



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

***CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO ESTRUTURAL
UTILIZANDO MATERIAIS INTELIGENTES E
DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES***

PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES

1210001474



174

Ilha Solteira - SP



**CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO ESTRUTURAL
UTILIZANDO MATERIAIS INTELIGENTES
E DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Aluno: Paulo José Paupitz Gonçalves

Orientador: Vicente Lopes Junior

Co - Orientador: Edvaldo Assunção

Data da Realização: 21-03-2003

Horário: 14 horas

LOCAL: Anfiteatro da Biblioteca – FEIS

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Gonçalves, Paulo José Paupitz

G635c Controle ativo de vibração estrutural utilizando materiais inteligentes e desigualdades matriciais lineares/ Paulo José Paupitz Gonçalves. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2003
114 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2003.

Orientador: Vicente Lopes Junior

Co-Orientador: Edvaldo Assunção

Bibliografia: p. 113-114

1. Vibração - Controle. 2. Materiais inteligentes. 3. Desigualdades matriciais lineares.

30503000

CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO ESTRUTURAL UTILIZANDO MATERIAIS INTELIGENTES E DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Paulo José Paupitz Gonçalves

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MECÂNICA DOS SÓLIDOS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. João Antonio Pereira
Coordenador



COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior - Orientador

Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Proc. 063104-MPD 50

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÊC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
13.10.03	31.03.04
REGISTRADO POR	TOMBO
Ailza	Te. 1474
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Recepção auto R\$ 10,00	G635e

Ilha Solteira – SP, março de 2003

sup 214589
sup 56114



À

**Giovanna e Lucca
pelo amor, apoio e compreensão.**

Agradecimentos

Vicente, por apoiar e acreditar que eu poderia desenvolver este trabalho.

Edvaldo, por toda ajuda e conselhos na realização deste trabalho.

Aos amigos de mestrado, em especial aos colegas do Grupo de Sistemas e Materiais Inteligentes.

À todos os que me ajudaram durante estes dois anos de mestrado.

Ao PPGEM, DEM da FEIS-UNESP.

Ao CAPES, pelo suporte financeiro.

Sumário

CAPÍTULO 1 : INTRODUÇÃO 01

1.1. Motivação	02
1.2. Objetivos da dissertação.....	03
1.3. Organização da dissertação	03

CAPÍTULO 2 : MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS PARA CONTROLE DE VIBRAÇÃO 04

2.1. Modelagem no domínio da frequência para sistemas SISO.....	06
2.2. Modelagem no domínio da frequência para sistemas MIMO	07
2.3. Modelagem no domínio do tempo	07
2.3.1. Equação de estado para um sistema linear invariante no tempo.....	09
2.4. Equação de estado para sistemas mecânicos lineares	10
2.5. Representação de incertezas no modelo.....	11
2.5.1. Incertezas estruturadas.....	12
2.5.2. Incertezas não estruturadas	15

CAPÍTULO 3 : FUNDAMENTOS DO CONTROLE DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS 17

3.1. Sistemas de controle passivo e ativo.....	18
3.2. Teoria da estabilidade	19
3.3. Segunda teoria da estabilidade de Liapunov	20



3.4. Estabilidade de sistemas de primeira ordem	22
3.5. Estabilidade BIBO (Bounded Input Bounded Output).....	24
3.6. Estabilidade de sistemas de múltiplos graus de liberdade	24
3.6.1. Sistemas sem amortecimento	24
3.6.2. Sistemas com amortecimento.....	26
3.7. Análise de sistemas de segunda ordem.....	27
3.8. Descrição na forma de espaço de estados	29
3.9. Análise por função de transferência	32
3.10. Conceitos básicos de controle por realimentação.....	34
3.11. Projeto de sistemas de controle no espaço de estados	36
3.12. Controlabilidade	37
3.13. Observabilidade.....	39
3.14. Estabilizabilidade e detectabilidade.....	40
3.15. Princípio da dualidade	40
3.16. Observadores de estado.....	41

CAPÍTULO 4 : REVISÃO DOS CONCEITOS DE PIEZELETRICIDADE

45

4.1. Definição de materiais ativos	46
4.2. Materiais ativos	47
4.3. Equações constitutivas da piezeletricidade	48
4.4. Sensores e atuadores para controle de vibração	49
4.5. Atuadores piezelétricos.....	50
4.5.1. Atuador de flexão	51
4.5.2. Atuador longitudinal.....	52
4.6. Sensores piezelétricos.....	52

CAPÍTULO 5 : DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

55

5.1. História do uso das LMIs	55
5.2. Definições sobre as LMIs.....	57
5.3. Estudo da estabilidade utilizando LMIs.....	58
5.4. Aplicação de controle utilizando LMIs.....	59
5.5. Projeto de sistemas de controle utilizando LMIs.....	60
5.5.1. Projeto de sistemas de controle utilizando LMIs de sistemas com incertezas politópicas.....	61
5.6. Especificações de desempenho.....	62
5.6.1. Espaços normalizados.....	62
5.6.2. Espaço de Hilbert	63
5.7. Espaços Hardy $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$	64
5.8. Otimização $\mathcal{H}_2$	66
5.8.1. Parametrização convexa do problema $\mathcal{H}_2$	68
5.9. Otimização $\mathcal{H}_\infty$	70
5.10. Sistemas de controle com restrições de projeto.....	73
5.10.1. Limitação das amplitudes de saída	74
5.10.2. Taxa de decaimento	75
5.11. Síntese de realimentação de estado com restrições de projeto	76

CAPÍTULO 6 : APLICAÇÕES DE CONTROLE DE VIBRAÇÃO

79

6.1. Aplicação 1	79
6.2. Aplicação 2.....	84
6.3. Aplicação 3.....	94

CONCLUSÃO

107

REFERENCIAS BIBLIGRÁFICAS

113



Lista de figuras

Figura 2.1. Modelagem matemática de um sistema dinâmico.....	04
Figura 2.2. Diagrama de blocos da resposta em frequência de um sistema	07
Figura 2.3. Representação em diagrama de blocos de um sistema em espaço de estados	09
Figura 2.4. Representação de incertezas no espaço de parâmetros.....	15
Figura 3.1. Diagrama de blocos do controle passivo	18
Figura 3.2. Diagrama de blocos do controle ativo	18
Figura 3.3. Classificação do controle ativo de vibração.....	19
Figura 3.4. Resposta temporal de sistema estável (a) e assintoticamente estável (b)	20
Figura 3.5. Raízes características de um sistema de segunda ordem	29
Figura 3.6. Representação gráfica da representação em espaço de estados	30
Figura 3.7. Representação em Diagrama de Blocos da Função de Transferência.....	34
Figura 3.8. Diagrama de Blocos de Sistema com Controle de Realimentação	34
Figura 3.9. Diagrama de blocos do sistema com realimentação de estados.....	37
Figura 3.10. Representação gráfica de um observador dinâmico	42
Figura 3.11. Sistema de controle por realimentação de estados utilizando observador.....	43
Figura 4.1. Ilustração do efeito direto e do efeito inverso	47
Figura 4.2. Esquema de entrada e saída de um material ativo	48
Figura 4.3. Elemento Piezelétrico (PZT).....	49
Figura 4.4. Voltagem aplicada em fase gerando movimento longitudinal	50
Figura 4.5. Voltagem aplicada em antifase gerando movimento lateral	50
Figura 4.6. Elementos piezelétricos ligados em fase	51
Figura 4.7. Elementos piezelétricos ligados em anti-fase	51
Figura 4.8. Atuador vibracional de flexão.....	52

Figura 4.9. Modelos equivalentes de um sensor piezelétrico.....	53
Figura 5.1. Interpretação geométrica do Teorema 5.1.....	59
Figura 5.2. Sistema com incertezas do tipo norma limitada	73
Figura 5.3. Diagrama de blocos de sistema realimentado com incertezas do tipo norma limitada.....	76
Figura 6.1. Sistema massa-mola de dois graus de liberdade	79
Figura 6.2. Diagrama de blocos do sistema da figura 6.1.....	80
Figura 6.3. Resposta à condição inicial do sistema com a variação do parâmetro k	83
Figura 6.4. Reposta dos controladores a condição inicial $\mathbf{x}(0)_2$	83
Figura 6.5. Sistema de três graus de liberdade	84
Figura 6.6. FRF da função de transferência de u_3 para y_3	86
Figura 6.7. FRF do sistema em malha aberta e malha fechada com controlador ótimo $\mathcal{H}_2$	88
Figura 6.8. FRF do sistema em malha aberta e em malha fechada com controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$	89
Figura 6.9. Reposta do atuador à condição inicial para o controlador ótimo $\mathcal{H}_2$	90
Figura 6.10. Reposta do atuador à condição inicial para o controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$	90
Figura 6.11. FRF para o sistema em malha aberta e em malha fechada com controlador sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$	91
Figura 6.12. Reposta do atuador à condição inicial para o controlador sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$	91
Figura 6.13. Sistema de realimentação de estados com observador.....	92
Figura 6.14. Evolução do erro entre o sistema e o observador de estados	93
Figura 6.15. Esquema da viga engastada com atuador piezelétrico	94
Figura 6.16. Viga engastada com atuadores piezelétricos	95
Figura 6.17. Esquema da modelagem por elementos finitos considerando dois graus de liberdade por nó	95
Figura 6.18. Atuador de flexão agindo no elemento 2	96

Figura 6.19. Esquema da medida de posição do último nó	97
Figura 6.20. Esquema do teste experimental	97
Figura 6.21. Função de transferência (magnitude) do sistema experimental e do modelo	98
Figura 6.22. FRF dos sistemas: malha aberta, malha fechada – $\mathcal{H}_2$ (ótimo) e Malha fechada $\mathcal{H}_\infty$ (ótimo)	100
Figura 6.23. FRF do sistema em malha aberta e sistema em malha fechada	100
Figura 6.24. Reposta do atuador à condição inicial de 1m/s no último nó.....	101
Figura 6.25. Sistema realimentado com observador de estados	101
Figura 6.26. Reposta do atuador à condição inicial de 1m/s no último nó do sistema utilizando um observador de estados.....	102
Figura 6.27. Esquema de um braço mecânico	103
Figura 6.29. Parâmetros do sistema	103
Figura 6.29. Variação do erro de posição da massa para uma onda quadrada	104
Figura 6.29. Posição da massa quando utilizado um ou dois atuadores piezelétricos	105

Lista de Símbolos

A	Matriz de estados
B	Matriz de ganhos de entrada
C	Matriz de ganhos de saída
D	Matriz de entradas diretas
d(.)	Sinal de distúrbios no domínio da frequência
E(.)	Sinal de erro no domínio da frequência
e(.)	Sinal de erro no domínio do tempo
f(.)	Vetor de forças generalizadas
H(.)	Função de Transferência no domínio da frequência
I	Matriz identidade
L	Matriz de ganhos do observador
M	Matriz de massa
m	massa
n	ordem da matriz de estados
s	operado de Laplace
S	Matriz de incertezas politópicas
U(s)	transformada de Laplace do sinal de entrada
u(t)	vetor de entradas
x(t)	vetor de estados
y(t)	vetor de saídas
Y(s)	transformada de Laplace do sinal de saída

Lista de Abreviaturas

BIBO	Estabilidade externa (<i>Bound Input – Bound Output</i>)
LMI	Desigualdade Matricial Linear (<i>Linear Matrix Inequality</i>)
LQG	Controle Linear Quadrático Gaussiano
LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
LTI	Sistema Linear Invariante no Tempo (<i>Linear Time Invariante</i>)
MIMO	Sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (<i>Multiple Input – Multiple Output</i>)
SISO	Sistemas de um entrada e uma saída (<i>Single Input – Single Output</i>)
PVDF	Polyvinylidene fluoride
PZT	Lead circonate titanate

Resumo. *Este trabalho trata de um estudo sobre o controle ativo de vibração estrutural utilizando desigualdades matriciais lineares ou LMIs. São apresentadas algumas técnicas de modelagem de estruturas mecânicas como o método por elementos finitos. Considera-se que o controle estrutural é feito por entradas secundárias de atuadores piezelétricos. Por não considerar os efeitos destes atuadores no modelo da estrutura, um controle robusto é utilizado. Além disto o modelo não está livre de erros, como o truncamento de altas frequências. As LMIs são ferramentas poderosas que têm sido utilizadas como técnica de projeto de controladores otimizados e robustos. Uma das vantagens da formulação por meio de LMIs é que existem garantias de se encontrar uma solução para o problema, se ela existir. Além disto restrições e especificações de projeto podem ser escritas na forma de LMIs.*

Abstract. *The aim of this work is the study of structural vibration control using Linear Matrix Inequalities - LMIs. Some modeling techniques are shown, as the finite element method. The structural control uses secondary sources of force of piezelectric actuators. In the structural model, the actuators effect are not considerad, so a robust control could overcome this difficulty. Besides, the plant model has uncertainties as the error due to high frequencies truncation. The LMIs are powerful tool that have been used as a technique of robust and optimized controller design. Among the advantages using LMIs is the guarantee of finding a solution for the problem, if it exists. Further more specifications and design constraints can be written in the LMI form.*



Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A eliminação da vibração estrutural tem atraído a atenção de engenheiros desde que as máquinas com partes móveis foram inventadas. Atualmente grande parte do esforço tem sido dedicada à redução do ruído causado por vibração estrutural. Direcionadas pela necessidade de se diminuir peso e reduzir ruídos principalmente na indústria aeroespacial, as técnicas de controle ativo de vibração estrutural e acústica têm sofrido rápidas mudanças nos últimos trinta anos.

O controle e redução dos níveis indesejados de vibração têm sempre que ser iniciado pelo estudo das fontes de vibração e os esforços devem se concentrar na minimização da magnitude dos níveis de excitação como, por exemplo, o balanceamento de máquinas rotativas, a suavização de um fluxo turbulento e outros. Entretanto, sempre existe um limite de redução possível para cada caso.

Muitos métodos diferentes de controle de vibração são disponíveis e cada um tem sua própria esfera de aplicação. Tais métodos podem ser resumidos em:

- Projeto estrutural;
- Seleção de material;
- Adição ou remoção de massa ou rigidez;
- Adição de amortecimento passivo ou ativo.

O controle ativo de vibração devido a uma dada fonte é fundamentado em três elementos: massa, rigidez e amortecimento. Respostas estruturais sob diferentes condições de excitação dependerão dessas características em várias formas. Por exemplo, uma resposta pode ser altamente dependente da massa, enquanto que outra pode ser quase independente. É necessário conhecer o problema em particular para que ele possa ser tratado de forma adequada, e ainda saber quais são as características importantes que determinam o nível de vibração resultante.



1.1. Motivação

O sentido da palavra adaptação é tipicamente associado à modificação, mudança ou ajuste que ocorre em um período de tempo. Quando se estuda biologia, define-se adaptação como sendo a característica de um organismo em se tornar mais hábil para viver em seu ambiente. O conceito de uma estrutura adaptativa é inspirado na definição dada pela biologia, ou seja, tem a ver com a característica que uma estrutura tem de se adaptar, quando sujeita a modificações ambientais devido a força, temperatura, pressão, deslocamento, ou mesmo variações estruturais devido ao desgaste ou quebra de equipamentos.

Enquanto as técnicas convencionais de amortecimento passivo acrescentam peso substancial na estrutura, diminuindo seu desempenho, as técnicas de controle ativo utilizando materiais inteligentes, podem oferecer soluções com alto desempenho para problemas vibratórios, com acréscimo de peso estrutural praticamente desprezível. O efeito do acoplamento eletro-mecânico deve ser avaliado para cada caso.

O aumento dos custos dos combustíveis e a introdução de conceitos ecológicos contribuíram para que as indústrias automobilística e aeronáutica pesquisassem soluções de amortecimento de seus produtos. Utilizando-se amortecimento passivo, um Boeing 747 tem um acréscimo de peso de aproximadamente 1,5 toneladas, e um automóvel entre 3,5 e 22,5 quilogramas. Com a diminuição da massa dos materiais amortecedores passivos, pode-se obter uma maior economia de combustível e menor emissão de poluentes para a atmosfera. O controle ativo de vibrações pode, efetivamente, diminuir ruídos em associação à redução de massa, quando comparado com as técnicas de amortecimento passivo.

As indústrias automobilística e aeronáutica internacionais têm gastado milhões de dólares todos os anos em pesquisas para obtenção de novos materiais que sejam leves e em tecnologias de amortecimento ativo de vibrações acústica e estrutural. O termo controle ativo é associado a sistemas de materiais inteligentes, que são compostos por materiais piezelétricos, eletro-resistivos e magneto-resistivos, fluidos e sólidos electro-reológicos, ligas de memória de forma ou fibras óticas.

As propriedades de alguns destes materiais já eram conhecidas a longo tempo, como no caso dos irmãos Pierre e Jacques Curie que descreveram o efeito piezelétrico em 1880. Porém, somente a partir do começo da década de 90 estes materiais passaram a ter aplicações práticas.

O termo "estruturas inteligentes" engloba uma área de estudos recente, entretanto, já muito difundida na comunidade científica. Tal área é conhecida como o resultado da integração

de áreas de pesquisa avançada de sensores e atuadores, processamento de sinais e projeto de controladores. O projeto destes sistemas é constituído de três fases principais: projeto estrutural, projeto de sistemas de controle e posicionamento dos sensores e atuadores. O projeto estrutural está relacionado com o comportamento estático e dinâmico do sistema. Métodos de elementos finitos juntamente com técnicas de análise modal são frequentemente utilizados no primeiro estágio. O projeto de controladores envolve a escolha da lei de controle como também de seus parâmetros, enquanto a terceira fase constitui o posicionamento de sensores e atuadores e os efeitos do sinal de controle. Conseqüentemente para propósito de um projeto ótimo, a estrutura, o controlador e o posicionamento dos atuadores e sensores devem ser considerados simultaneamente no projeto.

1.2. Objetivos da Dissertação

Esta dissertação trata de um estudo sobre controle ativo de vibração estrutural. O projeto de sistemas ótimos de controle de vibração requer, além do estudo do sistema, o conhecimento dos vários tipos de atuadores empregados. Os atuadores empregados para o controle de vibração de estruturas mecânicas leves são o PZT (*lead zirconate titanate*) e o PVDF (*polyvinylidene fluoride*). Ambos são materiais ativos e tem a propriedade de serem sensores e/ou atuadores.

O posicionamento ótimo destes atuadores/sensores na estrutura é tratado como um projeto de otimização, bem como o amortecimento que esses atuadores causam no sistema quando levado em conta a quantidade de energia que eles podem aplicar à estrutura.

1.3. Organização da Dissertação

Esta dissertação está dividida em três partes básicas. A primeira trata do estudo e modelagem de sistemas mecânicos flexíveis. A segunda parte inclui o estudo dos atuadores e sensores piezelétricos, geralmente empregados no controle ativo de vibração de estruturas inteligentes. Por fim, a terceira parte trata da teoria de controle utilizando as técnicas LMIs (*Linear Matrix Inequalities*). Simulações numéricas são apresentadas no capítulo 6, onde são considerados os três pontos básicos da dissertação com o objetivo de validar a metodologia proposta.



Capítulo 2

MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS PARA CONTROLE DE VIBRAÇÃO

O conjunto de equações que representa a dinâmica de um sistema é chamado de modelo matemático de um sistema dinâmico, que pode representá-lo, na faixa de interesse, com exatidão, ou pelo menos de forma aceitável. Observa-se que o modelo matemático não é único para um dado sistema. Um sistema pode ser representado de muitas maneiras diferentes e, portanto, podem haver vários modelos matemáticos, dependendo da perspectiva que se considere.

A dinâmica dos sistemas, sejam eles mecânicos, elétricos, térmicos, biológicos ou econômicos, pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Tais equações diferenciais podem ser obtidas utilizando as leis da física que governam o sistema, como por exemplo, as equações de Newton para sistemas mecânicos ou as equações de Kirchhoff para sistemas elétricos (Ogata, 1982), (Meirovitch, 1989). A figura 2.1 mostra, de forma esquemática, a modelagem de um sistema mecânico.

Os modelos matemáticos podem assumir várias formas diferentes. Dependendo dos objetivos e das circunstâncias particulares, um modelo matemático pode ser mais adequado do que outros. Por exemplo, em problemas de controle ótimo é vantajoso usar uma representação em espaço de estados. Por outro lado para análise da resposta transitória ou resposta em frequência de sistemas monovariáveis (uma entrada e uma saída) lineares e invariantes no tempo, a representação através da função de transferência pode ser mais conveniente que qualquer outra.

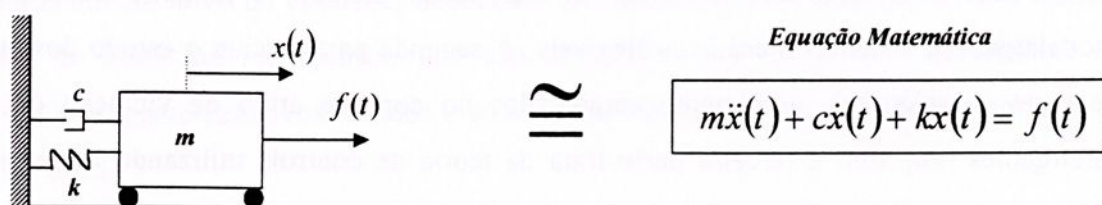


Figura 2.1. Modelagem matemática de um sistema dinâmico.

Quando o modelo de um sistema mecânico respeita as propriedades de *aditividade* e de *homogeneidade*, diz-se que este sistema é linear. Embora na realidade todo sistema seja não linear, é razoável assumir modelos lineares por vários motivos. O principal deles é que existe uma vasta gama de ferramentas de projeto para sistemas lineares. Dentro de certas regiões um sistema dinâmico pode ter comportamento puramente linear ou as não linearidades podem ser aproximadas por um sistema linear.

2. Um sistema com entrada u e saída y , tem a propriedade de aditividade se,

$$T\{u_1\} = y_1 \quad \text{e} \quad T\{u_2\} = y_2 \quad (2.1)$$

tem-se,

$$T\{u_1 + u_2\} = y_1 + y_2 \quad (2.2)$$

2. Um sistema com entrada u e saída y , tem a propriedade de homogeneidade se,

$$T\{\alpha u\} = \alpha y, \quad \forall \alpha \text{ constante}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Quando um sistema não respeita alguma das propriedades anteriores, ele é dito não linear. Recomenda-se que o projeto de sistema de controle sempre seja iniciado considerando modelos lineares. Algumas teorias de controle, como o controle robusto, são utilizadas para considerar alguns casos em que as não linearidades não são consideradas. É certo que muitas vezes o desempenho de um sistema de controle robusto é inferior ao de um sistema ótimo. Há também que se considerar o projeto de controladores não lineares pode ser, em alguns casos, mais vantajoso economicamente, já que componentes que respondem linearmente dentro de uma ampla faixa de amplitude são mais caros que componentes não lineares.

As abordagens de projeto de sistemas de controle lineares podem ser divididas em:

- Domínio da frequência;
- Domínio do tempo.

A primeira é conhecida também como controle clássico e tem suas técnicas desenvolvidas em torno da transformada de Laplace. A segunda abordagem trata do estudo de sistemas no domínio do tempo e geralmente é conhecida como controle moderno.

2.1. Modelagem no domínio da frequência de sistemas SISO

O princípio básico da modelagem no domínio da frequência é a chamada função de transferência. Uma função de transferência de um sistema SISO relaciona os sinais de entrada com os sinais de saída.

Esta relação, chamada de função de transferência de um sistema, é escrita em termos da transformada de Laplace conforme a equação

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_zs^z}{a_0 + a_1s + \dots + a_ps^p} \quad (2.4)$$

Sendo que $Y(s)$ e $U(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de saída e entrada respectivamente. As raízes do polinômio do numerador da função de transferência são chamadas zeros do sistema e as raízes do polinômio do denominador são chamadas de pólos do sistema.

Os pólos estão relacionados com a estabilidade do sistema e sua posição no plano complexo indica se o sistema é estável ou não.

Os sistemas dinâmicos físicos em geral são representados por funções de transferência *estritamente próprias*, isto é,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} H(s) = 0 \quad (2.5)$$

Em outras palavras o grau do polinômio do denominador é sempre maior que o grau do polinômio do numerador da função de transferência.

Para análise em frequência de uma função de transferência, basta avaliá-la em termos de valores imaginários, $s = j\omega$, sendo que $j = (-1)^{1/2}$.

O comportamento de um sistema quando excitado harmonicamente com uma frequência ω é chamado de resposta em frequência do sistema ou FRF. A figura 2.2 ilustra o comportamento de um sistema quando excitado harmonicamente.

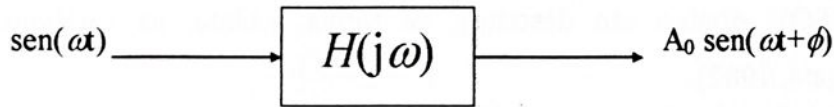


Figura 2.2. Diagrama de blocos da resposta em frequência de um sistema.

O termo A_0 é um escalar e é chamado de ganho do sistema; ϕ é fase entre a entrada e a saída do sistema.

2.2. Modelagem no domínio da frequência de sistemas MIMO

Os sistemas de uma entrada e uma saída (SISO) são na verdade um subconjunto de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). Os sistemas MIMO podem ser representados através de uma matriz de funções de transferência $\mathbf{H}$. O elemento $H_{ij}(s)$ da matriz representa a função de transferência entre a entrada $u_j(t)$ e a saída $y_i(t)$ do sistema. De forma que,

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{H}(s)]\mathbf{u}(s) \quad (2.6)$$

$$[\mathbf{H}(s)] = \begin{bmatrix} H(s)_{11} & \cdots & H(s)_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ H(s)_{mi} & \cdots & H(s)_{mr} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

O número de linhas da matriz de funções de transferência corresponde ao número de variáveis de saída do sistema, enquanto que o número de colunas da matriz corresponde ao número de variáveis de entrada do sistema.

2.3. Modelagem no domínio do tempo

A teoria de controle moderno utiliza como base a formulação de sistemas no domínio do tempo, também conhecida como representação em espaço de estados. A vantagem desta formulação é especialmente mostrada para controladores de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), que são os sistemas que utilizam mais que um sensor/atuador. A formulação no espaço de estados é também utilizada no projeto de sistemas com uma entrada e uma saída (SISO). Abaixo são descritas, de forma sucinta, as variáveis utilizadas nesta formulação (Ogata, 1982).

