

UNESP

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

1

Guaratinguetá

2000



*"Simulação Numérica
de Camada Limite
em Turbinas Hidráulicas"*

MARCOS DAVID BLOCH

117

1110000426



CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE
CAMADA LIMITE EM TURBINAS HIDRÁULICAS

MARCOS DAVID BLOCH

MARCOS DAVID BLOCH

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá da
Universidade Estadual Paulista, para
a obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. José Carlos César Amorim

426

Guaratinguetá
2000

426

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA



Ficha catalográfica preparada na Seção de Aquisição e Tratamento da
Informação da Biblioteca – FEG/UNESP

Bloch, Marcos David
B651s Simulação Numérica de Camada Limite em Turbinas
Hidráulicas / Marcos David Bloch. Guaratinguetá, 2000
92f.: il.; 30cm

Bibliografia: f.89-92

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2000.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos César Amorim

1. CFD – Dinâmica dos Fluidos Computacional I. Título

CDU 532.5

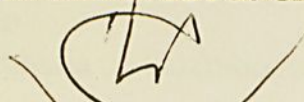
**“SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CAMADA LIMITE
EM TURBINAS HIDRÁULICAS”**

MARCOS DAVID BLOCH

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA”**

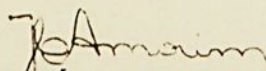
**ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

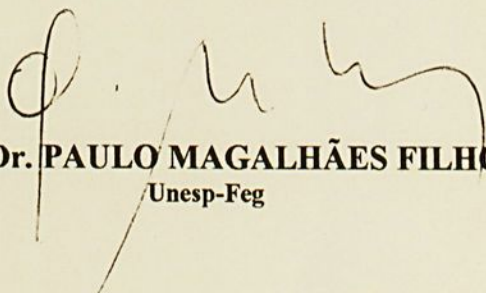


Prof. Dr. José Luz Silveira
Coordenador

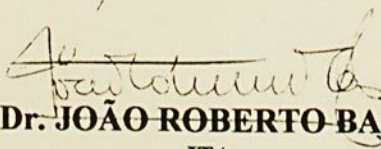
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. JOSÉ CARLOS CESAR AMORIM
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. PAULO MAGALHÃES FILHO
Unesp-Feg



Prof. Dr. JOÃO ROBERTO BARBOSA
ITA

Fevereiro 2000

DADOS CURRICULARES

MARCOS DAVID BLOCH

NASCIMENTO	15.06.1973 – JUNDIAÍ / SP
FILIAÇÃO	Francisco Henrique Netto Bloch Neide David Bloch
1991 / 1995	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – UNESP
1996 / 2000	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP
1997 / -	Exercendo o cargo de Engenheiro de Processos de Usinagem de motores na empresa General Motors do Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Américo por sua orientação, assim como à FEG - UNESP e seus funcionários por sua dedicação e formação profissional.
Ao Departamento de História da Universidade Militar de Argentina - RI.
A minha família que sempre me incentivou, em especial a meu irmão André por sua ajuda com seu conhecimento em História.
A minha gerência na General Motors do Brasil.
A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A meus pais e irmãos que souberam sempre me incentivar durante minha vida universitária e sem os quais tudo não seria possível. A Cristine, minha companheira, por seu apoio durante esta importante etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Amorim por sua orientação, assim como à FEG – UNESP e seus funcionários aos quais devo minha formação profissional.

Ao Departamento de Hidráulica do Instituto Militar de Engenharia – RJ.

A minha família que sempre me incentivou, em especial a meu irmão André por sua ajuda com seu conhecimento em línguas.

A minha gerência na General Motors do Brasil.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Este trabalho contou com apoio de seguinte entidade:

- CNPQ

Os pequenos atos que se executam são mil vezes
mais importantes que os grandes que apenas se planejam.

George C. Marshall

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade:

- CNPQ

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Resumo

Abstract

1. INTRODUÇÃO	14
2. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE	20
2.1. INTRODUÇÃO	30
2.2. SISTEMAS DE COORDENADAS	31
2.3. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE	24
2.4. GRANDEZAS CARACTERÍSTICAS DA CAMADA LIMITE	29
2.5. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES	30
2.5.1. INTRODUÇÃO	30
2.5.2. TRANSFORMAÇÃO DE LEVY-LPES GENERALIZADA	32
2.5.3. EQUAÇÕES TRANSFORMADAS	32
2.6. PROPRIEDADES DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE	35
2.6.1. CARACTERÍSTICA MATEMÁTICA DAS EQUAÇÕES	36
2.6.2. CONDIÇÕES DE CONTOURNO	40
2.6.3. CONDIÇÕES DE ENTRADA	41
2.7. MODELOS DE TURBULÊNCIA	46
3. SOLUÇÃO NUMÉRICA	52
3.1. INTRODUÇÃO	52
3.2. DISCRETIZAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS	54
3.2.1. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE	55
3.2.2. EQUAÇÃO DE CAMADA LIMITE	56
3.2.3. EQUAÇÃO DE CAMADA LIMITE EM SEMELHANÇA LOCAL	62
3.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA	67
4. APLICAÇÃO NAS TURBOMÁQUINAS - TURBINA GAMA	71
4.1. INTRODUÇÃO	71
4.2. PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DE RESULTADOS	71

“Os pequenos atos que se executam são melhores
que todos aqueles grandes que apenas se planeja.”

George C. Marshal

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Resumo

Abstract

1. INTRODUÇÃO	14
2. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE.....	20
2.1. INTRODUÇÃO	20
2.2. SISTEMAS DE COORDENADAS.....	21
2.3. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE.....	24
2.4. GRANDEZAS CARACTERÍSTICAS DA CAMADA LIMITE.....	29
2.5. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	30
2.5.1 INTRODUÇÃO	30
2.5.2 TRANSFORMAÇÃO DE LEVY-LEES GENERALIZADA.....	32
2.5.3 EQUAÇÕES TRANSFORMADAS	32
2.6 – PROPRIEDADES DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE.....	35
2.6.1 – CARACTERÍSTICA MATEMÁTICA DAS EQUAÇÕES	36
2.6.2 – CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	40
2.6.3 – CONDIÇÕES DE ENTRADA.....	41
2.7 – MODELOS DE TURBULÊNCIA	46
3. SOLUÇÃO NUMÉRICA	52
3.1. INTRODUÇÃO	52
3.2. DISCRETIZAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS.....	54
3.2.1. EQUAÇÕES COMPLETAS DE CAMADA LIMITE.....	55
3.2.2. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE PARA UM PLANO DE SIMETRIA.....	60
3.2.3. EQUAÇÃO DE CAMADA LIMITE EM SIMILITUDE LOCAL....	62
3.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	64
4. APLICAÇÃO NAS TURBOMÁQUINAS – TURBINA GAMM.....	70
4.1. INTRODUÇÃO	70
4.2. PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DE RESULTADOS	71

4.3. DADOS DA TURBINA GAMM	73
4.4. RESULTADOS OBTIDOS PARA A TURBINA GAMM	74
5. CONCLUSÕES	78
ANEXO A	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

FIGURA 2.3- Esquema de um plano de simetria em um sistema de coordenadas localmente ortogonal em $x^2 = 6$	43
FIGURA 3.1- Esquema de distorções finitas	53
FIGURA 3.2- Esquema Das duas as equações diferenciais	57
FIGURA 3.3- Esquema simplificado para plano de simetria	61
FIGURA 3.4- Esquema simplificado para um plano ζ constante	63
FIGURA 4.1- Esquema de localização do vórtice turbulento	73
FIGURA 4.2- Mapa gerado	74
FIGURA 4.3- Campo de pressão calculado em $x = 0$	75
FIGURA 4.4- Campo de velocidade no plano $x = 0$	75
FIGURA 4.5- Valores práticos para as distorções de perfil	76
FIGURA 4.6- Ângulo de separação do vórtice	77
FIGURA A1- Esquema de coordenadas	81

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1–Procedimento para cálculo da camada limite tridimensional.....	17
FIGURA 2.1–Sistema de coordenadas.....	23
FIGURA 2.2–Domínios de influência e de dependência do ponto P no interior da camada limite.....	39
FIGURA 2.3–Escoamento em um plano de simetria em um sistema de coordenadas localmente ortogonal em $x^2 = 0$	43
FIGURA 3.1–Esquemas de diferenças finitas.....	53
FIGURA 3.2–Esquema Box para as equações diferenciais	57
FIGURA 3.3 –Esquema simplificado para plano de simetria.....	61
FIGURA 3.4– Esquema simplificado para um plano ζ constante.....	63
FIGURA 4.1–Esquema de instalação de uma turbina Francis.....	73
FIGURA 4.2–Malha gerada	74
FIGURA 4.3–Campo de pressão calculado sobre a pá	75
FIGURA 4.4–Campo de velocidade no contorno externo da camada limite.....	75
FIGURA 4.5–Vetores proporcionais ao cisalhamento na parede	76
FIGURA 4.6–Ângulo do escoamento sobre a pá.....	77
FIGURA A1–Sistema de coordenadas.....	81

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Comprimento	M
c	calor específico	$J/Kg\ ^\circ C$
Ec	número de Eckert	$[1]$
h	Espaço	M
H	espessura de material sinterizado	M
k	relação entre os coeficientes de condutividade térmica	$[1]$
p	parâmetro adimensional de pressão	$[1]$
p^*	Pressão	N
Pr	número de Prandtl	$[1]$
q	parâmetro adimensional de geração interna de calor	$[1]$
.		
q	geração interna de calor	$^\circ C/s$
r	parâmetro adimensional de raio	$[1]$
r^*	Raio	M
R	número de Reynolds	$[1]$
t	parâmetro adimensional de tempo	$[1]$
t^*	Tempo	S
T^*	Temperatura	$^\circ C$
T	temperatura adimensionalizada	$[1]$
u	velocidade adimensionalizada	$[1]$
u^*	Componente de velocidade	m/s

BLOCH, M. D. *Simulação Numérica de Camada Limite em Turbinas Hidráulicas*. Guaratinguetá, 2000. 92p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma forma prática de obter dados para tomada de decisões para o projeto de uma turbomáquina, permitindo chegar diretamente às suas perdas hidráulicas e avaliar o comportamento do escoamento. A previsão do escoamento completo num rotor de turbomáquina é um trabalho extremamente complexo pelo fato de que este escoamento é tridimensional, turbulento e submetido à influência da rotação e da curvatura das pás. Neste trabalho, um modelo de análise do desenvolvimento da camada limite tridimensional sobre as pás de turbomáquinas é proposto. Seu objetivo é fornecer algumas propriedades do escoamento e os parâmetros da camada limite de modo a poder ser utilizado na etapa de projeto de uma turbomáquina. O método apresentado permite uma previsão rápida porém suficientemente completa do desenvolvimento de camadas limites, sendo o mesmo adaptado para uma associação com um cálculo tridimensional em fluido perfeito. Essa aproximação consiste em supor que os efeitos viscosos são limitados a uma região fina de escoamento próximo à superfície, dominada pelas forças de pressão na superfície, pelo atrito, e pelas forças de Coriolis, onde a teoria de camada limite é válida. Esse tipo de escoamento pode estar sujeito a efeitos tridimensionais importantes e ele constitui um rigoroso teste para a aplicação da teoria da camada limite.

PALAVRAS-CHAVE: Camada limite, Turbinas hidráulicas, escoamento turbulento, simulação numérica, Dinâmica dos Fluidos Computacional, CFD.

BLOCH, M. D. *Numeric Simulation of the Boundary Layer in Hydraulic Turbines*. Guaratinguetá, 2000. 92p. Dissertation (Master Degree in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

ABSTRACT

This work aims at gathering data for the project of a turbine, calculating directly its hydraulic losses and evaluating the flow behavior. The complete flow calculation in a turbine is an extremely complex work due to the fact that it is tridimensional, turbulent and is submitted to the influence of the rotation and blade curvature. In this work it is proposed a model of analysis for the development of the tridimensional boundary layer on the turbine blades. Its objective is to predict some flow properties and parameters of the boundary layer for the project of a turbine. The method presented allows a simple but complete prediction of the boundary layer development, which could be applied, in association with a tridimensional calculation, for ideal flow. This approximation supposes that the viscous effects are limited to a thin flow region close to the surface, dominated by the pressure forces in the surface, by friction, and by the Coriolis' forces, in cases to which the boundary layer theory can be applied. This kind of flow can be under important tridimensional effects. It is therefore a rigorous test for the application of the boundary layer theory.

KEYWORDS: Boundary Layer, Hydraulic Turbines, turbulent flow, Numeric simulation, Computational Fluid Dinamics, CFD.



Capítulo 1

Introdução

Levando-se em conta a importância dos elementos constituintes de uma turbomáquina para se chegar a um nível de desempenho elevado; um engenheiro tem necessidade de previsões rápidas e simples para ajudar nas decisões que devem ser tomadas em um projeto.

O presente trabalho tem como objetivo obter dados para tomada de decisões para o projeto de uma turbomáquina, permitindo chegar diretamente às suas perdas hidráulicas e avaliar o comportamento do escoamento.

A previsão do escoamento completo num rotor de turbomáquina é um trabalho extremamente complexo pelo fato de que este escoamento é tridimensional, turbulento e submetido à influência da rotação e da curvatura das pás. Atualmente, a solução numérica das equações de Navier-Stokes permite descrever a camada viscosa próxima da parede das pás. Porém, devido à complexidade da malha gerada para a obtenção de tais resultados, o custo da solução computacional imposto pela memória e velocidade de cálculo dos computadores atuais é consideravelmente alto. Por outro lado, o problema é fortemente tridimensional, turbulento e complexo e não pode ser analisado de maneira completa por métodos baseados na teoria de fluido perfeito. O desenvolvimento de técnicas de previsão podendo tratar os efeitos viscosos tridimensionais do escoamento no rotor é necessário para o projeto de turbomáquinas. Uma técnica eficaz, rápida e precisa para estudar o escoamento, próximo do ponto nominal de funcionamento de uma turbomáquina, é a modelação e análise de camada limite tridimensional.

As camadas limites que se desenvolvem sobre as pás do rotor de turbomáquinas são complexas, turbulentas, tridimensionais, submetidas a forças centrífugas e de Coriolis. Essas forças induzem escoamentos na direção

transversal no interior das camadas limites, onde a intensidade é diretamente ligada à velocidade de rotação do rotor e a geometria da pá. Além do mais, próximo da carcaça e do cubo, interações complexas do escoamento têm lugar nas camadas limites. Por essas razões, as camadas limites sobre as pás são um dos fenômenos menos conhecidos do escoamento em turbomáquinas e numerosos trabalhos são desenvolvidos nessa área.

Devido à complexidade introduzida pelas equações tridimensionais, inicialmente o método mais utilizado foi um método “quasi-tridimensional” baseado na hipótese de um fraco escoamento transversal permitindo o desacoplamento entre as duas equações da Q.D.M.. Thompkins & Usabe (1982) fizeram uma tentativa de cálculo da camada limite numa pá em rotação a partir desta técnica. Porém essas soluções aproximadas não podem ser consideradas confiáveis nos casos onde o escoamento transversal induzido pelos efeitos viscosos é significativo; elas não são aplicáveis para prever o comportamento de escoamentos num grande número de casos práticos, onde a velocidade do escoamento viscoso transversal e suas derivadas são de mesma ordem de grandeza que as variáveis correspondentes longitudinais. Para esses problemas, a solução de equações completas de camada limite tridimensional é necessária.

A análise das equações completas de camada limite tridimensional é feita a partir de dois métodos distintos: o método integral e o método diferencial. Estudos bibliográficos sobre esses métodos de cálculo de camada limite tridimensional foram feitos por Smith (1982), por Cousteix (1986) e por Humphreys e Lindhout (1988). A maior parte dos métodos propostos consiste em cálculos de escoamento sobre superfícies tridimensionais externas tais como asas de avião.

Para as pás de turbomáquinas, as primeiras técnicas de previsão de camada limite tridimensional turbulenta, foram feitas pelo método integral utilizando as equações globais de camada limite. Mager (1952) propôs as equações integrais generalizadas para um sistema de coordenadas ortogonais

em rotação. Entre outras aplicações, Arakawa et al (1980) fizeram uma tentativa de previsão do comportamento da camada limite sobre as pás de uma bomba axial. Lakshminarayana & Govindan (1981) estudaram o desenvolvimento da camada limite sobre as pás fixas e em rotação de um compressor axial. Sata et al (1983) fizeram uma análise sobre o desenvolvimento da camada limite num rotor de bomba centrífuga e, baseados num método semelhante, posto em prática por Ubaldi (1985), Soares Gomes (1990) realizou uma aplicação no caso de uma turbina bulbo.

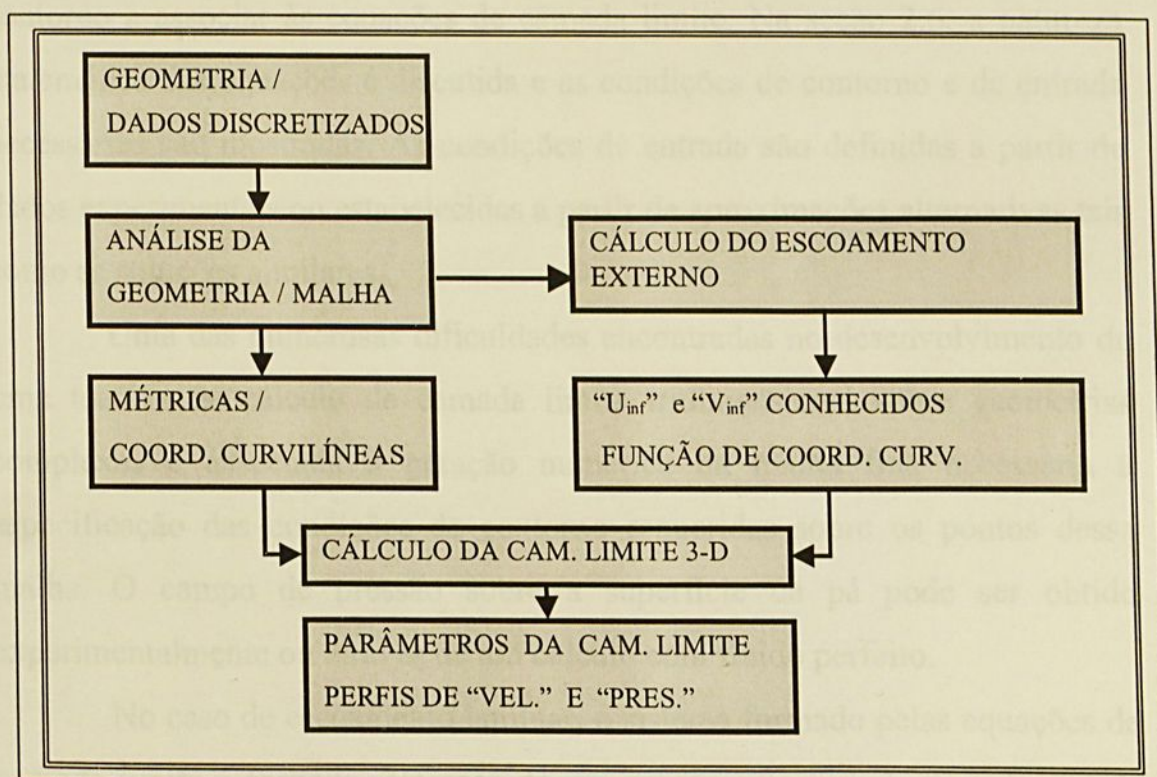
Os métodos diferenciais são, potencialmente, mais gerais que os métodos integrais. Uma aplicação com sucesso deste método por uma técnica de diferenças finitas para analisar a camada limite tridimensional sobre as pás de turbomáquinas foi feita por Vatsa (1985). Ele utilizou para essa análise um modelo de turbulência do tipo comprimento de mistura para representar o tensor de Reynolds. Zhang & Lakshminarayana (1990) introduziram nesse método um modelo de turbulência ARSM / $k-\varepsilon$ para capturar os efeitos da rotação sobre a estrutura da turbulência.

No presente trabalho, baseado no trabalho de Amorim (1991), um modelo da análise do desenvolvimento da camada limite tridimensional sobre as pás de turbomáquinas é proposto. Seu objetivo é fornecer algumas propriedades do escoamento e os parâmetros da camada limite de modo a poder ser utilizado na etapa de projeto de uma turbomáquina. O método apresentado permite uma previsão rápida mas suficientemente completa do desenvolvimento de camadas limites e ele é adaptado para uma associação com um cálculo tridimensional em fluido perfeito. Essa aproximação consiste em supor que os efeitos viscosos são limitados a uma região fina de escoamento próximo à superfície, dominada pelas forças de pressão na superfície, pelo atrito, e pelas forças de Coriolis, onde a teoria de camada limite é válida. Esse tipo de escoamento pode estar sujeito a efeitos tridimensionais importantes e ele constitui um rigoroso teste para a aplicação da teoria da camada limite.

A figura 1.1 mostra um organograma dos procedimentos necessários para o cálculo de camada limite tridimensional pelo método estudado neste trabalho.

Para melhor tratar as superfícies curvas de uma pá de turbomáquina, um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais foi escolhido. Esse sistema de coordenadas curvilíneas é mostrado na seção 2.2. As relações geométricas de base são discutidas no anexo A. As equações de camada limite tridimensional escritas num sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais em rotação, onde as forças de Coriolis e centrífuga aparecem claramente, são mostradas e discutidas na seção 2.3. A seção 2.4 define algumas grandezas características da camada limite correntemente utilizadas.

