

**unesp** 

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

**PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO  
EM FÍSICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA**

---

**ANA LAURA BOSCOLO**

***O PÊNDELO DUPLO CAÓTICO: RESULTADOS EXPERIMENTAIS  
E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS***

---

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO**

São Paulo  
2018

Universidade Estadual Paulista

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**Ana Laura Boscolo**

*O pêndulo duplo caótico: Resultados experimentais  
e simulações numéricas*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro - SP

2018

517.39 Boscolo, Ana Laura  
B742p O pêndulo duplo caótico : resultados experimentais e  
simulações numéricas / Ana Laura Boscolo. - Rio Claro, 2018  
64 f. : il., figs., gráfs., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Pêndulo duplo. 3.  
Caos. 4. Dinâmica não-linear. I. Título.

**Ana Laura Boscolo**

# O pêndulo duplo: Resultados experimentais e simulações numéricas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (DF - UNESP - RC)

Prof. Dr. Edson Denis Leonel (DF - UNESP - RC)

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima (IFSC-UFSCAR-SC)

Conceito: Aprovada

Rio Claro, SP 02 de fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho aos meus pais e a todos que me apoiaram em minha trajetória acadêmica.

# Agradecimentos

Agradeço a minha família e irmãs por todos estes anos me apoiarem e por me acompanharem até aqui. Obrigada meus pais por me incentivarem e investirem em mim para que eu possa estar escrevendo esta dissertação hoje, serei eternamente grata por tudo que fizeram e ainda fazem por mim, dedico especialmente esta dissertação a vocês.

Ao meu orientador Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro por toda paciência, apoio e conhecimentos fornecidos ao longo de todo este trabalho. Foi um grande aprendizado e muito gratificante participar deste trabalho e uma grande experiência e conquista do nosso grupo de pesquisa, fico muito feliz em ter feito parte desta equipe. Agradeço ao meu colega de grupo de pesquisa Rodrigo por toda a ajuda e paciência que contribuíram muito para o trabalho de ambos.

Ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel, Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima e ao Prof. Dr. André Livorati pelas contribuições dadas para a melhora do trabalho.

Ao meu namorado Danilo, pela paciência, carinho e apoio durante meu trabalho e durante toda minha graduação e mestrado.

Aos meus amigos de mestrado, graduação e de tantos anos de vida, em especial Guilherme Caes, Elaine Scarpa, Carol Rizzo, Carol Luíz, Rejane Carvalho, Mariana Picoli, Júlia Tagliaferro, Isadora Schutzer, Fabiana Rando, Cássio Seron, por todo o apoio que me deram e pela paciência.

A Capes pelo financiamento de minha pesquisa durante esses anos.

E agradeço a Deus pois sem ele nada disso seria possível.

# Resumo

Esta dissertação teve por objetivo abordar os principais assuntos referentes a dinâmica não-linear de um pêndulo duplo, como estudo das trajetórias no espaço de fase obtidas para condições iniciais periódicas (modos normais do pêndulo duplo) e para condições iniciais que impliquem em trajetórias caóticas, estudo dos expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré do sistema. Para esta análise utilizou-se de simulações numéricas realizadas no software *Mathematica* bem como estudo a partir de um pêndulo duplo experimental filmado a partir de imagens estroboscópicas digitais, as quais foram devidamente tratadas no software *Tracker* e posteriormente analisadas no software *Mathematica*. Efetuou-se o estudo da ação de uma força externa aplicada por um motor no pêndulo duplo experimental a partir da qual foi possível obter-se uma aproximação do experimento real sujeito a forças dissipativas com a dinâmica efetuada por um pêndulo duplo ideal, sendo este um dos fatores que justifica-se a utilização das equações que regem o pêndulo duplo ideal para o problema que estava sendo estudado (pêndulo real), devido a energia ser mantida consideravelmente constante durante os testes realizados.

**Palavras Chave:** Pêndulo duplo, Caos, Dinâmica Não-Linear.

# Abstract

This study aims to address the main issues regarding the nonlinear dynamics of the dissipative and forced double pendulum as well as the dissipative pendulum with ideal pendulum approximation at short time intervals (0 to 10s of filming). We investigate some properties of the phase space under different initial conditions, of the Lyapunov exponents indicating Chaos of the system and of the Poincaré sections allowing us to obtain detailed information about the complex dynamics that occurs in the quadrimensional phase space of the double pendulum. We observed that for short time the dynamics of the double pendulum can be approximated by the ideal pendulum since the loss of energy was minimal moreover the introduction of an external force in the system compensated for the loss of energy by the action of the dissipative forces making it possible to a more complete analyzes of the dynamics as the study of the section of Poincaré in the system could be performed. It was noticed that the theoretical results widely studied are similar to the experimental results therefore emphasizing the importance of this methodology in the study of chaotic systems.

**Key Words:** Double Pendulum, Chaos, Nonlinear Dynamics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal</b>	<b>3</b>
2.1	As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Newtoniano . . . . .	3
2.2	As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Lagrangeano . . . . .	5
2.3	As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Hamiltoniano . . . . .	8
<b>3</b>	<b>As equações de movimento para o pêndulo duplo dissipativo e forçado</b>	<b>11</b>
3.1	Equações de movimento para a $m_1$ na direção angular e radial . . . . .	13
3.2	Equações de movimento para a $m_2$ na direção angular e radial . . . . .	14
<b>4</b>	<b>O pêndulo duplo caótico: Uma revisão sobre os principais conceitos</b>	<b>16</b>
4.1	Os espaços de fases . . . . .	16
4.1.1	Os modos normais . . . . .	18
4.1.2	Pontos de Equilíbrio: Obtenção e Classificação . . . . .	19
4.2	Atratores . . . . .	21
4.3	A seção de Poincaré . . . . .	22
4.4	Os expoentes de Lyapunov . . . . .	23
<b>5</b>	<b>A construção do pêndulo duplo e o software de aquisição de dados experimentais Tracker</b>	<b>25</b>
5.1	Pêndulo duplo com motor acoplado ao eixo de suspensão . . . . .	26
5.2	<i>Tracker</i> - O software de tratamento de dados . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Resultados simulados e experimentais</b>	<b>30</b>
6.1	A conservação da energia para pêndulo duplo livre de forças externas a tempos curtos e justificativa para introdução do motor no sistema . . . . .	30
6.2	Os modos normais em fase e fora de fase do Pêndulo Duplo . . . . .	32
6.2.1	Modos normais obtidos por simulação computacional e experimentalmente para o pêndulo duplo livre de forças externas . . . . .	32

6.2.2	Análise dos resultados experimentais e simulados obtidos para o modo normal em fase e fora de fase	36
6.2.3	Órbita periódica obtida com o uso do motor	36
6.3	Uma novo modo gerado pela introdução do motor no sistema	39
6.3.1	Conjunto de dados experimentais com evidência de ciclo limite	39
6.4	Espaços de fase para o pêndulo duplo	40
6.4.1	Espaços de fase para o pêndulo duplo livre de forças externas	40
6.4.2	Espaços de fase para o pêndulo duplo dissipativo e forçado	41
6.5	Seções de Poincaré	43
6.5.1	Pêndulo Duplo com massas e comprimentos diferentes	43
6.5.2	Seções de Poincaré Pêndulo Duplo com massas e comprimentos iguais	49
6.5.3	Comparativo entre Pêndulo Duplo Ideal com massas diferentes e comprimentos iguais e Pêndulo Duplo com massas iguais e comprimentos diferentes	52
6.6	Expoentes de Lyapunov	54
6.6.1	Conjunto de dados experimentais sob a configuração modos normais fora de fase	54
6.6.2	Conjunto de dados experimentais sob configuração braços do motor $90^{\circ}$ graus	55
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>56</b>

# Lista de Figuras

2.1 a) Diagrama de forças referente a $m_1$ para o pêndulo duplo ideal. b) Diagrama de forças referente a $m_2$ para o pêndulo duplo ideal. . . . .	3
2.2 Figura representando o pêndulo duplo. . . . .	7
3.1 a) Diagrama de forças do pêndulo duplo referente a $m_1$ . b) Diagrama de forças do pêndulo duplo referente a $m_2$ . . . . .	11
3.2 Gráfico da função <i>Theta de Heaviside</i> . . . . .	12
3.3 Gráfico da função Sigmóide. . . . .	13
4.1 Figura representando a configuração de modo normal em fase do pêndulo duplo. . . . .	18
4.2 Figura representando a configuração de modo normal fora de fase do pêndulo duplo. . . . .	19
4.3 Representação do estado de equilíbrio correspondente ao ponto P1. . . . .	20
4.4 Desenho esquemático de corte no espaço de fases representando a seção de Poincaré formada pelas sucessivas marcações das órbitas no plano transversal. . . . .	22
4.5 Gráfico ilustrando o crescimento exponencial das distâncias conforme a evolução temporal. . . . .	23
5.1 Materiais utilizados na construção do pêndulo duplo. . . . .	25
5.2 Fotografia do pêndulo duplo experimental. . . . .	26
5.3 Ilustração do pêndulo duplo com a placa com os sensores ópticos. . . . .	27
5.4 Representação esquemática do funcionamento do sensor óptico . . . . .	28
5.5 Representação do software <i>Tracker</i> com utilização de ferramentas “eixo” (rosa) e “bastão de calibração” (azul). . . . .	28
6.1 Gráfico da variação da energia mecânica em função do tempo para o pêndulo duplo experimental sem a ação do motor. . . . .	31
6.2 Gráfico da energia mecânica em função do tempo para o pêndulo duplo experimental com a ação do motor. . . . .	31
6.3 Ilustração dos a) Modo normal em fase. b) Modo normal fora de fase. . . . .	32

6.4	Esboço dos a e c) Espaço de configurações e de fase referente a $m_1$ para o modo normal em fase. b e d) Espaço de configurações e fase referente a $m_2$ para o modo normal em fase.	33
6.5	Esboço dos a e c) Espaço de configurações e fase referente a $m_1$ para o modo normal em fase. b e d) Espaço de configurações e fase referente a $m_2$ para o modo normal em fase.	34
6.6	Esboço dos a e c) Espaço de configurações e fases referente a $m_1$ para o modo fora de fase. b e d) Espaço de configurações e fases referente a $m_2$ para o modo normal fora de fase.	35
6.7	Esboço dos a) Espaço de configurações e fases referente a $m_1$ para modo normal em fase. b) Espaço de configurações e fases referente a $m_2$ para modo normal em fase.	35
6.8	Gráfico da a) Evolução temporal dos ângulos teórica. b) Evolução temporal dos ângulos experimental.	36
6.9	Ilustração do normal fora de fase obtido com o motor.	36
6.10	Gráfico do a) Espaço de fases referente a $m_1$ para o modo fora de fase do pêndulo duplo com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a $m_2$ para o modo fora de fase do pêndulo duplo com a ação do motor.	37
6.11	Ilustração do modo periódico para o pêndulo duplo obtido com a ação do motor (modo 1).	37
6.12	a) Espaço de fases referente a $m_1$ para novo modo (modo 1) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a $m_2$ para novo modo (modo 1) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor.	38
6.13	Ilustração do modo periódico para o pêndulo duplo obtido com a ação do motor (modo 2).	38
6.14	a) Espaço de fases referente a $m_1$ para novo modo (modo 2) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a $m_2$ para novo modo (modo 2) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor.	38
6.15	Ilustração do modo periódico obtido para o pêndulo duplo com a ação do motor.	39
6.16	Esboço do a) Espaço de fases projeção ciclo limite para $m_1$ . b) Espaço de fases projeção ciclo limite para $m_2$ .	40
6.17	Ilustração da condição inicial de lançamento com os braços formando ângulo de $90^\circ$ .	40
6.18	Esboço dos a) Espaço de fases para $m_1$ teórico. b) Espaço de fases para $m_1$ experimental.	41
6.19	Esboço dos a) Espaço de fases teórico para $m_2$ . b) Espaço de fases experimental para $m_2$ .	42

6.20 Esboço dos a) Espaço de fases teórico referente a $m_1$ para o sistema sob a ação do motor. b) Espaço de fases experimental referente a $m_1$ para o sistema sob a ação do motor. . . . .	42
6.21 Esboços do a) Espaço de fases teórico referente a $m_2$ para o sistema sob a ação do motor. b) Espaço de fases experimental referente a $m_2$ para o sistema sob a ação do motor. . . . .	42
6.22 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 1.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 5.0$ J. . . . .	44
6.23 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 11.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. . . . .	44
6.24 Esboço de e) Seção de Poincaré para $E = 17.0$ J. f) Seção de Poincaré para $E = 21.0$ J. . . . .	45
6.25 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 1.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 5.0$ J. . . . .	45
6.26 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 10.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. . . . .	46
6.27 Esboço de Seção de Poincaré para $E = 20.0$ J. . . . .	46
6.28 Gráfico de Energia (J) x Tempo (s) para o pêndulo duplo dissipativo. . . . .	46
6.29 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 5$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 20$ J. . . . .	47
6.30 Gráfico de Energia (J) x Tempo (s) para o pêndulo duplo dissipativo e forçado, com o motor regulado para fornecer mais energia do que a que é perdida pela dissipação, fazendo com que a energia total cresça com o tempo. . . . .	47
6.31 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 1.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 2.0$ J. . . . .	48
6.32 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 4.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J. . . . .	48
6.33 Esboço de a) Seção de Poincaré Experimental do Pêndulo Duplo com energia $1.8$ J ( $\theta_1$ e $p\theta_1$ ) b) Seção de Poincaré Experimental do Pêndulo Duplo com energia $1.8$ J ( $\theta_1$ e $p\theta_2$ ). . . . .	49
6.34 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 4.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J. . . . .	50
6.35 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 17.0$ J. . . . .	50
6.36 Esboço de e) Seção de Poincaré para $E = 21.0$ J. f) Seção de Poincaré para $E = 24.0$ J. . . . .	51
6.37 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 4.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J. . . . .	51
6.38 Esboço de Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J. . . . .	52

6.39 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 10.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 10.0$ J. . . . .	53
6.40 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. . . . .	53
6.41 Esboço de e) Seção de Poincaré para $E = 20.0$ J. f) Seção de Poincaré para $E = 23.0$ J. . . . .	54
6.42 a) Evolução temporal referente a massa $m_1$ . b) Evolução temporal referente a massa $m_2$ . . . . .	54
6.43 a) Evolução temporal referente a massa $m_1$ . b) Evolução temporal referente a massa $m_2$ . . . . .	55

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo qualitativo das equações não-lineares, calcado no estudo de conceitos e teorias e também de métodos numéricos, possibilitou identificar características importantes de suas soluções sem resolvê-las, obtendo assim informações sobre sua potencialidade [1]. O estudo de sistemas não-lineares possui grande importância em diferentes setores da ciência e as suas aplicações abrangem diversas áreas como, por exemplo, Engenharia, Medicina, Ecologia, Biologia e Economia e Ciências Mecânicas [2]. Drazin [3], também menciona que sistemas não-lineares podem ser utilizados para descrever diversos fenômenos, como por exemplo, as reações químicas, a regularidade das batidas do coração, transições de fase, circuitos eletrônicos, entre outras coisas.

Sistemas não-lineares possuem sensibilidade às condições iniciais, o que implica que a evolução do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações. A estrutura de uma resposta caótica é muito rica e está associada a uma infinidade de órbitas periódicas instáveis, devido a isto, a descrição ou análise de fenômenos naturais através de modelos ou técnicas não-lineares tem sido mais efetiva que os modelos ou técnicas lineares, porém, os problemas não-lineares possuem uma dificuldade inerente, motivo pelo qual diversas áreas do conhecimento optaram por estudar modelos lineares e mais comportados ao longo da história [4].

Segundo Strogatz [5], Newton, em 1600, utilizando-se de suas descobertas em relação as equações diferenciais, leis de movimento, estudou o problema de dois corpos, e muitos matemáticos e físicos tentaram utilizar dos mesmos princípios utilizados por ele para resolver o problema de três corpos (Terra, Sol e Lua). Porém percebeu-se que este problema era muito mais complexo de ser resolvido. Foi então que Poincaré no final de 1800 introduziu um novo ponto de vista baseado no estudo qualitativo do problema, desenvolvendo uma aproximação geométrica para analisar estas questões e sendo o primeiro a vislumbrar a possibilidade de Caos. Segundo Savi [4], em 1963 pôde-se observar uma das características mais marcantes desses sistemas, quando Lorenz, ao estudar o modelo de Rayleigh-Bernard para convecção de fluídos, observou que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema e este

fenômeno ficou conhecido como “Efeito Borboleta”.

Um exemplo de estudo de sistemas não-lineares e que será objeto de investigação desta dissertação é o pêndulo duplo. Este sistema comumente estudado na Mecânica Analítica, em problemas de Mecânica Lagrangeana e Hamiltoniana, encontra-se aqui observado pelo viés da dinâmica não-linear, utilizando-se como base o formalismo da Mecânica Analítica. A importância do estudo da dinâmica não-linear do pêndulo duplo foi mencionada por Tan e Levien [6] em relação a dependência sensível das condições iniciais. Savi, de Paula e Pereira-Pinto [2], mencionam que o pêndulo não-linear é um objeto de estudo o qual atrai muita atenção dos pesquisadores, devido a capacidade de se estudar este sistema de diferentes formas.

Esta dissertação tem por objetivo abordar os principais aspectos da dinâmica não-linear do pêndulo duplo caótico, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista experimental, traçando um paralelo entre os dois enfoques. Do lado teórico, faremos uso do software *Mathematica* para simulação computacional da dinâmica do sistema a partir das equações de movimento obtidas dos cálculos da Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. Do lado experimental, faremos um estudo da dinâmica não-linear do pêndulo duplo que foi construído no LEMAF (Laboratório de Estudo de Movimento por Análise Fotográfica) da UNESP de Rio Claro, por intermédio da análise de imagens estroboscópicas digitais obtidas com o auxílio de uma câmera filmadora a 240 frames por segundo (*fps*).

Esta dissertação está constituída da seguinte maneira, no capítulo 2 encontram-se as equações do pêndulo duplo ideal à partir da Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. No capítulo 3, encontram-se as equações para o pêndulo duplo forçado e dissipativo obtidas pela Mecânica Newtoniana.

No capítulo 4, aborda-se a teoria dos principais conceitos acerca de dinâmica não-linear aplicados ao estudo do pêndulo duplo os quais serão utilizados nesta dissertação, como espaço de fases, expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré.

No capítulo 5, apresenta-se uma breve discussão acerca do aparato experimental utilizada no trabalho, apresentando-se o processo de construção do pêndulo duplo e também do funcionamento do software *Tracker* utilizado no tratamento das imagens estroboscópicas digitais obtidas nos testes experimentais.