Estado

O estado de um sistema dinâmico é definido pelos valores do menor conjunto de variáveis que, em conjunto com as entradas do sistema determina completamente o comportamento do sistema.

Variáveis de Estado

As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas cujos valores determinam o estado do sistema.

Vetor de Estado

Se n variáveis são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas n componentes de um vetor $\mathbf{x}$. Tal vetor é chamado de vetor de estado.

Espaço de Estado

O espaço n -dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado de espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Para se obter a representação em espaço de estados de um sistema de ordem n , é necessário escrever este sistema em n equações diferenciais de primeira ordem. Assim cada variável dinâmica é uma variável de estado.

A forma genérica de um sistema descrito na forma de espaço de estados é descrita pela equação (2.8).



$$S : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{cases} \quad (2.8)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ o vetor de entradas, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ o vetor de saídas e n a ordem do sistema.

2.3.1. Equação de estado para um sistema linear invariante no tempo

Para sistemas lineares invariantes no tempo a equação na forma de espaço de estados pode ser reduzida da equação 2.8 para,

$$S : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Na equação 2.9,

- A** : Matriz de estados $[n \times n]$
- B** : Matriz de entradas $[n \times r]$
- C** : Matriz de saídas $[m \times n]$
- D** : Matriz de entradas diretas $[m \times r]$

A representação em diagrama de blocos de um sistema linear invariante no tempo na forma de espaço de estados é mostrada na figura 2.3

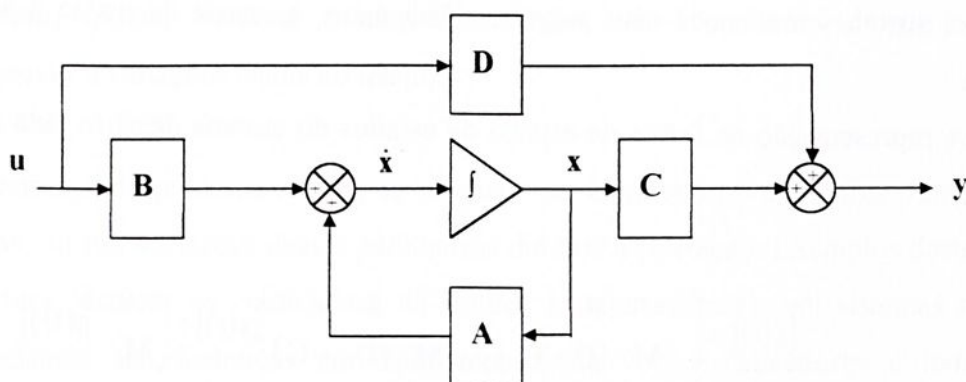


Figura 2.3. Representação genérica em diagrama de blocos de um sistema em espaço de estados.

2.4. Equação de estado para sistemas mecânicos lineares

A equação diferencial que descreve o movimento de um sistema mecânico pode ser obtida, considerando que o sistema tem parâmetros concentrados, através das leis de Newton, equações de Lagrange ou outro método que seja conveniente.

Todos os métodos convergem para a equação diferencial de segunda ordem, que pode ser escrita na seguinte forma geral linear e invariante no tempo (Valer, 1999),

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + (\mathbf{D}_v + \mathbf{G})\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + (\mathbf{S} + \mathbf{C}_i)\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (2.10)$$

Na equação 2.10,

$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$: Matriz de massa ou matriz de inércia

$\mathbf{D}_v = \mathbf{D}_v^T$: Matriz de amortecimento viscoso

$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$: Matriz giroscópica

$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$: Matriz de rigidez

$\mathbf{C}_i = -\mathbf{C}_i^T$: Matriz circulatoria

$\{\mathbf{q}(t)\}$: Coordenada generalizada

$\{\mathbf{f}(t)\}$: Força externa generalizada

Apenas as matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez são formuladas quando se considera sistemas mecânicos mais simples. Além disso, a matriz de massa é sempre definida positiva.

A representação na forma de espaço de estados do sistema descrito pela equação 2.10 é dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{C}_i) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_v + \mathbf{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

e,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.5. Representação de incertezas no modelo

A idéia de sistemas dinâmicos incertos é central para a teoria de controle robusto. Para propósitos de projeto, o comportamento dinâmico possível de sistemas complexos deve ser aproximado para modelos de complexidade relativamente baixa. A diferença entre estes modelos e o sistema real é chamada de incerteza do modelo. Outra causa de incerteza é o desconhecimento de alguns componentes do sistema, ou a mudança de seu comportamento devida a alterações de operação. Finalmente, incertezas podem ser originadas de parâmetros físicos que se alteram com o tempo. Note que a incerteza do modelo deve ser distinguida de ações exógenas como distúrbios ou ruído originado das medidas (Gahinet et al., 1995).

Devido as incertezas de modelo dois princípios devem ser considerados:

- A incerteza deve ser pequena onde alto desempenho é requerido (compromisso entre desempenho e robustez). Em outras palavras, o modelo linear deve ser suficientemente exato na banda de controle.
- Quanto mais informação se tenha sobre a incerteza (fase, estrutura, invariância no tempo, entre outras), melhor será o desempenho.

Existem duas classes principais de incertezas:

- Incertezas dinâmicas, que consistem em componentes dinâmicos omitidos no modelo linear que causam variações no comportamento dinâmico durante a operação. Por exemplo, modos flexíveis à altas frequências, não-linearidades devido a entradas excessivas e variações lentas no tempo.
- Incertezas de parâmetros, que se originam na imprecisão dos valores dos parâmetros físicos, ou nas variações desses parâmetros durante a operação. Exemplos destes tipos de incerteza incluem os coeficientes de rigidez e amortecimento em sistemas mecânicos, coeficientes aerodinâmicos em equipamentos de voo e capacitores e indutores em circuitos elétricos.

O modelo não é capaz de emular perfeitamente o comportamento de um sistema real para todas as faixas de operação. Alguns modelos conseguem ser mais fiéis ao sistema do que outros



para a faixa de operação, entretanto, não estão livres de erros. Os erros são inseridos no modelo devido a alguma aproximação ou uma dinâmica que não foi considerada. Entretanto, é possível representar estas incertezas. Existem duas classes básicas de representação de incertezas.

- Incertezas estruturadas;
- Incertezas não estruturadas.

2.5.1. Incertezas estruturadas

Como o próprio nome diz, as incertezas estruturadas estão relacionadas com a estrutura do sistema e na maioria dos casos estão relacionadas com variações nos parâmetros da planta. Como um exemplo destas incertezas se pode citar as variações nas frequências naturais do sistema. Para um sistema descrito na forma de espaço de estados, estas incertezas podem ser representadas como variações nas matrizes do sistema. Um exemplo é quando existe um tipo de incerteza estruturada na matriz de estados do sistema, esta pode ser representada por $\Delta \mathbf{A}$ e a matriz de estados passa a ser escrita por,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A} \quad (2.13)$$

Na equação 2.13 o termo $\mathbf{A}_0$ é chamado de matriz de estados nominal, já a matriz dinâmica $\mathbf{A}$ é a matriz de estados real e é desconhecida.

A incerteza pode ser escrita do seguinte modo,

$$\Delta \mathbf{A} = \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{A}_i, \quad \text{com } |a_i| \leq a_{\max} \quad (2.14)$$

Para sistemas descritos no domínio da frequência, as incertezas são escritas em termos de variação dos pólos e zeros do sistema nominal.

Modelos politópicos para representação de incertezas estruturadas

São denominados sistemas politópicos os sistemas lineares variantes no tempo:



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (2.15)$$

cuja matriz do sistema $\mathbf{S}(t)$, dada por:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{D}(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

esta matriz varia com um número fixo de matrizes politópicas, isto é,

$$\mathbf{S}(t) \in \{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{S}_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\} \quad (2.17)$$

sendo $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$ os sistemas vértices, dados por

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Em outras palavras, $\mathbf{S}(t)$ é uma combinação convexa das matrizes dos sistemas $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$. Os números não negativos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são chamados de coordenadas politópicas de $\mathbf{S}$.

Modelos a parâmetros-dependentes afim para representação de incertezas estruturadas

As equações dos sistemas sempre envolvem incertezas ou variação de coeficientes no tempo. Quando um sistema é linear, este naturalmente dá origem a um modelo parâmetro-dependente na forma,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(p)\mathbf{x} + \mathbf{B}(p)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(p)\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.19)$$

As matrizes $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}(\cdot)$ e $\mathbf{C}(\cdot)$ são funções conhecidas de algum vetor de parâmetros $p=(p_1, \dots, p_n)$. Estas equações geralmente são originadas de equações do movimento, equações de circuitos elétricos, etc....

No caso desta dependência tem-se

$$\mathbf{A}(p) = \mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1 + \dots + p_n \mathbf{A}_n, \quad \mathbf{B}(p) = \mathbf{B}_0 + p_1 \mathbf{B}_1 + \dots + p_n \mathbf{B}_n \quad (2.20)$$

Os modelos a parâmetros-dependentes afim são adequados para utilização em análise e síntese baseadas nas funções de Lyapunov. A representação de incertezas na forma de politopos é encontrada em muitos problemas de controle. Além disto, modelos dependentes de parâmetros podem ser transformados em modelos politópicos equivalentes

Quantificação da incerteza de parâmetros

A incerteza de parâmetros é quantificada como uma faixa de valores do parâmetro e possivelmente as taxas de variações destes parâmetros. A incerteza de parâmetros pode ser descrita como uma caixa no espaço de parâmetros. Isto corresponde ao caso onde a incerteza ou o parâmetro variante no tempo p_i está dentro de uma faixa de dois valores extremos determinados empiricamente, ou seja

$$p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i] \quad (2.21)$$

sendo que $\underline{p}_i$ e $\overline{p}_i$ são os valores mínimo e máximo, respectivamente. Se $p = (p_1, \dots, p_n)$ é um vetor com todas as incertezas de parâmetros, a equação (2.21) delimita um hiperretângulo no espaço de parâmetros $\mathcal{R}^n$ chamada de caixa de parâmetros (*parameter box*).

Exemplo 2.1. Considere o exemplo de um sistema mecânico massa-mola com incerteza na massa m e na rigidez k . A variação destes parâmetros é representada pela equação 2.22, onde são fornecidos os valores mínimo e máximo, respectivamente.

$$m \in [1, 2], \quad k \in [90, 110] \quad (2.22)$$

O vetor de parâmetros correspondente $p = (m, k)$ fornece a caixa de parâmetros mostrada na figura 2.4.



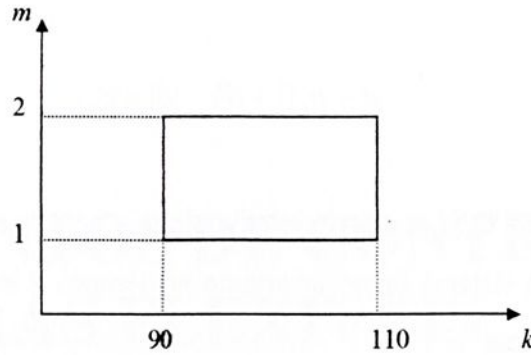


Figura 2.4. Representação de incertezas no espaço de parâmetros.

2.5.2. Incertezas não estruturadas

Incetezas que não podem ser representadas como função de um parâmetro específico são classificadas como incertezas não estruturadas. Geralmente é uma forma de se representar a dinâmica não modelada, como, por exemplo, o truncamento das altas frequências de um sistema mecânico. As incertezas não estruturadas podem ser descritas em termos de suas amplitudes.

Quantificação de incertezas não estruturadas: incerteza com norma limitada

Limitantes de normas especificam a quantidade de incertezas em termos de ganho RMS. É necessário lembrar que ganho RMS ou ganho L_2 de um sistema BIBO (*do inglês: Bounded Input – Bounded Output*) estável é definido como a máxima razão entre as entradas e saídas do sistema,

$$\|\Delta\|_{\infty}^2 = \sup_{\substack{w \in L_2 \\ w \neq 0}} \frac{\|\Delta w\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \quad (2.23)$$

na equação 2.23,

$$\|w\|_{L_2} = \int_0^{\infty} w^T w dt$$

Limitantes de normas também são importantes para quantificar incertezas paramétricas. Por exemplo, um parâmetro incerto pode ser representado como

$$p = p_n(1 + \delta), \quad |\delta| < \delta_{\max} \quad (2.24)$$

com p_n o parâmetro nominal e $\delta_{\max}$ o desvio relativo de p_n .

Quando $\Delta(s)$ é um sistema linear invariante no tempo, a incerteza pode ser especificada através de limitantes da forma

$$\|W(s)\Delta(s)\|_x < 1 \quad (2.25)$$

sendo que $W(s)$ é um filtro de conformação da incerteza que permite caracterizar incertezas dependentes da frequência.

Capítulo 3

FUNDAMENTOS DE CONTROLE DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

O controle de estruturas flexíveis consiste na análise dinâmica em conjunto com a teoria de controle. A análise dinâmica pode ser realizada através da aproximação por elementos finitos (Bathe, 1995). A teoria de controle está disponível em varias técnicas encontradas na literatura. Existem duas teorias distintas para o controle de vibração. Uma é realizada no *domínio da frequência*, chamada de controle clássico, enquanto a outra é realizada no *domínio do tempo*, chamada de controle moderno. A técnica de controle no domínio da frequência é dominada por ferramentas analíticas e é muito popular devido à quantidade de ferramentas de projeto disponíveis (Ogata, 1982)(Dorf, 2000).

Para um dado sistema, a teoria clássica baseia-se na relação entre a entrada e a saída de um sistema dinâmico. O controle moderno foi motivado pelo rápido avanço computacional da última década. O comportamento do sistema é descrito por um conjunto de variáveis sobre o domínio do tempo. A entrada procura controlar cada variável para satisfazer os requisitos especificados. Cada um dos métodos tem vantagens e desvantagens e devem ser escolhidos de acordo com o problema presente. O controle ativo de estruturas flexíveis é, principalmente, representado pelo controle de vibração utilizando componentes mecânicos, elétricos e/ou eletromecânicos.

Estruturas flexíveis são compostas por sistemas com parâmetros distribuídos e o comportamento dinâmico tem dimensão infinita. Evidentemente, os sistemas de dimensão infinita não são práticos para projeto na teoria de controle. Aproximações matemáticas, como análises por elementos finitos são utilizadas para obtenção de sistemas de dimensões finitas que se aproximam dos sistemas reais. Antes de iniciar o estudo sobre a análise dinâmica de sistemas de controle é necessário compreender a diferença entre o controle ativo e passivo e introduzir a teoria básica de estabilidade.

A teoria da estabilidade é um conceito chave para o entendimento do controle de um sistema dinâmico. A teoria da estabilidade de Lyapunov tem sido considerada como sendo um princípio básico para compreensão da estabilidade de um sistema dinâmico (Kwon, 2000).



3.1. Sistemas de controle passivo e ativo

O controle ativo pode mudar o estado de um sistema, ou estrutura, exposta a excitações primárias pela aplicação de entradas secundárias, como atuadores de força. O controle ativo pode assim ser distinguido do controle passivo, que não utiliza entradas secundárias. O sistema a ser controlado é, geralmente, chamado de planta e as entradas secundárias são dirigidas tanto por sensores de referência, no controle de alimentação direta (*feedforward*) ou sensores de erro no controle por realimentação (*feedback*). As figuras 3.1 e 3.2 ilustram o esquema do controle passivo e ativo, respectivamente (Lee, 2000).



Figura 3.1. Diagrama de blocos do controle passivo.

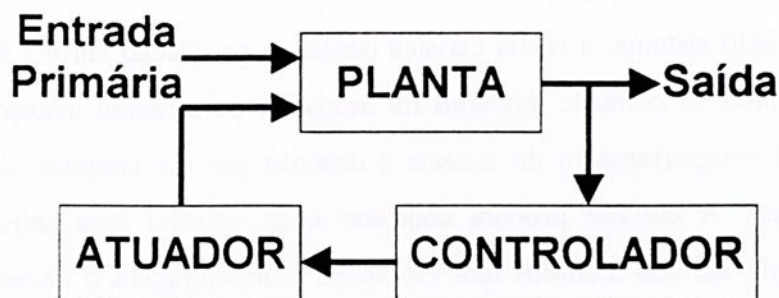


Figura 3.2. Diagrama de blocos do controle ativo.

Geralmente no controle de vibrações determinísticas o controle de alimentação direta é empregado com maior frequência, que é o caso, por exemplo, de controle utilizando modelo de referência.

Para o caso de vibrações aleatórias o controle de realimentação (*feedback*) é mais utilizado. Além disto, quando se projeta um sistema de controle de vibração é necessário definir se o controle será global (em todo o sistema) ou em determinadas regiões. O controle ativo de vibração pode ser classificado, de acordo com a estratégia, tipo de distúrbio e objetivo, conforme a figura 3.3.

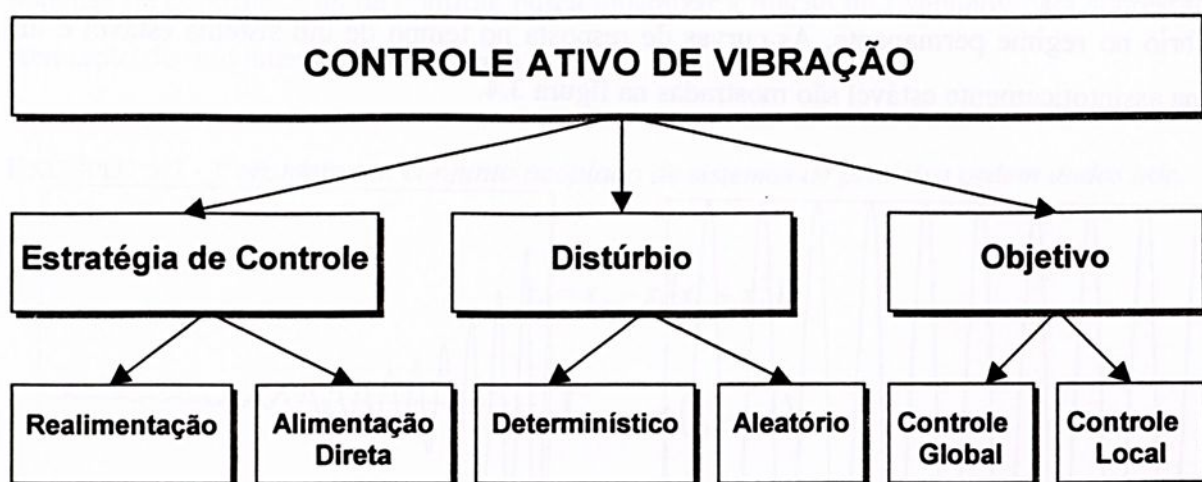


Figura 3.3. Classificação do controle ativo de vibração.

3.2. Teoria da Estabilidade

A teoria da estabilidade de Lyapunov é uma das ferramentas mais utilizadas na análise da estabilidade e projeto de sistemas de controle de um sistema dinâmico.

DEFINIÇÃO 3.1 - ESTABILIDADE. Considere um sistema não linear na forma geral

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

$\mathbf{x}$ é um vetor e $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ representa uma função não linear. Este sistema é estável no sentido de Lyapunov com respeito a um estado de equilíbrio se para um dado valor $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ para que $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$ e $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$.

A condição anterior implica que a magnitude $\mathbf{x}(t)$ permanece em um valor finito pequeno na presença de pequenas perturbações iniciais. Nesta definição incluem-se também oscilações de movimento não amortecidas.

DEFINIÇÃO 3.2 - ESTABILIDADE ASSINTÓTICA. Um sistema é assintoticamente estável se ele satisfaz as condições de estabilidade e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$.

A estabilidade assintótica implica que um vetor de estados converge ao ponto de equilíbrio no regime permanente. As curvas de resposta no tempo de um sistema estável e um sistema assintoticamente estável são mostradas na figura 3.4.

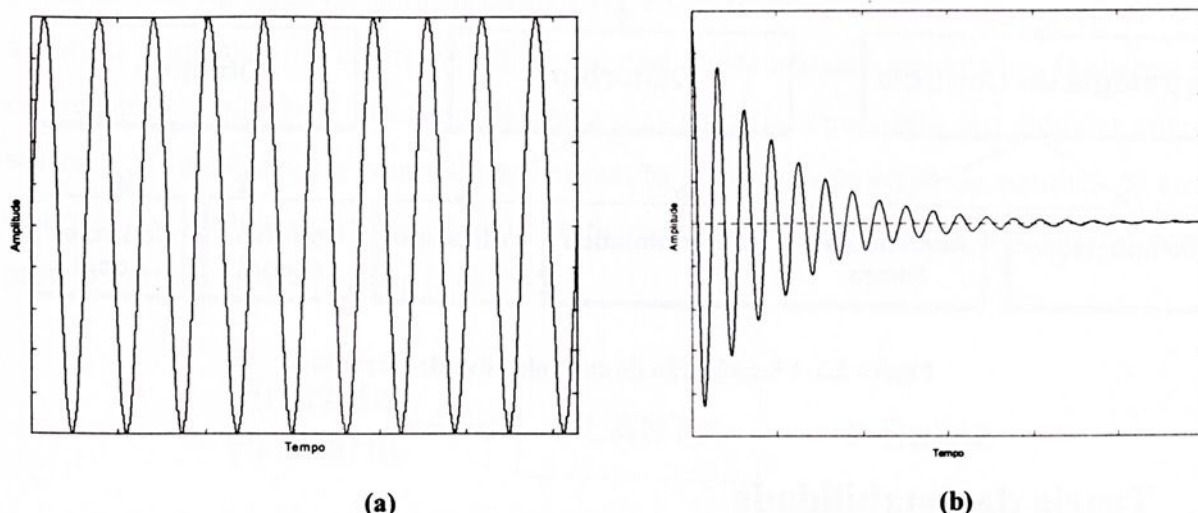


Figura 3.4. Resposta temporal de sistema estável (a) e assintoticamente estável (b).

3.3. Teoria da estabilidade de Lyapunov

O segundo método da estabilidade de Lyapunov utiliza uma função de energia não negativa de um dado sistema. Se a função de energia decresce sempre, então o sistema é estável no ponto de equilíbrio. Em outras palavras, a energia deve ser mínima no ponto de equilíbrio.

TEOREMA 3.1 - *Assumindo $V(x)$ uma função de energia, ou a função de Lyapunov, com $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$. O sistema é estável se $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ para todos os valores de x . Se $\dot{V}(x) < 0$ então o sistema é assintoticamente estável.*

É importante entender que não se pode apresentar nenhuma conclusão sobre o segundo método de Lyapunov sem que exista uma função de Lyapunov. Neste caso é necessário encontrar uma função de Lyapunov ou aplicar o teorema da instabilidade de Lyapunov que não é discutido aqui. Um inconveniente da teoria de Lyapunov é que não existe uma forma sistemática de encontrar uma função candidata para verificar a estabilidade. Como será explicado mais a frente, o segundo teorema da estabilidade de Lyapunov é também utilizado para projetar

sistemas de controle; a lei de controle busca minimizar a função de Lyapunov para supressão ou atenuação do movimento de um sistema.

EXEMPLO 3.1 - Considere um conjunto acoplado de sistemas de primeira ordem dados por,

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

O interesse é verificar a estabilidade do sistema. O ponto de equilíbrio do sistema pode ser obtido de

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0$$

Baseado no único ponto de equilíbrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$ seleciona-se uma função de Lyapunov tal como $V = x_1^2 + x_2^2$, que é sempre positiva. A derivada no tempo da função de Lyapunov em conjunto com as equações do sistema fornece,

$$\dot{V}(x) = -2(x_1^2 + x_2^2)$$

$\dot{V}(x)$ é sempre negativa, e o ponto de equilíbrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é assintoticamente estável.

EXEMPLO 3.2 - Considere-se um sistema simples de segunda ordem no qual a equação do movimento é dada por,

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0$$

sendo que $m > 0$, $c > 0$ e $k > 0$. Existem muitas formas de se analisar a estabilidade do sistema acima. Com o intuito de aplicar a teoria de Lyapunov, transforma-se a equação acima em um conjunto de equações de primeira ordem,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -cx_2 - kx_1$$

sendo $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$. Escolhendo uma função de Lyapunov,

$$V(x) = \frac{1}{2}(mx_2^2 + kx_1^2)$$

a derivada no tempo da função de Lyapunov torna-se

$$\dot{V}(x) = mx_2\dot{x}_2 + kx_1\dot{x}_1 = -cx_2^2$$

Nota-se que x_2 pode ser instantaneamente zero, mas só converge para zero no regime permanente. Além disto pode-se dizer que se $c = 0$ o sistema nunca será assintoticamente estável.

3.4. Estabilidade de sistemas de primeira ordem

Considere um sistema linear de primeira ordem dado por,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.2)$$

sendo $\mathbf{x}$ um vetor de tamanho $n \times 1$. Com o objetivo de verificar a condição de estabilidade para este sistema, escolhe-se a seguinte função de Lyapunov,

$$U = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (3.3)$$

a derivada no tempo da função de Lyapunov se torna,

$$\dot{U} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} \quad (3.4)$$

para estabilidade deste sistema, requer-se que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (3.5)$$

sendo $\mathbf{Q}$ uma matriz definida positiva satisfazendo a propriedade $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$. Desta forma,

$$\dot{U} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} < 0 \quad (3.6)$$

Assim, formula-se um teorema para estabilidade de um sistema linear.

TEOREMA 3.2 - O sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ é estável se e somente se, existir uma matriz definida positiva $\mathbf{P}$ que satisfaça a equação 3.5 para uma dada matriz definida positiva $\mathbf{Q}$.

EXEMPLO 3.3 - Assumindo o sistema de dois graus de liberdade,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

para analisar a estabilidade do sistema primeiro se admite uma matriz $\mathbf{Q}$ definida positiva da equação 3.5, tal como,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez obtido $\mathbf{Q}$ resolve-se equação 3.5,

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{P}$ resultante é dada dado por

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pode-se provar que a $\mathbf{P}$ é definida positiva, e desta forma o sistema é estável.

