UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Marisa de Souza Costa

Polinômios Ortogonais de Laurent na Reta Real e no Círculo Unitário

Tese de Doutorado

Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
Telefone: (17) 3221-2444. Fax: (17) 3221-2445

Marisa de Souza Costa

Polinômios Ortogonais de Laurent na Reta Real e no Círculo Unitário

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Coorientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Eliana Xavier Linhares de Andrade

São José do Rio Preto

2012

Costa, Marisa de Souza.

Polinômios ortogonais de Laurent na reta real e no círculo unitário/ Marisa de Souza Costa. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.

80 f.; 30 cm.

Orientador: Alagacone Sri Ranga

Coorientador: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise matemática. 2. Funções hiperbólicas. 3. Polinômios ortogonais. 4. Polinômios ortogonais de Laurent. I. Ranga, Alagacone Sri. II. Andrade, Eliana Xavier Linhares de. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.587

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE

Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Marisa de Souza Costa

Polinômios Ortogonais de Laurent na Reta Real e no Círculo Unitário

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
Professor Associado/ UFU - Uberlândia

Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto
Professor Titular/ USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 20 de Abril de 2012.

À minha família, em especial

ao meu adorado afilhado Felipe

e ao meu querido esposo Ewerton,

com amor, *Dedico.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que direta, ou indiretamente, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga agradeço, não apenas pela orientação, mas também por sua amizade, incentivo, dedicação e pelo excelente exemplo de profissional.

A todos os professores que contribuíram com minha formação acadêmica e científica, em especial à Profª. Drª. Eliana Xavier Linhares de Andrade, Profª. Drª. Cleonice Fátima Bracciali e Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov.

Aos meus amados pais Maria e Antônio, pelo apoio incondicional e incentivo para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Ao meu querido esposo Ewerton, pelo carinho, companheirismo e por sua compreensão nos momentos em que precisei estar ausente.

Aos meus amigos Regina, Mirela, Vanessa, Fernando, Heron, Guilherme, Eliel, Rosimeire, Marcos e a todos aqueles que estiveram comigo nessa caminhada, compartilhando não apenas conhecimento mas, também, muitos momentos de descontração.

À UFU (Universidade Federal de Uberlândia), especialmente aos colegas da FAMAT, pelo apoio na nova etapa de minha carreira profissional, a qual foi conciliada com a etapa final desse trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À Deus por tudo.

Resumo

Neste trabalho são obtidos diversos resultados sobre duas classes distintas de polinômios ortogonais de Laurent, uma delas definida na reta real, chamados de polinômios L-ortogonais, e a outra definida no círculo unitário.

Primeiramente, analisamos a conexão existente entre duas sequências de polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ associados a duas medidas positivas fortes $d\psi_0$ e $d\psi_1$ definidas em $[a, b]$ e relacionadas por $(t-\kappa)d\psi_1 = \gamma d\psi_0$, onde $(t-\kappa)/\gamma$ é positivo para $t \in (a, b)$. Nossos estudos podem ser aplicados à geração de novos exemplos de polinômios L-ortogonais. Dentre os resultados obtidos, temos também a monotonicidade dos zeros dos polinômios $\{Q_n^{(1)}\}$.

Em seguida, consideramos a classe de polinômios ortogonais de Laurent no círculo unitário $\{\,{}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{b+1}; q^{-c+b-n}; q, q^{-c+d-1}z)\}_{n=0}^{\infty}$, definidos a partir de funções q-hipergeométricas, onde $0 < q < 1$ e os parâmetros complexos b, c e d são tais que $b \neq -1, -2, \ldots$, $c - b + 1 \neq -1, -2, \ldots$, $\mathcal{R}e(d) > 0$ e $\mathcal{R}e(c - d + 2) > 0$. Obtivemos várias propriedades desses polinômios, dentre elas expressões explícitas para os coeficientes da relação de recorrência, momentos e ortogonalidade, além de seu comportamento assintótico. Fazendo uma escolha apropriada dos parâmetros, obtivemos, também, uma nova classe de polinômios de Szegő.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais de Laurent, polinômios L-ortogonais, Funções q-hipergeométricas, polinômios de Szegő.

Abstract

Several results concerning two different classes of orthogonal Laurent polynomials are obtained, one defined on the real line, called L-orthogonal polynomials, and another class defined on the unit circle.

First, we look at the connection between two sequences of L-orthogonal polynomials $\{Q_n^{(0)}\}$ and $\{Q_n^{(1)}\}$ associated with two strong positive measures $d\psi_0$ and $d\psi_1$ defined on $[a, b]$ and related to each other by $(t-\kappa)d\psi_1 = \gamma d\psi_0$, where $(t-\kappa)/\gamma$ is positive when $t \in (a, b)$. As applications of our study, numerical generation of new L-orthogonal polynomials and monotonicity properties of the zeros of the polynomials $\{Q_n^{(1)}\}$ are looked at.

Then, we consider the class of orthogonal Laurent polynomials on the unit circle $\{{}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{b+1}; q^{-c+b-n}; q, q^{-c+d-1}z)\}_{n=0}^{\infty}$, defined from q-hypergeometric functions, where $0 < q < 1$ and the complex parameters b, c and d are such that $b \neq -1, -2, \ldots$, $c-b+1 \neq -1, -2, \ldots$, $\mathcal{R}e(d) > 0$ e $\mathcal{R}e(c-d+2) > 0$. Several properties of these polynomials are given, like explicit expressions for recurrence coefficients, moments, orthogonality and also asymptotics. By special choice of the parameters, results regarding a class of Szegő polynomials are also derived.

Keywords: orthogonal Laurent polynomials, L-orthogonal polynomials, q-hypergeometric functions, Szegő polynomials.

Sumário

Introdução

Para todo par de números inteiros (p, q), $p \leq q$, denotamos por $\Lambda_{p,q}$ o espaço vetorial de todas as funções da forma

$$L(z) = \sum_{k=p}^{q} c_k z^k, \; c_k \in \mathbb{C},$$

definidas em $\mathbb{C}$. Essas funções são conhecidas como polinômios de Laurent (ou L-polinômios). Denotamos o espaço dos polinômios de Laurent por Λ.

Dada uma sequência "dupla" de números complexos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, o funcional linear $\mathcal{M}$ definido sobre o espaço dos polinômios de Laurent por

$$\mathcal{M}[z^n] = \mu_n, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

é conhecido como funcional de momento.

Os determinantes definidos por

$$\Delta_{-1} = 1, \;\; \Delta_0 = \mu_0 \;\text{ e }\; \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \;\; n \geq 1,$$

são chamados determinantes de Toeplitz associados à sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Consideremos a sequência de polinômios $\{Q_n\}$ satisfazendo

$$\mathcal{M}[z^{-s} Q_n(z)] = \rho_n \delta_{n,s}, \;\; 0 \leq s \leq n, \;\; n \geq 1,$$

onde $\delta_{n,s}$ é o delta de Kronecker, $\rho_n \neq 0$ e Q_n é um polinômio mônico de grau n para todo $n \geq 1$. Se o funcional de momento $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$, então ele é chamado de funcional de momento semi-definido.

A sequência de polinômios de Laurent definidos por

$$B_{2n}(z) = z^{-n}Q_{2n}(z), \quad B_{2n+1}(z) = z^{-n}Q_{2n+1}(z), \quad n \geq 0,$$

forma uma sequência de polinômios ortogonais de Laurent, ou seja, satisfaz a condição de ortogonalidade

$$\mathcal{M}[B_n(z)\, B_m(z)] = \tilde{\rho}_n \delta_{n,m},$$

onde $\tilde{\rho}_n \neq 0$. Assim, para simplificar, chamamos os polinômios Q_n simplesmente de polinômios ortogonais de Laurent.

O estudo dos polinômios ortogonais de Laurent foi iniciado por Jones e Thron [25] em 1981. Outros detalhes como o teorema de Farvard e alguns exemplos desses polinômios podem ser encontradas no artigo de Hendriksen e van Rossum [20].

Se o funcional de momento $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n > 0$ e $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, $n \geq 0$, então ele é conhecido como um funcional de momento positivo-definido, os polinômios $S_n = Q_n$ são conhecidos como polinômios de Szegő mônicos e, neste caso, $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes com relação a uma medida positiva $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$ no círculo unitário, ou seja,

$$\mathcal{M}[f] = \int_{\mathcal{C}} f(z) d\mu(z),$$

onde $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Os polinômios ortogonais no círculo unitário foram introduzidos no início do século 20 por Gabor Szegő e muitos dos seus resultados podem ser encontrados em seu livro [42] cuja primeira edição foi publicada em 1939. Desde então, receberam o nome de polinômios de Szegő e tem sido objeto de estudo por muitos pesquisadores da área. Podemos citar, por exemplo, [14], [19], [30] e [39], como algumas das mais recentes contribuições. No artigo [39], Sri Ranga obtém diversas informações sobre os polinômios de Szegő com relação à medida $d\mu(e^{i\theta}) = [e^{-\theta}]^{\eta}[\text{sen}^2(\theta/2)]^{\lambda} d\theta$, definida para $\eta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$, onde também é mostrado que tais polinômios são múltiplos dos polinômios hipergeométricos ${}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z)$, $n \geq 1$, com $\eta = \mathcal{I}m(b)$ e $\lambda = \mathcal{R}e(b)$.

Dada uma medida positiva $d\psi$ definida em um intervalo $[a, b]$, $0 \leq a < b \leq \infty$, tal que seus momentos $\nu_n = \int_a^b t^n \, d\psi(t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, existem, os polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazendo

$$\int_a^b t^{-n+s} Q_n(t)\, d\psi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

onde Q_n é mônico de grau exatamente n, são conhecidos como polinômios L-ortogonais. Esta nomenclatura é devida ao fato de que os polinômios de Laurent $\{t^{-\lfloor (n-1)/2 \rfloor} Q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ formam uma sequência de polinômios ortogonais de Laurent com relação ao funcional de momento definido por $\mathcal{L}[z^n] = \nu_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Polinômios satisfazendo a L-ortogonalidade tem muitas propriedades interessantes. Entre elas, temos que os zeros de Q_n são todos positivos, distintos e pertencem ao intervalo (a, b). Além disso, os zeros de Q_n se entrelaçam com os zeros de Q_{n-1}. Uma das mais importantes propriedades desses polinômios é que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma

$$Q_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1}) Q_n(z) - \alpha_{n+1}\, z\, Q_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \tag{2}$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z - \beta_1$, onde $\beta_n > 0$, $\alpha_{n+1} > 0$, $n \geq 1$.

A introdução do problema forte de momento pelos pesquisadores Jones, Thron e Waadeland [27] abriu caminho para o estudo de polinômios que satisfazem a L-ortogonalidade. O problema forte de momento pode ser expresso da seguinte forma:

“Dado uma sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números reais, em que condições existe uma medida não negativa $d\psi(t)$ tal que

$$\mu_n = \int_a^b t^n d\psi(t), \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \ \text{?''}$$

Jones, Thron e Waadeland resolveram o problema acima quando $d\psi(t)$ é uma medida forte de Stieltjes, isto é, $(a, b) \subseteq (0, \infty)$. Com o objetivo de estudar o problema forte de momento para o caso em que $a = -\infty$ e $b = \infty$, conhecido como problema forte de momento de Hamburger, Sri Ranga [38] introduziu uma sequência de polinômios mônicos $Q_n^{(k)}(z)$, similares aos polinômios ortogonais, definidos por

$$\int_a^b t^{k-n+s} Q_n^{(k)}(t)\, d\psi(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } \ 0 \leq s \leq n-1 \\ \rho_n^{(k)} > 0, \ \text{ se } \ s = n \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ e para k inteiros positivos ou negativos, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $d\psi(t)$ uma medida forte.

Os polinômios L-ortogonais definidos em (1) são, portanto, um caso particular dos polinômios $Q_n^{(k)}(z)$ para $k = 0$ e o intervalo $[a, b]$ totalmente contido em $[0, \infty)$.

Ao longo dos anos surgiram diversas linhas de pesquisa envolvendo tais polinômios. Em [8] e [37], encontramos regras de quadratura do tipo Gaussiana associadas a esses polinômios. Além disso, estudos de polinômios satisfazendo relações de recorrência do tipo (2) aparecem na teoria de frações contínuas e aproximações de Padé de dois pontos (ver, por exemplo, [26] e [31]).

Existem poucos exemplos de polinômios L-ortogonais dos quais se conhecem informações explícitas. Os resultados obtidos por Andrade, Costa e Sri Ranga [2], que são apresentados nesta tese, podem ser aplicados à geração numérica de novos exemplos de polinômios L-ortogonais. Esses resultados são obtidos como consequência da conexão existente entre duas sequências de polinômios L-ortogonais, $\{Q_n^{(1)}\}$ e $\{Q_n^{(0)}\}$, associadas a duas medidas intimamente relacionadas, $d\psi_1$ e $d\psi_0$, definidas em $[a, b]$. Mais precisamente, as medidas são relacionadas por

$$(t - \kappa)\, d\psi_1(t) = \gamma\, d\psi_0(t), \tag{3}$$

onde $(t - \kappa)/\gamma$ é positivo para $t \in (a, b)$. Dessa forma, conhecendo-se uma das sequências de polinômios L-ortogonais, mostramos que é possível obter várias informações sobre a segunda, como seus coeficientes de recorrência e seus zeros. Em particular, mostramos que os zeros apresentam um comportamento monotônico em relação a dois parâmetros κ e M.

Nosso segundo objetivo foi estudar uma classe de polinômios ortogonais de Laurent obtida a partir de funções q-hipergeométricas ${}_2\Phi_1(q^a, q^b; q^c; q, z)$. Usando uma relação contígua de três termos satisfeita por essas funções, obtemos informações sobre a classe de polinômios ortogonais de Laurent $\{z^{-\lfloor n/2 \rfloor} Q_n^{(b,c,d)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ no círculo unitário $\mathcal{C}$, onde os polinômios $Q_n^{(b,c,d)}(z)$, $n \geq 0$, são dados por

$$Q_n^{(b,c,d)}(z) = \frac{(q^{c-b+1}; q)_n}{(q^{b+1}; q)_n}\, q^{n(b-d+1)}\, {}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{b+1}; q^{-c+b-n}; q, q^{-c+d-1} z), \quad n \geq 0, \tag{4}$$

com $0 < q < 1$ e os parâmetros complexos b, c e d são tais que $b \neq -1, -2, ...$ e $c - b + 1 \neq -1, -2, ...$, $\mathcal{R}e(d) > 0$ e $\mathcal{R}e(c + 2) > 0$.

Essas idéias estão distribuídas em quatro capítulos, como segue.

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos preliminares da teoria de polinômios ortogonais, frações contínuas e sequências encadeadas, além dos conceitos e algumas propriedades de funções hipergeométricas e q-hipergeométricas. Nesse capítulo enunciamos, também, dois importantes resultados da Análise que serão úteis na demonstração de alguns de nossos resultados apresentados no Capítulo 4.

No Capítulo 2, fazemos um breve estudo dos polinômios ortogonais de Laurent, apresentando definições e algumas de suas propriedades. Esses polinômios são pré-requisitos essenciais ao desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo das sequências de polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ relacionados com as medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente, cujas medidas satisfazem uma relação do tipo (3). Observamos que esses polinômios possuem uma fórmula de conexão e, a partir dela, obtemos muitos outros resultados relacionando os polinômios $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$. Dentre eles, mostramos que, conhecendo-se a relação de recorrência de três termos de uma das sequências, é possível determinar a relação de recorrência de três termos da outra. Na Seção 3.3, aplicamos nossos resultados a alguns exemplos particulares. Já na Seção 3.4, provamos a monotonicidade dos zeros dos polinômios $Q_n^{(1)}$ com relação aos parâmetros κ e M, onde $(M+1)/M$ é o salto da medida $d\psi_1$ em κ. Todos esses resultados foram publicados na revista Applied Numerical Mathematics (ver Andrade, Costa e Sri Ranga [2]).

No Capítulo 4, consideramos a classe de polinômios de Laurent $\{z^{-\lfloor n/2\rfloor}Q_n^{(b,c,d)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, onde os polinômios $Q_n^{(b,c,b)}$ são dados por (4). Na Seção 4.2, obtemos diversas informações sobre esses polinômios, como expressões explícitas para a relação de recorrência de três termos, os momentos e ortogonalidade. Além disso, estudamos seu comportamento assintótico e mostramos que o funcional de momento $\mathcal{M}$, com relação ao qual esses polinômios são ortogonais, tem uma representação integral no círculo unitário. Fazendo uma escolha apropriada dos parâmetros, obtemos, na Seção 4.3, uma nova classe de polinômios de Szegő. Esses resultados foram publicados recentemente na revista Proceedings of the American Mathematical Society (ver [13]).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Polinômios ortogonais na reta real

Neste seção, apresentamos alguns resultados sobre polinômios ortogonais na reta real, apenas o suficiente para o bom entendimento deste trabalho. Para mais detalhes recomendamos os textos [9, 24, 42].

Dada uma sequência de números complexos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, o funcional linear com valores complexos $\mathcal{F}$ definido sobre o espaço vetorial $\mathcal{P}$ de todos os polinômios com coeficientes complexos por

$$\mathcal{F}[x^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

é chamado de *funcional de momento* determinado pela sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. A constante μ_n é chamada de *momento de ordem n*.

Definição 1.1. *Dizemos que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a um funcional de momento $\mathcal{F}$ se, para quaisquer m, n inteiros e não-negativos,*
(i) P_n é um polinômio de grau exatamente n;
(ii) $\mathcal{F}[P_m(x)P_n(x)] = 0$, para $m \neq n$;
(iii) $\mathcal{F}[P_n^2(x)] \neq 0$.

Uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}$ associada ao funcional de momento $\mathcal{F}$ que satisfaz $\mathcal{F}[P_n^2(x)] = 1$, para todo $n \geq 0$, é chamada de sequência de polinômios ortonormais.

Definição 1.2. *Os determinantes definidos por*

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.2}$$

são chamados determinantes de Hankel, onde $H_{-1}^{(m)} = 0$ *e* $H_0^{(m)} = 1$.

Seja $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números complexos e $\mathcal{F}$ o funcional de momento definido por (1.1). Uma condição necessária e suficiente (ver Chihara [9]) para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais relacionada a $\mathcal{F}$ é que

$$H_n^{(0)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.3}$$

Neste caso, o funcional de momento $\mathcal{F}$ é chamado *semi-definido*.

Dizemos que o funcional de momento $\mathcal{F}$ é *positivo-definido* se $\mathcal{F}[\pi(x)] > 0$, para todo polinômio $\pi \in \mathcal{P}$ não identicamente nulo satisfazendo $\pi(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Um funcional de momento $\mathcal{F}$ é positivo-definido se, e somente se, seus momentos são todos reais e $H_n^{(0)} > 0$, $n \geq 0$ (ver, por exemplo Chihara [9]).

Uma das propriedades mais importantes dos polinômios ortogonais é que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Se $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos associada a um funcional de momento semi-definido $\mathcal{F}$, então eles satisfazem uma relação de recorrência do tipo

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.4}$$

onde $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$ e os coeficientes c_n e $d_n \neq 0$ são dados por

$$d_{n+1} = \frac{\mathcal{F}[P_n^2(x)]}{\mathcal{F}[P_{n-1}^2(x)]} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{\mathcal{F}[x\, P_{n-1}^2(x)]}{\mathcal{F}[P_{n-1}^2(x)]}, \quad n \geq 1.$$

Se o funcional de momento $\mathcal{F}$ é positivo-definido, então $d_{n+1} > 0$, para todo $n \geq 1$.

A recíproca deste resultado também é verdadeira e é conhecida como Teorema de Farvard.

Teorema 1.1 (Farvard). *Dada uma sequência de polinômios* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfazendo uma relação de recorrência de três termos do tipo*

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, e $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ duas sequências de números complexos tais que $d_n \neq 0$, $n \geq 1$, então existe um único funcional de momento semi definido $\mathcal{F}$ tal que $\{P_n\}$ é a correspondente sequência de polinômios ortogonais mônicos. Além disso, se $c_n \in \mathbb{R}$ e $d_n > 0$, $n \geq 1$, então $\mathcal{F}$ é positivo-definido.

Definição 1.3. *Seja ψ uma função real, não-decrescente e definida em $[a, b]$. Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ψ se $\psi(\xi + \varepsilon) - \psi(\xi - \varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Definição 1.4. *Seja ψ uma função definida em $[a, b]$, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento, tal que seus momentos definidos por*

$$\mu_n = \int_a^b t^n d\psi(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

existem e são finitos. Então, dizemos que $d\psi$ é uma medida positiva (ou distribuição) em $[a, b]$. Se os momentos existem para todo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $d\psi(x)$ é chamada uma distribuição forte. Se, além disso, $(a, b) \subset (0, \infty)$, $d\psi(x)$ é uma distribuição forte de Stieltjes.

Teorema 1.2. *Para as distribuições fortes de Stieltjes $d\psi(t)$ (cujos momentos são dados por (1.5)), os determinantes de Hankel, $H_n^{(m)}$, satisfazem*

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix} > 0, \tag{1.6}$$

para m, n inteiros, $n \geq 1$.

Demonstração: Para provarmos o resultado acima, basta mostrarmos que a matriz

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{pmatrix}$$

é definida positiva, ou seja, $\langle \mathcal{H}_n x, x \rangle > 0$, para todo $x \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Observamos que, se $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, então

$$\langle \mathcal{H}_n x, x\rangle = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i+j}\, x_i\, x_j.$$

Por (1.5),

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{H}_n x, x\rangle &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b t^{m+i+j}\, x_i x_j\, d\psi(t)\\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i x_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} t^j x_j\right) d\psi(t)\\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i x_i\right)^2 d\psi(t).\end{aligned}$$

Como $0 \leq a < b \leq \infty$, obtemos que $\langle \mathcal{H}_n x, x\rangle > 0$.

Portanto, $\det \mathcal{H}_n = H_n^{(m)} > 0$ para m, n inteiros, $n \geq 1$. □

Se $d\psi(x) = w(x)dx$, onde w é uma função absolutamente contínua, não negativa e não identicamente nula em (a, b), chamamos $w(x)$ de *função peso.*

Todo funcional de momento $\mathcal{F}$ positivo-definido pode ser representado por uma integral de Stieltjes associada a uma medida positiva $d\psi$. Neste caso, se $\{P_n\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais associada ao funcional de momento $\mathcal{F}$, dizemos também que $\{P_n\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais associada à medida $d\psi$.

Os zeros dos polinômios ortogonais associados a uma medida positiva $d\psi$ em $[a, b]$ são distintos e estão no intervalo (a, b). Além disso, os zeros de P_{n-1} separam os zeros de P_n, ou seja, se

$$x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \cdots < x_{n-1,n-1}$$

são os zeros de P_{n-1} ordenados em ordem crescente, e

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$$

são os zeros de P_n, então

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < x_{n-1,2} < \cdots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

Essas e muitas outras informações a respeito de polinômios ortogonais podem ser encontradas, por exemplo, em Chihara [9].

