

**FUNDAMENTOS DA SOLUÇÃO DE UMA CLASSE
DE EQUAÇÕES DO TIPO CONVECTIVO-DIFUSIVO**

JOÃO BATISTA APARECIDO

ABRIL DE 1994

1210001180



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

FUNDAMENTOS DA SOLUÇÃO DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DO TIPO CONVECTIVO-DIFUSIVO

FUNDAMENTOS DA SOLUÇÃO DE UMA CLASSE
DE EQUAÇÕES DO TIPO CONVECTIVO-DIFUSIVO

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
PARA O GRÁU DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE FUNDAMENTOS
DO CURSO DE ENGENHARIA DE FUNDAMENTOS DE FLUIDOS

JOÃO BATISTA APARECIDO

Proc. 040/01 - NRD 013/01

UNESP - "J. DE MESQUITA FILHO" ILHA SOLTEIRA	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECAS E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO 31/3/01
REGISTRADO POR Celina	TOMBO 1180
AQUISIÇÃO Deacat R\$ 1900 custo	CLASSIFICAÇÃO AG39 f

1210001180



3050102 - mecânica de fluidos

ABRIL DE 1994

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

**FUNDAMENTOS DA SOLUÇÃO DE UMA CLASSE
DE EQUAÇÕES DO TIPO CONVECTIVO-DIFUSIVO**

**TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE LIVRE-DOCENTE
EM MECÂNICA DE FLUIDOS**

JOÃO BATISTA APARECIDO

ILHA SOLTEIRA, ABRIL DE 1994



**FUNDAMENTOS DA SOLUÇÃO DE UMA CLASSE
DE EQUAÇÕES DO TIPO CONVECTIVO-DIFUSIVO**

JOÃO BATISTA APARECIDO

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

LIVRE-DOCENTE EM MECÂNICA DE FLUIDOS

PELA BANCA EXAMINADORA:

EDSON LUIZ ZAPAROLLI (CTA-ITA)

LUIZ FERNANDO MILANEZ (UNICAMP)

NELSON MURCIA (UNESP-FEG)

PAULO MAGALHÃES FILHO (UNESP-FEG)

SÉRGIO MOURÃO SABÓIA (CTA-ITA)

Na confecção deste documento agradeço à Sra. Adelaide Amaral dos Santos Passipieri pela digitação e arte final, aos Professores Paulo Isamo Hiratsuka e Cássio Roberto Macedo Maia pela leitura atenciosa, bem como pelas valiosas sugestões.

Aos
Pedro Henrique Aparecido[†]
Luíza Maria T. Aparecido
André Luiz T. Aparecido

SUMÁRIO

	Página
1. INTRODUÇÃO	1
2. ALGUNS ASPECTOS DE TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	5
2.1. Espaços Vetoriais Reais	5
2.2. Transformações Lineares	6
2.3. Equações Diferenciais Lineares	7
2.4. Dimensão do Espaço de Soluções	8
2.5. O Wronskiano	10
2.6. Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos	13
2.7. Sistema Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	15
2.8. Existência e Unicidade de Soluções de Sistema Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	16
2.9. Solução de Sistema Linear Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem ...	21
3. AUTOVALORES, AUTOFUNÇÕES E EXPANSÃO EM SÉRIE DE FUNÇÕES ORTOGONAIS	26
3.1. Autovalores e Autofunções	26
3.1.1. Problemas de Sturm-Liouville	26
3.1.2. Alguns Aspectos do Problema de Sturm-Liouville	27
3.1.2. Comparação entre Funções Oscilantes ..	34
3.1.3. Problemas de Sturm-Liouville Singulares	48
3.2. Expansão em Série de Funções Ortogonais	49
3.2.1. Funções Quadrado Integráveis	49
3.2.2. Funções Linearmente Independentes	50
3.2.3. Introdução ao Espaço de Hilbert	52
3.2.4. Aproximação Linear de Funções	58
3.2.5. Convergência na Média .. Aos	60
3.2.6. Expansão em Série de Pedro Henrique Aparecido [†]	
gonais	
Luiza Maria T. Aparecido	
4. SOLUÇÃO DE CERTO TIPO DE EQUAÇÃO	André Luiz T. Aparecido



	Página
1. INTRODUÇÃO	1
2. ALGUNS ASPECTOS DE TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	5
2.1. Espaços Vetoriais Reais	5
2.2. Transformações Lineares	6
2.3. Equações Diferenciais Lineares	7
2.4. Dimensão do Espaço de Soluções	8
2.5. O Wronskiano	10
2.6. Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos	13
2.7. Sistema Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	15
2.8. Existência e Unicidade de Soluções de Sistema Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	16
2.9. Solução de Sistema Linear Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem ...	21
3. AUTOVALORES, AUTOFUNÇÕES E EXPANSÃO EM SÉRIE DE FUNÇÕES ORTOGONAIS	26
3.1. Autovalores e Autofunções	26
3.1.1. Problemas de Sturm-Liouville	26
3.1.2. Alguns Aspectos do Problema de Sturm-Liouville	27
3.1.2. Comparação entre Funções Oscilantes ..	34
3.1.3. Problemas de Sturm-Liouville Singulares	48
3.2. Expansão em Série de Funções Ortogonais	49
3.2.1. Funções Quadrado Integráveis	49
3.2.2. Funções Linearmente Independentes	50
3.2.3. Introdução ao Espaço de Hilbert	52
3.2.4. Aproximação Linear de Funções	58
3.2.5. Convergência na Média	60
3.2.6. Expansão em Série de Funções Ortogonais	63
4. SOLUÇÃO DE CERTO TIPO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL	96



ORDINÁRIA	66
4.1. Método de Solução	
4.1.1. Pontos Ordinários de Equações Diferen-	104
ciais Ordinárias	66
4.1.2. Solução Válida Próxima a um Ponto Or-	108
dinário	67
4.1.3. Singularidades das Equações Diferen-	
ciais Ordinárias Lineares de Segunda	110
Ordem	70
4.1.4. Solução Válida na Vizinhança de um	
Ponto Regular Singular	71
4.1.5. Tratamento de Dois Casos Excepcionais.	75
4.2. Solução da Equação Diferencial Hipergeométrica	113
Degenerada	79
4.2.1. Obtenção da Segunda Solução Quando	115
$c_1 - c_2 \in \mathbb{Z}$	81
4.2.2. Obtenção da Segunda Solução Quando	115
$c_1 = c_2$	82
4.2.3. Obtenção da Segunda Solução Quando	
$c_1 - c_2 \in \mathbb{N}$	83
4.2.4. Solução Geral da Equação Diferencial	
Hipergeométrica Degenerada	84
4.2.5. Outras Representações das Soluções da	
Equação Diferencial Hipergeométrica	121
Degenerada	84
4.2.6. Wronskiano das Oito Soluções Particu-	
lares da EDHD	86
4.2.7. Identidades Especiais, Relações de Re-	121
corrência, Propriedades Diferenciais e	
Casos Especiais das Funções Hipergeo-	
métricas Degeneradas	87
5. TEORIA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	91
5.1. Funções de Duas Variáveis	91
5.2. Problema de Valor Inicial e de Contorno	92
5.3. Expansão de Funções de Duas Variáveis Reais	
em Séries Infinitas de Funções Ortonormais ..	96



5.4. Técnica de Transformada Integral	101
5.5. Técnica da Transformada Integral Generalizada	104
5.6. Truncamento da Expansão de Funções em Séries Infinitas	108
6. APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO EM DUTOS	110
6.1. Hipótese do Contínuo	110
6.2. Campo de Tensões em um Meio Contínuo Deformável	110
6.3. Estado de Deformações em um Meio Contínuo ...	112
6.4. Fluidos Newtonianos	113
6.5. Equações Básicas do Movimento de Fluidos	114
6.5.1. Equação da Conservação da Massa	115
6.5.2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento	115
6.5.3. Equação da Conservação da Energia	116
6.6. Equações Básicas para Fluido com Propriedades Constantes	118
6.7. Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido em Dutos Retilíneos	119
6.8. Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido em Dutos Retilíneos Circulares	121
6.9. Transferência de Calor, em Regime Permanente, por Convecção Forçada em Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido dentro de Dutos Retilíneos	121
6.10. Transferência de Calor, em Regime Permanente, em Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido no Interior de Dutos Circulares Retilíneos ..	122
6.10.1. Solução para Condição de Contorno do Primeiro Tipo na Parede do Duto, Utilizando a Transformada Integral	125
6.10.2. Solução para Condição de Contorno do Primeiro Tipo na Parede do Duto, Utilizando a Transformada Integral	125



7.6.2. Utilizando a Transformada Integral Generalizada	129
7. ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DE APROXIMAÇÃO E DO COMPUTO DE FUNÇÕES ESPECIAIS	133
7.1. Erro no Cômputo de Funções Matemáticas	133
7.1.1. Requisitos de Rotinas de Cômputo de Funções	133
7.1.2. Erro Absoluto e Relativo	135
7.1.3. Erro de Truncamento e Arredondamento ..	136
7.1.4. Instabilidade e Propagação do Erro de Arredondamento	137
7.1.5. Acurácia dos Resultados Computados ..	138
7.2. Redução do Intervalo do Argumento	139
7.3. Métodos de Cômputo de Polinômios	140
7.3.1. Ninho de Multiplicações	142
7.3.2. Método Econômico	142
7.4. Método de Cômputo de Funções Racionais	143
7.4.1. Cômputo da Função Racional na Forma Fracionária	144
7.4.2. Cômputo da Função Racional na Forma Continuada Finita	144
7.5. Aproximação Polinomial do Tipo Minimáx	146
7.5.1. A Melhor Aproximação Polinomial de Funções	146
7.5.2. Teorema de Chebyshev sobre Aproximação Polinomial	147
7.5.3. Aproximação quando $F(x)$ tem uma Raiz em $[a,b]$	148
7.5.4. A Aproximação Polinomial Minimáx de Funções Pares ou Ímpares	149
7.5.5. Método de Remez (1934) para Aproximações Polinomiais Minimáx	150
7.6. A Aproximação, com Função Racional, do Tipo Minimáx	151
7.6.1. A Melhor Aproximação, com Função Racional, de Funções	151



7.6.2. Comparação entre Aproximações Utilizando Polinômios ou Função Racional .	153
7.6.3. Método de Remez para Aproximação Mínimáx Usando Funções Racionais	154
7.7. Aproximação Utilizando Série Truncada de Potências	156
7.7.1. Série Truncada de Potências	157
7.7.2. Série Truncada de Polinômios	158
7.7.3. Aproximação de Padé	159
7.7.4. Truncamento de Frações Continuadas ..	161
8. RESULTADOS E SUA ANÁLISE	163
8.1. Rotinas Computacionais para o Cômputo de Funções Especiais	163
8.1.1. Rotinas para Cômputo da Função $\text{Exp}(x)$	163
8.1.2. Rotinas para Cômputo da Função $\text{Seno}(x)$	173
8.1.3. Rotina para Cômputo da Função $x^{1/2}$	177
8.1.4. Rotinas para Cômputo da Função $\ln(x)$.	179
8.1.5. Rotinas para Cômputo da Função Hipergeométrica Degenerada de Primeiro Tipo $M(a,g,x)$	179
8.1.6. Rotinas para Cômputo de Outras Funções Especiais	184
8.2. Obtenção dos Autovalores	184
8.3. Cômputo das Grandezas Físicas de Interesse..	184
8.3.1. Resultados Obtidos Através da Técnica da Transformada Integral	193
8.3.2. Resultados Obtidos Através da Técnica da Transformada Integral Generalizada	193
8.3.3. Coparação dos Resultados	201
8.4. Comentários Finais	201
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	202
ANEXO	215



1. INTRODUÇÃO

A necessidade de solução de problemas do tipo difusivo ou convectivo-difusivo são comuns na área de transferência de calor e massa, bem como de outras áreas do conhecimento que sejam matematicamente modeladas pelos mesmos tipos de equações e condições de contorno. Um procedimento analítico que tem sido bastante utilizado para solução deste tipo de problemas é a Técnica da Transformada Integral. Alguns exemplos de utilização desta técnica são: (KAKAÇ & YENER, 1973), (MIKHAILOV, 1973 e 1977), (MIKHAILOV & ÖZTÜRK, 1980 e 1981), (MIKHAILOV & SMISHEDJIEV, 1975), (ÖLÇER, 1964 e 1965), (TSACALOS et al., 1981) entre outros. Estes trabalhos foram então analisados e sintetizados.

RESUMO

Apresenta-se, inicialmente, uma síntese de alguns conteúdos matemáticos bem conhecidos, tais como: equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem; Problemas de Sturm-Liouville; expansão de funções em séries infinitas de funções ortonormais; solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem pelo método de Frobenius, com enfoque especial na equação diferencial hipergeométrica degenerada. Estes conteúdos e outros que não foram tratados diretamente neste trabalho são utilizados para fundamentar a Técnica da Transformada Integral Generalizada na solução de equação diferencial parcial do tipo convectivo-difusivo. Aplica-se então esta técnica para obtenção de representações formais para a solução de um problema exemplo. Apresenta-se também uma síntese da teoria de aproximação de funções objetivando a transformação das representações formais obtidas para a solução do problema exemplo em resultados quantitativos (números). 1990), (SILVA et al., 1992) entre outros. Estes textos foram reunidos e sintetizados em um livro publicado por COTTA (1993).

Neste contexto os objetivos deste trabalho são:

a) apresentar um texto interdisciplinar envolvendo as seguintes matérias: álgebra linear, teoria e solução de equações diferenciais ordinárias, teoria e solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, teoria de funções especiais, teoria de transformadas integrais, teoria de problemas convectivo-difusivos, teoria de aproximação, e programação computacional de funções;



1. INTRODUÇÃO

A necessidade de solução de problemas do tipo difusivo ou convectivo-difusivo são comuns na área de transferência de calor e massa bem como de outras áreas do conhecimento que sejam matematicamente modeladas pelos mesmos tipos de equações e condições de contorno. Um procedimento analítico que tem sido bastante utilizado para solução deste tipo de problemas é a Técnica da Transformada Integral. Alguns exemplos de utilização desta técnica são: (KAKAÇ & YENER, 1973), (MIKHAILOV, 1973 e 1977), (MIKHAILOV & ÖZISIK, 1980 e 1981), (MIKHAILOV & SHISHEDJIEV, 1975), (ÖLÇER, 1964 e 1965), (TSACALOS et al., 1981) entre outros. Estes trabalhos foram então analisados sintetizados e unificados em um livro por MIKHAILOV & ÖZISIK (1984). Posteriormente ao aparecimento deste texto, naturalmente surgiram outras publicações utilizando esta técnica, entre estes pode-se citar: (COTTA et al., 1987), (MIKHAILOV & ÖZISIK, 1985 e 1986a,b), (ÖZISIK & VICK, 1984).

Uma extensão da Técnica da Transformada Integral é a denominada Técnica da Transformada Integral Generalizada. Do ponto de vista das aplicações pode-se dizer que o conjunto de problemas resolvíveis pela Técnica da Transformada Integral Generalizada é um super-conjunto que contém o sub-conjunto de todos aqueles resolvíveis pela Técnica da Transformada Integral. Alguns exemplos de utilização desta técnica são: (APARECIDO, 1988), (APARECIDO & COTTA, 1987, 1990a,b,c, 1992), (APARECIDO et al., 1989), (COTTA, 1989), (COTTA et al., 1992 e 1993), (DINIZ & APARECIDO, 1990), (DINIZ et al., 1990 e 1992), (SILVA, 1990), (SILVA et al., 1992) entre outros. Estes textos foram reunidos e sintetizados em um livro publicado por COTTA (1993).

Neste contexto os objetivos deste trabalho são:

a) apresentar um texto interdisciplinar envolvendo as seguintes matérias: álgebra linear, teoria e solução de equações diferenciais ordinárias, teoria e solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, teoria de funções especiais, teoria de transformadas integrais, teoria de problemas convectivo-difusivos, teoria de aproximação, e programação computacional de funções;



- b) apresentar estudos sintéticos de vários conteúdos matemáticos, tais como: aspectos qualitativos de equações diferenciais ordinárias e sistemas de equações diferenciais ordinárias, teoria de Problemas de Sturm-Liouville e expansão de função em série de funções ortonormais, método de solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares bem como a solução da equação diferencial hipergeométrica degenerada, Técnica da Transformada Integral e da Transformada Integral Generalizada, e teoria de aproximação de funções;
- c) apresentar análise formal da Técnica da Transformada Integral e da Técnica da Transformada Integral Generalizada para uma classe de problemas do tipo convectivo-difusivo;
- d) Mostrar o funcionamento das técnicas de transformada integral apresentadas através da solução formal de um problema-exemplo consistindo na convecção térmica em escoamentos laminares completamente desenvolvidos de fluidos Newtonianos no interior de dutos retilíneos de seção transversal circular;
- e) Desenvolver funções aproximantes para aquelas funções especiais obtidas na solução formal do problema-exemplo;
- f) codificar e implementar computacionalmente as funções aproximantes obtidas; e
- g) utilizar as funções aproximantes para obter resultados quantitativos para as funções especiais bem como para o problema-exemplo.

Para a consecução destes objetivos este texto foi dividido em oito capítulos (inclusive esta introdução) e um apêndice. A seguir descreve-se sucintamente o conteúdo destas partes.

No Capítulo 2 apresenta-se uma análise qualitativa de alguns aspectos da teoria de equações diferenciais ordinárias (EDO). Destacando-se aí a independência linear de soluções; a dimensão do espaço de soluções, de uma EDO de ordem n ; o Wronskiano das soluções; a definição e algumas propriedades dos operadores adjuntos e autoadjuntos; a definição de um sistema normal de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (SEDO); a demonstração da existência e unicidade de soluções; a apresentação da solução do sistema linear normal de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com matriz dos coeficientes variável



bem como a solução do caso particular em que esta matriz é constante.

No Capítulo 3 apresenta-se uma análise qualitativa das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem linear de determinado tipo. Na literatura correlata estas EDO são conhecidas como Problema de Sturm-Liouville. Determina-se várias propriedades dos autovalores e das autofunções. Uma destas características é que as autofunções são ortogonais podendo facilmente obter-se as respectivas funções ortonormais. Desenvolve-se critérios para determinar se a solução de uma EDO de segunda ordem é oscilante, bem como qual entre as soluções de duas EDO de segunda ordem oscila mais rapidamente. Por fim utilizam-se as propriedades do conjunto completo das autofunções para efetuar-se a expansão em série de funções quadrado integráveis.

No Capítulo 4 apresenta-se uma técnica de solução de equações diferenciais ordinárias, mais especificamente aquelas lineares de segunda ordem com coeficientes variáveis possuindo pontos ordinários ou regulares singulares. Esta técnica consiste em fazer a expansão dos coeficientes e da função incógnita da EDO em série de potências, sendo conhecida na literatura correlata por Método de Frobenius. Esta técnica é utilizada para determinar-se a solução de uma determinada EDO conhecida como equação diferencial hipergeométrica degenerada ou equação diferencial de Kummer. Por fim apresenta-se a solução obtida que é a função hipergeométrica degenerada em suas várias formas, bem como algumas de suas propriedades.

No Capítulo 5 apresenta-se uma fundamentação matemática da Técnica da Transformada Integral e da Transformada Integral Generalizada. Para tal faz-se uso dos conteúdos desenvolvidos nos capítulos anteriores, tais como: equações diferenciais ordinárias; sistemas de equações diferenciais ordinárias; problemas de Sturm-Liouville; expansão de funções em termos de conjuntos completos de funções ortonormais; técnicas de solução de EDO de segunda ordem linear. Utilizando-se deste ferramental matemático desenvolve-se a técnica da transformada integral, que transforma uma dada equação diferencial parcial de segunda ordem linear em um



SEDO linear o qual é resolvido em conformidade com o desenvolvido no Capítulo 2, por fim a determinação da função incógnita original é efetuada utilizando a fórmula de inversão.

No Capítulo 6 apresenta-se um exemplo onde a Técnica da Transformada Integral e Transformada Integral Generalizada é exercitada. Para um maior entendimento e clareza do problema-exemplo desenvolve-se preliminarmente no capítulo uma fundamentação do equacionamento básico utilizado nestes problemas do tipo convectivo-difusivo. Ao final apresenta-se a solução do problema de convecção térmica em escoamentos laminares completamente desenvolvidos de fluidos Newtonianos no interior de dutos retilíneos de seção transversal circular.

No Capítulo 7 apresenta-se a fundamentação matemática necessária para transformar as funções especiais, que aparecem em consequência da aplicação de todo o ferramental desenvolvido nos Capítulos 2 a 6, em funções aproximantes que dentro de um determinado erro máximo previamente estabelecido possibilitem a obtenção de resultados quantitativos. Este processo de transformação consiste em encontrar funções de cômputo exequível (aptas a serem executas no aparato-de-cômputo disponível) e que aproximem adequadamente àquelas complexas. No caso do cômputo ser efetuado em computadores digitais toda função deve ser reduzida a um conjunto de adições, multiplicações e divisões.

No Capítulo 8 apresenta-se os resultados qualitativos e quantitativos obtidos neste trabalho bem como sua análise. Faz-se a comparação dos resultados com aqueles que foram encontrados na literatura correlata.

No Apêndice Único apresenta-se detalhadamente as rotinas computacionais desenvolvidas para efetuar o cômputo das funções especiais (raiz quadrada, seno, cosseno, exponencial, logaritmo natural e hipergeométrica degenerada de primeiro tipo) e matriciais (inversa e exponencial) que aparecem neste trabalho.



2. ALGUNS ASPECTOS DE TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Apresenta-se alguns tópicos da teoria de equações diferenciais ordinárias que serão úteis no desenvolvimento dos próximos capítulos. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências bibliográficas ARNOLD (1985), BOYCE & DIPRIMA (1979), BURKILL (1975), DERRICK & GROSSMAN (1976), FINNEY & OSTBERG (1976), INCE (1956), KREIDER et al. (1972), MILLER & MICHEL (1982), OLIVA (1973), PONTRIAGUINE (1969), RABENSTEIN (1966) e SOTOMAYOR (1979).

2.1. Espaços Vetoriais Reais.

Um espaço vetorial V é uma coleção de objetos chamados vetores munida de uma adição e de uma multiplicação por escalares (números reais) satisfazendo os seguintes axiomas:

Axiomas da adição: Dado qualquer par de vetores x e y em V existe um (único) vetor $x + y$ em V chamado soma de x e y . Exige-se que

i) a adição seja associativa

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad (2.1)$$

ii) a adição seja comutativa

$$x + y = y + x \quad (2.2)$$

iii) exista um vetor 0 (vetor zero) em V tal que

$$x + 0 = x \quad (2.3)$$

para todo x em V e

iv) para cada x em V exista um vetor $-x$ em V tal que

$$x + (-x) = 0. \quad (2.4)$$

Axiomas da multiplicação por escalar: Dado qualquer vetor x em V e qualquer número α existe um (único) vetor αx em V chamado o produto, ou o produto por escalar, de α e x . Exige-se que

$$v) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$vi) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$vii) \quad \alpha\beta(x) = \alpha(\beta x),$$

$$viii) \quad 1x = x.$$

(2.5a-d)

Exemplo Um subconjunto W de um espaço vetorial V é um sub-espaço de V se W é um espaço vetorial que atende as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V .

2.2. Transformações Lineares

Uma transformação linear, ou operador linear, de um espaço vetorial V_1 num espaço vetorial V_2 é uma função A que associa a cada vetor x em V_1 um único $A(x)$ em V_2 de tal modo que

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

e (2.6a,b)

$$A(\alpha x) = \alpha A(x)$$

para todos os vetores x_1, x_2 em V_1 e todos os escalares α .

Se A é uma transformação linear de V_1 em V_2 , escreve-se $A: V_1 \rightarrow V_2$, e diz-se que V_1 é o domínio de A . Neste caso o conjunto de todos os vetores y em V_2 tais que $y = A(x)$ para algum x em V_1 é chamada imagem de A e denotada por $J(A)$.

Teorema 2.1. - Uma transformação linear sempre leva o vetor zero de V_1 no vetor zero de V_2 ; i.e., $A(0) = 0$.

Demonstração: Basta fazer $\alpha = 0$ na equação (2.6b) ■

Teorema 2.2 - Para toda coleção finita de vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ em V_1 e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tem-se

$$A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 A(x_1) + \dots + \alpha_n A(x_n). \quad (2.7)$$

Demonstração: Pela equação (2.6a)

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) &= A(\alpha_1 x_1) + A(\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \\ &= \dots = A(\alpha_1 x_1) + \dots + A(\alpha_n x_n) \end{aligned}$$

e pela equação (2.6b)

$$A(\alpha_1 x_1) + \dots + A(\alpha_n x_n) = \alpha_1 A(x_1) + \dots + \alpha_n A(x_n)$$

logo

$$A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 A(x_1) + \dots + \alpha_n A(x_n) \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.1 - A Transformação identidade, definida pela expressão $E(x) = x$ para todo x em V é linear.

Demonstração: Pela expressão identidade tem-se que

$$E(x+y) = x + y, E(x) = x, E(y) = y \text{ e } E(\alpha x) = \alpha x.$$

Assim

$$E(x+y) = E(x) + E(y) \text{ e } E(\alpha x) = \alpha E(x) \quad \blacksquare$$

Seja I um intervalo arbitrário e limitado da reta real, e para cada inteiro não negativo n , seja $\mathcal{C}^{(n)}(I, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções a valores reais que tem derivada n -ésima contínua em todo ponto de I (LIMA, 1970a:13). Por brevidade considera-se $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}^{(0)}(I, \mathbb{R})$

Exemplo 2.2 - A transformação integral, definida pela expressão $A(f) = \int_a^x f(t) dt$, $f(t) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $x \in [a, b]$ é linear.

Demonstração: Pela expressão integral tem-se que

$$A(f + g) = \int_a^x (f + g)(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt, g(t) \in \mathcal{C}[a, b];$$

$$A(f) = \int_a^x f(t) dt, A(g) = \int_a^x g(t) dt \text{ e } A(\alpha f) = \int_a^x \alpha f(t) dt.$$

Assim

$$A(f + g) = A(f) + A(g) \text{ e } A(\alpha f) = \alpha A(f) \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.3 - A transformação diferencial, definida pela expressão

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, f(t) \in \mathcal{C}^{(n)}([a, b], \mathbb{R}) \text{ é linear.}$$

Demonstração: Pela expressão diferencial tem-se que

$$D^n(f+g)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (f+g)(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \frac{d^n g(t)}{dt^n}, g(t) \in \mathcal{C}^{(1)}[a, b];$$

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, D^n g(t) = \frac{d^n g(t)}{dt^n} \text{ e } D^n[\alpha f(t)] = \frac{d^n}{dt^n} [\alpha f(t)].$$

Assim,

$$D^n(f + g) = D^n(f) + D^n(g) \text{ e } D^n(\alpha f) = \alpha D^n(f) \quad \blacksquare$$

2.3. Equações Diferenciais Lineares.

Uma transformação linear $L^n: \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ diz-se um operador diferencial linear de ordem $n \in \mathbb{N}$ no intervalo $I = [a, b]$



se pode ser expresso na forma

$$L^n = a_n(x) D^n + a_{(n-1)} D^{(n-1)} + \dots + a_1(x) D + a_0(x) , \quad (2.8)$$

onde os coeficientes $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ são funções contínuas em I , e o primeiro coeficiente $a_n(x)$ não é identicamente nulo em I . Assim a imagem de uma função f em $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ pelo operador diferencial linear descrito anteriormente é a função em $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ definida por

$$L^n f(x) = a_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{df(x)}{dx} + a_0(x) f(x) ,$$

ou mais simplesmente por

$$L^n f = a_n(x) f^{(n)} + \dots + a_1(x) f^{(1)} + a_0(x) f ,$$

onde $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ são as n primeiras derivadas de $f(x)$.

Uma equação diferencial linear de ordem n num intervalo I é, por definição, uma equação da forma

$$L^n y(x) = h(x) \quad (2.9)$$

onde $h(x)$ é contínua em I . Uma tal equação é dita homogênea se $h(x)$ é identicamente nula em I , não homogênea caso contrário, e normal sempre que o primeiro coeficiente de L^n não se anule em nenhum ponto de I . Uma função $y(x)$ é solução de (2.9) se e só se $y(x) \in \mathcal{C}^{(n)}(I, \mathbb{R})$ e satisfaz à equação identicamente em I .

2.4. Dimensão do espaço de soluções.

Teorema 2.3 - Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ soluções da equação diferencial linear homogênea normal de ordem n (mais adiante, neste capítulo, tratar-se-á da existência e unicidade destas soluções)

$$L^n y(x) = 0, \quad x \in I, \quad (2.10)$$

e suponha que no ponto $x_0 \in I$ é verdadeira a seguinte restrição

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}_{x=x_0} \neq 0 \quad (2.11)$$

então, as funções $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes em $\mathcal{E}^{(n)}(I, \mathbb{R})$.

Demonstração: Suponha-se que existam constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, nem todas nulas de tal forma que as $y_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, soluções sejam linearmente dependentes, i.e.

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

Então esta identidade, juntamente com suas $(n-1)$ derivadas fornece o sistema

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o ponto $x = x_0$, $x_0 \in I$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1^{(1)}(x_0) & y_2^{(1)}(x_0) & \dots & y_n^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

disto e da equação (2.11) segue-se que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, contradizendo a hipótese inicial.

Logo $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes em $\mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$.

Resta provar que toda solução de (2.10) pode ser escrita como uma combinação linear de $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Seja $y(x)$ uma solução da equação (2.10), $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$, e suponha-se que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}(x_0)| \neq 0, \quad (2.12)$$

caso contrário a solução seria trivial. De fato $y(x)$ é solução de (2.10), pois,

$$L^n y(x) = L^n [c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)] = c_1 L^n y_1(x) + \dots + c_n L^n y_n(x) = 0.$$

Aplicando $y(x)$ e suas $(n-1)$ derivadas no ponto $x = x_0$, tem-se

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0),$$

$$y^{(1)}(x_0) = c_1 y_1^{(1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(1)}(x_0),$$

$\vdots$

$$y^{(n-1)}(x_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1^{(1)}(x_0) & y_2^{(1)}(x_0) & \dots & y_n^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x_0) \\ y^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$$

disto e das equações (2.11,12) segue-se

$$\sum_{i=1}^n |c_i| \neq 0,$$

isto é, existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ nem todas nulas de tal forma que $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ geram o espaço de soluções da equação (2.10) ■

2.5. O Wronskiano

Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ funções arbitrárias em $\mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ e para cada $x \in I$ considere-se o determinante

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

denominado Wronskiano.

Teorema 2.4 - As funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ sempre que seu Wronskiano não seja identicamente nulo em I .

Demonstração: Da teoria de matrizes e determinantes (HOFFMAN & KUNZE, 1971:138) tem-se que o determinante de uma matriz $n \times n$ é diferente de zero se e só se suas colunas são linearmente independentes quando consideradas como vetores em $\mathbb{R}^n$. Assim o Wronskiano de $y_1(x), \dots, y_n(x)$ é diferente de zero em $x = x_0 \in I$ se e só se as colunas de (2.13) são linearmente independentes em todo x_0 . Como por hipótese $W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \neq 0, x \in I$ e o operador diferencial $D^k, k = 1, \dots, n-1$, é linear (Exemplo 2.3) logo, pelo Teorema 2.3., $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ ■

Teorema 2.5 - Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ soluções de uma equação diferencial linear homogênea normal de ordem n , equação (2.10), num intervalo I , e suponha-se que $W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ é identicamente nulo em I . Então $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente dependentes em $\mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$.

Demonstração: Seja $x_0 \in I$ e considere-se o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= 0, \\ c_1 y_1^{(1)}(x_0) + c_2 y_2^{(1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(1)}(x_0) &= 0 \\ \vdots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

nas incógnitas $c_1, c_2, \dots, c_n$. Como o Wronskiano de $y_1(x), \dots, y_n(x)$ é identicamente nulo em I , o determinante do sistema homogêneo acima é nulo e possui solução não trivial de tal forma que as constantes $c_1, \dots, c_n$ não são todas nulas. Logo $y_1(x), \dots, y_n(x)$ formam uma combinação linear entre si ■

Teorema 2.6 - Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ soluções, num intervalo I , da equação normal de ordem n , equação (2.10). Então



$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = c \exp \left[-\int \frac{a_{(n-1)}(x)}{a_n(x)} dx \right] \quad (2.14)$$

sendo c uma constante adequada.

Demonstração: Utilizando as propriedades de determinantes (HOFFMAN & KUNZE, 1971:138) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na equação acima todos os determinantes do lado direito da igualdade, exceto o último, são nulos uma vez que possuem sempre

duas linhas iguais, assim

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1^{(1)} & Y_2^{(1)} & \dots & Y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1^{(1)} & Y_2^{(1)} & \dots & Y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \dots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Reestruturando-se a equação (2.10), da seguinte forma

$$Y_i^{(n)} = - \left[\frac{a_{(n-1)}}{a_n} Y_i^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} Y_i^{(1)} + \frac{a_0}{a_n} Y_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

substituindo na equação (2.15) e descartando os determinantes nulos que aparecerão, obtém-se

$$\frac{dW}{dx}[Y_1(x), \dots, Y_n(x)] = - \frac{a_{(n-1)}(x)}{a_n(x)} W[Y_1(x), \dots, Y_n(x)], \quad (2.19)$$

que ao ser integrada sobre o intervalo I resulta

$$W[Y_1(x), \dots, Y_n(x)] = c \exp \left[- \int \frac{a_{(n-1)}(x)}{a_n(x)} dx \right].$$

A constante c pode ser determinada se o Wronskiano em um determinado ponto $x_0 \in I$ é conhecido, assim

$$c = W[Y_1(x_0), \dots, Y_n(x_0)] \exp \left[\int \frac{a_{(n-1)}(x)}{a_n(x)} dx \right]_{x=x_0},$$

de tal forma que

$$W[Y_1(x), \dots, Y_n(x)] = W[Y_1(x_0), \dots, Y_n(x_0)] \exp \left[- \int_{x_0}^x \frac{a_{(n-1)}(t)}{a_n(t)} dt \right], \quad (2.16)$$

implicando que se o Wronskiano é nulo em algum ponto de I, será identicamente nulo em qualquer ponto de I ■

2.6. Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos.

Considere-se o operador linear L^n definido em (2.10). Em correspondência a L^n define-se um segundo operador linear, $L_{\cdot}^n$, de ordem n , o qual denomina-se adjunto de L^n . O domínio de $L_{\cdot}^n$ é o conjunto das funções contínuas de tal forma que

$[a_i(x)y(x)] \in \mathcal{C}^{(1)}(I, \mathbb{R}), i = 1, 2, \dots, n.$

Para cada função $y(x)$, define-se

$$L_{\bullet}^n y(x) = (-1)^n [a_n(x)y(x)]^{(n)} + (-1)^{(n-1)} [a_{(n-1)}(x)y(x)]^{(n-1)} + \dots - [a_1(x)y(x)]^{(1)} + a_0 y(x). \quad (2.17)$$

A equação

$$L_{\bullet}^n y(x) = 0 \quad (2.18)$$

definida num intervalo I é chamada, neste caso particular, de equação adjunta de $L^n y(x) = 0$.

Teorema 2.7 - Se $a_k(x) \in \mathcal{C}^{(k)}(I, \mathbb{R})$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ e se $u(x)$ e $v(x) \in \mathcal{C}^{(n)}(I, \mathbb{R})$, então

$$v(x) L^n u(x) - u(x) L_{\bullet}^n v(x) = \frac{dP(u, v)}{dx}, \quad (2.19)$$

onde $P(u, v)$ representa a forma bilinear

$$P(u, v) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j u^{(k-j-1)} (a_k v)^{(j)}.$$

Demonstração: Para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e para qualquer par de funções $f(x)$ e $g(x) \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, tem-se a identidade

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j f^{(k-j)} g^{(j)} \right] = f^{(k+1)} g + (-1)^k f g^{(k+1)}.$$

Utilizando-se a expressão acima e as definições de L^n e $L_{\bullet}^n$ resulta

$$\begin{aligned} vL^n u - uL_{\bullet}^n v &= \sum_{k=1}^n [(va_k)u^{(k)} + (-1)^{(k+1)}(a_k v)^{(k)}u] = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j u^{(k-j-1)} (a_k v)^{(j)} \right] = \frac{dP(u, v)}{dx} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (2.24)$$

Teorema 2.8 - Se $a_k(x) \in \mathcal{C}^{(k)}(I, \mathbb{R})$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ e se $u(x)$ e $v(x) \in \mathcal{C}^{(k)}(I, \mathbb{R})$, então para $I = [x_0, x_1]$,

$$\int_I [v L^n u - u L_{\bullet}^n v] dx = P(u, v) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2.20)$$

Demonstração: Imediata, através da integração da equação (2.19) sobre o intervalo I ■

O operador L^n é dito autoadjunto se e somente se os coeficientes correspondentes dos operadores L^n e $L_\bullet^n$ são idênticos em I .

Um problema é dito adjunto quando os valores de $u(x)$ e $v(x)$ em x_0 e x_1 são tais que $P(u,v) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$, i.e.

$$\int_I [v L^n u - u L_\bullet^n v] dx = 0. \quad (2.21)$$

Similarmente um problema é dito autoadjunto quando os valores de $u(x)$ e $v(x)$ em x_0 e x_1 são tais que $P(u,v) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$ e $L^n = L_\bullet^n$, i.e.

$$\int_I [v L^n u - u L^n v] dx = 0. \quad (2.22)$$

Maiores detalhes sobre operadores autoadjuntos podem ser encontrados em THAYER (1987).

2.7. Sistema Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

Seja A um subconjunto aberto, não vazio, do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f:A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, uma função definida e contínua em A assumindo valores no $\mathbb{R}^n$. Dada uma função $x = X(t)$ com valores em $\mathbb{R}^n$, definida num intervalo aberto I da reta $\mathbb{R}$ e de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ neste intervalo, indica-se por $x^{(1)} = X^{(1)}(t)$ a derivada de $X(t)$, $t \in I$. Se estiver verificada a condição

$$x^{(1)}(t) = f(t, X(t)), \text{ para todo } t \in I, \quad (2.23)$$

$X(t)$ denominar-se-á uma solução do sistema normal de equações diferenciais ordinárias

$$x^{(1)} = f(t, x), \quad (2.24)$$

sendo

$$x = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \text{ e } f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Teorema 2.9 - Toda equação diferencial normal de ordem n

$$x^{(n)} = f(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}), \quad t \in I \quad (2.25)$$

é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Demonstração: Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ novas variáveis definidas por

$$x_1 = x_1(t) = x(t),$$

$$x_2 = x_2(t) = x^{(1)}(t),$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n(t) = x^{(n-1)}(t),$$

(2.27)

consequentemente

$$x_1^{(1)} = x_2,$$

$$x_2^{(1)} = x_3,$$

$$\vdots$$

$$x_{(n-1)}^{(1)} = x_n,$$

(2.28)

e da equação (2.25) obtém-se

$$x_n^{(1)} = f(t, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Logo (2.25) torna-se

$$x^{(1)} = f(t, x), \quad t \in I, \quad (2.26)$$

sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ e $f = (x_2, x_3, \dots, x_n, f)^T$

2.8. Existência e Unicidade de Soluções de Sistema Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

Sejam $|\alpha| \in \mathbb{R}$ o valor absoluto de α , $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ e $\|y\| = \max\{|y_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$ a norma de y . Por definição, se $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ são dois elementos de $\mathbb{R}^n$ tem-se

$$\|y\| \geq 0;$$

$$\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0;$$

$$\|\alpha y\| = |\alpha| \|y\|;$$

$$\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|.$$

Por vizinhança cúbica (a, b) de (t_0, x_0) entende-se o produto cartesiano de duas bolas fechadas, uma de centro t_0 e raio a e outra de centro x_0 e raio b , isto é, é o conjunto fechado dos pontos $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $|t - t_0| \leq a$ e $\|x - x_0\| \leq b$.

Seja $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T$ uma função contínua, definida no intervalo $I = \{t_1 < t < t_2\}$, com valores em $\mathbb{R}^n$. Dados t_0 e $t \in I$, define-se $H(t) = \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau$ como segue

$$H(t) = (H_1(t), H_2(t), \dots, H_n(t)), \quad H_i(t) = \int_{t_0}^t X_i(\tau) d\tau, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2.27)$$

Teorema 2.10 - Se $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T$ é contínua em $I = \{t_1 < t < t_2\}$ então

$$\left\| \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|X(\tau)\| d\tau, \quad [t_0, t] \subset I. \quad (2.28)$$

Demonstração: Utilizando a norma definida anteriormente tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau \right\| &= \left\| \left(\int_{t_0}^t X_1(\tau) d\tau, \int_{t_0}^t X_2(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_0}^t X_n(\tau) d\tau \right) \right\| = \\ &= \max \left\{ \left| \int_{t_0}^t X_i(\tau) d\tau \right| ; i=1, 2, \dots, n \right\} \leq \max \left\{ \int_{t_0}^t |X_i(\tau)| d\tau ; \right. \end{aligned}$$

$$\left. i=1, 2, \dots, n \right\} = \left| \max \left\{ \int_{t_0}^t |X_i(\tau)| d\tau ; i=1, 2, \dots, n \right\} \right| \leq \int_{t_0}^t \|X(\tau)\| d\tau \quad \blacksquare$$

Teorema 2.11 - Se $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aberto não vazio de $\mathbb{R}^{n+1}$, for contínua em A e admitir contínuas em A as n^2

derivadas $\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, então dado $(t_0, x_0) \in A$ existem uma constante $K > 0$ e uma vizinhança cúbica $(a, b) \subset A$ de (t_0, x_0) tais que

$$\|f(t, x) - f(t, x^*)\| \leq K \|x - x^*\|, \quad (2.29)$$

para todo (t, x) e (t, x^*) na vizinhança cúbica.

Demonstração: Seja uma vizinhança cúbica $(a, b) \subset A$ de $(t_0, x_0) \in A$,

seja também uma constante $K^* > 0$ tal que $\left| \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j} \right| \leq K^*$ nessa vizinhança.

Fixando-se t em $|t - t_0| < a$ e utilizando a norma tem-se

$$\|f(t, x) - f(t, x^*)\| = \max \{|f_i(t, x) - f_i(t, x^*)| ; i=1, 2, \dots, n\}.$$

Definindo $y = x + \eta(x^* - x)$, $0 \leq \eta \leq 1$, os pontos (t, y) estarão na vizinhança cúbica (a, b) .

Utilizando o Teorema do Valor Médio (APOSTOL, 1974:116),

(LIMA, 1970a:26 e 1989:89) obtém-se

$$f_1(t, x) - f_1(t, x^*) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) \quad (2.30)$$

de onde

$$\begin{aligned} |f_1(t, x) - f_1(t, x^*)| &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) \right| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial x_j} \right| |x_j - x_j^*| \leq \\ &\leq n K^* \|x - x^*\| = K \|x - x^*\|. \end{aligned}$$

As funções que satisfazem à condição (2.29) são ditas localmente lipchitzianas em A relativamente à x.

Teorema 2.12 - Seja

$$x_i^{(1)} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.31)$$

um sistema normal de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Se as funções $f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, além de contínuas no aberto não vazio A de $\mathbb{R}^{n+1}$, possuírem também todas as derivadas

parciais $\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, também contínuas em A,

tem-se:

i) Para cada $(t_0, x_0) \in A$ existe em correspondência uma solução $x = X(t)$ do sistema (2.31) tal que $X(t_0) = x_0$.

ii) Se duas soluções $x = X(t)$ e $y = Y(t)$ do sistema (2.31) coincidirem em $t = t_0$, i.e. $X(t_0) = Y(t_0)$, então elas coincidirão identicamente para todo t em que ambas estiverem definidas.

Demonstração: i) Pelo Teorema 2.11, dado $(t_0, x_0) \in A$ existem $K > 0$ e uma vizinhança cúbica (a, b) de (t_0, x_0) contida em A tais que para $|t - t_0| \leq a$, $\|x - x_0\| \leq b$ e $\|x^* - x_0\| \leq b$, vale a desigualdade (2.29). Como $f(t, x)$ é contínua em A pode-se garantir que nessa vizinhança cúbica (a, b) de (t_0, x_0) , contida em A, tem-se

$$\|f(t, x)\| \leq M \in \mathbb{R}, \quad M > 0.$$

Seja $a^* \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a^* < \min(a, b/M, 1/K)$.

Construa-se a seguinte sequência de funções:



$$X_0(t) = x_0,$$

$$X_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X_0(\tau)) d\tau, |t-t_0| \leq a^*,$$

$$X_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X_1(\tau)) d\tau, |t-t_0| \leq a^*,$$

$\vdots$

$$X_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X_{(i-1)}(\tau)) d\tau, |t-t_0| \leq a^*, i \in \mathbb{N},$$

e assim por diante.

Observe-se que as funções da sequência $X_0(t), X_1(t), \dots, X_i(t)$ são contínuas em $|t-t_0| \leq a^*$ e que seus gráficos estão contidos na vizinhança cúbica (a^*, b) de (t_0, x_0) , pois,

$$\begin{aligned} \|X_1(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, X_{(1-1)}(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, X_{(1-1)}(\tau))\| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M d\tau \right| = M|t-t_0| \leq M a^* < b, \end{aligned} \quad (2.32)$$

ou seja $\|X_i(t) - x_0\| < b, i \in \mathbb{N}$.

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \|X_{i+1}(t) - X_i(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, X_i(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, X_{(i-1)}(\tau)) d\tau \right\| = \\ &= \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, X_i(\tau)) - f(\tau, X_{(i-1)}(\tau))] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, X_i(\tau)) - f(\tau, X_{(i-1)}(\tau))\| d\tau \right|; \end{aligned} \quad (2.33)$$

como todas as funções da sequência tem seus gráficos contidos na vizinhança cúbica (a^*, b) pode-se utilizar a desigualdade (2.29) para obter

$$\|X_{i+1}(t) - X_i(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|X_i(\tau) - X_{(i-1)}(\tau)\| d\tau \right|, i \in \mathbb{N};$$

para $i = 1$:

$$\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|X_1(\tau) - X_0(\tau)\| d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t K b d\tau \leq b(Ka^*),$$

para $i = 2$:

$$\|X_3(t) - X_2(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|X_2(\tau) - X_1(\tau)\| d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t b K^2 a^* d\tau \leq b(Ka^*)^2,$$

para $i = 3$:

$$\|X_4(t) - X_3(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|X_3(\tau) - X_2(\tau)\| d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t bK^3 a^{*2} d\tau \leq b(Ka^*)^3,$$

e para todo i ,

$$\|X_{i+1}(t) - X_i(t)\| \leq b(ka^*)^i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Como a série acima é convergente, já que $ka^* < 1$, tem-se pelo critério de Weierstrass (HYSLOP, 1950) e (KNOPP, 1966), que a sequência $X_0(t), X_1(t), \dots, X_i(t), \dots$ converge uniformemente para a função $X(t)$ definida em $|t - t_0| < a^*$ satisfazendo $\|X(t) - x_0\| < b$.

Observa-se também que a seguinte sequência de funções

$$\int_{t_0}^t f(\tau, X_i(\tau)) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots$$

converge para $\int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau$; pois,

$$\left\| \int_{t_0}^t f(\tau, X_i(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, X_i(\tau)) - f(\tau, X(\tau))] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, X_i(\tau)) - f(\tau, X(\tau))\| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|X_i(\tau) - X(\tau)\| d\tau \right|.$$

Utilizando o $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i(t) \rightarrow X(t)$ e a expressão acima obtém-se que

o $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau, X_i(\tau)) d\tau \rightarrow \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau$. Assim

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau, \quad (2.35)$$

e portanto $X(t_0) = x_0$ e $X^{(1)}(t) = f(t, X(t))$, $|t - t_0| < a^*$.

ii) Se $x = X(t)$ e $y = Y(t)$ são duas soluções do sistema (2.31) satisfazendo $X(t_0) = Y(t_0) = x_0$, seja J o intervalo aberto $r_1 < t < r_2$, conjunto de todos os valores de t para os quais $X(t)$ e $Y(t)$ estão ambas definidas. Seja I o subconjunto dos t para os quais se tem $X(t) = Y(t)$; é imediato que $t_0 \in I$, isto é, I não é vazio. Se uma sequência (t_ν) de elementos de I converge para $t_\mu \in J$, tem-se que $X(t_\nu) = Y(t_\nu)$ e como $X(t)$ e $Y(t)$ são contínuas pode-se passar ao limite esta última igualdade que fornecerá $X(t_\mu) = Y(t_\mu)$, logo $t_\mu \in I$, i.e., I é fechado. Seja $t_1 \in I$, i.e., $X(t_1) = Y(t_1)$; procedendo-se com o par (t_1, x_1) da mesma maneira como com o par (t_0, x_0) na parte (i) deste teorema, determina-se uma vizinhança cúbica (a^*, b) para a qual seja válida a expressão

(2.29) e $ka^* < 1$.

Diminuir-se-á a^* , se for necessário, para que se tenha, pela continuidade de $X(t)$ e $Y(t)$, $\|X(t) - Y(t)\| \leq b$.

Como $X(t)$ e $Y(t)$ são soluções do sistema (2.31), tem-se $X(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(\tau, X(\tau))d\tau$ e $Y(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(\tau, Y(\tau))d\tau$, assim

$$\begin{aligned}\|X(t) - Y(t)\| &= \left\| \int_{t_1}^t f(\tau, X(\tau))d\tau - \int_{t_1}^t f(\tau, Y(\tau))d\tau \right\| = \\ &= \left\| \int_{t_1}^t [f(\tau, X(\tau)) - f(\tau, Y(\tau))]d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_1}^t \|f(\tau, X(\tau)) - f(\tau, Y(\tau))\|d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_1}^t K\|X(\tau) - Y(\tau)\|d\tau \leq Kba^*,\end{aligned}$$

e portanto $\|X(t) - Y(t)\| \leq Kba^*$, que levada novamente na equação anterior fornece $\|X(t) - Y(t)\| \leq b(Ka^*)^2$ e assim sucessivamente até $\|X(t) - Y(t)\| \leq b(Ka^*)^i$, $i = 1, 2, \dots$; como $Ka^* < 1$ conclui-se que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|X(t) - Y(t)\| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} b(Ka^*)^i = 0 \quad (2.39)$$

assim $X(t) = Y(t)$ para $|t_1 - t| < a^*$, logo existe uma vizinhança de t_1 onde $X(t)$ e $Y(t)$ coincidem, i.e., I é aberto. Sendo I não vazio, aberto e fechado em J , é imediato que $I = J$ ■

2.9. Solução de Sistema Linear Normal de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

Quando $f(t, x) = A(t)x(t) + b(t)$ o sistema (2.31) torna-se linear, i.e.

$$x^{(1)}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad (2.36)$$

com a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Seja $\mathbb{R}^{m \times n}$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ a valores reais. Define-se a norma da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ da seguinte forma

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| = 1\}. \quad (2.37)$$

Esta norma possui as seguintes propriedades:

$$(M1) \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(M2) \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$(M3) \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

(2.38a-f)

$$(M4) \quad \|A\| \geq 0 \text{ e } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

$$(M5) \quad \|AG\| \leq \|A\| \|G\|, \text{ e}$$

$$(M6) \quad \|A\| \leq \sum_{i=1}^m (\max_{j=1,2,\dots,n} |A_{ij}|) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_{ij}|,$$

onde A, B são quaisquer matrizes em $\mathbb{R}^{m \times n}$ e G é qualquer matriz em $\mathbb{R}^{n \times k}$.

Uma sequência de vetores $\{x_m\} = \{(x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})^T\}$ é convergente para um vetor x , i.e., $x_m \rightarrow x$, se $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x\| \rightarrow 0$.

Teorema 2.13 - Seja $A(t)$ uma matriz real, contínua e variável, $n \times n$. Seja $S_N(t)$ uma soma parcial de matrizes definida pela fórmula

$$S_N(t) = E + \sum_{k=1}^N \frac{(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau)^k}{k!}, \quad (2.39)$$

onde E é a matriz identidade e $\int_{t_0}^t [A_{ij}(\tau)] d\tau = [\int_{t_0}^t A_{ij}(\tau) d\tau]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Então cada elemento da matriz $S_N(t)$ converge absolutamente e uniformemente em qualquer $t \in (-a, a)$, $a > 0$, quando $N \rightarrow \infty$.

Demonstração: Aplicando a norma de matrizes definida anteriormente (2.37) e fazendo uso de suas propriedades (2.38a-f) obtém-se

$$\begin{aligned} \|S_N(t)\| &= \left\| E + \sum_{k=1}^N \frac{(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau)^k}{k!} \right\| \leq \|E\| + \left\| \sum_{k=1}^N \frac{(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau)^k}{k!} \right\| \leq \\ &\leq n + \sum_{k=1}^N \frac{\|\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\|^k}{k!} \leq n + \sum_{k=1}^N \frac{(\int_{t_0}^t \|A(\tau)\| d\tau)^k}{k!} \leq n + \sum_{k=1}^N \frac{(2aM)^k}{k!}, \end{aligned}$$

assim

$$\|S_N(t)\| \leq (n-1) + \sum_{k=0}^N \frac{(2aM)^k}{k!}, \quad (2.40)$$

sendo $M = \max_{(-a, a)} \|A(t)\|$.

Desta forma a sequência $\{S_N(t)\}$ é convergente, pois,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(t)\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ (n-1) + \sum_{k=0}^N \frac{(2aM)^k}{k!} \right\} = (n-1) + \exp(2aM) \quad (2.41)$$

Teorema 2.14 - Para a sequência $S_N(t)$ (2.39) vale a seguinte relação

$$\frac{dS_N(t)}{dt} = A(t) S_{N-1}(t) \quad (2.42)$$

Demonstração: Derivando a equação (2.39), resulta

$$\begin{aligned} \frac{dS_N(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^N \frac{kA(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^{k-1}}{k!} = A(t) \sum_{k=1}^N \frac{\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^{k-1}}{(k-1)!} , \\ \frac{dS_N(t)}{dt} &= A(t) \left\{ E + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k}{k!} \right\} = A(t) S_{N-1}(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.15 - Para $S(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t)$, vale a seguinte relação

$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t) S(t) \quad (2.43)$$

Demonstração: Tomando o limite na equação (2.42) obtém-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dS_N(t)}{dt} = \lim_{N \rightarrow \infty} \{A(t) S_{N-1}(t)\},$$

ou

$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t) S(t), \quad (2.48)$$

onde,

$$S(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N-1}(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k}{k!} \quad \blacksquare \quad (2.49)$$

Seja $B(t)$ uma matriz real, contínua e variável, $n \times n$. Define-se $\exp[B(t)]$, expressa pela seguinte fórmula

$$\exp[B(t)] = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[B(t)]^k}{k!}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.44)$$

Uma consequência imediata da definição acima é

$$\exp(0) = E. \quad (2.45)$$

Teorema 2.16 - Seja $I = (-\infty, \infty)$, $t \in I$ e seja $A(t)$ uma matriz



real, contínua e variável, $n \times n$. Então a única solução do sistema linear normal homogêneo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \text{ com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.46)$$

é fornecida por

$$\mathbf{x}(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right] \mathbf{x}_0. \quad (2.47)$$

Demonstração: Derivando a equação (2.47) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\exp\left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right] \right] \mathbf{x}_0 = \frac{d}{dt} \left[\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right)^k}{k!} \right] \mathbf{x}_0 = \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Que a solução é única já está demonstrado no Teorema 2.12.

Quando

$$t = t_0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0} \mathbf{A}(\tau) d\tau = 0 \Rightarrow \exp\left[\int_{t_0}^{t_0} \mathbf{A}(\tau) d\tau\right] = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \quad \blacksquare$$

Teorema 2.17 - Sejam $I = (-\infty, \infty)$; $\Phi(t, t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right]$, $t \in I$, a matriz associada à solução do sistema (2.46); $\mathbf{A}(t)$ uma matriz real, contínua e variável, $n \times n$. Então a única solução do sistema linear normal não homogêneo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \text{ com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.48)$$

é fornecida por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau. \quad (2.49)$$

Demonstração: Derivando a equação (2.49) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \frac{d\Phi}{dt}(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \Phi(t, t) \mathbf{b}(t) + \int_{t_0}^t \frac{d\Phi}{dt}(t, \tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau = \\ &= \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau = \\ &= \mathbf{A}(t) [\Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau] + \mathbf{b}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

Que a solução é única já está demonstrado no Teorema 2.12.

Quando

$$t = t_0 \Rightarrow \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = 0; \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) b(\tau) d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(t, t_0) = E \Rightarrow x(t) = Ex_0 = x_0 \quad \blacksquare$$

Teorema 2.18 - Seja $I = (-\infty, \infty)$, $t \in I$ e seja $A(t) = A$ uma matriz real, contínua e constante, $n \times n$. Então a solução do sistema (2.48) é fornecida por

$$x(t) = \exp[A(t-t_0)] x_0 + \int_{t_0}^t \exp[A(t-\tau)] b(\tau) d\tau. \quad (2.50)$$

Demonstração: De fato, para A constante tem-se

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^t A d\tau\right] = \exp[A(t-t_0)].$$

Após substituição da equação acima na (2.49) obtém-se a (2.50) $\blacksquare$

3.1.1. Problemas de Sturm-Liouville.

Considere-se os operadores diferenciais lineares de segunda ordem

$$L_A[\psi(x)] = - \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + \{d(x) - \lambda w(x)\} \psi(x), \quad x \in [a, b]; \quad (3.1a, b)$$

$$L[\psi(x)] = - \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + d(x) \psi(x) = \lambda w(x) \psi(x), \quad x \in [a, b];$$

onde $k(x) \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, com $k(x) > 0$ para $x \in [a, b]$, $w(x) \in C([a, b], \mathbb{R})$, com $w(x) > 0$, para $x \in [a, b]$ e $d(x) \in C([a, b], \mathbb{R})$, para $x \in [a, b]$. Considere-se também as condições de fronteira

$$F_1[\psi(a)] = \alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.2a, b)$$

$$F_2[\psi(b)] = \beta_0 \psi(b) + \beta_1 \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=b} = 0,$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$, com $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ e $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Diz-se que λ é um autovalor do sistema formado pelas equações (3.1b) e (3.2a, b), ou do Problema de Sturm-Liouville, se existe uma solução $\psi(x) \neq 0$. Esta solução $\psi(x)$ chama-se autofunção.

3. AUTOVALORES, AUTOFUNÇÕES E EXPANSÃO EM SÉRIE DE FUNÇÕES ORTOGONAIS.

Neste capítulo apresenta-se os principais aspectos do problema de Sturm-Liouville bem como da expansão de funções em termos de um conjunto de funções ortogonais.

3.1. Autovalores e Autofunções.

Apresenta-se uma síntese de resultados da teoria sobre problemas de Sturm-Liouville encontrados nas referências (BÔCHER, 1917), (BOYCE, 1979), (BURKILL, 1975), (HÖNIG, 1970 e 1978), (INCE, 1956) e (SOTOMAYOR, 1979).

3.1.1. Problemas de Sturm-Liouville.

Considere-se os operadores diferenciais lineares de segunda ordem

$$L_{\lambda}[\psi(x)] \equiv - \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + [d(x) - \lambda w(x)] \psi(x), \quad x \in [a, b]; \quad (3.1a, b)$$

$$L[\psi(x)] \equiv - \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + d(x) \psi(x) = \lambda w(x) \psi(x), \quad x \in [a, b];$$

onde $k(x) \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$, com $k(x) > 0$ para $x \in [a, b]$, $w(x) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, com $w(x) > 0$, para $x \in [a, b]$ e $d(x) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, para $x \in [a, b]$. Considere-se também as condições de fronteira

$$F_1[\psi(a)] \equiv \alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.2a, b)$$

$$F_2[\psi(b)] \equiv \beta_0 \psi(b) + \beta_1 \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=b} = 0,$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$, com $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ e $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Diz-se que λ é um autovalor do sistema formado pelas equações (3.1b) e (3.2a, b), ou do Problema de Sturm-Liouville, se existe uma solução $\psi(x) \neq 0$. Esta solução $\psi(x)$ chama-se autofunção,

correspondente ao autovalor λ .

A solução da equação (3.1b) depende de x e λ , e pode ser escrita na forma

$$\psi(x) = c_1 \psi_1(x, \lambda) + c_2 \psi_2(x, \lambda) \quad (3.3)$$

onde $\{\psi_1(x), \psi_2(x)\}$ é um conjunto fundamental de soluções, linearmente independentes. Substituindo $\psi(x)$ nas condições de contorno, equações (3.2a,b), resulta

$$\alpha_0 [c_1 \psi_1(a, \lambda) + c_2 \psi_2(a, \lambda)] + \alpha_1 \left[c_1 \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} + c_2 \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \right] \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.4a, b)$$

$$\beta_0 [c_1 \psi_1(b, \lambda) + c_2 \psi_2(b, \lambda)] + \beta_1 \left[c_1 \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} + c_2 \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \right] \Big|_{x=b} = 0,$$

de onde pode ser rearranjado para fornecer

$$\begin{bmatrix} \left[\alpha_0 \psi_1(x, \lambda) + \alpha_1 \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=a} & \left[\alpha_0 \psi_2(x, \lambda) + \alpha_1 \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=a} \\ \left[\beta_0 \psi_1(x, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=b} & \left[\beta_0 \psi_2(x, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Como $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, pois, caso contrário a solução geral, equação (3.3), seria identicamente nula, é necessário que

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \left[\alpha_0 \psi_1(x, \lambda) + \alpha_1 \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=a} & \left[\alpha_0 \psi_2(x, \lambda) + \alpha_1 \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=a} \\ \left[\beta_0 \psi_1(x, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=b} & \left[\beta_0 \psi_2(x, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=b} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é conhecida como autocondição e tem como única incógnita o(s) autovalor(es), λ . Suas raízes são os valores dos autovalores.

3.1.2. Alguns Aspectos do Problema de Sturm-Liouville.

Teorema 3.1 - Dados $u(x), v(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b])$, então vale a

identidade de Lagrange

$$\int_a^b (\bar{v} L[u] - u \overline{L[v]}) dx = M[u, v](b) - M[u, v](a) ,$$

onde

$$M[u, v](x) = -k(x) \left[\frac{du(x)}{dx} \overline{v(x)} - u(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right] .$$

Demonstração: De fato, tem-se que

$$\bar{v} L[u] - u \overline{L[v]} = \bar{v}(x) \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + u(x) \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right] ,$$

ou

$$\bar{v} L[u] - u \overline{L[v]} = - \frac{d}{dx} \left\{ k(x) \left[u(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right] - \bar{v}(x) \frac{du(x)}{dx} \right\} ,$$

assim

$$\begin{aligned} \int_a^b (\bar{v} L[u] - u \overline{L[v]}) dx &= - \left\{ k(x) \left[u(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right] - \bar{v}(x) \frac{du(x)}{dx} \right\} \Big|_a^b \\ &= M(u, v)_{x=b} - M(u, v)_{x=a} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.2 - Sejam $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b])$ satisfazendo as condições de contorno, equações (3.2a, b), então tem-se:

$$1) \quad M[\psi_1(x), \psi_2(x)]_{x=a} = M[\psi_1(x), \psi_2(x)]_{x=b} = 0 , \quad (3.7)$$

$$2) \quad \int_a^b (\bar{\psi}_1(x) L[\psi_2(x)] - \psi_2(x) \overline{L[\psi_1(x)]}) dx = 0 . \quad (3.8)$$

Demonstração: 1) Como $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ satisfazem as condições de contorno F_1 , então

$$\alpha_0 \psi_1(a) + \alpha_1 \frac{d\psi_1(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0 , \quad \alpha_0 \overline{\psi_2(a)} + \alpha_1 \frac{d\bar{\psi}_2(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0 ,$$

como $(\alpha_0, \alpha_1) \neq (0, 0)$, segue-se que

Demonstração: Do Teorema 3.3 tem-se que os autovalores λ e $\bar{\lambda}$ são reais, e pelo Teorema 3.2 segue-se que

$$\left| \begin{array}{cc} \psi_1(a) & \frac{d\psi_1(x)}{dx} \Big|_{x=a} \\ \overline{\psi_2(a)} & \frac{d\overline{\psi_2(x)}}{dx} \Big|_{x=a} \end{array} \right| = 0 ,$$

ou

$$0 = \left[\psi_1(x) \frac{d\overline{\psi_2(x)}}{dx} - \overline{\psi_2(x)} \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right]_{x=a} = M[\psi_1(x), \psi_2(x)]_{x=a}$$

Repetindo o procedimento para $x = b$, tem-se

$$0 = \left[\psi_1(x) \frac{d\overline{\psi_2(x)}}{dx} - \overline{\psi_2(x)} \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right]_{x=b} = M[\psi_1(x), \psi_2(x)]_{x=b} .$$

2) Combinando o Teorema 3.1 e o primeiro item deste teorema, a demonstração é imediata ■

Teorema 3.3 - Todos os autovalores do sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b) são reais.