3.5. Estabilidade BIBO

A definição de estabilidade de Lyapunov somente se aplica a sistemas que estão na ausência de perturbações externas. Quando existe uma entrada no sistema, esta deve ser levada em conta na análise de estabilidade deste sistema. A estabilidade BIBO é enunciada a seguir,

DEFINIÇÃO 3.3 - *Quando um sistema está sobre excitação externa de magnitude limitada, ele é chamado de BIBO estável se a saída deste sistema também é limitada.*

3.6. Estabilidade de sistemas de múltiplos graus de liberdade

Nas seções anteriores foram apresentados conceitos de estabilidade. É necessário agora estender estes conceitos para sistemas linearizados de múltiplos graus de liberdade, os quais são originados da análise por elementos finitos. Entender estabilidade de sistemas de múltiplos graus liberdade é essencialmente importante para compreensão e projeto de sistema de controle por realimentação.

3.6.1. Sistemas sem amortecimento

Utilizando a teoria da estabilidade de Lyapunov se deseja analisar a estabilidade de um sistema de múltiplos graus de liberdade linearizado. Considerando um sistema dinâmico de dimensão n , que é geralmente obtido da análise por elementos finitos, a equação governante do movimento do sistema sem amortecimento é descrita por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_u \quad (3.7)$$

Sendo $\mathbf{M}$ a matriz de massa, $\mathbf{S}$ a matriz de rigidez, $\mathbf{q}$ o vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{F}$ a matriz de influência da entrada e $\mathbf{u}$ o vetor de entradas de controle. No caso de não existir esforços externos, a vibração livre é satisfeita por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = 0 \quad (3.8)$$

e a solução do sistema da equação 3.8 é puramente senoidal.

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \{\phi_k\} e^{i\omega_k t} \quad (3.9)$$

$\{\phi_k\}$ e ω_k são parâmetros do sistema. A estabilidade do sistema, equação 3.8, pode ser provada de várias maneiras. Uma delas é a teoria de Lyapunov. Considerando o fato de que a energia cinética mais a energia potencial é um indicador direto da energia do sistema, uma função candidata de Lyapunov é dada por,

$$U = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} \quad (3.10)$$

A função de Lyapunov é sempre positiva, ($U > 0$), desde que as matrizes de massa e rigidez satisfaçam,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0 \quad (3.11)$$

para $\mathbf{x} \neq 0$ e matrizes simétricas de massa e rigidez.

A derivada da função de Lyapunov (equação 3.10) em conjunto com a equação 3.7 fornece

$$\dot{U} = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \mathbf{u} \quad (3.12)$$

na ausência de forças de entrada, isto é $\mathbf{u} = 0$, a equação 3.12 se torna,

$$\dot{U} = 0, \quad \text{ou} \quad U = \text{constante} \quad (3.13)$$

Em outras palavras, a energia do sistema é conservada e o movimento é do tipo puramente senoidal. É importante notar que a estabilidade não depende propriamente dos parâmetros do sistema, isto é, a massa e a rigidez, foram tiradas da análise na equação 3.12. Quando se desejar projetar uma lei de controle, projeta-se $\mathbf{u}$ de forma que o sistema seja estabilizável, então uma possível solução para o sistema é selecionar $\mathbf{u}$ tal que,

$$\dot{U} < 0 \quad (3.14)$$

em outras palavras, a energia decresce em torno do ponto de equilíbrio com uma escolha correta da força de controle.

3.6.2. Sistemas com amortecimento

A forma linearizada da equação do movimento de um sistema com amortecimento é descrita por,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (3.15)$$

sendo que $\mathbf{D}_v$ é a matriz de amortecimento não negativa definida. O sistema é intuitivamente estável devido ao termo de amortecimento introduzido. Para verificar a estabilidade deste sistema, escolhe-se uma função candidata de Lyapunov,

$$U = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{S}\mathbf{q} \quad (3.16)$$

A derivada da função de Lyapunov com relação ao tempo se torna

$$\dot{U} = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q}) \quad (3.17)$$

Utilizando a equação do movimento 3.15, pode-se obter

$$\dot{U} = \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{D}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\mathbf{u}) \quad (3.18)$$

Na ausência de forças externas, a derivada da função de Lyapunov torna-se,

$$\dot{U} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (3.19)$$

Se a matriz de amortecimento é definida positiva então a derivada da função de Lyapunov se torna sempre menor que zero e o sistema é assintoticamente estável. No caso da matriz do sistema ser somente semidefinida, então a estabilidade assintótica do sistema não é garantida. Neste caso deve-se utilizar outra técnica, ou outra função de Lyapunov para verificação da estabilidade.

3.7. Análise de sistemas de segunda ordem

Os sistemas de segunda ordem geralmente são utilizados para explicar conceitos e fundamentos sobre respostas de sistemas com maior grau de complexidade. De fato, a maioria dos sistemas dinâmicos pode ser explicada por um modelo de segunda ordem. Um dos exemplos típicos é o sistema de segunda ordem massa-mola-amortecedor com a seguinte equação do movimento,

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = f(t) \quad (3.20)$$

Sendo $f(t)$ a força externa aplicada na massa. Dividindo os dois lados da equação 3.20 pela massa, tem-se,

$$\ddot{q}(t) + \left(\frac{c}{m}\right)\dot{q}(t) + \left(\frac{k}{m}\right)q(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (3.21)$$

Pode-se então definir dois novos parâmetros,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{c_c} \quad (3.22)$$

Sendo que ω_n é a frequência natural e ζ é a razão de amortecimento. Além disto, $c_c = 2\sqrt{mk}$ é a razão de amortecimento crítico. Desta forma, pode-se reescrever a equação 3.21 como,

$$\ddot{q} + 2\zeta\omega_n\dot{q} + \omega_n^2 q = \omega_n^2 F(t) \quad (3.23)$$

sendo que $F(t) = f(t)/k$. A solução da equação acima pode ser obtida através da transformada de Laplace, considerando nulas as condições iniciais. Isto é motivado pelo fato de que para sistemas lineares, a condição de estabilidade é independente das condições iniciais.

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Q(s) = \omega_n^2 F(s) \quad (3.24)$$

Desta forma,

$$\frac{Q(s)}{F(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.25)$$

Sendo que $Q(s) = \mathcal{L}[q(t)]$ e $F(s) = \mathcal{L}[F(t)]$ as transformadas de Laplace da saída e entrada respectivamente. Igualando o denominador da função de transferência a zero se obtém a *equação característica*,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.26)$$

A solução da equação 3.26 é dada por,

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.27)$$

As raízes da equação característica são projetadas no plano convexo como mostra a figura 3.5. O comportamento dinâmico é dependente da magnitude da razão de amortecimento e da frequência natural.

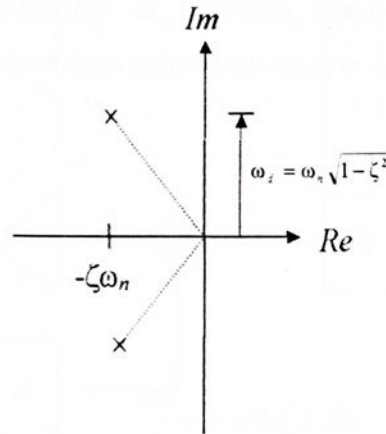


Figura 3.5. Raízes características de um sistema de segunda ordem.

3.8. Descrição na forma de espaço de estados

Em geral as equações do movimento de sistemas dinâmicos podem ser representadas por equações diferenciais de segunda ordem. A modelagem por elementos finitos também resulta em equações diferenciais de segunda ordem. A solução analítica de equações do movimento de segunda ordem é equivalente a resolver uma equação diferencial ordinária. Por outro lado, a descrição em espaço de estados reduz a equação para primeira ordem. Esta formulação tem algumas vantagens se comparadas às soluções das equações de segunda ordem.

Considere um sistema dinâmico de segunda ordem,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (3.28)$$

Pode-se escrever a seguinte relação,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{u} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em outras palavras, reescreve-se a equação diferencial de segunda ordem em equações diferenciais de primeira ordem, através da inserção de um vetor $\mathbf{x}$, chamado de vetor de estados. Entretanto, o tamanho do sistema aumenta se comparado com o sistema original. A representação gráfica da forma em espaço de estados de primeira ordem é dada na figura 3.6.

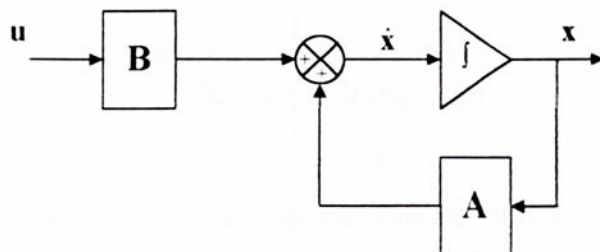


Figura 3.6. diagrama de blocos da representação em espaço de estados.

Uma descrição genérica de variáveis de estado de um sistema de ordem n envolve n integradores; as saídas destes são as variáveis de estado. As entradas de cada um dos integradores são dirigidas como uma combinação linear dos sinais de estado e as entradas (DeRusso, 1997),

$$\begin{aligned} sX_1 &= a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \cdots + a_{1n}X_n(s) + b_{11}U_1(s) + \cdots + a_{1i}U_i(s) \\ sX_2 &= a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \cdots + a_{2n}X_n(s) + b_{21}U_1(s) + \cdots + a_{2i}U_i(s) \\ &\vdots \\ sX_n &= a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \cdots + a_{nn}X_n(s) + b_{n1}U_1(s) + \cdots + a_{ni}U_i(s) \end{aligned} \quad (3.30)$$

no domínio do tempo, as equações acima forma um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem nas n variáveis de estado e nas entradas. O termo (t) foi suprimido para facilidade de visualização.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1i}u_i \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2i}u_i \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{ni}u_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

Essas equações de estado podem ser escritas na forma compacta em notação matricial.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} \\ b_{21} & \cdots & b_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

ou,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.33)$$

A matriz coluna de variáveis de estado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

e chamada de vetor de estados. As entradas são arranjadas na forma de vetor de entradas:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

As saídas do sistema são similarmente arranjadas na forma de vetor de saídas.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Que podem ser escritas como uma combinação linear das variáveis de estado pelas equações,

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{cases} \quad (3.37)$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ou

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.39)$$

3.9. Análise por Matriz de Transferência

A função de transferência de um sistema representado na forma de espaço de estados pode ser encontrada pela transformação de Laplace das equações de estado, considerando as condições iniciais nulas. Coletando os termos envolvendo $\mathbf{X}(s)$, resulta em

$$\begin{bmatrix} (s - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (s - a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (s - a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(s) \\ \mathbf{X}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2i} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(s) \\ \mathbf{U}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_i(s) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

ou

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.41)$$

Resolvendo para o vetor de estados

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.42)$$

O vetor de saídas e o vetor de estados são relacionados da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(s) \\ \mathbf{Y}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(s) \\ \mathbf{X}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n(s) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

ou

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) = \{\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\} \mathbf{U}(s) \quad (3.44)$$

a matriz $m \times i$ da equação 3.44 dentro das chaves, consiste na matriz de transferência do sistema,

$$\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1i}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(s) & H_{m2}(s) & \cdots & H_{mi}(s) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

desta forma pode-se escrever a equação 3.44 como

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{H}(s)] \mathbf{U}(s) \quad (3.46)$$

para o caso especial de um sistema de uma entrada e uma saída $[\mathbf{H}(s)]$ se torna uma quantidade escalar e pode ser escrita como a razão entre a entrada e a saída de um sistema.

$$H(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} \quad (3.47)$$

A figura 3.7 mostra a representação em diagrama de blocos da função de transferência de um sistema.

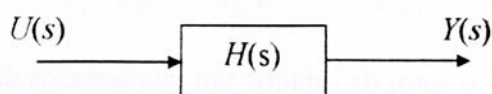


Figura 3.7. Representação em Diagrama de Blocos da Função de Transferência.

A função de transferência relata em termos algébricos a relação entre a entrada $U(s)$ e a saída $Y(s)$. O numerador da função, $N(s)$, e o denominador da função, $D(s)$, são polinômios em s .

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.48)$$

As raízes do denominador, $D(s) = 0$, são chamados de pólos do sistema e as raízes do numerador, $N(s) = 0$, são chamados de zeros do sistema. Os pólos do sistema estão relacionados com a estabilidade e os zeros geralmente se relacionam com a forma da resposta no tempo.

3.10. Conceitos Básicos do Controle por Realimentação

Os conceitos do controle por realimentação de um sistema podem ser obtidos através da representação por diagrama de blocos, figura 3.8.

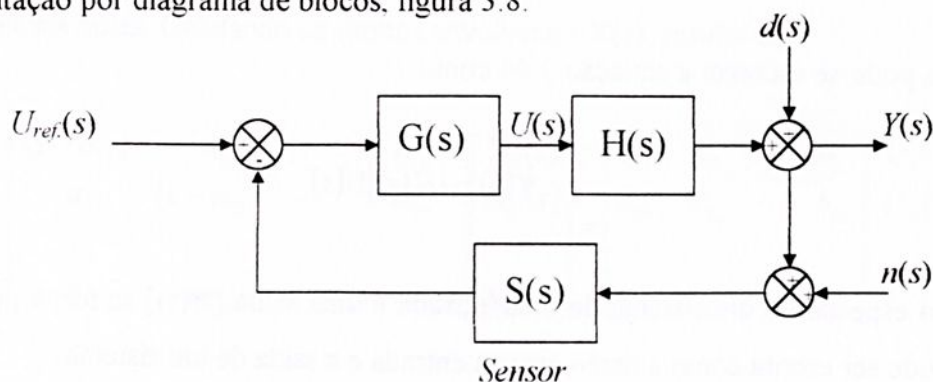


Figura 3.8. Diagrama de blocos de sistema com controle por realimentação.

O sistema está sujeito a três entradas externas, a entrada de comando $U_{ref}(s)$, o distúrbio $d(s)$ e o ruído do sensor $n(s)$. As três entradas afetam o comportamento do sistema. A saída $Y(s)$

do sistema é medida por um sensor ($S(s) = 1$, nesta análise) e então comparada com o sinal de referência. O sinal comparado é chamado de *sinal de erro*, o qual alimenta o atuador. O atuador então aplica entradas corretivas no sistema. Através da entrada do atuador se espera que o sinal de erro vá a zero assintoticamente. Pode-se obter a relação entre a entrada e a saída do sistema, considerando que,

$$E(s) = U_{ref.}(s) - Y(s) \quad (3.49)$$

desta forma,

$$Y(s) = H(s)G(s)E(s) = H(s)G(s)(U_{ref.}(s) - Y(s)) \quad (3.50)$$

então,

$$\frac{Y(s)}{U_{ref.}(s)} = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.51)$$

Similarmente pode-se obter a relação entre as funções de transferência $Y(s)/d(s)$ e $Y(s)/n(s)$.

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.52)$$

$$\frac{Y(s)}{n(s)} = \frac{-H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.53)$$

É possível observar que com o aumento de ganho de $H(s)$, a saída do sistema devido a um distúrbio é diminuída, enquanto que saída devida a um ruído no sensor é aumentada. A realimentação produz uma nova função de transferência e uma nova equação característica correspondente.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.54)$$

A nova função de transferência é chamada de função de transferência de malha fechada e o sistema correspondente é chamado de sistema em malha fechada. A solução da equação característica do sistema determina se ele será ou não estável. A estabilidade em malha fechada não depende somente de $H(s)$, mas também de $G(s)$.

Pode-se também encontrar as funções de transferência que relacionam o erro com as entradas do sistema, de modo que a partir da equação 3.49, tem-se,

$$E(s) = U_{ref.}(s) - \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} U_{ref.}(s) = \frac{U_{ref.}(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.55)$$

De forma análoga o erro devido a um distúrbio e a um ruído no sensor é dado por.

$$\frac{E(s)}{d(s)} = \frac{-1}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.56)$$

$$\frac{E(s)}{n(s)} = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.57)$$

O erro em regime permanente pode ser obtido utilizando o *teorema do valor final*

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (3.58)$$

3.11. Projeto de Sistemas de Controle no Espaço de Estados

A lei de controle por realimentação tem muitas aplicações em sistemas dinâmicos. A idéia básica da lei de controle por realimentação é ler o sinal de saída do sistema e através dele criar o sinal do atuador. O vetor de estados do sistema é então utilizado para gerar o sinal do atuador. A lei de controle por realimentação tem a vantagem de que o sistema pode estar exposto a excitações aleatórias.

Considere um sistema de controle descrito na forma de espaço de estados a seguir,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\quad (3.59)$$

Na equação 3.59 não se considera a matriz de entradas diretas $\mathbf{D}$.

A lei de controle por realimentação pode ser escrita na seguinte forma,

$$\mathbf{u} = \mathbf{Kx} \quad (3.60)$$

Esta lei de controle é chamada de *realimentação completa de estados* e utiliza todas as variáveis de estado do sistema. O diagrama de blocos que descreve o controle por realimentação no espaço de estados é mostrado na figura 3.9.

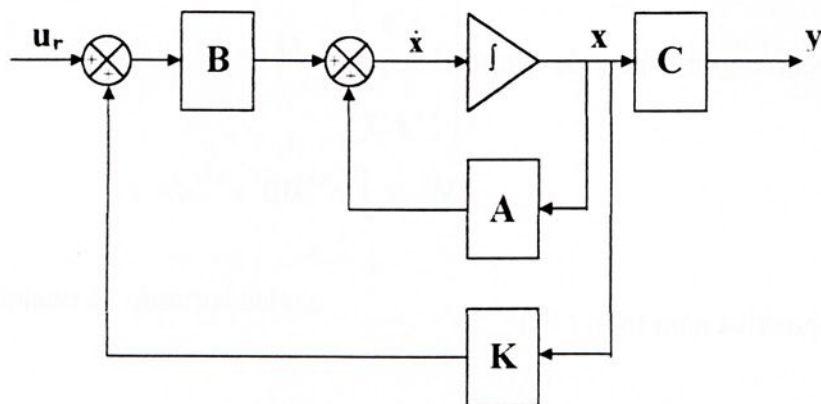


Figura 3.9. Diagrama de blocos do sistema com realimentação de estados.

Como visto na figura 3.9, o sistema de controle com realimentação completa de estados requer o conhecimento de todos os estados do sistema. Muitas vezes o acesso a todos os estados do sistema não é disponível devido, por exemplo, ao número de sensores disponíveis. Um outro fator, também importante, no projeto de sistema de controle no espaço de estados é saber se todos os estados podem ser controlados. Assim é necessário definir dois conceitos importantes no projeto de sistemas de controle por realimentação no espaço de estados que são controlabilidade e observabilidade.

3.12. Controlabilidade

DEFINIÇÃO 3.4 - Um sistema dinâmico descrito na forma de espaço de estados é dito controlável se, para todo instante $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $t_1 > 0$ e estado final $\mathbf{x}_1$, existe uma entrada $\mathbf{u}(\cdot)$ tal que a solução do sistema satisfaça $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Caso contrário o sistema é dito não controlável (Zhou, 1995).

A controlabilidade pode ser verificada utilizando alguns critérios algébricos.

- (i) A matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_b$

$$\mathbf{C}_b = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.61)$$

tem posto n

- (ii) A matriz gramiano de controlabilidade

$$\mathbf{W}_c := \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (3.62)$$

é definida positiva para todo $t > 0$

- (iii) A matriz

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \quad (3.63)$$

tem posto completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Esta condição é chamada de teste do posto de Popov, Belevitch e Hautus (PBH).

- (iv) Não existe autovetor $\mathbf{q}_i$ de $\mathbf{A}^T$ que seja ortogonal a todas as colunas de $\mathbf{B}$. Ou seja, Dado $\mathbf{A}^T \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$, então a condição: $\mathbf{q}_i^T \mathbf{B} = 0$, implica $\mathbf{q}_i \equiv 0$

- (v) Os autovalores de $[\mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ podem ser livremente alocados por uma escolha adequada de $\mathbf{K}$.

3.13. Observabilidade

DEFINIÇÃO 3.5 - Um sistema dinâmico descrito na forma de espaço de estados é dito observável se, para qualquer $t_1 > 0$, o estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ pode ser determinado pela história temporal da entrada $\mathbf{u}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$ no intervalo $[0, t_1]$. Caso contrário o sistema é dito não observável (Zhou, 1995).

A observabilidade pode ser verificada utilizando alguns critérios algébricos.

- (i) A matriz de Observabilidade $\mathbf{O}_b$

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

tem posto n

- (ii) A matriz gramiano de observabilidade

$$\mathbf{W}_o(t) := \int_0^t e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \quad (3.65)$$

é definida positiva para todo $t > 0$.

- (iii) A matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

tem posto n para todo λ pertencente a $\mathbf{C}$. teste do posto PBH .

- (iv) Não existe autovetor $\mathbf{p}_i$ de $\mathbf{A}$ que seja ortogonal a todas as linhas de $\mathbf{C}$. Ou seja,

$$\text{Dado } \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i, \text{ então a condição: } \mathbf{C} \mathbf{p}_i = 0, \text{ implica } \mathbf{p}_i \equiv 0 \quad (3.67)$$

(vi) Os autovalores de $[A+LC]$ podem ser livremente alocados por uma escolha adequada de L .

(vii) O par (A^T, C^T) é controlável.

3.14. Estabilizabilidade e Detectabilidade

DEFINIÇÃO 3.3. Um sistema é dito *estabilizável* se os modos não controláveis são estáveis.

DEFINIÇÃO 3.4. Um sistema é dito *detectável* se os modos não observáveis são estáveis.

3.15. Princípio da Dualidade

Observando as propriedades de controlabilidade e observabilidade é possível notar relações entre os dois conceitos. Pode-se dizer que o problema de controlabilidade é dual ao problema de observabilidade (Zhou, 1997)(Valer, 1999).

DEFINIÇÃO 3.3. *Dualidade*

Um sistema LTI

$$S : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.68)$$

é dual ao sistema (e vice versa),

$$S : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{B}}^*\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}^*(t) = \hat{\mathbf{C}}^*\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.69)$$

se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}^T \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}^T \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (3.70)$$

TEOREMA 3.2. O sistema LTI da equação 3.68 é controlável (observável) somente se o sistema dual da equação 3.69 for observável (controlável).

3.16. Observadores de estado

Quando não todas as variáveis de estado estiverem disponíveis para medição, o projeto de sistema de controle por realimentação de estados não pode ser feito, a não ser que se estime as variáveis não medidas. Processos de derivação de variáveis para obtenção de outras não são aconselháveis, tendo em vista que o processo de derivação acarreta decréscimo da relação sinal/ruído do sistema. Dependendo das grandezas com que se trabalha a relação sinal/ruído pode ser comprometida por um simples processo de derivação. As variáveis não medidas, no entanto, podem ser estimadas. Um dispositivo, circuito elétrico ou programa de computador que estima essas variáveis é chamado de observador de estado ou simplesmente observador. Quando todas as variáveis do sistema são estimadas, este observador é chamado de *observador de ordem completa*. Quando o número de variáveis estimadas é menor que o total de variáveis do sistema este observador é chamado de *observador de ordem reduzida*.

Basicamente, um observador de estado é um modelo matemático do sistema baseado no seu comportamento físico. O modelo matemático é usado para construir o sistema físico baseado na leitura de um sensor.

Assumindo um sistema descrito na forma de espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{3.71}$$

O observador dinâmico pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{3.72}$$



Sendo L o ganho do observador a ser determinado e y a saída do sensor que alimenta a dinâmica do observador. A representação gráfica de um observador dinâmico é mostrada na figura 3.10.

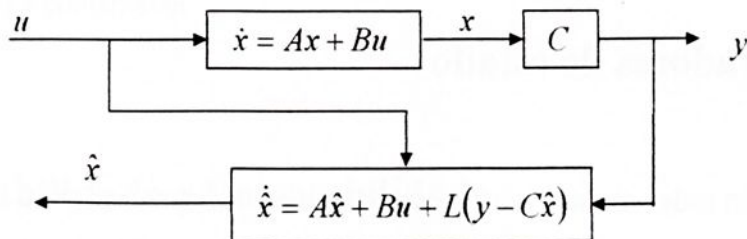


Figura 3.10. Representação gráfica de um observador dinâmico.

Para entender o funcionamento do observador, combina-se as equações 3.71 e 3.72 de modo que,

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} - L(y - \hat{y}) \quad (3.73)$$

Introduzindo um vetor de erro definido por

$$e = x - \hat{x} \quad (3.74)$$

O vetor de erro representa o erro entre o sistema real e o observador dinâmico. A derivada do vetor de erro pode, também, ser escrita considerando que $\hat{y} = C\hat{x}$ por,

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (3.75)$$

A solução da equação 3.75 pode ser obtida por similaridade com a equação 3.2. O vetor de erro, portanto, é dado por,

$$e(t) = e^{(A-LC)t} e(0) \quad (3.76)$$

Como se pode avaliar através da equação 3.76 o vetor de erro é dependente do tempo e será zero com a escolha apropriada da matriz de ganhos do observador L . Desta maneira o

sistema (A-LC) será estável. Além disto o projeto do observador pode ser feito de forma análoga ao projeto do controlador considerando o princípio de dualidade.

Nos sistemas de controle com realimentação de estados, pode-se utilizar os estados estimados para realimentar o sistema. O esquema de um sistema de controle de realimentação que utiliza um observador de estados é mostrado na figura 3.11.