No capítulo 6, encontram-se as simulações computacionais e os resultados experimentais para espaços de fase, ciclos limite, seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

No capítulo 7, a conclusão e perspectivas futuras deste trabalho.

## Capítulo 2

# As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal

O pêndulo duplo possui uma grande importância no estudo de sistemas complexos. Esta dissertação tem por objetivo mostrar ao leitor os principais aspectos da dinâmica não-linear do pêndulo duplo, utilizando-se para início desse estudo as equações de movimento que o descrevem.

Nesta seção serão apresentados os cálculos das equações de movimento para  $m_1$  e  $m_2$  pelos Método Newtoniano, Lagrangeano e Hamiltoniano. A abordagem por estes tres métodos mostrada neste capítulo possui a finalidade de mostrar que independente do método escolhido para cálculo das equações de movimento o resultado será equivalente, o que justificará o método escolhido para cálculo do pêndulo duplo com forças dissipativas e externas no capítulo seguinte.

### 2.1 As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Newtoniano

A figura 2.1 representa o diagrama de forças para o pêndulo duplo ideal referente a massa  $m_1$  e a massa  $m_2$  e as forças representadas na figura são as seguintes:

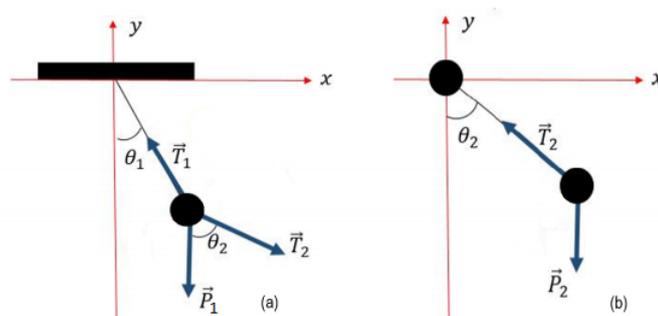


Figura 2.1: a) Diagrama de forças referente a  $m_1$  para o pêndulo duplo ideal. b) Diagrama de forças referente a  $m_2$  para o pêndulo duplo ideal.

- $\vec{P}_1$  é o peso referente a  $m_1$ .
- $\vec{P}_2$  é o peso referente a  $m_2$ .
- $\vec{T}_1$  é a tração ao longo do braço  $l_1$ .
- $\vec{T}_2$  é a tração ao longo do braço  $l_2$ .

### As equações de movimento para a $m_1$ na direção angular e radial

As forças atuantes na  $m_1$  em coordenadas cartesianas estão apresentadas abaixo:

$$\vec{P}_1 = \{0, -m_1g\}, \quad (2.1)$$

$$\vec{T}_1 = \{-T_1 \sin \theta_1, T_1 \cos \theta_1\}, \quad (2.2)$$

$$\vec{T}_2 = \{T_2 \sin \theta_2, -T_2 \cos \theta_2\}, \quad (2.3)$$

E o vetor posição  $\vec{r}_1$ :

$$\vec{r}_1 = l_1 \{\sin \theta_1, -\cos \theta_1\}. \quad (2.4)$$

Sabe-se que:

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1. \quad (2.5)$$

Com isto temos a equação de movimento referente a  $m_1$  na direção angular:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g.m_1.\sin\theta_1 - T_2\sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1m_1}. \quad (2.6)$$

e a equação referente a  $m_1$  na direção radial:

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1 - g.m_1\cos\theta_1 - T_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1m_1}. \quad (2.7)$$

### As equações de movimento para a $m_2$ na direção angular e radial

As equações de movimento para  $m_2$  foram obtidas de forma análoga ao procedimento realizado para obtenção das equações de movimento em  $m_1$ . As forças atuantes em  $m_2$  escritas em coordenadas cartesianas estão apresentadas abaixo:

$$\vec{P}_2 = \{0, -m_2g\}, \quad (2.8)$$

$$\vec{T}_2 = \{-T_2 \sin \theta_2, T_2 \cos \theta_2\}. \quad (2.9)$$

E o vetor posição  $\vec{r}_2$ :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + l_2 \{\sin \theta_2, -\cos \theta_2\}. \quad (2.10)$$

Sabe-se que:

$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2. \quad (2.11)$$

Com isto temos a equação de movimento referente a  $m_2$  na direção angular:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{T_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_2}, \quad (2.12)$$

e a equação referente a  $m_2$  na direção radial:

$$\theta_2^2 = \frac{m_1 T_2 + m_2 T_2 - m_2 T_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_2 m_1 l_2}. \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.12) em (2.7) e (2.13) conseguimos obter as equações de movimento do sistema:

$$g \sin \theta_2 + l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{gm_1 \sin \theta_1 + gm_2 \sin \theta_1 + l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \theta_2^2 + l_1 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2}{m_2} = 0. \quad (2.15)$$

## 2.2 As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Lagrangeano

Ao aplicar-se diretamente as leis de Newton em sistemas mecânicos (como demonstrado na seção anterior), é possível obter-se um conjunto de equações de movimento em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas que compõem o sistema. Porém algumas vezes este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema [7]. Para determinados problemas, a forma mais simples de se encontrar as equações de movimento é considerando-se a energia cinética e potencial do sistema utilizando-se do formalismo da mecânica Lagrangeana e Hamiltoniana, pois o cálculo das forças atuantes no sistema pode demandar um raciocínio mais extenso e complexo.

As posições da partícula em um sistema podem ser especificadas na forma cartesiana e depois transformadas em coordenadas generalizadas, utilizando-se para isto de sistemas de coordenadas polares, esféricas ou cilíndricas, por exemplo. Ao referir-se a um sistema

físico, descrito por um sistema de coordenadas generalizadas, designa-se genericamente cada coordenada pela letra “q” com um índice numérico referente a cada componente do sistema. Um sistema de N partículas pode ser representado pelas 3N coordenadas cartesianas  $x_n, y_n$  e  $z_n$  de suas partículas ou pelo conjunto de coordenadas generalizadas  $q_{3n}$  [7]. Para cada configuração do sistema as coordenadas generalizadas devem possuir um conjunto definido de valores que serão função das coordenadas cartesianas e em alguns casos do tempo no caso de um sistema de coordenadas em movimento [7]:

$$q_{3n} = q_{3n} \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t\}. \quad (2.16)$$

Neste contexto para facilitar a interpretação do leitor chamaremos a Lagrangeana de L, a energia cinética de K e a energia potencial de V.

Pode se definir o momento generalizado  $p_k$  associado a coordenada  $q_k$  por  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ , onde  $q_k$  é o ângulo e  $p_k$  o momento canonicamente conjugado [7]. A força generalizada “ $Q_k$ ” associada à coordenada  $q_k$  [7]:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (2.17)$$

com  $k = 1, \dots, 3N$ . Se as componentes das forças que podem exercer trabalho sobre o sistema possam ser representadas por um gradiente de um escalar V, de forma que [7]:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (2.18)$$

e se o escalar V for só função das coordenadas generalizadas  $q_k$  e não das velocidades  $\dot{q}_k$ , obtém-se [7]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (2.19)$$

que são as equações de Euler-Lagrange e a Lagrangeana  $L \equiv K - V$ , onde K é a energia cinética e V a energia potencial do sistema [7]. As coordenadas generalizadas  $q_k$  no problema do pêndulo duplo serão  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Pode-se representar o pêndulo duplo como ilustra a figura 2.2:

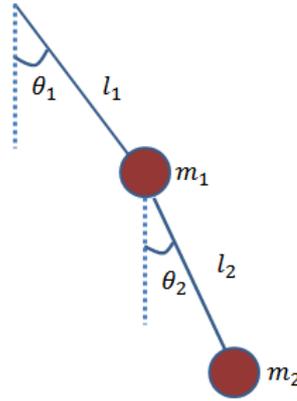


Figura 2.2: Figura representando o pêndulo duplo.

Pode-se escrever as coordenadas que regem o sistema da seguinte forma:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad (2.20)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (2.21)$$

As velocidades podem ser escritas da seguinte forma:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2. \quad (2.23)$$

Dessa forma a energia cinética  $K_1$  para a massa  $m_1$  será

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2. \quad (2.24)$$

A energia potencial  $U_1$  para a massa  $m_1$  (lembrando-se que o zero é  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ):

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1. \quad (2.25)$$

E a energia cinética  $K_2$  para a massa  $m_2$ :

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.26)$$

A energia potencial  $U_2$  para a massa  $m_2$ :

$$U_2 = -m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2. \quad (2.27)$$

Com isso, podemos escrever a Lagrangeana (L) do sistema onde  $K = K_1 + K_2$  e  $V = V_1 + V_2$  como:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2. \quad (2.28)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\ &+ m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.30)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange (2.19), obtém-se a equação de movimento para  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned} -m_2l_1l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + \\ + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + l_1g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 + \\ + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Com um procedimento análogo para  $\theta_2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2m_2g \sin \theta_2, \quad (2.33)$$

obtém-se equação de movimento para  $\theta_2$

$$\begin{aligned} m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \\ - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2m_2g \sin \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

## 2.3 As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Hamiltoniano

Para calcular-se as equações de movimento do pêndulo duplo pelo método hamiltoniano recorre-se as equações de Hamilton-Jacobi [7]:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Destaca-se que em sistemas onde o potencial é função somente das coordenadas do sistema, a Hamiltoniana será a energia total do sistema em termos das coordenadas e dos momentos, como ocorre no pêndulo duplo ideal apresentado nesta seção.

Escrevendo-se os momentos generalizados:

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.36)$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.37)$$

E as velocidades em termos dos momentos (primeiras equações de movimento do sistema):

$$\dot{\theta}_1 = \frac{l_2p_{\theta_1} - l_1p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2l_2[-m_1 - m_2 + m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.38)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{l_1(m_1 + m_2)p_{\theta_2} - l_2m_2p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_2^2l_1m_2[m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.39)$$

e assim obtém-se a Hamiltoniana do sistema:

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}_1 p_{\theta_1} + \dot{\theta}_2 p_{\theta_2} - L \\ &= \frac{m_2l_2^2p_{\theta_1}^2 + (m_1 + m_2)l_1^2p_{\theta_2}^2 - 2m_2l_1l_2p_{\theta_1}p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2l_2^2m_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ &\quad - (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dessa forma, utilizando as equações de Hamilton [2.35](#) pode se escrever as seguintes equações de movimento do sistema:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\theta_1} &= \frac{m_2l_2^2p_{\theta_1}^2 + (m_1 + m_2)l_1^2p_{\theta_2}^2 - 2m_2l_1l_2p_{\theta_1}p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2l_2^2m_2[m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \sin[2(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad - \frac{p_{\theta_1}p_{\theta_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1l_2[m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} - (m_1 + m_2)g \cdot l_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\theta_2} &= \frac{\sin(2(\theta_1 - \theta_2)) [m_2l_2^2p_{\theta_1}^2 - 2m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1}p_{\theta_2} + (m_1 + m_2)l_1^2p_{\theta_2}^2]}{(2l_1^2l_2^2(m_1 + \sin(\theta_1 - \theta_2))^2m_2)^2} \\ &\quad - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1}p_{\theta_2}}{l_1l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} - (m_1 + m_2)gl_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

As relações [\(2.38\)](#), [\(2.39\)](#), [\(2.41\)](#) e [\(2.42\)](#) são as quatro equações de movimento do sistema (equações diferenciais não-lineares acopladas). Tem-se quatro funções do tempo que representam a resolução destas equações, ou seja, um espaço quadridimensional,

$(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$  para o pêndulo duplo. Entretanto, temos uma relação extra entre essas funções do tempo que é a equação da energia, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$E = -gl_1(m_1 + m_2) \cos \theta_1 - gl_2 m_2 \cos \theta_2 + l_2^2 m_2 p_{\theta_1}^2 - 2l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1} p_{\theta_2} + \frac{l_1^2 (m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2}{2(l_1^2)(l_2^2)m_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} + (m_1 + m_2)gl_1 + m_2gl_2. \quad (2.43)$$

Os termos  $(m_1 + m_2)gl_1 + m_2gl_2$  foram acrescentados à expressão da energia de modo que a energia potencial seja nula quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . O resultado (2.43) implica que ao fixar-se a energia, as quatro variáveis  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $p_{\theta_1}$  e  $p_{\theta_2}$  deixam de ser independente, de modo que, para cada energia fixa, de fato, temos um espaço tridimensional a ser estudado.

## Capítulo 3

# As equações de movimento para o pêndulo duplo dissipativo e forçado

As equações de pêndulo duplo considerando-se a atuação do motor no sistema e as forças dissipativas foram obtidas utilizando-se a Mecânica Newtoniana. A opção por este formalismo deve-se à facilidade de expressar-se como as forças dissipativas e as do motor agem no sistema. A figura 3.1 ilustra o diagrama de forças para o pêndulo duplo dissipativo e forçado:

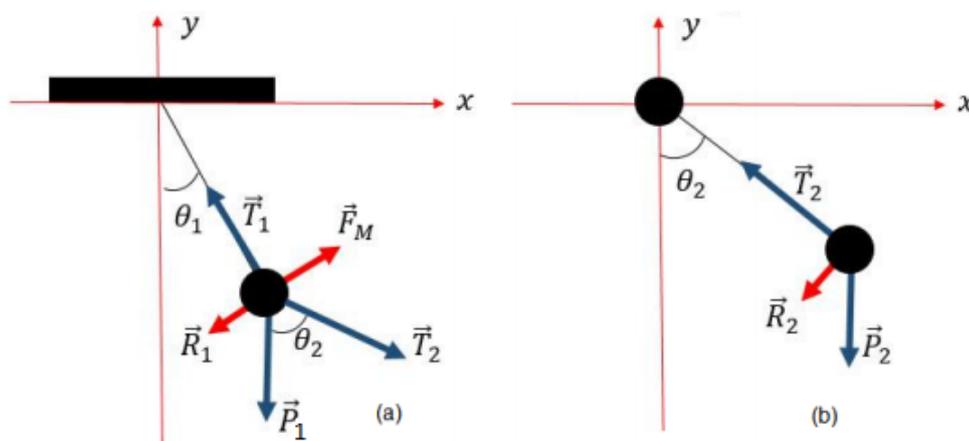


Figura 3.1: a) Diagrama de forças do pêndulo duplo referente a  $m_1$ . b) Diagrama de forças do pêndulo duplo referente a  $m_2$ .

As forças representadas na figura 3.1 são os seguintes:

- $\vec{P}_1$  é o peso referente a  $m_1$ .
- $\vec{P}_2$  é o peso referente a  $m_2$ .
- $\vec{T}_1$  é a tração ao longo do braço  $l_1$ .
- $\vec{T}_2$  é a tração ao longo do braço  $l_2$ .
- $\vec{F}_m$  é a força do motor.

- $\vec{R}_1$  é a força dissipativa que atua em  $m_1$  (proporcional ao atrito do rolamento de  $m_1$ ).
- $\vec{R}_2$  é a força dissipativa que atua em  $m_2$  (proporcional ao atrito do rolamento de  $m_2$ ).

O acionamento do motor e seu tempo de acionamento estão controlados por três sensores ópticos acoplados a uma placa Arduino UNO, que atuam num raio de  $40^\circ$  (ângulo que varia de acordo com o posicionamento dos sensores) sendo ( $20^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{9} rad$ ) à direita e  $20^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{9} rad$ ) à esquerda do centro do eixo de sustentação do pêndulo onde está fixada a plataforma com os sensores. Para manter o pêndulo em movimento por um longo período de tempo foi necessário impor um sentido de acionamento do motor, similar a um balanço no qual toda vez que este voltasse ao sentido original de movimento fosse lhe fornecido um “empurrão”, de forma que o acionamento do motor fosse sempre programado para ser acionado em um único sentido de movimento, no caso, esquerda-direita. O tempo de acionamento/desligamento do motor era controlado de acordo com o movimento do pêndulo seguindo a programação implementada nos sensores.

Uma dificuldade deste estudo foi a descrição da atuação do motor mais próxima da realidade. Sabe-se que teoricamente esta assemelha-se à função *Theta de Heaviside* (função degrau), a qual apresenta o comportamento ilustrado na figura 3.2:

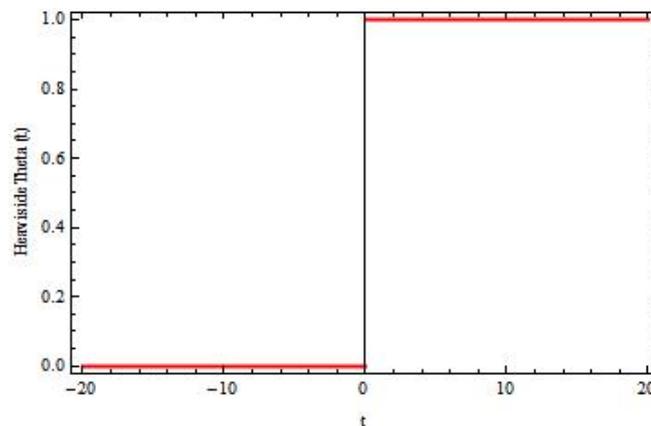


Figura 3.2: Gráfico da função *Theta de Heaviside*.

Pode-se observar que esta função está definida para  $t < 0$  com o valor 0 (motor desligado) e para  $t > 0$  com valor 1 (motor ligado), porém é possível observar que esta transição do estado desligado para o ligado é representado por uma descontinuidade, nos cálculos das equações de Hamilton surgem termos muito complexos para serem integrados numericamente como deltas de Dirac, etc. Como alternativa para compensar esta descontinuidade considerou-se a função Sigmóide, visto que esta adequaria-se melhor ao que ocorre no experimento real, pois o acionamento e o desacionamento do motor não ocorrem de forma instantânea, apresentam um certo “*delay*”. O gráfico apresentado na figura 3.3 ilustra o comportamento da função Sigmóide:

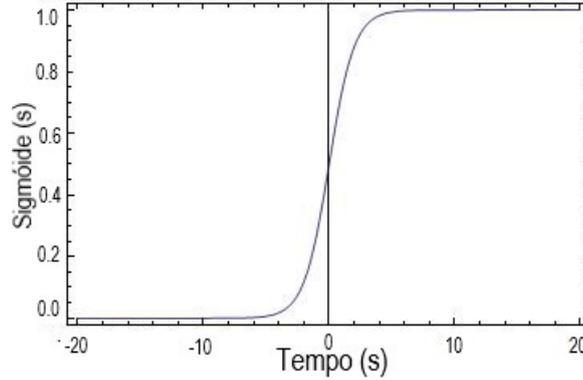


Figura 3.3: Gráfico da função Sigmóide.