Demonstração: Seja $L[\psi(x)] = \lambda w(x)\psi(x)$, $\psi(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b])$, $\psi(x) \neq 0$, então $L[\overline{\psi(x)}] = \bar{\lambda} w(x) \overline{\psi(x)}$. Do teorema 3.2 segue que

$$0 = \int_a^b \{ \overline{\psi(x)} L[\psi(x)] - \psi(x) L[\overline{\psi(x)}] \} dx =$$

$$= \int_a^b [\overline{\psi(x)} \lambda w(x) \psi(x) - \psi(x) \bar{\lambda} \overline{\psi(x)}] dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b w(x) \psi^2(x) dx ,$$

como $\int_a^b w(x) \psi^2(x) dx \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, i.e., todos os autovalores são reais ■

Teorema 3.4 - Todas as autofunções que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b), correspondentes a autovalores distintos são ortogonais, relativamente a $w(x)$. Ou seja, se $L[\psi_1(x)] = \lambda w(x) \psi_1(x)$ e $L[\psi_2(x)] = \mu w(x) \psi_2(x)$, com $\lambda \neq \mu$, e $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b])$, então

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int_a^b w(x) \psi_1(x) \overline{\psi_2(x)} dx = 0 . \quad (3.9)$$

Demonstração: Do Teorema 3.3 tem-se que os autovalores λ e μ são reais, e pelo Teorema 3.2 tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [\psi_1(x) L\overline{\psi_2(x)} - \overline{\psi_2(x)} L\psi_1(x)] dx = \\ &= \int_a^b [\psi_1(x) \mu w(x) \overline{\psi_2(x)} - \overline{\psi_2(x)} \lambda w(x) \psi_1(x)] dx = \\ &= (\mu - \lambda) \int_a^b w(x) \psi_1(x) \overline{\psi_2(x)} dx, \end{aligned}$$

como $\mu \neq \lambda$, obtém-se o resultado postulado na equação (3.9).

Teorema 3.5 - Todas as autofunções que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b), são combinação linear de autofunções reais.

Demonstração: Se $L[\psi_1(x)] = \lambda w(x) \psi_1(x)$, pelo Teorema 3.3 segue que $L[\overline{\psi_1(x)}] = \lambda w(x) \overline{\psi_1(x)}$, $\psi_1(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b])$. Definindo duas funções reais da seguinte forma: $u(x) = \psi_1(x) + \overline{\psi_1(x)}$ e $v(x) = i[\psi_1(x) - \overline{\psi_1(x)}]$, $u(x), v(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b], \mathbb{R})$, tem-se que $L[u(x)] = L[\psi_1(x)] + L[\overline{\psi_1(x)}] = \lambda w(x) [\psi_1(x) + \overline{\psi_1(x)}] = \lambda w(x) u(x)$ e

$L[v(x)] = i\{L[\psi_1(x)] - L[\overline{\psi_1(x)}]\} = i\lambda w(x) [\psi_1(x) - \overline{\psi_1(x)}] = \lambda w(x) v(x)$, portanto $u(x)$ e $v(x)$ também são autofunções. Tomando uma combinação linear de $u(x)$ e $v(x)$, da seguinte forma

$$\psi(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x), \quad (3.10)$$

tem-se

$$L[\psi(x)] = c_1 L[u(x)] + c_2 L[v(x)] = c_1 \lambda w(x) u(x) + c_2 \lambda w(x) v(x) =$$

$$= \lambda w(x) [c_1 u(x) + c_2 v(x)] = \lambda w(x) \psi(x),$$

portanto para $\psi(x) \equiv \psi_1(x) \Rightarrow c_1 = 1/2$ e $c_2 = -i/2$ ■

Teorema 3.6 - Para cada autovalor que satisfaz o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b), existe apenas uma única autofunção.

Demonstração: Sejam $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, duas supostas soluções linearmente independentes deste sistema, e $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b])$.



Da teoria de equações diferenciais ordinárias tem-se que o Wronskiano das soluções é

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \frac{d\psi_1(x)}{dx} & \frac{d\psi_2(x)}{dx} \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [a, b], \quad (3.11)$$

com a seguinte propriedade (Teorema 2.6)

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = W[\psi_1(x_0), \psi_2(x_0)] e^{\int_{x_0}^x f(x) dx}, \quad x_0, x \in [a, b],$$

ou seja, se o Wronskiano das soluções é nulo em algum ponto, é nulo em todo o intervalo $[a, b]$. Por outro lado as soluções também satisfazem a condição de contorno F_1 ou F_2 , equações (3.2a,b). Assim,

$$F_1[\psi_1(x)]_{x=a} = \alpha_0 \psi_1(a) + \alpha_1 \left. \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right|_{x=a} = 0$$

e

$$F_1[\psi_2(x)]_{x=a} = \alpha_0 \psi_2(a) + \alpha_1 \left. \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right|_{x=a} = 0.$$

Como $(\alpha_0, \alpha_1) \neq (0, 0)$, resulta que

$$\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \frac{d\psi_1(x)}{dx} \\ \psi_2(x) & \frac{d\psi_2(x)}{dx} \end{vmatrix}_{x=a} = 0 = W[\psi_1(a), \psi_2(a)] = W[\psi_1(x), \psi_2(x)],$$

implicando que $\psi_1(x), \psi_2(x)$ são linearmente dependentes e que existe apenas uma solução linearmente independente para cada autovalor ■

Teorema 3.7 - Todas as autofunções que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b) são reais.

Demonstração: Se $L[\psi(x)] = \lambda w(x) \psi(x)$ segue que $L[\overline{\psi(x)}] = \lambda w(x) \overline{\psi(x)}$.

Pelo Teorema 3.6 existe apenas uma solução correspondente a um dado autovalor λ , portanto $\psi(x) \equiv \overline{\psi(x)}$, consequentemente $\psi(x)$ é real ■

Teorema 3.8 - Sejam λ e $\psi(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ o autovalor e a autofunção que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b)

e (3.2a,b). Seja também a restrição adicional

$$\int_a^b k(x) \left[\frac{d\psi(x)}{dx} \right]^2 dx + \int_a^b d(x) \psi^2(x) dx + \frac{\beta_0}{\beta_1} k(b) \psi^2(b) - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} k(a) \psi^2(a) \geq 0 \quad (3.11)$$

Nestas condições os autovalores são não negativos.

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1b) por $\psi(x)$ e integrando no intervalo $[a,b]$, tem-se

$$\int_a^b \psi(x) L[\psi(x)] dx = \lambda \int_a^b w(x) \psi^2(x) dx,$$

ou

$$\lambda = \frac{\int_a^b \psi(x) L[\psi(x)] dx}{\int_a^b w(x) \psi^2(x) dx}.$$

Efetuada a integração por partes no numerador do lado direito da equação acima, resulta

$$\lambda = \frac{\int_a^b k \left[\frac{d\psi}{dx} \right]^2 dx + \int_a^b d(x) \psi^2 dx + k \psi \frac{d\psi}{dx} \Big|_b - k \psi \frac{d\psi}{dx} \Big|_a}{\int_a^b w \psi^2 dx}.$$

Isolando o termo $\frac{d\psi}{dx}$, nas condições de contorno F_1 e F_2 e substituindo na equação acima, tem-se

$$\lambda = \frac{\int_a^b k \left[\frac{d\psi(x)}{dx} \right]^2 dx + \int_a^b d(x) \psi^2(x) dx - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} k(a) \psi^2(a) + \frac{\beta_0}{\beta_1} k(b) \psi^2(b)}{\int_a^b w(x) \psi^2(x) dx} \quad (3.12)$$

para $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$. Por inspeção percebe-se que o lado direito da equação acima é não negativo, portanto $\lambda \geq 0$. Quando α_1 e/ou β_1 são nulos este resultado se mantém, pois,

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow \psi(a) = 0 \Rightarrow k(x) \psi(x) \frac{\psi(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0, \quad \text{e/ou}$$

$$\beta_1 = 0 \Rightarrow \psi(b) = 0 \Rightarrow k(x) \psi(x) \frac{\psi(x)}{dx} \Big|_{x=b} = 0.$$

Evidentemente existem infinitos casos onde a desigualdade (3.11) ocorre. Um caso particular importante é estabelecido quando $d(x) \geq 0$, $\beta_0/\beta_1 \geq 0$ e $\alpha_0/\alpha_1 \leq 0$, isto é todos os termos do lado esquerdo da desigualdade são não negativos. Adicionalmente, pode-se estabelecer, para este caso particular, em que condições haverá algum autovalor nulo. Por inspeção da desigualdade (3.11) percebe-se que haverá algum autovalor nulo, quando todos os componentes do numerador forem nulos. Considerando que

$$\psi(x) \equiv 0 \Rightarrow d(x) \equiv 0; k(x) > 0 \Rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx} \equiv 0, k(x) \psi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=a,b} = 0,$$

$x \in [a,b]$. Como $\frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=a,b} \equiv 0 \Rightarrow \alpha_0, \beta_0 = 0$. Portanto, uma das

condições em que ocorrerá um autovalor nulo é $\alpha_0, \beta_0 = 0, d(x) \equiv 0, \frac{d\psi(x)}{dx} \equiv 0, x \in [a,b]$ ■

Teorema 3.9 - Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\psi(x, \lambda) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b], \mathbb{R})$ o coeficiente e a solução que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a). Sejam, também, λ_* e $\psi(x, \lambda_*)$ o autovalor e a autofunção que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b). Para este segundo sistema λ_* é de multiplicidade um. Demonstração: De acordo com a proposição $\psi(x, \lambda)$ é solução da equação diferencial e ajusta-se à primeira condição de contorno, F_1 . Desta forma, para a segunda condição de contorno, obtém-se

$$F_2(\lambda) = \beta_0 \psi(b, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=b}.$$

Como $\psi(x, \lambda)$ e $\psi(x, \lambda_*)$ satisfazem a equação (3.1a), resulta

$$L[\psi(x, \lambda)] = \lambda w(x) \psi(x, \lambda), \quad (3.14)$$

e

$$L[\psi(x, \lambda_*)] = \lambda_* w(x) \psi(x, \lambda_*),$$

Multiplicando a primeira equação acima por $\psi(x, \lambda_*)$, a segunda por $\psi(x, \lambda)$, subtraindo uma da outra, e integrando sobre o intervalo $[a,b]$, tem-se

$$\left[k(x) \left\{ \psi(x, \lambda) \frac{d\psi(x, \lambda_*)}{dx} - \psi(x, \lambda_*) \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \right\} \right]_a^b = (\lambda_* - \lambda) \int_a^b w(x) \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda_*) dx,$$

ou rearranjando os termos

$$\beta_0 \int_a^b w(x) \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda_*) dx = k(x) \frac{d\psi(x, \lambda_*)}{dx} \frac{F_2(\lambda)}{\lambda - \lambda_*} \Big|_{x=b},$$

onde

$$F_2(\lambda) = \left[\beta_0 \psi(x, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=b} = 0, \text{ para } \lambda \rightarrow \lambda_*,$$

passando ao limite quando $\lambda \rightarrow \lambda_*$, tem-se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_*} \left\{ \beta_0 \int_a^b w(x) \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda_*) dx \right\} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_*} \left\{ k(x) \frac{d\psi(x, \lambda_*)}{dx} \frac{F_2(\lambda)}{\lambda - \lambda_*} \right\}_{x=b},$$

ou

$$\beta_0 \int_a^b w(x) \psi^2(x, \lambda_*) dx = k(x) \frac{d\psi(x, \lambda_*)}{dx} \frac{dF_2(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_*}, \quad \beta_0 \neq 0. \quad (3.13)$$

Como o lado esquerdo da equação acima é diferente de zero, para $\beta_0 \neq 0$, implica que $dF_2(\lambda)/d\lambda$, para $\lambda = \lambda_*$, é não nulo e consequentemente, λ_* tem multiplicidade um.

$$\text{Quando } \beta_0 = 0 \Rightarrow \frac{d\psi(x, \lambda_*)}{dx} \Big|_{x=b} = 0 \text{ e } F_2(\lambda) = \beta_1 \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=b},$$

assim, procedendo da mesma maneira, a equação (3.13) torna-se

$$\beta_1 \int_a^b w(x) \psi^2(x, \lambda_*) dx = -k(b) \psi(b, \lambda_*) \frac{dF_2(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_*}, \quad \beta_0 = 0. \quad (3.14)$$

Como o lado esquerdo a equação acima é diferente de zero, uma vez que $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, conclui-se que λ_* , neste caso particular também tem multiplicidade um ■

3.1.3. Comparação entre Funções Oscilantes.

Teorema 3.10. Sejam $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ duas soluções reais linearmente independentes da equação diferencial (3.1b). Supõe-se que $\psi_1(x)$ anula-se no mínimo duas vezes em $[a, b]$; sejam x_1 e x_2 dois zeros consecutivos de $\psi_1(x)$ naquele intervalo. Então

$\psi_2(x)$ anula-se no mínimo uma vez no intervalo aberto (x_1, x_2) .

Demonstração: Primeiramente, $\psi_2(x)$ não pode anular-se em x_1 ou x_2 , uma vez que o Wronskiano de $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ seria nulo neste ponto e consequentemente em todo o intervalo, contrariando a hipótese de independência linear. Suponha-se então que $\psi_2(x)$ não anula-se em nenhum ponto pertencente ao intervalo (x_1, x_2) . Desta forma $\psi_1(x)/\psi_2(x)$ é contínua e possui derivada contínua em $[a, b]$, e anula-se nas extremidades deste intervalo.

Portanto a derivada de $\psi_1(x)/\psi_2(x)$ deve anular-se no mínimo uma vez em (x_1, x_2) . Assim

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)} \right] = \frac{\psi_2(x) \frac{d\psi_1(x)}{dx} - \psi_1(x) \frac{d\psi_2(x)}{dx}}{\psi_2^2(x)}, \quad (3.15)$$

onde o numerador, do lado direito, é o Wronskiano de $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ que não pode se anular em $[x_1, x_2]$. Esta contradição prova que $\psi_2(x)$ deve anular-se no mínimo uma vez em (x_1, x_2) . Adicionalmente pode-se estabelecer que $\psi_2(x)$ não pode ter mais que um zero em (x_1, x_2) , pois caso contrário $\psi_1(x)$ teria no mínimo um zero entre os zeros de $\psi_2(x)$, e consequentemente x_1 e x_2 não seriam zeros consecutivos. Desta forma conclui-se que os zeros de duas soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.1b) separam-se uns dos outros, consecutivamente ■

Teorema 3.11 (Sturm, 1836) - Sejam duas funções distintas $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$. Se neste intervalo $\psi_2(x)$ tem mais zeros que $\psi_1(x)$, então diz-se que $\psi_2(x)$ oscila mais rapidamente que $\psi_1(x)$ em $[a, b]$. Quando uma função tem no máximo um zero em $[a, b]$ diz-se que é não oscilatória em $[a, b]$. Então as soluções de

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] - g(x) \psi(x) = 0, \quad g(x) \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

que oscilam em $[a, b]$, oscilarão mais rapidamente quando $k(x)$ e $g(x)$ diminuírem.

Demonstração: Sejam

$$\frac{d}{dx} \left[k_1(x) \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right] - g_1(x) \psi_1(x) = 0, \quad (3.17a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[k_2(x) \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right] - g_2(x) \psi_2(x) = 0, \quad (3.17b)$$

onde $k_1(x) \geq k_2(x) > 0$, $g_1(x) \geq g_2(x)$, $|g_1(x)| + |g_2(x)| \neq 0$ em $[a, b]$.

Considere-se a fórmula de Picone (1909)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\psi_1}{\psi_2} (k_1 \psi_1' \psi_2 - k_2 \psi_1 \psi_2') \right] = \quad (3.20)$$

$$= (g_1 - g_2) \psi_1^2 + (k_1 - k_2) (\psi_1')^2 + k_2 \left(\psi_1' - \psi_1 \frac{\psi_2'}{\psi_2} \right)^2, \quad (3.18)$$

que integrada sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, resulta

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\psi_1}{\psi_2} (k_1 \psi_1' \psi_2 - k_2 \psi_1 \psi_2') \right]_{x_1}^{x_2} = \\ & = \int_{x_1}^{x_2} \left[(g_1 - g_2) \psi_1^2 + (k_1 - k_2) (\psi_1')^2 + k_2 \left(\psi_1' - \psi_1 \frac{\psi_2'}{\psi_2} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sejam os limites de integração x_1 e x_2 tomados como dois zeros consecutivos de $\psi_1(x)$; e suponha-se que $\psi_2(x)$ não tenha zeros em $[x_1, x_2]$.

O lado direito da equação (3.19) é positivo e o esquerdo é nulo. Esta contradição prova que $\psi_2(x)$ tem no mínimo um zero no intervalo $[x_1, x_2]$. Portanto $\psi_2(x)$ oscila mais rapidamente que $\psi_1(x)$ em $[a, b]$.

O resultado do teorema mantém-se quando $\psi_2(x)$ anula-se em uma das extremidades do intervalo ou em ambas. Como exemplo suponha-se que $\psi_2(x)$ anula-se em $x = x_1$. Assim faz-se necessária uma pequena adaptação no lado esquerdo da equação (3.19), como segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1} \left\{ \frac{\psi_1}{\psi_2} (k_1 \psi_1' \psi_2 - k_2 \psi_1 \psi_2') \right\} &= \lim_{x \rightarrow x_1} \left\{ \psi_1 \left(k_1 \psi_1' - k_2 \psi_1 \frac{\psi_2'}{\psi_2} \right) \right\} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_1} \left\{ k_2 \psi_1^2 \frac{\psi_2'}{\psi_2} \right\} = - 2 k_2 \psi_1 \psi_1' \Big|_{x=x_1} = 0. \end{aligned}$$

Neste caso particular, o teorema mostra que $\psi_2(x)$ anula-se novamente antes que $\psi_1(x)$. Então diz-se que $\psi_2(x)$ oscila mais rapidamente que $\psi_1(x)$. Para o problema de Sturm-Liouville,

$g(x) = d(x) - \lambda w(x)$, e assim, quando λ aumenta $g(x)$ diminui e consequentemente a oscilação da autofunção aumenta ■

Teorema 3.12 - Sejam $g = \min_{[a,b]} g(x)$, $k = \min_{[a,b]} k(x)$, $G = \max_{[a,b]} g(x)$, $K = \max_{[a,b]} k(x)$ e $\Psi(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([a,b], \mathbb{R})$ solução da equação (3.16). Então $\Psi(x)$ será não oscilatória se

$$-\frac{g}{k} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}, \quad (3.20)$$

e oscilatória se

$$-\frac{G}{K} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}, \quad (3.21)$$

Demonstração: Em consequência do enunciado tem-se $K \geq k(x) \geq k$, $G \geq g(x) \geq g$ para $x \in [a,b]$.

Considere-se a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \left[k \frac{d\Psi(x)}{dx} \right] - g \Psi(x) = 0$$

que pode ser rearranjada para

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - \frac{g}{k} \Psi(x) = 0 \quad (3.22)$$

As soluções da equação diferencial (3.16), pelo Teorema 3.11, não oscilam mais rapidamente em $[a,b]$ que as soluções da equação diferencial (3.22). A equação (3.22) pode ser resolvida de imediato e apresenta as seguintes variantes:

a) Se $g > 0$ a solução é $\Psi(x) = a_1 \exp \left[\left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} x \right] + a_2 \exp \left[- \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} x \right]$, que tem no máximo um zero em $[a,b]$. Se $g = 0$ a solução é $\Psi(x) = a_1 + a_2 x$, que tem no máximo um zero em $[a,b]$. Então, se $g \geq 0$ a solução da equação (3.22) é não oscilatória. Isto implica que se $g(x) \geq 0$ em $[a,b]$, as soluções da equação (3.16) são não oscilatórias.

b) Se $g < 0$ a solução é $\Psi(x) = a_1 \sin \left[\left(- \frac{g}{k} \right)^{1/2} x \right] + a_2 \cos \left[\left(- \frac{g}{k} \right)^{1/2} x \right]$ então o intervalo entre dois zeros consecutivos é $\pi \left(- \frac{k}{g} \right)^{1/2}$. Se, entretanto $\pi \left(- \frac{k}{g} \right)^{1/2} > |b-a|$ esta solução não terá mais que um zero em $[a,b]$. Consequentemente, as soluções da equação (3.16) serão não oscilatórias quando

$$-\frac{g}{k} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2} .$$

Considere-se também a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \left[K \frac{d\psi(x)}{dx} \right] - G\psi(x) = 0$$

que pode ser rearranjada para

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{G}{K} \psi(x) = 0 . \quad (3.23)$$

As soluções da equação diferencial (3.16), pelo Teorema 3.11, oscilam em $[a,b]$ no mínimo tão rápido quanto as soluções da equação diferencial (3.23). Para $G \geq 0$, da mesma maneira quando $g \geq 0$, $\psi(x)$ é não oscilante. Para $G < 0$, da mesma maneira quando $g < 0$, $\psi(x)$ é oscilante, e o intervalo entre os zeros consecutivos de $\psi(x)$ é $\pi(-\frac{K}{G})^{1/2}$. Assim, uma condição suficiente para que as soluções da equação (3.16) tenham, no mínimo m zeros em $[a,b]$ é que

$$m \pi \left(-\frac{K}{G}\right)^{1/2} \leq |b-a| ,$$

ou

$$-\frac{G}{K} \geq \frac{m^2 \pi^2}{(b-a)^2} .$$

Em particular, uma condição suficiente para que a equação (3.16) tenha uma solução que oscile em $[a,b]$ é que $m = 1$, ou

$$-\frac{G}{K} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} .$$

Teorema 3.13 - Sejam as equações diferenciais

$$\frac{d}{dx} \left[k_1(x) \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right] - g_1(x) \psi_1(x) = 0 , \quad x \in [a,b]; \quad (3.24a,b)$$

$$\frac{d}{dx} \left[k_2(x) \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right] - g_2(x) \psi_2(x) = 0 , \quad x \in [a,b];$$

sujeitas às seguintes condições iniciais



$$\psi_1(a) = -\alpha_1, \quad \left. \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right|_{x=a} = \alpha_0; \quad (3.25a, b)$$

$$\psi_2(a) = -\beta_1, \quad \left. \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right|_{x=a} = \beta_0;$$

onde

$$k_1(x) \geq k_2(x) > 0, \quad g_1(x) \geq g_2(x) \text{ e } \psi_1(x), \psi_2 \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b], \mathbb{R}).$$

Sejam também as seguintes hipóteses:

$$a) \quad |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0, \quad \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

$$b) \quad \frac{\alpha_0 k_1(a)}{\alpha_1} \leq \frac{\beta_0 k_2(a)}{\beta_1}, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \beta_1 \neq 0.$$

c) A identidade $g_1(x) \equiv g_2(x) \equiv 0$ não ocorre em nenhum subintervalo de $[a, b]$.

Se $\psi_1(x)$ tem m zeros no intervalo $(a, b]$, então $\psi_2(x)$ tem no mínimo m zeros no mesmo intervalo, e o i -ésimo zero de $\psi_2(x)$ é menor que o i -ésimo zero de $\psi_1(x)$.

Demonstração: Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m$ os zeros de $\psi_1(x)$, $x \in [a, b]$; enumerados de tal forma que $a < x_1 < x_2 < \dots \leq b$. Pelo Teorema 3.11 tem-se que a cada par de zeros consecutivos x_i e x_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, m-1$, existe no mínimo um zero de $\psi_2(x)$. Isto implica que se houver no mínimo um zero de $\psi_2(x)$ em (a, x_1) , o teorema está demonstrado. Se $\psi_1(x)$ tem um zero em $x = a$, isto é, se $\alpha_1 = 0$, então $\psi_2(x)$, pelo Teorema 3.11, certamente tem um zero em (a, x_1) , por isto a hipótese $\alpha_1 \neq 0$. Utilizando a fórmula de Picone (Teorema 3.11) em $[a, x_1]$, tem-se

$$\left[\psi_1^2 \left(k_1 \frac{\psi_1'}{\psi_1} - k_2 \frac{\psi_2'}{\psi_2} \right) \right]_a^{x_1} = \int_a^{x_1} (g_1 - g_2) \psi_1^2 dx + \int_a^{x_1} (k_1 - k_2) (\psi_1')^2 dx + \\ + \int_a^{x_1} k_2 \frac{(\psi_1' \psi_2 - \psi_1 \psi_2')^2}{\psi_2^2} dx,$$

sendo o lado direito da equação acima positivo e o lado esquerdo torna-se

$$-\psi_1^2(a) \left[k_1(a) \frac{\psi_1'(a)}{\psi_1(a)} - k_2(a) \frac{\psi_2'(a)}{\psi_2(a)} \right] = \psi_1^2(a) \left[\frac{k_1(a)\alpha_0}{\alpha_1} - \frac{k_2(a)\beta_0}{\beta_1} \right],$$

que é não positivo, em consequência da hipótese b. Esta contradição prova que existe no mínimo um zero de $\psi_2(a)$ em (a, x_1) , confirmando o teorema ■

Se os zeros da solução da equação diferencial (3.24a) sujeita à condição inicial (3.25a) são marcados em um segmento de reta AB, onde o ponto A coincide com $x = a$, e B com $x = b$ ($a < b$), então o efeito de se diminuir $k(x)$ e $g(x)$, porém mantendo fixo α_0 e α_1 , é que os zeros de $\psi_1(x)$ desloquem-se de B em direção a A. Quando $k(x)$ e $g(x)$ diminuem continuamente, ocorre uma situação em que um novo zero de $\psi_1(x)$ ocorrerá no segmento AB, aparecendo inicialmente no ponto B. A continuação do processo de diminuição de $k(x)$ e $g(x)$, provocarão um deslocamento do novo zero de B em direção a A, até a ocorrência de um novo zero, e assim sucessivamente.

No problema de Sturm-Liouville, $g(x) = d(x) - \lambda w(x)$, assim quando λ aumenta continuamente, provocará o aparecimento discreto de zeros na solução da equação (3.1b).

Teorema 3.14 - Seja $c \in [a, b]$ que não é zero das soluções das equações (3.24a, b) e (3.25a, b). Se c é tal que $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ tem o mesmo número de zeros no intervalo (a, c) então

$$\frac{k_1(c) \frac{\psi_1'(c)}{\psi_1(c)}}{\psi_1(c)} > \frac{k_2(c) \frac{\psi_2'(c)}{\psi_2(c)}}{\psi_2(c)}. \quad (3.26)$$

Demonstração: Seja um zero em x_1 imediatamente antes ao ponto $x = c$. De acordo com o Teorema 3.13, este é necessariamente um zero $\psi_1(x)$. Utilizando a fórmula de Picone em $[x_1, c]$ resulta

$$\left[\psi_1^2(x) \left(k_1(x) \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} - k_2(x) \frac{\psi_2'(x)}{\psi_2(x)} \right) \right]_{x_1}^c > 0 \quad (3.29a, b)$$

ou

$$k_1(c) \frac{\psi_1'(c)}{\psi_1(c)} > k_2(c) \frac{\psi_2'(c)}{\psi_2(c)}.$$

Se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ não possui qualquer zero em $[a, c]$ então

aplicando a fórmula de Picone em $[a, c]$ resulta

$$\left[\psi_1^2(x) \left(k_1(x) \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} - k_2(x) \frac{\psi_2'(x)}{\psi_2(x)} \right) \right]_a^c > 0 ,$$

ou

$$\begin{aligned} & \left[\psi_1^2(c) \left(k_1(c) \frac{\psi_1'(c)}{\psi_1(c)} - k_2(c) \frac{\psi_2'(c)}{\psi_2(c)} \right) \right] > \\ & > \left[\psi_1^2(a) \left(k_1(a) \frac{\psi_1'(a)}{\psi_1(a)} - k_2(a) \frac{\psi_2'(a)}{\psi_2(a)} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Pela hipótese b) do Teorema 3.13, tem-se que

$$\psi_1^2(a) \left(k_1(a) \frac{\psi_1'(a)}{\psi_1(a)} - k_2(a) \frac{\psi_2'(a)}{\psi_2(a)} \right) \geq 0 ,$$

assim a equação (3.27) torna-se

$$k_1(c) \frac{\psi_1'(c)}{\psi_1(c)} > k_2(c) \frac{\psi_2'(c)}{\psi_2(c)} \quad \blacksquare$$

No sistema formado pelas equações (3.24a) e (3.25a) o efeito de se diminuir continuamente $k(x)$ e $g(x)$ é que $\psi'(x)/\psi(x)$, em qualquer ponto de $[a, b]$ que não seja originalmente um zero de $\psi(x)$, diminui até tornar-se um zero de $\psi(x)$.

Teorema 3.15 - Seja o sistema formado pela equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \left[k(x, \lambda) \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \right] - g(x, \lambda) \psi(x, \lambda) = 0 , \quad x \in [a, b] , \quad (3.28)$$

e pelas condições de contorno

$$\alpha_0 \psi(a, \lambda) + \alpha_1 \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=a} = 0 , \quad (3.29a, b)$$

$$\beta_0 \psi(b, \lambda) + \beta_1 \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=b} = 0 ,$$

sujeito às seguintes condições adicionais:

- a) $k(x, \lambda)$ e $g(x, \lambda)$ são funções reais monotônicas decrescentes de λ ;
- b) $g(x, \lambda)$ é não identicamente nula em nenhum sub-intervalo finito

de $[a, b]$;

$$c) G(\lambda) = \max_{[a, b]} g(x, \lambda), K(\lambda) = \max_{[a, b]} k(x, \lambda), g(\lambda) = \min_{[a, b]} g(x, \lambda) \text{ e}$$

$k(\lambda) = \min_{[a, b]} k(x, \lambda)$, são funções reais contínuas monotônicas decrescentes de λ no intervalo (Λ_1, Λ_2) ;

d) $-k(a, \lambda) \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ é uma função monotônica decrescente de λ ;

e) $k(b, \lambda) \frac{\beta_0}{\beta_1}$ é uma função monotônica decrescente de λ ;

f) i é o número de zeros em (a, b) da função que satisfaz o sistema formado pelas equações (3.28) e (3.29a);

g) m é o número de autovalores que satisfaz o sistema formado pelas equações (3.28) e (3.29a, b).

Então este sistema tem um número infinito de autovalores (λ) os quais não possuem um limite à direita, i.e. $\Lambda_2 \rightarrow +\infty$. Para cada inteiro $m \geq i$, existe um e somente um autovalor (λ_{m+1}) , ao qual corresponde uma autofunção com $(m+1)$ zero em (a, b) .

Demonstração: A equação diferencial (3.28), tomada conjuntamente com a condição (3.29a), tem uma e somente uma solução distinta, $\psi(x, \lambda)$. A junção desta solução com a segunda condição (3.29b) fornece a equação característica ou auto-condição

$$f(\lambda) = \beta_0 \psi(b, \lambda) + \beta_1 \left. \frac{d\psi(x, \lambda)}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad (3.30)$$

cujas raízes são os autovalores.

Demonstrou-se no Teorema 3.12 que se, para qualquer valor particular de λ , a equação (3.28) é tal que

$$-\frac{G(\lambda)}{K(\lambda)} \geq \frac{m^2 \pi^2}{(b-a)^2},$$

então para aquele valor de λ , a equação admite uma solução real, satisfazendo a condição (3.29a), e tendo no mínimo m zeros em $[a, b]$.

Da equação acima implica que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{G(\lambda)}{K(\lambda)} \right\} \rightarrow +\infty,$$

como $K(\lambda) > 0$, e considerando a condição adicional c, e as

condições para oscilação de funções em $[a,b]$, resulta

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (\lambda) \rightarrow +\infty = \Lambda_2. \quad (3.31)$$

Nas condições do Teorema 3.7, demonstrou-se que $\lambda \geq 0$ e pela equação (3.31) tem-se $\lambda < +\infty$, assim $[\Lambda_1, \Lambda_2) \equiv [0, +\infty)$.

Seja $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2)$, submetido a um acréscimo a partir de um número arbitrariamente próximo de Λ_1 , e que a solução considerada tenha inicialmente i zeros no intervalo aberto (a,b) . Quando λ aumenta o número de zeros aumenta, devido à condição adicional a), e o Teorema 3.11. Cada zero tende a mover-se do ponto $x = b$ para $x = a$. Consequentemente, para um certo valor de λ , i.e. $\lambda = \mu_1$, a solução adquirirá um novo zero, o qual aparecerá no ponto $x = b$ e então deslocar-se-á, quando λ aumenta, em direção ao ponto $x = a$. Para o valor $\lambda = \mu_{1+1}$ outro zero aparecerá em $x = b$, e assim por diante. Então existe uma sequência de números discretos, e portanto contáveis, $\mu_1, \mu_{1+1}, \mu_{1+2}, \dots$ os quais têm um ponto limite Λ_2 , e são tais que ao realizar a desigualdade $\mu_m < \lambda < \mu_{m+1}$, as equações (3.28) e (3.29a) admitem uma única solução com exatamente $(m+1)$ zeros em (a,b) .

Pelo Teorema 3.13, quando λ varia de μ_m a μ_{m+1} , a expressão $k(b,\lambda) \psi'(b,\lambda)/\psi(b,\lambda)$ é uma função monotônica decrescente de λ . Este termo deve necessariamente decrescer de $+\infty$ a $-\infty$, pois, quando $\lambda = \mu_m$ ou $\lambda = \mu_{m+1}$, $\psi(b,\lambda) = 0$ e $\psi'(b,\lambda) \neq 0$.

Analisa-se agora o efeito da imposição da segunda condição de contorno (3.29b). Assume-se que $\beta_1 \neq 0$, pois, caso contrário a segunda condição de contorno torna-se $\psi(b,\lambda) = 0$, e os autovalores são $\mu_1, \mu_{1+1}, \dots$ oscilante neste intervalo. Pelo Teorema 3.11 $\phi(x,\lambda)$ é

Uma vez que $k(b,\lambda) \psi'(b,\lambda)/\psi(b,\lambda)$ é uma função que diminui, com o aumento de $\lambda \in (\mu_m, \mu_{m+1})$, de $+\infty$ para $-\infty$; e que $-k(b,\lambda)\beta_0/\beta_1$ aumenta no mesmo intervalo, existe um valor simples de $\lambda \in (\mu_m, \mu_{m+1})$ para o qual estas duas expressões tornam-se iguais, i.e., para o qual a segunda condição de contorno é satisfeita, bem como a primeira. Para este valor de λ , nomeado $\lambda_{(m+1)}$, o sistema formado pelas equações (3.28) e (3.2a,b) é compatível, i.e., admite uma solução que tem exatamente $(m+1)$ zeros em (a,b) ■



Teorema 3.16 - Os autovalores do sistema formado pelas equações (3.28) e (3.29a,b) e pelas condições adicinasais postuladas no Teorema 3.15, podem ser arranjados em ordem crescente de valor, sendo denotados por $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots$; se as autofunções correspondentes são $\psi_0(x, \lambda_0), \psi_1(x, \lambda_1), \dots, \psi_m(x, \lambda_m), \dots$ então $\psi_m(x, \lambda_m)$ terá exatamente m zeros em (a,b).

Demonstração: Fazendo a seguinte hipótese

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left\{ -\frac{g(\lambda)}{k(\lambda)} \right\} \rightarrow -\infty, \quad (3.32)$$

e lembrando que $k(\lambda) > 0$, implica que $g(\lambda) > 0$ na vizinhança de λ_1 .

Considerando a equação de comparação

$$\frac{d^2 \phi(x, \lambda)}{dx^2} - s^2(\lambda) \phi(x, \lambda) = 0, \quad x \in [a, b], \quad s^2(\lambda) = g(\lambda)/k(\lambda), \quad (3.33)$$

cujas soluções satisfaça à condição inicial

$$\phi(a, \lambda) = -\alpha_1, \quad \left. \frac{d\phi(x, \lambda)}{dx} \right|_{x=a} = \alpha_0, \quad (3.34)$$

então

$$\phi(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{s} - \alpha_1 \right) e^{s(x-a)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{s} + \alpha_1 \right) e^{s(a-x)}. \quad ([a, b]) \quad (3.35)$$

Para valores de $s(\lambda)$ suficientemente grandes, i.e., para valores de λ na vizinhança de λ_1 , $\phi(x, \lambda)$ aproxima-se de $\{-\alpha_1 \cosh[s(x-a)]\}$ que não possui zeros em $[a, b]$ e portanto não é uma solução oscilante neste intervalo. Pelo Teorema 3.11 $\phi(x, \lambda)$ é no mínimo tão oscilante quanto $\psi(x, \lambda)$, como $\phi(x, \lambda)$ é não oscilante na vizinhança de λ_1 , $\psi(x, \lambda)$ também é não oscilante nesta vizinhança, portanto $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \psi(x, \lambda)$ não possui qualquer zero em $[a, b]$.

Quando aumenta-se λ de λ_1 para λ_2 , ocorrerá um primeiro valor $\lambda = \mu_0$ onde $\psi(b, \mu_0) = 0$. Demonstra-se agora que existe um e apenas um autovalor $\lambda_0 \in (\lambda_1, \mu_0)$ e que satisfaz as equações (3.28) e (3.29a,b). Como $\phi(x, \lambda)$ e $\psi(x, \lambda)$, $x \in [a, b]$, não possui zeros em (λ_1, μ_0) , segue pelo Teorema 3.13 que

dependendo dos valores de α , β e γ .
 Demonstração: É necessário mostrar que a função de variáveis
 no sistema de equações (3.1b) e (3.2a,b):

Pela equação (3.32) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} s^2(\lambda) \rightarrow +\infty$, e consequentemente

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left\{ \frac{\phi'(b, \lambda)}{\phi(b, \lambda)} \right\} \rightarrow +\infty,$$

como $k(\lambda) > 0$, implica

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left\{ \frac{k(b, \lambda) \psi'(b, \lambda)}{\psi(b, \lambda)} \right\} \rightarrow +\infty.$$

Quando aumenta-se λ de λ_1 para μ_0 , $k(b, \lambda) \psi'(b, \lambda) / \psi(b, \lambda)$ diminui monotonicamente de $+\infty$ para $-\infty$. Portanto o sistema formado pelas equações (3.28) e (3.29a,b) possui somente um autovalor $\lambda_0 \in (\lambda_1, \mu_0)$. Pelo Teorema 3.15 tem-se que os autovalores restantes formam um conjunto enumerável, assim $\lambda_i \in (\mu_0, \lambda_2)$, $i = 1, 2, \dots$. Também pelo Teorema 3.15, a quantidade de zeros de $\psi(x, \lambda_m)$, $x \in (a, b)$ é exatamente m . No caso do problema de Sturm-Liouville, $g(x, \lambda) = d(x) - \lambda w(x)$ e $k(x, \lambda) = k(x)$ ■

Teorema 3.17 - Sejam $\lambda_m \in \mathbb{R}$ e $\psi(x, \lambda_m) \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ os autovalores e as autofunções que satisfazem o sistema definido pelas equações (3.1b) e (3.2a,b). Então o espaçamento assintótico, i.e., quando $\sqrt{\lambda} \rightarrow +\infty$, entre dois autovalores consecutivos é

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\sqrt{\lambda_{m+1}} - \sqrt{\lambda_m}] = \frac{\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx}; \quad (3.36)$$

bem como o valor dos autovalores pode ser expresso por

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{\lambda_m} = \frac{m\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx}$$

ou

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{\lambda_m} = \frac{\frac{\pi}{2} + m\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx} \quad (3.37a, b)$$



dependendo dos valores de α_0 , α_1 , β_0 e β_1 .

Demonstração: É necessário efetuar a seguinte mudança de variáveis no sistema de equações (3.1b) e (3.2a,b):

$$z = \frac{\int_a^x \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx}, \quad x \in [a, b], \quad z \in [0, 1];$$

$$\mu = \sqrt{\lambda} \int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx, \quad (3.38a-c)$$

$$\Omega(z, \mu) = [k(x)w(x)]^{1/4} \psi(x, \lambda).$$

Após estas mudanças de variáveis o sistema torna-se

$$\frac{d^2 \Omega(z, \mu)}{dz^2} + [\mu^2 - \rho(z)] \Omega(z, \mu) = 0, \quad (3.39)$$

$$F_1[\Omega(0, \mu)] \equiv \alpha_0^* \Omega(0, \mu) + \alpha_1^* \frac{d\Omega(z, \mu)}{dz} \Big|_{z=0} = 0,$$

(3.40a,b)

$$F_2[\Omega(1, \mu)] \equiv \beta_0^* \Omega(1, \mu) + \beta_1^* \frac{d\Omega(z, \mu)}{dz} \Big|_{z=1} = 0,$$

onde

$$\rho(z) = \frac{d(x)}{k(x)} \int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx + \frac{\frac{d^2}{dz^2} [k(x)w(x)]^{1/4}}{[k(x)w(x)]^{1/4}},$$

$$\alpha_0^* = \alpha_0 - \alpha_1 \frac{\frac{d}{dz} [k(x)w(x)]^{1/2}}{2k(x) \int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx} \Big|_{x=a},$$

$$\alpha_1^* = \alpha_1 \frac{[w(x)/k(x)]^{1/2}}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx} \Big|_{x=a},$$

$$\beta_0^* = \beta_0 - \beta_1 \frac{\frac{d}{dz} [k(x)w(x)]^{1/2}}{2k(x) \int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx} \Big|_{x=b},$$

$$\beta_1^* = \beta_1 \frac{[w(x)/k(x)]^{1/2}}{\int_a^b [\frac{w(x)}{k(x)}]^{1/2} dx} \Big|_{x=b}.$$

Percebe-se pela equação (3.38b) que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mu \rightarrow +\infty$, assim $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [\mu^2 - \rho(z)] \rightarrow \mu^2$, portanto a equação (3.39) torna-se

$$\frac{d^2 \Omega(z, \mu)}{dz^2} + \mu^2 \Omega(z, \mu) = 0, \quad (3.41)$$

cujas solução geral é

$$\Omega(z, \mu) = A \sin(\mu z) + B \cos(\mu z). \quad (3.42)$$

Substituindo a expressão (3.42) nas condições de contorno (3.40a,b) obtém-se a auto-condição nos moldes das equações (3.4a,b), (3.5) e (3.6), que é expressa por

$$\mu [\alpha_1^* \beta_0^* - \beta_1^* \alpha_0^*] \cos(\mu) = [\alpha_0^* \beta_0^* + \alpha_1^* \beta_1^* \mu^2] \sin(\mu). \quad (3.43)$$

Em função dos valores de α_0^* , α_1^* , β_0^* , β_1^* esta equação apresenta as seguintes possibilidades:

a) Se $(\alpha_1^* \beta_0^* - \beta_1^* \alpha_0^*) = 0$, implica de imediato que $\sin(\mu) = 0$ e portanto $\mu_m = m\pi$ e $\mu_{(m+1)} - \mu_m = \pi$, $m \in \mathbb{N}$. Utilizando a equação (3.38b) resultam os autovalores assintóticos

$$\sqrt{\lambda_m} = \frac{m\pi}{\int_a^b [\frac{w(x)}{k(x)}]^{1/2} dx}$$

e o espaçamento assintótico entre os autovalores

$$\sqrt{\lambda_{(m+1)}} - \sqrt{\lambda_m} = \frac{\pi}{\int_b^a [\frac{w(x)}{k(x)}]^{1/2} dx}.$$

b) Se $(\alpha_1^* \beta_0^* - \beta_1^* \alpha_0^*) \neq 0$ e $\alpha_1^* \beta_1^* \neq 0$, a equação (3.43) pode ser reestruturada da seguinte forma

$$\cotg(\mu) = \frac{1}{\alpha_1^* \beta_0^* - \beta_1^* \alpha_0^*} \left[\alpha_1^* \beta_1^* \mu + \frac{\alpha_0^* \beta_0^*}{\mu} \right], \quad (3.44)$$

quando $\mu \rightarrow +\infty \Rightarrow |\alpha_0^* \beta_0^* / \mu| \rightarrow 0$, $|\alpha_1^* \beta_1^* \mu| \rightarrow +\infty$ e $|\cotg(\mu)| \rightarrow +\infty$, implicando de imediato que $\sin(\mu) = 0$ e portanto $\mu_m = m\pi$, e

$\mu_{(m+1)} - \mu_m = \pi$, $m \in \mathbb{N}$. Procedendo da mesma maneira do item a, tem-se

$$\sqrt{\lambda}_m = \frac{m\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx},$$

$$\sqrt{\lambda}_{(m+1)} - \sqrt{\lambda}_m = \frac{\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx}.$$

c) Se $(\alpha_1^* \beta_0^* - \beta_1^* \alpha_0^*) \neq 0$ e $\alpha_1^* \beta_1^* = 0$, na equação (3.44) quando $\mu \rightarrow +\infty \Rightarrow |\alpha_0^* \beta_0^* / \mu| \rightarrow 0$, $|\alpha_1^* \beta_1^* \mu| \rightarrow 0$ e $\cotg(\mu) \rightarrow 0$, implicando de imediato que $\cos(\mu) = 0$ e portanto $\mu_m = \frac{\pi}{2} + m\pi$ e $\mu_{(m+1)} - \mu_m = \pi$, $m \in \mathbb{N}$. Procedendo da mesma maneira dos itens a e b, tem-se

$$\sqrt{\lambda}_m = \frac{\frac{\pi}{2} + m\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx}$$

$$\sqrt{\lambda}_{(m+1)} - \sqrt{\lambda}_m = \frac{\pi}{\int_a^b \left[\frac{w(x)}{k(x)} \right]^{1/2} dx} \quad \blacksquare$$

3.1.4. Problemas de Sturm-Liouville Singulares.

Nas equações (3.1a,b) os coeficientes variáveis $k(x)$, $w(x)$ e $d(x)$ satisfaziam certas condições sobre o intervalo fechado $[a,b]$. A expressão problemas de Sturm-Liouville singulares refere-se aqui a determinada classe de problemas em que as funções $k(x)$, $w(x)$ e $d(x)$ satisfazem as condições previamente estabelecidas, porém apenas sobre o intervalo aberto (a,b) , e que pelo menos uma destas funções não satisfaz as condições em um ou ambos os pontos do contorno.

Para algum caso objetivo de problema de Sturm-Liouville singular faz-se necessário repetir toda a análise efetuada até o momento para verificar quais propriedades mantêm-se e quais outras são obtidas (BOYCE, 1979: 518).



3.2. Expansão em Série de Funções Ortogonais.

Apresenta-se agora os principais teoremas sobre a expansão de funções em série de funções ortogonais. Este texto é uma síntese/adaptação dos livros de BOYCE (1979), HILDEBRAND (1962), LIMA (1983), SANSONE (1959) e SHILOV (1974).

3.2.1. Funções Quadrado Integráveis.

Os conceitos sobre teoria de integração aqui mencionados podem ser encontrados em APOSTOL (1974), BARTLE (1976), GATICA (1977) e LIMA (1989).

Uma função possui uma dada propriedade em quase todos os lugares (eqtl) de um conjunto $I = [a, b]$ se possui esta propriedade em todos os pontos de I exceto em um conjunto de medida nula.

Se I é um conjunto mensurável de pontos de uma linha reta, $\psi(x)$ é uma função definida eqtl em I e $\psi^2(x)$ é integrável, então $\psi(x)$ é dita quadrado integrável em I . Assume-se no restante do capítulo que o conjunto mensurável I é de medida finita.

Teorema 3.18 - Se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são duas funções mensuráveis e quadrado integráveis em I , então o produto de $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ é também integrável em I .

Demonstração: Como $\int_I \psi_1(x) \psi_2(x) dx \leq \int_I |\psi_1(x) \psi_2(x)| dx$, é suficiente mostrar que $|\psi_1(x) \psi_2(x)|$ é integrável em I . Como $(|\psi_1(x)| - |\psi_2(x)|)^2 = \psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) - 2|\psi_1(x) \psi_2(x)| \geq 0$ implica $|\psi_1(x) \psi_2(x)| \leq \frac{1}{2} \{\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)\}$ eqtl em I e desta forma $|\psi_1 \psi_2|$ admite um majorante que é integrável ■

Corolário - Se $\psi_1(x)$ é uma função quadrado integrável em I , então $\psi_1(x)$ é integrável em I .

Demonstração: Considerando que a constante 1 é quadro integrável em I , desta forma, pelo Teorema 3.18, o produto $1 \cdot \psi_1(x) = \psi_1(x)$ é integrável em I ■

Daqui em diante, quando não houver possibilidade de equívocos, as funções $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ serão designadas apenas por $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, n \in \mathbb{N}$.



Teorema 3.19 - Se $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ são funções quadrado integráveis em I , e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes, então $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n$ é função quadrado integrável em I .

Demonstração: Uma vez que

$$(c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \psi_i \psi_j \quad (3.45)$$

e que o segundo membro é integrável, segue que o primeiro membro é integrável em I ■

3.2.2. Funções Linearmente Independentes.

As funções $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ são ditas linearmente dependentes em I se existe n constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, nem todas nulas, para as quais a função $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n$ é nula eqtl. Se tais constantes não existirem, as n funções são ditas linearmente independentes.

Teorema 3.20 - Uma condição necessária e suficiente para as funções $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ quadrado integráveis em I , serem linearmente dependentes em I , relativamente a $w(x) > 0$, também quadrado integrável, é que o determinante de Gram (1883)

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \begin{vmatrix} \int_I w \psi_1^2 dx & \int_I w \psi_1 \psi_2 dx & \dots & \int_I w \psi_1 \psi_n dx \\ \int_I w \psi_2 \psi_1 dx & \int_I w \psi_2^2 dx & \dots & \int_I w \psi_2 \psi_n dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_I w \psi_n \psi_1 dx & \int_I w \psi_n \psi_2 dx & \dots & \int_I w \psi_n^2 dx \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

anule-se.

Demonstração: A condição é suficiente. De fato, se $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$ é possível encontrar n constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, nem todas nulas para as quais

$$\sum_{i=1}^n c_i P_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

onde

$$P_{ij} = \int_I w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx.$$

Se $F(x)$ é definido por $F(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)$, então

$$\int_I w F \psi_j dx = \sum_{i=1}^n c_i P_{ij} = 0,$$

assim,

$$0 = \sum_{j=1}^n c_j \int_I w F \psi_j dx = \int_I w \sum_{j=1}^n c_j \psi_j \sum_{i=1}^n c_i \psi_i dx = \int_I w F^2 dx, \quad (3.47)$$

então $F^2(x)$ e consequentemente $F(x)$ é nulo eqtl em I .

Reciprocamente, se as funções $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ são linearmente dependentes em I , existirá um sistema de constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, nem todas nulas de tal forma que $\sum_{i=1}^n c_i \psi_i = 0$ eqtl em I . Disto segue

$$0 = \int_I w \sum_{i=1}^n c_i \psi_i dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_I w \psi_i \psi_j dx = \sum_{i=1}^n c_i P_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (3.48)$$

e portanto $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$ ■

Teorema 3.21 - O posto da matriz correspondente ao determinante $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ fornece o número máximo de funções linearmente independentes. Se o posto é $r \leq n$, $r \in \mathbb{N}$, então existem r funções são linearmente independentes, e as outras $(n-r)$ funções são linearmente dependentes destas.

Demonstração: Seja r o posto da matriz correspondente ao determinante de Gram. Sem perda de generalidade, assume-se que o posto é formado pelas primeiras r linhas e pelas primeiras r colunas. Caso contrário, após uma sequência de permutas de linhas e de permutas de colunas, chega-se ao enunciado da frase anterior. Uma vez que as funções $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ são linearmente independentes segue que $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r) \neq 0$. Como o posto é r segue que $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r, \psi_{r+j}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n-r$; implicando, pelo Teorema 3.20, que cada função ψ_{r+j} é linearmente dependente de $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$.

Teorema 3.22 - Se as funções $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, quadrado integráveis em I , são linearmente independentes, então $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) > 0$.

Demonstração: Para as constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, nem todas nulas $(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_n \psi_n)^2 > 0$, eqtl em I . Assim

$$\int_I w (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_n \psi_n)^2 dx > 0 \quad (3.49)$$

e consequentemente a forma quadrática em $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \int_I w \psi_i \psi_j dx > 0 \quad (3.50)$$

e seu determinante é $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) > 0$ ■

Dos Teoremas 3.20 e 3.22 segue que se $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ são quadrado integráveis em I , então $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \geq 0$, sendo que a igualdade vale apenas para os casos em que as funções consideradas são linearmente dependentes em I .

Teorema 3.23 - Se uma função $\psi(x)$, definida em I , é quadrado integrável, então

$$\left(\int_I w \psi(x) dx \right)^2 \leq M(I) \int_I w \psi^2(x) dx, \text{ onde } M(I) = \int_I w(x) dx.$$

Demonstração: Sejam as funções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ quadrado integráveis em I . Como

$$G(\psi_1, \psi_2) = \begin{vmatrix} \int_I w \psi_1^2(x) dx & \int_I w \psi_1(x) \psi_2(x) dx \\ \int_I w \psi_1(x) \psi_2(x) dx & \int_I w \psi_2^2(x) dx \end{vmatrix} \geq 0 \quad (3.55)$$

ou

$$G(\psi_1, \psi_2) = \int_I w \psi_1^2 dx \int_I w \psi_2^2 dx - \left(\int_I w \psi_1 \psi_2 dx \right)^2 \geq 0 \quad (3.51)$$

assim

$$\left(\int_I w \psi_1 \psi_2 dx \right)^2 \leq \int_I w \psi_1^2 dx \int_I w \psi_2^2 dx. \quad (3.52)$$

Fazendo $\psi_1(x) = \psi(x)$ e $\psi_2(x) = 1$ na equação (3.52), resulta

$$\left(\int_I w(x) \psi(x) dx \right)^2 \leq M(I) \int_I w(x) \psi^2(x) dx \quad (3.53)$$

3.2.3. Introdução ao Espaço de Hilbert.

Denomina-se um Espaço Real de Hilbert, ou simplesmente espaço H , o conjunto de todas as funções que são quadrado integráveis em I . Duas funções são consideradas, como o mesmo elemento de H se são iguais eqtl em I . Qualquer uma das funções deste conjunto será

um ponto de H. A função que anula-se eqtl em I é a origem de H. Dois pontos $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são distintos em H se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são diferentes eqtl em I. Se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são dois pontos de H, denomina-se distância entre estes pontos a raiz quadrada positiva de $\int_I w (\psi_1 - \psi_2)^2 dx$; consequentemente se d é a distância entre $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, então $d \geq 0$ e

$$d^2 = \int_I w(x) [\psi_1(x) - \psi_2(x)]^2 dx. \quad (3.54)$$

Se $\psi(x)$ e $\phi(x)$ são dois pontos distintos de H e ϕ é distinto da origem, chama-se linha reta passando através dos pontos $\psi(x)$ e $\phi(x)$ a totalidade dos pontos $\psi(x) + v\phi(x)$, onde $v \in (-\infty, +\infty)$.

Considere-se a linha $v\psi(x)$ passando pela origem; os pontos desta linha que estão a uma distância unitária da origem correspondem a valores de v para os quais $v^2 \int_I w(x) \psi^2(x) dx = 1$; consequentemente, existe na linha $v\psi(x)$ somente dois pontos $\psi(x) / [\int_I w \psi^2 dx]^{1/2}$ e $-\psi(x) / [\int_I w \psi^2 dx]^{1/2}$, os quais estão a uma distância unitária da origem.

Uma função $\psi(x)$ quadrado integrável em I é dita normal ou normalizada em I se

$$\int_I w(x) \psi^2(x) dx = 1. \quad (3.55)$$

As funções normais em I são todos os pontos, e somente aqueles pontos de H que estão a uma distância unitária da origem.

Normalizar uma função $\psi(x)$ quadrado integrável e não nula eqtl em I, significa determinar um fator c para o qual $c\psi(x)$ é normal em I. Os valores de c que satisfazem esta condição são:

$$c = \pm \frac{1}{[\int_I w(x) \psi^2(x) dx]^{1/2}}. \quad (3.56)$$

Seja $v\psi(x)$ e $\xi\phi(x)$ duas linhas de H, passando pela origem; da desigualdade (3.52) tem-se

$$(\int_I w(x) \psi(x) \phi(x) dx)^2 \leq \int_I w(x) \psi^2(x) dx \int_I w(x) \phi^2(x) dx,$$

disto segue a existência de um número $\omega \in [0, \pi]$, de tal forma que

$$\cos(\omega) \equiv \frac{\int_I w(x) \psi(x) \phi(x) dx}{[\int_I w(x) \psi^2(x) dx \int_I w(x) \phi^2(x) dx]^{1/2}}. \quad (3.57)$$

O número $\omega \in [0, \pi]$ que satisfaz a equação (3.57) é denominado

de ângulo entre as duas linhas $\nu\psi(x)$ e $\xi\phi(x)$ em H . Caso $\int_I w(x)\psi(x)\phi(x)dx = 0$, implica que $\omega = \pi/2$. Diz-se, neste caso, que as duas linhas $\nu\psi(x)$ e $\xi\phi(x)$ são ortogonais em H , em I . A condição necessária e suficiente para $\omega = 0, \pi$ é

$$\left(\int_I w(x)\psi(x)\phi(x)dx\right)^2 = \int_I w(x)\psi^2(x)dx \int_I w(x)\phi^2(x)dx, \quad (3.58)$$

implicando que as funções $\psi(x)$ e $\phi(x)$ são linearmente dependentes.

Teorema 3.24 - Se d_1 e d_2 são as distâncias de dois pontos $\psi(x)$ e $\phi(x)$ de H , até a origem, se ω é o ângulo de duas retas $\nu\psi(x)$ e $\xi\phi(x)$, e se d é a distância entre os pontos $\psi(x)$ e $\phi(x)$ então

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(\omega). \quad (3.59)$$

Demonstração: Da equação (3.54) tem-se

$$d^2 = \int_I w(x)\psi^2(x)dx + \int_I w(x)\phi^2(x)dx - 2 \int_I w(x)\psi(x)\phi(x)dx$$

ou

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 \left[\int_I w\psi^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_I w\phi^2 dx \right]^{1/2} \frac{\int_I w\psi\phi dx}{\left[\int_I w\psi^2 dx \int_I w\phi^2 dx \right]^{1/2}} \quad (3.60)$$

assim

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(\omega) \quad \blacksquare$$

Teorema 3.25 - Seja $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, funções quadrado integráveis em I e seja $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, funções definidas pela seguinte equação

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \psi_j(x), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

onde b_{ij} são constantes de tal forma que $B = \det[b_{ij}] \neq 0$. Então $G(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = B^2 G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$.

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} c_{ij}^* &= \int_I w \phi_i \phi_j dx = \int_I w \sum_{k=1}^n b_{ik} \psi_k \sum_{m=1}^n b_{jm} \psi_m dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n b_{ik} b_{jm} \int_I w \psi_k \psi_m dx, \end{aligned}$$

fazendo $c_{km} = \int_I w \psi_k \psi_m dx$, resulta



$$c_{ij}^* = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n b_{ik} b_{jm} c_{km} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^n b_{jm} c_{km} \right) b_{ik}. \quad (3.65)$$

Definindo-se $b_{jk}^* = \sum_{m=1}^n b_{jm} c_{km}$, tem-se $c_{ij}^* = \sum_{k=1}^n b_{jk}^* b_{ik}$,

e conseqüentemente

$$BG(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \det [b_{jm}] \det [c_{km}] = \det [b_{jk}^*],$$

e

$$B^2G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \det [b_{ik}] \det [b_{jk}^*] = \det [c_{ij}^*] = G(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \quad (3.61)$$

Teorema 3.26 - Se $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$ são funções quadrado integráveis e linearmente independentes em I , existe uma combinação linear delas que é ortogonal a $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$.

Demonstração: Escrevendo-se

$$\phi_n(x) = \gamma_1 \psi_1(x) + \gamma_2 \psi_2(x) + \dots + \gamma_n \psi_n(x),$$

$$c_{ij} = \int_I w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad (3.62a-c)$$

$$b_j = \int_I w(x) \psi_j(x) \phi_n(x) dx,$$

e considerando a ortogonalidade de $\phi_n(x)$ a $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}$, implica

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i c_{ij} = b_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.63)$$

O teorema estará demonstrado se $\sum_{i=1}^n |\gamma_i| \neq 0$.

Como $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$ são linearmente independentes tem-se que $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \neq 0$ e $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \neq 0$. Multiplicando a equação (3.62a) por $w(x)\phi_n(x)$ e integrando em I , tem-se γ_n pela expressão

$$\int_I w \phi_n^2(x) dx = \gamma_n \int_I w(x) \psi_n(x) \phi_n(x) dx, \quad (3.64)$$

assim a equação (3.63) pode ser rearranjada para formar o sistema linear de equações

$$\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i c_{ij} = -\gamma_n c_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.65)$$

que possui $(n-1)$ equações e $(n-1)$ incógnitas, sendo não homogêneo, uma vez que $\gamma_n \neq 0$ (equação (3.64)); e não singular uma vez que $\det [c_{ij}] = G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \neq 0$; por conseguinte o sistema possui solução não trivial de tal forma que $\sum_{i=1}^n |\gamma_i| \neq 0$. Portanto existe $\phi_n(x) \neq 0$ ■

Teorema 3.27 - Sejam $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, funções linearmente independentes e quadrado integráveis em I ; seja ρ_1 a distância de $\psi_1(x)$ à origem; $\phi_3(x)$ a combinação linear de $\psi_1(x), \psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$, normal e ortogonal a $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$; $\phi_4(x)$ a combinação linear de $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ e $\psi_4(x)$, normal e ortogonal a $\psi_1(x), \psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$; ...; $\phi_n(x)$ a combinação linear de $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{n-1}(x)$, normal e ortogonal a $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{n-1}(x)$. Então tem-se a seguinte expressão

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_n^2 \sin^2(\psi_1, \psi_2) \cos^2(\psi_3, \phi_3) \cos^2(\psi_4, \phi_4) \dots \cos^2(\psi_n, \phi_n), \quad (3.66)$$

onde o termo (ψ_n, ϕ_n) representa o ângulo entre estas duas funções em H .

Demonstração: Da equação (3.62a), uma vez que $\gamma_n \neq 0$, tem-se

$$\psi_n(x) = \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x) + \dots + \alpha_{(n-1)} \psi_{(n-1)}(x) + \alpha_n \phi_n(x), \quad (3.68)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{(n-1)}, \alpha_n$ são constantes nem todas nulas. Multiplicando por $w(x) \phi_n(x)$ e integrando sobre I , tem-se

$$\alpha_n = \int_I w(x) \psi_n(x) \phi_n(x) dx,$$

ou

$$\alpha_n = [\int_I w \psi_n^2 dx \int_I w \phi_n^2 dx]^{1/2} \frac{\int_I w \psi_n \phi_n dx}{[\int_I w \psi_n^2 dx \int_I w \phi_n^2 dx]^{1/2}} = \rho_n \cos(\psi_n, \phi_n).$$

Quando efetua-se a transformação linear que leva $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}, \phi_n)$ em $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}, \psi_n)$ o determinante da transformação é α_n , assim pelo Teorema 3.24 resulta

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}, \psi_n) = \rho_n^2 \cos^2(\psi_n, \phi_n) G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}, \phi_n),$$

e considerado que $\phi_n(x)$ é normal e ortogonal a $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}$, tem-se

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}, \phi_n) = G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}),$$

e conseqüentemente chega-se à fórmula de recorrência

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}, \psi_n) = \rho_n^2 \cos^2(\psi_n, \phi_n) G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{(n-1)}), \quad (3.67)$$

Isto implica

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \rho_n^2 \rho_{n-1}^2 \dots \rho_3^2 \cos^2(\psi_n, \phi_n) \cos^2(\psi_{n-1}, \phi_{n-1}) \dots$$

$$\dots \cos^2(\psi_3, \phi_3) G(\psi_1, \psi_2),$$

como

$$G(\psi_1, \psi_2) = \int_I w \psi_1^2 dx \int_I w \psi_2^2 dx - \left(\int_I w \psi_1 \psi_2 dx \right)^2$$

$$= \left\{ 1 - \left[\frac{\int_I w \psi_1 \psi_2 dx}{\left(\int_I w \psi_1^2 dx \int_I w \psi_2^2 dx \right)^{1/2}} \right]^2 \right\} \rho_1^2 \rho_2^2$$

$$= [1 - \cos^2(\psi_1, \psi_2)] \rho_1^2 \rho_2^2$$

ou

$$G(\psi_1, \psi_2) = \rho_1^2 \rho_2^2 \sin^2(\psi_1, \psi_2); \quad (3.68)$$

tem-se

$$G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_n^2 \sin^2(\psi_1, \psi_2) \cos^2(\psi_3, \phi_3) \dots$$

$$\dots \cos^2(\psi_n, \phi_n) \blacksquare \quad (3.69)$$

Teorema 3.28 - O determinante de Gram de n funções normalizadas é menor ou igual à unidade, e se é igual à unidade, as funções são mutuamente ortogonais.