Figura 1.1 – Procedimento para cálculo da camada limite tridimensional.



As propriedades de camada limite fazem com que a escolha de uma malha seja delicada se o escoamento for estudado em variáveis físicas, sendo particularmente interessante fazer uso de uma transformação de variáveis nas equações de modo a seguir o crescimento da camada limite e de mantê-la

aproximadamente constante num espaço transformado. Por essa razão, a transformação de Levy Lees generalizada aos escoamentos tridimensionais incompressíveis é mostrada na seção 2.5. Essa transformação tem também a vantagem de permitir definir uma família de soluções similares que pode ser utilizada para calcular as condições de entrada do escoamento, como mostrado na seção 2.6.

O cálculo da camada limite tridimensional faz aparecer propriedades e dificuldades que não são apresentadas no cálculo bidimensional. Uma atenção particular deve ser dada à formulação diferencial de modo a levar em conta o princípio de zona de dependência e de influência, que são função de natureza matemática nas equações de camada limite tridimensional. A definição de domínios de influência e de dependência dita as condições de entrada e de contorno a associar às equações de camada limite. Na seção 2.6, a natureza matemática das equações é discutida e as condições de contorno e de entrada necessárias são mostradas. As condições de entrada são definidas a partir de dados experimentais ou estabelecidas a partir de aproximações alternativas tais como as soluções similares.

Uma das numerosas dificuldades encontradas no desenvolvimento de uma técnica de cálculo de camada limite tridimensional sobre geometrias complexas é associada à geração numérica da malha fina necessária à especificação das condições de contorno requeridas sobre os pontos dessa malha. O campo de pressão sobre a superfície da pá pode ser obtido experimentalmente ou através de um cálculo com fluido perfeito.

No caso de escoamento laminar, o sistema formado pelas equações de camada limite é fechado. No caso de um escoamento turbulento o tensor de Reynolds introduz termos desconhecidos. Um modelo de turbulência deve então ser utilizado para calcular esses novos termos e para fechar o sistema de equações de camada limite. Para o presente trabalho, um modelo de turbulência algébrico do tipo comprimento de mistura é utilizado. Ele é uma extensão ao caso tridimensional do modelo proposto por Cebeci e Smith

(1974). Na seção 2.7, um estudo bibliográfico sucinto sobre os modelos de turbulência freqüentemente utilizados nas equações de camada limite é mostrado, seguido de uma discussão sobre a física da turbulência no caso de um escoamento tridimensional; o modelo de turbulência utilizado nesse trabalho é em seguida detalhado.

As equações diferenciais parciais que governam o desenvolvimento da camada limite são discretizadas por um esquema de diferenças finitas de segunda ordem na seção 3.2. Na seção 3.3, o sistema de equações algébricas não lineares acopladas, obtido após a discretização das equações de camada limite, é linearizado pelo método de Newton e o sistema de equações tridiagonal por blocos assim obtido é resolvido por um processo numérico proposto por Anderson et al (1984). Amorim (1991) demonstrou a aplicação do modelo proposto em alguns casos testes de camada limite tridimensional.

No capítulo 4, a aplicação do método no cálculo do desenvolvimento de camada limite sobre as pás de uma turbina Francis, estudada experimentalmente pela Escola Politécnica de Lausanne – Suíça, conhecida como turbina GAMM, é apresentada.



Capítulo 2

Equações de Camada Limite

2.1 - Introdução:

O conceito de camada limite foi introduzido por Ludwig Prandtl em 1904. Prandtl (1904), a partir de evidências experimentais, observou, para um número de Reynolds suficientemente elevado a existência de uma região fina próxima da superfície onde os efeitos viscosos são ao menos tão importantes quanto os efeitos de inércia, independentemente do valor da viscosidade do fluido. Prandtl (1904) concluiu que uma forma reduzida das equações que governam o escoamento pode ser utilizada pelo emprego sistemático de duas limitações:

- (a) que a camada viscosa seja relativamente fina em relação ao comprimento característico na direção do escoamento da superfície sólida em questão, $\delta/L \ll 1$,
- (b) que o maior termo viscoso seja da mesma ordem de grandeza que qualquer termo de inércia.

A partir de uma análise de ordem de grandeza, ele mostrou que as derivadas segundas das componentes da velocidade na direção de escoamento são negligenciáveis com relação às derivadas normais correspondentes na direção do escoamento e que a equação da Q.D.M. na direção normal à superfície pode ser ignorada.

Atualmente sabe-se que uma redução similar pode ser aplicada para as equações dos escoamentos em que uma direção principal é identificada. Esses escoamentos compreendem por exemplo, os jatos, as esteiras e as camadas de mistura. Assim, a denominação escoamento de camada limite ou aproximação de camada limite tomou um significado mais geral e engloba o caso de

escoamentos onde a equação da Q.D.M. na direção normal à superfície e as derivadas segundas nas duas outras equações da Q.D.M. podem ser ignoradas.

No caso de equações de camada limite tridimensional, uma escolha importante é a do sistema de coordenadas. Um sistema de coordenadas cartesianas pode ser utilizado para o escoamento sobre uma superfície plana ou desenvolvida, porém, um sistema de coordenadas curvilíneas é necessário para um escoamento sobre corpos mais genéricos. Alguns estudos foram feitos com o sistema de coordenadas curvilíneas coincidentes com as linhas de corrente do escoamento não viscoso, por exemplo Cebeci et al (1973). Porém, a maior parte dos cálculos de camada limite tridimensional são feitos com um sistema de coordenadas ligados à geometria da superfície. Na Seção 2.2, é mostrado um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais escolhido para este estudo. As equações de camada limite tridimensional escritas nesse sistema de coordenadas em rotação são mostradas na Seção 2.3 e as grandezas características da camada limite na Seção 2.4. Uma transformação das equações de camada limite é proposta na seção 2.5 e as propriedades dessas mesmas equações são discutidas na seção 2.6. Finalmente, um modelo de turbulência é descrito na seção 2.7.

2.2 - Sistemas de Coordenadas:

A escolha do sistema de coordenadas é particularmente importante nos casos de um escoamento tridimensional sobre uma superfície arbitrária. Para um cálculo de camada limite, as equações são geralmente escritas num sistema de coordenadas curvilíneas ligadas à superfície do corpo sobre o qual se desenvolve a camada limite. Esse sistema pode, por exemplo, ser ligado às linhas de corrente do escoamento exterior e suas ortogonais mas, na maior parte dos casos, é mais interessante trabalhar em um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, não necessariamente ortogonal.



Os sistemas de coordenadas ligados às linhas de corrente têm a vantagem de que os parâmetros geométricos não apresentam singularidades, como pode ser o caso em um sistema de coordenadas orientadas de superfície. Seu principal inconveniente é que ele requer a solução do escoamento não viscoso exterior à camada limite para cada configuração. Um outro inconveniente, que aparece também no caso de um sistema de coordenadas orientadas de superfície ortogonal, é devido à dificuldade de construção da malha, particularmente sobre os corpos onde as superfícies não são conhecidas analiticamente.

Cada sistema de coordenadas tem suas vantagens e seus inconvenientes. O sistema de coordenadas curvilíneas orientadas de superfícies tem a vantagem de ser independente do ângulo de ataque do escoamento e é facilmente estabelecido mesmo nos casos onde a geometria dos corpos não é conhecida analiticamente. Além do mais, os efeitos das curvaturas longitudinal e transversal podem ser introduzidos sem dificuldade.

Uma comparação de equações de camada limite escrita num sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais com relação às mesmas equações escritas num sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais mostra que os termos de curvatura e os termos de pressão são mais simples nessa última forma, mas sob o ponto de vista numérico essa vantagem não é preponderante. Além do mais, como foi discutido acima, a obtenção da malha na superfície é muito mais simples com as coordenadas não ortogonais. Do ponto de vista da solução por diferenças finitas, o algoritmo não é tão influenciado pela escolha do sistema de coordenadas. Isso é verdade porque os termos de curvatura não são de ordem elevada e não incluem derivadas.

Levando-se em consideração as discussões que foram feitas acima, Amorim (1991) optou por um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais para representar as equações de camada limite, as quais também serão utilizadas no presente trabalho.



A Figura 2.1 mostra a superfície de um corpo arbitrário definido num sistema de coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) de referência. Para as equações de camada limite, um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais (x^1, x^2, x^3) , é definido sobre a superfície do corpo tal que as linhas $x^1 = \text{constante}$ e $x^2 = \text{constante}$ são definidas sobre a superfície e são, em geral, não ortogonais. A coordenada x^3 é retilínea e normal às duas outras, e, por consequência, normal à superfície também. O sistema (x^1, x^2, x^3) é, então, um sistema de coordenadas orientadas de superfície dito localmente monoclinico, onde x^1, x^2 ou x^α , $\alpha = 1, 2$ são os parâmetros da superfície Gaussiana. Todas as relações geométricas de base entre esses dois sistemas são mostradas no Anexo A.

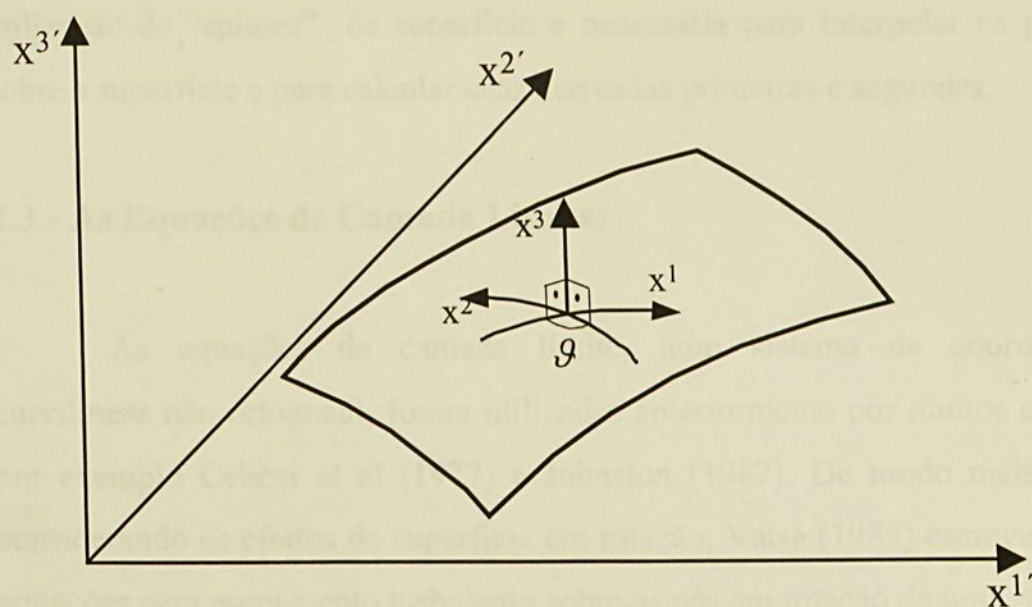


Figura 2.1 – Sistema de Coordenadas

As coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas são muito bem adaptadas para representar um escoamento próximo da superfície sólida. Elas podem ser utilizadas sem restrições nas superfícies convexas. Nas superfícies côncavas, as linhas de coordenadas x^3 convergem e eventualmente se cruzam. Porém, na região de validade da aproximação de camada limite, a espessura normal à superfície de cálculo, ou seja, a espessura da camada

limite, é por definição pequena em relação ao menor raio de curvatura da superfície, e nessa região, o cruzamento não ocorre.

As coordenadas orientadas de superfície x^i são as coordenadas de cálculo e as coordenadas cartesianas $x^{j'}$, utilizadas como referência para a transformação, são as coordenadas físicas. A transformação $x^{j'} = x^{j'}(x^i)$, $i, j' = 1, 2, 3$ define um só ponto no espaço físico a partir do ponto correspondente no espaço de cálculo se o Jacobiano da transformação for não nulo em todo o domínio de cálculo. Em geral, as coordenadas x^1 e x^2 não representam diretamente as distâncias físicas ao longo das superfícies dos corpos. Essas distâncias físicas são obtidas com a ajuda de fatores de escala.

É necessário ainda considerar o fato de que no caso das pás de turbomáquinas as superfícies não são conhecidas numericamente. Assim, a utilização de “splines” de superfície é necessária para interpolar os pontos sobre a superfície e para calcular suas derivadas primeiras e segundas.

2.3 - As Equações de Camada Limite:

As equações de camada limite, num sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonal, foram utilizadas anteriormente por muitos autores, por exemplo Cebeci et al (1977) e Johnston (1987). De modo mais geral, considerando os efeitos de superfície em rotação, Vatsa (1985) escreveu essas equações para escoamento turbulento sobre as pás em rotação de uma turbina.

As equações de camada limite tridimensional para um escoamento permanente incompressível são obtidas a partir das equações de Navier-Stokes médias de Reynolds num sistema de coordenadas orientadas sobre uma superfície em rotação. As hipóteses de camada limite são então introduzidas ignorando-se os termos de ordem inferior a δ (espessura da camada limite) e o gradiente de pressão normal introduzido pela rotação e curvatura das pás. As equações de camada limite obtidas fazem aparecer explicitamente as forças de

Coriolis e centrífuga, e têm a seguinte forma¹:

$$\text{Continuidade: } (k_{01}v^1)_{,1} + (k_{02}v^2)_{,2} + (k_{03}v^3)_{,3} = 0 \quad (2.1)$$

Q.D.M. em x^1 :

$$\frac{v^1}{h_1}(v^1)_{,1} + \frac{v^2}{h_2}(v^1)_{,2} + v^3(v^1)_{,3} + k_{11}(v^1)^2 + k_{12}v^1v^2 + k_{13}(v^2)^2 + k_{14}\omega^3v^1 + k_{15}\omega^3v^2 +$$

$$(\omega)^2 R[k_{16}(R)_{,1} + k_{17}(R)_{,2}] = \frac{1}{\rho} \left\{ k_{16}(p)_{,1} + k_{17}(p)_{,2} + \left[\mu(v^1)_{,3} - \overline{\rho v^1 v^3} \right]_{,3} \right\} \quad (2.2)$$

Q.D.M. em x^2 :

$$\frac{v^1}{h_1}(v^2)_{,1} + \frac{v^2}{h_2}(v^2)_{,2} + v^3(v^2)_{,3} + k_{21}(v^1)^2 + k_{22}v^1v^2 + k_{23}(v^2)^2 + k_{24}\omega^3v^1 + k_{25}\omega^3v^2 +$$

$$(\omega)^2 R[k_{26}(R)_{,1} + k_{27}(R)_{,2}] = \frac{1}{\rho} \left\{ k_{26}(p)_{,1} + k_{27}(p)_{,2} + \left[\mu(v^2)_{,3} - \overline{\rho v^2 v^3} \right]_{,3} \right\} \quad (2.3)$$

Deve-se observar que essas equações são válidas apenas para as camadas limites finas com relação ao raio de curvatura da superfície. Para as camadas limites espessas sobre uma superfície fortemente curvada, um sistema de coordenadas mais geral deve ser utilizado para levar em conta corretamente a divergência das linhas de corrente segundo a espessura da camada limite. Observa-se também que certos termos ligados à curvatura da superfície são ignorados. Porém, como mostrou Bradshaw (1987), os efeitos de curvatura da superfície sobre a produção e dissipação da turbulência são muito mais importantes que sobre o escoamento médio. Esses efeitos de curvatura podem ser levados em conta no modelo de turbulência. Do mesmo modo, certos efeitos da força de Coriolis na produção e dissipação da turbulência podem também ser tratados no modelo de turbulência. Observa-se

¹ Para representar as derivadas, a seguinte notação é utilizada, por exemplo: $(v^1)_{,1} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1}$

ainda que há somente uma componente da força de Coriolis que aparece nas equações da camada limite. Essa componente é normal à superfície e age desviando o escoamento na direção x^1 ou x^2 . No exterior da camada limite as equações de quantidade de movimento (2.2) e (2.3) são reduzidas às equações de Euler, que serão utilizadas para eliminar os termos de pressão nessas mesmas equações.

O conceito de viscosidade turbulenta proposto por Boussinesq (1877) é utilizado para representar o tensor de Reynolds. Ele considera que, por comparação com as tensões viscosas de um escoamento laminar, as tensões turbulentas são proporcionais aos gradientes de velocidades médias. No caso desse trabalho, esse conceito é representado por:

$$\tau_{13} = \mu(v^1)_{,3} - \rho \overline{v^1 v^{3'}} = (\mu + \mu_t)(v^1)_{,3} \quad (2.4.a)$$

$$\tau_{23} = \mu(v^2)_{,3} - \rho \overline{v^2 v^{3'}} = (\mu + \mu_t)(v^2)_{,3} \quad (2.4.b)$$

No caso de um escoamento laminar, as equações (2.1) a (2.3) constituem um conjunto fechado de equações. Para um escoamento turbulento, um modelo de turbulência é necessário para determinar a viscosidade efetiva $(\mu + \mu_t)$ de escoamento. Um modelo de turbulência é proposto na seção 2.7.

Nas equações (2.1) a (2.3) as velocidades v^1 , v^2 e v^3 são as componentes físicas contravariantes da velocidade, as quais são adimensionalizadas por uma velocidade de referência v_{ref} . Todas as distâncias são adimensionalizadas por um comprimento de referência L_{ref} , e as demais variáveis apresentadas nessas equações são adimensionalizadas por:

$$p = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}(\bar{v}_{ref})^2}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{ref}}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_{ref}}, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}L_{ref}}{\bar{v}_{ref}} \quad (2.5)$$

As distâncias e as velocidades normais são ainda multiplicadas pela

raiz quadrada do número de Reynolds de referência $Re = \rho_{\infty} v_{\infty} L_{ref} / \mu_{ref}$. Essa multiplicação permite ter as variáveis da mesma ordem de grandeza nas diferentes direções e não muda as considerações geométricas.

Os fatores métricos k_{mn} são funções das componentes $a_{\alpha\beta}(x^1, x^2)$ do tensor métrico da superfície. Para a equação de continuidade:

$$k_{01} = \frac{\sqrt{|a|}}{h_1} \quad (2.6.a)$$

$$k_{02} = \frac{\sqrt{|a|}}{h_2} \quad (2.6.b)$$

$$k_{03} = \frac{\sqrt{|a|}}{h_3} \quad (2.6.c)$$

Para a equação de Q.D.M. em x^1 :

$$k_{11} = \frac{g}{|a|} \left[\frac{g}{(h_1)^2} (h_1)_{,1} + (h_1)_{,2} - \frac{1}{h_1} (g)_{,1} \right] \quad (2.7.a)$$

$$k_{12} = \frac{1}{|a|} \left\{ h_1 h_2 \left[1 + \left(\frac{g}{h_1 h_2} \right)^2 \right] (h_1)_{,2} - 2g (h_2)_{,1} \right\} \quad (2.7.b)$$

$$k_{13} = \frac{h_1}{|a|} \left[(g)_{,2} - h_2 (h_2)_{,1} - \frac{g}{h_2} (h_2)_{,2} \right] \quad (2.7.c)$$

$$k_{14} = -2 \frac{g}{\sqrt{|a|}} \quad (2.7.d)$$

$$k_{15} = -2 \frac{h_1 h_2}{\sqrt{|a|}} \quad (2.7.e)$$

$$k_{16} = -\frac{h_1 (h_2)^2}{|a|} \quad (2.7.f)$$

$$k_{17} = \frac{h_1 g}{|a|} \quad (2.7.g)$$

Para a equação de Q.D.M. em x^2 :

$$k_{21} = \frac{h_2}{|a|} \left[(g)_{,1} - h_1 (h_1)_{,2} - \frac{g}{h_1} (h_1)_{,1} \right] \quad (2.8.a)$$

$$k_{22} = \frac{1}{|a|} \left\{ h_1 h_2 \left[1 + \left(\frac{g}{h_1 h_2} \right)^2 \right] (h_2)_{,1} - 2g (h_1)_{,2} \right\} \quad (2.8.b)$$

$$k_{23} = \frac{g}{|a|} \left[\frac{g}{(h_2)^2} (h_2)_{,2} + (h_2)_{,1} - \frac{1}{h_2} (g)_{,2} \right] \quad (2.8.c)$$

$$k_{24} = 2 \frac{h_1 h_2}{\sqrt{|a|}} \quad (2.8.d)$$

$$k_{25} = 2 \frac{g}{\sqrt{|a|}} \quad (2.8.e)$$

$$k_{26} = \frac{h_2 g}{|a|} \quad (2.8.f)$$

$$k_{27} = - \frac{(h_1)^2 h_2}{|a|} \quad (2.8.g)$$

onde:

$$|a| = \det a_{\alpha\beta} = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 \quad (2.9.a)$$

e

$$h_1 = \sqrt{a_{11}} \quad , \quad h_2 = \sqrt{a_{22}} \quad , \quad g = a_{12} \quad (2.9.b)$$

O quadrado da distância elementar na superfície é dado por:

$$(ds)^2 = a_{11} (dx^1)^2 + 2a_{12} dx^1 dx^2 + a_{22} (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.9.c)$$

e o coseno do ângulo entre as coordenadas de superfície x^1 e x^2 se escreve:

$$\cos \vartheta = \frac{g}{h_1 h_2} \quad (2.9.d)$$

2.4 - Grandezas Características da Camada Limite:

Nesta seção definem-se algumas grandezas características da camada limite freqüentemente utilizadas. Para isso considera-se um sistema de coordenadas formado a partir de linhas de corrente do escoamento não viscoso e suas projeções ortogonais. As variáveis definidas na direção das linhas de corrente exteriores têm o índice *s* (Stream flow) e aquelas definidas na direção ortogonal o índice *c* (Cross flow).

