

**ÁLGEBRAS NÃO ASSOCIATIVAS OCTONIÔNICAS
E RELAÇÕES EXTENSIVAS DO TIPO “DE MOIVRE”**

Cristiane Aparecida Pendeza

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo “De Moivre”

Cristiane Aparecida Pendeza ¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto

20 de fevereiro de 2006

¹contato: jrc_crispen@ibilce.unesp.br

“Uma longa jornada se começa com um simples passo.”

Provérbio chinês

A Deus.
À minha família.
Aos meus amigos.
Dedico

Agradecimentos

Uma dissertação não se faz somente com esforço e conhecimento, mas também com o apoio e confiança de grandes amigos. Dentre eles quero agradecer:

A Deus, por tudo.

À minha família que sempre me apoiou.

Em especial ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela confiança, amizade, orientação e paciência que sempre foram para mim um incentivo na elaboração deste trabalho.

À todos meus amigos de curso agradeço, já com sintomas de saudade, pelo apoio nos momentos difíceis e pelos momentos de descontração e em especial aos amigos Carol e Ricardo pelo companheirismo nesses dois anos.

À todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho, em especial à Gabi, Bárbara e Lucia pelo apoio, paciência e amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma análise dos octônios, bem como da álgebra octoniônica 8-dimensional, que, apesar de não associativos, são descritos para um número de estruturas excepcionais como por exemplo os grupos de Lie excepcionais e suas respectivas álgebras, favorecendo assim o entendimento das rotações de espaços euclidianos de dimensão inferior. Por essa razão se tornam fascinantes em aplicações nas diversas áreas da Matemática e Física. Apresenta-se também uma aplicação dos octônios na analogia da relação clássica de Moivre, e presentes conexões entre funções octoniônicas transcendentais e operadores diferenciais da teoria de Fueter.

Palavras-chave: Octônios, teoria de Fueter, funções hipercomplexas, relação De Moivre.

Abstract

The objective of this work is to present an analysis of the octonions, as well as the octonionic algebras 8-dimensional. Although they aren't associative, they are described by a number of structures, such as the Lie's exceptional groups and its respective algebras, which help the understanding of rotations of Euclidian spaces of lower dimension. Because of that they are fascinating in applications in several areas of Mathematics and Physics. This work also presents application of octonions in the analog of The Classical De Moivre Relation and presents connections between octonionic transcendent functions and differential operators of Fueter Theory.

Keywords: Octonions, Fueter theory, hipercomplex functions, De Moivre relation.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução à análise octoniônica	3
1.1 Nota histórica	3
1.2 Tópicos de álgebra	6
1.3 Construindo os octônios	15
1.4 Conclusão	19
2 Construção da álgebra octoniônica	20
2.1 Preliminares	20
2.2 O problema de Hurwitz	22
2.3 Construção Cayley-Dickson	28
2.4 Análise do teorema de Hurwitz generalizado	32
2.5 Conclusão	37
3 Octônios relacionados à estruturas excepcionais	38
3.1 Octônios e os grupos de Lie excepcionais	38
3.1.1 Introdução	39
3.1.2 Conceitos de topologia	41
3.1.3 Propriedades topológicas	45
3.1.4 Propriedades algébricas	46
3.1.5 Unificação da Álgebra e Topologia	47

3.2	Octônios e as álgebras de Lie excepcionais	56
3.3	Conclusão	72
4	Extensão do teorema de Moivre para octônios e operadores de Fueter	73
4.1	Relação de Moivre generalizada para octônicos	74
4.1.1	Conceitos básicos	74
4.1.2	Definição da função exponencial octoniônica	79
4.2	Operadores de Fueter e funções octoniônicas transcendentais . . .	86
4.2.1	Funções octoniônicas regulares	86
4.2.2	Integração e diferenciação em octônios	89
4.3	Aplicação da função exponencial octoniônica à equações de operadores	101
4.4	Conclusão	113
	Conclusão	114
	Referências Bibliográficas	116

Introdução

Trabalhos recentemente exibidos [17], [18], [19] e [20] mostram resultados de uma teoria quaterniônica que vem se solidificando em várias aplicações na Matemática e Física. Uma primeira tentativa de generalizar duas pra quatro dimensões foi graças a Rudolf Fueter que, na década de 1930, definiu conceitos de regularidade à esquerda e à direita de funções de uma variável quaterniônica, apresentando análogos quadri-dimensionais das Equações de Cauchy-Riemann. Embora esforços, até o presente não se tem uma teoria quadri-dimensional completa, devido a questões de analiticidade dessas funções.

Em matemática, é imprescindível a busca por teoria unificadas que permitam estabelecer generalizações. Com a análise octoniônica não foi diferente. A teoria octoniônica vista como uma extensão quaterniônica, assim como esta, sofre a carência de uma teoria completa. Os quatérnios foram descobertos pelo irlandês William Rowan Hamilton. Neste mesmo ano, John T. Graves, um amigo de Hamilton, descobre uma álgebra de 8 dimensões, os octônios, os quais não satisfaziam a propriedade da associatividade. Sem muitos avanços, somente foram redescobertos em 1845 por Arthur Cayley. Por essa razão são mais conhecidos como números de Cayley. Surgia assim uma nova álgebra abandonando os postulados de comutatividade e associatividade para multiplicação. Essa álgebra generaliza o conceito dos quatérnios não possuindo a estrutura de um corpo, nem de anel e nem de grupo, mas sim de quasi grupos e será denotada por $\mathbb{O}$.

Este trabalho busca criar uma aproximação em oito dimensões da teoria quaterniônica (ver Oliveira [21]) através da generalização da relação clássica de

Moivre para octônios.

No primeiro capítulo desta dissertação temos por objetivo apresentar a origem dos octônios ressaltando tópicos algébricos, designados bases, que permitem ao leitor um bom entendimento do texto, familiarizando-se assim, com a teoria octoniônica.

O segundo capítulo é dedicado a uma análise da construção da álgebra de divisão normada dos octônios com o intuito de solidificar essa teoria. Começaremos por analisar o problema considerado primeiramente por Hurwitz em se obter formas quadráticas o que é equivalente a se obter todas as álgebras de divisão possíveis sobre o corpo $\mathbb{R}$.

No terceiro capítulo apresentaremos os octônios relacionados à estruturas excepcionais. Dentre elas destacamos os grupos de Lie excepcionais e as álgebras não associativas excepcionais: Lie e Jordan. A teoria dos grupos desempenha um papel de extrema importância nas relações físicas no estudo sobre simetrias. Os grupos de Lie excepcionais, relatados para os octônios, são representados como grupos de transformações lineares num espaço 8-dimensional. Relacionados a estes grupos temos as álgebras de Lie excepcionais, formadas pelas álgebras de Hurwitz e as álgebras excepcionais de Jordan. Os resultados serão apresentados brevemente, em virtude de certos conceitos estarem além do propósito deste trabalho.

No último capítulo desta dissertação mostraremos que a relação de Moivre clássica bi-dimensional pode ser reescrita sob uma generalização octoniônica, definimos assim a função exponencial octoniônica generalizada. Uma analogia à teoria das funções regulares de Fueter, definimos funções octoniônicas regulares estabelecidas sob condições de integrabilidade e diferenciabilidade, bem como operadores octoniônicos. Uma aplicação desses operadores a exponencial octoniônica nos fornecem equações de operadores, permitindo estabelecer uma conexão entre esses operadores da teoria de Fueter generalizados e funções octoniônicas transcendentais.

Capítulo 1

Introdução à análise octoniônica

Este capítulo tem por objetivo apresentar os octônios como estruturas algébricas, vistas como uma extensão não associativa dos quatérnios. Na primeira parte fazemos uma breve introdução histórica, na qual toma-se como apoio as referências [1] e [2]. A segunda parte refere-se a conceitos algébricos preliminares, através, sobretudo de consultas às referências [3], [4] e [5]. Na sequência apresenta-se a construção dos octônios como uma álgebra de divisão normada 8-dimensional mostrada na terceira parte deste capítulo.

1.1 Nota histórica

O processo que levou à introdução de um ponto de vista verdadeiramente abstrato em álgebra teve início em 1815, quando vários matemáticos da Universidade de Cambridge fundaram a *Analytical Society*, uma sociedade que tinha por finalidade reformar o ensino do cálculo, adotando as notações em uso no continente. Porém, sua contribuição fundamental foi repensar e discutir os fundamentos da álgebra.

Foi no período de intensa atividade na direção de uma crescente abstração, que um notável matemático irlandês, **Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)**, deu a fundamentação definitiva dos números complexos como pares ordenados de números reais.

Sua reformulação da teoria dos números complexos parte de uma observação muito simples; ele nota que a expressão $a + bi$ não denota uma soma genuína do mesmo tipo que $2 + 3$ e afirma que o uso do sinal $+$ é um acidente histórico e, certamente, bi não pode ser adicionado a a . Assim, percebe que escrever um número complexo na forma $a + bi$ não é mais do que o par ordenado de números reais (a, b) . A partir desta observação, Hamilton desenvolve a teoria formalmente, definindo soma e produto de pares da forma que hoje nos é familiar:

$$(a, b) + (c, d) = (a+b, c+d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad+bc)$$

Hamilton adota um ponto de vista formal. Ele era também um físico e percebia claramente as implicações de sua descoberta: ele tinha desenvolvido uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores do plano. Isto o levou a considerar um problema que seria fundamental para a física da época: desenvolver uma álgebra de ternas que daria a linguagem para trabalhar com vetores do espaço.

Trabalhou durante dez anos neste problema antes de descobrir onde estava a dificuldade essencial. Uma carta a seu filho Archibald, de Outubro de 1843, revela sua obsessão com a questão:

Toda manhã, quando descia para o café, teu irmão William Edwin e você mesmo costumavam perguntar-me “Bem, pai, você já pode multiplicar ternas?” A isso eu sempre me via obrigado a responder, com um triste balanço de cabeça, “Não, eu posso somá-las e subtraí-las”.

Para compreender como poderia ser feita esta multiplicação, Hamilton escrevia suas ternas na forma $a + bi + cj$, por semelhança ao que era feito com os complexos e tentava desenvolver o produto $(a+bi+cj)(x+yi+zj)$ e representá-lo como um elemento da mesma forma. Esperava ainda que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto dos comprimentos, i.e., que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$ fato que chamou *lei dos módulos*.

Para desenvolver o produto, assumiu naturalmente que $i^2 = j^2 = -1$ mas a dificuldade estava em determinar qual devia ser o valor dos produtos ij

e ji . Foi a tentativa de preservar a *lei dos cossenos* que lhe impôs finalmente a necessidade de trabalhar com uma dimensão a mais.

Numa carta a seu filho, Hamilton descreve como foi a descoberta final:

Mas no dia 16 de outubro de 1843 - que era uma segunda-feira e reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, . . . , embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento trabalho dirigidos, por mim, se poupando, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente pa comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filósofo quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k ,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contém a solução do Problema.

Com a multiplicação definida dessa forma, o conjunto dos quatérnios constitui o primeiro exemplo de anel não comutativo, com divisão. Hamilton reconheceu imediatamente a importância de sua descoberta, especialmente pelas suas implicações para o desenvolvimento da física.

No dia seguinte, em 17 de outubro de 1843, Hamilton escreveu a seu amigo John T. Graves comunicando-lhe seus resultados. A semente de novos desenvolvimentos tinha sido plantada: em dezembro desse mesmo ano, Graves descobriu uma álgebra de dimensão 8, os octônios. Havia, porém, uma notável diferença: em julho de 1844 Hamilton lhe observou que a propriedade associativa

valia claramente para os quatérnios mas não valia para os octônios. Escreve para Graves apontando que octônios são não-associativos: “ $A.BC = AB.C$, se A, B, C serem quatérnios, mas não octônios”.

Em 26 de dezembro, Graves escreveu para Hamilton dizendo ter descoberto uma nova álgebra 8-dimensional, mostrando que formam uma álgebra de divisão normada, e usou para expressar o produto de duas soma de oito quadrados perfeitos é igual a outra soma de oito quadrados perfeitos.

Este sistema foi redescoberto independentemente em 1845 por Arthur Cayley (1821-1895) e por essa razão os octônios são conhecidos também como *Números de Cayley*. Estava assim aberto o caminho para novas generalizações.

1.2 Tópicos de álgebra

Definição 1.1. (Álgebra) Consideremos uma álgebra A sobre o corpo dos reais como um espaço vetorial equipado com um mapeamento bilinear $\mathcal{B} : A \times A \longrightarrow A$ chamado “multiplicação” e o elemento “unidade” denotado por 1 tal que $1 \in A$ e $B(1, x) = B(x, 1) = x$. Como é usual abreviaremos por $B(x, y) = xy$.

Definição 1.2. (Grupo) Um conjunto G com uma operação

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

é um grupo se as condições seguintes são satisfeitas:

i) A operação é associativa, isto é,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in G.$$

ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$e \in G \quad \text{tal que } e \cdot x = x \cdot e = x, \forall x \in G$$

iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall x \in G, \quad \exists y \in G \quad \text{tal que } x \cdot y = y \cdot x = e$$

Observação 1.2.1. 1) O elemento neutro é único. De fato, se $e, e' \in G$, então

$$\begin{aligned} e &= e \cdot e' \quad \text{pois } e' \text{ é elemento neutro} \\ &= e' \quad \text{pois } e \text{ é elemento neutro} \end{aligned}$$

2) O elemento inverso é único. De fato, seja $x \in G$, e sejam então $y, y' \in G$ dois elementos inversos de x , temos:

$$\begin{aligned} y &= y \cdot e = y \cdot (x \cdot y') \quad \text{pois } y' \text{ é inverso de } x \\ &= (y \cdot x) \cdot y' = e \cdot y' = y' \quad \text{pois } y \text{ é inverso de } x \end{aligned}$$

Denotaremos o único inverso de x por x^{-1} .

3) Da unicidade do inverso de um elemento $x \in G$, obtém-se o fato mais geral seguinte:

Se $\mathbf{x}, x, y \in G$, então a equação $\mathbf{x} \cdot x = y$ tem a única solução em G , a saber $y \cdot x^{-1}$.

De fato, se z é uma solução de $\mathbf{x} \cdot x = y$, então temos $z \cdot x = by$, logo $z \cdot x \cdot x^{-1} = y \cdot x^{-1}$. Por outro lado, $y \cdot x^{-1}$ é claramente uma solução.

Se maneira similar, obtém-se que a equação $\mathbf{x} \cdot x = y$ tem uma única solução em G , a saber $y \cdot x^{-1}$.

4) Em decorrência do terceiro item de (1.2.1), para mostrar que um elemento $f \in G$ é igual ao elemento neutro do grupo, basta mostrar que $f \cdot x = x$ para algum elemento $a \in G$.

$$5) (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

Prova

Seja multiplicação

$$(x \cdot y) \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x \cdot (y \cdot y^{-1})x^{-1} = x \cdot e \cdot x^{-1} = e \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

Nota: 1. Muitas vezes deixaremos de indicar a operação do grupo, escrevemos G para denotar $(G, \cdot)$. Também quando não existir ambigüidade, escrevemos xy no lugar de $x \cdot y$.

Definição 1.3. (*Grupo Abelião*) Um grupo é abelião ou comutativo se:

- A operação é comutativa, isto é,

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in G$$

Exemplo 1.2.1. O grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abelião infinito.

Isso decorre de que para a adição usual em $\mathbb{Z}$ vale:

$$x + (y + z) = (x + y) + z; x + 0 = 0 + x = x;$$

$$x + (-x) = (-x) + x = 0; x + y = y + x.$$

Exemplo 1.2.2. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ são grupos (aditivos) abelianos.

Exemplo 1.2.3. O grupo multiplicativo dos racionais $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ também é um grupo abelião infinito.

Exemplo 1.2.4. O grupo $G = \{1, -1\}$ é um grupo em relação à multiplicação usual. É um grupo abelião finito de ordem 2.

Definição 1.4. (*Subgrupo*) Seja $G, \cdot$ um grupo. Um subconjunto não-vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos $H < G$) quando, com a operação de G , o conjunto H é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

$$0) \quad h_1 \cdot h_2 \in H, \quad \forall \quad h_1 \cdot h_2 \in H.$$

$$i) \quad h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3, \quad \forall \quad h_1, h_2, h_3 \in H.$$

$$ii) \quad \exists e_H \in H \text{ tal que } e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \quad \forall h \in H.$$

$$iii) \quad \text{Para cada } h \in H, \text{ existe } k \in H \text{ tal que } h \cdot k = k \cdot h = e_H.$$

Observação 1.2.2. 1) A condição i) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ é válida para todos os elementos de G .

2) o elemento neutro e_H de H é necessariamente igual ao elemento neutro e de G . De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_H \cdot a = a$; multiplicando os dois lados por a^{-1} à direita, obtemos $e_H = e$.

3) Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G . De fato, se k é o inverso de h em H , então $h \cdot k = k \cdot h = e_H$, logo $h \cdot k = k \cdot h = e$ pois $e_H = e$, e portanto k é o inverso de h em G .

Exemplo 1.2.5. Se G é um grupo, então $\{e\}$ e G são subgrupos de G .

Exemplo 1.2.6. Seja $(2\mathbb{Z}, +)$ G é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. De maneira mais geral, se n é um inteiro qualquer, $(n\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Definição 1.5. (*Quasegrupo*) Seja um conjunto Q e uma operação binária $*$: $Q \times Q \longrightarrow Q \quad \forall a, b \in Q, \quad \exists$ únicos elementos $a, b \in Q$ de modo que

$$a * x = b \quad e \quad y * a = b.$$

As únicas soluções destas equações são $x = a \setminus b$ and $y = b / a$, onde as operações $\setminus$ e $/$ são chamadas divisão à direita e à esquerda.

Exemplo 1.2.7. Os inteiros $\mathbb{Z}$ com operação de subtração formam um quase-grupo.

Exemplo 1.2.8. Todo grupo é um quasegrupo, porque $a * x = b \iff x = a^{-1} * b$, e $y * a = b \iff y = b * a^{-1}$.

Definição 1.6. (*Loop*) Um loop é um quasegrupo com elemento identidade. Cada elemento de um quasegrupo tem um único inverso à direita e à esquerda.

Definição 1.7. (*Moufang Loop*) Um Moufang loop L é um quasegrupo $(L, *)$ satisfazendo

$$(a * b) * (c * a) = (a * (b * c)) * a \quad \forall a, b, c \in L.$$

Definição 1.8. (*Anel*) Um anel ou anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é uma conjunto A com pelo menos dois elementos, munidos de uma operação denotada por $+$ (chamada **adição**) e de outra operação denotada por $\cdot$ (chamada **multiplicação**) que satisfazem as condições seguintes:

A.1) A adição é associativa, isto é,

$$\forall x, y, z \in A, (x + y) + z = x + (y + z)$$

A.2) Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists 0 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 0 + x = x \text{ e } x + 0 = x.$$

A.3) Todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição, isto é,

$$\forall x \in A, \exists z \in A \text{ tal que } x + z = 0 \text{ e } z + x = 0.$$

A.4) A adição é comutativa, isto é,

$$\exists x, y \in A, x + y = y + x.$$

M.1) A multiplicação é associativa, isto é,

$$\forall x, y \in A, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

M.2) Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é,

$$\exists 1 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 1 \cdot x = x \text{ e } x \cdot 1 = x.$$

M.3) A multiplicação é comutativa, isto é,

$$\forall x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x.$$

AM) A adição é distributiva relativamente à multiplicação, isto é,

$$\forall x, y, z \in A, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Se todas as condições são satisfeitas com exceção de M.3), então $(A, +, \cdot)$ é chamado de **anel não-comutativo**.

Exemplo 1.2.9. $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis comutativos com unidades.

Exemplo 1.2.10. $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n\}$ é anel não comutativo com unidades I_n (matriz identidade de ordem n).

Exemplo 1.2.11. Seja $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$, sejam $+$ a adição usual de matrizes e $\cdot$ a multiplicação usual de matrizes. Então, $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um anel não-comutativo se $n \geq 2$.

Definição 1.9. (*Subanel*) Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto $L \subset A, L \neq \emptyset$, é um subanel de A , se e somente se, cumpre o seguinte:

1) o subconjunto L é fechado para ambas as operações de A , isto é,

$$(\forall x, y)(x, y \in L \longrightarrow x + by \in L \text{ e } xy \in L)$$

2) $(L, +, \cdot)$ também é um anel.

Definição 1.10. (*Anel com divisão*) Um anel $(A, +, \cdot)$ é um anel com divisão (ou quase corpo) se $(A - \{0\}, \cdot)$ é um grupo.

No caso de anel com divisão, temos $1 \in A$, e $\forall x \in A, x \neq 0, \exists y \in A$, tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$. O elemento y é inverso de x e é denotado por x^{-1} .

Exemplo 1.2.12. (*Anel dos Quatérnios*) Veremos agora um exemplo de anel não comutativo com unidade.

Seja $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, onde

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') \iff a = a', b = b', c = c', d = d'.$$

O anel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ pode ser identificado com o anel $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, ou seja, anel dos Quatérnios não comutativo com a unidade.

Definamos as operações de soma e produto em $\mathbb{R}^4$ como

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) + (a', b', c', d') &= (a + a', b + b', c + c', d + d'), \\ (a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') &= (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - c'd, \\ &\quad ac' + a'c + db' - d'b, ad' + da' + bc' - b'c). \end{aligned}$$

com zero do anel como $(0,0,0,0)$ e unidade $(1,0,0,0)$. Faremos algumas identificações:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow (1, 0, 0, 0) \\ i &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 0) \\ j &\longleftrightarrow (0, 0, 1, 0) \\ k &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

assim, $a + bi + cj + dk$ e identificamos assim uma base para $\mathbb{R}^4$.

Observação 1.2.3. Podemos verificar que a multiplicação entre dois elementos quaisquer $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ desta base, não é comutativa. Como por exemplo $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$. Para isto analisemos a seguinte definição:

Definição 1.11. (*Produto vetorial*) Seja uma base ortonormal positiva $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^3$. Sendo dois vetores $(u = x_1, y_1, z_1), (v = x_2, y_2, z_2)$ relativos a esta base, tem-se

$$u \times v = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Através da definição 1.9 verificamos que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$. Então,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{k}$$

Logo as possíveis produtos vetoriais entre os elementos desta base é $\{\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}\}$. Informações complementares sobre quaternions podem ser encontradas em [21].

Definição 1.12. (*Corpo*) Um anel $(A, +, \cdot)$ é chamado corpo se todo elemento não nulo de A possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,

$$\forall x \in A \setminus \{0\}, \quad \exists y \in A \quad \text{talque} \quad x \cdot y = 1$$

Exemplo 1.2.13. Os anéis $(2\mathbb{Q}, +, \cdot), (2\mathbb{C}, +, \cdot), (2\mathbb{R}, +, \cdot)$ são corpos.

Exemplo 1.2.14. O anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo, pois existe um simétrico multiplicativo para qualquer inteiro diferente de 1 e -1.

Definição 1.13. (*Álgebra de divisão*) Seja A uma álgebra de dimensão finita. Dizemos que A é uma álgebra de divisão se a operação de “multiplicação” pela direita e pela esquerda por algum elemento não-nulo da álgebra é inversível. Dados $x, y \in A$ de modo que $xy = 0$, temos

$$x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \text{ então } x=0$$

$$x^{-1} \cdot x \cdot y = 0 \text{ então } y=0$$

As álgebras de divisão admitem também uma operação de *anti-evolução*, tal que

$$(x^*)^* = x, \quad (xy)^* = y^*x^*$$

A operação de conjugação corresponde à transposição na representação matricial.

Definição 1.14. (*Álgebra de divisão Normada*) *Seja A é uma álgebra de divisão. Dizemos que A é uma álgebra de divisão normada se existe uma forma quadrática Q positivo-definida*

$$Q: A \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow Q(x) = x^*x, \quad \forall x, y \in A$$

$$Q(xy) = Q(x)Q(y).$$

Toda álgebra de divisão normada é uma álgebra de divisão de modo que as condições de álgebra de divisão seguem para as condições de norma. Suponha $xy = 0$ para quaisquer $x, y \in A$. Então $Q(xy) = Q(x)Q(y) = 0$. Desde que campos são domínios inteiros, isto implica $Q(x) = 0$ ou $Q(y) = 0$ o que implica que $x = 0$ ou $y = 0$.

Definição 1.15. (*Álgebra associativa*) *Uma álgebra sobre um corpo F é um par consistindo de uma anel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ e um espaço vetorial A sobre F de modo que o conjunto subjacente A , a adição e o elemento neutro são os mesmos no anel e espaço vetorial, e*

$$a(xy) = (ax)y = x(ay) \quad \forall a \in F, x, y \in A \tag{1.2}$$

Denotamos a álgebra pela letra A para designar o conjunto subjacente A .

Exemplo 1.2.15. *Sejam $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ exemplos de álgebras associativas. Estaremos fazendo a verificação da demonstração no capítulo 2.*

Definição 1.16. (*Álgebra alternativa*) Uma álgebra A é alternativa se a subálgebra gerada por qualquer par de elementos da álgebra é associativo. Então sejam $x, y \in A$, temos:

$$x(xy) = x^2y, \quad (xy)y = xy^2$$

então a álgebra A é alternativa.

Observação 1.2.4. Mais detalhes sobre a definição (1.16) se encontram em [4] e estaremos discutindo no capítulo 2.

Definição 1.17. (*Homomorfismo(homo=igual; morphos=forma)* Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \otimes)$ dois anéis. Uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo se ela é compatível com as estruturas de anéis, isto é, se

$$i) f(x+y) = f(x) \oplus f(y), \quad \forall x, y \in A.$$

$$ii) f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y), \quad \forall x, y \in A.$$

$$i) f(1_A) = 1_A.$$

Exemplo 1.2.16. $Id: (A, +, \cdot) \longrightarrow (A, +, \cdot)$, definido por $Id(a)=a, \forall a \in A$, é um homomorfismo chamado identidade.

Definição 1.18. (*Isomorfismo(iso=igual/mesma; morphos=forma)* Um homomorfismo de anéis $f : A \longrightarrow B$ é um isomorfismo se ele é injetivo e sobrejetivo.

Definição 1.19. (*Automorfismo(auto=si mesmo/próprio; morphos=forma)* Seja G um grupo. Uma aplicação $f : G \longrightarrow G$ é um isomorfismo, então f é dito ser um automorfismo.

Definição 1.20. (*Função injetiva*) Seja $f: X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é injetiva quando:

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Definição 1.21. (*Função sobrejetiva*) Dizemos que f é sobrejetiva quando:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tal que } f(x) = y \text{ ou seja } \text{Im} f = Y.$$

1.3 Construindo os octônios

Os octônios são uma uma extensão não-associativa dos quatérnios. Eles formam uma álgebra de divisão normada 8-dimensional sobre $\mathbb{R}$.

A álgebra de Cayley, também chamada de **oitavas** ou **álgebra dos octônios** é denotada por $\mathbb{O}$, sendo uma álgebra de divisão alternativa de dimensão 8.