Demonstração: Sejam $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ funções normalizadas, então $\rho_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Considerando que $\rho_1^2 = 1$, $\sin^2(\psi_1, \psi_2) \leq 1$, $\cos^2(\psi_1, \phi_1) \leq 1$, então, pela equação (3.66) resulta $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \leq 1$.

Para $G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 1$ é necessário que $\sin(\psi_1, \psi_2) = 1$, $\cos^2(\psi_3, \phi_3) = 1, \dots, \cos^2(\psi_n, \phi_n) = 1$. De $\sin^2(\psi_1, \psi_2) = 1$ implica

que ψ_1 é ortogonal a ψ_2 . De $\cos^2(\psi_3, \phi_3) = 1$, segue

$$\left(\int_I w(x) \psi_3(x) \phi_3(x) dx \right)^2 = \int_I w(x) \psi_3^2 dx \int_I w(x) \phi_3^2 dx,$$

como $\psi_3(x)$ e $\phi_3(x)$, são linearmente dependentes, i.e., $\phi_3(x) = \gamma_1 \psi_1(x) + \gamma_2 \psi_2(x) + \gamma_3 \psi_3(x)$, $|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| \neq 0$, e por definição $\phi_3(x)$ é ortogonal a $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, portanto $\psi_3(x)$ é ortogonal a $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. E assim por diante ■

3.2.4. Aproximação Linear de Funções.

Um sistema de funções mutuamente ortogonais e normais é dito um sistema ortonormal e as funções são chamadas ortonormais.

Teorema 3.29 - Sejam $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ funções quadrado integráveis e linearmente independentes, em I , então existirá n combinações lineares delas, as quais são ortonormais.

Demonstração: Pelo Teorema 3.26 existe n funções normais $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$, de tal forma que

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \psi_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad c_{ii} \neq 0;$$

$$\int_I w(x) \phi_i(x) \psi_j(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, i-1;$$

$$\int_I w(x) \phi_i^2(x) dx = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

As funções $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ são mutuamente ortogonais; de fato para $i < j$

$$\int_I w(x) \phi_i \phi_j dx = \int_I w \phi_j \sum_{m=1}^n c_{im} \psi_m dx = \sum_{m=1}^n c_{im} \int_I w \phi_j \psi_m dx = 0 \quad \blacksquare$$

(3.69)

Considera-se agora o problema de determinar uma combinação linear $(c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \dots + c_n \psi_n(x))$ de n funções $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, quadrado integráveis em I , a qual tenha uma distância mínima de outra função $F(x)$, também quadrado integrável em I . Este procedimento é denominado a melhor aproximação na média, de $F(x)$ relativamente à combinação linear de $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

Teorema 3.30 - Se $F(x)$ é quadrado integrável em I , e $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ são ortonormais em I , a combinação linear

Demonstração: Desenvolvendo a equação (3.71) e considerando a
 $\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)$ na qual c_i são os coeficientes da sequência é expresso
 por

$$c_i = \int_I w(x) \psi_i(x) F(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.70)$$

é a melhor aproximação, na média, de $F(x)$ de todas as possíveis combinações de $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.29, pode-se supor que o sistema $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ é ortonormal ou ortonormalizável. A distância entre

$F(x)$ e $\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)$ é

$$d^2 = \int_I w(x) [F(x) - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)]^2 dx, \quad (3.71)$$

ou

$$d^2 = \int_I w F^2 dx + \sum_{i=1}^n c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i \int_I \psi_i F dx,$$

que será mínima quando $\frac{\partial(d^2)}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$; assim obtém-se

$$\frac{\partial(d^2)}{\partial c_i} = -2 \int_I w (F - \sum_{j=1}^n c_j \psi_j) \psi_i dx = 0,$$

ou

$$c_i = \int_I w(x) \psi_i(x) F(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Para c_i fornecido pela equação (3.70), tem-se a segunda derivada da distância relativamente a c_i , fornecida por

$$\frac{\partial^2(d^2)}{\partial c_i^2} = 2 \int_I w \psi_i^2(x) dx = 2 > 0, \quad (3.72)$$

e por conseguinte d^2 é mínimo nesta condição ■

Teorema 3.31 - Se $\{\psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots\}$ é uma sequência de funções ortonormais em I ; $F(x)$ é uma função quadrado integrável em I ; $\{c_i\}$ é uma sequência de coeficientes relativos à sequência $\{\psi_i(x)\}$,

fornecidos pela equação (3.70), então a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ é convergente, e também satisfaz a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_I w(x) F^2(x) dx. \quad (3.73)$$

Demonstração: Desenvolvendo a equação (3.71) e considerando a (3.70), tem-se

$$d^2 = \int_I w(x) \left[F(x) - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x) \right]^2 dx ,$$

$$d^2 = \int_I w F^2 dx - 2 \int_I w F \sum_{i=1}^n c_i \psi_i dx + \int_I w \sum_{i=1}^n c_i \psi_i \sum_{j=1}^n c_j \psi_j dx ,$$

$$d^2 = \int_I w F^2 dx - 2 \sum_{i=1}^n c_i \int_I w F \psi_i dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \int_I w \psi_i \psi_j dx ,$$

$$d^2 = \int_I w F^2 dx - \sum_{i=1}^n c_i^2 \geq 0 ,$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \int_I w(x) F^2(x) dx ,$$

para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ e em particular para $n \rightarrow \infty$, assim

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_I w(x) F^2(x) dx \quad \blacksquare$$

3.2.5. Convergência na média

Se $p > 0$ e $|\psi(x)|^p$ é integrável em I , então $\psi(x)$ é dita *integrável L^p em I* e escreve-se $\psi(x) \in L^p$ em I .

Se $\{\psi_n\}$ é uma sequência de funções integráveis L^p em I , e $\psi(x)$ é integrável L^p em I , então diz-se que $\{\psi_n\}$ *converge na média de ordem p em I para $\psi(x)$* , ou *converge fortemente L^p em I para $\psi(x)$* , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |\psi(x) - \psi_n(x)|^p dx = 0 . \quad (3.74)$$

Se $p = 2$, diz-se que $\{\psi_n(x)\}$ *converge na média em I para $\psi(x)$* ; se $p = 1$, diz-se que $\{\psi_n(x)\}$ *converge em I para $\psi(x)$* .

Teorema 3.32 - Sejam $\{\psi_i(x)\}$ uma sequência de funções ortogonais em I , $F(x)$ uma função quadrado integrável, $\{c_i\}$ a sequência de coeficientes de $F(x)$ em relação à sequência $\{\psi_i(x)\}$. Então uma condição necessária e suficiente para se manter a igualdade na equação (3.73) é que a sequência



$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x) \quad (3.75)$$

convirja na média em I para a função F(x).

Demonstração: Retendo o sinal de igualdade na equação (3.73), resulta

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \int_I w(x) F^2(x) dx ,$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i^2 = \int_I w(x) F^2(x) dx . \quad (3.76)$$

Considerando que $\int_I w \psi_i \psi_j dx = 0$, $i \neq j$; $\int_I w \psi_i^2 dx = 1$; e $c_i = \int_I w F \psi_i dx$, a equação (3.76) pode ser rearranjada para

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) [F(x) - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)]^2 dx = 0 , \quad (3.77)$$

então, escrevendo-se $\phi_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) [F(x) - \phi_n(x)]^2 dx = 0 , \quad (3.78)$$

e consequentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \rightarrow F(x)$, eqtl em I.

Reciprocamente, ao admitir-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \rightarrow F(x)$ eqtl em I, obtém-se as equações (3.78), (3.77) e por fim a equação (3.76) ■

Teorema 3.33 - Uma sequência $\{\psi_n(x)\}$ convergente na média para a função $\psi(x)$ é convergente para $\psi(x)$.

Demonstração: Utilizando o conceito contido na equação (3.53), pode-se escrever

$$0 \leq \int_I w(x) |\psi_n(x) - \psi(x)| dx \leq \{M(I) \int_I w(x) [\psi_n(x) - \psi(x)]^2 dx\}^{1/2} \quad (3.79)$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w |\psi_n - \psi| dx \leq \{M(I) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w (\psi_n - \psi)^2 dx\}^{1/2} = 0 , \quad (3.84)$$

assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |\psi_n(x) - \psi(x)| dx = 0 ,$$

e a sequência $\{\psi_n(x)\}$ converge para $\psi(x)$ ■



Teorema 3.34 - Dada uma sequência $\{\psi_n(x)\}$ de funções definida eqtl em I e quadrado integráveis em I, uma condição necessária e suficiente para sua convergência na média em I é que

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |\psi_n(x) - \psi_m(x)|^2 dx = 0, \quad (3.80)$$

Demonstração: A condição é necessária. Se a sequência $\{\psi_n(x)\}$ é convergente na média para $\psi(x)$, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I w |\psi_n - \psi_m|^2 dx = \\ &= \int_I |(\psi_n - \psi) - (\psi_m - \psi)|^2 dx \leq 2 \int_I w (\psi_n - \psi)^2 dx + 2 \int_I w (\psi_m - \psi)^2 dx, \end{aligned} \quad (3.81)$$

e devido a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w |\psi_n - \psi|^2 dx = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I w |\psi_m - \psi|^2 dx = 0,$$

segue que

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_I w(x) [\psi_n(x) - \psi_m(x)]^2 dx = 0.$$

A condição é suficiente. De fato, pela equação (3.53) pode-se escrever

$$0 \leq \int_I w |\psi_n - \psi_m| dx \leq \{M(I) \int_I w |\psi_n - \psi_m|^2 dx\}^{1/2}, \quad (3.82)$$

e em decorrência da equação (3.80), segue que

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |\psi_n(x) - \psi_m(x)| dx = 0 \quad \blacksquare$$

Teorema 3.35 - Se $\{\psi_n(x)\}$ é uma sequência de funções e $F(x)$ é uma função definida eqtl em I e quadrado integrável em I, e se

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_I w(x) [\psi_n(x) - \psi_m(x)]^2 dx = 0, \quad (3.83)$$

onde $\{\psi_n(x)\}$ converge para $\psi(x)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) F(x) \psi_n(x) dx = \int_I w(x) F(x) \psi(x) dx. \quad (3.84)$$

Demonstração: Utilizando o conceito contido na equação (3.53), pode-se escrever

$$0 \leq \int_I w |F| |\psi_n - \psi_m| dx \leq [\int_I w F^2 dx \int_I w |\psi_n - \psi_m|^2 dx]^{1/2}, \quad (3.85)$$



e considerando a equação (3.83), resulta

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |F(x)| |\psi_n(x) - \psi_m(x)| dx = 0, \quad (3.86)$$

então pelo Teorema 3.34 segue que a sequência $\{F(x)\psi_n(x)\}$ converge para $F(x)\psi(x)$ em I . Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |F(x)| |\psi_n(x) - \psi(x)| dx = 0, \quad (3.87)$$

e uma vez que

$$0 \leq \left| \int_I w(x) F(x) [\psi_n(x) - \psi(x)] dx \right| \leq \int_I w(x) |F(x)| |\psi_n(x) - \psi(x)| dx$$

(3.88)

tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) F(x) [\psi_n(x) - \psi(x)] dx = 0, \quad (3.89)$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) F(x) \psi_n(x) dx = \int_I w(x) F(x) \psi(x) dx \quad \blacksquare$$

Teorema 3.36 - Se $\{\psi_n(x)\}$, $\{\phi_n(x)\}$ são duas sequências convergentes na média em I para duas funções $\psi(x)$ e $\phi(x)$, respectivamente, então a sequência $\{\psi_n(x) + \phi_n(x)\}$ converge na média em I para $\psi(x) + \phi(x)$.

Demonstração: Considerando que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I w [(\psi_n + \phi_n) - (\psi + \phi)]^2 dx = \int_I w [(\psi_n - \psi) - (\phi_n - \phi)]^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_I w (\psi_n - \psi)^2 dx + 2 \int_I w (\phi_n - \phi)^2 dx, \end{aligned} \quad (3.90)$$

e por hipótese

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w (\psi_n - \psi)^2 dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w (\phi_n - \phi)^2 dx = 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) \{[\psi_n(x) + \phi_n(x)] - [\psi(x) + \phi(x)]\}^2 dx = 0 \quad \blacksquare \quad (3.91)$$

3.2.6. Expansão em Série de Funções Ortogonais

Teorema 3.37 - Se $\{\psi_n(x)\}$ é uma sequência de funções ortogonais em I , $\{c_n\}$ é uma sequência de constantes para as quais $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ é convergente, e escrevendo-se

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x), \quad (3.92)$$

então a sequência $\{\phi_n(x)\}$ converge na média em I para a função $\phi(x)$, na qual os termos da sequência $\{c_n\}$ são fornecidos por

$$c_i = \int_I w(x) \phi(x) \psi_i(x) dx, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.93)$$

Demonstração: Para $n > m$, tem-se

$$\phi_n - \phi_m = c_{m+1} \psi_{m+1} + c_{m+2} \psi_{m+2} + \dots + c_n \psi_n, \quad (3.94)$$

e consequentemente

$$\int_I w(x) [\phi_n(x) - \phi_m(x)]^2 dx = c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + \dots + c_n^2, \quad (3.95)$$

e pela convergência da série $\sum_{i=1}^n c_i^2$, resulta

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_I w(x) [\phi_n(x) - \phi_m(x)]^2 dx = 0, \quad (3.96)$$

assim, pelo Teorema 3.34 a sequência $\{\phi_n(x)\}$ converge na média em I para a função $\phi(x)$. Portanto, para todo $i < n$ tem-se

$$c_i = \int_I w(x) \psi_i(x) \phi_n(x) dx, \quad (3.97)$$

e consequentemente, pelo Teorema 3.35, tem-se com $n \rightarrow \infty$ que

$$c_i = \int_I w(x) \phi(x) \psi_i(x) dx \quad (3.98)$$

Um sistema de funções ortonormais em I é dito *completo em I* quando a única função quadrado integrável que é ortogonal em I a todas as outras funções do sistema é a função que é nula eqtl em I .

Demonstração: Do Teorema 3.38 segue que a condição é necessária. A

Teorema 3.38 - Se $\{\psi_n(x)\}$ é um sistema completo de funções ortonormais em I , e $\phi(x)$ é qualquer função quadrado integrável em I , então a sequência $\{\phi_n(x)\}$, onde

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x) \quad (3.99)$$

com

$$c_i = \int_I w(x) \psi_i(x) \phi(x) dx \quad (3.100)$$

converge na média para $\phi(x)$, isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) |\phi(x) - \phi_n(x)|^2 dx = 0, \quad (3.101)$$



e portanto

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = \int_I w(x) \phi^2(x) dx. \quad (3.102)$$

Demonstração: Da equação (3.73) conclui-se que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ é convergente. Do Teorema 3.37 segue que a sequência $\{\phi_n(x)\}$ definida em (3.99) converge na média para $\phi^*(x)$, e portanto

$$c_i = \int_I w(x) \psi_i(x) \phi^*(x) dx. \quad (3.103)$$

Subtraindo as equações (3.100) e (3.103), resulta

$$\int_I w(x) \psi_i(x) [\phi(x) - \phi^*(x)] dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.104)$$

Mas uma vez que o sistema é completo, a diferença $[\phi(x) - \phi^*(x)]$ é zero eqtl em I e portanto as equações (3.100) e (3.103) são iguais ■

Uma série $\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)$ é dita convergente na média em I para $\phi(x)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w(x) [\phi(x) - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)]^2 dx = 0. \quad (3.105)$$

Teorema 63.39 - Uma condição necessária e suficiente para uma sequência $\{\psi_n(x)\}$ ortonormal em I formar um sistema completo é que, para toda função $\psi(x)$, quadrado integrável em I ,

$$\int_I w(x) \psi^2(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_I w(x) \psi_i(x) \psi(x) dx \right)^2. \quad (3.106)$$

Demonstração: Do Teorema 3.38 segue que a condição é necessária. A condição também é suficiente. De fato, se a sequência não é completa, existe uma função $\phi(x)$ quadrado integrável, não nula eqtl e ortogonal a todos os $\psi_i(x)$, isto é

$$\int_I w(x) \psi_i(x) \phi(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.107)$$

Devido à equação (3.107), a (3.106) torna-se

$$\int_I w(x) \phi^2(x) dx = 0,$$

e portanto $\phi(x) = 0$ eqtl em I , contrariamente à hipótese ■

4. SOLUÇÃO DE CERTO TIPO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

Neste capítulo apresenta-se uma técnica de solução de equações diferenciais ordinárias, mais especificamente aquelas lineares de segunda ordem com coeficientes variáveis. A técnica apresentada é utilizada para se obter as soluções da equação diferencial ordinária conhecida como *hipergeométrica degenerada*. Por fim, apresenta-se as principais propriedades destas soluções.

4.1. Método de Solução.

O método de solução aqui apresentado data do século passado (FROBENIUS, 1874) e existe farta literatura sobre o assunto; maiores detalhes que aqueles aqui apresentados podem ser encontrados em: (BOYCE & DIPRIMA, 1979: 136-193), (BURKILL, 1975:33-57), (HILDEBRAND, 1962: 119-167), (INCE, 1956:158-185) (KREIDER et al., 1972:278-322), (RAINVILLE, 1943:67-128) e (RAINVILLE & BEDIANT, 1974:312-368).

4.1.1. Pontos Ordinários de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem.

O ponto $z_0 \neq \infty$ é chamado de ponto ordinário da equação diferencial

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z)w = 0, \quad w = w(z) \quad (4.1)$$

se, e somente se, ambos $p(z)$ e $q(z)$ são analíticas (MARKUSHEVICH, 1977) em z_0 . Para tratar o ponto $z = \infty$, efetua-se a seguinte mudança de variável: $z = \frac{1}{\zeta}$. Então o ponto $z = \infty$ é dito um ponto ordinário da equação (4.1) se, e somente se, $\zeta = 0$ é um ponto ordinário da equação transformada. Considerando-se que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{dw}{d\zeta} = -\zeta^2 \frac{dw}{d\zeta}$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \zeta^4 \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + 2\zeta^3 \frac{dw}{d\zeta},$$

a equação transformada torna-se

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left[\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} p \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] \frac{dw}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta^4} q \left(\frac{1}{\zeta} \right) w = 0. \quad (4.2)$$

Desta forma $z = \infty$ é um ponto ordinário da equação (4.2) se, e somente se, ambos

$$\left[\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} p \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] \quad \text{e} \quad \frac{1}{\zeta^4} q \left(\frac{1}{\zeta} \right) \quad (4.4)$$

são funções analíticas em $\zeta = 0$.

4.1.2. Solução Válida Próxima a um Ponto Ordinário.

Teorema 4.1 - Se z_0 é um ponto ordinário da equação (4.1), então existe uma série

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{onde} \quad (4.5)$$

- (a) o raio de convergência é não nulo,
- (b) contém duas constantes arbitrárias, e
- (c) satisfaz a equação diferencial dentro do círculo de convergência da série.

Demonstração: Pode-se escrever (MARKUSHEVICH, 1977) que

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n; \quad |z-z_0| < R_1,$$

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n; \quad |z-z_0| < R_2, \quad (4.6)$$

onde $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ são, respectivamente, os raios de convergência das séries para $p(z)$ e $q(z)$.

Assumindo-se que

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+c} \quad (4.3)$$

a equação (4.1) torna-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+c) (n+c-1) a_n (z-z_0)^{n+c-2} + \\
& + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+c) a_n (z-z_0)^{n+c-1} \right] + \\
& + \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right] = 0 \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Efetuada as multiplicações a equação acima torna-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+c) (n+c-1) a_n (z-z_0)^{n+c-2} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+c) a_k b_{(n-k)} (z-z_0)^{n+c-1} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k d_{(n-k)} (z-z_0)^{n+c} = 0. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Efetuada um deslocamento nos índices de tal forma que o expoente de $(z-z_0)$ em todos os termos seja $(n+c-2)$, a equação (4.5) torna-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+c) (n+c-1) a_n (z-z_0)^{n+c-2} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (k+c) a_k b_{(n-k-1)} (z-z_0)^{n+c-2} + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} a_k d_{(n-k-2)} (z-z_0)^{n+c-2} = 0. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

A equação (4.6) permite um reagrupamento dos termos de forma que obtem-se

$$\begin{aligned}
& c(c-1) a_0 (z-z_0)^{c-2} + (1+c) c a_1 (z-z_0)^{c-1} + c a_0 b_0 (z-z_0)^{c-1} + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+c) (n+c-1) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} (k+c) a_k b_{(n-k-1)} + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{n-2} a_k d_{(n-k-2)} \right] (z-z_0)^{n+c-2} = 0. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

A identidade expressa pela equação (4.7) só ocorre quando todos os coeficientes das várias potências de $(z-z_0)$ são nulos. Então

$$c(c-1) a_0 = 0 ,$$

$$c [(1+c) a_1 + a_0 b_0] = 0, \quad (4.8, a, b, c)$$

$$(n+c) (n+c-1) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} (k+c) a_k b_{(n-k-1)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} a_k d_{(n-k-2)} = 0 ; n \geq 2.$$

É importante lembrar que a_0 é o primeiro termo não nulo da série de potência, i.e., $a_0 \neq 0$. Então resolvendo a equação (4.8a), resulta $c = 0$ ou $c = 1$. Escolhe-se $c = 0$, no sentido de que a equação (4.8b) é automaticamente satisfeita e que a_1 permanece uma constante arbitrária. Para $n \geq 2$, a_n é obtida por

$$n(n-1) a_n = - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k b_{(n-k-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k d_{(n-k-2)}. \quad (4.9)$$

Sabe-se que existem (MARKUSHEVICH, 1977) constantes positivas $r_1 < R_1$, $r_2 < R_2$, M_1 e M_2 , de tal forma que

$$|b_n| < \frac{M_1}{r_1^n}, \quad |d_n| < \frac{M_2}{r_2^n}. \quad (4.10)$$

Introduz-se outras constantes $r = \text{Min} (r_1, r_2)$ e $M > \text{Máx} (M_1, M_2, r |a_1|, r, 1)$. Em termos das novas constantes tem-se

$$|b_n| < \frac{M}{r^n}, \quad |d_n| < \frac{M}{r^n}, \quad |a_1| < \frac{M}{r}.$$

Assumindo que para cada $k \in \mathbb{N}$; $1 \leq k \leq n$, é verdadeiro que $|a_k| < \frac{M^k}{r^k}$, necessita-se demonstrar que $|a_n| < \frac{M^n}{r^n}$.

Da equação (4.9) e da desigualdade triangular $|A + B| \leq |A| + |B|$, tem-se

$$|a_n| \leq \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k |a_k| |b_{(n-k-1)}| + \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| |d_{(n-k-2)}| \right], \quad n \geq 2.$$

Substituindo os termos $|a_k|$, $|b_{(n-k-1)}|$ e $|d_{(n-k-2)}|$ na equação acima obtém-se

$$|a_n| < \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \frac{M^k}{r^k} \frac{M}{r^{n-k-1}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{M^k}{r^k} \frac{M}{r^{(n-k-2)}} \right], \quad n \geq 2.$$

Devido a definição estabelecida anteriormente, $M > 1$ e $\frac{M}{r} > 1$, pode-se introduzir fatores adicionais que mantém a relação e simplifica a forma. Assim

$$|a_n| < \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \frac{M^n}{r^n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{M^n}{r^n} \right], \quad n \geq 2.$$

ou

$$|a_n| < \frac{\frac{1}{2} n(n-1) + n-1}{n(n-1)} \frac{M^n}{r^n}, \quad n \geq 2.$$

Então

$$|a_n| < \frac{n+2}{2n} \left(\frac{M}{r} \right)^n, \quad n \geq 2,$$

como $\frac{n+2}{2n} < 1$, para $n \geq 2$, resulta-se em

$$|a_n| < \frac{M^n}{r^n},$$

demonstrando que existem números positivos M e r tais que, para cada $n \geq 1$, $|a_n| < M^n/r^n$. Isto significa que a série

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

tem um raio de convergência no mínimo de r/M . Adicionalmente demonstrou-se que a_0 e a_1 são ambos arbitrários ■

4.1.3. Singularidades das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem.

Se o ponto z_0 , finito ou infinito, não é um ponto ordinário de uma equação diferencial, diz-se que é um ponto singular ou uma singularidade da equação diferencial.

O ponto z_0 , no plano finito, é chamado de ponto regular singular da equação

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{P(z)}{z-z_0} \frac{dw}{dz} + \frac{Q(z)}{(z-z_0)^2} w = 0, \quad w = w(z) \quad (4.11)$$

se, e somente se, as condições (a) e (b) são ambas satisfeitas:

- (a) z_0 não é um ponto ordinário da equação;
- (b) $P(z)$ e $Q(z)$ são analíticas em z_0 .

Diz-se que $z = \infty$ é um ponto regular singular da equação (4.11) se, e somente se, quando a equação transformada por $z = 1/\zeta$ tem um ponto regular singular em $\zeta = 0$.

Se z_0 é um ponto singular de uma equação diferencial linear, mas não é um ponto regular singular daquela equação, então chama-se z_0 um ponto irregular singular. Este estudo restringe-se às soluções válidas na vizinhança de ponto regular singular.

4.1.4. Solução Válida na Vizinhança de um Ponto Regular Singular.

Apresenta-se agora a solução por meio de série de potência em torno de z_0 da equação (4.11), sob a hipótese que z_0 é um ponto regular singular. Consequentemente $P(z)$ e $Q(z)$ são analíticas em z_0 , assim

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z-z_0)^k; \quad |z-z_0| < R_1,$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (z-z_0)^k; \quad |z-z_0| < R_2,$$

onde $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ são os raios de convergência das respectivas séries de potência. O fato de que z_0 não é um ponto ordinário da equação (4.11) é equivalente a estabelecer que p_0 , q_0 e q_1 não são todos nulos.

Seja a solução na forma

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+c}, \quad (4.12)$$

onde $a_0 \neq 0$ é arbitrário, e c , a_1 , a_2 , ..., a_n constantes a serem determinadas. Efetuando-se a substituição da equação (4.12) na



equação (4.11), tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)(n+c-1) a_n (z-z_0)^{n+c-2} + \\ & + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n (z-z_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+c) a_n (z-z_0)^{n+c-2} \right] + \\ & + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+c-2} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rearranjando a equação acima, resulta-se

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)(n+c-1) a_n (z-z_0)^{n+c-2} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+c) a_k p_{(n-k)} (z-z_0)^{n+c-2} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k q_{(n-k)} (z-z_0)^{n+c-2} = 0 , \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+c)(n+c-1) a_n + \sum_{k=0}^n a_k [(k+c) p_{(n-k)} + \\ & + q_{(n-k)}] \} (z-z_0)^{n+c-2} = 0 . \end{aligned} \quad (4.13)$$

A identidade expressa pela equação (4.13) só ocorre quando todos os coeficientes das várias potências de $(z-z_0)$ são nulos. Então

$$[c(c-1) + cp_0 + q_0] a_0 = 0 , \quad n = 0 ;$$

$$\begin{aligned} & [(n+c)(n+c-1) + (n+c) p_0 + q_0] a_n = \\ & = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(k+c) p_{(n-k)} + q_{(n-k)}] , \quad n \geq 1 ; \end{aligned} \quad (4.14)$$

na qual a_n é expresso em termos de $\{a_k; 0 \leq k < n\}$.

Como $a_0 \neq 0$, tem-se

$$c^2 + (p_0 - 1) c + q_0 = 0 ,$$

que é uma equação indicial útil para a obtenção de c .



As duas raízes desta equação são chamadas de expoentes da equação diferencial na singularidade regular z_0 . Por facilidade define-se

$$F(c) = c^2 + (p_0 - 1)c + q_0. \quad (4.15)$$

Então a equação indicial torna-se $F(c) = 0$, e a equação geral de recorrência para a_n ; $n \geq 1$, torna-se

$$F(n+c) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(k+c) p_{(n-k)} + q_{(n-k)}]. \quad (4.16)$$

Denomina-se as raízes da equação indicial de c_1 e c_2 de tal forma que $R(c_1) \geq R(c_2)$, onde a notação $R(z)$ significa parte real x do número complexo $z = x+iy$. Da mesma maneira $I(z) = y$ significa a parte imaginária y de z . Definindo $s = c_1 - c_2$, obviamente $R(s) \geq 0$. Vale ressaltar que é possível escrever $F(c)$ em termos das raízes da equação indicial, pois de fato $F(c) = (c-c_1)(c-c_2)$. Escolhe-se então uma das raízes da equação indicial para encontrar a primeira solução da equação diferencial. Fazendo então $c = c_1$, $F(n+c_1)$ torna-se

$F(n+c_1) = (n+c_1-c_1)(n+c_1-c_2) = n(n+s)$,
assim a equação (4.16) de recorrência resulta-se

$$n(n+s) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(k+c_1) p_{(n-k)} + q_{(n-k)}]. \quad (4.17)$$

Sabe-se que existem constantes positivas r_1 , r_2 , M_1 e M_2 de tal forma que

$$|p_n| < \frac{M_1}{r_1^n} \quad \text{e} \quad |q_n| < \frac{M_2}{r_2^n}.$$

Tomando $r = \min(r_1, r_2)$, tem-se

$$|p_n| < \frac{M_1}{r^n} \quad \text{e} \quad |q_n| < \frac{M_2}{r^n}, \quad (4.18)$$

implicando que

$$|c_1 p_n + q_n| \leq |c_1| |p_n| + |q_n| < \frac{|c_1| M_1 + M_2}{r^n}.$$



Definindo $M = \text{Máx} (M_1, M_2, |c_1| M_1 + M_2, 1)$, então

$$|p_n| < \frac{M}{r^n}, \quad |q_n| < \frac{M}{r^n}, \quad |c_1 p_n + q_n| < \frac{M}{r^n}.$$

A relação de recorrência para $n = 1$ torna-se

$$(1 + s) a_1 = -a_0 (c_1 p_1 + q_1).$$

Como a_0 a priori é arbitrário e não nulo escolhe-se nesta parte da demonstração que $a_0 = 1$, entretanto isto não limita o resultado, pois, é possível obter os mesmos aspectos qualitativos utilizando-se de outros valores para a_0 .

Lembrando-se que

$$|1 + s| = \{[1 + R(s)]^2 + [I(s)]^2\}^{1/2} \geq 1 + R(s) \geq 1,$$

então,

$$|a_1| = \frac{|c_1 p_1 + q_1|}{|1 + s|} < \frac{M}{r}.$$

Assumindo-se que $|a_k| < M^k/r^k$ é verdadeiro para valores inteiros de k , $1 \leq k < n$, para $k = 1$ esta hipótese está de acordo com a equação acima. Para completar a indução basta demonstrar que $|a_n| < M^n/r^n$, como segue. Tem-se

$$|a_n| = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(k+c_1) p_{(n-k)} + q_{(n-k)}] \right|}{n|n+s|} =$$

$$= \frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} k a_k p_{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [c_1 p_{(n-k)} + q_{(n-k)}] \right|}{n|n+s|},$$

ou

$$|a_n| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} k |a_k| |p_{(n-k)}| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |c_1 p_{(n-k)} + q_{(n-k)}|}{n|n+s|}.$$

Mas $|n+s| \geq n$, uma vez que $R(s) \geq 0$, e as outras desigualdades podem ser utilizadas para transformar a equação de

$|a_n|$ em

$$|a_n| < \frac{\sum_{k=0}^{n-1} k \frac{M^k}{r^k} \frac{M}{r^{(n-k)}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M^k}{r^k} \frac{M}{r^{(n-k)}}}{n^2}.$$

Novamente, utiliza-se o fato de que $M \geq 1$ para escrever

$$|a_n| < \frac{\sum_{k=0}^{n-1} k \frac{M^n}{r^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M^n}{r^n}}{n^2}, \quad (4.21)$$

ou Substituindo a equação (4.21) na equação (4.11), e adicionalmente considerando a equação de recorrência (4.16) para $n \geq 1$, resulta

$$|a_n| < \frac{\frac{1}{2} n(n-1) + n}{n^2} \frac{M^n}{r^n}.$$

Consequentemente

$$|a_n| < \frac{n+1}{2n} \frac{M^n}{r^n}, \quad (4.19)$$

de tal forma que, para $n \geq 1$, $|a_n| < \frac{M^n}{r^n}$.

Demonstrou-se que se z_0 é um ponto regular singular da equação (4.11) e que se a equação indicial tem raízes c_1 e c_2 , designados de tal forma que $R(c_1) \geq R(c_2)$, então existe uma série

$$w_1(z) = (z-z_0)^{c_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+c_1}, \quad (4.20)$$

que satisfaz a equação (4.11) dentro da região de convergência das séries de $P(z)$ e $Q(z)$ e tendo um raio de convergência não nulo.

Para obtenção da segunda solução linearmente independente de $w_1(x)$, procede-se da mesma forma anteriormente descrita, sob a condição de que $c_1 \neq c_2$ e $c_1 - c_2 \notin \mathbb{N}$. Nestes casos excepcionais é necessário efetuar um procedimento adicional para encontrar a segunda solução linearmente independente.

4.1.5. Tratamento de Dois Casos Excepcionais.

Considera-se primeiro o caso de raízes iguais na equação indicial, $c_1 = c_2$ ou $s = 0$. Antes de se introduzir o valor



repetido c_1 na equação de recorrência (4.16) e de se determinar $a_1, a_2, \dots, a_n$, diretamente em termos de a_0 , supõe-se que os coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ são expressos na fórmula de recorrência, em termos de a_0 e c . Indica-se este fato escrevendo $a_1 = a_1(c), a_2 = a_2(c), \dots, a_n = a_n(c), \dots$. Com estes valores dos a 's, em termos de c , a função w torna-se dependente de c , bem como de z , sendo denotada por $w_c(z)$,

$$w_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c) (z - z_0)^{n+c}. \quad (4.21)$$

Substituindo a equação (4.21) na equação (4.11), e adicionalmente considerando a equação de recorrência (4.16) para $n \geq 1$, resulta

$$L w_c(z) = a_0 F(c) (z - z_0)^{c-2} \quad (4.22)$$

onde

$$L = \frac{d^2(\)}{dz^2} + \frac{P(z)}{z-z_0} \frac{d(\)}{dz} + \frac{Q(z)(\)}{(z-z_0)^2}.$$

No caso de raízes da equação indicial iguais tem-se $F(c) = (c - c_1)^2$, portanto

$$L w_c(z) = a_0 (c - c_1)^2 z^{c-2} \quad (4.23)$$

O fato de que o lado direito da equação (4.22) anula-se para $c = c_1$ está de acordo com o fato que a equação (4.21) é solução da equação (4.11). Entretanto, uma vez que $c = c_1$ é uma raiz dupla do membro do lado direito da equação (4.23), segue também que o resultado da diferenciação desta equação em relação a c é também nula para $c = c_1$. Assim

$$\frac{\partial}{\partial c} L w_c(z) = a_0 [2(c - c_1) + (c - c_1)^2 \log(z - z_0)^{c-2}]. \quad (4.24)$$

Os operadores lineares $\frac{\partial(\)}{\partial c}$ e L são independentes e portanto intercambiáveis, logo

$$\left[\frac{\partial}{\partial c} L w_c(z) \right]_{c=c_1} = L \left[\frac{\partial w_c(z)}{\partial c} \right]_{c=c_1} = 0. \quad (4.25)$$

Comparando a equação (4.25) com a equação (4.11) conclui-se

que multiplicando por $(c-c_2)$, resulta

$$w_2(z) = \frac{\partial w_c(z)}{\partial c} \Big|_{c=c_1} \quad (4.26)$$

é a segunda solução, linearmente independente da primeira.

Substituindo a equação (4.21) na (4.26), e efetuando as diferenciações, resulta

$$w_2(z) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial a_n(c)}{\partial c} + a_n(c) \ln(z-z_0) \right] (z-z_0)^{n+c} \right\}_{c=c_1} \quad (4.27)$$

O segundo caso excepcional é aquele no qual as raízes da equação indicial diferem de um inteiro positivo s , $c_1 - c_2 = s \geq 1$, e que o lado direito da equação indicial (4.16) não seja identicamente nulo. Neste caso supõe-se novamente que a fórmula de recorrência é satisfeita quando $n \geq 1$ para todos os valores de c , de tal forma que os a 's sejam expressos em termos de a_0 e c , novamente definimos a função $w_c(z)$ do tipo (4.21).

Fazendo $c = c_2$, $F(n+c_2)$, torna-se

$$F(n + c_2) = (n + c_2 - c_1)(n + c_2 - c_2) = n(n - s), \quad (4.32)$$

assim a equação de recorrência (4.16) resulta

$$n(n-s) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(k+c_1) p_{(n-k)} + q_{(n-k)}], \quad n \geq 1. \quad (4.28)$$

Neste caso, nota-se através da inspeção da equação acima que as expressões para os coeficientes $a_s(c)$, $a_{s+1}(c)$, ..., terão todos o termo $(n-s)$ no denominador, e então não tenderão a um valor finito quando $n \geq s$. Ao considerar-se o produto $(c-c_2)w_c(z)$, quando $c \rightarrow c_2$ verifica-se que os termos com coeficiente a_n para os quais $n < s$ irão anular-se e os termos remanescentes tenderão a um valor limitado, dando início a uma série de potências de $(z-z_0)$ começando com um termo envolvendo $(z-z_0)^{c_2+s} = (z-z_0)^{c_1}$. Então a série resultante deve ser proporcional à série utilizando $c = c_1$.

Considerando que $F(c) = (c - c_1)(c - c_2)$ a equação (4.22) torna-se

$$L w_c(z) = a_0 (c-c_1)(c-c_2)(z-z_0)^{c-2},$$

multiplicando por $(c-c_2)$, resulta

$$(c-c_2) L w_c(z) = a_0 (c-c_1)(c-c_2)^2(z-z_0)^{c-2}. \quad (4.29)$$

O lado direito da equação acima tem uma raiz dupla, $c = c_2$, de tal forma que sua derivada em relação a c também é nula quando $c \rightarrow c_2$. Com argumentação similar àquela utilizada para se obter a equação (4.26), conclui-se que

$$L \left\{ \frac{\partial}{\partial c} [(c-c_2) w_c(z)] \right\}_{c=c_2} = 0 \quad (4.30)$$

de tal forma que

$$w_2(z) = \left\{ \frac{\partial}{\partial c} [(c-c_2) w_c(z)] \right\}_{c=c_2}. \quad (4.31)$$

Substituindo a equação (4.21) na (4.31) e efetuando as diferenciações, resulta

$$w_2(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (c-c_2) a_n(c) (z-z_0)^{n+c} \right]_{c=c_2} \ln(z-z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dc} [(c-c_2) a_n(c)] \right\}_{c=c_2} (z-z_0)^{n+c_2}. \quad (4.32)$$

O coeficiente de $\ln(z-z_0)$ é $\lim_{c \rightarrow c_2} [(c-c_2) w_c(z)]$, o qual verificou-se anteriormente ser proporcional a $w_1(z)$.

Conclui-se então que, nestes dois casos excepcionais da equação diferencial, tendo $z = z_0$ como um ponto regular singular e com as raízes da equação indicial iguais a c_1 e c_2 , possui somente uma solução na forma

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+c_1} \quad (4.33)$$

qualquer outra solução linearmente independente terá a seguinte forma

$$w_2(z) = w_1(z) \ln(z-z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z-z_0)^{n+c_2}. \quad (4.34)$$

Então, ao invés de se utilizar as equações (4.26) ou (4.31) nestes casos, uma segunda solução pode ser obtida diretamente



assumindo-se a equação (4.34) e determinando-se os coeficientes desconhecidos B_n , através da substituição na equação diferencial.

4.2. Solução da Equação Diferencial Hipergeométrica Degenerada.

A equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, conhecida como hipergeométrica degenerada (ABRAMOVITZ & STEGUN, 1972: 503-535), (BURKILL, 1975: 52-58), (ERDÉLY et al., 1953: 248-295), (GRADSHTEIN & RYZHIK, 1965: 1039-1068), (INCE, 1956: 465-467), (JAHNKE & EMDE, 1945: 275-282), (LEBEDEV, 1972: 238-276), (RAINVILLE, 1943: 144-179), (RAINVILLE, 1971: 123-128), (RAINVILLE & BEDIANT, 1974: 370-380), (WHITTAKER & WATSON, 1973: 337-354), é expressa pela fórmula

$$z \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dy(z)}{dz} - \alpha y(z) = 0, \quad z, y, \alpha, \gamma \in \mathbb{C}. \quad (4.35)$$

Por inspeção percebe-se de imediato que o ponto $z = 0$ é do tipo regular singular. Para se obter as duas soluções linearmente independentes da equação (4.35), procede-se de acordo com a técnica descrita no item (4.1). Desta forma, assume-se que a primeira solução tem a seguinte forma

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+c} \quad (4.36)$$

sendo a_n e c , constantes desconhecidas, por determinar. Em consequência da equação (4.36), tem-se

$$\frac{dy_1(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+c) a_n z^{n+c-1}, \quad (4.37a,b)$$

$$\frac{d^2 y_1(z)}{dz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)(n+c-1) a_n z^{n+c-2}.$$

Substituindo-se as equações (4.37a,b) e (4.36) na equação (4.35) e efetuando-se algumas manipulações, resulta

$$[c(c-1+\gamma)] a_0 z^{c-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+c+1)(n+c) + \gamma(n+c+1)] a_{n+1} - [(n+c) + \alpha] a_n\} z^{n+c} = 0. \quad (4.38)$$

Para que a equação acima seja identicamente nula é necessário



que

$$c(c - 1 + \gamma) = 0 \quad (4.39a,b)$$

$$(n + c + 1)(n + c + \gamma) a_{n+1} = (n + c + \alpha) a_n, \quad n \geq 0.$$

As equações (4.39a,b) são respectivamente a equação indicial e a de recorrência. Resolvendo a equação indicial obtém-se as duas raízes, $c_1 = 0$ e $c_2 = 1 - \gamma$. Adotando $c = c_1 = 0$ para se obter a primeira solução, a equação de recorrência torna-se

$$(n + 1)(n + \gamma) a_{n+1} = (n + \alpha) a_n, \quad n \geq 0 \quad (4.40)$$

Assumindo os valores de $n \geq 0$, na equação de recorrência, obtém-se

$$n = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\alpha}{\gamma} a_0;$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{(\alpha+1)}{2(\gamma+1)} a_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2\gamma(\gamma+1)} a_0;$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{(\alpha+2)}{3(\gamma+2)} a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3 \cdot 2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} a_0;$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(\alpha+n-1)}{n(\gamma+n-1)} a_{n-1} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1)} a_0; \quad (4.1)$$

$$a_n = \frac{(\alpha)_n}{n! (\gamma)_n} a_0; \quad n \geq 0, \quad (4.41)$$

onde

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1), & n > 0; \end{cases}$$

$$(\gamma)_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1), & n > 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Desta forma obtém-se a primeira solução procurada,

$$y_1(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n! (\gamma)_n} z^n. \quad (4.45)$$

Quando uma função é combinação linear de uma solução, esta função também é solução. Sem perda de generalidade pode-se tomar apenas que

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n! (\gamma)_n} z^n. \quad (4.46)$$

Neste momento é necessário fazer uma restrição e uma observação: a restrição refere-se ao fato de que o termo $(\gamma)_n$ fica no denominador da equação acima e portanto não pode anular-se, devido a problemas de convergência, portanto é necessário que $\gamma \notin \{0, -1, -2, \dots\}$. A observação refere-se ao fato de que o termo $(\alpha)_n$ fica no numerador e portanto quando assumir valores tais que $\alpha = -m$; $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, a série não será infinita, mas um polinômio de grau m . Assim

$$M(\alpha, \gamma, z) \equiv y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{n! (\gamma)_n}, \quad \gamma \notin \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (4.42)$$

Na literatura, $M(\alpha, \gamma, z)$ é conhecida como função hipergeométrica degenerada de primeiro tipo.

4.2.1. Obtenção da Segunda Solução Quando $c_1 - c_2 \notin \mathbb{Z}$.

Como $c_1 = 0$ e $c_2 = 1 - \gamma$, a restrição $c_1 - c_2 \notin \mathbb{Z}$, implica que $c_2 \notin \mathbb{Z}$ e que $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Portanto trata-se do caso de raízes distintas, e simultaneamente a diferença entre ambas é distinta de um número inteiro. Portanto, de acordo com o desenvolvido no item (4.1) existe uma segunda solução com a seguinte forma

$$y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+c_2}. \quad (4.43)$$

Procedendo da mesma forma em que se obteve a primeira solução, encontra-se

$$a_n = \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n}{n! (2 - \gamma)_n} a_0; \quad n \geq 0. \quad (4.44)$$

Desta forma obtém-se a segunda solução

$$y_2(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n z^{n+1-\gamma}}{n! (2 - \gamma)_n}, \quad \gamma \notin \mathbb{Z}, \quad (4.45)$$

ou ainda, sem perda de generalidade, pelas razões expostas quando da obtenção da primeira solução

$$y_2(z) = z^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n}{n! (2 - \gamma)_n} z^n = z^{1-\gamma} M(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad \gamma \notin \mathbb{Z}. \quad (4.46)$$



Considerando *a priori* que $y_1(z)$ e $y_2(z)$ sejam linearmente independentes (posteriormente, ainda neste capítulo retorna-se a este tema) é possível definir outras soluções que sejam combinação linear destas duas. Assim, define-se

$$U(\alpha, \gamma, z) = y_3(z) \equiv \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} y_1(z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} y_2(z) , \quad (4.47)$$

ou

$$U(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} M(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} M(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z) . \quad (4.48)$$

Na literatura, $U(\alpha, \gamma, z)$ é conhecida como função hipergeométrica degenerada, de segundo tipo.

4.2.2. Obtenção da Segunda Solução Quando $c_1 = c_2$.

Trata-se do caso quando as raízes da equação indicial são iguais, $c_1 = c_2$, como $c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow \gamma = 1$.

De acordo como o desenvolvido no item (4.1), existe uma segunda solução com a seguinte forma

$$y_2(z) = \left. \frac{\partial y(z, c)}{\partial c} \right|_{c=0} , \quad (4.49)$$

onde

$$y(z, c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c) z^{n+c} .$$

Tomando-se a equação de recorrência, para $\gamma = 1$, tem-se

$$(n + c + 1)^2 a_{n+1} = (n + c + \alpha) a_n , \quad n \geq 0 \quad (4.50)$$

ou

$$n = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{(c+\alpha)}{(c+1)^2} a_0 ,$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{(c+\alpha+1)}{(c+2)^2} a_1 = \frac{(c+\alpha)(c+\alpha+1)}{[(c+1)(c+2)]^2} a_0 ,$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{(c+\alpha+n-1)}{(c+n)^2} a_{n-1} = \frac{(c+\alpha)(c+\alpha+1)\dots(c+\alpha+n-1)}{[(c+1)(c+2)\dots(c+n)]^2} a_0 ,$$

$$a_n = \frac{(c+\alpha)_n}{[(c+1)_n]^2} a_0 , \quad (4.51)$$

portanto

$$y(z, c) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c+\alpha)_n}{[(c+1)_n]^2} z^{n+c}. \quad (4.52)$$

Diferenciando a equação (4.52) em relação a c e fazendo $c \rightarrow 0$, resulta

$$y_2(z) = y_1(z) \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(n!)^2} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\alpha+k-1} - \frac{2}{k} \right] \right\} z^n, \quad \gamma = 1. \quad (4.53)$$

Para $\gamma = 1 \Rightarrow (\gamma)_n = n!$, $y_1(z)$ toma uma forma mais particular

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(n!)^2} z^n, \quad \gamma = 1. \quad (4.56)$$

A partir de $y_1(z)$ e $y_2(z)$, para $\gamma = 1$, obtém-se a função hipergeométrica de segundo tipo,

$$U(\alpha, 1, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(n!)^2} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\alpha+k-1} - \frac{2}{k} \right] + \log(z) \right\} z^n, \quad \gamma = 1 \quad (4.54)$$

para $n = 0$, o termo $\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\alpha+k-1} - \frac{2}{k} \right]$ deve ser tomado igual a zero.

4.2.3. Obtenção da segunda solução quando $c_1 - c_2 \in \mathbb{N}$.

Neste caso especial a diferença entre as raízes da equação indicial é um número inteiro, i.e., $c_1 - c_2 = i \in \mathbb{N}$. Como $c_1 = 0$ e $c_2 = 1 - \gamma \Rightarrow \gamma = i + 1$, portanto trata-se de solução para aqueles valores nos quais $\gamma \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Em concordância com o desenvolvido no item (4.1) e efetuando um procedimento similar ao dos casos anteriores, obtém-se

$$U(\alpha, i+1, z) = \frac{(-1)^{i+1}}{\Gamma(\alpha-i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(n+i)!n!} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\alpha+k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+i} \right] + \log(z) \right\} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{i-1} \frac{(-1)^n (i-n-1)! (\alpha-i)_n}{n!} z^{n-1}, \quad (4.55)$$



Tomando-se os mesmos passos do item (a), resulta para os
para $i = 0$, o termo $\sum_{n=0}^{-1} (\dots)$ deve ser assumido igual a zero.

Vale ressaltar que a equação (4.54) é um caso particular da (4.55), quando $i = 0$.

4.2.4. Solução Geral da Equação Diferencial Hipergeométrica Degenerada.

De acordo com o desenvolvido, pode-se afirmar que a equação diferencial hipergeométrica degenerada tem solução geral na forma

$$y(\alpha, \gamma, z) = AM(\alpha, \gamma, z) + BU(\alpha, \gamma, z) ; A, B, \text{ constantes} \quad (4.56)$$

com as restrições já referidas anteriormente neste capítulo.

4.2.5. Outras Representações das Soluções da Equação Diferencial Hipergeométrica Degenerada.

Demonstrou-se anteriormente que $M(\alpha, \gamma, z)$ e $U(\alpha, \gamma, z)$ são soluções da EDHD, neste item demonstra-se que existem mais seis soluções possíveis.

a) Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$y(z) = e^z v(z)$$

e substituindo na equação (4.35) resulta

$$z \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + (\gamma + z) \frac{dv(z)}{dz} - (\alpha - \gamma) v(z) = 0 \quad (4.57)$$

cujas soluções, obviamente, é

$$v(z) = M(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

ou

$$v(z) = U(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

portanto

$$y(z) = e^z M(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

ou

$$y(z) = e^z U(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (4.58a, b)$$

Tomando-se os mesmos passos do item (a), resulta para os demais itens:

b) Mudança de variável: $y(z) = z^{1-\gamma} v(z)$,

Equação diferencial:

$$z \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + [(2-\gamma) - z] \frac{d v(z)}{dz} - (1 + \alpha - \gamma) v(z) = 0,$$

Solução

$$v(z) = M(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z),$$

ou

$$v(z) = U(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z),$$

portanto

$$y(z) = z^{1-\gamma} M(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z),$$

ou

$$y(z) = z^{1-\gamma} U(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z). \quad (4.59a,b)$$

c) Mudança de variável $y(z) = z^{1-\gamma} e^z v(z)$,

Equação diferencial:

$$z \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + [(2-\gamma) + z] \frac{d v(z)}{dz} - (\alpha - 1) v(z) = 0,$$

Solução:

$$v(z) = M(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z),$$

ou

$$v(z) = U(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z),$$

portanto

$$y(z) = z^{1-\gamma} e^z M(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z),$$

ou

$$y(z) = z^{1-\gamma} e^z U(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z). \quad (4.60a,b)$$

Desta forma obtém-se oito soluções da EDHD,

$$\begin{aligned}
Y_1(z) &= M(\alpha, \gamma, z), \\
Y_2(z) &= z^{1-\gamma} M(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z), \\
Y_3(z) &= e^z M(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \\
Y_4(z) &= z^{1-\gamma} e^z M(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z), \quad (4.61a-h) \\
Y_5(z) &= U(\alpha, \gamma, z), \\
Y_6(z) &= z^{1-\gamma} U(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z), \\
Y_7(z) &= e^z U(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \\
Y_8(z) &= z^{1-\gamma} e^z U(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z).
\end{aligned}$$

Pode-se, agora, ampliar o conceito de solução geral expressas na equação (4.56) e que utiliza as soluções $Y_1(z)$ e $Y_5(z)$. É correto construir soluções gerais utilizando outras das soluções particulares, listadas acima, desde que escolhidas duas a duas e que o Wronskiano de ambas não seja nulo.

4.2.6. Wronskiano das Oito Soluções Particulares da EDHD.

De acordo com a teoria contida no capítulo 2, as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem tem solução geral construída como uma combinação linear de duas soluções particulares que sejam linearmente independentes. O teste de verificação da independência de uma solução em relação à outra é efetuada através do determinante denominado Wronskiano, e para este caso expresso pela fórmula

$$W[Y_i(z), Y_j(z)] = \begin{vmatrix} Y_i(z) & Y_j(z) \\ \frac{dY_i(z)}{dz} & \frac{dY_j(z)}{dz} \end{vmatrix}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, 8\}. \quad (4.62)$$

Quando as soluções são linearmente dependentes o Wronskiano é nulo, caso contrário é não nulo.

Efetuando o cálculo do Wronskiano para combinações duas a duas das soluções listadas nas equações (10,61a-h), obtém-se os mais importantes (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1972: 503-535):

$$W\{1,2\} = W\{3,4\} = W\{1,4\} = -W\{2,3\} = (1-\gamma) z^{-\gamma} e^z,$$

$$W\{1,3\} = W\{2,4\} = W\{5,6\} = W\{7,8\} = 0,$$

$$W\{1,5\} = -\Gamma(\gamma) z^{-\gamma} e^z / \Gamma(\alpha),$$

$$W\{1,7\} = \Gamma(\gamma) e^{\pi i \gamma} z^{-\gamma} e^z / \Gamma(\gamma - \alpha), \quad (4.63a-g)$$

$$W\{2,5\} = -\Gamma(2-\gamma) z^{-\gamma} e^z / \Gamma(1+\alpha-\gamma),$$

$$W\{2,7\} = -\Gamma(2-\gamma) z^{-\gamma} e^z / \Gamma(1-\alpha),$$

$$W\{5,7\} = e^{\pi i (\gamma - \alpha)} z^{-\gamma} e^z,$$

onde: $e = \text{senal } [I(z)] = 1 \text{ se } I(z) > 0,$

$= -1 \text{ se } I(z) \leq 0.$

4.2.7. Identidades Especiais, Relações de Recorrência, Propriedades Diferenciais e Casos Especiais das Funções Hipergeométricas Degeneradas.

A partir das funções hipergeométricas degeneradas mostradas anteriormente neste capítulo, pode-se, em decorrência, obter várias de suas características (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1972:503-535), (ERDÉLY et al., 1953:248-295) e (GRADSHTEIN & RYZHIK, 1965:1039-1068). Portanto, tem-se:

a) Identidades especiais

$$M(\alpha, \gamma, z) = e^z M(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

$$z^{1-\gamma} M(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z) = z^{1-\gamma} e^z M(1-\alpha, 2-\gamma, -z),$$

$$U(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} U(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z), \quad (4.64a-d)$$

$$e^z U(\gamma - \alpha, \gamma, -z) = e^{\pi i (1-\gamma)} U(1-\alpha, 2-\gamma, -z);$$

b) Relações de recorrência

$$(\gamma - \alpha)M(\alpha - 1, \gamma, z) + (2\alpha - \gamma + z)M(\alpha, \gamma, z) - \alpha M(\alpha + 1, \gamma, z) = 0,$$

$$\gamma(\gamma - 1)M(\alpha, \gamma - 1, z) + \gamma(1 - \gamma - z)M(\alpha, \gamma, z) + z(\gamma - \alpha)M(\alpha, \gamma + 1, z) = 0,$$

$$(1 + \alpha - \gamma)M(\alpha, \gamma, z) - \alpha M(\alpha + 1, \gamma, z) + (\gamma - 1)M(\alpha, \gamma - 1, z) = 0,$$

$$\gamma M(\alpha, \gamma, z) - \gamma M(\alpha - 1, \gamma, z) - z M(\alpha, \gamma + 1, z) = 0, \quad (4.65a-g)$$

$$\gamma(\alpha + z)M(\alpha, \gamma, z) + z(\alpha - \gamma)M(\alpha, \gamma + 1, z) - \alpha \gamma M(\alpha + 1, \gamma, z) = 0,$$

$$(\alpha - 1 + z)M(\alpha, \gamma, z) + (\gamma - \alpha)M(\alpha - 1, \gamma, z) + (1 - \gamma)M(\alpha, \gamma - 1, z) = 0,$$

$$\gamma(1 - \gamma + z)M(\alpha, \gamma, z) + \gamma(\gamma - 1)M(\alpha - 1, \gamma - 1, z) - \alpha z M(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = 0;$$

$$\begin{aligned}
U(\alpha-1, \gamma, z) + (\gamma-2\alpha-z)U(\alpha, \gamma, z) + \alpha(1+\alpha-\gamma)U(\alpha+1, \gamma, z) &= 0, \\
(\gamma-\alpha-1)U(\alpha, \gamma-1, z) + (1-\gamma-z)U(\alpha, \gamma, z) + zU(\alpha, \gamma+1, z) &= 0, \\
U(\alpha, \gamma, z) - \alpha U(\alpha+1, \gamma, z) - U(\alpha, \gamma-1, z) &= 0, \\
(\gamma-\alpha)U(\alpha, \gamma, z) + U(\alpha-1, \gamma, z) - zU(\alpha, \gamma+1, z) &= 0, \\
(\alpha+z)U(\alpha, \gamma, z) - zU(\alpha, \gamma+1, z) + \alpha(\gamma-\alpha-1)U(\alpha+1, \gamma, z) &= 0, \\
(\alpha+z-1)U(\alpha, \gamma, z) - U(\alpha-1, \gamma, z) + (1+\alpha-\gamma)U(\alpha, \gamma-1, z) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.66a-f}$$

c) Propriedades diferenciais

$$\begin{aligned}
M'(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma} M(\alpha+1, \gamma+1, z), \\
\frac{d^n}{dz^n} \{M(\alpha, \gamma, z)\} &= \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} M(\alpha+n, \gamma+n, z), \\
\alpha M(\alpha+1, \gamma, z) &= \alpha M(\alpha, \gamma, z) + zM'(\alpha, \gamma, z), \\
(\gamma-\alpha)M(\alpha-1, \gamma, z) &= (\gamma-\alpha-z)M(\alpha, \gamma, z) + zM'(\alpha, \gamma, z), \\
(\gamma-\alpha)M(\alpha, \gamma+1, z) &= \gamma M(\alpha, \gamma, z) - \gamma M'(\alpha, \gamma, z), \\
(\gamma-1)M(\alpha, \gamma-1, z) &= (\gamma-1)M(\alpha, \gamma, z) + zM'(\alpha, \gamma, z), \\
(\gamma-1)M(\alpha-1, \gamma-1, z) &= (\gamma-1-z)M(\alpha, \gamma, z) + zM'(\alpha, \gamma, z); \\
U'(\alpha, \gamma, z) &= -\alpha U(\alpha+1, \gamma+1, z), \\
\frac{d^n}{dz^n} \{U(\alpha, \gamma, z)\} &= (-1)^n (\alpha)_n U(\alpha+n, \gamma+n, z), \\
\alpha(1+\alpha-\gamma)U(\alpha+1, \gamma, z) &= \alpha U(\alpha, \gamma, z) + zU'(\alpha, \gamma, z), \\
(1+\alpha-\gamma)U(\alpha, \gamma-1, z) &= (1-\gamma)U(\alpha, \gamma, z) - zU'(\alpha, \gamma, z), \\
U(\alpha, \gamma+1, z) &= U(\alpha, \gamma, z) - U'(\alpha, \gamma, z), \\
U(\alpha-1, \gamma, z) &= (\alpha - \gamma + z)U(\alpha, \gamma, z) - zU'(\alpha, \gamma, z), \\
U(\alpha-1, \gamma-1, z) &= (1-\gamma+z)U(\alpha, \gamma, z) - zU'(\alpha, \gamma, z);
\end{aligned} \tag{4.67a-g}$$

d) Casos especiais Alguns Casos Especiais de $U(\alpha, \gamma, z)$

Tabela 4.1 - Alguns Casos Especiais de $M(\alpha, \gamma, z)$

$M(\alpha, \gamma, z)$			Relação	Função
α	γ	z		
$\nu + \frac{1}{2}$	$2\nu + 1$	$2iz$	$\Gamma(1+\nu) e^{iz} (\frac{1}{2}z)^{-\nu} J_{\nu}(z)$	Bessel
$\nu + \frac{1}{2}$	$2\nu + 1$	$2z$	$\Gamma(1+\nu) e^z (\frac{1}{2}z)^{-\nu} I_{\nu}(z)$	Bessel Modificada
$L+1-i\eta$	$2L+2$	$2ix$	$e^{ix} F_L(\eta, x) x^{-L-1} / C_L(\eta)$	Onda de Coulomb
$-n$	$\alpha+1$	x	$\frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre
α	$\alpha+1$	$-x$	$\alpha x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x)$	Gama Incompleta
$-n$	$1+\nu-n$	x	$\frac{(n!)^{1/2} x^{n/2}}{(1+\nu-n)_n} \rho_n(\nu, x)$	Poisson-Charlier
α	α	z	e^z	Exponencial
1	2	$-2iz$	$\frac{e^{-iz}}{z} \sin z$	Trigonométrica
1	2	$2z$	$\frac{e^z}{z} \sinh z$	Hiperbólica
$-\frac{1}{2}\nu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}z^2$	$2^{-1/2} \exp(\frac{1}{4}z^2) E_{\nu}^{(0)}(z)$	Weber
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}z^2$	$\frac{\exp(\frac{1}{4}z^2)}{2z} E_{\nu}^{(1)}(z)$	Weber
$-n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{n!}{(2n)!} (-\frac{1}{2})^{-n} He_{2n}(x)$	Hermite
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-x^2$	$\frac{\pi^{1/2}}{2x} \operatorname{erf} x$	Erro Integral
$\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$	$(1+n)$	r^2	$\frac{n! r^{-2n+m-1}}{\Gamma(m/2+1/2)} e^{r^2} T(m, n, r)$	Toronto



Tabela 4.2. Alguns Casos Especiais de $U(\alpha, \gamma, z)$

$U(\alpha, \gamma, z)$			Relação	Função
α	γ	z		
$\nu+1/2$	$2\nu+1$	$2z$	$\pi^{-1/2} e^z (2z)^{-\nu} K_{\nu}(z)$	Bessel Modificada
$-n$	$\alpha+1$	x	$(-1)^n n! L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre
$1-\alpha$	$1-\alpha$	x	$e^x \Gamma(\alpha, x)$	Gama Incompleta
1	1	$-x$	$-e^{-x} \text{Ei}(x)$	Int. Exponencial
1	1	x	$e^x \text{Ei}(x)$	Int. Exponencial
1	1	$-\ln x$	$-\frac{1}{x} \text{li}(x)$	Log. Integral
$-\frac{1}{2}\nu$	0	$2x$	$\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu) e^x K_{\nu}(x) ; x > 0$	Bateman
$-\frac{1}{2}\nu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} z^2$	$2^{-\nu/2} e^{z^2/4} D_{\nu}(z)$	Weber
$\frac{1-1}{2} \nu$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} z^2$	$2^{(1-\nu)/2} e^{z^2/4} D_{\nu}(z) / z$	Weber
$\frac{1-1}{2} n$	$\frac{3}{2}$	x^3	$2^{-n} H_n(x) / x$	Hermite
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x^2	$\sqrt{\pi} \exp(x^2) \text{erfc } x$	Erro Integral

$$u(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x-x_0)^i (y-y_0)^j, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.1)$$

a qual converge uniformemente em cada ponto da vizinhança circular de (x_0, y_0) (HALL, 1940) e (LIMA, 1970a:56).

