

HERON MIGUEZ GONZALEZ GOMES

**Compreensões de pesquisas brasileiras sobre a história dos logaritmos no ensino de
matemática**

Heron Miguez Gonzalez Gomes

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em matemática.

Orientadora: Prof. Dr. Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos.

Guaratinguetá - SP
2021

HERON GONZALEZ

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“**GRADUADO EM MATEMÁTICA**”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Prof. Dr. Sílvia Guiliatti Winter
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Elisangela Pavanelo
Orientador/UNESP-FEG



Profa. Dra. Miliam Juliana Alves Ferreira
UNESP-



Prof. Dr. Jesaias da Silva Souza
UNISO/Sorocaba

Março 2021

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Rosana, minha avó, mãe de criação que me apoiou em absolutamente todas as decisões que me trouxeram até aqui;

à minha orientadora, Prof. Dr. Elisangela Pavanelo que aceitou minha ideia pouco convencional e, ao mesmo tempo em que me deu toda a liberdade que eu precisava, esteve sempre disponível e acessível nos momentos de dúvida.

às minhas tias Suillan e Suellen pelo incentivo, pelo apoio e por serem excelentes exemplos que me inspiraram nesta jornada;

a minha querida colega Caroline Santos de Azevedo, parceira de estudos, companheira dos rolês e amiga fiel;

a todos os demais amigos queridos que fiz nesta incrível jornada que é a graduação;

ao Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza, pela orientação e apoio em várias atividades extracurriculares durante minha graduação.

a todos os professores que compartilharam conosco tanto conhecimento de diversas formas.

às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar;

aos funcionários da Faculdade de Engenharia do Campos de Guaratinguetá pela dedicação e alegria no atendimento.

RESUMO

Em nossa pesquisa, objetivamos explorar os modos pelos quais dissertações de mestrado compreendem a história no ensino de logaritmos na Educação Básica. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cuja concepção envolve critérios claros e rigorosos simultâneos a um distanciamento de preconceitos e categorizações prévias tanto o quanto possível. A abordagem que tomamos é bibliográfica, de natureza exploratória, ou seja, é uma pesquisa inicial, em que buscamos explorar vários aspectos de nossa pergunta. Desenvolvemos duas revisões bibliográficas: uma em torno da história dos logaritmos, em que percorremos desde sua invenção por Napier no século XVII até as proposições de Euler no século XVIII; na outra, discutimos concepções de história e historiografia e seus impactos para a história da matemática e seu envolvimento no ensino de matemática. Por fim, analisamos através de uma hermenêutica fenomenológica 14 trechos de um total de 6 dissertações de mestrado que discutem, de alguma maneira, história no ensino de logaritmos. Identificamos em nossa análise alguns discursos bastante distantes da literatura científica sobre história no ensino de matemática que revisamos, outros mais próximos, mas acima de tudo, lacunas e uma problemática em aberto com espaço razoável para novas pesquisas.

PALAVRAS-CHAVE: Logaritmos. História da matemática. História dos logaritmos. Hermenêutica. Educação Matemática.

ABSTRACT

In our research, we aim to explore the ways in which master's theses understand history in teaching logarithms in Basic Education. It is a qualitative research, whose conception involves clear and rigorous criteria simultaneous to a distancing of prejudices and previous categorizations as much as possible. The approach we take is bibliographic, exploratory in nature, that is, it is an initial survey, in which we seek to explore various aspects of our research question. We developed two bibliographic reviews: one around the history of logarithms, in which we went from its invention by Napier in the 17th century to Euler's propositions in the 18th century; in the other, we discuss conceptions of history and historiography and the impacts of this on the history of mathematics and its involvement in the teaching of mathematics. Finally, we analyzed through a phenomenological hermeneutics 14 excerpts from a total of 6 master's dissertations that somehow discuss history in the teaching of logarithms. In our analysis, we identified some discourses quite distant from the scientific literature on history in the teaching of mathematics that we reviewed, others closer, but above all, gaps and an open problem with reasonable space for new research.

KEYWORDS: Logarithms. History of mathematics. History of logarithms. Hermeneutics. Mathematical Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Semirreta dos logaritmos.....	20
Figura 2 – Segmento de reta dos proporcionais	20
Figura 3 – Exemplo da tabela de logaritmos de Napier	24
Figura 4 – Quadratura da hipérbole de Gregory St. Vincent	29

LISTA DE TABELAS E QUADROS

Tabela 1 – Raízes sucessivas de Briggs.....	27
Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações.....	42
Quadro 2 – Convergências.....	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	METODOLOGIA DE PESQUISA CIENTÍFICA	12
2.1	PESQUISA QUALITATIVA	12
2.2	PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	13
2.3	ABORDAGEM METODOLÓGICA E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA ...	14
3	UMA HISTÓRIA DOS LOGARITMOS	16
3.1	A INVENÇÃO: OS LOGARITMOS DE NAPIER	16
3.2	OS IMPACTOS INICIAIS DOS LOGARITMOS DE NAPIER: NAVEGAÇÃO, ASTRONOMIA E OS NOVOS LOGARITMOS DE HENRY BRIGGS.....	23
3.3	A SEGUNDA METADE DO SÉCULO XVII: NOVAS DEFINIÇÕES E AS VÁRIAS CURVAS LOGARÍTMICAS.....	26
3.4	AS DISCUSSÕES DO SÉCULO XVIII: LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS E IMAGINÁRIOS E A CONSOLIDAÇÃO DA NOTAÇÃO EXPONENCIAL....	28
4	ALGUMAS IDEIAS SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUAS RELAÇÕES COM A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	32
4.1	HISTÓRIA, HISTORIOGRAFIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	32
4.2	HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	35
5	PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	39
5.1	HERMENÊUTICA.....	39
5.2	ANÁLISE DOS FRAGMENTOS DE DISSERTAÇÕES	39
5.3	CONVERGÊNCIAS E CATEGORIAS ABERTAS.....	49
5.4	INTERPRETAÇÃO DAS CATEGORIAS.....	50
5.4.1	Para que se ensinar logaritmos com história da matemática	50
5.4.2	Caracterização do processo de ensino de logaritmos com história da matemática	51
5.4.3	Consequências do ensino de logaritmos com história da matemática para a aprendizagem.....	53
6	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	54
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

Gosto muito de livrarias, aprecio a possibilidade de tocar, familiarizar-se e ter um primeiro contato com livros antes de comprá-los, em uma realidade em que, especialmente em tempos de COVID-19, as compras *online* dominam. Sempre que visito um desses espaços, procuro aquela prateleira geralmente pequena e escondidinha, cujo nome varia entre “matemática” ou “ciências exatas”, lá procuro por aqueles livros acessíveis de divulgação matemática cuja leitura continua a me encantar mesmo durante a graduação. Em uma dessas vezes, conheci o livro “17 Equações que Mudaram o Mundo” de Ian Stewart, um autor com inúmeras publicações dessa natureza. Nele, o autor enumera 17 equações que considera terem “mudado o mundo” e explica de forma acessível seus impactos na história da humanidade; eis que me deparo que, entre o Teorema de Pitágoras e o Teorema fundamental do Cálculo, Stewart incluiu a equação: $\log xy = \log x + \log y$. Por que uma propriedade dos logaritmos tão básica e banalmente apresentada em poucas aulas no Ensino Médio estaria ao lado de equações tão importantes? Disso surgiu meu interesse pelo estudo da história dos logaritmos, pois descobri como eles surgiram com um propósito bastante diferente do atual, como foram a base para a simplificação de cálculos longos por mais de 350 anos em que não existiam as calculadoras, e comecei a pensar em como estender esse meu maravilhamento com a história dos logaritmos a uma pesquisa em Educação Matemática.

Após esse pequeno preâmbulo, opto pela voz do “nós” nesta pesquisa, “[...]indicando a rede de influências materializadas no pensar de cada um individualmente e de todos que dialogam nesse espaço de investigação” (BICUDO, 2016, p. 8) e introduzo tema, metodologia e o problema de pesquisa.

Em geral, acreditamos que o ensino de logaritmos na Educação Básica é baseado predominantemente em uma álgebra bastante formal, exposta através de definições, propriedades, fórmulas, exemplos e exercícios, de forma descontextualizada da realidade, de outros conceitos matemáticos, de outras disciplinas e até mesmo da história de seu desenvolvimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, em sua 2ª versão, questionava uma concepção de Matemática como um saber estático e pronto, tratando-a como uma ciência de criação humana, parte de nossa cultura e de nossa história, portanto, muito diversa e de desenvolvimento não linear e incompleto. Nas palavras do documento curricular,

Essa percepção da unidade da Matemática, além da diversidade de suas práticas, serve também para mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da história. Assim, ela não é um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual. O desenvolvimento gradual desse campo do saber, por seres humanos

inseridos em culturas e sociedades específicas, confere a ela valores estéticos e culturais, e fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento (BRASIL, 2017, p. 522).

Na introdução de seu livro, ao discutir possíveis relações entre História da Matemática e o ensino de Matemática, Roque (2012) traz alguns questionamentos relevantes quanto a popular ideia de contextualizar os conceitos matemáticos através da realidade devido a disciplina ser “muito abstrata” e nos mostra como a história pode sim ser um caminho possível para isso:

Possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais “concreta”, elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada desse modo, mais “concreto”, desde que seus contextos sejam tratados a partir de um contexto. Isso não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações (ROQUE, 2012, p. 31).

Logo, a requisitada “contextualização” não precisa se dar somente através da realidade ou da resolução de problemas dentro contexto material próximo ao aluno, pode estar em saberes também abstratos da própria matemática, em outras disciplinas, ou mesmo na história dessa ideia. Dessa forma, a história pode ser um dos vários caminhos possíveis para prover sentido às aulas de logaritmo, para além das já bastante exploradas conexões com situações concretas como abalos sísmicos, pH, acústica etc.

A partir disso, temos por objetivo nesta pesquisa explorar as maneiras e objetivos pelos quais dissertações de mestrado brasileiras compreendem a história no ensino de logaritmos. Para isso, recorreremos a um estudo qualitativo teórico, de abordagem bibliográfica e natureza exploratória em que analisamos, através da hermenêutica, dissertações de mestrado que discutem, de alguma forma, contribuições da história da matemática ao ensino de logaritmos, explorando suas concepções de história no ensino de matemática.

Nesse sentido, nossa pergunta de pesquisa é: De que maneiras dissertações de mestrado compreendem História da Matemática no ensino de logaritmos na Educação Básica?

Abordamos de forma mais aprofundada aspectos de metodologia, procedimentos e do problema de pesquisa no capítulo 2.

Para subsidiar o trabalho de análise, propusemos no capítulo 3 um retrato de nossa perspectiva da história dos logaritmos, entre os séculos XVII e XVIII, em que nos baseamos em uma bibliografia científica concentrada no triênio 1913-1915, época de intensa produção neste tema, dada a proximidade do tricentenário da publicação inicial de John Napier, inventor dos logaritmos. Encontramos, consultamos e traduzimos também alguns trechos dos escritos originais de John Napier e Henry Briggs, dois matemáticos que propuseram os primeiros

sistemas de logaritmos, a partir das traduções do latim para o inglês de Ian Bruce disponibilizadas de forma aberta e gratuita na *internet*. Buscamos entender e apresentar algumas das ideias matemáticas e motivações envolvidas na criação dos logaritmos, suas mudanças e ampliações teóricas, além de suas influências para além da matemática.

Em seguida, no capítulo 4, também para dar suporte a nossa análise, exploramos possíveis concepções de história, de historiografia, que se relaciona às várias ideologias que orientam pesquisas históricas e as características específicas à história da matemática. Também discutimos como isso se reflete em um trabalho com história no ensino de matemática.

Passamos então, no capítulo 5, a fase de produção e análise dos dados, em que selecionamos algumas dissertações de mestrado em repositórios nacionais que abordam de alguma forma a história da matemática no ensino de logaritmos na Educação Básica e analisamos essa bibliografia a luz da hermenêutica. Questionando sobre as compreensões dessas pesquisas sobre a história no ensino de matemática, observamos divergências e convergências com a literatura na área e lacunas a serem discutidas.

2 METODOLOGIA DE PESQUISA CIENTÍFICA

Bicudo (2012) define o ato de pesquisar associado a uma busca por uma interrogação, que se diferencia de perguntas a serem respondidas, problemas a serem solucionados ou hipóteses a serem testadas, trata-se de um conceito que subordina esses três outros como perspectivas de se abordar a interrogação.

Interrogação, segundo Bicudo (2012, p.21)

[...] diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, perquirindo, não se conformando com respostas quaisquer. As formas pelas quais a interrogação é explicitada são múltiplas e têm a ver com a própria formação do pesquisador e com sua concepção de mundo e de ciência.

Podemos observar ainda que, para a autora, esse conceito diz da visão de mundo do pesquisador e persiste ao longo de toda a sua formação e vida acadêmica. Trata-se de uma força que direciona o olhar do pesquisador através de quais são, como são feitos e para onde são direcionados seus questionamentos e hipóteses.

Portanto, entendemos pesquisa como uma busca constante por essa interrogação, profundamente enviesada por um contexto autoral, que tanto motiva-a como torna-a coesa.

2.1 PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa, segundo Bicudo (2012, p.19),

pressupõe perquirir, de modo atento e rigoroso, o que nos chama a atenção e nos causa desconforto e perplexidade. A priori, não há um modo correto ou certo de pesquisar. Isso significa dizer que não há um padrão de procedimentos a serem seguidos que garantam a investigação seja bem sucedida, dando-nos certeza sobre o encontrado, em termos científico-filosóficos.

Ou seja, para a autora, pesquisar qualitativamente envolve uma investigação sobre algo que seja impactante e incômodo ao pesquisador, para isso, devem ser adotados critérios claros e rigorosos, mesmo que não haja métodos fixos pré-estabelecidos que garantam o sucesso da pesquisa.

Para discutirmos como estabelecer tais critérios, temos que, para Garnica (2001, p. 37-39), a pesquisa qualitativa não pode se submeter a regulamentos engessados, fixos, absolutos, pré-estabelecidos, mas sim a regulações mais abrangentes, dinâmicas e racionais. Isso porque, de acordo com o autor, em uma tentativa tola de blindar produções científicas de críticas, uma regulamentação priva a pesquisa qualitativa de seus principais potenciais, transferindo a responsabilidade do pesquisador e do próprio método para a regra.

Assim, cabe discutir critérios regulatórios que ajudem a caracterizar a pesquisa qualitativa.

A preponderância dos processos indutivos, a predominância de dados descritivos, a ênfase ao processo em detrimento do produto, a necessidade de questões geradoras e

regras bem definidas de ação para a análise dos dados coletados, critérios de avaliação públicos, discutidos e acordados pela comunidade, e a responsabilidade do pesquisador em relação à sua pesquisa [...] são, segundo pensamos, elementos reguladores centrais em uma pesquisa qualitativa. (GARNICA, 2001, p. 41).

A pesquisa qualitativa não visa às verdades amplamente generalizadas, mas sim, foca-se em experiências mais contidas e aproveita essa característica para priorizar dados descritivos, que, segundo Garnica (2001), só existem quando há um interlocutor e uma troca de informações antes desconhecidas pelo ouvinte.

No modo de pesquisar qualitativo, os resultados não são esperados e nem essenciais para comprovar hipóteses previamente estabelecidas, eles são apenas uma parte de um processo maior, ou seja, é plenamente possível escrever um artigo de metodologia qualitativa relatando uma experiência que teve resultados indesejados. Garnica (2001) destaca a importância da publicidade e transparência da pesquisa tendo em vista que, sem regulamentos externos, ela deve ser regulada pela própria comunidade científica, o que preserva sua flexibilidade e traz a responsabilidade de volta para o pesquisador, ao mesmo tempo em que garante uma suficiente segurança científica.

Definidas essas bases gerais, pode-se começar a pensar também em diferentes modos de realizar uma pesquisa qualitativa. Bicudo (2012) discute duas posturas possíveis, representadas pelos pares objeto/observado e fenômeno/percebido. No primeiro caso, há separação entre o pesquisador e o objeto de pesquisa que é observado. O pesquisador baseia-se em classificações rígidas, numa perspectiva mais positivista de ciência. Contrapondo-se a essa perspectiva a autora traz o par fenômeno/percebido em que, “não se assume uma definição prévia do que será observado na percepção, mas fica-se atento ao que se mostra” (BICUDO, 2012, p. 18). Ou seja, nesta postura de realizar pesquisa qualitativa não há categorizações prévias de modo que a pesquisa passe a focar o fenômeno que é percebido pelo pesquisador que se integra ao processo. Ainda, nesse modo de fazer pesquisa, os dados são descrições baseadas na linguagem, que, segundo a autora, ao ser expresso pelo participante da pesquisa, tornam-se passíveis de serem interpretados, sempre de forma contextualizada pelo pesquisador.