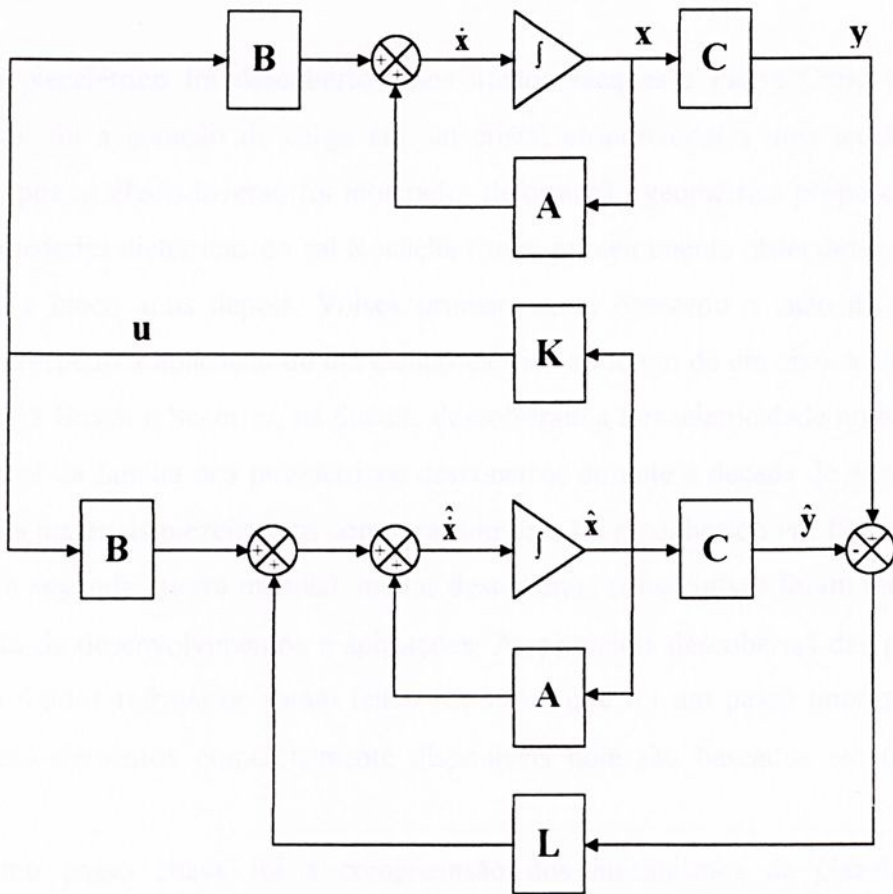


Figura 3.11. Sistema de controle por realimentação de estados utilizando observador.

Capítulo 4

CONCEITOS DE PIEZELETRICIDADE

O efeito piezelétrico foi descoberto pelos irmãos Jacques e Pierre Curie em 1880. A observação inicial foi a geração de carga em um cristal proporcional a uma tensão mecânica aplicada. Logo após, o efeito inverso foi mostrado: deformação geométrica proporcional a uma tensão. As propriedades dielétricas do sal Rochelle foram primeiramente observadas por Pockels em 1894. Vinte e cinco anos depois, Volsek primeiramente observou o ciclo de histerese da polarização com respeito à aplicação de um campo elétrico ao longo de um eixo no cristal do Sal Rochelle. Em 1935 Busch e Scherrer, na Suécia, descobriram a ferroeletricidade no KDP, que foi o segundo material da família dos piezelétricos descobertos durante a década de 40. O potencial uso comercial dos materiais piezelétricos como transdutores foi reconhecido em 1917.

Durante a segunda guerra mundial, muitas descobertas consecutivas foram feitas, levando a uma nova onda de desenvolvimentos e aplicações. As primeiras descobertas das propriedades piezelétricas em óxidos refratários foram feitas em 1941, que foi um passo importante, pois a maioria dos piezo-elementos comercialmente disponíveis hoje são baseados em óxidos deste tipo.

O próximo passo chave foi a compreensão dos mecanismos da piezeletricidade e ferroeletricidade nestes materiais. Muitas publicações por volta do ano de 1945 reportaram as propriedades não conhecidas do titanato de bário e tentaram explicar o princípio físico em um nível molecular. Uma das mais importantes descobertas foi o processo de “poling” em materiais piezelétricos policristalinos em 1946. Entretanto materiais de um único cristal são geralmente mais caros de serem fabricados e limitados em tamanho.

A maioria dos conceitos para piezo-elementos atuadores foram desenvolvidos durante o pico das atividades de pesquisa no meio do século XX. Atuadores de pilha de múltiplas camadas e projeto de atuadores de alto desempenho utilizados hoje em dia, também foram desenvolvidos durante esse período (Ikeda, 1996).

Durante a década passada houve grande interesse no estudo de sensores e atuadores visando o controle ativo de vibração. Como já mencionado, isto faz parte de uma grande área



denominada Estruturas Inteligentes. Tais sensores são acoplados a estruturas de forma que passam a fazer parte e interagir com a estrutura. O emprego de equipamentos piezelétricos como atuadores (que usa o efeito piezelétrico inverso) e sensores (que utiliza o efeito piezelétrico direto) é de certa forma atrativo, pois estes elementos podem ser incorporados nas estruturas com certa facilidade e possuem a propriedade de poderem ser aplicados como sensores e/ou atuadores (Lopes Jr., 2000).

4.1. Definições de Materiais Ativos

O campo tecnológico dos materiais inteligentes ainda se encontra em pleno desenvolvimento. O estudo das aplicações deste tipo de material começou nas décadas passadas e vem ganhado o interesse da comunidade científica. O termo “materiais inteligentes” também referido por materiais ativos ou em inglês *smart materials* é utilizado para descrever um grupo de materiais que tem propriedades únicas.

Existem muitos materiais que exibem acoplamento eletromecânico, ou seja, uma deformação resultante da aplicação de um campo elétrico sobre o material. Duas classes importantes desses materiais são os piezelétricos e os eletro-resistivos. Ambos são tipicamente cerâmicos, com exceção de alguns polímeros que apresentam comportamento piezelétrico, como o caso do PVDF. O conceito que diferencia os piezocerâmicos dos eletro-resistivos é a resposta à aplicação de um campo elétrico reverso. Neste caso os piezocerâmicos apresentam compressão à aplicação de um campo elétrico deste tipo e os eletro-resistivos não. A idéia geral do acoplamento eletromecânico é mostrada na figura 4.1.

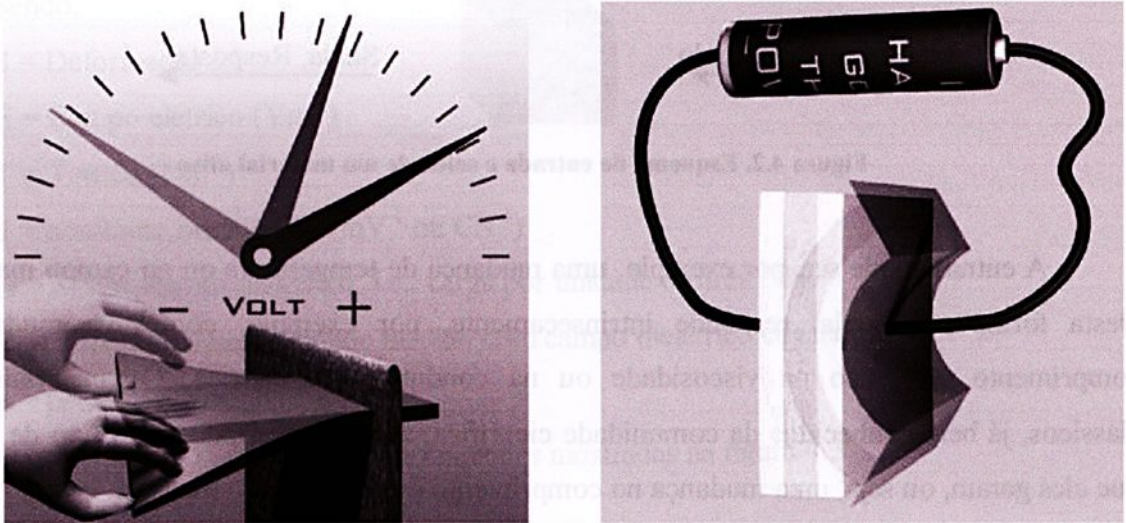


Figura 4.1. Ilustração do efeito direto e do efeito inverso.

A piezeletricidade é definida como uma mudança na polarização elétrica devida a uma mudança na tensão elétrica aplicada. Isto usualmente é chamado de efeito direto.

O efeito piezelétrico inverso é análogo ao direto, no qual uma mudança no campo elétrico produz uma deformação. O efeito inverso é utilizado quando o material piezelétrico é usado como atuador. Para pequenos campos elétricos, existe uma relação linear entre a deformação e o campo elétrico. Revertendo este campo, a direção da deformação também é revertida. O Quartzo e o sal Rochelle são os materiais piezelétricos que são usados mais freqüentemente. Entretanto, somente os materiais relativamente novos, como o PZT, oferecem, atualmente, propriedades que permitem o desenvolvimento de sistemas estruturais ativos.

A origem microscópica do efeito piezelétrico é o deslocamento de cargas iônicas na estrutura cristalina. Na ausência de deformações externas a distribuição de carga no cristal é simétrica e o momento dipolo da rede elétrica é zero. Entretanto, quando uma tensão externa é aplicada, as cargas são movimentadas e a distribuição de carga deixa de ser simétrica.

4.2. Materiais Ativos

Para se entender melhor o funcionamento dos materiais ativos, é necessário primeiramente classificá-los. Uma forma bastante usual de classificação dos materiais ativos é elaborada observando-se as características da entrada e saída, figura 4.2.



Figura 4.2. Esquema de entrada e saída de um material ativo.

A entrada pode ser, por exemplo, uma mudança de temperatura ou no campo magnético. Desta forma o material responde intrinsecamente, por exemplo, com uma mudança no comprimento, alteração na viscosidade ou na condutividade elétrica. Os materiais ativos clássicos, já bem conhecidos da comunidade científica, são caracterizados pelo tipo de resposta que eles geram, ou seja, uma mudança no comprimento ou na forma do material.

A entrada é sempre transformada em deformação, que pode ser utilizada para induzir movimento ou dinâmica a um sistema. Estes materiais são empregados em estruturas mecânicas e, assim, tornam-se parte dela. Instrumentos que geralmente respondem com uma mudança no comprimento são geralmente referidos como atuadores, ou atuadores em estado sólido para ser mais específico.

Conservativamente, os materiais ativos podem também ser utilizados como sensores onde a deformação no material permite a geração de um sinal que quantifica os seus níveis de deformação. Em resumo os materiais ativos podem ser utilizados como sensores ou atuadores, dependendo da característica do estímulo a que são submetidos.

4.3. Equações Constitutivas da Piezeletricidade

As equações constitutivas que governam o comportamento eletromecânico são dadas nas referências (Inman, 2000)(Lopes Jr, 2000). Quando se discute elementos isotrópicos (retangulares), como mostrados na figura 4.3, conectados em uma viga, onde a deformação na direção 1 é devida a tensão normal a direção 1, as equações eletromecânicas se reduzem as equações escalares.

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \quad (4.1)$$

$$D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33} E_3 \quad (4.2)$$

Sendo,

S = Deformação [.]

E = Campo elétrico (Vm^{-1})

T = Tensão (Nm^{-2})

d = constante piezelétrica (mV^{-1} ou CN^{-1})

D = deslocamento dielétrico, i.e., carga por unidade de área (Cm^{-2})

$s^E = 1/\text{módulo de elasticidade medido com campo dielétrico constante}$ (m^2N^{-1}).

ϵ = permissividade (Fm^{-1}).

Os sub-índices 1 e 3 se referem as direções mostradas na figura 4.3.

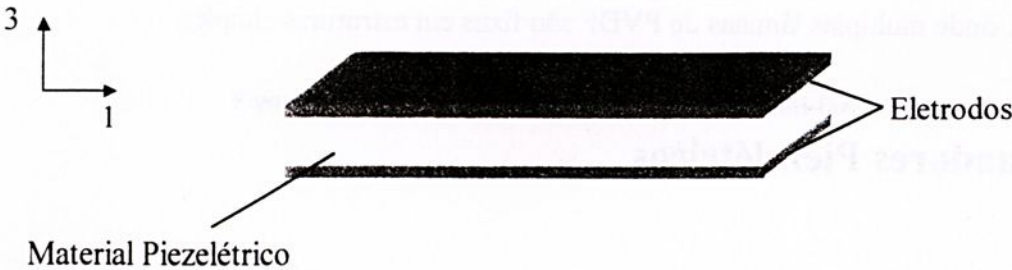


Figura 4.3. Elemento Piezelétrico (PZT).

4.4. Sensores e Atuadores Piezelétricos para Controle de Vibração

Existem dois tipos comuns de materiais piezelétricos que são geralmente aplicados no controle estrutural de vibração; cerâmicos da família do PZT (*lead zirconate titanate*) e poliméricos como o PVDF (*polyvinylidene fluoride*). Os piezocerâmicos e os piezopolímeros são ambos produzidos, usualmente, em lâminas finas com filmes de metal depositado nas faces opostas com o propósito de formar um eletrodo. Entretanto, os elementos PZT podem ser produzidos em várias formas como tubos, anéis e semiesferas. Existem também fios fabricados de PVDF. A tabela 4.1 mostra as propriedades físicas típicas do PZT e do PVDF.

Tabela 4.1. Propriedades do PZT e do PVFD.

Propriedade	PZT (PC5H) Tipo V1	PVDF
Temperatura de Curie [°C]	210	100
Módulo de Young Longitudinal [Nm^{-2}]	$59,5 \times 10^9$	3×10^9
Constante Dielétrica d_{31} [mV^{-1}]	212×10^{-12}	23×10^{-12}
Campo Elétrico Maximo [Vm^{-1}]	$0,4 \times 10^6$	40×10^6

O PZT é aproximadamente 20 vezes mais rígido do que o PVDF. Um sensor requer pequena rigidez, para que acrescente mínima rigidez local na estrutura em questão. O atuador requer alta rigidez para que o acoplamento mecânico seja efetivo na estrutura. A constante piezelétrica, que relata a livre deformação de um elemento piezelétrico a uma tensão elétrica aplicada, é maior em magnitude para o PZT do que para o PVDF. Estas duas propriedades tornam o PZT um material mais apropriado para ser usado como atuador. Entretanto, o máximo campo elétrico que pode ser aplicado ao PVDF é aproximadamente cem vezes maior que no PZT. Isto implica que se existe alta tensão elétrica disponível, o PVDF pode ser mais atrativo quando utilizado como atuador. Pesquisadores têm utilizando PVDF como atuadores no controle de vibração, onde múltiplas lâminas de PVDF são fixas em estruturas simples.

4.5. Atuadores Piezelétricos

Os elementos piezelétricos podem ser configurados para excitar um sistema lateralmente ou longitudinalmente. Isto depende da forma que a tensão elétrica é aplicada neles. Se dois elementos são fixos nos lados opostos de uma viga, como mostrado nas figuras 4.4 e 4.5, e à eles aplicada uma tensão elétrica em fase (Figura 4.6), resultam forças no plano nas extremidades dos atuadores, causando uma excitação longitudinal. Entretanto, se for aplicadas tensão elétrica em anti-fase (Figura 4.7), resultam momentos nas extremidades dos atuadores, causando movimento longitudinal, como mostrado nas figuras 4.4 e 4.5.

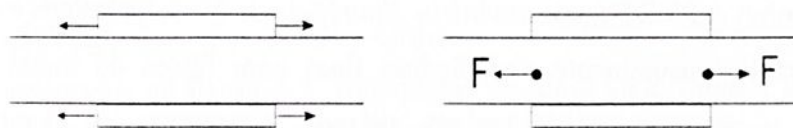


Figura 4.4. Tensão elétrica aplicada em fase gerando movimento longitudinal.



Figura 4.5. Tensão elétrica aplicada em antifase gerando movimento lateral.

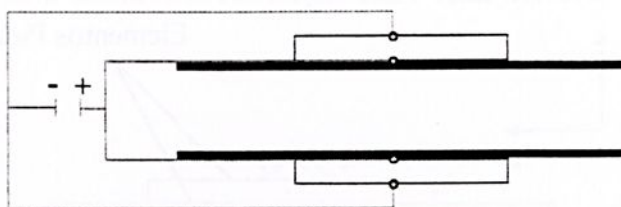


Figura 4.6. Elementos piezelétricos ligados em fase.

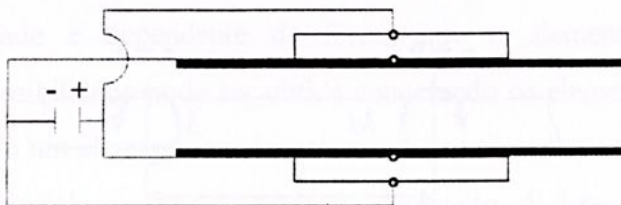


Figura 4.7. Elementos piezelétricos ligados em anti-fase.

4.5.1. Atuador de Flexão

Um atuador vibracional de flexão é mostrado na figura 4.8. A relação entre o momento gerado e a tensão elétrica aplicada é dada pela equação 4.3, (Brennan, 1994).

$$M = \frac{t_b^2 Y_b b_b (1 + T)}{6 + \psi + 12T + 8T^2} \Lambda \quad (4.3)$$

Sendo que $T = \frac{t_p}{t_b}$, $\psi = \frac{Y_b b_b t_b}{Y_p b_p t_p}$ e $\Lambda = \frac{d_{31} V}{t_p}$

b e t são respectivamente a largura e a espessura da viga e os subíndices b e p se referem a viga e ao PZT respectivamente e V é a tensão elétrica aplicada.

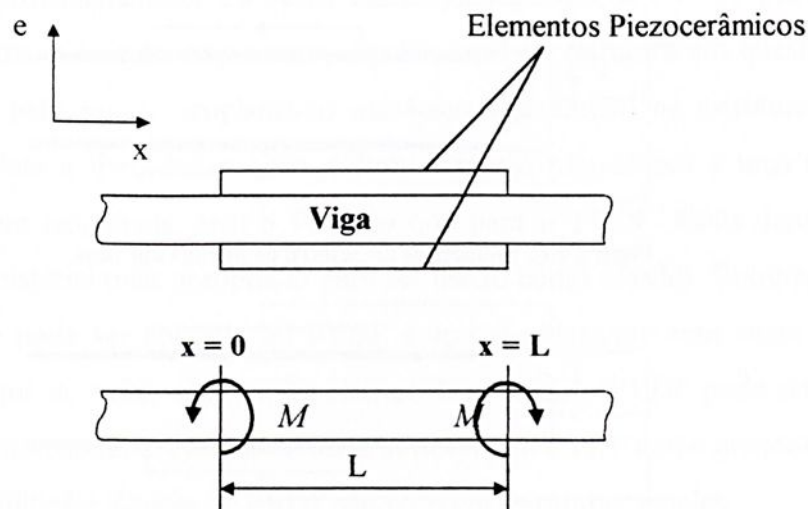


Figura 4.8. Atuador vibracional de flexão.

4.5.2. Atuador Longitudinal

Considera-se o atuador longitudinal mostrado na figura 4.4. Aos elementos piezocerâmicos a tensão elétrica é direcionada em fase, gerando assim forças nas extremidades dos atuadores. A equação 4.4 mostra a relação entre a tensão elétrica aplicada e a força gerada pelos atuadores (Brennan, 1994).

$$F = \frac{2t_b E_b b_b}{6 + \Psi} \Lambda \quad (4.4)$$

$$\text{Sendo, } \Psi = \frac{Y_b b_b t_b}{Y_p b_p t_p} \text{ e } \Lambda = \frac{d_{31} V}{t_p}$$

4.6. Sensores Piezelétricos

Os sensores piezelétricos podem medir deformações longitudinais ou laterais. Em ambos os casos, a tensão elétrica gerada pelo equipamento é proporcional a deformação espacialmente integrada pela área que ele ocupa. O sensor tem um modelo elétrico simples, constituído de um

gerador de carga em paralelo com um capacitor, ou um gerador de tensão elétrica em série com um capacitor, como mostra a figura 4.9. A relação entre estas variáveis é dada por (Brennan, 1994),

$$Q = CV \quad (4.5)$$

Sendo V a tensão elétrica gerada em circuito aberto, Q a carga elétrica e C a capacitância do sensor. A sensibilidade é dependente da forma que o elemento PZT é conectado eletricamente. A maior sensibilidade pode ser obtida conectando os elementos em série. E isso é o dobro da sensibilidade de um elemento ou dois elementos conectados em paralelo. Em série ou em paralelo somente um tipo de movimento pode ser detectado. A detecção simultânea de dois tipos de movimento depende de como são conectados os elementos PZT.

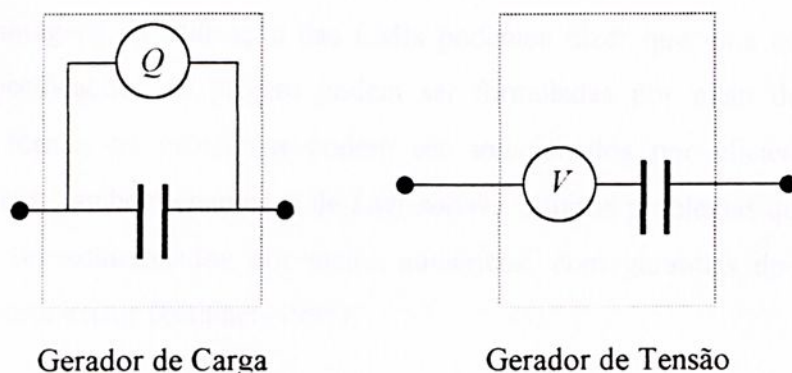


Figura 4.9. Modelos equivalentes de um sensor piezelétrico.

Capítulo 5

DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIs)

O propósito deste capítulo é mostrar a utilização das LMIs em aplicações de controle de sistemas mecânicos. As LMIs tem aparecido como uma nova e poderosa ferramenta na análise e projeto de sistemas de controle nos maiores eventos da área. Com o desenvolvimento das técnicas de otimização convexa as LMIs tem se tornado uma importante ferramenta, com muitas aplicações futuras.

Como vantagens da utilização das LMIs podemos dizer que uma grande variedade de restrições e especificações de projeto podem ser formuladas por meio de LMIs. Uma vez descritos nesta forma, os problemas podem ser solucionados por eficientes algoritmos de otimização convexa, também chamados de *LMI solvers*. Muitos problemas que não tem solução analítica podem ser solucionados por meios numéricos, com garantias de se encontrar uma solução, quando esta existir (Gahinet, 1995).

5.1. História do uso das LMIs

A utilização das LMIs tem início em 1890 com a publicação da teoria de Liapunov. Liapunov mostrou que a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.1)$$

é estável (isto é, todas as trajetórias convergem para zero) se e somente se existir uma matriz positiva definida $\mathbf{P}$ tal que,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (5.2)$$



Esta restrição é conhecida como desigualdade de Liapunov sobre a matriz P , que na realidade é uma LMI. Além disto, Liapunov também mostrou que esta desigualdade poderia ser resolvida explicitamente.

Na década de 40, Lur'e, Postnikov dentre outros da ex-União Soviética aplicaram o método de Liapunov em um problema prático da engenharia de controle. Especificamente para um problema de estabilidade de um sistema de controle com uma não linearidade no atuador. Entretanto, eles não resolveram o problema explicitamente, porém o critério de estabilidade tinha a formulação em LMI. Esta desigualdade era reduzida a desigualdades matriciais que eram checadas uma a uma.

Na introdução do livro de Lur'e pode-se encontrar:

Este livro representa a primeira tentativa de demonstrar que as idéias expressas 60 anos atrás por Liapunov, que até recentemente pareciam não ter aplicações práticas, estão agora por se tornar um meio de análise de sistemas contemporâneos de engenharia de controle.

Em resumo, pode-se dizer que Lur'e e outros foram os primeiros a encontrar aplicações práticas da teoria de Liapunov nos problemas de engenharia de controle. Entretanto, as LMIs eram resolvidas manualmente, o que limitava a solução de problemas de ordens grandes. Na década de 60, deu-se o novo grande passo quando Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores conseguiram transformar o problema de Lur'e em um critério gráfico de simples entendimento, utilizando o que chamamos hoje de Lema KYP (Kalman - Yakubovich - Popov). Tal critério podia ser utilizado para sistema de grande ordem, mas não se aplicava muito bem a problemas com mais de uma não – linearidade.

O Lema KYP e suas extensões foram amplamente estudados na segunda metade do anos 60. As relações com as idéias de passividade, critério do menor-ganho de Zames e Sandberg e controle ótimo quadrático foram demonstradas. Em 1970 foi mostrado que a LMI que aparecia no Lema KYP podia ser solucionada também por equações de Riccati, ao invés de unicamente por critérios gráficos.

O próximo grande passo foi a simples observação de que as LMI que aparecem na teoria de controle podem ser formuladas como problemas de otimização convexa e são passíveis de serem solucionados por computação. Esta observação simples, na verdade tem grandes implicações na solução das LMIs. Muitos pesquisadores notaram este fato. Entretanto, Pyatnitskii e Skorodinskii foram, provavelmente, os primeiros a mostrar isto claramente. Eles

reduziram o problema de Lur'e a um problema de otimização convexa envolvendo desigualdades matriciais lineares, que podia ser solucionado pelo o algoritmo do elipsóide. Até onde se sabe, Pyatnitskii e Skorodinskii foram os primeiros a formular a solução de uma desigualdade matricial linear por meio de um algoritmo de busca convexa com garantias de se encontrar uma solução (Boyd, 1994).

Recentemente, o maior feito foi obtido com o desenvolvimento do método de otimização convexa do *ponto interior* (Boyd, 1995) (Wu, 1996), para solução das LMIs que aparecem na teoria de controle.

5.2. Definições sobre as LMIs

Uma LMI é uma desigualdade matricial na seguinte forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}_0 + x_1 \mathbf{A}_1 + \dots + x_N \mathbf{A}_N < 0 \quad (5.3)$$

sendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ um vetor de escalares desconhecidos (variáveis de decisão ou de otimização) e $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_N$ matrizes simétricas. O termo “ < 0 ” significa “definida negativa”, isto é, o maior autovalor de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é negativo.

Note que as restrições $\mathbf{A}(\mathbf{x}) > 0$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}) < \mathbf{B}(\mathbf{x})$ são casos especiais de equação 5.3, desde que elas possam ser rescritas como $-\mathbf{A}(\mathbf{x}) < 0$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) < 0$, respectivamente.

A desigualdade matricial da equação 5.3 é um problema convexo. Desde que $\mathbf{A}(\mathbf{y}) < 0$ e $\mathbf{A}(\mathbf{z}) < 0$ implica que $\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{y} + \mathbf{z}}{2}\right) < 0$ e como resultado se obtém:

- O conjunto solução, chamado de conjunto factível, é um subconjunto convexo de R^N
- Achar uma solução para equação 5.3 se torna um problema de otimização convexa.