A fórmula que descreve a função Sigmóide pode ser representada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \quad (3.1)$$

Com isto pode-se escrever a função que descreve o torque do motor (com atuação da esquerda para direita) como apresentado abaixo

$$\vec{F}_m = \vec{T}_0 \left( 2 \cdot \frac{\pi}{9} \right) \cdot \frac{1}{1 + \exp^{-\theta_1}} \frac{1}{1 + \exp^{-(\theta_1 - \frac{\pi}{9})}} \frac{1}{1 + \exp^{-(\frac{\pi}{9} - \theta_1)}}. \quad (3.2)$$

onde  $T_0$  é uma constante que representa o torque pertencente ao motor.

As forças dissipativas são modeladas para serem proporcionais à velocidade, de modo que suas expressões matemáticas são

$$\vec{R}_1 = b_1 \vec{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \vec{R}_2 = b_2 \vec{\theta}_2, \quad (3.3)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são os coeficientes de atrito de rolamento presentes nos cálculos das forças dissipativas que atuam em  $m_1$  e em  $m_2$  respectivamente e estes podem ser determinados experimentalmente.

### 3.1 Equações de movimento para a $m_1$ na direção angular e radial

As forças atuantes na  $m_1$  em coordenadas cartesianas estão apresentadas abaixo:

$$\vec{P}_1 = \{0, -m_1 g\}, \quad (3.4)$$

$$\vec{T}_1 = \{-T_1 \sin \theta_1, T_1 \cos \theta_1\}, \quad (3.5)$$

$$\vec{T}_2 = \{T_2 \sin \theta_2, -T_2 \cos \theta_2\}, \quad (3.6)$$

$$\vec{F}_m = \{F_m \cos \theta_1, F_m \sin \theta_1\}, \quad (3.7)$$

$$\vec{R}_1 = \{-R_1 \cos \theta_1, -R_1 \sin \theta_1\}. \quad (3.8)$$

E o vetor posição  $\vec{r}_1$ :

$$\vec{r}_1 = l_1 \{\sin \theta_1, -\cos \theta_1\}. \quad (3.9)$$

Sabe-se que:

$$F = m_1 \ddot{\vec{r}}_1. \quad (3.10)$$

Com isto temos a equação de movimento referente a  $m_1$  na direção angular:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{Fm - R_1 - g.m_1.\text{Sin}\theta_1 - T_2\text{Sin}(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 m_1}, \quad (3.11)$$

e a equação referente a  $m_1$  na direção radial:

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1 - g.m_1\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) - T_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 m_1}. \quad (3.12)$$

## 3.2 Equações de movimento para a $m_2$ na direção angular e radial

As equações de movimento para  $m_2$  serão obtidas de forma análoga ao procedimento realizado para obtenção das equações de movimento em  $m_1$ . As forças atuantes em  $m_2$  em coordenadas cartesianas são apresentadas abaixo:

$$\vec{P}_2 = \{0, -m_2 g\}, \quad (3.13)$$

$$\vec{T}_2 = \{-T_2 \sin \theta_2, T_2 \cos \theta_2\}, \quad (3.14)$$

$$\vec{R}_2 = \{-R_2 \cos \theta_2, -R_2 \sin \theta_2\}. \quad (3.15)$$

E o vetor posição  $\vec{r}_2$ :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + l_2 \{\sin \theta_2, -\cos \theta_2\}, \quad (3.16)$$

Sabe-se que:

$$F = m_2 \ddot{\vec{r}}_2. \quad (3.17)$$

### 3. As equações de movimento para o pêndulo duplo dissipativo e forçado 15

---

Com isto temos a equação de movimento referente a  $m_2$  na direção angular:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-m_1 R_2 - F_m m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 T_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_2 m_1 l_2}, \quad (3.18)$$

e a equação referente a  $m_2$  na direção radial:

$$\dot{\theta}_2^2 = \frac{m_1 T_2 + m_2 T_2 - m_2 T_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - F_m m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_2 m_1 l_2}. \quad (3.19)$$

## Capítulo 4

# O pêndulo duplo caótico: Uma revisão sobre os principais conceitos

Poincaré foi um dos primeiros a elucidar a possibilidade da existência de Caos, percebendo que em sistemas determinísticos, ou seja, sistemas regidos por leis físicas bem definidas, exibiam comportamento não-periódico o qual dependiam sensitivamente das condições iniciais e isto impossibilitaria a previsão do comportamento dos sistemas a longo prazo [5].

As principais propriedades do comportamento caótico são [5]:

- Determinístico,
- Aperiodicidade,
- Dependência sensitiva as condições iniciais.

### 4.1 Os espaços de fases

Os sistemas não-lineares apresentam uma descrição mais realista dos fenômenos naturais do que os sistemas lineares, seu estudo envolve duas abordagens distintas, qualitativa e quantitativa. Ambas têm como objetivo entender o comportamento global de um dado sistema dinâmico e analisar a evolução do sistema no tempo [4]. O espaço de fases (representação gráfica do momentum e posição da partícula a ser estudada) ou o espaço de configurações (representação gráfica da velocidade e posição) é o conjunto de pontos que correspondem a configuração das partes do sistema mecânico, quando este se move, os pontos percorrem uma trajetória neste espaço, gerando assim uma história em relação ao movimento do sistema [7].

Segundo Monteiro [8], considerando-se o movimento de um ponto com coordenadas  $x_n(t)$  a evolução temporal pode ser determinada pelas  $n$  equações diferenciais de primeira ordem que descrevem o sistema bem como sua dimensão no espaço de fases que é equivalente ao número das variáveis de estado. No caso do pêndulo duplo tem-se um espaço de

fases quadrimensional descrito por (2.38), (2.39), (2.41) e (2.42) que são as equações de movimento do sistema. Uma solução  $\vec{x}(t)$  para o sistema de equações diferenciais de primeira ordem corresponde a um caminho, ou seja, uma trajetória no espaço de fases a qual pode ser denominada de fluxo [8]. O espaço de fases no qual o pêndulo duplo classifica-se como sistema hamiltoniano pois é formado pelos pares conjugados ângulo e o momento referentes as duas massas do sistema.

Como o espaço de fases do pêndulo duplo é muito complexo de ser visualizado por ser quadrimensional, faz-se projeções deste espaço em espaços de fase bidimensionais, com ângulos e momentos correspondentes a primeira massa e a segunda massa. Segundo Percival [9], o movimento de um sistema hamiltoniano conservativo não é completamente regular nem completamente descrito pelos métodos da Mecânica Estatística, visto que sistemas mistos apresentam movimentos regulares ou caóticos conforme as condições iniciais que lhes forem fornecidas.

Se a hamiltoniana for identificada como a energia total que rege o sistema então ela representará a conservação da Energia do sistema, ou seja, em sistemas onde há preservação do volume significa que o sistema é conservativo ou não dissipativo, porém naqueles onde há contração de volume dizemos que o sistema é dissipativo [3,4].

Em alguns textos é possível encontrar a definição de espaço de fases associada a velocidade angular e a posição, e não ao momentum angular e a posição. Utiliza-se esta nomenclatura nesta dissertação pois considera-se um sistema hamiltoniano no qual a definição de “Espaço de Fases” adequa-se melhor ao considerar como o plano formado pelos ângulos e os momentos angulares. Porém, devido a parte experimental deste trabalho fornecer de forma direta a velocidade angular, define-se como o espaço formado pelas velocidades angulares no eixo das ordenadas “Espaço de configurações”.

No espaço de fases é possível visualizar todas as configurações possíveis do sistema, com cada estado sendo representado por um ponto único no espaço de fases. Conforme a evolução temporal este ponto se move de um estado a outro, tendo assim uma trajetória no espaço de fases. Se neste espaço houver a presença de órbitas fechadas, tem-se soluções periódicas do sistema as quais são previsíveis, mas também a possibilidade de encontrar-se trajetórias caóticas, as quais não são periódicas nem fixas.

Em relação aos componentes do espaço de fases pode-se definir as seguintes estruturas:

- Pontos de equilíbrio: O ponto  $x_0$  que satisfaz  $F(x_0) = x_0$ . A órbita de um ponto de equilíbrio é uma constante sequência  $x_0, x_0, \dots, x_0$ . Quando aplicamos ao sistema do pêndulo duplo os pontos de equilíbrio são as raízes da equação diferencial que rege o sistema [10].
- Órbitas periódicas: O ponto  $x_0$  é periódico se  $F^n(x_0) = x_0$  para  $n > 0$ , onde  $n$  é o período principal da órbita, então a órbita de  $x_0$  é uma sequência de números:  $x_0, F^n(x_0), F^{n-1}(x_0), F(x_0), x_0, F^n(x_0), F^{n-1}(x_0) \dots$  [10].

- Órbitas quase-periódicas: O ponto  $x_0$  é quase periódico quando algum ponto na órbita de  $x_0$  satisfaz a condição de ser fixo ou periódico, porém ele não é estritamente fixo ou periódico durante toda a trajetória [10].

#### 4.1.1 Os modos normais

Quando o pêndulo duplo é lançado próximo ao estado de repouso, onde as duas massas se encontram na vertical para baixo em relação ao eixo de sustentação oscilando a baixa amplitude, podemos aproximar a lagrangiana para ângulos pequenos e observar um comportamento muito interessante do sistema, no qual este se comporta com uma frequência própria, que são denominados os modos normais do sistema. As figuras 4.1 e 4.2 representam o pêndulo duplo em suas configurações de modos normais:

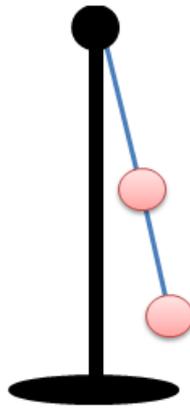


Figura 4.1: Figura representando a configuração de modo normal em fase do pêndulo duplo.

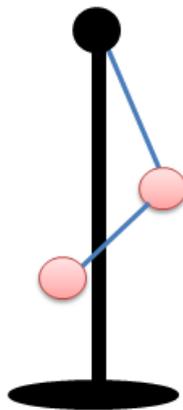


Figura 4.2: Figura representando a configuração de modo normal fora de fase do pêndulo duplo.

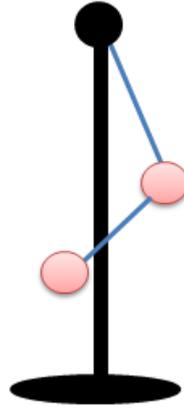


Figura 4.2: Figura representando a configuração de modo normal fora de fase do pêndulo duplo.

Estes modos podem ser obtidos tanto de forma simulada, fornecendo as condições necessárias para que entrem nessa frequência própria, como de forma experimental, lançando o pêndulo a baixas amplitudes forçando-o a entrar nestes modos.

#### 4.1.2 Pontos de Equilíbrio: Obtenção e Classificação

Partindo-se da equação da Hamiltoniana (2.40) para o pêndulo duplo ideal pode-se obter os momentos canonicamente conjugados ( $p_{\theta_1}$  e  $p_{\theta_2}$ ) as variáveis  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , estas coordenadas serão essenciais para definir o estudo dos pontos de equilíbrio no espaço de fases, de forma que eles serão representados da seguinte forma:

$$P = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ p_{\theta_1} \\ \theta_2 \\ p_{\theta_2} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

As órbitas formadas no espaço de fases são obtidas a partir do sistema de quatro equações não-lineares representados por (2.38), (2.39), (2.41), (2.42) o qual não é integrável. Pode-se observar que as coordenadas do ponto de equilíbrio obedecem a dimensionalidade do sistema.

Faremos a análise dos pontos de equilíbrio utilizando-se da mesma metodologia aplicada por Monerat [11] considerando-se o caso onde o pêndulo duplo ideal (livre da ação de forças externas e/ou dissipativas). Para o caso ideal tem-se os seguintes pontos de equilíbrio:

$$P1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad P3 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Estes pontos são formados pelos valores de  $(\theta_1, p_{\theta_1}, \theta_2, p_{\theta_2})$  os quais zeram equações de movimento do sistema e podem ser obtidos analiticamente, porém é intuitivo encontrá-los ao pensar nas configurações de repouso do sistema. A figura 4.3 ilustra a configuração correspondente ao ponto P1 do sistema:



Figura 4.3: Representação do estado de equilíbrio correspondente ao ponto P1.

Para obter-se a natureza dos pontos de equilíbrio calculam-se as matrizes jacobianas obtidas a partir da expansão de (2.38), (2.39), (2.41) e (2.42), desprezando-se termos de ordem superiores, e analisando cada expansão para cada ponto de equilíbrio do sistema para posteriormente encontrar-se os autovalores do sistema a partir dos quais é possível classificar os pontos fixos do sistema.

Fazendo-se a expansão em série de Taylor em torno dos quatro pontos de equilíbrio e das quatro equações de movimento obtém-se as matrizes jacobianas a seguir:

$$J1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 l_1^2} & 0 & -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} \\ -gl_1(m_1 + m_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2^2} \\ 0 & 0 & -gm_2 l_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$J2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 l_1^2} & 0 & \frac{1}{m_1 l_1 l_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1 l_1 l_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2^2} \\ 0 & 0 & gm_2 l_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$J3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 l_1^2} & 0 & \frac{1}{m_1 l_1 l_2} \\ gl_1(m_1 + m_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1 l_1 l_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2^2} \\ 0 & 0 & -gm_2 l_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$J4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 l_1^2} & 0 & -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} \\ gl_1(m_1 + m_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2^2} \\ 0 & 0 & gm_2 l_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Obtendo-se os autovalores das matrizes jacobianas e analisando-os para o caso do pêndulo duplo experimental onde  $m_1 = 0.9876 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.3425 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.245 \text{ m}$  e  $l_2 = 0.18 \text{ m}$  tem-se:

- Autovalores de J1: 0, -9.73969 i, 0, +9.73969 i, 0, -5.47702 i e 0, +5.47702 i. Pode-se observar que os quatro autovalores são imaginários e da forma  $\pm ai e \pm ib$  com isso temos que P1 é um ponto de equilíbrio do tipo puro-centro.
- Autovalores de J2: 0, -6.64387 i, 0, +6.64387 i, -8.02913, 8.02913. Pode-se observar que os dois autovalores são imaginários da forma  $\pm ai$  e dois autovalores reais da forma  $\pm b$  com isso temos que P2 é um ponto de equilíbrio do tipo centro-sela.
- Autovalores de J3: 0, - 8.02913 i, 0, + 8.02913 i, -6.64387, 6.64387. Pode-se observar que os dois autovalores são imaginários da forma  $\pm ai$  e dois autovalores reais da forma  $\pm b$  com isso temos que P3 é um ponto de equilíbrio do tipo centro-sela.
- Autovalores de J4: -5.47702, 5.47702, -9.73969, 9.73969. Pode-se observar que os quatro autovalores são reais da forma  $\pm a e \pm b$  com isso temos que P4 é um ponto de equilíbrio do tipo pura-sela.

## 4.2 Atratores

No caso do pêndulo duplo dissipativo temos o atrator óbvio que seria o ponto fixo P1(0,0,0,0) o qual é encontrado perante a evolução temporal de um pêndulo lançado a qualquer condição inicial de forma que as forças dissipativas influenciem no sistema levando este a trajetória de forma espiralada ao ponto de equilíbrio estável.

No estudo de atratores pode-se destacar os ciclos-limites. Segundo Strogatz [5], uma trajetória fechada isolada é um ciclo limite, de forma que a definição de isolado significa que trajetórias vizinhas a esta trajetória não são fechadas, estas trajetórias vizinhas espiralam em direção a trajetória fechada ou em direção contrária a ela, de forma que se

todas as trajetórias vizinhas se aproximarem do ciclo limite dizemos que este é estável ou atrator, caso contrário, dizemos que ele é instável.

Ao introduzir-se um motor no pêndulo duplo experimental e submeter o pêndulo a diversas condições iniciais pode-se observar que após um certo período de tempo sua trajetória entra em determinada órbita fechada e ali permanece, assim como em um ciclo limite. Ao analisar o trecho do movimento em que a órbita se estabiliza pôde-se verificar que a figura gerada no espaço de fases era uma órbita quase periódica muito bem definida. A posição dos sensores em relação ao pêndulo e/ou em relação a placa em que estavam posicionados influenciavam diretamente na dinâmica do sistema, proporcionando com que esta estabilidade acontecesse.

### 4.3 A seção de Poincaré

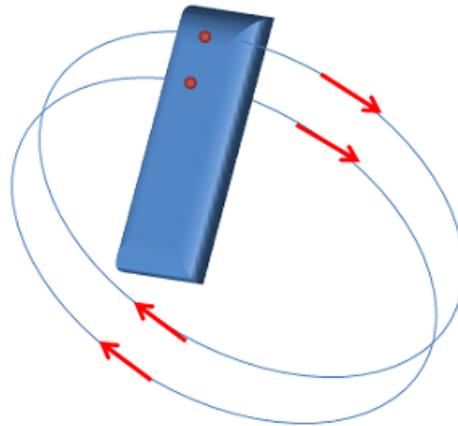


Figura 4.4: Desenho esquemático de corte no espaço de fases representando a seção de Poincaré formada pelas sucessivas marcações das órbitas no plano transversal.

Segundo Savi [4] é possível reduzir-se um sistema contínuo no tempo (fluxo) em um discreto (mapa), de forma que ao eliminar-se uma variável do sistema possibilita-se uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema. A seção de Poincaré reduz um fluxo contínuo num espaço de fases com dimensão  $N$  em um de dimensão  $N-1$  [8].

Com intuito de facilitar a visualização da dinâmica que ocorre no espaço de fases quadrimensional do pêndulo duplo recorre-se a seção de Poincaré aplicando-se um corte transversal no espaço de fases, de modo que ao impor-se a energia como constante de movimento reduz-se uma dimensão do sistema (espaço de fases tridimensional) e para reduzir mais uma dimensão do sistema restringe-se que sejam efetuadas marcações nesta seção transversal toda vez que o ângulo da  $m_2$  for nulo ( $\theta_2 = 0$ , espaço de fases bidimensional). Para evitar duplicidade de soluções implica-se que a marcação seja efetuada nesta seção transversal somente quando  $p_2 > 0$ .

Opta-se por exibir nesta dissertação o espaço de fases teórico tridimensional, também conhecido como concha de energia, que seria uma projeção tridimensional do corte bidimensional mencionado nos parágrafos anteriores. Para formar-se uma seção de Poincaré são necessárias diversas condições iniciais a mesma energia que satisfaçam as condições impostas mencionadas anteriormente, sendo assim, um espaço de fases pode ser formado por diversos toros que nunca se cruzarão e a seção de Poincaré gerada a partir deles será formada a partir de seções dos mesmos.

#### 4.4 Os expoentes de Lyapunov

Para calcular-se os expoentes de Lyapunov mede-se o crescimento exponencial em relação a cada eixo estudado em relação ao comprimento inicial [1,8]. Os eixos estudados correspondem aos expoentes locais do sistema, no caso do pêndulo duplo tem-se quatro expoentes locais correspondentes as quatro dimensões do sistema  $(\theta_1, p\theta_1, \theta_2, p\theta_2)$ .