Seja $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$, então se $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$, diz-se que u é contínua em (x_0, y_0) se e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número positivo δ de tal forma que $[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] < \delta$ implica em $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Seja $u = u(x, y)$ definida e contínua em um conjunto de pontos $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Então as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ são definidas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}, \quad (x + \Delta x, y) \in \bar{\Omega}; \quad (5.2a, b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}, \quad (x, y + \Delta y) \in \bar{\Omega}.$$

5. TEORIA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.

Neste capítulo apresenta-se um desenvolvimento da Teoria de Transformada Integral Generalizada, para determinação de solução de certa classe de problemas do tipo convectivo-difusivo.

5.1. Funções de Duas Variáveis.

Sejam os intervalos não vazios e limitados

$$I^* = \{a < x < b; a, b, x \in \mathbb{R}\} \text{ e } J^* = \{y_0 < y < y_1; y_0, y_1, y \in \mathbb{R}\},$$

$$I = \{a \leq x \leq b; a, b, x \in \mathbb{R}\} \text{ e } J = \{y_0 \leq y \leq y_1; y_0, y_1, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam o domínio $\Omega = I^* \otimes J^*$, Γ a fronteira de Ω , e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = I \otimes J$ a aderência de Ω , onde $\otimes$ é o símbolo do produto cartesiano.

Se para cada par ordenado (x, y) , $x \in I$ e $y \in J$, existe um único elemento u de um conjunto $K = \{\mathbb{R}\}$ então a função u de duas variáveis está definida. O elemento $u \in K$ correspondente ao par ordenado (x, y) é o valor de u em (x, y) e denota-se por $u = u(x, y)$.

Diz-se que $u = u(x, y)$ é analítica em $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$ se e somente se $u(x, y)$ pode ser representada pela série infinita

$$u(x, y) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{i, j} (x-x_0)^i (y-y_0)^j, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.1)$$

a qual converge uniformemente em cada ponto da vizinhança circular de (x_0, y_0) (HALL, 1940) e (LIMA, 1970a:56).

Seja $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$, então se $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$, diz-se que u é contínua em (x_0, y_0) se e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número positivo δ de tal forma que $[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] < \delta$ implica em $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Seja $u = u(x, y)$ definida e contínua em um conjunto de pontos $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Então as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ são definidas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}, \quad (x + \Delta x, y) \in \bar{\Omega}; \quad (5.2a, b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}, \quad (x, y + \Delta y) \in \bar{\Omega}.$$

Derivadas de ordem superior podem ser definidas seguindo o mesmo procedimento. A seguinte notação será utilizada neste capítulo

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.3)$$

e assim por diante.

Em $\mathbb{R}^2$ seja o domínio $\bar{\Omega}$. Então define-se a integral dupla

$$\int_{\bar{\Omega}} u(x,y) d\bar{\Omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u(\alpha_i, \beta_i) \Delta S_i, \quad \text{para } \lim_{i \rightarrow \infty} \max[D(\Delta \bar{\Omega}_i)] \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

onde $\Delta \bar{\Omega}_i$ são as várias subdivisões fechadas de $\bar{\Omega}$, ΔS_i são as áreas correspondentes a $\Delta \bar{\Omega}_i$, $(\alpha_i, \beta_i) \in \Delta \bar{\Omega}_i$, e $D(\Delta \bar{\Omega}_i)$ são os respectivos diâmetros de $\Delta \bar{\Omega}_i$.

Uma equação diferencial na variável dependente $u(x,y)$ e nas independentes x e y é uma equação que pode ser posta na forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (5.5)$$

onde F é uma função das variáveis indicadas sendo que no mínimo uma derivada parcial deve ocorrer. Uma abreviação para Equação Diferencial Parcial que será utilizada é EDP.

Uma EDP na variável dependente $u(x,y)$ e nas independentes x e y são ditas lineares de segunda ordem em Ω se é possível escreve-las da seguinte forma

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + F = 0 \quad (5.6)$$

onde A, B, C, D, E e F são funções de $(x,y) \in \Omega$ e que $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ em Ω .

Diz-se que $f(x,y)$ é solução da equação (5.6), $(x,y) \in \Omega$ se e somente se, $f(x,y) \in \mathcal{C}^{(2)}(\Omega)$ e a função e suas derivadas parciais satisfazem (5.6) identicamente em cada (x,y) .

5.2. Problema de Valor Inicial e de Contorno.

Seja o problema de valor inicial e de fronteira definido da seguinte maneira



$$w(x) L_y u(x,y) + s(y) L_x u(x,y) + t(y) w(x) u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega; \quad (5.7a-c)$$

$$u(x,y_0) = g(x), \quad x \in I \text{ e } (x,y_0) \in \Gamma;$$

$$Bu(x,y) = h(x,y), \quad x = x_m \in I, \quad m = 0,1, \quad y \in J, \quad (x,y) \in \Gamma;$$

onde L_y , L_x e B são operadores lineares expressos pelas fórmulas

$$L_y \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial y};$$

$$L_x \equiv -\frac{\partial}{\partial y} \left[k(x) \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \right] + d(x); \quad (5.8a-c)$$

$$B \equiv \alpha_m - (-1)^m \beta_m k(x) \frac{\partial(\quad)}{\partial x}, \quad x = x_m, \quad m = 0,1,$$

e $u(x,y) \in \mathcal{C}^{(2)}(\bar{\Omega})$, $k(x) \in \mathcal{C}^{(1)}(I, \mathbb{R})$ para $k(x) > 0$; $w(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ para $w(x) > 0$; $g(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$; $h(x,y) \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$; $0 \neq s(y) \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$; $t(y) \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$; $f(x,y) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$; $\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{R}$, de forma que $|\alpha_m| + |\beta_m| \neq 0$ para $m = 0,1$.

Uma função $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial e de contorno se ela for contínua em $\bar{\Omega}$, tiver derivadas u_y e u_{xx} em Ω e satisfizer simultaneamente as equações (5.7a-c).

Teorema 5.1 - Seja o problema de valor inicial e de contorno definido anteriormente, equação (5.7a), com condições inicial e de contorno não homogêneas (5.7b-c). Seja também a expressão

$$u(x,y) = U(x,y) + \sum_{i=0}^2 c_i x^i, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.9)$$

então este problema pode ser transformado em outro com condições de contorno homogêneas, mediante a escolha adequada das constantes c_0 , c_1 e c_2 .

Demonstração: Substituindo-se a equação (5.9) na (5.7c) resulta

$$Bu(x,y) = BU(x,y) + \sum_{i=0}^2 c_i Bx^i = h(x,y). \quad (5.10)$$

Tomando as constantes c_0 , c_1 e c_2 de tal forma que

$$\sum_{i=0}^2 c_i Bx^i = h(x,y), \quad x = x_m, \quad m = 0,1; \quad (5.11)$$

obtem-se

$$BU(x,y) = 0; x = x_m, m = 0,1. \quad (5.12)$$

Para obtenção das constantes c_0 , c_1 e c_2 basta substituir a definição do operador linear B (5.8c) na equação (5.11), assim

$$\sum_{i=0}^2 c_i [\alpha_m x^i - (-1)^m \beta_m k(x) i x^{i-1}] = h(x,y), x = x_m, m = 0,1 \quad (5.13)$$

ou

$$[\alpha_0] c_0 + [\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)] c_1 + [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0] c_2 = h(x_0,y), \quad (5.14a,b)$$

$$[\alpha_1] c_0 + [\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)] c_1 + [\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] c_2 = h(x_1,y).$$

Como o sistema de equações (5.14a,b) tem mais incógnitas que equações, uma solução que pode ser encontrada é fazendo-se $c_2 = 0$, de tal forma que o sistema torna-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & (\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)) \\ \alpha_1 & (\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_0,y) \\ h(x_1,y) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (5.15) é não nulo obtém-se as constantes restantes c_0 e c_1 expressas por

$$c_0(y) = \frac{h(x_0,y)[\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)] - h(x_1,y)[\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)]}{\alpha_0[\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)] - \alpha_1[\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)]} \quad (5.16a,b)$$

$$c_1(y) = \frac{\alpha_0 h(x_1,y) - \alpha_1 h(x_0,y)}{\alpha_0[\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)] - \alpha_1[\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)]}.$$

Caso a matriz dos coeficientes do sistema (5.15) seja nula, significa que a opção de fazer $c_2 = 0$ não é adequada, assim faz-se $c_1 = 0$ e o sistema de equações (5.14a,b) torna-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & (\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0) \\ \alpha_1 & (\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_0,y) \\ h(x_1,y) \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (5.17) é não nulo obtém-se as constantes restantes c_0 e c_2 expressos por

$$c_0(y) = \frac{h(x_0, y) [\alpha_1^2 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] - h(x_1, y) [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0]}{\alpha_0 [\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] - \alpha_1 [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0]} \quad (5.18a, b)$$

$$c_2(y) = \frac{\alpha_0 h(x_1, y) - \alpha_1 h(x_0, y)}{\alpha_0 [\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] - \alpha_1 [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0]} .$$

Caso a matriz dos coeficientes do sistema (5.17) também seja nula, significa que as opções de fazer $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ não são adequadas, assim faz-se $c_0 = 0$ e o sistema de equações (5.14a,b) torna-se

$$\begin{bmatrix} (\alpha_0 x_0^2 - \beta_0 k(x_0)) & (\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0) \\ (\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)) & (\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_0, y) \\ h(x_1, y) \end{bmatrix} . \quad (5.19)$$

cujas soluções são:

$$c_1(y) = \frac{h(x_0, y) [\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] - h(x_1, y) [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0]}{[\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)] [\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] - [\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)] [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0]}$$

$$c_1(y) = \frac{h(x_1, y) [\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)] - h(x_0, y) [\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)]}{[\alpha_0 x_0 - \beta_0 k(x_0)] [\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 k(x_1) x_1] - [\alpha_1 x_1 + \beta_1 k(x_1)] [\alpha_0 x_0^2 - 2\beta_0 k(x_0) x_0]} . \quad (5.20a, b)$$

Quando ambas as condições de contorno são do primeiro tipo, i.e., $\alpha_0, \alpha_1 \neq 0$ e $\beta_0, \beta_1 = 0$, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (5.15) é $\alpha_0 \alpha_1 (x_1 - x_0)$ e portanto não nulo, assim neste caso $c_2 = 0$.

Da mesma forma, quando ambas as condições de contorno são do segundo tipo, i.e., $\alpha_0, \alpha_1 = 0$ e $\beta_0, \beta_1 \neq 0$, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (5.19) é $2\beta_0 \beta_1 k(x_0) k(x_1) (x_0 - x_1)$ e portanto não nulo, assim neste caso $c_0 = 0$.

Uma vez obtidos os parâmetros $c_0(y)$, $c_1(y)$ e $c_2(y)$, pode-se substituir a equação (5.9) na (5.7a), bem como nas condições inicial (5.7b) e de contorno (5.7c), e utilizando as propriedades dos operadores lineares definidas no Capítulo 2, obtém-se

$$w(x)L_y U(x,y) + s(y)L_x U(x,y) + t(y)w(x)U(x,y) = F(x,y), (x,y) \in \Omega;$$

$$U(x,y_0) = G(x), x \in I, (x,y_0) \in \Gamma; \quad (5.21a-c)$$

$$BU(x,y) = 0, x = x_m \in I, m = 0,1, y \in J, (x,y) \in \Gamma;$$

onde

$$F(x,y) = f(x,y) - [w(x)L_y + s(y)L_x + w(x)t(y)] \sum_{i=0}^2 c_i(y)x^i$$

$$G(x) = g(x) - \sum_{i=0}^2 c_i(y_0)x^i \quad (5.22a,b)$$

Desta forma, todos os problemas no restante deste trabalho serão considerados homogêneos, relativamente às condições de contorno.

5.3. Expansão de Funções de Duas Variáveis Reais em Séries Infinitas de Funções Ortonormais.

Os conceitos sobre seqüências e séries infinitas aqui utilizadas podem ser encontrados em (APOSTOL, 1974), (BARTLE, 1976), (BOULOS, 1986), (HYSLOP, 1950), (KNOPP, 1966), (LIMA, 1970 e 1989), (MARKUSHEVICH, 1977) e (WHITE, 1973).

Diz-se que uma função $u(x,y)$ é de classe $\mathcal{C}^{(k)}$ ou k vezes continuamente diferenciável, e escreve-se $u(x,y) \in \mathcal{C}^{(k)}$, quando todas as derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^{(\alpha)} u(x,y)}{\partial x^{(m)} \partial y^{(n)}}, m = 0,1,\dots, \alpha; n = \alpha-m; \alpha \leq k; \quad (5.23)$$

existem e são contínuas em $\bar{\Omega}$. O conjunto das funções contínuas é indicado por $\mathcal{C}^{(0)}$. A classe $\mathcal{C}^{(\infty)}$ das funções infinitamente diferenciáveis pode ser interpretada como sendo a intersecção de todas as classes $\mathcal{C}^{(k)}$; $\mathcal{C}^{(\infty)} = \mathcal{C}^{(0)} \cap \mathcal{C}^{(1)} \cap \mathcal{C}^{(2)} \dots$. Assim $u(x,y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ se, e somente se, possuir derivadas de todas as ordens em cada ponto de $\bar{\Omega}$. É imediato que

$$\mathcal{C}^{(\infty)} \subset \dots \subset \mathcal{C}^{(k)} \subset \dots \subset \mathcal{C}^{(2)} \subset \mathcal{C}^{(1)} \subset \mathcal{C}^{(0)}.$$

Teorema 5.2 - Toda função analítica $u(x,y)$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$ é infinitamente diferenciável em $\bar{\Omega}$.

Demonstração: Diferenciando-se a equação (5.1), da definição de função analítica, conforme a expressão (5.23) obtém-se



$$\frac{\partial^{(k)} u(x,y)}{\partial x^{(m)} \partial y^{(n)}} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (i)(i-1)\dots(i-m+1)(j)(j-1)\dots$$

$$\dots (j-n+1)(x-x_0)^{i-m}(y-y_0)^{j-n}, \quad (5.24)$$

para $m = 0, 1, \dots, k$; $n = k-m$; $k = 0, 1, 2, \dots$

Como a série definida pela equação (5.1) converge uniformemente tem-se que

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(i+1)(j+1)} (x-x_0)^{i+1} (y-y_0)^{j+1}}{a_{ij} (x-x_0)^i (y-y_0)^j} \right| =$$

$$= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(i+1)(j+1)} (x-x_0) (y-y_0)}{a_{ij}} \right| = \rho < 1; \quad (5.25)$$

da mesma forma o teste de convergência para a série (5.24) fornece

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(i+1)(j+1)} (i+1)(j+1) (x-x_0)^{i-m+1} (y-y_0)^{j-n+1}}{a_{ij} (i-m+1)(j-n+1) (x-x_0)^{i-m} (y-y_0)^{j-n}} \right| =$$

$$= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{(i+1)(j+1)}{(i-m+1)(j-n+1)} \right| \lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(i+1)(j+1)} (x-x_0) (y-y_0)}{a_{ij}} \right| = \rho < 1; \quad (5.26)$$

$$\text{uma vez que } \lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{(i+1)(j+1)}{(i-m+1)(j-n+1)} \right| = 1 \quad \blacksquare$$

Uma consequência imediata da demonstração acima é que o processo de derivação não altera o raio de convergência de uma série infinita uniformemente convergente.

Teorema 5.3 - Toda função analítica $u(x,y)$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$ é quadrado integrável em $\bar{\Omega}$.

Demonstração: Elevando-se ao quadrado a função analítica $u(x,y)$, dada pela equação (5.1), obtém-se

$$u^2(x,y) = \sum_{i,j,m,n=0}^{\infty} a_{ij} a_{mn} (x-x_0)^{i+m} (y-y_0)^{j+n}. \quad (5.27)$$

Efetuada o teste de convergência na série (5.27) tem-se

$$\lim_{i, j, m, n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(i+1)(j+1)} a_{(m+1)(n+1)} (x-x_0)^{i+m+2} (y-y_0)^{j+n+2}}{a_{ij} a_{mn} (x-x_0)^{i+m} (y-y_0)^{j+n}} \right| =$$

$$= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(i+1)(j+1)} (x-x_0) (y-y_0)}{a_{ij}} \right| x$$

$$x \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{(m+1)(n+1)} (x-x_0) (y-y_0)}{a_{mn}} \right| = \rho^2, \quad (5.28)$$

portanto possuindo convergência uniforme uma vez que pelo Teorema 5.2 $\rho < 1$ e por conseguinte $\rho^2 < \rho < 1$, assim $u^2(x, y)$ é uma função limitada e

$$\int_{\bar{\Omega}} u^2(x, y) d\bar{\Omega} \leq \int_{\bar{\Omega}} \max |u(x, y)|^2 d\bar{\Omega} = \max |u(x, y)|^2 \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\Omega} \quad (5.29)$$

Teorema 5.4 - Toda função analítica $u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$ pode ser expandida em termos de uma série infinita de funções ortonormais $\psi_i(x)$ relativamente à função peso $w(x) > 0$, $x \in I$ e $i \in \mathbb{N}$, conforme a seguinte expressão.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(y) \psi_i(x) \quad (5.30)$$

onde $A_i(y)$, $y \in J$, é uma função limitada fornecida por

$$A_i(y) = \int_I w(x) \psi_i(x) u(x, y) dx. \quad (5.31)$$

Demonstração: A função analítica, equação (5.1), pode ser rearranjada para a seguinte forma

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m(y) (x-x_0)^m, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}; \quad (5.32)$$

onde

$$a'_m(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (y-y_0)^n. \quad (5.33)$$

A função $(x-x_0)^i$, $i \in \mathbb{N}$, $x, x_0 \in I$ é quadrado integrável em I e portanto, em conformidade com o Teorema 3.37 pode ser expandida em termos de uma série infinita, convergente na média, e expressa por

$$(x-x_0)^m = \sum_{i=0}^{\infty} a'_{im} \psi_i(x), \quad m \in \mathbb{N}; \quad (5.34)$$

onde

$$a'_{1m} = \int_I w(x) \psi_1(x) (x-x_0)^m dx.$$

Substituindo a expressão para $(x-x_0)^m$, equação (5.34), na (5.32) obtém-se

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty} a'_m(y) \sum_{i=0}^{\infty} a'_{1m} \psi_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a'_m(y) a'_{1m} \psi_1(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a'_m(y) a_{1m} \psi_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(y) \psi_1(x), \end{aligned} \quad (5.35)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_i(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} a'_m(y) a'_{1m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (y-y_0)^n \right) \int_I w(x) \psi_1(x) (x-x_0)^m dx = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_I a_{mn} (x-x_0)^m (y-y_0)^n w(x) \psi_1(x) dx = \\ &= \int_I w(x) \psi_1(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (x-x_0)^m (y-y_0)^n dx = \\ &= \int_I w(x) \psi_1(x) u(x,y) dx. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Como todos os termos do integrando do lado direito da equação (5.36) são quadrado integráveis, pelo Teorema 3.18, o seu produto é integrável e portanto a integral é limitada em I ■

O termo $A_i(y)$ corresponde a uma transformada integral de $u(x,y)$, i.e., $A_i(y) = \tilde{u}_i(y)$. Assim, as equações (5.36,30) são denominadas por transformada integral e sua inversa, respectivamente (MIKHAILOV & ÖZISIK, 1984) e são expressas por

$$\tilde{u}_i(y) = \int_I w(x) \psi_1(x) u(x,y) dx, \quad i \in \mathbb{N}; \quad (5.37a,b)$$

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \psi_1(x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

O resultado da análise, acima obtido, é importante porém um tanto restrito pois baseia-se na hipótese de que $u(x,y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$, restringindo muito o espaço das funções sobre as quais pode-se aplicar o par transformada-inversa, equações (5.37a,b). Desta forma é interessante ampliar este espaço de funções.



Teorema 5.5 - Toda função $u(x,y) \in \mathcal{C}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$, quadrado integrável em $\bar{\Omega}$ pode ser expandida em termos de uma série infinita de funções ortonormais $\psi_i(x)$, relativamente à função peso $w(x) > 0$, $x \in I$, $i \in \mathbb{N}$, conforme a seguinte expressão

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \psi_i(x) \quad (5.38)$$

onde $\tilde{u}_i(y)$, $y \in J$, é uma função limitada fornecida por

$$\tilde{u}_i(y) = \int_I w(x) \psi_i(x) u(x,y) dx. \quad (5.39)$$

Demonstração: Inicialmente tentar-se-á encontrar uma expansão em termos de uma série infinita de funções ortonormais, nos mesmos moldes daquela expressão (5.35) obtida para o caso de $u(x,y)$ ser analítica, assim assume-se que

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \psi_i(x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}. \quad (5.40)$$

Multiplicando-se a expressão acima por $w(x)\psi_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$ e integrando-se sobre o intervalo I , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_I w(x) \psi_j(x) u(x,y) dx &= \int_I w(x) \psi_j(x) \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \psi_i(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \int_I w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \delta_{ij} = \tilde{u}_j(y), \quad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{u}_i(y) = \int_I w(x) \psi_i(x) u(x,y) dx. \quad (5.41)$$

Multiplicando-se a equação (5.40) por $w(x)u(x,y)$ e integrando sobre o compacto $\bar{\Omega}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} w(x) u^2(x,y) d\bar{\Omega} &= \int_{\bar{\Omega}} w(x) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{u}_i(y) \tilde{u}_j(y) \psi_i(x) \psi_j(x) d\bar{\Omega} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \int_J \tilde{u}_i(y) \tilde{u}_j(y) dy \int_I w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_J \tilde{u}_i^2(y) dy. \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.2 o operador L é auto-adjunto (5.42)

Como o lado esquerdo da equação acima é limitado, implica que o lado direito também o é, e por conseguinte as funções $\tilde{u}_i(y)$, $y \in J$, $i \in \mathbb{N}$ são limitadas e quadrado integráveis. Isto

também demonstra que a série (5.40) converge na média ■

O resultado do teorema anterior estende a validade do par Transformada-Inversa, equações (5.37a,b), do espaço de funções $\mathcal{C}^{(\infty)}$ até o de $\mathcal{C}^{(0)}$.

5.4. Técnica da Transformada Integral.

Procura-se encontrar uma solução que satisfaça à equação diferencial parcial (5.21a), bem como à condição inicial (5.21b) e às condições de contorno (5.21c).

Teorema 5.6 - Seja o problema expresso pelas equações (5.21a-c). Seja também o problema auxiliar de autovalores (em conformidade com o Capítulo 3) definido pelo seguinte equacionamento

$$\lambda_i^2 w^*(x) \psi_i(x) = L_x^* \psi_i(x), \quad x \in I \text{ e } i \in \mathbb{N}; \quad (5.43a, b)$$

$$B\psi_i(x) = 0, \quad x = x_m \in I, \quad m = 0, 1;$$

onde $w^*(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, com $w^*(x) > 0$ para $x \in I$; $\psi_i(x) \in \mathcal{C}^{(2)}(I, \mathbb{R})$, e L_x^* um operador diferencial linear ordinário de segunda ordem. Então, se $w^*(x) = w(x)$ e L_x^* um operador adjunto de L_x , a equação (5.21a) conjuntamente com as condições inicial e de contorno, possuem uma única solução que pode ser expressa da seguinte forma

$$U(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x) \exp\left[-\int_{y_0}^y S_i(\eta) d\eta\right] \{\tilde{G}_i + \quad (5.49)$$

$$+ \int_{y_0}^y \tilde{F}_i(\eta) \exp\left[\int_{y_0}^{\eta} S_i(\xi) d\xi\right] d\eta\}, \quad (5.44)$$

onde

$$S_i(y) = t(y) + \lambda_i^2 s(y),$$

$$\tilde{G}_i = \int_I w(x) \psi_i(x) G(x) dx, \quad (5.45a-c)$$

$$\tilde{F}_i(y) = \int_I \psi_i(x) F(x, y) dx.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.2 o operador L_x é auto-adjunto, e por hipótese L_x^* é adjunto de L_x , assim $L_x^* \equiv L_x$. Portanto o problema auxiliar de autovalores (5.38a,b) torna-se

$$\lambda_1^2 w(x) \psi_1(x) = L_x \psi_1(x), \quad x \in I \text{ e } i \in \mathbb{N}; \quad (5.46a, b)$$

$$B\psi_1(x) = 0, \quad x = x_m, \quad m = 0, 1.$$

Multiplicando-se a equação (5.21a) por $\psi_1(x)$, $i \in \mathbb{N}$, a (5.46a) por $s(y)U(x, y)$ e adicionando as equações resultantes obtém-se

$$w(x) \psi_1(x) L_y U(x, y) + [t(y) + \lambda_1^2 s(y)] w(x) \psi_1(x) U(x, y) + s(y) [\psi_1(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x \psi_1(x)] = \psi_1(x) F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5.47)$$

Integrando-se, em I , a equação acima resulta

$$\int_I w(x) \psi_1(x) L_y U(x, y) dx + S_1(y) \int_I w(x) \psi_1(x) U(x, y) dx + s(y) \int_I [\psi_1(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x \psi_1(x)] dx = \tilde{F}_1(y), \quad (5.48)$$

onde

$$S_1(y) = t(y) + \lambda_1^2 s(y),$$

$$\tilde{F}_1(y) = \int_I \psi_1(x) F(x, y) dx.$$

Utilizando-se as propriedades dos operadores lineares de diferenciação e integração (Capítulo 2), obtém-se

$$\int_I w(x) \psi_1(x) L_y U(x, y) dx = \int_I L_y w(x) \psi_1(x) U(x, y) dx = L_y \int_I w(x) \psi_1(x) U(x, y) dx. \quad (5.49)$$

Tomando-se a definição do operador L_x , equação (5.8b), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_I [\psi_1(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x \psi_1(x)] dx &= \\ &= \int_I \left\{ U(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} \right] - \psi_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right] \right\} dx = \\ &= \int_I \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \left[U(x, y) \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} - \psi_1(x) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right] \right\} dx = \\ &= k(x) \left[U(x, y) \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} - \psi_1(x) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right] \Big|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Tomando-se as equações (5.21c) e (5.46b), das condições de contorno tem-se

$$[\alpha_m U(x, y) - (-1)^m k(x) \beta_m \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}]_{x=x_m} = 0, \quad m = 0, 1; \quad (5.51a)$$

(5.51a,b)

$$[\alpha_m \psi_1(x) - (-1)^m k(x) \beta_m \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x}]_{x=x_m} = 0, \quad m = 0, 1; \quad (5.52)$$

ou

$$\begin{bmatrix} U(x, y) & \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ \psi_1(x) & \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} \end{bmatrix}_{x=x_m} \begin{bmatrix} \alpha_m \\ -(-1)^m k(x_m) \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, \quad (5.53)$$

como $(\alpha_m, -(-1)^m k(x_m) \beta_m)^T \neq (0, 0)^T$ para $m = 0, 1$, então

$$\begin{vmatrix} U(x, y) & \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ \psi_1(x) & \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} \end{vmatrix}_{x=x_m} = 0, \quad m = 0, 1; \quad (5.54)$$

ou

$$[U(x, y) \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} - \psi_1(x) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}]_{x=x_m} = 0, \quad m = 0, 1; \quad (5.55)$$

assim a equação (5.45) torna-se

$$\int_I [\psi_1(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x \psi_1(x)] dx = 0. \quad (5.56)$$

Após estas considerações pode-se retornar à equação (5.48) que pode então ser expressa da seguinte forma

$$L_y \int_I w(x) \psi_1(x) U(x, y) dx + S_1(y) \int_I w(x) \psi_1(x) U(x, y) dx = \tilde{F}_1(y); \quad (5.57)$$

a qual pode ser novamente modificada tomando-se a definição da transformada integral, (5.37a), para resultar em

$$L_y \tilde{U}_1(y) + S_1(y) \tilde{U}_1(y) = \tilde{F}_1(y), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (5.58)$$

Como o operador linear L_y , (5.8a), é de primeira ordem, a equação (5.57) define um sistema de equações diferenciais ordinárias desacopladas, o qual necessita o respectivo conjunto de condições iniciais, que pode ser obtido multiplicando-se a equação (5.21b) por $w(x) \psi_1(x)$ e integrando-se sobre o compacto I , assim



$$\tilde{U}_1(y_0) \equiv \int_I w(x) \psi_1(x) U(x, y_0) dx = \int_I w(x) \psi_1(x) G(x) dx = \tilde{G}_1. \quad (5.58)$$

Resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (5.57), sujeito às condições iniciais (5.58) obtem-se

$$\tilde{U}_i(y) = \exp\{-\int_{y_0}^y S_i(\eta) d\eta\} \{\tilde{G}_i + \int_{y_0}^y \tilde{F}_i(\eta) \exp[\int_{y_0}^{\eta} S_i(\xi) d\xi] d\eta\}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (5.59)$$

Em conformidade com o Teorema de Existência e Unicidade (Capítulo 2) a solução acima é única para cada $i \in \mathbb{N}$. Substituindo-se a equação (5.59) na fórmula de inversão (5.37b) obtém-se a (5.44) ■

Este enfoque apresentado no Teorema 5.6 tem sido utilizado na solução de problemas do tipo Convecção-Difusão, sendo que MIKHAILOV & ÖZISIK (1984) apresentam uma análise unificada de sete classes distintas. Este procedimento é denominado de Técnica da Transformada Integral.

5.5. Técnica da Transformada Integral Generalizada.

No item anterior demonstrou-se que o problema original (5.21a-c), para ser transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias desacoplado é necessário que $w^*(x)$ e L_x^* do problema auxiliar de autovalores, (5.38a,b), sejam tais que $w^*(x) \equiv w(x)$ e $L_x^* \equiv L_x$. Apresenta-se agora alternativas para se buscar soluções quando estas duas restrições não forem atendidas no todo ou em parte. Assume-se então que $w^*(x) \neq w(x)$ e $L_x^* \neq L_x$.

Teorema 5.7 - Sejam o problema expresso pelas equações (5.21a-c) e o problema auxiliar de autovalores, equações (5.43a,b). Então a equação (5.21a), conjuntamente com as condições inicial (5.21b) e de contorno (5.21c) possuem uma única solução que pode ser expressa da seguinte forma

$$U(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{U}_i(y) \psi_i(x) \quad (5.60)$$

onde

$$[\tilde{U}_0(y), \tilde{U}_1(y), \dots]^T = \tilde{U}(y) = \exp[-\int_{y_0}^y S(\eta) d\eta] \{\tilde{G} + \int_{y_0}^y \exp[\int_{y_0}^{\eta} S(\xi) d\xi] H(\eta) d\eta, \quad (5.61)$$

sendo

$$S(y) = s(y) A^{-1} B + t(y) I + s(y) A^{-1} C;$$

$$A = [A_{ij}], \quad A_{ij} = \int_I w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad i, j \in \mathbb{N};$$

$$B = [B_{ij}], \quad B_{ij} = \int_I [\psi_i(x) L_x \psi_j(x) - \psi_j(x) L_x^* \psi_i(x)] dx;$$

$$C = [C_{ij}], \quad C_{ij} = \lambda_1^2 \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \int_I w^*(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad i, j \in \mathbb{N};$$

$$I = [\delta_{ij}], \quad i, j \in \mathbb{N};$$

$$\tilde{G} = [\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots]^T, \quad \tilde{G}_i = \int_I w^*(x) \psi_i(x) G(x) dx, \quad i \in \mathbb{N};$$

$$H(y) = A^{-1} \tilde{F}(y);$$

$$\tilde{F}(y) = [\tilde{F}_0(y), \tilde{F}_1(y), \dots]^T, \quad \tilde{F}_i(y) = \int_I \psi_i(x) F(x, y) dx, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Multiplicando-se a equação (5.21a) por $\psi_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, a (5.43a) por $s(y)U(x, y)$ e adicionando as equações resultantes obtém-se

$$\begin{aligned} & w(x) \psi_i(x) L_y U(x, y) + s(y) [\psi_i(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x^* \psi_i(x)] + \\ & + t(y) w(x) \psi_i(x) U(x, y) + \lambda_1^2 s(y) w^*(x) \psi_i(x) U(x, y) = \\ & = \psi_i(x) F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Integrando-se, em I , a equação acima resulta

$$\begin{aligned} & \int_I w(x) \psi_i(x) L_y U(x, y) dx + s(y) \int_I [\psi_i(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x^* \psi_i(x)] dx + \\ & + t(y) \int_I w(x) \psi_i(x) U(x, y) dx + \lambda_1^2 s(y) \int_I w^*(x) \psi_i(x) U(x, y) dx = \tilde{F}_i(y), \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde $\tilde{F}_i(y) = \int_I \psi_i(x) F(x, y) dx$.

Utilizando-se as propriedades dos operadores lineares de diferenciação e integração (Capítulo 2); os resultados da Teoria de Séries Infinitas (BOULOS, 1986), (HYSLOP, 1950) e (KNOPP, 1966); a fórmula de inversão

$$U(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{U}_i(y) \psi_i(x),$$

bem como a de transformação integral

$$\tilde{U}_i(y) = \int_I w^*(x) \psi_i(x) U(x, y) dx, \quad i \in \mathbb{N};$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \int_I w(x) \psi_1(x) L_y U(x, y) dx &= \int_I w(x) \psi_1(x) L_y \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}_j(y) \psi_j(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} L_y \tilde{U}_j(y) \int_I w(x) \psi_1(x) \psi_j(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} L_y \tilde{U}_j(y), \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$A_{1j} = \int_I w(x) \psi_1(x) \psi_j(x) dx;$$

$$\begin{aligned} \int_I [\psi_1(x) L_x U(x, y) - U(x, y) L_x^* \psi_1(x)] dx &= \\ = \int_I [\psi_1(x) L_x \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}_j(y) \psi_j(x) - \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}_j(y) \psi_j(x) L_x^* \psi_1(x)] dx &= \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}_j(y) \int_I [\psi_1(x) L_x \psi_j(x) - \psi_j(x) L_x^* \psi_1(x)] dx = \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j} \tilde{U}_j(y), \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$B_{1j} = \int_I [\psi_1(x) L_x \psi_j(x) - \psi_j(x) L_x^* \psi_1(x)] dx;$$

$$\begin{aligned} \int_I w^*(x) \psi_1(x) U(x, y) dx &= \int_I w^*(x) \psi_1(x) \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}_j(y) \psi_j(x) dx = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}_j(y) \int_I w^*(x) \psi_1(x) \psi_j(x) dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{1j} \tilde{U}_j(y) = \tilde{U}_1(y), \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\delta_{1j} = \int_I w^*(x) \psi_1(x) \psi_j(x) dx. \quad (5.70)$$

Após estas considerações pode-se retornar à equação (5.63) que pode então ser expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} L_y \tilde{U}_j(y) + s(y) \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j} \tilde{U}_j(y) + t(y) \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} \tilde{U}_j(y) + \\ + s(y) \lambda_1^2 \tilde{U}_1(y) = \tilde{F}_1(y), \quad i \in \mathbb{N}; \end{aligned} \quad (5.67)$$

ou na forma matricial

$$L_y \tilde{U}(y) + S(y) \tilde{U}(y) = \tilde{H}(y) \quad (5.68)$$

onde

$$S(y) = t(y)I + s(y) A^{-1}[B + C],$$

$$\tilde{H}(y) = A^{-1} \tilde{F}(y),$$

sendo

$$A = [A_{1j}];$$

$$B = [B_{1j}];$$



$$C = [C_{ij}]; C_{ij} = \lambda_1^2 \delta_{ij};$$

$$\tilde{U}(y) = [\tilde{U}_0(y), \tilde{U}_1(y), \dots]^T$$

$$\tilde{F}(y) = [\tilde{F}_0(y), \tilde{F}_1(y), \dots]^T.$$

A matriz A é simétrica uma vez que

$$A_{ij} = \int_I w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \int_I w(x) \psi_j(x) \psi_i(x) dx = A_{ji}, \quad i, j \in N;$$

considerando também que as autofunções $\psi_i(x)$, $i \in N$, são reais e linearmente independentes tem-se que o determinante de Gram é não nulo, i.e.,

$$G(\psi_0, \psi_1, \dots) = \det[A_{ij}] \neq 0, \quad (5.69)$$

desta forma A é inversível (BRONSON, 1993) e portanto A^{-1} existe.

Como o operador linear L_y , (5.8a), é de primeira ordem, a equação (5.68) define um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, o qual necessita o respectivo conjunto de condições iniciais, que pode ser obtido multiplicando-se a equação (5.21b) por $w^*(x) \psi_i(x)$ e integrando-se sobre o compacto I , assim

$$\tilde{U}(y_0) = \tilde{G} = [\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots]^T, \quad \tilde{G}_i = \int_I w^*(x) \psi_i(x) G(x) dx. \quad (5.70)$$

Resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas (5.68), sujeito às condições iniciais (5.70) obtém-se

$$\tilde{U}(y) = \exp \left[- \int_{y_0}^y S(\eta) d\eta \right] \left\{ \tilde{G} + \int_{y_0}^y \exp \left[\int_{y_0}^\eta S(\xi) d\xi \right] H(\eta) d\eta \right\}. \quad (5.71)$$

Em conformidade com o Teorema de Existência e Unicidade (Capítulo 2) a solução acima é única.

Substituindo-se $\tilde{U}_0(y)$, $\tilde{U}_1(y)$, ..., obtidos da equação (5.71), na fórmula de inversão (5.60) obtém-se a solução final $U(x, y)$ ■

Este enfoque apresentado no Teorema 5.7 tem sido utilizado na solução de problemas do tipo Convecção-Difusão que apresentem dificuldades intransponíveis quando enfocados por métodos menos poderosos, tais como o Método da Separação de Variáveis e o da Transformação Conforme. Pode-se citar como exemplo, entre muitos outros pesquisadores que também utilizam-se desta técnica, a

obtenção de distribuição de velocidade em escoamentos laminares de fluidos Newtonianos em dutos retilíneos de seção transversal triangular (APARECIDO et al., 1989), trapezoidal (APARECIDO & COTTA, 1987) e hexagonal (APARECIDO & COTTA, 1990b); a obtenção da distribuição de temperatura em escoamentos laminares de fluidos Newtonianos em dutos retilíneos de seção transversal triangular (APARECIDO & COTTA, 1992), retangular (APARECIDO & COTTA, 1990c), e também de formatos irregulares (APARECIDO & COTTA, 1990a); a solução de problemas de Difusão com coeficientes variáveis (COTTA et al., 1992); análise da transferência de calor transiente em aletas (COTTA et al., 1993); solução de problemas não lineares de transferência de calor com mudança de fase (DINIZ et al., 1990a,b), e (DINIZ et al., 1992); e obtenção da distribuição de temperatura em escoamentos em desenvolvimento em dutos retilíneos (SILVA et al., 1992). Recentemente publicou-se (COTTA, 1993) um texto que apresenta várias aplicações da Técnica da Transformada Integral Generalizada.

5.6. Truncamento da Expansão de Funções em Série Infinitas.

Em conformidade com o item (5.3) a expansão de uma função $U(x,y)$, quadrado integrável em $\bar{\Omega}$, em termos de um conjunto completo de funções ortonormais, relativamente à função peso $w(x) > 0$, pode ser expressa por

$$U(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{U}_i(y) \psi_i(x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.72)$$

ou

$$U(x,y) = \sum_{i=0}^N \tilde{U}_i(y) \psi_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \tilde{U}_i(y) \psi_i(x). \quad (5.73)$$

Definindo uma função aproximação $U_N(x,y)$ e uma função resíduo $R_N(x,y)$ da seguinte forma

$$U_N(x,y) = \sum_{i=0}^N \tilde{U}_i(y) \psi_i(x), \quad (5.74a,b)$$

$$R_N(x,y) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \tilde{U}_i(y) \psi_i(x),$$

assim a equação (5.72) torna-se

$$U(x,y) = U_N(x,y) + R_N(x,y). \quad (5.75)$$



Como $U(x,y)$ é quadrado integrável e converge na média, em conformidade com o item (5.3) e com o Capítulo 3, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Omega}} w(x) |U(x,y) - U_N(x,y)|^2 d\bar{\Omega} \rightarrow 0, \quad (5.76)$$

e portanto $U_N(x,y)$ converge na média para $U(x,y)$ quando N aumenta.

Rearranjando-se a equação (5.70) obtém-se

$$U(x,y) - U_N(x,y) = R_N(x,y),$$

$$|U(x,y) - U_N(x,y)|^2 = |R_N(x,y)|^2,$$

$$\text{ou} \quad w(x) |U(x,y) - U_N(x,y)|^2 = w(x) |R_N(x,y)|^2,$$

a qual ao ser integrada em $\bar{\Omega}$ fornece.

$$\int_{\bar{\Omega}} w(x) |U(x,y) - U_N(x,y)|^2 d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} w(x) |R_N(x,y)|^2 d\bar{\Omega}.$$

Passando ao limite a expressão acima resulta

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Omega}} w(x) |U(x,y) - U_N(x,y)|^2 d\bar{\Omega} = 0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Omega}} w(x) |R_N(x,y)|^2 d\bar{\Omega},$$

ou seja $R_N(x,y)$ converge na média para zero quando N aumenta.

Desta forma, para efeitos computacionais, pode-se substituir os somatórios infinitos que aparecem nesta análise por somatórios finitos, tomando valores de N que permitam atingir um determinado erro médio pré-estabelecido.

Para maiores detalhes sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem infinitos, ver LEWIS (1933), DEIMLING (1977) e COTTA (1989).

6.2. Campo de Tensões em um Meio Contínuo Deformável.

Seja $(x,y,z) \in R^3$ um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas; $dV = dx dy dz$ um elemento de volume com seu vértice mais próximo da origem no ponto (x,y,z) . Sobre as duas faces, perpendiculares ao eixo x , de área $A_x = dy dz$ atuam forças

6. APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO EM DUTOS.

Definindo tensão como sendo

Apresenta-se a fundamentação do modelamento matemático de problemas de transferência de calor em escoamentos laminares em dutos, bem como a respectiva solução utilizando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada, desenvolvida nos capítulos anteriores. O caso do duto circular retilíneo é particularmente analisado.

6.1. Hipótese do Contínuo.

O termo *contínuo* refere-se a um conceito simplificador que consiste em negligenciar a estrutura molecular da matéria e imaginá-la sem falhas ou espaços vazios. Assume-se, também, que todas as funções matemáticas utilizadas nesta teoria são contínuas, exceto em um conjunto finito de superfícies interiores. Estas hipóteses implicam que as derivadas das funções aí definidas também são contínuas em quase todos pontos da matéria. A matéria hipoteticamente contínua denomina-se meio contínuo. Este enfoque imediatamente torna disponível todo o instrumental matemático de análise. As teorias de elasticidade, plasticidade e mecânica de fluidos baseadas no conceito do meio contínuo levam adicionalmente a predições quantitativas que estão em concordância com os resultados experimentais para grande quantidade de condições termodinâmicas. A existência de áreas nas quais o conceito de meio contínuo não é aplicável não diminui sua utilidade em outras áreas. Uma outra hipótese frequentemente utilizada a respeito da natureza da matéria é a isotropia (um material é isotrópico com respeito a certa propriedade se esta propriedade é a mesma em todas as direções) (MALVERN, 1969).

6.2. Campo de Tensões em um Meio Contínuo Deformável.

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas; $dV = dx dy dz$ um elemento de volume com seu vértice mais próximo da origem no ponto (x, y, z) . Sobre as duas faces, perpendiculares ao eixo x , de área $A_x = dydz$ atuam forças



$$f_x \text{ e } f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} dx. \quad (6.1)$$

Definindo tensão como sendo

$$p_x = \lim_{A_x \rightarrow 0} \frac{f_x}{A_x}, \quad (6.2)$$

a expressão (6.1) pode ser substituída por outra em termos de tensões, assim os termos expressos em (6.1) podem ser substituídos por

$$p_x \text{ e } p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx; \quad (6.3)$$

sendo que o sub-índice x, significa que o vetor tensão p atua sobre uma face perpendicular ao eixo x. Para outros eixos segue-se o mesmo procedimento, desta forma obtém-se as componentes da força resultante em cada direção:

$$\text{direção x: } \frac{\partial p_x}{\partial x} dv, \quad (6.4a)$$

$$\text{direção y: } \frac{\partial p_y}{\partial y} dv, \quad (6.4b)$$

$$\text{direção z: } \frac{\partial p_z}{\partial z} dv. \quad (6.4c)$$

Consequentemente a força resultante total P, por unidade de volume, é expressa por

$$P = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}. \quad (6.5)$$

Os vetores p_x , p_y e p_z que atuam sobre as faces A_x , A_y e A_z pertencem ao $\mathbb{R}^3$, portanto podem ser decompostos como segue

$$p_x = (\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})^T, \quad (6.6a)$$

$$p_y = (\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz})^T, \quad (6.6b)$$

$$p_z = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz})^T, \quad (6.6c)$$

onde os sub-índices de τ e σ significam primeiro a face sobre a qual atua a componente do vetor, segundo a direção para a qual aponta a componente do vetor. As componentes que apresentam subíndices duplicados σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} são as tensões normais, uma

vez que atuam perpendicularmente às faces. As componentes restantes que não apresentam sub-índices duplicados são as tensões tangenciais τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} ... uma vez que atuam tangencialmente às faces.

O conjunto das nove componentes que aparecem nos vetores (6.6a-c) formam o chamado tensor das tensões T , expresso por

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Fazendo-se a somatória dos momentos ao redor dos eixos x , y , z consecutivamente, obtém-se respectivamente

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

ou seja, as tensões tangenciais são simétricas (SHAMES, 1980:22). Desta forma o tensor das tensões possui em realidade seis termos distintos ao invés das nove originais, i.e.

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Das equações (6.9), (6.6a-c) e (6.5) obtém-se

$$P = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)^T \quad (6.10)$$

6.3. Estado de Deformações em um Meio Contínuo

A deformação de um volume dV pode ser representado por três alongamentos ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z ao longo dos eixos x , y , z , respectivamente; e por três rotações γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} em torno dos eixos z , x , y , respectivamente. Os alongamentos representam as variações relativas do volume dV nas direções dos eixos coordenados, produzidos pelas tensões normais. As rotações representam as variações dos ângulos, inicialmente retos, entre os eixos coordenados, produzidos pelas tensões tangenciais. A



variação relativa do volume dV é

$$e = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{\Delta(dV)_x + \Delta(dV)_y + \Delta(dV)_z}{dV} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (6.11)$$

Sejam (x, y, z) e $(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ as coordenadas de um ponto antes e depois da deformação, sendo

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z, t), \\ \eta &= \eta(x, y, z, t), \\ \zeta &= \zeta(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (6.12a-c)$$

componentes do vetor deslocamento neste ponto, expresso por

$$S = (\xi, \eta, \zeta)^T. \quad (8.13)$$

As seis componentes da deformação $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ podem ser expressas (SCHLICHTING, 1972) em termos dos três deslocamentos ξ, η, ζ como segue

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad (8.14a-c)$$

$$e = \text{div} S.$$

6.4. Fluidos Newtonianos

Fluidos são materiais que se deformam indefinidamente quando submetidos a tensões de cisalhamento não nulas e deformações angulares nulas na ausência de tensões de cisalhamento. Considera-se neste texto apenas os fluidos que se comportam como meio contínuo.

As relações desenvolvidas no item anterior, entre as componentes da deformação e componentes do deslocamento, são úteis principalmente nos casos de deformações finitas. No caso de deslocamentos que ocorrem indefinidamente, como é o caso dos fluidos, é mais adequado utilizar-se as taxas de deslocamentos. Para casos intermediários pode-se utilizar um modelo ou outro, conforme as conveniências.

No caso dos fluidos seja o vetor velocidade em um ponto



$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = (u, v, w)^T \quad (6.15)$$

onde

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) = \frac{\partial \xi(x, y, z, t)}{\partial t}, \\ v &= v(x, y, z, t) = \frac{\partial \eta(x, y, z, t)}{\partial t}, \\ w &= w(x, y, z, t) = \frac{\partial \zeta(x, y, z, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.16a-c)$$

6.5. Diferenciando-se relativamente ao tempo as equações (6.14a-c) obtém-se as relações entre taxas de deslocamentos e taxas de deformações.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\dot{\epsilon} = \text{div} \mathbf{W};$$

onde $(\dot{}) \equiv \frac{\partial()}{\partial t}$.

Fluidos Newtonianos são aqueles cujo comportamento físico pode ser matematicamente modelados de tal forma que a relação entre as tensões e as taxas de deformações é linear (ARIS, 1962:110), e expressa por

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \quad (6.20)$$

$$+ \mu \begin{bmatrix} 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{W}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{W}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{W}\right) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

sendo $p = p(x, y, z, t)$ a pressão termodinâmica no ponto (x, y, z) e instante (t) .

6.5. Equações Básicas do Movimento de Fluidos.

Neste item apresenta-se a aplicação aos escoamento de fluidos

de três leis básicas da Termodinâmica que são: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia (WYLEN & SONTANG, 1976).

Um escoamento tridimensional é constituído pelo campo de velocidades o qual é representado pela equação (6.15) com as três componentes cartesianas u, v, w , além das distribuições de pressão (p) e densidade (ρ).

6.5.1. Equação da Conservação da Massa.

A lei da conservação da massa estabelece que o fluxo líquido de massa através da fronteira do volume dV é igual à taxa de acúmulo no seu interior. Assim, para um fluido genérico tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{W}) = 0. \quad (6.19)$$

6.5.2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento.

Para obtenção das equações da conservação da quantidade de movimento utiliza-se inicialmente a segunda lei de Newton aplicada ao volume dV , de tal forma que as forças por unidade de volume são expressas por

$$\rho \frac{D\mathbf{W}}{Dt} = \mathbf{K} + \mathbf{P}, \quad (6.20)$$

onde $\mathbf{K}$ é a força de campo, expressa por

$$\mathbf{K} = \rho \mathbf{g} = \rho (g_x, g_y, g_z)^T; \quad (6.21)$$

$\mathbf{P}$ é a força de superfície, equação (6.5), a qual pode ser reestruturada, usando a (6.6a-c), para

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)^T; \quad (6.22)$$

e $\frac{D\mathbf{W}}{Dt}$ é a aceleração substancial, composta da componente local e da componente convectiva, expressa por

$$\frac{D\mathbf{W}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{W} \bullet \text{grad}) \mathbf{W}, \quad (6.23)$$

onde $(\bullet)$ representa um produto interno.



Substituindo-se as equações (6.21-23) na (6.20) obtém-se

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right),$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \quad (6.24a-c)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right).$$

Substituindo-se os componentes do tensor das tensões (6.18) nas equações (6.24a-c) obtém-se

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{W} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{W} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{W} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \quad (6.25a-c)$$

Este sistema de equações que representa a conservação da quantidade de movimento é conhecida na literatura técnica como equações de Navier-Stokes e foram desenvolvidas por vários autores entre os anos de 1827 e 1845 (LANDAU & LIFSHITZ, 1989:46).

6.5.3. Equação da Conservação da Energia

Considere-se o volume dV com massa $dM = \rho dV$. A quantidade de calor DQ que atravessa a fronteira deste volume no intervalo de tempo Dt destina-se a aumentar sua energia total $D\mathcal{E}$ e/ou realizar o trabalho DW . Assim

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{D\mathcal{E}}{Dt} + \frac{DW}{Dt}. \quad (6.26)$$

Admite-se que os valores das temperaturas envolvidas são tais que a transferência de calor por radiação é irrelevante. Conforme FOURIER (1822), o fluxo de calor (q) através de uma superfície de área A , é proporcional ao gradiente da distribuição de temperatura (T) normal a ela, isto é

$$\frac{1}{A} \frac{DQ}{Dt} = q = -k \frac{\partial T}{\partial n}, \quad T = T(x, y, z, t) \quad (6.27)$$



sendo k a condutividade térmica. A quantidade de calor que entra no volume dV através de sua face perpendicular à direção x , por unidade de tempo, é

$$\frac{DQ_x}{Dt} = -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz,$$

e a que sai pela face oposta é expressa por

$$[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x})] dydz.$$

Disto segue que o calor líquido que atravessa a fronteira de dV na direção x , durante o intervalo de tempo Dt é

$$DQ_x = Dt \, dx dy dz \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}). \quad (6.28)$$

Procedendo-se da mesma maneira, relativamente aos eixos y e z , encontra-se DQ_y e DQ_z de tal forma que o calor líquido total que atravessa todas as faces do volume dV durante o intervalo de tempo Dt é

$$DQ = Dt \, dV \, \text{grad} \bullet (k \, \text{grad} \, T). \quad (6.29)$$

A variação da energia total $D\mathcal{E}$ compõe-se da variação da energia interna $DU = \rho dV Du$, da variação da energia cinética $D\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \rho \, dV \, D(W \bullet W)$ e da variação da energia potencial $D\mathcal{E}_p = \rho dV D\epsilon_p$, assim

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt} = \rho dV \left[\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{D\epsilon_p}{Dt} \right]. \quad (6.30)$$

Para obter-se o trabalho realizado DW , inicia-se obtendo a expressão para o efetuado por σ_{xx} , desta forma

$$\frac{DW_{\sigma_{xx}}}{Dt} = - \left[-u \sigma_{xx} + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \right] dydz,$$

ou

$$\frac{DW_{\sigma_{xx}}}{Dt} = - dV \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx}). \quad (6.31)$$

Procedendo-se da mesma maneira, relativamente a todas as tensões normais e tangenciais, obtém-se o trabalho total realizado pelo/sobre o volume dV durante o intervalo de tempo Dt , expresso por

$$\begin{aligned} \frac{DW}{Dt} = - dV & \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{xy} + v \sigma_{yy} + w \tau_{yz}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \sigma_{zz}) \right]. \end{aligned} \quad (6.32)$$



Substituindo-se as equações (6.32), (6.30) e (6.29) na (6.26) e levando em conta as (6.25a-c) após alguns algebrismos encontra-se

$$\rho \frac{Du}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{W} = \operatorname{grad} \bullet (k \operatorname{grad} T) + \mu \Phi \quad (6.33)$$

onde Φ é a função dissipação, expressa por

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

6.6. Equações Básicas para Fluido com Propriedades Constantes.

Quando a faixa dos valores da distribuição de temperatura é tal que as propriedades ρ , μ , c_p , c_v e k possam ser consideradas constantes, as equações básicas (6.19), (6.25a-c) e (6.33) tornam-se

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6.35)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (6.36a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right], \quad (6.36b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right], \quad (6.36c)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi, \quad (6.37)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

As equações acima, mediante mudança adequada de variáveis independentes, podem ser escritas em coordenadas cilíndricas (BIRD et al., 1960) como segue

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0, \quad (6.38)$$



$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r, \quad (6.41a-c)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta, \quad (8.39a-c)$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta, \quad (6.42a-c)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z,$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) =$$

$$= k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi, \quad (6.43)$$

onde Φ é a função de dissipação, dada por:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2. \quad (6.44)$$

6.7. Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido em Dutos Retilíneos.

Em escoamentos laminares no interior de dutos retilíneos as partículas de fluido movem-se em trajetórias bem definidas. O fluido aparenta mover-se como lâminas deslizantes de espessura infinitesimal, uma relativamente às outras. Este escoamento é dito totalmente desenvolvido hidrodinamicamente quando a distribuição de velocidade é invariante em qualquer seção transversal do domínio considerado, isto é, independente da distância axial e do tempo. As componentes de velocidade na direção perpendicular ao

eixo do duto são nulas. Em termos matemáticos implica que, em coordenadas cartesianas,

$$u \equiv u(x, y, z, t) = 0,$$

$$v \equiv v(x, y, z, t) = 0, \quad (6.41a-c)$$

$$w \equiv w(x, y, z, t) = w(x, y),$$

ou em coordenadas cilíndricas

$$v_r \equiv v_r(r, \theta, z, t) = 0,$$

$$v_\theta \equiv v_\theta(r, \theta, z, t) = 0, \quad (6.42a-c)$$

$$v_z \equiv v_z(r, \theta, z, t) = v_z(r, \theta).$$

Em consequência das equações (6.41a-c) as equações (6.35) e (6.36a-c) tornam-se

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (6.43)$$

onde $p^* = p + \rho \Psi$ e $\text{grad } \Psi = -g$.

Como $\partial p^*/\partial x = 0$ e $\partial p^*/\partial y = 0$ implica que $p^* = p^*(z)$, entretanto o lado esquerdo da equação (6.43) é função de (z) e o lado direito de (x, y) , assim a única função que satisfaz ambas condições é a função constante (C). Em consequência tem-se

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = C, \quad (6.44)$$

ou em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z(r, \theta)}{\partial \theta^2} = C. \quad (6.45)$$

Em escoamentos viscosos as condições de contorno mais comuns para a distribuição de velocidade são a condição de não deslizamento do fluido em contato com as paredes do duto (Γ), isto é, $w(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \Gamma$; e a condição de simetria quando o duto apresenta forma simétrica, isto é, $\partial w(x, y)/\partial n = 0$ para $(x, y) \in \Gamma$ e n perpendicular a Γ . Ressalte-se, ainda, que $u(x, y)$ é uma grandeza física finita.

6.8. Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido em Dutos Retilíneos Circulares.

O escoamento laminar, em regime permanente, totalmente desenvolvido de fluidos Newtonianos com propriedades constantes no interior de dutos circulares apresenta simetria relativamente ao eixo do duto, desta forma

$$\frac{\partial v_z(r, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

implicando que $v_z(r, \theta) = v_z(r)$, em consequência a equação (6.45) torna-se

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = C r \quad (6.46)$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$v_z(0) \text{ é finita e } v_z(r_0) = 0, \quad (6.47)$$

sendo r_0 o raio do duto.

A equação diferencial ordinária (6.46) conjuntamente com as condições de contorno (6.47) podem ser prontamente resolvidas obtendo-se a solução

$$v_z(r) = 2v_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad v_m = - \frac{1}{32\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) D^2, \quad D = 2r_0. \quad (6.48)$$

Esta equação foi obtida originalmente usando meios experimentais por HAGEN (1839) e logo após por POISEUILLE (1840).

6.9. Transferência de Calor, em Regime Permanente, por Convecção Forçada em Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido dentro de Dutos Retilíneos.

Neste item assume-se adicionalmente que os efeitos da convecção natural são negligenciáveis; que a condução térmica na direção axial é muito menor que a condução nas direções perpendiculares ao eixo do duto; que a taxa de geração de energia térmica por dissipação viscosa é negligenciável. Assim a equação (6.37), em coordenadas cartesianas, torna-se

$$\rho c_p w(x, y) \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (6.49)$$

ou em coordenadas cilíndricas

$$\rho c_p v_z(r, \theta) \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]. \quad (6.50)$$

As condições de contorno mais comuns desta equação diferencial parcial linear de segunda ordem são: a) condição de primeiro tipo onde o valor da temperatura (T) nos contornos é especificada, i.e., $T = T(\Gamma)$; b) condição de segundo tipo onde o valor do fluxo de calor (q) nos contornos é especificado, i.e., $-k \partial T / \partial n = q(\Gamma)$ (n é um vetor unitário que aponta na direção do fluxo); e c) condição de terceiro tipo onde uma combinação linear entre o valor da temperatura e do fluxo de calor nos contornos é especificada, i.e., $\alpha T(\Gamma) + \beta q(\Gamma) = h(\Gamma)$, com $\alpha, \beta \neq 0$. Mais detalhes sobre outros tipos de condições de contorno térmicos podem ser encontradas em SHAH & LONDON (1978:17).

6.10. Transferência de Calor, em Regime Permanente, em Escoamento Laminar Totalmente Desenvolvido no Interior de Dutos Circulares Retilíneos.

Considera-se que a transferência de calor através da superfície do duto seja efetuada de modo simétrico relativamente ao eixo do duto, desta forma

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

implicando que $T(r, \theta, z) = T(r, z)$, em consequência a equação (6.50) torna-se

$$\rho c_p v_z(r) \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]. \quad (6.51)$$

As condições de contorno para a equação (6.51) utilizadas são do primeiro, segundo e terceiro tipo. No centro do duto, $r = 0$, sendo a distribuição de temperatura simétrica, isto é

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (6.52)$$

pode-se utilizar também o fato que o valor da temperatura é finita neste ponto. Na parede do duto, $r = r_0$, pode-se ter os três tipos de condições de contorno:

a) primeiro tipo

$$T(r_0, z) = T_w, \quad (6.53)$$

b) segundo tipo

$$-k \left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = q_w, \quad (6.54)$$

c) terceiro tipo

$$-k \left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = h^* [T(r_0, z) - T_\infty], \quad (6.55)$$

onde T_w , q_w , h^* são a temperatura, o fluxo de calor, e o coeficiente de transferência de calor na parede do duto; T_∞ é a temperatura do meio externo ao duto.

A condição no início da coordenada axial, $z = 0$, é

$$T(r, 0) = T_e. \quad (6.56)$$

Após a obtenção da distribuição de temperatura através da solução da equação (6.51), pode-se obter o coeficiente de transferência de calor interno (h) utilizando a seguinte definição

$$h \equiv \frac{k \left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \right|_{r=r_0}}{T(r_0, z) - T_m(z)}, \quad (6.57)$$

onde $T_m(z)$ é a temperatura média de mistura definida por

$$T_m(z) \equiv \frac{\int_0^{r_0} r v_z(r) T(r, z) dr}{\int_0^{r_0} r v_z(r) dr}. \quad (6.58)$$

Considerando-se que a velocidade média pode ser obtida por

$$v_m = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r v_z(r) dr, \quad (6.59)$$

a equação (6.58) pode ser reestruturada, tornando-se em

$$T_m(z) = \frac{2}{v_m r_0^2} \int_0^{r_0} r v_z(r) T(r, z) dr. \quad (6.60)$$

As equações que modelam o fenômeno de convecção estudado podem ser reescritas em termos de grandezas adimensionais. Para tal define-se as seguintes variáveis:

$R = r/r_0$, raio adimensional;

$Z = kz/\rho c_p v_m D^2$, eixo axial adimensional;

$\Theta(R, Z) = \frac{T(r, z) - T^*}{\Delta T^{**}}$, temperatura adimensional, onde T^* e ΔT^{**} são temperatura e diferença de temperatura de referência;

$W(R) = v_z(r)/v_m = 2(1-R^2)$, velocidade adimensional;

$Bi = \frac{h^* D}{k}$, número de Biot;

$Nu = \frac{hD}{k}$, número de Nusselt.

Substituindo-se estas variáveis nas respectivas equações, obtém-se

$$\frac{w(R)}{4} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \right], \quad 0 < R < 1; \quad (6.61)$$

sujeita às condições de contorno:

a) primeiro tipo, $T^* = T_w$ e $\Delta T^{**} = T_e - T_w$, ou seja

$$\Theta(1, Z) = 0, \quad (6.62a-b)$$

$$\Theta(R, 0) = 1;$$

b) segundo tipo, $T^* = T_e$ e $\Delta T^{**} = q_w r_0/k$, ou seja

$$\left. \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=1} = 1 \quad (6.63a-b)$$

$$\Theta(R, 0) = 0;$$

c) terceiro tipo, $T^* = T_\infty$ e $\Delta T^{**} = T_e - T_\infty$, ou seja

$$Bi \Theta(1, Z) - \left. \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=1} = 0; \quad (6.64a-b)$$

e inicial

$$\Theta(R, 0) = 1.$$

O coeficiente de transferência de calor (6.57) torna-se

$$Nu(Z) = 2 \frac{\left. \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=1}}{\Theta_w(Z) - \Theta_m(Z)}, \quad (6.65)$$

onde as temperaturas média de mistura (Θ_m) e na parede (Θ_w) adimensionais são expressas por

$$\Theta_w(Z) = \Theta(1, Z), \quad (6.66a-b)$$

$$\Theta_m(Z) = 2 \int_0^1 R W(R) \Theta(R, Z) dR.$$

O número de Nussel médio Nu_m no intervalo $0 \leq Z \leq \infty$ pode ser obtido através da expressão

$$Nu_m(Z) = \frac{1}{Z} \int_0^Z Nu(\eta) d\eta. \quad (6.67)$$

6.10.1. Solução para Condição de Contorno do Primeiro Tipo na Parede do Duto, Utilizando a Transformada Integral.

Pelo exposto anteriormente, tem-se a equação que modela o fenômeno

$$\frac{(1-R^2)}{2} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \right], \quad 0 < R < 1, \quad (6.68)$$

juntamente com as condições de contorno e inicial

$$\left. \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \text{ ou } \Theta(0, Z) \text{ é finita, e } \Theta(1, Z) = \Theta_w(Z) = 0, \quad (6.69a-b)$$

$$\Theta(R, 0) = 1.$$

Em conformidade com o Capítulo 5 é necessário inicialmente resolver-se o seguinte problema de Sturm-Liouville

$$\lambda^2 (1-R^2) \psi(R) = - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\psi(R)}{dR} \right], \quad 0 < R < 1; \quad (6.70)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0) \text{ é finita e } \psi(1) = 0. \quad (6.71)$$

Efetuando-se a seguinte mudança de variáveis

$$\psi(R) = \phi(\eta) \exp(-\eta/2), \quad \eta = \lambda R^2 \quad (6.72)$$

as equações (6.70) e (6.71) tornam-se

$$\eta \frac{d^2 \phi(\eta)}{d\eta^2} + (1-\eta) \frac{d\phi(\eta)}{d\eta} + \left(\frac{\lambda-2}{4}\right) \phi(\eta) = 0, \quad 0 < \eta < \lambda, \quad (6.73a-b)$$

$$\phi(0) \text{ é finita e } \phi(\lambda) = 0.$$

A equação diferencial ordinária linear de segunda ordem acima é conhecida por hipergeométrica degenerada, conforme Capítulo 4, com $\gamma = 1$ e $\alpha = (2-\lambda)/4$. A solução geral desta equação é

$$\phi(\eta) = C M(\alpha, 1, \eta) + D U(\alpha, 1, \eta), \quad (6.74)$$

sendo C e D constantes.