A convexidade tem uma consequência importante, ou seja, ainda que a equação 5.3 não tenha uma solução analítica em geral, este problema pode ser resolvido numericamente com garantias de se encontrar uma solução, quando ela existir. Note que um sistema de restrições LMI pode ser escrito como uma única LMI, desde que:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) < 0 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_K(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad \text{é equivalente à} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) := \text{diag}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{A}_K(\mathbf{x})) < 0$$

sendo que $\text{diag}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{A}_K(\mathbf{x})) < 0$ denota a matriz diagonal com $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{A}_K(\mathbf{x}) < 0$ na diagonal. Conseqüentemente, múltiplas restrições na forma LMI podem ser impostas em um vetor de variáveis de decisão sem perder a convexidade.

5.3. Estudo da Estabilidade Utilizando LMIs

As desigualdades matriciais lineares são ferramentas importantes para o estudo da estabilidade de sistemas descritos no espaço de estados (Boyd et al. 1994). Considere o sistema linear autônomo dado pela equação 5.4, na ausência de excitações externas.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.4)$$

sendo $\mathbf{x}$ o vetor de estados e $\mathbf{A}$ uma matriz constante. Se $\mathbf{A}$ é não singular, então o único estado de equilíbrio é a origem $\mathbf{x} = 0$. Para este sistema, pode-se definir uma função de Liapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0 \quad (5.5)$$

Sua derivada em relação ao tempo é:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (5.6)$$

Como $V(\mathbf{x})$ foi escolhida definida positiva, para se ter estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa ($\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$).

Portanto para a estabilidade do sistema da equação 5.3 é necessário que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (5.7)$$

Desta forma pode ser escrever um teorema para análise da estabilidade de sistemas descritos na forma de espaço de estados (Assunção et al., 2001)

TEOREMA 5.1. *Considere o sistema autônomo descrito pela equação*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

sendo $\mathbf{x}$ o vetor de estados e $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ constante e não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ seja assintoticamente estável é que, exista uma matriz $\mathbf{P}$ positiva definida, simétrica, tal que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0$$

A interpretação geométrica do teorema anterior é mostrada na figura 5.1. A figura mostra a função $V(\mathbf{x})$ e o caminho da evolução dos estados do sistema da equação 5.1 sem forças externas. Os estados estão restritos ao lugar geométrico delineado por $V(\mathbf{x})$, ou seja, pela função de Liapunov escolhida. Note que $\dot{V}(\mathbf{x})$ é sempre negativa ao longo de $V(\mathbf{x})$. Então, a função $V(\mathbf{x})$ decresce ao longo do tempo, o que implica que o sistema é assintoticamente estável.

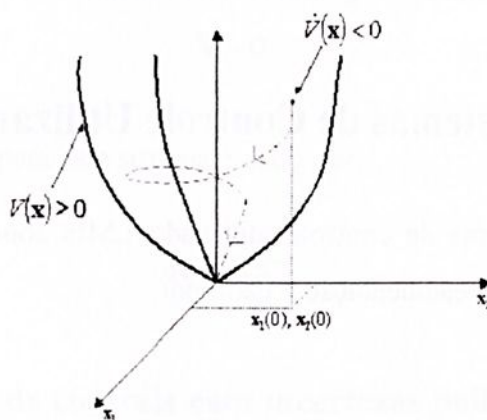


Figura 5.1. Interpretação geométrica do Teorema 5.1.

5.4. Aplicação de Controle Utilizando LMIs

Muitos problemas de controle e especificações de projeto tem a formulação LMI. Isto é especialmente verdade para a análise e projeto de sistemas que utilizam o princípio de Liapunov, mas também para problemas de ótimo LQG (linear quadratic gaussian), controle H_∞ , controle covariância, etc.... LMIs são aplicadas em processos de estimação, identificação, projeto ótimo, projeto estrutural, problemas de escalonamento de matrizes e outros. A principal característica da formulação LMI é a habilidade de combinar várias restrições de projeto ou objetivos de uma forma numericamente manejável. Como aplicações de problemas tratados por LMIs podem ser citados:

- estabilidade robusta de sistemas LTI (lineares invariantes no tempo) com incertezas;
- estabilidade robusta;
- estabilidade quadrática de inclusões diferenciais;
- estabilidade de Liapunov de sistemas com parâmetros dependentes;
- propriedades de entrada/estado/saída de sistemas LIT;
- projeto de realimentação de estados multi-modelos/multi-objetiva;
- alocação robusta de pólos;
- controle robusto H_∞ ;
- síntese multi-objetiva H_∞ / H_2 ;

A seguir são apresentados alguns dos itens mostrados na lista anterior que são aplicados neste trabalho.

5.5. Projeto de Sistemas de Controle Utilizando LMIs

O projeto de sistema de controle utilizando LMIs considera a lei de realimentação de estados tal que o ganho de realimentação é dado por,

$$u = Kx \quad (5.8)$$

O sistema em malha fechada tem a seguinte equação na forma de espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x = A_c x \quad (5.9)$$



Para que o sistema em malha fechada da equação 5.9 seja estável, é necessário que exista uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{P}$ tal que o teorema 5.1 seja satisfeito. Ou seja,

$$\mathbf{A}_f^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_f < 0$$

ou

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) < 0 \quad (5.10)$$

com $\mathbf{P} > 0$

A equação 5.10 não é uma LMI, pois existe o produto de duas variáveis a serem encontradas, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{K}$. Para obtenção do problema convexo deve-se trabalhar a equação 5.10 algebricamente.

Primeiramente multiplica-se ambos os lados da equação por $\mathbf{P}^{-1}$ (a matriz inversa de $\mathbf{P}$ existe, uma vez que ela é considerada simétrica positiva definida). Tem-se então,

$$\mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T < 0 \quad (5.11)$$

Definindo duas novas variáveis, $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{K} \mathbf{X}$, tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{G} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T + \mathbf{G}^T \mathbf{B}^T &< 0 \\ \mathbf{X} &> 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

O ganho do controlador para este sistema é dado por,

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{X}^{-1} \quad (5.13)$$

5.5.1. Projeto de sistemas de controle com incertezas politópicas utilizando LMIs

Um sistema com incertezas politópicas com m vértices pode ser estabilizado por meio de projeto por LMIs. Este sistema com incertezas politópicas será estabilizável se (Assunção, 2001)

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_i + \mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{G}^T\mathbf{B}^T < 0 \quad (5.14)$$

$$\mathbf{X} > 0 \quad (5.15)$$

sendo $\mathbf{A}_i$ o i -ésimo vértice do politopo, $i = 1, 2, \dots, m$. Mais detalhadamente, o projeto de controlador robusto que estabiliza o sistema incerto consiste em resolver simultaneamente as seguintes LMIs simultaneamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{X}\mathbf{A}_1^T + \mathbf{G}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{X}\mathbf{A}_2^T + \mathbf{G}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_N + \mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{X}\mathbf{A}_N^T + \mathbf{G}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ \mathbf{X} &> 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Sendo $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$ e N o número total de vértices do politopo.

O controlador é dado por: $\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{X}^{-1}$.

5.6. Especificações de Desempenho

O objetivo mais importante no projeto de sistemas de controle é o atendimento de certos critérios de desempenho assegurando a estabilidade do sistema. Uma forma de especificar alguns critérios de desempenho de sistemas de controle é considerar as amplitudes de certos sinais do sistema. Como exemplo, um sistema de rastreamento poderia ter como índice de desempenho a limitação do sinal de erro deste sistema.

Nesta seção pretende-se mostrar as diferentes maneiras de limitação de um sinal, em outras palavras as diferentes formas de se normalizar os sinais. Será visto que para certos sistemas o projeto utilizando uma norma pode ser mais conveniente do que outra.

5.6.1. Espaços Normalizados

Considerando V um vetor sobre $\mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}$) e fazendo $\|\cdot\|$ ser a norma definida sobre V . Pode-se então dizer que V é um espaço normalizado. Por exemplo, o espaço vetor $\mathbf{C}^n$ com algum vetor p -norma, $\|\cdot\|_p$, para $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço normalizado.

Como outro exemplo, considere-se o espaço linear vetor $C[a,b]$ de todas as funções contínuas limitadas no intervalo real $[a,b]$. Então $C[a,b]$ se torna um espaço normalizado se uma *norma suprema* é definida sobre o espaço (Zhou, 1996).

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \quad (5.15)$$

Uma sequência $\{x_n\}$ em um espaço normalizado V é chamada de sequência de *Cauchy* se $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$. Um espaço normalizado V é chamado de *completo* se toda sequência de *Cauchy* em V converge para V . Um espaço normalizado completo é também chamado de espaço de *Banach*.

5.6.2. Espaços de Hilbert

O produto interno de vetores definidos no espaço *Euclidiano* $\mathbf{C}^n$ é dado por,

$$\langle x, y \rangle := x^* y = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \quad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbf{C} \quad (5.16)$$

Note que muitas notações de medida e propriedades geométricas podem ser definidas, tal como comprimento, distância, ângulo e energia de sistemas físicos, a partir do produto interno. Como exemplo, pode-se definir o vetor comprimento $x \in \mathbf{C}^n$ na forma,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (5.17)$$

Um espaço *Hilbert* é um espaço de produto interno completo com norma induzida pelo seu próprio produto interno. Um espaço de *Hilbert* é também um espaço de *Banach*.

Como exemplo de um espaço de *Hilbert* pode-se escrever,

$L_2(I)$ para $I \subset \mathfrak{R}$

$L_2(I)$ consiste em todas as funções quadráticas de medida integráveis definidas no intervalo $I \subset \mathfrak{R}$, com produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(t) * g(t) dt \quad (5.18)$$

para $f, g \in L_2(I)$. Similarmente, se a função é um vetor ou uma matriz, o produto interno é definido como

$$\langle f, g \rangle := \int_I \text{Traço}[f(t) * g(t)] dt \quad (5.19)$$

Alguns espaços de Hilbert são muito comuns no projeto de sistemas de controle, dentre eles estão, $L_2[0, \infty)$, $L_2(-\infty, 0]$, $L_2(-\infty, \infty)$, dentre outros.

5.7. Espaços Hardy $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Considerando que $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, e fazendo $f(s)$ ser uma função complexa definida sobre S ,

$$f(s): S \mapsto \mathbb{C}$$

$f(s)$ é dita ser analítica no ponto z_0 em S se ela é diferenciável no ponto z_0 e em suas vizinhanças. É um fato de que se $f(s)$ for analítica no ponto z_0 então $f(s)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens em z_0 . O oposto é também verdade, isto é, se a função tem séries de potência em z_0 , então ela é analítica em z_0 . Uma função $f(s)$ é dita ser analítica em S se ela é analítica em todos os pontos de S . Uma função matricial é dita analítica em S se todos seus elementos são analíticos em S .

Uma propriedade já bem conhecida é chamada de *Teorema do Módulo Máximo*.

Teorema 5.2. se $f(s)$ é definida e contínua no conjunto limitado fechado S e analítica no interior de S , então o máximo de $|f(s)|$ em S é encontrado no contorno de S , isto é,

$$\max_{s \in S} |f(s)| = \max_{s \in \partial S} |f(s)| \quad (5.20)$$

sendo que ∂S denota o contorno de S .

A seguir são considerados alguns espaços de funções complexas.

Espaço $L_2(j\Re)$

$L_2(j\Re)$ ou simplesmente L_2 é um espaço de *Hilbert* de uma função matricial (ou escalar) em $j\Re$ e consiste de todas as funções matriciais F tal que a integral a seguir é limitada, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}[F^*(j\omega)F(j\omega)]d\omega < \infty \quad (5.21)$$

O produto interno para este espaço de *Hilbert* é definido por,

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}[F^*(j\omega)G(j\omega)]d\omega \quad (5.22)$$

Para $F \in L_2$ a norma do produto interno é dada por,

$$\|F\|_2 := \sqrt{\langle F, F \rangle} \quad (5.23)$$

Espaço $\mathcal{H}_2$

$\mathcal{H}_2$ é um subespaço (fechado) de L_2 com funções matriciais $F(s)$ analíticas em $\text{Re}(s) > 0$ (semi plano direito aberto). A norma correspondente pode ser definida por

$$\|F\|_2^2 := \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}[F^*(\sigma + j\omega)G(\sigma + j\omega)]d\omega \right\} \quad (5.24)$$

Pode ser mostrado que,

$$\|F\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}[F^*(\sigma + j\omega)G(\sigma + j\omega)]d\omega \quad (5.25)$$

Espaço $L_\infty(j\mathfrak{R})$

$L_\infty(j\mathfrak{R})$ ou simplesmente L_∞ é um espaço de funções matricial (ou escalar) de *Banach* que são essencialmente limitadas em $j\mathfrak{R}$, com norma,

$$\|F\|_\infty := \text{ess sup}_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)] \quad (5.26)$$

Espaço $\mathcal{H}_\infty$

$\mathcal{H}_\infty$ é um subespaço (fechado) de L_∞ com funções que são analíticas e limitadas no semi plano direito aberto. A norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como,

$$\|F\|_\infty := \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}[F(s)] = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)] \quad (5.27)$$

Os espaços $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e outros espaços $\mathcal{H}_p$, $p \geq 1$ são chamados de espaços Hardy, em homenagem ao matemático G. H. Hardy.

5.8. Otimização $\mathcal{H}_2$

No projeto de sistemas de controle ótimo que minimizam a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência estável de um sistema deve-se escrever o sistema na forma espaço de estados,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.28)$$



Os subíndices 1 e 2 na matriz $\mathbf{B}$ referem-se às entradas perturbantes e controlantes no sistema. O problema consiste em encontrar o conjunto de ganhos $\mathbf{K}$ tal que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável.

$$\mathbf{K} \triangleq \{ \mathbf{K} : \mathbf{A}_f \text{ é assintotic. estável} \}$$

sendo

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}$$

$\mathbf{A}_f$ deve ter todos os autovalores no semi plano complexo esquerdo, além disso a lei de controle é a de realimentação de estados dada por,

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência deste sistema pode ser escrita conforme a equação 5.25.

$$\|H\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}[H^*(j\omega)H(j\omega)]d\omega$$

A norma $\mathcal{H}_2$ desta função de transferência pode também ser calculada utilizando os gramianianos de controlabilidade L_c ou os gramianianos de observabilidade L_o , (Peres, 2000)

$$\mathbf{A}_f \mathbf{L}_c + \mathbf{L}_c \mathbf{A}_f^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = 0 \quad (5.29)$$

$$\mathbf{A}_f \mathbf{L}_o + \mathbf{L}_o \mathbf{A}_f^T + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (5.30)$$

De forma que,

$$\|H\|_2^2 = \text{Traço}(\mathbf{B}_1^T \mathbf{L}_o \mathbf{B}_1) = \text{Traço}(\mathbf{C} \mathbf{L}_c \mathbf{C}^T) \quad (5.31)$$

O interesse é o de encontrar o mínimo da norma $\mathcal{H}_2$ através de um sistema de realimentação que seja estável,

$$\min_{[K] \in K} \|H\|_2^2 \quad (5.32)$$

A equação 5.32 pode ser escrita de duas formas considerando a equação 5.31 e suas restrições 5.29 e 5.30.

$$\min_{K \in K, P} \text{Traço}(B_1^T P B_1) \quad (5.33)$$

sujeito a,

$$(A + B_2 K)^T P + P(A + B_2 K) + C^T C = 0 \quad (5.34)$$

ou

$$\min_{K \in K, W} \text{Traço}(C W C^T) \quad (5.35)$$

sujeito a,

$$(A + B_2 K)W + W(A + B_2 K) + B_1 B_1^T = 0 \quad (5.36)$$

5.8.1. Parametrização convexa do problema $\mathcal{H}_2$

O problema de otimização $\mathcal{H}_2$ pode ser formulado convexamente considerando, por exemplo, as equações 5.35 e 5.36 e trocando a igualdade da restrição 5.36 por uma desigualdade, de modo que,

$$\min_{K \in K, W} \text{Traço}(C W C^T) \quad (5.37)$$

sujeito a,

$$(A + B_2 K)^T W + W(A + B_2 K) + B_1 B_1^T \leq 0 \quad (5.38)$$

Deve-se ainda considerar algumas hipóteses adicionais, como a observabilidade do par (A, B_1^T) , ou que o *rank* de $B_1 = n$ e que os pares (W, K) com $W > 0$ satisfaçam a equação 5.38 e parametrizam o espaço de ganhos que estabilizam o sistema.

$$\exists K \in K \Leftrightarrow \exists K, W > 0 \text{ tal que 5.38 é satisfeita}$$

A partir da equação 5.38 pode-se escrever,

$$X \geq CWC^T = (CW)W^{-1}(CW)^T \quad (5.39)$$

e portanto,

$$\text{Traço}(X) \geq \text{Traço}(CWC^T) \quad (5.40)$$

Utilizando o *complemento de Schur* (Apêndice A), a equação 5.39 pode ser escrita na forma,

$$\begin{bmatrix} W & WC^T \\ CW & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.41)$$

A igualdade da equação 5.40 é garantida pela minimização. Já a equação 5.38 fornece

$$-AW - WA^T - B_2 Z - Z^T B_2^T \geq B_1 B_1^T \quad (5.42)$$

Sendo que a matriz $Z = KW$ e a equação 5.42 pode ser escrita, considerando a lei de realimentação de estados como,

$$(A + B_2 ZW^{-1})W + W(A + B_2 ZW^{-1})^T + B_1 B_1^T \leq 0 \quad (5.43)$$

Sendo que $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ o ganho que estabiliza o sistema e fornece a solução ótima.

$$\text{Traço}(\mathbf{X}) = \min \|\mathbf{H}\|_2^2 \quad (5.44)$$

Desta forma o problema de otimização H_2 é escrito de forma convexa utilizando as seguintes desigualdades matriciais lineares,

TEOREMA 5.1. A solução ótima do problema (Peres, 1997)

$$\min_{\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}} \text{Traço}(\mathbf{X}) \quad (5.45)$$

sujeito a,

$$\mathbf{W} > 0 \quad (5.46)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{W} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_2\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.48)$$

fornece

$$\text{Traço}(\mathbf{X}) = \min \|\mathbf{H}\|_2^2 \quad (5.49)$$

e o ganho ótimo de realimentação é dado por,

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1} \quad (5.56)$$

5.9. Otimização H_∞

A norma H_∞ de uma função de transferência é definida por,

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} \sigma_{\max}[H(j\omega)] \quad (5.57)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada considerando a relação entre um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ e a existência de uma matriz positiva definida $\mathbf{P}$

LEMA 5.1. $\|H\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a desigualdade

$$\mathbf{A}_f^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_f + \gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \leq 0$$

admitir $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ como solução.

Um procedimento iterativo pode ser utilizado para o cálculo da norma $\|H\|_\infty$ utilizando a equação do LEMA 5.1. Sendo gradativamente minimizado o valor de γ até o limite da existência de uma solução positiva definida $\mathbf{P}$ que satisfaça a equação do LEMA 5.1.

O problema de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ é definido como o conjunto dos ganhos de realimentação que estabilizam o sistema e,

$$\min_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \|H\|_\infty \quad (5.58)$$

A equação 5.58 pode ser também estrita como,

$$\min_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \gamma \quad (5.59)$$

sujeito a

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \quad (5.60)$$

Desta forma o problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ pode ser formulado através do LEMA 5.1 considerando a equação 5.59 e a existência de uma matriz simétrica $\mathbf{P}$ positiva definida, tal que $\mathbf{P}$ é solução de,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) + \gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \leq 0 \quad (5.61)$$

Entretanto, a equação 5.61 não envolve de forma convexa as variáveis γ , $\mathbf{P}$ e $\mathbf{K}$.

Considerando $K = ZP^{-1}$ e $\delta = \gamma^2$, pode-se obter o problema convexo da equação 5.61 utilizando o complemento de Schur, como,

$$\begin{bmatrix} -AP - PA^T - B_2 Z - Z^T B_2^T & B_1 & PC^T \\ B_1^T & I & 0 \\ CP & 0 & \delta I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.62)$$

e $P > 0$

Desta forma o problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ pode ser formulado de forma convexa através das seguintes desigualdades matriciais lineares.

TEOREMA 5.2. A solução ótima do problema (Peres, 1997)

$$\min_{\delta, P} \delta \quad (5.63)$$

$$\delta > 0 \quad (5.64)$$

$$P > 0 \quad (5.65)$$

$$\begin{bmatrix} -AP - PA^T - B_2 Z - Z^T B_2^T & B_1 & PC^T \\ B_1^T & I & 0 \\ CP & 0 & \delta I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.66)$$

fornece

$$\sqrt{\delta} = \min \|H\|_\infty \quad (5.67)$$

e o ganho ótimo $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação é dado por

$$K = ZP^{-1} \quad (5.68)$$

Além disso, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma função de transferência pode ser obtida através do problema convexo utilizando o complemento de Schur aplicado a equação do LEMA 5.1.

$$\delta = \gamma^2 \quad (5.69)$$

$$\|H\|_\infty^2 = \min \delta \quad (5.70)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + CC^T & PB_1 \\ B_1^T P & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.71)$$

$$P > 0 \quad (5.72)$$

$$\delta > 0 \quad (5.73)$$

5.10. Sistemas de Controle com Restrições de Projeto

Considere um sistema sujeito a incertezas do tipo norma limitada. Este sistema é descrito em diagrama de blocos e mostrado na figura 5.2.

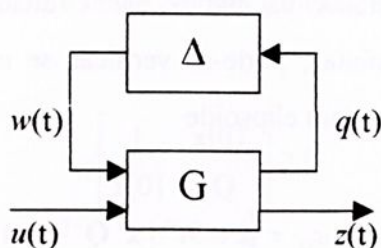


Figura 5.2. Sistema com incertezas do tipo norma limitada.

O sistema da figura 5.2 é na verdade uma família de sistema e é representado pelas seguintes equações,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (5.74)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_z\mathbf{x}(t) \quad (5.75)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{C}_q\mathbf{x}(t) \quad (5.76)$$

$$\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) \leq \mathbf{q}^T(t)\mathbf{q}(t) \quad (5.77)$$

Na equação 5.75 a matriz de saídas $\mathbf{C}_z$ representa as saídas que estão relacionadas as incertezas de norma limitada. A equação 5.77 fornece a condição de limitação da norma da incerteza. Neste modelo a perturbação de entrada $\mathbf{w}$ e a saída $\mathbf{q}$ estão relacionados por $\mathbf{w}(t) = \Delta(t)\mathbf{q}(t)$, sendo $\Delta(t)$ desconhecido, porém de norma limitada, $\|\Delta(t)\| \leq 1$ para todo t . Nesta formulação não se faz nenhuma restrição quanto ao formato de $\Delta(t)$, por exemplo, invariância linear no tempo.

A condição de estabilidade quadrática de um sistema sujeito a perturbações de norma limitada pode ser formulada por meio de LMI através da equação (Folcher, 1994)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{QA}^T + \mathbf{AQ} + \mu \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{QC}_q^T \\ \mathbf{C}_q \mathbf{Q} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.78)$$

$$\mu > 0 \quad (5.79)$$

$$\mathbf{Q} > 0 \quad (5.80)$$

5.10.1. Limitação das amplitudes de saída

Considerando que o sistema da figura 5.2 é quadraticamente estável, ou seja, as condições 5.78 – 5.80 são satisfeitas, pode-se verificar se este sistema em malha aberta tem saídas limitadas. Para isso define-se um elipsóide

$$\varepsilon_Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} < 1\} \quad (5.81)$$

Se as LMIs 5.78 – 5.80 são satisfeitas, implica que o sistema é assintoticamente estável e a função de Liapunov definida por,

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} \quad (5.82)$$

tem derivada estritamente negativa durante toda trajetória iniciada em $\mathbf{x}(0)$, ou seja,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad (5.83)$$

A equação 5.83 implica que,

$$\mathbf{x}(0) \in \varepsilon_Q \Rightarrow \forall t > 0, \mathbf{x}(t) \in \varepsilon_Q \quad (5.84)$$

Ou seja, toda condição inicial $\mathbf{x}(0)$ iniciada dentro do elipsóide, não saíra dele. Esta condição pode ser usada para limitar o sinal de saída de um sistema, bem como qualquer outro sinal. Para uma condição inicial $\mathbf{x}(0) \in \varepsilon_Q$ a restrição $\|\mathbf{z}(t)\| < \beta$ para todo $t \geq 0$ com $\beta > 0$ é escrita da forma:

$$\max_{\mathbf{z}(t) \in \mathcal{E}_Q} \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) \leq \beta^2 \quad (5.85)$$

Considerando que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_z(t)\mathbf{x}(t)$, esta condição pode ser formulada como uma LMI na variável que,

$$\beta^2 \mathbf{I} - \mathbf{C}_z \mathbf{Q} \mathbf{C}_z^T > 0 \quad (5.86)$$

Além disto, $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}_Q$ também é uma LMI nas variáveis $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{x}(0)$,

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.87)$$

Se existe $\mathbf{Q} > 0$ que satisfaça as LMIs 5.78 – 5.80, 5.86 e 5.87 o sistema sujeito a incertezas de norma limitada tem seu sinal de saída limitado superiormente por β na norma *Euclidiana*.

5.10.2. Taxa de decaimento

A taxa de decaimento de um sistema é definida como o máximo valor de α tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0 \quad (5.88)$$

Uma condição suficiente para um sistema de malha aberta (com $\mathbf{u} = 0$), ter uma taxa de decaimento maior do que α é que:

$$\begin{bmatrix} 2\alpha\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mu\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & \mathbf{Q}\mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.89)$$

Além das restrições 5.79 e 5.80. Se estas LMIs são satisfeitas então o sinal $\|\mathbf{z}(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t}$.

5.11. Síntese de realimentação de estados com restrições de projeto

A análise da seção anterior pode ser estendida para solucionar problemas de realimentação de estados, onde o interesse é encontrar uma matriz $\mathbf{K}$ através da lei de controle $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.

Desta forma o sistema passa a ter representação em diagrama de blocos como mostrado na figura 5.3.