Segundo Monteiro [8], seja  $x_0$  e  $x_0 + \delta_0$  duas condições iniciais muito próximas inicialmente separadas por uma distância  $d(0)$ , assumindo-se que a distância tenha variado exponencialmente no tempo, pode-se escrever a nova distância entre  $x_0$  e  $x_0 + \delta_0$  como  $d(t)$  a qual está representada abaixo:

$$d(t) = d(0) \exp^{\lambda t}, \quad (4.7)$$

Onde  $\lambda$  é o maior expoente de Lyapunov local.

Na figura 4.5 vemos o significado das quantidade  $d(0)$  e  $d(t)$  empregadas no cálculo dos coeficientes de Lyapunov:

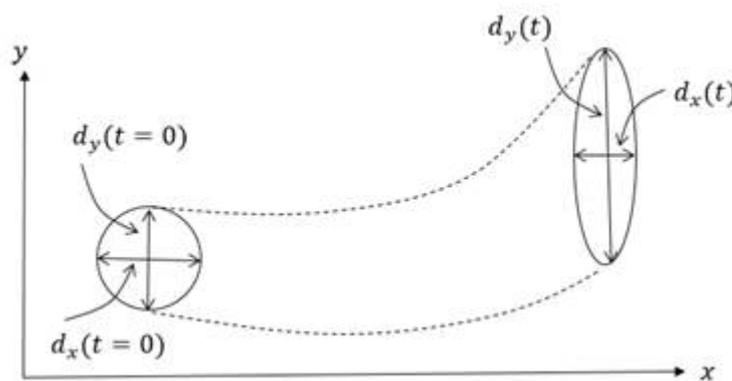


Figura 4.5: Gráfico ilustrando o crescimento exponencial das distâncias conforme a evolução temporal.

Pode-se escrever a equação (4.8) para calcular-se o expoente de Lyapunov a cada instante do movimento e para obter-se o maior expoente local faz-se a média dos valores dos expoentes em relação a cada instante do movimento. O cálculo de expoentes locais pode ser representado pela fórmula à seguir (fórmula adaptada) [8] :

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{d(t)}{d(0)} \right). \quad (4.8)$$

## Capítulo 5

# A construção do pêndulo duplo e o software de aquisição de dados experimentais Tracker

Neste capítulo será abordado brevemente o processo de construção do pêndulo duplo e os materiais e softwares utilizados para aquisição e tratamento de dados experimentais. Os lançamentos do pêndulo duplo ocorreram abandonando-se este do repouso com a haste superior suspensa e as filmagens foram realizadas por intermédio da câmera *Sony Action Cam AS100VR* configurada em “*slowmotion*” (a 240 *fps*) vídeos foram tratados no software de mapeamento de imagens quadro a quadro *Tracker* e a partir dos dados experimentais nele obtidos estes foram salvos em arquivos de dados e posteriormente importados para o software *Mathematica*.

Os materiais que foram utilizados na construção do pêndulo duplo estão listados abaixo:

- Hastes de alumínio
- Discos de alumínio
- Chumbada de pesca (com a finalidade de preencher os discos)
- Porcas e parafusos

A figura 5.1 ilustra alguns dos materiais utilizados na construção do pêndulo duplo:



Figura 5.1: Materiais utilizados na construção do pêndulo duplo.

Os discos de alumínio foram preenchidos com chumbada derretida que foram soldados nas hastes de alumínio e posteriormente o sistema foi fixado na plataforma de tal forma que permitisse uma ligação da haste superior e inferior e também sua mobilidade. A figura abaixo mostra o pêndulo duplo após sua construção:

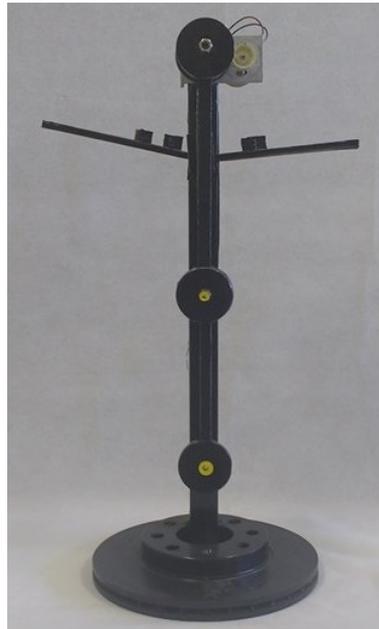


Figura 5.2: Fotografia do pêndulo duplo experimental.

## 5.1 Pêndulo duplo com motor acoplado ao eixo de suspensão

Introduziu-se no eixo de sustentação do pêndulo duplo um motor conectado a uma engrenagem que possui ligação com o rolamento. A figura 5.3 representa o esboço do planejamento da estrutura do aparato experimental com os sensores ópticos para controlar o acionamento do motor:

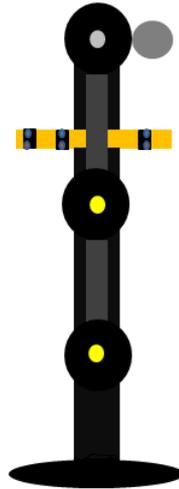


Figura 5.3: Ilustração do pêndulo duplo com a placa com os sensores ópticos.

Foi necessário introduzir-se no sistema um mecanismo de sensores acoplados a uma placa Arduino (utilizou-se neste experimento uma placa Arduino UNO) os quais fornecem-se para o motor a mensagem de ligar e desligá-lo conforme a programação desejada. Inicialmente foram efetuados testes com sensores magnéticos do tipo “*REED SWITCH*”, porém devido a velocidade com que o sistema se comporta estes não forneceram resultados satisfatórios pois não possuíam a sensibilidade necessária, outro fator que influenciou na não utilização destes era a necessidade de que o indutor magnético (ímã) e o receptor (sensor) estivessem muito próximos podendo assim ocasionar choques entre o ímã e o próprio sensor e destaca-se também a fragilidade destes. Realizou-se outro teste utilizando-se sensores ópticos (TCRT 5000), dispositivos que funcionam como interruptores (liga[1]/desliga[0]), acionados quando o feixe infravermelho emitido pelo emissor do sensor encontra-se com o alvo espelhado o qual reflete este sinal de volta para o sensor sendo recebido pelo receptor (fototransistor) localizado ao lado do emissor. Sensores ópticos apresentam uma precisão e uma durabilidade melhor quando comparados aos sensores magnéticos, além de permitirem uma distância maior entre o sensor e o refletor, evitando-se assim possíveis choques da estrutura que influenciassem no movimento do sistema. A figura 5.4 representa o funcionamento do sensor óptico:

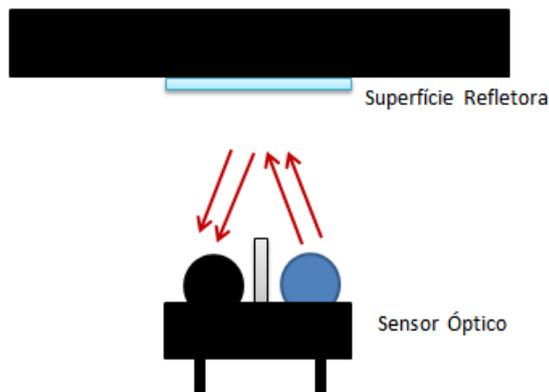
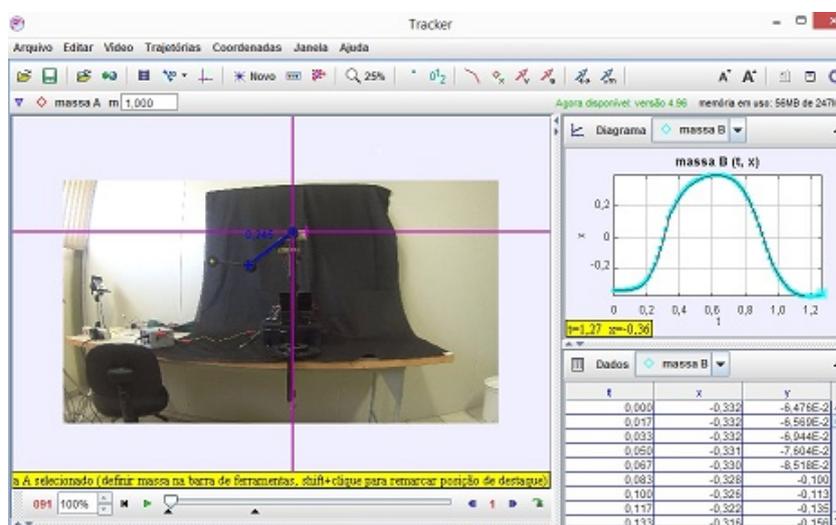


Figura 5.4: Representação esquemática do funcionamento do sensor óptico

## 5.2 Tracker - O software de tratamento de dados

Posicionada em frente ao pêndulo duplo encontrava-se a câmera *Sony Action Cam AS100VR* a qual efetuava a filmagem do lançamento. Estas filmagens eram importadas para o software *Tracker* de modo que sua interface está representada na figura 5.5:

Figura 5.5: Representação do software *Tracker* com utilização de ferramentas “eixo” (rosa) e “bastão de calibração” (azul).

Abaixo do vídeo importado aparece uma barra de rolagem e o número de quadros do vídeo, é possível escolher o quadro de início da análise e até onde deseja-se estudá-lo. Este recurso é útil para filmagens muito longas à 240 *fps*, visto a quantidade de quadros obtidos e a dificuldade do mapeamento do vídeo integral devido a memória disponibilizada

pelo software, tornando-se assim o mapeamento seccionado a partir de vídeos longos particionados uma solução para este problema.

Como o pêndulo duplo possui duas massas, o procedimento efetuado para a massa superior deve ser efetuado para a massa inferior. Ao longo do mapeamento pode-se observar no canto direito da tela o gráfico do movimento sendo formado e também uma tabela com o intervalo de tempo e as coordenadas  $x$ 's e  $y$ 's do sistema que podem ser copiadas e salvas em um arquivo de dados . Como as equações de movimento do pêndulo duplo são abordadas em coordenadas polares, transformamos as coordenadas cartesianas fornecidas pelo software em coordenadas polares por intermédio de relações trigonométricas no próprio software *Mathematica*.

Para a construção da seção de Poincaré experimental foram utilizados vídeos de aproximadamente cinco minutos de duração cada, de modo que a quantidade de pontos disponibilizados por cada vídeo passava de 100.000. Devido a limitação do software *Tracker*, recorreu-se ao software da câmera para particionar os vídeos em diversos segmentos de modo que a quantidade de 240 *fps* fosse preservada. Desta forma possibilitou-se uma análise mais detalhada do que acontecia ao longo de toda a filmagem e conseguiu-se obter mais pontos para a construção da seção de Poincaré experimental.

---

## Capítulo 6

# Resultados simulados e experimentais

Neste capítulo apresentam-se resultados obtidos por simulações numéricas e os resultados experimentais obtidos a partir de condições iniciais muito próximas, com o intuito de encontrar semelhanças e divergências entre o modelo teórico e o real. Serão discutidos tópicos como Modos Normais, Espaços de Fase, seções de Poincaré e Expoentes de Lyapunov.

### 6.1 A conservação da energia para pêndulo duplo livre de forças externas a tempos curtos e justificativa para introdução do motor no sistema

Os cálculos apresentados no início desta dissertação referem-se ao pêndulo duplo ideal no qual forças dissipativas ou externas não são consideradas no cálculo. Mas por que adotar esta aproximação sendo que o pêndulo duplo real está sujeito a força de resistência do ar bem como atrito entre seus rolamentos?

Quando estuda-se o pêndulo duplo em intervalos de tempo com duração de dez segundos (s) aproximadamente cada, a perda de energia sofrida é mínima como pode-se observar nas figuras 6.1 e 6.2, pois a massa dos discos de chumbo que é muito superior a massa das hastes de alumínio proporciona que os efeitos das forças dissipativas demorem a aparecer mais no sistema (figura 6.1). O teste do período do pêndulo apresentado no apêndice desta dissertação também justifica esta aproximação, visto que o resultado do período experimental e do teórico são muito similares.

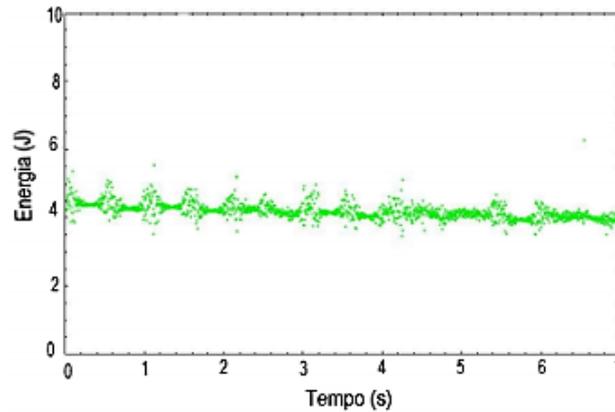


Figura 6.1: Gráfico da variação da energia mecânica em função do tempo para o pêndulo duplo experimental sem a ação do motor.

Considerando-se o erro experimental, as flutuações que aparecem na energia não interferem significativamente no comportamento do sistema, o qual apresenta-se razoavelmente constante ao longo do tempo.

Introduz-se o motor no sistema ligando-se a fonte de energia e ativando os sensores, com o intuito de minimizar as perdas de energia ocasionadas pelas forças dissipativas aproximando-o ainda mais do pêndulo duplo ideal, possibilitando assim efetuar filmagens mais longas mantendo-se a energia razoavelmente constante. A figura 6.2 mostra a conservação da energia utilizando-se o motor:

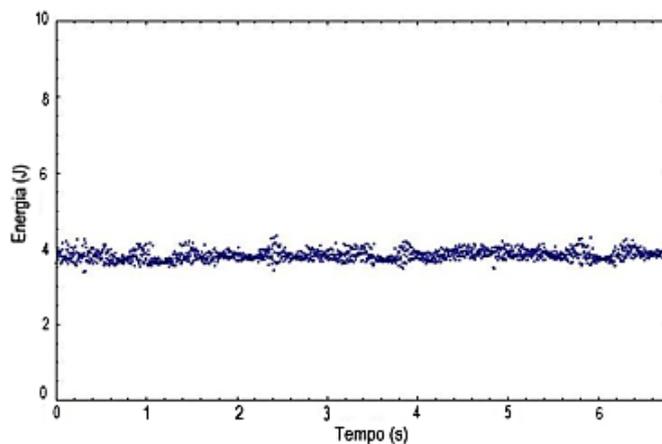


Figura 6.2: Gráfico da energia mecânica em função do tempo para o pêndulo duplo experimental com a ação do motor.

Pode-se observar que esta se mantém razoavelmente constante com pequenas flutuações. A força exercida pelo motor é variável e controlada pelo próprio sistema com a ativação dos sensores, então podemos perceber que dependendo do teste realizado teremos oscilações na energia como mostrado acima, porém no geral ela se mantém de forma

satisfatória constante. Para obter a seção de Poincaré experimental apresentada neste trabalho recorreu-se a utilização do motor, visto a necessidade de manter a energia constante por mais tempo e a dificuldade em obter pontos experimentais que satisfaçam as condições impostas pela seção.

## 6.2 Os modos normais em fase e fora de fase do Pêndulo Duplo

As fotografias apresentadas na figura 6.3 (a,b) ilustram os modos normais em fase e fora de fase que serão estudados nesta seção:

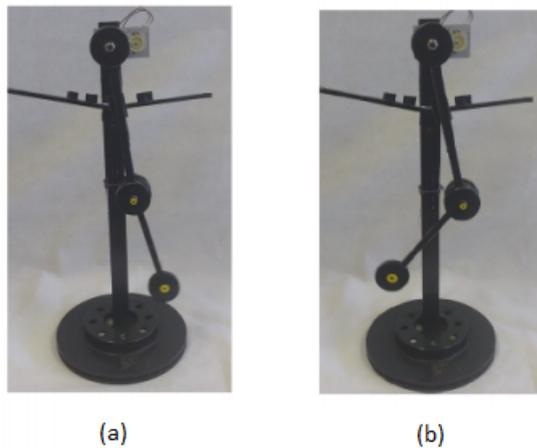


Figura 6.3: Ilustração dos a) Modo normal em fase. b) Modo normal fora de fase.

### 6.2.1 Modos normais obtidos por simulação computacional e experimentalmente para o pêndulo duplo livre de forças externas

Com o auxílio do software *Mathematica* esses modos foram simulados para valores de  $m_1$  e  $m_2$  e  $l_1$  e  $l_2$  iguais aos do pêndulo real. Pode-se observar que nestas condições o movimento apresentado no espaço de fases é periódico, sendo representado por uma órbita fechada no espaço de fases.

A figura 6.4 (a,b,c,d) apresenta os esboços dos espaços de configurações e de fases obtido por simulação computacional para o modo normal em fase referente a  $m_1$  e  $m_2$ :

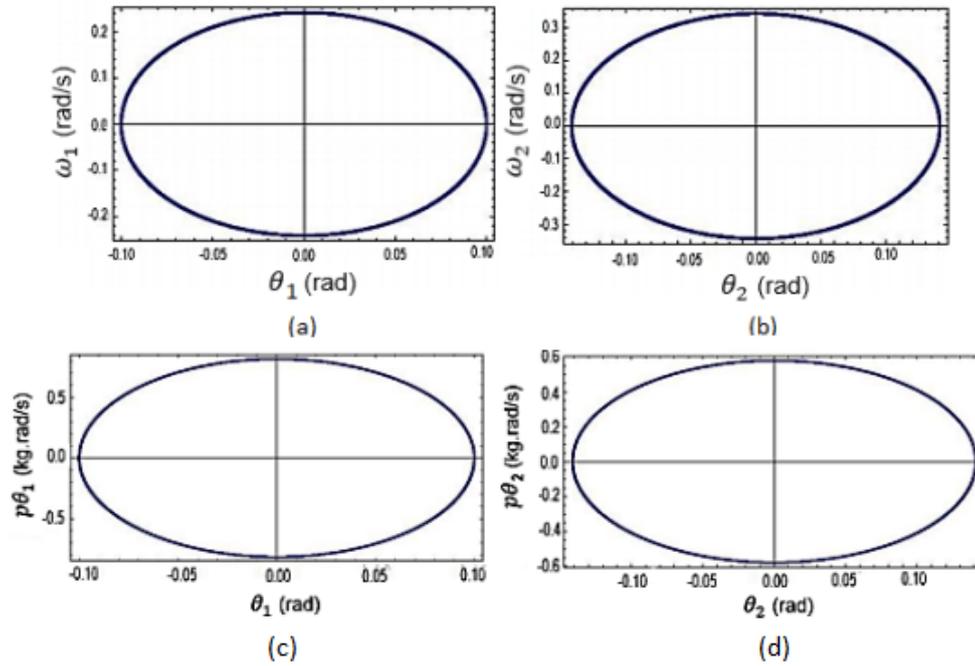


Figura 6.4: Esboço dos a e c) Espaço de configurações e de fase referente a  $m_1$  para o modo normal em fase. b e d) Espaço de configurações e fase referente a  $m_2$  para o modo normal em fase.