Como $\phi(0)$ é limitado e $U(\alpha, 1, 0)$ é ilimitado implica que $D = 0$.



Para $\phi(\lambda) = 0$ tem-se a autocondição

$$M\left(\frac{2-\lambda}{4}, 1, \lambda\right) = 0, \quad (6.75)$$

uma vez que $C \neq 0$, caso contrário obter-se-ia apenas a solução trivial.

Os autovalores λ_i , $i \in \mathbb{N}$ são obtidos através do cômputo das raízes da equação transcendental (6.75), assim a autofunção $\psi(R)$ pode ser expressa por

$$\psi_i(R) = C_i M(\alpha_i, 1, \lambda_i R^2) \exp(-\lambda_i R^2/2). \quad (6.76)$$

A constante C_i é arbitrária e pode ser escolhida de tal forma que $\psi_i(R)$ seja ortonormal, conforme o disposto no Capítulo 3 tem-se

$$\int_0^1 R(1-R^2) \psi_i^2(R) dR = 1$$

ou seja

$$C_i = \left[\int_0^1 R(1-R^2) M^2(\alpha_i, 1, \lambda_i R^2) \exp(-\lambda_i R^2) dR \right]^{-1/2}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.77)$$

Efetuada-se a integração acima obtém-se

$$C_i = \left[\frac{\exp(-\lambda_i/2)}{2\lambda_i} (A_1 A_2 - A_3 A_4) \right]^{-1/2}, \quad (6.78)$$

onde

$$A_1 = \lambda_i [2\alpha_i M(\alpha_i+1, 2, \lambda_i) - M(\alpha_i, 1, \lambda_i)],$$

$$A_2 = \alpha_i M(\alpha_i+1, 2, \lambda_i) - \frac{1}{4} M^*(\alpha_i, 1, \lambda_i) - \frac{1}{2} M(\alpha_i, 1, \lambda_i),$$

$$A_3 = M(\alpha_i, 1, \lambda_i),$$

$$A_4 = \frac{1}{2} (4\alpha_i - \lambda_i - 4\lambda_i \alpha_i) M(\alpha_i+1, 2, \lambda_i) - \frac{1}{2} (2 + \lambda_i) M(\alpha_i, 1, \lambda_i) + \\ + \lambda_i \alpha_i [(1+\alpha_i) M(\alpha_i+2, 3, \lambda_i) - \frac{1}{2} M^*(\alpha_i+1, 2, \lambda_i)] + \\ + \frac{\lambda_i}{4} M^*(\alpha_i, 1, \lambda_i),$$

sendo $M^*(\alpha, \gamma, z)$ uma função especial que aparece em decorrência dos procedimentos efetuados e é expressa pela seguinte fórmula

$$M^*(\alpha, \gamma, z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n Z_n(\alpha)}{(\gamma)_n} z^n, \quad (6.79)$$

$$Z_0(\alpha) \equiv 0,$$

$$Z_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(\alpha+1)^i}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Em conformidade com o disposto no Capítulo 5, obtém-se o par Transformada-Inversa expresso por

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_1(Z) &= \int_0^1 R(1-R^2) \psi_1(R) \Theta(R, Z) dR \\ \Theta(R, Z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_i(Z) \psi_i(R). \end{aligned} \quad (6.80a-b)$$

Multiplicando-se a equação (6.68) por $R \psi_1(R)$ e a (6.70) por $R\Theta(R, Z)$, adicionando-se as equações resultantes e integrando sobre o intervalo $[0, 1]$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^1 R(1-R^2) \psi_1(R) \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial Z} dR + \lambda_1^2 \int_0^1 R(1-R^2) \psi_1(R) \Theta(R, Z) dR = \\ &= \int_0^1 [\psi_1(R) \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R}) - \Theta(R, Z) \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial \psi_1(R)}{\partial R})] dR, \end{aligned} \quad (6.87)$$

ou

$$\frac{d\tilde{\Theta}_1(Z)}{dZ} + 2\lambda_1^2 \tilde{\Theta}_1(Z) = 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (6.81)$$

sujeita à condição inicial

$$\tilde{\Theta}_1(0) = \int_0^1 R(1-R^2) \psi_1(R) \Theta(R, 0) dR = \int_0^1 R(1-R^2) \psi_1(R) dR. \quad (6.82)$$

A integral acima pode ser efetuada multiplicando-se a equação (6.70) por (R) e integrando-se sobre o intervalo $[0, 1]$,

$$\lambda_1^2 \int_0^1 R(1-R^2) \psi_1(R) dR = - \left[R \frac{d\psi_1(R)}{dR} \right]_0^1,$$

ou

$$\tilde{\Theta}_1(0) = - \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{d\psi_1(R)}{dR} \Big|_{R=1}. \quad (6.83)$$

Substituindo a expressão de $\psi_1(R)$, (6.76), na equação acima, obtém-se

$$\tilde{f}_1 = \tilde{\Theta}_1(0) = - \frac{C_1}{\lambda_1} [2\alpha_1 M(\alpha_1+1, 2, \lambda_1) - M(\alpha_1, 1, \lambda_1)] \exp[-(\lambda_1/2)]. \quad (6.84)$$

A solução da equação (6.81), em conformidade com o Capítulo 2, é

$$\tilde{\Theta}_1(Z) = \tilde{f}_1 \exp(-2\lambda_1^2 Z). \quad (6.85)$$

Substituindo-se a equação acima na expressão da transformada inversa, obtém a distribuição de temperatura adimensional procurada

$$\Theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \tilde{f}_i M(\alpha_i, 1, \lambda_i R^2) \exp[-\lambda_i R^2/2 - 2\lambda_i^2 Z]. \quad (6.86)$$

Para obtenção da temperatura média de mistura, basta substituir a equação (6.86) na (6.66b), assim

$$\begin{aligned} \Theta_m(Z) &= 4 \int_0^1 R(1-R^2) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_i(Z) \psi_i(R) dR = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_i(Z) \int_0^1 R(1-R^2) \psi_i(R) dR = \\ &= 4 \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i \tilde{\Theta}_i(Z) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \exp(-2\lambda_i^2 Z). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Para obtenção do Número de Nusselt (Nu) basta substituir as equações (6.80b) e (6.87) na (6.65), assim

$$\begin{aligned} Nu(Z) &= - \frac{2}{\Theta_m(Z)} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \Big|_{R=1} = - \frac{2}{\Theta_m(Z)} \frac{\partial}{\partial R} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_i(Z) \psi_i(R) \right)_{R=1} = \\ &= - \frac{2 \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_i(Z) \frac{d\psi_i(R)}{dR} \Big|_{R=1}}{\Theta_m(Z)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \tilde{f}_i \tilde{\Theta}_i(Z)}{2 \sum_{i=1}^{\infty} f_i \tilde{\Theta}_i(Z)}, \end{aligned} \quad (6.94)$$

ou seja

$$Nu(Z) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 f_i^2 \exp[-2\lambda_i^2 Z]}{2 \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \exp[-2\lambda_i^2 Z]}, \quad (6.88)$$

consequentemente

$$Nu(\infty) = \lim_{Z \rightarrow \infty} Nu(Z) = \frac{\lambda_1^2}{2}$$

e assim a autofunção $\psi(R)$ resultante tem a forma (6.89a-b)

$$Nu_m(Z) = - \frac{\ln \Theta_m(Z)}{4Z}.$$

6.10.2. Solução para Condição de Contorno do Primeiro Tipo na Parede do Duto, Utilizando a Transformada Integral Generalizada.

A equação (6.68) pode ser reestruturada para

$$\frac{(1-R^2)}{2} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \Theta(R, Z)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R}, \quad 0 < R < 1, \quad (6.90)$$

e mantendo as condições de contorno e inicial, equações (6.69a-b).

Em conformidade com o Capítulo 5, estabelece-se o seguinte problema de Sturm Liouville

$$\lambda^2 \psi(R) = - \frac{d^2 \psi(R)}{dR^2}, \quad 0 < R < 1 \quad (6.91)$$

sujeito às condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \psi(R)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \quad \text{e} \quad \psi(1) = 0. \quad (6.92)$$

A solução da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem acima é imediato e obtém-se

$$\psi(R) = C \operatorname{sen}(\lambda R) + D \operatorname{cos}(\lambda R), \quad (6.93)$$

sendo C e D constantes.

Como $\left. \frac{d\psi(R)}{dR} \right|_{R=0} = 0$ implica que $C = 0$. Assim

$$\psi(R) = D \operatorname{cos}(\lambda R), \quad (6.94)$$

e para $\psi(1) = 0$ implica que

$$\operatorname{cos}(\lambda) = 0, \quad (6.95)$$

uma vez que $D \neq 0$, caso contrário obter-se-ia apenas a solução trivial.

Os autovalores λ_i , $i \in \mathbb{N}$ são obtidos através da solução da equação (6.95) e podem ser expressos por

$$\lambda_i = -\frac{\pi}{2} + i\pi = (2i - 1) \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.96)$$

assim a autofunção $\psi(R)$ resultante tem a forma

$$\psi_i(R) = D_i \operatorname{cos}(\lambda_i R). \quad (6.97)$$

A constante D_i é arbitrária e pode ser escolhida de tal forma que $\psi_i(R)$ seja ortonormal, conforme o disposto no Capítulo 3



tem-se

$$\int_0^1 \psi_1^2(R) dR = 1 = D_1^2 \int_0^1 \cos^2(\lambda_1 R) dR, \quad (6.98)$$

como

$$\int_0^1 \cos^2(\lambda_1 R) dR = \frac{1}{2}, \quad (6.99)$$

resulta

$$D_1 = \pm (2)^{1/2}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.100)$$

Em conformidade com o disposto no Capítulo 5, obtém-se o par Transformada-Inversa expresso por

$$\tilde{\Theta}_1(Z) = \int_0^1 \psi_1(R) \Theta(R, Z) dR \quad (6.101a-b)$$

$$\Theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_i(Z) \psi_i(R).$$

Multiplicando a equação (6.90) por $\psi_1(R)$ e a (6.91) por $\Theta(R, Z)$, adicionando-se as equações resultantes e integrando sobre o intervalo $[0, 1]$, obtém-se

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (1-R^2) \psi_1(R) \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial Z} dR + \lambda_1^2 \int_0^1 \psi_1(R) \Theta(R, Z) dR = \quad (6.107)$$

$$= \int_0^1 \left[\psi_1(R) \frac{\partial^2 \Theta(R, Z)}{\partial R^2} - \Theta(R, Z) \frac{\partial^2 \psi_1(R)}{\partial R^2} \right] dR + \quad (6.108)$$

$$+ \int_0^1 \frac{\psi_1(R)}{R} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} dR, \quad (6.102)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\tilde{\Theta}_j(Z)}{dZ} + \lambda_1^2 \tilde{\Theta}_i(Z) + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \tilde{\Theta}_j(Z) = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (6.103)$$

onde

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4\lambda_1^2} & \text{para } i = j, \\ 4(-1)^{i+j+1} \frac{\lambda_1 \lambda_j}{(\lambda_1^2 - \lambda_j^2)^2} & \text{para } i \neq j; \end{cases}$$

$$B_{ij} = \lambda_j [\text{Si}(\lambda_1 + \lambda_j) + \text{Si}(\lambda_j - \lambda_1)],$$

sendo Si a função seno integral expressa por

$$\text{Si}(\eta) = \int_0^\eta \frac{\text{sen}(\mu) d\mu}{\mu}. \quad (6.104)$$

A condição inicial para a equação (6.103) é obtida por

$$\tilde{f}_1 = \tilde{\theta}_1(0) = \int_0^1 \psi_1(R) dR = \frac{(-1)^{1+1} D_1}{\lambda_1}. \quad (6.105)$$

As equações (6.103) e (6.105) podem ser escritas na forma matricial

$$A \frac{d\tilde{\Xi}(Z)}{dZ} + B\tilde{\Xi}(Z) = 0, \quad (6.106a-b)$$

$$\tilde{\Xi}(0) = \tilde{G} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots)^T,$$

onde

$$A = [A_{ij}]$$

$$B = [\lambda_1^2 \delta_{ij} + B_{ij}],$$

$$\tilde{\Xi}(Z) = (\tilde{\theta}_1(Z), \tilde{\theta}_2(Z), \dots)^T,$$

ou ainda

$$\frac{d\tilde{\Xi}(Z)}{dZ} + C \tilde{\Xi}(Z) = 0, \quad C = A^{-1}B. \quad (6.107)$$

Conforme o Capítulo 2 a solução da equação (6.107) sujeita à condição inicial (6.106b) é

$$\tilde{\Xi}(Z) = \exp[-CZ] \tilde{G}. \quad (6.108)$$

Obter $\tilde{\Xi}(Z)$ é o mesmo que obter-se $\tilde{\theta}_1(Z), \tilde{\theta}_2(Z), \dots$ uma vez que estes são os componentes escalares daquele. Assim obtém-se a distribuição de temperatura adimensional, utilizando-se a transformada inversa (6.101b)

$$\Theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \tilde{\theta}_i(Z) \cos(\lambda_i R). \quad (6.109)$$

Para obtenção da temperatura média de mistura, basta substituir a equação (6.109) na (6.66b), assim

$$\begin{aligned} \Theta_m(Z) &= 4 \int_0^1 R(1-R^2) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i(Z) \psi_i(R) dR = 4 \sum_{i=1}^{\infty} D_i \tilde{\theta}_i(Z) \int_0^1 R(1-R^2) \cos(\lambda_i R) dR = \\ &= 4 \sum_{i=1}^{\infty} D_i \tilde{\theta}_i(Z) \left[-\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{6(-1)^{1+1}}{\lambda_i^3} - \frac{6}{\lambda_i^4} \right]. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Da mesma maneira obtém-se o Número de Nusselt, assim

$$\text{Nu}(Z) = - \frac{2}{\Theta_m(Z)} \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial R} \Big|_{R=1} = \frac{2}{\Theta_m(Z)} \frac{\partial}{\partial R} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_l(Z) \psi_l(R) \right]_{R=1} =$$

$$= - \frac{2 \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_l(Z) \left. \frac{\partial \psi_l(R)}{\partial R} \right|_{R=1}}{\Theta_m(Z)} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l (-1)^{l+1} \Theta_l(Z)}{2 \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_l(Z) \left[-\frac{1}{\lambda_l^2} + \frac{6(-1)^{l+1}}{\lambda_l^3} - \frac{6}{\lambda_l^4} \right]}. \quad (6.111)$$

$$\text{Nu}_m(Z) = - \frac{\ln \Theta_m(Z)}{4Z} \quad (6.112)$$

7. ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DE APROXIMAÇÃO E DO CÔMPUTO DE FUNÇÕES ESPECIAIS

Neste capítulo apresenta-se a teoria básica para o cômputo das funções que aparecem no Capítulo 6. Em termos quantitativos, junto com o conceito de função está a hipótese que os valores da função podem ser calculados numericamente, para qualquer valor da variável independente. Entretanto apenas as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) podem ser efetuadas diretamente. Todas as outras operações matemáticas necessitam ser reduzidas a um conjunto de operações básicas. Isto equivale dizer que o cômputo numérico de funções, só pode ser realizado quando uma função pode ser substituída por outra função, redutível àquele conjunto de operações básicas. Qualquer um que utilize computadores, máquinas de calcular e outros dispositivos de cálculo estão acostumados a utilizar, explicitamente ou implicitamente, funções matemáticas, tais como $\log(x)$, $\tanh(x)$, $\cos(x)$ e outras. As principais metodologias utilizadas no cômputo destas funções serão tratadas neste capítulo. Embora existam referências bibliográficas sobre este tema desde a primeira metade deste século, e mesmo no século passado, foi após a Segunda Guerra Mundial, com o advento do computador digital, que as publicações sobre o assunto aumentaram. Das referências citadas pode-se encontrar aspectos de análise matemática em NACHBIN (1965) e DAVIS (1975); aspectos computacionais em conjunto com uma análise matemática de nível intermediário em RICE (1964) e CHENEY (1966); e aspectos computacionais aliados a uma análise matemática simples em FIKE (1968), HART (1968) e GAUTSCHI (1975).

7.1. Erro no Cômputo de Funções Matemáticas.

7.1.1. Requisitos de Rotinas de Cômputo de Funções.

Assume-se que seja necessário desenvolver um programa para o cômputo de alguma função $F(x)$, em certos valores de $x \in [a, b]$. Seja $F^*(x)$ uma notação para a aproximação de $F(x)$.

Os principais requisitos de rotinas de cômputo de funções são:

(a) Acurácia - De um modo geral a acurácia de uma rotina deve ser



igual àquela imposta pelo arredondamento que ocorre devido ao fato que a palavra nos computadores tem um tamanho finito, isto é, para cada argumento x , $F^*(x)$ deve ser $F(x)$ arredondado conforme a acurácia dos cálculos;

(b) Velocidade e Tamanho - Entendendo por velocidade, a rapidez em que a rotina é executada; e tamanho, a dimensão em código computacional da rotina. Em geral, ambos, velocidade e tamanho pequeno são desejáveis. Entretanto estes objetivos são conflitantes. O tempo de execução de dada rotina pode ser diminuído aumentando-se as variáveis armazenadas na memória de trabalho, e vice-versa, a rotina pode ser encurtada com um consequente aumento no tempo de execução. Com o aumento sempre crescente das memórias de trabalho, restrições severas quanto ao tamanho das rotinas torna-se cada vez mais raras; e o ganho de algumas posições de memória não é mais tão importante. O objetivo real é construir uma rotina tão rápida quanto possível sem torná-la demasiadamente longa. Desenvolver uma rotina para vários modelos de uma família de computadores compatíveis apresenta alguns problemas, uma vez que a capacidade de memória e a velocidade de processamento em geral diferem muito de um modelo para outro. Isto dificulta um equilíbrio entre velocidade de processamento e tamanho da rotina. O que parece bom para um modelo pode não ser bom para outro;

(c) Argumentos Especiais - Às vezes existem argumentos para os quais é requerido que $F^*(x_0) = F(x_0)$. Em geral isto ocorre quando $F(x_0)$ tem valor inteiro, ou algum outro número que seja bastante conhecido, de tal forma que o erro em $F^*(x_0)$ seria facilmente reconhecido;

(d) Argumentos Inválidos - Certos valores de x podem ser considerados inválidos como argumentos da rotina, devido ao fato de $F(x)$ não ser definida para aqueles valores, ou devido a dificuldades computacionais que tornam aquele cálculo impraticável. Na rotina devem estar previstos testes para identificar se o argumento é inválido ou não. Quando um argumento inválido for identificado, uma mensagem pode ou não ser emitida, e o cálculo pode ou não ser paralisado. Se o processamento continua, algum procedimento reparador precisa ser tomado para permitir a continuidade do trabalho. Um conjunto de



rotinas deve ter um conjunto padronizado de mensagens de erro.

(e) Limitações em $F^*(x)$ - Pode ser necessário que $F^*(x)$ satisfaça certas desigualdades, tal como $-1 \leq F^*(x) \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$ no caso de $F(x) = \cos(x)$;

(f) Monotonia - Se $F(x)$ é monotônica crescente ou decrescente, é necessário que $F^*(x)$ tenha a mesma propriedade;

(g) Linguagem de programação - Objetivando a eficiência, as rotinas de um modo geral devem ser programadas em linguagem assembler e não em linguagens de alto nível tais como Fortran, Pascal e C. Entretanto se um compilador de alto nível é utilizado para produzir um código objeto otimizado, os resultados quanto à eficiência podem ser razoáveis em muitos casos;

(h) Compatibilidade - Várias rotinas para efetuar o cômputo de uma dada função devem ser compatíveis em alguns aspectos. Estas rotinas podem ser usadas em um mesmo computador, porém utilizando linguagens de programação diferentes; ou podem ser usadas para computadores diferentes porém compatíveis. O requisito de compatibilidade mais estrito entre várias rotinas é que devem fornecer resultados idênticos, isto é, que para cada argumento x , $F^*(x)$ para um programa deve ser igual ao fornecido por outro programa. Restrições devido à compatibilidade reduzem as vantagens que se pode ter ao construir rotinas especificamente para cada modelo de computador.

7.1.2. Erro Absoluto e Relativo

Seja x um número e x^* outro número (não necessariamente diferentes) que é uma aproximação de x . Suponha-se que x^* é dado em sua forma convencional de representação decimal como uma sequência de dígitos com um ponto decimal. O erro na aproximação x^* é medido contando o número correto de casas decimais ou o número de dígitos significativos na representação decimal de x^* . Este procedimento pode ser aplicado para outros sistemas de números, tais como: binários, octais e hexadecimais.

Quantitativamente introduzem-se os conceitos de erro absoluto e erro relativo de tal forma que o erro absoluto em x^* é $|x^* - x|$, e o erro relativo é $|(x^* - x)/x|$, $x \neq 0$. O erro absoluto pode ser associado com o número de casas corretas, d , na representação



decimal de x^* . Assim, $|x^*-x| < 10^{-d}$, $d > 0$. Em uma base binária, tem-se: $|x^*-x| < 2^{-d}$, sendo d o número de bits corretos na representação de x^* . Da mesma forma, o erro relativo pode ser associado com a quantidade de casas significativas na representação decimal de x^* .

Então, se $|(x^*-x)/x| = 10^{-d}$, $d > 0$, então o número de algarismos significativos em x^* é igual a d . Como exemplo seja $x = 1/70$ e $x^* = 0,0142857$ (sete casas decimais corretas); logo $|x^*-x| = 0.142857... \cdot 10^{-7} = 10^{-7.845} < 10^{-7}$ (sete casas decimais corretas), $|(x^*-x)/x| = 10^{-6}$ (seis algarismos significativos).

Uma decorrência destes conceitos é que para $|x| > 1$, tem-se erro absoluto maior que o relativo; $|x| < 1$, o erro absoluto é menor que o relativo; e $|x| = 1$ o erro absoluto é igual ao relativo. Para valores de $|x|$ muito pequenos é necessário cuidado ao utilizar-se o erro relativo como medida.

Em uma base binária, se $|(x^*-x)/x| = 2^{-d}$, $d > 0$, então o número de bits significativos na representação de x^* é d .

7.1.3. Erro de Truncamento e Arredondamento.

Os conceitos de erro relativo e absoluto referem-se a métodos para medida do erro. Os termos erro de truncamento e arredondamento referem-se às fontes de erro.

Considere-se uma rotina para cômputo de uma dada função analítica $F(x)$ definida no intervalo $x \in [a, b]$. Para um argumento $x \in [a, b]$, a rotina efetua o cômputo de um número $F^*(x)$ aproximando $F(x)$. Seja $\bar{F}(x)$ uma aproximação polinomial de $F(x)$ no sentido matemático, utilizando nos cômputos uma aritmética comum, e para obtenção de $\bar{F}(x)$ as técnicas clássicas, tais como expansão em série de potências, expansão em série de funções ortogonais e outros que tratar-se-ão mais adiante neste capítulo.

Seja também $F^*(x)$ a aproximação computacional de $\bar{F}(x)$, obtida através de uma quasi-aritmética computacional (para diferenciar a aritmética comum da quasi-aritmética, seja o seguinte exemplo: na aritmética comum $1/3 + 2/3 = 3/3 = 1$; na quasi-aritmética $1/3 = 0.3333$, $2/3 = 0.6666$, logo $1/3 + 2/3 = 0.9999$. Este raciocínio vale também para as operações de subtração, multiplicação e divisão). Pode-se reconhecer então duas fontes de



erro em $F^*(x)$, considerando-a com uma aproximação de $F(x)$:

(a) O erro envolvido na aproximação de $F(x)$ por $\bar{F}(x)$. O erro absoluto e relativo de truncamento são expressos por $|\bar{F}(x) - F(x)|$ e $|[\bar{F}(x) - F(x)]/F(x)|$, respectivamente;

(b) o erro envolvido na aproximação de $\bar{F}(x)$ por $F^*(x)$ é denominado erro de arredondamento, devido ao processo computacional de obtenção de $F^*(x)$. O erro absoluto e relativo de arredondamento são expressos por $|F^*(x) - \bar{F}(x)|$ e $|[F^*(x) - \bar{F}(x)]/F(x)|$, respectivamente.

Nota-se que o erro absoluto global $|F^*(x) - F(x)|$ pode ser expresso como

$$|F^*(x) - F(x)| = |F^*(x) - \bar{F}(x)| + |\bar{F}(x) - F(x)|, \quad (7.1)$$

isto é, o erro absoluto global é igual à soma do erro absoluto de truncamento com o erro absoluto de arredondamento. Da mesma forma, é possível mostrar que o erro global relativo pode ser expresso por

$$\left| \frac{F^*(x) - F(x)}{F(x)} \right| \cong \left| \frac{F^*(x) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} \right| + \left| \frac{\bar{F}(x) - F(x)}{F(x)} \right|. \quad (7.2)$$

Portanto o erro global no cômputo de uma função $F(x)$, quer seja absoluto ou relativo, é influenciado por dois tipos de fontes de erro: a primeira está relacionada com a função matemática de aproximação, $\bar{F}(x)$, e a segunda com o modo numérico de obter um valor $F^*(x)$, a aproximação de $\bar{F}(x)$.

7.1.4. Instabilidade e Propagação do Erro de Arredondamento.

Quando do cômputo de $F^*(x)$, nas primeiras operações quasi-aritméticas, o argumento x em realidade será tomado por alguma aproximação x^* devido ao arredondamento, assim o termo $F^*(x)$ pode ser substituído por $F^*(x^*)$. Como $F^*(x)$ é uma função na vizinhança da função $F(x)$ e x^* é um ponto na vizinhança de x , existe um ponto $\tilde{x} = x(1+\lambda)$, $\lambda \rightarrow 0$, tal que $F^*(x^*) = F(\tilde{x})$. A equação do erro relativo global pode ser escrita como

$$\left| \frac{F^*(x) - F(x)}{F(x)} \right| = \left| \frac{F(\tilde{x}) - F(x)}{F(x)} \right| = \left| \frac{F[x(1+\lambda)] - F(x)}{F(x)} \right|.$$

Efetuada a expansão de $F[x(1+\lambda)]$ em série de potências, em torno de x , e retendo os dois primeiros termos, tem-se



$F(x) + \lambda x F'(x)$, onde $F'(x) = dF(x)/dx$. Substituindo este resultado na equação acima resulta

$$\left| \frac{F^*(x) - F(x)}{F(x)} \right| \cong \left| \frac{\lambda x F'(x)}{F(x)} \right|. \quad (7.3)$$

A função $F(x)$ é dita instável em um ponto $x = x_0 \in [a, b]$ se o termo $x_0 F'(x_0)/F(x_0)$ é muito grande e amplifica os valores pequenos de λ através do produto $\lambda x_0 F'(x_0)/F(x_0)$, implicando em erro global relativamente alto, naquele ponto.

7.1.5. Acurácia dos Resultados Computados.

Os erros em resultados obtidos com rotinas de aproximação podem ser verificados por dois métodos: o método do lápis e papel e o método experimental. O método do lápis e papel consiste em efetuar, como o próprio nome indica, o procedimento de cálculo. Para alguns valores especiais do argumento, pode ser fácil a obtenção de resultados exatos. Este procedimento em geral é difícil e tedioso. O método experimental pode ser implementado com a ajuda de um gerador de números aleatórios, que cria uma sequência de n argumentos teste, $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$. Para cada x_i efetua-se o cômputo de (a) $F^*(x_i)$ através da rotina em teste, a aproximação de $F(x_i)$, e (b) $F^{**}(x_i)$, outra aproximação de $F(x)$ que tem acurácia suficiente para ser utilizada como um valor comparativo para $F^*(x_i)$. Isto significa que $F^{**}(x_i)$ deve ser calculada em uma precisão maior que aquela usada na obtenção de $F^*(x_i)$. Então, se $F^*(x_i)$ é calculada em precisão simples, $F^{**}(x_i)$ deve ser calculada em dupla precisão. Pode-se desenvolver rotinas de alta precisão para o cômputo de $F^{**}(x_i)$. Para efetuar cômputos de alta precisão é necessário programas especiais capazes de efetuá-los ou de computadores especiais construídos com este objetivo. Pode-se utilizar também computadores capazes de trabalhar com precisão variável, onde a rotina teste opera em precisão baixa e a rotina padrão opera em precisão alta, permitindo o cômputo de $F^*(x_i)$ e $F^{**}(x_i)$. Fica claro que é necessário bons recursos humanos, de software e de hardware para construir e testar este tipo de rotina. Desta forma pode-se calcular as variáveis estatísticas que houver interesse. Geralmente os cômputos estatísticos mais utilizados são os erros



absoluto máximo, relativo máximo, médio quadrático absoluto máximo, e médio quadrático relativo máximo, expressos pelas seguintes fórmulas:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |F^*(x_i) - F^{**}(x_i)|,$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{F^*(x_i) - F^{**}(x_i)}{F^{**}(x_i)} \right|,$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [F^*(x_i) - F^{**}(x_i)]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{F^*(x_i) - F^{**}(x_i)}{F^{**}(x_i)} \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Os valores de n , isto é, a quantidade de argumentos testados deve ser *muito grande*. Nas referências são mencionados valores tal como $n = 100.000$, mas também menciona-se que valores da ordem de $n = 5.000$ foram utilizados.

7.2. Redução do Intervalo do Argumento.

As duas principais maneiras de efetuar a aproximação de uma dada função $F(x)$, $x \in [a, b]$ são: (a) substituí-la por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, $x \in [a, b]$, ou (b) por uma função racional de graus m, n ; $R_{m,n}(x)$, $x \in [a, b]$ (mais adiante, neste capítulo, voltar-se-á a este tema). Quando a dimensão do intervalo de aproximação $|b-a|$ aumenta, o grau das funções aproximantes envolvidas aumenta, visando manter uma dada acurácia pré-estabelecida, e conseqüentemente aumenta também o tempo de processamento.

Visando reduzir o tempo de processamento e manter a acurácia pretendida, efetua-se um particionamento no intervalo de aproximação, transformando-o em um conjunto ordenado de subintervalos de aproximação, para os quais é possível construir funções de aproximação com graus menores que aquela obtida considerando o intervalo total, sempre considerando a mesma acurácia. Este procedimento tem duas conseqüências principais: (a) reduz o grau das funções aproximantes envolvidas, em conseqüência diminui o tempo de execução da rotina; (b) aumenta o tamanho da



rotina, em consequência aumenta a quantidade de memória necessária para armazená-la durante a execução.

Uma outra razão para efetuar a redução do intervalo de aproximação é evitar as singularidades. Como nenhum polinômio ou função racional de grau finito aproxima adequadamente, uma dada função $F(x)$ na vizinhança de um ponto singular, é necessário efetuar um particionamento no intervalo de aproximação de tal forma que os subintervalos resultantes não possuam no seu interior nenhuma singularidade.

Quando a função, $F(x)$, é periódica pode-se considerar como intervalo de aproximação apenas o intervalo correspondente a um ciclo da função.

Uma outra maneira para reduzir o intervalo de aproximação é a mudança de variáveis, que depende da natureza da função, $F(x)$, e do intervalo $[a,b]$. Um exemplo simples é transformar o problema de aproximar $F(x)$, $x \in [a,b]$ em $F(z)$, $z \in [0,1]$, através da transformação $z = (x-a)/(b-a)$.

7.3. Métodos de Cômputo de Polimômios.

Inicialmente, é interessante analisar-se os tempos gastos nas operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação.

Conforme afirmou-se anteriormente, neste capítulo, o cômputo de funções de natureza complexa, realiza-se através de um conjunto adequado daquelas operações básicas. A exponenciação, acima mencionada, não é uma operação básica, mas foi incluída apenas para comprovar que operações não básicas são muito mais lentas que aquelas.

Para efetuar as medidas de tempo de execução destas operações básicas, criou-se programas computacionais, os quais foram executados em microcomputadores da família IBM-PC ou compatíveis. Os resultados estão na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Tempo de execução (μ s) das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação em cinco tipos de microcomputadores.

Processador	Frequência	Adição	Subtração	Multiplicação	Divisão	Exponenciação
Intel 80486	66 MHz	3.3	3.3	6.6	19	147
Intel 80386	33 MHz	14	14	33	96	791
Intel 80286	12 MHz	25	25	63	192	1542
Intel 8088	8 MHz	110	112	268	783	6631
Intel 8088	5 MHz	181	185	404	1287	10893

Analisando-se a tabela acima, percebe-se:

- (a) Os tempos das operações de adição e subtração são praticamente iguais. De agora em diante referir-se-á apenas à adição, deixando subentendido também a subtração;
- (b) O tempo de uma operação de multiplicação é maior do que o de adição, sendo aproximadamente igual a duas vezes e meia que o daquela;
- (c) O tempo de uma operação de divisão é maior que o de multiplicação, sendo aproximadamente igual a três vezes que o daquela, e a sete vezes o da adição;
- (d) Por não ser uma operação básica e sim uma rotina de cômputo, a exponenciação tem um tempo de execução o mais alto de todos, algo em torno de sessenta vezes o da adição, vinte e seis vezes o da multiplicação e nove vezes o da divisão. De agora em diante a operação de exponenciação não será utilizada. Portanto todos os procedimentos de aproximação serão enfocados no sentido de se utilizar apenas as operações de adição (A), multiplicação (M) e divisão (D). Quando um cômputo envolver α adições, μ multiplicações e Δ divisões, diz-se que tem $(\alpha A + \mu M + \Delta D)$ operações.

Quanto mais veloz for uma rotina de aproximação, mais rápido será um programa que a utilize. Sendo os polinômios uma das principais famílias de funções utilizadas em rotinas de aproximação, neste item dedica-se às maneiras de efetuar o seu



cômputo velozmente.

7.3.1. Ninho de Multiplicações.

Para um polinômio de grau 3,

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (7.8)$$

ficou claro que efetuar exponenciações é um processo lento, portanto é necessário transformar este polinômio em um conjunto de operações básicas, neste caso adição e multiplicação. A equação (7.8) pode ser rearranjada das seguintes maneiras:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + x^2(a_2 + a_3x), \quad (7.9a,b)$$

$$P_3(x) = a_0 + x[a_1 + x(a_2 + a_3x)].$$

Por inspeção percebe-se que o polinômio original foi transformado na equação (7.9b), que tem apenas adições e multiplicações, ao todo $(3A + 3M)$.

Para um polinômio de grau arbitrário,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad n \geq 0, \quad a_n \neq 0, \quad (7.10)$$

efetua-se o cômputo das grandezas q_k definidas pelas equações de recursão

$$q_n = a_n, \quad (7.11a,b)$$

$$q_{k-1} = xq_k + a_{k-1}, \quad k = n, n-1, \dots, 2, 1,$$

e obtém-se

$$P_n(x) = q_0. \quad (7.12)$$

O número de operações envolvidas é $(nA + nM)$.

7.3.2. Método Econômico.

Conforme a Tabela 7.1 a operação de multiplicação é mais lenta que a de adição. Os métodos ditos econômicos procuram diminuir a quantidade de multiplicações com um consequente aumento nas adições. Desta forma, para um polinômio de grau quatro pode-se reduzir a quantidade de operações de $(4M + 4A)$ (ninho de multiplicações), para $(3M + 5A)$, assim diminui-se uma multiplicação e aumenta-se uma adição. De fato o polinômio de grau quatro



$$P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 ; a_4 > 0 , \quad (7.13)$$

pode ser rearranjado e tornar-se

$$P_4(x) = [(Ax + B)^2 + Ax + C][(Ax + B)^2 + D] + E , \quad (7.14)$$

$$A = (a_4)^{1/4} ,$$

$$B = (a_3 - A^3)/4A^3 ,$$

$$D = 3B^2 + 8B^3 + (a_1A - 2a_2B)/A^2 ,$$

$$C = a_2/A^2 - 2B - 6B^2 - D ,$$

$$E = a_0 - B^4 - B^2(C+D) - CD .$$

Este procedimento pode ser aplicado para polinômios de grau maior que três. Para computadores onde o tempo gasto na multiplicação é igual ao da adição este método perde sua vantagem principal.

Tanto no caso do ninho de multiplicações como no método econômico é necessário verificar-se a propagação do erro. Nem sempre a forma mais rápida é a mais precisa. Eventualmente pode-se combinar os dois métodos, produzindo formas mistas. Na Tabela 7.2 apresenta-se uma comparação entre a quantidade de operações requeridas pelos dois métodos.

Tabela 7.2. Quantidade de operações requeridas para o cômputo de polinômios.

n	Ninho de Multiplicações	Método Econômico
1	1M + 1A	1M + 1A
2	2M + 2A	2M + 2A
3	3M + 3A	3M + 3A
4	4M + 4A	3M + 5A
5	5M + 5A	4M + 5A
6	6M + 6A	4M + 7A

7.4. Método de Cômputo de Funções Racionais.

A família de funções racionais, $R_{m,n}(x)$, é definida como o quociente de dois polinômios, $P_m(x)$ e $Q_n(x)$, expressa pela seguinte fórmula

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad (7.15)$$



sendo

$$P_m(x) = a_0^* + a_1^*x + \dots + a_m^*x^m, \quad a_m^* \neq 0,$$

$$Q_n(x) = b_0^* + b_1^*x + \dots + b_n^*x^n, \quad b_n^* \neq 0.$$

Assume-se que a equação (7.15) não pode ser reduzida a formas mais simples, isto é, não existem fatores comuns no numerador e no denominador. Caso existam, podem ser explicitados e então cancelados mutuamente, a expressão resultante seria então irredutível. Na equação (7.15) uma multiplicação pode ser economizada, multiplicando o numerador e o denominador pelo inverso de b_n^* , assim esta equação torna-se

$$R_{m,n}(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}, \quad a_m \neq 0, \quad (7.16)$$

onde

$$a_i = a_i^*/b_n^*, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad b_j = b_j^*/b_n^*, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

7.4.1. Cômputo da Função Racional na Forma Fracionária.

Neste método efetua-se o cômputo dos polinômios $P_m(x)$ e $Q_n(x)$ separadamente e finalmente realiza-se a divisão $P_m(x)/Q_n(x)$. Vale lembrar que no cômputo de $Q_n(x)$ economiza-se uma multiplicação. Portanto a quantidade total de operações para efetuar este cômputo é $[(n+m-1)M + 1D + (n+m)A]$, caso seja utilizado o método econômico para cômputo dos polinômios o número de multiplicações diminui e o de adições aumenta.

7.4.2. Cômputo da Função Racional na Forma de Fração Continuada Finita.

A fração continuada finita é uma expressão da seguinte forma

$$d_0 + \frac{c_1}{d_1 + \frac{c_2}{d_2 + \dots + \frac{c_n}{d_n}}} \quad (7.17)$$

onde $c_0 = 0$, para $m = n$.

Uma maneira rápida e simples para efetuar o cômputo da

expressão (7.17) é fazer

$$q_n = d_n, \quad (7.18a, b)$$

$$q_{k-1} = d_{k-1} + \frac{c_k}{q_k}, \quad k = n, n-1, \dots, 2, 1.$$

Para obter-se a expressão (7.17) a partir de uma função racional, seja o seguinte procedimento, efetuado para $m = n + k$. Então,

$$R_{m,n}(x) = R_{(n+k),n}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_{(n+k)} x^{n+k}}{b_0 + b_1 x + \dots + b_{(n-1)} x^{(n-1)} + x^n},$$

$$R_{(n+k),n}(x) = t_0 + t_1 x + \dots + t_k x^k + \frac{a_0^* + a_1^* x + \dots + a_{(n-1)}^* x^{(n-1)}}{b_0 + b_1 x + \dots + b_{(n-1)} x^{(n-1)} + x^n},$$

$$R_{(n+k),n}(x) = t_0 + t_1 x + \dots + t_k x^k + \frac{a_{(n-1)}^* [a_0' + a_1' x + \dots + x^{n-1}]}{b_0 + b_1 x + \dots + b_{(n-1)} x^{(n-1)} + x^n},$$

$$R_{(n+k),n}(x) = t_0 + t_1 x + \dots + t_k x^k + \frac{a_{(n-1)}^*}{b_0 + b_1 x + \dots + b_{(n-1)} x^{(n-1)} + x^n},$$

$$R_{(n+k),n}(x) = t_0 + t_1 x + \dots + t_k x^k + \frac{a_{(n-1)}^*}{x + c_1' + \frac{b_0^* + b_1^* x + \dots + b_{(n-2)}^* x^{(n-2)}}{a_0' + a_1' x + \dots + x^{(n-1)}}},$$

e assim por diante, até

$$R_{(n+k),n}(x) = t_0 + t_1 x + \dots + t_k x^k + \frac{r_{(n-1)}}{x + s_{(n-1)} + \frac{r_{(n-2)}}{x + s_{(n-2)} + \frac{r_{(n-3)}}{x + s_{(n-3)} + \dots + \frac{r_0}{x + s_0}}}}$$

(7.19)

quando $k = 0$, i.e., $m = n$, a equação (7.19) torna-se igual à expressão (7.17). As constantes $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$, $\{r_0, r_1, \dots, r_{(n-1)}\}$, e $\{s_0, s_1, \dots, s_{(n-1)}\}$, aparecem em consequência do processo algébrico efetuado. Este procedimento também é conhecido como



ninho de divisões.

Na Tabela 7.3 apresenta-se a quantidade de operações necessárias nas duas maneiras de cômputo. Nos casos em que há cômputo de polinômios, está implícito que são calculados pelo método econômico.

Tabela 7.3. Quantidade de Operações Requeridas para Cômputo de Funções Racionais.

m	n	Fração	Fração continuada
1	1	1M + 1D + 2A	1D + 2A
2	1	2M + 1D + 3A	1M + 1D + 3A
2	2	3M + 1D + 4A	2D + 4A
3	2	4M + 1D + 5A	1M + 2D + 5A
3	3	5M + 1D + 6A	3D + 6A
4	3	5M + 1D + 8A	1M + 3D + 7A
4	4	5M + 1D + 10A	4D + 8A
5	4	6M + 1D + 10A	1M + 4D + 9A
5	5	7M + 1D + 10A	5D + 10A
6	6	7M + 1D + 14A	6D + 12A

Por inspeção na Tabela 7.3 percebe-se que na forma fracionária há um número maior de multiplicações ao invés de divisões, já na forma de fração continuada ocorre o inverso. Portanto em computadores onde os tempos gastos nas operações de divisão e multiplicação, são aproximadamente iguais é mais vantajoso operar na forma de fração continuada, por outro lado, naqueles computadores onde o tempo gasto na operação de divisão é maior que o gasto na multiplicação haverá um limite a partir do qual é mais vantajoso operar na forma fracionária. Em ambos os casos é necessário verificar a propagação do erro, pois, um esquema mais rápido pode ter menor acurácia.

7.5. Aproximação Polinomial do Tipo Minimáx.

Neste item apresenta-se a melhor aproximação de funções, utilizando polinômios

7.5.1. A Melhor Aproximação Polinomial de Funções.

Para efetuar a aproximação de uma função F(x) em um intervalo fechado [a,b] através de um polinômio de grau ≤ n, define-se a



melhor aproximação como:

a) O polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ para o qual $\max_{[a,b]} |P_n(x) - F(x)|$ é tão pequeno quanto possível, se o erro absoluto é utilizado como medida;

b) O polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ para o qual $\max_{[a,b]} |[P_n(x) - F(x)]/F(x)|$ é tão pequeno quanto possível, se o erro relativo é utilizado como medida.

Para cada um destes critérios existe em geral apenas uma aproximação polinomial de grau $\leq n$, de $F(x)$. A aproximação polinomial de $F(x)$ que é a melhor, sob um dos critérios acima mencionados, é chamada de aproximação minimáx, devido à propriedade de que fornece o mínimo de erro máximo, quer seja absoluto ou relativo. Deve-se fazer distinção entre erro absoluto e relativo, uma vez que o melhor polinômio obtido usando o critério do erro absoluto em geral não é também o melhor polinômio quando utiliza-se o critério do erro relativo.

7.5.2. Teorema de Chebyshev sobre Aproximação Polinomial.

O principal teorema de aproximação polinomial do tipo minimáx é creditado a Chebyshev (1859). A seguir apresenta-se o enunciado deste teorema em uma forma genérica, que pode ser adaptada para obter-se os casos particulares.

Teorema 7.1. - Seja $u(x)$ uma função contínua no intervalo finito $[a,b]$, e seja $v(x)$ uma função contínua e não nula em $[a,b]$. Seja $V_n(x)$ um conjunto de polinômios de grau $\leq n$. Existe um único polinômio $P_n^*(x) \in V_n(x)$, de tal forma que

$$\max_{[a,b]} \left| \frac{P_n^*(x)}{v(x)} - u(x) \right| = \min_{P_n(x) \in V_n(x)} \left[\max_{[a,b]} \left| \frac{P_n(x)}{v(x)} - u(x) \right| \right] \quad (7.20)$$

Seja $P_n(x) \in V_n(x)$. Então $P_n(x)$ é $P_n^*(x)$ se e somente se existe $N \geq n + 2$, pontos em $[a,b]$, $x_1^* < x_2^* < \dots < x_N^*$, de tal forma que

$$\frac{P_n(x_k^*)}{v(x_k^*)} - u(x_k^*) = (-1)^k \mu^*, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

onde (7.21a,b)

$$|\mu^*| = \max_{[a,b]} \left| \frac{P_n(x)}{v(x)} - u(x) \right|.$$

A demonstração deste teorema, e de outros correlacionados, podem ser encontrados em NACHBIN (1965), CHENEY (1966) e DAVIS (1975), cada um com diferentes níveis de sofisticação matemática. Seguindo o enfoque adotado até agora neste capítulo, o teorema acima pode ser utilizado de duas formas: (a) com $v(x) = 1$ e $u(x) = F(x)$, a função $|[P_n(x)/v(x)] - u(x)|$ torna-se o erro absoluto $|P_n(x) - F(x)|$, anteriormente definido. Neste caso o teorema estabelece que existe um único polinômio $P_n^*(x)$ de grau $\leq n$ que aproxima $F(x)$ com erro absoluto minimáx em $[a,b]$. O teorema também estabelece que $P_n^*(x)$ é unicamente caracterizado pelo fato de que a função erro absoluto $P_n^*(x) - F(x)$ possui no mínimo $(n + 2)$ pontos extremantes em $[a,b]$, nos quais é alternativamente positiva e negativa, e que as magnitudes de $|P_n^*(x) - F(x)|$, nestes pontos, são iguais; (b) com $v(x) = F(x)$, $F(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$, e $u(x) = 1$, a função $|[P_n(x)/v(x)] - u(x)|$ torna-se o erro relativo $|[P_n(x) - F(x)]/F(x)|$. Neste caso o teorema estabelece que existe um único polinômio $P_n^*(x)$ de grau $\leq n$ que aproxima $F(x)$ com erro relativo minimáx em $[a,b]$. O teorema também estabelece que $P_n^*(x)$ é unicamente caracterizado pelo fato de que a função erro relativo $[P_n^*(x) - F(x)]/F(x)$ possui no mínimo $(n+2)$ pontos extremantes em $[a,b]$, nos quais é alternativamente positiva e negativa, e que as magnitudes de $|[P_n^*(x) - F(x)]/F(x)|$, nestes pontos são iguais.

Nota-se que uma aproximação polinomial do tipo minimáx para uma dada função está especificamente associada ao grau do polinômio e também ao intervalo de aproximação $[a,b]$. Exceto em casos especiais, uma alteração no grau do grau do polinômio $P_n^*(x)$ ou no intervalo $[a,b]$ implica em alteração na função aproximação.

7.5.3. Aproximação quando $F(x)$ tem uma Raiz em $[a,b]$.

O requisito de que $F(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ do item anterior caso (b), exclui uma série de problemas de aproximação nos quais esta



restrição não é satisfeita.

O tipo mais importante de aproximação nos quais $F(x) = 0$, $x \in [a, b]$ é aquele que satisfaz as seguintes condições:

a) o único ponto $x \in [a, b]$ no qual $F(x) = 0$ é $x = \alpha$;

b) o $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{F(x)}{x - \alpha}$ é finito e não nulo em $[a, b]$.

Nesta situação, $P_n^*(x)$ deve ser expresso na forma $(x - \alpha)P_{n-1}^*(x)$, onde $P_{n-1}^*(x)$ é um polinômio de grau $\leq (n-1)$, caso contrário $|[P_n^*(x) - F(x)]/F(x)|$ terá uma singularidade em $x = \alpha$. Realmente, $P_n^*(x)$ deve ser $(x - \alpha)P_{(n-1)}^*(x)$, onde $P_{(n-1)}^*(x)$ é um polinômio de grau $\leq (n-1)$ que aproxima $F(x)/(x - \alpha)$ com um erro relativo minimax em $[a, b]$. A existência de $P_{(n-1)}^*(x)$ está de acordo com o item anterior, uma vez que $F(x)/(x - \alpha) \neq 0$, $x \in [a, b]$. Isto é decorrente do fato que

$$\max_{[a, b]} \left| \frac{(x - \alpha)P_{(n-1)}^*(x) - F(x)}{F(x)} \right| = \max_{[a, b]} \left| \frac{P_{(n-1)}^*(x) - \frac{F(x)}{x - \alpha}}{\frac{F(x)}{x - \alpha}} \right|$$

é tão pequeno quanto possível se e somente se $P_{(n-1)}^*(x)$ é $P_{(n-1)}^*$.

Nos casos em que houver várias raízes, distintas ou múltiplas, em $[a, b]$, a técnica descrita acima pode ser adaptada para a obtenção de uma aproximação minimax do tipo erro relativo.

7.5.4. A Aproximação Polinomial Minimax de Funções Pares ou Ímpares.

As funções pares tem a propriedade $F(x) = F(-x)$ e as funções ímpares $F(x) = -F(-x)$, $x \in [-a, a]$. Desta forma, para funções pares

$$\begin{aligned} \max_{[-a, a]} |P_n^*(x) - F(x)| &= \max_{[-a, a]} |P_n^*(-x) - F(-x)|, \\ &= \max_{[-a, a]} |P_n^*(-x) - F(x)|, \end{aligned}$$

como $P_n^*(x)$ é único tem-se que $P_n^*(x) = P_n^*(-x)$. Da mesma forma para funções ímpares



$$\begin{aligned} \max_{[-a,a]} |P_n^*(x) - F(x)| &= \max_{[-a,a]} |P_n^*(-x) - F(-x)|, \\ &= \max_{[-a,a]} |-P_n^*(-x) - F(x)|, \end{aligned}$$

como $P_n^*(x)$ é único tem-se que $P_n^*(x) = -P_n^*(-x)$. Ou seja, as funções aproximantes em aproximações polinomiais minimax de funções ímpares ou pares são também ímpares ou pares.

7.5.5. Método de Remez (1934) para Aproximações Polinomiais Minimax.

As técnicas para determinar as aproximações do tipo erro absoluto minimax e erro relativo minimax diferem ligeiramente. Considere-se primeiramente o caso do erro absoluto. Seja a aproximação de $F(x)$, $x \in [a,b]$ e também a necessidade de se determinar o polinômio $P_n^*(x)$ de grau $\leq n$ que aproxima $F(x)$ com um erro absoluto minimax em $[a,b]$.

Seja $P_n^*(x) = a_0^*x^0 + a_1^*x^1 + \dots + a_n^*x^n$. Assume-se que $|P_n^*(x) - F(x)|$ têm exatamente $(n+2)$ extremantes em $[a,b]$, inclusos os pontos a e b . Sejam estes pontos designados por x_k^* , $k = 1, 2, \dots, n$, e ordenados de tal forma que $a = x_1^* < x_2^* < \dots < x_{(n+2)}^* = b$.

Através do teorema de Chebyshev sabe-se que

$$a_0^* + a_1^* x_k^* + \dots + a_n^* (x_k^*)^n - f(x_k^*) = (-1)^k \mu^*, \quad k = 1, 2, \dots, n+2,$$

onde (7.22a,b)

$$|\mu^*| = \max_{[a,b]} |P_n^*(x) - F(x)|.$$

Se os pontos extremantes x_k^* , $k = 1, 2, \dots, n+2$, são conhecidos, o sistema de equações lineares, equação (7.22a) pode ser resolvido, encontrando-se as incógnitas a_0^* , a_1^* , $\dots$, a_n^* , e μ^* , consequentemente determinando $P_n^*(x)$. Entretanto, isto não pode ser efetuado de imediato porque os pontos extremantes são desconhecidos. Desta forma, descreve-se a seguir, um conjunto de procedimentos destinados a calcular iterativamente os x_k^* 's, μ^* e os coeficientes de $P_n^*(x)$. Assim:

- a) Inicialmente selecionam-se $(n+2)$ pontos x_k , $k = 1, 2, \dots, n+2$, de tal forma que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{(n+2)} = b$;
- b) Calculam-se os coeficientes a_i 's, $i = 0, \dots, n$, de um polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, e um número μ , resolvendo o sistema



de $(n+2)$ equações lineares;

$$a_0 + a_1 x_k + \dots + a_n (x_k)^n - (-1)^k \mu = F(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n+2; \quad (7.23)$$

c) Localizam-se os pontos extremantes, em $[a, b]$, da função erro absoluto $[P_n(x) - F(x)]$. Assume-se que existem exatamente $(n+2)$ pontos extremantes, incluindo os pontos a e b .

Sejam estes pontos designados por y_k , $k = 1, 2, \dots, (n+2)$, e ordenados de tal forma que $a = y_1 < y_2 < \dots < y_{(n+2)} = b$;

d) Substitui-se x_k por y_k , $k = 1, 2, \dots, (n+2)$ e repete-se a sequência de procedimentos anteriormente descrita, começando pelo item (b).

O objetivo deste procedimento é que x_k convirja para x_k^* , a_k para a_k^* , e μ para μ^* . A demonstração de que este processo converge para qualquer escolha dos valores de inicialização, item (a), foi realizada por VEIDINGER (1960).

A hipótese de que a função erro absoluto tenha exatamente $(n+2)$ pontos extremantes em $[a, b]$ não é fundamental. Para maiores detalhes sobre o método de Remez, no qual esta hipótese não é feita, deve-se consultar RICE (1964), CHENEY (1966), FIKE (1968), HART (1968) e DAVIS (1975).

As modificações que devem ser feitas no método de Remez, acima descrito, de tal forma que seja utilizado para calcular os coeficientes de uma aproximação, de $F(x)$, do tipo erro relativo minimáx são as seguintes: substituir a equação (7.23) por

$$a_0 + a_1 x_k + \dots + a_n (x_k)^n - (-1)^k \mu F(x_k) = F(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, (n+2) \quad (7.24)$$

e a função erro absoluto, do item (c), pela função erro relativo.

7.6. A Aproximação, com Função Racional, do Tipo Minimáx.

Apresenta-se, neste item, a melhor aproximação de funções, utilizando funções racionais.

7.6.1. A Melhor Aproximação, com Função Racional, de Funções.

No item (7.5) apresentou-se a aproximação polinomial do tipo minimáx, neste apresenta-se um assunto semelhante, sendo que a teoria necessita de poucas adaptações para abranger também este



aspecto.

Para efetuar a aproximação de uma função $F(x)$ em um intervalo fechado $[a,b]$, através de uma função racional $R_{m,n}(x)$, que é expressa na forma de uma fração irredutível $P_m(x)/Q_n(x)$, onde $Q_n(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$. $P_m(x)$ e $Q_n(x)$ são polinômios de grau $\leq m$ e $\leq n$, respectivamente. A teoria da melhor aproximação utilizando funções racionais trata da existência de uma função racional única em $R_{m,n}(x)$, $x \in [a,b]$, que aproxima $F(x)$ com um erro absoluto minimáx ou erro relativo minimáx em $[a,b]$.

O teorema fundamental sobre a melhor aproximação utilizando funções racionais é uma generalização do Teorema de Chebyshev, apresentado no item (7.5). A seguir apresenta-se o enunciado deste teorema em uma forma genérica, que pode ser adaptada para obter-se os casos particulares.

Teorema 7.2 - Seja $u(x)$ uma função contínua em um intervalo finito $[a,b]$, e seja $v(x)$ uma função contínua e não nula em $[a,b]$. Seja $V_{m,n}(x)$ um conjunto de funções racionais. Existe uma única função racional $R_{m,n}^*(x) \in V_{m,n}(x)$, $x \in [a,b]$, de tal forma que

$$\max_{[a,b]} \left| \frac{R_{m,n}^*(x)}{v(x)} - u(x) \right| = \min_{R_{m,n}(x) \in V_{m,n}(x)} \left[\max_{[a,b]} \left| \frac{R_{m,n}(x)}{v(x)} - u(x) \right| \right]. \quad (7.25)$$

Seja $R_{m,n}(x) \in V_{m,n}(x)$, $x \in [a,b]$, uma função racional, e seja $P'_m(x)/Q'_n(x)$ uma expressão racional irredutível de $R_{m,n}(x)$, onde $P'_m(x)$ e $Q'_n(x)$ são polinômios de graus exatamente iguais a m' e n' , respectivamente. Seja $d = \min(m-m', n-n')$. Então $R_{m,n}^*(x)$ é $R_{m,n}^*(x)$ se e somente se existe $N \geq (m + n + 2 - d)$ pontos em $[a,b]$, $x_1^* < x_2^* < \dots < x_N^*$, de tal forma que

$$\frac{R_{m,n}^*(x_k^*)}{v(x_k^*)} - u(x_k^*) = (-1)^k \mu^*, \quad k=1,2,\dots,N,$$

onde (7.26a,b)

$$|\mu^*| = \max_{[a,b]} \left| \frac{R_{m,n}^*(x)}{v(x)} - u(x) \right|.$$

A demonstração deste teorema, e de outros correlacionados, pode ser encontrada em NACHBIN (1965), CHENEY (1966) e DAVIS (1975), cada uma com diferente nível de sofisticação matemática.

Sob certas condições a aproximação minimáx $R_{m,n}^*(x)$ é dita defectiva. Nestes casos, seja $P_m^*(x)/Q_n^*(x)$ uma fração irredutível

de $R_{m,n}^*(x)$, onde $P_m(x)$ e $Q_n(x)$ são polinômios de grau exatamente m' e n' , respectivamente, e seja $d = \min(m-m', n-n')$. Então $R_{m,n}^*(x)$ é defectiva quando $d \neq 0$, i.e., $m' < m$ e $n' < n$. Casos defectivos são de baixa ocorrência e de agora em diante considera-se que $d = 0$ ou $N \geq (m+n+2)$.

Seguindo-se o mesmo enfoque da aproximação polinomial, existem dois casos importantes, correspondendo um ao erro absoluto minimáx e outro ao erro relativo minimáx:

a) Tomando-se $v(x) = 1$ e $u(x) = F(x)$, tem-se

$$\frac{R_{m,n}(x)}{v(x)} - u(x) = R_{m,n}^*(x) - F(x),$$

que é a função erro absoluto, e o teorema estabelece a existência de uma única função racional em $V_{m,n}(x)$, $x \in [a,b]$ que aproxima $F(x)$ com um erro absoluto minimáx em $[a,b]$.

b) Tomando-se $v(x) = F(x)$, $F(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ e $u(x) = 1$, tem-se

$$\frac{R_{m,n}(x)}{v(x)} - u(x) = \frac{R_{m,n}^*(x) - F(x)}{F(x)},$$

que é a função erro relativo, e o teorema estabelece a existência de uma única função racional em $V_{m,n}(x)$, $x \in [a,b]$ que aproxima $F(x)$ com um erro relativo minimáx em $[a,b]$. O número de pontos extremantes nas funções erro minimáx é de no mínimo $(m+n+2)$, exceto nos casos defectivos. Para aquelas funções nas quais $F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \alpha} F(x)/(x-\alpha)$ é finito e não nulo, $x \in [a,b]$; procede-se de maneira análoga ao caso da aproximação polinomial minimáx.

Embora m e n possam ser quaisquer valores inteiros não negativos, a experiência relatada nas referências sobre aproximação utilizando funções racionais indica que os valores de m e n devem ser iguais ou quase iguais.

7.6.2. Comparação entre Aproximações Utilizando Polinômios ou Função Racional.

Uma regra empírica, que consta das referências, sobre aproximações seja polinomial ou através de função racional é que a escolha entre estas duas classes em geral favorece a aproximação por meio de função racional quando o número de coeficientes na

aproximação é maior que seis ou sete. Uma aproximação utilizando função racional com uma dada quantidade de coeficientes é geralmente mais precisa que outro utilizando polinômios que tenha o mesmo número de coeficientes. A vantagem da aproximação por função racional aumenta com o número de coeficientes envolvidos. Quanto ao tempo de execução da rotina resultante, este depende diretamente das velocidades de execução das operações básicas, que variam de um computador para outro. Em GAUTSCHI (1975:8-10) estão listadas trinta e três aproximações utilizando função racional contra apenas cinco com polinômios; em HART (1968) encontra-se algo em torno de um mil e cem aproximações, sendo que, deste total, 66% são do tipo função racional e 34% são do tipo polinomial.

7.6.3. Método de Remez para Aproximação Minimáx Usando Funções Racionais.

Um dos procedimentos numéricos mais eficientes para o cômputo dos coeficientes de uma aproximação racional minimáx é a generalização do método de Remez (RALSTON, 1965), que foi mostrado no item (7.5.5.). Agora apresenta-se esta generalização, primeiramente considerando-se o caso da aproximação do tipo erro absoluto minimáx. Suponha-se a aproximação de $F(x)$, $x \in [a, b]$ e que necessita-se determinar a função racional $R_{m,n}^*(x) \in V_{m,n}(x)$, $x \in [a, b]$ que aproxima $F(x)$ com um erro absoluto minimáx em $[a, b]$.

Seja uma função racional irredutível, $R_{m,n}^*(x)$, expressa por

$$R_{m,n}^*(x) = \frac{p_0^* + p_1^*x + p_2^*x^2 + \dots + p_m^*x^m}{q_0^* + q_1^*x + q_2^*x^2 + \dots + q_n^*x^n} \quad (7.27)$$

Assume-se que, relativamente à $R_{m,n}^*(x)$, a função racional expressa na equação (7.27) pode ser rearranjada, através da multiplicação do numerador e do denominador pelo inverso de q_0^* , de tal forma que o novo $q_0^* = 1$, e que a quantidade de pontos extremantes da função erro em $[ab,]$, é $(m + n + 2)$, inclusos os pontos, a e b . Sejam estes pontos designados por x_k^* , $k = 1, 2, \dots, (m+n+2)$, e ordenados de tal forma que $a = x_1^* < x_2^* < \dots < x_{(m+n+2)}^* = b$.

