$$\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}e^{ix(k+k')}\equiv\delta^3(k+k') \tag{4.45}$$

e fazendo a integral em k', temos

$$S_{GF}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}A_{\mu}(k)\Big[\underbrace{-\frac{k^2}{\gamma}g^{\mu\nu}+\frac{(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma}k^{\mu}k^{\nu}+i\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}ik_{\rho}}_{=(\tilde{\Delta}^{-1})^{\mu\nu}(k)}\Big]A_{\nu}(-k).$$

Para calcular o propagador, portanto, usamos a relação

$$(\tilde{\Delta}^{-1})^{\mu\nu}\tilde{\Delta}_{\nu\rho}=\delta^{\mu}_{\rho} \tag{4.46}$$

e o decompomos como

$$\tilde{\Delta}^{\mu\nu}=Ag^{\mu\nu}+Bk^{\mu}k^{\nu}+C\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_{\rho},$$

em que A, B e C são constantes a se determinar. Aplicando a distributiva e igualando os coeficientes dos dois lados de (4.46), podemos determinar os valores dessas constantes e assim encontrar o propagador no espaço dos momentos. Fazendo $\gamma=1$, ele se torna

$$-i\tilde{\Delta}^{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2-\mu^2}\Big\{g^{\mu\nu}+\Big[(\alpha-1)-\frac{\alpha\mu^2}{k^2}\Big]\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}+\frac{i\mu}{k^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_{\rho}\Big\}, \tag{4.47}$$

a partir do qual identificamos imediatamente um polo no valor de $k^2=\mu^2$, o que significa, por meio da representação espectral de Källén–Lehmann [19, 20] (uma boa introdução ao tópico é [21]), que esse campo possui como excitação uma partícula massiva, de massa igual a μ. Esse é o motivo da Lagrangiana em questão ser denominada a Lagrangiana para o *campo de Maxwell topologicamente massivo*.

No limite $\mu=0,\gamma=1$ temos o já conhecido propagador do fóton no eletromagnetismo de Maxwell,

$$-i\tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{EM} = \frac{-i}{k^2}\left[g^{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right], \tag{4.48}$$

e no limite $\gamma \to \infty$ obtemos a teoria de Chern-Simons pura, cujo propagador é

$$-i\tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{CS} = \frac{-i}{k^2}\left(\alpha\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - \frac{i}{\mu}\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho\right). \tag{4.49}$$

Essa teoria não possui graus de liberdade dinâmicos, pois não tem um termo cinético e sua Hamiltoniana é nula, portanto entende-se que o objeto acima é o propagador dos *graus de liberdade topológicos* do campo de gauge abeliano.

As partículas resultantes dessas excitações são denominadas **anyons** e possuem um comportamento peculiar, pois não são férmions nem bósons. Estas são partículas com *estatística fracionária*, ou seja, cuja permutação em um sistema de partículas idênticas induz uma fase complexa na função de onda. Essa demonstração pode ser encontrada nas já citadas referências [14, 15].

É interessante pontuar que os anyons são teoricamente estudados desde a década de 1970, mas a comprovação experimental da existência de uma quasipartícula com essas propriedades (para o caso de uma teoria de gauge abeliana) só veio a acontecer em 2020 [22].

4.3 Eletrodinâmica escalar

Podemos aprofundar nossa análise ao inserir um campo de matéria interagindo com o campo eletromagnético. A maneira mais simples de fazer isso é utilizando um campo escalar complexo, que pode representar partículas carregadas com spin 0, como alguns mésons conhecidos na natureza, ou até mesmo um modelo efetivo de um sistema fermiônico em uma situação na qual os graus de liberdade de spin podem ser ignorados. A Lagrangiana desse sistema tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi, \tag{4.50}$$

em que $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante, sendo $e > 0$ a carga elétrica. É interessante notar que o termo de Chern-Simons **não é invariante por transformações de paridade**, pois se tomarmos

$$x_0 \to x_0,\ x_1 \to -x_1,\ x_2 \to x_2,$$

que implica

$$A_0 \to A_0,\ A_1 \to -A_1,\ A_2 \to A_2,$$
$$\partial_0 \to \partial_0,\ \partial_1 \to -\partial_1,\ \partial_2 \to \partial_2,$$

esse termo se torna

$$\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha = \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu A_\nu A_\alpha \to -\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu A_\nu A_\alpha.$$

A Lagrangiana (4.50), portanto, só é válida em situações específicas em que há uma quebra de paridade explícita (por exemplo, um material bidimensional sobre a ação de um campo magnético externo[4]). Esse fato também implica que o campo escalar ϕ em questão pode descrever tanto mésons escalares carregados (como os mésons $a_0^\pm$ [24, 25]) quanto mésons pseudoescalares carregados (como os bem conhecidos $\pi^\pm$).

O estudo desse sistema pode ser feito ao decompor a Lagrangiana em três partes:

- o termo eletromagnético

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha, \tag{4.51}$$

- o termo escalar

$$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \tag{4.52}$$

- e o termo de interação

$$\mathcal{L}_I = ieA^\mu(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + e^2A^2\phi^*\phi. \tag{4.53}$$

Além disso, podemos utilizar os resultados já obtidos na seção anterior e no Exemplo 2.1.1 do capítulo 2 para adiantar nosso trabalho referente aos dois primeiros termos. As equações de movimento desse sistema são

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma}\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = J^\nu, \\ (D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0, \\ [(D_\mu D^\mu + m^2)\phi]^* = 0, \end{cases} \tag{4.54}$$

[4]Essa situação é precisamente a descrição do que causa o fenômeno do *efeito Hall*. De fato, a teoria de Chern-Simons está intimamente relacionada a esse fenômeno ([23]).

sendo $J_\mu \equiv -ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) - 2e^2A_\mu\phi^*\phi$ o quadrivetor corrente elétrica gerado por esse campo de matéria. Os momentos canonicamente conjugados tornam-se

$$\begin{gathered}\pi_\phi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^* - ieA^0\phi^*, \;\; \pi^*_\phi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = \dot{\phi} + ieA^0\phi, \\ \pi^i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^i} = \frac{1}{\gamma}F^{i0} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j,\end{gathered} \tag{4.55}$$

em que temos o mesmo vínculo do caso do campo eletromagnético livre ($\pi^0 = 0$). A Hamiltoniana, por outro lado, se torna

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi + \mathcal{H}_{EM} + ieA^0(\pi^*_\phi\phi^* - \pi_\phi\phi) + ieA^i(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*) - e^2A^iA_i\phi^*\phi, \tag{4.56}$$

sendo

$$\mathcal{H}_\phi \equiv \pi_\phi\pi^*_\phi - \partial_i\phi^*\partial^i\phi + m^2\phi^*\phi \tag{4.57}$$

a Hamiltoniana do campo escalar livre, encontrada em (2.30), e

$$\mathcal{H}_{EM} \equiv \pi^i\partial_iA_0 - \frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i + \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^iA^j - \frac{\gamma\mu^2}{8}A^iA_i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij}A_0 + \frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij} \tag{4.58}$$

a Hamiltoniana do campo eletromagnético topologicamente massivo livre, encontrada em (4.8). Nossa Lagrangiana canônica é, portanto,

$$\mathcal{L}(\xi) = \pi_\phi\dot{\phi} + \pi^*_\phi\dot{\phi}^* + \pi_i\dot{A}^i - \mathcal{H}(\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi^*_\phi, A^0, A^i, \pi_i), \tag{4.59}$$

o que faz com que as coordenadas unificadas de nosso espaço de fase sejam $\xi = (\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi^*_\phi, A^0, A^i, \pi_i)$ e nossa 1-forma canônica

$$\theta = \pi_\phi\delta\phi + \pi^*_\phi\delta\phi^* + \pi_i\delta A^i \equiv \theta_\phi + \theta_{EM} \tag{4.60}$$

(utilizando a convenção de DeWitt). Importante notar a semelhança desse objeto com o que teríamos no caso de um campo escalar e um eletromagnético isolados, sem nenhum termo de interação (ou seja, teríamos $\theta =$ (2.31) + (4.12)). A estrutura da 1-forma canônica no dois casos é a mesma, mas no caso sem interação a

definição dos momentos π_ϕ e π_ϕ^* é dada simplesmente por (2.29). A inserção da interação entre os campos, portanto, se traduz geometricamente em uma mudança de coordenadas do espaço de fase

$$\begin{cases} \pi_\phi = \dot{\phi}^* \to \pi'_\phi = \dot{\phi}^* - ieA^0\phi^*, \\ \pi_\phi^* = \dot{\phi} \to \pi_\phi^{*\prime} = \dot{\phi} + ieA^0\phi, \end{cases} \tag{4.61}$$

que mistura os momentos do campo de matéria com a componente A^0 do campo de gauge. A partir desse objeto calculamos a 2-forma canônica

$$\omega = \delta\theta = \delta\pi_\phi \wedge \delta\phi + \delta\pi_\phi^* \wedge \delta\phi^* + \delta\pi_i \wedge \delta A^i, \tag{4.62}$$

que é exatamente igual a (2.32) + (4.13), levando em conta a transformação de coordenadas (4.61) acima. Isso nos dá, matricialmente,

$$\Omega = \begin{bmatrix} J_{4\times4} & \vec{0} & 0_{4\times4} \\ \vec{0}^T & 0 & \vec{0}^T \\ 0_{4\times4} & \vec{0} & J_{4\times4} \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{4.63}$$

sendo

$$J \equiv \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & -I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, de acordo com as definições (2.33) $\equiv \Omega_\phi$ e (4.14) $\equiv \Omega_{EM}$, temos simplesmente a mudança de coordenadas (4.61) seguida da definição

$$\Omega = \Omega_\phi \oplus \Omega_{EM}. \tag{4.64}$$

Essa matriz é claramente singular, portanto devemos seguir para o primeiro passo do procedimento, no qual encontramos o único modo nulo,

$$X = \alpha \frac{\delta}{\delta A^0},$$

que resulta na equação de vínculo

$$\chi = X^\mu \frac{\delta H}{\delta \xi^\mu} = \alpha[-\partial_i \pi^i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)] = 0, \tag{4.65}$$

que pode ser escrita em termos dos campos elétrico e magnético (4.9) como

$$\frac{1}{\gamma}\partial_i E^i - \mu B + ie(\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*) - 2e^2 A_0\phi^*\phi = 0,$$

$$\therefore \frac{1}{\gamma}\partial_i E^i - \mu B + J_0 = 0,$$

em que J_0 é a componente temporal do quadrivetor corrente (ou seja, a *densidade de carga* ρ). Dessa forma, a lei de Gauss modificada se torna

$$\boxed{\frac{1}{\gamma}\nabla\cdot\vec{E} = -\rho + \mu B.} \tag{4.66}$$

No limite de Maxwell temos meramente a lei de Gauss tradicional, $\nabla\cdot\vec{E} = -\rho$, enquanto no limite topológico temos $\mu B = \rho$. Esse resultado curioso significa que, mesmo que o campo de gauge puramente topológico não tenha dinâmica livre, ao acoplá-lo a um campo de matéria ele se torna dinâmico e temos um campo magnético gerado pelo movimento de partículas carregadas (como esperado, pelo que sabemos da lei de Ampère-Maxwell).

A aplicação desse vínculo resulta na Hamiltoniana 1-iterada

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 = -\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i + \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^i A^j - \frac{\gamma\mu^2}{8}A^j A_j + \frac{1}{4\gamma}F_{ij}F^{ij} + \pi_\phi\pi_\phi^* - \partial_i\phi^*\partial^i\phi \\ + ieA^i(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*) + m^2\phi^*\phi - e^2A^iA_i\phi^*\phi\end{aligned} \tag{4.67}$$

e na Lagrangiana canônica 1-iterada

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\xi) = \pi_\phi\dot{\phi} + \pi_\phi^*\dot{\phi}^* + \pi_i\dot{A}^i + [-\partial_i\pi^i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)]\dot{u} \\ -\mathcal{H}_1(\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi_\phi^*, A^i, \pi_i),\end{aligned} \tag{4.68}$$

a partir da qual identificamos as novas variáveis do espaço de fase estendido, $\xi_1 = (\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi_\phi^*, A^i, \pi_i, u)$, e a nova 1-forma canônica $\theta_1 = \theta + [-\partial_i\pi^i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)]\delta u$. Portanto

$$\begin{aligned}\omega_1 = \omega - \partial_j\delta u\wedge\delta\pi_j + \frac{\mu}{2}\varepsilon^i_k\partial_i\delta u\wedge\delta A^k - ie\pi_\phi^*\delta u\wedge\delta\phi^* - ie\phi^*\delta u\wedge\delta\pi_\phi^* \\ + ie\pi_\phi\delta u\wedge\delta\phi + ie\phi\delta u\wedge\delta\pi_\phi,\end{aligned} \tag{4.69}$$

em que os operadores diferenciais estão agindo sobre os deltas de Dirac implícitos. Matricialmente, temos que

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} J_{4\times4} & 0_{4\times4} & \vec{K} \\ 0_{4\times4} & J_{4\times4} & \vec{D} \\ -\vec{K}^T & -\vec{D}^T & 0 \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.70}$$

em que

$$J \equiv \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & -I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}, \ \vec{K} \equiv \begin{bmatrix} -ie\pi_\phi \\ ie\pi_\phi^* \\ -ie\phi \\ ie\phi^* \end{bmatrix}, \ \vec{D} \equiv \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2}\partial_2 \\ \frac{\mu}{2}\partial_1 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix},$$

no entanto, ao definir (4.22) $\equiv [\Omega_1]_{EM}$, a relação $\Omega_1 = \Omega_\phi \oplus [\Omega_1]_{EM}$ **não é mais verdadeira**, devido à existência da submatriz $\vec{K}$. Essa matriz é singular, portanto encontramos o modo nulo

$$X_1 = ie\phi\alpha\frac{\delta}{\delta\phi} - ie\phi^*\alpha\frac{\delta}{\delta\phi^*} - ie\pi_\phi\alpha\frac{\delta}{\delta\pi_\phi} + ie\pi_\phi^*\alpha\frac{\delta}{\delta\pi_\phi^*} - \partial_i\alpha\frac{\delta}{\delta A^i} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_j\alpha\frac{\delta}{\delta\pi_i} + \alpha\frac{\delta}{\delta u},$$

consequentemente a equação de vínculo

$$\chi_1 = ie\alpha[\phi(-2ieA^i\partial_i\phi^* + m^2\phi^* - e^2A^iA_i\phi^* - ie\partial_iA^i\phi^* - \partial_i\partial^i\phi^*) - \phi^*(2ieA^i\partial_i\phi$$
$$+m^2\phi - e^2A^iA_i\phi + ie\partial_iA^i\phi - \partial_i\partial^i\phi) - \pi_\phi\pi_\phi^* + \pi_\phi^*\pi_\phi] - \partial_i\alpha\Big[\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ji}\pi^j - \frac{\mu^2}{4}A_i$$
$$-\partial_jF^j{}_i + ie(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*) - 2e^2A_i\phi^*\phi\Big] - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_j\alpha\Big[-\pi^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ik}A_k\Big],$$

e é questão de manipulação algébrica e integrações por partes perceber que essa quantidade é igual a zero. Portanto nosso vínculo é identicamente nulo,

$$\chi_1 = 0 = 0. \tag{4.71}$$

Como de costume, resolvemos esse problema ao escolher uma condição de calibre, que será novamente a condição de Coulomb, $\partial_iA^i = 0$. Seguindo com o procedimento, temos a nova Lagrangiana canônica,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(\xi) = \pi_\phi\dot{\phi} + \pi^*_\phi\dot{\phi}^* + \pi_i\dot{A}^i + [-\partial_i\pi^i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + ie(\pi^*_\phi\phi^* - \pi_\phi\phi)]\dot{u} \\ +\partial_i A^i\dot{u}_1 - \mathcal{H}_2(\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi^*_\phi, A^i, \pi_i),\end{aligned} \tag{4.72}$$

que nos fornece as variáveis canônicas, $\xi_2 = (\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi^*_\phi, A^i, \pi_i, u, u_1)$, e a 1-forma canônica, $\theta_2 = \theta_1 + \partial_i A^i \delta u_1$. Dessa forma temos finalmente

$$\omega_2 = \omega_1 + \partial_i \delta A^i \wedge \delta u_1, \tag{4.73}$$

ou seja,

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} J_{4\times4} & 0_{4\times4} & \vec{K} & \vec{0} \\ 0_{4\times4} & J_{4\times4} & \vec{D} & \vec{\partial} \\ -\vec{K}^T & -\vec{D}^T & 0 & 0 \\ \vec{0}^T & \vec{\partial}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{4.74}$$

sendo

$$J \equiv \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & -I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}, \ \vec{K} \equiv \begin{bmatrix} -ie\pi_\phi \\ ie\pi^*_\phi \\ -ie\phi \\ ie\phi^* \end{bmatrix}, \ \vec{D} \equiv \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2}\partial_2 \\ \frac{\mu}{2}\partial_1 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix}, \ \vec{\partial} \equiv \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e a relação $\Omega_2 = \Omega_\phi \oplus [\Omega_2]_{EM}$, com $[\Omega_2]_{EM} \equiv$ (4.26) é novamente quebrada devido à submatriz $\vec{K}$. Dessa vez temos $\det\Omega_2 = \det[\Omega_2]_{EM} \propto (\det\nabla^2)^2 \neq 0$, portanto chegamos em uma forma simplética. Isso nos permite inverter essa matriz, obtendo