A figura 6.5 (a,b,c,d) apresenta os esboços dos espaços de configurações e fases obtidos para o pêndulo duplo experimental para o modo normal em fase:

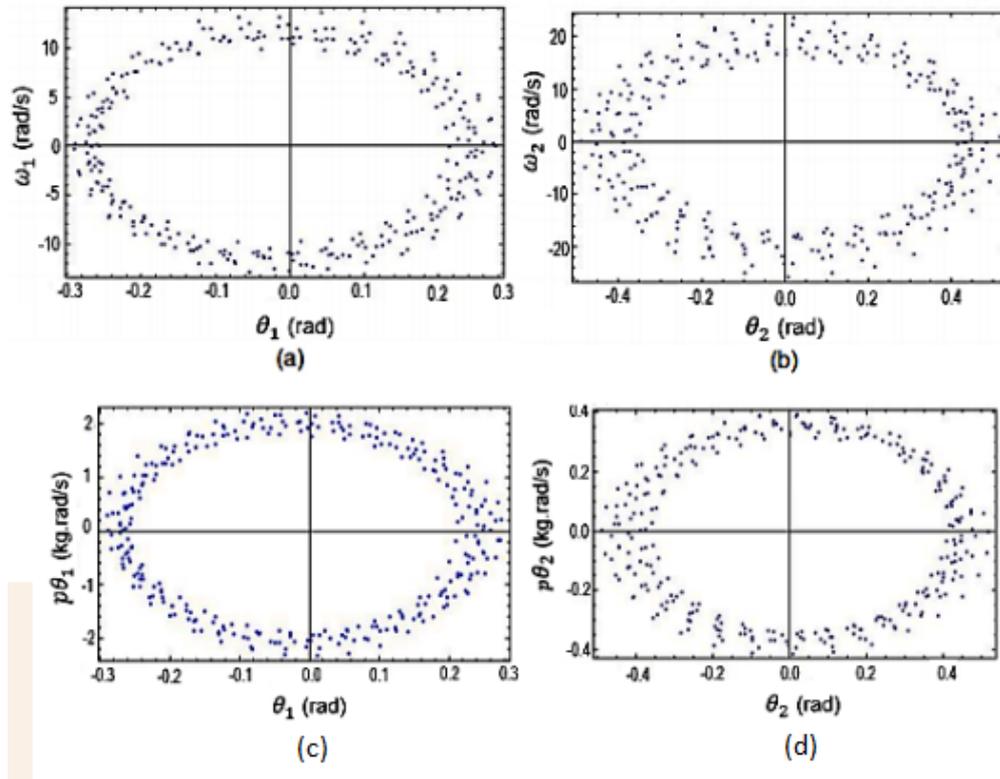


Figura 6.5: Esboço dos a e c) Espaço de configurações e fase referente a  $m_1$  para o modo normal em fase. b e d) Espaço de configurações e fase referente a  $m_2$  para o modo normal em fase.

A figura 6.6 (a,b,c,d) apresenta os esboços os espaços de configurações e fases obtidos por simulação computacional para o modo normal fora de fase :

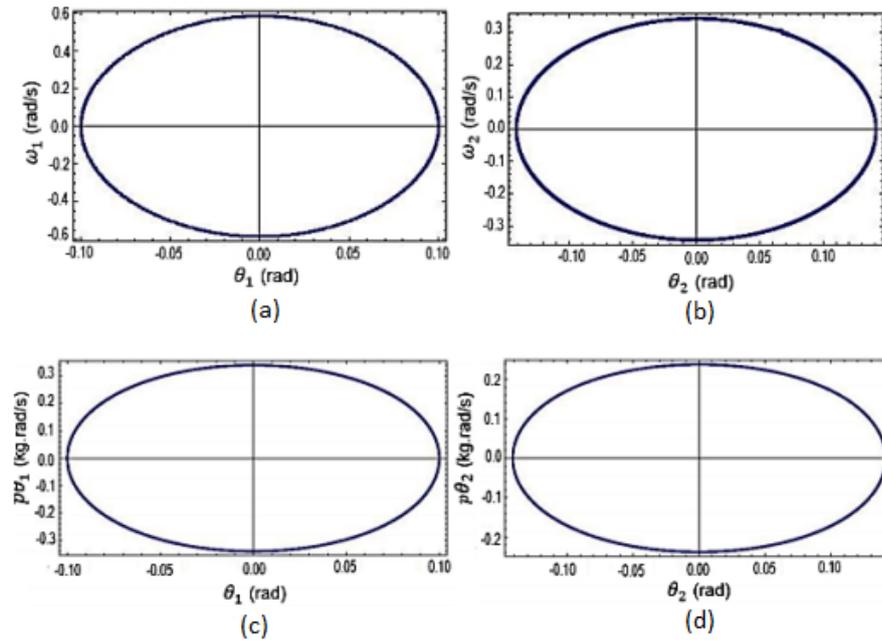


Figura 6.6: Esboço dos a e c) Espaço de configurações e fases referente a  $m_1$  para o modo fora de fase. b e d) Espaço de configurações e fases referente a  $m_2$  para o modo normal fora de fase

A figura 6.7 (a,b,c,d) apresenta os esboços dos espaço de configurações e fases obtidos experimentalmente para o modo normal fora de fase:

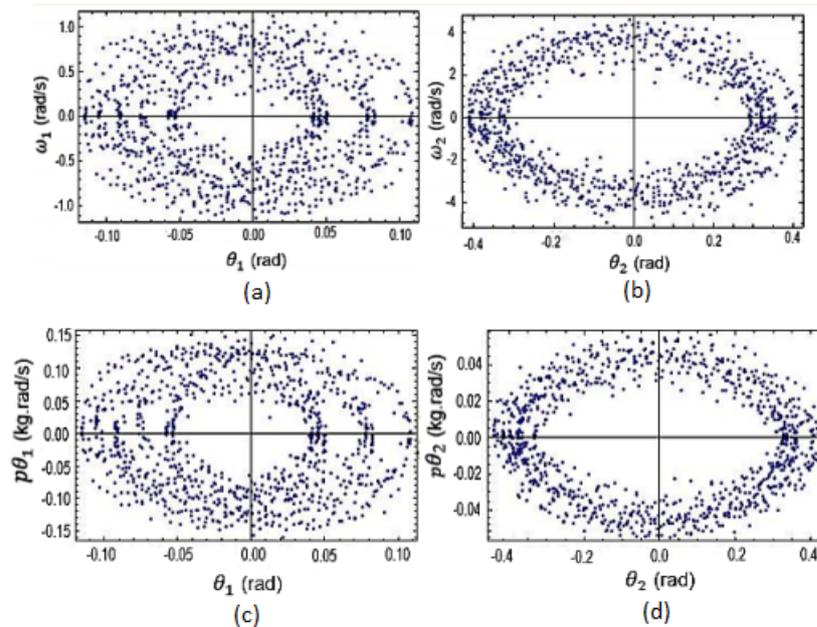


Figura 6.7: Esboço dos a) Espaço de configurações e fases referente a  $m_1$  para modo normal em fase. b) Espaço de configurações e fases referente a  $m_2$  para modo normal em fase.

### 6.2.2 Análise dos resultados experimentais e simulados obtidos para o modo normal em fase e fora de fase

Pode-se observar um afunilamento das órbitas nos espaços de configurações e de fase representados acima quando comparados aos modos normais simulados, isto ocorre devido a perda de energia ocasionada no sistema por causa do atrito, mostrando que o pêndulo vai convergir para um atrator que seria o ponto de repouso.

Outro eviência é devido aos modos normais experimentais não são puros (iguais aos teóricos), pois há uma dificuldade em obter-se experimentalmente a configuração exata de modos normais, isto pode ser verificado na evolução temporal mostrada abaixo:

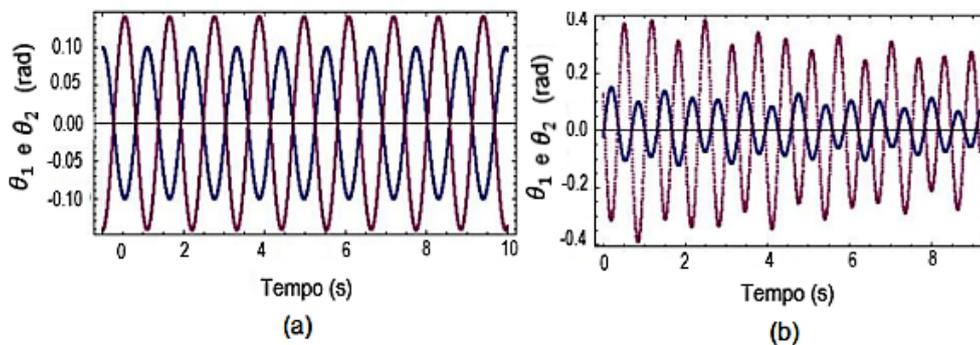


Figura 6.8: Gráfico da a) Evolução temporal dos ângulos teórica. b) Evolução temporal dos ângulos experimental.

### 6.2.3 Órbita periódica obtida com o uso do motor

A figura abaixo ilustra uma órbita periódica obtida com a ação do motor no sistema:

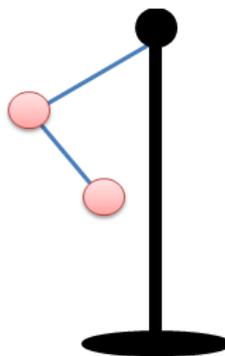


Figura 6.9: Ilustração do normal fora de fase obtido com o motor.

A figura 6.10 (a,b) representa os espaços de fase experimentais obtidos nesta configuração:

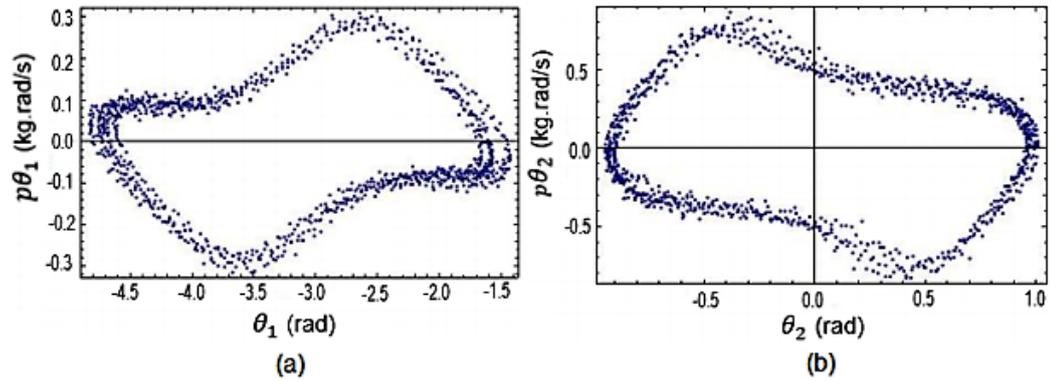


Figura 6.10: Gráfico do a) Espaço de fases referente a  $m_1$  para o modo fora de fase do pêndulo duplo com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a  $m_2$  para o modo fora de fase do pêndulo duplo com a ação do motor.

Ao introduzir-se o motor pode-se observar que o movimento realizado pelo pêndulo é uma órbita periódica no sistema com o auxílio da configuração imposta pelos sensores. As figuras 6.11 e 6.13 ilustram outras órbitas periódicas obtidas com a utilização do motor:

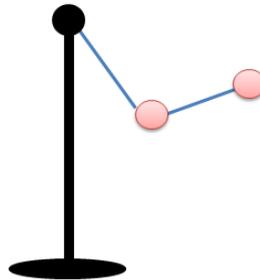


Figura 6.11: Ilustração do modo periódico para o pêndulo duplo obtido com a ação do motor (modo 1).

E os respectivos espaços de fase na figura 6.12 (a,b):

A figura 6.13 representa outro modo periódico obtido com a ação do motor (neste modo as configurações dos braços do pêndulo estão mais abertas em relação ao modo 1):

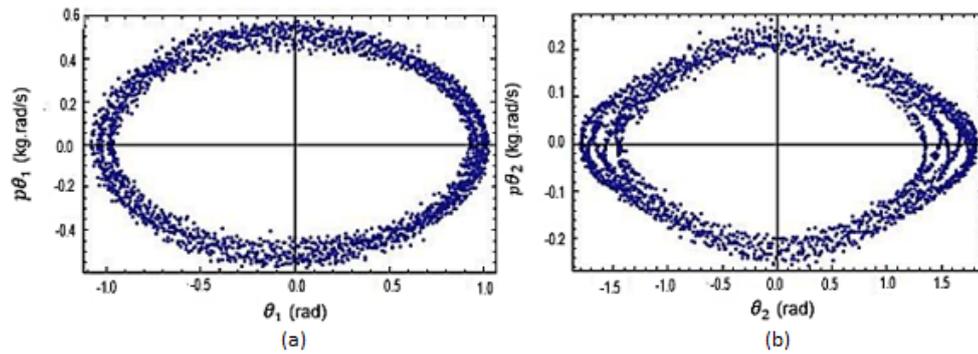


Figura 6.12: a) Espaço de fases referente a  $m_1$  para novo modo (modo 1) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a  $m_2$  para novo modo (modo 1) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor.

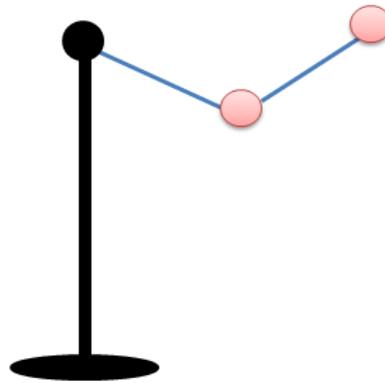


Figura 6.13: Ilustração do modo periódico para o pêndulo duplo obtido com a ação do motor (modo 2).

E os espaços de fase na figura 6.14 (a,b):

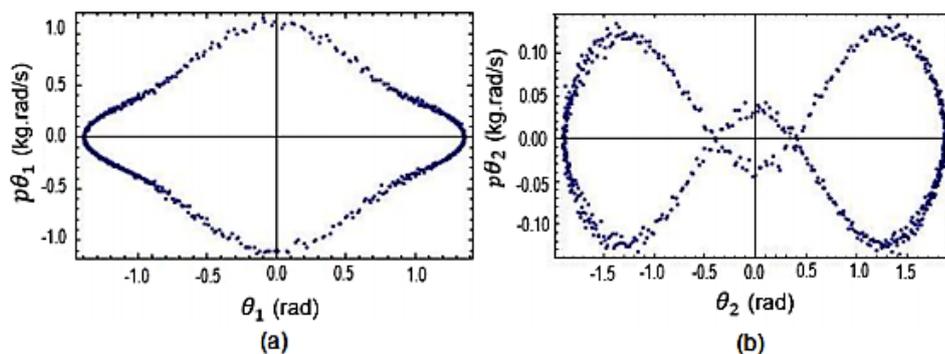


Figura 6.14: a) Espaço de fases referente a  $m_1$  para novo modo (modo 2) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a  $m_2$  para novo modo (modo 2) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor.

## 6.3 Uma novo modo gerado pela introdução do motor no sistema

### 6.3.1 Conjunto de dados experimentais com evidência de ciclo limite

Devido a posição dos sensores conforme os testes realizados com o motor, percebeu-se que determinada configuração dos sensores juntamente com a condição inicial imposta, proporcionava o pêndulo duplo desenvolver uma trajetória particular no sistema, não entrando numa frequência de modos normais, mas permanecendo confinado em determinada trajetória após certo tempo de filmagem e nela permanecendo, evidenciando-se a existência de um ciclo limite, um atrator. Este resultado repetiu-se por diversos testes realizados e em todos percebeu-se que após um certo período de filmagem o pêndulo mantinha-se na dinâmica mostrada na figura abaixo e nela permanecia por muito tempo:

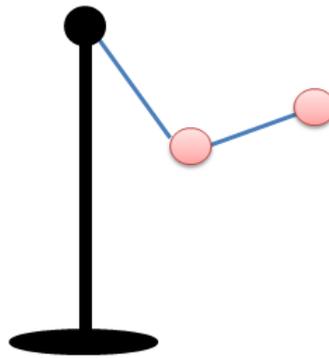


Figura 6.15: Ilustração do modo periódico obtido para o pêndulo duplo com a ação do motor.

A figura 6.16 (a,b) apresenta os espaços de fase obtidos para  $m_1$  e  $m_2$  para três filmagens sob a mesma configuração de sensores mas com condições iniciais diferentes:

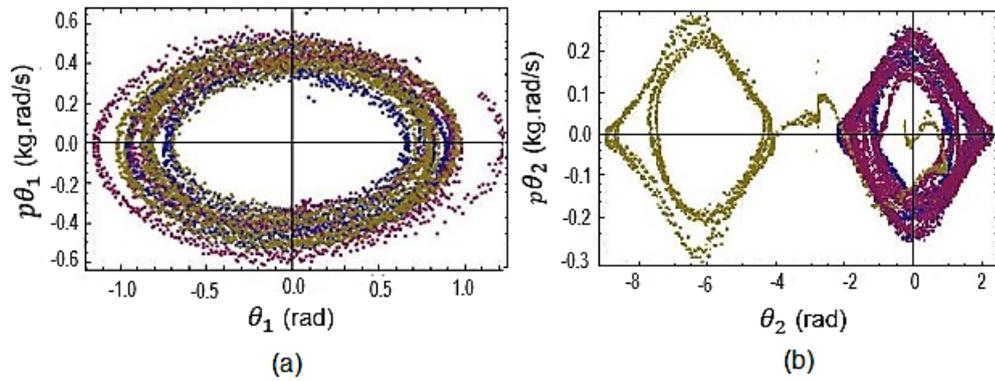


Figura 6.16: Esboço do a) Espaço de fases projeção ciclo limite para  $m_1$ . b) Espaço de fases projeção ciclo limite para  $m_2$ .

Pode-se observar semelhança entre resultados experimentais obtidos lançados a condições iniciais diferentes, evidenciando que independente da condição que o pêndulo fosse lançada implicaria ele se estabilizar nessa configuração, porém, devido a complexidade do espaço de fases quadridimensional do pêndulo duplo torna-se um pouco difícil a visualização do ciclo limite nas projeções bidimensionais mostradas acima referentes as massas  $m_1$  e  $m_2$ .