Através do teorema generalizado de Chebyshev sabe-se que



$$\frac{p_0^* + p_1^* x + \dots + p_m^* x^m}{q_0^* + q_1^* x + \dots + q_n^* x^n} - F(x_k^*) = (-1)^k \mu^*, \quad k = 1, 2, \dots, (m+n+2)$$

onde (b). (7.28a,b)

$$|\mu^*| = \max_{[a,b]} |R_{m,n}^*(x) - F(x)|.$$

Rearranjando a equação (7.28a), resulta

$$\begin{aligned} & p_0^* + p_1^* x_k^* + p_2^* (x_k^*)^2 + \dots + p_m^* (x_k^*)^m + q_1^* x_k^* [-F(x_k^*) - (-1)^k \mu^*] + \\ & + q_2^* (x_k^*)^2 [-F(x_k^*) - (-1)^k \mu^*] + \dots + q_n^* (x_k^*)^n [-F(x_k^*) - (-1)^k \mu^*] - \\ & - (-1)^k \mu^* = F(x_k^*), \quad k = 1, 2, \dots, (m+n+2). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Se os pontos extremantes x_k^* , $k = 1, 2, \dots, (m+n+2)$, são conhecidos, o sistema de equações não lineares, equação (7.29), pode ser resolvido, obtendo-se os coeficientes de $R_{m,n}^*(x)$. Entretanto, isto não pode ser efetuado de imediato porque os pontos extremantes são desconhecidos. Desta forma, descreve-se a seguir, um conjunto de procedimentos destinados a calcular iterativamente os x_k^* 's, μ^* , e os coeficientes de $R_{m,n}^*(x)$. Assim:

- a) Inicialmente seleciona-se $(m+n+2)$ pontos x_k , $k = 1, 2, \dots, (m+n+2)$, de tal forma que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{(m+n+2)} = b$;
- b) Calculam-se os coeficientes p_i 's e q_j 's, $i = 0, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, da função racional

$$R_{m,n}^*(x) = \frac{p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n}, \quad q_0 = 1, \quad (7.31)$$

e o coeficiente μ , resolvendo-se o sistema de $(m+n+2)$ equações não lineares,

$$\begin{aligned} & p_0 + p_1 x_k + p_2 (x_k)^2 + \dots + p_m (x_k)^m - \\ & - q_1 x_k [F(x_k) + (-1)^k \mu] - q_2 (x_k)^2 [F(x_k) + (-1)^k \mu] - \dots - \\ & - q_n (x_k)^n [F(x_k) + (-1)^k \mu] - (-1)^k \mu = F(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, (m+n+2); \end{aligned} \quad (7.30)$$

- c) Localizam-se os pontos extremantes, em $[a,b]$, da função erro absoluto $[R_{m,n}^*(x) - F(x)]$. Assume-se que existam exatamente $(m+n+2)$ pontos extremantes, incluindo os pontos a e b . Sejam estes pontos designados por y_k , $k = 1, 2, \dots, (m+n+2)$, e ordenados de tal forma



que $a = y_1 < y_2 < \dots < y_{(m+n+2)} = b$;

d) Substitui-se x_k por y_k , $k = 1, 2, \dots, (m+n+2)$ e repete-se a sequência de procedimentos, anteriormente descritas começando pelo item (b).

O objetivo deste procedimento é que x_k convirja para x_k^* ; p_i para p_i^* , $i = 0, \dots, m$; q_j para q_j^* , $j = 1, \dots, n$; e μ para μ^* . A demonstração de que este processo converge para valores de inicialização x_k suficientemente próximos de x_k^* , item (a), foi realizado por RALSTON (1965).

A hipótese de que a função erro absoluto tenha exatamente $(m+n+2)$ pontos extremantes em $[a, b]$ não é fundamental para maiores detalhes sobre o método de Remez, onde esta hipótese não é feita. Nos casos defectivos deve-se consultar RICE (1964), RALSTON (1965), CHENEY (1966), FIKE (1968), HART (1968) e DAVIS (1975).

A modificação que deve ser feita no método generalizado de Remez, acima descrito, de tal forma que seja utilizado para calcular os coeficientes de uma aproximação racional de $F(x)$, do tipo erro relativo minimáx são as seguintes: substituir a equação (7.30) por

$$\begin{aligned} & p_0 + p_1 x_k + p_2 (x_k)^2 + \dots + p_m (x_k)^m - q_1 x_k [F(x_k) [1 + (-1)^k \mu] - \\ & - q_2 (x_k)^2 F(x_k) [1 + (-1)^k \mu] - \dots - q_n (x_k)^n F(x_k) [1 + (-1)^k \mu] - \\ & - (-1)^k F(x_k) \mu = F(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, (m+n+2); \end{aligned} \quad (7.31)$$

e a função erro absoluto, do item (c), pela função erro relativo.

7.7. Aproximação Utilizando Série Truncada de Potências.

Aproximações polinomiais que não são minimáx são frequentemente utilizadas para construir rotinas de cômputo de funções.

As principais razões para isto são: a) A aproximação minimáx é mais difícil de se obter que a aproximação polinomial que não seja minimáx; b) apesar de suas vantagens conceituais uma aproximação minimáx pode não ter vantagens práticas sobre outra aproximação quasi-minimáx. Por esta razão apresenta-se algumas maneiras de se obter aproximações não minimáx. Os métodos a apresentar-se são:



- a) Série truncada de potências; b) Série truncada de polinômios; c) Aproximação de Padé; d) Truncamento de frações continuadas.

7.7.1. Série Truncada de Potências.

Uma das principais fontes de aproximações polinomiais de funções são as séries de potências, que são obtidas através das fórmulas de Taylor, MacLaurin e Laurent; ou através da solução de equações diferenciais ordinárias pelo método de Frobenius. De uma forma geral assume-se que a expansão de $F(x)$ em série de potências é definida pela expressão

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots, \quad x \in [a, b]. \quad (7.32)$$

Assume-se que esta série é convergente no intervalo $[a, b]$, caso contrário nada pode ser feito. Truncando a série acima depois do termo $c_n x^n$, obtém-se um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que aproxima $F(x)$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n, \quad x \in [a, b]. \quad (7.33)$$

O uso de série de potências na aproximação de funções tem algumas vantagens. Estas expansões são conhecidas ou fáceis de serem obtidas para quase todas as funções de interesse. Devido à facilidade de serem manipuladas, são algebricamente convenientes para serem utilizadas. Mais importante entretanto, é o fato de que obtendo-se uma expressão de série de potência de $F(x)$, pode-se ter aproximações para $F(x)$ sem a necessidade de efetuar-se o cálculo prévio de $F(x)$. O método de Remez, por exemplo, necessita que calcule-se $F(x)$ durante o processo de obtenção da aproximação. A quase totalidade das funções para as quais existem aproximações citadas em HART (1968), têm uma variável independente e nenhum parâmetro, isto deve-se à complexidade em se obter aproximações de funções de várias variáveis e vários parâmetros. No caso da série de potências não existe esta limitação, pois o papel das variáveis e dos parâmetros estão claramente estabelecidos. O principal problema relacionado com a aproximação de funções utilizando série de potências é a baixa taxa de convergência, o que implica na necessidade de um número maior de termos retidos no processo de



truncamento para fornecer a mesma precisão que no caso da utilização de um polinômio de grau menor, obtido pelo método minimáx.

A estimativa do erro cometido em uma aproximação com série de potência truncada pode ser facilmente obtida, combinando-se as equações (7.32) e (7.33). Assim o erro absoluto torna-se

$$|P_n(x) - F(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| |x|^k, \quad (7.33)$$

e o erro relativo

$$\left| \frac{P_n(x) - F(x)}{F(x)} \right| = \frac{\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k \right|}{\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right|} \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| |x|^k}{\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right|}. \quad (7.34)$$

7.7.2. Série Truncada de Polinômios.

De um modo geral, uma função analítica $F(x)$, $x \in [a, b]$ pode ser expandida em uma série de polinômios. Considera-se agora apenas a expansão em termos de polinômios de Chebyshev, $T_k(x)$, cujo intervalo de aplicação é $[-1, 1]$. Conforme descrito anteriormente é possível reduzir o intervalo $[a, b]$ para $[-1, 1]$, sem perda de generalidade. Se

$$F(x) = \sum'_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots, \quad (7.35)$$

onde

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} F(x) T_k(x) (1-x^2)^{1/2} dx,$$

A notação $\sum'$ indica que o primeiro termo na série deve ser dividido por 2, então o polinômio $P_n(x)$ é expresso por

$$P_n(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) \quad (7.36)$$

de grau $\leq n$ obtido pelo truncamento da série (7.35), após o termo $a_n T_n(x)$, que é a aproximação de $F(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Este é um dos melhores métodos para obtenção de aproximações polinomiais tanto pela facilidade quanto pela eficácia. A razão principal da efetividade deste método de obtenção de aproximações é a alta taxa de convergência, característica das séries em termos



de polinômios de Chebyshev.

A estimativa do erro cometido em uma aproximação com série de Chebyshev pode ser obtida, combinando-se as equações (7.35) e (7.36). Assim o erro absoluto torna-se

$$|P_n(x) - F(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k T_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|; \quad (7.37)$$

e o erro relativo

$$\left| \frac{P_n(x) - F(x)}{F(x)} \right| = \left| \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)} \right| \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}{\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) \right|}. \quad (7.38)$$

7.7.3. Aproximação de Padé

O método de Padé obtém uma aproximação, de uma série de potências, na forma de função racional. Seja $F(x)$ expresso em uma série de potências, conforme a equação (7.32). Seja m e n inteiros não negativos. A aproximação de Padé de ordem (m,n) de $F(x)$ é uma função racional $R_{m,n}(x) = P_m(x)/Q_n(x)$, onde

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_mx^m \text{ e } Q_n(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_nx^n$$

são dois polinômios cujos coeficientes satisfazem ao seguinte sistema de $(m+n+1)$ equações lineares e homogêneas,

$$p_0 - c_0q_0 = 0$$

$$p_1 - (c_1q_0 + c_0q_1) = 0$$

$$p_m - (c_mq_0 + c_{(m-1)}q_1 + \dots + c_{(m-n)}q_n) = 0$$

$$c_{(m+1)}q_0 + c_mq_1 + \dots + c_{(m-n+1)}q_n = 0 \quad (7.39)$$

$$c_{(m+2)}q_0 + c_{(m+1)}q_1 + \dots + c_{(m-n+2)}q_n = 0$$

$$c_{(m+n)}q_0 + c_{(m+n-1)}q_1 + \dots + c_mq_n = 0$$

Sendo $c_k = 0$ para $k < 0$.

O sistema acima tem $(m+n+2)$ incógnitas e $(m+n+1)$ equações.



Conforme mostrado anteriormente neste capítulo pode-se fazer $q_0 = 1$ (ou qualquer outro coeficiente) sem perda de generalidade. Assim o sistema de equações acima torna-se

$$p_0 = c_0$$

$$p_1 - c_0 q_1 = c_1$$

...

$$p_m - (c_{(m-1)} q_1 + c_{(m-2)} q_2 + \dots + c_{(m-n)} q_n) = c_m$$

$$c_m q_1 + c_{(m-1)} q_2 + \dots + c_{(m-n+1)} q_n = c_{(m+1)} \quad (7.40)$$

$$c_{(m+1)} q_1 + c_m q_2 + \dots + c_{(m-n+2)} q_n = c_{(m+2)}$$

...

$$c_{(m+n-1)} q_1 + c_{(m+n-2)} q_2 + \dots + c_m q_n = c_{(m+n)},$$

que é um sistema linear com $(m+n+1)$ equações e incógnitas. Após a solução deste sistema de equações tem-se os coeficientes p_i 's $i = 0, 1, \dots, m$ e q_j 's, $j = 1, 2, \dots, n$, e consequentemente a função racional $R_{m,n}(x)$ que aproxima $F(x)$, $x \in [a, b]$. O sistema de equações (7.39) expressa a condição de que os $(m+n+1)$ primeiros termos da séries de potências fornecida por $[P_m(x) - Q_n(x) F(x)]$ sejam identicamente nulos. Isto é, na expressão

$$P_m(x) - Q_n(x) F(x) = P_m(x) - Q_n(x) \left[\sum_{k=0}^m c_k x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^k \right]. \quad (7.41)$$

é necessário que

$$P_m(x) - Q_n(x) \sum_{k=0}^m c_k x^k = 0 \quad (7.42)$$

A aproximação de Padé para $F(x)$ não está diretamente ligada a um intervalo específico. Uma estimativa do erro cometido neste tipo de aproximação pode ser obtido considerando a equação (7.42) e rearranjando a equação (7.41). Assim o erro absoluto torna-se

$$\left| \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - F(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |c_k| |x|^k, \quad (7.43)$$

e o erro relativo



$$\left| \frac{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - F(x)}{F(x)} \right| = \left| \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k} \right| \leq \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} |c_k| |x|^k}{\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right|} \quad (7.44)$$

As informações constantes nas referências indicam que os melhores resultados são obtidos quando $m = n$ ou $m \approx n$.

7.7.4. Truncamento de Frações Continuadas.

É possível transformar uma série de potências em uma fração continuada infinita da seguinte forma:

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots}} - \frac{1}{c_0}} \quad (7.45a, e)$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{c_0} + \frac{x(c_0^* + c_1^* x + c_2^* x^2 + \dots)}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{c_0} + \frac{x}{\frac{c_0}{c_0^*} + \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots}{c_0^* + c_1^* x + c_2^* x^2 + \dots} - \frac{c_0}{c_0^*}}}$$

e assim por diante até obter-se uma expressão com a seguinte forma

$$F(x) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2 x}{b_2 + \frac{a_3 x}{b_3 + \dots}}} \quad (7.46)$$

onde as constantes a 's e b 's da equação (7.45) surgem em



consequência da manipulação algébrica que ocorre na sequência das equações (7.45a,c). A equação (7.46) assume aspecto especial quando $F(x)$ é função par

$$F(x) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2 x^2}{b_2 + \frac{a_3 x^2}{b_3 + \dots}}} \quad (7.47)$$

ou ímpar

$$F(x) = \frac{a_1 x}{b_1 + \frac{a_2 x^2}{b_2 + \frac{a_3 x^2}{b_3 + \dots}}}$$

Quando a equação (7.46) é truncada obtém-se uma fração continuada finita, que é uma aproximação para $F(x)$, assim

$$F(x) \approx R_n(x) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2 x}{b_2 + \frac{a_3 x}{b_3 + \dots + \frac{a_n x}{b_n}}}} \quad (7.49)$$

cujo erro absoluto torna-se $|R_n(x) - F(x)|$ e o relativo $|[R_n(x) - F(x)]/F(x)|$.

8. RESULTADOS E SUA ANÁLISE

Neste capítulo apresenta-se a aplicação da Teoria de Aproximação apresentada no Capítulo 7 para o cômputo das principais funções que aparecem na solução do problema-exemplo, Capítulo 6.

Do ponto de vista da obtenção de resultados quantitativos não existe diferença entre variável independente e parâmetros, uma vez que a cada um deve ser atribuído valores para efetuar-se a obtenção dos valores da variável dependente, assim, neste capítulo, parâmetros e variáveis independentes serão considerados equivalentes.

8.1. Rotinas Computacionais para o Cômputo de Funções Especiais.

Constata-se nas referências bibliográficas (BOSTEN & BATISTE, 1974), (BURGIONE, 1963), (CARLSON & NOTIS, 1981), (CHENEY, 1981), (COBB, 1969), (CODY, 1965, 1976 e 1983), (ECKHARDT, 1977 e 1980), (FIKE, 1968), (GAUTSCHI, 1964, 1969, 1970 E 1975), (HART et al., 1968), (IMSL, 1989) que geralmente apenas para as funções com uma variável independente são efetuadas aproximações do tipo MiniMax, para aquelas com duas ou mais variáveis independentes utiliza-se a respectiva série de potências (MacLaurin). Neste trabalho utiliza-se apenas a expansão em série uma vez que é a forma mais básica em que estas funções apresentam-se. Desenvolve-se rotinas computacionais, em linguagem Pascal, para o cômputo das funções especiais $\text{seno}(x)$, $\text{coseno}(x)$, $\ln(x)$, $\exp(x)$, $\text{si}(x)$, $M(\alpha, \gamma, x)$, $M^*(\alpha, \gamma, x)$, $Z_n(x)$, e $\sqrt{x}$.

No Apêndice apresenta-se a listagem computacional dos algoritmos implementados para cada função. Os vários algoritmos apresentados como estudo estão na forma de *PROCEDURE* e aqueles considerados mais adequados para utilização também são apresentados na forma de *FUNCTION*.

8.1.1. Rotinas para Cômputo da Função $\text{Exp}(x)$.

No cômputo da função $\exp(x)$ apresentam-se os principais fenômenos numéricos, por esta razão faz-se um estudo mais



detalhado deste caso, para deter-se, no caso de outras funções, apenas em outros aspectos que porventura apareçam.

De acordo com o apresentado no Capítulo 7 os erros produzidos ao introduzir-se no processo de cômputo uma função aproximante, bem como o uso de uma *quasi-álgebra* computacional são o de truncamento e o de arredondamento, em consequência deste último aparece também o cancelamento (CODY, 1976), que consiste no desaparecimento de algarismos significativos quando da adição de dois números com sinais opostos.

Em conformidade com a teoria de funções (MARKUSHEVICH, 1977) a função exponencial pode ser expressa pela seguinte série de potências

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \quad (8.1)$$

A equação (8.1) tal como apresentada é exata do ponto de vista da análise matemática, entretanto não pode ser utilizada de imediato por apresentar três dificuldades importantes:

- a) existência de um somatório infinito, o qual demandaria um tempo também infinito para sua execução;
- b) a operação de potenciação (x^n) que não é uma operação básica (adição, multiplicação, divisão);
- c) a operação fatorial ($n!$) que também não é uma operação básica.

Para evitar o somatório infinito, substitui-se a função exponencial por uma função aproximante

$$\exp(x) := \exp(N, x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} , \quad N \in \mathbb{N}, \quad (8.2)$$

onde o símbolo de igualdade ($:=$) indica a substituição da função exata pela função aproximante. Como a série (8.1) converge uniformemente para $x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) . \quad (8.3)$$

Pode-se também definir o erro absoluto de truncamento $E(N, x)$, cometido quando substitui-se a função exata pela aproximante, da seguinte forma

$$E(N, x) \equiv \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \quad (8.4)$$



Como a fórmula do erro (8.4) também envolve somatório infinito, somente poderá ser efetuado seu cômputo de maneira aproximada, assim

$$E(N, x) := E(N, M, x) = \left| \sum_{n=N+1}^M \frac{x^n}{n!} \right|, \quad M \in \mathbb{N} \text{ e } M > N+1. \quad (8.5)$$

Para eliminar a potenciação (x^n) e a operação fatorial existem dois procedimentos:

a) Definindo-se que

$$\exp(N, x) = \sum_{n=0}^N a_n, \quad a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad (8.6)$$

tem-se

$$a_n = \frac{x}{n} a_{n-1}, \quad a_0 = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (8.7)$$

Assim o cômputo de $\exp(N, x)$ reduz-se a um conjunto de adições, multiplicações e divisões;

b) A equação (8.2) pode ser re-escrita da seguinte maneira

$$\exp(N, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^N}{N!}, \quad (8.8)$$

colocando-se em evidência os termos comuns tem-se

$$\exp(N, x) = 1 + x \left\{ 1 + \frac{x}{2} \left[1 + \frac{x}{3} \left(1 + \dots \left(1 + \frac{x}{N} \right) \right) \right] \right\}, \quad (8.9)$$

a qual apresenta também apenas operações básicas.

As fórmulas (8.6) e (8.9) representam os dois principais algoritmos para efetuar-se o cômputo da função exponencial, bem como das outras funções, desde que devidamente adaptadas a cada caso.

Na Figura 8.1 apresenta-se a função $\exp(N, x)$ versus N para $x = 0.5, 1.0$ e 2.0 . Nota-se que para estes valores de x a série (8.6) converge para $N \leq 10$. Este converge anteriormente referido trata-se de uma impressão visual quando da inspeção da Figura 8.1. Para uma maior precisão pode-se calcular o erro de truncamento da função exponencial $\exp(x)$, $E(N, M, x)$ conforme observa-se na Figura 8.2. Naturalmente quanto menor o erro de truncamento desejado maior deverá ser a quantidade de termos (N) na série (8.6). Observa-se também das Figuras 8.1 e 2 que, em conformidade com a teoria de séries infinitas, a função exponencial aproximante $\exp(N, x)$ converge mais rapidamente para os menores valores de x .

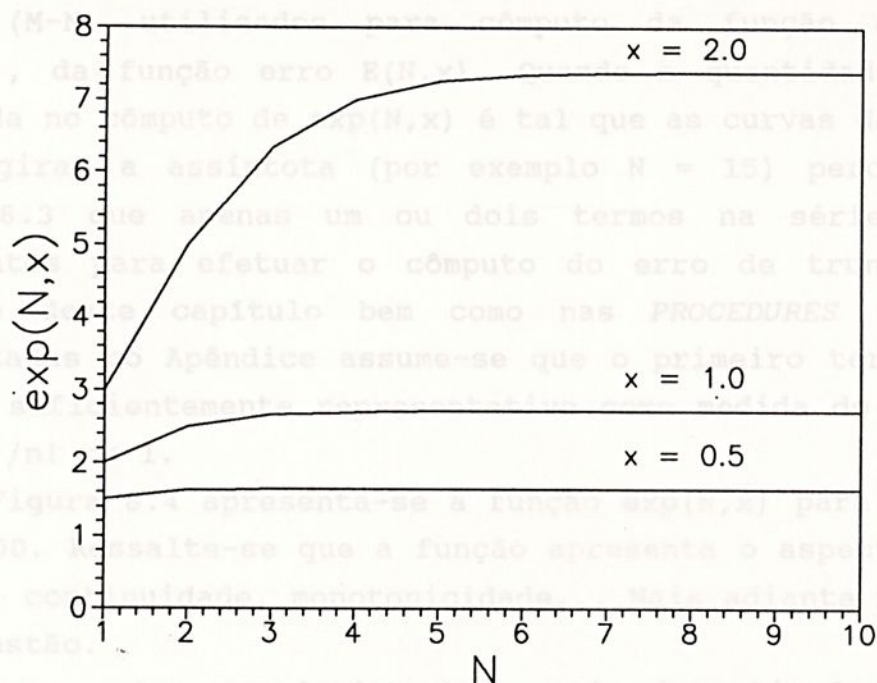


Figura 8.1 - Função exponencial $\exp(N,x)$ para $x = 0.5, 1.0$ e 2.0 .

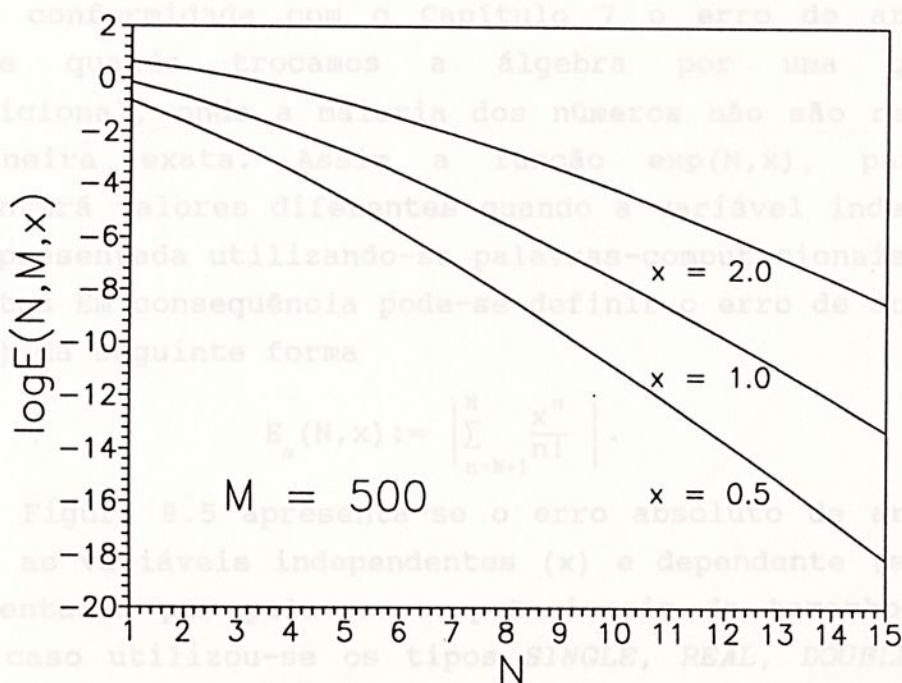


Figura 8.2 - Função erro de truncamento $E(N,M,x)$ associada à função exponencial $\exp(N,x)$ para $x = 0.5, 1.0$ e 2.0 ; com $M = 500$.

Na Figura 8.3 apresenta-se a influência da quantidade de termos $(M-N)$ utilizados para cômputo da função aproximante, $E(N,M,x)$, da função erro $E(N,x)$. Quando a quantidade de termos utilizada no cômputo de $\exp(N,x)$ é tal que as curvas da Figura 8.1 já atingiram a assíntota (por exemplo $N = 15$) percebe-se pela Figura 8.3 que apenas um ou dois termos na série (8.5) são suficientes para efetuar o cômputo do erro de truncamento. No restante deste capítulo bem como nas *PROCEDURES* e *FUNCTIONS* apresentadas no Apêndice assume-se que o primeiro termo da série (8.5) é suficientemente representativo como medida do erro, desde que $|x|^n/n! \ll 1$.

Na Figura 8.4 apresenta-se a função $\exp(N,x)$ para $x \in [21,25]$ e $N = 500$. Ressalte-se que a função apresenta o aspecto esperado, ou seja: continuidade, monotonicidade... Mais adiante retorna-se a esta questão.

O erro de arredondamento será investigado utilizando palavras-computacionais de diferentes tamanhos: 6 bytes (*REAL*), 8 bytes (*DOUBLE*) e 10 bytes (*EXTENDED*) do compilador Turbo Pascal 6.0.

Em conformidade com o Capítulo 7 o erro de arredondamento aparece quando trocamos a álgebra por uma *quasi-álgebra* computacional, onde a maioria dos números não são representáveis de maneira exata. Assim a função $\exp(N,x)$, para N fixo, apresentará valores diferentes quando a variável independente (x) for representada utilizando-se palavras-computacionais de tamanhos distintos. Em consequência pode-se definir o erro de arredondamento $E_a(N,x)$ da seguinte forma

$$E_a(N,x) := \left| \sum_{n=N+1}^M \frac{x^n}{n!} \right|. \quad (8.10)$$

Na Figura 8.5 apresenta-se o erro absoluto de arredondamento quando as variáveis independentes (x) e dependente ($\exp(N,x)$) são representadas por palavras-computacionais de tamanhos distintos, neste caso utilizou-se os tipos *SINGLE*, *REAL*, *DOUBLE* e *EXTENDED* disponíveis no compilador Turbo Pascal 6.0. Como a palavra *EXTENDED* é a maior entre as utilizadas, foi tomada como valor de referência, i.e., foi assumida como sendo o valor verdadeiro. De acordo com o esperado a palavra computacional *SINGLE* (a menor das



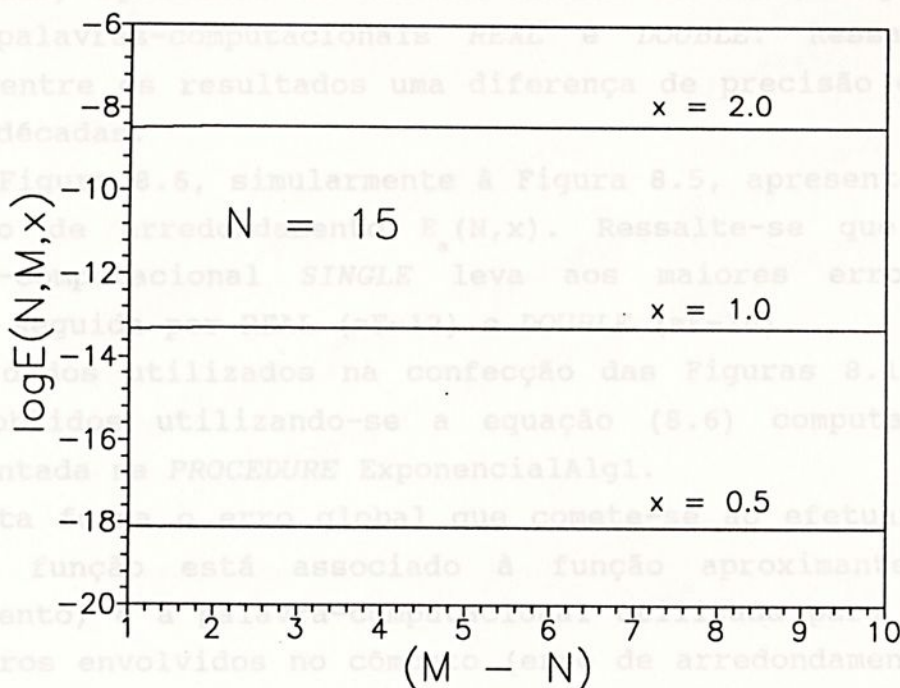


Figura 8.3 - Função erro de truncamento $E(N, M, x)$ associada à função exponencial $\exp(N, x)$ para $x = 0.5, 1.0$ e 2.0 ; com $N = 15$.

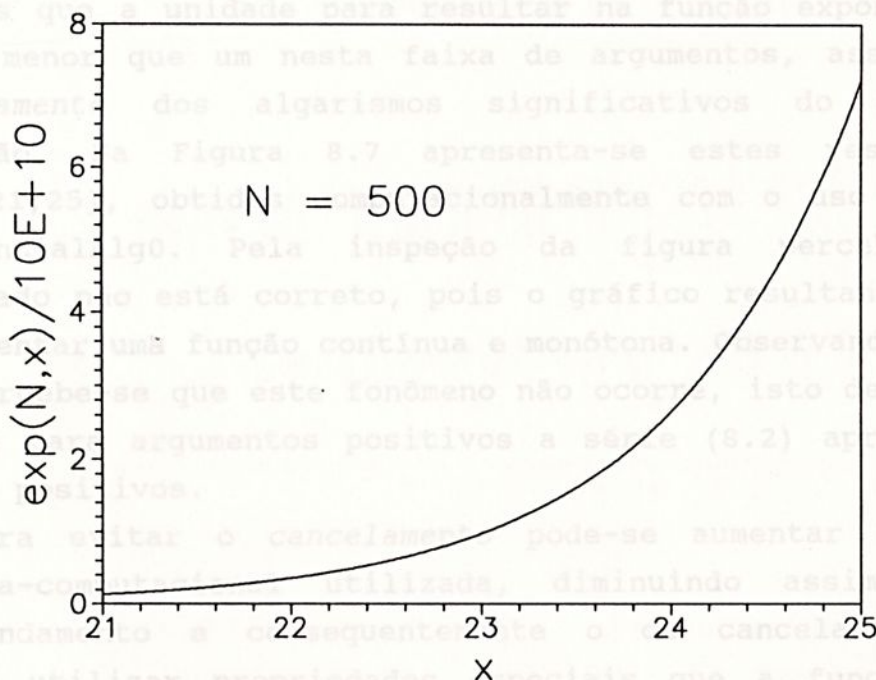


Figura 8.4 - Função exponencial $\exp(N, x)$ para $N = 500$.

utilizadas) apresenta os maiores níveis de erro, seguida depois pelas palavras-computacionais *REAL* e *DOUBLE*. Ressalte-se que existe entre os resultados uma diferença de precisão em torno de quatro décadas.

Na Figura 8.6, simularmente à Figura 8.5, apresenta-se o erro relativo de arredondamento $E_a(N,x)$. Ressalte-se que o uso da palavra-computacional *SINGLE* leva aos maiores erro relativos ($\approx E-8$), seguida por *REAL* ($\approx E-12$) e *DOUBLE* ($\approx E-16$).

Os dados utilizados na confecção das Figuras 8.1 a 6 foram todos obtidos utilizando-se a equação (8.6) computacionalmente implementada na *PROCEDURE* ExponencialAlg1.

Desta forma o erro global que comete-se ao efetuar o cômputo de uma função está associado à função aproximante (erro de truncamento) e à palavra-computacional utilizada para representar os números envolvidos no cômputo (erro de arredondamento). Assim, para obter-se um resultado acurado é necessário que os erros de truncamento e arredondamento sejam minimizados e mantidos sob restrito controle.

Para argumentos negativos a série (8.2) será do tipo alternante, ou seja, termos positivos intercalados por negativos. Quando $|x| \gg 1$ ocorrerá na série a subtração de números muito maiores que a unidade para resultar na função exponencial que é muito menor que um nesta faixa de argumentos, assim haverá um cancelamento dos algarismos significativos do resultado da operação. Na Figura 8.7 apresenta-se estes resultados para $x \in [21,25]$, obtidos computacionalmente com o uso da *PROCEDURE* ExponencialAlg0. Pela inspeção da figura percebe-se que o resultado não está correto, pois o gráfico resultante não parece representar uma função contínua e monótona. Observando-se a Figura 8.4 percebe-se que este fenômeno não ocorre, isto deve-se ao fato de que para argumentos positivos a série (8.2) apresenta apenas termos positivos.

Para evitar o cancelamento pode-se aumentar o tamanho da palavra-computacional utilizada, diminuindo assim o erro de arredondamento e consequentemente o de cancelamento; pode-se também utilizar propriedades especiais que a função em estudo possua. No caso da função exponencial utilizou-se para argumentos

single, real e double.



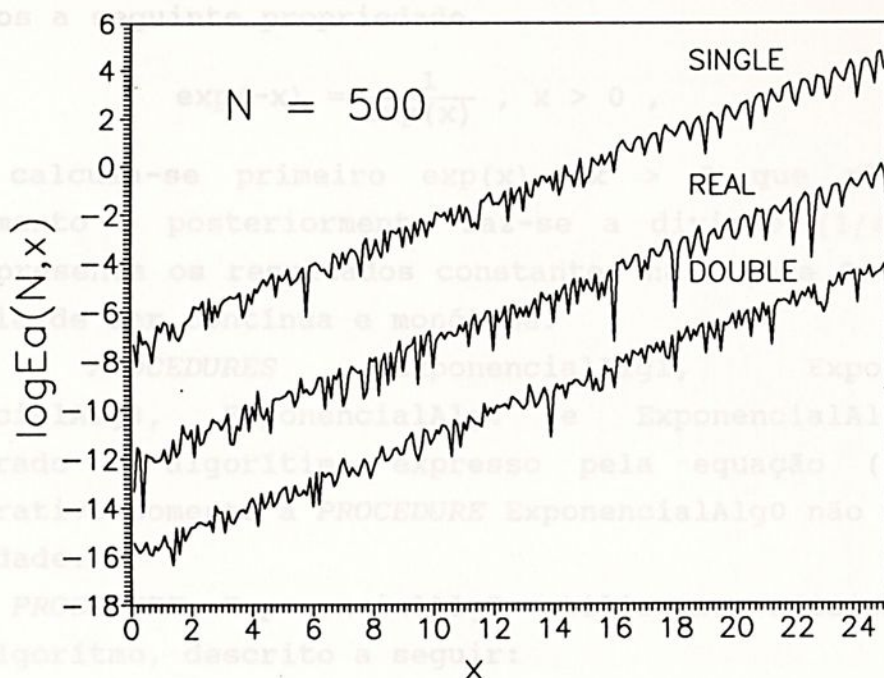


Figura 8.5 - Função erro de arredondamento $E_a(N,x)$ associada à
a seguinte propriedade avras

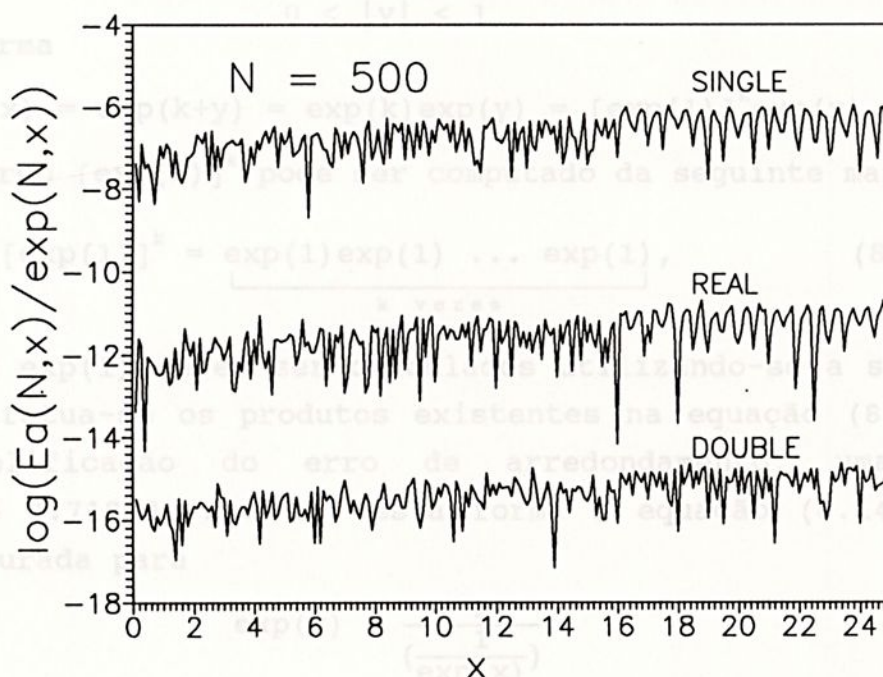


Figura 8.6 - Função erro de arredondamento relativo
 $E_a(N,x)/\exp(N,x)$ associada à função exponencial
 $\exp(N,x)$ para diferentes palavras computacionais:
single, *real* e *double*.

negativos a seguinte propriedade

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} , x > 0 , \quad (8.11)$$

assim, calcula-se primeiro $\exp(x)$, $x > 0$ que não apresenta cancelamento e posteriormente faz-se a divisão $(1/\exp(x))$, que então apresenta os resultados constantes na Figura 8.8 a qual tem aparência de ser contínua e monótona.

As *PROCEDURES* ExponencialAlg1, ExponencialAlg2, ExponencialAlg3, ExponencialAlg4 e ExponencialAlg5 possuem incorporado o algoritmo expresso pela equação (8.11). Como demonstrativo somente a *PROCEDURE* ExponencialAlg0 não utiliza esta propriedade.

Na *PROCEDURE* ExponencialAlg5 utiliza-se adicionalmente um outro algoritmo, descrito a seguir:

$$x = k + y, \quad (8.12)$$

onde k é a parte inteira de x e y a parte fracionária, a qual tem a seguinte propriedade

$$0 < |y| < 1 , \quad (8.13)$$

desta forma

$$\exp(x) = \exp(k+y) = \exp(k)\exp(y) = [\exp(1)]^k \exp(y). \quad (8.14)$$

O termo $[\exp(1)]^k$ pode ser computado da seguinte maneira

$$[\exp(1)]^k = \underbrace{\exp(1)\exp(1) \dots \exp(1)}_{k \text{ vezes}}, \quad (8.15)$$

$\exp(y)$ e $\exp(1)$ devem ser calculados utilizando-se a série (8.2). Quando efetua-se os produtos existentes na equação (8.15) haverá uma amplificação do erro de arredondamento, uma vez que $\exp(1) \approx 2.71828... > 1$, desta forma a equação (8.14) deve ser reestruturada para

$$\exp(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)}, \quad (8.16)$$

onde

$$\frac{1}{\exp(x)} = \left(\left(\frac{1}{\exp(y)} \right) \underbrace{\exp(1)/\dots/\exp(1)}_{k \text{ vezes}} \right) \quad (8.17)$$

As *PROCEDURES* ExponencialAlg0, ExponencialAlg1,

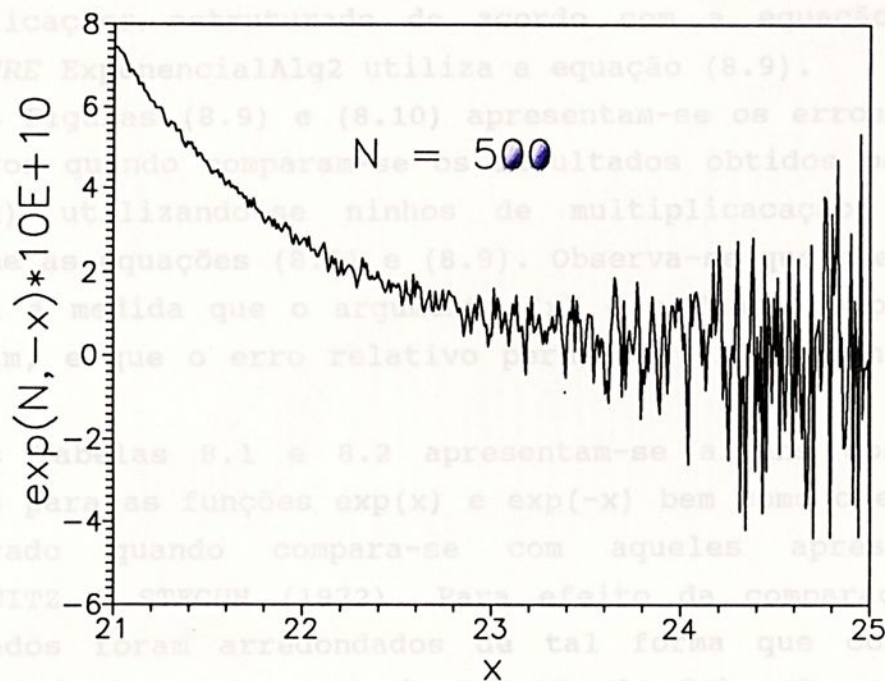


Figura 8.7 - Função exponencial $\exp(N, -x)$ para $N = 500$, mostrando o fenômeno numérico denominado cancelamento.

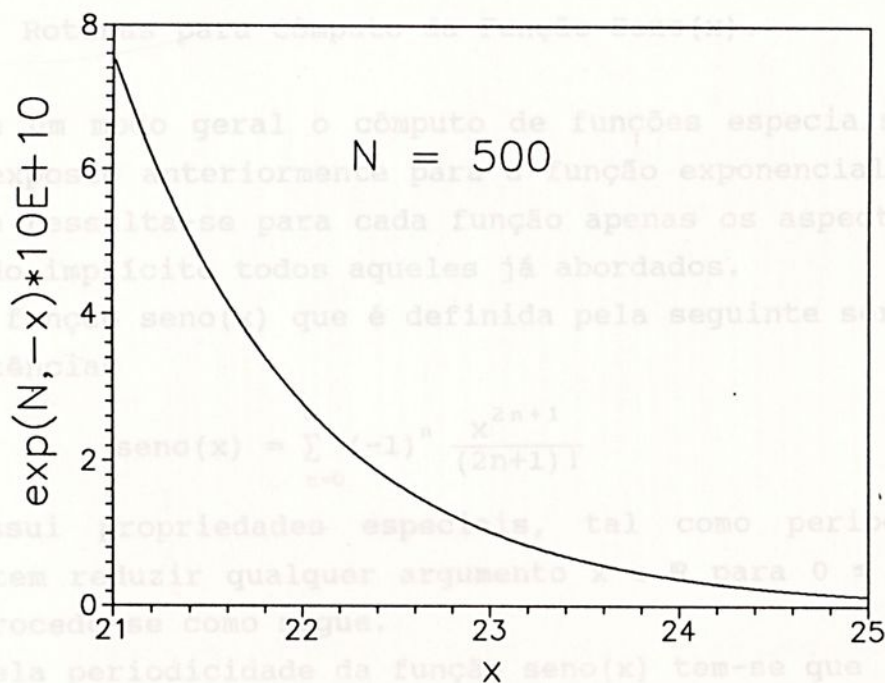


Figura 8.8 - Função exponencial $\exp(N, -x)$ para $N = 500$.

ExponencialAlg3 e ExponencialAlg4 efetuam o ninho de multiplicações estruturado de acordo com a equação (8.6) e a *PROCEDURE* ExponencialAlg2 utiliza a equação (8.9).

Nas Figuras (8.9) e (8.10) apresentam-se os erros absolutos e relativos quando comparam-se os resultados obtidos para a função $\exp(N,x)$ utilizando-se ninhos de multiplicação estruturados conforme as equações (8.6) e (8.9). Observa-se que o erro absoluto aumenta à medida que o argumento (x) e a função $\exp(N,x)$ também aumentam, e que o erro relativo permanece ligeiramente menor que $1E-18$.

Nas Tabelas 8.1 e 8.2 apresentam-se alguns dos resultados obtidos para as funções $\exp(x)$ e $\exp(-x)$ bem como o erro absoluto encontrado quando compara-se com aqueles apresentados por ABRAMOWITZ & STEGUN (1972). Para efeito da comparação ambos os resultados foram arredondados de tal forma que contivessem 17 casas decimais, o erro assim encontrado foi nulo para todos os valores apresentados. Para aumentar a quantidade de casas decimais corretas neste cômputo é necessário a utilização de palavras computacionais maiores (neste caso utilizou-se variável do tipo *EXTENDED*).

8.1.2. Rotinas para Cômputo da Função Seno(x).

De um modo geral o cômputo de funções especiais é feito tal como exposto anteriormente para a função exponencial, de agora em diante ressalta-se para cada função apenas os aspectos especiais, ficando implícito todos aqueles já abordados.

A função $\text{seno}(x)$ que é definida pela seguinte série alternante de potências

$$\text{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (8.18)$$

e possui propriedades especiais, tal como periodicidade, que permitem reduzir qualquer argumento $x \in \mathbb{R}$ para $0 \leq x \leq \pi/4$, para tal procede-se como segue.

Pela periodicidade da função $\text{seno}(x)$ tem-se que

$$\text{seno}(x) = \text{seno}(2\pi k + \varphi) = \text{seno}(\varphi) \quad (8.19)$$

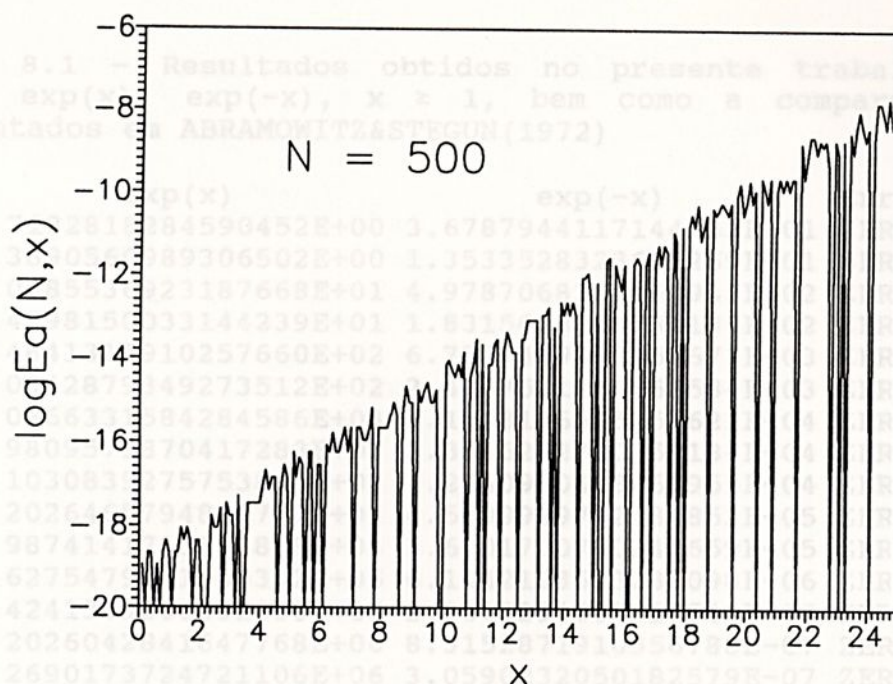


Figura 8.9 - Função erro de arredondamento $E_a(N,x)$ associada à função exponencial $\exp(N,x)$ utilizando ninhos de multiplicações de acordo com as equações (8.6) e (8.9).

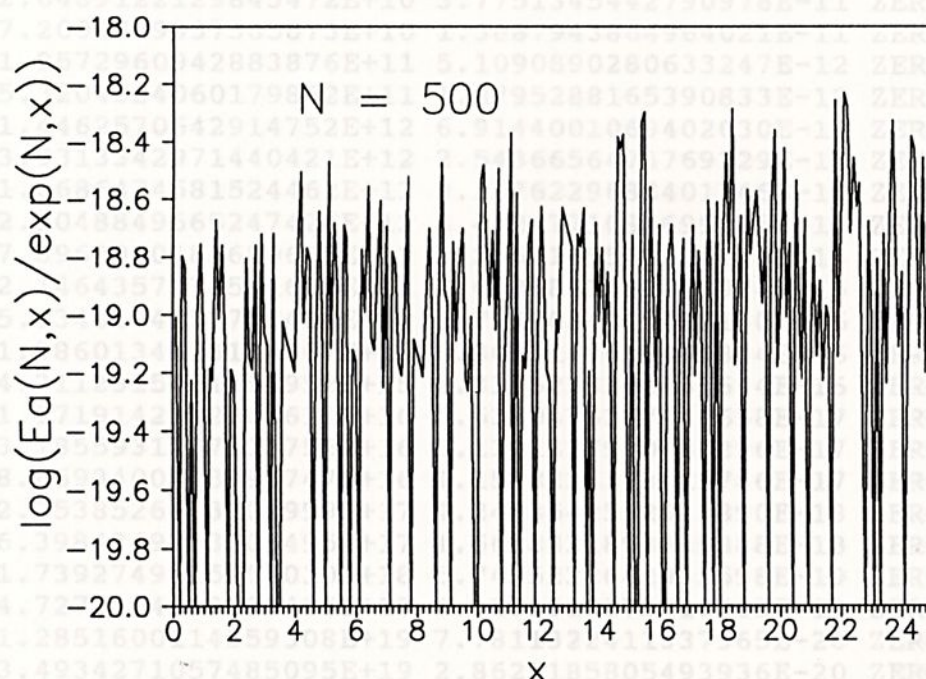


Figura 8.10 - Função erro de arredondamento relativo $E_a(N,x)/\exp(N,x)$ associada à função exponencial $\exp(N,x)$ utilizando ninhos de multiplicações de acordo com as equações (8.6) e (8.9).

Tabela 8.1 - Resultados obtidos no presente trabalho, para a função $\exp(x)$, $\exp(-x)$, $x \geq 1$, bem como a comparação com os apresentados em ABRAMOWITZ&STEGUN(1972)

x	$\exp(x)$	$\exp(-x)$	Erro *	Erro **
1	2.7182818284590452E+00	3.6787944117144232E-01	ZERO	ZERO
2	7.3890560989306502E+00	1.3533528323661269E-01	ZERO	ZERO
3	2.0085536923187668E+01	4.9787068367863943E-02	ZERO	ZERO
4	5.4598150033144239E+01	1.8315638888734180E-02	ZERO	ZERO
5	1.4841315910257660E+02	6.7379469990854671E-03	ZERO	ZERO
6	4.0342879349273512E+02	2.4787521766663584E-03	ZERO	ZERO
7	1.0966331584284586E+03	9.1188196555451621E-04	ZERO	ZERO
8	2.9809579870417283E+03	3.3546262790251184E-04	ZERO	ZERO
9	8.1030839275753840E+03	1.2340980408667955E-04	ZERO	ZERO
10	2.2026465794806717E+04	4.5399929762484852E-05	ZERO	ZERO
11	5.9874141715197818E+04	1.6701700790245659E-05	ZERO	ZERO
12	1.6275479141900392E+05	6.1442123533282098E-06	ZERO	ZERO
13	4.4241339200892050E+05	2.2603294069810543E-06	ZERO	ZERO
14	1.2026042841647768E+06	8.3152871910356788E-07	ZERO	ZERO
15	3.2690173724721106E+06	3.0590232050182579E-07	ZERO	ZERO
16	8.8861105205078726E+06	1.1253517471925911E-07	ZERO	ZERO
17	2.4154952753575298E+07	4.1399377187851667E-08	ZERO	ZERO
18	6.5659969137330511E+07	1.5229979744712628E-08	ZERO	ZERO
19	1.7848230096318726E+08	5.6027964375372675E-09	ZERO	ZERO
20	4.8516519540979028E+08	2.0611536224385578E-09	ZERO	ZERO
21	1.3188157344832147E+09	7.5825604279119067E-10	ZERO	ZERO
22	3.5849128461315916E+09	2.7894680928689248E-10	ZERO	ZERO
23	9.7448034462489026E+09	1.0261879631701890E-10	ZERO	ZERO
24	2.6489122129843472E+10	3.7751345442790978E-11	ZERO	ZERO
25	7.2004899337385873E+10	1.3887943864964021E-11	ZERO	ZERO
26	1.9572960942883876E+11	5.1090890280633247E-12	ZERO	ZERO
27	5.3204824060179862E+11	1.8795288165390833E-12	ZERO	ZERO
28	1.4462570642914752E+12	6.9144001069402030E-13	ZERO	ZERO
29	3.9313342971440421E+12	2.5436656473769229E-13	ZERO	ZERO
30	1.0686474581524462E+13	9.3576229688401746E-14	ZERO	ZERO
31	2.9048849665247425E+13	3.4424771084699765E-14	ZERO	ZERO
32	7.8962960182680695E+13	1.2664165549094176E-14	ZERO	ZERO
33	2.1464357978591606E+14	4.6588861451033974E-15	ZERO	ZERO
34	5.8346174252745488E+14	1.7139084315420130E-15	ZERO	ZERO
35	1.5860134523134307E+15	6.3051167601469894E-16	ZERO	ZERO
36	4.3112315471151952E+15	2.3195228302435694E-16	ZERO	ZERO
37	1.1719142372802611E+16	8.5330476257440658E-17	ZERO	ZERO
38	3.1855931757113756E+16	3.1391327920480296E-17	ZERO	ZERO
39	8.6593400423993747E+16	1.1548224173015786E-17	ZERO	ZERO
40	2.3538526683701999E+17	4.2483542552915890E-18	ZERO	ZERO
41	6.3984349353005495E+17	1.5628821893349888E-18	ZERO	ZERO
42	1.7392749415205010E+18	5.7495222642935598E-19	ZERO	ZERO
43	4.7278394682293466E+18	2.1151310375910805E-19	ZERO	ZERO
44	1.2851600114359308E+19	7.7811322411337965E-20	ZERO	ZERO
45	3.4934271057485095E+19	2.8625185805493936E-20	ZERO	ZERO
46	9.4961194206024489E+19	1.0530617357553812E-20	ZERO	ZERO
47	2.5813128861900674E+20	3.8739976286871871E-21	ZERO	ZERO
48	7.0167359120976317E+20	1.4251640827409351E-21	ZERO	ZERO
49	1.9073465724950997E+21	5.2428856633634639E-22	ZERO	ZERO
50	5.1847055285870725E+21	1.9287498479639178E-22	ZERO	ZERO

Erro* = Erro absoluto no cômputo de $\exp(x)$.

Erro** = Erro absoluto no cômputo de $\exp(-x)$.



Tabela 8.2 - Resultados obtidos no presente trabalho, para a função $\exp(x)$, $\exp(-x)$, $0 < x \leq 1$, bem como a comparação com os apresentados em ABRAMOWITZ&STEGUN(1972)

x	$\exp(x)$	$\exp(-x)$	Erro *	Erro **
2.0E-2	1.0202013400267558E+0	9.8019867330675530E-1	ZERO	ZERO
4.0E-2	1.0408107741923882E+0	9.6078943915232321E-1	ZERO	ZERO
6.0E-2	1.0618365465453596E+0	9.4176453358424871E-1	ZERO	ZERO
8.0E-2	1.0832870676749586E+0	9.2311634638663578E-1	ZERO	ZERO
1.0E-1	1.1051709180756476E+0	9.0483741803595957E-1	ZERO	ZERO
1.2E-1	1.1274968515793757E+0	8.8692043671715752E-1	ZERO	ZERO
1.4E-1	1.1502737988572273E+0	8.6935823539880582E-1	ZERO	ZERO
1.6E-1	1.1735108709918102E+0	8.5214378896621134E-1	ZERO	ZERO
1.8E-1	1.1972173631218102E+0	8.3527021141127202E-1	ZERO	ZERO
2.0E-1	1.2214027581601698E+0	8.1873075307798186E-1	ZERO	ZERO
2.2E-1	1.2460767305873808E+0	8.0251879796247848E-1	ZERO	ZERO
2.4E-1	1.2712491503214047E+0	7.8662786106655341E-1	ZERO	ZERO
2.6E-1	1.2969300866657718E+0	7.7105158580356628E-1	ZERO	ZERO
2.8E-1	1.3231298123374369E+0	7.5578374145572547E-1	ZERO	ZERO
3.0E-1	1.3498588075760031E+0	7.4081822068171787E-1	ZERO	ZERO
3.2E-1	1.3771277643359571E+0	7.2614903707369093E-1	ZERO	ZERO
3.4E-1	1.4049475905635938E+0	7.1177032276260972E-1	ZERO	ZERO
3.6E-1	1.4333294145603403E+0	6.9767632607103106E-1	ZERO	ZERO
3.8E-1	1.4622845894342245E+0	6.8386140921235586E-1	ZERO	ZERO
4.0E-1	1.4918246976412703E+0	6.7032004603563930E-1	ZERO	ZERO
4.2E-1	1.5219615556186338E+0	6.5704681981505678E-1	ZERO	ZERO
4.4E-1	1.5527072185113360E+0	6.4403642108314136E-1	ZERO	ZERO
4.6E-1	1.5840739849944818E+0	6.3128364550692597E-1	ZERO	ZERO
4.8E-1	1.6160744021928934E+0	6.1878339180614085E-1	ZERO	ZERO
5.0E-1	1.6487212707001281E+0	6.0653065971263342E-1	ZERO	ZERO
5.2E-1	1.6820276496988863E+0	5.9452054797019434E-1	ZERO	ZERO
5.4E-1	1.7160068621848585E+0	5.8274825237398967E-1	ZERO	ZERO
5.6E-1	1.7506725002961011E+0	5.7120906384881489E-1	ZERO	ZERO
5.8E-1	1.7860384307500734E+0	5.5989836656540203E-1	ZERO	ZERO
6.0E-1	1.8221188003905090E+0	5.4881163609402643E-1	ZERO	ZERO
6.2E-1	1.8589280418463420E+0	5.3794443759467449E-1	ZERO	ZERO
6.4E-1	1.8964808793049514E+0	5.2729242404304856E-1	ZERO	ZERO
6.6E-1	1.9347923344020315E+0	5.1685133449169924E-1	ZERO	ZERO
6.8E-1	1.9738777322304476E+0	5.0661699236558961E-1	ZERO	ZERO
7.0E-1	2.0137527074704765E+0	4.9658530379140952E-1	ZERO	ZERO
7.2E-1	2.0544332106438877E+0	4.8675225595997165E-1	ZERO	ZERO
7.4E-1	2.0959355144943646E+0	4.7711391552103439E-1	ZERO	ZERO
7.6E-1	2.1382762204968186E+0	4.6766642700990923E-1	ZERO	ZERO
7.8E-1	2.1814722654982011E+0	4.5840601130522355E-1	ZERO	ZERO
8.0E-1	2.2255409284924676E+0	4.4932896411722159E-1	ZERO	ZERO
8.2E-1	2.2704998375324058E+0	4.4043165450599926E-1	ZERO	ZERO
8.4E-1	2.3163669767810917E+0	4.3171052342907969E-1	ZERO	ZERO
8.6E-1	2.3631606937057949E+0	4.2316208231774882E-1	ZERO	ZERO
8.8E-1	2.4108997064172099E+0	4.1478291168158137E-1	ZERO	ZERO
9.0E-1	2.4596031111569497E+0	4.0656965974059911E-1	ZERO	ZERO
9.2E-1	2.5092903899362977E+0	3.9851904108451417E-1	ZERO	ZERO
9.4E-1	2.5599814183292715E+0	3.9062783535852110E-1	ZERO	ZERO
9.6E-1	2.6116964734231177E+0	3.8289288597511202E-1	ZERO	ZERO
9.8E-1	2.6644562419294171E+0	3.7531109885139954E-1	ZERO	ZERO
1.0E+0	2.7182818284590452E+0	3.6787944117144232E-1	ZERO	ZERO

Erro* = Erro absoluto no cômputo de $\exp(x)$.
 Erro** = Erro absoluto no cômputo de $\exp(-x)$.



onde k é a parte inteira de $(x/2\pi)$ e em consequência $\varphi = x - 2\pi k$, disto segue que $0 \leq \varphi < 2\pi$. Portanto o argumento (x) foi substituído por φ , fato este importante uma vez que a série (8.18) é alternante e haveria cancelamento para valores altos de (x) . Entretanto pode-se avançar mais, com os seguintes procedimentos:

a) Se $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$ e $\varphi^* = 2\pi - \varphi \Rightarrow 0 < \varphi^* \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{seno}(\varphi) = -\text{seno}(\varphi^*)$;

b) Se $\pi \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$ e $\varphi^* = \varphi - \pi \Rightarrow 0 \leq \varphi^* < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{seno}(\varphi) = -\text{seno}(\varphi^*)$;

c) Se $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$ e $\varphi^* = \pi - \varphi \Rightarrow 0 < \varphi^* \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{seno}(\varphi) = \text{seno}(\varphi^*)$;

com isto consegue-se reduzir qualquer argumento (x) a um argumento $\varphi^* \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Como no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ ainda existem argumentos maiores que a unidade, pode-se reduzir ainda mais estes valores. Para tal, faz-se:

a) Se $0 \leq \varphi^* \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{seno}(\varphi^*) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi^*)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; (8.20)

b) Se $\frac{\pi}{4} < \varphi^* \leq \frac{\pi}{2}$ e $\varphi^{**} = \varphi^* - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \varphi^{**} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{seno}(\varphi^*) = \text{coseno}(\varphi^{**}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi^{**})^{2n}}{(2n)!}$, (8.21)

desta forma o argumento final reduz-se ao intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, isto é, possui valores todos menores que a unidade, evitando assim dificuldades com arredondamentos e cancelamentos.

Utilizando-se as séries (8.20) e (8.21) implementou-se computacionalmente as *PROCEDURES* SenoAlg1, SenoAlg2, SenoAlg3, SenoAlg4 e a *FUNCTION* Seno, todas seguindo o mesmo procedimento descrito para a função exponencial.

Na Tabela 8.3 apresenta-se os resultados obtidos para as funções $\text{seno}(x)$ e $\text{coseno}(x)$, $0 < x < \pi/4$ bem como os erros absolutos calculados tomando-se como padrão de referência os apresentados em ABRAMOWITZ & STEGUN (1972). Para esta comparação todos os resultados foram reduzidos a 17 casas decimais e os erros encontrados foram nulos.