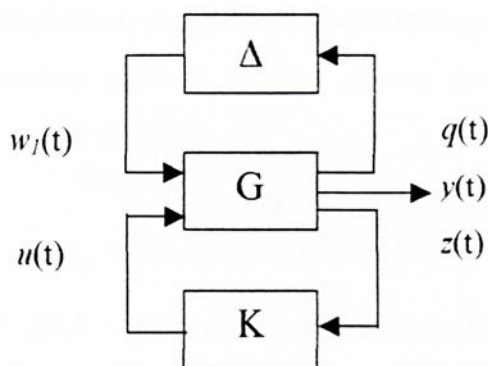


Figura 5.3. Diagrama de blocos de sistema realimentado com incertezas do tipo norma limitada.

O sistema da figura 5.3 tem a seguinte representação na forma de espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (5.90)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_z\mathbf{x}(t) \quad (5.91)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{x}(t) \quad (5.92)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{C}_q\mathbf{x}(t) \quad (5.93)$$

$$\mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) \leq \mathbf{q}(t)^T \mathbf{q}(t) \quad (5.94)$$

A partir da condição de estabilidade quadrática 5.78 e a lei de controle por realimentação, o sistema realimentado sujeito a perturbações de norma limitada é quadraticamente estável se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{K}^T\mathbf{B}_2^T + \mu\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & \mathbf{Q}\mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.95)$$

O problema das equações 5.95 não é convexo nas variáveis de interesse e portanto deve ser reformulado. Fazendo $Y = KQ$, obtém-se o problema em LMIs nas variáveis Y , Q e μ garantindo estabilidade,

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ + B_2 Y + Y^T B_2^T + \mu B_1 B_1^T & QC_q^T \\ C_q Q & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.96)$$

$$\mu > 0 \quad (5.97)$$

$$Q > 0 \quad (5.98)$$

Usando a formulação anterior, pode-se impor tempos limitados de acomodação, ou mesmo limitação no comando de entrada $u(t) = Kx(t)$ para satisfazer $\|u(t)\| < \rho$, $\forall t \geq 0$. Sendo que ρ é dado para toda condição inicial $(x(0)) \in \mathcal{E}_Q$.

O sinal de controle pode ser limitado considerando que,

$$\rho^2 I - B_2 Y B_2^T > 0 \quad (5.99)$$

A condição da equação 5.99 pode ser formulada como uma LMI na seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \rho^2 I & Y^T \\ Y & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (5.100)$$

Similarmente, a taxa de decaimento é imposta no sistema em malha fechada.

$$\begin{bmatrix} 2\alpha QA^T + AQ + B_2 Y + Y^T B_2^T + \mu B_1 B_1^T & QC_q^T \\ C_q Q & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.101)$$

As LMIs 5.100 e 5.101, são válidas para todas as condições iniciais tal que,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i(0)^T \\ x_i(0) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.102)$$

Para o projeto de sistema de controle com limitação na amplitude de saída do sistema (β), limitação de amplitude do sinal do atuador (ρ), imposição de uma taxa de decaimento (α) e estabilidade quadrática frente a incertezas de norma limitada as seguintes LMIs devem ser satisfeitas.

$$\begin{bmatrix} 2\alpha\mathbf{QA}^T + \mathbf{AQ} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T + \mu\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & \mathbf{QC}_q^T \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.103)$$

$$\beta^2\mathbf{I} - \mathbf{C}_2\mathbf{QC}_2^T > 0 \quad (5.104)$$

$$\begin{bmatrix} \rho^2\mathbf{I} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.105)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_i(0)^T \\ \mathbf{x}_i(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.106)$$

$$\mu > 0 \quad (5.107)$$

$$\mathbf{Q} > 0 \quad (5.108)$$

Para toda condição inicial que satisfaça 5.106 e as variáveis $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Y}$ e μ satisfazendo as equações 5.103 – 5.108,

$$\forall t > 0 \begin{cases} \|\mathbf{u}(t)\| < \rho e^{-\alpha t} \\ \|\mathbf{z}(t)\| < \beta e^{-\alpha t} \end{cases} \quad (5.109)$$

Além disto esta propriedade é robusta, ou seja, é satisfeita para qualquer matriz $\Delta(t)$, $\|\Delta(t)\| \leq 1$.

Capítulo 6

APLICAÇÕES AO CONTROLE DE VIBRAÇÃO

Neste capítulo pretende-se mostrar aplicações práticas da metodologia proposta para o controle de vibração de estruturas flexíveis utilizando as técnicas de desigualdades matriciais lineares.

A solução dos problemas propostos neste capítulo utilizam o *Toolbox de Controle LMI* do *MATLAB* e também o *LMISol*. As simulações computacionais são feitas utilizando o *MATLAB* e o *SIMULINK*.

6.1. Aplicação 1

CONTROLE DE VIBRAÇÃO DE UM SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Alguns sistemas mecânicos podem ser representados por modelos simples de um ou mais graus de liberdade. O número de graus de liberdade corresponde ao número de coordenadas generalizadas que são usadas para descrever o movimento de um sistema mecânico. Considere por exemplo o sistema descrito na figura 6.1.

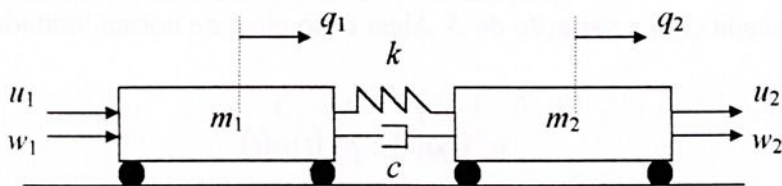


Figura 6.1. Sistema massa-mola de dois graus de liberdade.

Os parâmetros do sistema m_i , k e c representam as massas dos carros, a constante elástica da mola e o coeficiente de amortecimento viscoso, respectivamente.

Assume-se que k é o único parâmetro incerto do sistema e que ele varia entre os valores 0.5 e 2.0. Assim $k \in [k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$, neste caso, $k_0 = 1.25$ é chamado de valor nominal de k e

$\Delta k = 0.75$. Desta forma $k = k_0 + \delta \Delta k$, com δ é variante no tempo e de norma limitada $|\delta(t)| \leq 1$ para qualquer t . Para as simulações foram considerados os seguintes valores $m_1 = m_2 = 1$ e $c = 0.01$.

O diagrama de blocos que representa o sistema incerto com o controlador é dado pela figura 6.2.

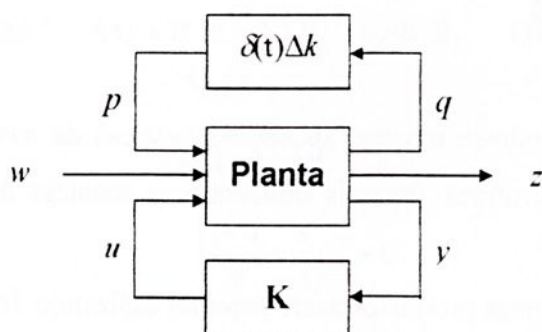


Figura 6.2. Diagrama de blocos do sistema da figura 6.1.

A matriz de estados deste sistema é dada por,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{m_1} & \frac{k_0}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k_0}{m_2} & -\frac{k_0}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Na figura 6.2 p é o vetor de entradas perturbantes devido à incerteza do sistema. Esta entrada está relacionada com a variação de δ . Além disto ela é de norma limitada e,

$$q^T(t)q(t) \geq p^T(t)p(t) \quad (6.2)$$

A matriz de entradas relacionada com as incertezas é,

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

A matriz de saídas relacionada com o vetor q é dada por,

$$\mathbf{C}_q = [-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (6.4)$$

Desta forma, a matriz de estados de malha fechada para as incertezas é dada por,

$$\mathbf{A}_\Delta(\delta) = \mathbf{A} + \mathbf{B}_p \delta \Delta k \mathbf{C}_q \quad (6.5)$$

A matriz de entradas de controle e de perturbações externas é escrita da seguinte forma,

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

A outras matrizes de saídas do sistema são dadas por,

$$\mathbf{C}_z = \mathbf{C}_y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (6.8)$$

Segundo a formulação da seção 5.10 de síntese de realimentação de estados com restrições de projeto, para as incertezas descritas acima, encontra-se um controlador que garanta a estabilidade assintótica para este sistema.

As especificações de projeto para este sistema foram as seguintes.



- Estabilidade assintótica para o sistema com variação no parâmetro $k \in [0.5 \ 2.0]$;
- Taxa de decaimento $\alpha = 0.75$;
- As especificações devem ser satisfeitas para as seguintes condições iniciais.

$$\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Fixando o valor máximo de amplitude do controlador em $\rho^2 = 1.0$ e o máximo valor da amplitude de saída do sistema em $\beta = 0.1390$, obtém-se o controlador robusto para o sistema dado por,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -16.4617 & 16.0031 & -1.6510 & 1.9926 \\ -7.4339 & 9.2787 & -0.0478 & 2.7572 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

A matriz $\mathbf{Q}$ é dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.0062 & 0.0060 & -0.0047 & -0.0041 \\ 0.0060 & 0.0065 & -0.0045 & -0.0054 \\ -0.0047 & -0.0045 & 0.0136 & 0.0037 \\ -0.0041 & -0.0054 & 0.0037 & 0.0120 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

A figura 6.3 mostra a resposta do sistema para a condição inicial $\mathbf{x}_2(0)$ e incerteza de k $[0.5 \ 2.0]$. Na figura 6.3 nota-se que a variação das amplitudes da resposta do sistema é pequena (da ordem de 0.005) para variação de k . O que mostra que o controlador obtido é robusto e o desempenho do sistema para o intervalo de variação da rigidez praticamente não se altera.

Conforme se pode constatar pela figura 6.3 as amplitudes do sistema não ultrapassam o valor 0.1390 para nenhum valor de k variando dentro da faixa de projeto. Análise similar pode ser feita para a resposta dos atuadores mostrada na figura 6.4, na qual os valores de amplitude das respostas dos atuadores não ultrapassam o limite permitido no projeto.

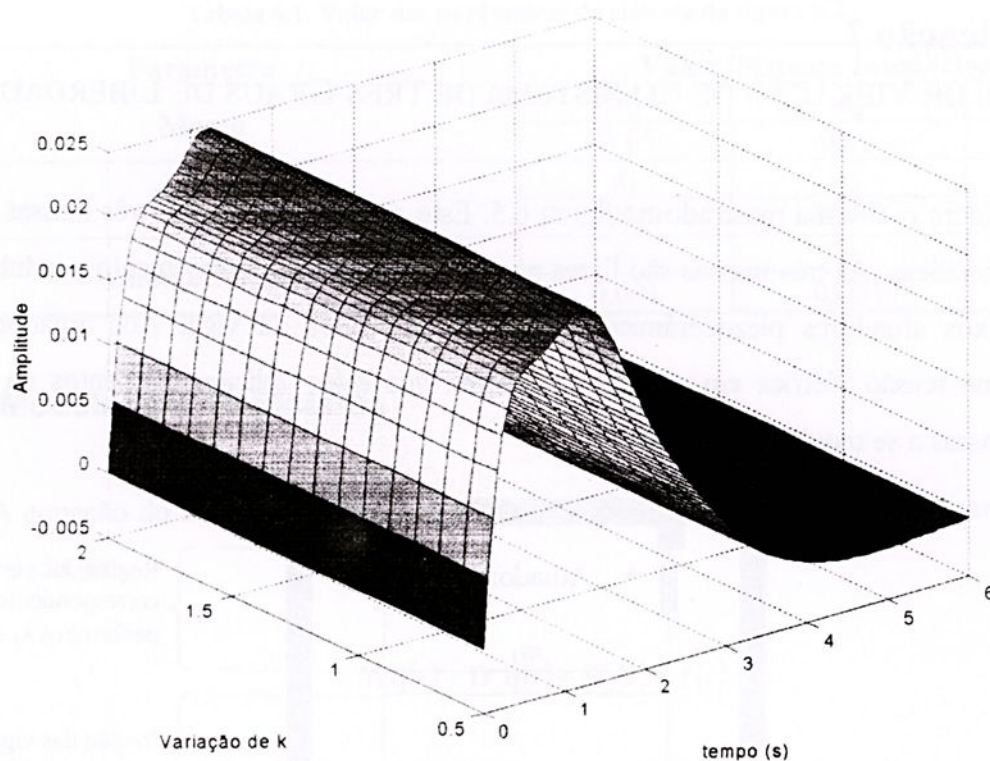


Figura 6.3. Resposta à condição inicial do sistema com a variação do parâmetro k .

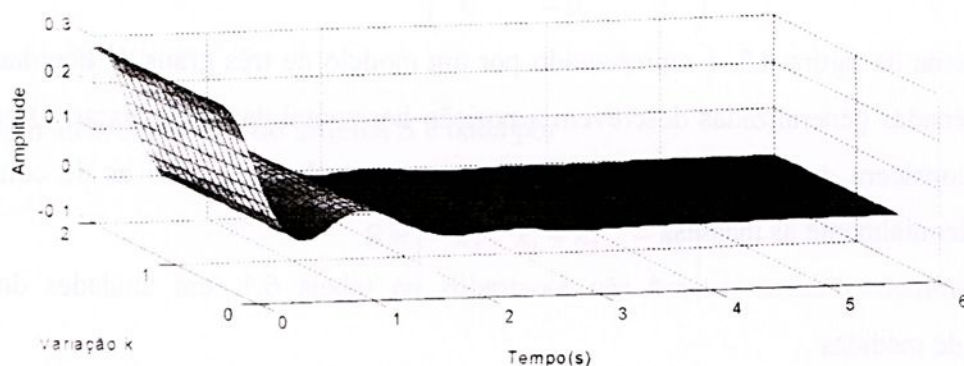
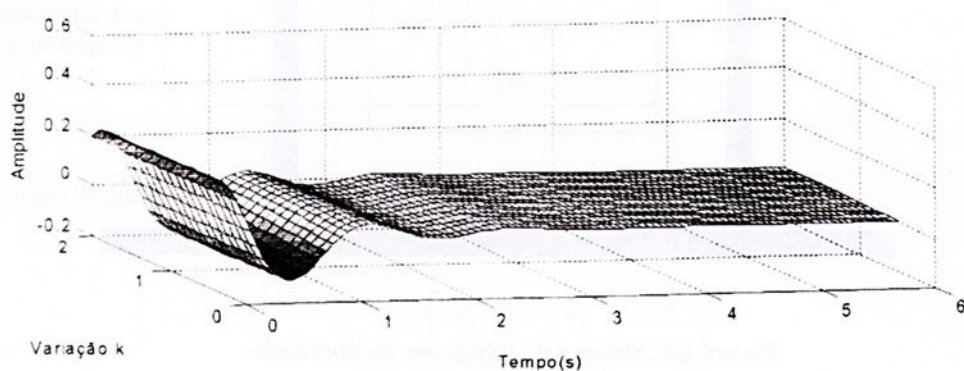


Figura 6.4. Amplitude de força dos atuadores para condição inicial $x_2(0)$.

6.2. Aplicação 2

CONTROLE DE VIBRAÇÃO DE UM SISTEMA DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

Considere o sistema mostrado na figura 6.5. Este sistema consiste de três massas fixas e duas vigas metálicas. As três massas são livres para se movimentar em movimento pendular. Nas vigas são fixos atuadores piezocerâmicos em ambos os lados da viga. Aos atuadores são aplicados uma tensão elétrica em anti-fase de forma que estes aplicam momentos na viga e forçam as massas a se movimentar.

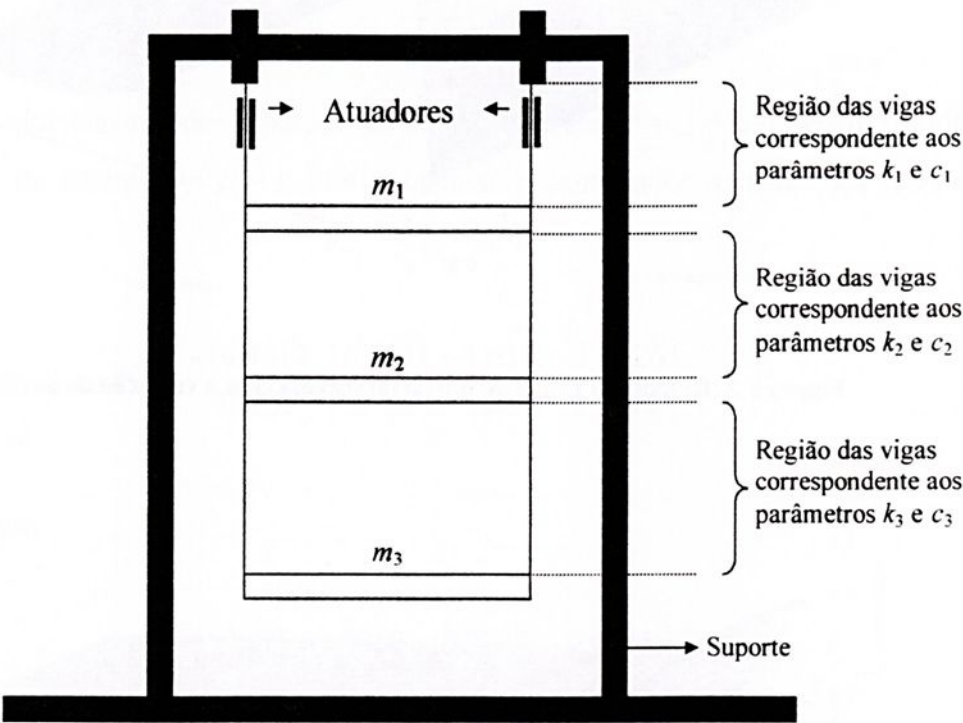


Figura 6.5. Sistema de três graus de liberdade.

O sistema da figura 6.5. é representado por um modelo de três graus de liberdade, sendo que as coordenadas generalizadas descrevem a posição horizontal das três massas. O projeto do controlador considera que as forças externas, tanto as perturbantes como as de controle são aplicadas horizontalmente às massas.

Os parâmetros deste sistema são mostrados na tabela 6.1, em unidades do sistema internacional de medidas.

Tabela 6.1. Valor dos parâmetros do sistema da figura 6.2.

Parâmetro	Valor (Sistema Intenacional)		
Massa	m_1	m_2	m_3
	0,15	0,15	0,15
Rigidez	k_1	k_2	k_3
	300,0	300,0	300,0
Amortecimento	c_1	c_2	c_3
	0,001	0,001	0,001

6.2.1. Modelagem do Sistema

A equação do movimento do sistema, figura 6.5, é obtida a partir do diagrama de corpo livre e é dado por,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$
 (6.12)

A matriz de massa **M** é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$
 (6.13)

A matriz de amortecimento viscoso **D_v** é dada por

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_1 + c_2 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$
 (6.14)

e a matriz de rigidez do sistema **S** é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_1 + k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$
 (6.15)

A representação em espaço de estados para este sistema é dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

(6.16)

sendo $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{q}(t)$ (vetor de deslocamento das massas) e $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t)$ (vetor de velocidade das massas). A matriz de transferência deste sistema é de ordem 3, portanto existem 9 funções de transferência que relacionam as entradas e saídas nas 3 massas do sistema. A norma H_∞ deste sistema, considerando que as entradas e saídas são feitas nas três massas é apresentada na tabela 6.2.

Tabela 6.2. Normas H_∞ do sistema da figura 6.4.

		Entradas u		
		m_1	m_2	m_3
Saídas y	m_1	27.3043	49.1884	61.3850
	m_2	49.1884	88.6496	110.6204
	m_3	61.3850	110.6204	137.9316

A norma H_∞ de maior amplitude está relacionada com a função de transferência que relaciona entradas e saídas na massa três. Este valor também corresponde com o pico da resposta em frequência do sistema e pode ser avaliado na figura 6.6. A figura 6.6 apresenta a função de transferência entre a entrada u_3 (massa 3) e saída y_3 (massa 3).

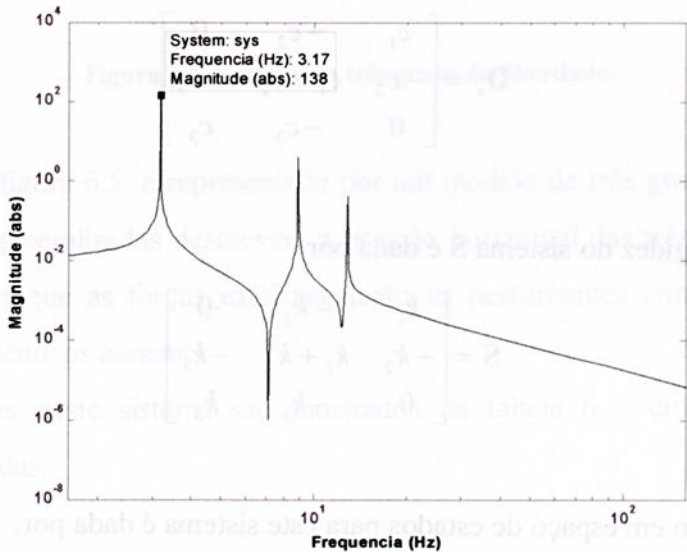


Figura 6.6. FRF da função de transferência de u_3 para y_3 .

Como pode ser notado este sistema, perturbações na massa 3 são mais amplificadas na primeira frequência natural do que perturbações nas outras massas. Para este sistema, serão analisados três tipos de controladores, um controlador ótimo $\mathcal{H}_2$, um controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$ e por fim um controlador que considera restrições e índices de desempenho do sistema.

O projeto de um controlador ótimo $\mathcal{H}_2$ foi desenvolvido na seção 5.7 e é dado por,

$$\min_{X,Z,W} \text{Traço}(X) \quad (6.17)$$

sujeito a,

$$W > 0 \quad (6.18)$$

$$\begin{bmatrix} W & WC^T \\ CW & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.19)$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA^T - B_2 Z - Z^T B_2^T & B_1 \\ B_1^T & I \end{bmatrix} \geq 0$$

O ganho ótimo de realimentação é dado por,

$$K = ZW^{-1} \quad (6.20)$$

Na formulação deste problema se considera que os atuadores agem na massa 3. Para a minimização das normas, considera-se também que a leitura é feita na posição da massa 3.

A norma $\mathcal{H}_2$, solução ótima, para este problema de otimização é,

$$\min \|H\|_2^2 = 1.3803e-011$$

O controlador ótimo associado a esta norma mínima é,

$$K = [1.866e+007 \quad 2.766e+007 \quad -4.217e+019 \quad -1.943e+005 \quad 8.056e+005 \quad -3.730e+009]$$

A resposta em frequência para o sistema em malha aberta e o sistema com controlador ótimo $\mathcal{H}_2$ é mostrada na figura 6.7.

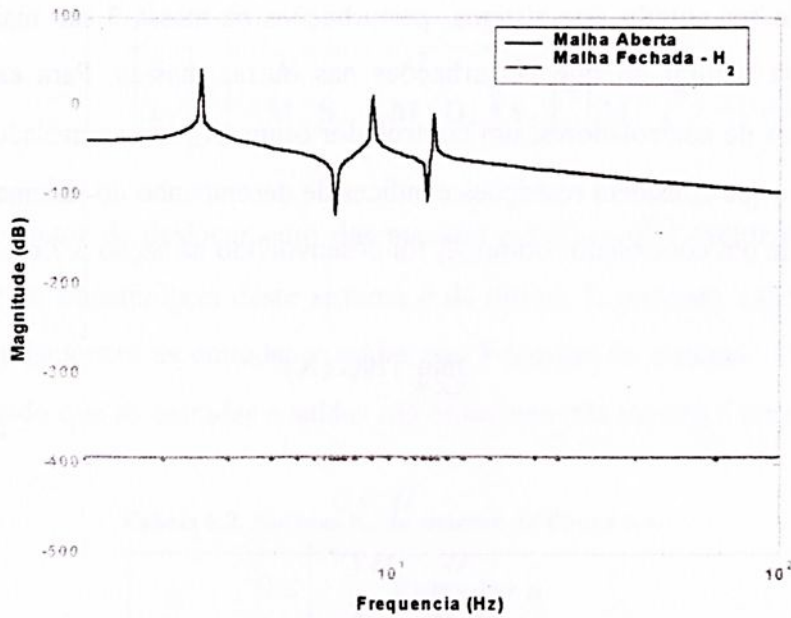


Figura 6.7. FRF do sistema em malha aberta e malha fechada com controlador ótimo $\mathcal{H}_2$.

O controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$ é para este sistema é calculado utilizando a formulação da seção 5.6 e é dado por,

$$\min_{\delta, P} \delta \tag{6.15}$$

$$\delta > 0 \tag{6.16}$$

$$P > 0 \tag{6.18}$$

$$\begin{bmatrix} -AP - PA^T - B_2 Z - Z^T B_2^T & B_1 & PC^T \\ B_1^T & I & 0 \\ CP & 0 & \delta I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6.19}$$

fornece

$$\sqrt{\delta} = \min \|H\|_\infty \tag{6.20}$$

O controlador para o caso ótimo $\mathcal{H}_\infty$ é dado por,

$$K = ZP^{-1} \tag{6.21}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ obtida no problema de otimização é;

$$\min \|H\|_\infty = 0,002118$$

Da mesma forma que o controlador ótimo $\mathcal{H}_2$, o controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$ apresenta uma considerável redução na magnitude da resposta em frequência, com relação ao sistema em malha aberta, figura 6.8. No entanto, a aplicação prática destes controladores é, na maioria das vezes, limitada. Os ganhos de realimentação são de ordem elevada. No caso de sistema mecânicos seriam necessários atuadores de alta potência para aplicação de tais forças de controle. Uma forma de constatação é analisar a reposta dos atuadores devido a condições iniciais para os casos ótimos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. A figura 6.9 mostra a resposta à condição inicial para o controlador ótimo $\mathcal{H}_2$ e a figura 6.10 para o controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

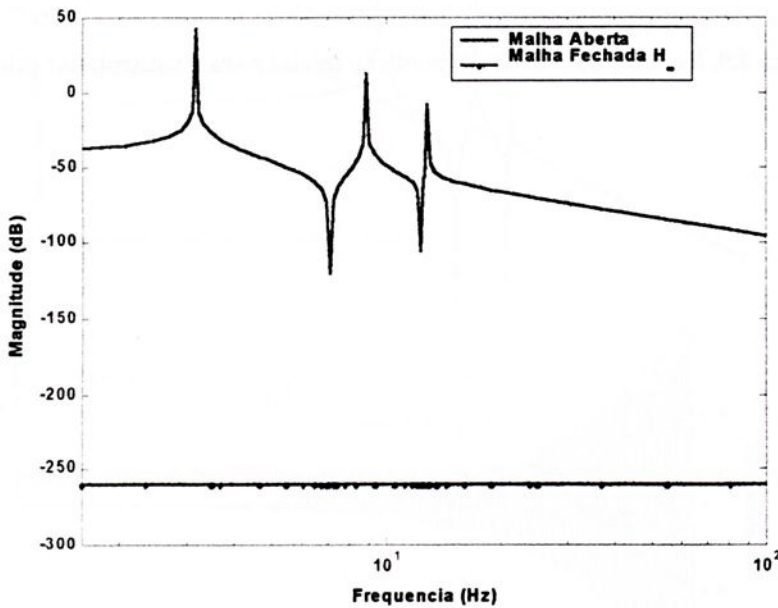


Figura 6.8. FRF do sistema em malha aberta e em malha fechada com controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

A resposta do controlador ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ mostrada nas figuras 6.9 e 6.10 são referentes a uma condição inicial $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, ou seja, condição inicial de velocidade igual a 1m/s na massa 3.