É interessante comparar as duas concepções de pesquisa qualitativas apresentadas aqui, a de Garnica (2001) e de Bicudo (2012), ambas trazem uma contraposição entre um modo rígido, categorizado, regulamentado, que empobrece esses métodos, em prol de uma postura mais contextualizada, livre, que realmente faça jus às peculiaridades da pesquisa qualitativa e atenda aos seus objetivos que é descrever e interpretar o que se mostra ao pesquisador.

2.2 PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A pesquisa em educação e, em especial, em educação matemática convém ser desenvolvida segundo as metodologias qualitativas, tendo em vista que se trata de uma área das ciências humanas, em que os métodos possibilitam, como já foi explicitado, uma análise interpretativa de situações diversas como a vivência em uma escola ou na sala de aula, por exemplo. Mas, acima disso, segundo Bicudo (2012), a pesquisa qualitativa em educação possibilita a percepção das complexidades humanas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem, associadas a todo um contexto histórico, social e político, que uma abordagem quantitativa não daria conta de abranger da mesma forma.

Garnica (2001), concorda com a necessidade de a escola ser contextualizada como parte da vida do humano em sociedade uma vez que, “não há homem “e” mundo, mas homem “no” mundo” (GARNICA, 2001, p.40), o que pode permitir compreender a educação matemática como área teórico-prática. Também, refletindo sobre a educação matemática, Bicudo (2012) destaca a importância de se definir a área como “constituída no ‘entre’ Educação e a Matemática”, ou seja, não é nem uma, nem outra, mas as duas ao mesmo tempo, em presença equilibrada.

Ainda na constituição da Educação Matemática como uma área no “entre”, mostra-se a relevância da pesquisa qualitativa que, conforme Bicudo (2012, p.19),

São pesquisas que permitem compreender características do fenômeno investigado e que, ao assim procederem, oferecem oportunidade para possibilidades de compreensões possíveis quando a interrogação do fenômeno é dirigida a contextos diferentes daquele em que a investigação foi efetuada. Sustentam raciocínios articuladores importantes para tomadas de decisão políticas, educacionais, de pesquisa e, aos poucos, semeiam regiões de inquérito com análises e interpretações rigorosas.

É interessante observar que a autora coloca que, mesmo sem tecer generalidades amplas, a pesquisa qualitativa pode ser muito útil na tomada de decisão para políticas públicas em educação e para outras áreas que a pesquisa venha a focar. Ou seja, a pesquisa qualitativa, ao ser desenvolvida de forma criteriosa e crítica, tem grande potencial para abordar a complexidade do fenômeno educacional, sendo assim, uma abordagem válida e cara à educação matemática.

2.3 ABORDAGEM METODOLÓGICA E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Dentro das perspectivas qualitativas que propusemos, optamos, em específico, por uma pesquisa que combina as definições de pesquisa exploratória e pesquisa bibliográfica de Oliveira (2016). Segundo esta autora, um estudo exploratório tem como objetivo explicar um fenômeno de maneira geral, através de levantamentos bibliográficos, documentais e da

delimitação temática; em geral, utiliza-se essa metodologia quando o tema é pouco explorado, o que dificulta a proposição de hipóteses.

Teremos também, em certo momento, uma pesquisa bibliográfica, que, segundo Oliveira (2016), é uma característica comum a grande parte dos estudos exploratórios, segundo a autora,

A principal finalidade da pesquisa bibliográfica é levar o pesquisador (a) a entrar em contato direto com obras, artigos ou documentos que tratem do tema em estudo. O mais importante para quem faz opção por uma pesquisa bibliográfica é ter certeza de que as fontes a serem pesquisadas já são reconhecidamente do domínio científico (OLIVEIRA, 2016, p.69).

Tendo em vista esse objetivo generalista da pesquisa exploratória em explicar um pouco de vários aspectos do fenômeno estudado, realizamos inicialmente um levantamento bibliográfico e documental sobre a história dos logaritmos, recorreremos também a pesquisas em história da matemática para o estudo das várias possíveis concepções de história, que se expressam através das diversas historiografias e suas ideologias associadas. Em seguida, procuramos em pesquisas brasileiras quais são possíveis premissas, caminhos e consequências ao se trabalhar História na Educação Matemática.

Os dados de nossa pesquisa bibliográfica foram excertos de dissertações sobre o ensino de logaritmos em que a história da matemática tem algum papel relevante em suas discussões e propostas, buscamos os textos no catálogo *online* de teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) através das palavras-chave “ensino de logaritmos” e “história dos logaritmos”. A metodologia de análise de dados escolhida foi a hermenêutica, cujas concepções teóricas delimitaremos e descreveremos de forma mais aprofundada no capítulo 6, logo antes da própria análise dos dados.

A partir da análise destes excertos, para atender o objetivo de nossa pesquisa, elegemos como problema de pesquisa e interrogamos ao fenômeno: “De que maneiras dissertações de mestrado compreendem História da Matemática no ensino de logaritmos na Educação Básica?”

3 UMA HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

Neste capítulo, apresentaremos um panorama histórico dos logaritmos. Levando em conta os conteúdos viáveis para discussão na Educação Básica, delimitamos o período desde sua invenção por John Napier no início do século XVII, até a consolidação do conceito de função logarítmica por Euler no século XVIII.

Para este levantamento bibliográfico e documental, nossas fontes principais partem de uma série de produções científicas publicadas entre 1913 e 1915, ao redor do tricentenário da publicação inicial da obra de Napier, como o *Memorial do Tricentenário de Napier* editado por Cargill Gilston Knott, uma coletânea de ensaios comunicados em um Congresso Internacional realizado em Edimburgo em julho de 1914 focados nos desenvolvimentos iniciais dos logaritmos e na vida de Napier (KNOTT, 1915). Destacamos também uma coletânea de artigos sobre a história dos logaritmos, nesse caso com uma visão mais ampla indo do século XVII até o século XIX, publicados por Florian Cajori na revista *The American Mathematical Monthly* em 1913. Dentre produções mais recentes, citamos Bruce (2002) com uma relevante análise da matemática envolvida na construção dos sistemas de logaritmos de Briggs e Mendes e Soares (2019), cujo livro é um excelente panorama histórico dos logaritmos em língua portuguesa.

Analizamos também as obras originais de Napier: *mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) e *mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), além da *Arithmetica logarithmica* (1624) de Henry Briggs, os três livros em traduções do latim para o inglês por Ian Bruce, da Universidade de Adelaide na Austrália, em um projeto que busca disponibilizar de forma livre e gratuita textos originais de matemáticos do século XVII e XVIII, disponíveis no endereço web: 17centurymaths.com. Compreendemos a complexidade envolvida em uma tradução e possíveis distanciamentos dos significados originais escritos no século XVII, por isso não adotamos esses documentos como fontes únicas para esse capítulo e consultamos os vários outros autores já apresentados que também analisaram essas obras em momentos históricos e contextos diversos.

3.1 A INVENÇÃO: OS LOGARITMOS DE JOHN NAPIER

A história dos logaritmos desafia concepções de história lineares, tendo em vista que, ao contrário da ordem adotada na maioria dos currículos modernos em que primeiro se introduz a notação exponencial e suas propriedades e em momento mais avançado, os logaritmos, segundo Cajori (1913a) os primeiros logaritmos surgiram antes da consolidação da notação moderna de exponencial a^n , isso porque não eram definidos a partir de funções exponenciais, mas sim de uma incomum mistura de cinemática, geometria e sequências numéricas. Se hoje derivamos e

integramos as funções logarítmicas e as aplicamos na física, geografia e no tratamento de dados, naquele momento, os logaritmos surgiram com o objetivo de simplificar longos cálculos trigonométricos através de gigantescas tabelas em um mundo sem computadores e calculadoras.

O primeiro matemático a publicar sobre os logaritmos de que temos notícia foi o escocês John Napier (1550-1617), cujo trabalho se divide em dois livros: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) e *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), que chamaremos respectivamente de *descriptio* e *constructio*. Apesar da ordem de publicação, Moulton (1915) aponta que, *constructio*, de publicação póstuma, é o trabalho principal do autor, teria sido escrito ao longo de muitos anos e antes de *descriptio*, contendo o processo de construção de sua tabela de logaritmos, enquanto *descriptio* teria sido escrito em um espaço mais curto de tempo e traz a fundamentação matemática do conceito, as tabelas que o acompanhavam e algumas possíveis aplicações, para que fossem lidos e aceitos pela comunidade matemática da época. Podemos observar essa ânsia pela aceitação da comunidade e os principais objetivos do trabalho no próprio prefácio de *descriptio*:

Já que nada é mais tedioso, caros matemáticos, na prática das artes matemáticas, que os grandes atrasos sofridos nas tediosas e longas multiplicações e divisões, na procura por razões e na extração de raízes quadradas e cúbicas — inclusive, não só considerando a perda de tempo, mas também o aborrecimento dos vários erros bobos que podem surgir: tenho, portanto, revirado minha mente, e, através dessa arte certa e eficiente, posso ser capaz de melhorar esse processo dadas essas dificuldades postas. Ao fim, após muitas reflexões, finalmente encontrei um caminho incrível para encurtar esses procedimentos, e talvez a maneira como esse método surgiu seja exposta em outro lugar: sinceramente, levando tudo isso em conta, não poderia existir nada mais útil do que o método que descobri. Os números associados com multiplicações, divisões e longas e árduas extrações de raízes quadradas e cúbicas são todos rejeitados neste trabalho, e, em seu lugar, outros números os substituem, que desempenham o papel desses rejeitados apenas por meio de adições, subtrações, e divisões por 2 e por 3. Como o segredo é melhor se partilhado com todos, como todas as boas coisas o são, é uma tarefa prazerosa expor esse método para o uso público de todos os matemáticos. Então, estudantes de matemática, aceitem e aproveitem livremente este trabalho que foi produzido pela minha benevolência, Adeus (NAPIER, 1614, tradução nossa).

É possível perceber nesse prefácio a principal premissa dos logaritmos de Napier: simplificar operações aritméticas, substituindo multiplicações por somas, divisões por diferenças e raízes por divisões nas palavras do matemático, para isso, seriam necessárias gigantescas tabelas com uma grande quantidade de números com muitas casas decimais para garantir precisão ao método.

A simplificação de cálculos associadas a grandes tabelas já era uma prática conhecida na época, a técnica da *prosthaphaeresis* envolvia fórmulas trigonométricas como $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \{ \cos(a - b) - \cos(a + b) \}$, que permitiam transformar multiplicações de senos em somas e diferenças de cossenos, ambas as funções já tabeladas, minuto a minuto por

vários matemáticos. Segundo Bruce (2002), Regiomontanus (1436-1476) já teria produzido tabelas de senos através de técnicas ptolomaicas considerando um triângulo retângulo de hipotenusa 10.000.000, logo com uma precisão de 7 casas após a vírgula, sua obra foi publicada de forma póstuma, em 1540 (MOULTON, 1915).

Tendo em vista que o método era de conhecimento público amplo entre os admiradores da matemática, segundo Moulton (1915), é possível que os métodos da *prosthaphaeresis* também tenham inspirado ou motivado os trabalhos de Napier, um indicativo disso é que o matemático enfatiza em quase todas as suas proposições que os logaritmos se aplicam a senos, e suas tabelas possuem logaritmos apenas das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Podemos observar esse foco nos versos de Napier escritos logo após o prefácio de *descriptio*:

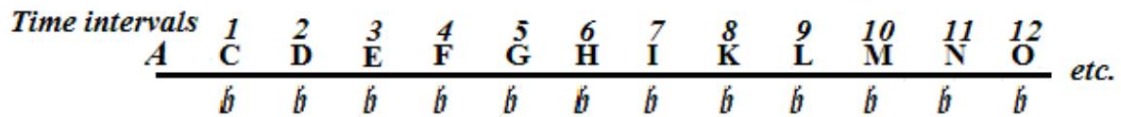
SOBRE OS LOGARITMOS.

Pelos quais todos os senos, tangentes, e secantes, são trazidos a vocês por um trabalho longo e prolixo;
E que esta pequena tabela de Logaritmos, Caro Leitor, traz-lhes todos de uma vez, sem grande trabalho (NAPIER, 1614, tradução nossa).

Na mesma obra, Napier define logaritmo através de uma relação que foi posteriormente associada ao que hoje chamaríamos de uma conexão entre progressões aritméticas e progressões geométricas. A relação entre esses dois tipos de sequências numéricas e algumas consequências matemáticas remontam à antiguidade. Mendes e Soares (2019) afirmam que a genealogia desse tipo de raciocínio começa na Babilônia, em tabletas de argila em que foram identificadas sequências de potências de números como 225, 9, 16 e 100, segundo os autores, estariam associadas possivelmente a “cálculos de interesse”; além disso, em seu livro *Arenário*, Arquimedes desenvolveu longas sequências das potências de 2, em que se evidenciam noções de adição de expoentes que hoje descrevemos pela propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Contudo, não é possível estabelecer relações causais entre essas produções matemáticas e o tipo de sistematização e objetivos dos logaritmos do século XVII (MENDES; SOARES, 2019).

Em suas proposições iniciais sobre a definição dos logaritmos, Napier constrói inicialmente uma semirreta dividida em segmentos congruentes, o matemático explica o processo através de noções físicas como tempo e velocidade, o ponto P que descreve a semirreta a partir de um ponto de origem A, define os pontos C, D, E, F, G e assim por diante em intervalos iguais de tempo, logo em velocidade constante, portanto, são definidos infinitos pontos que dividem a semirreta AO em infinitos segmentos congruentes (NAPIER, 1614). Pode-se observar a construção geométrica na figura 1.

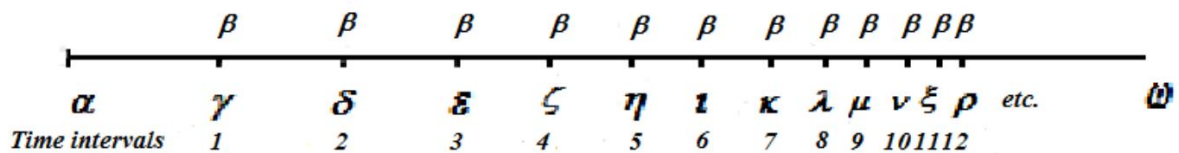
Figura 1 – Semirreta dos logaritmos



Fonte: Napier (1614).

É definido também um segmento de reta $\alpha\omega$ que vai decrescendo progressivamente ao longo de intervalos iguais de tempo, porém, agora com uma velocidade variável, que diminui proporcionalmente ao que resta no segmento após cada corte multiplicado por uma constante de proporcionalidade β , assim, surgem os segmentos $\lambda\omega$, $\delta\omega$, $\epsilon\omega$, e assim por diante (NAPIER, 1614), é possível observar com essa construção na figura 2 abaixo.

Figura 2 – Segmento de reta dos proporcionais



Fonte: Napier (1614).

Napier usa o tempo como recurso para estabelecer uma relação entre segmentos de AO e $\alpha\omega$, ao mesmo tempo em que $\alpha\omega$ decresce para $\lambda\omega$, o ponto P que descreve a semirreta AO está em C , logo há um segmento AC , que é definido como o logaritmo de $\lambda\omega$, por consequência, AD é logaritmo de $\delta\omega$, AE é logaritmo de $\epsilon\omega$, e assim por diante. Numericamente, Napier implicitamente define a medida de AC igual a 1, logo cada logaritmo seguinte é o número sucessor na sequência dos naturais. Além disso, a medida de $\alpha\omega$ é definida como 10^7 e seu logaritmo igual a zero, o que discutiremos de forma mais aprofundada na análise do livro *constructio*.