Define-se o conjunto dos octônios $\mathbb{O}$ como

$$\mathbb{O} = \{(a, b, c, d, e, f, g, h) / a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}\},$$

onde

$$(a, b, c, d, e, f, g, h) = (a', b', c', d', e', f', g', h') \iff \begin{aligned} a &= a', b = b', c = c', d = d' \\ e &= e', f = f', g = g', h = h' \end{aligned},$$

no qual as operações de adição e multiplicação são definidas por:

$$\begin{aligned} & (a, b, c, d, e, f, g, h) + (a', b', c', d', e', f', g', h') \\ &= (a + a', b + b', c + c', d + d', e + e', f + f', g + g', h + h') \end{aligned} \quad (1.3)$$

e

$$\begin{aligned} & (a, b, c, d, e, f, g, h) \cdot (a', b', c', d', e', f', g', h') \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd' - ee' - ff' - gg' - hh', \\ & ab' + ba' + cd' - dc' - ef' + fe' - gh' + hg', \\ & ac' - bd' + ca' + db' - eg' + fh' + ge' - hf', \\ & ad' + bc' - cb' + da' - eh' - fg' + gf' + he', \\ & ae' + bf' + cg' + dh' + ea' - fb' - gc' - hd', \\ & af' - be' - ch' + dg' + eb' + fa' - gd' + hc', \\ & ag' + bh' - ce' - df' + ec' + fd' + ga' - hb', \\ & ah' - bg' + cf' - de' + ed' - fc' + gb' + ha'). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Vemos que os números octonionicos $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ são os respectivos *elemento neutro* da adição e a *unidade* da multiplicação, existindo ainda o *inverso aditivo e multiplicativo* para cada elemento não-nulo em $\mathbb{O}$.

Logo o anel dos octônios representado por $(\mathbb{O}, +, \cdot)$, não é um corpo pois não satisfaz a propriedade comutativa da multiplicação, pois de acordo com (1.4)

$$(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \neq (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Conseqüentemente, dizemos que $(\mathbb{O}, +, \cdot)$ é um anel com divisão ou um corpo não comutativo. O anel dos octônios não é um grupo por não satisfazer o item 1 em (1.2). Os octônios formam um *Moufang Loop* (1.7).

Fazendo as identificações:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\longleftrightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) & \mathbf{l} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{i} &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) & \mathbf{li} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{j} &\longleftrightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) & \mathbf{lj} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{k} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) & \mathbf{lk} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{1.5}$$

temos um número octonionico $o = (a, b, c, d, e, f, g, h)$ com $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$, pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} o = & (a, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ & + (0, b, 0, 0, 0, 0, 0, 0)(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ & + (0, 0, c, 0, 0, 0, 0, 0)(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ & + (0, 0, 0, d, 0, 0, 0, 0)(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ & + (0, 0, 0, 0, e, 0, 0, 0)(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(0, 0, 0, 0, 0, f, 0, 0)(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
& +(0, 0, 0, 0, 0, 0, g, 0)(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
& +(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, h)(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

na qual a é chamada de parte escalar positiva do octônio o e $r = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + e\mathbf{l} + f\mathbf{li} + g\mathbf{lj} + h\mathbf{lk}$ a sua parte vetorial. Assim $\mathbb{O}$ pode ser representado com a soma direta

$$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{V} \tag{1.7}$$

onde $\mathbb{R}$ é o corpo dos reais e $\mathcal{V}$ é um espaço euclidiano.

Definimos as unidades octoniônicas $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{li}, \mathbf{lj}, \mathbf{lk}$, como uma respectiva base ortonormal da álgebra 8-dimensional. Tomando esta base e utilizando em (1.4) obtemos a seguinte tabela de multiplicação:

*	1	i	j	k	l	li	lj	lk
1	1	i	j	k	l	li	lj	lk
i	i	-1	k	$-j$	$-li$	l	$-lk$	lj
j	j	$-k$	-1	i	$-lj$	lk	l	$-li$
k	k	j	$-i$	-1	$-lk$	$-lj$	li	l
l	l	li	lj	lk	-1	$-i$	$-j$	$-k$
li	li	$-l$	$-lk$	lj	i	-1	$-k$	j
lj	lj	lk	$-l$	$-li$	j	k	-1	$-i$
lk	lk	$-lj$	li	$-l$	k	$-j$	i	-1

(1.8)

Uma maneira conveniente para lembrar a multiplicação dos octônios é dado por um diagrama chamado **Plano Fano**:

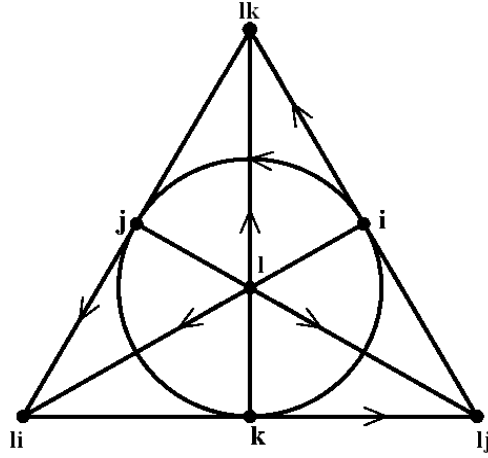


Figura 1.1: Plano Fano

Observe que as linhas são orientadas neste diagrama. Os pontos correspondem aos elementos da base dos octônios. As setas indicam os sinais dos resultados da multiplicação de cada elemento da base.

Nota: 2. O nome do diagrama é devido aos axiomas de Gino Fano (1892), um italiano que definiu as primeiras fundamentações à geometria projetiva:

Axioma 1: Existem uma reta e um ponto que não são incidentes.

Axioma 2: Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.

Axioma 3: Dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.

Definição 1.22. (Octônio conjugado) Definimos o octônio conjugado $\bar{o}$ de um octônio $o = (a, b, c, d, e, f, g, h) = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + e\mathbf{l} + f\mathbf{li} + g\mathbf{lj} + h\mathbf{lk}$ como sendo o número $\bar{o} = (a, -b, -c, -d, -e, -f, -g, -h) = (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} - e\mathbf{l} - f\mathbf{li} - g\mathbf{lj} - h\mathbf{lk})$.

Definição 1.23. (Norma) A norma $\|o\|$ de um octônio $o = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + e\mathbf{l} + f\mathbf{li} + g\mathbf{lj} + h\mathbf{lk}$ é um número real $\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}$. Note que esta é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^8$

A existência de uma norma sobre $\mathbb{O}$ implica a existência de um inverso para todo elemento não nulo de $\mathbb{O}$.

Definição 1.24. (*Inverso de um octônio*) *O inverso de um número octônio é dado por*

$$o^{-1} = \frac{\bar{o}}{\|o\|^2}$$

Isto satisfaz $oo^{-1} = o^{-1}o = 1$.

Sejam algumas propriedades dos octônios que estaremos utilizando mais adiante.

Propriedade 1.1. *Dados dois números octônios o_1 e o_2 , temos que:*

$$\overline{o_1 o_2} = \bar{o}_2 \bar{o}_1.$$

Propriedade 1.2. *Dado um número octônio o_1 , temos que:*

$$\bar{o}_1 o_1 = o_1 \bar{o}_1 = |o_1|^2.$$

1.4 Conclusão

Como pode-se analisar, os octônios são uma generalização dos números reais, complexos e quatérnios, com possíveis e vastas aplicações à Física e à geometria. Sua relevância à geometria era obscura em 1925, até Élie Cartan descrever a “triality” - a simetria entre vetores e spinors e um espaço euclidiano 8-dimensional [6]. Sua relevância à Física foi noticiado em 1934 por Jordan, von Neumann e Wigner sobre fundamentações da mecânica quântica [7]. Em [8] nota-se que em 1980 observou-se que octônios explicam algumas características da teoria de Cordas. Além disso os octônios são relatados para um número de estruturas excepcionais, entre elas os grupos de Lie excepcionais. Além disso, como mostrado em [9] sobre emaranhados quânticos, pode-se traçar paralelos à essas construções com álgebras octoniônicas que são não associativas.

Capítulo 2

Construção da álgebra octoniônica

Este capítulo tem por objetivo apontar a construção das álgebras de divisão normadas octoniônicas. Para isso, tomamos como referências [4] e [10]. Na primeira parte deste capítulo apontamos algumas preliminares como a base para esta construção. Na segunda parte analisamos o Problema de Hurwitz para soma dos quadrados. Dessa forma descrevemos o processo Cayley-Dickson chegando a construção da álgebra octoniônica. Boa parte das demonstrações são apresentadas em detalhes.

2.1 Preliminares

Um caminho para se criar uma nova forma matemática sob uma teoria existente, especialmente apresentada numa forma axiomática, é generalizar a teoria “enfraquecendo” algumas de suas hipóteses. Usando este caminho no conceito de álgebras associativas (1.15), somos conduzidos ao conceito de álgebras não-associativas. Interessantes classes das álgebras não associativas chamam à atenção dos algebristas devido à suas aplicações a outros campos.

Definição 2.1. (*Álgebra não associativas*) *Uma álgebra A é chamada não associativa se a lei associativa para multiplicação (1.2) não é considerada para*

$x, y \in A$.

Exemplo 2.1.1. Podemos citar dois exemplos de álgebras não-associativas: Lie e Jordan que serão analisadas no capítulo 3.

Definição 2.2. (*Comutador*) O comutador é um mapeamento bilinear na álgebra

$$\begin{aligned} [\dots, \dots] : A^2 &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longrightarrow [x, y] = xy - yx \end{aligned}$$

Definição 2.3. (*Associador*) Seja o associador um mapeamento trilinear na álgebra

$$\begin{aligned} [\dots, \dots, \dots] : A^3 &\longrightarrow A \\ (x, y, z) &\longrightarrow [x, y, z] = (xy)z - x(yz) \end{aligned}$$

Observação 2.1.1. Assim como o comutador mede a falha da comutatividade o associador mede a falha da associatividade.

Definição 2.4. (*Forma Bilinear*) Seja o corpo $\mathbb{R}$ e um espaço vetorial A de dimensão não-nula sobre $\mathbb{R}$. Definimos uma forma bilinear B sobre V como um mapeamento $B(x, y) : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que, para $x, x', y, y' \in A$ e $a \in \mathbb{R}$, o mapeamento

$$y_R : x \rightarrow B(x, y) \quad \text{ou} \quad x_L : y \rightarrow B(x, y)$$

é uma função linear sobre A . Nestas condições segue-se que:

- 1) $B(x+x', y) = B(x, y) + B(x', y)$,
- 2) $B(x, y+y') = B(x, y) + B(x, y')$,
- 3) $B(ax, y) = aB(x, y)$,
- 4) $B(x, ay) = aB(x, y)$.

Definição 2.5. (*Forma Bilinear não-degenerativa*) Seja uma forma bilinear $B(x, y)$ simétrica, ou seja, $B(x, y) = B(y, x) \forall x, y \in A$. A forma bilinear simétrica é chamada não-degenerativa se, para $B(a, x) = 0$, segue que $a = 0$.

Nota: 3. A geometria euclidiana vista analiticamente é o estudo do espaço vetorial n -dimensional sobre $\mathbb{R}$ relativa a uma forma bilinear simétrica que serve para definir o comprimento de um vetor e cosseno do ângulo entre dois vetores. Tomando $V = \mathbb{R}^n$ podemos tomar uma forma bilinear como

$$x \cdot y = \sum_1^n x_i y_i$$

para $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$. Então $x \cdot x = \sum x_i^2 = |x|^2$, o quadrado do comprimento de x , e se θ é o ângulo entre dois vetores x e y , então $\cos = (x \cdot y) / |x| \cdot |y|$. O produto escalar de x e y , é bilinear no sentido que

$$(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y$$

$$x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$$

$$a(xy) \cdot y = a(xy) = x \cdot (ay)$$

para os vetores x, x', y, y' e o número real a , e o produto escalar é simétrico e positivo definido ($x \cdot x > 0$, se $x \neq 0$).

Podemos considerar extensões da geometria euclidiana obtida em trocando $\mathbb{R}^n = A$, um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e o produto escalar por alguma forma bilinear $B(x, y)$ não-degenerativa. Podemos chamar essa forma bilinear $B(x, y)$ uma métrica sobre A . A geometria obtida tomando $B(x, y)$ simétrica é chamada geometria ortogonal e que a associada com a forma alternativa é chamada geometria simplética.

2.2 O problema de Hurwitz

Consideremos o problema de Adolf Hurwitz em 1898. “Para quais valores de n existem identidades da forma

$$\left(\sum_1^n x_i^2 \right) \left(\sum_1^n y_i^2 \right) = \sum_1^n z_i^2 \quad (2.1)$$

onde os z_i são da forma

$$z_i = \left(\sum_{j,k=1}^n a_{ijk} x_j y_k \right), \quad (2.2)$$

a_{ijk} são números complexos?”

Para $n = 1$ é trivial:

$$\left(\sum_1^1 x_i^2 \right) \left(\sum_1^1 y_i^2 \right) = \sum_1^n z_i^2 \Rightarrow x_1^2 y_1^2 = (x_1 y_1)^2$$

Para $n = 2$ é trivial:

$$\left(\sum_1^2 x_i^2 \right) \left(\sum_i^2 y_i^2 \right) = \sum_1^2 z_i^2 \Rightarrow (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) = z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow$$

$$(x_1 y_1)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 + (x_2 y_2)^2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = z_1^2 + z_2^2$$

Para $n = 4$:

$$\left(\sum_1^4 x_i^2 \right) \left(\sum_1^4 y_i^2 \right) = \sum_1^4 z_i^2 \Rightarrow (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 + x_4^2 y_4^2) + (x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_3^2 y_4^2 + x_4^2 y_3^2) + (x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_4^2 + x_3^2 y_1^2 + x_4^2 y_2^2) \\ & + (x_1^2 y_4^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_2^2 + x_4^2 y_1^2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3)^2 \\ & + (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2)^2 + (x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1)^2 = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^2. \end{aligned}$$

Para $n = 8$:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + y_8^2) \\ & = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 + z_8^2 \Rightarrow \\ & = (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_1 - x_6 y_2 - x_7 y_3 - x_8 y_4)^2 \\ & + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 - x_5 y_2 + x_6 y_1 - x_7 y_4 + x_8 y_3)^2 \\ & + (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2 - x_5 y_3 + x_6 y_4 - x_7 y_1 - x_8 y_2)^2 \\ & + (x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1 - x_5 y_4 - x_6 y_3 + x_7 y_2 + x_8 y_1)^2 \\ & + (x_1 y_5 + x_2 y_6 + x_3 y_7 + x_4 y_8 + x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7 - x_8 y_8)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x_1y_6 - x_2y_5 - x_3y_8 + x_4y_7 + x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_8 + x_8y_7)^2 \\
& + (x_1y_7 + x_2y_8 - x_3y_5 - x_4y_6 + x_5y_7 + x_6y_8 + x_7y_5 - x_8y_6)^2 \\
& + (x_1y_8 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_5 + x_5y_8 - x_6y_7 + x_7y_6 + x_8y_5)^2 \\
& = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8)^2.
\end{aligned}$$

Hurwitz propôs e resolveu este problema usando um número de tentativas abordadas para encontrar outras e as identificou para $n = 1, 2, 4, 8$.

Não se sabe quem primeiro descobriu a identidade antecedente à $n = 2$, soma de dois quadrados. Exemplos de identidades para a soma com $n = 4$ foi conhecido por Euler e Lagrange, concordando para L. E. Dickson. A soma da identidade com $n = 4$ jogam a importante regra para prova do teorema de Lagrange. Para $n = 8$ foi encontrado por C. F. Degen em 1822.

Em 1843 Hamilton construiu uma álgebra de divisão 4-dimensional para a soma de quatro quadrados. Em 1845 Cayley construiu uma álgebra de divisão dando a identidade par a soma de oito quadrados. Uma álgebra análoga foi construída por Graves em 1844. Hamilton notou que a existência da identidade (2.1) é equivalente à existência de uma álgebra de divisão de uma forma definida com dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Neste caso podemos definir em R^n a seguinte multiplicação: se $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ então $x \cdot y = z$, onde z_i são funções de x_i e y_i determinadas pela identidade (2.1) em termos dos números complexos fixados a_{ijk} . Desde que para tal álgebra (2.1) pode ser escrito como

$$|x||y| = |x \cdot y|. \quad (2.3)$$

Definimos em (2.3) $z = xy$ como uma composição bilinear, obtendo uma álgebra não-associativa. Também denotamos $\sum x_i^2$ como $Q(x)$ e temos

$$Q(x)Q(y) = Q(xy) \quad \forall x, y \in A. \quad (2.4)$$

Em conexão com o problema de Hurwitz surge a seguinte questão: O que acontece se no lugar das somas de quadrados considerarmos alguma forma quadrática não-degenerativa sobre o espaço, e em que esta influencia sobre o problema de Hurwitz?

O problema então se reduz à descrição de uma certa classe de álgebras: as **Álgebras de Composição**.

Definição 2.6. (Álgebras de Composição) *Álgebras de Composição (A, Q) é um par consistindo de uma álgebra não-associativa A com uma unidade e uma forma quadrática não-degenerativa Q sobre A de modo que $Q(xy) = Q(x)Q(y) \forall x, y \in A$.*

As álgebras de composição são uma natural generalização das álgebras dos números complexos, quatérnios e octônios e jogam uma importante regra na teoria das álgebras alternativas e de Jordan. Temos por objetivo verificar, a partir das considerações de (2.6), que A é uma álgebra de composição.

Ao definir-se uma operação numa álgebra A , convém que esta satisfaça algumas propriedades. Uma propriedade se referindo às condições de regularidade é dada como:

Definição 2.7. (Regularidade) *Um elemento $a \in A$ é regular para uma operação $*$ se satisfizer as seguintes condições:*

$$x * a = y * a, \text{ com } x, y \in A \Rightarrow x = y \text{ (} a \text{ é regular à esquerda). e}$$

$$a * x = a * y, \text{ com } x, y \in A \Rightarrow x = y \text{ (} a \text{ é regular à direita)}$$

Seja A uma álgebra não associativa. Podemos mostrar que modificando o produto em A , assumimos que tem uma unidade. Por hipótese, escolhermos o elemento $v \in A$ de modo que $Q(v) \neq 0$ e escrevemos $u = Q(v)^{-1}v^2 = 1$. Então $Q(u) = 1$, temos $Q(xu) = Q(x) = Q(ux) \forall x$.

Portanto, chamemos u_R e u_L as multiplicações à direita e à esquerda em relação à u , e temos que são transformações ortogonais de A em relação à Q . Assim estas são inversíveis e seus inversos também são ortogonais.

Definimos então um novo produto $x * y$ em A por

$$x * y = (u_R^{-1}x)(u_L^{-1}y)$$

e temos

$$Q(x * y) = Q(u_R^{-1}x) * Q(u_L^{-1}y) = Q(x) * Q(y).$$

Agora definimos uma unidade para nossa forma quadrática Q em relação a multiplicação $*$. Sendo

$$\begin{aligned} u_L^{-1}u^2 &= u_L^{-1}(u_L u) = u \Rightarrow \frac{u^2}{u_L} = \frac{u_L u}{u_L} = u \quad e \\ u_R^{-1}u^2 &= u_R^{-1}(u_R u) = u \Rightarrow \frac{u^2}{u_R} = \frac{u_R u}{u_R} = u, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} u^2 * x &= (u_R^{-1}u^2)(u_L^{-1}x) = u(u_L^{-1}x) = x \\ x * u^2 &= (u_R^{-1}x)(u_L^{-1}u^2) = (u_R^{-1})u = x \end{aligned}$$

Portanto u^2 é uma unidade relativa à multiplicação $*$. Podemos então, reverter a notação original xy por $x*y$ e assumimos que a álgebra A tem unidade, denotada por 1. O próximo passo é verificar que A contém uma forma quadrática $Q(xy) = Q(x)Q(y) \quad \forall x, y \in A$. Para isto faremos algumas considerações.

Definição 2.8. (*Forma Quadrática*) Uma forma quadrática Q é um mapeamento $Q : A \longrightarrow \mathbb{R}$ em uma base $\mathbb{R}$ de modo que

- i) $Q(ax) = a^2Q(x), \quad a \in F, x \in A.$
- ii) $B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$

é bilinear, isto é, $(x, y) \longrightarrow B(x, y)$ é uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.9. (*Involução*) Seja $j : x \longrightarrow \bar{x}$ uma função linear definida como uma involução em A . Introduzimos map $j = -S_1$, onde S_1 é a simetria no hiperplano ortogonal a 1,

$$j : x \longrightarrow B(x, 1) - x,$$

abreviando $\bar{x} = j(x), \quad T(x) = B(x, 1).$

Nota: 4. A definição (2.7) é equivalente à definição (2.9).

Então temos

$$Q(\bar{x}) = Q(x), \quad \bar{\bar{x}} = x \tag{2.5}$$

e podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam as seguintes propriedades*

$$\bar{x}x = Q(x) = x\bar{x} \quad (2.6)$$

$$\bar{x}(xy) = (\bar{x}x)y = Q(x)y \quad (2.7)$$

$$(yx)\bar{x} = y(x\bar{x}) = Q(x)y \quad (2.8)$$

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}. \quad (2.9)$$

A demonstração do Lema (2.1) será omitida e pode ser encontrada, para uma análise mais completa, em [4].

Da definição de $\bar{x}$, temos $x + \bar{x} = T(x)$. Além disso, (2.8) e (2.9) resultam nas relações do associador

$$[\bar{x}, x, y] = 0 = [y, x, \bar{x}].$$

Desde que $[1, x, y] = 0 = [y, x, 1]$ e $x = T(x) - \bar{x}$, estas relações implicam em

$$[x, x, y] = 0 = [y, x, x]. \quad (2.10)$$

Portanto A é uma álgebra alternativa no sentido de que a identidade (2.10) é válida $\forall x, y \in A$.

Temos agora mostrado que se (A, Q) é uma álgebra de composição, então A é alternativa com involução $j : x \longrightarrow \bar{x}$ de modo que $\bar{x}x = Q(x)$. Podemos em (2.10) assumir a seguinte identidade para álgebras alternativas:

Definição 2.10. (*Identidade de Moufang*) *Seja A uma álgebra alternativa. Então definimos a identidade*

$$(ux)(yu) = u(xy)u,$$

$$[y(xy)]u = y[x(yu)],$$

$$u[y(xy)] = [(uy)x]y.$$

como sendo as identidades de R.Moufang $\forall x, y, u \in A$.

Agora supondo A é a álgebra alternativa com 1 e involução $j : \longrightarrow \bar{x}$ de modo que $\bar{x}x = Q(x)$ onde $Q(x)$ é uma forma não-degenerativa. Então por linearização temos

$$\bar{x}y + \bar{y}x = Q(x, y). \quad (2.11)$$

Em (2.11) trocamos $y = 1$ e obtemos $x + \bar{x} = T(x)$ onde $T(x) = Q(x, 1)$. Então de (2.11) e $x + \bar{x} = T(x)$, temos $\bar{x}(xy) = (\bar{x}x)y = Q(x)y$. Agora se fizermos

$$\begin{aligned} Q(xy) &= (\bar{x}y)(xy) = (\bar{y}\bar{x})(xy) = [(T(y) - y)\bar{x}](xy) \\ &= (T(y)\bar{x} - y\bar{x})(xy) = T(y)\bar{x}(xy) - (y\bar{x})(xy) \\ &= Q(x)T(y)y - y(\bar{x}x)y \\ &= Q(x)[T(y) - y]y = Q(x)(\bar{y}y) \\ &= Q(x)Q(y). \end{aligned}$$

Logo seja (A, Q) uma álgebra de composição onde $Q(xy) = Q(x)Q(y)$. Para isto concluimos que

Teorema 2.1. *Alguma álgebra alternativa (A, Q) é alternativa e tem a involução $j : x \longrightarrow \bar{x}$ de modo $\bar{x}x = Q(x)$. Reciprocamente, seja A a álgebra alternativa com unidade e a involução $j : x \longrightarrow \bar{x}$ de modo que $\bar{x}x = Q(x)$, onde $Q(x)$ é uma forma quadrática não-degenerativa. Então (A, Q) é uma álgebra de composição.*

Nossa próxima seção tem por objetivo construir todas álgebras de composição. Esta constitui uma generalização da construção dos números complexos como pares de reais.

2.3 Construção Cayley-Dickson

O processo Cayley-Dickson permite construir uma nova álgebra com involução que contenha A como subálgebra. Se a dimensão da álgebra A é igual a m , então a dimensão da nova álgebra é igual a $2m$.

Tomando os resultados obtidos do final da seção 2.2, A é uma álgebra de composição não-associativa com unidade 1 e involução j , que contém uma forma quadrática $Q(x)$ não-degenerativa. Então, de (2.11) e $x + \bar{x} = T(x)$, consideremos um elemento não-nulo c da base de $\mathbb{R}$. Considerando A, j e c podemos construir então uma nova álgebra D satisfazendo as mesmas condições que A e tendo dimensão $2 \dim A$. Seja $D = A^2$, o espaço vetorial do par (x, y) , $x, y \in A$, com a soma direta usual da estrutura de um espaço vetorial. Introduzindo um produto binário nessa nova álgebra D pela fórmula,

$$(u, v)(x, y) = (ux + \mathbf{c}\bar{y}v, yu + v\bar{x}). \quad (2.12)$$

Temos que (2.12) é bilinear e $(1, 0)$ é unidade sobre D . Podemos identificar A como subálgebra de D produzida a partir dos elementos $(u, 0)$ onde $u \in A$. Portanto temos que a involução j sobre A como mapeamento linear

$$j : (x, y) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, -y). \quad (2.13)$$

é a involução sobre a nova álgebra D . Além disso temos

$$(\bar{x}, \bar{y})(x, y) = (\bar{x}, -y)(x, y) = ((Q(x) - \mathbf{c}Q(y)), 0) = (Q(x) - \mathbf{c}Q(y)).$$

O par $(x, y) \longrightarrow Q(x) - \mathbf{c}Q(y)$ é uma forma quadrática sobre D . A forma bilinear correspondente $((u, v), (x, y)) \longrightarrow B(u, x) - \mathbf{c}B(v, y)$ é não-degenerativa. Logo D satisfaz as mesmas condições que A como no teorema (2.1) e podemos chamar D de $\mathbf{c}$ - dobro de A .

Para isto sejam as seguintes condições do lema em relação à D :

Lema 2.2. 1) *O $\mathbf{c}$ - dobro D é comutativa e associativa se e somente se A é comutativa e associativa e $j = 1$.*

2) *D é associativa se e somente se A é comutativa e associativa.*

3) *D é alternativa se e somente se A é associativa.*

Prova

Tomemos $X = (x, y)$, $U = (u, v)$, $Z = (z, t)$ para $x, y, u, v, z, t \in A$. Então usando o comutador (2.2), o associador (2.3) e usando (2.12) temos

$$\begin{aligned}
 [U, X] &= [(u, v), (x, y)] = [(u + iv), (x + iy)] \\
 &= (u + vi)(x + iy) - (x + iy)(u + vi) \\
 &= (ux + uyi + vxi - vy) - (xu + xvi + yxi - yv) \\
 &= ux + uyi + vxi - vy - xu - xvi - yxi + yv \\
 &= ux - vy - xu + yv + i(uy + vx - xv - yu) \\
 &= ([x, u] + c(\bar{y}v - \bar{v}y), y(u - \bar{u} + v(\bar{x} - x))) \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

da mesma forma obtemos

$$\begin{aligned}
 [U, X, Z] &= ([u, x, z] + c\{\bar{t}(yu) - u(\bar{t}y) + \bar{t}(v\bar{x}) - (\bar{x}\bar{t})v + (\bar{y}v)z \\
 &\quad - (z\bar{y})v\}, t(ux) - (tx)u + (yu)\bar{z} - (y\bar{z})u + (v\bar{x})\bar{z} \\
 &\quad - v(\bar{z}\bar{x}) + c\{t(\bar{y}v) - v(\bar{y}t)\}). \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Como A é uma subálgebra de D , temos que D é comutativa ou associativa, então A é comutativa ou associativa. De (2.14) com $u = 0 = x, v = 1$ mostra que $[U, X] = 0$ implica que $\bar{y} = y$. Reciprocamente em (2.14) A é associativa e comutativa, então D é comutativa **(1)**. Em (2.15) se substituirmos $v = x = z = 0$ e $t = 1$ obtemos a condição necessária $yu = uy, y, u \in A$ para a associatividade de D . Logo D associativa temos que A é associativa e comutativa. Assim provamos que se A é associativa e comutativa, então D é associativa **(2)**. De (2.10) para alternatividade, D é alternativa se e somente se $[X, X, Z] = 0 \forall X, Z$ e $X + \bar{X} = T(X)$. Se considerarmos a relação $[\bar{X}, Y, \bar{Z}] = \overline{(XY)Z - X(YZ)} = \overline{Z(YX)} - \overline{(ZY)\bar{X}} = -[\bar{Z}, \bar{Y}, \bar{X}]$. Então temos $[Z, X, X] = 0 \forall Z, X$. Assumindo A alternativa. Tomamos $U = \bar{X} = (\bar{x}, -y)$ em (2.15) e usando o associador, obtemos

$$[\bar{X}, X, Z] = (c[\bar{x}, \bar{t}, y], -[y, \bar{z}, \bar{x}])$$

o qual mostra que $[\overline{X}, X, Z] = 0 \forall X, Z$, se e somente se A é associativa. Com isto concluímos que D é alternativa e provamos (3).