$$[\Omega_2]^{-1} = \begin{bmatrix} -J_{4\times4} & 0_{4\times4} & \vec{0} & \vec{P} \\ 0_{4\times4} & & \vec{0} & \\ \vec{0} & & [\Omega_2]^{-1}_{EM} & \\ -\vec{P}^T & & & \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{4.75}$$

sendo

$$\vec{P} \equiv \begin{bmatrix} ie\frac{\phi}{\nabla^2} \\ -ie\frac{\phi^*}{\nabla^2} \\ -ie\frac{\pi_\phi}{\nabla^2} \\ ie\frac{\pi^*_\phi}{\nabla^2} \end{bmatrix} \tag{4.76}$$

e

$$[\Omega_2]^{-1}_{EM} = \begin{bmatrix} & & 1-\frac{\partial_1^2}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1\partial_2}{\nabla^2} & 0 & \frac{\partial_1}{\nabla^2} \\ & 0_{2\times 2} & -\frac{\partial_2\partial_2}{\nabla^2} & 1-\frac{\partial_2^2}{\nabla^2} & 0 & \frac{\partial_2}{\nabla^2} \\ -1+\frac{\partial_1^2}{\nabla^2} & \frac{\partial_1\partial_2}{\nabla^2} & 0 & -\mu/2 & \frac{\partial_1}{\nabla^2} & \frac{\mu}{2}\frac{\partial_2}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_1\partial_2}{\nabla^2} & -1+\frac{\partial_2^2}{\nabla^2} & \mu/2 & 0 & \frac{\partial_2}{\nabla^2} & -\frac{\mu}{2}\frac{\partial_1}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial_1}{\nabla^2} & -\frac{\partial_2}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\ -\frac{\partial_1}{\nabla^2} & -\frac{\partial_2}{\nabla^2} & -\frac{\mu}{2}\frac{\partial_2}{\nabla^2} & \frac{\mu}{2}\frac{\partial_1}{\nabla^2} & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{bmatrix} \delta^2(\vec{x}-\vec{y})$$

a matriz inversa (4.27) encontrada na seção anterior. Importante notar que **não é verdadeira** a afirmação $\Omega_2^{-1} = \Omega_\phi^{-1} \oplus [\Omega_2]^{-1}_{EM}$, graças à presença dos termos (4.76) que, no entanto, estão somente no setor não físico. Isso significa que os PP fundamentais do sistema **não são alterados**. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} \{\phi, \pi_\phi\} = \delta^2(\vec{x}-\vec{y}),\ \{\phi^*, \pi_\phi^*\} = \delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \\ \{A^i, \pi_j\} = \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Big)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \\ \{\pi_i, \pi_j\} = -\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \end{aligned} \tag{4.77}$$

e assim podemos quantizá-los, obtendo os comutadores

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}, \hat{\pi}_\phi] = i\hat{I}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}),\ [\hat{\phi}^\dagger, \hat{\pi}_\phi^\dagger] = i\hat{I}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \\ [\hat{A}^i, \hat{\pi}_j] = i\Big(\hat{I}\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Big)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \\ [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] = -i\hat{I}\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{4.78}$$

Seguiremos agora para a quantização funcional desse sistema usando a estratégia simplética.

4.3.1 Funcional gerador

O cálculo do funcional gerador é completamente análogo ao que foi feito na seção anterior, levando em conta a adição do funcional gerador do campo escalar complexo encontrado no Exemplo 3.1.1 do capítulo anterior. Temos os vínculos

$$\chi = -\partial_i \pi^i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi),\ \chi_1 = \partial_i A^i, \tag{4.79}$$

e as coordenadas $\xi_2 = (\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi_\phi^*, A^i, \pi_i, u, u_1)$, com $\det\Omega_2 \propto (\det\nabla^2)^2$. Além disso, a Lagrangiana canônica é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \pi_\phi\dot{\phi} + \pi_\phi^*\dot{\phi}^* + \pi_i\dot{A}^i + \Big[-\partial_i\pi^i - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij} + ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)\Big]\dot{u} \\ +\partial_i A^i \dot{u}_1 - \mathcal{H}_2(\phi, \pi_\phi, \phi^*, \pi_\phi^*, A^i, \pi_i),\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 = \Big(-\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i + \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^i A^j - \frac{\gamma\mu^2}{8}A^jA_j + \frac{1}{4\gamma}F_{ij}F^{ij} + \pi_\phi\pi_\phi^* - \partial_i\phi^*\partial^i\phi \\ +ieA^i(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*) + m^2\phi^*\phi - e^2A^iA_i\phi^*\phi\Big)\Big|_{\partial_i A^i = 0}.\end{aligned} \tag{4.80}$$

Portanto, de acordo com (3.65),

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\zeta \underbrace{\det(\nabla^2)}_{=\mathcal{N}} \delta[\chi]\delta[\chi_1] \exp\Big\{ i\int d^3x[\pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* + \pi_i\dot{A}^i - \mathcal{H}_2]\Big\},$$

em que $\mathcal{D}\zeta \equiv \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\pi_\phi\mathcal{D}\pi_\phi^*\Pi_i\mathcal{D}[A^i]\Pi_j\mathcal{D}[\pi_j]$. Agora utilizamos as identidades

$$\begin{aligned}1 = \int \mathcal{D}\tilde{A}_0\delta[\tilde{A}_0]\exp\Big\{ i\int d^3x\tilde{A}_0\Big[\partial_i\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j + \pi^i\Big) - ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)\Big]\Big\} \\ = \int \mathcal{D}\tilde{A}_0\delta[\tilde{A}_0]\exp\Big\{ i\int d^3x\Big[-\partial_i\tilde{A}_0\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j + \pi^i\Big) - ie\tilde{A}_0(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)\Big]\Big\},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\delta[\chi] = \int \mathcal{D}\sigma\exp\Big\{ i\int d^3x\sigma\Big[\partial_i\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j + \pi^i\Big) - ie(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)\Big]\Big\} \\ = \int \mathcal{D}\sigma\delta[\sigma]\exp\Big\{ i\int d^3x\Big[-\partial_i\sigma\Big(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j + \pi^i\Big) - ie\sigma(\pi_\phi^*\phi^* - \pi_\phi\phi)\Big]\Big\},\end{aligned}$$

obtendo

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\zeta\mathcal{D}\tilde{A}_0\mathcal{D}\sigma\delta[\chi_1]\delta[\tilde{A}_0]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\pi_\phi(\dot{\phi}+ie\phi\tilde{A}_0+ie\phi\sigma)$$

$$+\pi^*_\phi(\dot{\phi}^*-ie\phi^*\tilde{A}_0-ie\phi^*\sigma)+\pi^i(\dot{A}_i-\partial_i\tilde{A}_0-\partial_i\sigma)-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j(\partial_i\tilde{A}_0+\partial_i\sigma)$$

$$-\Big(-\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i+\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}+\frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^iA^j-\frac{\gamma\mu^2}{8}A^jA_j\Big)-(\pi^*_\phi\pi_\phi-\partial_i\phi^*\partial^i\phi+m^2\phi^*\phi)$$

$$-ieA^i(\phi^*\partial_i\phi-\phi\partial_i\phi^*)+e^2A^iA_i\phi^*\phi\Big]\Big\}$$

e fazendo a translação $\tilde{A}_0 \to A_0 = \tilde{A}_0 + \sigma$,

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\zeta\mathcal{D}A_0\delta[\chi_1]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\pi_\phi(\dot{\phi}+ie\phi\tilde{A}_0+ie\phi\sigma)+\pi^*_\phi(\dot{\phi}^*-ie\phi^*A_0)$$

$$+\pi^i(\dot{A}_i-\partial_iA_0)-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_iA_0-\Big(-\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i+\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}+\frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}\pi^iA^j-\frac{\gamma\mu^2}{8}A^jA_j\Big)$$

$$-(\pi^*_\phi\pi_\phi-\partial_i\phi^*\partial^i\phi+m^2\phi^*\phi)-ieA^i(\phi^*\partial_i\phi-\phi\partial_i\phi^*)+e^2A^iA_i\phi^*\phi\Big]\Big\}$$

$$=\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\delta[\chi_1]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_iA_0-\frac{1}{4\gamma}F^{ij}F_{ij}+\frac{\gamma\mu^2}{8}A^jA_j+\partial_i\phi^*\partial^i\phi$$

$$-m^2\phi^*\phi-ieA^i(\phi^*\partial_i\phi-\phi\partial_i\phi^*)+e^2A^iA_i\phi^*\phi\Big]\Big\}\cdot I,$$

em que definimos a integral nos momentos

$$I \equiv \int \mathcal{D}\pi_\phi\mathcal{D}\pi^*_\phi\exp\Big\{i\int d^3x[-\pi_\phi\pi^*_\phi+\pi_\phi(\dot{\phi}+ieA_0\phi)+\pi^*_\phi(\dot{\phi}^*-ieA_0\phi^*)]\Big\}$$
$$\cdot\int\prod_i\mathcal{D}[\pi_i]\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i-\pi^i\Big(F_{i0}+\frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)\Big]\Big\}. \tag{4.81}$$

A parte eletromagnética dessa integral foi calculada na seção anterior,

$$\int \prod_i \mathcal{D}[\pi_i] \exp\Big\{ i \int d^3x \Big[\frac{\gamma}{2}\pi^i\pi_i - \pi^i\Big(F_{i0} + \frac{\gamma\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)\Big]\Big\}$$
$$= \mathcal{N}_1 \exp\Big\{ -\frac{i}{2}\int d^3x\, \gamma\Big(\frac{1}{\gamma}F_{i0} + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A^j\Big)^2\Big\},$$

e a integral nos momentos do campo escalar é exatamente igual a (3.52) após a transformação de coordenadas (4.61), ou seja

$$\int \mathcal{D}\vec{\pi} \exp\Big\{ i \int d^3x \Big(\frac{1}{2}\vec{\pi}^T\cdot A\cdot\vec{\pi} + \vec{b}^T\cdot\vec{\pi}\Big)\Big\},$$

sendo

$$\vec{\pi} \equiv \begin{bmatrix} \pi_\phi \\ \pi_\phi^* \end{bmatrix},\ A \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{b} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\phi} + ieA_o\phi \\ \dot{\phi}^* - ieA_0\phi^* \end{bmatrix}. \tag{4.82}$$

O resultado é, portanto,

$$\mathcal{N}_2 \exp\Big\{ -i\int d^3x \Big[\frac{1}{2}\vec{b}^T\cdot A^{-1}\cdot\vec{b}\Big]\Big\} = \mathcal{N}_2 \exp\Big\{ -i\int d^3x (\dot{\phi} + ieA_0\phi)(ieA_0\phi^* - \dot{\phi}^*)\Big\},$$

e com isso temos o funcional gerador

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\delta[\chi_1] \exp\Big\{ i\int d^3x \Big[-\frac{1}{2\gamma}F_{i0}F^{i0} - \frac{1}{4\gamma}F_{ij}F^{ij} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j\partial_i A_0$$
$$-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}F^{i0}A^j - \frac{\mu^2}{8}A^jA_j + \frac{\mu^2}{8}A^jA_j + \dot{\phi}\dot{\phi}^* + \partial_i\phi^*\partial^i\phi - m^2\phi^*\phi - ieA^i(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*)$$
$$+ieA_0(\phi\dot{\phi}^* - \dot{\phi}\phi^*)\Big]\Big\},$$

e essa expressão é igual a

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\delta[\chi_1] \exp\Big\{ i\int d^3x \Big[-\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha + D_\mu\phi^*D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi\Big]\Big\}$$
$$= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\delta[\partial_i A^i] \exp(iS[A,\phi,\phi^*]). \tag{4.83}$$

O procedimento de mudança de gauge utilizando a identidade de Faddeev-Popov é exatamente análogo ao da seção anterior, nos rendendo o funcional

gerador

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp(iS_{GF}[A,\phi,\phi^*]), \tag{4.84}$$

em que

$$S_{GF} = \int d^3x \Big[-\frac{1}{4\gamma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha + D_\mu\phi^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\alpha}\Big] \tag{4.85}$$

é a ação gauge-fixada no gauge de Lorenz.

4.3.2 Funções de correlação conexas e ação efetiva

Usaremos agora alguns dos objetos definidos no capítulo anterior para deduzir algumas expressões que serão de grande utilidade no que se segue da análise desse sistema. Como vimos antes, o funcional gerador de funções de correlação conexas $W[J,J^*,J^\mu]$ é definido por

$$Z[J,J^*,J^\mu] \equiv e^{iW[J,J^*,J^\mu]}, \tag{4.86}$$

mas isso implica

$$\frac{\delta W}{\delta J} = -\frac{i}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J} = \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 W}{\delta J\delta J^*} = -\frac{i}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J\delta J^*} + \frac{i}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J}\frac{\delta Z}{\delta J^*} = \frac{i}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J i\delta J^*} - \frac{i}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J^*},$$

portanto, se igualarmos todas as fontes a zero, temos

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)}\Big|_{f=0} = \langle\phi^*(x)\rangle, \tag{4.87}$$

$$-i\frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J^*(y)}\Big|_{f=0} = \langle\phi(x)\phi^*(y)\rangle - \langle\phi(x)\rangle\langle\phi^*(y)\rangle = G(x,y), \tag{4.88}$$

em que $f = 0$ significa $J = J^* = J^\mu = 0$ e $G(x,y) \equiv G_2^c(x,y)$ é a função de dois pontos conexa, também conhecida como **propagador completo do campo escalar**. No mais, levando em conta a conservação de carga, o VEV de qualquer combinação de campos que tenha uma quantidade diferente de partículas e antipartículas se

anula (por exemplo, $\langle\phi(x)\rangle = \langle\phi^*(y)\rangle$=0), portanto

$$\boxed{G(x,y) = i\frac{\delta^2 W}{i\delta J(x) i\delta J^*(y)}\Big|_{f=0} = \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J(x) i\delta J^*(y)}\Big|_{f=0}.} \tag{4.89}$$

Similarmente, o **propagador completo do campo de gauge** é dado por

$$\boxed{D_{\mu\nu}(x,y) = i\frac{\delta^2 W}{i\delta J^\mu(x) i\delta J^\nu(y)}\Big|_{f=0}.} \tag{4.90}$$

Já sabemos que a transformada de Legendre funcional de W resulta na ação efetiva da teoria,

$$\Gamma[\phi_{cl}, \phi^*_{cl}, A^\mu_{cl}] = W[J, J^*, J_\mu] - \int d^3x (J^*\phi_{cl} + J\phi^*_{cl} + J_\mu A^\mu_{cl}),$$

em que ϕ_{cl}, ϕ^*_{cl} e A^μ_{cl} são os valores clássicos dos campos. A partir dessa definição encontramos as relações que definem essas novas variáveis,

$$\begin{gathered} \frac{\delta W}{\delta J} = \phi^*_{cl},\ \frac{\delta W}{\delta J^*} = \phi_{cl},\ \frac{\delta W}{\delta J_\mu} = A^\mu_{cl}, \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi^*_{cl}} = -J,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{cl}} = -J^*,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_{cl}} = -J_\mu. \end{gathered} \tag{4.91}$$

Utilizando essas relações, podemos perceber que as funções de correlação geradas por Γ são operadores inversos àquelas geradas por W. De fato, perceba que

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\delta W}{\delta J^*(x)} \implies \delta^3(x-y) = \frac{\delta\phi_{cl}(x)}{\delta\phi_{cl}(y)} = \frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(y)}\frac{\delta W}{\delta J^*(x)},$$

mas usando a regra da cadeia e a quarta das relações acima,

$$\delta^3(x-y) = \int dz \frac{\delta J(z)}{\delta\phi_{cl}(y)}\frac{\delta^2 W}{\delta J(z)\delta J^*(x)} = \int dz \Big[-\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(z)\delta\phi_{cl}(y)}\frac{\delta^2 W}{\delta J(z)\delta J^*(x)}\Big],$$

particularmente, fazendo $J^\mu = J = J^* = 0$ e sabendo que temos (4.89), resulta

$$\boxed{\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(x)\delta\phi_{cl}(y)}\Big|_{cl=0} = iG(x,y)^{-1},} \tag{4.92}$$

em que $cl = 0$ significa $A^\mu_{cl} = \phi_{cl} = \phi^*_{cl} = 0$, o que é um resultado da anulação das fontes. Similarmente, deduz-se também

$$\boxed{\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^{\mu}_{cl}(x)\delta A^{\nu}_{cl}(y)}\Big|_{cl=0} = iD_{\mu\nu}(x,y)^{-1}.} \tag{4.93}$$

4.3.3 Equações de Schwinger-Dyson

Nesta subseção, usaremos as equações de Schwinger-Dyson para deduzir equações funcionais para algumas funções de correlação importantes da teoria. Para isso, utilizaremos alguns métodos e estratégias retirados de [26, 27]. Ao aplicar as equações de S-D (3.28) no funcional gerador (4.84), obtemos

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\delta S_{GF}}{\delta A_{\mu}}\right)\Big|_{\xi^{\mu}=\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}_{\mu}}} + J^{\mu}\right] Z[J^{\mu},J,J^{*}] = 0, \\ \left[\left(\frac{\delta S_{GF}}{\delta \phi^{*}}\right)\Big|_{\xi^{\mu}=\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}_{\mu}}} + J\right] Z[J^{\mu},J,J^{*}] = 0, \\ \left[\left(\frac{\delta S_{GF}}{\delta \phi}\right)\Big|_{\xi^{\mu}=\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}_{\mu}}} + J^{*}\right] Z[J^{\mu},J,J^{*}] = 0, \end{cases} \tag{4.94}$$

e essas relações podem ser utilizadas para deduzir as equações que desejamos.