1.2 Frações contínuas e sequências encadeadas

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências arbitrárias de números complexos e consideremos a sequência $\{f_n\}$ definida por

$$\begin{aligned} f_0 &= b_0 \\ f_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ f_2 &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} \\ \vdots & \quad \vdots \\ f_n &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Definição 1.5. *Uma fração contínua é uma tripla ordenada* $(\{a_n\}, \{b_n\}, \{f_n\})$, *onde* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *e* $\{f_n\}$ *são sequências de números complexos como as descritas acima, e é frequentemente denotada por*

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}} = b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \frac{a_3 |}{| b_3} + \cdots . \tag{1.8}$$

Os números a_n e b_n são chamados, respectivamente, n-ésimo numerador e denominador parciais. Uma fração contínua pode ser denotada também por

$$b_0 + K_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

O valor (1.7) é chamado de n-ésimo convergente ou aproximante da fração contínua e pode ser denotado também por

$$f_n = b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \cdots + \frac{a_n |}{| b_n} \quad \text{ou} \quad f_n = b_0 + K_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{b_j} \right).$$

Podemos escrever

$$f_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0. \end{aligned}$$

Assim, por indução, obtemos que os numeradores A_n e os denominadores B_n dos convergentes f_n da fração contínua (1.8) satisfazem

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

para $n \geq 1$, onde $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$ e $B_0 = 1$.

Definição 1.6. *Convergência clássica de uma fração contínua da forma* (1.8) *para um número $f \in \overline{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \cup \infty)$ (plano complexo estendido) significa a convergência da sequência de convergentes $\{f_n\}$ para f e, neste caso, o valor da fração contínua é o limite da sequência $\{f_n\}$. Então, podemos escrever*

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \underset{+}{} \frac{a_2}{b_2} \underset{+}{} \frac{a_3}{b_3} \underset{+}{} \underset{\ldots}{} \ .$$

As frações contínuas tem vasta aplicação em muitos problemas da Matemática e das Ciências Aplicadas. Elas são importantes ferramentas na aproximação de números racionais e irracionais, aproximação de funções, aplicações na Física Teórica, soluções de problemas de momento, entre outras. Mais informações sobre frações contínuas podem ser encontradas em Chihara [9], Lorentzen e Waadeland [29], Jones e Thron [24] e Wall [43].

Definição 1.7. *Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada de sequência encadeada se existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad 0 \leq g_0 < 1, \ \ 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1; \\ &\text{(ii)} \quad a_n = (1 - g_{n-1}) g_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{1.10}$$

$\{g_n\}$ é chamada uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$ e g_0 é chamado de parâmetro inicial.

Em geral, uma sequência de parâmetros não é única. Se $\{a_n\}$ é uma sequência encadeada e $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ são ambas sequências de parâmetros para $\{a_n\}$, então

$$g_k < h_k \quad \text{para} \;\; k \geq 1 \;\; \text{se, e somente se,} \;\; g_0 < h_0.$$

Além disso, toda sequência encadeada possui uma sequência de parâmetros $\{m_n\}$, com $m_0 = 0$, chamada *sequência de parâmetros minimal*.

Uma sequência de parâmetros $\{M_n\}$ da sequência encadeada $\{a_n\}$ é chamada *sequência de parâmetros maximal* se satisfaz a seguinte condição: se $g_0 > M_0$, então a sequência $\{g_n\}$ gerada por (ii) de (1.10) não satisfaz o item (i) de (1.10). Para essas e muitas outras informações a respeito de sequências encadeadas ver Chihara [9].

As sequências encadeadas são muito utilizadas no estudo de polinômios ortogonais. Por exemplo, seja $\{P_n\}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos associados a uma medida $d\psi$ definida em um intervalo $[a, b]$. Como já vimos, esses polinômios satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$P_n(x) = (x - c_n)\, P_{n-1}(x) - d_n\, P_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - c_1$. Então, para $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$, a sequência $\{a_n(x)\}$ dada por

$$a_n(x) = \frac{d_{n+1}}{(x - c_n)(x - c_{n+1})}$$

é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros minimal $\{m_n\}$ dada por

$$m_n = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - c_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 0.$$

1.3 Fatoriais q-deslocados e funções q-gama

Nosso propósito nesta seção é definir alguns elementos que são essenciais para a definição das funções apresentadas na próxima seção e que devem aparecer no decorrer do texto, bem como algumas de suas propriedades.

Os q-análogos dos tradicionais símbolos de Pochhammer $(a)_k$ dados por

$$(a)_0 = 1 \quad \text{e} \quad (a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

são chamados *fatoriais q-deslocados* e são definidos por

$$(a;q)_0 = 1 \quad \text{e} \quad (a;q)_k = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^{k-1}), \quad k = 1,2,3,\dots .$$

Observe que

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^\alpha;q)_k}{(1-q)^k} = (\alpha)_k.$$

Neste trabalho, vamos considerar $0 < |q| < 1$.

Por definição, temos também

$$(a;q)_{-n} = \frac{1}{(aq^{-n};q)_n} = \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

e

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k).$$

Essa última definição implica que

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}. \tag{1.11}$$

A *função q-gama* é definida por

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z}. \tag{1.12}$$

Observamos que a função q-gama satisfaz a equação

$$\Gamma_q(z+1) = \frac{1-q^z}{1-q}\,\Gamma_q(z), \;\; \Gamma_q(1) = 1, \tag{1.13}$$

que é uma q-extensão da conhecida equação

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \;\; \Gamma(1) = 1,$$

satisfeita pela função gama tradicional. Para mais detalhes sobre os fatoriais q-deslocados e sobre as funções q-gama ver, por exemplo, Gasper e Rahman [18].

1.4 Funções hipergeométricas e q-hipergeométricas

Para $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$, as funções hipergeométricas ${}_2F_1(a,b;c;z)$ são definidas pelas séries

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},$$

para $|z| < 1$ e, por continuidade analítica, para outros valores de $z \in \mathbb{C}$. Essas séries foram inicialmente estudadas em 1812 por Gauss e, ao longo dos anos, tiveram diversas aplicações no estudo de polinômios ortogonais, visto que vários polinômios ortogonais clássicos podem ser expressos em termos de funções hipergeométricas.

Uma das mais importantes fórmulas matemáticas envolvendo séries hipergeométricas é o teorema binomial

$$ {}_2F_1(a, c; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n = (1-z)^{-a}, $$

válido para $|z| < 1$.

Uma generalização dessas funções são as conhecidas funções q-hipergeométricas ou hipergeométricas básicas (devido à base q), introduzidas por Heine em meados de 1846. Para $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, ...$ e $0 < |q| < 1$, essas funções são definidas por

$$ {}_2\Phi_1(q^a, q^b; q^c; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a; q)_n \, (q^b; q)_n}{(q^c; q)_n \, (q; q)_n} z^n, \tag{1.14} $$

para $|z| < 1$ e, por continuidade analítica, para outros valores de $z \in \mathbb{C}$.

Observamos que quando a ou b assume valores inteiros negativos na equação (1.14), a função ${}_2\Phi_1(q^a, q^b; q^c; q, z)$ torna-se um polinômio. No Capítulo 4, estudamos algumas classes especiais de polinômios ortogonais de Laurent que tem uma representação em termos de funções q-hipergeométricas.

Duas funções q-hipergeométricas distintas, ${}_2\Phi_1(q^{a_1}, q^{a_2}; q^{a_3}; q, z)$ e ${}_2\Phi_1(q^{\tilde{a}_1}, q^{\tilde{a}_2}; q^{\tilde{a}_3}; q, z)$, são chamadas contíguas se $|a_i - \tilde{a}_i| = 0$ ou 1 para pelo menos um $i \in \{1, 2, 3\}$. Existem interessantes relações entre funções q-hipergeométricas contíguas, chamadas relações contíguas. A seguir, apresentamos uma dessas relações que será muito importante para a obtenção de novas classes de polinômios de Laurent no Capítulo 4.

Lema 1.1. *Se $c \neq 0, -1, -2, \ldots,$ então*

$$ \begin{aligned} {}_2\Phi_1(q^a, q^{b+1}; q^c; q, z) \;=\; & \left(1 + q^b \frac{(1-q^{a-b})}{(1-q^c)} z\right) {}_2\Phi_1(q^{a+1}, q^{b+1}; q^{c+1}; q, z) \\ & - q^b \frac{(1-q^{a+1})(1-q^{c-b})}{(1-q^c)(1-q^{c+1})} z \, {}_2\Phi_1(q^{a+2}, q^{b+1}; q^{c+2}; q, z). \end{aligned} \tag{1.15} $$

Demonstração: Consideremos as relações contíguas obtidas por Heine (ver [18], pág.

22)

$$\begin{aligned}{}_2\Phi_1(q^{a+1},q^{b+1};q^{c+1};q,z) &= {}_2\Phi_1(q^{a+1},q^{b};q^{c};q,z)\\ &+\frac{(1-q^{a+1})(1-q^{c-b})}{(1-q^{c})(1-q^{c+1})}\,q^{b}z\,{}_2\Phi_1(q^{a+2},q^{b+1};q^{c+2};q,z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_2\Phi_1(q^{a+1},q^{b};q^{c};q,z) &= {}_2\Phi_1(q^{a},q^{b+1};q^{c};q,z)\\ &+\frac{(1-q^{a-b})}{(1-q^{c})}\,q^{b}z\,{}_2\Phi_1(q^{a+1},q^{b+1};q^{c+1};q,z),\end{aligned}$$

válidas para $c \neq 0,-1,-2,\ldots$.

Substituindo a expressão do lado direito da segunda equação na primeira, obtemos a equação (1.15). □

Existem diversos resultados envolvendo funções q-hipergeométricas que são análogos a resultados envolvendo funções hipergeométricas. Por exemplo, temos o chamado teorema q-binomial

$$ {}_2\Phi_1(q^{a},q^{c};q^{c};q,z) = {}_1\Phi_0(q^{a};q,z) = \frac{(q^{a}z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}, \tag{1.16}$$

válido para $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ e $|z|<1$.

Podemos encontrar na literatura, ainda, diversas fórmulas envolvendo funções q-hipergeométricas. Entre elas, temos a fórmula de transformação de Heine

$$ {}_2\Phi_1(q^{a},q^{b};q^{c};q,z) = \frac{(q^{a+b-c}z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\,{}_2\Phi_1(q^{-a+c},q^{-b+c};q^{c};q,q^{a+b-c}z), \tag{1.17}$$

em que $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ e $|z| < \min\{1,\ |q^{c-a-b}|\}$.

Para os propósitos deste trabalho, devemos ainda citar as identidades polinomiais

$$ {}_2\Phi_1(q^{-n},q^{b};q^{c};q,z) = \frac{(q^{b};q)_n}{(q^{c};q)_n}\,q^{-n(n+1)/2}(-z)^n\,{}_2\Phi_1(q^{-n},q^{-c-n+1};q^{-b-n+1};q,q^{c-b+n+1}z^{-1}), \tag{1.18}$$

$n \geq 1$, válidas quando $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ e $b \neq -n+1,-n+2,-n+3,\ldots$.

Mais informações sobre funções hipergeométricas e q-hipergeométricas podem ser encontradas, por exemplo, em Andrews, Askey e Roy [3], Gasper e Rahman [18], Koekoek e Swarttouw [28] e Slater [36].

1.5 Os Teoremas de Laurent e da Convergência Dominada

Nesta seção, enunciamos dois resultados da Análise muito conhecidos, que serão usados no Capítulo 4 na demontração de alguns de nossos resultados.

Consideremos C_1 e C_2 dois círculos com centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raios r_1 e r_2, respectivamente, com $r_2 < r_1$. O teorema a seguir é um importante resultado sobre funções analíticas, conhecido como Teorema de Laurent, que pode ser encontrado, por exemplo, em Churchill [10].

Teorema 1.3. *Seja f uma função analítica sobre C_1 e C_2 e na região compreendida entre esses dois círculos. Então, para cada ponto z pertencente à região determinada por esses círculos, $f(z)$ é representada por uma série convergente de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

para qualquer caminho fechado C contido no anel determinado pelos círculos C_1 e C_2 envolvendo z_0.

O próximo teorema, conhecido como Teorema da Convergência Dominada, ou ainda Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, é um dos principais teoremas da Teoria da Medida envolvendo integrais de Lebesgue e será aplicado nesse trabalho à demonstração de um resultado sobre o comportamento assintótico dos polinômios estudados no Capítulo 4.

Teorema 1.4. *Sejam $f, f_i : E \to \bar{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2, \ldots$, funções mensuráveis não-negativas. Suponhamos que*

(i) $f_i(x) \to f(x)$, para todo $x \in E$;

(ii) $f_i(x) \leq \phi(x)$, onde $\phi : E \to \bar{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável tal que

$$\int_E \phi \, d\mu < +\infty.$$

Então,

$$\int_E f_i \, d\mu \to \int_E f \, d\mu.$$

Observamos que $\bar{\mathbb{R}}$ denota o conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, conhecido como reta real estendida. Para mais detalhes do Teorema da Convergência Dominada ver, por exemplo, Bartle [5].

Capítulo 2

Polinômios ortogonais de Laurent

Nesse capítulo, introduzimos os polinômios ortogonais de Laurent e apresentamos algumas de suas propriedades. Em particular, fazemos um breve estudo dos polinômios de Szegő, que são polinômios ortogonais no círculo unitário, e dos polinômios L-ortogonais, uma classe particular de polinômios ortogonais de Laurent definidos na reta real. Os polinômios ortogonais de Laurent serão nosso objeto de estudo nos próximos capítulos e, por isso, damos uma atenção especial a eles. Os resultados apresentados nesse capítulo são bem conhecidos e podem ser encontrados, por exemplo, em Andrade [1], Hendriksen e van Rossum [20], Jones e Thron [25], Jones Thron e Waadeland [27], Simon [34], entre outros.

2.1 Polinômios ortogonais de Laurent

Para todo par de números inteiros (p, q), $p \leq q$, denotamos por $\Lambda_{p,q}$ o espaço vetorial de todas as funções da forma

$$L(z) = \sum_{k=p}^{q} c_k z^k, \; c_k \in \mathbb{C},$$

definidas em $\mathbb{C}$. Estas funções são conhecidas como polinômios de Laurent (ou L-polinômios). Denotamos o espaço dos polinômios de Laurent por Λ.

Dada uma sequência "dupla" de números complexos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, definimos o *funcional de momento* $\mathcal{M}$ associado à sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sobre o espaço dos polinômios de

Laurent de maneira análoga a (1.1), ou seja, $\mathcal{M}$ é o funcional linear definido por

$$\mathcal{M}[z^n] = \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{2.1}$$

Definição 2.1. *Os determinantes definidos por*

$$\Delta_{-1} = 1, \quad \Delta_0 = \mu_0 \ \text{ e } \ \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1,$$

são chamados determinantes de Toeplitz associados à sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Observamos que os determinantes de Toeplitz e os de Hankel estão relacionados por

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} H_{n+1}^{(-n)}, \quad n \geq 0. \tag{2.2}$$

Consideremos uma sequência $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios de Laurent da seguinte forma:

$$\begin{aligned} B_{2n}(z) &= a_{-n}^{(2n)} z^{-n} + a_{-n+1}^{(2n)} z^{-n+1} + \ldots + a_n^{(2n)} z^n, \quad a_n^{(2n)} \neq 0, \\ B_{2n+1}(z) &= a_{-n-1}^{(2n+1)} z^{-n-1} + a_{-n}^{(2n+1)} z^{-n} + \ldots + a_n^{(2n+1)} z^n, \quad a_{-n-1}^{(2n+1)} \neq 0, \end{aligned}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definição 2.2. *Dizemos que a sequência* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é ortogonal com relação ao funcional de momento* $\mathcal{M}$ *se*

$$\mathcal{M}[B_n(z)\, B_m(z)] = \tilde{\rho}_n \delta_{n,m}, \tag{2.3}$$

com $\tilde{\rho}_n \neq 0$. *Neste caso, os polinômios* B_n *são chamados de polinômios ortogonais de Laurent.*

Consideremos a sequência de polinômios $\{Q_n\}$ satisfazendo

$$\mathcal{M}[z^{-s} Q_n(z)] = \rho_n \delta_{n,s}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1, \tag{2.4}$$

onde Q_n é um polinômio mônico de grau n e $\rho_n \neq 0$, para todo $n \geq 1$. Se o funcional de momento $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$, então ele é chamado de funcional de momento semi-definido. Neste caso, pode-se verificar facilmente que a sequência de polinômios $\{Q_n\}$ existe, é única e dada por

$$Q_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}.$$

Além disso, $\rho_n = \mathcal{M}[z^{-n}Q_n(z)] = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Observamos que a sequência de polinômios $\{Q_n\}$ poderia ser definida analogamente a partir dos determinantes de Hankel, devido à relação (2.2).

É importante observar, também, que a ortogonalidade (2.4), satisfeita pelos polinômios Q_n, é equivalente à ortogonalidade (2.3) dos polinômios de Laurent definidos por

$$B_{2n}(z) = z^{-n}Q_{2n}(z), \quad B_{2n+1}(z) = z^{-n}Q_{2n+1}(z), \quad n \geq 0.$$

Assim, para simplificar, chamamos os polinômios Q_n de polinômios ortogonais de Laurent. No Capítulo 4, estudamos uma classe especial de polinômios ortogonais de Laurent dados em termos das funções q-hipergeométricas e cuja ortogonalidade tem uma representação integral no círculo unitário.

Para mais informações sobre os polinômios ortogonais de Laurent ver, por exemplo, Hendriksen e van Rossum [20] e Jones e Thron [25].

2.2 Polinômios de Szegő

Dada uma sequência "dupla" de números complexos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, consideremos o funcional de momento $\mathcal{M}$ definido por (2.1) e $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios mônicos satisfazendo a ortogonalidade (2.4).

Se o funcional de momento $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n > 0$ e $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, $n \geq 0$, então é conhecido como um funcional de momento positivo-definido, os polinômios $S_n = Q_n$ são conhecidos como polinômios de *Szegő* mônicos e, neste caso, $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes com relação a uma medida positiva $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$ no círculo unitário, ou seja,

$$\mathcal{M}[f] = \int_{\mathcal{C}} f(z) d\mu(z),$$

onde $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Assim, como $z^{-1} = \bar{z}$ para todo z tal que $|z| = 1$, temos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-j} S_n(z)\, d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j S_n(z)\, d\mu(z)$$

e a sequência de polinômios de Szegő mônicos $\{S_n\}$ é usualmente definida por

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(z)}\, S_n(z)\, d\mu(z) = \int_0^{2\pi} \overline{S_m(e^{i\theta})}\, S_n(e^{i\theta})\, d\mu(e^{i\theta}) = \kappa_n^{-2} \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $\kappa_n^{-2} = \|S_n\|^2 = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z)$.

Os polinômios de Szegő mônicos satisfazem o par de relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_n^*(z) &= \bar{a}_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= a_n S_n^*(z) + (1 - |a_n|^2) z S_{n-1}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \tag{2.5}$$

onde $a_n = S_n(0)$ e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$. Os números a_n são conhecidos como coeficientes de Szegő, de reflexão ou, ainda, coeficientes de Verblunsky e satisfazem

$$|a_n| < 1 \;\text{ e }\; \mu_0 \prod_{k=0}^{n} (1 - |a_k|^2) = \kappa_n^{-2} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Um dos resultados mais conhecidos sobre polinômios de Szegő é que eles são completamente caracterizados pela sequência de coeficientes $\{a_n\}$ a eles associada, como é dado no seguinte teorema.

Teorema 2.1. *A toda sequência arbitrária de números complexos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde $|a_n| < 1$, $n \geq 0$, existe uma única medida positiva μ no círculo unitário associada tal que os polinômios $\{S_n\}$ gerados por (2.5) são os respectivos polinômios de Szegő mônicos.*

Para essas e muitas outras informações sobre os polinômios de Szegő, ver Szegő [42] e Simon [34, 35].

2.3 Polinômios L-ortogonais

Nesta seção, definimos os polinômios L-ortogonais, uma classe de polinômios intimamente associada aos polinômios ortogonais de Laurent na reta real. Apresentamos várias propriedades satisfeitas por esses polinômios, algumas das quais são análogas às principais propriedades dos polinômios ortogonais na reta real.

Definição 2.3. *Seja $d\psi$ uma distribuição forte em $[a,b]$. A sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por*

$$\begin{cases} Q_n \text{ é mônico de grau } n, \\ \displaystyle\int_a^b t^{-n+s} Q_n(t) d\psi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{2.6}$$

é chamada de sequência de polinômios L-ortogonais.

Dada uma sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazendo (2.6), a sequência $\{t^{-\lfloor (n+1)/2 \rfloor} Q_n(t)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais de Laurent com respeito ao funcional de momento $\mathcal{M}[t^n] = \mu_n$, onde $\mu_n = \int_a^b t^n d\psi(t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ver [23]). Logo, por conveniência, chamamos os polinômios Q_n de polinômios L-ortogonais.

Consideremos os polinômios $Q_n(t)$ mônicos dados por

$$Q_n(t) = \sum_{r=0}^{n} b_{n,n-r} t^{n-r}, \tag{2.7}$$

onde $b_{n,n} = 1$, para todo $n \geq 0$. Como $\displaystyle\int_a^b t^n \, d\psi(t) = \mu_n$, podemos escrever (2.6) como um sistema de equações lineares algébricas nos coeficientes de $Q_n(t)$:

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccccc} \mu_{-n} b_{n,0} & + & \mu_{-n+1} b_{n,1} & + & \cdots & + & \mu_0 b_{n,n} & = & 0 \\ \mu_{-n+1} b_{n,0} & + & \mu_{-n+2} b_{n,1} & + & \cdots & + & \mu_1 b_{n,n} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-1} b_{n,0} & + & \mu_0 b_{n,1} & + & \cdots & + & \mu_{n-1} b_{n,n} & = & 0 \\ \mu_0 b_{n,0} & + & \mu_1 b_{n,1} & + & \cdots & + & \mu_n b_{n,n} & = & \rho_n \end{array} \end{cases}, \tag{2.8}$$

onde $\rho_n = \displaystyle\int_a^b Q_n(t) \, d\psi(t)$.

Usando a regra de Cramer, temos que o coeficiente $b_{n,n}$ pode ser dado por:

$$b_{n,n} = \frac{\rho_n\, H_n^{(-n)}}{H_{n+1}^{(-n)}},\ n \geq 0.$$

Como consideramos $b_{n,n} = 1$, então

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}} > 0,\ \ n \geq 0. \tag{2.9}$$

Se substituirmos a última equação de (2.8) por (2.7) e, novamente, aplicarmos a regra de Cramer, obtemos

$$Q_n(z) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & & \mu_{n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix},\ n \geq 0. \tag{2.10}$$

Assim, vemos que uma condição necessária e suficiente para a existência de $Q_n(t)$ é que $H_n^{(-n)} \neq 0$.