Nota: 5. *As álgebras que estamos considerando neste lema são álgebras de composição se e somente se são álgebras alternativas. Assim podemos considerar os exemplos:*

- 1) *Tomando $A = \mathbb{R}$, não há restrições quanto à comutatividade e associatividade.*
- 2) *Um dobro de A é uma álgebra associativa e comutativa de acordo com o primeiro item do Lema (2.2) que é bidimensional. Estas álgebras de composição são álgebras quadráticas ou álgebras dos números complexos, uma extensão de $\mathbb{R}$.*
- 3) *Um dobro das álgebras quadráticas é associativo mas não comutativo. São álgebras 4-dimensionais chamadas álgebras quaterniônicas.*
- 4) *Um dobro destas álgebras são chamadas álgebras octonionicas e não são nem comutativas nem associativas.*

Um resultado do processo de construção da nova álgebra a partir da álgebra A podemos dizer que

Proposição 2.1. $A = \mathbb{R}$ (portanto comutativa) $\Leftrightarrow D$ é comutativa.

Proposição 2.2. A é comutativa e associativa $\Leftrightarrow D$ é associativa.

Proposição 2.3. A é associativa e normada $\Leftrightarrow D$ é alternativa e normada.

Proposição 2.4. A é normada $\Leftrightarrow D$ é normada.

Através da construção Cayley-Dickson obtemos todas as álgebras de composição. Faremos a verificação através da análise do teorema de Hurwitz generalizado na próxima seção.

2.4 Análise do teorema de Hurwitz generalizado

O que acontece se no lugar da soma de quadrados, alguma forma quadrática não-degenerativa sobre o corpo dos $\mathbb{R}$ for considerada? Hurwitz em 1898 prova que a identidade de interesse somente é possível para $n = 1, 2, 4, 8$. Antes de analisarmos os resultados de Hurwitz para essas identidade, faremos a seguinte observação à respeito de cada passo que analisamos para obtermos uma álgebra de composição:

Proposição 2.5. *Seja A uma álgebra de composição definida em (2.6) então:*

- 1) *A álgebra A tem uma unidade;*
- 2) *A álgebra A contém uma forma Q sobre A de modo que $Q(xy) = Q(x)Q(y), \forall x, y \in A$;*
- 3) *A forma quadrática Q é não-degenerativa;*
- 4) *Essa forma quadrática possui uma forma bilinear $B(x, y)$ não-degenerativa;*
- 5) *Em A definimos uma involução j de modo que $\bar{x} = j(x), \forall x \in A$;*

Teorema 2.2. *Seja a lista completa de todas álgebras de composição sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita: (I) o corpo $\mathbb{R}$; (II) as álgebras quadráticas; (III) as álgebras quaterniônicas; (IV) as álgebras octoniônicas;*

Prova: Temos observado, a partir dos resultados analisados, que a álgebra A considerada é uma álgebra de composição. Então:

(I): Tomando $A = \mathbb{R}$, a unidade 1 esta em A . A álgebra A contém uma forma quadrática Q de modo que $\forall a \in \mathbb{R}, Q(a) = a^2$. A forma quadrática Q possui uma forma bilinear $B(a, b) = Q(a + b) - Q(a) - Q(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$. Essa forma bilinear é não-degenerativa como definida em (2.5). O corpo $\mathbb{R}$ é ordenado e seu próprio conjugado. Logo uma $\forall a \in \mathbb{R}, \bar{a} = j(a)$ e j pode ser considerado uma involução em $\mathbb{R}$. Logo dimensão de $\mathbb{R} = 2^0 = 1$, então em dimensão finita. Portanto $\mathbb{R}$ é uma álgebra de composição. Além disso afirmamos, da definição (1.14), que A é uma álgebra de divisão normada.

(II): Se $\mathbb{R} \subset A$, A contém uma subálgebra quadrática $\mathbb{C}$ que é não-degenerativa. Se A coincide com esta subálgebra, então ela é quadrática. A unidade 1 esta em $\mathbb{C}$. A álgebra $\mathbb{C}$ contém uma forma quadrática Q de modo que $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $Q(x, y) = Q(x)Q(y)$. A forma quadrática Q possui uma forma bilinear $B(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$ não-degenerativa. O conjugado de x é $\bar{x}$ e estabelecemos uma involução $j : x \longrightarrow \bar{x}$ em $\mathbb{C}$. Logo dimensão de $\mathbb{C} = 2^1 = 2$. Logo $\mathbb{C}$ é uma álgebra de composição. Também afirmamos que A é uma álgebra de divisão normada.

(III): Se $\mathbb{C} \subset A$, A contém uma subálgebra $\mathbb{H}$ que é não-degenerativa. Se A coincide com esta subálgebra, temos então uma álgebra quaterniônica. A unidade 1 esta em $\mathbb{H}$. A álgebra $\mathbb{H}$ contém uma forma quadrática Q de modo que $\forall x, y \in \mathbb{H}$, $Q(x, y) = Q(x)Q(y)$. A forma quadrática Q possui uma forma bilinear $B(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{H}$ não-degenerativa. O conjugado de x é $\bar{x}$ e estabelecemos uma involução $j : x \longrightarrow \bar{x}$ em $\mathbb{H}$. Logo dimensão de $\mathbb{H} = 2^2 = 4$. Logo $\mathbb{H}$ é uma álgebra de composição. Também afirmamos que A é uma álgebra de divisão normada.

(IV): Se $\mathbb{H} \subset A$, A contém uma subálgebra $\mathbb{O}$ que é não-degenerativa. Se A coincide com esta subálgebra, temos então uma álgebra octonionica. A unidade 1 esta em $\mathbb{O}$. A álgebra $\mathbb{O}$ contém uma forma quadrática Q de modo que $\forall x, y \in \mathbb{O}$, $Q(x, y) = Q(x)Q(y)$. A forma quadrática Q possui uma forma bilinear $B(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$ não-degenerativa. O conjugado de x é $\bar{x}$ e estabelecemos uma involução $j : x \longrightarrow \bar{x}$ em $\mathbb{O}$. Logo dimensão de $\mathbb{O} = 2^3 = 8$. Logo $\mathbb{O}$ é uma álgebra de composição e também dizemos que A é uma álgebra de divisão normada octonionica.

Podemos obter através do processo Cayley-Dickson uma forma para as bases referentes a cada álgebra e suas respectivas tábuas de multiplicação:

(I): A álgebra $\mathbb{R}$ é considerada A_0 com a base $i_0^2 = i_0$.

(II): Consideremos A_1 como a álgebra quadrática $\mathbb{C}$, e c_1 – dobro de A_1 . A base que escolhemos para A_1 é $i_0 = 1$ e $i_1 = (0, 1)$. Temos que

$$i_1^2 = c_1. \quad (2.16)$$

(III): No próximo passo temos a álgebra A_2 , $\mathbb{H}$, e formamos o c_2 – dobro A_2 de A_1 escrevendo $i_2 = (0, 1)$ em A_2 . A base formada é $(i_0, i_1, i_2, i_3 = i_1 i_2)$. A parte essencial da tabela de multiplicação da álgebra quaterniônica é

$$i_1^2 = c_1. \quad i_2^2 = c_2. \quad i_3^2 = -c_1 c_2.$$

Logo

$$\begin{aligned} i_1 i_2 &= i_3 = -i_2 i_1 \\ i_2 i_3 &= -c_2 i_1 = -i_3 i_2 \\ i_3 i_1 &= -c_1 i_2 = -i_1 i_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

(IV): Finalmente consideramos a álgebra octoniônica A_3 , $\mathbb{O}$, que é o c_3 – dobro de A_2 e escrevemos a base

$$i_0 = 1, i_1, i_2, i_3 = i_1 i_2, i_4, i_5 = i_1 i_4, i_6 = i_2 i_4, i_7 = (i_1 i_2) i_4. \quad (2.18)$$

A tabela de multiplicação para A_3 é

*	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_0	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	i_1	$c_1 i_0$	i_3	$c_1 i_2$	i_5	$c_1 i_4$	$-i_7$	$-c_1 i_6$
i_2	i_2	$-i_3$	$c_2 i_0$	$-c_2 i_1$	i_6	i_7	$c_2 i_4$	$c_2 i_5$
i_3	i_3	$-c_1 i_2$	$c_2 i_1$	$-c_1 c_2 i_0$	i_7	$c_1 i_6$	$-c_2 i_5$	$-c_1 c_2 i_4$
i_4	i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	$c_3 i_0$	$-c_3 i_1$	$-c_3 i_2$	$-c_3 i_3$
i_5	i_5	$-c_1 i_4$	$-i_7$	$-c_1 i_6$	$c_3 i_1$	$-c_1 c_3 i_0$	$c_3 i_3$	$c_1 c_3 i_2$
i_6	i_6	i_7	$-c_2 i_4$	$c_2 i_5$	$c_3 i_2$	$-c_3 i_3$	$-c_2 c_3 i_0$	$-c_2 c_3 i_1$
i_7	i_7	$c_1 i_6$	$-c_2 i_5$	$c_1 c_2 i_4$	$c_3 i_3$	$-c_1 c_3 i_2$	$c_2 c_3 i_1$	$c_1 c_2 c_3 i_0$

Através dessas bases referentes as álgebras, podemos definir formas quadráticas conforme definição (2.6) para álgebras de composição.

Em A_0 se tomarmos $x = x_0 i_0$, aplicando o primeiro resultado (2.6) do lema (2.1), obtemos

$$Q(x) = x_0^2. \quad (2.19)$$

Para A_1 se tomarmos $x = x_0 i_0 + x_1 i_1$,

$$Q(x) = x_0^2 - c_1 x_1^2. \quad (2.20)$$

Da mesma forma tomando $y = y_0 i_0 + y_1 i_1$ temos

$$x.y = (x_0 i_0 + x_1 i_1)(y_0 i_0 + y_1 i_1) = (x_0 y_0 + x_1 y_1 c_1) i_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) i_1$$

a forma quadrática $Q(x)$ para A_1 fica

$$Q(x)Q(y) = (x_0^2 - c_1 x_1^2)(y_0^2 - c_1 y_1^2) = (x_0 y_0 + c_1 x_1 y_1)^2 - c_1 (x_0 y_1 + c_1 x_1 y_0)^2 \quad (2.21)$$

Em A_2 se tomarmos $x = x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$,

$$Q(x) = x_0^2 - c_1 x_1^2 - c_2 x_2^2 + c_1 c_2 x_3^2 \quad (2.22)$$

Da mesma forma tomando $y = y_0 i_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3$ temos

$$\begin{aligned} x.y &= (x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3)(y_0 i_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3) \\ &= (x_0 y_0 + x_1 y_1 c_1 + x_2 y_2 c_2 - x_3 y_3 c_1 c_2 c_3) i_0 \\ &+ (x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 c_2 + x_3 y_2 c_2) i_1 \\ &+ (x_0 y_2 + x_1 y_3 c_1 + x_2 y_0 - x_3 y_1 c_1) i_2 \\ &+ (x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0) i_3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

a forma quadrática $Q(x)$ para A_2 fica

$$\begin{aligned} Q(x)Q(y) &= (x_0^2 - c_1 x_1^2 - c_2 x_2^2 + c_1 c_2 x_3^2)(y_0^2 - c_1 y_1^2 - c_2 y_2^2 + c_1 c_2 y_3^2) \\ &= (x_0 y_0 + c_1 x_1 y_1 + c_2 x_2 y_2 - c_1 c_2 x_3 y_3)^2 \\ &- c_1 (x_0 y_1 + x_1 y_0 - c_2 x_2 y_3 - c_2 x_3 y_2)^2 \\ &- c_2 (x_0 y_2 + x_2 y_0 + c_1 x_1 y_3 - c_1 x_3 y_1)^2 \end{aligned}$$

$$+c_1c_2(x_0y_3+x_3y_0+x_1y_2-x_2y_1)^2. \quad (2.24)$$

Da mesma forma, tomando em A_3 $x = x_0i_0 + x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3 + x_4i_4 + x_5i_5 + x_6i_6 + x_7i_7$,

$$Q(x) = x_0^2 - c_1x_1^2 - c_2x_2^2 + c_1c_2x_3^2 - c_3x_4^2 + c_1c_3x_5^2 + c_2c_3x_6^2 - c_1c_2c_3x_7^2. \quad (2.25)$$

Da mesma maneira $y = y_0i_0 + y_1i_1 + y_2i_2 + y_3i_3 + y_4i_4 + y_5i_5 + y_6i_6 + y_7i_7$ então

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_0i_0 + x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3 + x_4i_4 + x_5i_5 + x_6i_6 + x_7i_7) \\ &\quad (y_0i_0 + y_1i_1 + y_2i_2 + y_3i_3 + y_4i_4 + y_5i_5 + y_6i_6 + y_7i_7) \\ &= (x_0y_0 + x_1y_1c_1 + x_2y_2c_2 - x_3y_3c_1c_2 + x_4y_4c_3 - x_5y_5c_1c_3 - x_6y_6c_2c_3 + x_7y_7c_1c_2c_3)i_0 \\ &\quad + (x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_3c_2 + x_3y_2c_2 - x_4y_5c_3 + x_5y_4c_3 - x_6y_7c_2c_3 + x_7y_6c_2c_3)i_1 \\ &\quad + (x_0y_2 + x_1y_3c_1 + x_2y_0 - x_3y_1c_1 - x_4y_6c_3 + x_5y_7c_1c_3 + x_6y_4c_3 - x_7y_5c_1c_3)i_2 \\ &\quad + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0 - x_4y_7c_3 + x_5y_6c_3 - x_6y_5c_3 + x_7y_4c_3)i_3 \\ &\quad + (x_0y_4 + x_1y_5 + x_2y_6c_2 - x_3y_7c_1c_2 + x_4y_0 - x_5y_1c_1 - x_6y_2c_2 + x_7y_3c_1c_3)i_4 \\ &\quad + (x_0y_5 + x_1y_4 + x_2y_7c_2 - x_3y_6c_2 - x_4y_1 + x_5y_0 + x_6y_3c_2 - x_7y_2c_2)i_5 \\ &\quad + (x_0y_6 - x_1y_7c_1 + x_2y_4 + x_3y_5c_1 - x_4y_2 - x_5y_3c_1 + x_6y_0 + x_7y_1c_1)i_6 \\ &\quad + (x_0y_7 - x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0c_1c_3)i_7, \end{aligned} \quad (2.26)$$

a forma quadrática $Q(x)$ para A_3 fica

$$\begin{aligned} Q(x)Q(y) &= (x_0^2 - c_1x_1^2 - c_2x_2^2 + c_1c_2x_3^2 - c_3x_4^2 + c_1c_3x_5^2 + c_2c_3x_6^2 - c_1c_2c_3x_7^2) \\ &\quad (y_0^2 - c_1y_1^2 - c_2y_2^2 + c_1c_2y_3^2 - c_3y_4^2 + c_1c_3y_5^2 + c_2c_3y_6^2 - c_1c_2c_3y_7^2) \\ &= (x_0y_0 + x_1y_1c_1 + x_2y_2c_2 + x_3y_3c_1c_2 + x_4y_4c_3 + x_5y_5c_1c_3 + x_6y_6c_2c_3 + x_7y_7c_1c_2c_3)^2 \\ &\quad - c_1(x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3c_2 + x_3y_2c_2 + x_4y_5c_3 + x_5y_4c_3 + x_6y_7c_2c_3 + x_7y_6c_2c_3)^2 \\ &\quad - c_2(x_0y_2 + x_1y_3c_1 + x_2y_0 + x_3y_1c_1 + x_4y_6c_3 + x_5y_7c_1c_3 + x_6y_4c_3 + x_7y_5c_1c_3)^2 \\ &\quad + c_1c_2(x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7c_3 + x_5y_6c_3 + x_6y_5c_3 + x_7y_4c_3)^2 \\ &\quad - c_3(x_0y_4 + x_1y_5 + x_2y_6c_2 + x_3y_7c_1c_2 + x_4y_0 + x_5y_1c_1 + x_6y_2c_2 + x_7y_3c_1c_3)^2 \\ &\quad + c_1c_3(x_0y_5 + x_1y_4 + x_2y_7c_2 + x_3y_6c_2 + x_4y_1 + x_5y_0 + x_6y_3c_2 + x_7y_2c_2)^2 \\ &\quad + c_2c_3(x_0y_6 + x_1y_7c_1 + x_2y_4 + x_3y_5c_1 + x_4y_2 + x_5y_3c_1 + x_6y_0 + x_7y_1c_1)^2 \\ &\quad - c_1c_2c_3(x_0y_7 + x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0c_1c_3)^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tomando $c_i = -1$ obtemos as identidades que listamos para $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ para o problema dos n quadrados de Hurwitz. Através do processo de obtermos as bases e respectivas tábuas de multiplicação dessas álgebras conseguimos determinar as formas quadradas e as leis de composição correspondentes.

A álgebra $\mathbb{O}$ de Cayley-Dickson é uma álgebra de divisão onde, para algum $x \neq 0 \in \mathbb{O}$ temos x^{-1} onde $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Vemos então que alguma álgebra de composição cuja forma quadrática é não-nula é uma álgebra de divisão.

2.5 Conclusão

A álgebra dos octônios é uma álgebra de composição. Surgem em conexão com um problema sobre formas quadráticas considerado primeiramente por Hurwitz. Através do processo Cayley-Dickson vemos que são o c -dobro da álgebra de $\mathbb{H}$. Seja $\sum x_i^2 = |x|^2$ e $\sum y_i^2 = |y|^2$, então do resultado (2.1) chegamos que a álgebra de composição dos octônios, de (1.14), é uma álgebra de divisão normada. Portanto o problema de Hurwitz em determinar todas as álgebras de composição sobre $\mathbb{R}$ só é possível para $n = 1, 2, 4$ e 8 . Se continuarmos aplicando o processo Cayley-Dickson para os octônios, obtemos uma sequência de c -álgebras de dimensões 16, 32, 64, assim por diante. A primeira delas é chamada de sedênios e é 16-dimensional. Todas c -álgebras nesta sequência são satisfatoriamente normadas mas não reais, nem comutativas, nem alternativas. Todas tem inversos multiplicativos, mas não são álgebras de divisão, pois o cálculo mostra que os sedênios e todas as outras, tem zero divisores. Em [11] e [12], vemos que os zeros divisores da norma dos sedênios formam um subespaço que é homeomorfo ao grupo de Lie G_2 que definiremos no próximo capítulo.

No capítulo 4 deste trabalho faremos uma aplicação da relação de Moivre clássica para octônios com conexões à operadores da teoria de Fueter. Temos por objetivo fazer a extensão para a álgebra dos sedênios com possíveis resultados.

Capítulo 3

Octônios relacionados à estruturas excepcionais

Neste capítulo faremos uma breve apresentação dos octônios relacionados a estruturas excepcionais como, por exemplo, os grupos de Lie e álgebras de Lie. Tomamos como base para esta análise as referências [4], [5], [13], [14], [15] e [16]. Na primeira parte estaremos analisando os grupos de Lie, especialmente os grupos de Lie excepcionais. Na segunda parte iremos tratar das respectivas álgebras excepcionais relacionadas.

3.1 Octônios e os grupos de Lie excepcionais

Grupos de Lie são bonitos e importantes pois tem suas bases em duas grandes divisões da matemática: álgebra e geometria. Suas propriedades algébricas derivam dos axiomas de grupo. Suas propriedades geométricas derivam da identificação das operações de grupo com pontos num espaço topológico.

3.1.1 Introdução

A teoria de Lie surgiu em 1870 desenvolvida por Marius Sophus Lie, um norueguês que publicou alguns artigos com colaborações de F. Engel. Inicialmente foi desenvolvida para facilitar a solução de equações diferenciais. Também era chamada de teoria dos “grupos contínuos e finitos”.

Lie em seu programa tenta usar ferramentas chamadas teoria dos grupos pra resolver, ou mais simplificar, equações diferenciais ordinárias. São uma extensão dos métodos de Évariste Galois para equações algébricas no estudo de equações diferenciais. Embora mais cedo Galois já tinha usado a teoria dos grupos para resolver equações algébricas quadráticas, cúbicas e quárticas.

Primeiramente Lie considerou apenas a noção de “grupos de transformações” a um parâmetro gerado por “muitas repetições infinitesimais”. Tomou o grupo das matrizes $n \times n$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Isto gera o grupo a um parâmetro consistindo das transformações

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \cdot A^n}{n!} \quad (t \in \mathbb{C}). \quad (3.1)$$

A série é absolutamente convergente para todo t , e satisfaz a relação

$$e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A} \quad (s, t \in \mathbb{C}). \quad (3.2)$$

A procura por pontos fixados para grupos a um parâmetro é então reduzido a um problema da álgebra linear.

Mais geralmente, um espaço vetorial $X = \sum_i X_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, geram equações diferenciais

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.3)$$

Se $x(x_0, t) = x(x_0, t)_1 \dots, x(x_0, t)_n$ denota a curva da integral de x_0 para $t = 0$, então temos, em (3.1),

$$x(x_0, t)_i = \sum_{j \geq 0} \frac{X^j x_i}{j!} := (e^{tX}(x_0))_i \quad (3.4)$$

e para valores de s, t em (3.2)

$$e^{sX}(e^{tX}(x_0)) = e^{(s+t)X}(x_0). \quad (3.5)$$

Os pontos fixos dessas transformações são os zeros do espaço vetorial. Aqui as componentes do espaço vetorial definido por A são $X_i \sum_j a_{ij} x_j$, onde a_{ij} são os coeficientes de A .

A noção de grupo abstrato não era familiar para a época. Podemos dizer que a noção básica de grupos que usamos nos dias atuais teve sua origem nos grupos de transformações. Supondo que U é um conjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ com coordenadas x_i , e V uma vizinhança de origem em $\mathbb{C}^p$ com coordenadas $a_1, \dots, a_p$. Seja G um conjunto de transformações de U parametrizado por V . Sejam $f_1, \dots, f_n : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomórfas de modo que fixando $a \in V$, a aplicação

$$g_a : x \longrightarrow f(x, a) \quad (x \in U, a \in V), \quad (3.6)$$

onde $g_a = f(x, a) = (f_1(x, a), \dots, f_n(x, a))$ tem as coordenadas $f_i(x, a)$, define uma transformação local de U , i.e, do conjunto aberto U sobre outro subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ para cada $a \in V$. Se g_0 é o mapeamento identidade de U e

$$g_b(g_a(x)) = g_{\varphi(a,b)}(x)$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ e $\varphi_i : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, então este define um grupo G de transformações de U .

Tomando primeiro derivações com respeito a a na origem em $\mathbb{C}^p$, Lie obteve transformações infinitesimais e mostrou que o grupo a um parâmetro gerado por alguma delas pertence a G , e que elas formam um espaço vetorial fechado sob os “*bracket*” de transformações infinitesimais, ou seja, um objeto que hoje é chamado de “Álgebra de Lie” que é denotado por $\mathfrak{g}$.

Um exemplo é grupo de transformações lineares inversíveis: as exponenciais dos elementos de uma álgebra de Lie de matrizes formam, geram, um grupo

de Lie. O termo “álgebra de Lie” foi popularizado a partir de 1920 com Hermann Weyl, em substituição ao “grupo infinitesimal” que se utilizava desde os tempos de Lie. Os “grupos infinitesimais” foram considerados objetos concretos associados a grupos de transformações.

3.1.2 Conceitos de topologia

Definição 3.1. (*Conjunto fechado*) Um conjunto S é fechado se seu complementar S^c é aberto.

Definição 3.2. (*Conjunto aberto*) Dizemos que um conjunto G é aberto se todos seus pontos são pontos interiores, ou seja, G é vizinhança de cada um de seus pontos.

Definição 3.3. (*Caminho*) Dados dois pontos x e y de um espaço topológico M , um caminho ligando x a y em M é uma aplicação contínua $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$.

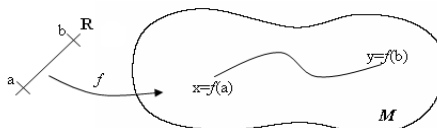


Figura 3.1: Caminho

Definição 3.4. (*Função contínua*) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto x_0 se para cada $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. A função f é contínua se o é em cada ponto do seu domínio.

Definição 3.5. (*Função analítica*) Seja uma função f definida em um domínio complexo X , diz-se que:

- i) f é analítica em $z_0 \in X$ se, e somente se, f é diferenciável em cada ponto z_0 de uma vizinhança $V \subset X$ do ponto z_0 ;

ii) f é analítica em um domínio X se, e somente se, f é analítica em cada ponto z_0 de X .

Definição 3.6. (*Vizinhança*) Seja p um ponto de um espaço topológico M . Um subconjunto N de M é uma vizinhança de p se, e somente se, N contém um conjunto aberto G que contém p : $p \in G \subset N$.

Definição 3.7. (*Espaço Topológico*) Um espaço localmente euclidiano de dimensão d é um espaço topológico M em que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^d$.

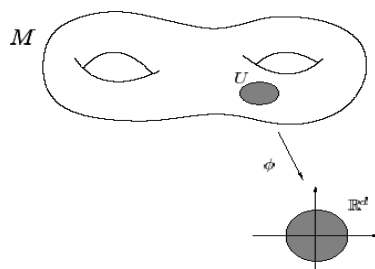


Figura 3.2: Espaço Topológico

Ao homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ chamamos um sistema de coordenadas, às funções $\phi^i = x^i \circ \phi$ chamamos funções coordenadas e designamos o sistema de coordenadas abreviadamente por (U, ϕ) .

Definição 3.8. (*Espaço conexo*) Um espaço topológico M é conexo, se e somente se,

- (i) M não é a união de dois abertos não vazios disjuntos, ou
- (ii) M e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de M que são, simultaneamente, abertos e fechados.

Definição 3.9. (*Domínio simplesmente conexo*) Um domínio, ou região, é chamado simplesmente conexo se todo caminho simples e fechado contido nesse domínio tem em seu interior só pontos do domínio.