De forma a simplificar esse raciocínio através de nossa matemática ocidental contemporânea, podemos relacionar a semirreta dos logaritmos a uma progressão aritmética e a semirreta dos proporcionais a uma progressão geométrica, na primeira inicia-se no 0 a uma razão igual a 1, a segunda inicia-se em 10^7 e é decrescente a uma razão de 0,9999999, assim, cada termo geral a_i da PA é o logaritmo de Napier correspondente ao termo genérico g_i da PG, sendo $a_i = i$ e $g_i = (0,9999999)^i \cdot 10000000$, logo, para Napier, $\log 10^7 = 0$,

$\log 9999999 = 1$, $\log 9999998 = 2$, e assim por diante.

Ao longo do livro 1 de *descriptio*, Napier apresenta várias consequências dessa definição, discute algumas proposições análogas à equação $\log a + \log b = \log ab$, apresenta alguns exemplos de problemas geométricos resolvidos com a ajuda dos logaritmos, além de instruções de como encontrar aproximações para os não presentes nas tabelas que acompanhavam a obra. O livro 2 é dividido em 2a e 2b, em 2a, o autor desenvolve uma série de aplicações dos logaritmos a problemas trigonométricos, em 2b, continua esse processo, mas agora dentro da geometria esférica, importante para a astronomia e para a navegação, duas áreas conectadas e de grande relevância econômica naquele momento. Em alguns exemplos ao longo dos livros, Napier usa os logaritmos para substituir números que não são senos, como as medidas dos lados de um triângulo, que eram usados na regra dos senos, por exemplo. Essas tentativas de mostrar a utilidade dos logaritmos a várias áreas do conhecimento matemático associadas a um certo rigor matemático reforçam os objetivos de Napier de ser reconhecido pela comunidade científica com essa obra.

Por sua vez, *constructio* é a obra que apresenta o caminho que Napier percorreu na construção de suas tabelas de logaritmos. Publicado 2 anos após sua morte por seu filho Robert Napier, é um livro mais fragmentado, o que fica evidente quando o próprio Robert chama atenção em seu prefácio que nas primeiras proposições o pai chamava os logaritmos de números artificiais, já que esses trechos teriam sido escritos anos antes da adoção do termo logaritmo, ao mesmo tempo, em um apêndice que acompanha *constructio*, são estabelecidas bases para o que seria o sistema de logaritmo de base 10 que Henry Briggs desenvolveria muitos anos depois, logo, posteriores a *descriptio*.

Nas primeiras proposições de *constructio*, Napier aborda questões relacionadas a precisão de cálculos e representação numérica. Sobre isso, cabe destacar que em sua época, os números decimais não eram padronizados como hoje, segundo Hobson (1914), apesar de já existirem algumas outras notações menos convenientes para casas decimais, o uso sistemático do ponto decimal teria sido inventado de forma independente pelo próprio Napier, contudo, uma padronização da notação só ocorreria no século XVIII. Apesar disso, o uso de números decimais em *constructio* se restringia apenas entre as operações envolvidas no processo de cálculo para determinar os números das tabelas com o máximo de precisão possível, os resultados finais eram sempre inteiros. Logo, funções trigonométricas como seno não eram definidas em uma circunferência unitária como hoje, eram adotados raios muito maiores, no caso de Napier, para representar senos com precisão de minutos, o raio da circunferência trigonométrica escolhido (ou o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo) foi

10000000 ou 10^7 , que seria o seno de 90° (NAPIER, 1619).

Seguindo as aproximações que já traçamos com a matemática atual, os senos estariam em progressão geométrica que decresceria a cada multiplicação do chamado seno completo (10^7) por uma razão constante. Com o objetivo de identificar com o máximo de precisão os senos já determinados por tabelas conhecidas nessa progressão, Napier escolheu a razão inteira que resultaria no decrescimento mais lento possível, ou seja, $1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$, dessa forma os termos inicialmente diferem em apenas uma unidade a cada multiplicação são ainda mais próximos (NAPIER, 1619).

Napier define que seu logaritmo de 10^7 vale zero, crescendo de um em um a cada decrescimento da PG pela razão 0,9999999, disso podemos constatar as diferenças desse sistema quando comparado ao que temos hoje, em que zero é o logaritmo de 1 e nossa “progressão geométrica”, a função logarítmica, é crescente. Além disso, o sistema de Napier não comportava ainda a ideia de base, contudo, dado que os números menores que 10^7 tinham logaritmos positivos, Napier já reconhecia a existência de logaritmos negativos para os números maiores que 10^7 , ainda não era consolidada a nomenclatura positivo/negativo para números, Napier usa termos que podem ser traduzidos como abundante/defectivo. (NAPIER, 1619)

Apesar de ser matematicamente possível, na prática, seria inviável calcular todos os números da tabela multiplicando um a um, por isso, Napier identificava padrões, em sua primeira coluna de logaritmos, foram determinados 50 números, o último era 9999900,0004950, muito próximo de 9999900, ou seja, multiplicar 10000000 por 0,9999999 50 vezes equivale quase a 10^7 multiplicado pela razão $1 - \frac{1}{10^5} = 0,9999900$, dessa forma, Mouton (1915) aponta a importância da proposição que estabelece que logaritmos de números proporcionais são igualmente espaçados, segundo este autor, isso possibilitou a Napier agrupar várias operações, assim, poderia agora avançar seus logaritmos de 50 em 50, através de uma nova razão. Repete-se esse processo várias vezes com razões ainda maiores segundo a mesma ideia.

Além desses processos, para simplificar os cálculos Napier determinou também constantes que poderiam ser somadas ou subtraídas aos logaritmos para multiplicar ou dividir os números correspondentes na PG por 10, 2 ou outros números úteis. Segundo Hobson (1914), considerando a propriedade que hoje escrevemos $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$, essas constantes também são logaritmos eram obtidas a partir da diferença entre dois logaritmos cujos logaritmandos divididos resultem no multiplicador pretendido, por exemplo, para encontrar o logaritmo de 10, efetua-se a diferença entre o logaritmo de 10^7 , zero, e o logaritmo mais próximo possível de 10^6 , o resultado: 23025842,34. Bastava então somar ou subtrair esse

número a um logaritmo para multiplicar ou dividir o logaritmando por 10, o que facilitava muito adaptar um número que se aproximava em seus algarismos a algum seno procurado, faltando apenas uma mudança de ordem decimal.

A partir de todos esses métodos e outros talvez não escritos, Napier construiu uma tabela de números em progressão geométrica com 69 colunas, em que aproximou todos os senos de 0° a 90° minuto a minuto a algum número com logaritmo definido, ao se deparar com um intervalo de dois números próximos, um maior e um menor, escolhia-se sempre a média aritmética entre os dois. Com isso, as tabelas de logaritmos dos senos totalizaram 90 páginas, uma para cada grau, com seus 60 minutos, há um exemplo de como eram organizadas as tabelas na figura 3, com um trecho da página correspondente ao ângulo 43° .

Figura 3 – Exemplo da tabela de logaritmos de Napier

<i>min.</i>	<i>Sine</i>	<i>Logarithm</i>	<i>Differential +/-</i>	<i>Logarithm</i>	<i>Sine</i>	<i>min.</i>
50	6925630	3673561	407356	3266205	7213574	10

Fonte: Napier (1619)

Cabe ressaltar que vários autores, como Hobson (1914), Moulton (1915) e Ian Bruce nas notas de tradução de Napier (1619), apontam vários erros nos cálculos de Napier, especialmente nas últimas casas numéricas, é possível observar isso no próprio *constructio* em que Napier chega a resultados um pouco diferentes utilizando dois caminhos distintos, cada um possivelmente com uma carga diferente de erro numérico.

O apêndice de *constructio* contém a proposição inicial de um novo sistema de logaritmos em que $\log 1 = 0$ e os logaritmos de um número qualquer são encontrados a partir dos logaritmos de números primos, como todo número pode ser decomposto em primos, bastaria somar os logaritmos correspondentes dada a propriedade $\log a + \log b = \log ab$. Isso é a base do trabalho de Henry Briggs, cuja relação com Napier e contribuições aos logaritmos serão discutidas na seção 3.2.

Sobre disputas da invenção dos logaritmos, Cajori (1913a) escreve que o relojoeiro suíço Jost Bürgi publicou suas tabelas de logaritmos em 1620, porém, na época, sem as explicações que eram prometidas na primeira página, que só seriam tornadas públicas em 1856. Cajori (1913a) aponta, ainda que a construção de suas tabelas era muito semelhante à de Napier, com a diferença de que sua progressão geométrica era crescente a uma razão de $1 + \frac{1}{10^4}$ (ou seja, 1,0001) e, para ele, $\log 10^8$ era igual a 0, ao invés do $\log 10^7$ adotado por Napier. Cajori (1915)

aponta que, segundo relatos de Benjamin Bramer e Johannes Kepler, os logaritmos de Bürgi foram desenvolvidos de forma independente dos de Napier, talvez até antes, contudo, o próprio Kepler, na introdução de seu livro *Rudolphine Tables*, critica duramente a demora de Bürgi em publicar seu trabalho: “Justus Byrgius [versão em latim de Jost Bürgi] foi levado a esses mesmos logaritmos muitos anos antes do sistema de Napier aparecer; mas sendo um homem indolente e pouco comunicativo, em vez de criar seu filho para o benefício público, o abandonou no nascimento” (KEPLER, 1627 apud CAJORI, 1915, p. 102-103). O desabafo acalorado de Kepler nos mostra como a comunidade científica do século XVII valorizava publicações científicas em linguagem matemática formal, estruturadas de forma quase euclidiana, em torno proposições, definições e demonstrações, o que, ao contrário de Bürgi, Napier conseguiu realizar com *descriptio*, e sendo assim reconhecido como inventor dos logaritmos.

A definição de logaritmo de Napier e sua possível analogia a progressões aritméticas e geométricas prevaleceu durante todo o século XVIII; em 1808, C. F. Kaussler, em um livro didático, teria optado por sua definição, por ter menos “buracos e obscuridades”, mesmo que vários trabalhos já definissem o conceito a partir dos exponenciais (CAJORI, 1913d).

3.2 OS IMPACTOS INICIAIS DOS LOGARITMOS DE NAPIER: NAVEGAÇÃO, ASTRONOMIA E OS NOVOS LOGARITMOS DE HENRY BRIGGS

No século XVII, as tecnologias de transporte e comunicação eram bastante limitadas, com isso, novas produções científicas poderiam levar anos para se disseminar para outros países, Hobson (1914) traz algumas informações a respeito desse processo para os logaritmos de Napier a partir de escritos dos matemáticos da época. Segundo o autor, Kepler publicou em 1620 como dedicatória em seu livro *Ephemeris* uma carta que teria enviado a Napier em 28 de julho de 1619, parabenizando-o pela invenção dos logaritmos levando em conta as contribuições do conceito matemático para a astronomia. Kepler fez a sua revisão da obra de Napier, apontando alguns erros menores, e ainda publicou sua própria tabela de logaritmos com algumas mudanças em 1624. Cabe destacar que Napier morrera 2 anos antes do envio da carta de Kepler, que desconhecia esse fato, um sinal das dificuldades de comunicação da época.

Hobson (1914) aponta ainda as conversas que Napier manteve com Edward Wright, matemático que trabalhava com navegação e logo viu nos logaritmos uma importante contribuição para essa área, Wright seria também o primeiro tradutor para o inglês de *descriptio*, mas faleceu em 1615, e o trabalho foi concluído por seu filho.

Nesses dois contatos estabelecidos com a obra de Napier, podemos observar como rapidamente se percebeu a relevância dos logaritmos em uma matemática aplicada tanto à astronomia, quanto à navegação, ambas muito relevantes economicamente na Europa do século XVII, apesar disso, Bruce (2002) afirma que haviam limitações nos logaritmos de Napier ao lidar com números que não fossem senos, o logaritmo de 1, por exemplo, era um número gigantesco, inconveniente para cálculos que não envolvessem funções trigonométricas, o que poderia reduzir seu potencial.

Outro diálogo de Napier com outro matemático mencionado por Hobson (1914) é com Henry Briggs, professor de geometria em Oxford, que, em conversa por carta em 1615 com o arcebispo Ussher, disse estar desenvolvendo um trabalho com os “novos e admiráveis” logaritmos de Napier. Briggs visitou Napier ainda em 1615, novamente em 1616 e teria repetido em 1617, mas Napier faleceu naquele ano. No prefácio de *constructio*, Robert Napier reforça essa relação amistosa entre os dois matemáticos (NAPIER, 1619) e, segundo Bruce (2002), os dois teriam discutido um novo modelo de tabela no encontro de 1616, usando uma sequência de números crescentes ao invés da decrescente e um logaritmo de 1 igual a 0, contudo, a decisão pela base 10 seria de autoria exclusiva de Briggs.

O trabalho de Briggs, publicado no livro *Arithmetica Logarithmica* em 1624 envolveu um sistema de logaritmos de base 10, muito próximo ao que é ensinado hoje nas escolas brasileiras, em que $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, por consequência, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, e assim por diante. Segundo Bruce (2002), diferentemente dos logaritmos de Napier que foram todos obtidos a partir de extrapolações lineares de um único logaritmo determinado, Briggs calculou os seus partindo de vários logaritmos de números primos, levando em conta que qualquer número pode ser decomposto em primos e a tão importante propriedade $\log a \cdot b = \log a + \log b$, assim, bastaria decompor o logaritmando em números primos e somar os logaritmos destes.

Bruce (2002) faz uma descrição aprofundada dos métodos de cálculo de Briggs, o cálculo de logaritmos de resultados não inteiros envolvia a extração de várias raízes quadradas sucessivas. Através de métodos numéricos já conhecidos de extração de raízes, Briggs efetuou inicialmente sucessivas raízes do número 10, compreendendo que, pela propriedade que hoje escrevemos $\log a^n = n \log a$, a cada raiz efetuada, o logaritmo de 10, igual a 1, era dividido por 2 sucessivamente, como pode-se visualizar na tabela 1.

O Matemático continuou o processo até a 54ª raiz, 1,000000000000000012781914932003235, observando que nessa e nas 3 anteriores extrair a raiz quadrada era quase equivalente a uma divisão por 2 na parte fracionária dos números, o

que possibilitou-lhe estabelecer, por aproximação, uma proporção linear entre números dessa sequência e seus logaritmos, já que os dois decresciam praticamente na mesma taxa nesse ponto, pela metade, como é possível observar na tabela 1, nos grifos das linhas 51 a 55 as partes decimais das raízes são aproximadamente: 2045, 1022, 0511, 0255, 0127, todos multiplicados por 10^{-18} , se aproximam muito de uma PG de razão 0,5.

Tabela 1 – Raízes sucessivas de Briggs

n	Raízes quadradas sucessivas de 10: $\sqrt[n]{10}$	Logaritmos: $\frac{1}{2^n}$
0	10	1
1	3.16227766016837933199889354443	0,5
2	1.77827941003892280122542119519	0,25
3	1.33352143216332402567593171529	0,125
10	1.00225114829291291546567363887	0.009765625
20	1.00000219591867555420331713751	9.5367431640625E-6
30	1.00000000214444947937776742976	9.31322574615478515625E-9
40	1.00000000000209418894246160263	9.094947017729282379150390E-12
50	1.000000000000000 <u>2045</u> 10638912051949	8.881784197001252323389053E-15
51	1.000000000000000 <u>1022</u> 55319456025922	4.440892098500626161694527E-15
52	1.000000000000000 <u>0511</u> 27659728012948	2.220446049250313080847263E-15
53	1.000000000000000 <u>0255</u> 63829864006471	1.110223024625156540423632E-15
54	1.000000000000000 <u>0127</u> 81914932003235	5.551115123125782702118158E-16
55	1.00000000000000006390957466001617	2.775557561562891351059079E-16

Fonte: adaptado de Bruce (2002).

Logo, para aproximar os logaritmos de qualquer número primo, bastaria extrair raízes suficientes para chegar em um valor próximo aos dessa região de n entre 50 e 54 da tabela 1, e interpolar o logaritmo desse número primo qualquer através de uma proporção com algum desses valores da tabela 1 e de seus logaritmos já conhecidos, tem-se então o logaritmo dessa i -ésima raiz do número primo e dada a propriedade $\log a^n = n \log a$, basta multiplicar sucessivamente o valor por 2, i vezes, para chegar de fato ao logaritmo do número primo pretendido.