Um dos maiores objetivos do cálculo de camada limite é a determinação da força de atrito na parede. Ela pode ser obtida pela integração da tensão na parede τ_p que, de acordo com a lei de Newton, está relacionada a derivada normal da velocidade na parede. Chama-se coeficiente de atrito a tensão adimensionalizada pela pressão dinâmica:

$$C_{f_s} = \frac{\tau_{p_s}}{\frac{1}{2}\rho(v_e)^2} \quad (2.10.a)$$

$$C_{f_c} = \frac{\tau_{p_c}}{\frac{1}{2}\rho(v_e)^2} \quad (2.10.b)$$

Serão definidas a seguir, as espessuras características da camada limite. A espessura da camada limite δ é definida convencionalmente pela distância medida a partir da superfície onde a velocidade v_s equivale a uma certa fração da velocidade exterior; neste trabalho δ é o valor de x^3 para o qual se tem $v_s/v_e = 0,99$. As espessuras de deslocamento δ_s e δ_c , de quantidade de movimento θ_{ss} e θ_{cc} são formadas por integrais que levam em consideração os perfis de velocidade. Fisicamente, o espessura de deslocamento representa a altura para onde seria necessário deslocar em cada



ponto a parede para manter a vazão inalterada no escoamento de fluido perfeito, e, do mesmo modo a espessura de quantidade de movimento representa a altura para onde seria necessário deslocar em cada ponto a parede para manter a fluxo da quantidade de movimento inalterado no escoamento de fluido perfeito. No caso de um escoamento incompressível, definem-se:

$$\delta_s = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_s}{v_e}\right) dx^3 \quad (2.11.a)$$

$$\delta_c = - \int_0^{\delta} \frac{v_c}{v_e} dx^3 \quad (2.11.b)$$

$$\theta_{ss} = \int_0^{\delta} \frac{v_s}{v_e} \left(1 - \frac{v_s}{v_e}\right) dx^3 \quad (2.12.a)$$

$$\theta_{cc} = - \int_0^{\delta} \left(\frac{v_c}{v_e}\right)^2 dx^3 \quad (2.12.b)$$

Definem-se também os parâmetros de forma H e H^* dos perfis de velocidade:

$$H = \frac{\delta_s}{\theta_{ss}} \quad (2.13.a)$$

$$H^* = \frac{\delta - \delta_s}{\theta_{ss}} \quad (2.13.b)$$

2.5 - Transformação das Equações:

2.5.1 - Introdução:

No caso da camada limite tridimensional é particularmente interessante fazer uso de transformações para as equações de camada limite de modo a seguir o crescimento da espessura da camada limite e de mantê-la

aproximadamente constante no espaço transformado. Para as camadas limites laminares bidimensionais, a transformação de Blasius ou a de Levy-Lees proposta por Blottner (1970) controlam efetivamente o crescimento da camada limite e sua análise é bastante simplificada. Para as camadas limites turbulentas, Werle & Verdon (1980) generalizaram a proposição de Blottner (1970) introduzindo a viscosidade turbulenta efetiva, resultando numa versão turbulenta da transformação de Levy-Lees. Uma das principais vantagens dessa transformação vem do fato de que as variáveis de escoamento são associadas aos valores locais na fronteira exterior da camada limite, o que impede, em particular, os perfis de velocidade transformados de mudar bruscamente na direção do escoamento, ao menos na ausência de um forte gradiente de pressão adverso.

Blottner (1975) fez um estudo bibliográfico de transformações correntemente utilizadas para as camadas limites tridimensionais. Neste estudo encontra-se, por exemplo, para as coordenadas cartesianas, a transformação utilizada por Blottner & Ellis (1973) para os escoamentos incompressíveis. Uma transformação muito semelhante foi proposta por Cebeci (1975). No trabalho de Cebeci (1975) duas funções corrente são introduzidas de modo a satisfazer a equação de continuidade.

Mesmo se essas transformações se comportarem relativamente bem para os escoamentos laminares ou turbulentos, elas não são completamente satisfatórias para todos os tipos de escoamento (laminar, turbulento e/ou de transição) e para todas as geometrias de turbomáquinas. Vatsa (1985) desenvolveu uma transformação mais eficaz para a extensão das variáveis de Levy-Lees para as equações de camada limite tridimensional. Essa transformação se reduz à de Blottner (1970) para as camadas limites bidimensionais. A transformação de Levy-Lees tem também a vantagem de permitir definir uma família de soluções similares que foi utilizada por Amorim (1991) como condições iniciais do escoamento. Neste trabalho será utilizada uma versão para escoamento incompressível desta transformação.

2.5.2 - Transformação de Levy-Lees Generalizada:

A transformação de Levy-Lees generalizada, para o caso de escoamento incompressível, utiliza as variáveis independentes definidas por:

$$\zeta = x^1 \quad (2.14.a)$$

$$\xi = x^2 \quad (2.14.b)$$

$$\eta = \frac{v_e^1 h_2}{\sqrt{2\zeta}} \rho x^3 \quad (2.14.c)$$

onde o índice e representa as variáveis consideradas externas à camada limite.

As novas variáveis dependentes são introduzidas por:

$$F = \frac{v^1}{v_e^1} \quad (2.15.a)$$

$$G = \frac{v^2}{v_{ref}} \quad (2.15.b)$$

onde v_{ref} pode ser v_e^1 ou v_e^2 . Nessas novas variáveis, uma velocidade normal transformada é definida pela integração da equação de continuidade (2.1):

$$V = -\sqrt{\frac{2\zeta}{|a|}} h_1 h_2 \left[\frac{\sqrt{2\zeta|a|}}{h_1 h_2} \int_0^\eta F d\eta \right]_{,\zeta} - \sqrt{\frac{2\zeta}{|a|}} h_1 h_2 \left[\frac{\sqrt{2\zeta|a|}}{(h_2)^2} \frac{v_{ref}}{v_e^1} \int_0^\eta G d\eta \right]_{,\zeta} \quad (2.16)$$

2.5.3 - Equações Transformadas:

Com as variáveis definidas acima nas equações de camada limite (2.1) a (2.3), pode-se escrever as equações de camada limite transformadas da seguinte forma:

Continuidade:

$$(V)_{,\eta} + K_{01}(F)_{,\zeta} + K_{02}(G)_{,\xi} + K_{03}F + K_{04}G = 0 \quad (2.17)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} & [(F)_{,\eta}]_{,\eta} - V(F)_{,\eta} + K_{11}F(F)_{,\zeta} + K_{12}G(F)_{,\xi} + K_{13}(F)^2 \\ & + K_{14}FG + K_{15}(G)^2 + K_{16}F + K_{17}G + K_{18} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\begin{aligned} & [(G)_{,\eta}]_{,\eta} - V(G)_{,\eta} + K_{21}F(G)_{,\zeta} + K_{22}G(G)_{,\xi} + K_{23}(G)^2 \\ & + K_{24}FG + K_{25}(F)^2 + K_{26}G + K_{27}F + K_{28} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Os coeficientes K_{mn} presentes nessas equações contém apenas as propriedades no exterior da camada limite e os fatores métricos. Para a equação de continuidade:

$$K_{01} = 2\zeta \quad (2.20.a)$$

$$K_{02} = 2\zeta \frac{h_1 v_{\text{ref}}}{h_2 v_e^1} \quad (2.20.b)$$

$$K_{03} = \frac{K_{01}}{C_1} (C_1)_{,\zeta} \quad (2.20.c)$$

$$K_{04} = 2\zeta \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{v_{\text{ref}}}{v_e^1} \right)_{,\xi} + \frac{K_{02}}{C_2} (C_2)_{,\xi} \quad (2.20.d)$$

Para as equações de Q.D.M. em ζ :

$$K_{11} = -2\zeta \quad (2.21.a)$$

$$K_{12} = -2\zeta \frac{h_1 v_{\text{ref}}}{h_2 v_e^1} \quad (2.21.b)$$

$$K_{13} = -2\zeta \frac{1}{v_e^1} (v_e^1)_{,\zeta} - 2\zeta h_1 \frac{g}{|a|} C_3 \quad (2.21.c)$$

$$K_{14} = -2\zeta \frac{h_1}{h_2} \frac{v_{\text{ref}}}{(v_e^1)^2} (v_e^1)_{,\xi} - 2\zeta \frac{v_{\text{ref}}}{v_e^1} \frac{h_1}{|a|} C_4 \quad (2.21.d)$$

$$K_{15} = -2\zeta \left(\frac{v_{\text{ref}}}{v_e^1} \right)^2 \frac{(h_1)^2}{|a|} C_5 \quad (2.21.e)$$

$$K_{16} = 4\zeta \frac{h_1 g}{\sqrt{|a|}} \frac{\omega^3}{v_e^1} \quad (2.21.f)$$

$$K_{17} = 4\zeta \frac{(h_1)^2 h_2}{\sqrt{|a|}} \frac{v_{\text{ref}}}{(v_e^1)^2} \omega^3 \quad (2.21.g)$$

$$K_{18} = -K_{13} - (K_{14} + K_{17})G_e - K_{15}(G_e)^2 - K_{16} \quad (2.21.h)$$

Para as equações de Q.D.M. em ξ :

$$K_{21} = -2\zeta \quad (2.22.a)$$

$$K_{22} = -2\zeta \frac{h_1}{h_2} \frac{v_{\text{ref}}}{v_e^1} \quad (2.22.b)$$

$$K_{23} = -2\zeta \frac{h_1}{h_2} \frac{1}{v_e^1} (v_{\text{ref}})_{,\xi} - 2\zeta \frac{h_1 g}{|a|} \frac{v_{\text{ref}}}{v_e^1} C_6 \quad (2.22.c)$$

$$K_{24} = -2\zeta \frac{1}{v_{\text{ref}}} (v_{\text{ref}})_{,\zeta} - 2\zeta \frac{h_1}{|a|} C_7 \quad (2.22.d)$$

$$K_{25} = -2\zeta \frac{h_1 h_2}{|a|} \frac{v_e^1}{v_{\text{ref}}} C_8 \quad (2.22.e)$$

$$K_{26} = -4\zeta \frac{h_1 g}{\sqrt{|a|}} \frac{\omega^3}{v_e^1} \quad (2.22.f)$$

$$K_{27} = -4\zeta \frac{(h_1)^2 h_2}{\sqrt{|a|}} \frac{\omega^3}{v_{\text{ref}}} \quad (2.22.g)$$

$$K_{28} = 2\zeta \frac{1}{v_{\text{ref}}} \left[(v_e^2)_{,\zeta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{v_e^2}{v_e^1} (v_e^2)_{,\xi} \right] - K_{25} - K_{27} + \quad (2.22.h)$$

$$\left(2\zeta \frac{h_1}{|a|} C_7 - K_{26} \right) G_e + \left(2\zeta \frac{h_1 g}{|a|} \frac{v_{\text{ref}}}{v_e^1} C_6 \right) (G_e)^2$$

E os termos de curvatura C_1 a C_8 são descritos por:

$$C_1 = \frac{\sqrt{|a|}}{h_1 h_2} \quad (2.23.a)$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{|a|}}{(h_2)^2} \quad (2.23.b)$$

$$C_3 = \frac{g}{(h_1)^2} (h_1)_{,\zeta} + (h_1)_{,\xi} - \frac{1}{h_1} (g)_{,\zeta} \quad (2.23.c)$$

$$C_4 = h_1 h_2 \left[1 + \left(\frac{g}{h_1 h_2} \right)^2 \right] (h_1)_{,\xi} - 2g (h_2)_{,\zeta} \quad (2.23.d)$$

$$C_5 = (g)_{,\xi} - h_2 (h_2)_{,\zeta} - \frac{g}{h_2} (h_2)_{,\xi} \quad (2.23.e)$$

$$C_6 = \frac{g}{(h_2)^2} (h_2)_{,\xi} - \frac{1}{h_2} (g)_{,\xi} + (h_2)_{,\zeta} \quad (2.23.f)$$

$$C_7 = h_1 h_2 \left[1 + \left(\frac{g}{h_1 h_2} \right)^2 \right] (h_2)_{,\zeta} - 2g (h_1)_{,\xi} \quad (2.23.g)$$

$$C_8 = (g)_{,\zeta} - h_1 (h_1)_{,\xi} - \frac{g}{h_1} (h_1)_{,\zeta} \quad (2.23.h)$$

2.6 - Propriedades das Equações de Camada Limite:

O cálculo de camada limite tridimensional gera propriedades e dificuldades que não são encontradas no cálculo de camada limite

bidimensional. A solução do escoamento não viscoso, necessária para o início do cálculo da camada limite, é claramente mais difícil de ser obtida que no caso bidimensional. A obtenção dos tensores métricos e de outras informações necessárias para estabelecer o sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais orientadas é também difícil para geometrias complexas. Os modelos de turbulência devem ser adaptados aos casos tridimensionais. Ainda mais, uma atenção particular deve ser dada à formulação diferencial de modo a levar em conta o princípio de zona de dependência e de influência, as quais são função da característica matemática das equações de camada limite tridimensional. No item seguinte discute-se a característica matemática dessas equações e apresentam-se as condições de contorno e de entrada necessárias, assim como a maneira de obtê-las.

2.6.1 - Característica Matemática das Equações:

A natureza matemática das equações de camada limite é examinada para o caso laminar tridimensional permanente e incompressível; no caso turbulento, o modelo de turbulência pode eventualmente modificar os resultados. Além do mais, admite-se que é possível escrever as equações numa referência ortonormal, mas o resultado da análise é idêntica às escritas numa referência qualquer.

$$(v^1)_{,1} + (v^2)_{,2} + (v^3)_{,3} = 0 \quad (2.24.a)$$

$$v^1(v^1)_{,1} + v^2(v^1)_{,2} + v^3(v^1)_{,3} = -\frac{1}{\rho}(p)_{,1} + (v(v^1)_{,3})_{,3} \quad (2.24.b)$$

$$v^1(v^2)_{,1} + v^2(v^2)_{,2} + v^3(v^2)_{,3} = -\frac{1}{\rho}(p)_{,2} + (v(v^2)_{,3})_{,3} \quad (2.24.c)$$

a) Características:

Para estudar as características do sistema, consideram-se apenas os termos com derivadas de ordem mais elevada de cada equação do sistema. Se λ denota a superfície característica, então o determinante característico, Q , para o sistema de equações (2.24) pode ser escrito por (Wang, 1971 e Krause, 1973):

$$Q = \begin{vmatrix} (\lambda)_{,1} & (\lambda)_{,2} & (\lambda)_{,3} \\ \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

onde:

$$\Delta = -\nu[(\lambda)_{,3}]^2 \quad (2.26)$$

A primeira linha de (2.25) é associada com a equação de continuidade e Δ é associado aos termos de difusão. Após o desenvolvimento de (2.25), tem-se:

$$Q = (\lambda)_{,3} \{ \nu[(\lambda)_{,3}]^2 \}^2 \quad (2.27)$$

A equação (2.27) mostra a propriedade conhecida de que as equações de camada limite são parabólicas, já que todas as raízes de $Q = 0$ são reais e idênticas. O termo $(\lambda)_{,3} = 0$ implica que todas as superfícies $\lambda(x_1, x_2) = 0$ normais à parede são superfícies características. Ele indica também que a velocidade de propagação de uma perturbação é infinita na direção x^3 . Porém, a presença de termos viscosos mascara o papel dos termos de convecção e para apreciar sua influência, estudam-se as sub-características do sistema formado pelas derivadas de ordem imediatamente inferior.

b) Sub-características:

As sub-características do sistema são obtidas ignorando os termos viscosos nas equações (2.24). O determinante característico é:

$$Q = \begin{vmatrix} (\lambda)_{,1} & (\lambda)_{,2} & (\lambda)_{,3} \\ \Delta^* & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^* & 0 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

onde

$$\Delta^* = v_1(\lambda)_{,1} + v_2(\lambda)_{,2} + v_3(\lambda)_{,3} \quad (2.29)$$

e Δ^* é associado aos termos de convecção. De (2.28):

$$Q = (\lambda)_{,3}(\Delta^*)^2 \quad (2.30)$$

O primeiro fator de (2.30) é o mesmo da equação (2.27). O segundo fator indica que as superfícies de corrente são as superfícies sub-características. A raiz $(\lambda)_{,3} = 0$ é ligada à equação da continuidade. Então as raízes $(\Delta^*)^2 = 0$ são ligadas aos termos de convecção das equações da Q.D.M.. Segundo Krause (1973), o sistema de equações assim constituído é hiperbólico. As perturbações são então transportadas ao longo das linha de corrente com a velocidade finita do escoamento em comparação com a velocidade infinita de difusão na direção normal à parede. Por conseqüência, os domínios de influência e de dependência podem ser identificados.

c) Domínios de Influência e de Dependência:

Apoiando-se nas sub-características e na natureza difusiva das equações segundo a normal à parede, determinam-se os domínios de

influência e de dependência de um ponto P representado na Figura 2.2. Uma perturbação introduzida no ponto P se propaga ao longo do eixo x^3 devido aos termos de difusão viscosa e ao longo das linhas de corrente na camada limite passando pela normal ao ponto perturbado. Pelo efeito de difusão, uma perturbação transportada ao longo de uma linha de corrente é transmitida ao longo das normais à parede passando por essa linha de corrente.

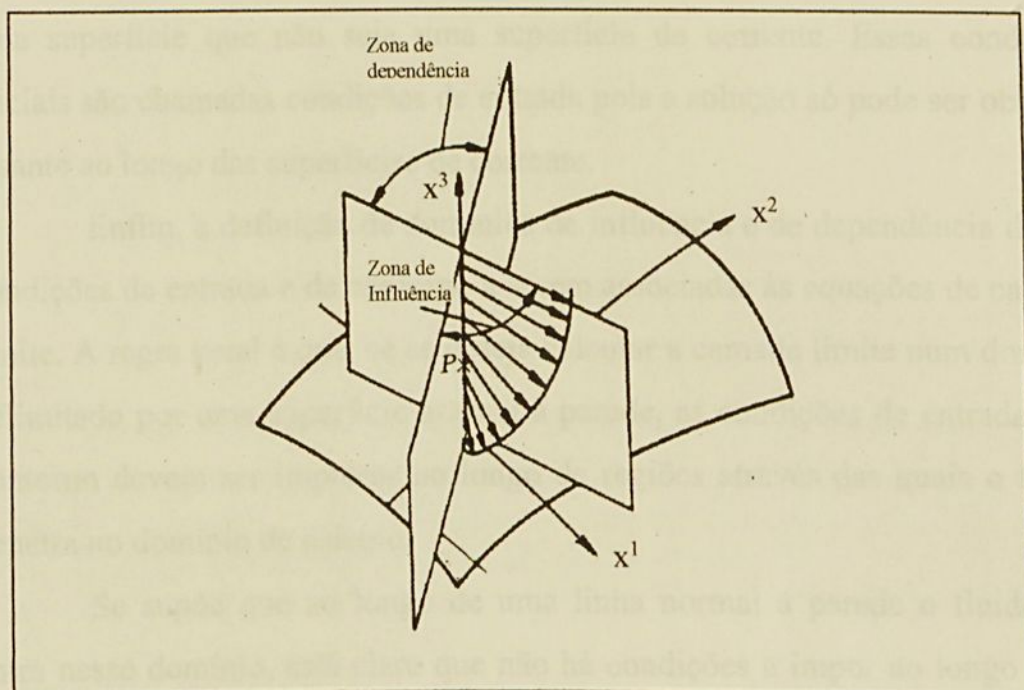


Figura 2.2 - Domínios de influência e de dependência do ponto P no interior da camada limite.

Os domínios de influência e de dependência são determinados por uma superfície de corrente definida por todas as linhas de corrente que passam pela normal à parede no ponto P. O domínio de dependência é definido pelo espaço varrido por todas as linhas verticais passando pela superfície de corrente a montante da linha em questão. Do mesmo modo, o domínio de influência é definido pelo espaço varrido por todas as linhas verticais que passam pela superfície de corrente a jusante da normal em questão. Desde que a informação é propagada ao longo das superfícies características, o cálculo das propriedades do escoamento sobre a normal em

questão depende de propriedades de escoamento a montante, no domínio de dependência. Do mesmo modo, as propriedades de escoamento sobre a normal em questão influenciam o escoamento a jusante, no domínio de influência. Assim, num algoritmo de cálculo passo a passo, as propriedades do escoamento devem ser conhecidas no domínio de dependência para permitir o cálculo do escoamento, não importando qual a linha vertical. Então, as condições iniciais do problema são todas as propriedades do escoamento sobre uma superfície que não seja uma superfície de corrente. Essas condições iniciais são chamadas condições de entrada pois a solução só pode ser obtida a jusante ao longo das superfícies de corrente.

Enfim, a definição de domínios de influência e de dependência dita as condições de entrada e de contorno a serem associadas às equações de camada limite. A regra geral é que, se se deseja calcular a camada limite num domínio delimitado por uma superfície normal à parede, as condições de entrada e de contorno devem ser impostas ao longo de regiões através das quais o fluido penetra no domínio de cálculo.