O espaço topológico que parametriza os elementos em um grupo é chamado de variedade.

Definição 3.10. (*Manifold*) *Um manifold ou Variedade (topológica) é um espaço de Hausdorff em que todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa.*

Definição 3.11. (*Espaço Hausdorff*) *Um espaço de Hausdorff é um espaço topológico M , onde $x, y \in M$ existem vizinhanças U de x e V de y , tal que $U \cap V = \emptyset$.*

O conceito de variedade é uma generalização da idéia de superfície em R^3 , que é uma superfície com um plano tangente em cada ponto. Um *manifold* é um espaço em que qualquer região em pequena escala parece Euclidiano. Veja o exemplo:

Exemplo 3.1.1. *Todo ponto sobre uma superfície de uma esfera unitária $S^2 \subset R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tem uma vizinhança que é semelhante, numa pequena distância, a um pedaço do plano R^2 . Localmente, os dois espaços S^2 e R^2 são topologicamente equivalentes mas globalmente são diferentes.*

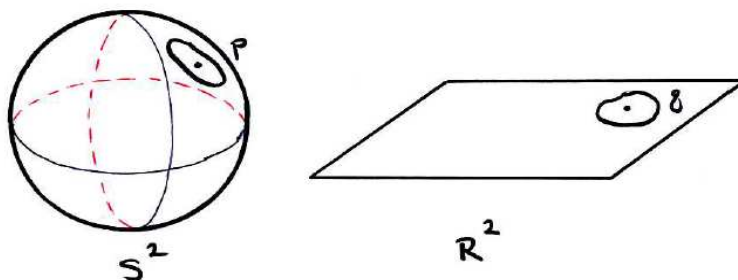


Figura 3.3: Cada ponto p sobre a esfera S^2 é cercada por uma vizinhança aberta que é igual a uma vizinhança aberta em algum ponto no plano R^2 . Localmente os dois espaços são iguais. Globalmente são diferentes.

Definição 3.12. (*Estrutura diferenciável*) *Uma estrutura diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) num espaço topológico M de dimensão d , é uma coleção de sistemas de coordenadas $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M , i.e., $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

- ii) As funções de transição $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ são de classe $\mathbb{C}^k$ para quaisquer $\alpha, \beta \in A$;
- iii) A coleção $\mathcal{C}$ é maximal: se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas com a propriedade de que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi$ são de classe $\mathbb{C}^k \forall \alpha \in A$, então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

Um par $(M, \mathcal{C})$ chamamos de uma **variedade diferenciável** de dimensão d .

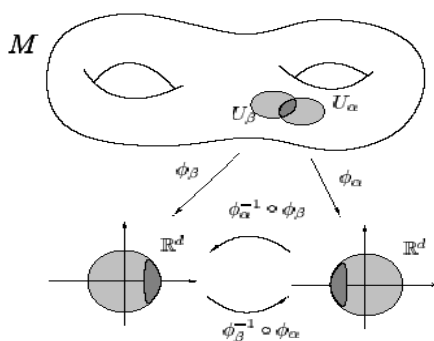


Figura 3.4: Esboço de Variedade Diferenciável

Exemplo 3.1.2. Uma esfera n -dimensional, com topologia relativa é um espaço topológico: se $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$ designam os pólos norte e sul, então obtemos dois sistemas de coordenadas $(\mathbb{S}^n - \{N\}, \pi_N)$ e $(\mathbb{S}^n - \{S\}, \pi_S)$, onde π_N e π_S designam as projeções estereográficas por N e S .

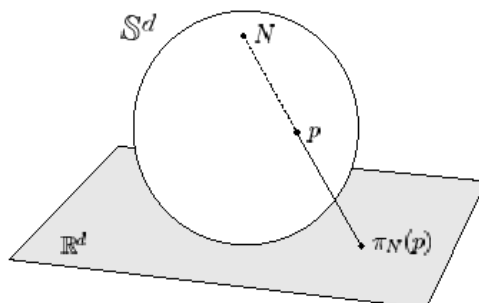


Figura 3.5: A estrutura diferenciável principal na esfera obtém-se considerando a coleção de coordenadas que contém estes dois sistemas de coordenadas.

Definição 3.13. (*Grupo Topológico*) Podemos definir um grupo topológico como sendo uma variedade topológica G equipada da estrutura de um grupo de modo que as operações de grupo são contínuas, e uma ação contínua de G sobre uma variedade topológica M ser um homeomorfismo de G dentro do grupo de homeomorfismos de M .

3.1.3 Propriedades topológicas

A estrutura geométrica de um grupo de Lie vem da identificação de cada elemento no grupo com um ponto no mesmo espaço topológico. A conexão entre a álgebra e estruturas topológicas é que a multiplicação de grupos e um map $x \rightarrow x^{-1}$ são contínuos.

Definição 3.14. (*Grupos de Lie*) Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G equipado com a estrutura de um grupo de modo que as operações de grupo como definido em (1.2) são diferenciáveis.

Definição 3.15. (*Grupos Contínuos*) Um grupo contínuo de dimensão n é um conjunto cujos elementos estão em correspondência biunívoca com os pontos de uma variedade diferenciável n -dimensional, e se estrutura como um grupo satisfazendo os axiomas apresentados no capítulo 1. Ambas estruturas estão relacionadas pelo fato de que a lei de composição dos elementos do grupo, é uma aplicação contínua sobre a variedade.

Observação 3.1.1. Continuidade quer dizer que para algum ponto na variedade existem pontos na variedade que são próximos a este, quanto se queira. Podemos dizer que grupos de Lie são grupos contínuos.

Definição 3.16. (*Ação da Variedade*) Uma ação da variedade sobre um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M é um função $\phi : G \times M \rightarrow M$ de modo que

$$\phi(1, x) = x, \quad \phi(g_2, \phi(g_1, x)) = \phi(g_2 g_1) \cdot x.$$

$$1 \cdot x = x, \quad g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x.$$

Definição 3.17. (*Difeomorfismo*) *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ_{-1} é diferenciável.*

Um grupo contínuo ou grupo topológico tem dois tipos diferentes de estruturas: estrutura algébrica e estrutura topológica. Algebricamente é um grupo e topologicamente é um *manifold*. O espaço topológico que parametriza os elementos num grupo de Lie é um *manifold* (3.10). O exemplo (3.1.1) ilustra bem essa definição.

Exemplo 3.1.3. *Matrizes reais 2×2 são identificadas por quatro variáveis. A condição para essas quatro variáveis é que $\det(A) = 1$. Todo elemento de grupo em $SL(2, \mathbb{R})$ é determinado por um ponto no mesmo espaço real 3-dimensional. Uma possível parametrização é*

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{pmatrix} \quad x_1 \neq 0 \quad (3.7)$$

A dimensão do *manifold* que parametriza um grupo de Lie é a dimensão do grupo de Lie, ou seja, número de parâmetros reais contínuos exigidos para descrever cada operação no grupo.

3.1.4 Propriedades algébricas

As propriedades algébricas de um grupo de Lie originam nos axiomas de um grupo como definido em 1.2.

Exemplo 3.1.4. *Consideremos o conjunto das matrizes reais 2×2 $SL(2, \mathbb{R})$:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números reais. Este conjunto forma um grupo sob a multiplicação de matriz. Verifiquemos que satisfaz os axiomas de um grupo:

Fechamento: A e B são matrizes reais, e $A \cdot B = C$, então C é uma matriz real 2×2 . Se $\det(A) = +1$ e $\det(B) = +1$, então $\det(C) = \det(A)\det(B) = +1$.

Associatividade: $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$ são dados por

$$\sum_k \left(\sum_j A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl} = \sum_j A_{ij} \left(\sum_k B_{jk} C_{kl} \right) \Rightarrow \sum_k \sum_j A_{ij} B_{jk} C_{kl} = \sum_j \sum_k A_{ij} B_{jk} C_{kl}$$

Identidade: A matriz identidade é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \longrightarrow e$$

Inverso: A única matriz de A é

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

3.1.5 Unificação da Álgebra e Topologia

A exigência das estruturas dos grupos de Lie é que a combinação de propriedades algébricas e topológicas deva satisfazer uma continuidade. O espaço topológico que parametriza os elementos num grupo de Lie é um manifold.

Um *grupo de Lie* consiste de um *manifold* M que parametriza as operações de grupo (1.2) e uma operação $x \cdot y = z$, onde a coordenada $z \in M$ depende continuamente das coordenadas $x, y \in M$. Em outras palavras, $z = \phi(x, y)$, onde ϕ é contínua em (x, y) .

Exemplo 3.1.5. Seja $SL(2, \mathbb{R})$ com parametrização (3.7), então a função de composição $z = \phi(x, y)$ é construída facilmente da multiplicação de matriz $x \cdot y = \phi(x, y)$

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) &= (z_1, z_2, z_3) = \phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \\
 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & \frac{1+y_2y_3}{y_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2\frac{1+y_2y_3}{y_1} \\ x_3y_1 + y_3\frac{1+x_2x_3}{x_1} & * \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

O resultado é facilmente interpretado fazendo as respectivas identificações:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \phi_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_3 \\
 z_2 &= \phi_2(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = x_1y_2 + x_2\frac{1+y_2y_3}{y_1} \\
 z_3 &= \phi_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = x_3y_1 + y_3\frac{1+x_2x_3}{x_1}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A função ϕ é analítica nestes dois pares de argumentos desde que x_1 e y_1 são limitados, ou seja, $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$. Na vizinhança destes valores a parametrização do grupo é necessária. A exigência de que a função $\phi(x, y)$ seja analítica pode ser substituída por uma exigência que liga fortemente a álgebra com a geometria. Esta suposição é que a aplicação de cada operação de grupo e sua inversa sejam contínuas.

Exemplo 3.1.6. *Tomando o exemplo acima, podemos determinar as coordenadas (y_1, y_2, y_3) de $(x_1, x_2, x_3)^{-1}$ fixando $(z_1, z_2, z_3) = (1, 0, 0)$ e calculando (y_1, y_2, y_3) em termos de (x_1, x_2, x_3) . Ou simplificando, podemos calcular o inverso da matriz (3.7)*

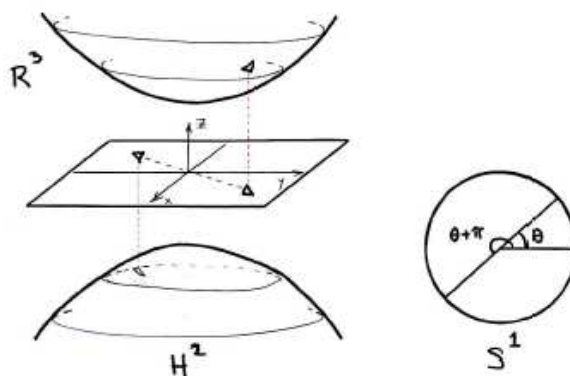
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+x_2x_3}{x_1} & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

A aplicação inversa $(x)^{-1} = y = \psi(x)$ é

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x_1, x_2, x_3) = y_1 &= (1 + x_2x_3)/x_1 \\
 \psi_2(x_1, x_2, x_3) = y_2 &= -x_2 \\
 \psi_3(x_1, x_2, x_3) = y_3 &= -x_3
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Esta aplicação é analítica exceto em $x_1 = 0$, onde a parametrização é exigida. O exemplo a seguir descreve este problema.

Exemplo 3.1.7. *Toda matriz em $SL(2, \mathbb{R})$ pode ser escrita como o produto de uma matriz simétrica e uma matriz de rotação. A matriz simétrica é parametrizada por um manifold 2-dimensional, a hipérbolóide $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. A matriz de rotação é parametrizada por um ponto sobre um círculo. O manifold que parametriza $SL(2; \mathbb{R})$ é $H^2 \times S^1$ 3-dimensional.*



$$z^2 - x^2 - y^2 = 1 \quad SL(2; \mathbb{R}) = \begin{pmatrix} z+x & y \\ y & z-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Nota: 6. (Importante) *Os elementos de grupo são pontos numa variedade e assim são parametrizados por variáveis reais contínuas. Esses pontos são descritos satisfazendo os axiomas de grupo (1.2). A operação $\phi(x, y)$ definida por $x \cdot y = z = \phi(x, y)$ é contínua em ambos conjuntos de variáveis. Desta forma, assumimos que a aplicação $y = \psi(x)$ é uma operação de grupo e a inverso $(x)^{-1} = y = \psi(x)$ é contínua.*

Quase todos grupos de Lie que encontramos em aplicações são grupos de matrizes. Estes simplificam a descrição de propriedades algébricas, topológicas e de continuidade destes grupos. **Algebricamente** a operação de grupos que consideramos é a multiplicação de matrizes. **Geometricamente** os *manifolds*

que encontramos são aqueles que podem ser construídos de matrizes impondo restrições algébricas. A propriedade de **continuidade** é simplesmente a inversão de matrizes. Vejamos alguns exemplos de grupos de Lie de matrizes:

Exemplo 3.1.8. *O grupo linear geral $GL(n)$ é o grupo das matrizes não singulares $n \times n$. O grupo linear em n -dimensões é não abeliano. O número essencial de parâmetros é n^2 . Por essa razão, em R^{n^2} estes grupos operam como os subconjuntos de matrizes de determinantes não nulos. Esses grupos munidos com a operação composição de funções, tornam-se um grupo de Lie, ou seja, a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ (M, N) &\mapsto M \cdot N^{-1} \end{aligned}$$

onde é diferenciável, quaisquer que sejam $M, N \in GL(n, \mathbb{R})$.

De fato, sabemos que o produto dos elementos é simplesmente a multiplicação das matrizes, com a inversa dada pela inversa das matrizes. O número de parâmetros ou coordenadas é n^2 inteiros, então, seja $M = \{a_{ij}\}$ e $N = \{b_{ij}\}$, temos $N^{-1} = \{c_{ij}\}$. Logo $MN^{-1} = \{\sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj}\}$. Assim,

$$d\phi = \sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \right) da_{ij} + \sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \right) db_{ij} = \sum_j \sum_i c_{ij} da_{ij}.$$

Como ϕ é diferenciável, então $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Exemplo 3.1.9. *Grupo linear em duas dimensões, $GL(2)$:*

$$x' = a_1x + a_2y, \quad y' = a_3x + a_4y, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Os quatro parâmetros são essenciais. Se considerarmos x, y como componentes de um vetor r , a transformação pode ser escrita na notação de matriz:

$$r' = Ar, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O grupo linear em duas dimensões é isomorfo ao grupo de matrizes 2×2 , com multiplicação de matrizes com a lei de combinação.

$$\text{Elemento identidade : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\text{Elemento inverso : } A = A^1.$$

$$\text{Elemento produto : } C = BA$$

O grupo linear em duas dimensões é um grupo não abeliano a quatro parâmetros.

Exemplo 3.1.10. São de particular interesse em aplicações físicas o **grupo linear especial $SL(n)$** , subgrupos dos espaços $GL(n, \mathbb{R})$ (ou $GL(n, \mathbb{C})$), conhecidos como espaços das aplicações lineares bijetivas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ ou $(\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n)$, onde as transformações são definidas com determinante igual a unidade e o número de parâmetros essenciais é $n^2 - 1$.

Observação 3.1.2. Similarmente definimos $GL(n, \mathbb{C})$ e $SL(n, \mathbb{C})$.

Exemplo 3.1.11. O **grupo ortogonal $O(n)$** é um subgrupo fechado de $GL(n)$ definido por $XX^t = X^tX = I$, onde X representa as matrizes do grupo. Considerando duas dimensões temos um subgrupo de $O(n)$ das matrizes ortogonais dado por

$$SO(2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = X \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

É um subgrupo fechado de $GL(n)$ definido por $XX^t = X^tX = I$.

Observação 3.1.3. grupos ortogonais são grupos que preservam métricas simétricas bilineares.

Exemplo 3.1.12. A rotação em torno da origem em um espaço tridimensional forma um grupo de Lie. Este grupo pode ser representado pelas matrizes ortogonais $O(3) = \{X \in GL(3, \mathbb{R}) | XX^t = X^tX = I\}$, onde X^t é a transposta de X ,

que é um subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$. Portanto, $O(3)$ com a operação composição é um grupo de Lie.

Exemplo 3.1.13. O grupo ortogonal especial $\mathbf{SO}(n)$ é $O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie. Dessa maneira podemos $SO(n) = \{x \in \mathbb{R} : XX^{-1} = X^{-1}X = 1, \det(X) = 1\}$.

Exemplo 3.1.14. O grupo unitário $U(n)$ é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ definido por $XX^{-1} = X^{-1}X = I$ onde X^{-1} denota o conjugado transposto da matriz de X . Este grupo é relatado para os números complexos.

Observação 3.1.4. grupos unitários são grupos que preservam métricas anti-simétricas bilineares.

Exemplo 3.1.15. Seja $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)\}$ a esfera unitário no plano complexo. Definiremos as operações do grupo como

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \quad e \quad (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$$

Para que S^1 seja um grupo de Lie, mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \psi &: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \\ (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) &\longmapsto (e^{i\theta}) \cdot (e^{i\varphi})^{-1} = e^{i(\theta-\varphi)} \end{aligned}$$

seja diferenciável, quaisquer que sejam $\theta, \varphi \in \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$.

De fato, seja $\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = e^{i(\theta-\varphi)}$, então

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = e^{i(\theta-\varphi)}i \cdot d\theta + e^{i(\theta-\varphi)}(-i)d\varphi = i \cdot e^{i(\theta-\varphi)}(d\theta - d\varphi).$$

Como $d\psi$ existe para quaisquer $\theta, \varphi \in \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$, então ψ é diferenciável. Portanto, S^1 é um grupo de Lie, que chamaremos de $U(1)$.

Exemplo 3.1.16. Seja o grupo unitário especial $\mathbf{SU}(n)$ dado como a intersecção dos grupos $U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$. é um subgrupo de $U(n)$. Temos então $SU(n) = \{x \in \mathbb{C} : XX^{-1} = X^{-1}X = 1, \det(X) = 1\}$. Este é um grupo de Lie.

Observação 3.1.5. *O conjunto de todos os automorfismos das álgebras de composição formam um grupo. Por exemplo, o grupo de automorfismos dos quatérnios é o grupo $SU(2)$.*

Exemplo 3.1.17. *O grupo simplético(complexo) $Sp(n)$ é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{H})$ definido por $Sp(n) = \{X \in \mathbb{H} : XX^{-1} = X^{-1}X = I\}$. Como vemos, o grupo $Sp(n)$ é relatado para números quaterniônicos.*

Exemplo 3.1.18. *O grupo de transformações lineares preservando a métrica de Minkowski corresponde ao grupo ortogonal $O(n,1)$ e a componente identidade deste é chamado **grupo de Lorentz $SO(n,1)$** . É um exemplo de grupo de Lie fundamental na teoria da relatividade geral.*

Exemplos como tais apresentados formam os grupos clássicos de Lie. São quatro séries infinitas de grupos de Lie de translações num espaço n -dimensional, A_n, B_n, C_n e D_n , e são relatados para espaços simétricos tal como espaços projetivos e esferas.

A_n corresponde ao grupo das rotações generalizadas complexas $SU(n+1) \cdot SU(1)$ é o grupo trivial com um único elemento. B_n corresponde ao grupo das rotações, uma cobertura dos grupos $SO(n)$. Correspondem as rotações num espaço $2n+1$ -dimensional onde contém uma esfera $2n$ -dimensional. Por exemplo, o grupo $SO(2)$ é isomórfo a S^1 que denota a multiplicação de grupo dos números complexos de raio 1. Este isomorfismo mandam o número complexo $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ para matriz ortogonal

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C_n corresponde ao grupo simplético $Sp(n)$ que são os grupos de transformações num espaço quaterniônico $2n$ -dimensional sobre $\mathbb{R}$. D_n corresponde ao grupo $SO(2n)$, i.é., rotações no espaço $(2n)$ -dimensional que contém uma esfera $2n+1$ -dimensional, e são denotadas por $Spin(2n)$. Contem o grupo de Lorentz $SO(n,1)$ num espaço 4-dimensional.

Esses são os exemplos de grupos clássicos de matrizes admitindo representações sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$. São exemplos de Grupos de Lie, muito importantes para as aplicações físicas.

Definição 3.18. (*Representação de um grupo*) Uma Representação de um grupo G num espaço vetorial V é uma ação $\phi : G \longrightarrow V$ tal que todas transformações lineares $\phi(g)$ são aplicações lineares de V .

A partir das propriedades das ações temos que cada $\phi(g)$ é inversível e que $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ é um homomorfismo, e $GL(V)$ denota o grupo das transformações lineares inversíveis de V . Então, V é chamado de espaço da representação. Essas representações são ações lineares de uma variedade.

Seja M uma variedade. Uma ação $\varphi : M \longrightarrow M$ é chamada difeomorfismo. Chamamos de representação $\varphi : G \longrightarrow \text{diff}(M)$ de um grupo, uma ação linear da variedade ou uma representação.

A noção de representação vem da idéia de descrever (representar) os grupos de Lie como grupos de transformações lineares. A teoria das representações estuda propriedades de grupos via suas transformações lineares de espaços vetoriais.

Além dos grupos clássicos, podemos também relatar os grupos excepcionais: G_2, F_4, E_6, E_7 e E_8 . Todos eles são relatados para os octônios. Eles não formam as séries infinitas devido a não associatividade dos octônios que fundam as séries. Octônios não são associativos, mas leis de multiplicação associativa podem ser definidas sobre conjuntos de elementos de octônios para criar grupos de Lie.

Os grupos excepcionais podem ser construídos através das álgebras de automorfismos das álgebras de Jordan J_3^i ($i = 1, 2, 4, 8$) e as álgebras de automorfismos das álgebras de Hurwitz H^j ($j = 1, 2, 4, 8$) por meio de uma construção chamada **Construção Tits**. Esta se deve a Jacques Tits que prove modelos de álgebras de Lie simples excepcionais usando álgebras de composição e as álgebras

de Jordan. Nessa construção, os grupos excepcionais surgem num quadrado chamado quadrado mágico de Freudenthal como mostrado na tabela (3.1.5):

-	-	J_3^1	J_3^2	J_3^4	J_3^8
H^1	•	SO(3)	SU(3)	Sp(3)	F_4
H^2	•	SU(3)	$SU(3) \oplus SU(3)$	SU(6)	E_6
H^4	SU(2)	Sp(3)	SU(6)	SO(12)	E_7
H^8	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8

Tabela 3.1.4- Quadrado mágico

Na tabela (3.1.5) as linhas J_3^i correspondem aos grupos de automorfismos das álgebras de Jordan J_3^i , que estaremos tratando na próxima seção, enquanto que as colunas H^j correspondem aos grupos de automorfismos das álgebras de Hurwitz H^j . Os grupos de Lie excepcionais surgem na intersecção (ij) .

G_2 surge como o grupo de automorfismos dos octônios 14-dimensional, ou seja, o grupo de operações sobre os octônios que preservam o produto octoniônico. O grupo de automorfismos de $J_n^{\mathbb{R}}$ é $SO(n)$. O grupo de automorfismos de $J_n^{\mathbb{C}}$ é $SU(n)$. O grupo de automorfismos de $J_n^{\mathbb{H}}$ é $Sp(2n)$.

O grupo de automorfismos das álgebras de Jordan excepcionais $J_n^{\mathbb{O}}$ é F_4 . É representado por matrizes hermitianas 3×3 dos octônios

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

onde $a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R}$ e a_{12}, a_{13}, a_{23} são octônios conjugados de a_{21}, a_{31}, a_{32} . Um plano projetivo octoniônico foi construído em 1949 por Jordan, usando projeções no grupos de matrizes hermitianas. Mais tarde Borel notou que F_4 é o grupo de isometrias do plano projetivo sobre os octônios, 52-dimensional. E_6 é como F_4 , expandido para os números complexos. É o grupo de isometrias, 78-dimensional, de planos projetivos sobre as álgebras: $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$, os bioctônios. E_7 é como F_4

expandido para os quatérnios, o grupo de isometrias, 133-dimensional, de planos projetivos sobre as álgebras: $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$, os quateroctônios. E E_8 é como F_4 expandido para os octônios, o grupo de isometrias de planos projetivos sobre as álgebras: $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$, os octooctônios 248-dimensional. Os bioctônios, quateroctônios e os octooctônios não são álgebras de divisão.

3.2 Octônios e as álgebras de Lie excepcionais

Um dos programas de Lie era o de classificar os grupos de Lie de transformações agindo num determinado espaço. Deve-se a Wilhelm Killing (1884) a idéia de dividir esse problema em dois: o de classificar o objeto abstrato que corresponde à álgebra de Lie e logo após analisar as ações dos grupos correspondentes. Em uma série de artigos ele classificou as álgebras de Lie complexas e obteve as quatro álgebras de Lie Clássicas e cinco excepcionais. Mais tarde Élie Cartan em 1894 deu a segunda contribuição fundamental à teoria de álgebras de Lie. Ele corrigiu e completou o trabalho de Killing e provou a existência das álgebras de Lie simples complexas excepcionais. A cada grupo de Lie existe uma álgebra de Lie associada. Considerando aplicações em áreas da Matemática e da Física, uma importante classe de álgebras são as álgebras de Lie e Jordan.

Em 1931, Pascual Jordan analisou que observáveis na mecânica quântica são descritos por matrizes complexas hermitianas $n \times n$ formando uma álgebra não associativa. Tentando entender melhor esse fato, inventou a definição de que hoje chamamos de **álgebras de Jordan** [2].

Definição 3.19. (*Álgebra de Jordan*) Uma álgebra de Jordan é uma álgebra não associativa sobre $\mathbb{R}$, onde o produto $x \cdot y$ de dois elementos da álgebra satisfaz as leis:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad (x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x) \quad (3.12)$$

Introduzimos nessa álgebra o produto de Jordan (ou anti-comutador) dado por

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad (3.13)$$

Substituindo o produto associativo xy por $x \cdot y$ obtemos a álgebra de Jordan A^+ .

A classificação das álgebras simples de Jordan finitas dimensionais foram dadas em 1934 por Jordan, von Neumann e Wigner. Seus resultados encontrados descrevem dois caminhos para obter essas álgebras:

I) Podem ser obtidas de alguma álgebra associativa. De modo que resultam em álgebras chamadas álgebras de Jordan especiais. Há quatro tipos de álgebras especiais.

i) $J(Q) = R \oplus V,$

ii) $h_n(\mathbb{R}),$

iii) $h_n(\mathbb{C}),$

iv) $h_n(\mathbb{H}),$

onde (i) vem de uma forma quadrática $Q(x, y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in V$. O significado de $J(Q)$ pode ser entendido mais facilmente em termos de uma álgebra de Jordan

$$e_m = (1, e_1 \dots e_n), \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n..$$

Cada elemento de uma álgebra de Jordan pode ser escrito como um combinação linear dessa base. Os outros três tipos (ii), (iii), (iv) são descritas como matrizes hermitianas $n \times n$ J_n^A , onde A são representações sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, e $\mathbb{H}$. Essas álgebras são caracterizadas pelo produto de Jordan $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ como anticomutador.

II) A álgebra de Jordan é uma álgebra 27-dimensional e pode ser construída como segue. Seja

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

onde a_1, a_2 e a_3 são números reais ou complexos e x, y, z são octônios e $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ são octônios conjugados. Definindo o produto de Jordan $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$

em (3.14) e o produto XY é não associativo já que octônios são não associativos. Este define uma a álgebra de Jordan $h_3(\mathbb{O})$ excepcional 27-dimensional.