Contudo, para que o número tendesse mais rápido para este intervalo desejado e menos extrações de raízes fossem necessárias, Briggs procurava alguma potência próxima de um múltiplo de 10, para 2, por exemplo, $2^{10} = 1024$, divide-se por 1000 para ter um número próximo de 1 (1,024) e extraem-se, nesse caso, 47 raízes quadradas, até atingir um número com a quantidade de 15 zeros após a vírgula (assim como os números de n entre 51 e 54 na tabela

1), e através de uma proporção simples com os números mais próximos dentre as últimas 4 raízes de 10 da tabela 1, encontra-se uma excelente aproximação para o logaritmo da 47ª raiz de $2^{10}/1000$; pelas propriedades de logaritmo, multiplicando o resultado por 2 em um total de 47 vezes, temos o logaritmo de $\log 2^{10}/1000$, através de mais propriedades retorna-se a potência do logaritmando a 1, ao final de todas essas etapas o logaritmo de 2 de Briggs resultou em 0,301029995663981, segundo Bruce (2002), esse teria sido o primeiro logaritmo não trivial calculado pelo matemático inglês.

Seguindo esse método, Briggs encontraria logaritmos para vários números primos e trouxe os resultados para os números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000 com uma precisão de 14 casas decimais em *Arithmetica Logarithmica* de 1624, que também continha uma longa formalização matemática do processo de construção das tabelas e adaptações para o uso na trigonometria. Além do uso dos logaritmos de números primos, segundo Bruce (2002), dada a enorme quantidade de números envolvidos, o matemático também usou técnicas de interpolação e teria sido provavelmente o primeiro a descobrir métodos de diferenças finitas nesse processo.

O processo de construção dos logaritmos de Briggs não envolvia ainda noções exponenciais que utilizamos hoje para defini-los, tampouco existia a noção função logarítmica, tratou-se de um processo bastante engenhoso e eficiente com as ferramentas matemáticas disponíveis nessa época. Com um sistema mais simples e menos restrito às funções trigonométricas, as tábuas de logaritmos e as réguas de cálculo baseadas nessas definições de Napier e Briggs seriam instrumentos populares para a realização de cálculos aritméticos longos por mais de 300 anos, até a invenção dos computadores e calculadoras.

Discutiremos nas próximas seções as expansões conceituais do logaritmo para a geometria, para a álgebra, que possibilitaram que os logaritmos continuassem relevantes na matemática até a atualidade.

3.3 A SEGUNDA METADE DO SÉCULO XVII: NOVAS DEFINIÇÕES E AS VÁRIAS CURVAS LOGARÍTMICAS

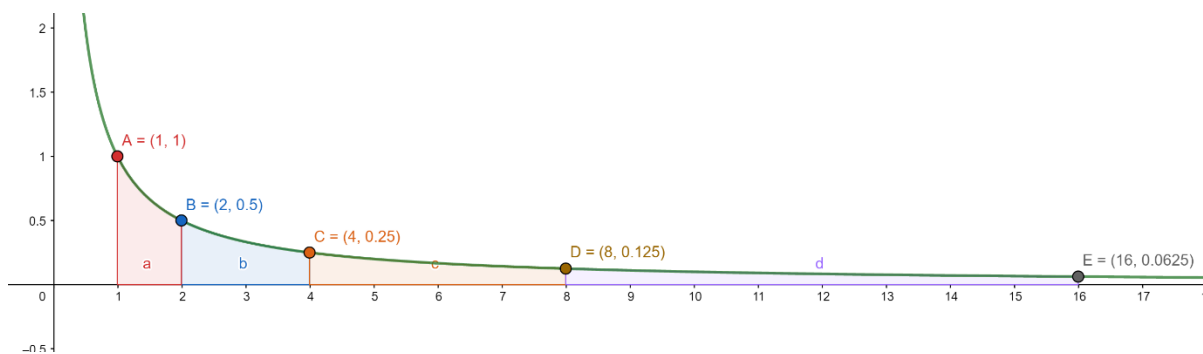
Cajori (1913a) narra que em 1695, Edmund Halley revisou a definição de Napier para os logaritmos, segundo Halley, os logaritmos seriam “*Numeri Rationum Exponentes*”, ou seja, estariam relacionados a “razões”, o matemático propunha a divisão do intervalo de 0 a 10 em uma escala de números em progressão geométrica de 0 a 100.000, nesse sistema, o que chamava-se de logaritmos de 10 e 2, seriam respectivamente logaritmos de 1 para 10 e 1 para 2, e seus valores dependeriam dos valores na PG, entre 1 e 2, 30.102, entre 1 e 10, os 100.000.

A partir disso, Halley teria sido o primeiro a derivar sem apoio da geometria uma série infinita para o cálculo de logaritmos, mesmo que de forma implícita. Essa discussão continuaria 19 anos depois com Roger Cotes, mas permaneceria esquecida e pouco estudada até o século XIX.

Segundo Cajori (1913a), para além das propostas de Halley, a maior parte das discussões e descobertas sobre os logaritmos ao longo do século XVII e XVIII envolveram principalmente três curvas: a que representa o que chamamos hoje de função logarítmica que chamaremos aqui de curva logarítmica, a espiral logarítmica e a hipérbole. A curva logarítmica é aquela que hoje conhecemos por equações do tipo $y = \log x$, enquanto a espiral é a representação da mesma curva, mas em coordenadas polares, foram estudadas ao mesmo tempo em que se constituíam noções iniciais de função e a geometria analítica, alguns dos matemáticos envolvidos nesse processo foram: René Descartes, J. Gregory, C. F. M. Dechales, Christiaan Huygens, J. Bernoulli, dentre outros. O estudo dessas curvas pautou muitas discussões sobre os logaritmos ao longo século XVIII.

Dedicaremos um pouco mais de atenção sobre a terceira curva, a hipérbole, a figura 4 a seguir representa um teorema proposto por Gregory St. Vincent em 1647:

Figura 4 – Quadratura da hipérbole de Gregory St. Vincent



Fonte: produção nossa

Segundo Cajori (1913a), Gregory St. Vincent investigou em seu livro *Opus geometricum* a quadratura da hipérbole $xy = 1$ ou $y = \frac{1}{x}$ e propôs um teorema em que, se forem desenhados segmentos paralelos a uma assíntota que liguem a hipérbole e sua outra assíntota determinando regiões de formas diferentes, mas áreas iguais (como pode-se observar em a, b, c e d na figura 4), as alturas desses segmentos paralelos estariam em progressão geométrica. Apesar de St. Vincent não mencionar logaritmos, sabemos hoje que a área abaixo de uma hipérbole como essa é um logaritmo, afinal, hoje definimos $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$. Contemporâneo a Gregory St. Vincent, o jesuíta belga Alfons Anton de Sarasa revisou seu trabalho, relacionando a variação

em progressão aritmética da área e em progressão geométrica da altura dos segmentos paralelos à definição clássica de logaritmo de John Napier.

Nicolaus Mercator, em seu livro *Logarithmotechnia*, publicado em 1668 expandiu a equação da hipérbole $\frac{1}{1+a}$ em uma série infinita: $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$, contudo, ele não a integrou para chegar a uma série para os logaritmos, mas trabalhou com valores numéricos para a e eventualmente acabou conectando seus resultados com os logaritmos, possivelmente usando os resultados de St. Vincent e Sarasa. Apenas Leibniz, em 1676, introduziria seus métodos de cálculo integral e demonstraria a partir da relação entre progressões aritméticas e geométricas observadas que a área abaixo da hipérbole é seu logaritmo (CAJORI, 1913a).

3.4 AS DISCUSSÕES DO SÉCULO XVIII: LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS E IMAGINÁRIOS E A CONSOLIDAÇÃO DA NOTAÇÃO EXPONENCIAL

Ao estudar a história dos logaritmos nos deparamos com um fato contraintuitivo, os logaritmos foram inventados antes da notação moderna exponencial e da função exponencial. Cajori (1913a, 1913b) conta-nos que, ao longo do século XVII, cada matemático tinha sua própria forma de escrever os expoentes.

Thomas Harriot, por exemplo, simplesmente repetia os fatores quantas vezes fossem necessárias: $a^4 + 4a^2 + a$ seria $aaaa + 4aa + a$, mas René Descartes teria sido o primeiro a adotar algo mais próximo da notação que temos hoje, porém apenas para expoentes naturais. Ao longo dos anos a notação moderna foi se consolidando, apesar de que ainda no século XVIII, muitos matemáticos preferiam representar a^2 por aa , enquanto, para quaisquer outros expoentes maiores de 2, seguiam o que temos hoje por padrão (CAJORI, 1913b).

Wallis em 1656 teria introduzido de forma não explícita expoentes negativos e fracionários, que seriam escritos na forma algébrica nas manifestações do teorema binomial de Newton em 1676. A relação entre logaritmo e expoente também foi intuída por Wallis implicitamente em 1685, e de forma explícita em uma troca de cartas entre John Bernoulli e Leibniz em 1694, em que discutiam a construção da curva $x^x = y$ (CAJORI, 1913b).

A partir desses conhecimentos mais aprofundados sobre a álgebra associada aos logaritmos, formou-se um ambiente fértil para o problema que definiria as discussões do século XVIII sobre o tema, como seriam os logaritmos de números negativos. Podemos exemplificá-lo na aplicação de algumas propriedades à expressão $\log(-2)^2$, sabemos que $\log(-2)^2 = \log 4$, porém, poderíamos fazer $\log(-2)^2 = 2 \log -2$, logo, $\log 2 = \log -2$, essa contradição que

hoje não admitimos como verdadeira foi o principal ponto de discussões nos anos 1700 e envolveu matemáticos como John Bernoulli, Leibniz e Euler.

Cajori (1913b) narra essa história se baseando, principalmente, em cartas trocadas entre esses matemáticos, algumas delas só tornadas públicas no início do século XX. Segundo o autor, no século XVIII, havia muitas divergências quanto ao uso de números negativos e números complexos, ao contrário de hoje, os matemáticos não se sentiam livres para se restringir a um determinado conjunto que melhor se encaixe em sua pesquisa, e, quando eram usados, suas propriedades deveriam ser provadas, e não axiomáticas como as tratamos atualmente.

A proporção $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ é um exemplo dessas polêmicas, um número maior estar para um número menor enquanto um número menor está para um número maior seria impossível para Leibniz, que justificou sua posição a favor dessa impossibilidade considerando que uma razão deve ser considerada imaginária caso não tenha logaritmo, logo, assumiu a inexistência de logaritmos de números negativos. Em cartas trocadas com Leibniz, John Bernoulli se mostra convicto da existência da relação $\log x = \log -x$, justificando-se através de algumas integrais, segundo ele a curva logarítmica seria como a hipérbole, com dois ramos. Leibniz rebateu os argumentos e discordou do colega (CAJORI, 1913b).

Anos depois, Bernoulli voltaria a defender seu ponto, agora com um nome muito importante na história da matemática e dos logaritmos, Leonard Euler, seu aluno. Numa série de cartas trocadas entre 1727 e 1729, que só seriam publicadas em 1902, Euler traz argumentos favoráveis e contrários a expressão $\log x = \log -x$ defendida por Bernoulli; um ponto favorável seria a equação $z = \log x^2$, que poderia ser transformada em $z = 2 \log \sqrt{x^2}$, e então: $\frac{z}{2} = \log \sqrt{x^2}$, como $\sqrt{x^2} = \pm x$, $\frac{z}{2} = \log x = \log -x$. Euler também questiona a possibilidade de que $\log -x = \log x + \log -1$, logo, pela definição anterior, $\log -1 = 0$, uma contradição que poderia ser explicada caso a função admitisse um mesmo resultado para dois valores diferentes, como propunha Bernoulli. Contudo, quando Euler utilizou uma definição geométrica para o cálculo da área de um setor circular proposta pelo próprio Bernoulli para invalidar o argumento do professor, a discussão foi vencida pelo aluno, apesar de que, por muitos anos, ainda houve defensores da teoria de Bernoulli (CAJORI, 1913b).

Em 1745 as cartas trocadas entre Bernoulli e Leibniz, que já discutimos, foram publicadas, o que reacendeu o debate em torno dos logaritmos envolvendo números negativos e imaginários. Nessa época, Euler já tinha desenvolvido trabalhos sobre as propriedades dos números imaginários e em 1747, retomaria as discussões por carta sobre o assunto, agora com d'Alembert. Euler defendia que, sendo n um número de um conjunto qualquer, $\log n$ teria

infinitos valores complexos, e teria um único valor real para cada n positivo. O matemático escreveu ainda um artigo em 1747 que só seria publicado em 1862, em que contava sobre as controvérsias com Bernoulli e trazia argumentos convincentes para seus pontos, contudo, o artigo não foi publicado na época, em seu lugar, Euler publicou outros artigos menos convincentes, que, segundo Cajori (1913c), possivelmente atrasaram uma pacificação em torno da definição dos logaritmos (CAJORI, 1913c).

Ao longo de todos esses trabalhos, além dos infinitos logaritmos imaginários, Euler teria estabelecido a definição por exponenciais que adotamos hoje: $a^{\log_a x} = x$. Além disso, escreveu extensamente sobre números imaginários e teria sido o primeiro a denominar pela letra e o que conhecemos hoje por número de Euler, que, apesar disso, já era de conhecimento dos matemáticos da época (CAJORI, 1913c).

Por fim, destacamos um trabalho brasileiro de Dias (2005), publicado nos anais do XXIII Seminário Nacional de História; o autor nos apresenta um artigo de um outro brasileiro chamado Leopoldo Amaral publicado em 1930, em que este engenheiro e professor de matemática, criticou duramente as definições propostas por Euler de que números negativos não possuiriam logaritmos reais, usando, inclusive, termos como revolução científica 30 anos antes de Thomas Kuhn.

Dias (2005) nos apresenta uma possível definição de logaritmo alternativa, proposta pelo matemático brasileiro Elon Lages Lima, em que, partindo da definição de Napier e Briggs que relaciona progressões aritméticas e geométricas, preserva-se a relação entre soma e multiplicação ($\log a \cdot b = \log a + \log b$), além de incluir os números negativos através da propriedade $\log x = \log -x$ defendida por John Bernoulli; contudo, se perderia a definição de logaritmo por exponenciais ($a^{\log_a x} = x$).

Dias (2005) destaca ainda o problema em se julgar com os olhos de hoje as discussões do século XVIII, em que as ideias sobre números imaginários e negativos ainda estavam em ebulição e as divergências nos conflitos Bernoulli-Leibniz e Euler-d'Alembert iam para além dos logaritmos, percorrendo, por exemplo, o desenvolvimento da mecânica celeste no segundo caso. Dias conclui seu trabalho com indagações sobre como e porque os matemáticos adotaram as definições de Euler, em um contexto ainda repleto de dúvidas e incertezas.

A partir dessa definição alternativa de logaritmo apresentada por Dias (2005), podemos perceber como a caracterização exponencial ao mesmo tempo em que trouxe novas possibilidades de aplicação aos logaritmos, criou alguns limites às possibilidades de domínio da função logarítmica em relação às propostas iniciais de Napier e Briggs. Isso nos permite

refletir sobre como a história não é linear e óbvia, não podemos afirmar que houve uma absoluta evolução dos conceitos para um patamar superior, mas sim, escolhas foram feitas para adequá-lo a outras necessidades, em um processo complexo que envolvia um contexto social, cultural e de poder dentro da comunidade dos matemáticos ao longo dos últimos 4 séculos.

4 ALGUMAS IDEIAS SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUAS RELAÇÕES COM A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Realizamos aqui inicialmente uma revisão bibliográfica sobre história da matemática, refletimos sobre o que é história, como essas várias versões da história são elaboradas a partir de diferentes vieses ideológicos. Discutimos ainda possíveis caminhos para se incorporar de alguma forma a história no ensino de matemática e as várias dificuldades envolvidas neste processo que observamos na literatura científica analisada.

4.1 HISTÓRIA, HISTORIOGRAFIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Roque (2012), na introdução de sua *História da Matemática*, em um exercício de definir e diferenciar história e historiografia, escreve:

Tornou-se também importante diferenciar a história da historiografia, que é a produção dos historiadores. Diferente da história, que pode ser definida como o conjunto do acontecer humano, objeto de estudo dos historiadores, a historiografia é a escrita sobre esse acontecer, que pode incluir uma atividade crítica, procurando mostrar as bases epistemológicas e políticas sobre as quais os discursos históricos são construídos, exibindo suas pressuposições tácitas (ROQUE, 2012, p.29).