Se supõe que ao longo de uma linha normal à parede o fluido não entra nesse domínio, está claro que não há condições a impor ao longo dessa linha. Ao contrário, se o fluido entra no domínio ao longo de uma linha normal à parede, é necessário impor os perfis de velocidade $v^1(x^3)$ e $v^2(x^3)$ mas, em princípio, não é necessário precisar os perfis $v^3(x^3)$ pois eles são determinados da equação da continuidade que fornece uma condição de compatibilidade para a componente v^3 (Krause, 1973).

2.6.2 - Condições de Contorno:

As condições de contorno são as mesmas condições dos casos de camada limite bidimensional. As condições na parede ($x^3 = 0$) tomam a forma:

$$v^i(x^1, x^2, 0) = 0 \quad , \quad i=1, 2, 3 \quad (2.31)$$

No exterior da camada limite ($x^3 = \delta$), as condições se escrevem:

$$v^1(x^1, x^2, \delta) = v_c^1(x^1, x^2) \quad (2.32.a)$$

$$v^2(x^1, x^2, \delta) = v_c^2(x^1, x^2) \quad (2.32.b)$$

As mesmas condições de contorno para as variáveis transformadas introduzidas na seção 2.5.2, são representadas, na parede ($\eta = 0$), por:

$$F(\zeta, \xi, \eta) = 0 \quad (2.33.a)$$

$$G(\zeta, \xi, \eta) = 0 \quad (2.33.b)$$

$$V(\zeta, \xi, \eta) = 0 \quad (2.33.c)$$

e, no exterior da camada limite ($\eta = \eta_\infty$), por:

$$F(\zeta, \xi, \eta_\infty) = 1 \quad (2.34.a)$$

$$G(\zeta, \xi, \eta_\infty) = \frac{v_c^2}{v_{ref}} \quad (2.34.b)$$

A especificação das condições de contorno exige a especificação das velocidades no exterior da camada limite, v_c^1 e v_c^2 . Estas variáveis, obtidas frequentemente por um cálculo do escoamento exterior não viscoso, devem ser interpoladas para os pontos da malha de camada limite.

2.6.3 – Condições de Entrada:

Para um escoamento incompressível as condições de entrada são as velocidades v^1 e v^2 ao longo dos planos de entrada do escoamento. Estas grandezas são definidas a partir de dados experimentais ou estabelecidas a partir de relações analíticas quando elas não são conhecidas. Algumas aproximações alternativas para determinar estes perfis de velocidade na entrada serão apresentadas a seguir.

a) Perfis de Velocidade Semi-empíricos

Muitos autores introduziram procedimentos para determinar os perfis de velocidades a montante de uma camada limite, nos casos laminar e/ou



turbulento, eventualmente com a possibilidade de impor a transição pela utilização de um fator de intermitência.

Com o objetivo de obter as soluções de entrada, um sistema de coordenadas ortogonais de superfície é empregado. Uma das coordenadas é definida ao longo da linha de corrente do escoamento exterior à camada limite, a outra coordenada é perpendicular a esta. Os perfis de velocidade na direção da linha de corrente do escoamento exterior são estabelecidos a partir dos métodos desenvolvidos para as camadas limites bidimensionais, e os perfis de velocidade na direção transversal são estabelecidos a partir de uma família de perfis apropriados.

Os perfis de velocidade para escoamentos laminares na direção do escoamento exterior podem ser obtidos pelo método desenvolvido por Polhausen (Schlichting, 1979) e modificado por Launder (1964) para tratar os escoamentos fortemente acelerados. No caso de um escoamento turbulento, Whitfield (1979) desenvolveu algumas expressões para os perfis de velocidades. Para o escoamento transversal, os perfis de velocidade propostos por Mager (1952) podem ser utilizados para completar a especificação dos perfis de velocidade iniciais.

b) Solução por um Plano de Simetria

Do fato de que não há escoamento através de um plano de simetria, este plano é uma superfície característica. Considerando o esquema apresentado na Figura 2.3, pode-se escrever que v^2 é igual a zero no plano de simetria $x^2 = 0$, que $v^2(x^1, x^2, x^3) = -v^2(x^1, -x^2, x^3)$ e que $(v^2)_2 \neq 0$ em $x^2 = 0$. As outras variáveis são finitas quando $x^2 = 0$, mas suas derivadas com relação a x^2 são nulas, devido à simetria. Uma vez que uma simetria geométrica é admitida, os elementos métricos $a_{\alpha\beta}$ também são nulos. Se as coordenadas são ortogonais os fatores métricos K_{mn} definidos nas equações (2.6) e (2.8) se simplificam enormemente porque o termo $a_{12} = a_{21}$ do tensor métrico de superfície se

anula, e neste caso ainda, na vizinhança da linha de simetria, $(a_{12})_2 = 0$ para $x^2 = 0$.

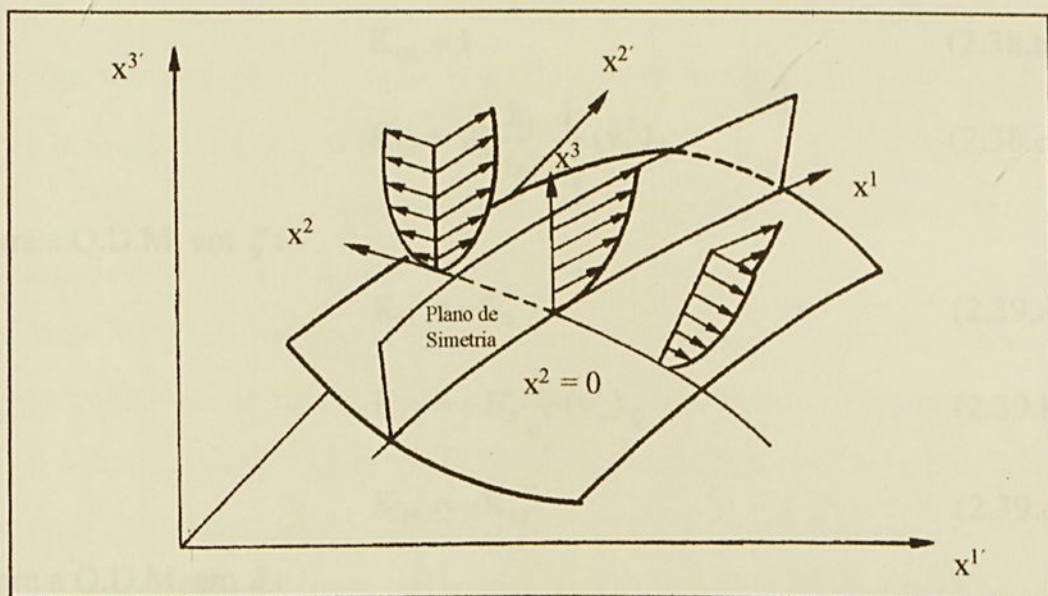


Figura 2.3 – Escoamento em um plano de simetria em um sistema de coordenadas localmente ortogonal em $x^2 = 0$.

No plano de simetria a equação da quantidade de movimento em x^2 é singular porque v^2 e $(p)_2$ são iguais a zero. Entretanto, a derivada com relação a x^2 elimina a singularidade desta equação. Levando em conta todas estas considerações e com $\bar{\omega} = 0$, as equações de camada limite transformadas (2.17) a (2.19) se reduzem, para o plano de simetria $x^2 = 0$, a:

Continuidade:

$$(V)_{,\eta} + K_{01}(F)_{,\zeta} + K_{03}F + K_{04}G^* = 0 \quad (2.35)$$

Q.D.M. em ζ :

$$[(F)_{,\eta}]_{,\eta} - V(F)_{,\eta} + K_{11}F(F)_{,\zeta} + K_{13}(F)^2 + K_{18} = 0 \quad (2.36)$$

Q.D.M. em ξ :

$$[(G^*)_{,\eta}]_{,\eta} - V(G^*)_{,\eta} + K_{21}F(G^*)_{,\zeta} + K_{23}(G^*)^2 + K_{24}FG^* + K_{28} = 0 \quad (2.37)$$

onde $G^* = (G)_{,\xi}$ e os coeficientes K_{mn} são definidos por:

para a equação de continuidade:

$$K_{01} = 2\zeta \quad (2.38.a)$$

$$K_{03} = 1 \quad (2.38.b)$$

$$K_{04} = 2\zeta \frac{h_1}{h_2} \frac{1}{v_e^1} (v_e^2)_{,\xi} \quad (2.38.c)$$

para a Q.D.M. em ζ :

$$K_{11} = -2\zeta \quad (2.39.a)$$

$$K_{13} = -2\zeta \frac{1}{v_e^1} (v_e^1)_{,\zeta} \quad (2.39.b)$$

$$K_{18} = -K_{13} \quad (2.39.c)$$

para a Q.D.M. em ξ :

$$K_{21} = -2\zeta \quad (2.40.a)$$

$$K_{23} = -2\zeta \frac{h_1}{h_2} \frac{1}{v_e^1} (v_e^2)_{,\xi} \quad (2.40.b)$$

$$K_{24} = -2\zeta \left[\ln((v_e^2)_{,\xi}) \right]_{,\zeta} \quad (2.40.c)$$

$$K_{28} = -(K_{23} + K_{24}) \quad (2.40.d)$$

e

$$|a| = a_{11}a_{22} \quad (2.41)$$

As condições de contorno são as mesmas definidas nas equações (2.33) e (2.34), exceto a variável G que é substituída por uma nova variável G^* .

c) Soluções Similares Locais:

O conceito de soluções similares locais foi largamente utilizado na análise de camada limite bidimensional para obter as condições iniciais. Neste caso, a solução das equações de Falkner-Skan com um gradiente de pressão

especificado é a opção mais utilizada. Para as equações transformadas de camada limite tridimensional escritas em um sistema de coordenadas não ortogonais, a obtenção de soluções iniciais a partir de soluções similares locais pode ser vislumbrada. Para isso, considera-se que as condições de entrada são funções somente de ζ e de η ao longo de uma fronteira ξ constante e de ξ e de η ao longo de uma fronteira ζ constante.

Esta condição implica que os perfis das variáveis dependentes são invariantes nas coordenadas transformadas até os planos de entrada. A hipótese soluções similares locais não pode então prever corretamente as soluções iniciais no caso em que a estória do escoamento a montante não tem uma influência muito grande sobre o desenvolvimento da camada limite. Por exemplo, se o escoamento é acelerado na zona de entrada. A precisão das soluções similares locais é melhorada no caso onde o escoamento é laminar até os planos de entrada porque neste caso a transformação de Levy-Lees representa corretamente o crescimento da camada limite.

Uma análise das equações transformadas de camada limite tridimensional (2.17) a (2.19) permite rescrever estas equações para a hipótese de soluções similares locais ao longo de uma fronteira ξ constante:

Continuidade:

$$(V)_{,\eta} + K_{01}(F)_{,\zeta} + K_{03}F + K_{04}G = 0 \quad (2.42)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} & \left[(F)_{,\eta} \right]_{,\eta} - V(F)_{,\eta} + K_{11}F(F)_{,\zeta} + K_{13}(F)^2 + K_{14}FG + \\ & K_{15}(G)^2 + K_{16}F + K_{17}G + K_{18} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\begin{aligned} & \left[(G)_{,\eta} \right]_{,\eta} - V(G)_{,\eta} + K_{21}F(G)_{,\zeta} + K_{23}(G)^2 + K_{24}FG + \\ & K_{25}(F)^2 + K_{26}G + K_{27}F + K_{28} = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os coeficientes K_{mn} são os mesmos do caso geral e são dados pelas equações (2.20) a (2.22) e as condições de contorno são expressas por (2.33) e (2.34).

Da mesma maneira, para a hipótese de soluções similares locais ao longo de uma fronteira ζ constante as equações são escritas por:

Continuidade:

$$(V)_{,\eta} + K_{02}(G)_{,\xi} + K_{03}F + K_{04}G = 0 \quad (2.45)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} & [(F)_{,\eta}]_{,\eta} - V(F)_{,\eta} + K_{12}G(F)_{,\xi} + K_{13}(F)^2 + K_{14}FG + \\ & K_{15}(G)^2 + K_{16}F + K_{17}G + K_{18} = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\begin{aligned} & [(G)_{,\eta}]_{,\eta} - V(G)_{,\eta} + K_{22}G(G)_{,\xi} + K_{23}(G)^2 + K_{24}FG + \\ & K_{25}(F)^2 + K_{26}G + K_{27}F + K_{28} = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Os coeficientes K_{mn} são, como no caso anterior, dadas pelas equações (2.20) a (2.22) e as condições de contorno são também idênticas.

2.7 Modelos de Turbulência

No caso de escoamento laminar, o sistema de equações formado pela equação de continuidade e as equações de Q.D.M. constituem um sistema fechado de equações para as três componentes da velocidade pois, após a aproximação da camada limite, a distribuição de pressões é conhecida. Para um escoamento turbulento, o sistema de equações não é fechado porque o tensor de Reynolds

introduz novas incógnitas. Um modelo de turbulência deve ser utilizado para calcular esses termos e para fechar o sistema de equações de camada limite.

A maior parte dos métodos de cálculo da camada limite turbulenta tridimensional emprega modelos de turbulência definidos a partir de uma simples extensão de modelos bidimensionais e, freqüentemente faz-se a hipótese de que o vetor de tensão turbulenta é alinhado com o vetor gradiente de velocidade de escoamento médio (nesse caso, a viscosidade turbulenta é dita isotrópica).

Uma aplicação prática dos principais modelos de turbulência comumente utilizados foi feita por Lakshminarayana (1986). Ele fez a aplicação de modelos algébricos a uma equação e a duas equações, ARSM e FRMS, respectivamente.

Os dados experimentais de van der Berg et al (1975) e de Bradshaw e Pontikos (1985), indicam que a tridimensionalidade do escoamento afeta a estrutura da turbulência. Nessas duas experiências tão próximas, os autores analisam numa asa com flecha infinita o desenvolvimento da tridimensionalidade de uma camada limite inicialmente bidimensional. Na medida em que o escoamento transversal se intensifica, foi observado que o comprimento de mistura na zona exterior da camada limite diminui e também que a relação entre a tensão turbulenta e a energia cinética turbulenta diminui.

Assim, com relação a uma camada limite bidimensional, há uma redução clara da intensidade da tensão turbulenta aparente. Além do mais, a direção do vetor tensão turbulenta não segue a do vetor gradiente de velocidade. A amplificação da tridimensionalidade se traduz por uma rotação do vetor gradiente de velocidade que deve acarretar com ela uma rotação igual à do vetor de tensão turbulenta, mas a experiência mostra que ela é menos rápida. Conclui-se então que a viscosidade efetiva não é isotrópica.

Por essa razão, os modelos clássicos de turbulência representam mal a física dos fenômenos. Isso não é necessariamente contraditório com o fato que esses modelos reproduzem corretamente o escoamento médio. Nas

experiências de van der Berg et al (1975), o escoamento é essencialmente guiado pela pressão e o modelo de turbulência não tem uma importância primordial. Além do mais, nas experiências onde a pressão tem um papel menos importante, os modelos clássicos com hipóteses sem justificativa teórica, conduzem a resultados muito corretos.

Rotta (1977) propôs uma relação para considerar uma viscosidade não isotrópica, ligada à direção do vetor velocidade. Porém, essa proposição não respeita o princípio de invariância galileana, e assim ela não é independente do sistema de coordenadas. Uma relação invariável foi obtida por van der Berg (1982) a partir de uma modelação de diferentes termos nas equações de transporte exatas. Essa proposição não foi validada no contexto de um método de cálculo prático. Cousteix et al (1981) realizaram um estudo da relação proposta por Rotta (1977), mas os resultados não são conclusivos. Do mesmo modo, a relação não isotrópica utilizada por Tassa et al (1982) não assegura uma melhora das previsões comparada ao caso de uma viscosidade isotrópica. Devido à falta de uma formulação não isotrópica satisfatória, os resultados mostrados neste trabalho são obtidos a partir de uma hipótese de viscosidade efetiva isotrópica.

Entre os modelos de turbulência com uma viscosidade isotrópica, o mais utilizado é o modelo algébrico, do tipo proposto por Cebeci e Smith (1974). Há exceções como os métodos NLR (Wesseling e Lindhout, 1972) e de Rastogi e Rodi (1978). O primeiro método resulta em duas equações de transporte modeladas para o tensor de Reynolds, a partir de um modelo proposto por Bradshaw (1971), baseado na equação de energia cinética turbulenta. O de Rastogi e Rodi (1978) utiliza o modelo de turbulência bem conhecido a duas equações k - ϵ , que resolve as equações de transporte modeladas para a energia cinética turbulenta k e a taxa de dissipação ϵ , mas o método é restrito ao escoamento incompressível num sistema de coordenadas polares cilíndricas ou cartesianas.

Johnston (1987) fez um teste com muitos modelos de turbulência, para o cálculo de um escoamento compressível turbulento tridimensional. Esses modelos compreendem: o modelo algébrico de Cebeci e Smith (1974), um modelo de uma equação, adaptado a partir do modelo proposto por Hasid e Poreh (1975) e uma versão, para baixos números de Reynolds, do modelo k - ϵ proposto por Chien (1982). Uma avaliação dos resultados indica que, contrariamente às expectativas, o aumento da complexidade dos modelos não é seguido de uma equivalente melhora na previsão do escoamento.

No caso de um cálculo de camada limite tridimensional turbulenta que se desenvolve sobre as pás de um rotor de turbomáquina, os efeitos da rotação contribuem para o desvio do escoamento médio, e modificam também a estrutura da turbulência. Para levar em conta os efeitos da rotação na estrutura da turbulência, o emprego de um modelo de turbulência de ordem elevada se faz necessário. Uma tentativa nessa direção foi feita por Zang e Lakshminarayana (1990) pela utilização de um modelo de turbulência ARSM/ k - ϵ combinados. As equações de camada limite e as equações de energia cinética turbulenta k e de dissipação ϵ são resolvidas de uma maneira não acoplada, e as equações do modelo ARSM são então resolvidas a partir dos valores de k e de ϵ . Uma primeira aplicação deste método a um cálculo de camada limite sobre as pás do rotor de um compressor axial permitiu uma melhor previsão das distribuições de velocidade sobre as pás, com relação aos modelos algébricos e k - ϵ . Esses primeiros resultados podem ser considerados como encorajadores se não levarmos em conta o enorme aumento da complexidade do cálculo.

Um modelo algébrico de viscosidade turbulenta foi adotado no presente trabalho. Esse tipo de modelo foi proposto inicialmente por Cebeci e Smith (1974) para o caso bidimensional. Uma extensão deste modelo para o caso de camada limite tridimensional com um sistema de coordenadas não ortogonais de superfície foi descrito por Cebeci et al (1977). O modelo

considera uma viscosidade turbulenta isotrópica definida em duas partes. Uma formulação do tipo comprimento de mistura foi utilizada na região interna da camada limite.

$$(\mu_t)_i = \rho (lm)^2 (v_T)_{,3} \quad (2.48)$$

onde a derivada da velocidade total e o comprimento de mistura são dados por

$$(v_T)_{,3} = \left[(v^1)_{,3}^2 + (v^2)_{,3}^2 + 2 \cos \vartheta (v^1)_{,3} (v^2)_{,3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

$$lm = \kappa x^3 \left(1 - e^{-x^3/A} \right) \quad (2.50)$$

onde κ é a constante de von Karman, geralmente considerada igual a 0,4. O coeficiente A na função de van Driest é definido por:

$$A = 26 \frac{\mu}{\rho v_w} \quad (2.51)$$

onde:

$$v_w = \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

$$\tau_p = \mu [(v_T)_{,3}]_{parede} \quad (2.53)$$

Na zona exterior da camada limite, a escala de comprimento do modelo de turbulência é modificada de acordo com a sugestão de Mellor e Herring (1977).

$$(\mu_t)_e = \chi \rho l_e \quad (2.54)$$

onde χ é a constante de Clauser, geralmente adotada como 0,016 e l_e é a escala de comprimento representativa da zona exterior da camada limite dada por:

$$l_e = \int_0^{\infty} x^3 (v_T)_{,3} dx^3 \quad (2.55)$$

Esse modelo de turbulência deve também ser escrito nas variáveis transformadas introduzidas na seção 2.5. Após alguns tratamentos algébricos, para a zona interna, o modelo é escrito por:

$$(\mu_t)_i = \sqrt{\text{Re}k^2\eta^2} \frac{\sqrt{2\zeta}}{h_2} \left(1 - e^{-\frac{x^3}{A}}\right)^2 \left[\left(S\right)^2 + \left(\frac{v_{ref}}{v_e^1}\right)^2 (T)^2 + \frac{2g}{h_1 h_2} \left(\frac{v_{ref}}{v_e^1}\right) ST \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

onde:

$$\frac{x^3}{A} = \frac{(\text{Re})^{\frac{1}{4}}}{26} \eta \left(\frac{\sqrt{2\zeta}}{\mu v_e^1 h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(v_e^1 S_p\right)^2 + \left(v_{ref} T_p\right)^2 + \frac{2g}{h_1 h_2} v_e^1 S_p v_{ref} T_p \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.57)$$

e o índice p representa as variáveis consideradas para $\eta = 0$. Do mesmo modo, na zona exterior da camada limite o modelo de turbulência nas variáveis transformadas se escreve por :

$$(\mu_t)_e = \sqrt{\text{Re}\chi} \frac{\sqrt{2\zeta}}{h_2} \int_0^{\eta} \eta \left[\left(S\right)^2 + \left(\frac{v_{ref}}{v_e^1}\right)^2 (T)^2 + \frac{2g}{h_1 h_2} \left(\frac{v_{ref}}{v_e^1}\right) ST \right]^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (2.58)$$

Capítulo 3

Solução Numérica

3.1 - Introdução

Estudos bibliográficos sobre os métodos existentes de cálculo de camada limite tridimensional foram feitos por Smith (1982), por Cousteix (1986) e por Humphreys e Lindhout (1988). Os métodos podem ser separados em duas classes distintas, em função do modo pelo qual as equações de escoamento são resolvidas, seja sob a forma diferencial seja sob a forma integral. Os métodos integrais são, do ponto de vista da informática, mais rápidos que os métodos diferenciais, uma vez que há somente duas coordenadas espaciais que intervêm. Entretanto, um certo número de relações auxiliares devem ser introduzidas para fechar o conjunto de equações integrais. Essas relações compreendem, usualmente, a consideração de famílias de perfis de velocidade nas duas direções mutuamente ortogonais escolhidas mais ou menos empiricamente. A precisão de um método integral é então limitada pela aplicabilidade das relações empíricas consideradas para a previsão do escoamento. Contrariamente, no caso onde as equações de escoamento estão na forma diferencial, nenhuma consideração é feita sob a forma dos perfis de velocidade. Por essa razão, os métodos diferenciais são, potencialmente, mais gerais que os métodos integrais. Um certo empirismo é todavia introduzida pela utilização de um modelo de turbulência para o tensor de Reynolds.