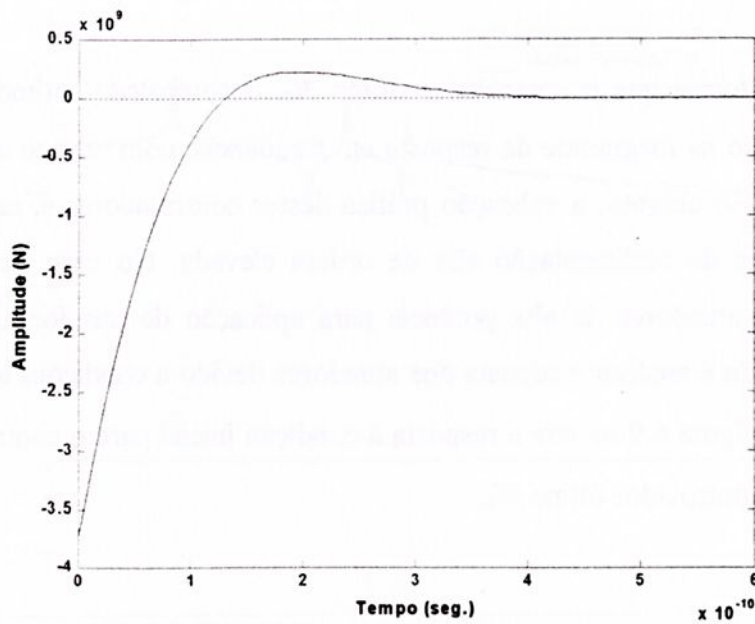


Figura 6.9. Reposta do atuador à condição inicial para o controlador ótimo $\mathcal{H}_2$.

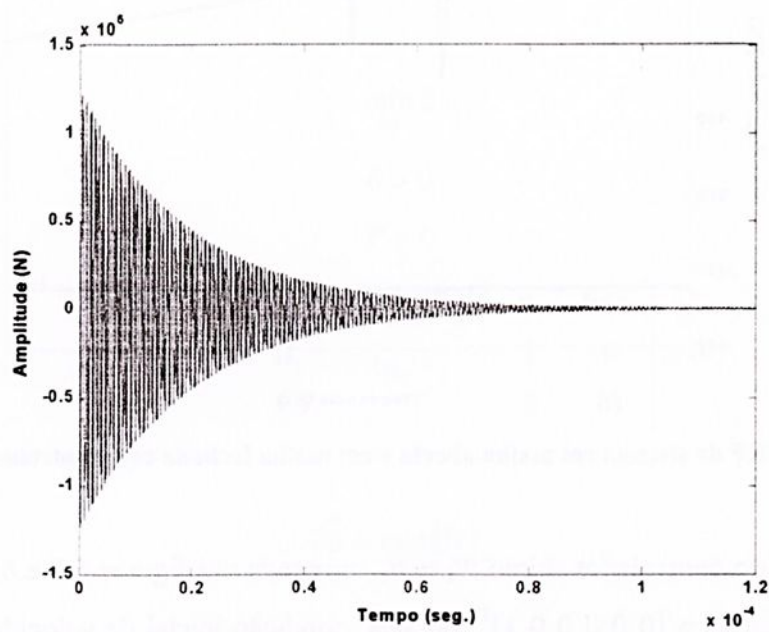


Figura 6.10. Reposta do atuador à condição inicial para o controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

No projeto destes controladores ótimos, não foi considerado nenhum tipo de restrição. Desta forma, as amplitudes das forças nos atuadores são elevadas. Uma forma de solução deste problema é projetar controladores sub-ótimos. Os controladores sub-ótimos fornecem, na maioria das vezes, índices de desempenho bons, além de possuir valores de ganho aceitáveis.

O projeto de um controlador sub-ótimo pode ser feito considerando valores objetivos para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Como exemplo, um controlador ótimo $\mathcal{H}_\infty$ é encontrado estipulando o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ sendo igual a 0.3162. A resposta em frequência do sistema em malha aberta e um controlador sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$ é mostrado na figura 6.11. A figura 6.12 mostra a resposta à condição inicial para os atuadores devido a mesma condição inicial das figuras 6.7 e 6.8.

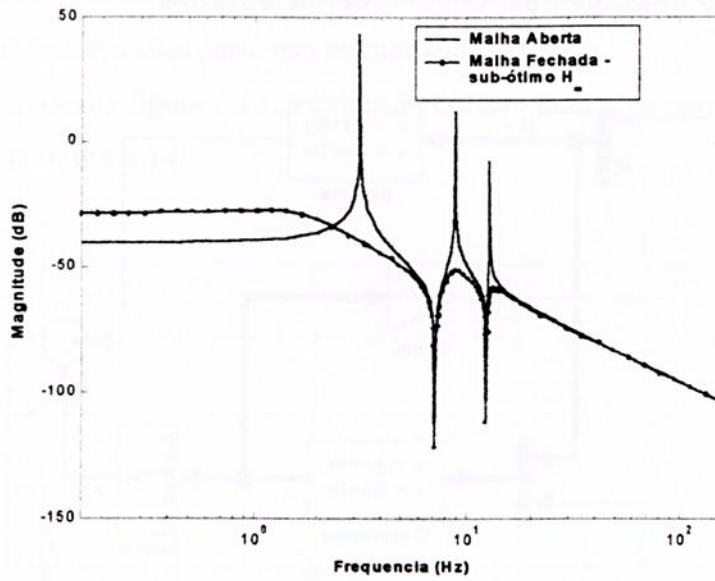


Figura 6.11. FRF para o sistema em malha aberta e em malha fechada com controlador sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

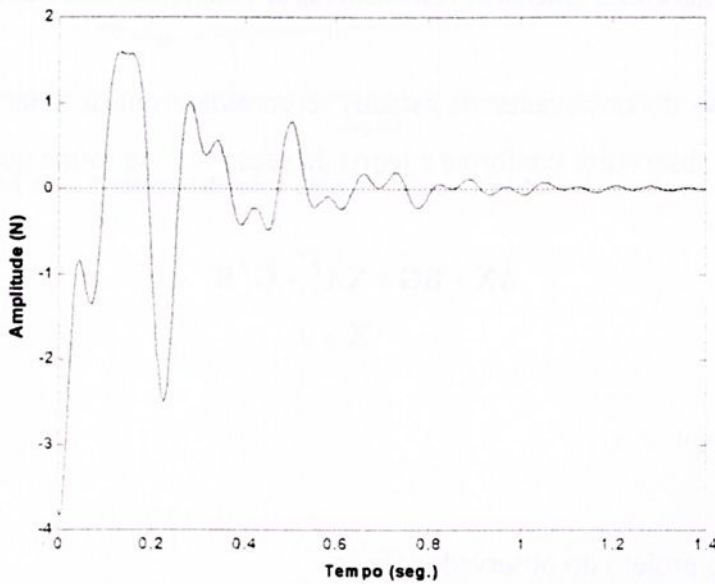


Figura 6.12. Resposta do atuador à condição inicial para o controlador sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

O projeto de controladores considera a alimentação completa. No entanto, na prática nem todos os estados podem estar disponíveis para medida direta. Uma maneira de sobrepor esta dificuldade é projetar observadores de estados.

O projeto destes observadores pode ser feito considerando o princípio da dualidade e a teoria da estabilidade de Lyapunov. O sistema realimentado com a utilização de um observador de estados é mostrado na figura 6.13,

Sistema de controle com observador de estados

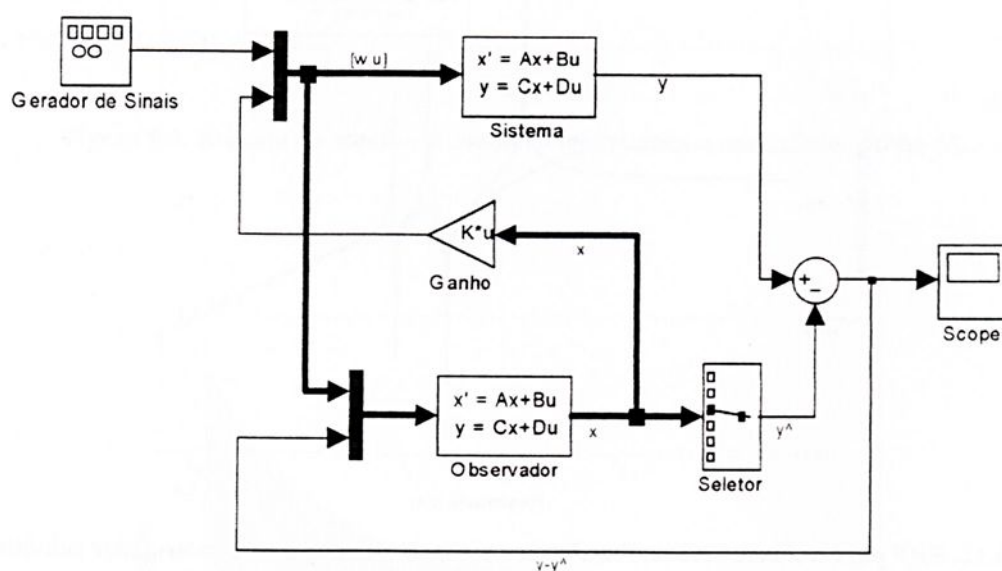


Figura 6.13. Sistema de realimentação de estados com observador.

Para o projeto do observador de estados se considera que o sistema é dual e, portanto pode-se projetar um observador conforme a teoria da seção 5.5, de forma que,

$$AX + BG + XA^T + G^T B^T < 0$$

$$X > 0$$

(6.22)

considerando $K = GX^{-1}$

Assim, para o projeto do observador faz-se

$$A = A^T$$

$$B = C^T$$

$$\text{Obtendo } L = K^T$$

A matriz em malha fechada do sistema realimentado utilizando observador de estados é dado por,

$$\mathbf{A}_{f_Obs} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Para o sistema realimentado, tal que exista **X** satisfazendo 6.22, a matriz da equação 6.23 tem todos os seus autovalores com parte real estritamente negativa.

Segundo diagrama da figura 6.13, a evolução do erro para uma condição inicial $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ é mostrada na figura 6.14.

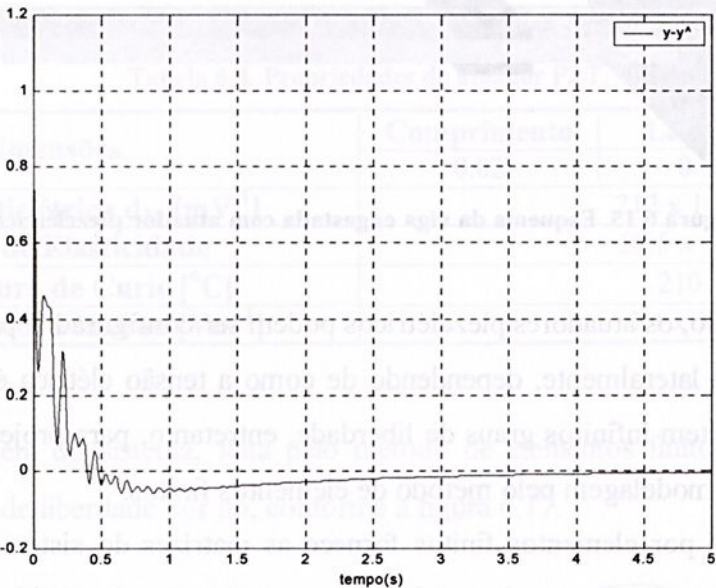


Figura 6.14. Evolução do erro entre o sistema e o observador de estados.

Módulo de Elasticidade			Densidade	
70.1 x 10 ⁹			2710	
Comprimento		0.48	Largura	
			0.025	
			Espessura	
			0.003	

6.3. Aplicação 3

CONTROLE DE VIBRAÇÃO DE UM SISTEMA DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Caso 1. Viga engastada com um atuador piezocerâmico.

O sistema mecânico descrito na figura 6.15 é composto por uma viga de alumínio engastada em uma de suas extremidades com um atuador piezocerâmico incorporado.

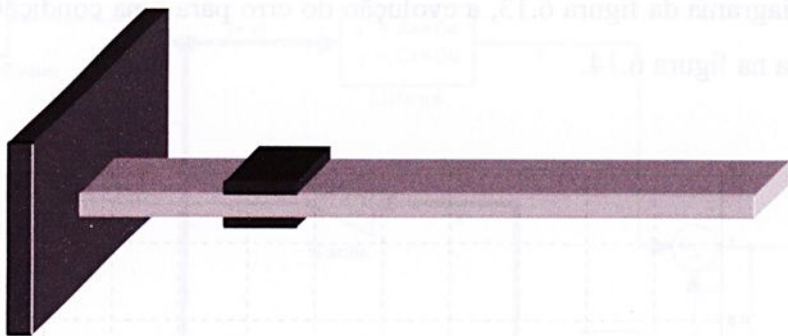


Figura 6.15. Esquema da viga engastada com atuador piezelétrico.

Como discutido, os atuadores piezelétricos podem ser configurados para excitar o sistema longitudinalmente ou lateralmente, dependendo de como a tensão elétrica é aplicada ao par de atuadores. O sistema tem infinitos graus de liberdade, entretanto, para projeto de um sistema de controle se utilizou a modelagem pelo método de elementos finitos.

A modelagem por elementos finitos fornece as matrizes do sistema **M** e **S**, matriz de massa e rigidez, respectivamente. A matriz de amortecimento é considerada proporcional a matriz de rigidez de forma que $D_v = 10^{-7} S$.

As propriedades da viga são mostradas na tabela 6.3.

Tabela 6.3. Propriedades da viga engastada

Dimensões	Comprimento	Largura	Espessura
	0.48	0.025	0.003
Densidade	2710		
Módulo de Elasticidade	70.1 x 10 ⁹		

A figura 6.16 mostra a viga engastada com os atuadores PZT incorporados que foi utilizada em algumas medidas experimentais.

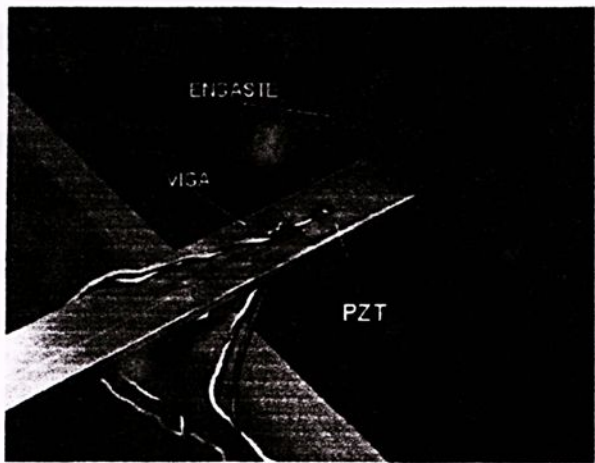


Figura 6.16. Viga engastada com atuadores piezelétricos.

As propriedades físicas do par de PZTs utilizados são mostradas na tabela 6.4.

Tabela 6.4. Propriedades do atuador PZT.

Dimensões	Comprimento	Largura	Espessura
	0.02	0.02	0.001
Constante Dielétrica d_{31} [mV ⁻¹]	212 x 10 ⁻¹²		
Modulo de Elasticidade	59,5 x 10 ⁹		
Temperatura de Curie [°C]	210		
Campo Elétrico Maximo [Vm ⁻¹]	0,4 x 10 ⁶		

Na modelagem do sistema, feita pelo método de elementos finitos, considera-se que a viga tem dois graus de liberdade por nó, conforme a figura 6.17.

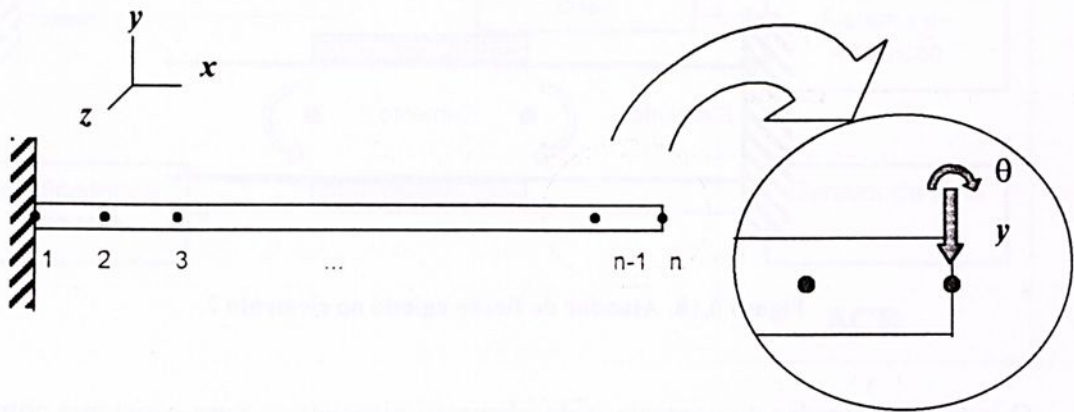


Figura 6.17. Esquema da modelagem por elementos finitos considerando dois graus de liberdade por nó.

Na figura 6.17 o grau de liberdade y corresponde ao deslocamento vertical do nó, enquanto que, o grau de liberdade θ corresponde à rotação do nó em torno do eixo z .

Considerando um modelo com 6 elementos (7 nós), o sistema terá 12 graus de liberdade ativos, uma vez que os dois primeiros graus de liberdade (nó 1) estão engastados. As matrizes de massa, amortecimento e rigidez apresentam as seguintes dimensões.

$$\mathbf{M}^{12 \times 12}, \mathbf{D}_v^{12 \times 12}, \mathbf{S}^{12 \times 12}.$$

Após a obtenção das matrizes do sistema, é necessário escrever a representação em espaço de estados. As matrizes da representação em espaço de estados tem as seguintes dimensões,

$$\mathbf{A}^{24 \times 24}, \mathbf{B}^{24 \times r}, \mathbf{C}^{m \times 24}.$$

Na matriz $\mathbf{B}$, r representa o número de entradas no sistema. Considerando que o sistema está sujeito a entrada em todos os seus graus de liberdade $r = 12$. Na matriz $\mathbf{C}$ m representa a quantidade de estados medidos. Quando todos os estados são medidos $m = 24$, sendo que 12 estados estão relacionados com as posições (deslocamento e rotação) dos graus de liberdade e 12 estados estão relacionadas com as velocidades (deslocamento e rotação) dos graus de liberdade.

Para o sistema estudado, será considerado que a entrada de controle é feita utilizando os elementos piezelétricos como atuadores de flexão, conforme mostra a figura 6.18.

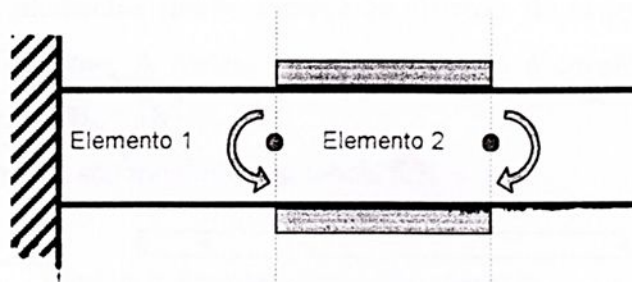


Figura 6.18. Atuador de flexão agindo no elemento 2.

O vetor de entradas de controle $\mathbf{u}$ do elemento piezelétrico para o sistema com 12 graus de liberdade é escrito na seguinte forma,

$$\mathbf{u}^T = [0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (6.24)$$

De forma que a matriz de entrada de controle B_2 é dada por

$$B_2 = Bu \quad (6.25)$$

Considerando que a medida é feita na posição vertical do último nó da viga, conforme a figura 6.19, a matriz C de medidas é escrita na seguinte forma,

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (6.26)$$

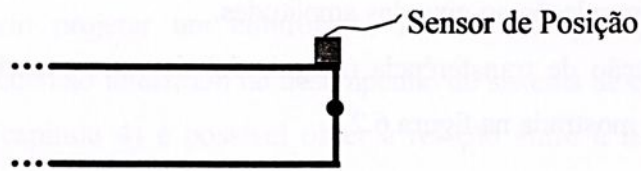


Figura 6.19. Esquema da medida de posição do último nó.

Para comprovação do modelo utilizado nas simulação, foi elaborado um teste experimental com o objetivo de se medir a função de resposta em frequência do sistema, considerando a configuração de atuadores e sensores mostrada anteriormente. O esquema do teste experimental é mostrado na figura 6.20.

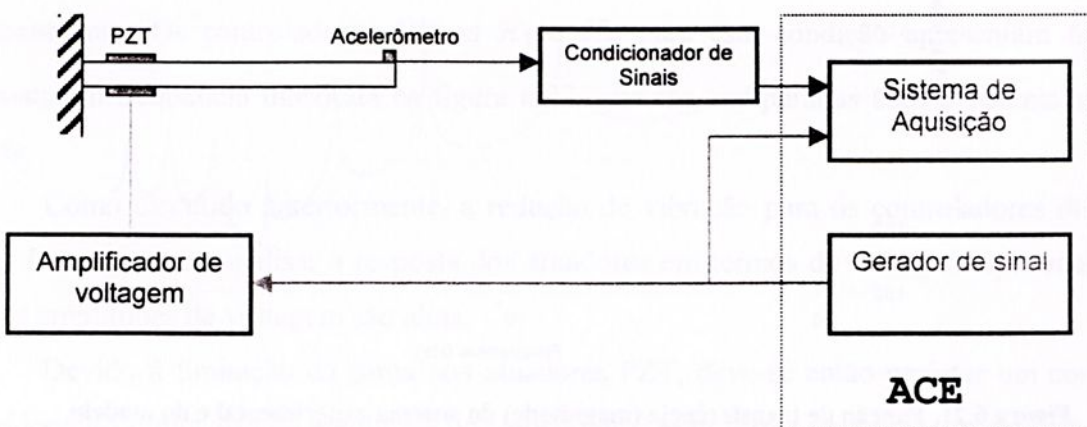


Figura 6.20. Esquema do teste experimental.

Para obtenção da função de transferência é necessário medir dois sinais. O sinal de entrada e o sinal de saída do sistema. O sinal de saída neste caso é o sinal do acelerômetro, que passa por um condicionador de sinais e entra no sistema de aquisição. O sinal de entrada é gerado por um gerador de sinais e é também medido pelo sistema de aquisição. O sistema de aquisição e o gerador de sinais são na verdade um único sistema (**Signal Calc ACE**). O sinal de entrada é amplificado antes de ser dirigido aos atuadores piezelétricos.

O sinal de entrada do sistema é na verdade o sinal que sai do amplificador, que por motivos de amplitude da voltagem não é medido diretamente pelo sistema de aquisição. Considerando que o amplificador é um instrumento de ordem zero, ou seja, a defasagem entre o sinal que entre e sai do amplificador é zero, a função de transferência será a mesma, apenas deslocada com relação ao eixo das amplitudes.

A função de transferência (magnitude) do teste experimental e do modelo utilizado nas simulações é mostrada na figura 6.21.

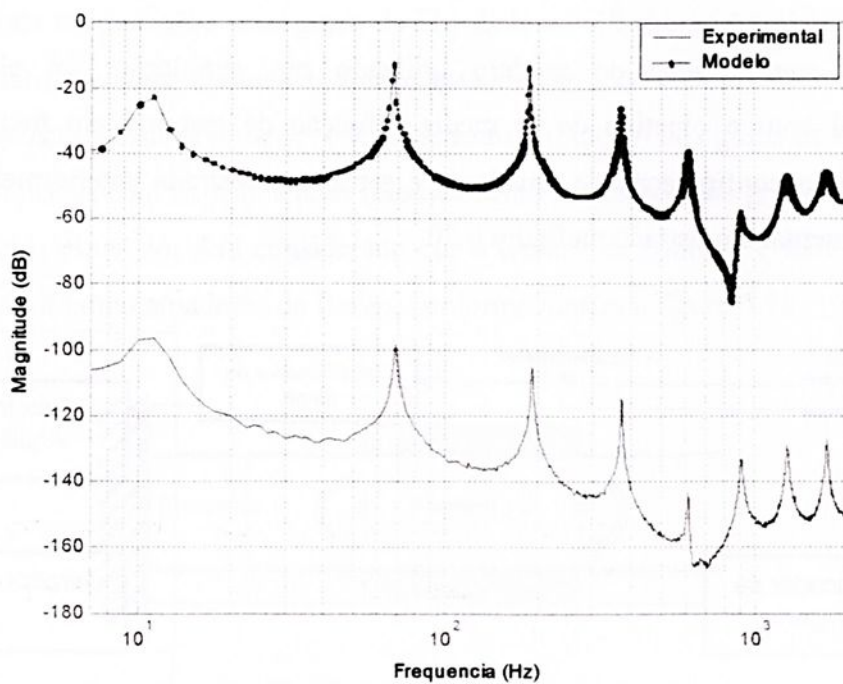


Figura 6.21. Função de transferência (magnitude) do sistema experimental e do modelo.

As frequências naturais experimentais e do modelo são mostradas na tabela 6.5

Tabela 6.5. Frequências naturais em Hz.