A definição da autora de história como o “conjunto do acontecer humano” nos mostra como esse conceito é abstrato e abrangente, sendo a historiografia um exercício de interpretação que os historiadores fazem sobre a história e o que se produz de fato academicamente. Essa historiografia, como toda a produção científica, muda ao longo do tempo, através de novas explicações, baseadas em novas fontes que trazem novas contribuições ou revisões críticas de pesquisas anteriores.

Sobre o processo envolvido na ciência histórica, Nobre (2014) escreveu sobre o papel do historiador:

o papel do historiador é sempre estar atento à origem das informações que recebe e à diversidade dos caminhos que levaram à concepção do fato histórico consumado. Informações históricas são, naturalmente, oriundas de interpretações e somente com uma análise crítica, a partir de elementos quantitativos, mas com base qualitativa, é que se pode ter clareza sobre a informação adquirida. Elementos qualitativos para a análise do fato histórico, levam o historiador a uma melhor e aprofundada concepção do objeto estudado. E isso pode fazer com que ele tenha maior propriedade sobre interpretação histórica concebida (NOBRE, 2004, p.541).

Nobre (2004) concorda que a história das descobertas científicas não é imutável, com o tempo o que era verdade pode ser revisado e atualizado. Para o autor, após a escrita da história da matemática ao longo dos últimos séculos, a descoberta de novas fontes primárias e grandes mudanças em verdades históricas deixaram de acontecer com tanta frequência, o que ocorre no lugar são reinterpretações relativas a certos processos dentro do debate acadêmico natural do processo científico.

Nesse sentido, Nobre (2004) traz uma série de exemplos de verdades históricas bastante questionáveis, algumas distorcidas por relações de poder, outras por falta de provas concretas, como, por exemplo, a história de Thales de Mileto. Esse matemático teria vivido entre 625 e 547 a.E.C. (antes da Era Comum), contudo as únicas fontes que Nobre (2004) aponta existirem sobre o matemático são os escritos de Heródoto, que viveu mais de 100 anos depois e os de Aristóteles, nascido apenas em 384 a.E.C. Nobre (2004) aponta que pesquisas recentes questionam a possibilidade de Thales ter previsto um eclipse, o que se trataria possivelmente de uma coincidência, e também elencam as grandes dificuldades envolvidas na tradicional anedota da medição da altura das pirâmides, que só seria possível em momentos bastante específicos do ano, levando em conta a angulação das pirâmides com suas sombras.

Se Nobre (2004) destaca o problema das fontes e discute alguns parâmetros metodológicos para pesquisas históricas com foco nas culturas com amplos registros escritos, D'Ambrósio (2012) nos chama atenção além disso para as culturas periféricas e para as características ideológicas, políticas e sociais intrínsecas à construção de uma historiografia:

A história tem servido das mais diversas maneiras a grupos sociais, desde família, tribos e comunidades, até nações e civilizações. Mas sobretudo tem servido como afirmação de identidade. Em qualquer área do conhecimento, uma vez identificados os objetos do seu estudo, a relação de fatos, datas e nomes depende de registros, que podem ser de natureza muito diversa: memórias, práticas, monumentos e artefatos, escritos e documentos. Essas são as chamadas fontes históricas. E a interpretação depende de ideologia, na forma de uma filosofia da história. Esse depender é a essência do que se chama historiografia (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 339).

O autor também discute ao longo deste trabalho que a busca pelas fontes primárias, as mais confiáveis, para basear pesquisas em história, mas que esbarram na exclusão de conhecimento de culturas inteiras que não privilegiaram registros escritos, como lendas, ditos populares, rituais etc. Nesse sentido, D'Ambrósio (2012) discute o programa etnomatemática que tem como proposta historiográfica justamente explorar essas histórias não contadas de povos marginalizados dentro da pesquisa em história por historiografias mais tradicionais. É importante destacar que a historiografia baseada na etnomatemática não se restringe a civilizações e povos antigos, mas também a outros grupos marginalizados em nossa sociedade.

Sobre história da matemática, historiografia e suas diferenças e convergências, Borges (2013) escreve:

enquanto a história da matemática está preocupada com o desenvolvimento, o situar a um lugar no tempo, o desvelar da matemática, a historiografia da matemática preocupa-se em adotar a investigação científica, a reconstruir, a descrever o desenvolvimento do passado sobre um determinado assunto na história. Assim, a historiografia envolve a investigação da evolução do passado para descrever e interpretar o passado no tempo e lugar de uma maneira tão crítica e comparativa quanto possível (BORGES, 2013, p. 7519).

O autor nos traz, novamente, a historiografia como esse exercício crítico e científico de interpretação sobre uma história já contada. Em sequência, seu trabalho discute algumas abordagens historiográficas para história da ciência, dentre elas: presentista, diacrônica, internalista e externalista. Uma historiografia presentista geralmente envolve anacronismos históricos, no processo de utilizar conhecimentos atuais para a verificação da ciência do passado, dessa forma, reforça os grandes “gênios” da ciência e omite uma série de vozes com menos poder. Já a abordagem diacrônica propõe o oposto, deve-se compreender a ciência como uma atividade contextualizada a sua época, essa visão pode expandir o escopo do que foi científico e abarcar métodos que hoje consideramos inválidos. Já a dicotomia entre historiografias internalistas e externalistas envolve a consideração do contexto do fato histórico, na primeira, é desconsiderado, ao contrário da segunda, em que se idealiza a ciência como um exercício coletivo em que uma série de circunstâncias externas políticas, sociais, econômicas, religiosas têm seu impacto (BORGES, 2013).

Transpondo essas noções historiográficas da ciência em geral para a da matemática, podemos questionar uma interpretação de sua história que não leve em conta os contextos da época e da cultura em que determinada matemática foi produzida para, justamente, não cair em anacronismos. Roque (2012), por exemplo, questiona a ideia de que os mesopotâmios teriam uma álgebra e resolviam equações, uma conclusão obtida a partir de traduções anacrônicas dos procedimentos matemáticos desses povos; na busca por encontrar a matemática de hoje na do passado, esse tipo de visão deprecia outras partes dessas culturas que mereceriam mais atenção e uma visão mais contextualizada temporal e culturalmente.

Segundo Saito e Dias (2013), apesar de sempre ter sido escrita, a partir do século XVIII, surgiram esforços para reunir em grandes compêndios uma história geral da matemática, contudo, isso foi feito através exposições lineares e cronológicas, baseadas apenas na sucessão lógica dos conceitos e não levam em conta todo o contexto social e cultural envolvido, logo, numa perspectiva historiográfica presentista e internalista. Isso se repete até em obras mais recentes como ‘Introdução à história da matemática’ de Howard Eves (2004) e ‘História da matemática’ de Carl B. Boyer (1996), traduzidas para o português e bastante difundidas pelas livrarias brasileiras.

O trabalho de Roque (2012) no livro “História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas” foi um marco para a divulgação de uma história da matemática mais adequada às pesquisas mais recentes com historiografias menos anacrônicas e mais contextualizadas, além de ser o primeiro livro de história da matemática baseado em pesquisa originalmente brasileira, segundo a própria autora. Apesar disso, trata-se de um trabalho cujo

objetivo é recontar a história dos povos elencados nessas obras enciclopédicas tradicionais, deixando de lado culturas marginais ao mundo ocidental.

Reflexões sobre essas várias abordagens interpretativas possíveis nos permitem complexificar a pergunta “Qual história da matemática queremos contar?”, que será muito importante na próxima seção em que discutiremos possibilidades de se ensinar matemática associada à sua história, o que dependerá fundamentalmente de qual história o professor escolhe contar em sala de aula.

4.2 HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para o título desta seção, dialogamos com o livro homônimo de Miguel e Miorim (2019), concordamos que pensar em História na Educação Matemática ao invés de, por exemplo, História da Matemática na Educação nos permite expandir os diálogos possíveis entre as diversas áreas de conhecimento e pesquisa envolvidas nesses termos. Assim, buscamos evitar que a História da Matemática seja tratada de forma isolada e descontextualizada da própria História da humanidade que a abrange, o que abre portas para discutirmos nesta seção caminhos para trazer de fato um pensamento histórico para aulas de matemática.

Iniciemos nossas discussões pelo que está posto em termos curriculares no país, a Base Nacional Comum Curricular, documento que estabelece diretrizes curriculares mínimas para todo o Brasil por toda a Educação Básica. Percebemos que este documento possui poucas menções à história da matemática no ensino da disciplina, uma delas no seguinte trecho:

Cumpra também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática (BRASIL, 2018, p. 299).

A única outra menção a história da matemática é feita em uma habilidade sobre sistemas numéricos no 6º ano do ensino fundamental, não há nenhuma menção do termo no currículo do ensino médio na versão final do documento (BRASIL, 2018). Uma versão anterior da BNCC para o Ensino Médio (BRASIL, 2017) trazia uma passagem, inclusive citada na introdução deste trabalho, que relacionava o ensino de uma matemática mais humana, diversa, incompleta através de uma historiografia de vertentes culturais e bastante atualizada, contudo, este texto não se encontra na versão final do documento.

Miguel (1997) apresenta uma série de argumentos favoráveis e alguns questionamentos comuns a participação da história da matemática no ensino e os analisa todos criticamente. Destacamos aqui o problemático argumento de que a história seria uma fonte de motivação aos alunos, o que, segundo o autor, se fosse verdade, significaria que o ensino de história por si só

atrairia a atenção dos alunos automaticamente, o que não se verifica. O autor se mostra bastante cético quanto a possibilidades de a história ser para o ensino de matemática fonte de objetivos, problemas, metodologias, desalienação, conscientização epistemológica, dentre outros, tendo em vista que essas visões são bastante otimistas e não se atentam a pluralidade de historiografias possíveis na escolha de qual história estamos levando à sala de aula.

Em suas considerações finais, Miguel (1997) propõe prudência, considera que a história deve ter um papel problematizador na Educação Matemática, desde que seja “devidamente reconstituída com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático” (MIGUEL, 1997, p. 101). O autor se justifica na crítica aos currículos de sua época (1997), que não traziam os subsídios necessários ao professor, neles, a matemática teria produzido resultados, mas não teria história, visão que, apesar de algumas melhoras, pode-se perceber ainda como um problema no que observamos na BNCC de 2018.

Roque (2014), em sua introdução, escreve sobre um estudo de Fried (2014), em que o autor teria elaborado um panorama de 40 anos sobre pesquisas sobre a incorporação da história no ensino de matemática. Segundo a autora, esta pesquisa parte do princípio de que:

Ele reconhece que é preciso refinar nosso entendimento sobre a natureza da educação matemática em si mesma, se quisermos que a história da matemática não esteja subordinada a noções impostas no currículo – equações, funções, derivadas, geometria. Logo, o artigo não pergunta somente como a história deve ser incorporada ao ensino de matemática, mas que visões sobre este ensino devem ser reelaboradas para acomodar a história (ROQUE, 2014, p. 168).

A partir disso, segundo Roque (2014), para Fried (2014) as iniciativas poderiam ser classificadas em três temas: motivacional, curricular e cultural.

A autora critica as abordagens motivacionais pela possível suposição lógica de que a matemática não seria interessante por si mesma, além disso, a história como área de conhecimento com suas características únicas seria negligenciada, servindo como esse “algo a mais” para apenas “despertar” interesse nos estudantes.

Uma abordagem curricular, para Roque (2014), envolve a inclusão de supostos “tratamentos históricos” a conteúdos matemáticos atuais; essa forma corre riscos em discutir esses conteúdos de forma anacrônica. Ao procurar no passado a história de um conceito que talvez fosse suficientemente distante do que ensinamos hoje de forma que se o taxamos de “primitivo” ou implícito, estamos desconsiderando o contexto cultural dos povos que o desenvolveram.

Por fim, discute-se a temática cultural, que pressupõe que a matemática é cultural, logo, indissociável de sua história. Dessa forma, buscar-se-ia com a história ensinar a matemática como criação humana, inacabada, não restrita a grandes mentes geniais.

Saito e Dias (2013) defendem que uma interface entre história da matemática e ensino envolve ao menos três aspectos favoráveis: a possibilidade de se construir uma visão diferenciada da matemática, como uma área humanizada e não pronta e estática; a reorientação da interpretação do que são os objetos matemáticos a partir dessa nova perspectiva; e a interdisciplinaridade, possível e viável ao trazermos mais contexto para a disciplina, seja com a própria história e seus métodos e particularidades, ou com outras áreas do conhecimento humano.

Esses autores ponderam, contudo, que esses argumentos favoráveis não devem sustentar uma perspectiva de ensino de matemática por sua história, mas sim “buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto da formação deste conceito” (SAITO; DIAS, 2013, p. 93).

Nesse sentido, Saito e Dias (2013) propõem uma perspectiva lógico-histórica na abordagem de história da matemática no ensino, em que “o histórico do objeto é entendido no seu processo de mudança, isto é, etapas de seu surgimento e desenvolvimento, e, o lógico, como meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico desse objeto” (SAITO; DIAS, 2013, p. 93), isso tudo a partir de uma lógica dialética, que estuda o conteúdo mental da linguagem para além da tradicional lógica formal tão presente na matemática contemporânea. A partir desse movimento que reconhece o processo de mudança dos objetos matemáticos, poderíamos distanciar a matemática dessa concepção historiográfica de verdades absolutas tipicamente positivista (SAITO; DIAS, 2013).

Em seu trabalho, Saito e Dias (2013) defendem ainda o ensino com documentos históricos como parte de uma possível interface entre história e educação matemática, ressaltam inclusive a possibilidade de trabalho com outros documentos além dos matemáticos, como: “tratados de música, astronomia, óptica, hidrostática, pneumática, mecânica, pintura, arquitetura, escultura, agrimensura, navegação, cartografia, cosmografia, geografia, alquimia, medicina, teologia” (SAITO; DIAS; 2013, p. 99). Desde que permitam o desenvolvimento de conceitos matemáticos na Educação Básica, esses documentos podem ser ferramentas bastante interessantes a um ensino com história que busca evitar anacronismos, desde que haja plena intencionalidade e planejamento do professor.

Logo, ensinar matemática com história é um processo interdisciplinar por natureza, que demanda um trabalho cuidadoso ao professor, que, mesmo sem uma formação específica em

história, não pode ignorar as poderosas especificidades desta ciência que são o que mais interessa a uma educação matemática crítica e humanizada.

5 PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, fazemos uma breve revisão de literatura sobre nossos métodos e procedimentos de análise de dados, que envolvem a hermenêutica. Em seguida, analisamos fragmentos de seis dissertações de mestrado brasileiras buscando significados conectados a interrogação de nossa pesquisa.

5.1 HERMENÊUTICA

Mondini et al (2017) apresentam em seu trabalho uma hermenêutica filosófica, mais próxima da fenomenologia¹ do que de noções clássicas aristotélicas metódicas e normativas. Trata-se, segundo essas autoras, de uma “teoria universal, abrangente, não particularizada, crítica e presente desde os primórdios da filosofia ocidental” (MONDINI et al, 2017, p. 2).

Temos na hermenêutica um meio para se buscar constituir uma compreensão de textos humanos, o que não pode ser reduzido a um método interpretativo pré-determinado. Mondini et al (2017) busca, em uma série de autores, possíveis definições para compreensão que estaria ligada aos contextos históricos e culturais de todas as ações humanas, em um processo em que é “historicamente constituída pela experiência vivenciada pela pessoa que sempre já é junto ao mundo em que outros também são [...]” (MONDINI et al, 2017, p. 2). Ainda sobre a compreensão:

O milagre da compreensão está no sentido comum entre o que é trazido pela tradição do texto e o intérprete, é um encontro: é a fusão de horizontes. Esse movimento não é nem subjetivo e nem objetivo, mas intersubjetivo, de modo que a compreensão vai se fazendo (MONDINI et al, 2017, p. 5).

Logo, a hermenêutica não é um método para se chegar à verdade e não é possível, por uma perspectiva fenomenológica, estabelecer previamente passos a serem seguidos em uma pesquisa que a envolva. Além disso, segundo Mondini et al (2017), não é possível que uma compreensão esteja livre de preconceitos, logo, um método que busque uma única interpretação correta é também impossível.

Na Educação Matemática, a hermenêutica pode ser um caminho para buscarmos novos sentidos, interpretações e compreensões, como uma “possibilidade rigorosa para a pesquisa, ao trabalhar com a linguagem como horizonte de uma ontologia” (MONDINI et al, 2017, p. 8).