Propagador completo do campo escalar

A segunda e a terceira equações acima podem ser usadas para deduzir uma equação para o propagador completo do campo escalar. Usaremos a segunda. Levando em conta (4.85), temos

$$\frac{\delta S_{GF}}{\delta \phi^{*}} = [-\Box - m^2 + e^2A^2 - 2ieA^{\mu}\partial_{\mu} + ie(\partial_{\mu}A^{\mu})]\phi^{*},$$

portanto, substituindo em (4.94),

$$\Big[-\Box - m^2 + e^2\frac{\delta^2}{i\delta J^{\mu}(x) i\delta J_{\mu}(x)} - 2ie\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\partial_{\mu} + ie\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\Big]\frac{\delta Z}{i\delta J^{*}(x)} + J(x)Z = 0,$$

mas usando a técnica de *regularização por point splitting*, temos que

$$\Big[-2ie\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\partial_{\mu} + ie\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\Big]\frac{\delta Z}{i\delta J^{*}(x)} = ie\lim_{x'\to x}(-2\partial_{\mu} + \partial'_{\mu})\frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{\mu}(x') i\delta J^{*}(x)},$$

portanto

$$\Big[\Box + m^2 + e^2\frac{\delta^2}{\delta J^\mu(x)\delta J_\mu(x)} + e\lim_{x'\to x}(2\partial_\mu - \partial'_\mu)\frac{\delta}{\delta J_\mu(x')}\Big]\frac{\delta Z}{\delta J^*(x)} - iJ(x)Z = 0.$$

Derivamos mais uma vez em $J(y)$, obtendo

$$\Big[\Box + m^2 + e^2\frac{\delta^2}{\delta J^\mu(x)\delta J_\mu(x)} + e\lim_{x'\to x}(2\partial_\mu - \partial'_\mu)\frac{\delta}{\delta J_\mu(x')}\Big]\frac{\delta^2 Z}{\delta J(y)\delta J^*(x)} - i\delta^3(x-y)Z$$

$$-iJ(x)\frac{\delta Z}{\delta J(y)} = 0.$$

Queremos que apareça um fator de Z^{-1} em cada um dos termos, de forma a relacioná-los com a definição do propagador completo, portanto para isso faremos a seguinte manipulação: Seja um funcional qualquer $F[J^\mu]$. Então, considerando que $Z = e^{iW}$, temos

$$\frac{\delta F}{\delta J_\mu} = \frac{\delta}{\delta J_\mu}\Big(e^{iW}\frac{F}{Z}\Big) = e^{iW}\Big(i\frac{\delta W}{\delta J_\mu} + \frac{\delta}{\delta J_\mu}\Big)\frac{F}{Z},$$

ou seja,

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu} = Z\Big(i\frac{\delta W}{\delta J_\mu} + \frac{\delta}{\delta J_\mu}\Big)\frac{1}{Z},$$

e similarmente,

$$\frac{\delta^2 F}{\delta J^\mu \delta J_\mu} = e^{iW}\Big[i\frac{\delta W}{\delta J^\mu}\Big(i\frac{\delta W}{\delta J_\mu} + \frac{\delta}{\delta J_\mu}\Big) + i\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu \delta J^\mu} + i\frac{\delta W}{\delta J_\mu}\frac{\delta}{\delta J_\mu} + \frac{\delta^2}{\delta J_\mu \delta J^\mu}\Big]\frac{F}{Z},$$

portanto

$$\frac{\delta^2}{\delta J^\mu \delta J_\mu} = Z\Big[\frac{\delta^2}{\delta J_\mu \delta J^\mu} + 2i\frac{\delta W}{\delta J^\mu}\frac{\delta}{\delta J_\mu} - \frac{\delta W}{\delta J_\mu}\frac{\delta W}{\delta J^\mu} + i\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu \delta J^\mu}\Big]\frac{1}{Z}.$$

Substituindo essas relações, a equação de SD se torna

$$Z\Big[\Box + m^2 + e^2\frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x)\delta J^\mu(x)} + 2ie^2\frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - e^2\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}\frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)} + ie^2\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu(x)\delta J^\mu(x)}$$

$$+e\lim_{x'\to x}(2\partial_\mu-\partial'_\mu)\Big(i\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x')}+\frac{\delta}{\delta J_\mu(x')}\Big)\Big]\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(y)\delta J(x)}-i\delta^3(x-y)Z+ZJ\frac{\delta W}{\delta J(y)}=0.$$

Igualando as fontes escalares a zero (e levando em conta que ao final também anularemos a fonte do campo de gauge, o que nos permite ignorar mais alguns termos), resta

$$\Big[\Box+m^2+e^2\frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x)\delta J^\mu(x)}+ie^2\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu(x)\delta J^\mu(x)}+e\lim_{x'\to x}(2\partial_\mu-\partial'_\mu)\frac{\delta}{\delta J_\mu(x')}\Big]G(x,y)$$
$$+i\delta^3(x-y)=0. \tag{4.95}$$

Agora precisamos calcular as derivadas do propagador, que será feito já embutindo a anulação da fonte do campo de gauge ao final:

- Usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta J_\mu(x')}=\int dz\frac{\delta A^{cl}_\nu(z)}{\delta J_\mu(x')}\frac{\delta G(x,y)}{\delta A^{cl}_\nu(z)}=\int dz\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu(x')\delta J^\nu(z)}\frac{\delta G(x,y)}{\delta A^{cl}_\nu(z)},$$

levando em conta (4.91). E sabendo da relação (4.90), temos

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta J_\mu(x')}=i\int dz D^\mu_\nu(x',z)\frac{\delta G(x,y)}{\delta A^{cl}_\nu(z)}.$$

Agora utilizamos a relação para derivadas de operadores $\delta G=-G(\delta G^{-1})G$, que resulta

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta J_\mu(x')}=-i\int dzdz'dz''D^\mu_\nu(x',z)G(x,z')\frac{\delta G^{-1}(z',z'')}{\delta A^{cl}_\nu(z)}G(z'',y),$$
$$=-i\int dzdz'dz''D^\mu_\nu(x',z)G(x,z')\frac{\delta}{\delta A^{cl}_\nu(z)}\Big[-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(z')\phi_{cl}(z'')}\Big]_{cl=0}G(z'',y)$$
$$=i\int dzdz'dz''D^\mu_\nu(x',z)G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y), \tag{4.96}$$

em que definimos o vértice exato

$$\boxed{\Gamma^3_\nu(z,z',z'')\equiv i\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^{cl}_\nu(z)\delta\phi^*_{cl}(z')\phi_{cl}(z'')}\Big|_{cl=0}.} \tag{4.97}$$

- Em seguida calculamos a segunda derivada

$$\frac{\delta^2 G(x,y)}{\delta J_\mu(x)\delta J^\mu(x)} = i\int dzdz'dz''\Big[\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}D^{\mu\nu}(x,z)G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y)$$

$$+D^{\mu\nu}(x,z)\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y) + D^{\mu\nu}(x,z)G(x,z')$$

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y) + D^{\mu\nu}(x,z)G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}G(z'',y)\Big].$$

O primeiro termo é igual a

$$-D^{\mu\rho}(x,w)D^\lambda_\mu(x,w')\Pi^3_{\rho\lambda\sigma}(w,w',w'')D^{\sigma\nu}(w'',z)G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y),$$

em que assumem-se integradas todas as variáveis repetidas (exceto o x) e foi definido o vértice exato de 3 fótons

$$\boxed{\Pi^3_{\rho\lambda\sigma}(w,w',w'') \equiv i\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\rho_{cl}(w)A^\lambda_{cl}(w')A^\sigma_{cl}(w'')}\Big|_{cl=0}.} \tag{4.98}$$

O segundo e o quarto itens são iguais e resultam

$$-D^{\mu\nu}(x,z)D^\rho_\mu(x,w)G(x,w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')G(w'',z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y),$$

enquanto o terceiro item se torna

$$iD^{\mu\nu}(x,z)G(x,z')D^\rho_\mu(x,w)\Gamma^4_{\rho\nu}(w,z,z',z'')G(z'',y),$$

sendo o vértice exato com dois fótons e dois escalares,

$$\boxed{\Gamma^4_{\rho\nu} \equiv \frac{\delta^4\Gamma}{\delta A^\rho_{cl}(w)A^\nu_{cl}(x)\delta\phi_{cl}(z')\delta\phi^*_{cl}(z'')}\Big|_{cl=0}.} \tag{4.99}$$

Aplicando esses resultados em (4.95), temos finalmente

$$(\Box + m^2)G(x,y) + \int d^3x'\Sigma(x,x')G(x',y) = -i\delta^3(x-y), \tag{4.100}$$

em que

$$-i\Sigma(x,x') = ie^2 D^{\mu}_{\mu}(x,x)\delta^3(x-x') + 2e\lim_{x'\to x}(2\partial_\mu - \partial'_\mu)[D^{\mu}_{\nu}(x',z)G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y)]$$

$$+ie^2[D^{\mu\rho}(x,w)D^{\lambda}_{\mu}(x,w')\Pi^3_{\rho\lambda\sigma}(w,w',w'')D^{\sigma\nu}(w'',z)G(x,z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y)$$

$$+2D^{\mu\nu}(x,z)D^{\rho}_{\mu}(x,w)G(x,w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')G(w'',z')\Gamma^3_\nu(z,z',z'')G(z'',y)$$

$$+D^{\mu\nu}(x,z)G(x,z')D^{\rho}_{\mu}(x,w)\Gamma^4_{\rho\nu}(w,z,z',z'')G(z'',y)]$$

é a **auto-energia** do campo escalar, que é o objeto que corrige o propagador livre para levar em conta as contribuições geradas pela polarização do vácuo.

Não faremos aqui as correções radiativas da teoria, mas é simples mostrar que esse termo é responsável pela *renormalização da massa* do campo escalar, já que a equação (4.100), no espaço de momentos, se torna

$$-i\tilde{G}(k) = \frac{-i}{k^2 - m^2 - \Sigma(k)}, \tag{4.101}$$

de modo que o polo do propagador completo (e portanto a relação que define a massa renormalizada) é dado por $k^2 = m_r^2(k) \equiv m^2 + \Sigma(k)$.

Propagador completo do fóton

Agora usaremos a primeira equação de (4.94) de forma a deduzir uma relação para o propagador completo do campo de gauge. De fato, de acordo com (4.85), temos que

$$\frac{\delta S_{GF}}{\delta A^\mu} = \Big[\frac{\Box}{\gamma}g_{\mu\nu} - \frac{(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma}\partial_\mu\partial_\nu - \mu\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho\Big]A^\nu + ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + 2e^2A_\mu\phi^*\phi$$

$$= (\Delta_{\mu\nu})^{-1}A^\nu + ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + 2e^2A_\mu\phi^*\phi,$$

em que utilizamos e definição (4.40) do operador inverso do propagador livre. Aplicando em (4.94), temos

$$\Big\{(\Delta_{\mu\nu})^{-1}\frac{\delta}{i\delta J_\nu} + ie\Big(\frac{\delta}{i\delta J^*}\partial_\mu\frac{\delta}{i\delta J} - \frac{\delta}{i\delta J}\partial_\mu\frac{\delta}{i\delta J^*}\Big) + 2e^2\frac{\delta}{i\delta J^\mu}\frac{\delta}{i\delta J}\frac{\delta}{i\delta J^*} + J_\mu\Big\}Z = 0,$$

com todas as fontes sendo funções de x. No segundo termo iremos novamente aplicar a técnica de *regularização por point-splitting*, de forma que ele se torna

$$ie\Big(\frac{\delta}{i\delta J^*(x)}\partial_\mu\frac{\delta}{i\delta J(x)}-\frac{\delta}{i\delta J(x)}\partial_\mu\frac{\delta}{i\delta J^*(x)}\Big)=ie\lim_{x'\to x}\Big(\frac{\delta}{i\delta J^*(x)}\partial'_\mu\frac{\delta}{i\delta J(x')}$$

$$-\frac{\delta}{i\delta J(x')}\partial_\mu\frac{\delta}{i\delta J^*(x)}\Big)=ie\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu-\partial_\mu)\frac{\delta^2}{i\delta J^*(x)i\delta J(x')},$$

e portanto temos

$$\begin{aligned}\Big\{-i(\Delta_{\mu\nu})^{-1}\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}-ie\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu-\partial_\mu)\frac{\delta^2}{\delta J^*(x)\delta J(x')}\\ +2ie^2\frac{\delta^3}{\delta J^\mu(x)\delta J(x)\delta J^*(x)}+J_\mu(x)\Big\}Z=0.\end{aligned}\tag{4.102}$$

Dessa vez, no entanto, se torna mais fácil calcular uma equação para o inverso do propagador. Para isso transformaremos esses termos em derivadas do funcional gerador W. Sabendo que $Z=e^{iW}$, temos

$$\frac{\delta}{\delta J^\nu(x)}Z=e^{iW}i\frac{\delta W}{\delta J^\nu(x)},$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta J^*(x)\delta J(x')}=\frac{\delta}{\delta J^*(x)}\Big[e^{iW}i\frac{\delta W}{\delta J(x')}\Big]=e^{iW}\Big[-\frac{\delta W}{\delta J^*(x)}\frac{\delta W}{\delta J(x')}+i\frac{\delta^2 W}{\delta J^*(x)\delta J(x')}\Big],$$

e o termo com 3 derivadas se torna (omitindo as variáveis das correntes, já que todas dependem da mesma variável)

$$\frac{\delta^3 Z}{\delta J_\mu\delta J^*\delta J}=e^{iW}\Big(-i\frac{\delta W}{\delta J_\mu}\frac{\delta W}{\delta J^*}\frac{\delta W}{\delta J}-\frac{\delta W}{\delta J_\mu}\frac{\delta^2 W}{\delta J^*\delta J}-\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu\delta J^*}\frac{\delta W}{\delta J}-\frac{\delta W}{\delta J^*}\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu\delta J}+i\frac{\delta^3 W}{\delta J_\mu\delta J^*\delta J}\Big).$$

Ao anular as fontes, no entanto, a maioria desses termos desaparecerá, por isso serão ignorados daqui pra frente. Com isso, a equação (4.102) se torna

$$Z\Big\{(\Delta_{\mu\nu})^{-1}\frac{\delta W}{\delta J_\nu(x)}+e\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu-\partial_\mu)\frac{\delta^2 W}{\delta J^*(x)\delta J(x')}-2ie^2\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}\frac{\delta^2 W}{\delta J^*(x)\delta J(x)}$$

$$-2e^2\frac{\delta^3 W}{\delta J_\mu(x)\delta J^*(x)\delta J(x)}+J_\mu(x)\Big\}=0$$

$$\therefore (\Delta_{\mu\nu})^{-1}A^{\nu}_{cl}(x) + e\lim_{x'\to x}(\partial'_{\mu}-\partial_{\mu})\frac{\delta^2 W}{\delta J^*(x)\delta J(x')} - 2ie^2 A^{cl}_{\mu}(x)\frac{\delta^2 W}{\delta J^*(x)\delta J(x)} \\ -2e^2\frac{\delta^3 W}{\delta J_{\mu}(x)\delta J^*(x)\delta J(x)} = \frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}_{cl}(x)}, \tag{4.103}$$

em que foram utilizadas as relações (4.91). Anulando as fontes escalares e em seguida derivando mais uma vez em $A^{\nu}_{cl}(y)$, usamos a relação (4.89) para obter

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^{\mu}_{cl}(x)\delta A^{\nu}_{cl}(y)} = (\Delta_{\mu\nu})^{-1}\delta^3(x-y) + ie\lim_{x'\to x}(\partial'_{\mu}-\partial_{\mu})\frac{\delta}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)}G(x,x')$$

$$+2e^2\eta_{\mu\nu}\delta^3(x-y)G(x,x) + \underbrace{2e^2A^{cl}_{\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)}G(x,x)}_{=0 \text{ quando } J^{\mu}=0} - 2ie^2\frac{\delta^2}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)\delta J^{\mu}(x)}G(x,x),$$

Agora é necessário ser realizado o cálculo das derivadas, no qual já será embutida a anulação da fonte do campo de gauge novamente:

- A primeira utiliza a propriedade $\delta G = -G(\delta G^{-1})G$ e a relação (4.92),

$$\frac{\delta G(x,x')}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)} = -\int dzdz' G(x,z)\frac{\delta}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)}G^{-1}(z,z')G(z',x')$$

$$= -\int dzdz' G(x,z)\frac{\delta}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)}\Big[-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(z)\delta\phi_{cl}(z')}\Big|_{cl=0}\Big]G(z',x')$$

$$= \int dzdz' G(x,z)\Gamma^3_{\nu}(y,z,z')G(z',x'),$$

  em que foi usada a definição (4.97).