Substituindo $z = 0$ em (2.10), obtemos a seguinte expressão para o termo independente de $Q_n(z)$ em termos dos determinantes de Hankel:

$$Q_n(0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)}} = b_{n,0},\ \ n \geq 0. \tag{2.11}$$

Portanto, pelo Teorema 1.2, os polinômios L-ortogonais mônicos $Q_n(t)$, definidos por (2.6), existem, são únicos e $b_{n,0} \neq 0$.

Usando a relação

$$\int_a^b t^{-(n+1)} Q_n(t)\, d\psi(t) = \mu_{-n-1} b_{n,0} + \mu_{-n} b_{n,1} + ... + \mu_{-1} b_{n,n}$$

em (2.8), obtemos

$$\eta_n = \int_a^b t^{-(n+1)} Q_n(t)\, d\psi(t) = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n-1)}}{H_n^{(-n)}},\ \ n \geq 0, \tag{2.12}$$

que é diferente de zero.

Consideremos as seguintes integrais

$$\sigma_{n,s} = \int_a^b t^{-n+s} Q_n(t)\, d\psi(t), \tag{2.13}$$

onde $Q_n(t)$ é o polinômio L-ortogonal de grau n associado à medida $d\psi$. Dessa forma, temos que $\sigma_{n,s} = 0$ para $0 \leq s \leq n-1$, $n \geq 1$. Além disso, de (2.9) e (2.12), $\sigma_{n,n} = H_{n+1}^{(-n)}/H_n^{(-n)}$ e $\sigma_{n,-1} = (-1)^n H_{n+1}^{(-n-1)}/H_n^{(-n)}$, para $n \geq 0$.

Associado ao polinômio L-ortogonal $Q_n(z)$ podemos definir um outro polinômio mônico, denotado por $A_n(z)$, de grau $n-1$, por

$$A_n(z) = \frac{1}{\mu_0}\int_a^b \frac{Q_n(z) - Q_n(t)}{z-t}\, d\psi(t), \quad n \geq 0. \tag{2.14}$$

2.3.1 Algumas propriedades dos polinômios L-ortogonais e associados

Os polinômios L-ortogonais $Q_n(z)$ e seus polinômios associados $A_n(z)$, definidos na seção anterior, possuem propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. A mais interessante e útil é a relação de recorrência de três termos que apresentamos a seguir.

Teorema 2.2. *Sejam $Q_n(z)$ e $A_n(z)$ os polinômios definidos em (2.6) e (2.14), respectivamente. Então, as seguintes relações de recorrência são verdadeiras para $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= (z - \beta_{n+1})\, Q_n(z) - \alpha_{n+1} z\, Q_{n-1}(z), \quad (a)\\ A_{n+1}(z) &= (z - \beta_{n+1})\, A_n(z) - \alpha_{n+1} z\, A_{n-1}(z), \quad (b) \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde

$$\begin{gathered} Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = z - \beta_1 \\ A_0(z) = 0, \quad A_1(z) = 1 \end{gathered}$$

e os coeficientes α_{n+1} e β_{n+1} satisfazem:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\sigma_{n,n}}{\sigma_{n-1,n-1}} > 0, \quad n \geq 1, \tag{2.16}$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{0,0}}{\sigma_{0,-1}} = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1}\frac{\sigma_{n-1,-1}}{\sigma_{n,-1}}, \quad n \geq 1, \tag{2.17}$$

onde $\sigma_{n,s}$ são as integrais definidas em (2.13).

Demonstração: Provemos os resultados primeiramente para os polinômios $Q_n(z)$. Como $Q_n(z)$ é um polinômio mônico de grau n, o polinômio $Q_{n+1}(z) - z\,Q_n(z)$ é de grau, no máximo, n. Logo, pode ser escrito sob a forma

$$Q_{n+1}(z) - z\,Q_n(z) = -\beta_{n+1}\, Q_n(z) - \alpha_{n+1}\, z\, Q_{n-1}(z) + P_{n-1}(z), \tag{2.18}$$

onde α_{n+1} e β_{n+1} são tais que $P_{n-1}(z)$ é de grau $n-1$.

Representemos $P_{n-1}(z)$ por

$$P_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} z^j.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação (2.18) por z^{-n+s} e integrando, obtemos:

$$\int_a^b t^{-n+s} Q_{n+1}(t)\, d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+s+1} Q_n(t)\, d\psi(t) \tag{2.19}$$

$$= -\beta_{n+1} \int_a^b t^{-n+s} Q_n(t)\, d\psi(t) - \alpha_{n+1} \int_a^b t^{-(n-1)+s} Q_{n-1}(t)\, d\psi(t)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} \int_a^b t^{-n+j+s} d\psi(t).$$

Fazendo $s = 0, 1, ..., n-1$, respectivamente, na equação acima, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\mu_{-n+j} &= 0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\mu_{-n+1+j} &= 0 \\ \qquad\vdots & \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\mu_{-2+j} &= 0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\mu_{-1+j} &= \alpha_{n+1}\sigma_{n-1,n-1} - \sigma_{n,n} \end{cases}$$

cujas incógnitas são os coeficientes do polinômio $P_{n-1}(z)$ e cujo determinante da matriz dos coeficientes é $H_n^{(-n)}$ que, como já sabemos, é maior do que zero.

Logo, se tomarmos

$$\alpha_{n+1} = \frac{\sigma_{n,n}}{\sigma_{n-1,n-1}},$$

o sistema será homogêneo e sua única solução é $p_{n-1,j} = 0,\ j = 0, 1, ..., n-1$, o que significa dizer que $P_{n-1}(z) \equiv 0$ e, assim, (2.15) (a) está provado.

Para determinarmos o coeficiente β_{n+1}, tomemos $s = -1$ em (2.19). Logo, $0 = -\beta_{n+1}\sigma_{n,-1} - \alpha_{n+1}\sigma_{n-1,-1}$ e, portanto, segue imediatamente (2.17).

Vamos, agora, usar a relação (2.15) (a) para mostrarmos (2.15) (b). Podemos escrever a diferença $Q_{n+1}(z) - Q_{n+1}(t)$ como:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) - Q_{n+1}(t) &= (z-\beta_{n+1})\,Q_n(z) - \alpha_{n+1}\,z\,Q_{n-1}(z) \\ &\quad -(t-\beta_{n+1})\,Q_n(t) + \alpha_{n+1}\,t\,Q_{n-1}(t) \\ &= (z-\beta_{n+1})\,(Q_n(z) - Q_n(t)) \\ &\quad -\alpha_{n+1}\,z\,(Q_{n-1}(z) - Q_{n-1}(t)) + (z-t)(Q_n(t) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Dividindo por $(z-t)$, integrando com relação a t e multiplicando por μ_0^{-1}, obtemos:

$$A_{n+1}(z) = (z-\beta_{n+1})\,A_n(z) - \alpha_{n+1}\,z\,A_{n-1}(z) + \frac{1}{\mu_0}(\sigma_{n,n} - \alpha_{n+1}\,\sigma_{n-1,n-1})$$

que, por (2.16), é a relação de recorrência (2.15) (b).

Isto completa a prova do teorema. □

Como consequência da relação de recorrência de três termos, muitos resultados envolvendo $Q_n(z)$ e $A_n(z)$ podem ser encontrados como, por exemplo, as relações abaixo:

$$A_n(z)Q_{n-1}(z) - A_{n-1}(z)Q_n(z) = \alpha_n\alpha_{n-1}...\,\alpha_2\,z^{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{2.20}$$

$$G_{n+1}(z) = \{Q_n(z)\}^2 + \alpha_{n+1}\beta_n\{Q_{n-1}(z)\}^2 + \alpha_{n+1}\alpha_n z^2 G_{n-1}(z),\ n \geq 1, \tag{2.21}$$

onde

$$G_n(z) = Q_n'(z)\,Q_{n-1}(z) - Q_{n-1}'(z)\,Q_n(z), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $Q_n'(z)$ denota a derivada de $Q_n(z)$.

De (2.21), segue que

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(z) &= \{Q_{2n}(z)\}^2 + \alpha_{2n+1}\beta_{2n}\{Q_{2n-1}(z)\}^2 \\ &\quad +\alpha_{2n+1}\alpha_{2n}z^2\{Q_{2n-2}(z)\}^2 \\ &\quad +\alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\beta_{2n-2}z^2\{Q_{2n-3}(z)\}^2 \\ &\quad +\ldots+\alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\ldots\alpha_4\alpha_3\beta_2 z^{2n-2}\{Q_1(z)\}^2 \\ &\quad +\alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\ldots\alpha_3\alpha_2 z^{2n}\{Q_0(z)\}^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

e

$$
\begin{aligned}
G_{2n}(z) \;=\; & \{Q_{2n-1}(z)\}^2 + \alpha_{2n}\beta_{2n-1}\{Q_{2n-2}(z)\}^2 \\
& + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}z^2\{Q_{2n-3}(z)\}^2 \\
& + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}\beta_{2n-3}z^2\{Q_{2n-4}(z)\}^2 \\
& + \ldots + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_4\alpha_3\, z^{2n-2}\{Q_1(z)\}^2 \\
& + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_3\alpha_2\beta_1 z^{2n-2}\{Q_0(z)\}^2.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Os polinômios L-ortogonais possuem, ainda, importantes propriedades com relação a seus zeros. Por (1.6) e (2.11) temos que todos os polinômios $Q_n(z)$ existem e satisfazem $Q_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$. Logo, $z = 0$ não é zero dos polinômios $Q_n(z)$. Além disso, se $z = z_{n,i}$ é um zero de $Q_n(z)$, pela fórmula (2.20),

$$A_n(z_{n,i})\, Q_{n-1}(z_{n,i}) = \alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2(z_{n,i})^{n-1}.$$

Portanto, o seguinte resultado é válido.

Teorema 2.3. *Se $z_{n,i}$ é um zero do polinômio L-ortogonal $Q_n(z)$, para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de $A_n(z)$ e dos zeros de $B_{n-1}(z)$.*

Valem, ainda, os seguintes resultados.

Teorema 2.4. *Os zeros do polinômio L-ortogonal $Q_n(z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b).*

Demonstração: Como $0 \leq a < b \leq \infty$, temos que z^{-n} não muda de sinal em (a, b). Logo, $Q_n(z)$ deve mudar de sinal pelo menos uma vez em (a, b), visto que

$$\int_a^b t^{-n} Q_n(t)\, d\psi(t) = 0.$$

Sejam $z_{n,1},\ z_{n,2}, \ldots, z_{n,r}$ todos os pontos em que $Q_n(z)$ muda de sinal em (a, b) e suponhamos que $0 < r < n$.

O polinômio $z^{-n}(z - z_{n,1})(z - z_{n,2})\ldots(z - z_{n,r})\, Q_n(z)$ não muda de sinal em (a, b) e, então,

$$\int_a^b t^{-n}(t - z_{n,1})(t - z_{n,2})\ldots(t - z_{n,r})\, Q_n(t)\, d\psi(t) \neq 0.$$

Como $r < n$, por (2.6) isso é uma contradição. Logo, existem, no mínimo, n pontos no intervalo (a, b) que são zeros de $Q_n(z)$. Como $Q_n(z)$ é um polinômio de grau n, o resultado segue imediatamente. □

Teorema 2.5. *Os zeros de $Q_n(z)$ e $Q_{n-1}(z)$ se entrelaçam, ou seja, entre dois zeros consecutivos do polinômio $Q_{n-1}(z)$ existe um zero de $Q_n(z)$.*

Demonstração: Das equações (2.22) e (2.23), podemos observar que

$$G_n(z) = \{Q_n'(z)Q_{n-1}(z) - Q_{n-1}'(z)\, Q_n(z)\} > 0, \tag{2.24}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 1$.

Como os zeros, $z_{n-1,r}$, $r = 1, \ldots, n-1$, de $Q_{n-1}(z)$ são simples, reais e positivos, temos que $G_n(z_{n-1,r}) > 0$ e $Q_{n-1}'(z_{n-1,r}) \neq 0$, para $r = 1, \ldots, n-1$.

Sejam $z_{n-1,j}$ e $z_{n-1,j+1}$ dois zeros consecutivos de $Q_{n-1}(z)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $Q_{n-1}'(z_{n-1,j}) > 0$. Logo, $Q_{n-1}'(z_{n-1,j+1}) < 0$.

Assim, de (2.24),

$$Q_n(z_{n-1,j}) < 0 \text{ e } Q_n(z_{n-1,j+1}) > 0.$$

Portanto, o teorema segue imediatamente. $\square$

Capítulo 3

Polinômios L-ortogonais associados às medidas relacionadas

Neste capítulo, estudamos a conexão existente entre duas sequências de polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ associadas, respectivamente, a duas medidas positivas fortes $d\psi_0$ e $d\psi_1$, definidas em $[a, b]$ e relacionadas por uma fórmula de conexão. Nossos resultados aqui apresentados permitem a construção de novos exemplos de polinômios L-ortogonais a partir de exemplos já conhecidos, como os mostrados na Seção 3.3. Os resultados deste capítulo estão publicados em Andrade, Costa e Sri Ranga [2].

3.1 Resultados preliminares

Consideremos $\{Q_n\}$ uma sequência de polinômios L-ortogonais associados a uma medida positiva forte $d\psi$ em $[a, b]$, onde $0 < a < b < \infty$, e denotemos por $X = (0, a] \cap [b, \infty)$ o complemento de (a, b) em $(0, \infty)$.

Seja $\{A_n\}$ a sequência dos polinômios associados a $\{Q_n\}$ definidos em (2.14).

Segue dos resultados de frações contínuas obtidos na Seção 1.2 que

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{|z-\beta_1} - \frac{\alpha_2 z}{|z-\beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_n z}{|z-\beta_n}, \tag{3.1}$$

onde α_n e β_n são os mesmos dados em (2.16) e (2.17).

Seja $S_n(z) = (z-\beta_1)\,\dfrac{A_n(z)}{Q_n(z)}$, $n \geq 0$. Logo, $S_0(z) = 0$ e $S_1(z) = 1$.

Por (3.1), podemos escrever

$$S_n(z) = \cfrac{z-\beta_1}{z-\beta_1-\cfrac{\alpha_2 z}{z-\beta_2-\cfrac{\alpha_3 z}{z-\beta_3-\ddots-\cfrac{\alpha_n z}{z-\beta_n}}}},$$

ou seja,

$$S_n(z) = \cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha_2 z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)-\cfrac{(z-\beta_1)\alpha_3 z}{z-\beta_3-\ddots-\cfrac{\alpha_n z}{z-\beta_n}}}}.$$

Tomando $a_1(z) = \dfrac{\alpha_2 z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$, obtemos

$$S_n(z) = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1(z)}{1-\cfrac{\alpha_3 z}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)-\cfrac{(z-\beta_2)\alpha_4 z}{z-\beta_4-\ddots-\cfrac{\alpha_n z}{z-\beta_n}}}}}.$$

Repetindo-se $(n-1)$-vezes este processo, concluímos que

$$S_n(z) = \frac{1|}{|1} - \frac{a_1(z)|}{|1} - \cdots - \frac{a_{n-1}(z)|}{|1}, \quad n \geq 2,$$

onde $a_n(z) = \dfrac{\alpha_{n+1}\, z}{(z-\beta_n)(z-\beta_{n+1})}$, $n \geq 1$.

Além disso, usando (2.20), podemos verificar facilmente que

$$S_n(z) - S_{n-1}(z) = \frac{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(z-\beta_1)\, z^{n-1}}{Q_n(z)Q_{n-1}(z)}, \ n \geq 2,$$

e, por recorrência, concluímos que

$$S_n(z) = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_j(z-\beta_1)\, z^{j-1}}{Q_j(z)Q_{j-1}(z)}, \ n \geq 2.$$

Como $\beta_n \in (a,b)$, $n \geq 1$, podemos enunciar o lema a seguir.

Lema 3.1. *Suponhamos que X seja não vazio. Então, para todo $z \in X$, temos*

$$1 = S_1(z) < S_2(z) < \cdots < S_n(z), \tag{3.2}$$

e, para todo z no interior de X,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z) = \frac{z-\beta_1}{\mu_0}\int_a^b \frac{1}{z-t}\, d\psi(t). \tag{3.3}$$

Além disso, se $S(a)$ existe, então $\lim_{n\to\infty} S_n(a) = S(a)$. Analogamente, se $S(b)$ existe, então $\lim_{n\to\infty} S_n(b) = S(b)$.

Demonstração: Recordemos que $\alpha_n > 0$, $n \geq 2$, e observemos que, para $z \in X$, z^{j-1} e $\dfrac{(z-\beta_1)}{Q_j(z)Q_{j-1}(z)}$ são positivos. Segue, então, que a expressão

$$\frac{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_j(z-\beta_1)\,z^{j-1}}{Q_j(z)Q_{j-1}(z)}, \quad j \geq 2,$$

é sempre positiva em X e, portanto,

$$S_j(z) = S_{j-1}(z) + \frac{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_j(z-\beta_1)\,z^{j-1}}{Q_j(z)Q_{j-1}(z)} > S_{j-1}(z),$$

para $j \geq 2$ e $z \in X$. Isto prova (3.2).

A convergência de $S_n(z)$ para $S(z)$ no interior de X é consequência do fato da medida ser determinada. Isso segue de resultados associados ao problema de momento forte de Stieltjes (ver [27]). □

Podemos, ainda, usar a relação de recorrência de três termos satisfeita por $\{Q_n(z)\}$ para mostrar que a sequência $\{a_n(z)\}$ forma uma sequência encadeada para todo $z \in X$. Dividindo os dois lados da relação $Q_{n+1}(z) = (z-\beta_{n+1})\,Q_n(z) - \alpha_{n+1}\,zQ_{n-1}(z)$ por $(z-\beta_{n+1})\,Q_{n-1}(z)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{n+1}z}{z-\beta_{n+1}} &= \frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n-1}(z)(z-\beta_{n+1})}\\[2ex] &= \left(1 - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)(z-\beta_{n+1})}\right)\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)}.\end{aligned}$$

Logo, para $n \geq 1$ e para todo $z \in X$,

$$a_n(z) = \frac{\alpha_{n+1}z}{(z-\beta_n)(z-\beta_{n+1})} = \left(1 - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)(z-\beta_{n+1})}\right)\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)(z-\beta_n)}. \tag{3.4}$$

Como $a_n(z) > 0$ e $\dfrac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)(z-\beta_{n+1})} > 0$, para $z \in X$, temos

$$0 < 1 - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)(z-\beta_{n+1})} < 1.$$

Assim, segue de (3.4) que $\{a_n(z)\}$ é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_n(z)\}$ tal que

$$g_n(z) = 1 - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)(z-\beta_{n+1})},$$

para $n \geq 1$ e $z \in X$.

Usando a equação $a_1(z) = (1 - g_0(z))g_1(z)$, podemos mostrar que $g_0(z) = 0$ e, portanto, $\{g_n(z)\}$ é a sequência de parâmetros minimal para $\{a_n(z)\}$.

Lema 3.2. *O conjunto de polinômios $\{z^{n-j}Q_j(z)\}_{j=0}^{n}$ é linearmente independente para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Observemos, primeiramente, que todos os polinômios do conjunto dado acima são polinômios mônicos de grau n.

Consideremos a combinação linear nula

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j \, t^{n-j} Q_j(t) = 0.$$

Multiplicando essa equação por t^{-n+m} e integrando, obtemos

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j \int_a^b t^{-j+m} Q_j(t) \, d\psi(t) = 0.$$

Fazendo $m = 0, 1, \ldots, n$, obtemos o sistema triangular inferior

$$\begin{pmatrix} \sigma_{0,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sigma_{0,1} & \sigma_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \sigma_{0,2} & \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{0,n} & \sigma_{1,n} & \sigma_{2,n} & \ldots & \sigma_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\sigma_{m,m} \neq 0$, segue que o sistema possui solução única e, portanto, $\gamma_m = 0$ para todo $m = 0, 1, \ldots, n$, o que conclui a prova do lema. □

O lema a seguir será útil para a obtenção dos resultados de monotonicidade apresentados na Seção 3.4. Um resultado análogo foi publicado primeiramente em Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [6].

Lema 3.3. *Sejam $q_n(t) = (t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n)$ e $q_{n-1}(t) = (t-y_1)(t-y_2)\ldots(t-y_{n-1})$, $n \geq 2$, cujos zeros satisfazem*

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n.$$

Então, para toda constante real $\tau < 1$, o polinômio mônico

$$Q_n(\tau;t) = (1-\tau)q_n(t) + \tau\, t\, q_{n-1}(t) \tag{3.5}$$

tem n zeros positivos $0 < \xi_1(\tau) < \xi_2(\tau) < \cdots < \xi_{n-1}(\tau) < \xi_n(\tau)$ que se entrelaçam com os zeros de $q_{n-1}(t)$. Em particular,

(i) se $0 < \tau < 1$, então

$$0 < \xi_1(\tau) < x_1 \quad \text{e} \quad y_{r-1} < \xi_r(\tau) < x_r, \;\; r = 2, \ldots, n;$$

(ii) se $\tau < 0$, então

$$x_r < \xi_r(\tau) < y_r, \; r = 1, \ldots, n-1 \quad \text{e} \quad x_n < \xi_n(\tau).$$

Além disso, cada $\xi_r(\tau)$ é uma função estritamente decrescente de τ.

Demonstração: Como $Q_n(0;t) = q_n(t)$, o entrelaçamento dos zeros de $Q_n(0;t)$ com os zeros de $q_{n-1}(t)$ é óbvio.

Provemos o caso (i) para o entrelaçamento dos zeros de $Q_n(\tau;t)$ com os zeros de $q_{n-1}(t)$ quando $0 < \tau < 1$.

Observemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} Q_n(\tau; x_r) &= \operatorname{sign} q_{n-1}(x_r) = (-1)^{n-r}, \;\; r = 1, 2, \ldots, n, \\ \operatorname{sign} Q_n(\tau; y_r) &= \operatorname{sign} q_n(y_r) = (-1)^{n-r}, \;\; r = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{sign} Q_n(\tau; 0) = \operatorname{sign} q_n(0) = (-1)^n.$$

Assim, concluímos que o polinômio $Q_n(\tau;t)$ muda de sinal no intervalo $(0, x_1)$ e em cada intervalo da forma (y_{r-1}, x_r), para $r = 2, \ldots, n$. Como $Q_n(\tau;t)$ é um polinômio de grau n, o item (i) do lema está provado.