5.2 ANÁLISE DOS FRAGMENTOS DE DISSERTAÇÕES

¹ Fenomenologia, segundo Bicudo (1994) diz respeito a um movimento que envolve a investigação direta de fenômenos experienciados conscientemente, livre de preconceitos o quanto for possível. Recomendamos este capítulo citado para o leitor que deseje conhecer mais sobre.

Assim, escolhermos a hermenêutica para buscar constituir uma compreensão sobre o que dizem dissertações de mestrado quanto a presença da história no ensino de logaritmos na Educação Básica.

Procuramos no banco de dissertações e teses da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – por dissertações ou teses que envolvessem ensino de logaritmos com sua história. Encontramos inicialmente um total de 19 textos, que foram reduzidos a 6 após a leitura dos resumos. Essas 6 pesquisas são dissertações de mestrado profissional ou acadêmico.

Procuramos nos textos nossas unidades de sentido, que compreenderam fragmentos que diziam respeito a nossa interrogação “De que modo a História da Matemática é compreendida no ensino de logaritmos na Educação Básica?”.

Entendemos aqui compreensão como “um movimento em que o sujeito ‘se volta para’ num ir e vir que, cada vez mais, revela novas perspectivas do que é percebido” (SOUZA, 2014, p.36).

Encontramos um total de 17 unidades de sentido, as quais reunimos no quadro a seguir, em que buscamos iniciar um exercício interpretativo norteado por nossa interrogação.

Seguem as referências de todas as dissertações analisadas:

Dissertação 1: NIWA, Seiji. **Uma proposta de ensino de logaritmos utilizando os conceitos de modelagem matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, 2016.

Dissertação 2: OLIVEIRA, A. J. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Natal, 2015.

Dissertação 3: RAMOS, S. S. A. **LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Dissertação 4: PEREIRA, M. C. **Logaritmos: uma abordagem interdisciplinar**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.

Dissertação 5: ANGELIN, E. M. **Logaritmos: História, Teoria e Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2015.

Dissertação 6: GOUVÊA, D. A. **O ensino de logaritmos tendo como eixo norteador a história**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2013.

Cabe observar que nos inspiramos, em termos estruturais de nossa análise, na dissertação de Souza (2014). Assim, organizamos os excertos das dissertações em uma tabela com 4 colunas. A primeira coluna contém as unidades de sentido, trechos significantes à nossa interrogação. Na segunda coluna, as unidades de significado são reescritas das unidades de sentido a partir da consulta de alguns termos no dicionário. Na terceira coluna, buscamos explicitar o sentido que o texto traz à luz da interrogação. Na quarta coluna, as ideias nucleares expressam convergências que fomos observando entre as asserções.

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continua)

Dissertação 1 – Niwa (2016)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P1 - <u>apresentação</u> do <u>conteúdo</u> através de uma <u>abordagem</u> histórica, com o intuito de <u>motivar</u> os estudantes. Nesta etapa, é importante <u>salientar</u> que o <u>conteúdo</u> matemático e o desenvolvimento de toda ciência ali envolvida, não foi fruto de um trabalho simples, com o objetivo de <u>despertar</u> nos estudantes a <u>vontade</u> de aprofundar o conhecimento de determinado conteúdo; (NIWA, 2016, p. 44-45, grifos nossos).	O ato de dar a <u>conhecer</u> um determinado <u>tópico</u> de <u>conhecimento</u> através <u>um modo</u> de encarar a realidade a <u>a partir da</u> <u>história</u> , com o intuito de <u>dar</u> <u>fundamentos</u> aos estudantes. Nesta etapa, é importante <u>fazer</u> <u>ficar visível</u> que o <u>tópico</u> <u>específico</u> matemático e o desenvolvimento de toda a ciência ali envolvida, não foi fruto de um trabalho simples, com o objetivo de <u>fazer com que</u> os estudantes <u>saíam de um estado de</u> <u>indiferença</u> e <u>escolham</u> <u>livremente</u> por <u>determinação</u> <u>própria</u> aprofundar o conhecimento de determinado <u>tópico matemático específico</u> .	A história ao se ensinar matemática deve ser mostrada (se dar a conhecer) aos estudantes com o objetivo de dar razões (motivar) para que saíam de um estado de indiferença (despertem) e se aprofundem por livre escolha nesse tópico matemático específico (conteúdo).	I.N. 1 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 1 – Niwa (2016)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
Do Léxico: <u>Apresentação</u>: ato, processo ou efeito de apresentar(-se); ato de comparecer perante alguém; modo de apresentar-se; ato de dar a conhecer ou submeter algo à apreciação de alguém. <u>Abordagem</u>: ato ou efeito de abordar; abordada, abordo; qualquer tipo de aproximação; modo de tratar ou encarar algo; visão de um assunto; ponto de vista sobre uma questão; maneira ou método de enfocar ou interpretar algo; modo de lidar com algo. <u>Motivar</u>: apresentar (algo) como motivo, como causa de; dar (razões, causas, fundamentos) a; justificar. <u>Conteúdo</u>: tópico, ou conjunto de tópicos, abrangido em determinado livro, carta, documento, anúncio etc.; assunto. <u>Salientar</u>: evidenciar, fazer ficar visível. <u>Despertar</u>: fazer sair ou sair do estado de torpor ou de inércia; fazer readquirir ou readquirir força ou atividade; despertar; ato ou efeito de abandonar a indiferença, a inatividade, ou de iniciar um processo. <u>Vontade</u>: faculdade que tem o ser humano de querer, de escolher, de livremente praticar ou deixar de praticar certos atos; força interior que impulsiona o indivíduo a realizar algo, a atingir seus fins ou desejos; ânimo, determinação, firmeza.			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P2 - [...] procura um ensino de logaritmos diferente do <u>tradicional</u>, onde esse ensino será baseado em uma sequência de atividades com um <u>tratamento histórico</u> para que haja o que ele denomina por <u>(re)significação</u> do <u>conceito</u>. Além da proposta apresentar este <u>tratamento</u> histórico, em suas atividades são propostas <u>problemáticas reais</u> e com certo teor interdisciplinar (NIWA, 2016, p. 24, grifos nossos).	Procura um ensino de logaritmos diferente <u>do que se pratica por hábito há tempos</u>, onde esse ensino será baseado em uma sequência de atividades com um <u>método de abordar algo a partir da história</u> para que seja <u>dotado de novo significado a representação mental do objeto abstrato</u>. Além da proposta apresentar este <u>método de encarar algo a partir da história</u>, em suas atividades são propostos <u>conjuntos de problemas de mesma natureza que existem realmente</u> e com certo teor interdisciplinar.	A história ao se ensinar matemática deve se contrapor ao que já está estabelecido há tempos (tradicional). Isso deve ocorrer através de uma série de atividades envolvendo conjuntos de problemas menos abstratos (problemáticas reais) elaborada com uma visão histórica, de modo a trazer novos significados a objetos matemáticos (conceitos).	I.N. 2 Contrapõe um ensino de logaritmos com história a um ensino tradicional I.N. 3 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos
Do Léxico: <u>Tradicional</u>: fundado naquilo que se se pratica por hábito ou costume adquirido. <u>Tratamento</u>: maneira de receber ou de ser recebido; acolhimento, recepção; Método usado para abordar um assunto, uma situação; abordagem. <u>Significação</u>: A relevância que algo possui; valor, importância: este objeto tem para mim grande significação; dar significado. <u>Conceito</u>: representação mental de um objeto abstrato ou concreto, que se mostra como um instrumento fundamental do pensamento em sua tarefa de identificar, descrever e classificar os diferentes elementos e aspectos da realidade. <u>Problemáticas</u>: conjunto de problemas da mesma natureza ou de um mesmo campo de atuação, ou concernentes a um mesmo objeto; o conjunto das questões que se podem levantar em relação aos meios, pontos de vista ou objetos de estudo de uma ciência ou um sistema filosófico. <u>Reais</u>: que existe realmente; verdadeiro; que não é falso, ilusório ou artificial.			

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 2 – Oliveira (2015)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P3 - recorremos a História com uma <u>finalidade</u> que está diretamente direcionada para a <u>prática</u> pedagógica. Uma <u>preocupação</u> foi a de criar situações que possibilitassem <u>emergir</u> discussões para a aprendizagem do conceito de Logaritmos. Convém informar que os problemas apresentados durante as atividades não são obrigatoriamente os mesmos encontrados na História da Matemática, e sim uma <u>recriação</u> dos mesmos ou a <u>criação</u> de problemas baseados na história e na construção do conceito. Outra <u>preocupação</u> foi buscar procedimentos diferentes daqueles que atualmente possuem uma certa <u>hegemonia</u> no ensino de Matemática, utilizando a História para a <u>promoção</u> de uma aprendizagem significativa (OLIVEIRA, 2015, p. 14, grifos nossos).	Recorremos a História com um <u>objetivo</u> que está diretamente direcionado para a <u>realidade da sala de aula envolvida no trabalho pedagógico</u>. Uma <u>observação preventiva</u> foi a de criar situações que possibilitassem <u>trazer à tona</u> discussões para a aprendizagem do conceito de Logaritmos. Convém informar que os problemas apresentados durante as atividades não são obrigatoriamente os mesmos encontrados na História da Matemática, e sim uma <u>nova forma</u> dos mesmos ou a <u>concepção</u> de problemas baseados na história e na construção do conceito. Outra <u>observação preventiva</u> foi buscar procedimentos diferentes daqueles que atualmente possuem uma certa <u>supremacia em relação a outros</u> no ensino de Matemática, utilizando a História para <u>que seja provocada</u> uma aprendizagem significativa.	A história ao se ensinar matemática deve ter objetivo relacionado a realidade da sala de aula do professor. Para que haja aprendizagem, deve-se dar nova forma a problemas existentes na História ou propor novos baseados nela. Para se ensinar com história, deve-se buscar procedimentos diferentes dos que estão estabelecidos. A História é utilizada para provocar uma aprendizagem significativa.	I.N. 4 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos I.N. 5 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos I.N. 6 Contrapõe um ensino de logaritmos com história a um ensino tradicional I.N. 7 Relaciona a presença da história no ensino de logaritmos a melhorias na aprendizagem
Do Léxico: <u>Finalidade</u>: intenção ou motivação para a realização ou existência (de algo); objetivo, propósito, fim. <u>Prática</u>: o que é real, não é teórico; realidade; capacidade, advinda da experiência; técnica, treinamento. <u>Preocupação</u>: prevenção, opinião antecipada, ou a primeira impressão que uma coisa fez no ânimo de alguém. <u>Emergir</u>: trazer ou vir à tona; tornar-se claro ou compreensível; aparecer, expressar-se, manifestar-se. <u>Criação</u>: ação humana de conceber, de gerar, de dar existência ao que não existe, ou de dar nova forma, novo uso a alguma coisa. <u>Hegemonia</u>: supremacia, domínio, poder que algo ou alguém exerce em relação aos demais; influência absoluta, liderança ou superioridade. <u>Promoção</u>: ato relacionado a: ser a causa de; gerar, provocar.			

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 2 – Oliveira (2015)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P4 - Acreditamos ser dessa forma que a história da matemática participa como <u>ferramenta</u> que <u>auxiliará</u> o professor no ensino com significado e <u>compreensão</u> , <u>auxiliando</u> na construção do conhecimento matemático, o que pode levar à <u>compreensão</u> da matemática como uma ciência <u>dinâmica</u> (OLIVEIRA, 2015, p. 17-18, grifos nossos).	Acreditamos ser dessa forma que a história da matemática participa como um <u>meio que contribuirá para</u> o professor o ensino com significado e <u>entendimento pleno desse significado, contribuindo para</u> a construção do conhecimento matemático, o que pode levar a <u>percepção</u> da matemática como ciência <u>em constante mudança</u> .	A história da matemática é um meio para facilitar o pleno entendimento dos significados da matemática. A história da matemática pode levar a percepção da matemática como ciência mutável.	I.N. 8 Relaciona a presença da história no ensino de logaritmos a melhorias na aprendizagem I.N. 9 Discute possíveis consequências da história no ensino de logaritmos
Do Léxico: <u>Ferramenta</u> : qualquer instrumento necessário à prática profissional; meio para alcançar um fim. <u>Auxiliar</u> : dar auxílio a; ajudar, socorrer; contribuir para; facilitar. <u>Compreensão</u> : faculdade de conter em si, em sua natureza, ou numa categoria, num sistema; faculdade de entender, de perceber o significado de algo; entendimento; perfeito domínio intelectual de um assunto; faculdade mental por meio da qual o significado é apreendido. <u>Dinâmica</u> : que se modifica continuamente, que evolui; que pressupõe movimento, mudança.			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P5 - A história da matemática atuaria como um elemento de <u>motivação</u> e <u>geração</u> de habilidades matemáticas, cuja <u>apresentação</u> traria o <u>esclarecimento</u> de “porquês”, matemáticos que comumente são questionados pelos alunos em quase todos os níveis de ensino. (OLIVEIRA, 2015, p. 24, grifos nossos).	A história da matemática atuaria como um elemento <u>que traga razões/motivos e dê origem a</u> habilidades matemáticas, cuja <u>exibição a um grupo</u> traria a <u>elucidação</u> de “porquês” matemáticos que comumente são questionados pelos alunos em quase todos os níveis de ensino.	A história da matemática traz razões para que o aluno estude. A história da matemática é capaz de gerar habilidades matemáticas. A história da matemática no ensino atua através da elucidação de questionamentos sobre o sentido da disciplina.	I.N. 10 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender I.N. 11 Relaciona a presença da história no ensino de logaritmos a melhorias na aprendizagem I.N. 12 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos
Do Léxico: <u>Motivação</u> : motivo, causa; conjunto de processos que dão ao comportamento uma intensidade, uma direção determinada e uma forma de desenvolvimento próprias da atividade individual. <u>Geração</u> : ato ou efeito de: dar existência a; brotar, germinar; ser a causa ou a origem de. <u>Apresentação</u> : ato, processo ou efeito de apresentar(-se); ato de comparecer perante alguém; modo de apresentar-se; ato de dar a conhecer ou submeter algo à apreciação de alguém. <u>Esclarecimento</u> : ato ou efeito de clarear, de explicar o sentido de; aclaração, elucidação; dado elucidador; informação.			