No presente trabalho o método de diferenças finitas é utilizado para a discretização das equações de camada limite tridimensional. O esquema escolhido e as equações discretizadas são mostrados na Seção 3.1. Após a

discretização das equações, sua solução numérica pode ser estudada. O procedimento utilizado é descrito na Seção 3.2

Se a aproximação por diferenças finitas for feita de maneira consistente a solução obtida das equações converge para a solução exata das equações diferenciais quando o passo de discretização tende a zero. A Figura 3.1 mostra alguns dos esquemas de diferenças finitas mais conhecidos.

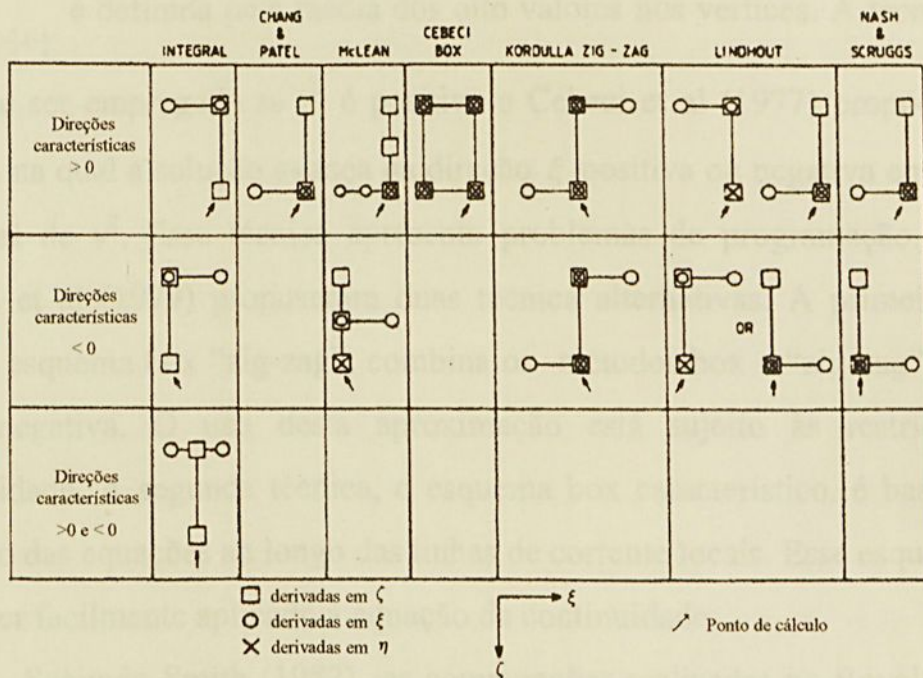


Figura 3.1 - Esquemas de diferenças finitas.

No presente trabalho utiliza-se o esquema box proposto por Cebeci et al (1977). Nesse esquema as equações são centradas em $P(\zeta_{i-\frac{1}{2}}, \xi_{j-\frac{1}{2}}, \eta_{k-\frac{1}{2}})$ e as

derivadas são dadas por:

$$\left[\left(\right)_{\zeta} \right]_p = \frac{1}{2\Delta\zeta} \left[\left(\right)_{i,j} + \left(\right)_{i,j-1} - \left(\right)_{i-1,j} - \left(\right)_{i-1,j-1} \right]_{k-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\left(\right)_{\xi} \right]_p = \frac{1}{2\Delta\xi} \left[\left(\right)_{i,j} + \left(\right)_{i-1,j} - \left(\right)_{i,j-1} - \left(\right)_{i-1,j-1} \right]_{k-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\left(\right)_{\eta} \right]_p = \frac{1}{4\Delta\eta} \left[\begin{array}{c} \left(\right)_{i,j,k} + \left(\right)_{i-1,j,k} + \left(\right)_{i,j-1,k} + \left(\right)_{i-1,j-1,k} - \\ \left(\right)_{i,j,k-1} - \left(\right)_{i-1,j,k-1} - \left(\right)_{i,j-1,k-1} - \left(\right)_{i-1,j-1,k-1} \end{array} \right]$$

onde

$$\Delta\zeta = \zeta_i - \zeta_{i-1} \quad , \quad \Delta\xi = \xi_j - \xi_{j-1} \quad , \quad \Delta\eta = \eta_k - \eta_{k-1}$$

e $\left(\right)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}$ é definida pela média dos oito valores nos vértices. A técnica box só pode ser empregada se v^2 é positiva e Cebeci et al (1977) propõem uma técnica na qual a solução avança na direção ξ positiva ou negativa em função do sinal de v^2 . Essa técnica apresenta problemas de programação. Assim, Cebeci et al (1979) propuseram duas técnicas alternativas. A primeira entre elas, o esquema box “zig-zag”, combina os métodos box e “zig-zag” quando v^2 é negativa. O uso desta aproximação está sujeito às restrições de estabilidade. A segunda técnica, o esquema box característico, é baseada na solução das equações ao longo das linhas de corrente locais. Esse esquema não pode ser facilmente aplicado à equação da continuidade.

Segundo Smith (1982) as comparações realizadas no Royal Aircraft Establishment (RAE) entre os três diferentes esquemas de Cebeci et al, permitiram concluir que o esquema box característico é o menos robusto e requer aproximadamente três vezes mais tempo de cálculo. A estratégia preferida pela RAE é a utilização do esquema box, com a utilização do esquema “zig-zag” na linha η constante quando isso é necessário.

3.2 – Discretização por Diferenças Finitas

Os conjuntos de equações obtidas nas seções 2.5.3 e 2.6.3 são os conjuntos de equações diferenciais parciais não lineares acopladas. Uma vez



que a característica primária dessas equações é parabólica, um procedimento numérico de avanço passo a passo pode ser utilizado para obter a solução completa das equações.

As equações diferenciais parciais que modelam o desenvolvimento da camada limite serão discretizadas e aproximadas pelas expressões de diferenças finitas apropriadas, antes que uma solução numérica dessas equações possa ser obtida.

A seguir, as equações completas de camada limite e também as equações discretizadas para um plano de simetria e em similares locais serão estabelecidas.

3.2.1 – Equações Transformadas de Camada Limite

Considerando-se as observações feitas no início deste capítulo, o esquema box proposto por Cebeci et al (1977) foi escolhido para discretizar as equações de camada limite neste trabalho.

Considera-se as equações transformadas (2.17) a (2.19) e as rescreve-se pelas equações diferenciais parciais de primeira ordem. Nesse sentido, as novas variáveis independentes $S(\zeta, \xi, \eta)$ e $T(\zeta, \xi, \eta)$ são introduzidas:

$$S = (F)_{,\eta} \quad (3.1)$$

$$T = (G)_{,\eta} \quad (3.2)$$

Assim, as equações transformadas (2.17) a (2.19) podem ser rescritas por:

Continuidade:

$$(V)_{,\eta} + K_{01}(F)_{,\zeta} + K_{02}(G)_{,\xi} + K_{03}F + K_{04}G = 0 \quad (3.3)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} & [\bar{\varepsilon}(F)_{,\eta}]_{,\eta} - VS + K_{11}F(F)_{,\zeta} + K_{12}G(F)_{,\xi} + K_{13}(F)^2 \\ & + K_{14}FG + K_{15}(G)^2 + K_{16}F + K_{17}G + K_{18} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\begin{aligned} & [\bar{\varepsilon}T]_{,\eta} - VT + K_{21}F(G)_{,\zeta} + K_{22}G(G)_{,\xi} + K_{23}(G)^2 \\ & + K_{24}FG + K_{25}(F)^2 + K_{26}G + K_{27}F + K_{28} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Os coeficientes K_{mn} mostrados nessas equações são dados pelas equações

$$(2.20) \text{ a } (2.22) \text{ e } \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_e}.$$

Agora, considera-se o esquema cúbico mostrado na figura 3.2. A malha no espaço transformado é composta por (I,J,K) pontos com os espaçamentos $(\Delta\zeta_i, \Delta\xi_j, \Delta\eta_k)$ entre eles nas três direções (ζ, ξ, η) . Os índices (i, j, k) são utilizados para representar os valores de uma quantidade em um ponto particular da malha. A solução das equações discretizadas de camada limite é conhecida em $(i - 1, j, k)$ para todos j e k , ou seja, no plano $\xi - \eta$. O cálculo avança a jusante do ponto (i, j, k) submetidos às condições de contorno impostas. Pode-se escrever:

$$\zeta_0 = 0 \quad , \quad \zeta_i = \zeta_{i-1} + \Delta\zeta_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (3.6.a)$$

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \xi_j = \xi_{j-1} + \Delta\xi_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.6.b)$$

$$\eta_0 = 0 \quad , \quad \eta_k = \eta_{k-1} + \Delta\eta_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.6.c)$$

As equações diferenciais representadas por (3.1) e (3.2) são aproximadas pelas médias no ponto $(\zeta_i, \xi_j, \eta_{k-\frac{1}{2}})$:

$$\frac{F_k^{i,j} - F_{k-1}^{i,j}}{\Delta\eta_k} = S_{k-\frac{1}{2}}^{i,j} \quad (3.7)$$

$$\frac{G_k^{i,j} - G_{k-1}^{i,j}}{\Delta\eta_k} = T_{k-\frac{1}{2}}^{i,j} \quad (3.8)$$

onde por exemplo: $S_{k-\frac{1}{2}}^{i,j} = \frac{1}{2}(S_k^{i,j} + S_{k-1}^{i,j})$

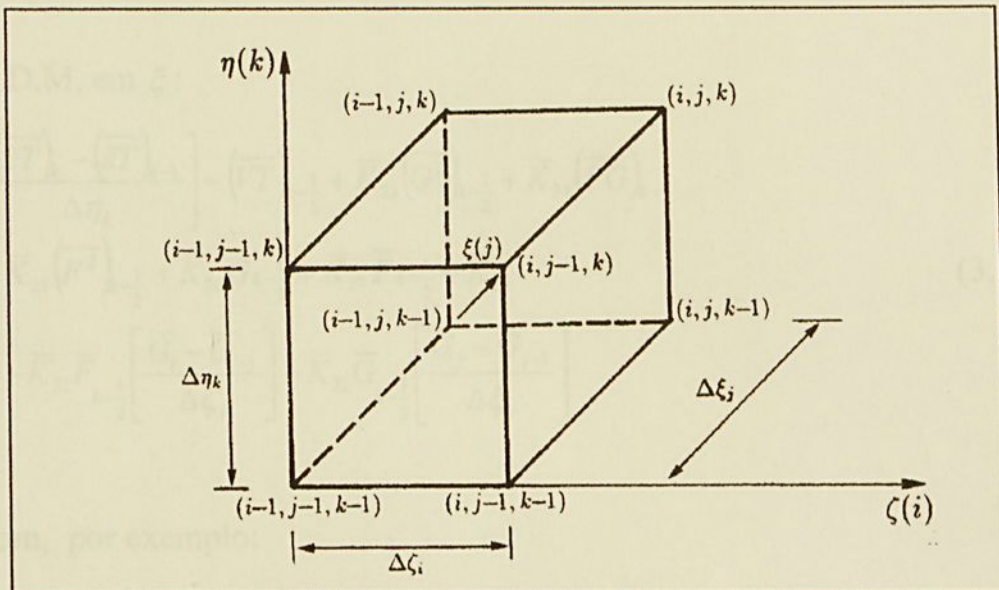


Figura 3.2 – Esquema box para as equações diferenciais.

Do mesmo modo, as equações (3.3) a (3.5) são aproximadas no ponto

$\left(\xi_{1-\frac{1}{2}}, \xi_{1-\frac{1}{2}}, \eta_{1-\frac{1}{2}} \right)$ do esquema box representado na Figura 3.2. Assim, as

equações discretizadas são escritas por:

Continuidade:

$$\left(\frac{\bar{V}_k - \bar{V}_{k-1}}{\Delta\eta_k} \right) + \bar{K}_{03} \bar{F}_{k-\frac{1}{2}} + \bar{K}_{04} \bar{G}_{k-\frac{1}{2}} = \bar{K}_{01} \left(\frac{\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1}}{\Delta\zeta_i} \right) - \bar{K}_{02} \left(\frac{\bar{G}_j - \bar{G}_{j-1}}{\Delta\xi_j} \right) \quad (3.9)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\overline{\varepsilon S})_k - (\overline{\varepsilon S})_{k-1}}{\Delta \eta_k} \right] - (\overline{VS})_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{13} (\overline{F^2})_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{14} (\overline{FG})_{k-\frac{1}{2}} \\ & + \overline{K}_{15} (\overline{G^2})_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{16} \overline{F}_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{17} \overline{G}_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{18} \\ & = -\overline{K}_{11} \overline{F}_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{\overline{F}_i - \overline{F}_{i-1}}{\Delta \zeta_i} \right] - \overline{K}_{12} \overline{G}_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{\overline{F}_j - \overline{F}_{j-1}}{\Delta \xi_j} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\overline{\varepsilon T})_k - (\overline{\varepsilon T})_{k-1}}{\Delta \eta_k} \right] - (\overline{VT})_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{23} (\overline{G^2})_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{24} (\overline{FG})_{k-\frac{1}{2}} \\ & + \overline{K}_{25} (\overline{F^2})_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{26} \overline{G}_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{27} \overline{F}_{k-\frac{1}{2}} + \overline{K}_{28} \\ & = -\overline{K}_{21} \overline{F}_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{\overline{G}_i - \overline{G}_{i-1}}{\Delta \zeta_i} \right] - \overline{K}_{22} \overline{G}_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{\overline{G}_j - \overline{G}_{j-1}}{\Delta \xi_j} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

com, por exemplo:

$$\overline{S}_k = \frac{1}{4} (S_k^{i,j} + S_k^{i,j-1} + S_k^{i-1,j} + S_k^{i-1,j-1})$$

$$\overline{F}_i = \frac{1}{4} (F_k^{i,j} + F_k^{i,j-1} + F_{k-1}^{i,j} + F_{k-1}^{i,j-1})$$

$$\overline{G}_j = \frac{1}{4} (G_k^{i,j} + G_k^{i,j-1} + G_{k-1}^{i,j} + G_{k-1}^{i,j-1})$$

$$\overline{K}_{11} = \frac{1}{4} [(K_{11})_j^i + (K_{11})_{j-1}^i + (K_{11})_j^{i-1} + (K_{11})_{j-1}^{i-1}]$$

As equações (3.7) a (3.11) são impostas para $k = 1, 2, \dots, K$, com $(F_k^{i-1,j-1}, G_k^{i-1,j-1}, V_k^{i-1,j-1}, S_k^{i-1,j-1}, T_k^{i-1,j-1})$, $(F_k^{i,j-1}, G_k^{i,j-1}, V_k^{i,j-1}, S_k^{i,j-1}, T_k^{i,j-1})$ e $(F_k^{i-1,j}, G_k^{i-1,j}, V_k^{i-1,j}, S_k^{i-1,j}, T_k^{i-1,j})$ conhecidos em $0 \leq k \leq K$. Então as equações (3.7) a (3.11) para $1 \leq k \leq K$ e as condições de contorno:

$$F_0^{i,j} = 0 \quad , \quad G_0^{i,j} = 0 \quad , \quad V_0^{i,j} = 0 \quad (3.12)$$

$$F_K^{i,j} = 1 \quad , \quad G_K^{i,j} = \frac{v_e^2}{v_{ref}} \quad (3.13)$$

constituem um sistema de equações algébricas não lineares implícitas de $5K + 5$ equações nas incógnitas $(F_k^{i,j}, G_k^{i,j}, V_k^{i,j}, S_k^{i,j}, T_k^{i,j})$. Para simplificar a notação, essas incógnitas serão representadas por $(F_k, G_k, V_k, S_k, T_k)$.

Após alguns tratamentos algébricos as equações discretizadas podem ser rescritas por:

$$F_k - F_{k-1} - \frac{\Delta\eta_k}{2}(S_k + S_{k-1}) = 0 \quad (3.14)$$

$$G_k - G_{k-1} - \frac{\Delta\eta_k}{2}(T_k + T_{k-1}) = 0 \quad (3.15)$$

Continuidade:

$$\left(\frac{V_k - V_{k-1}}{\Delta\eta_k} \right) + \left(\bar{K}_{03} + 2 \frac{\bar{K}_{01}}{\Delta\zeta_i} \right) F_{k-\frac{1}{2}} + \left(\bar{K}_{04} + 2 \frac{\bar{K}_{02}}{\Delta\xi_j} \right) G_{k-\frac{1}{2}} = Q_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\bar{\varepsilon}S)_k - (\bar{\varepsilon}S)_{k-1}}{\Delta\eta_k} \right] - (VS)_{k-\frac{1}{2}} + \left(\bar{K}_{13} + \frac{\bar{K}_{11}}{2\Delta\zeta_i} \right) (F^2)_{k-\frac{1}{2}} + \left(\bar{K}_{14} + \frac{\bar{K}_{12}}{2\Delta\xi_j} \right) (FG)_{k-\frac{1}{2}} \\ & + \bar{K}_{15} (G^2)_{k-\frac{1}{2}} + \left[\bar{K}_{16} + \frac{\bar{K}_{11}}{\Delta\zeta_i} F_{k-\frac{1}{2}}^{i,j-1} + \frac{\bar{K}_{12}}{2\Delta\xi_j} \left(G_{k-\frac{1}{2}}^{i,j-1} + G_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j} + G_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j-1} \right) \right] F_{k-\frac{1}{2}} \\ & + \left[\bar{K}_{17} + \frac{\bar{K}_{12}}{2\Delta\xi_j} \left(F_{k-\frac{1}{2}}^{i,j-1} + F_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j} + F_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j-1} \right) \right] G_{k-\frac{1}{2}} = O_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\bar{\varepsilon}T)_k - (\bar{\varepsilon}T)_{k-1}}{\Delta\eta_k} \right] - (VT)_{k-\frac{1}{2}} + \left(\bar{K}_{23} + \frac{\bar{K}_{22}}{2\Delta\xi_j} \right) (G^2)_{k-\frac{1}{2}} + \left(\bar{K}_{24} + \frac{\bar{K}_{21}}{2\Delta\zeta_i} \right) (FG)_{k-\frac{1}{2}} \\ & + \bar{K}_{25} (F^2)_{k-\frac{1}{2}} + \left[\bar{K}_{26} + \frac{\bar{K}_{22}}{\Delta\xi_j} G_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j} + \frac{\bar{K}_{21}}{2\Delta\zeta_i} \left(F_{k-\frac{1}{2}}^{i,j-1} + F_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j} + F_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j-1} \right) \right] G_{k-\frac{1}{2}} \\ & + \left[\bar{K}_{27} + \frac{\bar{K}_{21}}{2\Delta\zeta_i} \left(G_{k-\frac{1}{2}}^{i,j-1} + G_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j} + G_{k-\frac{1}{2}}^{i-1,j-1} \right) \right] F_{k-\frac{1}{2}} = P_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $O_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, $P_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, $Q_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ só contém grandezas conhecidas.

3.2.2 – Equações de Camada Limite para um Plano de Simetria

As equações a discretizar nesse caso são as equações (2.35) a (2.37) e, do mesmo modo que para as equações completas de camada limite, introduzem-se as variáveis independentes S definidas pela equação (3.1) e T^* é definida por :

$$T^* = (G^*)_{,\eta} \quad (3.19)$$

onde $G^* = (G)_{,\xi}$. Assim, as equações (2.35) a (2.37) são rescritas como equações diferenciais de primeira ordem por:

Continuidade:

$$(V)_{,\eta} + K_{01}(F)_{,\zeta} + K_{03}F + K_{04}G^* = 0 \quad (3.20)$$

Q.D.M. em ζ :

$$[\bar{\epsilon}S]_{,\eta} - VS + K_{11}F(F)_{,\zeta} + K_{13}(F)^2 + K_{18} = 0 \quad (3.21)$$

Q.D.M. em ξ :

$$[\bar{\epsilon}T^*]_{,\eta} - VT^* + K_{21}F(G^*)_{,\zeta} + K_{23}(G)^2 + K_{24}FG^* + K_{28} = 0 \quad (3.22)$$

Os coeficientes K_{mn} presentes nessas equações são dados pelas equações (2.38) a (2.40). Para discretizar essas equações considera-se o esquema simplificado representado na Figura 3.3.