- A segunda é calculada ao se aplicar diretamente (4.96) e a regra do produto,

$$\frac{\delta^2 G(x,x)}{\delta A^{\nu}_{cl}(y)\delta J^{\mu}(x)} = \int dzdz'\Big[\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(x)}G(x,z)\Gamma^3_{\nu}(y,z,z')G(z',x)$$

$$+G(x,z)\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(x)}\Gamma^3_{\nu}(y,z,z')G(z',x) + G(x,z)\Gamma^3_{\nu}(y,z,z')\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(x)}G(z',x)\Big],$$

  portanto,

$$\frac{\delta^2 G(x,x)}{\delta A^\nu_{cl}(y)\delta J^\mu(x)} = iD_{\mu\rho}(x,w)G(x,w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')G(w'',z)\Gamma^3_\nu(y,z,z')G(z',x)$$

$$+iG(x,z)D^\rho_\mu(x,w)\Gamma^4_{\rho\nu}(w,y,z,z')G(z',x) + iG(x,z)\Gamma^3_\nu(y,z,z')D^\rho_\mu(x,w)$$
$$G(z',w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')G(w'',x),$$

em que assumem-se integradas todas as variáveis repetidas (exceto o x) e utilizamos a definição (4.99). O primeiro e o último termo são iguais, o que se percebe ao renomear algumas variáveis e índices mudos. O resultado é, portanto,

$$\frac{\delta^2 G(x,x)}{\delta A^\nu_{cl}(y)\delta J^\mu(x)} = 2iD_{\mu\rho}(x,w)G(x,w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')G(w'',z)$$
$$\Gamma^3_\nu(y,z,z')G(z',x) + iG(x,z)D^\rho_\mu(x,w)\Gamma^4_{\rho\nu}(w,y,z,z')G(z',x).$$

Juntando todos esses resultados e anulando as fontes do campo de gauge em todos os termos, podemos aplicar a relação (4.93) para obter a equação

$$D_{\mu\nu}(x,y)^{-1} = -i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu_c(x)A^\nu_{cl}(y)}\Big|_{cl=0} = -i(\Delta_{\mu\nu})^{-1}\delta^3(x-y) - 2ie^2\eta_{\mu\nu}\delta^3(x-y)G(x,x)$$

$$-e\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu - \partial_\mu)G(x,z)\Gamma^3_\nu(y,z,z')G(z',x') + 2ie^2[2D_{\mu\rho}(x,w)G(x,w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')$$
$$G(w'',z)\Gamma^3_\nu(y,z,z')G(z',x) + G(x,z)D^\rho_\mu(x,w)\Gamma^4_{\rho\nu}(w,y,z,z')G(z',x)],$$

ou seja,

$$\boxed{D_{\mu\nu}(x,y)^{-1} = -i\Delta_{\mu\nu}(x,y)^{-1} - i\Pi_{\mu\nu}(x,y),} \tag{4.104}$$

em que foi definido $\Delta_{\mu\nu}(x,y)^{-1} \equiv \Delta^{-1}_{\mu\nu}\delta^3(x-y)$ e a **auto-energia do fóton**, também conhecida como **tensor de polarização**, dado por

$$i\Pi_{\mu\nu}(x,y) \equiv 2ie^2\eta_{\mu\nu}\delta^3(x-y)G(x,x) + e\lim_{x'\to x}[D_\mu - (D'_\mu)^\dagger]G(x,z)\Gamma^3_\nu(y,z,z')G(z',x')$$

$$+4ie^2D_{\mu\rho}(x,w)G(x,w')\Gamma^3_\rho(w,w',w'')G(w'',z)\Gamma^3_\nu(y,z,z')G(z',x)$$

$$+2ie^2 G(x,z) D^{\rho}_{\mu}(x,w) \Gamma^{4}_{\rho\nu}(w,y,z,z') G(z',x).$$

Pode-se verificar calculando explicitamente que esse operador é ortogonal, ou seja, $\partial_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$, mas há uma forma mais elegante de se chegar a esse resultado, e é o que faremos na próxima subseção.

No mais, utilizando a equação (4.104) no espaço de Fourier e o resultado obtido para o propagador livre em (4.47), temos assim o propagador completo da teoria

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(k) = \frac{-i\gamma\left\{g^{\mu\nu} + \left[\frac{(\alpha-\gamma)}{\gamma} - \frac{\alpha\mu^2\gamma}{k^2}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + \frac{i\mu\gamma}{k^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho\right\}}{k^2 - \mu^2\gamma^2 - \gamma\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)\left\{g^{\mu\nu} + \left[\frac{(\alpha-\gamma)}{\gamma} - \frac{\alpha\mu^2\gamma}{k^2}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + \frac{i\mu\gamma}{k^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho\right\}}. \quad (4.105)$$

Daqui conseguimos concluir que, no limite de Maxwell ($\gamma = 1, \mu = 0$), obtemos a equação para o propagador completo do fóton na eletrodinâmica escalar,

$$\tilde{D}^{\mu\nu}_{SQED} = \frac{-i\left[g^{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]}{k^2 - \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)\left[g^{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]}, \quad (4.106)$$

e no limite topológico puro, ($\gamma \to \infty$), temos o propagador completo dos graus de liberdade topológicos da ação de Chern-Simons abeliana (ou seja, dos anyons),

$$\tilde{D}^{\mu\nu}_{CS} = \frac{-i\left(\alpha\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - \frac{i}{\mu}\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho\right)}{k^2 - \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)\left(\alpha\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - \frac{i}{\mu}\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho\right)}. \quad (4.107)$$

Agora seguimos até o final desta subseção calculando as equações dos vértices completos da teoria.

Vértice completo $\phi^\dagger\phi A$

Para encontrar uma equação para o **vértice completo** da interação $\phi^\dagger\phi A$ (que é exatamente o objeto definido em (4.97)), derivamos a equação (4.103) em ϕ^*_{cl} e ϕ_{cl}, obtendo

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\mu_{cl}(x)\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)} = -e\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu - \partial_\mu)\frac{\delta^2}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)}G(x,x')_f$$
$$+2ie^2 A_\mu \frac{\delta^2}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)}G(x,x)_f + 2e^2\frac{\delta^3}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)\delta J^\mu(x)}G(x,x)_f,$$

em que $G(x,y)_f$ representa o propagador com as fontes ligadas. Mas temos

$$\frac{\delta G(x,x')_f}{\delta\phi^*_{cl}(y)} = G(x,z)_f\Gamma^3(y,z,z')_f G(z',x')_f,$$

em que assumem-se integradas todas as variáveis repetidas e $\Gamma^3(y,z,z')_f$ é uma função de Green irredutível com as fontes ligadas. Além disso,

$$\frac{\delta^2 G(x,x')}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)}\Big|_{f=0} = G(x,w)\Gamma^4(y,z,w,w')G(w',x'),$$

já que qualquer derivada de W por um número diferente de ϕ_{cl} e ϕ^*_{cl} se anula. E também

$$\frac{\delta^3 G(x,x')}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)\delta J^\mu(x)}\Big|_{f=0} = 2iD^{\mu\nu}(x,u)G(x,u')\Gamma^3_\nu(u,u',u'')G(u'',w)$$

$$\Gamma^4(y,z,w,w',w'')G(w',x') + iG(x,w)D^{\mu\nu}(x,w'')\Gamma^5_\nu(y,z,w,w',w'')G(w,x'),$$

portanto, temos finalmente

$$\begin{aligned}\Gamma^3_\mu(x,y,z) = -e\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu - \partial_\mu)G(x,w)\Gamma^4(y,w,w',z)G(w',x')\\ +2ie^2[2D^{\mu\nu}(x,u)G(x,u')\Gamma^3_\nu(u,u',u'')G(u'',w)\Gamma^4(y,z,w,w')G(w',x)\\ +G(x,w)D^{\mu\nu}(x,w'')\Gamma^5_\nu(y,z,w,w',w'')G(w,x)],\end{aligned} \tag{4.108}$$

em que assumem-se integradas todas as variáveis repetidas (exceto o x).

Vértice completo $\phi^\dagger A\phi A$

Por fim, a equação para o vértice completo (4.99) da interação $\phi^\dagger A\phi A$ é obtida ao derivar novamente a equação (4.108) (antes de anular as fontes) para obter (após a anulação das fontes)

$$\begin{aligned}\Gamma^4_{\mu\nu}(x,y,z,w) = 2ie^2\delta^3(x-w)\eta_{\mu\nu}G(x,u)\Gamma^4(y,z,u,u')G(u',x)\\ -e\lim_{x'\to x}(\partial'_\mu - \partial_\mu)\Psi_\nu + 2ie^2(2\Omega_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}),\end{aligned}$$

em que

$$\Psi_\nu \equiv \frac{\delta}{\delta A^\nu_{cl}(w)}[G(x,u)\Gamma^4(y,z,u,u')G(u',x')]\Big|_{A_{cl}=0}$$

$$= 2G(x,v)\Gamma^3_\nu(w,v,v')G(v',u)\Gamma^4(y,z,u,u')G(u',x') + G(x,u)\Gamma^5_\nu(y,z,w,u,u')G(u',x'),$$

além disso,

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\delta}{\delta A^\nu_{cl}(w)}[D^{\mu\rho}(x,u)G(x,u')\Gamma^3_\rho(u,u',u'')G(u'',v)\Gamma^4(y,z,v,v')G(v',x)]\Big|_{A_{cl}=0}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{\mu\sigma}(x,s)\Pi^3_{\sigma\nu\lambda}(w,s,s')D^{\lambda\rho}(v',u)G(x,u')\Gamma^3_\rho(u,u',u'')G(u'',v)\Gamma^4(y,z,v,v')G(v',x)\\
&+D^{\mu\rho}(x,u)G(x,s)\Gamma^3_\nu(w,s,s')G(s',u')\Gamma^3_\rho(u,u',u'')G(u'',v)\Gamma^4(y,z,v,v')G(v',x)\\
&+D^{\mu\rho}(x,u)G(x,u')\Gamma^4_{\rho\nu}(u,u',u'',w)G(u'',v)\Gamma^4(y,z,v,v')G(v',x)\\
&+D^{\mu\rho}(x,u)G(x,u')\Gamma^3_\rho(u,u',u'')G(u'',s)\Gamma^3_\nu(w,s,s')G(s',v)\Gamma^4(y,z,v,v')G(v',x)\\
&+D^{\mu\rho}(x,u)G(x,u')\Gamma^3_\rho(u,u',u'')G(u'',v)\Gamma^5_\nu(y,z,w,v,v')G(v',x)\\
&+D^{\mu\rho}(x,u)G(x,u')\Gamma^3_\rho(u,u',u'')G(u'',v)\Gamma^4(y,z,v,v')G(v',s)\Gamma^3_\nu(w,s,s')G(s',x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu\nu} &\equiv \frac{\delta}{\delta A^\nu_{cl}(w)}[G(x,u)D^{\mu\rho}(x,u'')\Gamma^5_\rho(y,z,u,u',u'')G(u,x)]\Big|_{A_{cl}=0}\\
&= 2G(x,v)\Gamma^3_\nu(w,v,v')G(v',u)D^{\mu\rho}(x,u'')\Gamma^5_\rho(y,z,u,u',u'')G(u,x)\\
&+G(x,u)D^{\mu\alpha}(x,v)\Gamma^3_{\nu\alpha\beta}(w,v,v')D^{\alpha\rho}(v',u'')\Gamma^5_\rho(y,z,u,u',u'')G(u,x)\\
&+G(x,u)D^{\mu\rho}(x,u'')\Gamma^6_{\nu\rho}(y,z,w,u,u',u'')G(u,x).
\end{aligned}$$

Importante comentar que as equações encontradas nesta subseção e as que encontraremos na próxima são de extrema importância no processo de renormalização dessa teoria, pois elas indicam relações entre as funções de correlação que permitem a simplificação de diversas integrais.

4.3.4 Identidades de Ward-Takahashi

Alguns dos mais importantes teoremas da mecânica clássica são as diferentes versões do chamado *teorema de Noether*, que relacionam simetrias infinitesimais da Lagrangiana de um sistema a quantidades conservadas. Existe um equivalente quântico a esses teoremas, e uma de suas mais importantes aplicações são as *identidades de Ward-Takahashi* [28, 29], que são amplamente estudadas na literatura (por exemplo, [21, 30]) e serão aqui deduzidas para o sistema em questão.

Podemos escrever o funcional gerador (4.84) ao adicionar termos de fonte na forma

$$Z[J, J^*, J_\mu] = \int \mathcal{D}\zeta \exp(iS_{eff}), \tag{4.109}$$

em que $\mathcal{D}\zeta \equiv \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*$ e definimos, utilizando (4.85),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} &\equiv \mathcal{L}_{GF} + J^*\phi + J\phi^* + J_\mu A^\mu \\ &= \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_\mu\phi^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi}_{\equiv\mathcal{L}_{SQED}} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J^*\phi + J\phi^* + J_\mu A^\mu.\end{aligned} \tag{4.110}$$

Ao fazer uma transformação de gauge infinitesimal,

$$\begin{cases}\phi \to \phi' = \phi + ie\Lambda\phi, \\ \phi^* \to \phi'^* = \phi^* - ie\Lambda\phi^*, \\ A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda,\end{cases} \tag{4.111}$$

a medida de integração se altera de acordo com

$$\mathcal{D}\zeta' = \det\left(\frac{\delta\zeta'}{\delta\zeta}\right)\mathcal{D}\zeta,$$

sendo

$$\frac{\partial\phi'}{\partial\phi} = 1 + ie\Lambda, \ \frac{\partial\phi'^*}{\partial\phi*} = 1 - ie\Lambda, \ \frac{\partial A'_\mu}{\partial A_\mu} = 1,$$

portanto

$$\det\begin{bmatrix}1+ie\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-ie\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 1 + e^2\Lambda^2 = 1 + \mathcal{O}(\Lambda^2) \approx 1, \tag{4.112}$$

já que Λ é infinitesimal. Consequentemente, $\mathcal{D}\zeta' = \mathcal{D}\zeta$. Além disso, levando em conta que a Lagrangiana da eletrodinâmica escalar, $\mathcal{L}_{SQED}$, é invariante de gauge, temos que (4.110) se torna

$$\mathcal{L}'_{eff} = \mathcal{L}_{SQED} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\Lambda)(A_\rho + \partial_\rho\Lambda) - \frac{1}{2\alpha}[\partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu\Lambda)]^2$$

$$+J^*(1+ie\Lambda)\phi + J(1-ie\Lambda)\phi^* + J_\mu(A^\mu+\partial^\mu\Lambda)$$

$$= \mathcal{L}_{SQED} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu A_\rho + \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\Lambda A_\rho}_{=0\text{ (simetria)}} + \underbrace{\partial_\mu A_\nu\partial_\rho\Lambda}_{=0\text{ (simetria)}} + \mathcal{O}(\Lambda^2)) - \frac{1}{2\alpha}[(\partial_\mu A^\mu)^2$$

$$+2\partial_\mu A^\mu\Box\Lambda + \mathcal{O}(\Lambda^2))] + J^*\phi + J\phi^* + J_\mu A^\mu + ie\Lambda J^*\phi - ie\Lambda J\phi^* + J_\mu\partial^\mu\Lambda$$

$$= \mathcal{L}_{eff} - \frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu A^\mu\Lambda + ie\Lambda J^*\phi - ie\Lambda J\phi^* - \partial_\mu J^\mu\Lambda.$$

Dessa forma, o funcional gerador (4.109) se modifica de acordo com

$$Z'[J,J^*,J_\mu] = \int \mathcal{D}\zeta\exp(iS_{eff})\exp\Big[i\int d^3x\Big(-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu A^\mu + ieJ^*\phi - ieJ\phi^* - \partial_\mu J^\mu\Big)\Lambda\Big]$$

$$\approx \int \mathcal{D}\zeta\exp(iS_{eff})\Big[1+i\int d^3x\Big(-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu A^\mu + ieJ^*\phi - ieJ\phi^* - \partial_\mu J^\mu\Big)\Lambda\Big],$$

$$\equiv Z + \int \mathcal{D}\zeta i\Lambda\mathcal{O}[A_\mu,\phi,\phi^*]\exp(iS_{eff}) = Z + \mathcal{O}\Big[\frac{\delta}{i\delta J^\mu},\frac{\delta}{i\delta J^*},\frac{\delta}{i\delta J}\Big]i\Lambda\int\mathcal{D}\zeta i\Lambda\exp(iS_{eff})$$

$$= Z + \mathcal{O}\Big[\frac{\delta}{i\delta J^\mu},\frac{\delta}{i\delta J^*},\frac{\delta}{i\delta J}\Big]i\Lambda Z \equiv Z + \delta Z,$$

em que foi definido o operador

$$\mathcal{O}[A_\mu,\phi,\phi^*] \equiv \int d^3x\Big(-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu A^\mu + ieJ^*\phi - ieJ\phi^* - \partial_\mu J^\mu\Big).$$

A invariância de gauge a nível quântico significa a identificação $Z' = Z$, portanto, $\delta Z = 0$ e consequentemente

$$\hat{\mathcal{O}}\Big[\frac{\delta}{i\delta J^\mu},\frac{\delta}{i\delta J^*},\frac{\delta}{i\delta J}\Big]Z = 0.$$

Explicitando esse operador em termos das derivadas temos, enfim,

$$\boxed{i\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta J_\mu} + eJ^*\frac{\delta Z}{\delta J^*} - eJ\frac{\delta Z}{\delta J} - \partial_\mu J^\mu Z = 0} \tag{4.113}$$

e essa é conhecida como a *identidade de Ward-Takahashi generalizada* para o funcional gerador Z. Assim como as equações de Schwinger-Dyson, podemos estudar a forma das identidades de Ward-Takahashi para os funcionais W e Γ. De fato, utilizando a definição (4.86) do funcional gerador de funções de correlação conexas, temos

$$i\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu i\frac{\delta W}{\delta J_\mu}Z + ieJ^*\frac{\delta W}{\delta J^*}Z - ieJ\frac{\delta W}{\delta J}Z - \partial_\mu J^\mu Z = 0$$

$$\therefore -\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta J_\mu} + ieJ^*\frac{\delta W}{\delta J^*} - ieJ\frac{\delta W}{\delta J} - \partial_\mu J^\mu = 0.$$

E fazendo a transformada de Legendre para a ação efetiva quântica Γ, levando em conta as relações (4.91), temos enfim

$$\boxed{-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu A^\mu_{cl} - ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}}\phi_{cl} + ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}}\phi^*_{cl} + \partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu_{cl}} = 0,} \tag{4.114}$$

assim, partir das derivadas funcionais dessa identidade conseguimos encontrar relações entre funções de correlação irredutíveis.