Este resultado significa que $\xi_r(\tau) > 0$, $\operatorname{sign} q_n(\xi_r(\tau)) = (-1)^{n+1-r}$ e $\operatorname{sign} q_{n-1}(\xi_r(\tau)) = (-1)^{n-r}$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

A prova do item (ii) é similar à do item (i) e significa que $\xi_r(\tau) > 0$, $\operatorname{sign} q_n(\xi_r(\tau)) = (-1)^{n-r}$ e $\operatorname{sign} q_{n-1}(\xi_r(\tau)) = (-1)^{n-r}$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

Para provar a monotonicidade dos zeros de $Q_n(\tau;t)$ em relação ao parâmetro τ, notemos, primeiramente, que

$$Q_n(\tau;t) = q_n(t) - \tau\,[q_n(t) - t\, q_{n-1}(t)]$$

e, portanto,

$$\operatorname{sign}[q_n(\xi_r(\tau)) - \xi_r(\tau)\, q_{n-1}(\xi_r(\tau))] = \operatorname{sign}[(q_n(\xi_r(\tau)))/\tau] = (-1)^{n+1-r}.$$

Considerando o polinômio $Q_n(\tau+\epsilon;t) = Q_n(\tau;t) - \epsilon\,[q_n(t) - t\, q_{n-1}(t)]$, temos que $Q_n(\tau+\epsilon;\xi_r(\tau)) = -\epsilon\,[q_n(\xi_r(\tau)) - \xi_r(\tau)\, q_{n-1}(\xi_r(\tau))]$. Logo,

$$\operatorname{sign} Q_n(\tau+\epsilon;\xi_r(\tau)) = (-1)^{n-r}\operatorname{sign}\epsilon. \tag{3.6}$$

Supondo ϵ suficientemente pequeno e $\tau+\epsilon<1$, e desde que os zeros $\xi_r(\tau+\epsilon)$ de $Q_n(\tau+\epsilon;t)$ são todos positivos e distintos, (3.6) implica que $\xi_r(\tau+\epsilon) < \xi_r(\tau)$ quando $\epsilon>0$ e $\xi_r(\tau+\epsilon) > \xi_r(\tau)$ quando $\epsilon<0$.

Portanto, a prova do lema está completa. □

Observação 3.1. *O resultado acima pode ser estendido para $n=1$ se tomarmos $q_0(t) = 1$, $q_1(t) = t - x_1$ e $Q_1(t) = (1-\tau)q_1(t) - \tau\, t\, q_0(t) = t - \xi_1(\tau)$, com $0 < x_1$. Podemos verificar facilmente que $\xi_1(\tau) = (1-\tau)x_1$ é tal que $0 < \xi_1(\tau) < x_1$, se $0<\tau<1$, e $x_1 < \xi_1(\tau)$, se $\tau<0$. Além disso, $\xi_1(\tau)$ é uma função estritamente decrescente de τ.*

Para $\rho \in (p,q)$, seja $d\psi(x;\rho)$ uma distribuição forte em (a,b) e consideremos $\{Q_n(x;\rho)\}$ uma sequência de polinômios L-ortogonais associados à distribuição $d\psi(x;\rho)$. Sejam $\zeta_k(\rho)$, $k=1,\ldots,n$, os n zeros distintos do polinômio $Q_n(x;\rho)$. O teorema a seguir é um resultado de Dimitrov e Sri Ranga [16].

Teorema 3.1. *Seja*

$$d\psi(x;\rho) = \omega(x;\rho)\, d\psi(x),$$

onde $\omega(x;\rho)$ é positivo e tem primeira derivada com relação a ρ contínua para $x \in (a,b)$ e $\rho \in (p,q)$. Suponhamos que as integrais

$$\int_a^b x^j (\partial\omega(x;\rho)/\partial\rho)\, d\psi(x), \quad j = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1$$

convirjam uniformemente em todo subintervalo compacto de (p,q). Se

$$\frac{\partial \ln \omega(x;\rho)}{\partial \rho}$$

é uma função crescente (decrescente) de x para $x \in (a,b)$, então, $\zeta_k(\rho)$ é uma função crescente (decrescente) de ρ, $1 \le k \le n$.

Lema 3.4. *Seja $f(x,y)$ uma função tal que $\int_a^b f(x,y)\,d\psi(x)$ é convergente e $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,d\psi(x)$ é uniformemente convergente para $y_1 \leq y \leq y_2$. Então,*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\,d\psi(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,d\psi(x),$$

para todo $y_1 \leq y \leq y_2$.

A prova do Lema 3.4 (para $d\psi(x) = dx$) pode ser encontrada, por exemplo, em Ferrar [17] e Widder [44]. O caso geral pode ser demonstrado de forma análoga.

3.2 Polinômios L-ortogonais e os coeficientes de conexão

Sejam $d\psi_0$ e $d\psi_1$ duas medidas positivas fortes definidas em $[a,b]$ e conectadas por uma relação do tipo

$$(t-\kappa)\,d\psi_1(t) = \gamma\,d\psi_0(t). \tag{3.7}$$

A constante arbitrária γ é tal que $(t-\kappa)/\gamma$ é positivo em (a,b). Note que os momentos $\mu_n^{(i)} = \int_a^b t^n\,d\psi_i(t)$ satisfazem

$$\mu_{n+1}^{(1)} - \kappa\,\mu_n^{(1)} = \gamma\,\mu_n^{(0)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Para $i = 0, 1$, consideremos $\{Q_n^{(i)}\}$ a sequência de polinômios L-ortogonais mônicos relacionada à medida $d\psi_i$. A relação de recorrência de três termos de $\{Q_n^{(i)}\}$ é dada por

$$Q_{n+1}^{(i)}(z) = (z-\beta_{n+1}^{(i)})Q_n^{(i)}(z) - \alpha_{n+1}^{(i)} z\, Q_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \tag{3.8}$$

com $Q_0^{(i)}(z) = 1$ e $Q_1^{(i)}(z) = z - \beta_1^{(i)}$.

Nesta seção, consideramos uma das fórmulas de conexão existente entre as sequências de polinômios $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ e a utilizamos para obter algumas relações entre os coeficientes $\alpha_n^{(0)}$, $\beta_n^{(0)}$, $\alpha_n^{(1)}$ e $\beta_n^{(1)}$.

Inicialmente, vamos expressar (3.7) de uma forma mais conveniente.

Para $0 \leq a_0 < b_0 \leq \infty$, consideremos $d\psi_0$ e $d\psi_1$ duas medidas positivas fortes cujos suportes são $[a_0, b_0]$ e $[a,b]$, respectivamente e tais que

$$\int_a^b f(t)\,d\psi_1(t) = \frac{M}{M+1}\,f(\kappa) + \gamma\int_{a_0}^{b_0} (t-\kappa)^{-1} f(t)\,d\psi_0(t) \tag{3.9}$$

para todo polinômio de Laurent f, com $\kappa \in (-\infty, a_0] \cap [b_0, \infty)$, $\operatorname{sign}\gamma = \operatorname{sign}[\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}d\psi_0(t)]$, $M = 0$ se $\kappa \leq 0$ e $M \geq 0$ se $\kappa \in (0, a_0] \cap [b_0, \infty)$. Logo, o intervalo $(a, b) \subseteq (0, \infty)$ satisfaz:

$[a, b] = [\kappa, b_0]$, se $M > 0$ e $0 < \kappa < a_0$,

$[a, b] = [a_0, \kappa]$, se $M > 0$ e $b_0 < \kappa < \infty$, e

$[a, b] = [a_0, b_0]$, caso contrário.

Portanto, $\int_a^b f(t)(t-\kappa)\, d\psi_1(t) = \int_{a_0}^{b_0} f(t)\gamma\, d\psi_0(t)$ e, como $\int_{a_0}^{b_0} f(t)\, d\psi_0(t) = \int_a^b f(t)\, d\psi_0(t)$, temos a relação (3.7) verificada.

Quando $k = a_0$ (ou $k = b_0$), precisamos supor a existência de $\int_{a_0}^{b_0}(a_0-\kappa)^{-1}\, d\psi_0(t)$ (ou $\int_{a_0}^{b_0}(b_0-\kappa)^{-1}\, d\psi_0(t)$).

Podemos observar que, quando $\kappa > 0$ e $M > 0$, a medida $d\psi_1$ tem um salto de $M/(M+1)$ em κ. Além disso, se o valor de γ é escolhido da forma

$$\gamma(\psi_0; \kappa, M) = \frac{1}{(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}d\psi_0(t)},$$

então o valor do salto total $\mu_0^{(1)}$ de $d\psi_1$ é igual a 1.

Teorema 3.2. *Se $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ são duas sequências de polinômios L-ortogonais associados às medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente, então elas satisfazem a fórmula de conexão:*

$$Q_n^{(1)}(z) = (1-\tau_n)\, Q_n^{(0)}(z) + \tau_n\, z\, Q_{n-1}^{(0)}(z),\ n \geq 1, \tag{3.10}$$

onde $\tau_n = \gamma^{-1}\dfrac{\sigma_{n,n}^{(1)}}{\sigma_{n-1,n-1}^{(0)}}$. Aqui, $\sigma_{n,m}^{(i)} = \displaystyle\int_a^b t^{-n+m} Q_n^{(i)}(t)\, d\psi_i(t)$.

Além disso, os coeficientes τ_n, $n \geq 1$, são tais que

$$0 < \tau_n < 1 \text{ se } \kappa \leq a_0 \quad \text{e} \quad \tau_n < 0 \text{ se } \kappa \geq b_0, \tag{3.11}$$

e satisfazem

$$\tau_{n+1}\alpha_{n+1}^{(0)} = \tau_n\alpha_{n+2}^{(1)}, \quad (1-\tau_{n+1})\beta_{n+1}^{(0)} = (1-\tau_n)\beta_{n+1}^{(1)}, \ \ n \geq 1, \tag{3.12}$$

com

$$\tau_1\gamma\mu_0^{(0)} = \mu_0^{(1)}\alpha_2^{(1)} \quad \text{e} \quad (1-\tau_1)\beta_1^{(0)} = \beta_1^{(1)}. \tag{3.13}$$

Demonstração: Para provar a relação (3.10), expressemos $Q_n^{(1)}$ como uma combinação linear do conjunto de polinômios $\{z^{n-j}Q_j^{(0)}(z)\}_{j=0}^{n}$ (ver Lema 3.2). Assim, sejam γ_j, $j = 0, \ldots, n$, tais que

$$Q_n^{(1)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \, z^{n-j} \, Q_j^{(0)}(z). \tag{3.14}$$

Multiplicando essa expressão por z^{-n+m} e integrando, obtemos

$$\int_a^b t^{-n+m} Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_0(t) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \int_a^b t^{-j+m} Q_j^{(0)}(t)\, d\psi_0(t). \tag{3.15}$$

Por (3.7), temos $\int_a^b t^{-n+m} Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_0(t) = \frac{1}{\gamma} \int_a^b t^{-n+m}(t-\kappa) Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_1(t)$ e, portanto, de (3.15),

$$\frac{1}{\gamma} \int_a^b t^{-n+m+1} Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_1(t) - \frac{\kappa}{\gamma} \int_a^b t^{-n+m} Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_1(t) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \int_a^b t^{-j+m} Q_j^{(0)}(t)\, d\psi_0(t).$$

Como

$$\int_a^b t^{-n+m+1} Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_1(t) = 0, \quad -1 \le m \le n-2$$

e

$$\int_a^b t^{-n+m} Q_n^{(1)}(t)\, d\psi_1(t) = 0, \quad 0 \le m \le n-1,$$

fazendo $m = 0, \ldots, n$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{0,0}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_{0,1}^{(0)} & \sigma_{1,1}^{(0)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_{0,2}^{(0)} & \sigma_{1,2}^{(0)} & \sigma_{2,2}^{(0)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{0,n-1}^{(0)} & \sigma_{1,n-1}^{(0)} & \sigma_{2,n-1}^{(0)} & \cdots & \sigma_{n-1,n-1}^{(0)} & 0 \\ \sigma_{0,n}^{(0)} & \sigma_{1,n}^{(0)} & \sigma_{2,n}^{(0)} & \cdots & \sigma_{n-1,n}^{(0)} & \sigma_{n,n}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma^{-1}\sigma_{n,n}^{(1)} \\ \gamma^{-1}\sigma_{n,n+1}^{(1)} - \kappa\gamma^{-1}\sigma_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que $\gamma_j = 0$, $j = 0, \ldots, n-2$, e que $\tau_n = \gamma_{n-1} = \gamma^{-1}\sigma_{n,n}^{(1)}/\sigma_{n-1,n-1}^{(0)}$.

Como $Q_n^{(1)}$ é um polinômio mônico, comparando-se os termos em z^n em ambos os lados de (3.14), verificamos que $\gamma_n + \tau_n = 1$, ou seja, $\gamma_n = 1 - \tau_n$, o que completa a prova de (3.10).

Observe que se $\gamma = [(M+1) \int_{a_0}^{b_0} (t-\kappa)^{-1}\, d\psi_0(t)]^{-1}$, então $\gamma > 0$ se $\kappa \le a_0$ e $\gamma < 0$ se $\kappa \ge b_0$. Portanto, como $\tau_n = \gamma^{-1}\, \sigma_{n,n}^{(1)}/\sigma_{n-1,n-1}^{(0)}$, temos que $\tau_n > 0$ se $\kappa \le a_0$ e $\tau_n < 0$ se $\kappa \ge b_0$.

Além disso, os suportes das medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$ estão contidos em $[0,\infty]$ e, portanto, os zeros de $Q_n^{(0)}$ e de $Q_n^{(1)}$ pertencem a $(0,\infty)$. Segue que $\operatorname{sign} Q_n^{(0)}(0) = \operatorname{sign} Q_n^{(1)}(0) = (-1)^n$ e, por (3.10), temos $\tau_n < 1$, concluindo a prova de (3.11).

Note que $\dfrac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \dfrac{\sigma^{(1)}_{n+1,n+1}\,\sigma^{(0)}_{n-1,n-1}}{\sigma^{(0)}_{n,n}\,\sigma^{(1)}_{n,n}} = \dfrac{\alpha^{(1)}_{n+2}}{\alpha^{(0)}_{n+1}}$, ou seja, $\tau_{n+1}\,\alpha^{(0)}_{n+1} = \tau_n\,\alpha^{(1)}_{n+2}$.

Além disso, $\tau_1 = \dfrac{\sigma^{(1)}_{1,1}}{\gamma\,\sigma^{(0)}_{0,0}} = \dfrac{\alpha_2^{(1)}\sigma^{(1)}_{0,0}}{\gamma\,\sigma^{(0)}_{0,0}} = \dfrac{\alpha_2^{(1)}\mu_0^{(1)}}{\gamma\,\mu_0^{(0)}}$.

Portanto, a primeira parte de (3.12) e a correspondente condição inicial estão provadas.

Resta mostrarmos a segunda parte de (3.12) e sua correspondente condição inicial.

Pela relação (3.10), temos

$$Q_n^{(1)}(0) = (1-\tau_n)\,Q_n^{(0)}(0), \;\; n \geq 0. \tag{3.16}$$

Fazendo $n=1$, obtemos $\beta_1^{(1)} = (1-\tau_1)\,\beta_1^{(0)}$.

Agora, por (3.8), temos que $Q^{(i)}_{n+1}(0) = -\beta^{(i)}_{n+1}\,Q_n^{(i)}(0)$, $i \in \{0,1\}$, $\;n \geq 1$. Assim, $Q^{(i)}_{n+1}(0) = (-1)^n \beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\cdots\beta^{(i)}_{n+1}$, $n \geq 0$. Por (3.16), segue que

$$\beta_1^{(1)}\beta_2^{(1)}\cdots\beta^{(1)}_{r+1} = (1-\tau_{r+1})\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)}\cdots\beta^{(0)}_{r+1}, \;\; r \geq 1. \tag{3.17}$$

Associando as equações obtidas de (3.17) para $r=n$ e $r=n+1$, obtemos a segunda parte de (3.12). □

Observe que, substituindo $z\,Q^{(0)}_{n-1}(z) = [(z-\beta^{(0)}_{n+1})Q_n^{(0)}(z) - Q^{(0)}_{n+1}(z)]/\alpha^{(0)}_{n+1}$, obtido da relação de recorrência de três termos de $Q^{(0)}_{n+1}$, em (3.10), obtemos

$$Q_n^{(1)}(z) = \left[(1-\tau_n) + \frac{\tau_{n+1}}{\alpha^{(1)}_{n+2}}\,(z-\beta^{(0)}_{n+1})\right] Q_n^{(0)}(z) - \frac{\tau_{n+1}}{\alpha^{(1)}_{n+2}}\,Q^{(0)}_{n+1}(z), \;\; n \geq 0, \tag{3.18}$$

onde tomamos convenientemente $\tau_0 = 0$.

Substituindo (3.10) e (3.18) na relação de recorrência de três termos para $\{Q_n^{(1)}\}$, obtemos a relação de recorrência de três termos para $\{Q_n^{(0)}\}$:

$$\begin{aligned} Q^{(0)}_{n+1}(z) &= \left[z - \frac{1-\tau_n}{1-\tau_{n+1}}\,\beta^{(1)}_{n+1}\right] Q_n^{(0)}(z) \\ &\quad - \left[\frac{\tau_n}{1-\tau_{n+1}}\,(\beta^{(1)}_{n+1} - \beta^{(0)}_n) + \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_{n+1}}\,\alpha^{(1)}_{n+1}\right] z\,Q^{(0)}_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Pela unicidade da relação de recorrência de três termos dos polinômios L-ortogonais, concluímos que

$$\frac{\tau_n}{1-\tau_{n+1}}\,(\beta_{n+1}^{(1)}-\beta_n^{(0)})+\frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_{n+1}}\,\alpha_{n+1}^{(1)}=\alpha_{n+1}^{(0)},$$

ou seja,

$$\tau_n\,\beta_n^{(0)}+(1-\tau_{n+1})\alpha_{n+1}^{(0)}=\tau_n\beta_{n+1}^{(1)}+(1-\tau_{n-1})\alpha_{n+1}^{(1)},\quad n\geq 1. \tag{3.19}$$

As propriedades de invariância de $[\tau_n\beta_{n+1}^{(0)}-(1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{(0)}](1-\tau_{n+1})/\tau_n$ e de $[\tau_n\beta_n^{(1)}-(1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{(1)}](1-\tau_{n-1})/\tau_n$ seguem como consequência de (3.19) e dos resultados apresentados no Teorema 3.2, como é mostrado no teorema a seguir.

Teorema 3.3.

$$[\tau_n\beta_{n+1}^{(0)}-(1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{(0)}]\frac{(1-\tau_{n+1})}{\tau_n}=[\tau_n\beta_n^{(1)}-(1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{(1)}]\frac{(1-\tau_{n-1})}{\tau_n}=\kappa, \tag{3.20}$$

para $n\geq 1$*, com* $\tau_0=0$*. Além disso,*

$$[\beta_1^{(0)}-\gamma\,\mu_0^{(0)}/\mu_0^{(1)}](1-\tau_1)=\kappa. \tag{3.21}$$

Demonstração: Seja $\Omega_n=[\tau_n\beta_{n+1}^{(0)}-(1-\tau_n)\,\alpha_{n+1}^{(0)}](1-\tau_{n+1})/\tau_n,\ n\geq 1$. Substituindo $(1-\tau_{n+1})\beta_{n+1}^{(0)}$ e $(1-\tau_{n+1})\alpha_{n+1}^{(0)}$ por suas expressões obtidas em (3.12) e (3.19), respectivamente, obtemos

$$\Omega_n=[\tau_n\beta_n^{(0)}-(1-\tau_{n-1})\,\alpha_{n+1}^{(1)}]\frac{(1-\tau_n)}{\tau_n},\ n\geq 1. \tag{3.22}$$

Assim, substituindo $(1-\tau_n)\beta_n^{(0)}$ por $(1-\tau_{n-1})\beta_n^{(1)}$, segue que

$$\Omega_n=[\tau_n\beta_n^{(1)}-(1-\tau_n)\,\alpha_{n+1}^{(1)}]\frac{(1-\tau_{n-1})}{\tau_n},\ n\geq 1.$$

Como, por (3.12), $\alpha_{n+1}^{(1)}=\dfrac{\tau_n\,\alpha_n^{(0)}}{\tau_{n-1}}$, de (3.22) segue que

$$\begin{aligned}\Omega_n &= [\tau_n\beta_n^{(0)}-(1-\tau_{n-1})\,\frac{\tau_n\,\alpha_n^{(0)}}{\tau_{n-1}}]\frac{(1-\tau_n)}{\tau_n}\\ &= [\tau_{n-1}\beta_n^{(0)}-(1-\tau_{n-1})\,\alpha_n^{(0)}]\frac{(1-\tau_n)}{\tau_{n-1}}.\end{aligned}$$

Isso mostra que $\Omega_n=\Omega_{n-1},\ n\geq 2$. Logo, para concluir a prova de (3.20), basta mostrarmos que $\Omega_1=[\tau_1\,\beta_1^{(1)}-(1-\tau_1)\,\alpha_2^{(1)}]/\tau_1=\kappa$.

Temos que $\Omega_1 = \beta_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(1)}/\tau_1$. Por (3.13) e pelo fato de $\alpha_2^{(1)} = \sigma_{1,1}^{(1)}/\sigma_{0,0}^{(1)} = (\mu_1^{(1)} - \beta_1^{(1)}\mu_0^{(1)})/\mu_0^{(1)}$, segue que

$$\Omega_1 = \beta_1^{(1)} + \frac{\mu_1^{(1)} - \beta_1^{(1)}\mu_0^{(1)}}{\mu_0^{(1)}} - \frac{\gamma\mu_0^{(0)}}{\mu_0^{(1)}} = \frac{\mu_1^{(1)} - \gamma\mu_0^{(0)}}{\mu_0^{(1)}}.$$

Desde que $\mu_1^{(1)} - \kappa\mu_0^{(1)} = \gamma\mu_0^{(0)}$, o resultado está provado.

Finalmente, observemos que, por (3.22), $\kappa = [\beta_1^{(0)} - \alpha_2^{(1)}/\tau_1](1-\tau_1) = [\beta_1^{(0)} - \gamma\,\mu_0^{(0)}/\mu_0^{(1)}](1-\tau_1)$, o que prova (3.21). □

Quando $\gamma = \gamma(\psi_0; \kappa, M)$, a equação (3.21) pode ser escrita na forma

$$[\beta_1^{(0)} - \gamma(\psi_0; \kappa, M)\,\mu_0^{(0)}](1-\tau_1) = \kappa.$$

3.3 Geração numérica e exemplos

Dada uma medida positiva forte $d\psi$, o conhecimento dos coeficientes $\{\alpha_n,\, \beta_n\}$ da relação de recorrência de três termos para os polinômios L-ortogonais associados é aplicável em muitos contextos tais como na geração numérica dos polinômios, seus zeros, etc. Por exemplo, os zeros dos polinômios L-ortogonais Q_n podem ser gerados como autovalores da matriz de Hessemberg (ver, por exemplo, Sri Ranga e van Assche [41]):

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} \alpha_2+\beta_1 & \alpha_3+\beta_2 & \cdots & \alpha_{n-1}+\beta_{n-2} & \alpha_n+\beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_2 & \alpha_3+\beta_2 & \cdots & \alpha_{n-1}+\beta_{n-2} & \alpha_n+\beta_{n-1} & \beta_n \\ 0 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1}+\beta_{n-2} & \alpha_n+\beta_{n-1} & \beta_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n+\beta_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Obtemos, como consequência dos Teoremas 3.2 e 3.3, técnicas simples para geração de qualquer um dos pares de coeficientes $\{\alpha_n^{(0)},\, \beta_n^{(0)}\}$ ou $\{\alpha_n^{(1)},\, \beta_n^{(1)}\}$, conhecendo-se o outro. Essas técnicas são descritas nos algoritmos a seguir.