Álgebras de Jordan estão associadas a espaços projetivos, o plano projetivo octonionico. São aplicadas em análise, geometria, além de serem utilizadas para construção dos grupos excepcionais.

Outro exemplo de álgebra não associativa são as álgebras de Lie. Os grupos de Lie são de natureza geométrica enquanto que as álgebras de Lie, ou grupos infinitesimais como relatados por Lie, são objetos algébricos. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial linear que pode ser estudado usando as principais ferramentas de um espaço vetorial.

Definição 3.20. (*Álgebra de Lie*) Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete ou comutador)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. é bilinear,
2. é anti-simétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (o que implica $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$),
3. satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

A anti-simetria e a identidade de Jacobi são características das álgebras de Lie. O colchete de Lie ou “*bracket de Lie*” não é, em geral, associativo, pois em qualquer circunstância $[[X, X], Y] = 0$ e no entanto $[X, [X, Y]]$ nem sempre se anula.

Existe um grande número de exemplos interessantes de álgebras de Lie, desde o ponto de vista da teoria em si como das aplicações desta teoria aos grupos de Lie. A noção de representação das álgebras de Lie vem da idéia de representar essas álgebras como álgebras de transformações lineares. Antes de ver alguns exemplos de álgebras de Lie, é conveniente introduzir o conceito de subálgebra de Lie.

Definição 3.21. (Subálgebra de Lie) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$. Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 3.2.1. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: O espaço de todas transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ que é o mesmo que o espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$. O colchete é dado por

$$[X, Y] = XY - YX$$

com X e Y matrizes.

Exemplo 3.2.2. Álgebras de Lie provenientes de álgebras associativas: Seja A uma álgebra associativa e nesta álgebra defina o colchete comutador

$$[x, y] = xy - yx \quad x, y \in A.$$

Este colchete define em A uma estrutura de álgebra de Lie.

Exemplo 3.2.3. Subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$:

(a) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$ onde indica a matriz transposta.

O espaço das matrizes simétricas

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = X^t\}$$

(b) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : \text{tr} X = 0\}$. Como no caso de $\mathfrak{gl}(n)$, muitas vezes denotará estas álgebras apenas por $\mathfrak{sl}(n)$.

(c) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) : XJ + JX^t = 0\}$ onde J é escrito em blocos $n \times n$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com 0 representando a matriz nula e 1 a matriz identidade $n \times n$. Para ver que este subespaço é de fato uma subálgebra, observe em primeiro lugar

que $J^2 = -1$ e, portanto, $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ se e só se $X^t = JXJ$. Se $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$, então

$$\begin{aligned} [X, Y]^t &= (XY - YX)^t = -X^t Y^t + Y^t X^t \\ &= -JXJ^2 YJ + JYJ^2 XJ \\ &= J(XY - YX)J \\ &= J[X, Y]J, \end{aligned}$$

isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$.

(d) $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\}$ onde $\bar{X}$ é a matriz obtida de X por conjugação de suas entradas. $\mathfrak{u}(n)$ é uma álgebra de Lie sobre o corpo dos reais. É denominada de álgebra unitária por ser a álgebra de Lie do grupo de matrizes unitárias.

(e) $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) : \text{tr} X = 0\}$.

Definição 3.22. (Ideal) Um subespaço $\mathfrak{g}$ é um ideal se

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, \quad [X, Y] \in \mathfrak{h},$$

isto é,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}.$$

Definição 3.23. (Ideal de Lie) Podemos dizer que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se para $x, y \in \mathfrak{g}$, então é válido $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

Vamos citar duas categorias para álgebras de Lie:

Definição 3.24. (Álgebras simples) Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ e se não tem outros ideais além de zero. Ou seja, não apresenta outros ideais além dos triviais.

Definição 3.25. (Álgebras semi-simples) Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semi-simples se é a soma direta de álgebras de Lie simples, ou seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{g}_i$. A soma direta $\bigoplus$ implica que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0 \quad \forall i \neq j$ e cada $\mathfrak{g}_i$ é simples.

A classificação das álgebras de Lie fornece a classificação dos espaços de simetrias. As álgebras de Lie são classificadas em duas grandes divisões: as álgebras de Lie clássicas e as álgebras de Lie excepcionais. As álgebras de Lie clássicas são $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{c}_n$ e $\mathbf{d}_n$ e correspondem aos grupos de Lie clássicos como foram mencionados anteriormente, enquanto que as álgebras correspondem aos grupos de Lie excepcionais são: $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_7$ e $\mathbf{e}_8$. A construção das álgebras excepcionais apresentadas são devidas a H.Freudenthal. Uma forma alternativa é apresentar as álgebras excepcionais como álgebras de derivações de certas álgebras não associativas.

A construção Tits relatada para construção dos grupos de Lie excepcionais demonstra essa forma de obter essas álgebras.

Sejam H^j ($j = 1, 2, 4, 8$) as álgebras de Hurwitz e J_3^i ($i = 1, 2, 4, 8$) as quatro álgebras de Jordan construídas das álgebras de Hurwitz. Temos que dada álgebra de Lie é determinada da segunda forma:

$$\mathbf{g}_{ij} = \text{Aut}J_3^i + J_3^{i(0)} \otimes H^{j(0)} + \text{Aut}H^j \quad (3.15)$$

onde $J_3^{i(0)}$ é uma matriz hermitiana 3×3 com traço nulo e $H^{j(0)}$ é a parte imaginária pura do numero de Hurwitz H^j .

Em 1914, Èlie Cartan descobriu $\mathbf{g}_2$, a álgebra de derivação dos octônios. $\mathbf{f}_4$ é a álgebra das derivações de uma álgebra de Jordan de dimensão 27, a álgebra de Jordan excepcionais J_3^8 , que pode ser realizada como uma subálgebra de matrizes sobre os octônios. Assim consideramos as outras três álgebras excepcionais relativas $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_7$, e $\mathbf{e}_8$. Um exemplo seguinte podemos demonstrar a construção (3.15) para a álgebra excepcional $\mathbf{g}_{ij}$.

Exemplo 3.2.4. *Seja $\mathbf{g}_{ij}$ uma álgebra de Lie com $i = 2$ e $j = 8$. Então temos*

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{28} &= \text{Aut}J_3^2 + J_3^{2(0)} \otimes H^{8(0)} + \text{Aut}H^8 \\ &= \text{SU}(3) + J_3^{2(0)} \otimes H^{8(0)} + g^2 = e_6 \end{aligned}$$

e a dimensão correspondente

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{g}_{28}) &= [d(SU(3)) + [d(J_3^2) - 1][d(H^8) - 1] - 1 + d(G_2)] \\ &= 8 + [9 - 1][8 - 1] + 14 = 78. \end{aligned}$$

A álgebra correspondente à esta construção é $\mathfrak{e}_6$. Da mesma forma obtemos as outras álgebras de Lie excepcionais. As dimensões relativas a essas álgebras de Lie excepcionais correspondem as dimensões dos grupos de Lie excepcionais.

A essas álgebras podemos associar sistemas de raízes. Essas raízes fornecem informações sobre a estrutura da álgebra. Toda estrutura da álgebra é dada pelos colchetes entre os espaços associados as raízes de uma representação.

Um sistema de raízes é uma configuração de um espaço vetorial euclidiano satisfazendo certas propriedades. Vamos analisar uma definição mais formal a respeito desses sistemas.

Definição 3.26. (*Sistemas de raízes*) *Seja V um espaço vetorial euclidiano de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um sistema de raízes em V é um conjunto finito H de vetores ou raízes α não-nulas as quais satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *As raízes geram V .*
2. *Os únicos múltiplos escalares de uma raiz α , os quais pertencem a H são α e $-\alpha$.*
3. *Para cada raiz $\alpha \in H$, o conjunto H é fechado sob reflexão, ou seja, uma transformação linear inversível através de um hiperplano perpendicular a α . Isto é para duas raízes quaisquer α e β .*

Essas raízes são determinadas pelos valores que assume a forma Cartan-Killing nas raízes. A forma de Cartan-Killing restrita ao subespaço gerado pelas raízes é um produto interno. Dessa forma toda estrutura de uma álgebra é definida pelas relações entre um número finito de raízes, sendo possível, a partir dele, obter uma classificação das álgebras.

Considere duas raízes α e β numa álgebra $\mathfrak{g}$. Uma seqüência de elementos do subespaço gerado é dada por

$$\dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

denominada de α -seqüência iniciada em β .

Para obter o colchete em $\mathfrak{g}$ entre dois elementos dessa álgebra, deseja-se saber quais elementos dessa seqüência são raízes. É usado então a fórmula de Cartan-Killing para determinar esses elementos.

Esses elementos são as raízes e formam um intervalo contendo β , isto é, existem inteiros $p, q \geq 0$ tal que

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + q\alpha$$

são raízes da forma $\beta + k\alpha$ com k inteiro. Além do mais vale a fórmula

$$p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \quad (3.16)$$

denominada fórmula de Killing. A respeito dessa fórmula podemos afirmar que:

1. Na fórmula α e β são simétricos. Para β -seqüência iniciada em α , são outros valores de p e q que definem o intervalo das raízes.
2. A expressão que aparece no segundo membro é um inteiro.
3. O inteiro

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

é denominado **número de Killing** associado às raízes α e β .

A fórmula Cartan-Killing foi introduzida por Élie Cartan em sua tese (1894) como uma ferramenta fundamental para colocar em bases sólidas as idéias de Killing sobre a classificação das álgebras simples complexas.

Proposição 3.1. *Os únicos múltiplos de uma raiz α que são raízes são $\pm\alpha$.*

Demonstração: Suponha $\beta = c\alpha$ com $c \neq 0$ e β, α raízes. Então,

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 2c \quad e \quad \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} = \frac{2}{c}$$

Sejam $n = 2c$ e $M = 2/c$. Então, m, n são inteiros e $mn = 4$. Isso só é possível se $n = \pm 1, \pm 2$ ou ± 4 , isto é, $c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ ou ± 2 e, portanto, $c = \pm 1$, pois como já foi mostrado, os únicos múltiplos inteiros de uma raiz são ela mesma e sua oposta.

Seja $\sum$ o conjunto de todas raízes simples. Toda raiz positiva é uma combinação linear de $\sum$ com os coeficientes inteiros positivos, ou seja, é uma soma dos elementos de $\sum$. Seja

$$\sum = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

o sistema simples. Seja $\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$ uma raiz positiva onde n_l são coeficientes inteiros. A altura de β é o inteiro positivo $n_1 + \dots + n_l$. Por exemplo:

- 1) As raízes positivas de **altura 1** são exatamente as raízes simples.
- 2) As raízes positivas de **altura 2** são da forma $\alpha_i + \alpha_j$ com $i \neq j$.
- 3) As raízes positivas de **altura 3** são da forma $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ com $i \neq j \neq k$.

Os números de Killing associados aos elementos de um sistema determinam todas as raízes do subespaço gerado por estas matrizes e, portanto, a estrutura da álgebra. Os números associados às raízes são colocados em forma da matriz $l \times l$ como

$$C = \left(\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{ij}. \quad (3.17)$$

Esta matriz recebe o nome de *Matriz de Cartan* dos sistema de raízes. Os elementos diagonais dessa matriz são todos iguais a 2 e aos elementos de fora da diagonal são inteiros negativos.

Proposição 3.2. *Sejam α e β raízes.*

1. *Se θ denota o ângulo entre α e β então,*

$$\cos\theta = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}.$$

2. Os possíveis valores para os números de Killing são

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

isto é, $\theta = k\pi/6$ ou $k\pi/4$.

Demonstração:

1. Como

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \text{ e } \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle}$$

são inteiros,

$$4\cos^2\theta = \frac{4\langle\beta, \alpha\rangle^2}{\langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle}$$

é inteiro. Portanto,

$$4\cos^2\theta = 0, 1, 2, 3, 4$$

e daí que $\cos\theta$ é como no enunciado.

2. Pelo item anterior,

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle}$$

é um dos inteiros 0, 1, 2, 3, 4 e cada um dos fatores é um inteiro positivo. Além do mais, se um deles se anula, então $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$ e portanto, o outro também se anula. Daí que cada um dos fatores do produto acima pode assumir apenas os valores 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 sendo que ± 4 não ocorre. De fato, se por exemplo

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\alpha, \alpha} = \pm 4,$$

então

$$4\cos^2\theta = \frac{4\langle\beta, \alpha\rangle^2}{\langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle} = 4$$

e $\cos\theta = \pm 1$, isto é, β é múltiplo de α . Daí que $\beta = \pm\alpha$ e

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = \pm 2$$

o que é uma contradição.

Esta proposição mostra que os elementos de fora da diagonal da matriz de Cartan assumem apenas os valores $0, -1, -2$ ou -3 . Ela mostra também que se θ é o ângulo entre duas raízes α_i e α_j , entre $\theta = 0^\circ$ (se as raízes coincidem) ou $\theta = 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ ou 150° , se as raízes são diferentes. Se uma entrada da matriz de Cartan (3.17) c_{ij} é -2 ou -3 , então c_{ji} é -1 . Da mesma forma, se $c_{ij} = 0$, o mesmo ocorre com c_{ji} .

Exemplo 3.2.5. A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz de Cartan da álgebra de Lie excepcional $\mathfrak{g}_2$.

As raízes de altura h são dadas por

- (a) as raízes simples são α_1 e α_2 .
- (b) $\alpha_1 + \alpha_2$ é a única raiz de altura 2.
- (c) $\alpha_1 + 2\alpha_2$ é a única raiz de altura 3.
- (d) $\alpha_1 + 3\alpha_2$ é a única raiz de altura 4.
- (e) $2\alpha_1 + 3\alpha_2$ é a única raiz de altura 5. Não existem raízes de altura seis. Com isso ficam determinadas todas as raízes positivas. Portanto o número total de raízes é 12.

Graficamente são:

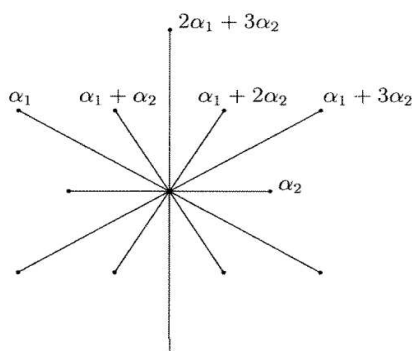


Figura 3.6: A figura mostra as raízes dispostas entre si formando um ângulo de 30° .

As informações a respeito da Matriz de Cartan são dadas por diagramas chamados Diagramas Dynkin.

Definição 3.27. (*Diagrama Dynkin*) Um diagrama Dynkin é um diagrama construído para o espaço de raízes que satisfaz as seguintes regras

1. Representa cada raiz α_i por um ponto $\cdot$;
2. Conecta duas raízes α_i e α_j por uma linha;

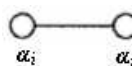
Esses diagramas foram construídos a partir de sistemas simples de raízes que são bases de espaços vetoriais racionais $\mathbb{Q}^l$ com produto interno. A maneira como se associa um diagrama a uma base depende da estrutura geométrica da base, isto é, dos comprimentos e dos ângulos entre seus elementos. Assim encontrar todos diagramas significa encontrar todas as bases de $\mathbb{Q}^l$. Os elementos formam entre si ângulos de 90° , 120° , 135° ou 150° .

O diagrama contém l pontos (vértices) representando cada uma das raízes. Os vértices ligam ou não as raízes, α_i e α_j , por um, dois ou três segmentos (arestas) de acordo com as seguintes instruções:

1. Se $\frac{2\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i\alpha_i\rangle} = \frac{2\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j\alpha_j\rangle} = 0$ não existe ligação



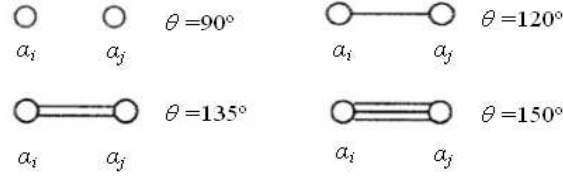
2. Se $\frac{2\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i\alpha_i\rangle} = \frac{2\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j\alpha_j\rangle} = -1$, α_i e α_j são ligadas por um segmento:



3. Se $\frac{2\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i\alpha_i\rangle}$ ou $\frac{2\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j\alpha_j\rangle}$ é -2 ou -3 então os vértices são ligados por dois ou três segmentos:



A idéia do diagram de Dynkin é poder utilizá-lo para obter a matriz de Cartan. O número de ligações entre duas raízes no diagrama Dynkin tem a seguinte interpretação geométrica, de acordo com o ângulo θ entre α_i e α_j :

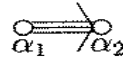


Quando a ligação é feita por dois ou três segmentos, não fica claro qual dos elementos da matriz de Cartan é -2 ou -3. Para distinguir convém orientar os segmentos por um seta na direção de α_j . Cada álgebra de Lie tem seu sistema de raízes relacionadas a sua matriz de Cartan e esta, por sua vez, a seu diagrama Dynkin. Vamos dar exemplo da álgebra de Lie excepcional $\mathfrak{g}_2$:

Exemplo 3.2.6. A matriz de $\mathfrak{g}_2$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

que define o diagrama



Convém considerar $\mathfrak{g}_2$ como um subespaço de R^3 . Este subespaço é ortogonal a um vetor $R = e_1 + e_2 + e_3 \in R^3$

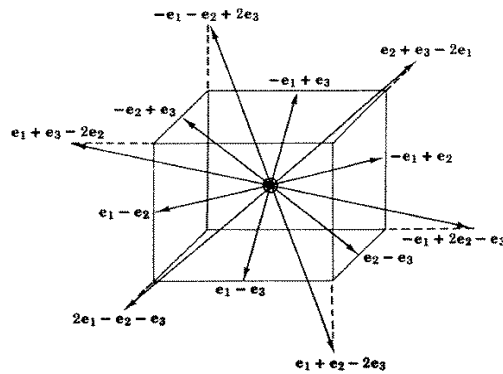


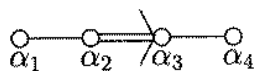
Figura 3.7: O espaço de raízes de $\mathfrak{g}_2$ pode ser considerado no hiperplano ortogonal ao vetor R como mostra a figura da direita.

As matrizes de Cartan e seus respectivos diagramas Dynkin para as outras quatro álgebras de Lie excepcionais:

- Para a álgebra $\mathbf{f}_4$, a matriz de Cartan é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

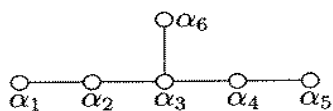
e o diagram Dynkin é



- Em $\mathbf{e}_6$, matriz de Cartan é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

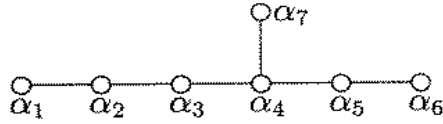
e o diagram Dynkin é



- Em e_7

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

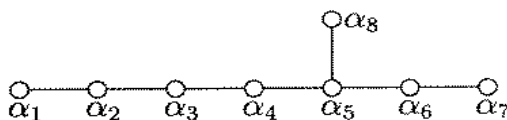
e o diagram Dynkin é



- Em e_8

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e o diagram Dynkin é



Portanto, a lista completa de todos os sistemas de raízes de $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_7$ e $\mathbf{e}_8$ é dada pela tabela abaixo:

espaços de raízes	sistema de raízes	número de raízes	grau	dimensão
$\mathbf{g}_2$	$e_i - e_j \quad (1 \leq i \neq j \neq k \leq 3)$	6	2	14
	$\pm(e_i + e_j - 2e_k)$	6		
$\mathbf{f}_4$	$\pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i \neq j \leq 4)$	24		
	$\pm 2e_i$	8	4	52
	$\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4$	16		
$\mathbf{e}_6$	$\pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i \neq j \leq 5)$	40		
	$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_1 \pm \dots \pm e_5) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	32	6	78
$\mathbf{e}_7$	$\pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i \neq j \leq 6)$	60		
	$\pm \sqrt{2}e_7$	2	7	133
	$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_1 \pm \dots \pm e_6) \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	64		
$\mathbf{e}_8$	$\pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i \neq j \leq 8)$	112		
	$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_1 \pm \dots \pm e_8)$	128	8	248

Os números subscritos referem-se ao número de vértices nos diagramas. Os nomes G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 são nomes de sistemas de raízes. O número de vetores em R^n esta relacionado ao grau correspondente a cada álgebra. Os sistemas de raízes de cada álgebra excepcional é que determinam as possíveis raízes através da matriz de Cartan (3.17) e estas são representadas através dos diagramas Dynkin (3.27), determinando assim toda a estrutura de cada álgebra.

3.3 Conclusão

Houve um crescimento no final do século passado, direcionados à aplicações de grupos excepcionais. Essas estruturas são analisadas com suas propriedades algébricas e sua representação geométrica. Essas estruturas surgem como grupos de matrizes com elementos de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$. Os grupos de Lie são conectados para geometria em particular a geometria projetiva de espaços Riemannianos.

As simetrias desempenham um papel importante na física e, conseqüentemente, na formulação de suas leis. A teoria dos grupos é a estrutura matemática que estuda as simetrias, e os grupos estão intimamente relacionados com as álgebras. Assim, os grupos de Lie surgem naturalmente como grupos de simetrias de espaços projetivos sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$. Mais precisamente como grupos de isometrias: transformações que preservam a métrica Riemanniana específica.

Na formulação de Jordan da Mecânica Quântica, observáveis e matrizes que representam um sistema físico são elementos de uma álgebra de Jordan. Se a álgebra de Jordan é especial, então a formulação de Jordan é equivalente a formulação de Dirac da Mecânica Quântica em termos de comutadores. Isto em 1978 foi obtido por Ginaydin, Piron e Ruegg [26] que mostraram que é possível reformular a Mecânica Quântica referindo-se as álgebras de Jordan excepcionais, chamada Mecânica Quântica octoniônica.

Capítulo 4

Extensão do teorema de Moivre para octônios e operadores de Fueter

Neste capítulo temos por objetivo propor uma análise de resultados obtidos recentemente por (Borges e Machado [22], [23], [24] e [25]) sobre a analogia da relação clássica de Moivre em conexão com operadores da teoria de Fueter fazendo uma expansão para teoria octoniônica. Na primeira parte faremos uso de alguns conceitos básicos para demonstrar os resultados dessa expansão. Na segunda parte definimos as funções regulares octoniônicas. Buscamos aí traçar paralelos aos resultados apresentados nas referências Borges e Machado [17], [18], Calixto[19] e Godoy Junior [20] para quatérnios, a uma expansão octoniônica. Estabelecemos assim na terceira parte uma conexão entre a função exponencial octoniônica transcendental e os operadores “Tipo de Fueter”.

4.1 Relação de Moivre generalizada para octônicos

4.1.1 Conceitos básicos

Definição 4.1. (*Séries infinitas*) Uma série infinita é uma soma formal com infinitos termos $a_n \in \mathbb{C}$, e denotamos por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Um exemplo de séries infinitas é a **série de Maclaurin** ou **série de Taylor** relativa a $x = 0$.

Definição 4.2. (*Séries de Taylor*) Dada uma função $f : I \rightarrow R$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. O polinômio de Taylor de ordem n de uma f no ponto a é dado por

$$f(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}h^n \quad (4.1)$$

Consideremos $h = x - a$ com a idéia de se aproximar uma função por polinômios nas vizinhanças de um ponto $x = a$. Então temos a série de Taylor como

$$f(x - a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n. \quad (4.2)$$

Definição 4.3. (*Séries de Maclaurin*) Dada uma função $f : I \rightarrow R$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. Aproximando a função f numa vizinhança $x = 0$, como definido em (4.2), temos o polinômio, ou série, de Maclaurin dado por

$$f(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n. \quad (4.3)$$

Definição 4.4. (*Expansão em série da função seno*) Usando $f(x) = \text{sen}x$, a série de Taylor (4.1) em torno do ponto $x = 0$ é dada por

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (4.4)$$

representando a função seno expandida em série.

Definição 4.5. (*Expansão em série da função cosseno*) Usando $f(x) = \cos x$, a série de Taylor (4.1) em torno do ponto $x = 0$ é dada por

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{2n!} \quad (4.5)$$

representando a função cosseno expandida em série.

Definição 4.6. (*Função de uma variável complexa*) Tomemos X sendo um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Uma função complexa $f : \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação que faz corresponder a cada $z \in X$ um número complexo $w = f(z)$. O conjunto X no qual f está definida, recebe o nome de domínio de definição de f e o conjunto dos $w = f(z)$ correspondentes a todos os $z \in X$ é chamado de imagem de X pela função f .

$$w = f(z) = u + iv, \quad (4.6)$$

em que $u = u(z)$ e $v = v(z)$ são denominadas de parte real e parte imaginária de f . Logo w é uma função de uma variável complexa.

Definição 4.7. (*Séries de funções complexas*) Um série de funções é simplesmente uma série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

cujos termos f_n são funções de uma variável complexa z , todas com um domínio comum de definição.

Definição 4.8. (*Séries de potências*) Uma série de potências é uma série da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (4.7)$$

Definição 4.9. (*Função exponencial*) Uma função exponencial e^x é definida como

$$\exp(x) = e^x := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

uma soma infinita (série infinita) cujo domínio de convergência são todos os reais.

Definição 4.10. (*Função exponencial complexa*) Definimos uma função exponencial complexa e^z como

$$\exp(z) = e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, z \in \mathbb{C}. \quad (4.9)$$

Definição 4.11. (*Fórmula de Euler*) Seja $z \in \mathbb{C}$ dada por $(z = x + yi)$. Definimos a relação

$$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta), \quad (4.10)$$

como a **Fórmula de Euler** para a exponencial complexa e^z (4.10).

Lema 4.1. (*De Moivre, 1667-1754*) Seja $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ um número complexo. Então

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n > 0. \quad (4.11)$$

Demonstração: A demonstração é feita pelo uso da indução matemática. Substituímos valores para n em (4.11):

- i) Para $n = 0$ obtemos $z^0 = |z|^0(\cos 0\theta + i\sin 0\theta) = 1$.
- ii) Para $n = k - 1$ obtemos $z^{k-1} = |z|^{k-1}(\cos(k-1)\theta + i\sin(k-1)\theta)$.
- iii) Para $n = k$ obtemos

$$\begin{aligned} z^k = z^{k-1} \cdot |z| &= |z|^{k-1}[(\cos(k-1)\theta + i\sin(k-1)\theta)][|z|(\cos\theta + i\sin\theta)] \\ &= |z|^{k-1}|z|[\cos((k-1)\theta + \theta) + i\sin((k-1)\theta + \theta)] \\ &= |z|^k(\cos k\theta + i\sin k\theta). \end{aligned}$$

Então a equação (4.11) é conhecida como **Fórmula de Moivre**.

Observação 4.1.1. *Uma generalização da fórmula de Euler é dada pela fórmula de Moivre.*

Proposição 4.1. *Seja $q = e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)$. Então*

$$q^n = e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n > 0. \quad (4.12)$$

Prova: Provamos por indução sobre o número n , utilizando (4.12):

i) Para $n = 0$ obtemos $q^0 = e^{i\theta 0} = 1 = (\cos\theta 0 + i\sin\theta 0)$.

ii) Para $n = k - 1$ obtemos

$$q^{k-1} = \cos(k-1)\theta + i\sin(k-1)\theta.$$

iii) Para $n = k$ obtemos

$$q^k = q^{k-1}q = (\cos(k-1)\theta + i\sin(k-1)\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Aplicando a lei distributiva e usando as relações trigonométricas convenientes, obtemos

$$\begin{aligned} q^k = q^{k-1}q &= (\cos(k-1+1)\theta + i\sin(k-1+1)\theta) \\ &= \cos k\theta + i\sin k\theta = q^k. \end{aligned}$$

Obtemos assim uma generalização da fórmula de Euler através da fórmula de Moivre, ou seja, (4.12) pode ser considerada como a relação de Moivre generalizada.