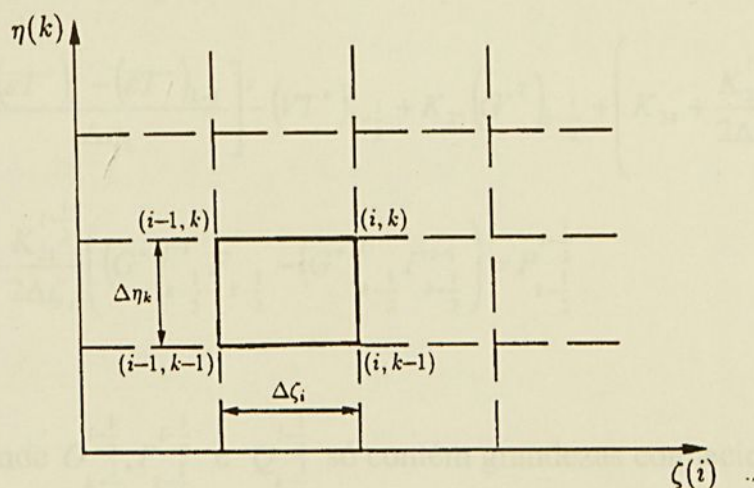


Figura 3.3 – Esquema simplificado para Plano de Simetria.

As equações diferenciais (3.1) e (3.19) são aproximadas no ponto $(\zeta_i, \eta_{k-\frac{1}{2}})$:

$$F_k - F_{k-1} - \frac{\Delta \eta_k}{2} (S_k + S_{k-1}) = 0 \quad (3.23)$$

$$G_k^* - G_{k-1}^* - \frac{\Delta \eta_k}{2} (T_k^* + T_{k-1}^*) = 0 \quad (3.24)$$

e as equações (3.20) a (3.22) são aproximadas no ponto $(\zeta_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{k-\frac{1}{2}})$. Após alguns tratamentos algébricos obtém-se:

Continuidade:

$$\left(\frac{V_k - V_{k-1}}{\Delta \eta_k} \right) + \left(K_{03} + 2 \frac{K_{01}^{i-\frac{1}{2}}}{\Delta \zeta_i} \right) F_{k-\frac{1}{2}} + K_{04} G_{k-\frac{1}{2}}^* = Q_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\left[\frac{(\bar{\varepsilon}S)_k - (\bar{\varepsilon}S)_{k-1}}{\Delta \eta_k} \right] - (VS)_{k-\frac{1}{2}} + \left(K_{13} + \frac{K_{11}^{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta \zeta_i} \right) (F^2)_{k-\frac{1}{2}} = O_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Q.D.M. em ξ :

$$\left[\frac{(\overline{\varepsilon T^*})_k - (\overline{\varepsilon T^*})_{k-1}}{\Delta \eta_k} \right] - (VT^*)_{k-\frac{1}{2}} + K_{23} (G^{*2})_{k-\frac{1}{2}} + \left(K_{24} + \frac{K_{21}^{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta \zeta_i} \right) (FG^*)_{k-\frac{1}{2}} + \frac{K_{21}^{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta \zeta_i} \left((G^*)_{k-\frac{1}{2}}^{i-1} F_{k-\frac{1}{2}} - (G^*)_{k-\frac{1}{2}}^i F_{k-\frac{1}{2}}^{i-1} \right) = P_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

onde $O_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}, P_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$ e $Q_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$ só contém grandezas conhecidas.

3.2.3 – Equação de Camada Limite em Similares Locais

Essas equações foram estabelecidas no Capítulo 2 e, no presente trabalho, elas constituem dois conjuntos de equações. O primeiro conjunto de equações foi definido ao longo de uma fronteira ξ constante. Ele é constituído pelas equações (2.42) a (2.44) e elas são discretizadas pelo mesmo esquema de diferenças finitas utilizado para um plano de simetria. As equações do escoamento discretizadas resultantes são dadas por:

Continuidade:

$$\left(\frac{V_k - V_{k-1}}{\Delta \eta_k} \right) + \left(K_{03} + 2 \frac{K_{01}^{i-\frac{1}{2}}}{\Delta \zeta_i} \right) F_{k-\frac{1}{2}} + K_{04} G_{k-\frac{1}{2}} = Q_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\left[\frac{(\bar{\varepsilon}S)_k - (\bar{\varepsilon}S)_{k-1}}{\Delta\eta_k} \right] - (VS)_{k-\frac{1}{2}} + \left(K_{13} + \frac{K_{11}^{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta\zeta_i} \right) (F^2)_{k-\frac{1}{2}} + K_{14}(FG)_{k-\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

$$+ K_{15}(G^2)_{k-\frac{1}{2}} + K_{16}F_{k-\frac{1}{2}} + K_{17}G_{k-\frac{1}{2}} = O_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$$

Q.D.M. em ξ :

$$\left[\frac{(\bar{\varepsilon}T)_k - (\bar{\varepsilon}T)_{k-1}}{\Delta\eta_k} \right] - (VT)_{k-\frac{1}{2}} + K_{23}(G^2)_{k-\frac{1}{2}} + \left(K_{24} + \frac{K_{21}^{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta\zeta_i} \right) (FG)_{k-\frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

$$+ K_{25}(F^2)_{k-\frac{1}{2}} + K_{27}F_{k-\frac{1}{2}} + K_{26}G_{k-\frac{1}{2}} + \frac{K_{21}^{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta\zeta_i} \left(G_{k-\frac{1}{2}}^{i-1} F_{k-\frac{1}{2}} - G_k^i dF_{k-\frac{1}{2}}^{i-1} \right) = P_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$$

onde $O_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$, $P_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$ e $Q_{k-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$ só contém grandezas conhecidas.

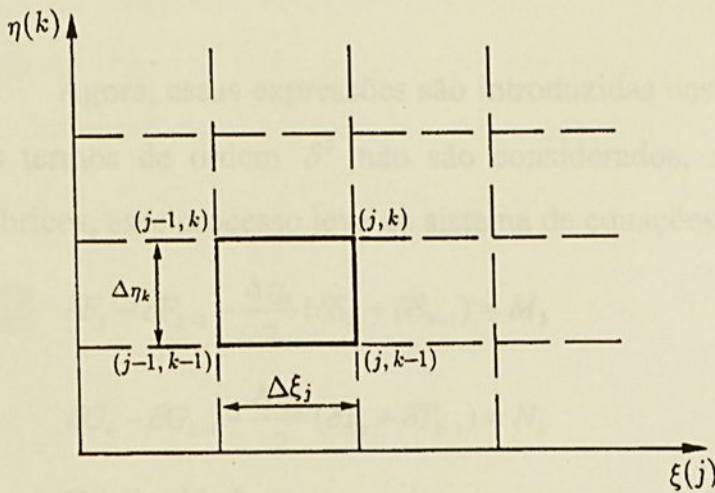


Figura 3.4 – Esquema simplificado para um plano ζ constante.

O segundo conjunto de equações definido ao longo de uma fronteira ζ constante é constituído pelas equações (2.45) a (2.47), que são discretizadas pelo esquema de diferenças finitas representado na figura 3.4, a partir dos mesmos processos empregados no caso anterior. As equações resultantes não são mostradas.

3.3 - Solução Numérica

As equações (3.14) a (3.18) obtidas após a discretização das equações de camada limite constituem um sistema de equações algébricas não lineares acopladas de $5K + 5$ equações nas incógnitas $(F_k, G_k, V_k, S_k, T_k)$. Esse sistema de equações pode ser linearizado pelo método de Newton. Para isso introduzem-se as (n) iterações sobre as variáveis desconhecidas e escrevem-se as correções no ponto (i, j, k) por:

$$F_k^{(n+1)} = F_k^{(n)} + \delta F_k^{(n)} \quad , \quad G_k^{(n+1)} = G_k^{(n)} + \delta G_k^{(n)} \quad (3.31.a)$$

$$V_k^{(n+1)} = V_k^{(n)} + \delta V_k^{(n)} \quad , \quad S_k^{(n+1)} = S_k^{(n)} + \delta S_k^{(n)} \quad (3.31.b)$$

$$T_k^{(n+1)} = T_k^{(n)} + \delta T_k^{(n)} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.31.c)$$

Agora, essas expressões são introduzidas nas equações (3.14) a (3.18) e os termos de ordem δ^2 não são considerados, Após alguns tratamentos algébricos, esse processo leva ao sistema de equações lineares abaixo:

$$\delta F_k - \delta F_{k-1} - \frac{\Delta \eta_k}{2} (\delta S_k + \delta S_{k-1}) = M_k \quad (3.32)$$

$$\delta G_k - \delta G_{k-1} - \frac{\Delta \eta_k}{2} (\delta T_k + \delta T_{k-1}) = N_k \quad (3.33)$$

Continuidade

$$\beta_1 \delta V_k + \beta_2 \delta F_k + \beta_3 \delta G_k + \beta_4 \delta V_{k-1} + \beta_5 \delta F_{k-1} + \beta_6 \delta G_{k-1} = Q_k \quad (3.34)$$

Q.D.M. em ζ :

$$\begin{aligned} \theta_1 \delta S_k + \theta_2 \delta V_k + \theta_3 \delta F_k + \theta_4 \delta G_k + \\ \theta_5 \delta S_{k-1} + \theta_6 \delta V_{k-1} + \theta_7 \delta F_{k-1} + \theta_8 \delta G_{k-1} = O_k \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\delta_k = \begin{bmatrix} \delta F_k \\ \delta G_k \\ \delta V_k \\ \delta S_k \\ \delta T_k \end{bmatrix} \quad R_k = \begin{bmatrix} O_k \\ P_k \\ Q_k \\ M_k \\ N_k \end{bmatrix} \quad 0 \leq k \leq K \quad (3.40)$$

A solução para $k = 0$ é dada por

$$B_0 \delta_0 + C_0 \delta_1 = R_0 \quad (3.41)$$

para satisfazer as condições de contorno, impõe-se:

$$\delta F_0 = 0 \text{ nas equações (3.35), então: } B_0(1,1) = 1 \text{ e } O_0 = 0$$

$$\delta G_0 = 0 \text{ nas equações (3.36), então: } B_0(2,2) = 1 \text{ e } P_0 = 0$$

$$\delta V_0 = 0 \text{ nas equações (3.34), então: } B_0(3,3) = 1 \text{ e } Q_0 = 0$$

Assim, as matrizes B_0 , C_0 e R_0 podem ser escritas por:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_0 \\ N_0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A solução para $0 \leq k \leq K-1$ é dada por:

$$A_k \delta_{k-1} + B_k \delta_k + C_k \delta_{k+1} = R_k \quad (3.43)$$

Assim, as matrizes A_k , B_k , C_k e R_k podem ser escritas por:

$$A_k = \begin{bmatrix} (\theta_7)_k & (\theta_8)_k & (\theta_6)_k & (\theta_5)_k & 0 \\ (\gamma_7)_k & (\gamma_8)_k & (\gamma_6)_k & 0 & (\gamma_5)_k \\ (\beta_5)_k & (\beta_6)_k & (\beta_4)_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44.a)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} (\theta_3)_k & (\theta_4)_k & (\theta_2)_k & (\theta_1)_k & 0 \\ (\gamma_3)_k & (\gamma_4)_k & (\gamma_2)_k & 0 & (\gamma_1)_k \\ (\beta_2)_k & (\beta_3)_k & (\beta_1)_k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.44.b)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad R_k = \begin{bmatrix} O_k \\ P_k \\ Q_k \\ M_k \\ N_k \end{bmatrix} \quad (3.44.c)$$

A solução para $k = K$ é dada por:

$$A_K \delta_{K-1} + B_K \delta_K = R_K \quad (3.45)$$

para satisfazer as condições de contorno impõe-se:

$$\delta F_K = 0 \text{ nas equações (3.32), então: } B_K(4,1) = 1 \text{ e } M_K = 0$$

$$\delta G_K = 0 \text{ nas equações (3.33), então: } B_K(5,2) = 1 \text{ e } N_0 = 0$$

Finalmente, as matrizes A_K , B_K e R_K podem ser escritas por:

$$A_K = \begin{bmatrix} (\theta_7)_k & (\theta_8)_k & (\theta_6)_k & (\theta_5)_k & 0 \\ (\gamma_7)_k & (\gamma_8)_k & (\gamma_6)_k & 0 & (\gamma_5)_k \\ (\beta_5)_k & (\beta_6)_k & (\beta_4)_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46.a)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} (\theta_3)_k & (\theta_4)_k & (\theta_2)_k & (\theta_1)_k & 0 \\ (\gamma_3)_k & (\gamma_4)_k & (\gamma_2)_k & 0 & (\gamma_1)_k \\ (\beta_2)_k & (\beta_3)_k & (\beta_1)_k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_k = \begin{bmatrix} O_K \\ P_K \\ Q_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46.b)$$

O sistema de equações tridiagonal por blocos (3.38) será resolvido por uma rotina proposta por Anderson et al (1984).

A partir de uma linha em $x^2 = \text{constante}$, o processo de solução das equações mostradas acima avança na direção x^1 . Uma vez que uma forma linearizada das equações é resolvida, os cálculos são repetidos para cada estação x^1 até que um critério de convergência seja satisfeito. Nos cálculos de camada limite um parâmetro proporcional ao cisalhamento na parede é freqüentemente utilizado como critério de convergência.

Neste trabalho, para um escoamento laminar, o cálculo é parado quando:

$$|\delta S_p| < c_1$$

Um valor típico para c_1 é 10^{-4} . O índice p representa o valor na parede. Para um escoamento turbulento, o critério de convergência é dado por:

$$\left| \frac{\delta S_p}{S_p + \frac{\delta S_p}{2}} \right| < c_2$$

onde um valor típico de c_2 é 10^{-2} .

O procedimento mostrado acima consiste em resolver as equações de camada limite de modo direto, onde a solução é guiada pela distribuição da pressão no exterior da camada limite. Em muitos casos de interesse prático, o descolamento da camada limite é inevitável. O presente método não permite o

cálculo do escoamento nas regiões com descolamento e nos primeiros sinais de descolamento o cálculo pára.

O descolamento numa camada limite tridimensional pode ser observado no cálculo de diferentes maneiras. Pode ser devido a uma causa já presente nos cálculos bidimensionais. É o caso em que o coeficiente de atrito tende a zero. O mesmo ocorre no caso de uma convergência das linhas de corrente, instabilidades numéricas podem boquear o cálculo mesmo antes do descolamento físico. Quando o escoamento é desviado completamente para a direção transversal o cálculo pode igualmente ser bloqueado. Esse caso não corresponde necessariamente a um descolamento e não deve ser confundido com os precedentes.

Para tratar as regiões com descolamento, é possível utilizar um método inverso para o cálculo de camada limite tridimensional. Delery e Formery (1983) mostraram a aplicação de um processo deste tipo para as equações de camada limite numa forma diferencial. O método proposto por van Dalsem e Steger (1985) aparece como uma aproximação interessante para tratar os escoamentos com regiões de descolamento importantes.

Neste trabalho não será utilizado nenhum tipo de método inverso e o cálculo pára quando o descolamento ocorre. Na realidade, na sua quase totalidade, os escoamentos descolados não satisfazem mais as hipóteses de camadas limites finas e um acoplamento fraco entre o escoamento exterior e o cálculo de camada limite não é, em geral, mais possível.

O procedimento de solução numérica detalhado acima foi descrito para as equações transformadas de camada limite. Para as equações num plano de simetria e em similares locais, o processo utilizado é o mesmo; por essa razão a solução numérica dessas equações não será detalhada aqui.

Capítulo 4

Aplicação nas Turbomáquinas – Turbina GAMM

4.1 - Introdução:

Este capítulo apresenta algumas aplicações do método para o caso de turbomáquinas. Especificamente, será feita uma análise do escoamento sobre a pá do rotor da turbina GAMM. Maiores detalhes referentes à turbina GAMM são encontrados no item 4.3.

O escoamento na camada limite é a origem de uma parte importante de perdas hidráulicas nos rotores de turbomáquinas e a sua previsão é particularmente importante para a melhor concepção dos mesmos.

A camada limite tridimensional sobre a pá de um rotor de turbomáquina é muito diferente da que se desenvolve sobre uma placa plana. Os gradientes de pressão agem em duas direções do escoamento: longitudinal e transversal. O campo de pressão depende do escoamento exterior e pode provocar uma mudança considerável no comportamento da camada limite. A geometria é outro fator que afeta de maneira significativa seu comportamento e as curvaturas de superfície podem atuar como um fator estabilizador ou desestabilizador do escoamento. É possível que o efeito mais importante seja aquele imposto pela rotação do rotor, que não introduz somente a tridimensionalidade no escoamento mas pode também mudar a estrutura da turbulência, como mostra o estudo feito por Galmes e Lakshminarayana (1984).

As forças de Coriolis associadas à rotação contribuem para a produção das tensões de Reynolds. Em função da direção e do módulo da velocidade de

rotação, os componentes do tensor de Reynolds serão afetados diferentemente. Os efeitos da curvatura e da rotação são sentidos simultaneamente sobre esse tensor e conduzem a um aumento ou a uma diminuição da turbulência. Para as turbomáquinas centrífugas, Galmes e Lakshminarayana (1984) verificaram que a rotação afeta os escoamentos com pequenas velocidades transversais mais fortemente que os escoamentos com grandes velocidades transversais. No caso de turbomáquinas axiais as forças de Coriolis agem na direção radial e o efeito da rotação nas propriedades da turbulência é menos pronunciado que no caso centrífugo, onde as forças de Coriolis agem na direção normal à pá.

Todos esses fatores fazem com que o cálculo da camada limite tridimensional nas pás do rotor de turbomáquinas seja um grande desafio. O método de cálculo deve ser capaz de levar em conta todos os efeitos descritos acima.

Para estimar as perdas e controlar os riscos de descolamento as grandezas características de camada limite úteis são as espessuras de deslocamento e de quantidade de movimento e o coeficiente de atrito. É também interessante ter uma estimativa da evolução de perfis de velocidade na camada limite ao longo da pá.

4.2 – Procedimento para obtenção de resultados numéricos:

Uma descrição do procedimento utilizado para o cálculo da camada limite nas pás de turbomáquinas, é mostrado no fluxograma da figura 1.1. Esse procedimento é o mesmo para todos os casos. O cálculo é constituído de três partes:

- 1) Uma análise da geometria para construir um sistema de coordenadas não ortogonais e uma malha na superfície das pás, com o cálculo de todas as propriedades geométricas de base necessárias. Ele é realizado com a ajuda de relações definidas na seção 2.2 e anexo A;

2) para a malha fina da camada limite, o cálculo das velocidades do escoamento externo fornece as condições de contorno a partir de um cálculo não viscoso;

3) o cálculo de camada limite tridimensional na superfície da pá, com as condições de entrada do escoamento conhecidas.

As condições iniciais são estimadas a partir de aproximações em similitude descritas na seção 2.6. Ao longo da linha de pontos de estagnação, próxima do bordo de ataque, estimam-se as condições de entrada impondo-se na junção com o cubo e com a carcaça um perfil de velocidade seguindo uma lei de potência do tipo Mager para a componente transversal. Sobre o plano $\zeta - \eta$ ao longo da junção entre a pá e o cubo ou a carcaça impõem-se as derivadas transversais de velocidades nulas.

A progressão do cálculo se faz ao longo da direção longitudinal do escoamento, do bordo de ataque ao bordo de fuga, para um plano x^2 constante que vai do cubo à carcaça, ou vice versa, em função da característica do escoamento. Desde que uma forma linearizada de equações é resolvida, o cálculo é repetido para cada estação x^1 até obter convergência segundo um critério satisfatório.

Após a convergência, as propriedades integrais da camada limite tais como as espessuras de deslocamento e de quantidade de movimento, os coeficientes de atrito na parede definidos para os casos tridimensionais são calculados a partir de vetores de velocidade definidos num sistema de coordenadas ligadas às linhas de corrente exteriores, como mostrado na seção 2.4. As distribuições de velocidades na camada limite são também determinadas. Elas permitem melhor compreender a evolução do escoamento ao longo da pá.

Os cálculos descritos acima foram realizados por um programa utilizando Visual Fortran 6.0 num microcomputador PC Pentium 133MHz. A convergência da solução é boa. Entre 3 e 7 iterações são usualmente necessárias para obter a convergência para cada um dos pontos da malha. Para

uma malha de 40x40x60, o tempo de CPU para realizar o cálculo completo, da mudança de coordenadas até o cálculo de parâmetros de camada limite, é em torno de dois minutos.

4.3 - Dados da Turbina GAMM:

Uma geometria de turbina Francis foi proposta pela ERCOFTAC como caso teste para estudo de turbomáquinas hidráulicas. Esta máquina foi construída e ensaiada no ponto nominal de funcionamento e os dados foram divulgados em um “workshop” em 1995. Essa turbina é do tipo diagonal e é adequada para quedas médias e altas, a figura 4.1 mostra um esquema de instalação com uma turbina Francis deste tipo.