Algoritmo 1. *Sejam $\{\alpha_n^{(1)}\}_{n=2}^{N+1}$ e $\{\beta_n^{(1)}\}_{n=1}^{N}$ conhecidos. Então, os coeficientes $\{\alpha_n^{(0)}\}_{n=2}^{N}$, $\{\beta_n^{(0)}\}_{n=1}^{N}$ satisfazem*

$$\alpha_n^{(0)} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\alpha_{n+1}^{(1)}, \quad n = 2, 3, \ldots, N, \qquad \beta_n^{(0)} = \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_n}\beta_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

onde $\{\tau_n\}_{n=1}^{N}$ *podem ser gerados por*

$$\tau_n = \frac{\alpha_{n+1}^{(1)}(1-\tau_{n-1})}{(\beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)})(1-\tau_{n-1}) - \kappa}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.23}$$

com $\tau_0 = 0$.

Algoritmo 2. *Seja* $d\psi_1$ *a medida dada por* (3.9) *tal que* $\gamma = \gamma(\psi_0; \kappa, M)$. *Se* $\gamma(\psi_0; \kappa, M)\, \mu_0^{(0)}$, $\{\alpha_n^{(0)}\}_{n=2}^{N}$ *e* $\{\beta_n^{(0)}\}_{n=1}^{N}$ *são conhecidos, então os coeficientes* $\{\alpha_n^{(1)}\}_{n=2}^{N+1}$ *e* $\{\beta_n^{(1)}\}_{n=1}^{N}$ *satisfazem*

$$\alpha_2^{(1)} = \tau_1\, \beta_1^{(0)} - \frac{\kappa\, \tau_1}{1-\tau_1}, \qquad \alpha_n^{(1)} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_{n-2}} \alpha_{n-1}^{(0)}, \quad n = 3, 4, \ldots, N+1,$$

$$\beta_1^{(1)} = (1-\tau_n)\beta_1^{(0)} \qquad \beta_n^{(1)} = \frac{1-\tau_n}{1-\tau_{n-1}} \beta_n^{(0)}, \quad n = 2, 3, \ldots, N,$$

onde $\tau_n = \alpha_{n+1}^{(0)}/(\alpha_{n+1}^{(0)} + \beta_{n+1}^{(0)})$, $n = 1, 2, \ldots, N$, *se* $\kappa = 0$ *e, se* $\kappa \neq 0$, $\{\tau_n\}_{n=1}^{N}$ *pode ser gerado por*

$$\tau_1 = 1 - \frac{\kappa}{\beta_1^{(0)} - \gamma(\psi_0; \kappa, M)\, \mu_0^{(0)}}, \qquad \tau_n = 1 - \frac{\kappa\, \tau_{n-1}}{(\beta_n^{(0)} + \alpha_n^{(0)})\tau_{n-1} - \alpha_n^{(0)}}, \qquad n = 2, 3, \ldots, N. \tag{3.24}$$

No Teorema 3.2 foi mostrado que $0 < \tau_n < 1$, $n \geq 1$, se $\kappa \leq a_0$. Entretanto, usando os resultados do Algoritmo 2, podemos observar que

$$\frac{\alpha_{n+1}^{(0)}}{\alpha_{n+1}^{(0)} + \beta_{n+1}^{(0)}} < \frac{\alpha_{n+1}^{(0)}}{\alpha_{n+1}^{(0)} + \beta_{n+1}^{(0)} - \kappa} < \tau_n < 1, \ n \geq 1, \quad \text{se} \quad 0 < \kappa \leq a_0 \ \text{ e } \ M \geq 0.$$

Para gerar os zeros do polinômio $Q_N^{(1)}$, é suficiente conhecer os coeficientes $\{\alpha_n^{(0)}\}_{n=2}^{N}$, $\{\beta_n^{(0)}\}_{n=1}^{N}$ e o coeficiente de conexão τ_N. Conhecendo a relação de recorrência de três termos de $\{Q_n^{(0)}\}$ e usando a relação (3.10), obtemos

$$Q_1^{(0)}(z) = (z - \beta_1^{(0)})Q_0^{(0)}(z),$$

$$Q_n^{(0)}(z) = (z - \beta_n^{(0)})Q_{n-1}^{(0)}(z) - \alpha_n^{(0)} z Q_{n-2}^{(0)}(z), \ n = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$Q_N^{(1)}(z) = (z - (1-\tau_N)\beta_N^{(0)})Q_{N-1}^{(0)}(z) - (1-\tau_n)\alpha_N^{(0)} z Q_{N-2}^{(0)}(z),$$

e, portanto, os zeros de $Q_N^{(1)}$ são os autovalores da matriz (ver [41])

$$\mathbf{H}_N^{(0)}(\kappa) = \begin{pmatrix} \alpha_2^{(0)} + \beta_1^{(0)} & \alpha_3^{(0)} + \beta_2^{(0)} & \cdots & \alpha_{N-1}^{(0)} + \beta_{N-2}^{(0)} & \tilde{\alpha}_N^{(0)} + \beta_{N-1}^{(0)} & \tilde{\beta}_N \\ \alpha_2^{(0)} & \alpha_3^{(0)} + \beta_2^{(0)} & \cdots & \alpha_{N-1}^{(0)} + \beta_{N-2}^{(0)} & \tilde{\alpha}_N^{(0)} + \beta_{N-1}^{(0)} & \tilde{\beta}_N^{(0)} \\ 0 & \alpha_3^{(0)} & \cdots & \alpha_{N-1}^{(0)} + \beta_{N-2}^{(0)} & \tilde{\alpha}_N^{(0)} + \beta_{N-1}^{(0)} & \tilde{\beta}_N^{(0)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N-1}^{(0)} & \tilde{\alpha}_N^{(0)} + \beta_{N-1}^{(0)} & \tilde{\beta}_N^{(0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\alpha}_N^{(0)} & \tilde{\beta}_N^{(0)} \end{pmatrix}.$$

onde $\tilde{\alpha}_N^{(0)} = (1-\tau_N)\alpha_N^{(0)}$ e $\tilde{\beta}_N^{(0)} = (1-\tau_N)\beta_N^{(0)}$.

Exemplo 1. Em [32], Pastro apresenta os polinômios ortogonais de Laurent associados à distribuição log-normal. Consideremos os polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(1)}\}$ relacionados à medida forte $d\psi_1$ dada pela distribuição log-normal modificada

$$d\psi_1(t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi}}\; t^{-1} e^{-[\ln(t)/(2\omega)]^2} dt,$$

definida em $[a, b] = [0, \infty]$. Segue, dos resultados de Pastro e de resultados apresentados em [11] e [12], que

$$Q_n^{(1)}(z) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{-r(n-r)} \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_q q^{r/2} z^{n-r}, \quad n \geq 1,$$

e

$$Q_{n+1}^{(1)}(z) = (z - q^{1/2}) Q_n^{(1)}(z) - q^{1/2}(q^{-n} - 1)\, z\, Q_{n-1}^{(1)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $Q_1^{(1)}(z) = z - q^{1/2}$. Aqui, $q = e^{-2\omega^2}$ e $\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_q$ são os coeficientes q-binomiais dados por

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_r (q;q)_{n-r}}, \quad r = 0, 1, \ldots, n.$$

Podemos usar o Algoritmo 1 para obter os coeficientes $\beta_n^{(0)}$ e $\alpha_n^{(0)}$ da relação de recorrência de três termos dos polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ associados à medida $d\psi_0$ dada por

$$d\psi_0(t) = \; t^{-1} e^{-[\ln(t)/(2\omega)]^2} (t - \kappa) dt$$

em $[a_0, b_0] = [0, \infty]$, onde $\kappa \leq 0$. Dessa forma,

$$\alpha_n^{(0)} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\, q^{1/2}(q^{-n} - 1), \quad n \geq 2, \qquad \beta_n^{(0)} = \frac{1 - \tau_{n-1}}{1 - \tau_n} q^{1/2}, \quad n \geq 1,$$

onde τ_n é gerado por

$$1 - \tau_n = \frac{q^{1/2}\,(1-\tau_{n-1}) - \kappa}{q^{1/2}q^{-n}\,(1-\tau_{n-1}) - \kappa}, \quad n \geq 1,$$

com $\tau_0 = 0$.

Exemplo 2. Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sejam $a_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha})^2$ e $b_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha})^2$. Para $\lambda \geq 0$, seja $d\psi_1$ a medida definida em $[a, b]$ por

$$d\psi_1(t) = \gamma t^{\lambda}(b-t)^{\lambda-1/2}(t-a)^{\lambda-1/2}dt, \tag{3.25}$$

onde a constante positiva γ pode ser arbitrária do ponto de vista dos polinômios L-ortogonais associados. Mas, se a escolha for igual a $[\int_a^b t^{\lambda}(b-t)^{\lambda-1/2}(t-a)^{\lambda-1/2}dt]^{-1}$, então $\mu_0^{(1)} = 1$.

Em Sri Ranga [40], foi demonstrado que os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios $\{Q_n^{(1)}\}$ relacionados à medida $d\psi_1$ são dados por

$$\beta_n^{(1)} = \beta, \quad \alpha_{n+1}^{(1)}/\alpha = \alpha_{n+1}(\lambda) = \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}, \ \ n \geq 1.$$

Aqui, devemos tomar $\alpha_2(0) = 2$.

Podemos usar o Algoritmo 1 para obter os coeficientes $\beta_n^{(0)}$ e $\alpha_n^{(0)}$ associados aos polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ relacionados à medida

$$d\psi_0(t) = t^{\lambda}(b-t)^{\lambda-1/2}(t-a)^{\lambda-1/2}|t-\kappa|dt \tag{3.26}$$

definida em $[a_0, b_0] = [a, b]$, onde κ é uma constante real que está fora do intervalo (a, b). Assim,

$$\alpha_n^{(0)} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\,\alpha_{n+1}(\lambda)\alpha, \ \ n \geq 2 \quad \text{e} \quad \beta_n^{(0)} = \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_n}\,\beta, \ \ n \geq 1,$$

onde a sequência $\{\tau_n\}$ pode ser gerada por

$$1 - \tau_n = \frac{\beta(1-\tau_{n-1}) - \kappa}{(\beta + \alpha\alpha_{n+1}(\lambda))(1-\tau_{n-1}) - \kappa}, \ \ n \geq 1,$$

com $\tau_0 = 0$.

Existem casos especiais em que τ_n é dado explicitamente. Quando $\kappa = 0$ e $\lambda \geq 0$, obtemos

$$\tau_n = \frac{\alpha\,\alpha_{n+1}(\lambda)}{\beta + \alpha\,\alpha_{n+1}(\lambda)}, \ \ n \geq 1,$$

e quando $\kappa = -\beta$ e $\lambda = 0$, considerando a expansão em fração contínua de $(1-\tau_n)(\beta+\alpha)/\beta$, obtemos

$$\tau_n = \frac{\alpha/\beta}{\sqrt{1+\alpha/\beta}} \frac{(1+\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n-1} + (1-\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n-1}}{(1+\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n} - (1-\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n}}, \quad n \geq 1.$$

Exemplo 3. Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sejam $a_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha})^2$ e $b_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha})^2$. Para $\lambda \geq 0$, consideremos a medida $d\psi_0$ definida em $[a_0, b_0]$ por

$$d\psi_0(t) = t^{\lambda}(b_0 - t)^{\lambda-1/2}(t-a_0)^{\lambda-1/2}dt. \tag{3.27}$$

Logo, os coeficientes da relação de recorrência de três termos da sequência de polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ relacionada a $d\psi_0$ são

$$\beta_n^{(0)} = \beta \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(0)}/\alpha = \alpha_{n+1}(\lambda) = \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}, \quad n \geq 1,$$

com $\alpha_2(0) = 2$.

Podemos usar o Algoritmo 2 para obter os coeficientes $\beta_n^{(1)}$ e $\alpha_n^{(1)}$ da relação de recorrência de três termos dos polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(1)}\}$ relacionados à medida $d\psi_1$ dada por

$$\int_a^b f(t)d\psi_1(t) = \frac{M}{M+1}f(\kappa) + \gamma(\lambda,\kappa,M)\int_{a_0}^{b_0} f(t)\frac{t^{\lambda}(b_0-t)^{\lambda-1/2}(t-a_0)^{\lambda-1/2}}{t-\kappa}dt, \tag{3.28}$$

com $\gamma(\lambda,\kappa,M) = \left[(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}t^{\lambda}(b_0-t)^{\lambda-1/2}(t-a_0)^{\lambda-1/2}dt\right]^{-1}$. Além disso, $M \geq 0$ e $(a,b) \subseteq (0,\infty)$ são tais que, quando $\kappa \leq 0$, então $[a,b] = [a_0,b_0]$ e $M = 0$, e, quando $\kappa > 0$, então

$$\begin{cases} [a,b] = [a_0,b_0], & \text{se } M = 0, \\ [a,b] \text{ é o menor intervalo contendo } [a_0,b_0] \text{ e } \kappa, & \text{se } M > 0. \end{cases}$$

Para garantir a existência da integral (3.28) devemos supor que κ não assume o valor a_0 ou o valor b_0 se $0 \leq \lambda \leq 1/2$.

Assim,

$$\alpha_2^{(1)} = \tau_1\,\beta - \frac{\kappa\,\tau_1}{1-\tau_1}, \qquad \alpha_{n+2}^{(1)} = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\,\alpha_{n+1}(\lambda)\,\alpha, \quad n \geq 1,$$

$$\beta_1^{(1)} = (1-\tau_1)\,\beta, \qquad \beta_{n+1}^{(1)} = \frac{1-\tau_{n+1}}{1-\tau_n}\,\beta, \quad n \geq 1,$$

onde $\tau_n = \alpha_{n+1}(\lambda)\,\alpha/[\beta + \alpha_{n+1}(\lambda)\,\alpha]$, $n \geq 1$, se $\kappa = 0$, e, se $\kappa \neq 0$, $\{\tau_n\}$ pode ser gerado por

$$\tau_1 = 1 - \frac{\kappa}{\beta - \gamma(\lambda,\kappa,M)\,\mu_0^{(0)}}, \quad \tau_{n+1} = 1 - \frac{\kappa\,\tau_n}{[\beta + \alpha_{n+1}(\lambda)\,\alpha]\tau_n - \alpha_{n+1}(\lambda)\,\alpha}, \quad n \geq 1.$$

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
$\kappa = 0.40,\ M = 0.0$	0.45087881...	0.29105458...	0.29105458...	0.29105458...
$\kappa = 0.40,\ M = 1.0$	0.78543285...	0.83697646...	0.85740885...	0.85884156...
$\kappa = 0.40,\ M = 2.0$	0.82165247...	0.84410811...	0.85792011...	0.85887617...
$M = 2.0,\ \kappa = 0.10$	0.95137610...	0.96549084...	0.96626473...	0.96627417...
$M = 2.0,\ \kappa = 0.45$	0.80238528...	0.82053350...	0.83820403...	0.83968495...
$M = 2.0,\ \kappa = 0.80$	0.68909400...	0.61861872...	0.66435849...	0.67933154...

Tabela 3.1: Valores de τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4 associados ao Exemplo 3 quando $\lambda = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ e para diferentes escolhas de κ e M.

Na Tabela 3.1 apresentamos os valores de τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4 para alguns valores de κ e M quando $\lambda = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 3$.

Observamos que, quando $\kappa = 0.4$ e $M = 0$, os valores de τ_n, $n = 2, 3, 4$, são invariantes. Mostramos que este fato é realmente verdadeiro quando $M = 0$. Temos que $\gamma(0,\kappa,M)\mu_0^{(0)} = (M+1)^{-1}\sqrt{(b_0-\kappa)}\sqrt{(a_0-\kappa)}$ e, portanto, quando $\lambda = 0$ e $M = 0$,

$$\tau_1 = \frac{4\alpha}{4\alpha + \beta - \kappa + \sqrt{(b_0-\kappa)}\sqrt{(a_0-\kappa)}}$$

e

$$\tau_{n+1} = \tau(\alpha,\beta,\kappa) = \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta - \kappa + \sqrt{(b_0-\kappa)}\sqrt{(a_0-\kappa)}}, \quad n \geq 1.$$

Consequentemente, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sejam $a_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha})^2$ e $b_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha})^2$. Se $\kappa \notin [a_0, b_0]$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ é a sequência de polinômios L-ortogonais relacionada à medida $d\psi_1$ dada por*

$$\int_a^b f(t)d\psi_1(t) = \int_{a_0}^{b_0} f(t)\frac{(b_0-t)^{-1/2}(t-a_0)^{-1/2}}{|t-\kappa|}dt,$$

então os coeficientes $\alpha_n^{(1)}$ e $\beta_n^{(1)}$ da relação de recorrência de três termos de $\{Q_n^{(1)}\}$ satis-

fazem

$$\beta_1^{(1)} = \frac{\beta + \sqrt{b_0-\kappa}\sqrt{a_0-\kappa}}{4\alpha+2\beta-\kappa}\,\beta, \qquad \alpha_2^{(1)} = \frac{4\sqrt{(b_0-\kappa)}\sqrt{(a_0-\kappa)}}{4\alpha+\beta-\kappa+\sqrt{(b_0-\kappa)}\sqrt{(a_0-\kappa)}}\,\alpha,$$

$$\beta_2^{(1)} = \frac{2(4\alpha+2\beta-\kappa)}{4\alpha+3\beta-\kappa+\sqrt{b_0-\kappa}\sqrt{a_0-\kappa}}\,\beta, \quad \alpha_3^{(1)} = \frac{4\alpha+2\beta-\kappa}{4\alpha+3\beta-\kappa+\sqrt{(b_0-\kappa)}\sqrt{(a_0-\kappa)}}\,\alpha,$$

e, para $n \geq 3$,

$$\beta_n^{(1)} = \beta, \qquad \alpha_{n+1}^{(1)} = \alpha.$$

3.4 Alguns resultados de monotonicidade

Dada uma medida positiva forte $d\psi_0$ cujo suporte é $[a_0, b_0] \subseteq [a, b]$, consideremos uma outra medida positiva forte $d\psi_1$ dada por (3.9) com $\gamma = \gamma(\psi_0, \kappa, M)$. Os polinômios L-ortogonais $\{Q_n^{(0)}\}$ e $\{Q_n^{(1)}\}$ são relacionados por (3.10) e os coeficientes τ_n dessa relação, que dependem de $d\psi_0$, são funções dos parâmetros κ e M. Consequentemente, também os polinômios $\{Q_n^{(1)}\}$ e seus zeros são funções de κ e de M. Nesta seção, provamos alguns resultados de monotonicidade dos zeros dos polinômios $\{Q_n^{(1)}\}$ com relação a esses parâmetros.

Teorema 3.5. *(i) Quando* $\kappa \geq b_0$, *então* τ_n *é uma função estritamente decrescente de* M, *para* $n \geq 1$;

(ii) Quando $0 < \kappa \leq a_0$, *então* τ_n *é uma função estritamente crescente de* M, *para* $n \geq 1$;

(iii) Quando $M > 0$ *é tal que* $\hat{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta_1^{(0)}/b_0 > 0$, *então* τ_n *é uma função estritamente decrescente de* κ, *para todo* $n \geq 1$, *quando* κ *varia no intervalo* $[\hat{\kappa}(M), \infty)$, *onde* $\hat{\kappa}(M) > b_0$ *satisfaz*

$$\hat{\kappa}(M) = \frac{M\beta_1^{(0)} + \hat{\sigma}_M\beta_2^{(0)} - \alpha_2^{(0)} + \sqrt{(M\beta_1^{(0)} + \hat{\sigma}_M\beta_2^{(0)} - \alpha_2^{(0)})^2 - 4M\hat{\sigma}_M\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)}}}{2\hat{\sigma}_M}. \tag{3.29}$$

(iv) Seja $\check{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta_1^{(0)}/a_0$. *Quando* $M > 0$, τ_n *é uma função estritamente decrescente de* κ, *para todo* $n \geq 1$, *quando* κ *varia no intervalo* $(0, \check{\kappa}(M)]$, *onde*

$0 < \breve{\kappa}(M) < a_0$ *satisfaz*

$$\breve{\kappa}(M) = \frac{M\beta_1^{(0)} + \breve{\sigma}_M\beta_2^{(0)} - \alpha_2^{(0)} - \sqrt{(M\beta_1^{(0)} + \breve{\sigma}_M\beta_2^{(0)} - \alpha_2^{(0)})^2 - 4M\breve{\sigma}_M\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)}}}{2\breve{\sigma}_M}. \tag{3.30}$$

Demonstração: (i) De (3.24), lembramos que

$$\tau_n = 1 - \frac{\kappa\,\tau_{n-1}}{(\beta_n^{(0)} + \alpha_n^{(0)})\tau_{n-1} - \alpha_n^{(0)}}, \quad n \geq 2,$$

onde $\tau_j = \tau_j(\psi_0, \kappa, M)$, $j \geq 1$. Portanto,

$$\frac{\partial\,\tau_n}{\partial M} = \frac{\kappa\,\alpha_n^{(0)}\dfrac{\partial\tau_{n-1}}{\partial M}}{[(\beta_n^{(0)} + \alpha_n^{(0)})\tau_{n-1} - \alpha_n^{(0)}]^2}.$$

Como $\kappa \geq b_0 > 0$ e $\alpha_n^{(0)} > 0$, temos que $\dfrac{\partial\tau_n}{\partial M} < 0$ para todo M, desde que $\dfrac{\partial\tau_{n-1}}{\partial M} < 0$ para todo M, ou seja, se τ_{n-1} for uma função estritamente decrescente de M, então τ_n também será uma função estritamente decrescente de M.

Assim, para concluirmos a prova de (i), basta mostrarmos que τ_1 é uma função estritamente decrescente de M. Como $\tau_1 = 1 - \kappa/[\beta_1^{(0)} - \gamma(\psi_0;\kappa,M)\,\mu_0^{(0)}]$, segue que

$$\frac{\partial\,\tau_1}{\partial M} = -\frac{\kappa\dfrac{\partial\gamma}{\partial M}(\psi_0;,\kappa,M)}{[\beta_1^{(0)} - \gamma(\psi_0;\kappa,M)\mu_0^{(0)}]^2},$$

onde $\gamma(\psi_0;\kappa,M) = [(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}d\psi_0(t)]^{-1}$.

Como $\kappa \geq b_0$, temos $\dfrac{\partial\gamma}{\partial M} > 0$ para todo M e, portanto, $\dfrac{\partial\tau_1}{\partial M} < 0$, para todo M.

(ii) Segue de maneira análoga ao item (i).