Proposição 4.2. (*Equações de Cauchy-Riemann*) *Suponha uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde $z = x + iy$, diferenciável em z_0 . Então*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.13)$$

tal que u, v satisfazem o sistema de equações diferenciais parciais de 1ª ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.14)$$

As equações (4.14) são conhecidas como equações Cauchy-Riemann.

Prova: Para $z = x + iy_0$, temos

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x_0, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] \\
 &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por outro lado, suponhamos que $z = x_0 + iy$. Então teremos também

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right] \\
 &= \frac{1}{i} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

As equações de Cauchy-Riemann seguem da unicidade de $f'(z_0)$, ou seja, igualando (4.15) com (4.16), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.17}$$

Estas são um par de equações determinado pelas derivadas parciais de parte real e complexa de uma função f de uma variável complexa, e são chamadas Equações de **Cauchy-Riemann**.

Teorema 4.1. (*Teorema integral de Cauchy*) *Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo. Então, por todo caminho fechado C nesse domínio cumprem-se*

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

De um modo equivalente podemos enunciar o teorema (4.1) como:

Teorema 4.2. *Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo. Então a integral de f ao longo de um contorno ligando z_0 a z só depende destes pontos e não do contorno de integração.*

Definição 4.12. (*Transformação conforme*) *Um mapeamento ou transformação conforme é uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ para z_0 em X se, e somente se, este mapeamento preserva a magnitude dos ângulos e a direção dos ângulos para z_0 .*

Observação 4.1.2. *Uma função complexa é analítica se ela satisfaz as condições de Cauchy-Riemann. Podemos dizer também que uma função complexa é analítica se ela é conforme, ou seja, se ela é uma transformação de um plano em outro e preserva os ângulos.*

4.1.2 Definição da função exponencial octoniônica

Como vimos na seção anterior, pudemos verificar a relação de Moivre (4.11) como uma extensão da relação de Euler (4.10) dada por (4.12). Faremos agora uma generalização desta para os octônios.

Para isto, consideremos dois octônios p e q

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k} + p_5\mathbf{l} + p_6\mathbf{li} + p_7\mathbf{lj} + p_8\mathbf{lk}, \\ q &= q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} + q_5\mathbf{l} + q_6\mathbf{li} + q_7\mathbf{lj} + q_8\mathbf{lk}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Definimos o produto de dois octônios como

$$\begin{aligned} p \cdot q &= p_1q_1 + p_1q_2\mathbf{i} + p_1q_3\mathbf{j} + p_1q_4\mathbf{k} + p_1q_5\mathbf{l} + p_1q_6\mathbf{li} + p_1q_7\mathbf{lj} + p_1q_8\mathbf{lk} \\ &+ p_2q_1\mathbf{i} - p_2q_2 + p_2q_3\mathbf{k} - p_2q_4\mathbf{j} - p_2q_5\mathbf{li} + p_2q_6\mathbf{l} - p_2q_7\mathbf{lk} + p_2q_8\mathbf{lj} \\ &+ p_3q_1\mathbf{j} - p_3q_2\mathbf{k} - p_3q_3 + p_3q_4\mathbf{i} - p_3q_5\mathbf{lj} + p_3q_6\mathbf{lk} + p_3q_7\mathbf{l} - p_3q_8\mathbf{li} \\ &+ p_4q_1\mathbf{k} + p_4q_2\mathbf{j} - p_4q_3\mathbf{i} - p_4q_4 - p_4q_5\mathbf{lk} - p_4q_6\mathbf{lj} + p_4q_7\mathbf{li} + p_4q_8\mathbf{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + p_5q_1\mathbf{l} + p_5q_2\mathbf{li} + p_5q_3\mathbf{lj} + p_5q_4\mathbf{lk} - p_5q_5 - p_5q_6\mathbf{i} - p_5q_7\mathbf{j} - p_5q_8\mathbf{k} \\
 & + p_6q_1\mathbf{li} - p_6q_2\mathbf{l} - p_6q_3\mathbf{lk} + p_6q_4\mathbf{lj} + p_6q_5\mathbf{i} - p_6q_6 - p_6q_7\mathbf{k} + p_6q_8\mathbf{j} \\
 & + p_7q_1\mathbf{lj} + p_7q_2\mathbf{lk} - p_7q_3\mathbf{l} - p_7q_4\mathbf{li} + p_7q_5\mathbf{j} + p_7q_6\mathbf{k} - p_7q_7 - p_7q_8\mathbf{i} \\
 & + p_8q_1\mathbf{lk} - p_8q_2\mathbf{lj} + p_8q_3\mathbf{li} - p_8q_4\mathbf{l} + p_8q_5\mathbf{k} - p_8q_6\mathbf{j} + p_8q_7\mathbf{i} - p_8q_8 \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

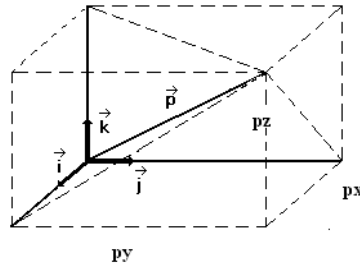
Analisemos agora as seguintes definições:

Definição 4.13. (*Produto escalar*) *Seja uma base ortonormal positiva $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R^3$. Sendo dois vetores $(\vec{p} = x_1, y_1, z_1)$ e $(\vec{q} = x_2, y_2, z_2)$ relativos a esta base, tem-se o produto vetorial entre $\vec{p}$ e $\vec{q}$ é dado por*

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Podemos ainda reescrever a definição (1.9) como

Definição 4.14. (*Produto vetorial*) *Seja uma base ortonormal positiva $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R^3$. Podemos escrever um vetor $\vec{p} \in R^3$ em relação a suas componentes como*



$$\vec{p} = \mathbf{i}(px) + \mathbf{j}(py) + \mathbf{k}(pz) \quad (4.20)$$

Se tomarmos outro vetor $\vec{q} \in R^3$, então, considerando os possíveis produtos vetoriais entre os elementos desta base com demonstrado no capítulo 1, o produto vetorial $\vec{p} \times \vec{q}$ é dado por

$$\vec{p} \times \vec{q} = \mathbf{i}(p_yq_z - p_zq_y) + \mathbf{j}(p_zq_x - p_xq_z) + \mathbf{k}(p_xq_y - p_yq_x) \quad (4.21)$$

O resultado (4.21) é definido como **produto vetorial** em R^3 .

Escreveremos a parte vetorial de (4.18) como

$$\begin{aligned}\vec{p} &= p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k} + p_5\mathbf{l} + p_6\mathbf{li} + p_7\mathbf{lj} + p_8\mathbf{lk} \\ \vec{q} &= q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} + q_5\mathbf{l} + q_6\mathbf{li} + q_7\mathbf{lj} + q_8\mathbf{lk}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Uma análise das definições do produto escalar (4.13) e produto vetorial (4.14) nos permite escrever o produto vetorial $\vec{p} \times \vec{q}$ em um espaço euclidiano 8-dimensional como

$$\begin{aligned}\vec{p} \times \vec{q} &= (p_3q_4 - p_4q_3 + p_6q_5 - p_5q_6 + p_8q_7 - p_7q_8)\mathbf{i} \\ &= (p_4q_2 - p_2q_4 + p_6q_8 - p_8q_6 + p_7q_5 - p_5q_7)\mathbf{j} \\ &= (p_2q_3 - p_3q_2 + p_7q_6 - p_6q_7 + p_8q_5 - p_5q_8)\mathbf{k} \\ &= (p_2q_6 - p_6q_2 + p_3q_7 - p_7q_3 + p_4q_8 - p_8q_4)\mathbf{l} \\ &= (p_4q_7 - p_7q_4 + p_5q_2 - p_2q_5 + p_8q_3 - p_3q_8)\mathbf{li} \\ &= (p_2q_8 - p_8q_2 + p_5q_3 - p_3q_5 + p_6q_4 - p_4q_6)\mathbf{lj} \\ &= (p_3q_6 - p_6q_3 + p_5q_4 - p_4q_5 + p_7q_2 - p_2q_7)\mathbf{lk}\end{aligned}\quad (4.23)$$

e o respectivo produto escalar como

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 + p_5q_5 + p_6q_6 + p_7q_7 + p_8q_8. \quad (4.24)$$

Logo podemos reescrever (4.19) como

$$\begin{aligned}p \cdot q &= p_1q_1 + p_1(q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8) \\ &+ q_1(p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8) + (-\vec{p} \cdot \vec{q}) + \vec{p} \times \vec{q}\end{aligned}$$

ou ainda

$$p \cdot q = p_1q_1 + p_1(\vec{q}) + q_1(\vec{p}) - \vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{p} \times \vec{q}. \quad (4.25)$$

Consideremos um número octônio $o = u_1 + u_2\mathbf{i} + u_3\mathbf{j} + u_4\mathbf{k} + u_5\mathbf{l} + u_6\mathbf{li} + u_7\mathbf{lj} + u_8\mathbf{lk}$. Fazendo um generalização da função exponencial complexa, podemos reescrever (4.9) como

$$\exp(o) = e^o := 1 + o + \frac{o^2}{2!} + \frac{o^3}{3!} + \dots + \frac{o^x}{x!} + \dots \quad (4.26)$$

que chamamos de **função exponencial octoniônica**.

Para obter essa função, faremos o cálculo de cada termo da série (4.26). Consideramos a parte vetorial do número o como $\vec{o} = u_2\mathbf{i} + u_3\mathbf{j} + u_4\mathbf{k} + u_5\mathbf{l} + u_6\mathbf{li} + u_7\mathbf{lj} + u_8\mathbf{lk}$, então podemos reescrever este número como $o = u_1 + \vec{u}$. Assim os termos de (4.26) podem ser calculados através da expansão binomial.

Definição 4.15. (*Expansão binomial*) Definimos uma expansão binomial de uma soma de a e $b \in \mathbb{R}$ como

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{1.2.3\dots(n-1)n}b^n$$

onde

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (4.27)$$

Temos então a seguinte fórmula para expansão

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad (4.28)$$

Em (4.28), substituiremos $(u_1 + \vec{u})$ no lugar de $(a+b)$. Calculamos assim os termos da série:

$$o^0 = 1$$

$$o^1 = u_1 + \vec{u}$$

$$o^2 = (u_1 + \vec{u})^2 = \sum_{r=0}^2 \binom{2}{r} u_1^{2-r} (\vec{u})^r = \binom{2}{0} u_1^2 (\vec{u})^0 + \binom{2}{1} u_1 (\vec{u}) + \binom{2}{2} u_1^0 (\vec{u})^2$$

onde de (4.27) temos

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1.$$

Logo temos $o^2 = u_1^2 + 2u_1\vec{u} + (\vec{u})^2$. O produto $(\vec{u})^2$ é dado por

$$(\vec{u})^2 = -u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 - u_8^2 = -|\vec{u}|^2,$$

então escreveremos $o^2 = u_1^2 + 2u_1\vec{u} - |\vec{u}|^2$. Da mesma forma podemos calcular os outros termos $o^3, o^4, o^5, \dots$. Então os termos da série (4.26) são dados por

$$\frac{o^2}{2!} = (u_1 + \vec{u})^2 = \frac{u_1^2}{2!} + \frac{2u_1\vec{u}}{2!} - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} = \frac{u_1^2}{2!} + u_1\vec{u} - \frac{|\vec{u}|^2}{2!},$$

$$\frac{o^3}{3!} = \frac{u_1^3}{3!} - \frac{3u_1|\vec{u}|^2}{3!} + \frac{3u_1^2\vec{u}}{3!} - \frac{|\vec{u}|^3}{3!} = \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^2\vec{u}}{2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^2}{2!} - \frac{|\vec{u}|^3}{3!},$$

$$\frac{o^4}{4!} = \frac{u_1^4}{4!} + \frac{4u_1^3\vec{u}}{4!} + \frac{6u_1^2|\vec{u}|^2}{4!} + \frac{4u_1|\vec{u}|^3}{4!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} = \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^3\vec{u}}{3!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^2}{2!2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!},$$

$$\frac{o^5}{5!} = \frac{u_1^5}{5!} + \frac{5u_1^4\vec{u}}{5!} - \frac{10u_1^3|\vec{u}|^2}{5!} - \frac{10u_1^2|\vec{u}|^3}{5!} + \frac{5u_1|\vec{u}|^4}{5!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!},$$

$$= \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^4\vec{u}}{4!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^2}{3!2!2!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^3}{3!2!} + \frac{u_1|\vec{u}|^4}{4!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!},$$

$$\frac{o^6}{6!} = \frac{u_1^6}{6!} + \frac{6u_1^5\vec{u}}{6!} - \frac{6!u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!6!} - \frac{6!u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!6!} + \frac{6u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!6!} + \frac{6!u_1|\vec{u}|^5}{6!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!}$$

$$= \frac{u_1^6}{6!} + \frac{u_1^5\vec{u}}{5!} - \frac{u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!} + \frac{u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!} + \frac{u_1|\vec{u}|^5}{5!} + \frac{|\vec{u}|^6}{6!},$$

Podemos definir assim (4.26) como

$$\begin{aligned} e^o &= 1 + u_1 + \vec{u} + \frac{u_1^2}{2!} + u_1\vec{u} - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^2\vec{u}}{2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^2}{2!} - \frac{|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^3\vec{u}}{3!} \\ &\quad - \frac{u_1^2|\vec{u}|^2}{2!2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^4\vec{u}}{4!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^2}{3!2!2!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^3}{3!2!} + \frac{u_1|\vec{u}|^4}{4!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!} + \\ &\quad + \frac{u_1^6}{6!} + \frac{u_1^5\vec{u}}{5!} - \frac{u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!} + \frac{u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!} + \frac{u_1|\vec{u}|^5}{5!} + \frac{|\vec{u}|^6}{6!}, \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Em (4.29) podemos ainda agrupar alguns termos de modo que

$$\begin{aligned}
 e^o = & \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!} + \dots\right) + \left(u_1 - \frac{u_1|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{u_1|\vec{u}|^4}{4!} + \dots\right) + \left(\frac{u_1^2}{2!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^2}{2!2!} + \frac{u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!} - \dots\right) \\
 & + \left(\frac{u_1^3}{3!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^2}{3!2!2!} + \dots\right) + \left(\frac{u_1^4}{4!} - \frac{u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!} + \dots\right) + \left(\vec{u} - \frac{|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!} - \dots\right) \\
 & + \left(u_1\vec{u} - \frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{u_1|\vec{u}|^5}{5!} - \dots\right) + \left(\frac{u_1^2\vec{u}}{2!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^3}{2!3!} + \dots\right) + \left(\frac{u_1^3\vec{u}}{3!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!} + \dots\right) \\
 & + \left(\frac{u_1^4\vec{u}}{4!} - \dots\right) + \left(\frac{u_1^5}{5!} - \dots\right) + \left(\frac{u_1^5\vec{u}}{5!} - \dots\right) + \left(\frac{u_1^6}{6!} - \dots\right) + \dots \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Os primeiros termos dos respectivos cinco primeiros grupos de somas infinitas em (4.30) são colocados em evidência. Assim obtemos,

$$\begin{aligned}
 e^o = & \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^6}{6!} + \dots\right) \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!} + \dots\right) \\
 & + \left(\vec{u} + u_1\vec{u} + \frac{u_1^2\vec{u}}{2!} + \frac{u_1^3\vec{u}}{3!} + \frac{u_1^4\vec{u}}{4!} + \frac{u_1^5\vec{u}}{5!} + \dots\right) - \frac{|\vec{u}|^3}{3!} \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \dots\right) \\
 & + \frac{|\vec{u}|^5}{5!} \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \dots\right) - \dots \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Dos três últimos grupos em (4.31), podemos colocar o termo $\vec{u}$ em evidência e resulta que

$$\begin{aligned}
 e^o = & \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^6}{6!} + \dots\right) \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!} + \dots\right) \\
 & + \vec{u} \left\{ \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \dots\right) - \frac{|\vec{u}|^2}{3!} \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \dots\right) \right.
 \end{aligned}$$

$$+\frac{|\vec{u}|^4}{5!}\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\dots\right)-\dots\Big\}. \quad (4.32)$$

O primeiro termo de (4.32) se repete em todos os grupos, por essa razão, podemos colocá-lo em evidência

$$e^o = \left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\frac{u_1^5}{5!}+\frac{u_1^6}{6!}+\dots\right)\left\{\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{2!}+\frac{|\vec{u}|^4}{4!}-\frac{|\vec{u}|^6}{6!}+\dots\right)+\vec{u}\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{3!}+\frac{|\vec{u}|^4}{5!}+\dots\right)\right\}. \quad (4.33)$$

Através do resultado (4.5) para função cosseno expandida em série, temos que, de (4.33)

$$\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{2!}+\frac{|\vec{u}|^4}{4!}-\frac{|\vec{u}|^6}{6!}+\dots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(|\vec{u}|)^{2n}}{(2n)!}=\cos|\vec{u}|.$$

Da mesma forma do resultado (4.4) para função seno temos

$$\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{3!}+\frac{|\vec{u}|^4}{5!}-\dots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(|\vec{u}|)^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{|\vec{u}|}=\frac{\operatorname{sen}|\vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

Temos também que

$$e^o = \left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\frac{u_1^5}{5!}+\frac{u_1^6}{6!}+\dots\right)=e^{u_1},$$

ou seja, obtemos a função exponencial de e^{u_1} . Portanto, podemos escrever (4.33) como

$$e^o = e^{u_1}\left\{\cos|\vec{u}|+\vec{u}\left(\frac{\operatorname{sen}|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)\right\}. \quad (4.34)$$

Considerando o valor absoluto $|\vec{u}| = \sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}$, podemos escrever (4.34) como

$$e^o = e^{u_1} \left\{ \cos \left(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2} \right) + \vec{u} \left(\frac{\sin \left(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2} \right)}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \right) \right\} \quad (4.35)$$

Definimos (4.35) como a **função exponencial octoniônica**. Obtemos assim a relação de Moivre (4.12) generalizada para octônios.

4.2 Operadores de Fueter e funções octoniônicas transcendentais

A primeira tentativa de buscar uma generalização da teoria bi-dimensional para quadri-dimensional foi estabelecida por R.Fueter, na década de 1930, através da definição de regularidade à direita e à esquerda de funções hipercomplexas, mostrando assim uma equação análoga à de Cauchy-Riemann. Faremos uma expansão para octônios.

4.2.1 Funções octoniônicas regulares

Seja $E^8 \subset \mathbb{O}$ um espaço Euclidiano 8-dimensional e um número hipercomplexo $o = u_1 + u_2\mathbf{i} + u_3\mathbf{j} + u_4\mathbf{k} + u_5\mathbf{l} + u_6\mathbf{li} + u_7\mathbf{lj} + u_8\mathbf{lk} \in R^8$. Assim uma função octoniônica $f : E^8 \rightarrow \mathbb{O}$ é um mapeamento que faz corresponder a cada $o \in E^8$ um número octoniônico $w = f(o)$, ou uma função de variáveis octoniônicas, ou seja:

$$f : E^8 \rightarrow \mathbb{O}$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) \mapsto f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8).$$

onde

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) &= f_1(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) \\ &+ f_2(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + f_3(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{j} \\
 & + f_4(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{k} \\
 & + f_5(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{l} \\
 & + f_6(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{li} \\
 & + f_7(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{lj} \\
 & + f_8(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)\mathbf{lk} \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Não há restrição sobre estas funções coordenadas $f_l : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$, exceto que sejam n-vezes diferenciáveis parcialmente em suas variáveis independentes.

Os conceitos de regularidade à direita e à esquerda, de acordo com a teoria de Fueter [28], são definidos em termos do operador octonionico Γ :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u_3}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u_4}\mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial u_5}\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial u_6}\mathbf{li} + \frac{\partial}{\partial u_7}\mathbf{lj} + \frac{\partial}{\partial u_8}\mathbf{lk} \right) \quad (4.37)$$

Do mesmo modo podemos definir o operador conjugado dado por

$$\bar{\Gamma} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial u_3}\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial u_4}\mathbf{k} - \frac{\partial}{\partial u_5}\mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial u_6}\mathbf{li} - \frac{\partial}{\partial u_7}\mathbf{lj} - \frac{\partial}{\partial u_8}\mathbf{lk} \right) \quad (4.38)$$

Vejamos a seguir as estas definições.

Definição 4.16. (*regularidade à esquerda*) Uma função de variáveis octonionicas f , tal que $f = f_1 + f_2\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} + f_4\mathbf{k} + f_5\mathbf{l} + f_6\mathbf{li} + f_7\mathbf{lj} + f_8\mathbf{lk}$ com as $f_l : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ parcialmente diferenciáveis, é **regular à esquerda** se:

$$\Gamma f = 0 \quad (4.39)$$

Temos que o operador octonionico (4.37) se apresenta como

$$\begin{aligned}
 \Gamma f = & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u_3}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u_4}\mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial u_5}\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial u_6}\mathbf{li} + \frac{\partial}{\partial u_7}\mathbf{lj} + \frac{\partial}{\partial u_8}\mathbf{lk} \right) \\
 & (f_1 + f_2\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} + f_4\mathbf{k} + f_5\mathbf{l} + f_6\mathbf{li} + f_7\mathbf{lj} + f_8\mathbf{lk})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \\
 &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) \mathbf{i} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} - \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) \mathbf{j} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} + \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) \mathbf{k} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} + \frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) \mathbf{l} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} - \frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) \mathbf{li} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} + \frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) \mathbf{lj} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} - \frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) \mathbf{lk} = 0 \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Definição 4.17. (*regularidade à direita*) Uma função de variáveis octoniônicas f , tal que $f = f_1 + f_2\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} + f_4\mathbf{k} + f_5\mathbf{l} + f_6\mathbf{li} + f_7\mathbf{lj} + f_8\mathbf{lk}$ com as $f_l : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ parcialmente diferenciáveis, é **regular à esquerda** se:

$$f\Gamma = 0 \quad (4.41)$$

Temos que o operador octoniônico (4.37) pode ser apresentado como

$$\begin{aligned}
 f\Gamma &= (f_1 + f_2\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} + f_4\mathbf{k} + f_5\mathbf{l} + f_6\mathbf{li} + f_7\mathbf{lj} + f_8\mathbf{lk}) \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u_3}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u_4}\mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial u_5}\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial u_6}\mathbf{li} + \frac{\partial}{\partial u_7}\mathbf{lj} + \frac{\partial}{\partial u_8}\mathbf{lk} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \\
 &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} - \frac{\partial f_4}{\partial u_3} + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} + \frac{\partial f_6}{\partial u_5} - \frac{\partial f_5}{\partial u_6} + \frac{\partial f_8}{\partial u_7} - \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) \mathbf{i} \\
 &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} + \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \frac{\partial f_2}{\partial u_4} + \frac{\partial f_7}{\partial u_5} - \frac{\partial f_8}{\partial u_6} - \frac{\partial f_5}{\partial u_7} + \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} - \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} + \frac{\partial f_8}{\partial u_5} + \frac{\partial f_7}{\partial u_6} - \frac{\partial f_6}{\partial u_7} - \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) \mathbf{k} \\
 & + \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} - \frac{\partial f_6}{\partial u_2} - \frac{\partial f_7}{\partial u_3} - \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} + \frac{\partial f_2}{\partial u_6} + \frac{\partial f_3}{\partial u_7} + \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) \mathbf{l} \\
 & + \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} + \frac{\partial f_5}{\partial u_2} + \frac{\partial f_8}{\partial u_3} - \frac{\partial f_7}{\partial u_4} - \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} + \frac{\partial f_4}{\partial u_7} - \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) \mathbf{li} \\
 & + \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} - \frac{\partial f_8}{\partial u_2} + \frac{\partial f_5}{\partial u_3} + \frac{\partial f_6}{\partial u_4} - \frac{\partial f_3}{\partial u_5} - \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} + \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) \mathbf{lj} \\
 & + \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} + \frac{\partial f_7}{\partial u_2} - \frac{\partial f_6}{\partial u_3} + \frac{\partial f_5}{\partial u_4} - \frac{\partial f_4}{\partial u_5} + \frac{\partial f_3}{\partial u_6} - \frac{\partial f_2}{\partial u_7} + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) \mathbf{lk} = 0 \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Se a função f for regular à direita e à esquerda simultaneamente, dizemos que f é **regular**.

4.2.2 Integração e diferenciação em octônios

Faremos aqui uma generalização de resultados obtidos dos conceitos de integrabilidade e diferenciabilidade em quatérnios, a qual pode ser interpretados como uma extensão 8-dimensional associados a funções octoniônicas que observam relações do tipo Cauchy-Riemann generalizadas, bem como definições sobre derivação hipercomplexa para esta classe de funções. Todavia, os interessados em um tratamento mais completo e aprofundado da análise quaterniônica, podem consultar, por exemplo, Borges e Machado ([17] e [18]), [19], [20] e [21].