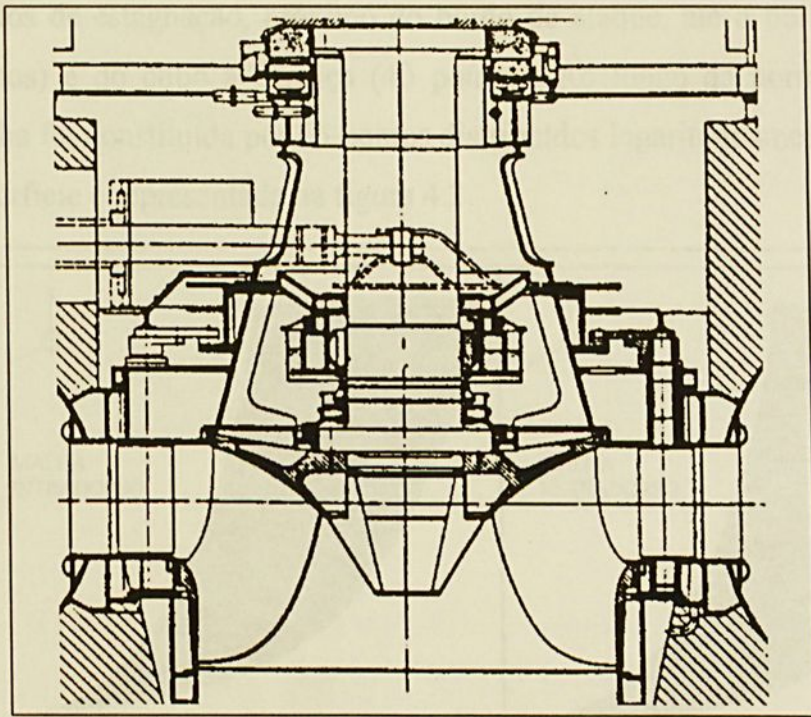


Figura 4.1 - Esquema de instalação com uma turbina Francis.

Os dados disponibilizados pela Escola Politécnica Federal de Lausanne, Suíça, consistem de um certo número de perfis longitudinais da pá

ao longo da direção principal do escoamento. Dispõe-se de uma definição geométrica de perfis longitudinais num sistema de coordenadas cilíndricas (r , φ , z).

No ponto de máximo rendimento as características operacionais desta turbina são: vazão de $0,361 \text{ m}^3/\text{s}$; rotação de $52,36 \text{ rad/s}$; energia específica de $58,78 \text{ J/kg}$ e torque de $369,14 \text{ Nm}$.

4.4 – Resultados obtidos para a Turbina GAMM:

O cálculo da camada limite tridimensional sobre o extradorso e o intradorso da pá do rotor da turbina GAMM foi realizado. Para a realização deste cálculo, a malha sobre a superfície da pá foi estabelecida da linha dos pontos de estagnação, próximo do bordo de ataque, até o bordo de fuga (60 pontos) e do cubo à carcaça (40 pontos). Ao longo da normal à parede, a malha foi constituída por 65 pontos distribuídos logaritmicamente. A malha da superfície é representada na figura 4.2

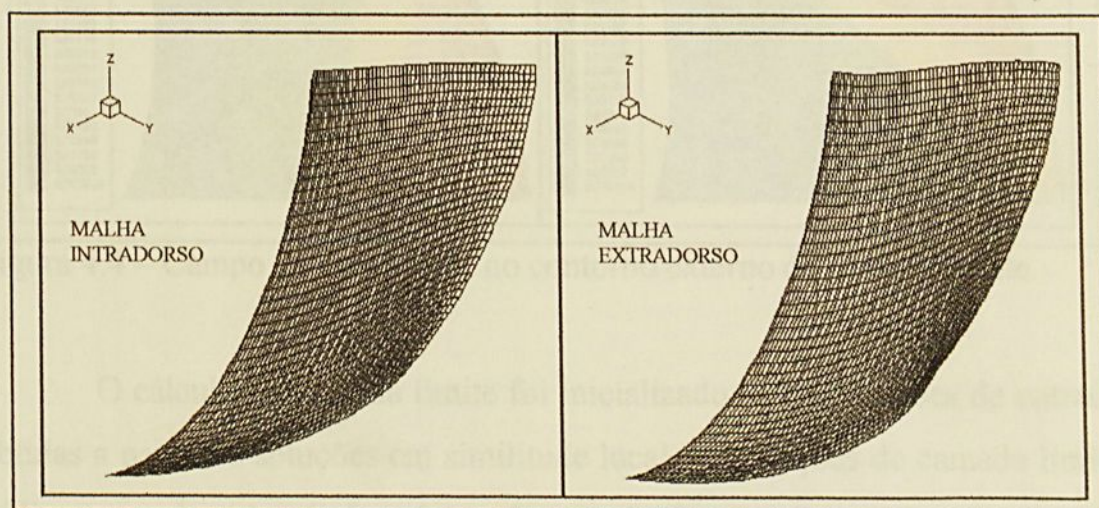


Figura 4.2 – Malha gerada.

A figura 4.3 mostra o campo de pressão obtido pelo cálculo de escoamento não viscoso e a figura 4.4 mostra o campo de velocidade do

escoamento no contorno exterior da camada limite. O campo de velocidades é utilizado como condição de contorno e foi determinado pela resolução das equações de Euler, diretamente sobre a malha fina da camada limite.

Figura 4.3 – Campo de pressão calculado sobre a pá.

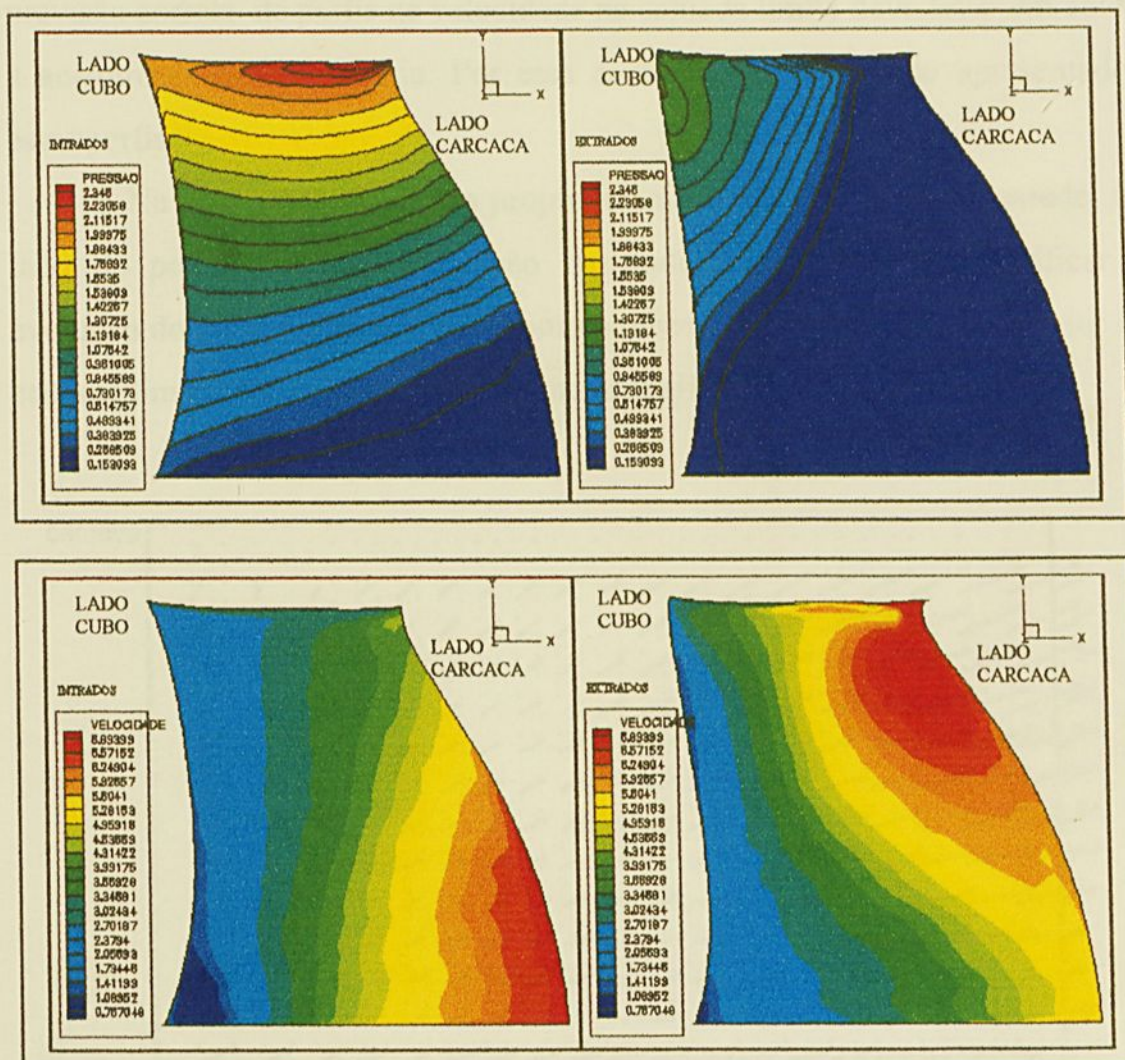


Figura 4.4 – Campo de velocidade no contorno externo da camada limite.

O cálculo da camada limite foi inicializado com condições de entrada obtidas a partir de soluções em similitude local da equações de camada limite tridimensional, ao longo dos planos de entrada do escoamento.

Uma outra característica de escoamento importante para ser apresentada, é a evolução de perfis de velocidade na camada limite ao longo das linhas de corrente e o desvio do escoamento na direção transversal. A previsão de perfis de velocidade transversais entre as pás, é difícil pelo fato de

que essas velocidades são de ordem de grandeza bem inferior às velocidades longitudinais.

A previsão de grandezas características médias da camada limite tridimensional é possível com um modelo de turbulência isotrópico mas, uma previsão correta de perfis de velocidade na camada limite deve levar em conta a anisotropia da turbulência. Por essa razão, não estão sendo apresentados estes perfis.

Na figura 4.5 os vetores proporcionais ao cisalhamento na parede, no lado de pressão (intradorso) são mostrados. Eles permitem verificar a evolução do atrito na parede bem como o desvio do escoamento no interior da camada limite, responsável pela tridimensionalidade do escoamento.

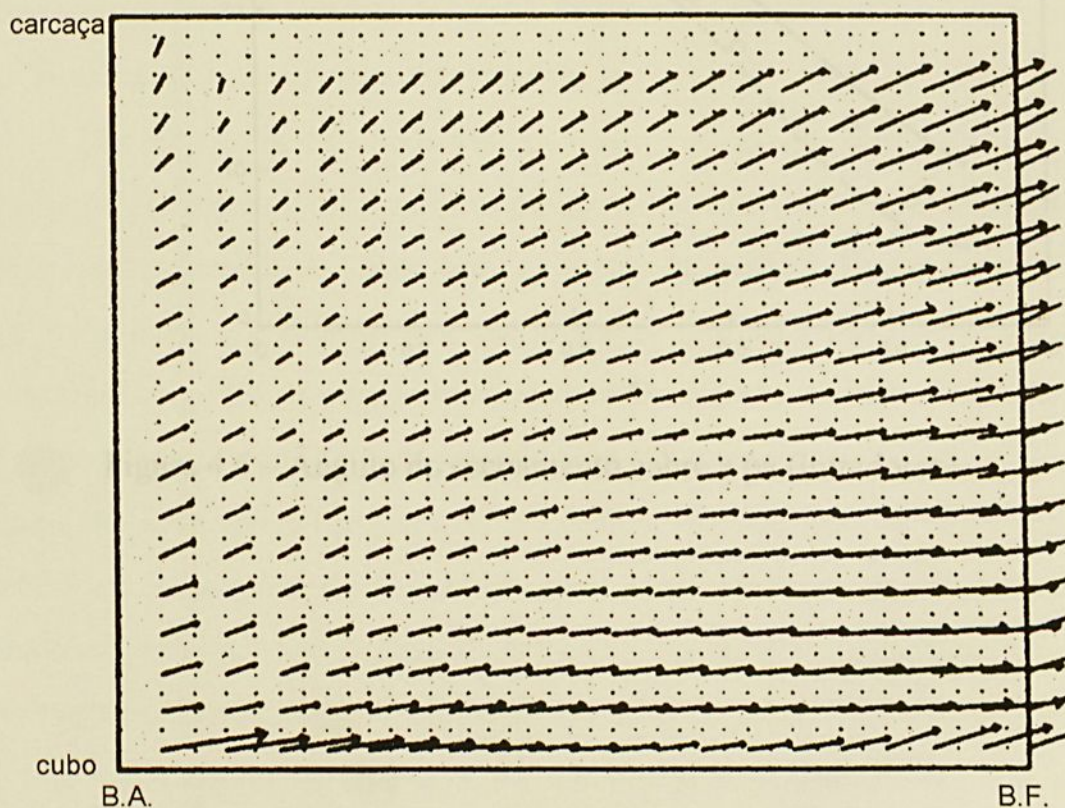


Figura 4.5 – Vetores proporcionais ao cisalhamento na parede (intradorso)

Na figura 4.6, os ângulos calculados do escoamento são comparados com os ângulos determinados experimentalmente. A curva com linha contínua

representa o ângulo do escoamento em cada ponto ao longo de uma linha de corrente. A curva com linha tracejada é o ângulo calculado ao longo do plano médio da pá. A comparação dos vetores velocidades no exterior da camada limite com os vetores na parede indicam que o escoamento sofre um desvio no interior da camada limite de aproximadamente 10° . Desta observação, pode-se concluir pela necessidade de uma modelagem tridimensional para uma correta representação do escoamento.

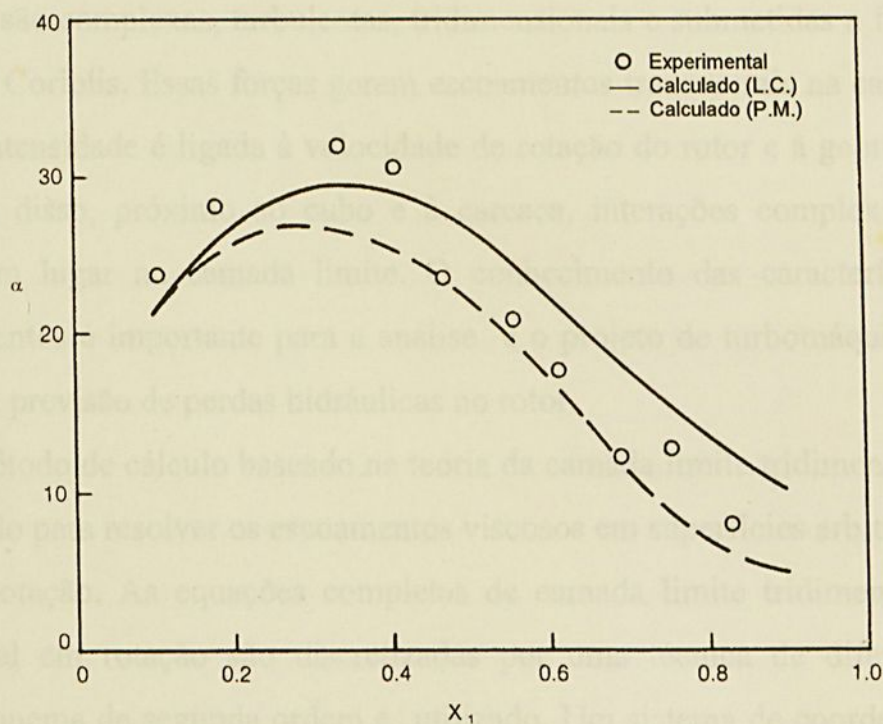


Figura 4.6 – Ângulo do escoamento sobre a pá (intradorso)

Capítulo 5

Comentários e Conclusões

As camadas limites que se desenvolvem nas pás do rotor de turbomáquinas são complexas, turbulentas, tridimensionais e submetidas a forças centrífuga e de Coriolis. Essas forças geram escoamentos transversais na camada limite, cuja intensidade é ligada à velocidade de rotação do rotor e à geometria das pás. Além disso, próximo ao cubo e à carcaça, interações complexas do escoamento têm lugar na camada limite. O conhecimento das características desses escoamentos é importante para a análise e o projeto de turbomáquinas e pode permitir a previsão de perdas hidráulicas no rotor.

Um método de cálculo baseado na teoria da camada limite tridimensional foi desenvolvido para resolver os escoamentos viscosos em superfícies arbitrárias, com ou sem rotação. As equações completas de camada limite tridimensional num referencial em rotação são discretizadas por uma técnica de diferenças finitas. Um esquema de segunda ordem é utilizado. Um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais é empregado para dar um máximo de flexibilidade na escolha do domínio de cálculo e de sua malha. Para determinar as condições de contorno, as equações de Euler são resolvidas. No caso de um escoamento turbulento, para fechar o sistema de equações, um modelo de turbulência do tipo comprimento de mistura é introduzido.

A validação do método no cálculo de camada limite nas pás de turbomáquinas se tornou difícil pela falta de uma base de dados experimentais adequados. Entretanto, os resultados obtidos para a turbina hidráulica estudada são encorajadores e coerentes com a teoria.

No caso de escoamento em uma turbomáquina, os modelos clássicos de turbulência com viscosidade efetiva isotrópica representam corretamente as características do escoamento médio, mas para levar em conta os efeitos da rotação na estrutura da turbulência na camada limite, um modelo com uma viscosidade efetiva não isotrópica é necessário.

Para o caso em que um descolamento da camada limite tem lugar, o presente cálculo pode prever o ponto mas não pode avançar além dele. Na realidade, freqüentemente os escoamentos descolados não satisfazem mais as hipóteses de camada limite fina e um acoplamento fraco entre o escoamento exterior e o cálculo da camada limite não é mais possível.

Nos exemplos mostrados de cálculos de camada limite tridimensional nas turbomáquinas, fez-se a hipótese de que o escoamento exterior não é perturbado pelo crescimento da camada limite

A técnica proposta é rápida e precisa para estudar o escoamento na vizinhança do ponto nominal de funcionamento da turbomáquina. Associado a um cálculo de escoamento exterior do tipo S1/S2, ou Euler ou eventualmente Navier Stokes e após validação da técnica de ligação entre o cálculo de camada limite e o cálculo exterior, esse método deverá se tornar um instrumento de trabalho particularmente útil para o projeto de turbomáquinas, pois os parâmetros gerados pelo mesmo podem fornecer as perdas geradas pelo atrito devido à viscosidade do fluido, buscando-se assim durante o projeto de uma turbina, as condições que minimizem as perdas, de forma rápida porém eficaz.



Anexo A

Relações Geométricas de Base

Nesse anexo, apresenta-se as relações geométricas mais importantes. A teoria correspondente foi descrita em detalhes por Hirschel e Koprdulla (1981).

Observa-se que todos os comprimentos são adimensionalizados por uma grandeza de referência \bar{L}_{ref} e que x^3 e v^3 não são ainda multiplicadas pela raiz quadrada do número de Reynolds de referência.