(iii) Primeiramente, vamos estudar a monotonicidade de τ_1 com relação ao parâmetro κ. Observe que

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial\kappa} = [\beta_1^{(0)} - \mu_0^{(0)}\gamma(\psi_0;\kappa,M)]^{-2}\left[-\beta_1^{(0)} + \mu_0^{(0)}\gamma(\psi_0;\kappa,M) - \mu_0^{(0)}\frac{\partial\gamma(\psi_0;\kappa,M)}{\partial\kappa}\kappa\right].$$

Logo, $\dfrac{\partial\tau_1}{\partial\kappa} < 0$ para $\kappa > b_0$ se, e somente se, $g(\kappa) < 0$ para $\kappa > b_0$, onde

$$g(\kappa) = -\beta_1^{(0)} + \mu_0^{(0)}\gamma(\psi_0;\kappa,M) - \mu_0^{(0)}\frac{\partial\gamma(\psi_0;\kappa,M)}{\partial\kappa}\kappa. \tag{3.31}$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma(\psi_0;\kappa,M)}{\partial\kappa} &= -\frac{1}{M+1}\left[\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}\,d\psi_0(t)\right]^{-2}\frac{\partial}{\partial\kappa}\left[\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}\,d\psi_0(t)\right]\\ &= -\frac{1}{M+1}\left[\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1}\,d\psi_0(t)\right]^{-2}\left[\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-2}\,d\psi_0(t)\right],\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde a segunda igualdade segue do Lema 3.4. Simples manipulações algébricas podem ser usadas para mostrar que

$$\int_{a_0}^{b_0} (t-\kappa)^{-2}\, d\psi_0(t) < \frac{1}{b_0-\kappa} \int_{a_0}^{b_0} (t-\kappa)^{-1}\, d\psi_0(t),$$

para $\kappa > b_0$ e, consequentemente, por (3.32), temos

$$\frac{\partial \gamma(\psi_0;\kappa, M)}{\partial \kappa} < (\kappa - b_0)^{-1} \gamma(\psi_0;\kappa, M).$$

Assim, por (3.31), temos

$$g(\kappa) < -\beta_1^{(0)} - \frac{b_0}{\kappa - b_0} \mu_0^{(0)} \gamma(\psi_0;\kappa, M),$$

para todo $\kappa > b_0$.

Como $\gamma(\psi_0;\kappa, M) = [(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(t-\kappa)^{-1} d\psi_0(t)]^{-1}$, do Lema 3.1 para $\psi(t) = \psi_0(t)$ segue que

$$\gamma(\psi_0;\kappa, M) = -\frac{1}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{(0)}}{\mu_0^{(0)}} \frac{1}{S^{(0)}(\kappa)} < -\frac{1}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{(0)}}{\mu_0^{(0)}} \frac{1}{S_2^{(0)}(\kappa)},$$

onde $S_2^{(0)}(z) = [(z-\beta_1^{(0)})(z-\beta_2^{(0)})]/[(z-\beta_1^{(0)})(z-\beta_2^{(0)}) - \alpha_2^{(0)}\, z]$.

Logo,

$$g(\kappa) < g_1(\kappa) = -\beta_1^{(0)} + \frac{b_0}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{(0)}}{\kappa - b_0} \frac{1}{S_2^{(0)}(\kappa)}, \tag{3.33}$$

para $\kappa \geq b_0$.

Devemos, então, buscar valores para $\kappa > b_0$ tais que $g_1(\kappa) < 0$.

Observemos que

$$\begin{aligned} g_1(\kappa) &= -\beta_1^{(0)} + \frac{b_0}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{(0)}}{\kappa - b_0} \left[\frac{(\kappa - \beta_1^{(0)})(\kappa - \beta_2^{(0)}) - \alpha_2^{(0)}\,\kappa}{(\kappa - \beta_1^{(0)})(\kappa - \beta_2^{(0)})} \right] \\ &= -\frac{b_0}{(M+1)(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{(0)})}\, \hat{p}_2(\kappa), \end{aligned}$$

onde $\hat{p}_2(\kappa) = \dfrac{\beta_1^{(0)}}{b_0}(M+1)(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{(0)}) - (\kappa - \beta_1^{(0)})(\kappa - \beta_2^{(0)}) + \alpha_2^{(0)}\,\kappa$.

Como $(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{(0)}) > 0$ para $\kappa > b_0$, devemos procurar os valores de $\kappa > b_0$ tais que $\hat{p}_2(\kappa) > 0$.

Podemos ver claramente que $\hat{p}_2$ é um polinômio de grau 2 cujo coeficiente do termo de maior grau é $\hat{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta_1^{(0)}/b_0 > 0$ e, além disso, $\hat{p}_2(0) = M\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)} > 0$. Vemos também que $\hat{p}_2(b_0) = -(b_0 - \beta_1^{(0)})(b_0 - \beta_2^{(0)}) + \alpha_2^{(0)} b_0 < 0$, o que segue imediatamente de resultados de sequências encadeadas vistos na Seção 3.1. Desta forma, podemos afirmar que $\hat{p}_2$ possui uma de suas raízes no interior do intervalo $[0, b_0]$. Como $\hat{p}_2$ tem grau par, podemos afirmar também que, para κ suficientemente grande, $\hat{p}_2(\kappa) > 0$. Assim, se $\hat{\kappa}(M)$ é a maior raiz de $\hat{p}_2$, temos $\hat{\kappa}(M) > b_0$ e, para $\kappa > \hat{\kappa}(M)$, tem-se $\hat{p}_2(\kappa) > 0$.

Logo, para $\kappa > \hat{\kappa}(M)$, temos que $\dfrac{\partial \tau_1}{\partial \kappa} < 0$, ou seja, τ_1 é uma função estritamente decrescente de κ quando κ varia no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$.

Para obter o valor de $\hat{\kappa}(M)$ dado em (3.29), basta observarmos que o polinômio $\hat{p}_2$ pode ser reescrito na forma $\hat{p}_2(\kappa) = \hat{\sigma}_M\, \kappa^2 + (-M\beta_1^{(0)} - \hat{\sigma}_M \beta_2^{(0)} + \alpha_2^{(0)})\, \kappa + M\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)}$.

Para completar a prova de (iii), vamos usar o Princípio de Indução Finita sobre n para mostrar que τ_n é função estritamente decrescente de κ para todo $n \geq 1$.

A prova para $n = 1$ já está feita. Assim, suponhamos que, para um certo $n > 1$, $\dfrac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \kappa} < 0$ para todo κ, ou seja, τ_{n-1} é função estritamente decrescente de κ. Derivando a expressão para τ_n, dada por (3.24), obtemos

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial \kappa} = -\frac{(\alpha_n^{(0)} + \beta_n^{(0)})\tau_{n-1}^2 - \tau_{n-1}\alpha_n^{(0)} - \kappa\, \alpha_n^{(0)}\, \dfrac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \kappa}}{[(\alpha_n^{(0)} + \beta_n^{(0)})\tau_{n-1} - \alpha_n^{(0)}]^2} < 0$$

para todo κ, visto que $\tau_{n-1} < 0$ para $\kappa > b_0$, como mostrado no Teorema 3.2.

Portanto, a prova da parte (iii) do teorema está completa.

A demonstração da parte (iv) é inteiramente análoga. Neste caso, devemos procurar para quais valores de $\kappa \in (0, a_0)$ tem-se $\dfrac{\partial \tau_1}{\partial \kappa} < 0$. Como no caso anterior, é possível mostrar que a solução do problema é encontrada obtendo-se os valores de $\kappa \in (0, a_0)$ para os quais

$$\check{p}_2(\kappa) = (\check{\sigma}_M + 1)(\kappa - a_0)(\kappa - \beta_2^{(0)}) - (\kappa - \beta_1^{(0)})(\kappa - \beta_2^{(0)}) + \alpha_2^{(0)}\, \kappa > 0.$$

$\square$

Note que os valores de $\hat{\kappa}(M)$ e de $\check{\kappa}(M)$ poderiam ser ainda melhores se, em (3.33), tivéssemos usado $S_3^{(0)}(\kappa)$ ao invés de $S_2^{(0)}(\kappa)$. Entretanto, isto tornaria as equações muito mais complicadas.

Para $i = 0, 1$, seja $z_{n,r}^{(i)}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, os zeros do n-ésimo polinômio L-ortogonal $Q_n^{(i)}$ com respeito à medida $d\psi_i$, dados em ordem crescente. Claramente, os zeros $z_{n,r}^{(1)}$, relacionados à medida $d\psi_1$, dependem dos parâmetros κ e M. Dessa forma, é interessante estudar a monotonicidade de $z_{n,r}^{(1)}$ com relação a κ e a M. Para isso, utilizamos os resultados do Lema 3.3 e, também, o comportamento monotônico dos parâmetros de conexão τ_n com relação a κ e M obtidos no Teorema 3.5.

Teorema 3.6. *Sejam $\hat{\kappa}(M)$ e $\check{\kappa}(M)$ dados no Teorema 3.5.*

(i) Quando $\kappa \geq b_0$, temos

$$z_{n,r}^{(0)} < z_{n,r}^{(1)} < z_{n-1,r}^{(0)}, \quad r = 1, \ldots, n-1, \quad \text{e} \quad z_{n,n}^{(0)} < z_{n,n}^{(1)};$$

(ii) Quando $\kappa \leq a_0$, temos

$$0 < z_{n,1}^{(1)} < z_{n,1}^{(0)} \quad \text{e} \quad z_{n-1,r-1}^{(0)} < z_{n,r}^{(1)} < z_{n,r}^{(0)}, \quad r = 2, \ldots, n;$$

(iii) Quando $\kappa \geq b_0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente crescente de M;

(iv) Quando $0 < \kappa \leq a_0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente decrescente de M;

(v) Quando $M = 0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente decrescente de κ;

(vi) Quando $M > -1 + b_0/\beta_1^{(0)}$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente crescente de κ para $\kappa \in [\hat{\kappa}(M), \infty)$;

(vii) Quando $M > 0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente crescente de κ para $\kappa \in (0, \check{\kappa}(M)]$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2, se $\kappa \geq b_0$ ($0 < \kappa \leq a_0$), então $\tau_n < 0$ ($0 < \tau_n < 1$) e a fórmula de conexão (3.10) para os polinômios $Q_n^{(1)}$ é exatamente do tipo (3.5). Logo, os itens (i) e (ii) acima seguem diretamente do Lema 3.3.

Quando $\kappa \geq b_0$ ($0 < \kappa \leq a_0$), segue, do Teorema 3.5, que o parâmetro τ_n é uma função estritamente decrescente (crescente) de M. Por outro lado, pelo Lema 3.3, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente decrescente de τ_n. Logo, $z_{n,r}^{(1)}$ é uma função estritamente crescente (decrescente) de M. Isto prova os itens (iii) e (iv) acima.

Para provar os itens (vi) e (vii) observe que, se $M > -1 + b_0/\beta_1^{(0)}$ ($M > 0$), então, pelo Teorema 3.5, τ_n é uma função estritamente decrescente de κ quando κ varia no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$ ($(0, \check{\kappa}(M)]$). Novamente, usando o resultado de monotonicidade para $z_{n,r}^{(1)}$ provado no Lema 3.3, obtemos o resultados enunciados em (vi) e (vii).

Finalmente, o item (v) segue como consequência do Teorema 3.1. $\square$

Corolário 3.1. *Sejam $z_{n,r}^{(i)}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, dados em ordem crescente, os zeros do n-ésimo polinômio L-ortogonal $Q_n^{(i)}$ $(i = 0, 1)$ com respeito à medida ψ_i $(i = 0, 1)$, dadas, respectivamente por (3.27) e (3.28).*

(i) Quando $\kappa \geq b_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha})^2$, temos

$$z_{n,r}^{(0)} < z_{n,r}^{(1)} < z_{n-1,r}^{(0)}, \quad r = 1, \ldots, n-1, \quad \text{e} \quad z_{n,n}^{(0)} < z_{n,n}^{(1)};$$

(ii) Quando $\kappa \leq a_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha})^2$, temos

$$0 < z_{n,1}^{(1)} < z_{n,1}^{(0)} \quad \text{e} \quad z_{n-1,r-1}^{(0)} < z_{n,r}^{(1)} < z_{n,r}^{(0)}, \quad r = 2, \ldots, n;$$

(iii) Quando $\kappa \geq b_0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente crescente de M;

(iv) Quando $0 < \kappa \leq a_0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente decrescente de M;

(v) Quando $M = 0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente decrescente de κ;

(vi) Quando $M > -1 + b_0/\beta_1^{(0)}$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente crescente de κ para $\kappa \in [\hat{\kappa}(M), \infty)$, onde

$$\hat{\kappa}(M) = \frac{M + \hat{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta + \sqrt{(M + \hat{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta)^2 - 4M\hat{\sigma}_M}}{2\hat{\sigma}_M/\beta},$$

$\hat{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta/b_0;$

(vii) Quando $M > 0$, temos que $z_{n,r}^{(1)}$ é função estritamente crescente de κ para $\kappa \in (0, \check{\kappa}(M)]$. Aqui,

$$\check{\kappa}(M) = \frac{M + \check{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta - \sqrt{(M + \check{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta)^2 - 4M\check{\sigma}_M}}{2\check{\sigma}_M/\beta},$$

$\check{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta/a_0.$

	$z_{4,1}^{(1)}$	$z_{4,2}^{(1)}$	$z_{4,3}^{(1)}$	$z_{4,4}^{(1)}$
$\kappa = 0.40,\ M = 0.0$	1.057868273...	1.682001373...	3.973171289...	8.122740733...
$\kappa = 0.40,\ M = 1.0$	0.400182864...	1.164670788...	3.108876324...	7.890903776...
$\kappa = 0.40,\ M = 2.0$	0.400091439...	1.164664204...	3.108845625...	7.890894026...
$M = 0.0,\ \kappa = 0.10$	1.061886240...	1.717355903...	4.043836188...	8.142018838...
$M = 0.0,\ \kappa = 0.45$	1.056958272...	1.674513092...	3.958894698...	8.118896358...
$M = 0.0,\ \kappa = 0.80$	1.045554153...	1.594182935...	3.818696396...	8.081878935...
$M = 2.0,\ \kappa = 0.10$	0.100000170...	1.149255986...	3.023261695...	7.862385442...
$M = 2.0,\ \kappa = 0.45$	0.450168298...	1.168531996...	3.126200966...	7.896358902...
$M = 2.0,\ \kappa = 0.80$	0.805004393...	1.230193905...	3.300341782...	7.947133748...

Tabela 3.2: Zeros $z_{4,i}^{(1)}$, $1 \leq i \leq 4$, do polinômio L-ortogonal $Q_4^{(1)}$ associado à medida positiva forte $d\psi_1$, dada por (3.28), para $\lambda = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, e para diferentes escolhas de κ e M.

Na Tabela 3.2, apresentamos os valores dos zeros do polinômio L-ortogonal $Q_4^{(1)}$ associado à medida positiva forte $d\psi_1$, dada por (3.28), para $\lambda = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, e para diferentes escolhas de κ e M. Os valores encontrados confirmam o comportamento monotônico dos zeros com relação aos parâmetros κ e M, como enunciado no Corolário 3.1.

Observe que, quando $M = 2$, $\lambda = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, tem-se $\breve{\kappa}(M) \approx 0.84$. Logo, as escolhas dos valores $\kappa = 0.1$, $\kappa = 0.45$ e $\kappa = 0.8$ foram feitas de modo a pertencerem ao intervalo $(0, \breve{\kappa}(M))$.

Capítulo 4

Funções q-hipergeométricas e polinômios ortogonais de Laurent

Neste capítulo, consideramos uma classe de polinômios de Laurent obtida a partir de funções q-hipergeométricas. Muitas informações a respeito de tais polinômios são explicitadas como sua relação de recorrência de três termos, seus momentos e, ainda, uma representação integral no círculo unitário para o funcional de momento. Fazendo uma escolha apropriada dos parâmetros, obtemos particularmente uma nova classe de polinômios de Szegő. Esses resultados foram publicados na revista Proceedings of the American Mathematical Society [13].

4.1 Resultados preliminares

Seja $\{Q_n\}$ uma sequência de polinômios dados pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})\, Q_n(z) - \alpha_{n+1}\, z\, Q_{n-1}(z), \; n \geq 1, \tag{4.1}$$

$Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z - \beta_1$.

Lema 4.1. *Sejam $\beta_1 \neq 0$ e $\alpha_{n+1} \neq 0$, $n \geq 1$. Dada uma sequência $\{h_n\}$ arbitrária de números complexos h_n (ou funções complexas $h_n(z)$), seja $\{G_n(h_n; z)\}$ a sequência de funções tais que $G_1(h_1; z) = \dfrac{\beta_1}{z + \beta_1 - h_1}$ e*

$$G_n(h_n; z) = \frac{\beta_1 \rfloor}{\lceil z + \beta_1} - \frac{\alpha_2 z \rfloor}{\lceil z + \beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_n z \rfloor}{\lceil z + \beta_n - h_n}, \quad n \geq 2.$$

Então,

$$G_n(h_n; z) - G_n(0; z) = \frac{\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n h_n z^{n-1}}{Q_n(z)\,[Q_n(z) - h_n Q_{n-1}(z)]}.$$

Demonstração: Consideremos a sequência de polinômios $\{R_n\}$ tais que

$$R_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})\, R_n(z) - \alpha_{n+1}\, z\, R_{n-1}(z), \;\; n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 0$ e $R_1(z) = \beta_1$. Segue, de resultados básicos de frações contínuas (ver, por exemplo, [24] e [29]), que

$$G_n(h_n; z) - G_n(0; z) = \frac{R_n(z) - h_n R_{n-1}(z)}{Q_n(z) - h_n Q_{n-1}(z)} - \frac{R_n(z)}{Q_n(z)}, \;\; n \geq 1.$$

Logo,

$$G_n(h_n; z) - G_n(0; z) = \frac{h_n[R_n(z)Q_{n-1}(z) - Q_n(z)R_{n-1}(z)]}{Q_n(z)[Q_n(z) - h_n Q_{n-1}(z)]}, \;\; n \geq 1.$$

Como $R_n(z)Q_{n-1}(z) - Q_n(z)R_{n-1}(z) = \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n\, z^{n-1}$, o resultado do lema segue. □

Como um caso particular do Lema 4.1, tomando $h_n = \alpha_{n+1} z/(z + \beta_{n+1})$, temos $G_{n+1}(0, z) = G_n(h_n, z)$ e, portanto,

$$G_{n+1}(0, z) - G_n(0, z) = \frac{\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{n+1}}{Q_n(z) Q_{n+1}(z)}\, z^n, \;\; n \geq 1. \tag{4.2}$$

Lema 4.2. *Se os coeficientes da relação de recorrência de três termos (4.1) satisfazem*

$$\beta_n \neq 0 \;\; e \;\; \alpha_{n+1} \neq 0, \;\; n \geq 1,$$

então existe um funcional de momento semi-definido $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M}[z^{-s} Q_n(z)] = \delta_{n,s} \rho_n, \;\; 0 \leq s \leq n, \;\; n \geq 1, \tag{4.3}$$

onde $\rho_n = (\alpha_2 \ldots \alpha_{n+1})/(\beta_2 \cdots \beta_{n+1})$. Além disso, os momentos associados $\mu_n = \mathcal{M}[z^n]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, são tais que $L_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{-j} z^j$ e $L_\infty(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j z^{-j}$, onde

$$L_0(z) - G_n(0; z) = \rho_n \frac{1}{Q_n(0)} z^n + O(z^{n+1}), \tag{4.4}$$

$$L_\infty(z) - G_n(0; z) = \rho_n Q_{n+1}(0) \frac{1}{z^{n+1}} + O(\frac{1}{z^{n+2}}). \tag{4.5}$$

Demonstração. Observemos, primeiramente, que $Q_n(0) = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n \neq 0$. Considerando as expansões em torno de $z = 0$ e $z = \infty$ de $G_n(0, z)$, segue, de (4.2), que existem séries de potências $L_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{-j} z^j$ e $L_\infty(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j z^{-j}$ tais que

$$\begin{aligned} L_0(z) - G_n(0; z) &= \frac{\beta_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}}{\beta_1^2\beta_2^2\cdots\beta_n^2\beta_{n+1}} z^n + O(z^{n+1}), \\ L_\infty(z) - G_n(0; z) &= \beta_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}\frac{1}{z^{n+1}} + O(\frac{1}{z^{n+2}}). \end{aligned}$$

Assim, chamando $\rho_n = \dfrac{\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}{\beta_2\cdots\beta_{n+1}}$, obtemos as equações (4.4) e (4.5).

Consideremos, agora, um funcional de momento $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}[z^j] = \mu_j$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Sejam $Q_n(z) = \sum_{i=0}^{n} q_{n,i} z^i$ e $R_n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} r_{n,i} z^i$. Mostremos que, com relação ao funcional de momento $\mathcal{M}$, os polinômios Q_n satisfazem a ortogonalidade em (4.3).

De (4.4), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_{-1} & \mu_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-n+2} & \mu_{-n+3} & \mu_{-n+4} & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+3} & \cdots & \mu_0 & 0 \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n,0} \\ q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ \vdots \\ q_{n,n-1} \\ q_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n,0} \\ r_{n,1} \\ r_{n,2} \\ \vdots \\ r_{n,n-1} \\ \rho_n \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

para todo $n \geq 1$. Por outro lado, pela equação (4.5), temos

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ 0 & 0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n,0} \\ q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ \vdots \\ q_{n,n-1} \\ q_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{n,0} \\ -r_{n,1} \\ -r_{n,2} \\ \vdots \\ -r_{n,n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

para todo $n \geq 1$.

Somando (4.6) e (4.7), obtemos

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n,0} \\ q_{n,1} \\ \vdots \\ q_{n,n-1} \\ q_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_n \end{pmatrix}.$$

Como este último sistema é equivalente a (4.3), segue o resultado do lema. □

4.2 Polinômios q-ortogonais de Laurent

A partir de agora, faremos a restrição $0 < q < 1$. Assim, para todo $b \in \mathbb{C}$, temos

$$\overline{q^b} = q^{\bar{b}} \text{ e } |q^b| = q^{\mathcal{R}e(b)}.$$

Dados $b, c, d \in \mathbb{C}$ e $c - b + 1 \neq 0, -1, -2, ...$, seja

$$F_n^{(b,c,d)}(z) = \frac{{}_2\Phi_1(q^{n+1}, q^{-b}; q^{c-b+n+2}; q, q^d z)}{{}_2\Phi_1(q^n, q^{-b}; q^{c-b+n+1}; q, q^d z)}, \ n \geq 0.$$

Pelo Lema 1.1, segue que

$$F_n^{(b,c,d)}(z) = \frac{1}{1 + g_{n+1}^{(b,c,d)} z - f_{n+2}^{(b,c,d)} z\, F_{n+1}^{(b,c,d)}(z)}, \quad n \geq 0,$$

onde

$$g_n^{(b,c,d)} = \frac{1 - q^{b+n}}{1 - q^{c-b+n}} q^{-b+d-1} \quad \text{e} \quad f_{n+1}^{(b,c,d)} = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{c+n+1})}{(1 - q^{c-b+n})(1 - q^{c-b+n+1})}\, q^{-b+d-1}, \ n \geq 1.$$

Por recorrência, obtemos a expansão em fração contínua

$$F_0^{(b,c,d)}(z) = \frac{1}{1 + g_1^{(b,c,d)} z} - \frac{f_2^{(b,c,d)} z}{1 + g_2^{(b,c,d)} z} - \cdots - \frac{f_n^{(b,c,d)} z}{1 + g_n^{(b,c,d)} z - f_{n+1} z F_n^{(b,c,d)}(z)}. \quad (4.8)$$

Supondo que $b \neq -1, -2, \ldots$, podemos reescrever (4.8) na forma

$$F_0^{(b,c,d)}(z) = \frac{\beta_1^{(b,c,d)}}{z + \beta_1^{(b,c,d)}} - \frac{\alpha_2^{(b,c,d)} z}{z + \beta_2^{(b,c,d)}} - \cdots - \frac{\alpha_n^{(b,c,d)} z}{z + \beta_n^{(b,c,d)}} - \frac{\alpha_{n+1}^{(b,c,d)} z F_n^{(b,c,d)}(z)}{\beta_{n+1}^{(b,c,d)}}, \quad (4.9)$$

onde $\beta_n^{(b,c,d)} = 1/g_n^{(b,c,d)}$ e $\alpha_{n+1}^{(b,c,d)} = f_{n+1}^{(b,c,d)}/(g_n^{(b,c,d)} g_{n+1}^{(b,c,d)})$, $n \geq 1$.