## 6.4 Espaços de fase para o pêndulo duplo

### 6.4.1 Espaços de fase para o pêndulo duplo livre de forças externas

Os resultados experimentais e simulados dos espaços de fase apresentados nas figuras 6.18 e 6.19 foram obtidos seguindo a condição inicial ilustrada na figura 6.17:

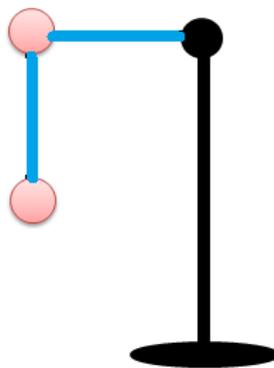


Figura 6.17: Ilustração da condição inicial de lançamento com os braços formando ângulo de  $90^\circ$ .

Nesta condição inicial os braços estão inicialmente em repouso ( $p_{\theta_1} = 0$  e  $p_{\theta_2} = 0$ ) e  $l_1$  e  $l_2$  formam um ângulo de  $90^\circ$  (com  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta_2 = 0$ ). Condição escolhida pela facilidade de repetição em diversos lançamentos. Os resultados experimentais que serão mostrados nesta seção são de uma filmagem com 10s de duração pois neste intervalo de tempo a perda mínima de energia possibilita a aproximação para um pêndulo duplo ideal.

Como o espaço de fases do pêndulo duplo é quadridimensional, sua visualização espacial é muito complexa de ser ilustrada, então optamos por mostrar o espaço de fases bidimensional referente a  $m_1$  e a  $m_2$  do sistema, porém ressalta-se que as quatro variáveis do sistema [2.38](#), [2.39](#), [2.41](#) e [2.42](#) não são independentes entre si devido aos braços estarem interligados, então o movimento apresentado no espaço de fases da  $m_1$  está correlacionado ao movimento apresentado em  $m_2$ . Pode-se observar na figura 6.18 (a,b) o espaço de fase teórico e experimental

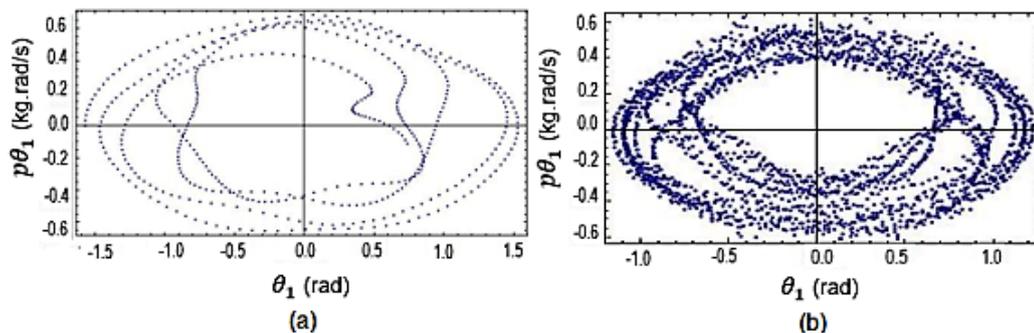


Figura 6.18: Esboço dos a) Espaço de fases para  $m_1$  teórico. b) Espaço de fases para  $m_1$  experimental.

Pode-se observar uma certa semelhança entre o resultado teórico e o simulado, porém devemos levar em consideração nesta análise que os cálculos utilizados na simulação não levam em consideração os efeitos dissipativos, ou seja, para uma filmagem mais longa ocorrerá divergências nos resultados. A figura 6.19 (a,b) mostra os resultados teórico e experimental para  $m_2$ :

Pode-se observar uma semelhança entre o resultado experimental e teórico novamente, mostrando que a aproximação torna-se para o caso ideal em um curto período de tempo válida.

#### 6.4.2 Espaços de fase para o pêndulo duplo dissipativo e forçado

As figuras 6.20 (a,b) e 6.21 (a,b) apresentam os resultados obtidos com a utilização do motor sob as mesmas configurações do sistema. Pode-se observar que o resultado experimental e teórico apresentam muita semelhança, indicando que o experimento está se comportando bem próximo ao modelo teórico.

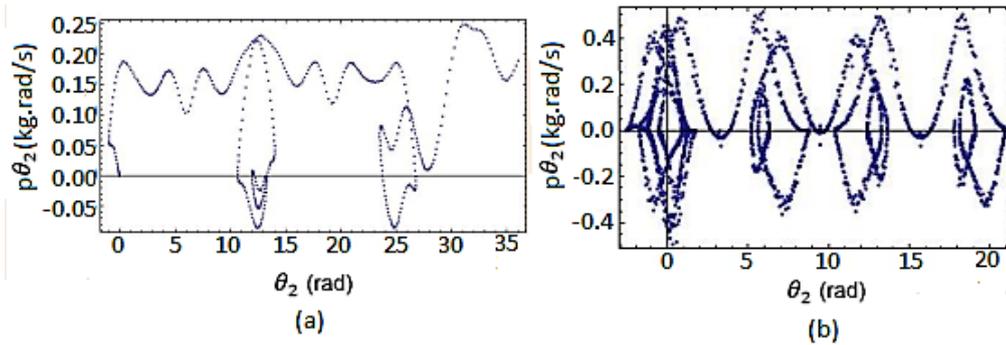


Figura 6.19: Esboço dos a) Espaço de fases teórico para  $m_2$  . b) Espaço de fases experimental para  $m_2$ .

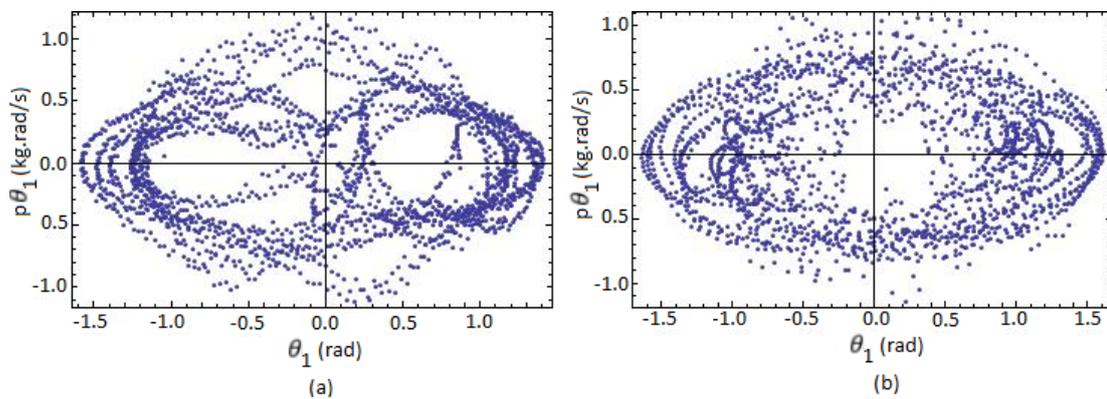


Figura 6.20: Esboço dos a) Espaço de fases teórico referente a  $m_1$  para o sistema sob a ação do motor. b) Espaço de fases experimental referente a  $m_1$  para o sistema sob a ação do motor.

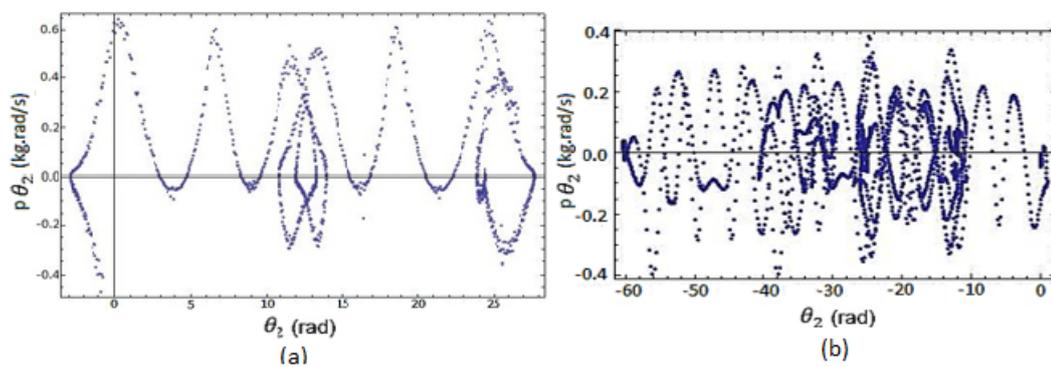


Figura 6.21: Esboços do a) Espaço de fases teórico referente a  $m_2$  para o sistema sob a ação do motor. b) Espaço de fases experimental referente a  $m_2$  para o sistema sob a ação do motor.

## 6.5 Seções de Poincaré

### 6.5.1 Pêndulo Duplo com massas e comprimentos diferentes

#### Seção de Poincaré Teórica Pêndulo Duplo Ideal com massas e comprimentos diferentes

As seções de Poincaré apresentadas a seguir foram geradas por simulação computacional para o pêndulo duplo ideal a partir de diversas condições iniciais sob a mesma energia para massas e comprimentos iguais às do pêndulo real. Ao plotar-se as figuras pode-se observar que pontos são gerados na parte superior e inferior do gráfico simultaneamente devido a simetria do problema. Pode-se observar que nesta situação o movimento é periódico e as curvas formadas são chamadas de quase-periódicas porque cada vez que itera-se mais o mapa os novos pontos serão formados entre dois pontos já existentes de forma que em alguns momentos estes pontos serão tão próximos um do outro que não é possível identificar a diferença de movimento entre eles.

Em  $E = 5J$  pode-se observar dois pontos na seção os quais correspondem aos modos normais da seção e nestes pontos pode-se considerar o movimento periódico. Conforme aumenta-se a energia pode-se observar o surgimento de novos movimentos periódicos próximos as regiões dos pontos de equilíbrio fora de fase e em fase. Ao aumentar-se a energia a figura tende a deformar-se de modo que as curvas quase-periódicas próximas ao ponto de equilíbrio em fase tendem a se aproximar das curvas quase-periódicas próximas ao ponto de equilíbrio fora de fase. Pode-se observar novas regiões de periodicidade surgindo no sistema, porém ainda não há uma grande perturbação no sistema (caos).

Ao aumentar-se mais a energia as órbitas quase-periódicas e periódicas vão destruir-se até o momento em que o caos se instale no sistema ( $E = 21J$ ). Se o pêndulo iniciar seu movimento em algum ponto desta região, o próximo ponto pode aparecer em qualquer nesta região. Assim ao lançar o pêndulo de duas condições muito próximas nesta região suas trajetórias tendem a divergir muito rapidamente e esta sensibilidade as condições iniciais é a característica do caos determinístico. Aumentando-se mais a energia o mar de Caos tende a avançar cada vez mais destruindo os movimentos periódicos que ali persistiam até o caos dominar completamente o sistema.

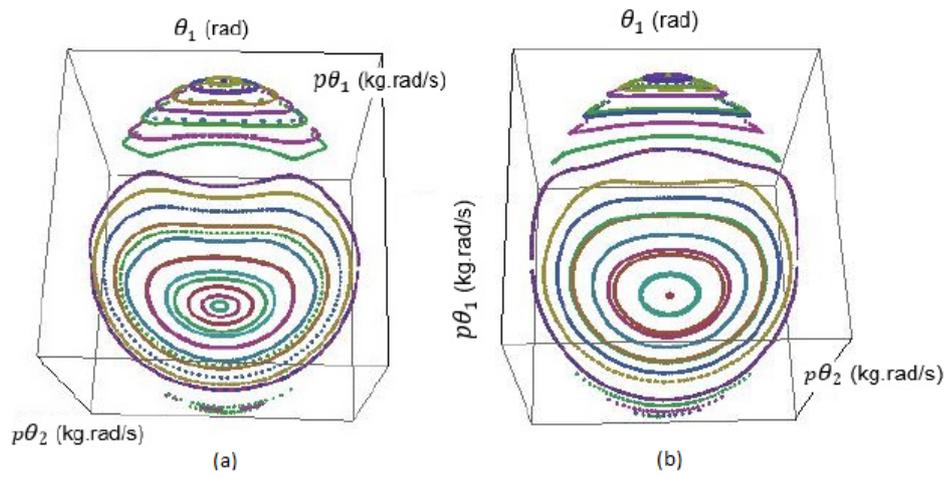


Figura 6.22: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 1.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 5.0$  J.

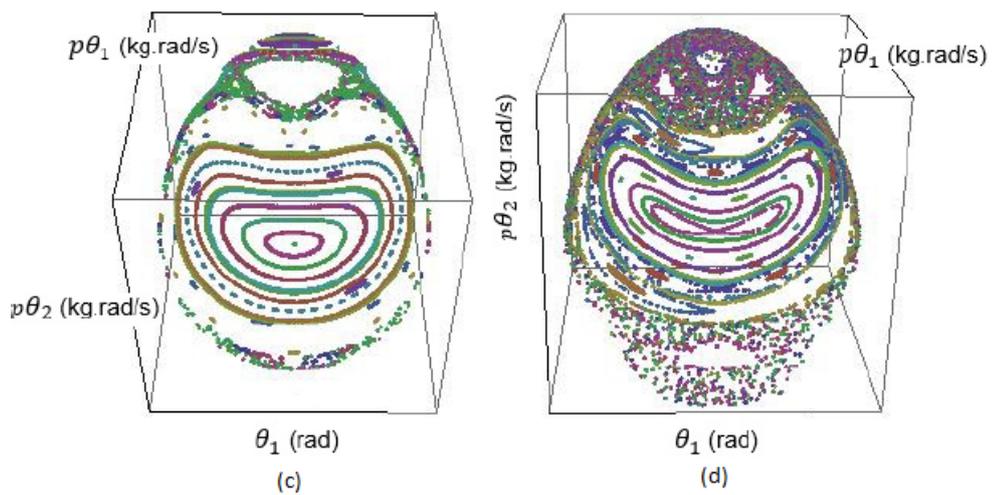


Figura 6.23: Esboço de c) Seção de Poincaré para  $E = 11.0$  J. d) Seção de Poincaré para  $E = 15.0$  J.

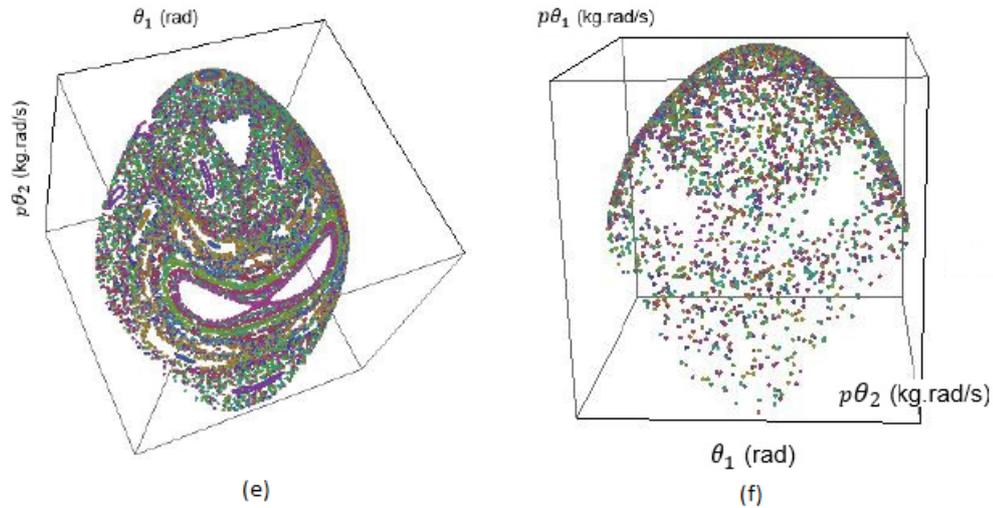


Figura 6.24: Esboço de e) Seção de Poincaré para  $E = 17.0$  J. f) Seção de Poincaré para  $E = 21.0$  J.

### Seção de Poincaré Teórica para o Pêndulo Duplo Dissipativo com massas e comprimentos diferentes

Nesta seção considera-se o pêndulo duplo somente com as forças dissipativas atuantes no sistema. De forma análoga ao caso ideal podemos fazer o estudo das seções de Poincaré aumentando-se gradativamente a energia do sistema, percebe-se na figura abaixo que a estrutura da seção foi perturbada, não apresenta-se mais de forma clara que nem o caso ideal. Isto ocorre devido a ação das forças dissipativas no sistema que acabam ocasionando uma deformação na seção de Poincaré. Esta perturbação no sistema pode ser justificada devido a energia não conservar-se mais.

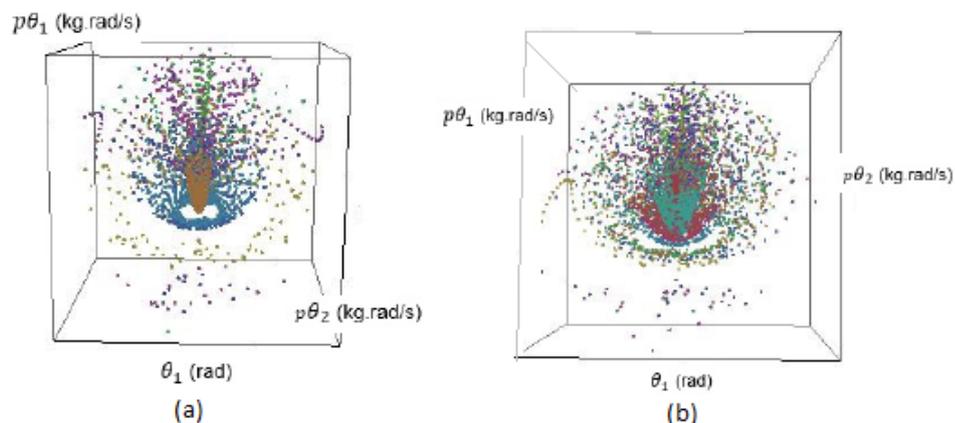


Figura 6.25: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 1.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 5.0$  J.

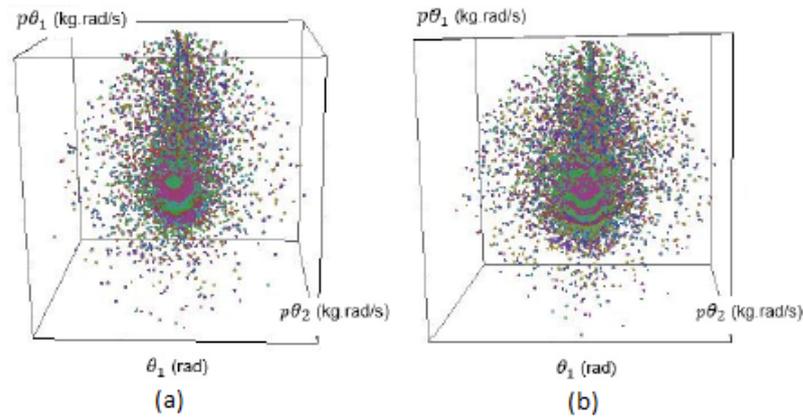


Figura 6.26: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 10.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 15.0$  J.