Identidade para o propagador do fóton

Se derivarmos a relação (4.114) uma vez em relação a $A^\mu_{cl}(y)$, obtemos

$$-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu\delta^\mu_\nu\delta^3(x-y) - ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\nu_{cl}(y)\delta\phi^*_{cl}(x)}\phi_{cl}(x) + ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\nu_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(x)}\phi^*_{cl}(x)$$

$$+\partial^\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu_{cl}(x)\delta A^\nu_{cl}(y)} = 0,$$

e anulando todas as fontes,

$$-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu\delta^\mu_\nu\delta^3(x-y) + \partial^\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu_{cl}(x)\delta A^\nu_{cl}(y)}\Big|_{cl=0} = 0.$$

Mas de acordo com a relação (4.93) e com a definição (4.104) temos que

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu_{cl}(x)\delta A^\nu_{cl}(y)}\Big|_{cl=0} = iD_{\mu\nu}(x,y)^{-1} = \Pi_{\mu\nu}(x,y) + \Delta^{-1}_{\mu\nu}(x-y).$$

Dessa forma, utilizando a definição (4.40), resulta

$$-\frac{\Box}{\alpha}\partial_\mu\delta^\mu_\nu\delta^3(x-y) + \partial^\mu\Pi_{\mu\nu}(x,y) + \partial^\mu\Big\{\delta^3(x-y)\Big[\frac{\Box}{\gamma}g_{\mu\nu} - \frac{(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma}\partial_\mu\partial_\nu - \mu\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho\Big]\Big\} = 0,$$

mas fazendo uma integração por partes e usando o teorema de Stokes nestes objetos (que são distribuições, portanto só estão bem definidos dentro de uma

integral, quando aplicados em uma função de teste),

$$\delta^3(x-y)\Big[\frac{1}{\alpha}\Box\partial^\nu - \partial^\mu\frac{\Box}{\gamma}g_{\mu\nu} + \frac{(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma}\partial^\mu\partial_\mu\partial^\nu + \mu\underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\rho}}_{\text{antissim.}}\underbrace{\partial^\mu\partial^\rho}_{\text{sim.}}\Big] + \partial^\mu\Pi_{\mu\nu} = 0$$

$$\delta^3(x-y)\Big[\frac{1}{\alpha}\Box\partial^\nu - \partial^\nu\frac{\Box}{\gamma} + \frac{\Box}{\gamma}\partial^\nu - \frac{1}{\alpha}\Box\partial^\nu\Big] + \partial^\mu\Pi_{\mu\nu} = 0$$

$$\therefore \partial^\mu\Pi_{\mu\nu} = 0,$$

ou, no espaço dos momentos,

$$\boxed{k^\mu\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k) = 0.} \tag{4.115}$$

E essa é conhecida como simplesmente *identidade de Ward*, que toma exatamente a mesma forma nos dois limites, tanto na eletrodinâmica escalar quanto em Chern-Simons puro. Essa, portanto, é a versão quântica da constatação de que *os graus de liberdade do fóton são todos transversais*. Importante notar que a relação obtida em (4.115) é exatamente a mesma da eletrodinâmica fermiônica tradicional [30].

Identidade para o vértice $\phi^\dagger\phi A$

Podemos também utilizar a identidade (4.114) para encontrar relações entre os vértices e os propagadores completos do modelo. De fato, derivando duas vezes no campo escalar, obtemos

$$-\partial_z^\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\delta\phi^*_{cl}(y)\delta A^\mu_{cl}(z)} = \frac{\delta^2}{\delta\phi_{cl}(x)\phi^*_{cl}(y)}\Big[-ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}(z)}\phi_{cl}(z) + ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(z)}\phi^*_{cl}(z)\Big]$$

$$= \frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\Big[-ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)}\phi_{cl}(z)\Big] + \frac{\delta}{\delta\phi^*_{cl}(y)}\Big[ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\delta\phi^*_{cl}(z)}\phi^*_{cl}(z)\Big]$$

portanto,

$$\partial_z^\mu\Gamma^{(3)}_\mu(x,y;z) = \partial_z^\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\delta\phi^*_{cl}(y)\delta A^\mu_{cl}(z)}\Big|_{cl=0} = ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^*_{cl}(y)\delta\phi_{cl}(z)}\Big|_{cl=0}\delta^3(x-z)$$

$$-ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\delta\phi^*_{cl}(z)}\Big|_{cl=0}\delta^3(y-z),$$

mas levando em conta que a relação (4.92), temos

$$\boxed{\frac{1}{ie}\partial_z^\mu \Gamma^{(3)}(x,y;z) = iG(y-z)^{-1}\delta^3(x-z) - iG(x-z)^{-1}\delta^3(y-z).} \tag{4.116}$$

No espaço dos momentos, o lado esquerdo é igual a

$$\frac{1}{ie}\int d^3x d^3y d^3z e^{ipx+iky-iqz}\partial_z^\mu \Gamma_\mu^{(3)}(x,y;z) = \frac{1}{ie}q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}(p,k;q),$$

e o primeiro termo do lado direito se torna

$$i\int d^3x d^3y d^3z e^{ipx+iky-iqz}\delta^3(x-z)\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}e^{-ip'(y-z)}[\tilde{G}(p')]^{-1}$$

$$= i\int d^3x d^3y \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}e^{iy(k-p')}e^{ix(p-q+p')}\tilde{G}(p')^{-1}$$

$$= i\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\tilde{G}(p')^{-1}(2\pi)^3\delta^3(k-p')(2\pi)^3\delta^3(p-q+p') = (2\pi)^3\delta^3(p-q+k)i\tilde{G}(k)^{-1},$$

enquanto o segundo termo é, similarmente, $(2\pi)^3\delta^3(p+k-q)i\tilde{G}(p)^{-1}$. Dessa forma, (4.116) se torna

$$\boxed{\frac{1}{e}\tilde{\Gamma}^{(3)}(p,k,q) = (2\pi)^3\delta^3(p+k-q)[i\tilde{G}(q-p)^{-1} - i\tilde{G}(p)^{-1}].} \tag{4.117}$$

Identidade para o vértice $\phi^\dagger A\phi A$

Para encontrar uma equação equivalente à anterior para o segundo vértice, (4.99), derivamos mais uma vez o resultado anterior em relação ao campo de gauge,

$$\partial_z^\mu \frac{\delta^4\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\delta\phi_{cl}^*(y)\delta A_{cl}^\mu(z)\delta A_{cl}^\nu(x)}\Big|_{cl=0} = \partial_z^\mu \Gamma_{\mu\nu}^{(4)}(x,y;z,w) =$$

$$= ie\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_{cl}^*(y)\delta\phi_{cl}(z)\delta A^\nu(w)}\Big|_{cl=0}\delta^3(x-z) - ie\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\delta\phi_{cl}^*(z)\delta A^\nu(w)}\Big|_{cl=0}\delta^3(y-z),$$

portanto

$$ie[\Gamma^{(3)}_{\nu}(y,z;w)\delta^3(x-z)-\Gamma^{(3)}(x,z;w)\delta^3(y-z)]=\partial^{\mu}_{z}\Gamma^{(4)}_{\mu\nu}(x,y;z,w).$$

Se derivarmos mais uma vez na coordenada w^{μ}, podemos encontrar a relação entre $\Gamma^{(4)}$ e o propagador completo do campo escalar,

$$\frac{1}{ie}\partial^{\nu}_{w}\partial^{\mu}_{z}\Gamma^{(4)}_{\mu\nu}(x,y;z,w)=\partial^{\nu}_{w}\Gamma^{(3)}_{\nu}(y,z;w)\delta^3(x-z)-\partial^{\nu}_{w}\Gamma^{(3)}_{\nu}(x,z;w)\delta^3(y-z)$$

ou, no espaço de momentos,

$$\frac{1}{ie}(iq^{\mu}_{1})(iq^{\nu}_{2})\tilde{\Gamma}^{(4)}_{\mu\nu}(p_1,p_2;q_1,q_2)=\int d^3xd^3yd^3zd^3w\,e^{-p_1x+ip_2y-iq_1z-iq_2w}iq^{\nu}_{2}\Gamma^{(3)}(y,z;w)\delta^3(x-z)$$

$$=\int d^3xd^3yd^3zd^3w\,e^{ip_1x+ip_2y-iq_1z-iq_2w}iq^{\nu}_{2}\Gamma^{(3)}_{\nu}(x,z;w)\delta^3(y-z)$$

$$=iq^{\nu}_{2}[\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu}(p_2,p_1-q_1;q_2)-\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu}(p_1,p_2-q_1;q_2)],$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{1}{e}q^{\mu}_{1}q^{\nu}_{2}\tilde{\Gamma}^{(4)}_{\mu\nu}(p_1,p_2;q_1,q_2)=q^{\nu}_{2}[\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu}(p_2,p_1-q_1;q_2)-\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu}(p_1,p_2-q_1;q_2)],} \tag{4.118}$$

ou, usando (4.117), temos finalmente a relação da função de 4-pontos com os propagadores completos,

$$\frac{1}{e}q^{\mu}_{1}q^{\nu}_{2}\tilde{\Gamma}^{(4)}_{\mu\nu}(p_1,p_2;q_1,q_2)=e(2\pi)^3\delta^3(p_2+p_1-q_1-q_2)[i\tilde{G}(q_2-p_2)^{-1}$$

$$-i\tilde{G}(p_2)^{-1}-i\tilde{G}(q_2-p_1)^{-1}+i\tilde{G}(p_1)^{-1}].$$

E a análise quântica da eletrodinâmica escalar topologicamente massiva termina aqui. Esses resultados abrem oportunidades para realizar as correções radiativas por meio dos cálculos das integrais de loops do modelo, que são enormemente simplificadas ao utilizar as relações aqui deduzidas. Ao realizar o procedimento de renormalização, portanto, podemos estudar diversos processos e

obter quantidades observáveis, mas isso vai além do escopo deste trabalho.

Referências

[1] S. L. Adler. Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.

[2] V. Kaplunovsky. Axial Anomaly. Notas de aula disponíveis em https://web2.ph.utexas.edu/~vadim/Classes/2022f/notes.html. Acesso: 14/07/2026.

[3] S. S. Chern and J. Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, 99:48–69, 1974.

[4] A. S. Schwarz. The partition function of degenerate quadratic functional and Ray-Singer invariants. *Letters in Mathematical Physics*, 2:247–252, 1978.

[5] R. Jackiw. S. S. Chern and Chern-Simons terms. *Differential Geometry and Physics*, pages 53–62, 2006.

[6] A. Khare. Fractional statistics and Chern-Simons field theory in 2+1 dimensions, 1999.

[7] G. V. Dunne. Aspects of Chern-Simons theory. In *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems*, pages 177–263, Berlin, Heidelberg, 1999. Springer Berlin Heidelberg.

[8] D. Grabovsky. Chern-Simons Theory in a Knotshell. Notas de aula disponíveis em https://web.physics.ucsb.edu/~davidgrabovsky/notes.html. Acesso: 12/08/2026.

[9] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics 140*, pages 372–411, 1982.

[10] J. Baez and J. P. Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific Publishing Company, 1994.

[11] S. S. Chern. *Complex Manifolds without Potential Theory, Second Edition*. Universitext. Springer-Verlag, 1995.

[12] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, 2003.

[13] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121:351–399, 1989.

[14] A. M. Polyakov. Fermi-Bose transmutations induced by gauge fields. *Modern Physics Letters A*, 3:325–328, 1988.

[15] E. Fradkin. *Quantum field theory: An Integrated Approach*. Princeton University Press, 2021.

[16] B. Gabai and A. Sever. Large gauge symmetries and asymptotic states in QED. *J. High Energ. Phys.*, 2016:95, 2016.

[17] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, and G. Thompson. Topological field theory. *Physics Reports*, 209(4):129–340, 1991.

[18] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters B*, 25(1):29–30, 1967.

[19] G. Källen. On the definition of the renormalization constants in quantum electrodynamics. *Helvetica Physica Acta*, 25:509–527, 1952.

[20] H. Lehmann. Über eigenschaften von ausbreitungsfunktionen und renormierungskonstanten quantisierter felder. *Nuovo Cim*, 11:342–357, 1954.

[21] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Volume I*. Cambridge University Press, 1995.

[22] H. Bartolomei et al. Fractional statistics in anyon collisions. *Science*, 368(6487):173–177, 2020.

[23] D. Tong. The quantum Hall effect. Notas de aula disponíveis em https://davidtong.org/teaching/quantum-hall-effect/, 2016. Acesso: 27/05/2026.

[24] R. L. Workman et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.

[25] M. Ablikim et al. Observation of $D \to a_0(980)\pi$ in the decays $D^0 \to \pi^+\pi^-\eta$ and $D^+ \to \pi^+\pi^0\eta$. *Phys. Rev. D*, 110:L111102, 2024.

[26] R. Bufalo and B. M. Pimentel. Batalin-Fradkin-Vilkovisky quantization of the generalized scalar electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 88:065013, 2013.

[27] A. V. Berezin et al. Dyson-Schwinger equations in scalar electrodynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 2036(1):012008, 2021.

[28] J. C. Ward. An identity in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 78:182, 1950.

[29] Y. Takahashi. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim*, 6:371–375, 1957.

[30] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Publications, 2006.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

O objetivo desta dissertação foi estudar a teoria de Chern-Simons abeliana e obter dela resultados clássicos e quânticos. Devido à sua estrutura de teoria de gauge, no entanto, fez-se necessário o estudo de um procedimento formal para lidar com a quantização de sistemas singulares. O método escolhido foi o procedimento de Faddeev-Jackiw, pois este permite um entendimento profundo de como os vínculos dinâmicos agem sobre a geometria do espaço de fase clássico do sistema, ao mesmo tempo que mantém uma dificuldade computacional pouco elevada, devido à não necessidade de resolver os vínculos, como seria o caso na aplicação do algoritmo de Dirac-Bergmann, por exemplo.

Ao longo do primeiro capítulo, fizemos uma construção relativamente formal da estrutura simplética de sistema regulares e singulares. Foi compreendido como é possível determinar uma estrutura de Poisson natural em variedades simpléticas e como essa construção é mais complicada no caso de variedades pré-simpléticas. Isso ocorre devido à degenerescência dos campos vetoriais hamiltonianos associados aos observáveis clássicos e pode ser traduzido na não-invertibilidade da matriz de componentes da 2-forma canônica. Em seguida, mostrou-se como o procedimento de Faddeev-Jackiw, levando em consideração as contribuições de Barcelos-Neto e Wotzasek, dá conta desses problemas e resulta numa estrutura simplética natural.

O capítulo seguinte tratou de traduzir para sistemas de campos o formalismo desenvolvido anteriormente, ilustrando como a geometria simplética se modifica ao levar em conta infinitos graus de liberdade. O procedimento de Faddeev-Jackiw foi naturalmente generalizado e tomou-se como exemplo o mais tradicional campo de gauge: o campo eletromagnético. Ao final dessa aplicação, obteve-se o já conhecido resultado dos parênteses de Poisson proporcionais a um projetor nos graus de liberdade físicos (ortogonais) do campo.

O terceiro capítulo faz uma construção matematicamente intuitiva, baseada nas noções gerais de cálculo funcional, que deduz a forma tradicional do funcional gerador para um sistema regular e permite ser naturalmente generalizado para

sistemas singulares a partir da chamada *estratégia de quantização simplética*. Esta consiste em se aproveitar do teorema de Darboux, que se torna válido na variedade obtida ao final do procedimento de Faddeev-Jackiw, para obter a forma correta da medida de integração e assim não se deparar com problemas decorrentes da dupla contagem de configurações, como é tradicional em sistemas de gauge.