8.1.3. Rotina para Cômputo da Função $\sqrt{x}$.

Se $y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y^2 - x = 0$ ou $F(y) = 0$ para

Tabela 8.3 - Resultados obtidos no presente trabalho, para as funções seno(x), cosseno(x), $0 < x < \pi/4$, bem como a comparação com os apresentados em ABRAMOWITZ&STEGUN(1972)

x	seno(x)	cosseno(x)	Erro *	Erro **
1.50E-2	1.4999437506328091E-2	9.9988750210935918E-1	ZERO	ZERO
3.00E-2	2.9995500202495661E-2	9.9955003374898752E-1	ZERO	ZERO
4.50E-2	4.4984814037660236E-2	9.9898767084784241E-1	ZERO	ZERO
6.00E-2	5.9964006479444599E-2	9.9820053993520417E-1	ZERO	ZERO
7.50E-2	7.4929707272742342E-2	9.9718881811220745E-1	ZERO	ZERO
9.00E-2	8.9878549198011050E-2	9.9595273301199425E-1	ZERO	ZERO
1.05E-1	1.0480716882888249E-1	9.9449256274849744E-1	ZERO	ZERO
1.20E-1	1.1971220728891936E-1	9.9280863585386625E-1	ZERO	ZERO
1.35E-1	1.3459031100734831E-1	9.9090133120454796E-1	ZERO	ZERO
1.50E-1	1.4943813247359922E-1	9.8877107793604229E-1	ZERO	ZERO
1.65E-1	1.6425233099048097E-1	9.8641835534634770E-1	ZERO	ZERO
1.80E-1	1.7902957342582418E-1	9.8384369278812141E-1	ZERO	ZERO
1.95E-1	1.9376653496242193E-1	9.8104766954957725E-1	ZERO	ZERO
2.10E-1	2.0845989984609957E-1	9.7803091472414824E-1	ZERO	ZERO
2.25E-1	2.2310636213174545E-1	9.7479410706894328E-1	ZERO	ZERO
2.40E-1	2.3770262642713459E-1	9.7133797485202960E-1	ZERO	ZERO
2.55E-1	2.5224540863437806E-1	9.6766329568857557E-1	ZERO	ZERO
2.70E-1	2.6673143668883113E-1	9.6377089636589051E-1	ZERO	ZERO
2.85E-1	2.8115745129529402E-1	9.5966165265740111E-1	ZERO	ZERO
3.00E-1	2.9552020666133958E-1	9.5533648912560602E-1	ZERO	ZERO
3.15E-1	3.0981647122760285E-1	9.5079637891405326E-1	ZERO	ZERO
3.30E-1	3.2404302839486835E-1	9.4604234352838697E-1	ZERO	ZERO
3.45E-1	3.3819667724779127E-1	9.4107545260651300E-1	ZERO	ZERO
3.60E-1	3.5227423327508998E-1	9.3589682367793486E-1	ZERO	ZERO
3.75E-1	3.6627252908604756E-1	9.3050762191231429E-1	ZERO	ZERO
3.90E-1	3.8018841512316143E-1	9.2490905985731304E-1	ZERO	ZERO
4.05E-1	3.9401876037078043E-1	9.1910239716577473E-1	ZERO	ZERO
4.20E-1	4.0776045305957019E-1	9.1308894031230827E-1	ZERO	ZERO
4.35E-1	4.2141040136664805E-1	9.0687004229933662E-1	ZERO	ZERO
4.50E-1	4.3496553411123021E-1	9.0044710235267692E-1	ZERO	ZERO
4.65E-1	4.4842280144563443E-1	8.9382156560672059E-1	ZERO	ZERO
4.80E-1	4.6177917554148289E-1	8.8699492277928419E-1	ZERO	ZERO
4.95E-1	4.7503165127095080E-1	8.7996870983620423E-1	ZERO	ZERO
5.10E-1	4.8817724688290749E-1	8.7274450764575126E-1	ZERO	ZERO
5.25E-1	5.0121300467379785E-1	8.6532394162294128E-1	ZERO	ZERO
5.40E-1	5.1413599165311310E-1	8.5770868136382414E-1	ZERO	ZERO
5.55E-1	5.2694330020330136E-1	8.4990044026983150E-1	ZERO	ZERO
5.70E-1	5.3963204873396924E-1	8.4190097516226874E-1	ZERO	ZERO
5.85E-1	5.5219938233022761E-1	8.3371208588703757E-1	ZERO	ZERO
6.00E-1	5.6464247339503536E-1	8.2533561490967830E-1	ZERO	ZERO
6.15E-1	5.7695852228539679E-1	8.1677344690082286E-1	ZERO	ZERO
6.30E-1	5.8914475794226951E-1	8.0802750831215187E-1	ZERO	ZERO
6.45E-1	6.0119843851404104E-1	7.9909976694295114E-1	ZERO	ZERO
6.60E-1	6.1311685197343379E-1	7.8999223149736509E-1	ZERO	ZERO
6.75E-1	6.2489731672769984E-1	7.8070695113244687E-1	ZERO	ZERO
6.90E-1	6.3653718222196794E-1	7.7124601499710660E-1	ZERO	ZERO
7.05E-1	6.4803382953560720E-1	7.6161155176206170E-1	ZERO	ZERO
7.20E-1	6.5938467197147315E-1	7.5180572914089498E-1	ZERO	ZERO
7.35E-1	6.7058715563790375E-1	7.4183075340232819E-1	ZERO	ZERO
7.50E-1	6.8163876002333417E-1	7.3168886887382089E-1	ZERO	ZERO

Erro* = Erro absoluto no cômputo de seno(x).

Erro** = Erro absoluto no cômputo de cosseno(-x).



$$F(y) = y^2 - x. \quad (8.22)$$

Pela fórmula de Newton-Raphson tem-se

$$y^* = y - \frac{F(y)}{F'(y)}, \quad F'(y) = \frac{dF(y)}{dy}, \quad (8.23)$$

caso $\|y^* - y\| > \varepsilon > 0$ faz-se $y = y^*$ e retorna-se à fórmula (8.23) até que $\|y^* - y\| \leq \varepsilon$, onde ε é o máximo desvio permitido entre o valor semente y e o valor obtido y^* para a raiz quadrada de x . Este algoritmo está implementado na *PROCEDURE* RaizQuad.

8.1.4. Rotinas para Cômputo da Função $\ln(x)$.

A função $\ln(x)$ pode ser expressa pela série infinita de potências

$$\ln(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}{2n+1}, \quad x > 0 \quad (8.24)$$

a qual implementou-se computacionalmente nas rotinas LogEAlg1, LogEAlg2, LogEAlg3, LogEAlg4 e LogEAlg5, seguindo os mesmos passos descritos para a função exponencial.

Na Tabela 8.4 apresenta-se os resultados obtidos utilizando-se as rotinas RaizQuad e LogEAlg4, bem como sua comparação com os resultados apresentados em ABRAMOWITZ & STEGUN (1972).

8.1.5. Rotinas para Cômputo da Função Hipergeométrica Degenerada de Primeiro Tipo $M(\alpha, \gamma, x)$.

Todas funções apresentadas anteriormente neste capítulo (exceto a função raiz quadrada), embora tenham seu cômputo aqui efetuado utilizando-se série de potências é possível obter-se suas aproximações do tipo minimáx, bastando seguir os procedimentos apresentados no Capítulo 7. Isto deve-se ao fato de que estas funções apresentam apenas uma variável independente. Para aquelas que apresentam duas, três (como é o caso de $M(\alpha, \gamma, x)$) ou mais variáveis independentes não encontrou-se nas referências bibliográficas (LUKE, 1969), (CHENEY, 1966), (FIKE, 1968) e (GAUTSCHI, 1975) qualquer algoritmo que utilizasse aproximação minimáx, apenas outros tipos tal como série de potências, fração



Tabela 8.4 - Resultados obtidos no presente trabalho, para as funções $\sqrt{x}$ e $\ln(x)$, $2 \leq x \leq 97$, bem como a comparação com os apresentados em ABRAMOWITZ&STEGUN(1972)

x	$\sqrt{x}$	$\ln(x)$	Erro*	Erro**
2	1.4142135623730950	6.9314718055994531E-1	ZERO	ZERO
3	1.7320508075688773	1.0986122886681097	ZERO	ZERO
5	2.2360679774997897	1.6094379124341004	ZERO	ZERO
7	2.6457513110645906	1.9459101490553133	ZERO	ZERO
11	3.3166247903553998	2.3978952727983705	ZERO	ZERO
13	3.6055512754639893	2.5649493574615367	ZERO	ZERO
17	4.1231056256176605	2.8332133440562161	ZERO	ZERO
19	4.3588989435406736	2.9444389791664405	ZERO	ZERO
23	4.7958315233127195	3.1354942159291497	ZERO	ZERO
29	5.3851648071345040	3.3672958299864740	ZERO	ZERO
31	5.5677643628300219	3.4339872044851462	ZERO	ZERO
37	6.0827625302982197	3.6109179126442244	ZERO	ZERO
41	6.4031242374328487	3.7135720667043078	ZERO	ZERO
43	6.5574385243020007	3.7612001156935624	ZERO	ZERO
47	6.8556546004010441	3.8501476017100586	ZERO	ZERO
53	7.2801098892805183	3.9702919135521218	ZERO	ZERO
59	7.6811457478686082	4.0775374439057195	ZERO	ZERO
61	7.8102496759066544	4.1108738641733113	ZERO	ZERO
67	8.1853527718724500	4.2046926193909661	ZERO	ZERO
71	8.4261497731763586	4.2626798770413154	ZERO	ZERO
73	8.5440037453175312	4.2904594411483911	ZERO	ZERO
79	8.8881944173155889	4.3694478524670215	ZERO	ZERO
83	9.1104335791442989	4.4188406077965979	ZERO	ZERO
89	9.4339811320566038	4.4886363697321398	ZERO	ZERO
97	9.8488578017961047	4.5747109785033828	ZERO	ZERO

Erro* = Erro absoluto no cômputo da $\sqrt{x}$.
 Erro** = Erro absoluto no cômputo de $\ln(x)$.



racional finita, aproximação de Padé, e assim por diante. Mesmo a função de Bessel $J_n(x)$ é calculada utilizando-se série de potências associada com fórmulas de recorrência (OLVER & SOOKNE, 1972). Desta forma para o cômputo das funções hipergeométricas degeneradas de primeiro tipo, provavelmente o melhor método é o da série de potências truncada. Em conformidade com o Capítulo 4 tem-se

$$M(\alpha, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n x^n}{n! (\gamma)_n} \quad (8.25)$$

onde

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1), & n > 0; \end{cases}$$

$$(\gamma)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1), & n > 0. \end{cases}$$

Como a série (8.25) apresenta três variáveis independentes, seu comportamento é muito variado. Quando α , γ ou x forem negativos esta série será do tipo alternante e poderá ocorrer o fenômeno do cancelamento. Quando α , γ e x forem todos positivos a função será não alternante, não apresentando o cancelamento. Um outro agravante no cômputo $M(\alpha, \gamma, x)$ é o de não apresentar propriedades especiais simplificadoras como ocorre no caso das funções exponencial, seno e coseno. Ao longo do tempo vários autores (CONNOLLY, 1950), (MILLER, 1957) e (SLATER, 1953, 1954 e 1956) estudaram e efetuaram o cômputo desta função, cujos resultados estão consolidados em (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1972).

Utilizando-se da equação (8.25) e seguindo os procedimentos já mencionados neste capítulo elaborou-se as PROCEDURES HiperGeoDegPrimTipoAlg1, HiperGeoDegPrimTipoAlg2, HiperGeoDegTipoAlg3 e HiperGeoDegPrimTipoAlg4. Com a última delas efetuou-se o cômputo apresentado nas Tabelas (8.5) e (8.6) que apresentam um erro absoluto nulo quando comparados com os contidos em ABRAMOWITZ & STEGUN (1972). Deve-se ressaltar que os valores das variáveis independentes apresentados acima são pequenos, $|\alpha| \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $0 \leq x \leq 10$. No presente trabalho conseguiu-se obter resultados para valores um pouco maiores $\alpha \approx -50$, $x \approx 200$ e $\gamma = 1$. Para valores de $\alpha < 0$ e $\gamma, x > 0$, $M(\alpha, \gamma, x)$ é função oscilante, em conformidade com o Capítulo 3, e conseqüentemente a série que



Tabela 8.6 - Resultados obtidos no presente trabalho, para a

Tabela 8.5 - Resultados obtidos no presente trabalho, para a função $M(\alpha, \gamma, x)$, bem como a comparação com os apresentados em ABRAMOWITZ&STEGUN(1972)

α	$M(\alpha, 0.1, 10)$	$M(\alpha, 1, 10)$	Erro*	Erro**
α	$M(\alpha, 0.1, 0.1)$	$M(\alpha, 1, 0.1)$	Erro*	Erro**
-0.9	-9.5236434E-2	-9.0977221E-1	ZERO	ZERO
-1.0	-9.9000000E+1	-9.0000000E+0	ZERO	ZERO
-0.9	-2.6357295E+3	-5.2112129E+1	ZERO	ZERO
-0.8	-5.7432145E+3	-1.0277290E+2	ZERO	ZERO
-0.7	-9.2941429E+3	-1.5859675E+2	ZERO	ZERO
-0.6	-1.3047307E+4	-2.1556045E+2	ZERO	ZERO
-0.5	-1.6608619E+4	-2.6750359E+2	ZERO	ZERO
-0.4	-1.9382990E+4	-3.0552211E+2	ZERO	ZERO
-0.3	-2.0515393E+4	-3.1723675E+2	ZERO	ZERO
-0.2	-1.8819187E+4	-2.8591568E+2	ZERO	ZERO
-0.1	-1.2689482E+4	-1.8942782E+2	ZERO	ZERO
0.0	1.0000000E+0	1.0000000E+0	ZERO	ZERO
0.1	2.2026466E+4	3.2225243E+2	ZERO	ZERO
0.2	5.6956319E+4	8.2105588E+2	ZERO	ZERO
0.3	1.0933093E+5	1.5560088E+3	ZERO	ZERO
0.4	1.8486924E+5	2.5999559E+3	ZERO	ZERO
0.5	2.9071300E+5	4.0427554E+3	ZERO	ZERO
0.6	4.3571328E+5	5.9944962E+3	ZERO	ZERO
0.7	6.3076547E+5	8.5892262E+3	ZERO	ZERO
0.8	8.8919975E+5	1.1989263E+4	ZERO	ZERO
0.9	1.2272353E+6	1.6390169E+4	ZERO	ZERO
1.0	1.6645066E+6	2.2026466E+4	ZERO	ZERO

Erro* = Erro absoluto no cômputo de $M(\alpha, 1, 0.1)$

Erro* = Erro absoluto no cômputo da $M(\alpha, 0.1, 10)$

Erro** = Erro absoluto no cômputo de $M(\alpha, 1, 10)$



representa esta função deve ser alternante, assim ocorrerá, para

Tabela 8.6 - Resultados obtidos no presente trabalho, para a função $M(\alpha, \gamma, x)$, bem como a comparação com os apresentados em ABRAMOWITZ&STEGUN(1972)

Tod α	$M(\alpha, 0.1, 10)$	$M(\alpha, 1, 10)$	Erro*	Erro**
-1.0	0.0000000E+0	9.0000000E-1	ZERO	ZERO
-0.9	9.5836434E-2	9.0977221E-1	ZERO	ZERO
-0.8	1.9258625E-1	9.1959459E-1	ZERO	ZERO
-0.7	2.9025386E-1	9.2946731E-1	ZERO	ZERO
-0.6	3.8884371E-1	9.3939052E-1	ZERO	ZERO
-0.5	4.8836025E-1	9.4936442E-1	ZERO	ZERO
-0.4	5.8880794E-1	9.5938916E-1	ZERO	ZERO
-0.3	6.9019126E-1	9.6946491E-1	ZERO	ZERO
-0.2	7.9251470E-1	9.7959186E-1	ZERO	ZERO
-0.1	8.9578277E-1	9.8977016E-1	ZERO	ZERO
0.0	1.0000000E+0	1.0000000E+0	ZERO	ZERO
0.1	1.1051709E+0	1.0102815E+0	ZERO	ZERO
0.2	1.2113001E+0	1.0206150E+0	ZERO	ZERO
0.3	1.3183921E+0	1.0310004E+0	ZERO	ZERO
0.4	1.4264514E+0	1.0414381E+0	ZERO	ZERO
0.5	1.5354828E+0	1.0519282E+0	ZERO	ZERO
0.6	1.6454907E+0	1.0624709E+0	ZERO	ZERO
0.7	1.7564799E+0	1.0730664E+0	ZERO	ZERO
0.8	1.8684549E+0	1.0837147E+0	ZERO	ZERO
0.9	1.9814205E+0	1.0944162E+0	ZERO	ZERO
1.0	2.0953812E+0	1.1051709E+0	ZERO	ZERO

Erro* = Erro absoluto no cômputo da $M(\alpha, 0.1, 0.1)$

Erro** = Erro absoluto no cômputo de $M(\alpha, 1, 0.1)$

8.3. Cômputo das Grandezas Físicas de Interesse.

Em convecção forçada em dutos as principais grandezas físicas de interesse são: Temperatura média adimensional, Número de Nusselt local, Número de Nusselt médio, e o Número Incremental de Transferência de Calor.



representa esta função deve ser alternante, assim ocorrerá, para $|\alpha| \gg 1$, com bastante intensidade o fenômeno do cancelamento.

8.1.6. Rotinas para Cômputo de Outras Funções Especiais.

Todas as rotinas de cômputo das funções especiais utilizadas neste trabalho foram desenvolvidas pelo autor e suas listagens estão contidas no Anexo. Algumas já foram descritas sucintamente nos itens anteriores, algumas outras que não serão descritas foram desenvolvidas da mesma maneira que as anteriores, exceto a função senointegral, equação (6.104), cujo algoritmo de implementação computacional foi o método de Simpson (RICE, 1985).

8.2. Obtenção dos Autovalores

Para obtenção dos autovalores associados à equação (6.70) e suas condições de contorno (6.71) basta resolver a equação transcendental (6.75). Utilizou-se para este fim uma combinação do método bisecção com o método da *regula falsi* (RICE, 1985). Outros enfoques na obtenção de autovalores podem ser encontrados em ABRAMOWITZ (1953), MIKHAILOV et al. (1983), MIKHAILOV & VULCHANOV (1983), MIKHAILOV & OZISIK (1984).

Na Tabela 8.7 apresenta-se os primeiros 50 autovalores calculados neste trabalho. Vale ressaltar que o espaçamento assintótico entre dois autovalores consecutivos, em conformidade com o Capítulo 3, é igual a 4. Adicionalmente, para efeito comparativo apresenta-se os autovalores calculados por BROWN (1960), DREW (1931), GRAETZ (1885) e NUSSELT (1910).

Os autovalores associados à equação (6.91) e suas condições de contorno (6.92) são de cômputo imediato e estão representados na equação (6.96).

8.3. Cômputo das Grandezas Físicas de Interesse.

Em convecção forçada em dutos as principais grandezas físicas de interesse são: Temperatura média adimensional, Número de Nusselt local, Número de Nusselt médio, e o Número Incremental de Transferência de Calor.



Tabela 8.7 Comparação dos autovalores obtidos neste trabalho, através da solução da equação transcendental (6.75), com alguns dos existentes na literatura.

	Este trabalho	BROWN* ¹	DREW* ²	NUSSELT* ³	GRAETZ* ⁴
1	2.704364419882532	2.7043644199	2.70436	2.705	2.7043
2	6.679031449346628	6.6790314493	6.6791	6.66	6.50
3	10.673379538053736	10.6733795381		10.3	
4	14.671078462736212	14.6710784627			
5	18.669871864451221	18.6698718645			
6	22.669143358837331	22.6691433588			
7	26.668661996011462	26.6686619960			
8	30.668323340917540	30.6683233409			
9	34.668073822433781	34.6680738224			
10	38.667883346859788	38.6678833469			
11	42.667733805542027				
12	46.667613697816158				
13	50.667515395097242				
14	54.667433652680136				
15	58.667364754870237				
16	62.667306001107584				
17	66.667255384965453				
18	70.667211386910968				
19	74.667172836628970				
20	78.667138819238431				
21	82.667108609977976				
22	86.667081627813180				
23	90.667057401896991				
24	94.667035546933447				
25	98.667015744818484				
26	102.666997730777886				
27	106.666981282774347				
28	110.666966213323185				
29	114.666952363104613				
30	118.666939595931083				
31	122.666927794748189				
32	126.666916858430359				
33	130.666906699193549				
34	134.666897240494750				
35	138.666888415311013				
36	142.666880164719655				
37	146.666872436726517				
38	150.666865185302487				
39	154.666858369549068				
40	158.666851953028477				
41	162.666845903120160				
42	166.666840190641198				
43	170.666834789377897				
44	174.666829675718585				
45	178.666824827736335				
46	182.666820226066929				
47	186.666815852576117				
48	190.666811694104406				
49	194.666807738327526				
50	198.666803970264737				

*1 BROWN(1960)
*2 DREW(1931)
*3 NUSSELT(1910)
*4 GRAETZ(1885)



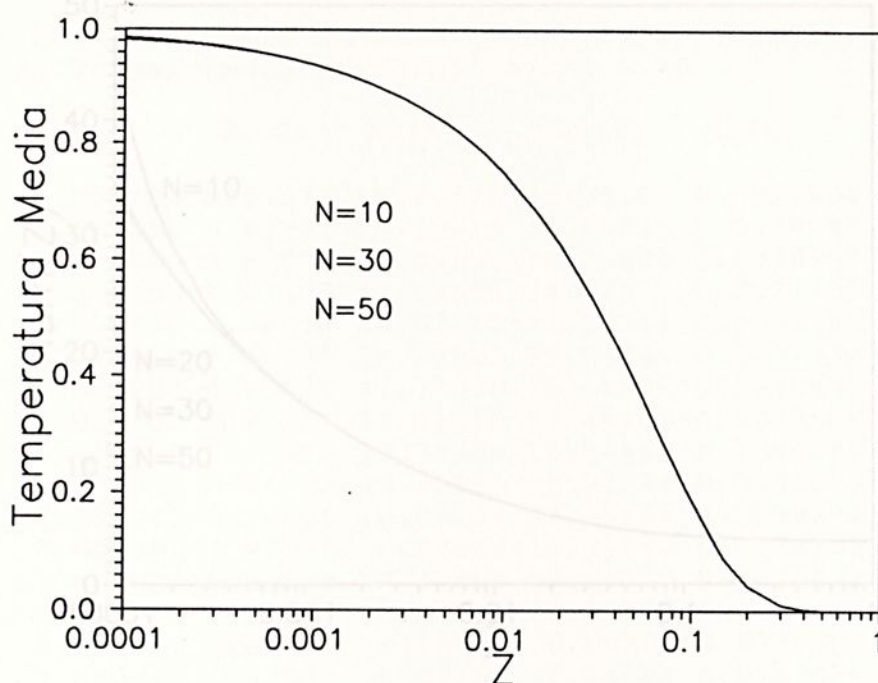


Figura 8.11 - Temperatura média adimensional, $\Theta_m(Z)$, obtida através da equação (6.87), para $N = 10, 30$ e 50 .

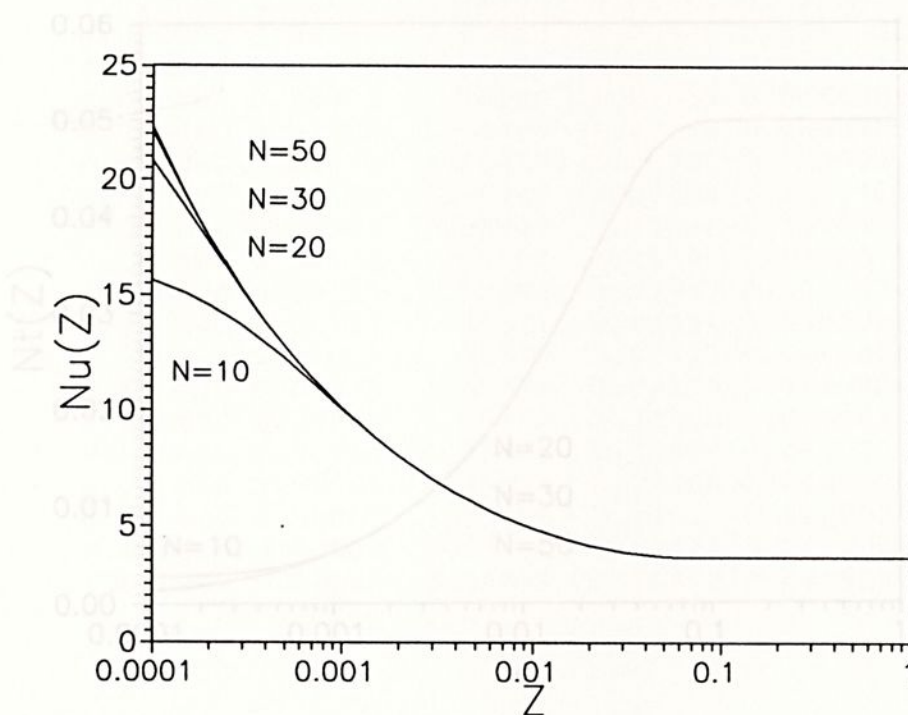


Figura 8.12 - Número de Nusselt local, $Nu(Z)$, obtido através da equação (6.88), para $N = 10, 20, 30$ e 50 .

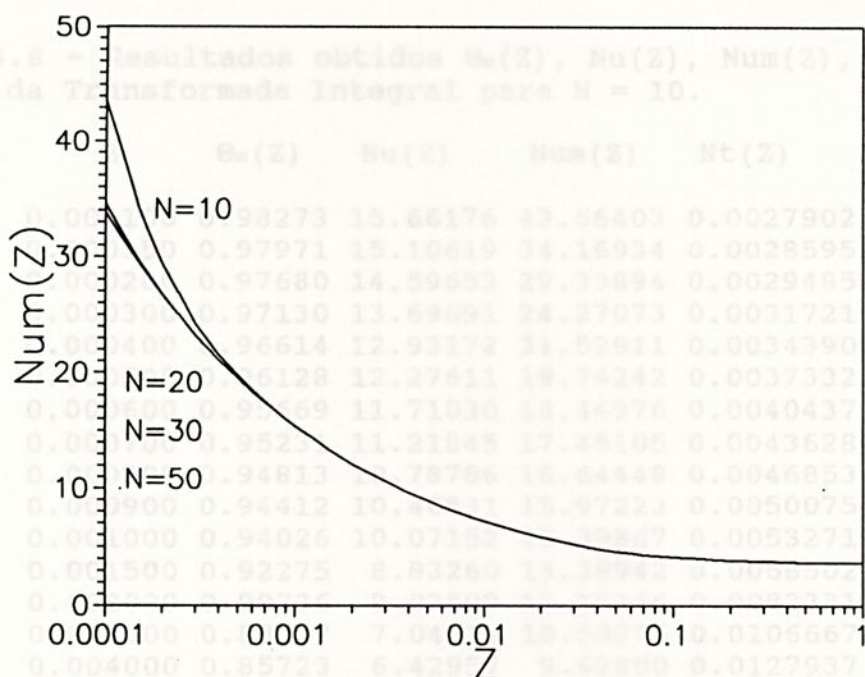


Figura 8.13 - Número de Nusselt médio, $Nu_m(Z)$, obtido através da equação (6.89b), para $N = 10, 20, 30$ e 50 .

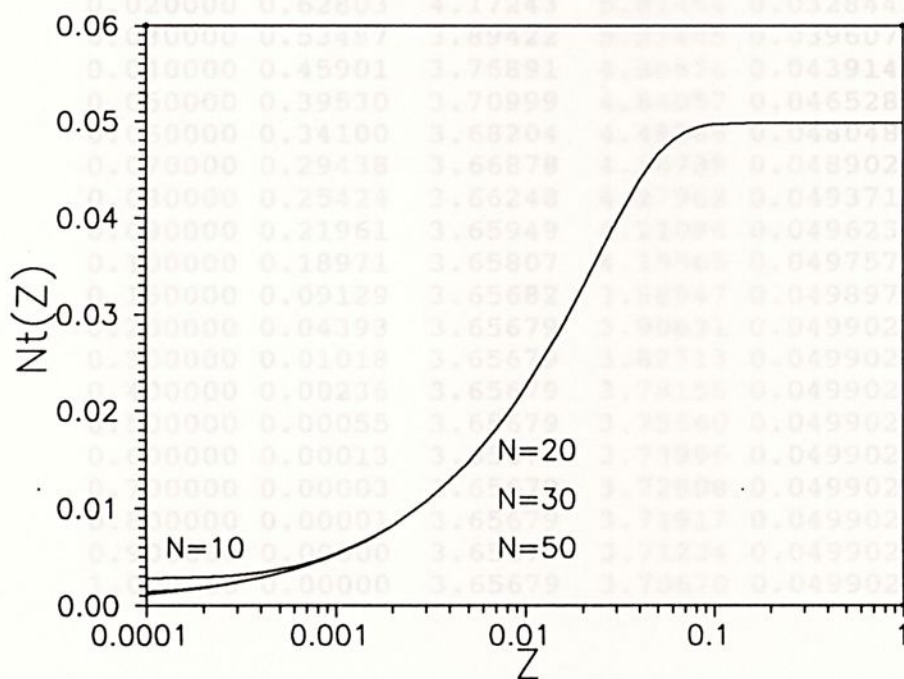


Figura 8.14 - Número Incremental de transferência de calor, $Nt(Z)$, obtido através da equação $Nt(Z) = [Nu_m(Z) - Nu(Z)]Z$, para $N = 10, 20, 30$ e 50 .

Tabela 8.8 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral para $N = 10$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
0.000100	0.98273	15.66176	43.56403	0.0027902
0.000150	0.97971	15.10619	34.16934	0.0028595
0.000200	0.97680	14.59652	29.33894	0.0029485
0.000300	0.97130	13.69691	24.27073	0.0031721
0.000400	0.96614	12.93172	21.52911	0.0034390
0.000500	0.96128	12.27611	19.74242	0.0037332
0.000600	0.95669	11.71030	18.44976	0.0040437
0.000700	0.95231	11.21845	17.45105	0.0043628
0.000800	0.94813	10.78786	16.64448	0.0046853
0.000900	0.94412	10.40831	15.97223	0.0050075
0.001000	0.94026	10.07152	15.39867	0.0053271
0.001500	0.92275	8.83260	13.39942	0.0068502
0.002000	0.90736	8.03509	12.15166	0.0082331
0.003000	0.88057	7.04319	10.59876	0.0106667
0.004000	0.85723	6.42957	9.62800	0.0127937
0.005000	0.83622	6.00152	8.94324	0.0147086
0.006000	0.81693	5.68118	8.42509	0.0164635
0.007000	0.79899	5.43015	8.01450	0.0180905
0.008000	0.78215	5.22694	7.67834	0.0196112
0.009000	0.76623	5.05843	7.39632	0.0210411
0.010000	0.75111	4.91606	7.15522	0.0223916
0.015000	0.68436	4.44059	6.32109	0.0282074
0.020000	0.62803	4.17243	5.81464	0.0328441
0.030000	0.53487	3.89422	5.21445	0.0396072
0.040000	0.45901	3.76891	4.86676	0.0439140
0.050000	0.39530	3.70999	4.64057	0.0465289
0.060000	0.34100	3.68204	4.48286	0.0480487
0.070000	0.29438	3.66878	4.36739	0.0489029
0.080000	0.25424	3.66248	4.27962	0.0493714
0.090000	0.21961	3.65949	4.21086	0.0496235
0.100000	0.18971	3.65807	4.15565	0.0497573
0.150000	0.09129	3.65682	3.98947	0.0498974
0.200000	0.04393	3.65679	3.90631	0.0499023
0.300000	0.01018	3.65679	3.82313	0.0499024
0.400000	0.00236	3.65679	3.78155	0.0499024
0.500000	0.00055	3.65679	3.75660	0.0499024
0.600000	0.00013	3.65679	3.73996	0.0499024
0.700000	0.00003	3.65679	3.72808	0.0499024
0.800000	0.00001	3.65679	3.71917	0.0499024
0.900000	0.00000	3.65679	3.71224	0.0499024
1.000000	0.00000	3.65679	3.70670	0.0499024



Tabela 8.9 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral para $N = 20$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
0.000100	0.98626	20.80672	34.59530	0.0013789
0.000150	0.98237	18.82961	29.65355	0.0016236
0.000200	0.97883	17.33253	26.75223	0.0018839
0.000300	0.97250	15.23387	23.23653	0.0024008
0.000400	0.96688	13.83298	21.05027	0.0028869
0.000500	0.96175	12.82216	19.50080	0.0033393
0.000600	0.95698	12.04941	18.32067	0.0037628
0.000700	0.95250	11.43305	17.37923	0.0041623
0.000800	0.94826	10.92566	16.60328	0.0045421
0.000900	0.94420	10.49781	15.94803	0.0049052
0.001000	0.94032	10.13019	15.38419	0.0052540
0.001500	0.92276	8.84037	13.39808	0.0068366
0.002000	0.90736	8.03621	12.15151	0.0082306
0.003000	0.88057	7.04322	10.59876	0.0106666
0.004000	0.85723	6.42957	9.62800	0.0127937
0.005000	0.83622	6.00152	8.94324	0.0147086
0.006000	0.81693	5.68118	8.42509	0.0164635
0.007000	0.79899	5.43015	8.01450	0.0180905
0.008000	0.78215	5.22694	7.67834	0.0196112
0.009000	0.76623	5.05843	7.39632	0.0210411
0.010000	0.75111	4.91606	7.15522	0.0223916
0.015000	0.68436	4.44059	6.32109	0.0282074
0.020000	0.62803	4.17243	5.81464	0.0328441
0.030000	0.53487	3.89422	5.21445	0.0396072
0.040000	0.45901	3.76891	4.86676	0.0439140
0.050000	0.39530	3.70999	4.64057	0.0465289
0.060000	0.34100	3.68204	4.48286	0.0480487
0.070000	0.29438	3.66878	4.36739	0.0489029
0.080000	0.25424	3.66248	4.27962	0.0493714
0.090000	0.21961	3.65949	4.21086	0.0496235
0.100000	0.18971	3.65807	4.15565	0.0497573
0.150000	0.09129	3.65682	3.98947	0.0498974
0.200000	0.04393	3.65679	3.90631	0.0499023
0.300000	0.01018	3.65679	3.82313	0.0499024
0.400000	0.00236	3.65679	3.78155	0.0499024
0.500000	0.00055	3.65679	3.75660	0.0499024
0.600000	0.00013	3.65679	3.73996	0.0499024
0.700000	0.00003	3.65679	3.72808	0.0499024
0.800000	0.00001	3.65679	3.71917	0.0499024
0.900000	0.00000	3.65679	3.71224	0.0499024
1.000000	0.00000	3.65679	3.70670	0.0499024



Tabela 8.10 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral para $N = 30$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
0.000100	0.98655	22.08171	33.86463	0.0011783
0.000150	0.98249	19.35111	29.44648	0.0015143
0.000200	0.97888	17.55369	26.68422	0.0018261
0.000300	0.97251	15.27709	23.22723	0.0023850
0.000400	0.96688	13.84210	21.04875	0.0028827
0.000500	0.96175	12.82418	19.50052	0.0033382
0.000600	0.95698	12.04988	18.32062	0.0037624
0.000700	0.95250	11.43316	17.37921	0.0041622
0.000800	0.94826	10.92568	16.60328	0.0045421
0.000900	0.94420	10.49781	15.94803	0.0049052
0.001000	0.94032	10.13019	15.38419	0.0052540
0.001500	0.92276	8.84037	13.39808	0.0068366
0.002000	0.90736	8.03621	12.15151	0.0082306
0.003000	0.88057	7.04322	10.59876	0.0106666
0.004000	0.85723	6.42957	9.62800	0.0127937
0.005000	0.83622	6.00152	8.94324	0.0147086
0.006000	0.81693	5.68118	8.42509	0.0164635
0.007000	0.79899	5.43015	8.01450	0.0180905
0.008000	0.78215	5.22694	7.67834	0.0196112
0.009000	0.76623	5.05843	7.39632	0.0210411
0.010000	0.75111	4.91606	7.15522	0.0223916
0.015000	0.68436	4.44059	6.32109	0.0282074
0.020000	0.62803	4.17243	5.81464	0.0328441
0.030000	0.53487	3.89422	5.21445	0.0396072
0.040000	0.45901	3.76891	4.86676	0.0439140
0.050000	0.39530	3.70999	4.64057	0.0465289
0.060000	0.34100	3.68204	4.48286	0.0480487
0.070000	0.29438	3.66878	4.36739	0.0489029
0.080000	0.25424	3.66248	4.27962	0.0493714
0.090000	0.21961	3.65949	4.21086	0.0496235
0.100000	0.18971	3.65807	4.15565	0.0497573
0.150000	0.09129	3.65682	3.98947	0.0498974
0.200000	0.04393	3.65679	3.90631	0.0499023
0.300000	0.01018	3.65679	3.82313	0.0499024
0.400000	0.00236	3.65679	3.78155	0.0499024
0.500000	0.00055	3.65679	3.75660	0.0499024
0.600000	0.00013	3.65679	3.73996	0.0499024
0.700000	0.00003	3.65679	3.72808	0.0499024
0.800000	0.00001	3.65679	3.71917	0.0499024
0.900000	0.00000	3.65679	3.71224	0.0499024
1.000000	0.00000	3.65679	3.70670	0.0499024



Tabela 8.11 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral para $N = 40$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
0.000100	0.98657	22.26348	33.81283	0.0011549
0.000150	0.98249	19.38246	29.44032	0.0015087
0.000200	0.97888	17.55942	26.68335	0.0018248
0.000300	0.97251	15.27730	23.22721	0.0023850
0.000400	0.96688	13.84211	21.04875	0.0028827
0.000500	0.96175	12.82418	19.50052	0.0033382
0.000600	0.95698	12.04988	18.32062	0.0037624
0.000700	0.95250	11.43316	17.37921	0.0041622
0.000800	0.94826	10.92568	16.60328	0.0045421
0.000900	0.94420	10.49781	15.94803	0.0049052
0.001000	0.94032	10.13019	15.38419	0.0052540
0.001500	0.92276	8.84037	13.39808	0.0068366
0.002000	0.90736	8.03621	12.15151	0.0082306
0.003000	0.88057	7.04322	10.59876	0.0106666
0.004000	0.85723	6.42957	9.62800	0.0127937
0.005000	0.83622	6.00152	8.94324	0.0147086
0.006000	0.81693	5.68118	8.42509	0.0164635
0.007000	0.79899	5.43015	8.01450	0.0180905
0.008000	0.78215	5.22694	7.67834	0.0196112
0.009000	0.76623	5.05843	7.39632	0.0210411
0.010000	0.75111	4.91606	7.15522	0.0223916
0.015000	0.68436	4.44059	6.32109	0.0282074
0.020000	0.62803	4.17243	5.81464	0.0328441
0.030000	0.53487	3.89422	5.21445	0.0396072
0.040000	0.45901	3.76891	4.86676	0.0439140
0.050000	0.39530	3.70999	4.64057	0.0465289
0.060000	0.34100	3.68204	4.48286	0.0480487
0.070000	0.29438	3.66878	4.36739	0.0489029
0.080000	0.25424	3.66248	4.27962	0.0493714
0.090000	0.21961	3.65949	4.21086	0.0496235
0.100000	0.18971	3.65807	4.15565	0.0497573
0.150000	0.09129	3.65682	3.98947	0.0498974
0.200000	0.04393	3.65679	3.90631	0.0499023
0.300000	0.01018	3.65679	3.82313	0.0499024
0.400000	0.00236	3.65679	3.78155	0.0499024
0.500000	0.00055	3.65679	3.75660	0.0499024
0.600000	0.00013	3.65679	3.73996	0.0499024
0.700000	0.00003	3.65679	3.72808	0.0499024
0.800000	0.00001	3.65679	3.71917	0.0499024
0.900000	0.00000	3.65679	3.71224	0.0499024
1.000000	0.00000	3.65679	3.70670	0.0499024



Tabela 8.12 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral para $N = 50$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
0.000100	0.98657	22.27790	33.81038	0.0011532
0.000150	0.98249	19.38324	29.44023	0.0015085
0.000200	0.97888	17.55946	26.68335	0.0018248
0.000300	0.97251	15.27730	23.22721	0.0023850
0.000400	0.96688	13.84211	21.04875	0.0028827
0.000500	0.96175	12.82418	19.50052	0.0033382
0.000600	0.95698	12.04988	18.32062	0.0037624
0.000700	0.95250	11.43316	17.37921	0.0041622
0.000800	0.94826	10.92568	16.60328	0.0045421
0.000900	0.94420	10.49781	15.94803	0.0049052
0.001000	0.94032	10.13019	15.38419	0.0052540
0.001500	0.92276	8.84037	13.39808	0.0068366
0.002000	0.90736	8.03621	12.15151	0.0082306
0.003000	0.88057	7.04322	10.59876	0.0106666
0.004000	0.85723	6.42957	9.62800	0.0127937
0.005000	0.83622	6.00152	8.94324	0.0147086
0.006000	0.81693	5.68118	8.42509	0.0164635
0.007000	0.79899	5.43015	8.01450	0.0180905
0.008000	0.78215	5.22694	7.67834	0.0196112
0.009000	0.76623	5.05843	7.39632	0.0210411
0.010000	0.75111	4.91606	7.15522	0.0223916
0.015000	0.68436	4.44059	6.32109	0.0282074
0.020000	0.62803	4.17243	5.81464	0.0328441
0.030000	0.53487	3.89422	5.21445	0.0396072
0.040000	0.45901	3.76891	4.86676	0.0439140
0.050000	0.39530	3.70999	4.64057	0.0465289
0.060000	0.34100	3.68204	4.48286	0.0480487
0.070000	0.29438	3.66878	4.36739	0.0489029
0.080000	0.25424	3.66248	4.27962	0.0493714
0.090000	0.21961	3.65949	4.21086	0.0496235
0.100000	0.18971	3.65807	4.15565	0.0497573
0.150000	0.09129	3.65682	3.98947	0.0498974
0.200000	0.04393	3.65679	3.90631	0.0499023
0.300000	0.01018	3.65679	3.82313	0.0499024
0.400000	0.00236	3.65679	3.78155	0.0499024
0.500000	0.00055	3.65679	3.75660	0.0499024
0.600000	0.00013	3.65679	3.73996	0.0499024
0.700000	0.00003	3.65679	3.72808	0.0499024
0.800000	0.00001	3.65679	3.71917	0.0499024
0.900000	0.00000	3.65679	3.71224	0.0499024
1.000000	0.00000	3.65679	3.70670	0.0499024



8.3.1. Resultados Obtidos Através da Técnica da Transformada Integral.

Nas Tabelas 8.8 a 8.12 e nas Figuras 8.11 a 8.14 apresenta-se os resultados das grandezas acima mencionadas, obtidas através da Técnica da Transformada Integral para $N = 10, 20, 30, 40$ e 50 . Observa-se que à medida que N aumenta os dados das tabelas e as curvas das figuras *convergem*. A principal dificuldade encontrada quando aumentava-se N e consequentemente o valor do maior autovalor considerado é que os argumentos α e x , da função $M(\alpha, \gamma, x)$, também aumentam e chega-se a uma situação na qual o cômputo preciso de $M(\alpha, \gamma, x)$ torna-se muito difícil. A solução para estes casos entende-se estaria na descoberta de propriedades especiais, similares, por exemplo, àquelas da função $\text{sen}(x)$, ou no aumento do tamanho da palavra computacional através de mudança de *hardware* ou de *software*. Os cômputos associados à Técnica da Transformada Integral Generalizada, na forma aqui apresentada, necessitam de pouca memória, uma vez que trabalham praticamente só com grandezas escalares. O tempo de cômputo das grandezas de interesse em ≈ 40 posições do eixo Z , $N = 50$, em um micro 486/66 é menor que 30 segundos.

8.3.2. Resultados Obtidos Através da Técnica da Transformada Integral Generalizada.

Nas Tabelas 8.13 a 8.16 e nas Figuras 8.15 a 8.18 apresenta-se os resultados das grandezas mencionadas anteriormente obtidas através da Técnica da Transformada Integral Generalizada para $N = 05, 15, 25$ e 35 . Observa-se aqui, também, que à medida que N aumenta os dados das tabelas e as curvas das figuras *convergem*. A principal dificuldade encontrada foi o cômputo da exponencial de uma matriz, que devido à grande quantidade de operações básicas e à precariedade dos softwares de manipulação de matrizes então disponíveis provocam uma amplificação nos erros de arredondamento inviabilizando no momento o cômputo por esta variante, para maiores detalhes ver (MOLER & LOAN, 1978). Novamente a solução está no aumento da palavra computacional, para combater o erro de



Tabela 8.13 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral Generalizada para $N = 05$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
1.0E-4	9.9175E-1	14.7078	20.7188	6.0100E-4
1.5E-4	9.8886E-1	14.4330	18.6693	6.3500E-4
2.0E-4	9.8604E-1	14.1671	17.5767	6.8200E-4
3.0E-4	9.8057E-1	13.6609	16.3547	8.0800E-4
4.0E-4	9.7532E-1	13.1869	15.6212	9.7400E-4
5.0E-4	9.7027E-1	12.7429	15.0894	1.1730E-3
6.0E-4	9.6542E-1	12.3270	14.6632	1.4020E-3
7.0E-4	9.6075E-1	11.9374	14.3013	1.6550E-3
8.0E-4	9.5624E-1	11.5723	13.9827	1.9280E-3
9.0E-4	9.5189E-1	11.2301	13.6956	2.2190E-3
1.0E-3	9.4769E-1	10.9092	13.4328	2.5240E-3
1.5E-3	9.2853E-1	9.5778	12.3582	4.1710E-3
2.0E-3	9.1185E-1	8.6008	11.5348	5.8680E-3
3.0E-3	8.8348E-1	7.3219	10.3241	9.0070E-3
4.0E-3	8.5939E-1	6.5588	9.4707	1.1648E-2
5.0E-3	8.3802E-1	6.0631	8.8356	1.3862E-2
6.0E-3	8.1854E-1	5.7139	8.3429	1.5774E-2
7.0E-3	8.0049E-1	5.4508	7.9477	1.7478E-2
8.0E-3	7.8356E-1	5.2426	7.6221	1.9037E-2
9.0E-3	7.6757E-1	5.0717	7.3479	2.0486E-2
1.0E-2	7.5238E-1	4.9279	7.1129	2.1850E-2
1.5E-2	6.8539E-1	4.4483	6.2961	2.7717E-2
2.0E-2	6.2889E-1	4.1772	5.7974	3.2404E-2
3.0E-2	5.3555E-1	3.8956	5.2039	3.9251E-2
4.0E-2	4.5958E-1	3.7686	4.8589	4.3614E-2
5.0E-2	3.9580E-1	3.7089	4.6342	4.6263E-2
6.0E-2	3.4145E-1	3.6806	4.4773	4.7801E-2
7.0E-2	2.9479E-1	3.6672	4.3624	4.8666E-2
8.0E-2	2.5461E-1	3.6608	4.2751	4.9139E-2
9.0E-2	2.1994E-1	3.6578	4.2066	4.9393E-2
1.0E-1	1.9001E-1	3.6564	4.1517	4.9529E-2
1.5E-1	9.1470E-2	3.6551	3.9862	4.9671E-2
2.0E-1	4.4040E-2	3.6550	3.9034	4.9670E-2



Tabela 8.14 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral Generalizada para $N = 15$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
1.0E-4	9.8702E-1	23.6649	32.6524	8.9900E-4
1.5E-4	9.8277E-1	19.8800	28.9618	1.3620E-3
2.0E-4	9.7910E-1	17.7099	26.3980	1.7380E-3
3.0E-4	9.7271E-1	15.2919	23.0549	2.3290E-3
4.0E-4	9.6708E-1	13.8622	20.9234	2.8240E-3
5.0E-4	9.6193E-1	12.8499	19.4049	3.2770E-3
6.0E-4	9.5716E-1	12.0749	18.2452	3.7020E-3
7.0E-4	9.5267E-1	11.4553	17.3180	4.1040E-3
8.0E-4	9.4841E-1	10.9447	16.5522	4.4860E-3
9.0E-4	9.4435E-1	10.5141	15.9046	4.8510E-3
1.0E-3	9.4046E-1	10.1443	15.3466	5.2020E-3
1.5E-3	9.2288E-1	8.8485	13.3766	6.7920E-3
2.0E-3	9.0747E-1	8.0417	12.1370	8.1910E-3
3.0E-3	8.8066E-1	7.0464	10.5905	1.0632E-2
4.0E-3	8.5731E-1	6.4317	9.6224	1.2763E-2
5.0E-3	8.3629E-1	6.0031	8.9391	1.4680E-2
6.0E-3	8.1699E-1	5.6824	8.4219	1.6437E-2
7.0E-3	7.9905E-1	5.4312	8.0119	1.8065E-2
8.0E-3	7.8221E-1	5.2278	7.6762	1.9587E-2
9.0E-3	7.6628E-1	5.0591	7.3945	2.1018E-2
1.0E-2	7.5115E-1	4.9167	7.1536	2.2370E-2
1.5E-2	6.8440E-1	4.4409	6.3202	2.8189E-2
2.0E-2	6.2806E-1	4.1726	5.8140	3.2828E-2
3.0E-2	5.3489E-1	3.8943	5.2141	3.9594E-2
4.0E-2	4.5903E-1	3.7689	4.8665	4.3902E-2
5.0E-2	3.9532E-1	3.7100	4.6403	4.6518E-2
6.0E-2	3.4101E-1	3.6820	4.4826	4.8037E-2
7.0E-2	2.9440E-1	3.6687	4.3672	4.8892E-2
8.0E-2	2.5425E-1	3.6625	4.2795	4.9359E-2
9.0E-2	2.1962E-1	3.6595	4.2107	4.9609E-2
1.0E-1	1.8972E-1	3.6581	4.1555	4.9744E-2
1.5E-1	9.1300E-2	3.6568	3.9894	4.9886E-2
2.0E-1	4.3940E-2	3.6567	3.9062	4.9889E-2



Tabela 8.15 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral Generalizada para $N = 25$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
1.0E-4	9.8664E-1	22.3128	33.6286	1.1320E-3
1.5E-4	9.8255E-1	19.4209	29.3322	1.4870E-3
2.0E-4	9.7894E-1	17.5863	26.6103	1.8050E-3
3.0E-4	9.7256E-1	15.2926	23.1852	2.3680E-3
4.0E-4	9.6693E-1	13.8525	21.0204	2.8670E-3
5.0E-4	9.6179E-1	12.8319	19.4796	3.3240E-3
6.0E-4	9.5702E-1	12.0560	18.3043	3.7490E-3
7.0E-4	9.5254E-1	11.4381	17.3660	4.1500E-3
8.0E-4	9.4829E-1	10.9298	16.5923	4.5300E-3
9.0E-4	9.4424E-1	10.5014	15.9387	4.8940E-3
1.0E-3	9.4035E-1	10.1333	15.3761	5.2430E-3
1.5E-3	9.2278E-1	8.8422	13.3935	6.8270E-3
2.0E-3	9.0739E-1	8.0374	12.1484	8.2220E-3
3.0E-3	8.8059E-1	7.0439	10.5970	1.0659E-2
4.0E-3	8.5725E-1	6.4301	9.6268	1.2787E-2
5.0E-3	8.3623E-1	6.0019	8.9424	1.4702E-2
6.0E-3	8.1694E-1	5.6815	8.4244	1.6458E-2
7.0E-3	7.9900E-1	5.4304	8.0139	1.8085E-2
8.0E-3	7.8216E-1	5.2271	7.6779	1.9606E-2
9.0E-3	7.6624E-1	5.0586	7.3959	2.1036E-2
1.0E-2	7.5112E-1	4.9162	7.1549	2.2387E-2
1.5E-2	6.8437E-1	4.4407	6.3209	2.8203E-2
2.0E-2	6.2803E-1	4.1725	5.8145	3.2840E-2
3.0E-2	5.3487E-1	3.8943	5.2144	3.9603E-2
4.0E-2	4.5902E-1	3.7689	4.8667	4.3911E-2
5.0E-2	3.9530E-1	3.7100	4.6405	4.6524E-2
6.0E-2	3.4100E-1	3.6821	4.4828	4.8045E-2
7.0E-2	2.9439E-1	3.6688	4.3673	4.8898E-2
8.0E-2	2.5424E-1	3.6625	4.2796	4.9363E-2
9.0E-2	2.1961E-1	3.6595	4.2108	4.9616E-2
1.0E-1	1.8971E-1	3.6581	4.1556	4.9751E-2
1.5E-1	9.1290E-2	3.6568	3.9894	4.9892E-2
2.0E-1	4.3930E-2	3.6568	3.9065	4.9940E-2



Tabela 8.16 - Resultados obtidos $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ pela Técnica da Transformada Integral Generalizada para $N = 35$.

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
1.0E-4	9.8659E-1	22.3028	33.7422	1.1440E-3
1.5E-4	9.8251E-1	19.3974	29.4009	1.5010E-3
2.0E-4	9.7890E-1	17.5691	26.6568	1.8180E-3
3.0E-4	9.7253E-1	15.2830	23.2119	2.3790E-3
4.0E-4	9.6690E-1	13.8460	21.0384	2.8770E-3
5.0E-4	9.6176E-1	12.8271	19.4929	3.3330E-3
6.0E-4	9.5700E-1	12.0522	18.3147	3.7580E-3
7.0E-4	9.5252E-1	11.4350	17.3744	4.1580E-3
8.0E-4	9.4827E-1	10.9272	16.5993	4.5380E-3
9.0E-4	9.4422E-1	10.4992	15.9446	4.9010E-3
1.0E-3	9.4033E-1	10.1313	15.3813	5.2500E-3
1.5E-3	9.2277E-1	8.8411	13.3964	6.8330E-3
2.0E-3	9.0737E-1	8.0367	12.1504	8.2270E-3
3.0E-3	8.8058E-1	7.0435	10.5981	1.0664E-2
4.0E-3	8.5724E-1	6.4298	9.6276	1.2791E-2
5.0E-3	8.3622E-1	6.0017	8.9429	1.4706E-2
6.0E-3	8.1693E-1	5.6813	8.4248	1.6461E-2
7.0E-3	7.9900E-1	5.4303	8.0143	1.8088E-2
8.0E-3	7.8216E-1	5.2270	7.6782	1.9609E-2
9.0E-3	7.6624E-1	5.0585	7.3962	2.1039E-2
1.0E-2	7.5111E-1	4.9161	7.1551	2.2390E-2
1.5E-2	6.8437E-1	4.4406	6.3210	2.8206E-2
2.0E-2	6.2803E-1	4.1725	5.8146	3.2842E-2
3.0E-2	5.3487E-1	3.8943	5.2144	3.9605E-2
4.0E-2	4.5901E-1	3.7689	4.8667	4.3912E-2
5.0E-2	3.9530E-1	3.7100	4.6405	4.6526E-2
6.0E-2	3.4100E-1	3.6821	4.4828	4.8046E-2
7.0E-2	2.9439E-1	3.6688	4.3674	4.8897E-2
8.0E-2	2.5424E-1	3.6625	4.2796	4.9366E-2
9.0E-2	2.1961E-1	3.6595	4.2108	4.9619E-2
1.0E-1	1.8971E-1	3.6581	4.1556	4.9749E-2
1.5E-1	9.1290E-2	3.6569	3.9895	4.9884E-2
2.0E-1	4.3920E-2	3.6568	3.9066	4.9966E-2



Tabela 8.17 - Resultados para $\Theta_m(Z)$, $Nu(Z)$, $Num(Z)$, e $Nt(Z)$ apresentados em SHAH & LONDON (1978).

Z	$\Theta_m(Z)$	$Nu(Z)$	$Num(Z)$	$Nt(Z)$
0.000100	0.98657	22.2750	33.8150	0.001154
0.000150	0.98249	19.3810	29.4420	0.001509
0.000200	0.97888	17.5580	26.6850	0.001825
0.000300	0.97251	15.2770	23.2280	0.002385
0.000400	0.96688	13.8420	21.0490	0.002883
0.000500	0.96175	12.8240	19.5010	0.003338
0.000600	0.95698	12.0500	18.3210	0.003763
0.000700	0.95250	11.4330	17.3790	0.004162
0.000800	0.94826	10.9260	16.6030	0.004542
0.000900	0.94420	10.4980	15.9480	0.004905
0.001000	0.94032	10.1300	15.3840	0.005254
0.001500	0.92276	8.8404	13.3980	0.006837
0.002000	0.90736	8.0362	12.1520	0.008231
0.003000	0.88057	7.0432	10.5990	0.010670
0.004000	0.85723	6.4296	9.6280	0.012790
0.005000	0.83622	6.0015	8.9432	0.014710
0.006000	0.81693	5.6812	8.4251	0.016460
0.007000	0.79899	5.4301	8.0145	0.018090
0.008000	0.78215	5.2269	7.6783	0.019610
0.009000	0.76623	5.0584	7.3963	0.021040
0.010000	0.75111	4.9161	7.1552	0.022390
0.015000	0.68436	4.4406	6.3211	0.028210
0.020000	0.62803	4.1724	5.8146	0.032840
0.030000	0.53487	3.8942	5.2145	0.039610
0.040000	0.45901	3.7689	4.8668	0.043910
0.050000	0.39530	3.7100	4.6406	0.046530
0.060000	0.34100	3.6820	4.4829	0.048050
0.070000	0.29438	3.6688	4.3674	0.048900
0.080000	0.25424	3.6624	4.2796	0.049370
0.090000	0.21961	3.6595	4.2109	0.049620
0.100000	0.18971	3.6580	4.1556	0.049760
0.150000	0.09129	3.6568	3.9895	0.049900
0.200000	0.04393	3.6568	3.9063	0.049900

Figura 8.15 - Número de Nusselt local, $Nu(Z)$, obtido através da equação (6.111), para $N = 05, 15, 25$ e 35 .

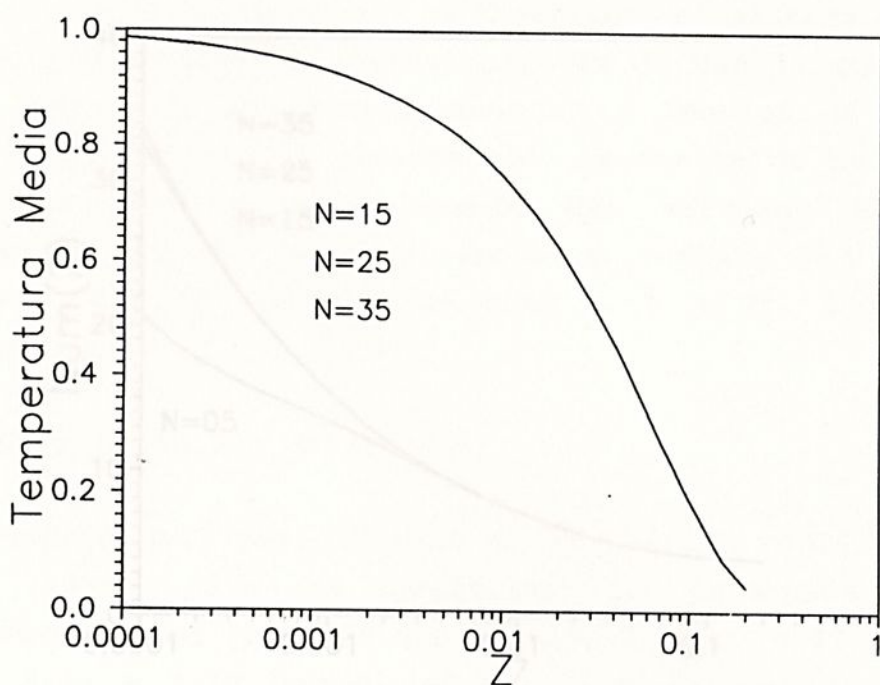


Figura 8.15 - Temperatura média adimensional, $\Theta(Z)$, obtida através da equação (6.110), para $N = 15, 25$ e 35 .

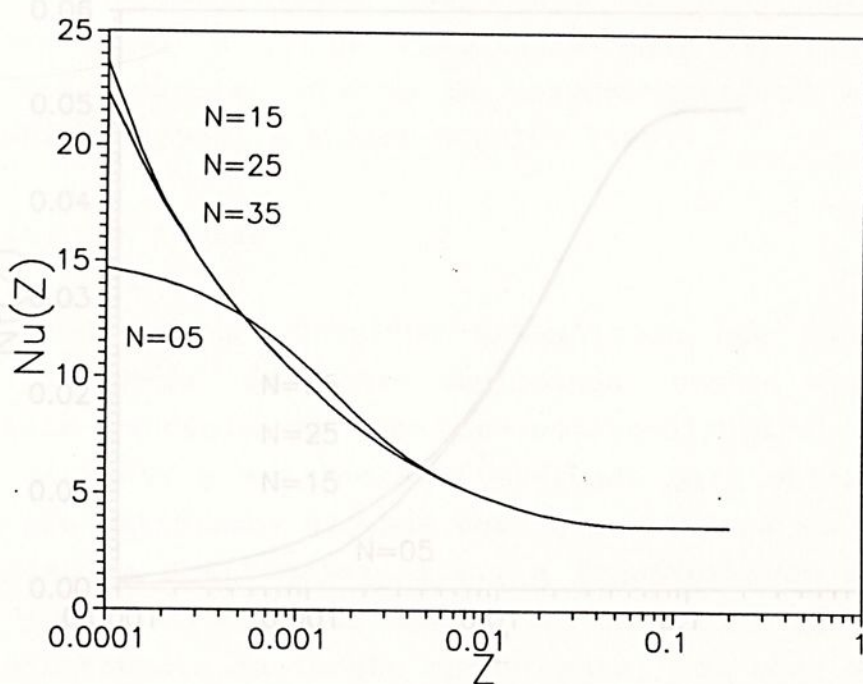


Figura 8.16 - Número Incremental de transferência de calor, $Nt(Z)$,

Figura 8.16 - Número de Nusselt local, $Nu(Z)$, obtido através da equação (6.111), para $N = 05, 15, 25$ e 35 .

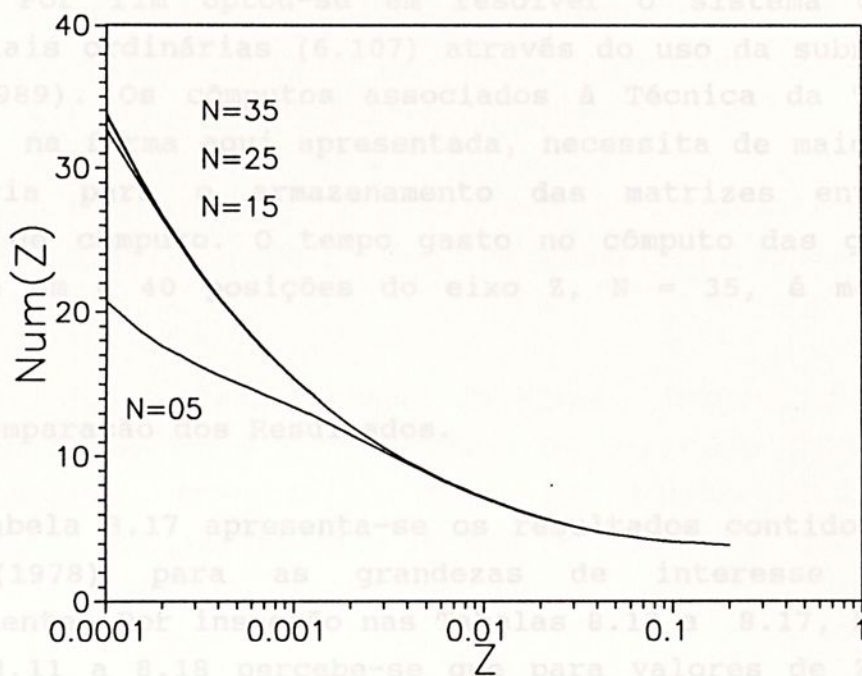


Figura 8.17 - Número de Nusselt médio, $Nu_m(Z)$, obtido através da equação (6.112), para $N = 05, 15, 25$ e 35 .

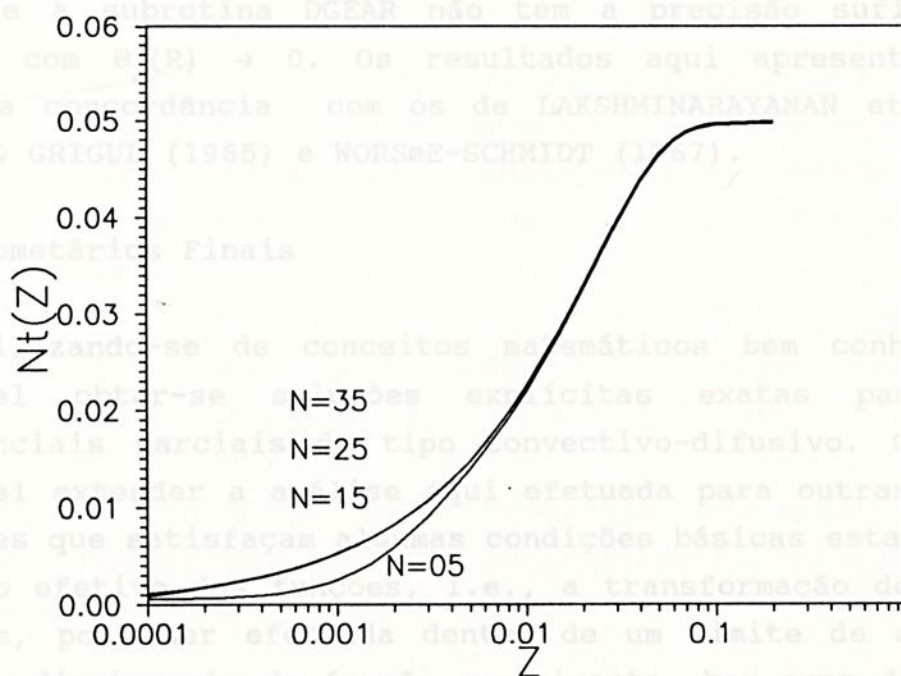


Figura 8.18 - Número Incremental de transferência de calor, $Nt(Z)$, obtido através da equação $Nt(Z) = [Nu_m(Z) - Nu(Z)]Z$, para $N = 05, 15, 25$ e 35 .

arredondamento, associada à algarítmos eficientes e eficazes de cômputo. Por fim optou-se em resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias (6.107) através do uso da subrotina DGEAR (IMSL, 1989). Os cômputos associados à Técnica da Transformada Integral, na forma aqui apresentada, necessita de maior capacidade de memória para o armazenamento das matrizes envolvidas no processo de cômputo. O tempo gasto no cômputo das grandezas de interesse em ≈ 40 posições do eixo Z, $N = 35$, é menor que 20 segundos.