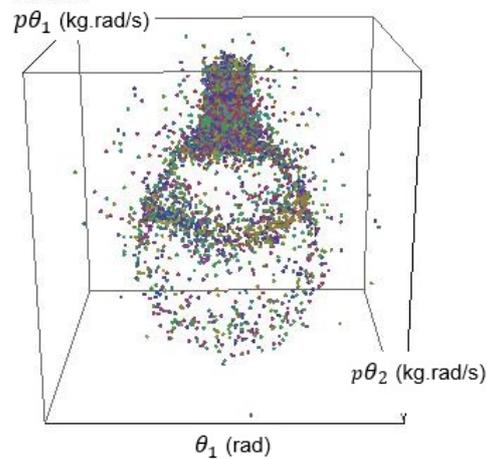


Figura 6.27: Esboço de Seção de Poincaré para  $E = 20.0$  J.

A figura 6.32 mostra o que ocorre com a energia do sistema quando há somente a ação de forças dissipativas:

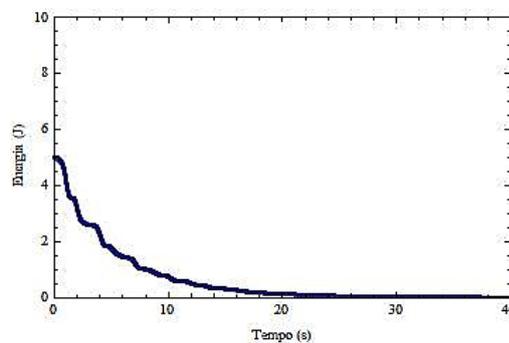


Figura 6.28: Gráfico de Energia (J) x Tempo (s) para o pêndulo duplo dissipativo.

Pode-se observar na figura um decaimento exponencial de energia característico de sistemas dissipativos.

### seção de Poincaré Teórica Pêndulo Forçado com massas e comprimentos diferentes

As figuras abaixo apresentam as seções de Poincaré teóricas à diversas energias para o pêndulo forçado, pode-se observar novamente uma estrutura perturbada, devido a não conservação da energia.

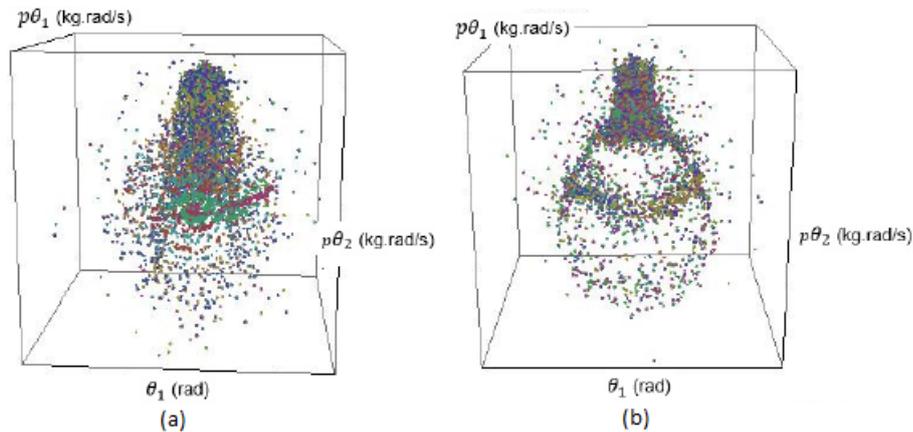


Figura 6.29: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 5$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 20$  J.

Gráfico da energia para o pêndulo duplo teórico forçado:

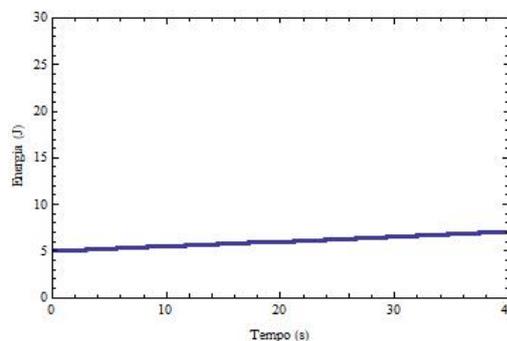


Figura 6.30: Gráfico de Energia (J) x Tempo (s) para o pêndulo duplo dissipativo e forçado, com o motor regulado para fornecer mais energia do que a que é perdida pela dissipação, fazendo com que a energia total cresça com o tempo.

Pode-se observar um aumento na energia, justificável por somente o motor estar atuando no sistema, fornecendo energia ininterruptamente.

### Seção de Poincaré Teórica para o Pêndulo Duplo Dissipativo e Forçado com massas e comprimentos diferentes

As figuras exibidas nesta seção mostram as seções de Poincaré para o pêndulo dissipativo e forçado. Pode-se observar estruturas aparentemente quase-periódicas apesar da leve perturbação sofrida pelo sistema e que conforme o aumenta-se a energia pode-se observar uma deformação das estruturas de forma que o caos introduz-se no sistema.

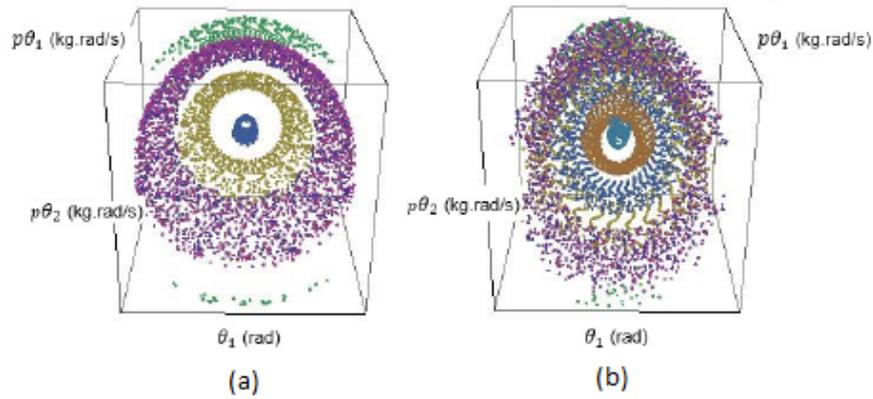


Figura 6.31: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 1.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 2.0$  J.

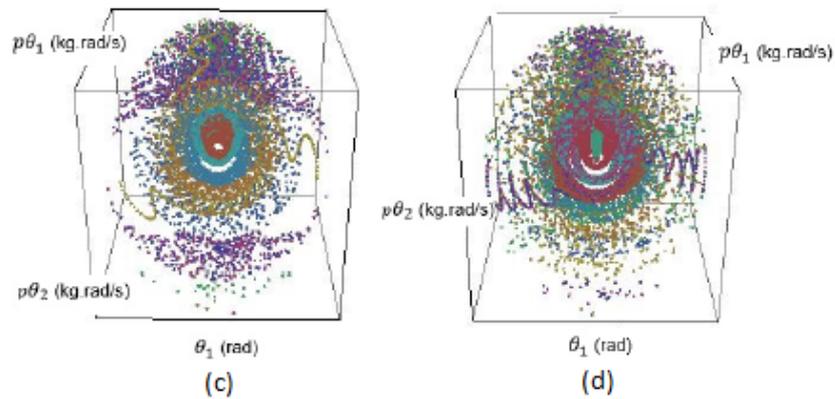


Figura 6.32: Esboço de c) Seção de Poincaré para  $E = 4.0$  J. d) Seção de Poincaré para  $E = 8.0$  J.

### Seção de Poincaré Experimental para o Pêndulo Duplo Dissipativo e Forçado (massas e comprimentos diferentes)

As seções de Poincaré apresentadas na figura 6.37 refere-se a um conjunto de condições de iniciais experimentais à mesma energia (de aproximadamente 1.8 J):

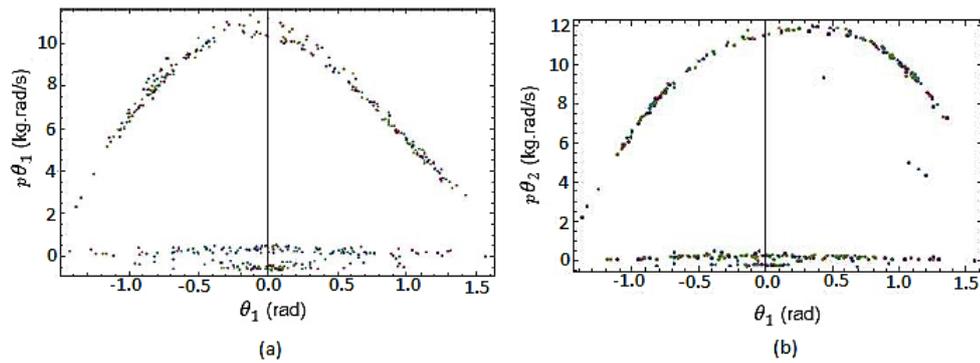


Figura 6.33: Esboço de a) Seção de Poincaré Experimental do Pêndulo Duplo com energia 1.8 J ( $\theta_1$  e  $p\theta_1$ ) b) Seção de Poincaré Experimental do Pêndulo Duplo com energia 1.8 J ( $\theta_1$  e  $p\theta_2$ ).

Pode-se observar uma órbita quase periódica na figura e uma região abaixo na forma de um setor semi-circular proveniente da região inferior da figura.

### 6.5.2 Seções de Poincaré Pêndulo Duplo com massas e comprimentos iguais

#### Seção de Poincaré Teórica Pêndulo Duplo Ideal com massas e comprimentos iguais

As seções da figura 6.34 (a,b) apresentam as seções de Poincaré teóricas para o pêndulo duplo ideal com massas e comprimentos de mesmo valor. Pode-se observar semelhança entre os resultados teóricos obtidos aqui e para o caso ideal com massas diferentes. Pode-se perceber que as massas e os comprimentos influenciam diretamente na dinâmica do sistema, proporcionando resultados diferentes quando ambos são submetidos à mesma condição de energia, de forma que um entre em regime caótico mais cedo e o outro não. Aumenta-se a energia do sistema e com isto pode-se observar as figuras 6.35 (c,d) e 6.36 (e,f).

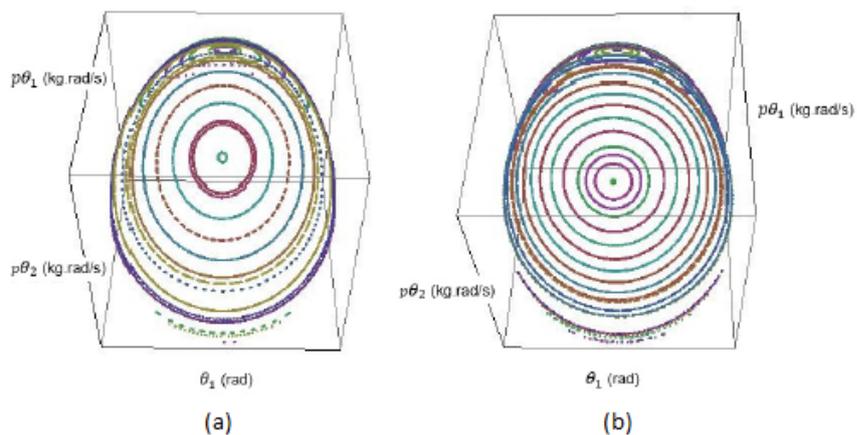


Figura 6.34: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 4.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 8.0$  J.

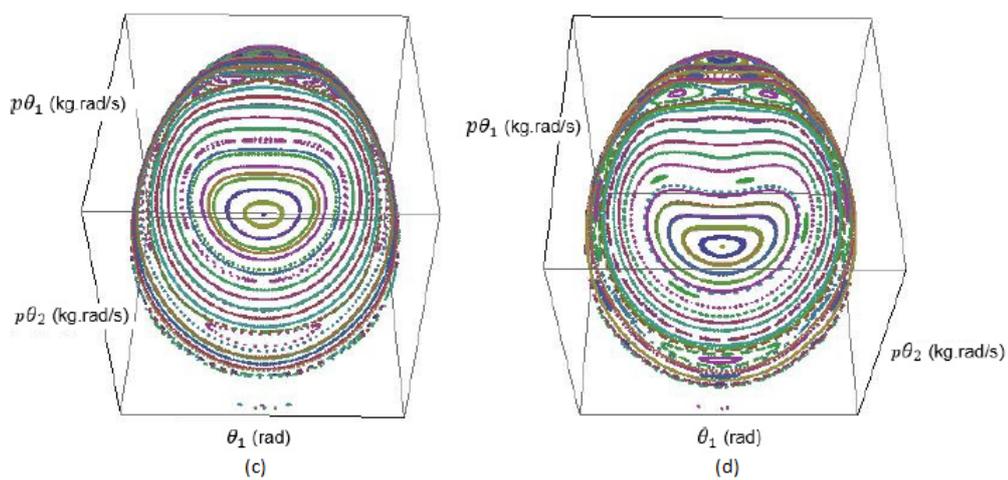


Figura 6.35: Esboço de c) Seção de Poincaré para  $E = 15.0$  J. d) Seção de Poincaré para  $E = 17.0$  J.

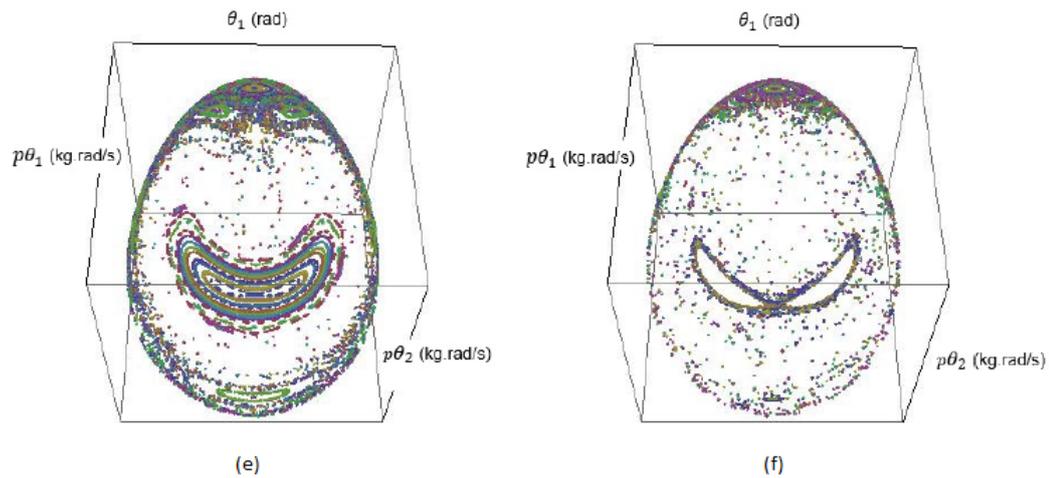


Figura 6.36: Esboço de e) Seção de Poincaré para  $E = 21.0$  J. f) Seção de Poincaré para  $E = 24.0$  J.

### Seção de Poincaré Pêndulo Duplo Dissipativo com massas e comprimentos iguais

As seções apresentadas na figura 6.41 (a,b) ilustram as seções de Poincaré para o caso dissipativo, pode-se observar novamente uma deformação nas seções como ocorria no caso para massas e comprimentos diferentes, porém possuímos uma certa limitação e não conseguimos obter seções para energias muito elevadas devido a configuração do sistema não permitir isso.

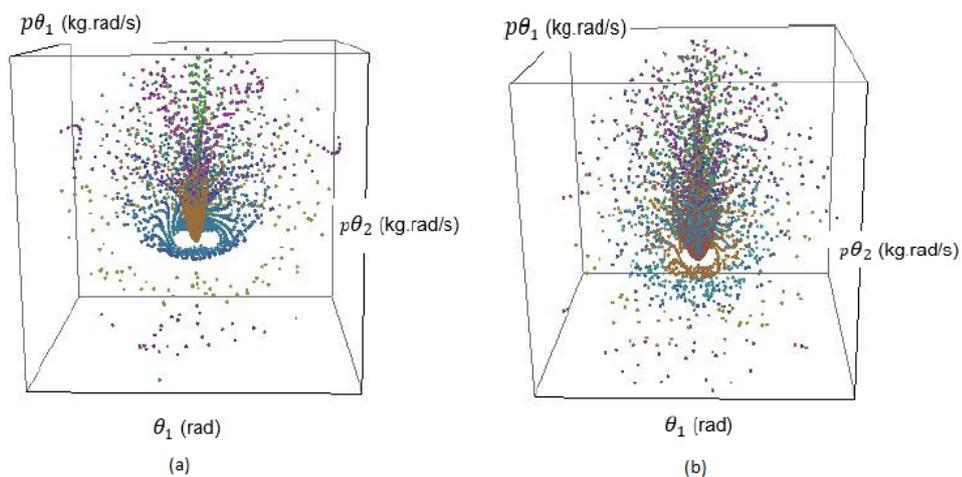


Figura 6.37: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 4.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 8.0$  J.

### Seção de Poincaré Pêndulo Duplo Forçado com massas e comprimentos iguais

Pode-se observar que as estruturas geradas com massas e comprimentos iguais diferem um pouco do caso com massas diferentes, apesar da deformação da seção possuir a mesma justificativa. Em  $E = 8J$  (figura 6.42) pode-se observar uma figura deformada e alongada onde aparentemente há caos no sistema.

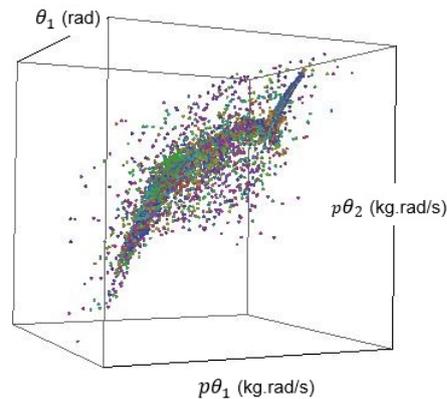


Figura 6.38: Esboço de Seção de Poincaré para  $E = 8.0 J$ .