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 3 – Ramos (2015)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERTÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P6 - Nessa perspectiva, a História da Matemática deve ser <u>abordada</u> de forma a possibilitar o aluno a entender que o conhecimento matemático é um <u>processo</u>, construído historicamente a partir de necessidades <u>reais</u> e de situações <u>concretas</u>, dentro de um contexto histórico e o professor tem papel fundamental nessa <u>abordagem</u>. (RAMOS, 2015, p. 8, grifos nossos).	Nessa perspectiva, <u>deve-se lidar com</u> História da Matemática de forma a possibilitar o aluno a entender que o conhecimento matemático é uma <u>ação contínua em desenvolvimento</u>, construído historicamente a partir de necessidades <u>que existem realmente</u> e situações <u>ligadas à realidade</u>, dentro de um contexto histórico e o professor tem papel fundamental <u>nessa forma de lidar com a História</u>.	A História da Matemática deve ser lidada de forma a possibilitar que o aluno entenda o conhecimento matemático como um processo ligado às necessidades humanas. O Professor tem um papel fundamental para História no ensino de matemática.	I.N. 13 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos. I.N. 14 Discute o papel do professor no ensino de logaritmos com história.
Do Léxico: <u>Abordar</u>: abordada, abordo; qualquer tipo de aproximação; modo de tratar ou encarar algo; visão de um assunto; ponto de vista sobre uma questão; maneira ou método de enfocar ou interpretar algo; modo de lidar com algo. <u>Processo</u>: ação continuada, realização contínua e prolongada de alguma atividade; seguimento, curso, decurso; sequência contínua de fatos ou operações que apresentam certa unidade ou que se reproduzem com certa regularidade; andamento, desenvolvimento, marcha. <u>Reais</u>: que existe realmente; verdadeiro; que não é falso, ilusório ou artificial. <u>Concretas</u>: que ou o que é real, existente, verdadeiro; ligado à realidade, ao que é palpável, ao que pode ser captado pelos sentidos.			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERTÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P7 - A ausência do <u>desenvolvimento</u> histórico da construção do conhecimento matemático nos livros didáticos <u>passa</u> a ideia de que a Matemática é uma disciplina <u>pronta</u> e acabada destinada à raros intelectuais, prejudicando a aprendizagem (RAMOS, 2015, p. 86, grifos nossos).	A ausência de um <u>processo progressivo</u> histórico na construção do conhecimento matemático nos livros didáticos <u>remete</u> a ideia de que a matemática é uma disciplina <u>finalizada</u>, sem novas possibilidades de <u>expansão</u> e acabada, destinada à raros intelectuais, prejudicando a aprendizagem.	Não discutir história nas aulas de matemática conduz a uma impressão de que a disciplina já teve sua construção finalizada e prejudica a aprendizagem.	I.N.15 Relaciona problemas de aprendizagem a ausência de história nas aulas de matemática
Do Léxico: <u>Desenvolvimento</u>: ação ou efeito de: fazer aumentar ou aumentar a capacidade ou possibilidade de; fazer progredir ou progredir; desenrolar(-se), prosseguir; dar ou ter origem; reproduzir(-se), multiplicar(-se), propagar(-se). <u>Passar</u>: fazer seguir (mensagem); transmitir, remeter, enviar. <u>Pronta</u>: inteiramente feito ou construído; terminado;			

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 4 – Pereira (2016)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P8 – Além disso, a história e conceito de cada aplicação pode contextualizar e <u>despertar</u> a <u>curiosidade</u> e dessa forma aumentar a vontade de aprender. Os alunos se perguntam e questionam constantemente aos seus professores de Matemática para que <u>servem</u> logaritmos, qual a necessidade de 46studar-los e se aprender logaritmos irá beneficiá-los no futuro. Logo, diante disso, utilizar-se destas <u>atividades</u> no contexto escolar, poderá ajudar a responder estes questionamentos e dessa forma, poderá <u>motivar</u> ao aprendizado deste conteúdo tão importante (PEREIRA, 2016, p. 35, grifos nossos).	Além disso, a história e conceito de cada aplicação pode contextualizar e <u>fazer sair de um estado de indiferença o desejo intenso de experimentar coisas novas</u> e dessa forma aumentar a vontade de aprender. Os alunos se perguntam e questionam constantemente aos seus professores de Matemática <u>para que são úteis</u> os logaritmos, qual a necessidade de 46studar-los e se aprender logaritmos irá beneficiá-los no futuro. Logo, diante disso, utilizar-se destas <u>tarefas que induzem ação</u> no contexto escolar, poderá ajudar a responder estes questionamentos e dessa forma, poderá <u>justificar</u> o aprendizado deste conteúdo tão importante.	A história pode despertar o desejo do aluno em experimentar coisas novas e sua vontade de aprender matemática por consequência. Tarefas que envolvam História podem ajudar a responder questionamentos de alunos quanto a utilidade dos logaritmos e justificar sua aprendizagem.	I.N. 16 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender I.N. 17 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos
Do Léxico: <u>Despertar</u>: fazer sair ou sair do estado de torpor ou de inércia; fazer readquirir ou readquirir força ou atividade; despertar; ato ou efeito de abandonar a indiferença, a inatividade, ou de iniciar um processo. <u>Curiosidade</u>: desejo intenso de ver, ouvir, conhecer, experimentar algo ger. Novo, original, desconhecido. <u>Servir</u>: trabalhar em favor de; ser útil, conveniente, ou adequado para. <u>Atividade</u>: qualidade do que é ativo; faculdade ou possibilidade de agir, de se mover, de fazer, empreender coisas; <u>Motivar</u>: apresentar (algo) como motivo, como causa de; dar (razões, causas, fundamentos) a; justificar.			
Dissertação 5 – Angelin (2015)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P9 – No Ensino Médio pouco se fala sobre a história e as aplicações dos logaritmos. Muitos estudantes são <u>desmotivados</u> a aprender determinado conteúdo matemático, pois não conhece onde surgiu aquele conhecimento, quem o produziu e também não sabem quais são suas aplicações no seu cotidiano. (ANGELIN, 2015, p. 42, grifos nossos).	No Ensino Médio pouco se fala sobre a história e as aplicações dos logaritmos. Muitos estudantes são <u>desinteressados</u> a aprender determinado conteúdo matemático, pois não conhecem onde surgiu aquele conhecimento, quem o produziu e também não sabem quais são suas aplicações no seu cotidiano.	Estudantes são desinteressados em aprender por não conhecerem a história do conhecimento matemático.	I.N. 18 Relaciona problemas de aprendizagem a ausência de história nas aulas de matemática

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 5 – Angelin (2015)			
Do Léxico: <u>Desmotivados</u> : sem motivo, sem fundamento; infundado, gratuito, imotivado; sem entusiasmo; desinteressado, desestimulado.			
Dissertação 6 – Gouvêa (2013)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P10 - Acreditamos também que a história da Matemática possa ser <u>utilizada</u> como <u>ferramenta</u> no processo ensino-aprendizado dos logaritmos, <u>motivando a curiosidade</u> do discente pelas transformações que o tema sofreu no decorrer da história, no que se referem ao <u>conceito</u> , às propriedades e aos <u>personagens</u> , fazendo assim <u>despertar o caráter</u> da <u>curiosidade</u> científica no discente. (GOUVÊA, 2013, p. 17, grifos nossos).	Acreditamos também que a história da Matemática possa ser <u>tornada funcional/útil</u> como <u>um meio para se alcançar</u> o processo ensino-aprendizado dos logaritmos, <u>suprindo de razões/fundamentos o desejo intenso de conhecer coisas novas</u> do discente pelas transformações que o tema sofreu no decorrer da história, no que se referem ao <u>objeto de conhecimento abstrato</u> , às propriedades e às <u>pessoas de papéis relevantes para o desenvolvimento dos logaritmo ao longo da história</u> , fazendo assim <u>sair de um estado de indiferença o desejo intenso de experimentar algo novo uma nova característica</u> no discente.	A história da matemática é um meio para se alcançar o ensino-aprendizagem dos logaritmos.	I.N. 19 Relaciona a presença da história no ensino de logaritmos a melhorias na aprendizagem
		A história da matemática traz motivos para que o aluno aprenda matemática.	I.N. 20 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender
		A história da matemática deve ser trabalhada associando conceitos, propriedades e pessoas envolvidas na construção dos logaritmos.	I.N. 21 Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos
Do Léxico: <u>Utilizar</u> : empregar (algo) em ou para determinado fim; tornar (algo) útil, proveitoso; aproveitar. <u>Ferramenta</u> : meio para alcançar um fim. <u>Motivar</u> : apresentar (algo) como motivo, como causa de; dar (razões, causas, fundamentos) a; justificar. <u>Curiosidade</u> : desejo intenso de ver, ouvir, conhecer, experimentar algo ger. novo, original, desconhecido. <u>Conceito</u> : representação mental de um objeto abstrato ou concreto, que se mostra como um instrumento fundamental do pensamento em sua tarefa de identificar, descrever e classificar os diferentes elementos e aspectos da realidade. <u>Personagens</u> : pessoa que é objeto de atenção por suas qualidades, posição social ou por circunstâncias. <u>Despertar</u> : fazer sair ou sair do estado de torpor ou de inércia; fazer readquirir ou readquirir força ou atividade; despertar; ato ou efeito de abandonar a indiferença, a inatividade, ou de iniciar um processo. <u>Caráter</u> : qualidade peculiar; especificidade, cunho;			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P11 - A <u>abordagem</u> histórica é importante, pois, apresentação dos conteúdos por meio da história <u>mostrará</u> para o aluno que a Matemática está " <u>linkada</u> " com outras áreas do conhecimento e que não é uma disciplina <u>isolada</u> . (GOUVÊA, 2013, p. 17, grifos nossos).	O método com o qual se lida <u>através da história</u> é importante, pois, apresentação dos conteúdos por meio da história <u>tornará evidente</u> para o aluno que a Matemática está <u>conectada</u> com outras áreas do conhecimento e que não é uma disciplina <u>separada intelectualmente das outras</u> .	Ensinar com história da matemática torna evidente ao aluno que a matemática está conectada a outras áreas do conhecimento.	I.N. 22 Discute possíveis consequências da história no ensino de logaritmos

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(continuação)

Dissertação 6 – Gouvêa (2013)			
Do Léxico: <u>Abordagem</u>: ato ou efeito de abordar; abordada, abordo; qualquer tipo de aproximação; modo de tratar ou encarar algo; visão de um assunto; ponto de vista sobre uma questão; maneira ou método de enfocar ou interpretar algo; modo de lidar com algo. <u>Mostrará</u>: tornar patente, indubitável, evidente; evidenciar, provar, demonstrar. <u>Linkar</u>: Colocar ou criar <i>links</i> que, por meio de hiperligações, conectam e redirecionam o usuário para outro lugar, através de um clique: linkar o título do artigo; linkar um produto ao seu preço. <u>Isolada</u>: pôr(-se) à parte, afastar(-se) em sentido material, intelectual ou espiritual; separar(-se); tornar desunido; extrair, separar.			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P12 – Concordamos com os autores, pois acreditamos que ao longo do ensino-aprendizagem quando <u>utilizamos</u> a história, temos uma melhor <u>aceitação</u> por parte do aluno criando uma <u>humanização</u> da Matemática e <u>fomentando</u> nestes um ambiente de melhor relação com o conteúdo. Neste sentido, a história apresentada é mais uma <u>ferramenta</u> para dar significado ao conteúdo e melhorar o aprendizado. (GOUVÊA, 2013, p. 18, grifos nossos).	Concordamos com os autores, pois acreditamos que ao longo do ensino-aprendizagem quando <u>empregamos a história com um objetivo didático</u>, temos uma melhor <u>concordância</u> por parte do aluno criando uma <u>aproximação da realidade humana</u> da Matemática e <u>estimulando</u> nestes um ambiente de melhor relação com o conteúdo. Neste sentido, a história apresentada é mais um <u>meio cujo fim</u> é dar significado ao conteúdo e melhorar o aprendizado.	Ensinar com história da matemática faz com que o aluno aceite mais facilmente os conteúdos e, dessa forma, entendam a matemática como mais próxima da realidade humana. A história no ensino de logaritmos busca dar significado ao conteúdo e melhorar o aprendizado.	I.N. 23 Discute possíveis consequências da história no ensino de logaritmos I.N. 24 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender
Do Léxico: <u>Utilizar</u>: empregar (algo) em ou para determinado fim; tornar (algo) útil, proveitoso; aproveitar. <u>Aceitação</u>: ato ou efeito de concordar, de anuir; aquiescência, anuência; ato ou efeito de aprovar, de considerar bom; aplauso, aprovação; ato ou efeito de respeitar, de adotar (doutrina, teoria etc.). <u>Humanização</u>: tornar(-se) humano, dar ou adquirir condição humana; humanar(-se); <u>Fomentar</u>: proporcionar os meios para o desenvolvimento de (algo); estimular, promover, desenvolver. <u>Ferramenta</u>: meio para alcançar um fim.			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P13 – Acreditamos que apresentando a História da criação do logaritmo (o ambiente em que isso aconteceu, contradições históricas) aos alunos cria-se nos discentes um ambiente de <u>curiosidade</u>. (GOUVÊA, 2013, p. 27, grifos nossos).	Acreditamos que apresentando a História da criação do logaritmo (o ambiente em que isso aconteceu, contradições históricas) aos alunos cria-se nos discentes um ambiente de <u>desejo intenso de aprender coisas novas</u>.	Ensinar logaritmos com história da matemática torna os alunos mais desejosos em aprender sobre o tema.	I.N. 25 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender
Do Léxico: <u>Curiosidade</u>: desejo intenso de ver, ouvir, conhecer, experimentar algo ger. novo, original, desconhecido.			

Quadro 1 – Análise dos fragmentos de dissertações

(conclusão)

Dissertação 6 – Gouvêa (2013)			
UNIDADES DE SENTIDO	UNIDADES DE SIGNIFICADO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
P14 – É importante salientar, que acreditamos que levar a história dos logaritmos para sala de aula é necessário, pois, a partir dela, discentes e docentes poderão se <u>entusiasmar</u> com o tema, através do entendimento sobre a <u>motivação</u> do uso desta importante ferramenta matemática o período histórico em que foi inventada, como se deu seu desenvolvimento e qual sua <u>importância</u> nos dias de hoje (GOUVÊA, 2013, p. 145, grifos nossos).	É importante salientar, que acreditamos que levar a história dos logaritmos para sala de aula é necessário, pois, a partir dela, discentes e docentes poderão <u>despertar em si mesmos uma dedicação fervorosa</u> com o tema, através do entendimento sobre a <u>razão</u> do uso desta importante ferramenta matemática o período histórico em que foi inventada, como se deu seu desenvolvimento e <u>quais seus méritos em relação a outras</u> nos dias de hoje.	A história no ensino de logaritmos é necessária por poder trazer nos alunos o desejo em se dedicarem no tema, ao entenderem as razões de seu uso quando de seu processo histórico desde sua concepção.	I.N. 26 Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender
Do Léxico: <u>Entusiasmar</u> : despertar, provocar: uma dedicação fervorosa, ardor, paixão. <u>Motivação</u> : motivo, causa; conjunto de processos que dão ao comportamento uma intensidade, uma direção determinada e uma forma de desenvolvimento próprias da atividade individual. <u>Importância</u> : destaque em uma escala comparativa; valor, mérito, interesse.			

Fonte: produção nossa.

5.3 CONVERGÊNCIAS E CATEGORIAS ABERTAS

Com o movimento de interpretação representado no Quadro 1, pudemos identificar ideias nucleares para a compreensão sobre os modos e objetivos com que a história dos logaritmos deve estar envolvida no ensino de matemática na visão de pesquisas brasileiras na área.

A partir disso, seguindo esse movimento hermenêutico, buscamos convergências a partir de uma nova leitura das asserções articuladas e das 26 ideias nucleares encontradas e as registramos no quadro a seguir.

Quadro 2 – Convergências

(continua)

IDEIAS NUCLEARES	CATEGORIAS
Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender (1, 10, 16, 20, 24, 25, 26)	Para que se ensinar logaritmos com história da matemática
Caracteriza como a história deve participar do ensino de logaritmos (3, 4, 5, 12, 13, 17, 21)	Caracterização do processo de ensino de logaritmos com história da matemática

Quadro 2 – Convergências

(conclusão)

IDEIAS NUCLEARES	CATEGORIAS
Discute o papel do professor no ensino de logaritmos com história (14)	Caracterização do processo de ensino de logaritmos com história da matemática
Contrapõe um ensino de logaritmos com história a um ensino tradicional (2, 6)	
Relaciona a presença da história no ensino de logaritmos a melhorias na aprendizagem (7, 8, 11, 19)	Consequências do ensino de logaritmos com história da matemática para a aprendizagem
Discute possíveis consequências da história no ensino de logaritmos (9, 22, 23)	
Relaciona problemas de aprendizagem a ausência de história nas aulas de matemática (15, 18)	

Fonte: produção nossa.

5.4 INTERPRETAÇÃO DAS CATEGORIAS

A fim de facilitar o processo de interpretação das categorias, optamos por separá-lo em subseções para cada uma delas, não há hierarquização no ordenamento e não são discussões isoladas, ideias nucleares de diferentes categorias podem ser articuladas caso se observem convergências relevantes que a separação não evidencie.

5.4.1 Para que se ensinar logaritmos com história da matemática

O “para que” desta categoria diz respeito a objetivos, fins, neste caso, quais seriam os objetivos de se recorrer a história da matemática para ensinar logaritmos. Reunimos nesta categoria apenas um grupo de ideias nucleares, intituladas “Propõe que ensinar logaritmos com história motiva o aluno a aprender”.

Algumas ideias nucleares (I.N.1, I.N.10, I.N.26) estão associadas a ideia de que a história da matemática seria capaz de “motivar”, dar “razões” para o aluno estudar logaritmos. O uso de termos ambíguos como “despertar” (I.N.1), “entusiasmar” (I.N.10) ou “curiosidade” (I.N.25) sugere que os alunos são uma massa homogênea que parte de um estado de inércia e apatia, sendo a história da matemática uma ferramenta para uma mudança cognitiva.