Teorema 4.1. *Sejam $c-b+1 \neq -1,-2,...$, $b \neq -1,-2,...$ e $\{Q_n^{(b,c,d)}\}$ a sequência de polinômios mônicos dados por*

$$Q_{n+1}^{(b,c,d)}(z) = (z+\beta_{n+1}^{(b,c,d)})Q_n^{(b,c,d)}(z) - \alpha_{n+1}^{(b,c,d)} z\, Q_{n-1}^{(b,c,d)}(z), \quad n \geq 1, \tag{4.10}$$

com $Q_0^{(b,c,d)}(z) = 1$ e $Q_1^{(b,c,d)}(z) = z + \beta_1^{(b,c,d)}$, onde

$$\beta_n^{(b,c,d)} = \frac{1-q^{c-b+n}}{1-q^{b+n}}\, q^{b-d+1}, \quad \alpha_{n+1}^{(b,c,d)} = \frac{(1-q^n)(1-q^{c+n+1})}{(1-q^{b+n})(1-q^{b+n+1})}\, q^{b-d+1}, \quad n \geq 1. \tag{4.11}$$

Então, os polinômios $Q_n^{(b,c,d)}(z)$ satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\mathcal{M}^{(b,c,d)}[z^{-s}Q_n^{(b,c,d)}(z)] = \delta_{n,s}\rho_n^{(b,c)}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1, \tag{4.12}$$

em relação ao funcional de momento semi-definido

$$\mathcal{M}^{(b,c,d)}[z^{-j}] = \frac{(q^{-b};q)_j}{(q^{c-b+2};q)_j}\, q^{jd}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.13}$$

Aqui, $\rho_n^{(b,c)} = \dfrac{\alpha_2^{(b,c,d)}\alpha_3^{(b,c,d)}\ldots\alpha_{n+1}^{(b,c,d)}}{\beta_2^{(b,c,d)}\beta_3^{(b,c,d)}\ldots\beta_{n+1}^{(b,c,d)}} = \dfrac{(q;q)_n(q^{c+2};q)_n}{(q^{b+1};q)_n(q^{c-b+2};q)_n}$.

Demonstração: Primeiramente, faremos a demonstração do teorema para $c-b+1 \neq 0,-1,-2,\ldots$ e $b \neq -1,-2,\ldots$. Com essas restrições, $\beta_n^{(b,c,d)} \neq 0$ e $\alpha_{n+1}^{(b,c,d)} \neq 0$, $n \geq 1$, e, portanto, pelo Lema 4.2, existe um funcional de momento semi-definido satisfazendo (4.12).

Para obter explicitamente os momentos $\mu_j^{(b,c,d)} = \mathcal{M}[z^j]$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, consideremos as funções

$$G_n^{(b,c,d)}(z) = \frac{\beta_1^{(b,c,d)}}{|\, z+\beta_1^{(b,c,d)}} - \frac{\alpha_2^{(b,c,d)} z}{|\, z+\beta_2^{(b,c,d)}} - \cdots - \frac{\alpha_n^{(b,c,d)} z}{|\, z+\beta_n^{(b,c,d)}}, \quad n \geq 1.$$

Usando a equação (4.9) e aplicando o Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} F_0^{(b,c,d)}(z) - G_n^{(b,c,d)}(z) &= \frac{\beta_1^{(b,c,d)}\alpha_2^{(b,c,d)}\ldots\alpha_{n+1}^{(b,c,d)} z^n F_n^{(b,c,d)}(z)}{Q_n^{(b,c,d)}(z)[\beta_{n+1}^{(b,c,d)}Q_n^{(b,c,d)}(z) - \alpha_{n+1}^{(b,c,d)} z F_n^{(b,c,d)}(z) Q_{n-1}^{(b,c,d)}(z)]} \\ &= \rho_n^{(b,c)} \frac{1}{Q_n^{(b,c,d)}(0)}\, z^n + O(z^{n+1}),\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Como $F_0^{(b,c,d)}(z) = {}_2\Phi_1(q, q^{-b}; q^{c-b+2}; q, q^d z)$, usamos a equação (4.4) para comparar os coeficientes das séries $L_0(z)$ e $F_0^{(b,c,d)}(z)$, obtendo

$$\mu_{-j}^{(b,c,d)} = \frac{(q^{-b};q)_j}{(q^{c-b+2};q)_j}\, q^{jd}, \quad j = 0, 1, 2 \ldots .$$

Assim, obtemos o resultado para os momentos positivos.

Observando que $g_n^{(c-b,c,c+2-d)} = \beta_n^{(b,c,d)}$ e $f_{n+1}^{(c-b,c,c+2-d)} = \alpha_{n+1}^{(b,c,d)}$, $n \geq 1$, e substituindo esses valores em (4.8), obtemos a fração contínua

$$F_0^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1}) =$$

$$\frac{1}{1+\beta_1^{(b,c,d)}z^{-1}} - \frac{\alpha_2^{(b,c,d)}z^{-1}}{1+\beta_2^{(b,c,d)}z^{-1}} - \cdots - \frac{\alpha_n^{(b,c,d)}z^{-1}}{1+\beta_n^{(b,c,d)}z^{-1} - \alpha_{n+1}z^{-1}F_n^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1})}.$$

Logo,

$$\frac{\beta_1^{(b,c,d)}}{z}F_0^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1}) =$$

$$\frac{\beta_1^{(b,c,d)}}{z+\beta_1^{(b,c,d)}} - \frac{\alpha_2^{(b,c,d)}z}{z+\beta_2^{(b,c,d)}} - \cdots - \frac{\alpha_n^{(b,c,d)}z}{z+\beta_n^{(b,c,d)}} - \frac{\alpha_{n+1}^{(b,c,d)}F_n^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1})}{1}.$$

Assim, usando novamente o Lema 4.1,

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_1^{(b,c,d)}}{z}F_0^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1}) &- G_n^{(b,c,d)}(z) \\
&= \frac{\beta_1^{(b,c,d)}\alpha_2^{(b,c,d)}\ldots\alpha_n^{(b,c,d)}\alpha_{n+1}^{(b,c,d)}z^{n-1}F_n^{(c-b,\,c,\,c+2-d)}(z^{-1})}{Q_n^{(b,c,d)}(z)[Q_n^{(b,c,d)}(z) - \alpha_{n+1}^{(b,c,d)}F_n^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1})Q_{n-1}^{(b,c,d)}(z)]} \\
&= \rho_n^{(b,c)}Q_{n+1}^{(b,c,d)}(0)\frac{1}{z^{n+1}} + O(\frac{1}{z^{n+2}}),
\end{aligned}$$

para $n \geq 1$.

Como $F_0^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1}) = {}_2\Phi_1(q, q^{-c+b}; q^{b+2}; q, q^{c+2-d}z^{-1})$, usaremos a equação (4.5) para comparar os coeficientes das séries $L_\infty(z)$ e $\frac{\beta_1^{(b,c,d)}}{z}F_0^{(c-b,c,c+2-d)}(z^{-1})$. Então,

$$\mu_j^{(b,c,d)} = \frac{(q^{-c+b-1};q)_j}{(q^{b+1};q)_j}\,q^{j(c+2-d)}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Como

$$\begin{aligned}
(q^{-c+b-1};q)_j &= (-1)^j q^{j(-c+b+(j-3)/2)}(q^{c-b-j+2};q)_j, \\
(q^{b+1};q)_j &= (-1)^j q^{j(b+(j+1)/2)}(q^{-b-j};q)_j
\end{aligned}$$

segue que

$$\mu_j^{(b,c,d)} = \frac{(q^{c-b-j+2};q)_j}{(q^{-b-j};q)_j}q^{-jd}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Usando a relação $(a;q)_n = (a;q)_\infty/(aq^n;q)_\infty$, válida para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, obtemos

$$\mu_j^{(b,c,d)} = \frac{(q^{-b};q)_{-j}}{(q^{c-b+2};q)_{-j}} q^{-jd}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

ou seja,

$$\mu_{-j}^{(b,c,d)} = \frac{(q^{-b};q)_j}{(q^{c-b+2};q)_j} q^{jd}, \quad j = -1, -2, -3, \ldots .$$

Portanto, concluímos a prova do teorema para $c - b + 1 \neq 0, -1, -2, \ldots$ e $b \neq -1, -2, \ldots$. Para estender o resultado para $c - b + 1 \neq -1, -2, \ldots$ e $b \neq -1, -2, \ldots$, precisamos provar o teorema para $c - b + 1 = 0$ e $b \neq -1, -2, \ldots$.

Se $b \neq -1, -2, \ldots$, então $\beta_1^{(b,b-1,d)} = 0$ e $\beta_{n+1}^{(b,b-1,d)} = \alpha_{n+1}^{(b,b-1,d)} \neq 0$ para $n \geq 1$. Portanto, da relação de recorrência (4.10), segue que $Q_n^{(b,b-1,d)}(z) = z^n$, $n \geq 0$, e

$$\mathcal{M}^{(b,b-1,d)}[z^{-s} Q_n^{(b,b-1,d)}(z)] = \mathcal{M}^{(b,b-1,d)}[z^{n-s}] = \frac{(q^{-b};q)_{-n+s}}{(q;q)_{-n+s}} q^{(-n+s)\,d}.$$

Observe que

$$\frac{(q^{-b};q)_{-n+s}}{(q;q)_{-n+s}} q^{(-n+s)\,d} = \frac{(q^{-n+s+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} (q^{-b};q)_{-n+s}\, q^{(-n+s)\,d} = 0, \quad \text{para} \quad s < n,$$

e, para $s = n$,

$$\frac{(q^{-b};q)_{-n+s}}{(q;q)_{-n+s}} q^{(-n+s)\,d} = \frac{(q^{-b};q)_0}{(q;q)_0} q^{(0)d} = 1.$$

Como $\rho_n^{(b,b-1)} = 1$, o resultado segue para $c - b + 1 = 0$ e $b \neq -1, -2, \ldots$, concluindo, assim, a prova do teorema. □

Segue, da relação de recorrência (4.10), que

$$Q_n^{(b,c,d)}(0) = \beta_1^{(b,c,d)} \beta_2^{(b,c,d)} \ldots \beta_n^{(b,c,d)} = \ldots \frac{(q^{c-b+1};q)_n}{(q^{b+1};q)_n} q^{n(b-d+1)}, \quad n \geq 1. \tag{4.14}$$

Teorema 4.2. *Para $b \neq -1, -2, \ldots$ e $c - b + 1 \neq -1, -2, \ldots$, temos*

i) $\lim_{n\to\infty} \beta_n^{(b,c,d)} = q^{b-d+1}$ *e* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(b,c,d)} = q^{b-d+1}$;

ii) $\lim_{n\to\infty} q^{-n(b-d+1)} Q_n^{(b,c,d)}(0) = (1-q)^{-c+2b} \dfrac{\Gamma_q(b+1)}{\Gamma_q(c-b+1)}$;

iii) $\lim_{n\to\infty} \rho_n^{(b,c)} = \dfrac{\Gamma_q(b+1)\,\Gamma_q(c-b+2)}{\Gamma_q(c+2)}$.

Demonstração:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{(b,c,d)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{c-b+n}}{1-q^{b+n}}\, q^{b-d+1} = q^{b-d+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{c-b+n}}{1-q^{b+n}} = q^{b-d+1},$$

pois $0 < q < 1$.

Analogamente prova-se que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(b,c,d)} = q^{b-d+1}$.

Para provar (ii), observe que, por (4.14) e pela equação (1.13),

$$\lim_{n\to\infty} q^{-n(b-d+1)} Q_n^{(b,c,d)}(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(q^{c-b+1};q)_n}{(q^{b+1};q)_n} = \frac{\Gamma_q(b+1)}{\Gamma_q(c-b+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_q(c-b+n+1)}{\Gamma_q(b+n+1)}.$$

Usando a definição da função q-gama dada em (1.12), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_q(c-b+n+1)}{\Gamma_q(b+n+1)} = (1-q)^{2b-c} \lim_{n\to\infty} \frac{(q^{c-b+n+1};q)_\infty}{(q^{b+n+1};q)_\infty} = (1-q)^{2b-c},$$

pois $0 < q < 1$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} q^{-n(b-d+1)} Q_n^{(b,c,d)}(0) = (1-q)^{-c+2b} \frac{\Gamma_q(b+1)}{\Gamma_q(c-b+1)}.$$

A parte (iii) pode ser provada analogamente à parte (ii). □

Teorema 4.3. *Se $b \neq -1,-2,...$ e $c-b+1 \neq -1,-2,...$, então os polinômios mônicos $Q_n^{(b,c,d)}(z)$, dados pela relação de recorrência (4.10), têm a representação explícita*

$$Q_n^{(b,c,d)}(z) = \frac{(q^{c-b+1};q)_n}{(q^{b+1};q)_n}\, q^{n(b-d+1)}\, {}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{b+1}; q^{-c+b-n}; q, q^{-c+d-1}z), \quad n \geq 0. \tag{4.15}$$

Demonstração: Consideremos os polinômios recíprocos

$$Q_n^{*\,(b,c,d)}(z) = z^n \overline{Q_n^{(b,c,d)}(1/\bar{z})} \;\text{ e }\; Q_n^{\bullet\,(b,c,d)}(z) = z^n Q_n^{(b,c,d)}(1/z), \quad n \geq 0.$$

Usando a relação de recorrência de três termos (4.10), podemos mostrar facilmente que esses polinômios satisfazem as relações

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{*(b,c,d)}(z) &= (1+\beta_{n+1}^{(\bar{b},\bar{c},\bar{d})} z) Q_n^{*(b,c,d)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\bar{b},\bar{c},\bar{d})} z\, Q_{n-1}^{*(b,c,d)}(z), \\ Q_{n+1}^{\bullet(b,c,d)}(z) &= (1+\beta_{n+1}^{(b,c,d)} z) Q_n^{\bullet(b,c,d)}(z) - \alpha_{n+1}^{(b,c,d)} z\, Q_{n-1}^{\bullet(b,c,d)}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \tag{4.16}$$

com $Q_0^{*(b,c,d)}(z) = Q_0^{\bullet(b,c,d)}(z) = 1$, $Q_1^{*(b,c,d)}(z) = 1 + \beta_1^{(\bar{b},\bar{c},\bar{d})} z$ e $Q_1^{\bullet(b,c,d)}(z) = 1 + \beta_1^{(b,c,d)} z$.

Fazendo as substituições $a \leftarrow -n-1$, $b \leftarrow \bar{c}-\bar{b}$, $c \leftarrow -\bar{b}-n-1$ e $d \leftarrow -\bar{d}+1$ no Lema 1.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
&{}_2\Phi_1(q^{-(n+1)}, q^{\bar{c}-\bar{b}+1}; q^{-\bar{b}-(n+1)}; q, q^{-d+1}z) \\
&\quad = \left(1 + \frac{1-q^{-(n+1)-\bar{c}+\bar{b}}}{1-q^{-\bar{b}-(n+1)}}\, q^{\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}+1}z\right) {}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{\bar{c}-\bar{b}+1}; q^{-\bar{b}-n}; q, q^{-\bar{d}+1}) \\
&\quad\quad - \frac{(1-q^{-n})(1-q^{-\bar{c}-(n+1)})}{(1-q^{-\bar{b}-(n+1)})(1-q^{-\bar{b}-n})}\, q^{\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}+1}z\; {}_2\Phi_1(q^{-(n-1)}, q^{\bar{c}-\bar{b}+1}; q^{-\bar{b}-(n-1)}; q, q^{-d+1}z).
\end{aligned}
$$

Observe que

$$\frac{1-q^{-(n+1)-\bar{c}+\bar{b}}}{1-q^{-\bar{b}-(n+1)}}\, q^{\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}+1} = \frac{1-q^{\bar{c}-\bar{b}+(n+1)}}{1-q^{\bar{b}+(n+1)}}\, q^{\bar{b}-\bar{d}+1} = \beta_{n+1}^{(\bar{b},\bar{c},\bar{d})}, \quad n \geq 0.$$

Analogamente,

$$\frac{(1-q^{-n})(1-q^{-\bar{c}-(n+1)})}{(1-q^{-\bar{b}-(n+1)})(1-q^{-\bar{b}-n})}\, q^{\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}+1} = \alpha_{n+1}^{(\bar{b},\bar{c},\bar{d})}, \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$Q_n^{*(b,c,d)}(z) = {}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{\bar{c}-\bar{b}+1}; q^{-\bar{b}-n}; q, q^{-\bar{d}+1}), \quad n \geq 1.$$

De maneira análoga, podemos mostrar também que

$$Q_n^{\bullet(b,c,d)}(z) = {}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{c-b+1}; q^{-b-n}; q, q^{-d+1}), \quad n \geq 1. \tag{4.17}$$

Como $Q_n^{(b,c,d)}(z) = z^n Q_n^{\bullet(b,c,d)}(1/z)$, das equações (4.17) e (1.18) segue a representação (4.15) para os polinômios $Q_n^{(b,c,d)}$. □

Observe que, aplicando-se a transformação (1.17) em $Q_n^{*(b,c,d)}$, por exemplo, obtemos também a relação

$$\frac{(q^{-\bar{d}+1}z; q)_\infty}{(q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z; q)_\infty}\, Q_n^{*(b,c,d)}(z) = {}_2\Phi_1(q^{-\bar{b}}, q^{-\bar{c}-n-1}; q^{-\bar{b}-n}; q, q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z), \quad n \geq 1, \tag{4.18}$$

válida para $|q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z| < 1$, ou seja, $|z| < q^{-\mathcal{R}e(c-d+2)}$.

Teorema 4.4. *Sejam $b \neq -1, -2, \ldots$, $c - b + 1 \neq -1, -2, \ldots$ e*

$$\sigma = \min\{q^{-\mathcal{R}e(c-d+2)},\ q^{-\mathcal{R}e(b-d+1)}\}.$$

Então, a sequência $\{Q_n^{*(b,c,d)}(z)\}$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $|z| < \sigma$ e

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^{*(b,c,d)}(z) = \frac{(q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z; q)_\infty}{(q^{\bar{b}-\bar{d}+1}z; q)_\infty}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$ {}_2\Phi_1(q^{-\bar{b}}, q^{-\bar{c}-n-1}; q^{-\bar{b}-n}; q, q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{-\bar{b}};q)_j (q^{-\bar{c}-n-1};q)_j}{(q;q)_j (q^{-\bar{b}-n};q)_j} q^{(\bar{c}-\bar{d}+2)j} z^j. $$

Agora, observe que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-q^{-\bar{c}-n-1+k}}{1-q^{-\bar{b}-n+k}} = q^{\bar{b}-\bar{c}-1}$ e, portanto,

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{(q^{-\bar{c}-n-1};q)_j}{(q^{-\bar{b}-n};q)_j} q^{(\bar{c}-\bar{d}+2)j} = q^{(\bar{c}-\bar{d}+2)j} q^{(\bar{b}-\bar{c}-1)j} = q^{(\bar{b}-\bar{d}+1)j}. $$

Logo,

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{(q^{-\bar{b}};q)_j (q^{-\bar{c}-n-1};q)_j}{(q;q)_j (q^{-\bar{b}-n};q)_j} q^{(\bar{c}-\bar{d}+2)j} z^j = \frac{(q^{-\bar{b}};q)_j}{(q;q)_j} q^{(\bar{b}-\bar{d}+1)j} z^j. $$

Aplicando o Teorema 1.4 e, em seguida, a equação (1.16), obtemos

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} {}_2\Phi_1(q^{-\bar{b}}, q^{-\bar{c}-n-1}; q^{-\bar{b}-n}; q, q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{-\bar{b}};q)_j}{(q;q)_j} q^{(\bar{b}-\bar{d}+1)j} z^j \\ &= {}_1\Phi_0(q^{-\bar{b}}; q, q^{\bar{b}-\bar{d}+1}z) = \frac{(q^{-\bar{d}+1}z;q)_\infty}{(q^{\bar{b}-\bar{d}+1}z;q)_\infty}, \end{aligned} $$

uniformemente para $|q^{\bar{b}-\bar{d}+1}z| < 1$, ou seja, para $|z| < q^{-\mathcal{R}e(b-d+1)}$.

Assim, por (4.18), segue que

$$ \lim_{n\to\infty} Q_n^{*(b,c,d)}(z) = \frac{(q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z;q)_\infty}{(q^{\bar{b}-\bar{d}+1}z;q)_\infty}, $$

uniformemente para $|z| < \sigma$. □

No teorema a seguir mostramos que, sob algumas condições, o funcional de momento dado por (4.13) possui uma representação integral no círculo unitário.

Teorema 4.5. *Se $c-b+2 \neq 0,-1,-2,...$, $b+1 \neq 0,-1,-2,...$ e se, além disso, tivermos*

$$ \mathcal{R}e(c+2) > \mathcal{R}e(d) > 0, $$

então os polinômios $Q_n^{(b,c,d)}(z)$ dados por (4.15) satisfazem a relação de ortogonalidade

$$ \frac{\tau^{(b,c)}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{-s} Q_n^{(b,c,d)}(z) \frac{(q^{-b+d}z;q)_\infty (q^{b-d+1}/z;q)_\infty}{(q^d z;q)_\infty (q^{c-d+2}/z;q)_\infty} \frac{1}{z}\, dz = \delta_{n,s}\, \rho_n^{(b,c)}, \quad 0 \le s \le n. \quad (4.19) $$

As constantes $\rho_n^{(b,c)}$ são as mesmas dadas no Teorema 4.1 e

$$ \tau^{(b,c)} = \frac{(q;q)_\infty (q^{c+2};q)_\infty}{(q^{c-b+2};q)_\infty (q^{b+1};q)_\infty}. $$

Demonstração: Consideremos a identidade de Ramanujan

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha;q)_n}{(\beta;q)_n} x^n = \frac{(q;q)_\infty\,(\frac{\beta}{\alpha};q)_\infty\,(\alpha x;q)_\infty\,(\frac{q}{\alpha x};q)_\infty}{(\beta;q)_\infty\,(\frac{q}{\alpha};q)_\infty(\frac{\beta}{\alpha x};q)_\infty\,(x;q)_\infty}, \tag{4.20}$$

válida para $|\beta\alpha^{-1}| < |x| < 1$. A prova desta identidade pode ser encontrada em Askey [4] e Ismail [21].