Seja f uma função octoniônica. Devido a não comutatividade dos octônios, devemos definir duas integrais $\int f dz$ e $\int dz f$. Logo podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 \int f dz &= \int (f_1 + f_2 \mathbf{i} + f_3 \mathbf{j} + f_4 \mathbf{k} + f_5 \mathbf{l} + f_6 \mathbf{li} + f_7 \mathbf{lj} + f_8 \mathbf{lk}) \\
 &\quad (du_1 + du_2 \mathbf{i} + du_3 \mathbf{j} + du_4 \mathbf{k} + du_5 \mathbf{l} + du_6 \mathbf{li} + du_7 \mathbf{lj} + du_8 \mathbf{lk}) \\
 &= \int (f_1 du_1 - f_2 du_2 - f_3 du_3 - f_4 du_4 - f_5 du_5 - f_6 du_6 - f_7 du_7 - f_8 du_8) \\
 &+ \int (f_2 du_1 + f_1 du_2 - f_4 du_3 + f_3 du_4 + f_6 du_5 - f_5 du_6 + f_8 du_7 - f_7 du_8) \mathbf{i} \\
 &+ \int (f_3 du_1 + f_4 du_2 + f_1 du_3 - f_2 du_4 + f_7 du_5 - f_8 du_6 - f_5 du_7 + f_6 du_8) \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int (f_4 du_1 - f_3 du_2 + f_2 du_3 + f_1 du_4 + f_8 du_5 + f_7 du_6 - f_6 du_7 - f_5 du_8) \mathbf{k} \\
 & + \int (f_5 du_1 - f_6 du_2 - f_7 du_3 - f_8 du_4 + f_1 du_5 + f_2 du_6 + f_3 du_7 + f_4 du_8) \mathbf{l} \\
 & + \int (f_6 du_1 + f_5 du_2 + f_8 du_3 - f_7 du_4 - f_2 du_5 + f_1 du_6 + f_4 du_7 - f_3 du_8) \mathbf{li} \\
 & + \int (f_7 du_1 - f_8 du_2 + f_5 du_3 + f_6 du_4 - f_3 du_5 - f_4 du_6 + f_1 du_7 + f_2 du_8) \mathbf{lj} \\
 & + \int (f_8 du_1 + f_7 du_2 - f_6 du_3 + f_5 du_4 - f_4 du_5 + f_3 du_6 - f_2 du_7 + f_1 du_8) \mathbf{lk} \\
 & \text{e} \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int dz f &= \int (du_1 + du_2 \mathbf{i} + du_3 \mathbf{j} + du_4 \mathbf{k} + du_5 \mathbf{l} + du_6 \mathbf{li} + du_7 \mathbf{lj} + du_8 \mathbf{lk}) \\
 & \quad (f_1 + f_2 \mathbf{i} + f_3 \mathbf{j} + f_4 \mathbf{k} + f_5 \mathbf{l} + f_6 \mathbf{li} + f_7 \mathbf{lj} + f_8 \mathbf{lk}) \\
 &= \int (du_1 f_1 - du_2 f_2 - du_3 f_3 - du_4 f_4 - du_5 f_5 - du_6 f_6 - du_7 f_7 - du_8 f_8) \\
 & + \int (du_1 f_2 + du_2 f_1 + du_3 f_4 - du_4 f_3 - du_5 f_6 + du_6 f_5 - du_7 f_8 + du_8 f_7) \mathbf{i} \\
 & + \int (du_1 f_3 - du_2 f_4 + du_3 f_1 + du_4 f_2 - du_5 f_7 + du_6 f_8 + du_7 f_5 - du_8 f_6) \mathbf{j} \\
 & + \int (du_1 f_4 + du_2 f_3 - du_3 f_2 + du_4 f_1 - du_5 f_8 - du_6 f_7 + du_7 f_6 + du_8 f_5) \mathbf{k} \\
 & + \int (du_1 f_5 + du_2 f_6 + du_3 f_7 + du_4 f_8 + du_5 f_1 - du_6 f_2 - du_7 f_3 - du_8 f_4) \mathbf{l} \\
 & + \int (du_1 f_6 - du_2 f_5 - du_3 f_8 + du_4 f_7 + du_5 f_2 + du_6 f_1 - du_7 f_4 + du_8 f_3) \mathbf{li} \\
 & + \int (du_1 f_7 + du_2 f_8 - du_3 f_5 - du_4 f_6 + du_5 f_3 + du_6 f_4 + du_7 f_1 - du_8 f_2) \mathbf{lj} \\
 & + \int (du_1 f_8 - du_2 f_7 + du_3 f_6 - du_4 f_5 + du_5 f_4 - du_6 f_3 + du_7 f_2 + du_8 f_1) \mathbf{lk} \\
 & \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Supondo contínuas as funções coordenadas $f_l : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$, e dado um caminho com extremos em $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8,)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8,)$ numa região conexa de um espaço de oito dimensões, as integrais $\int f dz$ e $\int dz f$ independem do caminho de integração, se satisfaz as condições dos dois teoremas seguintes.

Teorema 4.3. *Para todo par de pontos a e b , e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo 8-dimensional, a integral $\int_a^b f dz$ independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $F = F_1 + F_2 \mathbf{i} + F_3 \mathbf{j} + F_4 \mathbf{k} + F_5 \mathbf{l} + F_6 \mathbf{li} + F_7 \mathbf{lj} + F_8 \mathbf{lk}$ com $\int_a^b f dz = x(b) - x(a)$ e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4} = \frac{\partial F_5}{\partial u_5} = \frac{\partial F_6}{\partial u_6} = \frac{\partial F_7}{\partial u_7} = \frac{\partial F_8}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_5} = \frac{\partial F_5}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_7} = \frac{\partial F_7}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_3}{\partial u_1} &= -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_5} = \frac{\partial F_8}{\partial u_6} = \frac{\partial F_5}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_4}{\partial u_1} &= \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_6} = \frac{\partial F_6}{\partial u_7} = \frac{\partial F_5}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_5}{\partial u_1} &= \frac{\partial F_6}{\partial u_2} = \frac{\partial F_7}{\partial u_3} = \frac{\partial F_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_6}{\partial u_1} &= -\frac{\partial F_5}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_3} = \frac{\partial F_7}{\partial u_4} = \frac{\partial F_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_7} = \frac{\partial F_3}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_7}{\partial u_1} &= \frac{\partial F_8}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_4} = \frac{\partial F_3}{\partial u_5} = \frac{\partial F_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial F_8}{\partial u_1} &= -\frac{\partial F_7}{\partial u_2} = \frac{\partial F_6}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_4} = \frac{\partial F_4}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_6} = \frac{\partial F_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_8}. \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Demonstração: A integral $\int_a^b f dz$, dada por (4.44), independerá do caminho se existir uma função F , tal que,

$$\int_a^b f dz = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + F_2 \mathbf{i} + F_3 \mathbf{j} + F_4 \mathbf{k} + F_5 \mathbf{l} + F_6 \mathbf{li} + F_7 \mathbf{lj} + F_8 \mathbf{lk}) = F(b) - F(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Assim, admitindo a existência da função F , diferenciais totais das suas funções coordenadas podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
 dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_1}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_1}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_1}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_1}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_1}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_1}{\partial u_8} du_8 \\
 &= f_1 du_1 - f_2 du_2 - f_3 du_3 - f_4 du_4 - f_5 du_5 - f_6 du_6 - f_7 du_7 - f_8 du_8,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_2}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_2}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_2}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_2}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_2}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_2}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_2 du_1 + f_1 du_2 - f_4 du_3 + f_3 du_4 + f_6 du_5 - f_5 du_6 + f_8 du_7 - f_7 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_3}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_3}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_3}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_3}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_3}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_3}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_3}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_3 du_1 + f_4 du_2 + f_1 du_3 - f_2 du_4 + f_7 du_5 - f_8 du_6 - f_5 du_7 + f_6 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_4}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_4}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_4}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_4}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_4}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_4}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_4}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_4 du_1 - f_3 du_2 + f_2 du_3 + f_1 du_4 + f_8 du_5 + f_7 du_6 - f_6 du_7 - f_5 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_5 &= \frac{\partial F_5}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_5}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_5}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_5}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_5}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_5}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_5}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_5}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_5 du_1 - f_6 du_2 - f_7 du_3 - f_8 du_4 + f_1 du_5 + f_2 du_6 + f_3 du_7 + f_4 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_6 &= \frac{\partial F_6}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_6}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_6}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_6}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_6}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_6}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_6}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_6}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_6 du_1 + f_5 du_2 + f_8 du_3 - f_7 du_4 - f_2 du_5 + f_1 du_6 + f_4 du_7 - f_3 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_7 &= \frac{\partial F_7}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_7}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_7}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_7}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_7}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_7}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_7}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_7}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_7 du_1 - f_8 du_2 + f_5 du_3 + f_6 du_4 - f_3 du_5 - f_4 du_6 + f_1 du_7 + f_2 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_8 &= \frac{\partial F_8}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_8}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F_8}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial F_8}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial F_8}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial F_8}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial F_8}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial F_8}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_8 du_1 + f_7 du_2 - f_6 du_3 + f_5 du_4 - f_4 du_5 + f_3 du_6 - f_2 du_7 + f_1 du_8, \end{aligned}$$

de onde surgem diretamente as relações

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4} = \frac{\partial F_5}{\partial u_5} = \frac{\partial F_6}{\partial u_6} = \frac{\partial F_7}{\partial u_7} = \frac{\partial F_8}{\partial u_8}, \\ f_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_5} = \frac{\partial F_5}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_7} = \frac{\partial F_7}{\partial u_8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_5} = \frac{\partial F_8}{\partial u_6} = \frac{\partial F_5}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_8}, \\
 f_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_6} = \frac{\partial F_6}{\partial u_7} = \frac{\partial F_5}{\partial u_8}, \\
 f_5 &= \frac{\partial F_5}{\partial u_1} = \frac{\partial F_6}{\partial u_2} = \frac{\partial F_7}{\partial u_3} = \frac{\partial p_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_8}, \\
 f_6 &= \frac{\partial F_6}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_3} = \frac{\partial F_7}{\partial u_4} = \frac{\partial F_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_7} = \frac{\partial F_3}{\partial u_8}, \\
 f_7 &= \frac{\partial F_7}{\partial u_1} = \frac{\partial F_8}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_4} = \frac{\partial F_3}{\partial u_5} = \frac{\partial F_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_8}, \\
 f_8 &= \frac{\partial F_8}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_2} = \frac{\partial F_6}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_4} = \frac{\partial F_4}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_6} = \frac{\partial F_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_8}.
 \end{aligned}$$

o que conclui assim nossa demonstração.

Teorema 4.4. *Para todo par de pontos a e b , e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo 8-dimensional, a integral $\int_a^b dzf$ independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $G = G_1 + G_2\mathbf{i} + G_3\mathbf{j} + G_4\mathbf{k} + G_5\mathbf{l} + G_6\mathbf{li} + G_7\mathbf{lj} + G_8\mathbf{lk}$ com $\int_a^b dzf = G(b) - G(a)$ e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial G_2}{\partial u_2} = \frac{\partial G_3}{\partial u_3} = \frac{\partial G_4}{\partial u_4} = \frac{\partial G_5}{\partial u_5} = \frac{\partial G_6}{\partial u_6} = \frac{\partial G_7}{\partial u_7} = \frac{\partial G_8}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_2}{\partial u_1} &= -\frac{\partial G_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_3} = \frac{\partial G_3}{\partial u_4} = \frac{\partial G_6}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_6} = \frac{\partial G_8}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_3}{\partial u_1} &= \frac{\partial G_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_4} = \frac{\partial G_7}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_7} = \frac{\partial G_6}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_4}{\partial u_1} &= -\frac{\partial G_3}{\partial u_2} = \frac{\partial G_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_4} = \frac{\partial G_8}{\partial u_5} = \frac{\partial G_7}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_5}{\partial u_1} &= -\frac{\partial G_6}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_4} = \frac{\partial G_1}{\partial u_5} = \frac{\partial G_2}{\partial u_6} = \frac{\partial G_3}{\partial u_7} = \frac{\partial G_4}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_6}{\partial u_1} &= \frac{\partial G_5}{\partial u_2} = \frac{\partial G_8}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_6} = \frac{\partial G_4}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_7}{\partial u_1} &= -\frac{\partial G_8}{\partial u_2} = \frac{\partial G_5}{\partial u_3} = \frac{\partial G_6}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_7} = \frac{\partial G_2}{\partial u_8}, \\
 \frac{\partial G_8}{\partial u_1} &= \frac{\partial G_7}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_4} = \frac{\partial G_4}{\partial u_5} = \frac{\partial G_3}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_8}.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Demonstração: A integral $\int_a^b dzf$, dada por (4.44), independerá do caminho se existir uma função G , tal que,

$$\int_a^b dz f = \int_a^b dG = \int_a^b d(G_1 + G_2 \mathbf{i} + G_3 \mathbf{j} + G_4 \mathbf{k} + G_5 \mathbf{l} + G_6 \mathbf{li} + G_7 \mathbf{lj} + G_8 \mathbf{lk}) = G(b) - G(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Assim, admitindo a existência da função G , diferenciais totais das suas funções coordenadas podem ser expressas como

$$\begin{aligned} dG_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_1}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_1}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_1}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_1}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_1}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_1}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_1 du_1 - f_2 du_2 - f_3 du_3 - f_4 du_4 - f_5 du_5 - f_6 du_6 - f_7 du_7 - f_8 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_2}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_2}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_2}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_2}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_2}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_2}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_2 du_1 + f_1 du_2 + f_4 du_3 - f_3 du_4 - f_6 du_5 + f_5 du_6 - f_8 du_7 + f_7 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_3}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_3}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_3}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_3}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_3}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_3}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_3}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_3 du_1 - f_4 du_2 + f_1 du_3 + f_2 du_4 - f_7 du_5 + f_8 du_6 + f_5 du_7 - f_6 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_4 &= \frac{\partial G_4}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_4}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_4}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_4}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_4}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_4}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_4}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_4}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_4 du_1 + f_3 du_2 - f_2 du_3 + f_1 du_4 - f_8 du_5 - f_7 du_6 + f_6 du_7 + f_5 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_5 &= \frac{\partial G_5}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_5}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_5}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_5}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_5}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_5}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_5}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_5}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_5 du_1 + f_6 du_2 + f_7 du_3 + f_8 du_4 + f_1 du_5 - f_2 du_6 - f_3 du_7 - f_4 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_6 &= \frac{\partial G_6}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_6}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_6}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_6}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_6}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_6}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_6}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_6}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_6 du_1 - f_5 du_2 - f_8 du_3 + f_7 du_4 + f_2 du_5 + f_1 du_6 - f_4 du_7 + f_3 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_7 &= \frac{\partial G_7}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_7}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_7}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_7}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_7}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_7}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_7}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_7}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_7 du_1 + f_8 du_2 - f_5 du_3 - f_6 du_4 + f_3 du_5 + f_4 du_6 + f_1 du_7 - f_2 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_8 &= \frac{\partial G_8}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial G_8}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial G_8}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial G_8}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial G_8}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial G_8}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial G_8}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial G_8}{\partial u_8} du_8 \\ &= f_8 du_1 - f_7 du_2 + f_6 du_3 - f_5 du_4 + f_4 du_5 - f_3 du_6 + f_2 du_7 + f_1 du_8, \end{aligned}$$

de onde surgem diretamente as relações

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial u_1} = \frac{\partial G_2}{\partial u_2} = \frac{\partial G_3}{\partial u_3} = \frac{\partial G_4}{\partial u_4} = \frac{\partial G_5}{\partial u_5} = \frac{\partial G_6}{\partial u_6} = \frac{\partial G_7}{\partial u_7} = \frac{\partial G_8}{\partial u_8}, \\
 f_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_3} = \frac{\partial G_3}{\partial u_4} = \frac{\partial G_6}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_6} = \frac{\partial G_8}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_8}, \\
 f_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial u_1} = \frac{\partial G_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_4} = \frac{\partial G_7}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_7} = \frac{\partial G_6}{\partial u_8}, \\
 f_4 &= \frac{\partial G_4}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_2} = \frac{\partial G_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_4} = \frac{\partial G_8}{\partial u_5} = \frac{\partial G_7}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_8}, \\
 f_5 &= \frac{\partial G_5}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_5} = \frac{\partial G_2}{\partial u_6} = \frac{\partial G_3}{\partial u_7} = \frac{\partial G_4}{\partial u_8}, \\
 f_6 &= \frac{\partial G_6}{\partial u_1} = \frac{\partial G_5}{\partial u_2} = \frac{\partial G_8}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_6} = \frac{\partial G_4}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_8}, \\
 f_7 &= \frac{\partial G_7}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_2} = \frac{\partial G_5}{\partial u_3} = \frac{\partial G_6}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_7} = \frac{\partial G_2}{\partial u_8}, \\
 f_8 &= \frac{\partial G_8}{\partial u_1} = \frac{\partial G_7}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_3} = \frac{\partial G_5}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_5} = \frac{\partial G_3}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_8}. \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

o que conclui assim nossa demonstração.

Estes dois últimos teoremas podem ser considerados como os análogos 8-dimensional aos teoremas (4.1) e (4.2) para um domínio bi-dimensional. Podemos também observar que, as condições dadas em (4.45) e (4.46) têm em comum as equações de Cauchy-Riemann (4.14) para funções definidas num espaço bidimensional. São definidas assim como as *equações de Cauchy-Riemann generalizadas*. Uma outra análise pode ser verificada para um espaço quadri-dimensional [17], [18], [20] e [21].

Em seguida, apresentaremos as funções $h(z)$ e $g(z)$, definidas em termos da função octoniônica $f(z)$ cujas funções coordenadas obedecem as relações de Cauchy-Riemann generalizadas (4.45) e (4.46), as quais serão identificadas como derivada octoniônica à esquerda e a derivada octoniônica à direita de $f(z)$, respectivamente.

Lema 4.2. *Dada uma função $f(z)$ octoniônica, com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações (4.45), e uma função $g(z)$, definida em termos de $f(z)$ por*

$$\begin{aligned}
 g(z) = \frac{1}{4} \bigg[& \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} + \frac{\partial f_4}{\partial u_4} + \frac{\partial f_5}{\partial u_5} + \frac{\partial f_6}{\partial u_6} + \frac{\partial f_7}{\partial u_7} + \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2} - \frac{\partial f_4}{\partial u_3} + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} + \frac{\partial f_6}{\partial u_5} - \frac{\partial f_5}{\partial u_6} + \frac{\partial f_8}{\partial u_7} - \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) \mathbf{i} \\
 & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} + \frac{\partial f_4}{\partial u_2} - \frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \frac{\partial f_2}{\partial u_4} + \frac{\partial f_7}{\partial u_5} - \frac{\partial f_8}{\partial u_6} - \frac{\partial f_5}{\partial u_7} + \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) \mathbf{j} \\
 & + \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} - \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \frac{\partial f_1}{\partial u_4} + \frac{\partial f_8}{\partial u_5} + \frac{\partial f_7}{\partial u_6} - \frac{\partial f_6}{\partial u_7} - \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) \mathbf{k} \\
 & + \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} - \frac{\partial f_6}{\partial u_2} - \frac{\partial f_7}{\partial u_3} - \frac{\partial f_8}{\partial u_4} - \frac{\partial f_1}{\partial u_5} + \frac{\partial f_2}{\partial u_6} + \frac{\partial f_3}{\partial u_7} + \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) \mathbf{l} \\
 & + \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} + \frac{\partial f_5}{\partial u_2} + \frac{\partial f_8}{\partial u_3} - \frac{\partial f_7}{\partial u_4} - \frac{\partial f_2}{\partial u_5} - \frac{\partial f_1}{\partial u_6} + \frac{\partial f_4}{\partial u_7} - \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) \mathbf{li} \\
 & + \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} - \frac{\partial f_8}{\partial u_2} + \frac{\partial f_5}{\partial u_3} + \frac{\partial f_6}{\partial u_4} - \frac{\partial f_3}{\partial u_5} - \frac{\partial f_4}{\partial u_6} - \frac{\partial f_1}{\partial u_7} + \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) \mathbf{lj} \\
 & + \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} + \frac{\partial f_7}{\partial u_2} - \frac{\partial f_6}{\partial u_3} + \frac{\partial f_5}{\partial u_4} - \frac{\partial f_4}{\partial u_5} + \frac{\partial f_3}{\partial u_6} - \frac{\partial f_2}{\partial u_7} - \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) \mathbf{lk} \bigg] \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

então $\int dz g(z) = f(z)$. A função $g(z)$ pode ser identificada como a **derivada octoniônica à direita** de $f(z)$, sendo denotada por $g(z) = \frac{df_r(z)}{dz}$.

Demonstração: Façamos, inicialmente a seguinte identificação:

$$g(z) = \frac{1}{4}(g_1 + g_2\mathbf{i} + g_3\mathbf{j} + g_4\mathbf{k} + g_5\mathbf{l} + g_6\mathbf{li} + g_7\mathbf{lj} + g_8\mathbf{lk}).$$

Utilizando as regras de multiplicação (1.8) e sabendo que $dz = du_1 + du_2\mathbf{i} + du_3\mathbf{j} + du_4\mathbf{k} + du_5\mathbf{l} + du_6\mathbf{li} + du_7\mathbf{lj} + du_8\mathbf{lk}$, temos então:

$$\begin{aligned}
 \int dz g(z) &= \int (du_1 + du_2\mathbf{i} + du_3\mathbf{j} + du_4\mathbf{k} + du_5\mathbf{l} + du_6\mathbf{li} + du_7\mathbf{lj} + du_8\mathbf{lk}) \\
 &\quad \frac{1}{4}(g_1 + g_2\mathbf{i} + g_3\mathbf{j} + g_4\mathbf{k} + g_5\mathbf{l} + g_6\mathbf{li} + g_7\mathbf{lj} + g_8\mathbf{lk})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int (du_1g_1 - du_2g_2 - du_3g_3 - du_4g_4 - du_5g_5 - du_6g_6 - du_7g_7 - du_8g_8) \\
&\quad + (du_1g_2 + du_2g_1 + du_3g_4 - du_4g_3 - du_5g_6 + du_6g_5 - du_7g_8 + du_8g_7) \mathbf{i} \\
&\quad + (du_1g_3 - du_2g_4 + du_3g_1 + du_4g_2 - du_5g_7 + du_6g_8 + du_7g_5 - du_8g_6) \mathbf{j} \\
&\quad + (du_1g_4 + du_2g_3 - du_3g_2 + du_4g_1 - du_5g_8 - du_6g_7 + du_7g_6 + du_8g_5) \mathbf{k} \\
&\quad + (du_1g_5 + du_2g_6 + du_3g_7 + du_4g_8 + du_5g_1 - du_6g_2 - du_7g_3 - du_8g_4) \mathbf{l} \\
&\quad + (du_1g_6 - du_2g_5 - du_3g_8 + du_4g_7 + du_5g_2 + du_6g_1 - du_7g_4 + du_8g_3) \mathbf{li} \\
&\quad + (du_1g_7 + du_2g_8 - du_3g_5 - du_4g_6 + du_5g_3 + du_6g_4 + du_7g_1 - du_8g_2) \mathbf{lj} \\
&\quad + (du_1g_8 - du_2g_7 + du_3g_6 - du_4g_5 + du_5g_4 - du_6g_3 + du_7g_2 + du_8g_1) \mathbf{lk}
\end{aligned}$$

Usando as relações (4.45) em $dzg(z)$, obtemos o resultado $\int dzg(z)$ igual a

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int 4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} du_8 \right) \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_2}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_2}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{i} \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_3}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_3}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_3}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{j} \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_4}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_4}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_4}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_4}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{k} \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_5}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_5}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_5}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_5}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_5}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{l} \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_6}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_6}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_6}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_6}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_6}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{li} \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_7}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_7}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_7}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_7}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_7}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{lj}
\end{aligned}$$

$$+4\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_8}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_8}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_8}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_8}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_8}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_8}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_8}{\partial u_8}du_8\right)\mathbf{lk},$$

em que, aplicando a regra da cadeia, obtém-se as diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned}\int dzg(z) &= \int (df_1 + df_2\mathbf{i} + df_3\mathbf{j} + df_4\mathbf{k} + df_5\mathbf{l} + df_6\mathbf{li} + df_7\mathbf{lj} + df_8\mathbf{lk}) \\ &= f_1 + f_2\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} + f_4\mathbf{k} + f_5\mathbf{l} + f_6\mathbf{li} + f_7\mathbf{lj} + f_8\mathbf{lk} = f(z),\end{aligned}$$

o que demonstra o lema.

Lema 4.3. *Dada uma função $f(z)$ octoniônica, com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações (4.46), e uma função $h(z)$, definida em termos de $f(z)$ por*

$$\begin{aligned}h(z) = \frac{1}{4} \Big[&\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} + \frac{\partial f_4}{\partial u_4} + \frac{\partial f_5}{\partial u_5} + \frac{\partial f_6}{\partial u_6} + \frac{\partial f_7}{\partial u_7} + \frac{\partial f_8}{\partial u_8}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8}\right)\mathbf{i} \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} - \frac{\partial f_4}{\partial u_2} - \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} + \frac{\partial f_5}{\partial u_8}\right)\mathbf{k} \\ &+ \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} + \frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} - \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8}\right)\mathbf{l} \\ &+ \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} - \frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} - \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8}\right)\mathbf{li} \\ &+ \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} + \frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} - \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8}\right)\mathbf{lj} \\ &+ \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} - \frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} - \frac{\partial f_1}{\partial u_8}\right)\mathbf{lk} \Big] \quad (4.49)\end{aligned}$$

então $\int h(z)dz = f(z)$. A função $h(z)$ pode ser identificada como a **derivada octoniônica à esquerda** de $f(z)$, sendo denotada por $h(z) = \frac{df_l(z)}{dz}$.