A.1 - Sistema de coordenadas generalizadas

A Figura A.1 mostra o sistema direto de coordenadas cartesianas $x^{i'}$ utilizado como referência. Os vetores de base desse sistema são os vetores unitários \bar{e}_i nas direções $x^{i'}$. Se é definido um sistema de coordenadas curvilíneas x^j tal que as coordenadas do vetor posição \bar{R}

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{R}(x^{i'}) = \bar{R}(x^j) \\ x^{i'} &= x^{i'}(x^j), \quad x^j = x^j(x^{i'}), \quad i', j = 1, 2, 3\end{aligned}\tag{A.1}$$

são conhecidas; então as coordenadas $\bar{\beta}_j^{i'}$ dos vetores de base covariante \bar{g}_j do sistema x^j são dadas por:

$$\bar{g}_j = (\bar{R})_{,j} = \bar{e}_i \bar{\beta}_j^{i'} \quad , \quad i', j = 1, 2, 3\tag{A.2}$$

onde $\bar{\beta}_j^i$ são as derivadas parciais das coordenadas do vetor posição \vec{R}' .

$$\bar{\beta}_j^i = (x^i)_{,j} \quad (\text{A.3})$$

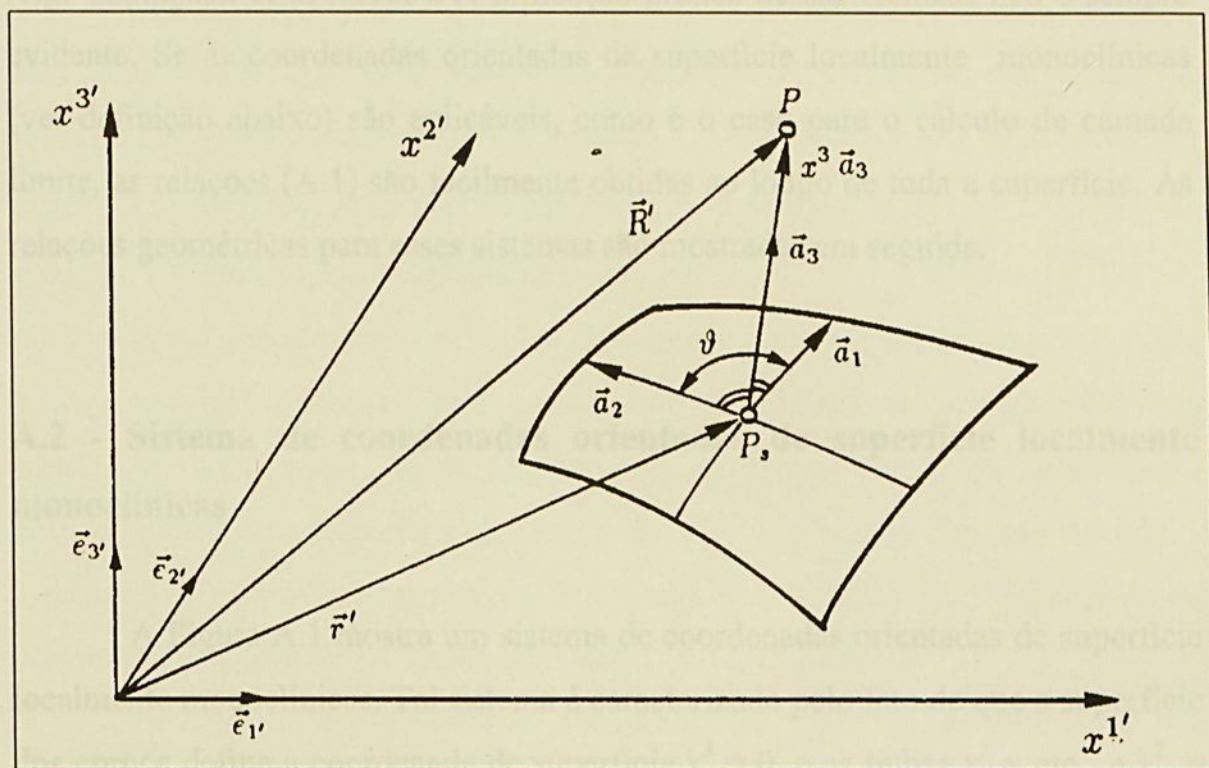


Figura A.1 – Sistema de Coordenadas

O tensor métrico covariante é simétrico e definido por:

$$g_{jk} = \vec{g}_j \cdot \vec{g}_k = \sum_{i=1}^3 \bar{\beta}_j^i \bar{\beta}_k^i \quad , \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.4})$$

e a distância elementar ds por:

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 \bar{\beta}_j^i \bar{\beta}_k^i dx^j dx^k \quad , \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.5})$$

As relações geométricas (A.1) não são fáceis de estabelecer numa forma analítica para o caso de coordenadas espaciais gerais x^j . Frequentemente, para contornar essa dificuldade, recorre-se a técnicas numéricas para gerar a malha (e.g. Thompson et al , 1985). A utilização prática dessas técnicas não é sempre evidente. Se as coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas (ver definição abaixo) são aplicáveis, como é o caso para o cálculo de camada limite, as relações (A.1) são facilmente obtidas ao longo de toda a superfície. As relações geométricas para esses sistemas são mostradas em seguida.

A.2 - Sistema de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas

A Figura A.1 mostra um sistema de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas. Tal sistema é caracterizado pelo fato de que a superfície dos corpos define a coordenada de superfície $x^3 = 0$, e as linhas $x^1 = \text{cte.}$ e $x^2 = \text{cte.}$ são definidas na superfície dos corpos. A terceira coordenada x^3 é retilínea e localmente normal a superfície dos corpos. O ângulo ϑ define o ângulo entre as linhas $x^1 = \text{cte}$ e $x^2 = \text{cte}$; ele é em geral não ortogonal.

Pelas regras de adição de vetores, o vetor posição \vec{R}' é considerado em duas partes, onde uma varia linearmente com x^3 :

$$\vec{R}'(x^{i'}) = \vec{R}'(x^{j'}) = \vec{r}'(x^\alpha) + x^3 \vec{a}_3(x^\alpha) \quad , \quad i', j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

onde $\vec{r}'(x^\alpha)$ é o vetor posição de um ponto P_s na superfície, e $\vec{a}_3(x^\alpha)$ é o vetor unitário na direção x^3 . As coordenadas deste último vetor são obtidas por:

$$\vec{a}_3 = \left[\vec{R}'(x^{i'}) \right]_{,3} = (\vec{R}')_{,i'}(x^{i'})_{,3} = \vec{e}_{i'} \vec{\beta}_3^{i'} \quad (\text{A.7})$$

ou da condição de que \bar{a}_3 é normal a superfície, $\bar{a}_3 \sim \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$, e que $\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3 = 1$.

Assim, \bar{r} e \bar{a}_3 são funções de propriedades da superfície do corpo ou, o que leva ao mesmo, das coordenadas de superfície x^α .

Desse modo, não importa qual ponto P no espaço acima de uma superfície convexa (para as superfícies côncavas ao menos na vizinhança da superfície) é unicamente definido se o ponto P_s correspondente na superfície e as coordenadas $\bar{\beta}_3^i$ são conhecidas. O problema da definição das coordenadas é pois reduzido a definição das coordenadas de superfície.

Essas coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas têm a característica, para os casos gerais, que as linhas de coordenadas nas superfícies $0 < x^3 = cte$ são inclinadas com relação às linhas de coordenadas correspondentes na superfície do corpo $x^3 = 0$. Entretanto, nos casos onde a espessura da camada considerada é pequena com relação ao menor raio de curvatura da superfície do corpo, essa inclinação é desprezada.

Levando-se em conta que o conceito de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas produz uma formulação exata, ele pode ser utilizada em todo o domínio de cálculo. As únicas limitações possíveis têm lugar nos casos de superfície côncavas pois as linhas de coordenadas x^3 convergem e se cruzam a uma certa distancia do corpo. Essa distância aumenta com o aumento do raio de curvatura. No caso da teoria de camada limite essa limitação é eliminada por definição.

Na seqüência, as propriedades dos sistemas de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas serão mostradas e a notação localmente monoclinicas será omitida.

A.3 - Vetores de Base Covariantes de um Sistema de Coordenadas Orientadas de Superfície

Considere um ponto P_s na superfície de um corpo (ver Fig. A.1) definido pelo vetor posição \vec{r}' no sistema de referência,

$$\vec{r}' = \vec{r}'(x_s^{i'}) = \vec{r}'(x_s^\alpha) \quad ,$$

$$x_s^{i'} = x_s^{i'}(x^\alpha) \quad \text{e} \quad x^\alpha = x^\alpha(x_s^{i'}) \quad , \quad i' = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.8})$$

onde x^α são os parâmetros de superfície Gaussiana escolhidos. Assim, os componentes dos vetores de base covariantes \vec{a}_α correspondentes às direções x^α , são dados pela derivada de \vec{r}' com relação à x^α ,

$$\vec{a}_\alpha = (\vec{r}')_{,\alpha} = \vec{e}_{i'} \beta_\alpha^{i'} = \vec{e}_1 \beta_\alpha^{1'} + \vec{e}_2 \beta_\alpha^{2'} + \vec{e}_3 \beta_\alpha^{3'} \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.9})$$

Na última equação, $\bar{\beta}_\alpha^{i'}$ representa as derivadas parciais das coordenadas cartesianas de referência com relação às coordenadas de superfície Gaussiana,

$$\bar{\beta}_\alpha^{i'} = (x_s^{i'})_{,\alpha} \quad (\text{A.10})$$

O terceiro vetor de base \vec{a}_3 é, por definição, ortogonal à \vec{a}_1 e \vec{a}_2 , então:

$$\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_\alpha = 0 \quad , \quad \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 = 1 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.11})$$

O vetor \vec{a}_3 é determinado por:

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \vec{e}_{i'} \bar{\beta}_3^{i'} \quad (\text{A.12})$$

Isso elimina a necessidade de estabelecer as relações gerais da transformação (A.1), só precisa-se conhecer as propriedades da superfície. Os coeficientes $\bar{\beta}_3^{i'}$ são definidos por:

$$\bar{\beta}_3^{i'} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (\text{A.13})$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \beta_1^{2'} \beta_2^{3'} - \beta_1^{3'} \beta_2^{2'} \\ \Delta_2 &= \beta_2^{1'} \beta_1^{3'} - \beta_2^{3'} \beta_1^{1'} \\ \Delta_3 &= \beta_1^{1'} \beta_2^{2'} - \beta_2^{1'} \beta_1^{2'} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

e

$$\Delta = [(\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 + (\Delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.15})$$

As definições (A.2) de \bar{g}_i e (A.9) de \bar{a}_α com a relação do vetor posição (A.6) permite escrever que

$$\bar{g}_\alpha = \bar{a}_\alpha + x^3 (\bar{a}_3)_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{g}_3 = \bar{a}_3 \quad (\text{A.17})$$

Da mesma forma, as componentes $\bar{\beta}_j^{i'}$ são escritas:

$$\bar{\beta}_j^{i'} = \bar{\beta}_\alpha^{i'} + x^3 (\bar{\beta}_3^{i'})_\alpha \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{\beta}_3^{i'} = \beta_3^{i'}, \quad i' = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.19})$$

A.4 - Transformação de um Vetor

A transformação das coordenadas contravariantes de um vetor \vec{v} do sistema x^j no sistema $x^{i'}$ é dada por:

$$v^{i'} = \bar{\beta}_j^{i'} v^j, \quad i', j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.20})$$

onde os coeficientes $\bar{\beta}_j^{i'}$ são obtidos das equações (A.2) ou (A.18) e (A.19). Observa-se que a equação (A.20) não representa a lei de transformação contravariante dos vetores na forma física que quando as coordenadas diagonais do tensor métrico são iguais à unidade: $g_{ii} = 1$.

Considerando que:

$$B = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1^{1'} & \bar{\beta}_2^{1'} & \bar{\beta}_3^{1'} \\ \bar{\beta}_1^{2'} & \bar{\beta}_2^{2'} & \bar{\beta}_3^{2'} \\ \bar{\beta}_1^{3'} & \bar{\beta}_2^{3'} & \bar{\beta}_3^{3'} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

é a matriz transformação da transformação de coordenadas contravariantes do vetor, equação (A.20), obtém-se por inversão de matrizes:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1^{1'} & \bar{\beta}_2^{1'} & \bar{\beta}_3^{1'} \\ \bar{\beta}_1^{2'} & \bar{\beta}_2^{2'} & \bar{\beta}_3^{2'} \\ \bar{\beta}_1^{3'} & \bar{\beta}_2^{3'} & \bar{\beta}_3^{3'} \end{pmatrix} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} (\bar{\beta}_2^{2'} \bar{\beta}_3^{3'} - \bar{\beta}_2^{3'} \bar{\beta}_3^{2'}) & (\bar{\beta}_2^{3'} \bar{\beta}_3^{1'} - \bar{\beta}_2^{1'} \bar{\beta}_3^{3'}) & (\bar{\beta}_2^{1'} \bar{\beta}_3^{2'} - \bar{\beta}_2^{2'} \bar{\beta}_3^{1'}) \\ (\bar{\beta}_1^{3'} \bar{\beta}_3^{2'} - \bar{\beta}_1^{2'} \bar{\beta}_3^{3'}) & (\bar{\beta}_1^{1'} \bar{\beta}_3^{3'} - \bar{\beta}_1^{3'} \bar{\beta}_3^{1'}) & (\bar{\beta}_1^{2'} \bar{\beta}_3^{1'} - \bar{\beta}_1^{1'} \bar{\beta}_3^{2'}) \\ (\bar{\beta}_1^{2'} \bar{\beta}_2^{3'} - \bar{\beta}_1^{3'} \bar{\beta}_2^{2'}) & (\bar{\beta}_1^{3'} \bar{\beta}_2^{1'} - \bar{\beta}_1^{1'} \bar{\beta}_2^{3'}) & (\bar{\beta}_1^{1'} \bar{\beta}_2^{2'} - \bar{\beta}_1^{2'} \bar{\beta}_2^{1'}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

com

$$|B| = \bar{\beta}_1' (\bar{\beta}_2' \bar{\beta}_3' - \bar{\beta}_2' \bar{\beta}_3') + \bar{\beta}_2' (\bar{\beta}_3' \bar{\beta}_1' - \bar{\beta}_1' \bar{\beta}_3') + \bar{\beta}_3' (\bar{\beta}_1' \bar{\beta}_2' - \bar{\beta}_2' \bar{\beta}_1') \quad (\text{A.23})$$

A matriz (A.22) é a matriz transformação para a transformação inversa. As equações explícitas, as quais não são simples de obter com outras técnicas, são dadas por:

$$v^j = \bar{\beta}_i^j v^{i'} \quad , \quad i', j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.24})$$

Nota-se que $|B^{-1}| = |\bar{\beta}_i^j|$ é chamada de Jacobiano da transformação. As relações (A.20) a (A.24) são válidas para as coordenadas gerais. No caso de coordenadas orientadas de superfície com o tensor métrico de superfície \bar{a} , os coeficientes de transformação com a barra são substituídos por esses sem barra definidos nas equações (A.10) e (A.13).

A.5 - O Tensor Métrico Covariante nas Coordenadas Orientadas de Superfície

As relações para o tensor métrico covariante g_{ij} nas coordenadas gerais foram mostradas nas equações gerais (A.4). No caso de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinicas, o tensor métrico é simétrico e definido por:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

e o tensor métrico de superfície se escreve por:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

As componentes do tensor métrico são obtidas por:

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k'=1}^3 \bar{\beta}_\alpha^{k'} \bar{\beta}_\beta^{k'} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (\text{A.27})$$

ou explicitamente por

$$g_{11} = (\bar{\beta}_1^1)^2 + (\bar{\beta}_1^2)^2 + (\bar{\beta}_1^3)^2 \quad (\text{A.28})$$

$$g_{12} = g_{21} = \bar{\beta}_1^1 \bar{\beta}_2^1 + \bar{\beta}_1^2 \bar{\beta}_2^2 + \bar{\beta}_1^3 \bar{\beta}_2^3 \quad (\text{A.29})$$

$$g_{22} = (\bar{\beta}_2^1)^2 + (\bar{\beta}_2^2)^2 + (\bar{\beta}_2^3)^2 \quad (\text{A.30})$$

Os componentes do tensor métrico de superfície $a_{\alpha\beta}$ são obtidos do mesmo modo, substituindo $\bar{\beta}_j^{i'}$ por β_j^i . Na literatura, as componentes do tensor métrico de superfície são comumente representadas por

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (h_1)^2 & g \\ g & (h_2)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

A distância elementar é determinada pela relação:

$$(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (\text{A.32})$$

e a distância elementar na superfície por:

$$(ds)^2 = a_{11}(dx^1)^2 + 2a_{12}dx^1dx^2 + a_{22}(dx^2)^2 \quad (\text{A.33})$$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- AMORIM, J.C.C. Modélisation de Couches Limites Tridimensionnelles dans les Turbomachines, *Thèse de Doctorat de l'INPG*. Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1991.
- ANDERSON, D.A, TANNEHILL, J.C. and PLETCHER, R.H.. *Computational Fluid Mechnc and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
- ARAKAWA, C., TAGORI, T. and SHIRAKURA, M.. *Analysis of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer on the Rotation Blade of Axial Flow Pump*, Proceedings of the 10th Symposium IAHR, Section Hydraulic Machinery, 1980, Vol. 1, pp. 341-352.
- BLOTTNER, F.G.. *Finite-Difference Method of Solution of the Boundary Layer Equations*, AIAA Journal, 1970, Vol. 18, pp. 193-205
- BLOTTNER, F.G. and ELLIS, M.A. *Finite-Difference Solution of the Incompressible Three-Dimensional Boundary Layer equations for a Blunt Body*. Int. J. of Computers and Fluids, 1973, Vol. 1, pp. 133-158.
- BLOTTNER, F.G.. *Computational Techniques for Boundary Layers*, Computational Methods for Inviscid and Viscous Two- and Three-Dimensional Flowfields, AGARD Lecture-Series 73, 1975.
- BRADSHAW, P.. *Calculation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers*, J. Fluid Mech., 1971, Vol 46, n. 3, pp. 417-445.
- BRADSHAW, P. e PONTIKOS, N.S.. *Measurements in the Turbulent Boundary Layer on na "Infinite" Swept Wing*, J. Fluid Mech., 1985, Vol. 159, pp. 105-130.
- BRADSHAW, P.. *Physics and Modelling of Three-Dimensional Boundary Layers*, Computation of Three-Dimensional Boundary Layers Including Separation, AGARD Report 741, 1987.
- CEBECI, T., KAUPS, K., MOSINSKIS, G.J. and REHN, J.A.. *Some Problems of the Calculation of Three-Dimensional Boundary-Layer Flows on General Configurations*, 1973. NASA CR-2285.

- CEBECI, T. AND SMITH, A.M.O. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press, New York, 1974.
- CEBECI, T. *Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers. II. Three-Dimensional Flows in Cartesian Coordinates*, AIAA Journal, 1975, Vol. 13, n. 8, pp. 1056-1064.
- CEBECI, T. , KAUPS, K., RAMSEY, J.A. *A General Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings*, NASA CR-2777, 1977.
- CEBECI, T., KHATTAB, A.A. and STEWARTSON, K. *Prediction of Three-Dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Bodies of Revolution at High Angles of Attack*, 2nd Symposium on Turbulent Shear Flows, 1979.
- CHIEN, K.Y. *Predictions of Channel and boundary Layer Flows with a Low Reynolds Number Turbulence Model*, 1982. AIAA Journal, Vol. 20, n. 1, pp.33-38.
- COUSTEIX, J., AUPOIX, B. and PAILHAS, G.. *Review of Theoretical and Experimental Results on Three-Dimensional Turbulent Wakes and Boundary Layers*, 1981.
- COUSTEIX, J. *Three-Dimensional and Unsteady Boundary Layer Computations*, Annual Review of Fluid Mechanics, 1986. Vol. 18, pp. 173-196
- DELERY, J.M. and FORMERY, M.J. *A Finite Difference Method for Inverse Solutions of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Flow*. AIAA Paper 83-0301, 1983.
- HASID, S. and POREH, M. *A Turbulent Energy Model for flows with drag reduction*, 1975, J. Fluids Eng., Vol. 97, pp. 234-241.
- HUMPHREYS, D.A. and LINDHOUT, J. P.F. *Calculation Methods for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers*, Prog. Aerospace Sci., 1988. Vol. 25, pp. 107-129.
- JOHNSTON, L.J. *A Numerical Method for Three-Dimensional Compressible Turbulent Boundary Layer Flows*, Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, 1987, Pineridge, pp. 1421-1435.

- KRAUSE, E. *Investigations related to the Inviscid-Viscous interaction in Transonic Flows about Finite Three-Dimensional Wings*, AIAA paper 77-209, AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting, 1977.
- LAKSHMINARAYAMA, B. and GOVINDAN, T.R. *Analysis of Turbulent boundary Layer on C cascade and Rotor Blades of Turbomachinery*, 1981, AIAA Journal, Vol. 19, n. 10, pp. 1333-1341.
- LAKSHMINARAYAMA, B. *Turbulence Modeling for Complex Shear Flows*, 1986, AIAA Journal, Vol. 24 n. 12, pp. 1900-1917.
- LAUNDER, B.E. *An Improved Pohlhausen-Type Methods of Calculating the Two Dimensional Laminar Boundary Layer in a Pressure Gradient*, 1964, Journal of Heat Transfer, pp. 360-364.
- MAGER, A. *Generalization of Boundary-Layer Momentum-Integral Equations to Three-Dimensional Flows Including Those of Rotating Systems*, 1952, NACA Report 1067.
- MALISKA, A.R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos Científicos, 1995. 424p.
- MELLOR, G.L. and HERRING, H.J. *Simple Eddy Viscosity relations for Three-Dimensional Turbulent Boundary-Layers*, 1977, AIAA Journal, Vol. 15, n. 6, pp. 886-887.
- RASTOGI, A.K. and RODI, W. *Calculation of General Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers*, 1978, AIAA Journal, Vol. 16, n. 2, pp. 151-159.
- ROTTA, J.C. *A Family of Turbulence Models for Three-Dimensional Thin Shear Layers*, 1977, Proceedings of the First Symposium on Turbulent Shear Flows, Pensilvania State University, pp. 10.27-10.34.
- SATA, A., UBALD, M. and ZUNINO, P. *Analyse of the Boundary-Layer Development in a Centrifugal Pump Impeller*, 1983, Proceedings of the 7th Conference on Fluid Machinery.
- SMITH, P.D. *The Numerical Computation of Three-Dimensional Boundary Layers*, Proc. of the IUTAM Symposium on 3-D Turbulent Boundary Layers, Berlin, 265-277, 1982.



TASSA, A., ATTA, E.H. and LEMMERMAN, L.A. *A New Three-Dimensional Boundary-Layer Calculation Method*, 1982, AIAA Paper 82-0224.

THOMPCKINS, W.T. and USABLE, W.J.JR. *A Quasi Three-Dimensional Blade Surface Boundary Layer Analysis for Rotating Blades*, 1982, Journal Engineering for Power, Vol. 104, p. 439.

UBALDI, Ubaldi (1985)

VATSA, V.N. *A 3-D Boundary-Layer Analysis Including Heat Transfer and Blade Rotation Effects*, 3rd Symp. on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, 1985.

WHITFIELD, D.L. *Analytical Description of the Complete Turbulent Boundary Layer Velocity Profiles*, 1979, AIAA Journal, Vol.17, n.10, pp. 1145-1147.

ZHANG, J. and LAKSHIMINARAYANA, B. *Computation and Turbulence Modelling for Three-Dimensional Boundary Layers Including Turbomachinery Rotor Flows*, 1990, AIAA Journal, pp. 1861-1869.





unesp