No nosso caso, $0 < q < 1$. Fazendo $x = q^d z$, $\alpha = q^{-b}$ e $\beta = q^{c-b+2}$, obtemos

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(q^{-b};q)_n}{(q^{c-b+2};q)_n} q^{nd} z^n = \tau^{(b,c)} \frac{(q^{-b+d}z;q)_\infty (q^{b-d+1}/z;q)_\infty}{(q^d z;q)_\infty (q^{c-d+2}/z;q)_\infty}, \tag{4.21}$$

para $|q^{c+2-d}| < |z| < |q^{-d}|$ onde, sob as hipóteses do teorema, $|q^{c+2-d}| < 1$ e $|q^{-d}| > 1$.

Assim, pelo Teorema 1.3, temos que

$$\frac{(q^{-b};q)_j}{(q^{c-b+2};q)_j} q^{jd} = \frac{\tau^{(b,c)}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{-j-1} \frac{(q^{-b+d}z;q)_\infty (q^{b-d+1}/z;q)_\infty}{(q^d z;q)_\infty (q^{c-d+2}/z;q)_\infty}\, dz, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Portanto, o funcional de momento apresentado no Teorema 4.1 satisfaz

$$\mathcal{M}^{(b,c,d)}[z^{-j}] = \frac{\tau^{(b,c)}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{-j-1} \frac{(q^{-b+d}z;q)_\infty (q^{b-d+1}/z;q)_\infty}{(q^d z;q)_\infty (q^{c-d+2}/z;q)_\infty}\, dz,$$

para $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Como $\mathcal{M}^{(b,c,d)}[z^{-j} Q_n^{(b,c,d)}(z)] = \delta_{n,s}\, \rho_n^{(b,c)}$, $0 \le s \le n$, o teorema está provado. $\square$

Como um caso particular, fazendo $b = 0$ e $c + 2 \neq 0, -1, -2, \ldots$, temos $\beta_1^{(0,c,d)} = \dfrac{1 - q^{c+1}}{1 - q}\, q^{-d+1}$ e

$$\beta_{n+1}^{(0,c,d)} = \alpha_{n+1}^{(0,c,d)} = \frac{1 - q^{c+n+1}}{1 - q^{n+1}}\, q^{-d+1}, \quad n \ge 1.$$

Além disso, $\mu_0^{(0,c,d)} = 1$, $\mu_j^{(0,c,d)} = 0$, $j = 0, -1, -2, \ldots$ e, usando a relação $(a;q)_{-n} = \dfrac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n}$, $n > 0$, obtemos

$$\mu_j^{(0,c,d)} = \frac{(q^{-c-1};q)_j}{(q;q)_j}\, q^{j(c+2-d)}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Corolário 4.1. *Se $\mathcal{R}e(c+2) > \mathcal{R}e(d) > 0$, então a sequência de polinômios $\{\mathcal{Q}_n^{(0,c,d)}\}$ dados por*

$$\mathcal{Q}_n^{(0,c,d)}(z) = \frac{(q^{c+1};q)_n}{(q;q)_n}\, q^{n(-d+1)}\, {}_2\Phi_1(q^{-n}, q; q^{-c-n}; q, q^{-c+d-1}z), \quad n \ge 1,$$

que satisfazem a relação de recorrência

$$\mathcal{Q}_{n+1}^{(0,c,d)}(z) = (z + \frac{1-q^{c+n+1}}{1-q^{n+1}}\, q^{-d+1})\, \mathcal{Q}_n^{(0,c,d)}(z) - \frac{1-q^{c+n+1}}{1-q^{n+1}}\, q^{-d+1}\, z\mathcal{Q}_{n-1}^{(0,c,d)}(z),$$

para $n \geq 1$*, com* $\mathcal{Q}_0^{(0,c,d)}(z) = 1$ *e* $\mathcal{Q}_1^{(0,c,d)}(z) = z + \dfrac{1-q^{c+1}}{1-q}\, q^{-d+1}$*, satisfazem a propriedade de ortogonalidade*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} z^{-s}\mathcal{Q}_n^{(0,c,d)}(z)\frac{(q^{-d+1}/z;q)_\infty}{(q^{c-d+2}/z;q)_\infty}\,\frac{1}{z}\,dz = \delta_{n,s}, \quad 0 \leq s \leq n.$$

Além disso, $\{\mathcal{Q}_n^{*(0,c,d)}(z)\}$ *converge uniformemente em todo subconjunto compacto do disco* $|z| < \min\{q^{-\mathcal{R}e(c-d+2)},\, q^{-\mathcal{R}e(-d+1)}\}$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n^{*(0,c,d)}(z) = \frac{(q^{\bar{c}-\bar{d}+2}z;q)_\infty}{(q^{-\bar{d}+1}z;q)_\infty}.$$

Obtemos outro caso particular fazendo $c = b$ e $b+1 \neq 0, -1, -2, \ldots$. Neste caso, temos

$$\beta_n^{(b,b,d)} = \alpha_{n+1}^{(b,b,d)} = \frac{1-q^n}{1-q^{b+n}}\, q^{b-d+1}, \quad n \geq 1.$$

Além disso,

$$\mu_{-j}^{(b,b,d)} = \frac{(q^{-b};q)_j}{(q^2;q)_j}\, q^{jd}, \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

e o seguinte corolário pode ser enunciado.

Corolário 4.2. *Se* $b+1 \neq 0$ *e* $\mathcal{R}e(b+2) > \mathcal{R}e(d) > 0$*, então a sequência de polinômios* $\{\mathcal{Q}_n^{(b,b,d)}\}$ *dados por*

$$\mathcal{Q}_n^{(b,b,d)}(z) = \frac{(q;q)_n}{(q^{b+1};q)_n}\, q^{n(b-d+1)} \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{b+1};q)_j}{(q;q)_j} q^{-j(b-d+1)} z^j, \quad n \geq 1,$$

satisfazem a propriedade de ortogonalidade

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1-q)}{(1-q^{b+1})}\int_{\mathcal{C}} z^{-s}\mathcal{Q}_n^{(b,b,d)}(z)\frac{(q^{-b+d}z;q)_\infty}{(q^d z;q)_\infty}\,\frac{z-q^{b-d+1}}{z^2}\,dz = \delta_{n,s}, \quad 0 \leq s \leq n.$$

Além disso, $\{\mathcal{Q}_n^{*(b,b,d)}(z)\}$ *converge uniformemente em todo subconjunto compacto do disco* $|z| < q^{-\mathcal{R}e(b-d+1)}$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n^{*(b,b,d)}(z) = \frac{1}{1-q^{\bar{b}-\bar{d}+1}z}.$$

4.3 Polinômios q-Szegő

Observando a propriedade de ortogonalidade (4.19), podemos ver facilmente que, se além das restrições $b \neq -1, -2, \ldots$, $c - b + 1 \neq -1, -2, \ldots$, $\mathcal{R}e(c+2) > \mathcal{R}e(d) > 0$, tivermos $\overline{-b+d} = b - d + 1$ e $\bar{d} = c + 2 - d$, então o funcional de momento $\mathcal{M}^{(b,c,d)}$ é positivo-definido. Logo, se

$$c = b + \bar{b} - 1, \quad d + \bar{d} = b + \bar{b} + 1 \;\text{ e }\; \mathcal{R}e(b) > -1/2,$$

os polinômios $Q_n^{(b,c,d)}$ são os polinômios de Szegő associados ao funcional de momento $\mathcal{M}^{(b,c,d)}$.

Assim, para

$$b = \lambda - i\eta, \quad c = 2\lambda - 1 \;\text{ e }\; d = \frac{1}{2} + \lambda + i\phi,$$

temos que se $\lambda > -1/2$, nosso caso especial da identidade de Ramanujan (4.20) torna-se

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(q^{-\lambda+i\eta};q)_n}{(q^{\lambda+1+i\eta};q)_n} q^{n(\frac{1}{2}+\lambda+i\phi)} z^n = \tilde{\tau}^{(\lambda,\eta)} \frac{(q^{\frac{1}{2}+i(\eta+\phi)}z;q)_\infty (q^{\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)}/z;q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}+\lambda+i\phi}z;q)_\infty (q^{\frac{1}{2}+\lambda-i\phi}/z;q)_\infty},$$

válida para $q^{\lambda+1/2} < |z| < q^{-\lambda-1/2}$, onde

$$\tilde{\tau}^{(\lambda,\eta)} = \frac{(q;q)_\infty \, (q^{2\lambda+1};q)_\infty}{(q^{1+\lambda+i\eta};q)_\infty \, (q^{1+\lambda-i\eta};q)_\infty}.$$

Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(\lambda-i\eta,\, 2\lambda-1,\, \lambda+i\phi+1/2)}[z^{-j}] &= \frac{(q^{-\lambda+i\eta};q)_j}{(q^{\lambda+1+i\eta};q)_j} q^{j(\frac{1}{2}+\lambda+i\phi)} \\
&= \int_{\mathcal{C}} z^{-j}\, d\mu^{(\lambda,\eta,\phi)}(z) \;=\; \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} \omega^{(\lambda,\eta,\phi)}(\theta)\, d\theta,
\end{aligned}$$

para $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, onde $\omega^{(\lambda,\eta,\phi)}(\theta) d\theta = d\mu^{(\lambda,\eta,\phi)}(e^{i\theta})$, com

$$\frac{d\mu^{(\lambda,\eta,\phi)}(e^{i\theta})}{dz} = \frac{\tilde{\tau}^{(\lambda,\eta)}}{2\pi i} \frac{1}{z} \frac{(q^{\frac{1}{2}+i(\eta+\phi)}z;q)_\infty (q^{\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)}/z;q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}+\lambda+i\phi}z;q)_\infty (q^{\frac{1}{2}+\lambda-i\phi}/z;q)_\infty}$$

e

$$\omega^{(\lambda,\eta,\phi)}(\theta) = \frac{\tilde{\tau}^{(\lambda,\eta)}}{2\pi} \frac{(q^{\frac{1}{2}+i(\eta+\phi)}e^{i\theta};q)_\infty (q^{\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)}e^{-i\theta};q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}+\lambda+i\phi}e^{i\theta};q)_\infty (q^{\frac{1}{2}+\lambda-i\phi}e^{-i\theta};q)_\infty}. \tag{4.22}$$

Assim, vemos que $\omega^{(\lambda,\eta,\phi)}(\theta)$ é uma função peso positiva em $[0, 2\pi]$, como já era esperado.

Usando a notação $S_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(z) = Q_n^{(\lambda-i\eta,\,2\lambda-1,\,\frac{1}{2}+\lambda+i\phi)}(z)$, podemos escrever

$$S_{n+1}^{(\lambda,\eta,\phi)}(z) = \left(z + \frac{1-q^{\lambda+i\eta+n}}{1-q^{\lambda-i\eta+n+1}}\, q^{\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)} \right) S_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(z)$$

$$- \frac{(1-q^n)(1-q^{2\lambda+n})}{(1-q^{\lambda-i\eta+n})(1-q^{\lambda-i\eta+n+1})}\, q^{\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)}\, z\, S_{n-1}^{(\lambda,\eta,\phi)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $S_0^{(\lambda,\eta,\phi)}(z) = 1$ e $S_1^{(\lambda,\eta,\phi)} = z + \dfrac{1-q^{\lambda+i\eta}}{1-q^{\lambda-i\eta+1}}\, q^{\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)}$.

Portanto, usando os Teoremas 4.3 e 4.5, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4.6. *Se $\lambda, \eta, \phi \in \mathbb{R}$ e $\lambda > -1/2$, então os polinômios*

$$S_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(z) = \frac{(q^{\lambda+i\eta};q)_n q^{n[\frac{1}{2}-i(\eta+\phi)]}}{(q^{\lambda+1-i\eta};q)_n}\, {}_2\Phi_1(q^{-n}, q^{\lambda+1-i\eta}; q^{-\lambda-n+1-i\eta}; q, q^{\frac{1}{2}-\lambda+i\phi}z)$$

são os polinômios de Szegő mônicos satisfazendo

$$\int_0^{2\pi} \overline{S_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(e^{i\theta})}\, S_m^{(\lambda,\eta,\phi)}(e^{i\theta})\, \omega^{(\lambda,\eta,\phi)}(\theta)\, d\theta = [\kappa_n^{(\lambda,\eta)}]^{-2} \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

com relação à função peso $\omega^{(\lambda,\eta,\phi)}$ dada por (4.22).

Aqui, $[\kappa_n^{(\lambda,\eta)}]^{-2} = \rho_n^{(\lambda-i\eta,2\lambda-1)} = \dfrac{(q;q)_n(q^{2\lambda+1};q)_n}{(q^{\lambda+1+i\eta};q)_n(q^{\lambda+1-i\eta};q)_n}$.

Condiderações Finais

Como já dissemos, nossos resultados obtidos neste trabalho foram publicados em importantes revistas matemáticas, o que nos deixa certos de sua relevância para a teoria de Polinômios Ortogonais e Similares. Portanto, é de nosso interesse dar continuidade a esses estudos.

Nossos estudos sobre os polinômios L-ortogonais associados a medidas relacionadas levou-nos a obtenção de muitos resultados interessantes no Capítulo 3 como, por exemplo, o Teorema 3.6, que fornece o comportamento monotônico dos zeros dos polinômios $Q_n^{(1)}$ com relação aos parâmetros κ e M que aparecem na relação (3.9) entre as medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$. É natural, portanto, que tenhamos o interesse de estudar quais destes resultados poderiam ser estendidos para polinômios L-ortogonais associados a duas medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$ definidas em $[a, b]$ e relacionadas por

$$(t^2 + \sigma t + \kappa)\, d\psi_1(t) = \gamma\, d\psi_0(t),$$

onde $(t^2 + \sigma\, t + \kappa)/\gamma$ não se anula para $t \in (a, b)$. É fácil verificar que esses polinômios estão conectados por uma fórmula de conexão similar a (3.10) e isto, certamente, nos deixa otimistas de que muitos dos nossos resultados possam ser generalizados para esse caso.

Dentre os resultados obtidos no Capítulo 4 sobre polinômios ortogonais de Laurent dados por funções q-hipergeométricas, podemos destacar o Teorema 4.5, no qual mostramos que o funcional de momento $\mathcal{M}$, com relação ao qual esses polinômios são ortogonais, pode ser representado através de uma integral de Stieltjes no círculo unitário. Como consequência, pudemos mostrar que, sob certas restrições sobre os parâmetros b, c e d, o funcional de momento $\mathcal{M}$ é positivo-definido e, com isso, obtivemos uma nova classe de polinômios de Szegő.

Como definido por Jones, Njåstad e Thron [22], para todo ρ tal que $|\rho| = 1$, o polinômio

$$B_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(\rho; z) = \frac{S_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(z) + \rho\, S_n^{*(\lambda,\eta,\phi)}(z)}{1 + \rho\, \overline{S_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(0)}} \tag{23}$$

é um polinômio paraortogonal de grau n. Os zeros desses polinômios são todos simples e pertencem ao círculo unitário $\mathcal{C}$, diferentemente dos polinômios de Szegő, que possuem zeros não necessariamente simples, todos localizados no interior de $\mathcal{C}$ (ver Simon [34]).

Com relação aos polinômios paraortogonais dados em (23), ficam as seguintes questões em aberto:

- Existe uma representação explicita para $B_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(\rho; z)$ em termos de funções q-hipergeométricas?
- Qual o comportamento dos zeros de $B_n^{(\lambda,\eta,\phi)}(\rho; z)$ quando variamos os parâmetros λ e η?

Além desses problemas, recentemente concentramos nossa atenção em caracterizar os polinômios ortogonais no círculo unitário através de sequências encadeadas. Tal estudo já está nos rendendo muitos frutos e acreditamos que este assunto será de interesse para muitos pesquisadores na área.

Como já dissemos anteriormente, os polinômios ortogonais no círculo unitário tem sido extensivamente estudados nos últimos anos e, como podemos observar, ainda existe muito a ser feito nesta linha de pesquisa.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, E. X. L. **Sobre polinômios similares aos ortogonais associados a uma classe especial de distribuições**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1995.

[2] ANDRADE, E. X. L.; COSTA, M. S.; SRI RANGA, A. L-orthogonal polynomials associated with related measures. **Applied Numerical Mathematics** 60, p. 1041-1052, 2010.

[3] ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special Functions**. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2000.

[4] ASKEY, R. Ramanujan's extensions of the gamma and beta functions. **American Mathematical Monthly** 87, p. 346-359, 1980.

[5] BARTLE, R.G. **The Elements of integration and Lebesgue measure**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[6] BRACCIALI, C. F.; DIMITROV, D. K.; SRI RANGA, A. Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials. **Journal of Computational and Applied Mathematics** 143, p. 95-106, 2002.

[7] BRACCIALI, C. F.; LAMBLÉM, R. L.; MCCABE, J. H.; SRI RANGA, A. A characterization of L-orthogonal polynomials from three term recurrence relations. **Acta Applicandae Mathematicae** 113, p. 1-16, 2011.

[8] BULTHEEL, A.; DÍAZ-MENDOZA, C.; GONZÁLEZ-VERA, P.; ORIVE, R. Orthogonal Laurent polynomials and quadrature formulas for unbounded intervals: I. Gauss-Type Formulas. **The Rocky Moutain Journal of Mathematics** 33, p. 585-608, 2003.

[9] CHIHARA, T. S. **An introduction to Orthogonal Polynomials**. Mathematics and its Applications Series, New York: Gordon and Breach, New York, 1978.

[10] CHURCHILL, R. V. **Variáveis complexas e suas aplicações**. Tradução: Tadao Yoshioka, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

[11] COMMON, A. K.; McCABE, J. H. The symmetric strong moment problem. **Journal of Computational and Applied Mathematics** 67, p. 327-341, 1996.

[12] COOPER, S. C.; JONES, W. B.; THRON, W. J. Asymptotics of orthogonal L-polynomials for log-normal distributions. **Constructive Approximation** 8, p. 59-67, 1992.

[13] COSTA, M.S.; GODOY, E.; LAMBLÉM, R.L.; SRI RANGA, A. Basic hypergeometric functions and orthogonal Laurent polynomials. **Proceedings of the American Mathematical Society** 140, p. 2075-2089, 2012.

[14] DARUIS, L.; NJÅSTAD O., VAN ASSCHE, W. Szegő quadrature and frequency analysis. **Electronic Transactions on Numerical Analysis** 19, p. 48-57, 2005.

[15] DIMITROV, D. K., MELLO, M. V., RAFAELI, F. R. Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev-type orthogonal polynomials, **Applied Numerical Mathematics** 60, p. 236-276, 2010.

[16] DIMITROV, D. K., SRI RANGA, A. Monotonicity of zeros of orthogonal Laurent polynomials, **Methods and Applications of Analysis** 12, p. 1-12, 2002.

[17] FERRAR, W. L. **Integral calculus**. Oxford Univ. Press, London, 1958.

[18] GASPER, G.; RAHMAN, M. **Basic hypergeometric series**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[19] GOLINSKII, L.; ZLATOS, A. Coefficients of orthogonal polynomials on the unit circle and higher-order Szegö theorems. **Constructive Approximation** 26, p. 361-382, 2007.

[20] HENDRIKSEN, E.; VAN ROSSUM, H. Orthogonal Laurent polynomials. **Indagationes Mathematicae** (ser. A), 48, p. 17-36, 1986.

[21] ISMAIL, M.E.H. A simple proof of Ramanujan's ${}_1\Psi_1$ sum, **Proceedings of the American Mathematical Society** 63, p. 185-186, 1977.

[22] JONES, W. B.; NJÅSTAD O.; THRON, W. J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. **Bulletin of the London Mathematical Society** 21, p. 113-152, 1989.

[23] JONES, W. B.; NJÅSTAD O.; THRON, W. J. Two point Padé expansions for a family of analytic functions. **Journal of Computational and Applied Mathematics** 9, p. 105-123, 1983.

[24] JONES, W. B.; THRON, W. J. **Continued Fractions Analytic Theory and Applications**. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 11, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.

[25] JONES, W. B.; THRON, W. J. **Survey of continued fraction methods of solving moment problems**. in: Analytic Theory of Continued fractions, LNM 932, Springer, Berlin, 1981.

[26] JONES, W. B.; THRON, W. J. Two-point Padé tables and T-fractions. **Bulletin of the American Mathematical Society** 261, p. 388-390, 1977.

[27] JONES, W. B.; THRON, W. J.; WAADELAND, H. A strong Stieltjes moment problem. **Transactions of the American Mathematical Society** 261, p. 503-528, 1980.

[28] KOEKOEK, R.; SWARTTOUW, R. **The Askey-Scheme of hypergeometric orthogonal and its q-analogue.** Reports of the Faculty Technology, Delft, 1998.

[29] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. **Continued Fractions with Applications**. North-Holland, 1992.

[30] LUKASHOV, A. L.; PEHERSTORFER, F. Zeros of polynomials orthogonal on two arcs of the unit circle, **Journal of Approximation Theory** 132, p. 42-71, 2005.

[31] MacCABE, J. H. A formal extension of the Padé table to include two point Padé quotients. **Journal of the Institute of Mathematics and its Applications** 15, p. 363-372, 1975.

[32] PASTRO, P. I. Orthogonal polynomials and some q-beta integrals of Ramanujan, **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 112, 517-540, 1985.

[33] RAFAELI, F. R. **Zeros de polinômios ortogonais na reta real**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2010.

[34] SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle**. Pat 1. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 1, Providence, RI, 2004.

[35] SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle**. Pat 2. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 2, Providence, RI, 2004.

[36] SLATER, L. J. **Generalized hypergeometric functions**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

[37] SRI RANGA, A. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision. **Numerische Mathematik** 68, p. 283-294, 1994.

[38] SRI RANGA, A. **Continued fraction with correspond to two series expansions, and the strong Hamburger moment problem**. Tese de Doutorado, Univ. of St. Andrews, St Andrews, Escócia, 1984.

[39] SRI RANGA, A. Szegö polynomials from hypergeometric functions. **Proceedings of the American Mathematical Society** 138, p. 4259-4270, 2010.

[40] SRI RANGA, A. Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials. **Proceedings of the American Mathematical Society** 123, p. 3135-3141, 1995.

[41] SRI RANGA, A.; VAN ASSCHE, W. Blumenthal's Theorem for Laurent orthogonal polynomials. **Journal of Approximation Theory** 117, p. 255-278, 2002.

[42] SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials**. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, Providence, RI, USA, 1975.

[43] WALL, H. S. **Analytic Theory of Continued Fractions**. American Mathematical Society, 1948.

[44] WIDDER, D. V. **Avanced calculus**. Dover, New York, 1989.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 10 de maio de 2012.

Marisa de Souza Costa