Demonstração: Façamos, inicialmente a seguinte identificação:

$$h(z) = \frac{1}{4}(h_1 + h_2\mathbf{i} + h_3\mathbf{j} + h_4\mathbf{k} + h_5\mathbf{l} + h_6\mathbf{li} + h_7\mathbf{lj} + h_8\mathbf{lk}).$$

Utilizando as regras de multiplicação (1.8) e sabendo que $dz = du_1 + du_2\mathbf{i} + du_3\mathbf{j} + du_4\mathbf{k} + du_5\mathbf{l} + du_6\mathbf{li} + du_7\mathbf{lj} + du_8\mathbf{lk}$, temos então:

$$\begin{aligned} \int h(z)dz &= \int \frac{1}{4}(h_1 + h_2\mathbf{i} + h_3\mathbf{j} + h_4\mathbf{k} + h_5\mathbf{l} + h_6\mathbf{li} + h_7\mathbf{lj} + h_8\mathbf{lk}) \\ &\quad (du_1 + du_2\mathbf{i} + du_3\mathbf{j} + du_4\mathbf{k} + du_5\mathbf{l} + du_6\mathbf{li} + du_7\mathbf{lj} + du_8\mathbf{lk}) \\ &= \frac{1}{4} \int (h_1du_1 - h_2du_2 - h_3du_3 - h_4du_4 - h_5du_5 - h_6du_6 - h_7du_7 - h_8du_8) \\ &\quad + (h_2du_1 + h_1du_2 - h_4du_3 + h_3du_4 + h_6du_5 - h_5du_6 + h_8du_7 - h_7du_8)\mathbf{i} \\ &\quad + (h_3du_1 + h_4du_2 + h_1du_3 - h_2du_4 + h_7du_5 - h_8du_6 - h_5du_7 + h_6du_8)\mathbf{j} \\ &\quad + (h_4du_1 - h_3du_2 + h_2du_3 + h_1du_4 + h_8du_5 + h_7du_6 - h_6du_7 - h_5du_8)\mathbf{k} \\ &\quad + (h_5du_1 - h_6du_2 - h_7du_3 - h_8du_4 + h_1du_5 + h_2du_6 + h_3du_7 + h_4du_8)\mathbf{l} \\ &\quad + (h_6du_1 + h_5du_2 + h_8du_3 - h_7du_4 - h_2du_5 + h_1du_6 + h_4du_7 - h_3du_8)\mathbf{li} \\ &\quad + (h_7du_1 - h_8du_2 + h_5du_3 + h_6du_4 - h_3du_5 - h_4du_6 + h_1du_7 + h_2du_8)\mathbf{lj} \\ &\quad + \int (h_8du_1 + h_7du_2 - h_6du_3 + h_5du_4 - h_4du_5 + h_3du_6 - h_2du_7 + h_1du_8)\mathbf{lk} \end{aligned}$$

Usando as relações (4.46) em $dzh(z)$, obtemos $\int dzh(z)$ dada por,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int 4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} du_8 \right) \\ &\quad + 4 \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_2}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_2}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{i} \\ &\quad + 4 \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} du_4 + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} du_5 + \frac{\partial f_3}{\partial u_6} du_6 + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} du_7 + \frac{\partial f_3}{\partial u_8} du_8 \right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_4}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_4}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_4}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_4}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_4}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_4}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_4}{\partial u_8}du_8\right)\mathbf{k} \\
& +4\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_5}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_5}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_5}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_5}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_5}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_5}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_5}{\partial u_8}du_8\right)\mathbf{l} \\
& +4\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_6}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_6}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_6}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_6}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_6}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_6}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_6}{\partial u_8}du_8\right)\mathbf{li} \\
& +4\left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_7}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_7}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_7}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_7}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_7}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_7}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_7}{\partial u_8}du_8\right)\mathbf{l j} \\
& +4\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_8}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_8}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_8}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_8}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_8}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_8}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_8}{\partial u_8}du_8\right)\mathbf{l k},
\end{aligned}$$

em que, aplicando a regra da cadeia, obtém-se as diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int h(z)dz &= \int (df_1 + df_2\mathbf{i} + df_3\mathbf{j} + df_4\mathbf{k} + df_5\mathbf{l} + df_6\mathbf{li} + df_7\mathbf{l j} + df_8\mathbf{l k}) \\
&= f_1 + f_2\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} + f_4\mathbf{k} + f_5\mathbf{l} + f_6\mathbf{li} + f_7\mathbf{l j} + f_8\mathbf{l k} = f(z),
\end{aligned}$$

É interessante observar que, pode-se reproduzir as definições de derivadas octoniônicas à direita e à esquerda, por meio da conjugação direta do operador octoniônico Γ da teoria de Fueter dado por (4.38), obtendo respectivamente, para (4.48) e (4.49), as seguintes formas:

$$4g(z) = \bar{\Gamma}f \quad \text{ou} \quad \int dzg(z) = \frac{1}{4} \int dz\bar{\Gamma}f = f, \quad (4.50)$$

e

$$4h(z) = f\bar{\Gamma} \quad \text{ou} \quad \int h(z)dz = \frac{1}{4} \int f\bar{\Gamma}dz = f. \quad (4.51)$$

4.3 Aplicação da função exponencial octoniônica à equações de operadores

Por instante, consideremos uma aplicação do operador octoniônico (4.37) à exponencial octoniônica (4.36), respeitando as regras de multiplicação (1.8), dada por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u_4} \mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial u_5} \mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial u_6} \mathbf{li} + \frac{\partial}{\partial u_7} \mathbf{lj} + \frac{\partial}{\partial u_8} \mathbf{lk} \right) \\ & \left(e^{u_1} \cos \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2} + \frac{e^{u_1} u_2 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \right. \\ & + \frac{e^{u_1} u_3 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} + \frac{e^{u_1} u_4 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \\ & + \frac{e^{u_1} u_5 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} + \frac{e^{u_1} u_6 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \\ & \left. + \frac{e^{u_1} u_7 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} + \frac{e^{u_1} u_8 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \right). \end{aligned}$$

Aplicando cada uma das derivadas aos termos correspondentes do segundo grupo e admitindo $|\vec{u}| = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} & = e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) + \frac{\mathbf{i} u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{j} u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{k} u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{l} u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{li} u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\ & + \frac{\mathbf{lj} u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{lk} u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1} u_2^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{u_1} u_2^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_2 u_4 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_2 u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_2 u_5 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_2 u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_2 u_6 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_2 u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_2 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_2 u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_2 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_2 u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} u_3^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{e^{u_1} u_3^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_3 u_4 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_3 u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_3 u_5 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_3 u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_3 u_6 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_3 u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_3 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_3 u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_3 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_3 u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_4 u_2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_4 u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_4 u_3 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_4 u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} u_4^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{e^{u_1} u_4^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_5 u_4 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_5 u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_4 u_6 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_4 u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{lie}^{u_1} u_4 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_4 u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_4 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_4 u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)}
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathbf{li} \ e^{u_1} \ u_2 u_5 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{li} \ e^{u_1} u_2 u_5 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{lj} \ e^{u_1} u_3 u_5 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{lj} \ e^{u_1} u_3 u_5 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{lke}^{u_1} u_4 u_5 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{lke}^{u_1} u_4 u_5 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{e^{u_1} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} u_5^2 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{e^{u_1} u_5^2 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{i} \ e^{u_1} \ u_5 u_6 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{i} \ e^{u_1} \ u_5 u_6 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{j} \ e^{u_1} u_5 u_7 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{j} \ e^{u_1} \ u_5 u_7 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{k} \ e^{u_1} u_5 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{k} \ e^{u_1} u_5 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{li} \ e^{u_1} u_6 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{l} \ e^{u_1} u_2 u_6 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{l} \ e^{u_1} u_2 u_6 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{lke}^{u_1} u_3 u_6 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{lke}^{u_1} u_3 u_6 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{lje}^{u_1} u_4 u_6 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{lje}^{u_1} u_4 u_6 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_5 u_6 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_5 u_6 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{e^{u_1} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} u_6^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{e^{u_1} \ u_6^2 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{k} \ e^{u_1} \ u_6 u_7 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{k} \ e^{u_1} \ u_6 u_7 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{j} \ e^{u_1} \ u_6 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{j} \ e^{u_1} u_6 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{lk} \ e^{u_1} u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{lj} \ e^{u_1} u_2 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{lj} \ e^{u_1} u_2 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{li} \ e^{u_1} u_3 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{li} \ e^{u_1} u_3 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l} \ e^{u_1} u_4 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l} \ e^{u_1} u_4 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{j} \ e^{u_1} u_6 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{j} \ e^{u_1} u_6 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{k} \ e^{u_1} u_5 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{k} \ e^{u_1} u_5 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{i} \ e^{u_1} u_7 u_8 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_7 u_8 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{e^{u_1} \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} u_8^2 \ \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{e^{u_1} u_8^2 \ \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3}
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIONICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{l}\mathbf{j} e^{u_1}u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{l}\mathbf{k} e^{u_1}u_2u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l}\mathbf{k} e^{u_1}u_2u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l} e^{u_1}u_3u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{l} e^{u_1}u_3u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{li} e^{u_1}u_4u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1}u_4u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{j} e^{u_1}u_5u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{j} e^{u_1}u_5u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{k} e^{u_1}u_6u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{k} e^{u_1}u_6u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1}u_7^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{e^{u_1}u_7^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{i} e^{u_1}u_8u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{i} e^{u_1}u_8u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, se aplicarmos o operador conjugado octonionico (4.38)

$$\bar{\Gamma} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial u_4} \mathbf{k} - \frac{\partial}{\partial u_5} \mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial u_6} \mathbf{li} - \frac{\partial}{\partial u_7} \mathbf{l}\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial u_8} \mathbf{l}\mathbf{k} \right),$$

em (4.35) obtemos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial u_4} \mathbf{k} - \frac{\partial}{\partial u_5} \mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial u_6} \mathbf{li} - \frac{\partial}{\partial u_7} \mathbf{l}\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial u_8} \mathbf{l}\mathbf{k} \right) \\
& \left(e^{u_1} \cos \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2} + \frac{e^{u_1}u_2 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \right. \\
& + \frac{e^{u_1}u_3 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} + \frac{e^{u_1}u_4 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \\
& + \frac{e^{u_1}u_5 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} + \frac{e^{u_1}u_6 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \\
& \left. + \frac{e^{u_1}u_7 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} + \frac{e^{u_1}u_8 \operatorname{sen} \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} \right).
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À EQUAÇÕES DE OPERADORES

Aplicando as derivadas,

$$\begin{aligned}
&= e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) + \frac{\mathbf{i} u_2 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{j} u_3 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{k} u_4 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{l} u_5 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{li} u_6 + \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
&+ \frac{\mathbf{l} \mathbf{j} u_7 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{l} \mathbf{k} u_8 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_2 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{e^{u_1} u_2^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
&- \frac{e^{u_1} u_2^2 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_2 u_4 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
&- \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_2 u_4 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_2 u_5 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_2 u_5 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_2 u_6 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
&+ \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_2 u_6 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l} \mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l} \mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_7 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l} \mathbf{j} e^{u_1} u_2 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
&+ \frac{\mathbf{l} \mathbf{j} e^{u_1} u_2 u_8 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_3 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_2 u_3 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
&+ \frac{e^{u_1} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1} u_3^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{e^{u_1} u_3^2 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{e^{u_1} u_3 u_4 \mathbf{i} \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_3 u_4 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
&+ \frac{\mathbf{l} \mathbf{j} e^{u_1} u_3 u_5 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l} \mathbf{j} e^{u_1} u_3 u_5 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l} \mathbf{k} e^{u_1} u_3 u_6 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l} \mathbf{k} e^{u_1} u_3 u_6 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
&- \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_3 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_3 u_7 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_3 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_3 u_8 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
&+ \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_4 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_4 u_2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_4 u_2 \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_4 u_3 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2}
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{i}e^{u_1}u_4u_3\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{e^{u_1}\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1}u_4^2\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{e^{u_1}u_4^2\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_5u_4\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_5u_4\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_4u_6\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_4u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l}ie^{u_1}u_4u_7\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{l}ie^{u_1}u_4u_7\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l}e^{u_1}u_4u_8\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l}e^{u_1}u_4u_8\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l}e^{u_1}u_5\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{\mathbf{l}ie^{u_1}u_2u_5\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l}ie^{u_1}u_2u_5\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_3u_5\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_3u_5\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_4u_5\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_4u_5\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{e^{u_1}\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1}u_5^2\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{e^{u_1}u_5^2\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{i}e^{u_1}u_5u_6\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{i}e^{u_1}u_5u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{j}e^{u_1}u_5u_7\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{j}e^{u_1}u_5u_7\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{k}e^{u_1}u_5u_8\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{k}e^{u_1}u_5u_8\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l}ie^{u_1}u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{l}e^{u_1}u_2u_6\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{l}e^{u_1}u_2u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_3u_6\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_3u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_4u_6\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_4u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{i}e^{u_1}u_5u_6\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{i}e^{u_1}u_5u_6\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{e^{u_1}\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1}u_6^2\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{e^{u_1}u_6^2\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{k}e^{u_1}u_6u_7\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{k}e^{u_1}u_6u_7\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{j}e^{u_1}u_6u_8\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{j}e^{u_1}u_6u_8\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l}ke^{u_1}u_8\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_2u_8\cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l}je^{u_1}u_2u_8\text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3}
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_3 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_3 u_8 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_4 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_4 u_8 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_6 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_6 u_8 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_5 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_5 u_8 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& - \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_7 u_8 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_7 u_8 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{e^{u_1} \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1} u_8^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{e^{u_1} u_8^2 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
& + \frac{\mathbf{lj} e^{u_1} u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{lke}^{u_1} u_2 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{lk} e^{u_1} u_2 u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_3 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{\mathbf{l} e^{u_1} u_3 u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_4 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_4 u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_5 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& + \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_5 u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{\mathbf{ke}^{u_1} u_6 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{\mathbf{ke}^{u_1} u_6 u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{e^{u_1} \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{e^{u_1} u_7^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
& - \frac{e^{u_1} u_7^2 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} + \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_8 u_7 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} - \frac{\mathbf{ie}^{u_1} u_8 u_7 \sen(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3}. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Uma aplicação do operador octoniônico (4.37) à uma função de variáveis octoniônicas (4.36) nos dá que

$$\begin{aligned}
\Gamma f &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) \mathbf{i} \\
&+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} - \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) \mathbf{j} \\
&+ \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} + \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) \mathbf{k} \\
&+ \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} + \frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) \mathbf{l}
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} - \frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) \mathbf{li} \\
& + \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} + \frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) \mathbf{lj} \\
& + \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} - \frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) \mathbf{lk}. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, a aplicação do operador (4.38) a função (4.36) é dada

por

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}f &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} + \frac{\partial f_4}{\partial u_4} + \frac{\partial f_5}{\partial u_5} + \frac{\partial f_6}{\partial u_6} + \frac{\partial f_7}{\partial u_7} + \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \\
& + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2} - \frac{\partial f_4}{\partial u_3} + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} + \frac{\partial f_6}{\partial u_5} - \frac{\partial f_5}{\partial u_6} + \frac{\partial f_8}{\partial u_7} - \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) \mathbf{i} \\
& + \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} + \frac{\partial f_4}{\partial u_2} - \frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \frac{\partial f_2}{\partial u_4} + \frac{\partial f_7}{\partial u_5} - \frac{\partial f_8}{\partial u_6} - \frac{\partial f_5}{\partial u_7} + \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) \mathbf{j} \\
& + \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} - \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \frac{\partial f_1}{\partial u_4} + \frac{\partial f_8}{\partial u_5} + \frac{\partial f_7}{\partial u_6} - \frac{\partial f_6}{\partial u_7} - \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) \mathbf{k} \\
& + \left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} - \frac{\partial f_6}{\partial u_2} - \frac{\partial f_7}{\partial u_3} - \frac{\partial f_8}{\partial u_4} - \frac{\partial f_1}{\partial u_5} + \frac{\partial f_2}{\partial u_6} + \frac{\partial f_3}{\partial u_7} + \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) \mathbf{l} \\
& + \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} + \frac{\partial f_5}{\partial u_2} + \frac{\partial f_8}{\partial u_3} - \frac{\partial f_7}{\partial u_4} - \frac{\partial f_2}{\partial u_5} - \frac{\partial f_1}{\partial u_6} + \frac{\partial f_4}{\partial u_7} - \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) \mathbf{li} \\
& + \left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} - \frac{\partial f_8}{\partial u_2} + \frac{\partial f_5}{\partial u_3} + \frac{\partial f_6}{\partial u_4} - \frac{\partial f_3}{\partial u_5} - \frac{\partial f_4}{\partial u_6} - \frac{\partial f_1}{\partial u_7} + \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) \mathbf{lj} \\
& + \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} + \frac{\partial f_7}{\partial u_2} - \frac{\partial f_6}{\partial u_3} + \frac{\partial f_5}{\partial u_4} - \frac{\partial f_4}{\partial u_5} + \frac{\partial f_3}{\partial u_6} - \frac{\partial f_2}{\partial u_7} - \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) \mathbf{lk}. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Vamos definir um operador Tf que chamaremos de operador soma dado por $Tf = \frac{1}{2}(\Gamma f + \bar{\Gamma}f)$. Logo temos

$$Tf = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \mathbf{i} + \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \mathbf{j} + \frac{\partial f_4}{\partial u_1} \mathbf{k} + \frac{\partial f_5}{\partial u_1} \mathbf{l} + \frac{\partial f_6}{\partial u_1} \mathbf{li} + \frac{\partial f_7}{\partial u_1} \mathbf{lj} + \frac{\partial f_8}{\partial u_1} \mathbf{lk}, \quad (4.56)$$

Podemos fazer uma identificação da função (4.36) com a função exponencial octoniônica (4.26), admitindo que esta tem a propriedade

$$T(e^o) = e^o.$$

Deduzimos então diretamente uma equação de operadores, considerando

$$\vec{u} = u_2 \mathbf{i} + u_3 \mathbf{j} + u_4 \mathbf{k} + u_5 \mathbf{l} + u_6 \mathbf{li} + u_7 \mathbf{lj} + u_8 \mathbf{lk}, \text{ fazendo (4.52) - (4.53)}$$

$$\begin{aligned}
 Tf = \frac{1}{2}(\Gamma f + \bar{\Gamma} f) = e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) + \frac{u_2 \mathbf{i} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{u_3 \mathbf{j} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{u_4 \mathbf{k} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
 + \frac{u_5 \mathbf{l} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{u_6 \mathbf{li} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{u_7 \mathbf{l} \mathbf{j} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} + \frac{u_8 \mathbf{l} \mathbf{k} \text{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)}. \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

Uma **identificação** do resultado obtido em (4.56) com (4.57) é **dada** por

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right) = e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) \quad (4.58)$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right) \mathbf{i} = \left(\frac{u_2 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{i} \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} \right) \mathbf{j} = \left(\frac{u_3 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{j} \quad (4.60)$$

$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{u_4 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{k} \quad (4.61)$$

$$\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} \right) \mathbf{l} = \left(\frac{u_5 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{l} \quad (4.62)$$

$$\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} \right) \mathbf{li} = \left(\frac{u_6 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{li} \quad (4.63)$$

$$\left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} \right) \mathbf{l} \mathbf{j} = \left(\frac{u_7 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{l} \mathbf{j} \quad (4.64)$$

$$\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \mathbf{l} \mathbf{k} \left(\frac{u_8 \text{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \right) \mathbf{l} \mathbf{k} \quad (4.65)$$

Da mesma maneira definimos um operador Sf , que chamaremos de operador subtração, aplicado sob uma função de variáveis octoniônicas (4.36) dado por $Sf = \frac{1}{2}(\Gamma f - \bar{\Gamma} f)$. Logo temos

$$\begin{aligned}
 Sf = & \left(-\frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) \mathbf{i} \\
 & + \left(-\frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) \mathbf{j} \\
 & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} + \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) \mathbf{k} \\
 & + \left(\frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) \mathbf{l} \\
 & + \left(-\frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) \mathbf{li} \\
 & + \left(\frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) \mathbf{lj} \\
 & + \left(-\frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) \mathbf{lk}. \quad (4.66)
 \end{aligned}$$

Agora, fazendo (4.52) - (4.53), teremos

$$\begin{aligned}
 = & \frac{14e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2e^{u_1}u_2^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{2e^{u_1}u_2^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2e^{u_1}u_3^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{2e^{u_1}u_3^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
 & - \frac{2e^{u_1}u_4^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{2e^{u_1}u_4^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2e^{u_1}u_5^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{2e^{u_1}u_5^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2e^{u_1}u_6^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} \\
 & + \frac{2e^{u_1}u_6^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2e^{u_1}u_7^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{2e^{u_1}u_7^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2e^{u_1}u_8^2 \cos(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^2} + \frac{2e^{u_1}u_8^2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
 & - \frac{2\mathbf{i}e^{u_1}u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2\mathbf{j}e^{u_1}u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2\mathbf{k}e^{u_1}u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2\mathbf{l}e^{u_1}u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} \\
 & - \frac{2\mathbf{li}e^{u_1}u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2\mathbf{lje}^{u_1}u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3} - \frac{2\mathbf{lke}^{u_1}u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)^3}, \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

ainda em (4.67) colocando alguns termos em evidência,

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À
EQUAÇÕES DE OPERADORES

$$\begin{aligned}
\Gamma f - \bar{\Gamma} f = & -\frac{14e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - 2e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) \left(\frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}{(|\vec{u}|)^2} \right) \\
& + \frac{2e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \left(\frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}{(|\vec{u}|)^2} \right) - \frac{2\mathbf{i} e^{u_1} u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{2\mathbf{j} e^{u_1} u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{k} e^{u_1} u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{l} e^{u_1} u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{li} e^{u_1} u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{2\mathbf{lje}^{u_1} u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{lke}^{u_1} u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Ainda em (4.68) podemos fazer alguma simplificações e resulta que

$$\begin{aligned}
= & -\frac{12e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - 2e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) - \frac{2\mathbf{i} e^{u_1} u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{j} e^{u_1} u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{2\mathbf{k} e^{u_1} u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{l} e^{u_1} u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{li} e^{u_1} u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{2\mathbf{lje}^{u_1} u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{2\mathbf{lke}^{u_1} u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} = (\Gamma f - \bar{\Gamma} f), \tag{4.69}
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\Gamma f - \bar{\Gamma} f) = & -\frac{6e^{u_1} \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - e^{u_1} \cos(|\vec{u}|) - \frac{\mathbf{i} e^{u_1} u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{j} e^{u_1} u_3 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{\mathbf{k} e^{u_1} u_4 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \mathbf{l} e^{u_1} u_5 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)(|\vec{u}|) - \frac{\mathbf{li} e^{u_1} u_6 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} - \frac{\mathbf{lje}^{u_1} u_7 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \\
& - \frac{\mathbf{lke}^{u_1} u_8 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} = Sf. \tag{4.70}
\end{aligned}$$

4.3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL OCTONIÔNICA À EQUAÇÕES DE OPERADORES

Uma **identificação** do resultado obtido em (4.66) com (4.70) é **dada** por

$$\left(-\frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \right) = e^{u_1} \left[-\cos(|\vec{u}|) - \left(\frac{6\operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \right] \quad (4.71)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{i}, \quad (4.72)$$

$$\left(-\frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{j}, \quad (4.73)$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} + \frac{\partial f_5}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{k}, \quad (4.74)$$

$$\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{l}, \quad (4.75)$$

$$\left(-\frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{li}, \quad (4.76)$$

$$\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{lj}, \quad (4.77)$$

$$\left(-\frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} + \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \right) = -e^{u_1} \left(\frac{u_2 \operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right) \mathbf{lk}, \quad (4.78)$$

Podemos identificar $|\vec{u}| = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}$ aos resultados acima. Este caminho foi omitido devido a extensão das equações.

Em (4.71), o novo termo que surge pode ser definido como

$$\mathbf{C} = e^{u_1} \left(\frac{6\operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{(|\vec{u}|)} \right). \quad (4.79)$$

Concluimos que (4.70) pode ser reescrito como

$$Se^o = -e^o - \mathbf{C} \quad (4.80)$$

Podemos observar que, o operador T permite que a função exponencial octoniônica (4.35) fique inalterada somente se S da a simetria de e^z e translate a primeira coordenada da exponencial octoniônica por uma quantidade $\mathbf{C}$.

4.4 Conclusão

Os octônios, uma extensão não associativa dos quatérnios, pode ser aplicada para obtenção de uma relação do tipo De Moivre clássica. A exponencial octoniônica (4.35) define uma função que representa a rotação em relação a um ponto fixo em $\mathbb{R}^8$.

Obtemos uma generalização octoniônica dos operadores da teoria de Fueter, que podem assim, definir funções de variáveis octoniônicas que satisfazem conceitos de integrabilidade e diferenciabilidade.

Em conexão com operadores da teoria de Fueter, definimos equações de operadores tomando a propriedade de aplicar a exponencial octoniônica (4.35) ao operador T (4.57) e ao operador S (4.70), podendo assim comparar alguns resultados similares.

Estas propriedades relacionadas aos operadores T e S podem ser comparadas aos procedimentos utilizados para solução de equações diferenciais parciais.

Conclusão

A teoria octoniônica é fascinante por si só. Vista como uma generalização da teoria dos quatérnios que, apesar da não associatividade, tem possíveis e vastas aplicações à Física e a Geometria. Por volta de 1925, Cartan descreve a geometria de um fenômeno chamado “triality”, que estabelece a simetria entre vetores e spinors e um espaço 8-dimensional. Sua relevância à Física sobre fundamentações da Mecânica Quântica [14], foi o que motivou nomes em 1978, como Ginaydin, Piron e Ruegg [27], mostrarem que é possível formular a Mecânica Quântica referindo-se as álgebras de Jordan excepcionais, definindo assim a Mecânica Quântica octoniônica. Também em 1980 como relatado em [2] observou-se que os octônios explicam algumas características da teoria de cordas. Também nesse mesmo artigo resultados da análise octoniônica são relacionados às geometrias projetivas.

Trabalhos como [8] concentram-se nas aplicações da álgebra divisional, em particular a dos octônios, na formulação de algumas supersimetrias estendidas e nas supersimetrias generalizadas.

Para o momento, neste presente trabalho, foi possível definir a função exponencial octoniônica, através da generalização da relação clássica de Moivre, que pode ser considerada uma função que rotaciona um ponto fixo em R^8 . Foi possível definir uma generalização octoniônica de funções regulares da teoria de Fueter. Não utilizamos o termo função analítica para funções octoniônicas. Foi usada a expressão funções regulares octoniônicas. Isto devido ao fato de que a teoria octoniônica não ter o conceito de analiticidade totalmente definido.

Pudemos estabelecer uma conexão da função exponencial octoniônica a

esses operadores generalizados através da identificação de equações de operadores.

O conceito de regularidade de funções hipercomplexas é de extrema importância nas aplicações à Física pois permite, por exemplo, representações quaterniônicas das equações de campo de Dirac e de Klein-Gordon, conforme mostrado em Calixto [19]. Pretendemos em trabalhos futuros, tentar generalizar essas representações sobre os octônios.

A álgebra octoniônica pode também ter vastas e importantes aplicações em Criptografia e Computação Quântica. Além disso, conforme relatado por Godoy [9], podemos traçar paralelos à esses resultados utilizando álgebras octoniônicas, sobretudo devido ao seu caráter não associativo. Estudos estão sendo realizados no âmbito do Grupo de Problemas não lineares e Sistemas Complexos (UNESP - Campus de São José do Rio Preto - SP).

Referências Bibliográficas

- [1] Milies P. C., *História da Álgebra*, Tópicos de Matemática Elementar, IMEUSP, São Paulo, 38-61 (1987).
- [2] Baez J., *The Octonions*. Bull. Amer. Math. Soc., **39**:(2), 145-205 (2001).
- [3] Garcia, Arnaldo e LEQUAIN, Yves, *Álgebra: um curso de introdução*, IMPA-RJ (1988).
- [4] Jacobson, N., *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, New York (1974).
- [5] Hamermesh, M., *Group theory and its applications to physical problems*, Addison-Wesley, London (1964).
- [6] Cartan, É., *Le principe de dualité et la théorie des groupes simple et semi-simples*, Bull. Sci. Math., **49**, 361-374 (1925).
- [7] Jordan, P., von Neumann, J., Wigner, E., *On an algebric generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. Math., **35**, 29-64 (1934).
- [8] Kugo, T. and Townsend, P.K., *Supersymmetry nand the division algebras*, Nucl. Phys., **B221**, 357-380 (1983).
- [9] Godoy, R.; *Espaço de Hilbert e quantificação de emaranhados via entropia não extensiva*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE),(2005).

- [10] Slinko, A., *1, 2, 4, 8,...What comes next?*, Extracta Mathematica, **19**, 155-161 (2004).
- [11] Cohen, F. R., *On Whitehead squares, Cayley-Dickson algebras and rational functions*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **37**, 55-62 (1992).
- [12] Moreno, R. G., *The zero divisors of the Cayley-Dickson algebras over the real numbers*, preprint available at q-alg/9710013.
- [13] Gilmore, R., *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*, John Wiley & Sons, New York (1941).
- [14] Lin, W.-L., *Octonions and Exceptional Groups?*, Chinese Journal of Physics, **30**, 579-597 (1992).
- [15] Martin, L.S., *Álgebra de Lie*, Editora da Unicamp, Campinas-SP (1999).
- [16] Borel, A., *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, American Mathematical Society (2001).
- [17] Machado, J. M. and Borges, M.F., *New Remarks on the Differentiability of Hypercomplex Functions*, Internacional Journal of Applied Math., **8**:(1)(2002).
- [18] Machado, J. M. and Borges, M.F., *Hypercomplex Functions and Conformal Mappings*, Internacional Journal of Applied Math., **9**:(1)(2002).
- [19] Calixto, A. P., *Operador Quaterniônico de Klein-Gordon-Dirac*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE) (2002).
- [20] Godoy Junior, A., *Relações de Conformidade e Fatorização em Quatérnios*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE) (2002).
- [21] Oliveira, A. C., *Quatérnios, operadores de Fueter e Relações Quaterniônicas Transcendentais*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE) (2006).

- [22] Machado, J. M. and Borges, M.F., *Quaternion transcendent functions and Fueter operators*, submetido para publicação.
- [23] Murnaghan, F. D., *An elementary presentation of the theory of quaternions*, Scripta Math., **10**, 37-49 (1944).
- [24] Cho, E., *De Moivre Formula for quaternions*, Appl. Math. Lett., **11**:(6), 33-35 (1998).
- [25] Leite, F. S. and Vitória, J., *Generalization of the De Moivre formulas for quaternions and octonions*, Math. studies in honor of Prof. Luis Albuquerque, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 121-133 (1987).
- [26] Salazar, H. L. C., A., *Octônios e suas aplicações em Física*, Dissertação de Doutorado, CBPF-RJ (2003).
- [27] Giinaydin, M., Piron, C. and Ruegg, H., *Moufang plane and octonionic quantum mechanics*, Comm. Math. Phys., **61**, 69-85 (1978).
- [28] Fueter, R., *Du Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta\phi i = 0$ und $\Delta\Delta = 0$ Mit vier reelen Variablen*, Commet. Math. Helv., **7**, 307-330 (1935).