Ao final, toda a teoria desenvolvida é aplicada em um modelo de eletrodinâmica escalar topologicamente massiva, que nos permite analisar sua estrutura simplética, resolver os problemas decorrentes da singularidade de sua Hessiana e, por fim, quantizar funcionalmente o sistema. Tendo em mãos o funcional gerador, podemos dele retirar uma gama de resultados quânticos à respeito do comportamento do sistema. Conclui-se que as equações de Schwinger-Dyson e as identidades de Ward-Takahashi se mantém quase inalteradas em relação à eletrodinâmica escalar tradicional, com a única alteração vindo a ocorrer no propagador livre, que resulta termos extras resultantes das excitações dos graus de liberdade topológicos.

Importante notar que a análise do capítulo anterior é realizada de forma a permitir o comportamento claro do campo eletromagnético topologicamente massivo em dois limites: o limite de Maxwell, que consiste meramente no termo cinético da Lagrangiana, e o limite de Chern-Simons puro, que consiste unicamente no termo topológico, o que resulta em um sistema que é uma *teoria topológica*, já que não tem nenhuma dependência na métrica do espaço-tempo. Concluiu-se que a teoria puramente topológica livre é **não-dinâmica**, pois sua Hamiltoniana é nula, enquanto a interação com termos de matéria resulta em uma dinâmica para os campos elétrico e magnético.

Para os próximos trabalhos se tem a perspectiva de avançar no estudo quântico desse sistema, como, por exemplo, realizando o cálculo de correções radiativas e na renormalização da massa e da constante de acoplamento. Espera-se também utilizar os resultados aqui obtidos para estudar fenômenos físicos decorrentes de teorias topológicas, como o *efeito Aharonov-Bohm* e o *efeito Hall*. Estes possuem íntima relação com a teoria de Chern-Simons e uma gama de aplicações em matéria condensada e física do estado sólido. Além disso, há a expectativa de estudar esses fenômenos topológicos tanto para o caso da interação com matéria fermiônica quanto para o caso de bósons de gauge não-abelianos. Cada um destes apresenta uma série de elementos que dificulta a análise teórica, mas em contrapartida pode produzir resultados inesperados, com uma relação mais profunda também a avanços recentes na matemática, como em teoria de nós e topologia algébrica.

Apêndice A

Variedades diferenciáveis

Este apêndice se dedica a fornecer uma introdução à teoria de variedades diferenciáveis, apresentando as principais definições que serão utilizadas ao longo da dissertação e fornecendo uma rápida intuição física do porquê dessas definições. O texto se baseia principalmente em [1, 2] para as definições matemáticas, mas toma elementos de [3, 4, 5] para relacionar essas definições à construção de teorias físicas. Não demonstraremos os teoremas citados, mas indicaremos referências ao leitor interessado.

A.1 Definição

Entende-se intuitivamente uma variedade diferenciável como a generalização matemática do conceito de uma superfície n-dimensional suave e *localmente plana*, enquanto a teoria da geometria de variedades diferenciáveis pretende estudar suas estruturas geométricas de um ponto de vista *intrínseco*. Isso significa que não é necessário impor que essa superfície esteja envolvida por espaço euclidiano $(n+1)$-dimensional munido de suas estruturas geométricas próprias.

Antes de introduzir uma variedade diferenciável, precisamos dar duas definições relacionadas a espaços topológicos. De fato, vimos que a intuição para uma variedade diferenciável é a de que é um espaço *localmente plano*. Para entender o que isso significa, precisamos mencionar algumas características a respeito da topologia desse espaço, que define suas vizinhanças. Veremos que uma variedade diferenciável é um espaço topológico, mas não só isso. É um espaço topológico com algumas características a mais, que serão apresentadas a seguir.

Definição 1. Um espaço topológico M é chamado **espaço de Hausdorff** quando, dados quaisquer dois pontos p e q em M, existem sempre vizinhanças U_p de p e U_q de q tal que $U_p \cap U_q = \emptyset$.

Essa definição é essencial para garantir caracteristicas como a unicidade de sequências convergentes em um espaço. De fato, pode-se mostrar (por exemplo, no apêndice A de [1]) que é possível escolher topologias para alguns espaços nas quais toda sequência nesse espaço converge para diversos pontos diferentes. Isso não é possível, no entanto, para espaços topológicos de Hausdorff. A seção 4.1 da referência [2] também apresenta um exemplo de o que seria uma variedade diferenciável sem a propriedade Hausdorff e ilustra os problemas gerados nesse caso.

Definição 2. Um espaço topológico M é chamado **segundo-contável** se sua topologia admite uma base contável, ou seja, uma base cujos elementos têm uma correspondência 1 pra 1 com os números naturais.

A motivação para a definição de segundo-contabilidade vem da necessidade de se fazer partições da unidade e com isso definir objetos globais em M a partir do que se chama da "colagem" de objetos locais definidos em suas vizinhanças. Essa noção também é essencial para definir, por exemplo, a operação de integração nesse espaço. A referência [1] comenta a respeito do tópico no capítulo 2 e no apêndice A.

Dadas essas duas definições prévias, podemos enfim definir uma variedade diferenciável.

Definição 3. Uma **variedade diferenciável** n-dimensional M é um espaço de Hausdorff segundo-contável, munido de um família de pares (U_i, ϕ_i), que chamamos de **cartas**. Os subconjuntos U_i são vizinhanças abertas que cobrem inteiramente M, ou seja,

$$\bigcup_i U_i = M,$$

e os mapas ϕ_i são homeomorfismos entre os U_i e vizinhanças abertas V_i de $\mathbb{R}^n$,

$$\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n.$$

Além disso, dados U_i e U_j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o mapa $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$, que leva uma vizinhança $\phi_j(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$ até uma vizinhança $\phi_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$, é um difeomorfismo. A família de cartas $\{(U_i, \phi_i)\}$ é denominada um **atlas** da variedade

M.[1]

Dado um ponto $p \in U_i$, o homeomorfismo ϕ_i determina as funções x^μ, que relacionam p a uma n-upla $(x^1(p), ..., x^n(p)) = \phi_i(p) \in \mathbb{R}^n$, e a estas funções damos o nome de **coordenadas locais** de M nessa vizinhança. A noção de diferenciabilidade do mapa de transição ψ_{ij} é, dessa forma, determinada pela noção tradicional de diferenciabilidade em espaços euclidianos.

De acordo com essas definições, podemos assim entender a noção de *localidade* em uma variedade diferenciável. Uma relação *local* é aquela que é verdadeira em uma vizinhança de M, podendo não ser necessariamente generalizada globalmente. As características de segundo-contabilidade e suavidade dos mapas de transição ψ_{ij}, no entanto, são responsáveis pela possibilidade de se generalizar globalmente diversas afirmações locais.

A.2 Espaços tangentes e cotangentes

O próximo passo no estudo de variedades diferenciáveis é definir *objetos geométricos*, como vetores, covetores e tensores. Para isso, no entanto, precisamos entender como construir um espaço vetorial intrinsecamente relacionado a essa variedade. A solução para isso é começar definindo *curvas* e *trajetórias*, de modo a utilizar seus *vetores de velocidade*.

Definição 4. Uma **curva** γ é um mapa que leva cada valor de um parâmetro $t \in I \subset \mathbb{R}$ a um ponto $\gamma(t) \in M$, e o conjunto desses pontos $\{\gamma(t)\}_{t\in I}$ é denominado uma **trajetória** na variedade M.

Através dos homeomorfismos ϕ_i, que induzem as coordenadas locais $\{x^\mu\}$, podemos relacionar (em uma vizinhança U_i) a trajetória $\{\gamma(t)\}_{t\in I} \subset U_i \subset M$ (ou parte dela) a uma trajetória $\{\Gamma(t)\}_{t\in I} \subset \mathbb{R}^n$, cujas componentes são a n-upla $\Gamma^\mu(t) = x^\mu(\gamma(t))$. Se Γ é infinitamente diferenciável em todas as suas vizinhanças, dizemos que Γ (e portanto γ) é uma curva **suave**. Devido à relação clara entre a curva γ e sua "versão local" Γ, passaremos a utilizar a mesma notação para ambas, denotando-as igualmente γ, e espera-se que fique claro pelo contexto qual é o

[1] Mais precisamente, a família $\{(U_i\phi_i)\}$ deve ser um **atlas maximal**, que é aquele que contém *todas* as cartas difeomorficamente compatíveis (dizemos *suavemente* compatíveis) umas com as outras.

objeto em questão.

Dizemos que v é o **vetor tangente à curva** γ em um ponto $p = \gamma(t_0)$ se seus componentes v^μ são definidos em um sistema de coordenadas local $\{x^\mu\}$ por meio de

$$v^\mu = \frac{d\gamma^\mu}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial\gamma^\mu}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu\Big|_{t_0}.$$

Dadas duas curvas α e β, se elas se cruzam em um ponto $p \in M$ e nesse ponto as componentes de seu vetor tangente são iguais, dizemos que elas são **equivalentes**.

Definição 5. O **espaço tangente** T_pM à variedade M em um ponto p é um espaço vetorial cujos componentes são as *classes de equivalência* de curvas γ em $p = \gamma(t_0)$. Um objeto desse espaço é denominado um **vetor tangente** v à variedade M no ponto p e decomposto em suas componentes locais por

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p,$$

em que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p),$$

para qualquer $f \in \mathcal{F}(M)$, sendo $\mathcal{F}(M)$ o espaço de todas as funções suaves sobre M. Esses vetores são, portanto, mapas que levam funções f a números reais $v(f)$, e podem ser entendidos como *derivadas direcionais*, pois agem em cada componente γ^μ de uma curva resultando na μ-ésima componente de seu vetor tangente em p. Damos a esse vetor o nome de **vetor velocidade** da curva no ponto $p = \gamma(t_0)$ e o denotamos $\gamma'(t_0)$.

Definição 6. Denominamos **espaço cotangente** à variedade M em p o espaço vetorial dual ao espaço tangente e o representamos por T_p^*M. Os elementos desse espaço são chamados **covetores** $\alpha \in T_p^*M$, e portanto são mapas lineares que levam vetores $v \in T_pM$ até números reais $\alpha(v) \in \mathbb{R}$. A base dual à base de vetores $\{\partial/\partial x^\mu\}$ é a base de diferenciais das coordenadas $\{dx^\mu\}$, portanto a decomposição em componentes locais de um covetor arbitrário α é dada por

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu.$$

Dessa forma, usando a relação $dx^\mu(\partial/\partial x^\nu) = \partial/\partial x^\nu(x^\mu) = \delta^\mu_\nu$ entre os vetores de base de um espaço e seus duais, podemos deduzir localmente a ação de um covetor α em um vetor arbitrário v através de suas decomposições em componentes de um sistema de coordenadas

$$\alpha(v) = \alpha_\mu dx^\mu(v^\nu \partial_\nu) = \alpha_\mu v^\nu dx^\mu(\partial_\nu) = \alpha_\mu v^\nu \delta^\mu_\nu = \alpha_\mu v^\mu. \tag{A.1}$$

Além disso, como o dual de um espaço dual é $(V^*)^* = V$, temos que os elementos de T_pM podem também ser vistos como mapas lineares que agem sobre T^*_pM, levando seus componentes a números reais, e cuja ação é definida por

$$v(\alpha) \equiv \alpha(v).$$

Definição 7. Um **tensor** de tipo (q, r) é um objeto multilinear que mapeia q elementos de T^*_pM e r elementos de T_pM a um número real. Estes objetos vivem no espaço

$$T_p^{(q,r)}M \equiv \underbrace{T_pM \otimes ... \otimes T_pM}_{\text{q vezes}} \otimes \underbrace{T^*_pM \otimes ... \otimes T^*_pM}_{\text{r vezes}}$$

e são decompostos em uma base local por

$$T = T^{\mu_1 ... \mu_q}_{\nu_1 ... \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes ... \otimes dx^{\nu_r}.$$

A importância de se definir objetos como tensores é a necessidade de se aplicar elementos de *álgebra multilinear* em variedades diferenciáveis, o que é essencial para se definir métricas, formas diferenciais, estruturas simpléticas, entre diversas outras aplicações.

A.3 Campos tensoriais

A partir dos objetos definidos anteriormente, que dependem de um ponto $p \in M$, podemos definir objetos *globais*, que são mapas cujo domínio é toda a variedade M.

Definição 8. Um **campo tensorial** de ordem (q, r) é um mapa suave que relaciona a cada ponto p de M um elemento de $T_p^{(q,r)}M$. Isso significa que cada componente $T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}$ do campo tensorial deve ser uma função suave de uma vizinhança de M até $\mathbb{R}$.

Um tipo específico de campos tensoriais são os **campos vetoriais**, que são os campos tensoriais de ordem $(1, 0)$, portanto mapeiam cada ponto de M a um vetor tangente a esse ponto. Devido à sua importância, há uma notação específica para o espaço de campos vetoriais sobre M, que é simbolizado por $\mathfrak{X}(M)$. Um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ é decomposto em uma vizinhança local U_i como

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

em que as componentes V^μ são funções suaves $V^\mu : U_i \to \mathbb{R}$.

Outro tipo específico de campo tensorial são os **campos covetoriais** (também chamados de **1-formas diferenciais**), que são campos tensoriais de ordem $(0, 1)$. O espaço de todas as 1-formas diferenciais sobre uma variedade M é denotado $\Omega(M)$. E similarmente ao caso anterior, uma 1-forma diferencial $\alpha \in \Omega(M)$ é decomposta em uma vizinhança U_i como

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu,$$

sendo as componentes α_μ funções suaves $\alpha_\mu : U_i \to \mathbb{R}$.

Um processo importante para analisar a geometria global de uma variedade é o de comparar os valores de objetos geométricos em diferentes pontos. Acontece que esses objetos estarão definidos, portanto, em diferentes espaços. Surge o problema de como somar ou subtrair objetos de espaços diferentes. Veremos que a solução para isso é construir mapas que relacionam biunivocamente um objeto de um espaço a outro. Para mostrar como isso ocorre, precisamos de mais algumas definições.

A.3.1 Fluxos e curvas integrais

Definição 9. Dado um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$, uma **curva integral de V** é uma curva diferenciável $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ cujo vetor velocidade $\gamma'(t)$ em cada ponto $\gamma(t)$ é igual ao vetor $V(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M$ mapeado por V nesse ponto. Ou seja,

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t)) \forall t \in I. \tag{A.2}$$

Dado um campo vetorial suave $V \in \mathfrak{X}(M)$, prova-se (por exemplo, no capítulo 9 de [1]) que em todo ponto $p \in M$ é sempre possível encontrar (em uma vizinhança local) uma curva integral de V passando por p, e isso é meramente uma consequência do teorema de existência, unicidade e suavidade de soluções para equações diferenciais. De fato, o procedimento para encontrar as curvas integrais de um campo vetorial (em alguma vizinhança) consiste em meramente resolver a equação

$$\frac{d\gamma^\mu(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_{\gamma(t)} = V^\mu(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_{\gamma(t)},$$

em que γ^μ é a μ-ésima componente de $\phi_i(\gamma(t))$. A relação acima é a versão local de (A.2) e pode também ser compreendida como um sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\gamma^\mu(t)}{dt} = V^\mu(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)),\ (\mu = 1, 2, ..., n).$$

Definição 10. Definimos um **fluxo** como um mapa $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ que satisfaz às seguintes propriedades para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$:

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p),\ \theta(0, p) = p.$$

Perceba que, a partir desse objeto, podemos definir o mapa $\theta_t : M \to M$ como $\theta_t \equiv \theta(t, \bullet)$.[2] Este mapa é responsável por mapear um ponto $p \in M$ a outro ponto $\theta_t(p) \in M$, que é aquele atingido ao seguir esse fluxo ao longo de uma evolução igual a t de seu parâmetro, e satisfaz às seguintes propriedades:

- $\theta_t(\theta_s(p)) = \theta_{t+s}(p)$, ou seja, $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$;
- $\theta_0 = id_M$;
- $\theta_{-t} = (\theta_t)^{-1}$.

Estas são as propriedades definidoras de um *grupo*. Dessa forma, θ_t é elemento do chamado **grupo de transformações a um parâmetro**. Além disso, para cada $p \in M$ podemos definir a curva $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \to M$ por

$$\theta^{(p)}(t) \equiv \theta(t, p) = \theta_t(p) \forall t \in \mathbb{R},$$

[2] O ponto $\bullet$ indica a ação desse mapa em seu domínio. Nesse caso, portanto, um "espaço vazio" onde será inserido um ponto de M.

e a esta curva damos o nome de **órbita** de p sob a ação desse grupo. Esta linguagem é comum no estudo de teorias de gauge, pois as transformações de gauge também são ações de um grupo, e consequentemente todos os estados que são equivalentes de gauge podem ser entendidos como pontos em uma órbita do grupo de gauge no espaço de configurações do sistema.

Prova-se (ainda no capítulo 9 de [1]) que todo fluxo suave é determinado pelas curvas integrais de algum campo vetorial suave em M, que podem ser construídas por meio das órbitas do grupo de transformações a um parâmetro relacionado a esse fluxo. Inversamente, no entanto, um campo vetorial suave V pode gerar diversos fluxos, mas existe um único fluxo suave *maximal* gerado por V (ou seja, um fluxo que não pode ser estendido a um domínio maior). É somente esse que caracterizamos como o **fluxo gerado por V** (ou **fluxo de V**).