As afirmações dos autores quanto a essa associação entre história-motivação-aprendizagem em alguns casos (I.N.25, I.N.26) são bastante contundentes e absolutas, através de estruturas verbais indicativas, sem ressalvas ou condições. Nessas ideias nucleares, a função motivadora da história é colocada como algo “necessário”, que contribuiria de maneira significativa para que o aluno se sinta motivado a estudar logaritmos.

Discutimos algumas concepções de história no ensino de matemática como fonte de motivação para o ensino de matemática no capítulo 4, foram todas vistas de forma bastante crítica pelos autores que trouxemos. Miguel (1997) considera a motivação uma categoria psicológica, a caracteriza como uma postura ingênua, e justifica suas críticas atribuindo ao “ensino para motivar” um enfoque mecanicista, em que se considera que uma pessoa age por impulsos e incentivos e não a partir de suas percepções de si próprio e do mundo ao seu redor.

Roque (2014) também critica essa abordagem:

Apesar de bem intencionado, o tema motivacional parece problemático. Em primeiro lugar, supõe-se, ainda que inconscientemente, que o conteúdo matemático não pode ser interessante por si mesmo, logo deve ser embelezado com histórias, anedotas ou imagens. A história é algo a ser acrescentado às aulas de matemática a fim de tornar o ensino menos enfadonho. Em segundo lugar, negligencia-se a história como um corpo de conhecimentos a ser levado a sério e ensinado, sendo somente um “a mais” nas estratégias de ensino esperadas dos professores. O principal aqui é que a história possa despertar os estudantes, não importando se o que se conta é informativo, verdadeiro ou pertinente. Por estas razões, o tema motivacional acaba por não fazer justiça nem à matemática nem à história – a matemática é tida como um saber enfadonho por definição; e a especificidade da história é colocada de lado (ROQUE, 2014, p. 168)

A autora também aponta a ingenuidade desse tema motivacional, mas também questiona como ele implica em concepções negativas tanto da matemática quanto da história no ensino, parte-se do pressuposto de que a matemática é por si só “enfadonha” e de que a história é uma coadjuvante para embelezá-la.

Observamos, portanto, que as ideias nucleares nas dissertações analisadas compreendem a história como uma disciplina secundária para trazer razões para que os alunos estudem a matemática, pressuposta como negativa, tais ideias estão em clara dissonância com o que propõem os trabalhos na área de história que lemos e discutimos ao longo de nosso texto.

5.4.2 Caracterização do processo de ensino de logaritmos com história da matemática

Nesta categoria, estão reunidas ideias nucleares que expressam as maneiras como as dissertações consultadas compreendem características e passos a serem tomados no processo de se ensinar logaritmos com história da matemática.

Algumas ideias nucleares contrapõem um ensino de matemática com história a um ensino “tradicional” (I.N.2) que fuja de uma “hegemonia” que haveria no ensino de matemática (I.N.6). Acreditamos que esse ensino hegemônico e tradicional se aproxime do paradigma do exercício que Skovsmose (2000) associa a uma concepção de aula com dois momentos: inicialmente o professor apresenta algumas técnicas matemáticas aos alunos, que depois devem realizar exercícios selecionados e elaborados por entidades externas à aula. O autor destaca que a premissa principal deste ensino tradicional é a existência de apenas uma

resposta correta nas atividades desenvolvidas. Nessas ideias nucleares em discussão, a história é colocada como um recurso para se distanciar deste paradigma do exercício, o que nem sempre pode se confirmar, já que é possível organizar uma aula que envolva história dos logaritmos nessa estrutura tradicional, com exercícios de resposta única e exposições pelo professor dos conteúdos. Portanto, para que a história faça parte de um ensino menos tradicional, faz-se necessário recorrer a outras estratégias e metodologias associadas a ela.

Outras ideias nucleares discutem características de atividades de logaritmos envolvendo sua história. A I.N.3 propõe uma série de problemas menos abstratos, creditando à história um caminho para realizar isso. Roque (2012), conforme já citamos neste trabalho, escreve que a história da matemática pode ser um caminho para a contextualização significativa de conteúdos matemáticos abstratos frente aos comuns questionamentos sobre a utilidade prática da disciplina e aos pedidos por uma matemática mais concreta ou real, que, na verdade, representariam apenas demandas dos alunos por mais contexto e conexões entre matemática e humanidade. A I.N.12 se aproxima deste posicionamento teórico, colocando a história como meio de elucidar questionamentos sobre o sentido da disciplina.

Na I.N.5, compreende-se que uma boa maneira de se ensinar logaritmos com história deve envolver problemas históricos adaptados ou novas situações baseadas em fatos históricos; há uma proposta semelhante na I.N.3, em que a elaboração das atividades deve envolver uma “visão histórica” ou um “tratamento histórico”. Roque (2014) categoriza em um tema curricular propostas que partem de um tópico matemático e buscam um tratamento histórico para oferecer algum tipo de contraste entre a matemática do passado e a atual. A autora critica esse tipo de atividade por enxergar uma tendência de se menosprezar neste processo o conhecimento do passado, tido como contendo implicitamente, de forma mais “primitiva”, conceitos atuais. A I.N.21 também traz algo semelhante ao propor que se mostre as transformações que o conceito de logaritmo sofreu ao longo dos tempos através de conceitos, propriedades e personagens.

A I.N.4 coloca que o professor tem um “papel fundamental” ao se ensinar logaritmos com história, em sintonia com a I.N.4, segundo a qual, os objetivos ao se ensinar dessa forma devem estar contextualizados a cada sala de aula. Ambas as características são bastante relevantes à Educação como um todo, e, portanto, fundamentais no ensino de matemática com história.

Na I.N.13, a história da matemática é um caminho para que o aluno possa compreender que o conhecimento matemático foi criado em um processo ligado às necessidades humanas. Temos aqui uma concepção próxima ao tema cultural discutido por Roque (2014), em que se enxerga a matemática como uma atividade humana, em que sua história é uma parte

fundamental para a identidade da disciplina. Observamos nesta categoria uma diversidade de compreensões sobre sentido da história da matemática para o ensino de logaritmos presentes nas caracterizações de como deve ocorrer este processo como a tentativa de fugir de um ensino tradicional, o tema curricular e o tema cultural.

5.4.3 Consequências do ensino de logaritmos com história da matemática para a aprendizagem

Nessa categoria, reunimos ideias nucleares que dizem das consequências de um ensino de logaritmos com história da matemática para a aprendizagem dos alunos.

As ideias I.N.7 e I.N.8, que surgem de dois fragmentos distintos de uma mesma dissertação, compreendem a história como um meio a ser utilizado para promover uma aprendizagem significativa de logaritmos (I.N.7) ou facilitar o entendimento de significados (I.N.8). Os termos “meio” e “utilizar” sugerem a história como uma disciplina anexa, secundária, uma ferramenta em um esforço direcionado apenas a aprendizagem de um conceito matemático. Trabalhar matemática com sua história, para Roque (2014), demanda considerarmos ambas as disciplinas como indissociáveis, logo, nossos objetivos ao trabalhá-las juntas deve ser a aprendizagem de ambas.

As ideias I.N.11 e I.N.18 trazem afirmações demasiado contundentes e categóricas que estabelecem condicionalidades diretas entre ensinar ou não com história e o aluno aprender matemática; seja tratando a história como capaz de gerar habilidades matemáticas (I.N.11) ou por atribuir o desinteresse dos alunos ao desconhecimento da história dos conteúdos. Ambas podem ser consideradas ingênuas pela falta de ressalvas em creditar um poder exagerado para o ensino com história.

A ideia I.N.9 compreende que a história da matemática pode levar os alunos a entender a matemática como ciência mutável; a I.N.15 considera que não discutir história nas aulas de matemática leva a impressão de que a disciplina já teve sua construção finalizada. Saito e Dias (2013) apontam essa possibilidade de mostrar a matemática como criação humana e inacabada como uma boa justificativa para sua inclusão em sala de aula; outro ponto favorável apontado por esses autores é a possibilidade de uma interdisciplinaridade entre as duas disciplinas. Observamos algo próximo a esse último ponto na ideia I.N.22, que considera que ensinar com história torna evidente ao aluno que a matemática não está isolada de outras áreas do conhecimento.

6 Algumas considerações

Estudar a história da matemática, e mais especificamente a história dos logaritmos, nos revela quão contraintuitivo pode ser o processo de sua criação e nos possibilita questionar e entender de formas diferentes e em ordenamentos não convencionais conceitos cristalizados nos currículos tradicionais da disciplina.

Em nossa exploração da história dos logaritmos, mostramos a diversidade de problemas, definições e abordagens envolvendo esse conceito matemático, envolvendo aritmética, álgebra, geometria, em diferentes graus de protagonismo; além da complexa questão da finalidade, “para que servem os logaritmos?” muitos perguntam, e a história traz múltiplas respostas em diversos contextos para essa pergunta.

O capítulo de História dos logaritmos se justifica ainda pela natureza exploratória desta pesquisa, cujo objetivo é chamar atenção de forma inicial para a relevância de uma problemática de pesquisa, para que futuros trabalhos possam explorar de forma mais aprofundada essas e novas questões.

Após nossa tentativa de contar uma, fomos estudar sobre o que de fato é história, história da matemática e o que essas áreas têm a contribuir com a Educação Matemática. Não há uma história única, há diversas perspectivas historiográficas possíveis que podem nortear ideologicamente e causar impactos quando aproximamos história ao ensino de matemática e que, portanto, devem ser levadas em conta.

Nossa análise hermenêutica de trechos de dissertações de mestrado que discutem história no ensino de logaritmos, tinha como foco pensar sobre o modo que a História da Matemática é compreendida no ensino de logaritmos na Educação Básica. Nessa busca encontramos compreensões equivocadas, que atribuem à história um poder de motivar alunos a aprender matemática, algo bastante distanciado da literatura científica que apresentamos sobre o assunto. Também encontramos compreensões que levam em conta o possível papel da história em narrar uma matemática como ciência incompleta e humana, e outras que discutem a importância do professor e do contexto de cada sala de aula em qualquer proposta de intervenção didática.

Apesar de algumas ideias analisadas terem envolvido interdisciplinaridade, uma lacuna observada em nossa análise foi a falta de discussões sobre diferentes perspectivas historiográficas e seus impactos em um ensino de matemática que envolva história, cuja participação em uma articulação interdisciplinar com a matemática poderia ser assim aprofundada e complexificada.

Encontramos, sobretudo, que discutimos sobre uma problemática de pesquisa pouco explorada, com muito espaço para novos olhares, experiências a serem relatadas em pesquisas acadêmicas. Esperamos ter contribuído de alguma forma nesse debate.

REFERÊNCIAS

- ANGELIN, E. M. **Logaritmos: história, teoria e aplicações**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=1775_441250aed895426b587703232ec977e08caca2dd. Acesso em 29 nov. 2020.
- BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino em Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, 2012. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185>. Acesso em: 18 jul. 2020.
- BICUDO, M. A. V. Apresentação. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa qualitativa: segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011. p. 7-10.
- BICUDO, M. A. V. Sobre a fenomenologia. In: BICUDO, M.A.V.; ESPOSITO, V.H.C. (org.). **Pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: UNIMEP, 1994, p. 15-22.
- BORGES, M. F. As abordagens historiográficas da matemática e sua importância para a Educação Matemática. In: Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 7., 2016, Montevideu. **Anais [...]**. Montevideu, 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/19287/1/Borges2013As.pdf>. Acesso em 28 out. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular: educação é a base, Ensino Médio, 2ª versão**. Brasília, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular: educação é a base, versão final**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em 17 ago. 2020.
- BRUCE, I. The agony and the ecstasy: the development of logarithms by henry briggs. **The Mathematical Gazette**, v. 86, n. 506, p. 216-227, 2002.
- CAJORI, F. History of the exponential and logarithmic concepts. **The American Mathematical Monthly**, v. 20, n. 1, p. 5-14, 1913a.
- CAJORI, F. History of the exponential and logarithmic concepts. **The American Mathematical Monthly**, v. 20, n. 2, p. 35-47, 1913b.
- CAJORI, F. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. **The American Mathematical Monthly**, v. 20, n. 3, p. 75-84, 1913c.
- CAJORI, F. History of the exponential and logarithmic concepts. **The American Mathematical Monthly**, v. 20, n. 4, p. 107-117, 1913d.

CAJORI, F. Algebra in Napier's day and alleged prior inventions of logarithms. *In*: KNOTT, C. G. (org.). **Napier tercentenary memorial volume**. Londres: LONGMANS, GREEN AND COMPANY, 1915. p. 93-109.

D'AMBRÓSIO, U. Tendências e perspectivas historiográficas e novos desafios na história da matemática e na educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.3, p. 336-347, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12769>. Acesso em: 25 out. 2020.

DIAS, A. L. M. *In*: Simpósio Nacional de História, 23., 2005, Londrina. **Anais [...]**. Londrina: Associação Nacional de História, 2005. Disponível em: <http://www.encontro2014.rj.anpuh.org/resources/anais/anpuhnacional/S.23/ANPUH.S23.0107.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2020.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Vicente8.pdf. Acesso em: 10 maio 2020.

GOUVÊA, D. A. **O ensino de logaritmos tendo como eixo norteador a história**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2013. Disponível em: <https://tede.ufrj.br/jspui/handle/jspui/2491>. Acesso em 30 nov. 2020.

HOBSON, E. W. **John napier and the invention of logarithms**. Cambridge: University Press, 1914.

KNOTT, C. G. Preface. *In*: KNOTT, C. G. (org.). **Napier tercentenary memorial volume**. Londres: LONGMANS, GREEN AND COMPANY, 1915.

MENDES, I. A.; SOARES, E. C. **LogAritmos: números da razão**. São Paulo: Livraria da Física, 2019.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, v. 8, 1997, p. 73-103.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática: propostas e desafios**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MONDINI, F.; MOCROSKY, L. F.; BICUDO, M. A. V. A hermenêutica em educação matemática: compreensões e possibilidades. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 12, n. 1, p. 1-10, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11nespp317>. Acesso em: 10 ago. 2020.

MOULTON, J. F. The invention of logarithms, its genesis and growth. *In*: KNOTT, C. G. (org.). **Napier tercentenary memorial volume**. Londres: LONGMANS, GREEN AND COMPANY, 1915. p. 1-32.

NAPIER, J. **The description of the wonderful canon of logarithms**, and the use of which not only in Trigonometry, but also in all Mathematical Calculations, most fully and easily explained in the most expeditious manner. Edinburgo, 1614. Disponível em: <http://17centurymaths.com/contents/napiercontents.html>. Acesso em: 20 mar. 2020

NAPIER, J. **The construction of the wonderful canon of logarithms**: and the relations of these to the natural numbers. Edinburgo, 1619. Disponível em: <http://17centurymaths.com/contents/napiercontents.html>. Acesso em: 20 mar. 2020.

NIWA, S. **Uma proposta de ensino de logaritmos utilizando os conceitos de modelagem matemática**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://spo.ifsp.edu.br/images/phocadownload/DOCUMENTOS_MENU_LATERAL_FIXO/POS_GRADUA%C3%87%C3%83O/MESTRADO/Ensino_de_Ci%C3%A4ncias_e_Matem%C3%A1tica/Dissertacoes/Uma-proposta-de-ensino-de-logaritmos-utilizando-os-conceitos-de-modelagem-matem%C3%A1tica-Disserta%C3%A7%C3%A3o-e-Produto-Final.pdf. Acesso em: 20 set. 2020.

NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/pLt9PMQ6zdWJw6ktXxSx4zz/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 10 set. 2020.

OLIVEIRA, A. J. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015. Disponível em: http://www.sbempara.com.br/historia_matematica/atividades/historia/aritimetica/01.pdf. Acesso em: 20 nov. 2020.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 2016.

PEREIRA, M. C. **Logarítmos**: uma abordagem interdisciplinar. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/25042016Mariana-Costa-Pereira.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2020.

RAMOS, S. S. A. **Logaritmos**: uma abordagem didática. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~eidam/2016/1/MA11/Logaritmos%20.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185, 2014. Disponível

em: https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1955. Acesso em: 10 out. 2020.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/M9LvJrYJPBT9tHMdtpRJzL/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 10 out. 2020.

SOUZA, J. S. **A abdução em Pierce**: um estudo hermenêutico. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/127624>. Acesso em: 10 nov. 2020.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, n.14, p. 66-91, 2000. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635>. Acesso em: 10 out. 2020.