Modelo	11.3	67.5	188.0	368.0	609.0	914.0	1289.0	1715.0
Experimental	11.3	68.7	191.0	373.0	611.0	910.0	1291.0	1722.0

Como anteriormente comentado, o deslocamento com relação ao eixo das amplitudes nas frequências naturais é devido a aquisição do sinal antes dele ser amplificado. As diferenças nas frequências naturais do sistema com as do modelo são devidas a dois motivos. Primeiro, erro de modelagem, devido principalmente ao engaste, que no sistema real não restringe totalmente os dois primeiros graus de liberdade. A segunda fonte de erros é devida ao efeito do acoplamento eletromecânico que os elementos piezelétricos causam no sistema e que não foram considerados no modelo. Portanto, é necessário projetar um controlador robusto tal que as incertezas, diferenças em frequência e amplitude não interfiram no desempenho do sistema de controle.

A partir da equação 4.3 (capítulo 4) é possível obter a relação entre a tensão elétrica aplicada e o momento gerado pelo par de atuadores PZT. De acordo com as propriedades da viga e do PZT a relação momento/voltagem é dada por,

$$\frac{Voltagem}{Momento} = 3433.3$$

(6.27)

No projeto do sistema de controle é considerado que existe uma perturbação agindo apenas no último nó do modelo do sistema, de forma que a entrada é feita na forma de força de deslocamento. Os controladores ótimos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para esta condição apresentam função de resposta em frequência mostrada na figura 6.22, que são comparadas com o sistema em malha aberta.

Como discutido anteriormente, a redução de vibração para os controladores ótimos são altas. Entretanto, ao analisar a resposta dos atuadores em termos de voltagem aplicada, nota-se que as amplitudes de voltagem são altas.

Devido à limitação da força nos atuadores PZT, deve-se então projetar um controlador considerando limitações de amplitude nos atuadores. Desta forma obtém-se um controlador com a seguinte função de resposta em frequência, comparada com o sistema em malha aberta, mostrada na figura 6.23.

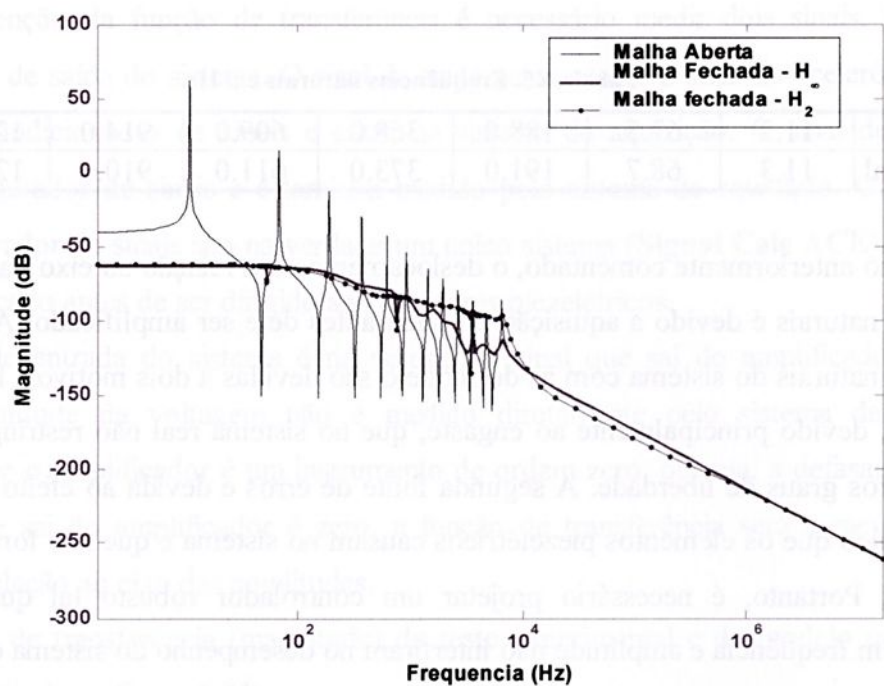


Figura 6.22. FRF dos sistemas: malha aberta, malha fechada – $\mathcal{H}_2$ (ótimo) e Malha fechada $\mathcal{H}_\infty$ (ótimo).

A figura 6.23 mostra a tensão elétrica fornecida ao atuador.

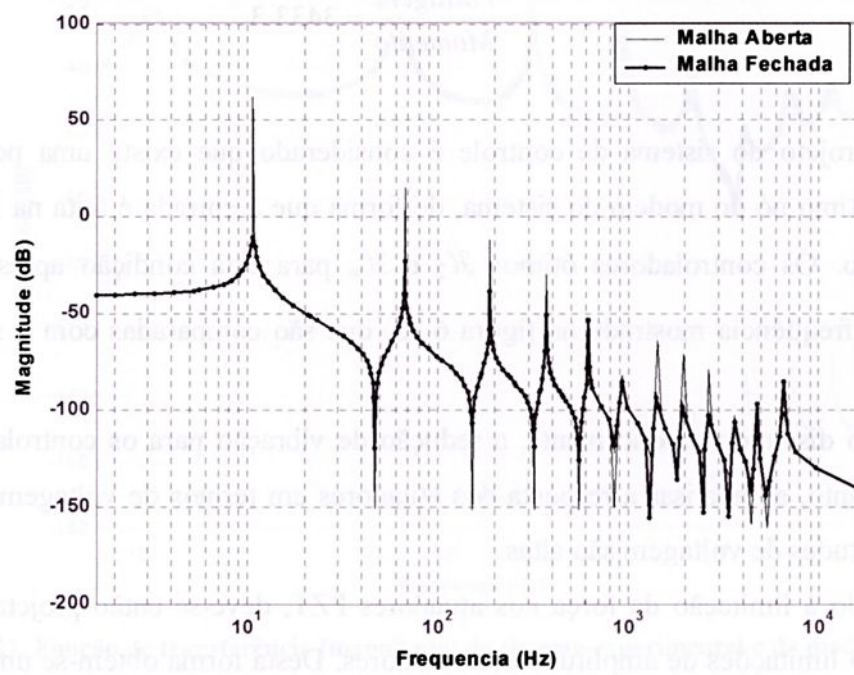


Figura 6.23. FRF do sistema em malha aberta e sistema em malha fechada.

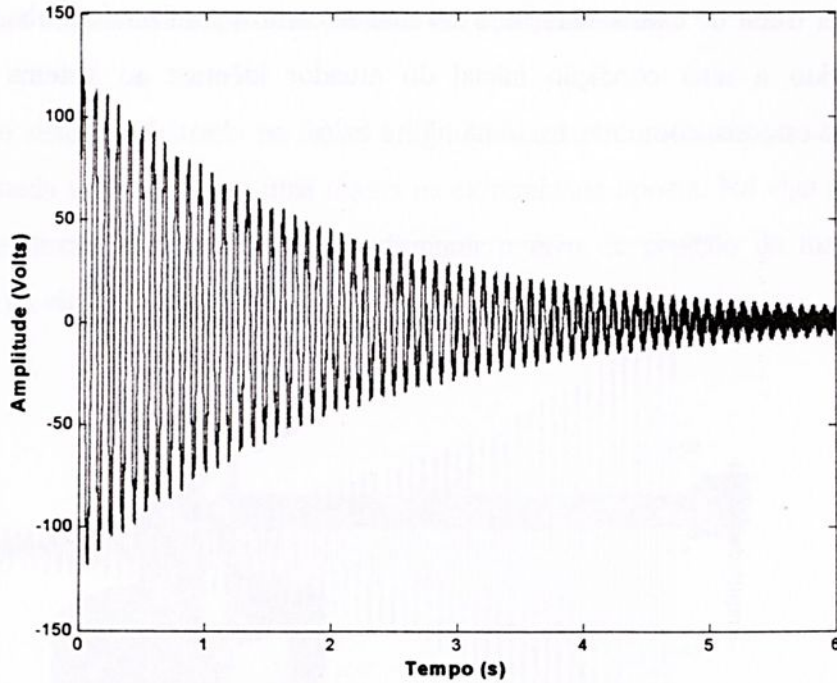


Figura 6.24. Reposta do atuador à condição inicial de 1m/s no último nó.

No projeto do sistema de controle para este sistema é necessário o conhecimento de todos os estados, seja de forma direta (por medida) ou de forma indireta (estimação). Como existem muitas variáveis de estado, e seriam necessários muitos sensores, torna-se necessário estimar alguns estados. Para isto foi projetado um observador conforme mostra a figura 6.25.

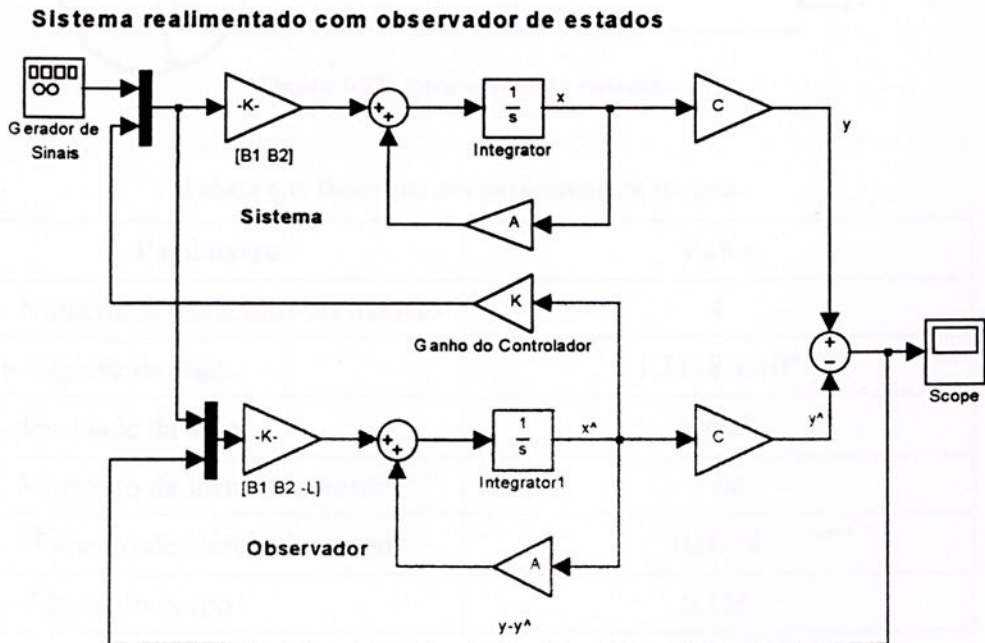


Figura 6.25. Sistema realimentado com observador de estados.

Por ser tratar de uma simulação o sistema de controle utilizando o observador mostrou ter resposta devido a uma condição inicial do atuador idêntica ao sistema realimentado sem observador de estados, como mostrado na figura 6.26.

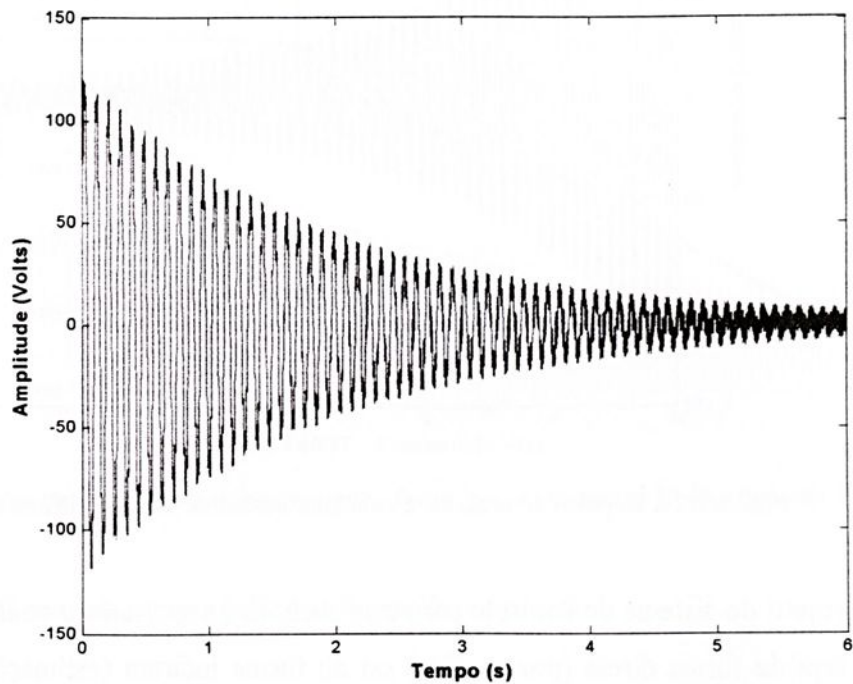


Figura 6.26. Reposta do atuador à condição inicial de 1m/s no último nó do sistema utilizando um observador de estados.

Caso 2. Viga engastada a um eixo girante (Braço Mecânico).

Considere o sistema mostrado na figura 6.27. O sistema é constituído de um eixo girante no qual está engastada uma viga com uma massa na extremidade oposta. Na viga são fixos dois atuadores PZT de flexão com o objetivo de diminuir o erro de posição da massa devido a vibração de flexão da viga.

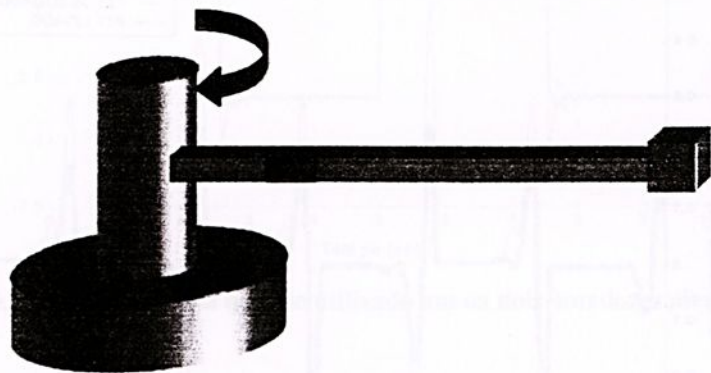


Figura 6.27. Esquema de um braço mecânico.

A modelagem do sistema é feita utilizando o método de elementos finitos, para isto são considerados os parâmetros mostrados na figura 6.28 e descritos na tabela 6.6.

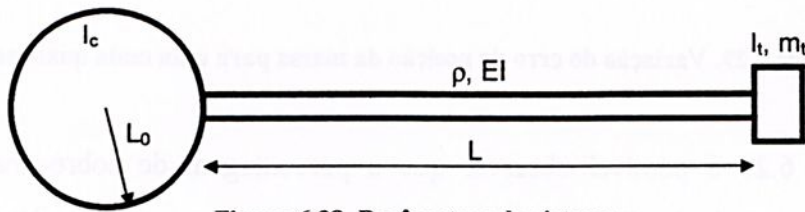


Figura 6.28. Parâmetros do sistema.

Tabela 6.6. Descrição dos parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valor
N – Número de elementos do modelo	4
EI – Rigidez da viga	1.1118×10^4
ρ – densidade da viga	0.003
I_c – Momento de inércia do rotor	9.06
I_t – Momento de inércia do corpo	0.0018
m_t – Massa do corpo	0.156
L_0 – Raio do rotor	3.5
L – Comprimento da viga	47.57

No caso deste sistema é necessário o projeto de dois controladores, o primeiro controla a posição do eixo de rotação, enquanto, o outro minimiza o erro de posição devido a vibração da viga por meio dos atuadores piezelétricos de flexão.

A resposta do sistema a malha aberta, para um sinal de onda quadrada é mostrada na figura 6.29, juntamente com o sistema controlado utilizando atuadores PZT.

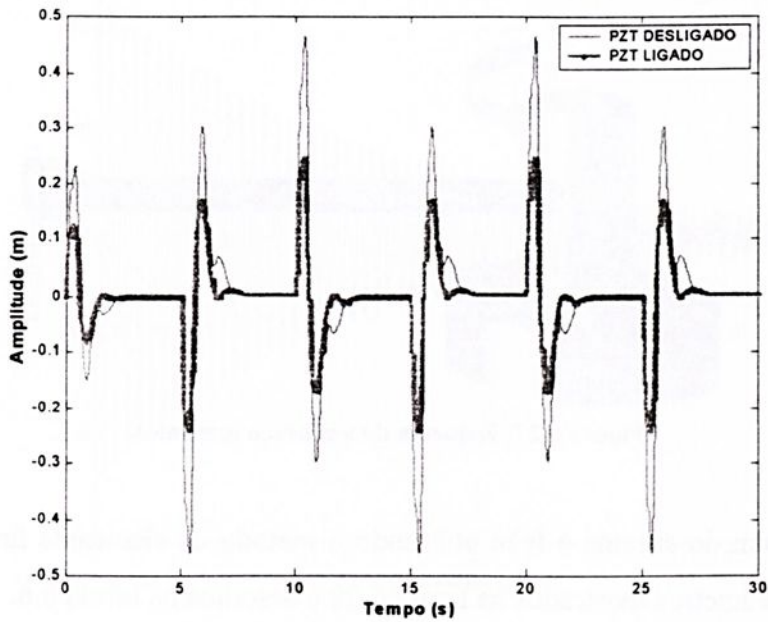


Figura 6.29. Variação do erro de posição da massa para uma onda quadrada.

Na figura 6.29 é possível observar que a porcentagem de sobre-sinal (*overshot*) do sistema é reduzido quando é aplicado o controle utilizando os elementos piezelétricos.

Neste caso o sistema foi projetado considerando uma variação da massa concentrada no intervalo de valores [0.0 0.156], que representa o funcionamento de um braço mecânico para execução de trabalhos de movimentação de algum tipo de carga.

A figura 6.30 mostra o posicionamento da massa para o sistema controlado, onde são comparados a utilização de um e dois pares de atuadores piezelétricos funcionando como atuadores de flexão na viga.

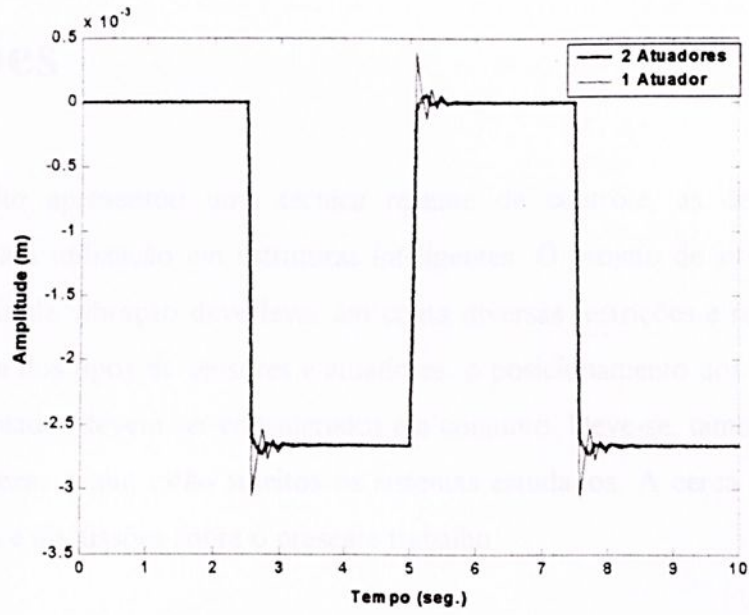


Figura 6.30. Posição da massa quando utilizado um ou dois atuadores piezelétricos.

Conclusões

Este trabalho apresentou uma técnica recente de controle, as desigualdades matriciais lineares – LMIs, para utilização em estruturas inteligentes. O projeto de sistema de controle para supressão dos níveis de vibração deve levar em conta diversas restrições e requisitos de projeto. A modelagem, escolha dos tipos de sensores e atuadores, o posicionamento dos sensores e atuadores e o projeto do controlador devem ser considerados em conjunto. Deve-se, também, Ter conhecimento dos tipos de incertezas a que estão sujeitos os sistemas estudados. A cerca disto pode-se levantar algumas conclusões e discussões sobre o presente trabalho.

- No ponto de vista econômico, o emprego de controle estrutural ativo tem obtido destaque devido a redução de massa na estrutura, que é um fator de grande importância, principalmente na indústria aeronáutica. Como mostrado neste trabalho um dos materiais mais apropriado no controle de vibração é o piezelétrico, que são incorporados na estrutura e causam alteração em suas propriedades físicas.
- O projeto de controladores que dependem de modelo tem, geralmente, uma vasta gama de ferramentas de projeto disponíveis. Entretanto, deve-se ter atenção especial a este tipo de projeto, pois, todo modelo esta sujeito a erros. Tais erros quando não considerados podem desestabilizar o sistema de controle ou diminuir seu desempenho.
- No projeto de sistema de controle para redução dos níveis de vibração estrutural é mais vantajoso, a formulação em espaço de estados, que é indicada para sistemas com mais de uma entrada e uma saída.
- Os níveis de vibração de um sistema são controlados por seus parâmetros físicos. Nas frequências naturais do sistema o parâmetro que mais influência nas amplitudes da



resposta é o amortecimento. Pode-se dizer que os sistemas de controle que minimizam a norma H_∞ , artificialmente, acrescentam amortecimento ao sistema.

- Quando se projeta um sistema de controle que minimiza a norma H_∞ , o que é equivalente a minimizar o maior ganho de uma das frequências naturais do sistema, os ganhos de outras frequências naturais também podem ser reduzidos.
- O projeto de sistema de controle que minimiza a norma H_2 não se restringe em minimizar um valor (escalar), mas sim uma somatória de ganhos definidos no domínio da frequência, de forma que se diminuía o erro do sistema devido a perturbações exógenas.
- Os atuadores piezelétricos, como qualquer outro atuador, têm limitações na amplitude da força que pode ser aplicada ao sistema. Esta limitação de força deve ser considerada no projeto do controlador.
- As desigualdades matriciais lineares se mostraram uma ferramenta importante no projeto de sistema de controle que minimizam as normas H_2 e H_∞ , além disto, é possível escrever diversos tipos de restrições no projeto de sistema utilizando as LMIS.
- O projeto de sistemas de controle com saturação nos atuadores, é geralmente, feito por um controlador não – linear. Uma forma de evitar o projeto de controladores não lineares é considerar uma região de linearidade em que o controlador não satura. Desta forma para toda condição inicial dentro da região de linearidade o sistema não terá valores acima de uma valor de saturação estipulado no projeto. Este tipo de projeto é conhecido como estabilização local.

Sugestões para trabalhos futuros

O presente trabalho se encontra em nível introdutório de projeto de sistema de controle estrutural utilizando LMIs. A partir do trabalho até aqui desenvolvido sugere-se algumas perspectivas de continuação neste assunto:

- Comprovação experimental da metodologia de controle empregado, utilizando-se, por exemplo, equipamentos como controle em tempo real através de equipamentos como a placa eletrônica (DSPACE) que utiliza o SIMULINK e o MATLAB.
- Projeto de sistema de controle não lineares através de Lógica FUZZY utilizando LMI como ferramenta de projeto.
- Projeto de controladores adaptativos e comparação com os sistemas de controle (sub-ótimos) encontrados neste trabalho.
- Estudo das técnicas de programação SDP (semi-definite programming) para problemas específicos de controle de vibração.
- Utilização das normas ótimas H_2 e H_∞ como valores objetivos para busca de posicionamento ótimo de sensores e atuadores em estruturas mecânicas.
- Utilização da norma H_∞ para problemas de diagnóstico de falhas.



Complemento de Schur

O complemento de Schur converte uma classe de desigualdades matriciais não lineares, que aparece regularmente na teoria de controle, em desigualdades matriciais lineares. O complemento de Schur é ilustrado a seguir.

Seja a desigualdade matricial não linear:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

sendo $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ e $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ são afins de $\mathbf{x}$. então o sistema (A.1) é equivalente à

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Referências Bibliográficas

- Assunção, E., Teixeira, M. C. M., 2001, "Projeto de Sistemas de Controle via LMIs usando o Matlab", APLICON - Escola Brasileira de Aplicações de Dinâmica e Controle - USP - São Carlos - SP.
- Bathe, K.J., "Finite Element Procedures", Prentice Hall; 2nd edition, 1995, ISBN: 0133014584
- Boyd, S.; Feron, E.; El Ghaoui, L., "History Of Linear Matrix Inequalities In Control Theory" American Control Conference, 1994 , Volume: 1
- Brennan, M.J. ; Day, M.J.; Elliott, S. J.; Pinnington R.J., "Piezoelectric Actuators and Sensors". Proceedings of the IUTAM Symposium of the Active Control of Vibration. Bath, 1994. Pages: 1-7.
- DeRusso, P. M., Roy, R. J., Close, C M., Desrochers, A. A., "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons; 2nd edition, 1997, ISBN: 0471577952
- Dorf , R. C., Bishop R. H., "Modern Control Systems (9th Edition)", Prentice Hall; 9th edition, 2000, ISBN: 0130306606
- EL Ghaoui, L., Niculescu, S., 2000, "Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, Siam", USA.
- Folcher, J.P., El Ghaoui, L., "State feedback design via Linear Matrix Inequalities: Application to a Benchmark Problem", 1994, IEEE - 0-7803-1872-2/94.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., Chilali, M., 1995, "LMI Control Toolbox, The Mathworks", Inc.,



Ikeda, T., "Fundamentals of Piezeletricity", 1996, Oxford University Press, ISBN: 0-19-856339-6

Kwon Y. W., Bang, H., "The Finite Element Method Using MATLAB, Second Edition", CRC Press; 2nd edition, 2000, ISBN: 0849300967

Lee, Young-Sup, 2000, "Active control of Smart Structures Using Distributed Piezoelectric Transducers", Thesis of Doctor of Philosophy, University of Southampton - Faculty of Engineering and Applied Science - ISVR.

Lopes Jr., V., Park, G., Cudney, H. H., and Inman, D. J. "Impedance -Based Structural Health Monitoring with Artificial Neural Network. Journal of Intelligent Material Systems and Structures", USA.

Meirovitch, L., 1989, Dynamics and Control of Structures - ISBN 0-471-62858-1

Ogata, K., 1982, Engenharia de Controle Moderno, Pretince-Hall, Inc - Englewood Cliffs, N.J. USA

Valer, C. E. I., "Uma Introdução ao Controle Robusto com Aplicações a Estruturas Flexíveis", 1999, Dissertação de Mestrado - PUC/RJ

Zhou , K., Doyle, J. C., Glover , K. (Contributor), Doyle, J. (Contributor), "Robust and Optimal Control", Prentice Hall; 1st edition, 1995, ISBN: 0134565673





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br