A.3.2 Derivada de Lie

Podemos usar a noção de fluxos e curvas integrais para calcular derivadas direcionais de um campo vetorial na direção de outro. De fato, suponha que o campo vetorial V é gerador do fluxo θ e queremos calcular a variação do campo vetorial W ao longo desse fluxo. Para isso precisamos comparar o valor de W em dois pontos diferentes, p e $\theta_t(p)$, de M. No entanto, os objetos $W(p)$ e $W(\theta_t(p))$ são vetores que vivem em espaços diferentes (respectivamente, T_pM e $T_{\theta_t(p)}M$). Para comparar dois objetos em diferentes espaços, utilizaremos a seguinte relação.

Definição 11. Dado um mapa suave $F : M \to N$ entre duas variedades, a diferencial de F em um ponto p é o mapa

$$dF|_p : T_pM \to T_{F(p)}N,$$
$$v \mapsto dF|_p(v)$$

que relaciona vetores tangentes às duas variedades de acordo com a relação

$$dF|_p(v)[f] = v[F \circ f],$$

para todo $v \in T_pM$ e $f \in \mathcal{F}(N)$. Dizemos que $dF|_p(v)$ é, portanto, o **pushforward** do vetor v pelo mapa F e o denotamos $F_*|_p(v) \equiv dF|_p(v)$.

Se o mapa F for um difeomorfismo (o que significa que ele também é invertível), então essa relação pode ser generalizada para campos vetoriais. De fato, o pushforward F_*V do campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ pelo mapa $F : M \to N$ é definido pela relação

$$(F_*V)(q) \equiv F_*|_{F^{-1}(q)} V(F^{-1}(q))$$

para todo $q \in N$. De fato, daí entende-se o nome dado a esse objeto. Ele é o responsável por "empurrar" os campos vetoriais de uma variedade até o espaço de campos vetoriais de outra variedade. A extensão do pushforward para campos tensoriais de ordem $(p, 0)$ é natural.

Sabendo que o fluxo θ_t é um mapa de M a M, podemos com isso comparar os vetores do espaço tangente a um ponto $p \in M$ com vetores do espaço tangente a outro ponto $\theta_t(p)$ de acordo o mapa $(\theta_t)_*|_p$. De fato, temos que

$$\theta_t : M \to M \implies d\theta_t \equiv (\theta_t)_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

de forma que

$$(\theta_t)_*|_p : T_p(M) \to T_{\theta_t(p)}(M).$$

A partir dessa definição conseguimos enfim definir um operador diferencial que age em campos vetoriais, como faremos a seguir.

Definição 12. Dados dois campos vetoriais suaves V e W, e sendo θ o fluxo gerado por V, a **derivada de Lie de W em relação a V** é definida por

$$\mathbf{L}_V W \equiv \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_{-t})_* W(\theta_t(p)) - W(p)}{t}.$$

O que acontece, portanto, é que utilizamos a operação de pushforward para "trazer de volta" ao longo do fluxo θ o vetor $W(\theta_t(p))$, que vive no espaço $T_{\theta_t(p)}M$, até o espaço T_pM e com isso compará-lo ao vetor $W(p)$. Essa definição não é muito útil computacionalmente, mas felizmente pode-se provar que

$$\mathbf{L}_V W = [V, W],$$

em que $[V, W][f] \equiv V[W[f]] - W[V[f]]$ é o comutador (ou colchete de Lie) entre dois campos vetoriais V e W quando agindo sobre uma função f. Este objeto

obedece a uma estrutura de álgebra de Lie, portanto é *bilinear*, *antissimétrico* e satisfaz uma *identidade de Jacobi*. A partir dessas relações, podemos deduzir (novamente no capítulo 9 de [1]) diversas propriedades da derivada de Lie, que serão mencionadas a seguir.

Propriedades da derivada de Lie

Sejam $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$. Então

1. $\mathbf{L}_V W = -\mathbf{L}_W V$;
2. $\mathbf{L}_V [W, X] = [\mathbf{L}_V W, X] + [W, \mathbf{L}_V X]$;
3. $\mathbf{L}_{[V,W]} X = \mathbf{L}_V \mathbf{L}_W X - \mathbf{L}_W \mathbf{L}_V X$.

O operador de derivada de Lie tem grande importância pois permite ser generalizado para diferentes tipos de objetos geométricos. Faremos isso a seguir, mas antes precisamos de outra definição.

Definição 13. A partir da relação entre o espaço vetorial T_pM e seu dual T_p^*M podemos definir um mapa dual ao pushforward $F_*|_p$, que é o chamado **pullback**, denotado $F^*|_p$ e definido como o mapa dual à diferencial de F no ponto $p \in M$,

$$F^*|_p \equiv (dF|_p)^* : T^*_{F(p)}N \to T_p^*M,$$

que age como

$$F^*|_p(\alpha)(v) = \alpha(F_*|_p v)$$

para todo $v \in T_pM$, $\alpha \in T^*_{F(p)}N$. Similarmente ao caso de campos vetoriais. esse mapa nos permite relacionar duas 1-formas diferenciais de acordo com

$$(F^*\alpha)_p = F^*|_p(\alpha_{F(p)}),$$

e esse objeto resultante age em um vetor $v \in T_pM$ como

$$(F^*\alpha)_p(v) = \alpha_{F(p)}(F_*|_p(v)).$$

Agora podemos, enfim, definir a derivada de Lie agindo sobre outros objetos. Começamos com uma 1-forma diferencial.

Definição 14. A ação da **derivada de Lie em uma 1-forma diferencial** $\alpha \in \Omega(M)$ ao longo do campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ é definida por

$$\mathbf{L}_V \alpha = \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_t)^* \alpha(\theta_t(p)) - \alpha(p)}{t},$$

que segue precisamente a mesma lógica da ação em um campo vetorial. Além disso, ação da **derivada de Lie em uma função** $f \in \mathcal{F}(M)$ é meramente

$$\mathbf{L}_V f \equiv V[f], \tag{A.3}$$

e por meio dessas definições pode-e provar mais algumas propriedades.

Mais propriedades da derivada de Lie

Sejam $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$. Então

1. $\mathbf{L}_{fV} W = f \mathbf{L}_V W - (\mathbf{L}_W f) V$;
2. $\mathbf{L}_V (fW) = f \mathbf{L}_V W + (\mathbf{L}_V f) W$;
3. $\mathbf{L}_V (df) = d(\mathbf{L}_V f)$.

Dessa forma podemos definir a ação da derivada de Lie em um campo tensorial de ordem arbitrária. Prova-se, com isso, que a derivada de Lie satisfaz

$$\mathbf{L}_V (T_1 + T_2) = \mathbf{L}_V T_1 + \mathbf{L}_V T_2,$$

se $T_1, T_2 \in T^{(q,r)} M$ e

$$\mathbf{L}_V (T_1 \otimes T_2) = (\mathbf{L}_V T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathbf{L}_V T_2),$$

se $T_1 \in T^{(q_1,r_1)} M$ e $T_2 \in T^{(q_2,r_2)} M$.

As definições deste apêndice são uma base para o estudo de formas diferenciais, que serão o foco do Apêndice B. O leitor familiarizado com os assuntos tratados em ambos os apêndices está apto a entender a teoria desenvolvida no capítulo 1.

Referências

[1] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2013.

[2] C. von Westenholz. *Differential Forms in Mathematical Physics*. Studies in mathematics and its applications; v. 3. North-Holland Publishing Company, 1978.

[3] J. José and E. Saletan. *Classical dynamics - A contemporary approach*. Cambridge University Press, 1998.

[4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[5] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, 2003.

Apêndice B

Formas diferenciais

Este apêndice de dedica a apresentar os principais conceitos e definições a respeito da teoria de formas diferenciais, de modo a permitir ao leitor leigo compreender os assuntos tratados majoritariamente no capítulo 1. O nível de aprofundamento matemático será menor que o do apêndice anterior, pois a maioria das definições será apresentada de forma local. A seção B.1.1, no entanto, trata de algumas características globais importantes.

A maior parte das definições a seguir foi retirada de [1], com algumas contribuições de [2, 3] e seguindo principalmente [4] para a construção de uma intuição.

B.1 Cálculo exterior

As formas diferenciais são objetos de fundamental importância na física, pois generalizam diversos conceitos que utilizamos com frequência. Veremos que o campo eletromagnético, o potencial eletromagnético são exemplos de formas diferenciais, enquanto operações como o gradiente, o divergente e o rotacional são todos casos específicos de um único operador, chamado *derivada exterior*, que age sobre esses objetos. Não comentaremos aqui sobre as definições de integração, mas é importante apontar que os teoremas de Stokes, Gauss e Green são também casos especiais de um importante teorema da teoria de formas diferenciais.

Começaremos indicando o que é uma forma diferencial, como construí-la a partir de formas de ordem menor e quais as principais operações agindo sobre esses objetos.

Definição 1. Uma **forma diferencial de ordem p** (ou uma **p-forma**) é um campo tensorial completamente antissimétrico de ordem $(0, p)$. Isso significa que uma 0-forma, por exemplo, é meramente uma função sobre uma variedade M e uma 1-forma é um campo covetorial.

Dada uma vizinhança U_i de M com coordenadas locais $\{x^\mu\}$, já sabemos que a

base local de 1-formas é dada pelas diferenciais $\{dx^\mu\}$. Uma 1-forma qualquer α pode ser expressa nesse sistema de coordenadas como

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu,$$

em que as componentes α_μ são funções suaves $\alpha_\mu \in \mathcal{F}(M)$. Para construir os elementos de base do espaço de p-formas, precisamos definir a operação de **produto exterior** de 1-formas. Denotamos essa operação pelo símbolo $\wedge$ e o definimos pela soma das permutações P entre os índices de um produto tensorial, ou seja,

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p} \equiv \sum_P (-1)^\nu dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes ... \otimes dx^{\mu_p},$$

em que

$$\nu = \begin{cases} 0, \text{ se a permutação entre os índices } \mu_i \text{ for par;} \\ 1, \text{ se a permutação entre os índices } \mu_i \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Tome, por exemplo, a base do espaço de 2-formas,

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu,$$

ou a base do espaço de 3-formas,

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \equiv dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho - dx^\mu \otimes dx^\rho \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\rho$$

$$+dx^\nu \otimes dx^\rho \otimes dx^\mu - dx^\rho \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu + dx^\rho \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Vemos, portanto, que uma p-forma arbitrária é decomposta em uma base local como

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 ... \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}, \tag{B.1}$$

em que $\omega_{\mu_1 ... \mu_p}$ é completamente antissimétrico em todos os seus índices e o fator $1/p!$ aparece para evitar a dupla contagem de termos. Denominamos $\Omega^p(M)$ o espaço de p-formas sobre uma variedade M. A partir dessa definição, a noção do produto exterior entre uma p-forma e uma r-forma arbitrárias é estendida naturalmente e resulta nas seguintes propriedades (ver [1]).

Propriedades do produto exterior

Seja $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^r(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Então

1. $\alpha \wedge \alpha = 0$, se p é ímpar;
2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{p \cdot r} \beta \wedge \alpha$;
3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \omega = \alpha \wedge (\beta \wedge \omega)$.

Vimos, no apêndice A, que a ação de uma 1-forma é a de mapear cada ponto q de M a um covetor em T_q^*M. Generalizando essa noção, a ação de uma p-forma pode ser vista como a de mapear cada ponto q de M a um elemento da chamada p-ésima **potência exterior** de T_q^*M, denotada

$$\bigwedge^p (T_q^*M) \equiv \underbrace{T_q^*M \wedge T_q^*M \wedge ... \wedge T_q^*M}_{p \text{ vezes}}.$$

Os elementos desse espaço são, portanto, aqueles gerados por todas as combinações lineares de produtos exteriores de p elementos de T_q^*M, que denotamos **p-covetores**.

Além disso, como os objetos de $\bigwedge^p T_q^*M$ são mapas $T_q^{(p,0)}M \to \mathbb{R}$, que levam p vetores até um número real, então uma p-forma ω pode ser vista como uma generalização global desse objeto. Ou seja, é um mapa

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes ... \otimes \mathfrak{X}(M)}_{p \text{ vezes}} \to \mathcal{F}(M),$$

que leva p campos vetoriais até funções suaves sobre M, cuja ação é exatamente análoga a (A.1).

Definição 2. A **derivada exterior** é um mapa $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$, cuja ação em uma p-forma (B.1) é definida em um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ por

$$d\omega = \frac{1}{p!}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\Big) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}.$$

Perceba que a ação da derivada exterior em uma 0-forma (uma função) $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ é meramente

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = \nabla f \cdot d\vec{r},$$

em que $\vec{r} \equiv (x^\mu) = (x, y, z)$ que, portanto, está relacionada à ação do operador gradiente. A ação sobre uma 1-forma $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^3)$ é

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x^\mu}\Big) dx^\nu \wedge dx^\mu \equiv \beta_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

mas veja que $\varepsilon^{\mu\nu\rho}\beta_{\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \alpha_\rho = (\nabla \times \vec{\alpha})^\mu$, em que $\vec{\alpha}$ é o campo vetorial cujas componentes são as mesmas do campo covetorial α. Portanto vemos também a relação com o operador rotacional. Por fim, se tomarmos um campo vetorial $\vec{\beta} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ com componentes $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ e a partir de suas componentes definirmos a 2-forma

$$\beta = \beta_x dy \wedge dz + \beta_y dz \wedge dx + \beta_z dx \wedge dy,$$

então sua derivada exterior é

$$\begin{aligned} d\beta &= \partial_x \beta_x dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y \beta_y dy \wedge dz \wedge dx + \partial_z \beta_z dz \wedge dx \wedge dy \\ &= (\partial_x \beta_x + \partial_y \beta_y + \partial_z \beta_z y) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \vec{\beta}) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

consequentemente também está contida a operação do divergente nesse operador. Pode-se também provar ([1]) as seguintes propriedades para esse operador.

Propriedades da derivada exterior

Sejam $\alpha \in \Omega^p(M)$. Então

- $d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$ (nilpotência);
- $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Definição 3. O **produto interior** entre um campo vetorial V e uma p-forma ω é um mapa $i_V : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$, definido pela maneira como a $(p-1)$-forma resultante age em campos vetoriais,

$$i_V \omega = \omega(\underbrace{\bullet, \bullet, ... \bullet}_{p-1 \text{ vezes}}, V),$$

em que o ponto $\bullet$ indica a ação desse objeto. Localmente, utilizando as decomposições

$$V = V^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\ \omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p},$$

o produto interior pode ser escrito como

$$i_V\omega = \frac{1}{p!}V^{\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p})\Big(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Big) = \frac{1}{p!}V^{\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Big)\ldots\wedge dx^{\mu_p}$$

$$-\frac{1}{p!}V^{\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Big)\ldots\wedge dx^{\mu_p}+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{1}{p!}V^{\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Big)$$

$$= \frac{1}{p!}\sum_{\mu_i}(-1)^{i-1}V^{\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_i\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\delta^{\mu_i}_{\nu}\ldots\wedge dx^{\mu_p},$$

ou seja,

$$i_V\omega = \frac{1}{(p-1)!}V^{\nu}\omega_{\nu\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_2}\wedge\ldots\wedge\ldots dx^{\mu_p}.$$

Pode-se provar as seguintes propriedades para essa operação ([1]).

Propriedades do produto interior

Sejam $V\in\mathfrak{X}(M)$, $\alpha\in\Omega^p(M)$ e $\beta\in\Omega^r(M)$. Então

- $i_V^2\alpha\equiv i_Vi_V\alpha = 0$ (nilpotência);
- $i_V(\alpha\wedge\beta) = i_V\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge i_V\beta$.

Além disso, prova-se também um importante resultado a respeito da ação da derivada de Lie sobre formas diferenciais. A chamada **identidade de Cartan**, dada por

$$\mathbf{L}_V\omega = d(i_V\omega)+i_V(d\omega) \tag{B.2}$$

para qualquer $V\in\mathfrak{X}(M)$ e $\omega\in\Omega^p(M)$.

B.1.1 Características intrínsecas

Nesta subseção dedicaremos um pouco mais de atenção a algumas características *intrínsecas* das formas diferenciais. Estas são aquelas que são verdadeiras

globalmente, ou seja, se mantém inalteradas por mudanças de coordenadas.

Formas diferenciais fechadas

Dado um mapa suave $F : M \to N$ entre duas variedades, prova-se (por exemplo, na proposição 14.26 de [3]) que o pullback desse mapa comuta com a operação de derivada exterior, ou seja,

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega), \tag{B.3}$$

para toda $\omega \in \Omega^p(M)$. Dizemos que uma forma diferencial é **fechada** em um certo sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, determinado pela carta (U_i, ϕ_i), se

$$d\omega|_{\phi_i} = \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} = 0,$$

mas como uma mudança de coordenadas entre duas cartas (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) é traduzida nessa forma diferencial por meio do pullback do mapa $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$, temos, utilizando (B.3), que

$$d\omega|_{\phi_j} = d(\psi_{ij}^*\omega|_{\phi_i}) = \psi_{ij}^* d\omega|_{\phi_i} = \psi_{ij}^* 0 = 0.$$

Isso significa que essa não é uma característica que depende do sistema de coordenadas, portanto é uma característica *global* ou *intrínseca* de uma forma diferencial. Dizemos então, sem referência a uma carta específica, que se

$$d\omega = 0,$$

então a p-forma ω é **fechada**.