8.3.3. Comparação dos Resultados.

Na Tabela 8.17 apresenta-se os resultados contidos em SHAH & LONDON (1978) para as grandezas de interesse mencionados anteriormente. Por inspeção nas Tabelas 8.12 a 8.17, bem como nas Figuras 8.11 a 8.18 percebe-se que para valores de $Z > 0.001$ a concordância entre os resultados é excelente, para $Z \approx 10^{-4}$ a concordância é menor porém com precisão ainda bastante boa. Quando $Z \rightarrow 1$ a temperatura média $\theta_m(Z) \rightarrow 0$ causando um comportamento instável na solução pela Transformada Integral Generalizada uma vez que a subrotina DGEAR não tem a precisão suficiente para operar com $\theta_m(R) \rightarrow 0$. Os resultados aqui apresentados também têm boa concordância com os de LAKSHMINARAYANAN et al (1986), TRATZ & GRIGUL (1965) e WORSØE-SCHMIDT (1967).

8.4. Cometários Finais

Utilizando-se de conceitos matemáticos bem conhecidos é possível obter-se soluções explícitas exatas para equações diferenciais parciais do tipo convectivo-difusivo. Certamente é possível estender a análise aqui efetuada para outras classes de equações que satisfaçam algumas condições básicas estabelecidas. O cômputo efetivo das funções, i.e., a transformação de equações em números, pode ser efetuada dentro de um limite de acurácia que depende diretamente da função aproximante, bem como do tamanho da palavra computacional utilizadas. Assim, dependendo dos recursos de hardware e de software disponíveis é possível obter-se resultados de extrema acurácia.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M. On the Solution of the Differential Equation Occurring in the Problem of Heat Convection in Laminar Flow Through a Tube. *J. Math Phys.*, 32, 184-187, 1953.
- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.
- APARECIDO, J.B. *Transformada Integral Generalizada no Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Dutos Retilíneos de Geometria Arbitrária*. Tese de doutoramento, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA - São José dos Campos. 02 dezembro de 1988.
- APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Duct. IN: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 9, Florianópolis, 1987. *Anais*. Florianópolis, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1987, v. 1, p. 25-28.
- APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. Analytical Solutions to Parabolic Multi-Dimensional Diffusion Problems within Irregularly Shaped Domains. In: WROBEL, L.C.; BREBBIA, C.A.; NOWAK, A.J. (ed.) *Advanced Computational Methods in Heat Transfer*. Berlin: Springer-Verlag, 1990, v. 1, p.27-28.
- APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts. *Computational Mechanics*. vol. 6, n.2, p.93-100, 1990.
- APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts. *International Journal Heat Mass Transfer*. vol. 33, n.2, p.341-347, 1990.
- APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. Laminar Thermally Developing Flow Inside Right Triangular Ducts. *Appl. Sci. Research*. vol. 49, p. 355-368, 1992.



- APARECIDO, J.B., COTTA, R.M., ÖZISIK, M.N. Analytical Solutions to Two Dimensional Diffusion Problems Within Irregular Domains. *Journal of Franklin Institute*. Great Britain, v. 326, n. 3, p. 421-424, 1989..
- URGIONE, P. D. Approximations T. Kelvin Functions, *Mathematics of*
- APOSTOL, T.M., *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté, 1974.
- BURKILL, J.C. *The Theory of Ordinary Differential Equations*.
- ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, New York: Dover, 1962.
- CARLSON, B.C., NOTIS, E.M. Algorithms for Incomplete Elliptic
- ARNOLD, V.I. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Moscou: Editora Mir, 1985.
- BARTLE, R.G. *Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- BIRD, R.B., STEWART, W.E., LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, New York: John Wiley & Sons, 1960.
- CHENEY, E.W. *Introduction to Approximation Theory*. New York:
- BÔCHER, M. *Leçons sur les Méthodes de Sturm dans la Théorie des Équations Differentielles Linéaires et Leurs Développements Modernes*, Paris, 1917.
- BOSTEN, N.E., BATTISTE, E.L. Incomplete Beta Ratio, *Communications of the ACM*, 17, 156-157, 1974.
- CODY, W.J., Chebyshev Approximations for the Complete Elliptic
- BOYCE, W.E., DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
- CODY, W.J. An Overview of Software Development for Special
- BOULOS, P. *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries de Números e de Funções*. São Paulo: Edgard Blücher, 1986.
- Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- BRONSON, R. *Matrizes*. Lisboa: McGraw-Hill, 1993.
- CODY, W.J. Sequence of Modified Bessel Functions of the First
- BROWN, G.M. Heat or Mass Transfer in a Fluid in Laminar Flow in a Circular or Flat Conduit, *AIChE J.*, 6, 179-183, 1960 , apud,



- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Difusion*, New York: John Wiley & Sons, 1984.
- URGIONE, F. D. Approximations T. Kelvin Functions, *Mathematics of Computation*, 83, 295-298, 1963.
- BURKILL, J.C. *The Theory of Ordinary Differential Equations*. London: Longman, 1975.
- CARLSON, B.C., NOTIS, E.M. Algorithms for Incomplete Elliptic Integrals, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7, 398-403, 1981.
- CHEBYSHEV, P.L. Sur les Questions de Minima qui se rattchent a la representation aproximative de fonctions, *Oeuvres I*, 273-378, 1859, apud, CHENEY, E.W., *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- CHENEY, E.W. *Introduction to Approximation Theory*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- COBB, S.M. Associated Legend Functions of the First Kind for Real or Imaginary Arguments, *Communications of the ACM*, v. 12, no. 11, november, p. 365, 1969.
- CODY, W.J., Chebyshev Approximations for the Complete Elliptic Integrals K and E, *Mathematics of Computations*, 19, 105-112, 1965.
- CODY, W.J. An Overview of Software Development for Special Functions. IN: Watson, G.A. (ed.) *Numerical Analysis. Proceedings of the Dundee Conference on Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- CODY, W.J. Sequence of Modified Bessel Functions of the First Kind, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 9, 242-245, 1983.



- CONOLLY, B.W. A Short Table of the Confluent Hypergeometric Function $M(\alpha, \gamma, x)$. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, v. III, p. 236-240, 1950.
- COTTA, R.M. Hybrid Numerical-Analytical Approach to Diffusion-Convection Problems, Invited Lecture. *National Summer School*, 15, WMEI Lenin Varna, Bulgária, 1989, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, 25p.
- COTTA, R.M. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, Flórida: CRC Press, 1993. *American Institute Engineering*, p.26-80, 1931. vol. 26.
- COTTA, R.M., LEIROZ, A., APARECIDO, J.B. Steady-State Diffusion Problems with Variable Equation Coefficients. *Heat & Technology*. v. 10, n. 3-4, p. 104-129, 1992. 349, 1977.
- COTTA, R.M., MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. Transient Conjugated Forced Convection in Ducts with Periodically Varying Inlet Temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30, 2073-2082, 1987.
- COTTA, R.M., SANTOS, S.F.M., APARECIDO, J.B. Transient Fin Analysis with Time - Dependent Surface Dissipation. *Latin Amer. Appl. Research* (to appear).
- DAVIS, P.J. *Interpolation and approximation*. New York: Dover, 1975.
- DEIMLING, K. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*. Berlin: Springer Verlag, 1977.
- DERRICK, W.R., GROSSMAN, S.I. *Elementary Differential Equations with Applications*. Massachusetts: Addison-Wesley, Reading, 1976.
- DINIZ, A.J. , APARECIDO, J.B. Solução Analítica do Problema de Ablação com Fluxo de Calor Transiente. In: ENCONTRO NACIONAL DE CIÊNCIAS TÉRMICAS-ENCIT, 3, Itapema-SC. 1990. *Anais*. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1990. p. 329-333.



- DINIZ, A.J., APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab. *Heat and Technology*. v. 8, n.3-4. 1990.
- DINIZ, A.J., SILVA, J.B.C., APARECIDO, J.B., ZAPAROLI, E.L. Proteção Térmica por Ablação em Esfera Finita. In: CONGRESSO DE ENGENHARIA MECÂNICA NORTE-NORDESTE, 2. 1992, João Pessoa-PB. *Anais*. Paraíba:UFPB, 1992, p. 9-16.
- DREW, T.B. Mathematical Attacks on Forced Convection Problems: A Review, *Transactions of American Institute Engineering*, p.26-80, 1931. vol. 26.
- ECKHARDT, U. A Rational Approximation to Weierstrass P-Function, II: The Lemniscate Case, *Computing*, 18, 341-349, 1977.
- ECKHARDT, U. Weierstrass Elliptic Functions, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 6, 112-120, 1980.
- ERDÉLYI, A., et al. *Higher Transcendental Functions*, New York: McGraw-Hill, 1953. Vol. I e II.
- FIKE, C.T. *Computer Evaluation of Mathematical Functions*, New Jersey: Prentice-Hall, 1968.
- FINNEY, R.L., OSTBERG, D.R. *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley, Reading, 1976.
- FOURIER, J. *The Analytical Theory of Heat*, 1822, traduzido por Freeman, A. 1878, In: Hutchins, R.M. (ed.), *Great Books of the Western World*, Enciclopaedia Britannica, Chicago, 1952.
- FROBENIUS, G. *Journal fur Math.*, 76 (1874). p. 214-235, apud WHITTAKER, E.T., WATSON, G.N. *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, University Press, 1973.
- GATICA, R.A. *Introducion a la Integral de Lebesque en la Recta*. The General Secretariat of the Organization of American States,



Washington D.C., 1977.

- GAUTSCHI, W. Computational Methods in Special Functions. In: ASKEY, R. (ed.), *Theory and Applications of Special Functions*, New York: Academic Press, 1975.
- GAUTSCHI, W. Bessel Functions of the First Kind, *Communications of the ACM*, vol. 7, 479-480, 1964
- GAUTSCHI, W. Complex Error Function. *Communications of the ACM*, vol. 12, no. 11, november, p. 365, 1969.
- GAUTSCHI, W. Efficient Computation of the Complex Error Function, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 7, 187-198, 1970.
- GRAETZ, L. Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten, Parte I, *Ann. Phys. Chem*, 18, 79-94, 1883; Parte 2, *Ann. Phys. Chem.*, 25, 337-357, 1885, apud, DREW, T.B. *Mathematical Attacks on Forced Convection Problems: A Review*, *Transactions of American Institute Engineering*, p.26-80, 1931. vol. 26.
- GRADSHTEYN, I.S., RYZHIK, I.M. *Tables of Integrals, Series, and Products*. New York: Academic Press, 1965.
- GRAM, J.P. Über die Entwicklung Recler Functionen in Reihen Mittelst der Methode der Kleinsten Quadrate, *J. Reine u. angew. Math.*, 94, 1883, pp. 21-73, apud Sansone, G. *Orthogonal Functions*, Interscience Publisher Inc., 1959.
- HAGEN, G. Über die Bewegung des Wassers in Engen Zylindrischen Rohren. *Pogg. Ann.*, 46, 423-442, 1839, apud, SCHLICHTING, H. *Teoria de la Capa Limite*. Bilbao: Ediciones Urmo, 1972.
- HALL, N.A. A Formal Expansion Theory for Functions of One or More Variables. *Bulletin of the American Mathematic Society*, vol. 46, p. 824-832. 1940.
- HART, J.F., et al. *Computer Approximations*. Wiley, New York,



1968. L.D., LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*, Oxford: Pergamon Press, 1989.
- HILDEBRAND, F.B. *Advanced Calculus for Applications*. New Jersey: Prentice-Hall, 1962. *Functions and Their Applications*. New York: Dover, 1972.
- HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Algebra Linear*. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo e Editora Polígono, 1971. *Equations with Applications to Certain Second-Order Partial Differential*
- HÖNIG, C.S. *Análise Funcional e Aplicações*. São Paulo: IME/USP, 1970. vols. I e II,
- LIMA, E.L. *Análise no Espaço H^p* . Brasília: Editora da Universidade
- HÖNIG, C.S. *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1978.
- LIMA, E.L. *Curso de Análise*. Brasília: IMPA, CNPq, 1989. Vol. I
- HYSLOP, J.M. *Infinite Series*. Oliver and Boyd, 1950.
- IMSL, MATH/SFUN/LIBRARY, Texas: Houston, 1989. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada/CNPq, 1983.*
- INCE, E.L. *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover, 1956.
- LUKE, Y.L. *The Special Functions and Their Approximations*, vols. I
- JAHNKE, E., EMDE, F. *Tables of Functions with Formulae and Curvas*. New York: Dover, 1945.
- MALVERN, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous*
- KAKAÇ, S., YENER, Y. Exact Solution of the Transient Forced Convection Energy Equation for Timewise Variation of Inlet Temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16, 2205-2214, 1973. *New York: Chelsea, 1977.*
- KNOPP, K. *Theory and Application of Infinite Series*. Blackie & Son Limited, 1966. *General Solutions of the Diffusion Equations Coupled at the Boundary Conditions. Int. J. Heat Mass Transfer,*
- KREIDER, D.L., KULLER, R.G., OSTBERG, D.R. *Equações Diferenciais*. São Paulo: Edgard Blucher e EDUSP, 1972. *General Solution of Diffusion Processes in*
- LAKSHMINARAYANAN, R., HAJI-SHEIK, A. A Generalized Closed-Form Solution to Laminar Thermal Entrance Problems. IN: Tien, C.L. Carey, V.P., Ferrel, J.K. (eds.) *Proc. of the Eight International Heat Transfer Conference*, San Francisco, CA, USA, vol. 3, p. 871-876, july, 1986. *Heat Transfer Equation. Int. J. Heat Mass*



LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*, Oxford: Pergamon Press, 1989.

LEBEDEV, N.N. *Special Functions and Their Applications*. New York: Dover, 1972.

LEWIS, C.D. *Infinite Systems of Ordinary Differential Equations with Applications to Certain Second-Order Partial Differential Equations*, ..., 1933.

LIMA, E.L. *Análise no Espaço R^n* . Brasília: Editora da Universidade de Brasília e Editora Edgard Blücher, 1970.

LIMA, E.L. *Curso de Análise*. Brasília: IMPA, CNPq, 1989. Vol. I e II.

LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. Brasília: Instituto de Matemática Pura e Aplicada/CNPq, 1983.

LUKE, Y.L. *The Special Functions and Their Approximations*, vols. I e II, New York: Academic Press, 1969.

MALVERN, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

MARKUSHEVICH, A.I. *Theory of Functions of a Complex Variable*. New York: Chelsea, 1977.

MIKHAILOV, M.D. General Solutions of the Diffusion Equations Coupled at the Boundary Conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16, 2155-2164, 1973.

MIKHAILOV, M.D. General Solution of Diffusion Processes in Solid-Liquid Extraction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 20, 1409-1415, 1977.

MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. An Alternative General Solution of the Steady-State Heat Diffusion Equation. *Int. J. Heat Mass*



- Transfer, 23, 609-612, 1980.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. A General Solution of Solute Diffusion with Reversible Reaction, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24, 81-87, 1981.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N., VULCHANOV, N.L. Transient Heat Diffusion in One-Dimensional Composite Media and Automatic Solution of the Eigenvalue Problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26, 1131-1141, 1983.
- MIKHAILOV, M.D., SHISHEDJIEV, B.K. Temperature and Moisture Distributions During Contact Drying of a Moist Porous Sheet. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 18, 15-24, 1975.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, New York: John Wiley & Sons, 1984.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. Unified Solutions of Heat Diffusion in a Finite Region Involving a Surface Film of Finite Heat Capacity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 1039-1045, 1985.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. Transient Conduction in a Three-Dimensional Composite Slab, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29, 340-342, 1986.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. *Journal of Franklin Institute*, v. 322, no. 3, p. 127-135, september, 1986.
- MIKHAILOV, M.D., VULCHANOV, N.L. Computational Procedure for Sturm-Liouville Problems. *Comp Phys.*, vol. 50, p. 323-336, 1983.
- MILLER, J.C.P. Note on the General Solution of the Confluent Hypergeometric Equation. *Math. Tables and Other Aids to Computation*, v. 9, p. 97-99, 1957.
- MILLER, R.K., MICHEL, A.N. *Ordinary Differential Equations*. Academic Press, New York, 1982.



- MOLER, C., LOAN, C. VAN. Nineteen Dubious Ways to Computer the Exponential of a Matriz, *SIAM Review*, vol. 20, no. 4, october, 1978.
- RAINVILLE, E.D. *Intermediate Course in Differential Equations*.
- NACHBIN, L. *Elements of Approximation Theory*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1965.
- RAINVILLE, E.D., *Special Functions*. New York: Chelsea, 1971.
- NUSSELT, L. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge, *Z. Ver. deut. Ing.*, 54, 1154-1158, 1910.
- NEW YORK: Macmillan Publishing Co., 1974.
- ÖLÇER, N.Y. On the Theory of Conductive Heat Transfer in Finite Regions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 7, 307-314, 1964.
- NUM. MATH. 7, 1965, 322-330 apud FIKK, C.T., *Computer Evaluation*
- ÖLÇER, N.Y. On the Theory of Conductive Heat Transfer in Finite Regions with Boundary Conditions of the Second Kind, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8, 529-556, 1965.65.
- de Tochebichef, C.R. Acad. Sci., Paris, 199, 1934, p. 337-340.
- OLIVA, W.M. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1973.
- OLVER, F.W.J., SOOKNE, D.J. Note on Backward Recurrence Algorithms, *Mathematics of Computation*, 26, 941-947, 1972.
- ÖZISIK, M.N., VICK, B. Propagation and Reflection of Thermal Waves in a Finite Medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27, 1845-1854, 1984.
- SANSONE, G. *Orthogonal Functions*. Interscience Publisher Inc.,
- PICONE, M., Ann. Scuola Norm. Pisa, 11, 1909, p. 1, apud, Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover, 1956.
- SCHLICHTING, H. *Teoria de la Capa Limite*. Bilbao: Ediciones Urmo,
- POISEUILLE, J. Recherches Expérimentelles sur le Mouvement des Liquides dans les Tubes de Très Petits Diametres. *Comptes Rendus*, 11, 961-967 y 1041-1048, 1840, apud, SCHLICHTING, H. *Teoria de la Capa Limite*. Bilbao: Ediciones Urmo, 1972.
- Transfer. Suppl. 1. New York: Academic Press, 1978.
- PONTRIAGUINE, L. *Équations Différentielles Ordinaires*, Moscou: Éditions Mir, 1969.
- de Fluidos. São Paulo: Edgard Blucher, vol. I e II, 1980.



RABENSTEIN, A.L. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. New York: Academic Press, 1966.

RAINVILLE, E.D. *Intermediate Course in Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1943.

RAINVILLE, E.D., *Special Functions*. New York: Chelsea, 1971.

RAINVILLE, E.D., BEDIENT, P.E. *Elementary Differential Equations*. New York: Macmillan Publishing Co., 1974.

RALSTON, A. Rational Chebyshev Approximation by Remez Algorithms. *Num. Math.* 7, 1965, 322-330 apud FIKE, C.T., *Computer Evaluation of Mathematical Functions*, New Jersey: Prentice-Hall, 1968.

REMEZ, E.Ya, Sur le Calcul Effectif des Polynomes d'Approximation de Tchebichef, *C.R. Acad. Sci., Paris*, 199, 1934, p. 337-340, apud, RICE, J.R. *The Aproximation of Functions*, vol. 1, Adison-Wesley, Reading, 1964.

RICE, J.R. *Numerical Methods, Software, and Analysis*, Singapore: McGraw-Hill, 1985.

RICE, J.R. *The Approximation of Functions*. Addison-Wesley, Reading, 1964.

SANSONE, G. *Orthogonal Functions*. Interscience Publisher Inc., 1959.

SCHLICHTING, H. *Teoria de la Capa Limite*. Bilbao: Ediciones Urmo, 1972.

SHAH, R.K., LONDON, A.L. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. In: IRVINE, T.F., HARTNETT, J.P. (ed.). *Advances in Heat Transfer*. Suppl. 1. New York: Academic Press, 1978.

SHAMES, I.H. *Mecânica de Fluidos*. São Paulo: Edgard Blucher, vol. I e II, 1980.



SHILOV, G.E. *An Introduction to the Theory of Linear Spaces.* New York: Dover, 1974. 757-764, 1981.

SILVA, J.B.C. *Técnica da Transformada Integral Generalizada no Desenvolvimento Simultâneo dos Perfis de Velocidade e Temperatura em Escoamento Laminar em Dutos de Geometria Simples.* Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica-ITA, São José dos Campos, maio de 1990.

WHITE, A.J. *Análise Real: Uma Introdução.* São Paulo: Edgard Blücher e

SILVA, J.B.C., COTTA, R.M., APARECIDO, J.B. Analytical Solutions to Simultaneously Developing Laminar Flow Inside Parallel-Plate Channels. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol. 35, n. 4, p. 887-895, 1992. ersality Press, 1971.

SLATER, L.J. The Real Zeros of the Confluent Hypergeometric Function. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. 52, p. 626-635, 1956.

Flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 10, p. 541-551, 1967.

SLATER, L.J. The Evaluation of the Basic Confluent Hypergeometric Function. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, v. 50, p. 404-413, 1954.âmica Clássica, São Paulo: Edgard Blücher, 1976.

SLATER, L.J. On the Evaluation of the Confluent Hypergeometric Function. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, v. 49, p. 612-622, 1953.

SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Brasília: IMPA/CNPq, 1969.

STURM, J.C.F., *J. de Math*, 1, 1836, p. 106, apud, Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover, 1956.

THAYER, J. *Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, CNPq, Brasília, 1987.

TRATZ, H., GRIGULL, U. Thermischer Einlauf in Augsgebildeter Laminarer Rohrströmung, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 8, p. 669-678, 1965.

TSACALOS, D., DUPOIRIEUX, F.J., BALAGEAS, D.L., *Application de la Methode des Transformations Integrales Finies a la Modelisation*



d'Une Sonde de Debitmetrie Sanguine Intratissulaire. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 4, 757-764, 1981.

VEIDINGER, L. On the Numerical Determination of the Best Approximation in the Chebyshev Sense, *Numer. Math.* 2, 99-105, 1969, apud, CHENEY, E.W. *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.

WHITE, A.J. *Analise Real: Uma Introdução*. São Paulo: Edgard Bücher e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

WHITTAKER, E.T., WATSON, G.N.. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1973.

WORSØE-SCHMIDT, P.M. Heat Transfer in Thermal Entrance Region of Circular Tubes and Annular Passages with Fully Developed Laminar Flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 10, p. 541-551, 1967.

WYLEN, G.J. van, SONNTAG, R.E. *Fundamentos da Termodinâmica Clássica*, São Paulo: Edgard Blücher, 1976.



UNIT FUN_ESP;
(SN+)

INTERFACE

```
var
  a,b,z,w,hdpt,tol      : extended;
  kmax                   : longint;

PROCEDURE RaizQuadAlg1(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg1(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg2(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg3(z,tol:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg4(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg1(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg2(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg3(z,tol:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg4(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoIntegral(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg1(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg2(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg3(z,tol:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg4(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg5(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg1(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg2(z:extended;kmax:longint;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg3(z,tol:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg4(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg5(z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg1(a,b,z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg2(a,b,z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg3(a,b,z,tol:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg4(a,b,z:extended;
  var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg0(z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg1(z:extended;
```

A N E X O




```

UNIT FUN_ESP;
{$N+}

INTERFACE

var
    a,b,z,w,hdpt,tol      : extended;
    kmax                   : longint;

PROCEDURE RaizQuadAlg1(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg1(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg2(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg3(z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoAlg4(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg1(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg2(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg3(z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE CoSenoAlg4(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE SenoIntegral(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg1(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg2(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg3(z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg4(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J0_Alg5(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg1(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg2(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg3(z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg4(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE J1_Alg5(z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg1(a,b,z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg2(a,b,z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg3(a,b,z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg4(a,b,z:extended;
    var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg0(z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg1(z:extended;

```




```

        kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg2(z:extended;
        kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg3(z,tol:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg4(z:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE ExponencialAlg5(z:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE LogEAlg1(z:extended;
        kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE LogEAlg2(z:extended;
        kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE LogEAlg3(z,tol:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE LogEAlg4(z:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE LogEAlg5(z:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE ZetaAlg1(kmax:longint;z:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg1(a,b,z:extended;
        kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg2(a,b,z:extended;
        kmax:longint;var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg3(a,b,z,tol:extended;
        var hdpt:extended);
PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg4(a,b,z:extended;
        var hdpt:extended);

FUNCTION RaizQuad(z:extended):extended;
FUNCTION Seno(z:extended):extended;
FUNCTION CoSeno(z:extended):extended;
FUNCTION J0(z:extended):extended;
FUNCTION J1(z:extended):extended;
FUNCTION HiperGeoDegPrimTipo(a,b,z:extended):extended;
FUNCTION Exponencial(z:extended):extended;
FUNCTION LogE(z:extended):extended;
FUNCTION Zeta(kmax:longint;z:extended):extended;
FUNCTION HiperGeoDegModif(a,b,z:extended):extended;
FUNCTION J0_MinMax(z:extended):extended;
FUNCTION J1_MinMax(z:extended):extended;

```

IMPLEMENTATION

```

PROCEDURE RaizQuadAlg1(z:extended;
        var hdpt:extended);
    var
        semente          :extended;
    begin
        tol:=1e-30;
        hdpt:= 0.668740+0.445827*z-0.139321/(z+0.25);
        if(z=0) then
            begin
                hdpt:=0;
            end
        else
            begin
                if(z<0) then
                    begin

```




```

end;      writeln('Argumento invalido...');
end
else
begin
repeat
semente:=hdpt;
hdpt:=semente + (z/semente - semente)/2;
until(abs(hdpt-semente)<=abs(tol));
end;
end;
end;

PROCEDURE SenoAlg1(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);
var
aux,aux_z      :extended;
k,i_z          :longint;
sinal          :shortint;
begin
sinal:=+1;
i_z:= trunc((z/2)/PI);
z:= z - 2*PI*i_z;
if(z<0) then
begin
sinal:= -1*sinal;
z:= - z;
end;
if(z>PI) then
begin
sinal:= -1*sinal;
z:= z - PI;
end;
if(z>(PI/2)) then z:= PI - z;
if(z>(PI/4)) then
begin
z:=(PI/2) - z;
z:= z*z;
hdpt:=1.0;
aux := 1.0;
for k:= 2 to kmax do
begin
aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
hdpt:=hdpt+aux;
end;
hdpt:= sinal*hdpt;
end
else
begin
aux:= ((z/(2*k))/(2*k+1));
hdpt:=1.0 - aux*hdpt;
aux_z:= z;
z:= z*z;
hdpt:=1.0;
aux := 1.0;
for k:= 1 to kmax do
begin
aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
hdpt:=hdpt+aux;
end;
hdpt:= aux_z*hdpt;
hdpt:= sinal*hdpt;
end;
end;

```

```

end;
PROCEDURE SenoAlg2(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);
var
aux,aux_z      : extended;
k,i_z          : longint;
sinal          : shortint;
begin
sinal:=+1;
i_z:= trunc((z/2)/PI);
z:= z - 2*PI*i_z;
if(z<0) then
begin
sinal:= -1*sinal;
z:= - z;
end;
if(z>PI) then
begin
sinal:= -1*sinal;
z:= z - PI;
end;
if(z>(PI/2)) then z:= PI - z;
if(z>(PI/4)) then
begin
z:=(PI/2) - z;
z:= z*z;
hdpt:=1.0;
aux:=(z/(2*kmax))/(2*kmax-1);
hdpt:= hdpt - aux;
for k:= kmax-1 downto 1 do
begin
aux:= ((z/(2*k))/(2*k-1));
hdpt:=1.0 - aux*hdpt;
end;
hdpt:= sinal*hdpt;
end
else
begin
aux_z:= z;
z:= z*z;
hdpt:=1.0;
aux := (z/(2*kmax))/(2*kmax+1);
hdpt:= hdpt - aux;
for k:= kmax-1 downto 1 do
begin
aux:= ((z/(2*k))/(2*k+1));
hdpt:=1.0 - aux*hdpt;
end;
hdpt:= aux_z*hdpt;
hdpt:= sinal*hdpt;
end;
end;
end;
PROCEDURE SenoAlg3(z,tol:extended;var hdpt:extended);
var
aux,aux_z      : extended;
k,i_z          : longint;
sinal          : shortint;
begin
aux,aux_z:= +1e-50;
sinal:=+1;
i_z:= trunc((z/2)/PI);

```




```

begin
  sinal:=+1;
  i_z:= trunc((z/2)/PI);
  z:= z - 2*PI*i_z;
  if(z<0) then
    begin
      if(z>PI)
        sinal:= -1*sinal;
        z:= - z;
      end;
    if(z>PI) then
      begin
        if(z>(PI/2))
          sinal:= -1*sinal;
        if(z>(PI/4))
          z:= z - PI;
        end;
      if(z>(PI/2)) then z:= PI - z;
      if(z>(PI/4)) then
        begin
          z:=(PI/2) - z;
          z:= z*z;
          hdpt:=1.0;
          aux := 1.0;
          k:=1;
          repeat
            begin
              k:=k+1;
              aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
              hdpt:=hdpt+aux;
            end;
          until (abs(aux)<=abs(tol));
          hdpt:= sinal*hdpt;
          end
        else
          begin
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=0;
            repeat
              begin
                k:= k+1;
                aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
                hdpt:=hdpt+aux;
              end;
            until (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
            hdpt:= aux_z*hdpt;
            hdpt:= sinal*hdpt;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

```

PROCEDURE SenoAlg4(z:extended;var hdpt:extended);

```

var
  aux,aux_z,tol           :extended;
  k,i_z                   :longint;
  sinal                   :shortint;
begin
  tol:= +1e-50;
  sinal:=+1;
  i_z:= trunc((z/2)/PI);

```



```

z:= z - 2*PI*i_z;
if(z<0) then
begin
sinal:= -1*sinal;
z:= - z;
end;
if(z>PI) then
begin
sinal:= -1*sinal;
z:= z - PI;
end;
if(z>(PI/2)) then z:= PI - z;
if(z>(PI/4)) then
begin
z:=(PI/2) - z;
z:= z*z;
hdpt:=1.0;
aux := 1.0;
k:=1;
repeat
begin
k:=k+1;
aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
hdpt:=hdpt+aux;
end;
until (abs(aux)<=abs(tol));
hdpt:= sinal*hdpt;
end
else
begin
aux_z:= z;
z:= z*z;
hdpt:=1.0;
aux := 1.0;
k:=0;
repeat
begin
k:= k+1;
aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
hdpt:=hdpt+aux;
end;
until (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
hdpt:= aux_z*hdpt;
hdpt:= sinal*hdpt;
end;
end;

```

```

PROCEDURE CoSenoAlg1(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);

```

```

var
aux,aux_z      :extended;
k,i_z          :longint;
sinal          :shortint;
begin
sinal:=+1;
i_z:= trunc((z/2)/PI);
z:= z - 2*PI*i_z;
if(z<0) then z:= - z;
if((z>PI/2) and (z<3*PI/2)) then
begin

```




```

        sinal:= -1*sinal;
        z:= abs(z - PI);
    end;
    if(z>(3*PI/2)) then z:= 2*PI - z;
    if(z<=(PI/4)) then
        begin
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            for k:= 2 to kmax do
                begin
                    aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end
    else
        begin
            z:=(PI/2) - z;
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            for k:= 1 to kmax do
                begin
                    aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            hdpt:= aux_z*hdpt;
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end;
    end;
end;

```

```

PROCEDURE CoSenoAlg2(z:extended;kmax:longint;
    var hdpt:extended);

```

```

var
    aux,aux_z      : extended;
    k,i_z          : longint;
    sinal          : shortint;
begin
    sinal:=+1;
    i_z:= trunc((z/2)/PI);
    z:= z - 2*PI*i_z;
    if(z<0) then z:= - z;
    if((z>PI/2) and (z<3*PI/2)) then
        begin
            sinal:= -1*sinal;
            z:= abs(z - PI);
        end;
    if(z>(3*PI/2)) then z:= 2*PI - z;
    if(z<=(PI/4)) then
        begin
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux:=(z/(2*kmax))/(2*kmax-1);
            hdpt:= hdpt - aux;
            for k:= kmax-1 downto 1 do
                begin
                    aux:= ((z/(2*k))/(2*k-1));
                    hdpt:=1.0 - aux*hdpt;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

        k:= k+1;
        hdpt:= sinal*hdpt;
        end
        else
        begin
            aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
            z:=(PI/2) - z;
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := (z/(2*kmax))/(2*kmax+1);
            hdpt:= hdpt - aux;
            for k:= kmax-1 downto 1 do
                begin
                    aux:= ((z/(2*k))/(2*k+1));
                    hdpt:=1.0 - aux*hdpt;
                end;
            end;
            hdpt:= aux_z*hdpt;
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end;
    end;

PROCEDURE CoSenoAlg3(z,tol:extended;var hdpt:extended);
var
    aux,aux_z :extended;
    k,i_z      :longint;
    sinal      :shortint;
begin
    sinal:=+1;
    i_z:= trunc((z/2)/PI);
    z:= z - 2*PI*i_z;
    if(z<0) then z:= - z;
    if((z>PI/2) and (z<3*PI/2)) then
        begin
            sinal:= -1*sinal;
            z:= abs(z - PI);
        end;
    if(z>(3*PI/2)) then z:= 2*PI - z;
    if(z<=(PI/4)) then
        begin
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=1;
            repeat
                hdpt:=hdpt+aux;
                aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
                k:=k+1;
            until (abs(aux)<=abs(tol));
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end
        else
        begin
            z:=(PI/2) - z;
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;

```



```

        k:=0; (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
        repeat
            begin
                k:= k+1;
                aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
                hdpt:=hdpt+aux;
            end;
        until (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
        hdpt:= aux_z*hdpt;
        hdpt:= sinal*hdpt;
    end;
end;

```

PROCEDURE CoSenoAlg4(z:extended;var hdpt:extended);

```

var
    impar:=0.0;
    aux,aux_z,tol:extended;
    k,i_z:longint;
    sinal:(k-1)*delta;:shortint;
begin
    tol:= +1e-50;
    sinal:=+1;
    i_z:= trunc((z/2)/PI);
    z:= z - 2*PI*i_z;
    if(z<0) then z:= - z;
    if((z>PI/2) and (z<3*PI/2)) then
        begin
            sinal:= -1*sinal;
            z:= abs(z - PI);
        end;
    if(z>(3*PI/2)) then z:= 2*PI - z;
    if(z<=(PI/4)) then
        begin
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=1;
            repeat
                begin
                    k:=k+1;
                    aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            until (abs(aux)<=abs(tol));
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end
    else
        begin
            z:=(PI/2) - z;
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=0;
            repeat
                begin
                    k:= k+1;
                    aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            until (abs(aux)<=abs(tol));
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end;
    end;
end;

```

```

until (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
aux := aux_z*hdpt;
k := longint;
hdpt := sin1*hdpt;
end;
end;

PROCEDURE SenoIntegral(z:extended;
var hdpt:extended);
var
k,kmax      : longint;
delta,soma_par,soma_impar,x  : extended;
begin
kmax:=10001;
delta:= 1.0/(kmax-1);
soma_par:= 0.0;
soma_impar:= 0.0;
for k:=2 to kmax-1 do
begin
x:=(k-1)*delta;
if((trunc(k/2)*2)<>k) then
begin
soma_par:= soma_par + Seno(z*x)/x;
end
else
begin
soma_impar:= soma_impar + Seno(z*x)/x;
end;
end;
hdpt:= (z + Seno(z) + 2*soma_par + 4*soma_impar)*delta/3;
end;

PROCEDURE JO_Alg1(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);
var
aux      :extended;
k        :longint;
begin
hdpt:=1.0;
aux := 1.0;
z:= -z*(z/4);
for k:=1 to kmax do
begin
aux:= aux*((z/k)/k);
hdpt:=hdpt+aux;
end;
end;

PROCEDURE JO_Alg2(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);
var
k      :longint;
begin
z:= -z*(z/4);
hdpt := 1+(z/kmax)/kmax;
for k:=Kmax-1 downto 1 do
hdpt := 1 + ((z/k)/k)*hdpt;
end;

PROCEDURE JO_Alg3(z,tol:extended;var hdpt:extended);

```



```

var
aux      :extended;
k        :longint;
begin
  hdpt := 1.;
  aux := 1.;
  k:=0;
  z:= -z*(z/4);
  repeat
    begin
      k:=k+1;
      aux:= aux*((z/k)/k);
      hdpt := hdpt + aux;
    end;
  until (abs(aux)<=abs(tol));
end;

PROCEDURE JO_Alg4(z:extended;var hdpt:extended);

var
aux, tol  :extended;
k         :longint;
begin
  tol:=1.0e-50;
  hdpt := 1.;
  aux := 1.;
  k:=0;
  z:= -z*(z/4);
  repeat
    begin
      k:=k+1;
      aux:= aux*((z/k)/k);
      hdpt := hdpt + aux;
    end;
  until (abs(aux)<=abs(tol));
end;

PROCEDURE JO_Alg5(z:extended;var hdpt:extended);

var
z_aux,w,a,b,c,d,e,f,g,
f_0,teta_0 : extended;
begin
  z_aux:=z;
  if(abs(z)<=3) then
    begin
      z:= z/3;
      w:= z*z;
      a:= +1.0000000;
      b:= -2.2499997;
      c:= +1.2656208;
      d:= -0.3163866;
      e:= +0.0444479;
      f:= -0.0039444;
      g:= +0.0002100;
      hdpt:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
    end
  else
    begin

```

```

    w:= 3.0/z;
    a:= -0.78539816;
    b:= -0.04166397;
    c:= -0.00003954;
    d:= +0.00262573;
    e:= -0.00054125;
    f:= -0.00029333;
    g:= +0.00013558;
    teta_0:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
    teta_0:= teta_0 + z_aux;
    a:= +0.79788456;
    b:= -0.00000077;
    c:= -0.00552740;
    d:= -0.00009512;
    e:= +0.00137237;
    f:= -0.00072805;
    g:= +0.00014476;
    f_0:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
    hdpt:=f_0*CoSeno(teta_0)/RaizQuad(z_aux);
end;
end;

```

```

PROCEDURE J1_Alg1(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);

```

```

var
aux,aux_z          :extended;
k                  :longint;

```

```

begin
    hdpt:=1.0;
    aux := 1.0;
    aux_z:=z/2;
    z:=-z*(z/4);
    for k:=1 to kmax do
        begin
            aux:= aux*((z/k)/(k+1));
            hdpt:=hdpt+aux;
        end;
    end;

```

```

    hdpt:= hdpt*aux_z;

```

```

end;

```

```

PROCEDURE J1_Alg2(z:extended;kmax:longint;
var hdpt:extended);

```

```

var
aux_z          : extended;
k              : longint;

```

```

begin
    aux_z:= z/2;
    z:=-z*(z/4);
    hdpt := 1+(z/kmax)/(kmax+1);
    for k:=Kmax-1 downto 1 do
        hdpt := 1 + ((z/k)/(k+1))*hdpt;
    end;
    hdpt:= hdpt*aux_z;

```

```

end;

```

```

PROCEDURE J1_Alg3(z,tol:extended;var hdpt:extended);

```

```

var
aux,aux_z          : extended;
k                  : longint;
begin

```



```

    aux_z:= z/2;
    z:= -z*(z/4);
    hdpt := 1.;
    aux := 1.;
    k:=0;
    repeat
        begin
            k:=k+1;
            aux:= aux*((z/k)/(k+1));
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    until (abs(aux)<=abs(tol));
    hdpt:= hdpt*aux_z;
end;

```

PROCEDURE J1_Alg4(z:extended;var hdpt:extended);

```

var
    aux,aux_z,tol
k
begin
    aux_z:= z/2;
    z:= -z*(z/4);
    tol:=1.0e-50;
    hdpt := 1.;
    aux := 1.;
    k:=0;
    repeat
        begin
            k:=k+1;
            aux:= aux*((z/k)/(k+1));
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    until (abs(aux)<=abs(tol));
    hdpt:= hdpt*aux_z;
end;

```

PROCEDURE J1_Alg5(z:extended;var hdpt:extended);

```

var
    z_aux,w,a,b,c,d,e,f,g,
    f_1,teta_1
begin
    z_aux:=z;
    if(abs(z)<=3) then
        begin
            z:= z/3;
            w:= z*z;
            a:= +0.50000000;
            b:= -0.56249985;
            c:= +0.21093573;
            d:= -0.03954289;
            e:= +0.00443319;
            f:= -0.00031761;
            g:= +0.00001109;
            hdpt:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
            hdpt:= hdpt*z_aux;
        end
    else
        begin
            aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    until (abs(aux)<=abs(tol));
    hdpt:= hdpt*aux_z;
end;

```

```

begin
  w:= 3.0/z;
  a:= +0.79788456;
  b:= +0.00000156;
  c:= +0.01659667;
  d:= +0.00017105;
  e:= -0.00249511;
  f:= +0.00113653;
  g:= -0.00020033;
  f_1:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
  a:= -2.35619449;
  b:= +0.12499612;
  c:= +0.00005650;
  d:= -0.00637879;
  e:= +0.00074348;
  f:= +0.00079824;
  g:= -0.00029166;
  teta_1:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
  teta_1:=teta_1 + z_aux;
  hdpt:=f_1*CoSeno(teta_1)/RaizQuad(z_aux);
end;
end;

```

```

PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg1(a,b,z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);

```

```

var
  aux :extended;
  k :longint;
begin
  if((b<int(0)) and (b=int(b))) then
  begin
    write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
    hdpt:= +1.1e+4932;
  end
  else
  begin
    if(a=0) then kmax:=0;
    if((a<0) and (a=int(a))) then kmax:=-trunc(a);
    hdpt := 1.;
    aux := 1.;
    for k:=1 to kmax do
    begin
      aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
      hdpt := hdpt + aux;
    end;
  end;
end;

```

```

PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg2(a,b,z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);

```

```

var
  k :longint;
begin
  if((b<0) and (b=int(b))) then
  begin
    write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
    hdpt:= +1.1e+4932;
  end
  else
  begin

```




```

    if(a=0) then
    begin
        hdpt:=1.;
        end
    else
    begin
        if((a<0) and (a=int(a))) then kmax:=-trunc(a);
        hdpt := 1+((a+kmax-1)/(b+kmax-1))*(z/kmax);
        for k:=Kmax-1 downto 1 do
        hdpt := 1 + (((a+k-1)/(b+k-1))*(z/k))*hdpt);
        end;
    end;
end;

PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg3(a,b,z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
var
    aux :extended;
    k :longint;
begin
    if((b<0) and (b=int(b))) then
    begin
        write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
        write(' Nao atingiu tolerancia especificada. ');
        hdpt:= +1.1e+4932;
        end
    else
    begin
        hdpt := 1.;
        aux := 1.;
        k:=0;
        repeat
            begin
                k:=k+1;
                aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
                hdpt := hdpt + aux;
            end;
        until (abs(aux)<=abs(tol));
        end;
    end;
end;

PROCEDURE HiperGeoDegPrimTipoAlg4(a,b,z:extended;
    var hdpt:extended);
var
    aux, tol :extended;
    k :longint;
begin
    if((b<0) and (b=int(b))) then
    begin
        write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
        write(' Nao atingiu tolerancia especificada. ');
        hdpt:= +1.1e+4932;
        end
    else
    begin
        tol:=1.0e-50;
        hdpt := 1.;
        aux := 1.;
        k:=0;
        repeat

```

```

        begin
        k:=k+1;
        aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
        hdpt := hdpt + aux;
        end;
    until (abs(aux)<=abs(tol));
end;
end;

```

```

PROCEDURE ExponencialAlg0(z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);

```

```

var
    aux    :extended;
    k      :longint;
begin
    hdpt := 1.;
    aux  := 1.;
    for k:=1 to kmax do
        begin
            aux:= aux*(z/k);
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    end;

```

```

PROCEDURE ExponencialAlg1(z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);

```

```

var
    aux    :extended;
    k      :longint;
    i      :shortint;
begin
    i:=1;
    if(z<0) then
        begin
            i:=-1;
            z:=-z;
        end;
    hdpt := 1.;
    aux  := 1.;
    for k:=1 to kmax do
        begin
            aux:= aux*(z/k);
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    if(i<0) then
        begin
            hdpt:=1./hdpt;
        end;
    end;

```

```

PROCEDURE ExponencialAlg2(z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);

```

```

var
    k      :longint;
    i      :shortint;
begin
    i:=1;
    if(z<0) then
        begin
            i:=-1;

```




```

        z:=-z;
        end;
        hdpt := 1+(z/kmax);
        for k:=Kmax-1 downto 1 do
            hdpt := 1 + (z/k)*hdpt;
            if(i<0) then
                begin
                    hdpt:=1./hdpt;
                end;
            end;
        end;
PROCEDURE ExponencialAlg3(z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
    var
        aux      :extended;
        k        :longint;
        i        :shortint;
    begin
        i:=1;
        if(z<0) then
            begin
                i:=-1;
                z:=-z;
            end;
        hdpt := 1.;
        aux  := 1.;
        k:=0;
        repeat
            begin
                k:=k+1;
                aux:= aux*(z/k);
                hdpt := hdpt + aux;
            end;
        until (abs(aux)<=abs(tol));
        if(i<0) then
            begin
                hdpt:=1./hdpt;
            end;
        end;
    end;
PROCEDURE ExponencialAlg4(z:extended;
    var hdpt:extended);
    var
        aux,tol      :extended;
        k            :longint;
        i            :shortint;
    begin
        i:=1;
        if(z<0) then
            begin
                i:=-1;
                z:=-z;
            end;
        tol:=1.0e-50;
        hdpt := 1.;
        aux  := 1.;
        k:=0;
        repeat
            begin
                k:=k+1;

```

```

        aux:= aux*(z/k);
        hdpt := hdpt + aux;
    end;
until (abs(aux)<=abs(tol));
    if(i<0) then
        begin
            hdpt:=1./hdpt;
        end;
end;

PROCEDURE ExponencialAlg5(z:extended;
    var hdpt:extended);
var
    aux,tol,aux_2 : extended;
    k               : longint;
    i               : shortint;
    m               : integer;
begin
    i:=1;
    if(z<0) then
        begin
            i:=-1;
            z:=-z;
        end;
    m:=trunc(z);
    z:=z-m;
    aux_2:=2.718281828459045235;
    tol:=1.0e-50;
    hdpt := 1.;
    aux := 1.;
    k:=0;
    repeat
        begin
            k:=k+1;
            aux:= aux*(z/k);
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    until (abs(aux)<=abs(tol));
    hdpt:=1.0/hdpt;
    for k:=1 to m do hdpt:=hdpt/aux_2;
        if(i>0) then
            begin
                hdpt:=1./hdpt;
            end;
    end;

PROCEDURE LogEAlg1(z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);
var
    aux,z_aux      : extended;
    k               : longint;
begin
    if(z<=0) then
        begin
            writeln('Argumento Invalido (z<0)...');
            hdpt:=-1e4932;
        end
    else
        begin
            z_aux:=(z-1)/(z+1);
            hdpt:= 2*z_aux*hdpt;
        end;
end;

```



```

        z:=z_aux*z_aux;
        hdpt:= 1.;
        aux := 1.;
        for k:=1 to kmax do
            begin
                aux:= aux*(z*((2*k-1)/(2*k+1)));
                hdpt := hdpt + aux;
            end;
        hdpt:= 2*z_aux*hdpt;
    end;
end;
writeln('Argumento Invalido (z<=0)...');
PROCEDURE LogEAlg2(z:extended;
    kmax:longint;var hdpt:extended);
var
    z_aux : extended;
    k      : longint;
begin
    if(z<=0) then
        begin
            writeln('Argumento Invalido (z<=0)...');
            hdpt:=-1e4932;
        end
    else
        begin
            z_aux:=(z-1)/(z+1);
            z:=z_aux*z_aux;
            hdpt:= 1+(z*(2*kmax-1)/(2*kmax+1));
            for k:=Kmax-1 downto 1 do
                hdpt := 1 + (z*(2*k-1)/(2*k+1))*hdpt;
            end;
            hdpt:= 2*z_aux*hdpt;
        end;
    end;
PROCEDURE LogEAlg3(z,tol:extended;
    var hdpt:extended);
var
    aux,z_aux : extended;
    k          : longint;
begin
    if(z<=0) then
        begin
            writeln('Argumento Invalido (z<=0)...');
            hdpt:=-1e4932;
        end
    else
        begin
            z_aux:=(z-1)/(z+1);
            z:=z_aux*z_aux;
            hdpt:= 1.;
            aux := 1.;
            k:=0;
            repeat
                begin
                    k:=k+1;
                    aux:= aux*(z*((2*k-1)/(2*k+1)));
                    hdpt := hdpt + aux;
                end;
            until (abs(aux)<=abs(tol));
            hdpt:= 2*z_aux*hdpt;
        end;
    end;

```



```

        end; (abs(aux)<=abs(tol));
    end; hdpt:=1.0/hdpt;
    for k:=1 to m do hdpt:=hdpt/aux_2;
PROCEDURE LogEAlg4(z:extended;
    var hdpt:extended);
    var
        aux,tol,z_aux      : extended;
        k                  : longint;
    begin
        if(z<=0) then
            begin
                writeln('Argumento Invalido (z<=0)...');
                hdpt:=-1e4932;
            end
        else
            begin
                if((z=0) or (z=1)) then
                    z_aux:=(z-1)/(z+1);
                    z:=z_aux*z_aux;
                    tol:=1.0e-50;
                    hdpt := 1.;
                    aux  := 1.;
                    k:=0;
                    repeat
                        begin
                            k:=k+1;
                            aux:= aux*(z*((2*k-1)/(2*k+1)));
                            hdpt := hdpt + aux;
                        end;
                    until (abs(aux)<=abs(tol));
                    hdpt:=2*z_aux*hdpt;
                end;
            end;
        end;
PROCEDURE LogEAlg5(z:extended;
    var hdpt:extended);
    var
        aux,tol,aux_2      : extended;
        k,i,m              : longint;
        i                  : shortint;
        m                  : integer;
    begin
        i:=1;
        if(z<0) then
            begin
                i:=-1;
                z:=-z;
            end;
        m:=trunc(z);
        z:=z-m;
        aux_2:=2.718281828459045235;
        tol:=1.0e-50;
        hdpt := 1.;
        aux  := 1.;
        k:=0;
        repeat
            begin
                k:=k+1;
                aux:= aux*(z/k);
                hdpt := hdpt + aux;
            end;
        until (abs(aux)<=abs(tol));
        hdpt:=aux_2*hdpt;
    end;

```



```

var
  until (abs(aux)<=abs(tol));
  aux,f      :extended;
  k          :longint;
  hdpt:=1.0/hdpt;
  for k:=1 to m do hdpt:=hdpt/aux_2;
    if(i>0) then
      begin
        if((b<0) and (b=trunc(b))) then
          hdpt:=1./hdpt;
        end;
      end;
end;

```

```

PROCEDURE ZetaAlg1(kmax:longint;z:extended;
  var hdpt:extended);

```

```

var
  aux,aux_2 :extended;
  k          :longint;
begin
  hdpt:=0.;
  if((kmax=0) or (z=0)) then
    begin
      hdpt:=0.0;
    end
  else
    begin
      aux:=0.0;
      for k:=1 to kmax do
        hdpt:=hdpt+1.0/(z+(k-1));
      end;
    end;
end;

```

```

PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg1(a,b,z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);

```

```

var
  aux,f_zeta, f_zeta_ant :extended;
  k                    :longint;
begin
  if((b<trunc(b)) and (b=trunc(b))) then
    begin
      write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
      hdpt:= +1.1e+4932;
    end
  else
    begin
      if(a=0) then kmax:=0;
      if((a<0) and (a=trunc(a))) then kmax:=-trunc(a);
      hdpt := 0.0;
      aux  := 1.;
      f_zeta:=0.0;
      f_zeta_ant:= 1.0;
      for k:=1 to kmax do
        begin
          f_zeta:=f_zeta + 1.0/(k+a-1);
          aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
          aux:= aux*(f_zeta/f_zeta_ant);
          hdpt := hdpt + aux;
          f_zeta_ant:=f_zeta;
        end;
      end;
    end;
end;

```

```

PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg2(a,b,z:extended;
  kmax:longint;var hdpt:extended);

```



```

var
  aux, f_zeta      :extended;
  k                :longint;

begin
  if((b<0) and (b=int(b))) then
    begin
      write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
      hdpt:= +1.1e+4932;
    end
  else
    begin
      if(a=0) then
        begin
          hdpt:=0.;
        end
      else
        begin
          if((a<0)and(a=int(a))) then kmax:=-trunc(a);

          ZetaAlg1(kmax,a,f_zeta);
          aux:=((a+kmax-1)/(b+kmax-1))*(z/kmax)*f_zeta;
          f_zeta:=f_zeta-1./(a+kmax-1);
          hdpt := f_zeta + aux;
          for k:=Kmax-1 downto 1 do
            begin
              f_zeta:=f_zeta-1./(a+k-1);
              hdpt := f_zeta +
                (((a+k-1)/(b+k-1))*(z/k))*hdpt;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

```

```

PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg3(a,b,z,tol:extended;
  var hdpt:extended);

```

```

var
  aux, f_zeta, f_zeta_ant :extended;
  k                        :longint;

begin
  if((b<0) and (b=int(b))) then
    begin
      write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
      write(' Nao atingiu tolerancia especificada. ');
      hdpt:= +1.1e+4932;
    end
  else
    begin
      hdpt := 0.;
      aux  := 1.;
      f_zeta:=0.0;
      f_zeta_ant:=1.0;
      k:=0;
      repeat
        begin
          k:=k+1;
          f_zeta:=f_zeta + 1.0/(a+(k-1));
          aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
          aux:=aux*(f_zeta/f_zeta_ant);
          hdpt := hdpt + aux;

```



```

        f_zeta_ant:=f_zeta;
    end;
until (abs(aux)<=abs(tol));
end;
end;

PROCEDURE HiperGeoDegModifAlg4(a,b,z:extended;
    var hdpt:extended);
var
    aux, f_zeta, f_zeta_ant,tol    :extended;
    k                               :longint;
begin
    if((b<0) and (b=int(b))) then
        begin
            write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
            write(' Nao atingiu tolerancia especificada. ');
            hdpt:= +1.1e+4932;
            end
        else
            begin
                tol:=1.e-50;
                hdpt := 0.;
                aux  := 1.;
                f_zeta:=0.0;
                f_zeta_ant:=1.0;
                k:=0;
                repeat
                    begin
                        k:=k+1;
                        f_zeta:=f_zeta + 1.0/(a+(k-1));
                        aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
                        aux:=aux*(f_zeta/f_zeta_ant);
                        hdpt := hdpt + aux;
                        f_zeta_ant:=f_zeta;
                    end;
                until (abs(aux)<=abs(tol));
            end;
        end;
end;

FUNCTION RaizQuad(z:extended):extended;
var
    aux,semente
    begin
        tol:=1e-30;
        aux:= 0.668740+0.445827*z-0.139321/(z+0.25);
        if(z=0) then
            begin
                aux:=0;
            end
        else
            begin
                if(z<0) then
                    begin
                        writeln('Argumento invalido...');
                    end
                else
                    begin
                        repeat
                            semente:=aux;

```



```

        aux:=semente + (z/semente - semente)/2;
        until(abs(aux-semente)<=abs(tol));
        end;
    end;
    RaizQuad:= aux;
end;
FUNCTION Seno(z:extended):extended;
var
    aux,aux_z,tol,hdpt      :extended;
    k,i_z                   :longint;
    sinal                   :shortint;
begin
    tol:= +1e-50;
    sinal:=+1;
    i_z:= trunc((z/2)/PI);
    z:= z - 2*PI*i_z;
    if(z<0) then
        begin
            sinal:= -1*sinal;
            z:= - z;
        end;
    if(z>PI) then
        begin
            sinal:= -1*sinal;
            z:= z - PI;
        end;
    if(z>(PI/2)) then z:= PI - z;
    if(z>(PI/4)) then
        begin
            z:=(PI/2) - z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=1;
            repeat
                begin
                    k:=k+1;
                    aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            until (abs(aux)<=abs(tol));
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end
    else
        begin
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=0;
            repeat
                begin
                    k:= k+1;
                    aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            until (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
            hdpt:= aux_z*hdpt;
        end;
    end;
end;

```




```

var
    hdpt:= sinal*hdpt;
end;
Seno:=hdpt;
end;
tol:=1.0e-50;
FUNCTION CoSeno(z:extended):extended;
var
    k:=0;
    aux,aux_z,tol,hdpt      :extended;
    k,i_z                   :longint;
    sinal                   :shortint;
begin
    tol:= +1e-50;
    sinal:=+1;
    i_z:= trunc((z/2)/PI);
    z:= z - 2*PI*i_z;
    if(z<0) then z:= - z;
    if((z>PI/2) and (z<3*PI/2)) then
        begin
            sinal:= -1*sinal;
            z:= abs(z - PI);
        end;
    if(z>(3*PI/2)) then z:= 2*PI - z;
    if(z<=(PI/4)) then
        begin
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=1;
            repeat
                begin
                    k:=k+1;
                    aux:= -aux*((z/(2*k-2))/(2*k-3));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            until (abs(aux)<=abs(tol));
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end
    else
        begin
            z:=(PI/2) - z;
            aux_z:= z;
            z:= z*z;
            hdpt:=1.0;
            aux := 1.0;
            k:=0;
            repeat
                begin
                    k:= k+1;
                    aux:= -aux*((z/(2*k))/(2*k+1));
                    hdpt:=hdpt+aux;
                end;
            until (abs(aux*aux_z)<=abs(tol));
            hdpt:= aux_z*hdpt;
            hdpt:= sinal*hdpt;
        end;
    CoSeno:= hdpt;
end;
FUNCTION J0(z:extended):extended;

```



```

var
  aux,tol,hdpt      : extended;
  k                 : longint;
begin
  tol:=1.0e-50;
  hdpt := 1.;
  aux  := 1.;
  k:=0;
  z:= -z*(z/4);
  repeat
    begin
      k:=k+1;
      aux:= aux*((z/k)/k);
      hdpt := hdpt + aux;
    end;
  until (abs(aux)<=abs(tol));
  J0:= hdpt;
end;

FUNCTION J0_MinMax(z:extended):extended;

var
  z_aux,w,a,b,c,d,e,f,g,
  f_0,teta_0,hdpt      : extended;

begin
  z_aux:=z;
  if(abs(z)<=3) then
    begin
      z:= z/3;
      w:= z*z;
      a:= +1.00000000;
      b:= -2.24999997;
      c:= +1.2656208;
      d:= -0.3163866;
      e:= +0.0444479;
      f:= -0.0039444;
      g:= +0.0002100;
      hdpt:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
    end
  else
    begin
      w:= 3.0/z;
      a:= -0.78539816;
      b:= -0.04166397;
      c:= -0.00003954;
      d:= +0.00262573;
      e:= -0.00054125;
      f:= -0.00029333;
      g:= +0.00013558;
      teta_0:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
      teta_0:= teta_0 + z_aux;
      a:= +0.79788456;
      b:= -0.00000077;
      c:= -0.00552740;
      d:= -0.00009512;
      e:= +0.00137237;
      f:= -0.00072805;
      g:= +0.00014476;
      f_0:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
    end
  end;

```



```

        hdpt:=f_0*CoSeno(teta_0)/RaizQuad(z_aux);
    end;
    J0_MinMax:= hdpt;
end;

FUNCTION J1(z:extended):extended;
var
    aux,aux_z,tol,hdpt : extended;
    k : longint;
begin
    aux_z:= z/2;
    z:= -z*(z/4);
    tol:=1.0e-50;
    hdpt := 1.;
    aux := 1.;
    k:=0;
    repeat
        begin
            k:=k+1;
            aux:= aux*((z/k)/(k+1));
            hdpt := hdpt + aux;
        end;
    until (abs(aux)<=abs(tol));
    hdpt:= hdpt*aux_z;
    J1:= hdpt;
end;

```

```

FUNCTION J1_MinMax(z:extended):extended;
var
    z_aux,w,a,b,c,d,e,f,g,
    f_1,teta_1,hdpt : extended;
begin
    z_aux:=z;
    if(abs(z)<=3) then
        begin
            z:= z/3;
            w:= z*z;
            a:= +0.50000000;
            b:= -0.56249985;
            c:= +0.21093573;
            d:= -0.03954289;
            e:= +0.00443319;
            f:= -0.00031761;
            g:= +0.00001109;
            hdpt:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
            hdpt:= hdpt*z_aux;
        end
    else
        begin
            w:= 3.0/z;
            a:= +0.79788456;
            b:= +0.00000156;
            c:= +0.01659667;
            d:= +0.00017105;
            e:= -0.00249511;
            f:= +0.00113653;
            g:= -0.00020033;

```



```

f_1:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
a:= -2.35619449;
b:= +0.12499612;
c:= +0.00005650;
d:= -0.00637879;
e:= +0.00074348;
f:= +0.00079824;
g:= -0.00029166;
teta_1:=a+w*(b+w*(c+w*(d+w*(e+w*(f+w*g)))));
teta_1:=teta_1 + z_aux;
hdpt:=f_1*CoSeno(teta_1)/RaizQuad(z_aux);
end;
J1_MinMax:= hdpt;
end;

```

FUNCTION HiperGeoDegPrimTipo(a,b,z:extended):extended;

```

var
aux,tol,hdpt      :extended;
k                  :longint;
begin
  if((b<0) and (b=int(b))) then
    begin
      write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
      write(' Nao atingiu tolerancia especificada. ');
      hdpt:= +1.1e+4932;
      end
    else
      begin
        tol:=1.0e-50;
        hdpt := 1.;
        aux  := 1.;
        k:=0;
        repeat
          begin
            k:=k+1;
            aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
            hdpt := hdpt + aux;
          end;
        until (abs(aux)<=abs(tol));
      end;
    HiperGeoDegPrimTipo:= hdpt;
  end;

```

FUNCTION Exponencial(z:extended):extended;

```

var
aux,tol,hdpt      :extended;
k                  :longint;
i                  :shortint;
begin
  i:=1;
  if(z<0) then
    begin
      i:=-1;
      z:=-z;
    end;
  tol:=1.0e-50;
  hdpt := 1.;
  aux  := 1.;

```




```

k:=0;
repeat
  begin
    k:=k+1;
    aux:= aux*(z/k);
    hdpt := hdpt + aux;
  end;
until (abs(aux)<=abs(tol));
  if(i<0) then
    begin
      hdpt:=1./hdpt;
    end;
Exponencial:= hdpt;
end;

```

FUNCTION LogE(z:extended):extended;

```

var
  aux,tol,z_aux      : extended;
  k                  : longint;
begin
  if(z<=0) then
    begin
      writeln('Argumento Invalido (z<=0)...');
      hdpt:=-1e4932;
    end
  else
    begin
      z_aux:=(z-1)/(z+1);
      z:=z_aux*z_aux;
      tol:=1.0e-50;
      hdpt := 1.;
      aux  := 1.;
      k:=0;
      repeat
        begin
          k:=k+1;
          aux:= aux*(z*((2*k-1)/(2*k+1)));
          hdpt := hdpt + aux;
        end;
      until (abs(aux)<=abs(tol));
      hdpt:=2*z_aux*hdpt;
    end;
  LogE:= hdpt;
end;

```

FUNCTION Zeta(kmax:longint;z:extended):extended;

```

var
  aux,aux_2,hdpt      : extended;
  k                  : longint;
begin
  if((kmax=0) or (z=0.0)) then
    begin
      hdpt:=0.0;
    end
  else
    begin
      hdpt:=0.0;
      for k:=1 to kmax do

```

```

        hdpt:=hdpt+1.0/(z+(k-1));
    end;
Zeta:= hdpt;
end;

FUNCTION HiperGeoDegModif(a,b,z:extended):extended;

var
aux,f_zeta,f_zeta_ant,tol,hdpt    :extended;
k                                  :longint;
begin
    if((b<0) and (b=int(b))) then
    begin
        write(' Argumento invalido (b<0 e inteiro). ');
        write(' Nao atingiu tolerancia especificada. ');
        hdpt:= +1.1e+4932;
    end
    else
    begin
        tol:=1.e-50;
        hdpt := 0.;
        aux  := 1.;
        f_zeta:=0.0;
        f_zeta_ant:=1.0;
        k:=0;
        repeat
            begin
                k:=k+1;
                f_zeta:=f_zeta + 1.0/(a+(k-1));
                aux:= aux*((a+(k-1))/(b+(k-1))*(z/k));
                aux:=aux*(f_zeta/f_zeta_ant);
                hdpt := hdpt + aux;
                f_zeta_ant:=f_zeta;
            end;
        until (abs(aux)<=abs(tol));
    end;
    HiperGeoDegModif:= hdpt;
end;

END.

```