Formas diferenciais exatas

Uma propriedade mais forte que a de ser *fechada* é quando uma forma diferencial é *exata*. Dizemos que uma p-forma ω é **exata** se existe uma $(p-1)$-forma θ, chamada **primitiva** de ω, tal que

$$d\theta = \omega.$$

Devido à nilpotência da derivada exterior, toda forma exata é necessariamente fechada, já que

$$d\omega = d^2\theta = 0.$$

Porém, o inverso não é necessariamente verdade. O *lema de Poincaré* (ver em [3] o teorema 17.14 e seu corolário) implica que todo ponto de uma variedade admite alguma vizinhança na qual toda forma fechada é exata, mas isso não significa que isso é verdade em todas as vizinhanças. Essa constatação é a base da chamada *cohomologia de De Rham*, que estuda em que situações uma forma diferencial fechada é ou não exata. Para o leitor interessado, as referências já apontadas neste apêndice tratam do tema.

É importante também notar que a primitiva θ não é única, e qualquer outra $(p-1)$-forma θ' também pode ser uma primitiva de ω se tivermos que

$$\theta' = \theta + d\alpha,$$

em que $\alpha \in \Omega^{p-2}(M)$. Isso é novamente resultado da nilpotência da derivada exterior, pois

$$d\theta' = d\theta + d^2\alpha = d\theta = \omega.$$

No mais, a propriedade (B.3) também implica que se uma p-forma é exata em um sistema de coordenadas, então ela é em todos os outros.

Formas diferenciais (não-)degeneradas

Suponha um campo tensorial ω de ordem $(0,2)$ cuja matriz de componentes é representada, no sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ da carta (U_i, ϕ_i), por Ω e em outro sistema $\{y^\mu\}$ da carta (U_j, ϕ_j) por Ω'. Se $U_i \cap U_j \neq 0$, então o mapa de transformação de coordenadas $\psi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ é representado em $\mathbb{R}^n$ pela **matriz Jacobiana**

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Prova-se, com isso (ver [1]), que as componentes Ω e Ω' são relacionadas por

$$\Omega' = J^T \Omega J.$$

Mas calculando o determinante dos dois lados dessa equação,

$$\det \Omega' = \underbrace{\det(J^T)}_{=\det J} \det \Omega \det J = (\det J)^2 \det \Omega,$$

além disso, como o mapa ψ_{ji} é um difeomorfismo, ele deve ser invertível, e consequentemente $\det J \neq 0$. Dessa forma, temos a relação

$$\det \Omega' = 0 \iff \det \Omega = 0.$$

E é um resultado tradicional para formas bilineares ([5]) que

$$\det \Omega = 0 \iff \omega|_{\phi_i} \text{ degenerada.}$$

Temos, portanto, que se uma forma bilinear é (não-)degenerada em um sistema de coordenadas, então ela também é (não-)degenerada em qualquer outro.

O leitor familiarizado com os conceitos apresentados até aqui está apto a compreender o primeiro capítulo desta dissertação. As próximas seções definem mais alguns objetos e utilizam as noções aqui construídas para analisar brevemente a topologia do campo eletromagnético, quando construído a partir do formalismo de formas diferenciais.

B.2 Operador dual de Hodge

Veremos na próxima seção que o campo eletromagnético pode ser entendido como uma 2-forma F sobre o espaço-tempo $\mathcal{M}$. Acontece que a ação desse sistema deve ser a integral de volume de alguma combinação dos componentes desse campo sobre o espaço-tempo (que é, no geral, 4-dimensional). Uma integral de volume em um espaço n-dimensional, no entanto, só pode ser definida por meio de uma n-forma diferencial. Mais comumente, fazemos uso da chamada *forma volume* para isso. Esta seção se dedica a apresentar esse objeto e o método a partir do qual se relaciona F com a forma volume, fazendo uso do *operador dual de Hodge*.

Definição 4. Uma **métrica** em um espaço vetorial V é um mapa

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

que obedece às seguintes propriedades: Para todo $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- g é simétrico, ou seja, $g(u,v) = g(v,u)$;
- g é bilinear, ou seja, $g(\lambda u + v, w) = \lambda g(u,w) + g(v,w)$ e $g(u, \lambda v + w) = \lambda g(u,v) + g(u,w)$;
- g é não-degenerado, ou seja, $g(v,w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$.

A partir dessa noção constrói-se a ideia de uma variedade semi-Riemanniana, condição necessária para se determinar o operador dual de Hodge, que será apresentado ao final desta seção.

Definição 5. Uma variedade **semi-Riemanniana** (ou **pseudo-Riemanniana**) é uma variedade diferenciável M munida de um *tensor métrico* g, ou seja, um campo tensorial de ordem $(0,2)$ que associa a cada ponto $q \in M$ uma métrica $g(q)$ sobre o espaço vetorial T_qM. Denotamos esse objeto pela dupla (M,g).

Definição 6. Uma **forma volume** em uma variedade n-dimensional M[1] é uma n-forma diferenciável $\omega \in T^{(0,n)}M$ que associa a cada ponto q de M um n-covetor $\omega(q) \in \bigwedge^n T_q^*M$ não nulo.

Pode-se mostrar que toda variedade semi-Riemanniana n-dimensional (M,g) possui uma **forma volume canônica**, denotada dV e definida em um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ como

$$dV \equiv \sqrt{|\det[g_{\mu\nu}]|}\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \equiv \sqrt{g}\, d^n x, \tag{B.4}$$

em que $[g_{\mu\nu}]$ é a matriz de componentes de g nesse sistema de coordenadas. A integral de uma função $f \in \mathcal{F}(M)$ sobre M é, portanto, a integral de uma n-forma,

$$\int_M f dV = \int_M f\sqrt{g}\, d^n x,$$

e a definição exata desse objeto pode ser conferida nas referências já citadas.

Definição 7. Seja M uma variedade semi-Riemanniana (orientada) n-dimensional. O **operador dual de Hodge** é o mapa

[1] Importante notar que, para se definir uma forma volume em uma variedade semi-Riemanniana M, é também necessário que essa variedade seja *orientável*. Não discutiremos o tópico aqui, mas recomenda-se [1, 3] para o leitor interessado.

$$\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$$

que age em uma base de $\Omega^p(M)$ de acordo com

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}) \equiv \frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{\mu_1 ... \mu_p}{}_{\nu_{p+1} ... \nu_n} dx^{\nu_{p+1}} \wedge ... \wedge dx^{\nu_n},$$

em que $\epsilon^{\mu_1 ... \mu_n}$ é o **tensor de Levi-Civita**, definido por

$$\epsilon^{\mu_1 ... \mu_n} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\mu_1 ... \mu_n}, \tag{B.5}$$

sendo $\varepsilon^{\mu_1 ... \mu_n}$ o símbolo de Levi-Civita n-dimensional (que não é um tensor, ver p.ex. [6], capítulo 2). Com isso, dada uma p-forma ω, decomposta localmente como

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p},$$

seu dual de Hodge é a $(n-p)$-forma

$$\star\omega = \frac{1}{p!(n-p)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\epsilon^{\mu_1 ... \mu_p}{}_{\nu_{p+1} ... \nu_n} dx^{\nu_{p+1}} \wedge ... \wedge dx^{\nu_n}.$$

Utilizando essas definições podemos, portanto, definir uma integral de volume a partir de quaisquer duas p-formas em uma variedade n-dimensional. De fato, se $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$, então

$$\omega \wedge \star\eta = \frac{1}{(p!)^2(n-p)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta_{\nu_1 ... \nu_p}\epsilon^{\nu_1 ... \nu_p}{}_{\mu_{p+1} ... \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\mu_{p+1}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n}$$

$$= \frac{1}{(p!)^2(n-p)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta_{\nu_1 ... \nu_p}\epsilon^{\nu_1 ... \nu_p}{}_{\mu_{p+1} ... \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n},$$

mas como ϵ é um tensor, podemos subir e descer seus índices usando o tensor métrico, o que resulta

$$\omega \wedge \star\eta = \frac{1}{(p!)^2(n-p)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta^{\nu_1 ... \nu_p}\epsilon_{\nu_1 ... \nu_p \mu_{p+1} ... \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n}$$

$$= \frac{1}{(p!)^2(n-p)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta^{\nu_1 ... \nu_p}\sqrt{g}\,\varepsilon_{\nu_1 ... \nu_p \mu_{p+1} ... \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n},$$

devido à definição (B.5) e a definição de determinante por meio das coordenadas de uma matriz. Além disso, sabendo que

$$dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n} = \varepsilon^{\mu_1 ... \mu_n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n,$$

e graças às propriedades do símbolo de Levi-Civita ([6]),

$$\omega \wedge \star\eta = \frac{\sqrt{g}}{(p!)^2(n-p)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta^{\nu_1 ... \nu_p}\varepsilon_{\nu_1 ... \nu_p \mu_{p+1} ... \mu_n}\varepsilon^{\mu_1 ... \mu_n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

$$= \frac{\sqrt{g}}{p!}\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta^{\nu_1 ... \nu_p}\delta^{[\mu_1}_{\nu_1} ... \delta^{\mu_p]}_{\nu_p} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \sqrt{g}\,\omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta^{\mu_1 ... \mu_p} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

$$\therefore \omega \wedge \star\eta = \omega_{\mu_1 ... \mu_p}\eta^{\mu_1 ... \mu_p}\, dV. \tag{B.6}$$

Temos, enfim, uma n-forma que pode ser integrada em todo o espaço-tempo, e portanto, poderá servir como densidade Lagrangiana de uma teoria. A próxima seção se dedica a apontar rapidamente os principais aspectos da teoria de formas diferenciais aplicada ao eletromagnetismo.

B.3 Eletromagnetismo e formas diferenciais

Como sabemos pelo estudo tradicional do eletromagnetismo, o que chamamos de **tensor de Faraday** é um objeto que mapeia cada ponto do espaço-tempo n-dimensional $\mathcal{M}$ (que é uma variedade semi-Riemanniana) a um tensor anti-simétrico. Suas componentes $F_{\mu\nu}$ são dadas (em um sistema de unidades natural) pela matriz

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix},$$

quando $n = 4$, por exemplo, ou pela matriz

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 \\ -E_1 & 0 & B \\ -E_2 & -B & 0 \end{bmatrix},$$

quando $n = 3$. Essa quantidade pode ser interpretada, portanto, como uma 2-forma diferencial $F \in \Omega^2(\mathcal{M})$, chamada **2-forma de curvatura**, e decomposta localmente como

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

No geral, essa é uma forma *exata*. Ou seja, existe uma 1-forma $A \in \Omega(\mathcal{M})$, chamada **1-forma de conexão**,[2] tal que $F = dA$, e que pode ser decomposta como

$$A = A_\mu dx^\mu,$$

em que $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ são as componentes do que chamamos de **quadrivetor potencial**.

O dual de Hodge de F é, portanto, uma $(n-2)$-forma e a (densidade) Lagrangiana de Maxwell é a n-forma definida como

$$\mathcal{L}_{EM} \equiv -\frac{1}{4} F \wedge \star F,$$

de modo que a ação é sua integral sobre todo o espaço-tempo $\mathcal{M}$. Mas de acordo com o resultado (B.6) encontrado anteriormente, temos simplesmente

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} F \wedge \star F = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dV. \tag{B.7}$$

Essa é exatamente a ação de Maxwell como a conhecemos convencionalmente. Um fato importante a se notar é que essa ação depende **explicitamente** do tensor métrico g. Isso pode ser percebido na primeira integral de (B.7) pela presença do operador $\star$, que depende explicitamente de g pelo tensor de Levi-Civita (B.5), ou na segunda integral de (B.7), pela medida de integração dV, que depende de g por sua definição (B.4). Mostraremos a seguir que isso **não** é verdade para a ação de Chern-Simons.

As equações de movimento dessa teoria podem ser calculadas por meio da variação de (B.7) em relação a A, que resulta

[2] O motivo dos termos "curvatura" e "conexão" vem da teoria de fibrados, na qual esses objetos podem ser naturalmente relacionados à noção de curvatura sobre um fibrado cuja base é o espaço-tempo $\mathcal{M}$. Ver [1, 4, 7].

$$\delta S = -\frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}} \Big[\delta F \wedge \star F + F \wedge \delta(\star F)\Big],$$

mas usando as propriedades $[\delta, \star] = 0$ e $\int \omega \wedge \star\eta = \int \eta \wedge \star\omega$ (provadas em [4]), temos

$$\delta S = -\frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}} \Big[\delta F \wedge \star F + F \wedge \star\delta F\Big] = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \delta F \wedge \star F = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \delta(dA) \wedge \star F.$$

Além disso, prova-se que $[\delta, d] = 0$, portanto

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d(\delta A) \wedge \star F = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \delta A \wedge d(\star F),$$

em que foi usado o **teorema de Stokes generalizado**

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega$$

e o fato que as variações são nulas na fronteira do espaço-tempo. Como $\delta S = 0$ para qualquer variação δA, então

$$\boxed{d \star F = 0.} \tag{B.8}$$

Essa relação contém as informações de duas das equações de Maxwell no vácuo (a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell), enquanto as duas outras estão contidas na **identidade de Bianchi**,

$$\boxed{dF = 0,} \tag{B.9}$$

que é simplesmente a constatação de que F é *fechada*. Isso é uma consequência direta dessa forma ser *exata*, pois $F = dA \implies dF = d^2A = 0$.

B.3.1 Teoria de Chern-Simons

Como um adendo ao estudo do eletromagnetismo no formalismo de formas diferenciais, faremos, também, uma rápida introdução o estudo dos *termos topológicos* da teoria. Comentamos anteriormente a respeito da dependência da ação de Maxwell no tensor métrico, o que significa uma dependência explícita nas distâncias e ângulos do espaço-tempo $\mathcal{M}$. Acontece que, se formos capazes de construir um termo que não depende da métrica, então esse objeto se torna um

invariante por deformações suaves de $\mathcal{M}$. Essa é a definição de um **invariante topológico**.

No caso do espaço-tempo 4-dimensional, temos a sorte de o dual de Hodge da 2-forma F ser também uma 2-forma. Isso significa que uma possibilidade de termo topológico é simplesmente o objeto

$$F \wedge F, \tag{B.10}$$

que é denominada a **segunda forma de Chern** abeliana. Ao integrar essa 4-forma no espaço-tempo obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} F \wedge F &= \frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}} \left(F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \wedge \left(F_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma\right) \\ = \frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= \frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x,\end{aligned} \tag{B.11}$$

e o objeto dentro da integral é (proporcional à) **densidade de Chern-Pontryagin**. Perceba que essa integral foi definida sem a necessidade do elemento de volume dV e portanto sem menção ao tensor métrico g. Isso é o que o define, portanto, como um invariante topológico de $\mathcal{M}$.

A 4-forma (B.10) é claramente fechada, devido à identidade de Bianchi. Pelo lema de Poincaré, é possível, portanto, encontrar uma vizinhança de $\mathcal{M}$ onde ela é exata. Nesse caso, ela se torna a diferencial da seguinte primitiva

$$F \wedge F = d(A \wedge dA) = d(A \wedge F).$$

E utilizando o teorema de Stokes generalizado, caso a segunda forma de Chern seja exata em todo $\mathcal{M}$, podemos enxergar a integral de (B.11) como uma integral na fronteira $\partial\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$,

$$\int_{\mathcal{M}} F \wedge F = \oint_{\partial\mathcal{M}} A \wedge dA, \tag{B.12}$$

mas a 3-forma sendo integrada é, finalmente, a **forma de Chern-Simons** abeliana. Este objeto pode ser definido em uma variedade tridimensional arbitrária $\mathcal{M}'$ (não necessariamente a fronteira de uma variedade 4-dimensional), resultando na **ação de Chern-Simons**,[3]

[3] A ação de Chern-Simons, na verdade, requer uma normalização de $\mu/4\pi$, em que μ é um número inteiro, quando o assunto envolve a quantização desse campo. Essas questões, no entanto, fogem do escopo desta dissertação. O leitor interessado pode conferir [8, 9] ou as demais referências citadas no capítulo 4.

$$S_{CS} = \int_{\mathcal{M}'} A \wedge dA = \int_{\mathcal{M}'} A_\mu dx^\mu \wedge (\partial_\nu A_\rho dx^\nu \wedge dx^\rho) = \int_{\mathcal{M}'} A_\mu \partial_\nu A_\rho dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$$

$$= \int_{\mathcal{M}'} A_\mu \partial_\nu A_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\mathcal{M}'} A_\mu \partial_\nu A_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho}\, d^3x. \tag{B.13}$$

Perceba que, novamente, esse objeto não faz menção ao tensor métrico g, portanto ele é um invariante topológico intimamente relacionado ao campo eletromagnético $(2+1)$-dimensional.

Referências

[1] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, 2003.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[3] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2013.

[4] J. Baez and J. P. Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific Publishing Company, 1994.

[5] E. L. Lima. *Álgebra linear*. IMPA, 2020.

[6] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2019.

[7] A. S. Schwarz. *Topology for Physicists*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 1994.

[8] D. Tong. The quantum Hall effect. Notas de aula disponíveis em https://davidtong.org/teaching/quantum-hall-effect/, 2016. Acesso: 27/05/2026.

[9] D. Grabovsky. Chern-Simons Theory in a Knotshell. Notas de aula disponíveis em https://web.physics.ucsb.edu/~davidgrabovsky/notes.html. Acesso: 12/08/2026.