### 6.5.3 Comparativo entre Pêndulo Duplo Ideal com massas diferentes e comprimentos iguais e Pêndulo Duplo com massas iguais e comprimentos diferentes

As figuras abaixo mostram um comparativo para mesma energia para duas situações diferentes variando-se os comprimentos e as massas ambos a mesma energia . Pode-se observar que a massa que o sistema possui bem como os comprimentos influenciam diretamente na dinâmica do sistema como mostrado na figura 6.39 (a,b), 6.40 (c,d) e 6.41 (e,f):

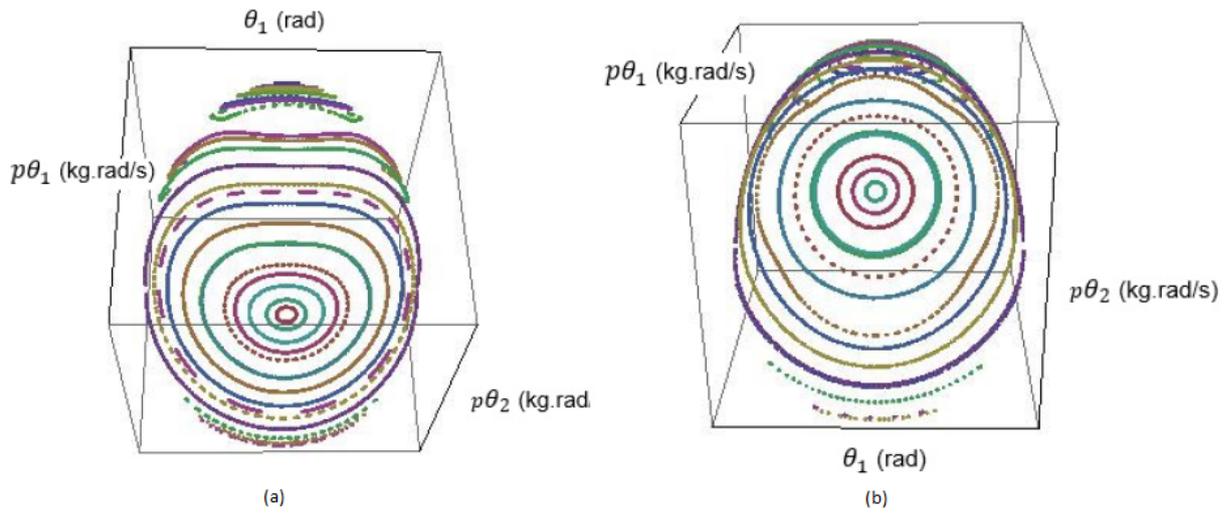


Figura 6.39: Esboço de a) Seção de Poincaré para  $E = 10.0$  J. b) Seção de Poincaré para  $E = 10.0$  J.

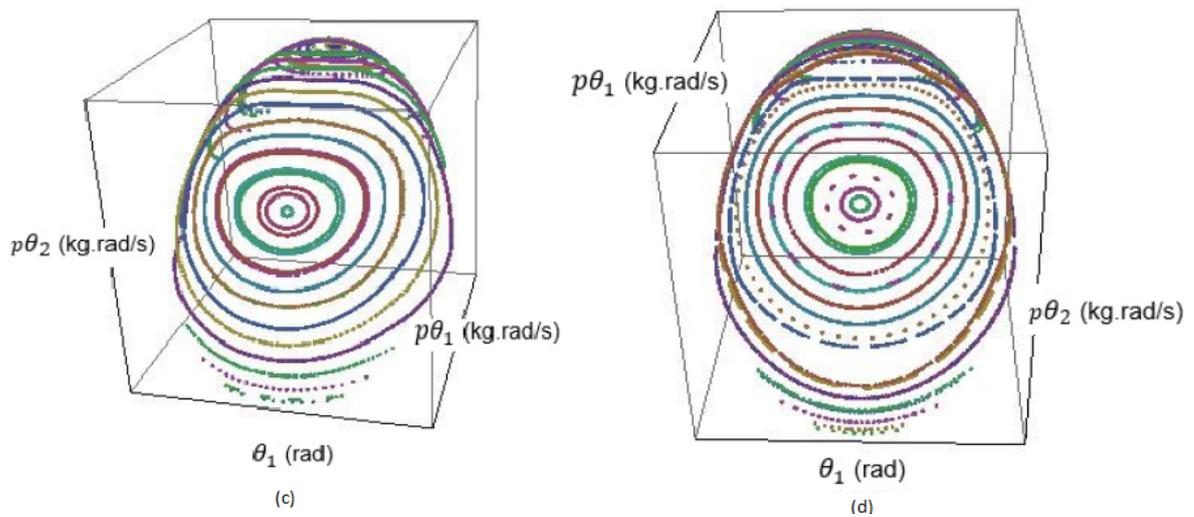


Figura 6.40: Esboço de c) Seção de Poincaré para  $E = 15.0$  J. d) Seção de Poincaré para  $E = 15.0$  J.

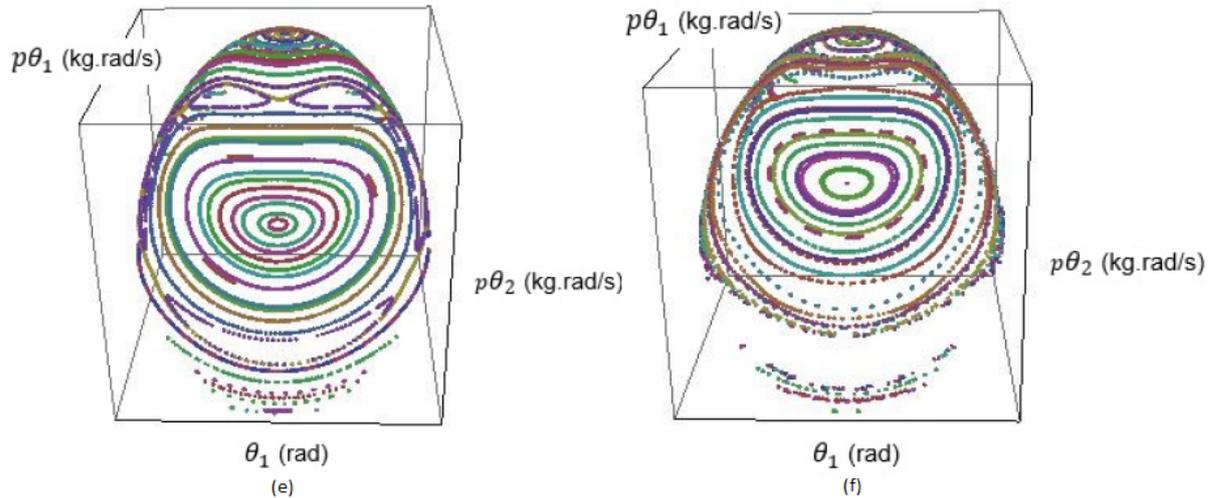


Figura 6.41: Esboço de e) Seção de Poincaré para  $E = 20.0$  J. f) Seção de Poincaré para  $E = 23.0$  J.

Pode-se observar nas figuras mostradas nesta seção que para a mesma energia as figuras apresentam estruturas diferentes. É interessante este comportamento e pôde-se observar em diversos testes que ao variar os parâmetros de massa e comprimento a estrutura modificava-se totalmente.

## 6.6 Expoentes de Lyapunov

### 6.6.1 Conjunto de dados experimentais sob a configuração modos normais fora de fase

A figura 6.42 apresenta a evolução temporal para os ângulos de  $m_1$  e de  $m_2$  para duas configurações próximas de modos normais fora de fase obtidas experimentalmente:

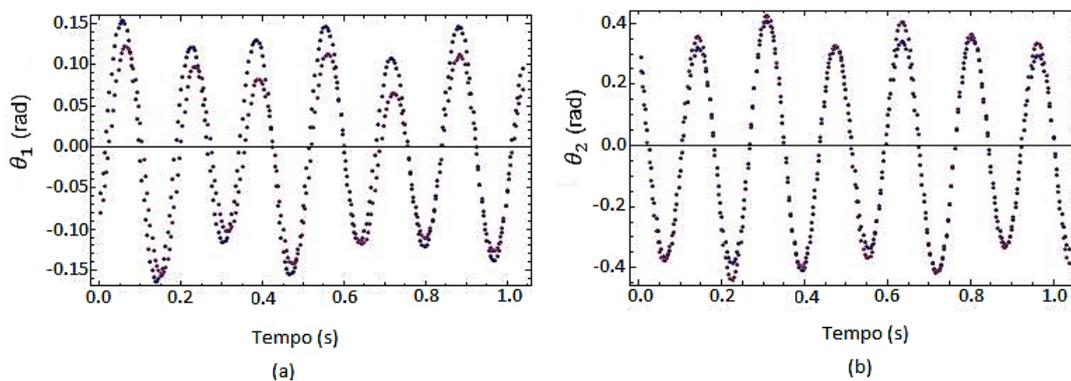


Figura 6.42: a) Evolução temporal referente a massa  $m_1$  . b) Evolução temporal referente a massa  $m_2$ .

Ao efetuar-se o cálculo do maior expoente local percebeu-se que este era negativo, indicando-se assim periodicidade do sistema, o que pode ser comprovado pela evolução do temporal dos ângulos mostrada na figura acima.

### 6.6.2 Conjunto de dados experimentais sob configuração braços do motor 90º graus

A figura 6.43 apresenta a evolução temporal para os ângulos de  $m_1$  e de  $m_2$  em duas configurações próximas de modos normais fora de fase obtidas experimentalmente:

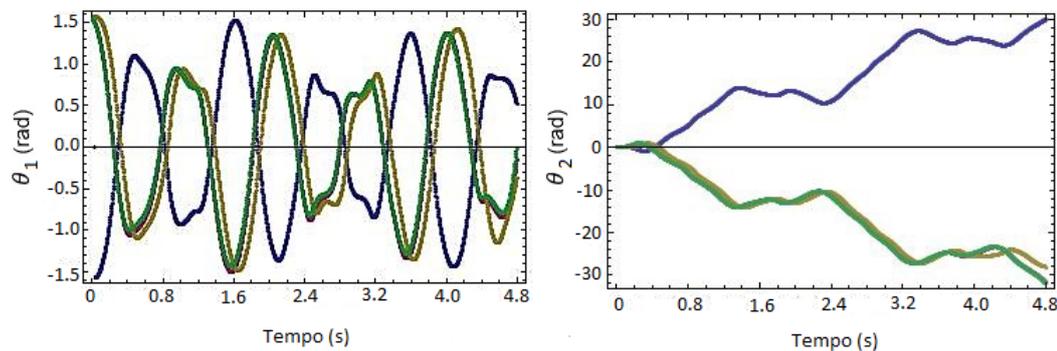


Figura 6.43: a) Evolução temporal referente a massa  $m_1$  . b) Evolução temporal referente a massa  $m_2$ .

Ao efetuar-se o cálculo do maior expoente de Lyapunov percebeu-se que este era positivo, indicando-se assim aperiodicidade do sistema, o que pode ser comprovado pela evolução do temporal dos ângulos mostrada na figura acima.

## Capítulo 7

# Conclusões e Perspectivas

Este trabalho teve por objetivo estudar os principais aspectos referentes a dinâmica não-linear do pêndulo duplo sob o viés experimental e de simulação computacional, estabelecendo um comparativo entre ambas as dinâmicas de modo que todas as configurações possíveis do sistema real fossem estudadas. Estudou-se o caso ideal onde não há ação de forças dissipativas ou externas do ponto de vista teórico utilizando-se da mecânica Lagrangeana e Hamiltoniana e também a aproximação do caso experimental (sem a ação de forças externas) para o ideal em intervalos de tempo curtos. Percebeu-se que a aproximação do caso experimental para o pêndulo duplo ideal teórico era válida, pois em intervalos de tempo de no máximo dez segundos a perda de energia sofrida pelo sistema não era tão expressiva num gráfico de evolução temporal, comportando-se assim como um pêndulo ideal. Os espaços de fase experimentais apresentados em projeções bidimensionais para a massa superior e inferior do sistema mostram a semelhança entre os resultados, indicando que o modelo teórico comporta-se bem próximo ao real.

Ao introduzir-se o motor acoplado ao sistema a perda de energia sofrida foi compensada por torques devidamente configurados de modo que a energia manteve-se constante durante todo o tempo de análise. Percebeu-se que este se comportou de forma satisfatória, proporcionando inclusive a obtenção de órbitas periódicas e de ciclos-limite devido a disposição dos sensores na plataforma de estudo. Efetuou-se o estudo dos espaços de fase e percebeu-se novamente semelhança entre os resultados teóricos e experimentais.

Efetuuou-se o estudo dos expoentes de Lyapunov e pôde-se ter mais uma evidência da dinâmica que ocorria no sistema analisando-se os sinais dos expoentes obtidos. As seções de Poincaré apresentaram uma visualização mais completa da dinâmica que ocorre no espaço quadrimensional do pêndulo duplo, possibilitando ver como as órbitas se comportam sem a presença de forças externas e a perturbação que estas provocam no sistema dissipativo, forçado e forçado dissipativo para massas iguais, diferentes, e alternando massas e comprimentos variáveis. Como uma análise experimental da seção de Poincaré foram efetuados testes para o pêndulo dissipativo forçado e conseguiu-se obter alguns pontos da seção que são bem similares a estruturas que aparecem nos resultados teóricos.

O estudo do pêndulo duplo é muito rico de análises e permite que muitos aspectos sejam abordados e muitas variações sejam feitas no sistema para novas análises serem possíveis. Como continuação deste trabalho, pretende-se explorar mais as seções de Poincaré experimentais de forma a obter-se mais informações reais acerca da dinâmica que ocorre no pêndulo duplo para diversas energias.

Apêndice I Cálculos do pêndulo duplo e justificativa sobre a aproximação do sistema para um pêndulo duplo ideal

Este apêndice tem por objetivo explicar ao leitor o uso de massa pontual nos cálculos do pêndulo duplo ao invés do uso de momentos de inércia, por intermédio de um experimento realizado o qual nos fornece embasamento para justificar que nossa aproximação é válida.

O experimento consiste em um pêndulo simples, o qual foi adaptado do experimento original do pêndulo duplo travando-se o braço superior e utilizando como pêndulo simples a haste inferior e seu disco (massa) correspondente. A figura 7.1 representa o desenho de um pêndulo simples:

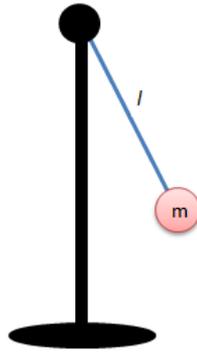


Figura 7.1: Ilustração do pêndulo simples.

Segundo Moyses Nussenzeig [12], o pêndulo simples consiste de uma massa  $m$  suspensa por um fio ou haste de comprimento  $l$  e massa desprezível, e seu período para pequenas oscilações pode ser calculado da seguinte forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (7.1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $l$  o comprimento da haste do pêndulo.

Com intuito de verificar se a aproximação realmente é válida foi realizado um teste em relação ao período de oscilação teórico e o experimental, para isto efetuou-se a filmagem de sete lançamentos do pêndulo simples a baixa amplitude e com o auxílio do software *Tracker* foi possível medir-se o instante em que o pêndulo iniciava uma oscilação e o instante exato em que este completava sua décima oscilação, devido a termos uma precisão de 240 *fps* na filmagem. A tabela 7.1 mostra os resultados obtidos para os sete testes realizados:

Início 10 oscilações (s)	Término 10 oscilações (s)	$\Delta t$ (s)
0,34167	8,97083	8,62917
0,79853	9,68333	8,88480
0,79217	9,66667	8,93500
0,30833	8,87500	8,56667
0,70833	9,29583	8,58750
0,44167	9,02500	8,58333
0,39583	9,05417	8,65834

Tabela 7.1: Tabela com informações temporais referentes a dez oscilações para o pêndulo simples.

Calculando-se os valores médios encontramos os valores mostrados na tabela 7.2:

Tempo médio inicial 10 oscilações (s)	Tempo médio final 10 oscilações (s)	$\Delta t$ médio (s)
0,05909	0,92244	0,86921

Tabela 7.2: Valores médios.

Para efetuar o cálculo teórico adotou-se como valor aproximado para a gravidade  $9.8 \text{ m/s}^2$  e como comprimento da haste  $0.16 \text{ m}$ , com isto obteve-se que o período de uma oscilação valia aproximadamente  $0,85152$  segundos.

É possível observar-se que tanto o valor teórico como o valor experimental são muito semelhantes (diferença de 2% do valor real), justificando-se assim o uso da massa pontual ao invés da utilização do momento de inércia nos cálculos aplicados ao pêndulo duplo (o pêndulo simples foi obtido impondo-se uma restrição de movimento do braço superior do pêndulo duplo, mas as aproximações nele efetuadas também podem ser aplicadas ao sistema total, no caso, ao pêndulo duplo).

## Apêndice II Erros Experimentais

Ao realizar uma análise qualitativa dos erros experimentais presentes no pêndulo duplo deve-se levar em consideração as grandezas a serem medidas bem como os erros dos instrumentos utilizados para esta análise. No caso do pêndulo duplo teremos erros associados as posições de mapeamento do software Tracker.

Ao colocarmos estes valores na fórmula dos momentos angulares para encontrar os espaços de fase experimentais pode-se perceber um ruído na dinâmica do sistema, a qual se apresenta algumas vezes um pouco distorcida quando comparada ao espaço de configurações. As fórmulas apresentadas a seguir para cálculo dos momentos angulares referentes as duas massas (os quais são utilizados nos esboços dos espaços de fase) apresentam termos que possuem erros de medida e de cálculo, como por exemplo as massas, os ângulos, as velocidades e os valores dos ângulos.

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (7.2)$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (7.3)$$

Nas fórmulas dos cálculos dos momentos temos as duas massas, bem como os comprimentos dos dois braços e os ângulos que também possuem erros de medida associados ao software de mapeamento Tracker, que será discutido adiante.

As velocidades angulares utilizadas nos gráficos dos espaços de configurações foram obtidas utilizando-se ângulos que foram calculados diretamente das coordenadas cartesianas do sistema utilizando-se de relações trigonométricas pelo tempo de medida, não utilizando de fórmulas mais complexas como a dos momentos que envolvem outras grandezas que fazem com que o erro do sistema se propague, por isso o ruído nestes casos aparenta ser menor.

Para realizar as filmagens no software Tracker como estuda-se um sistema que se desloca rapidamente no tempo optou-se pela filmagem a 240 fps pois assim teríamos mais quadros para serem analisados num intervalo menor de tempo obtendo-se informações mais precisas da posição da massa ao longo da trajetória, porém ao fazer isto perde-se um pouco das qualidades das filmagens, estas se apresentam com bastante ruído caso não haja uma grande presença de luz. Devido a massa 2 ser muito rápida em relação a massa 1 e o Tracker apresentar dificuldades em acompanhar esta trajetória necessitou-se fazer um contraste com uma circunferência amarela no centro desta massa para possibilitar que o mapeamento fosse realizado mais facilmente. Esta circunferência possuía 1 cm de diâmetro e isto proporcionava com que o Tracker conseguisse acompanhar a trajetória sem perder o padrão de mapeamento da massa muitas vezes como ocorria nos outros testes sem este artifício. Porém, como esta circunferência necessitava de 1 cm de diâmetro para que o Tracker conseguisse mapear isto aumentava o erro de marcação das coordenadas x e y para esta massa, visto que qualquer região dentro desta área poderia ser mapeada e não necessariamente o centro da trajetória.

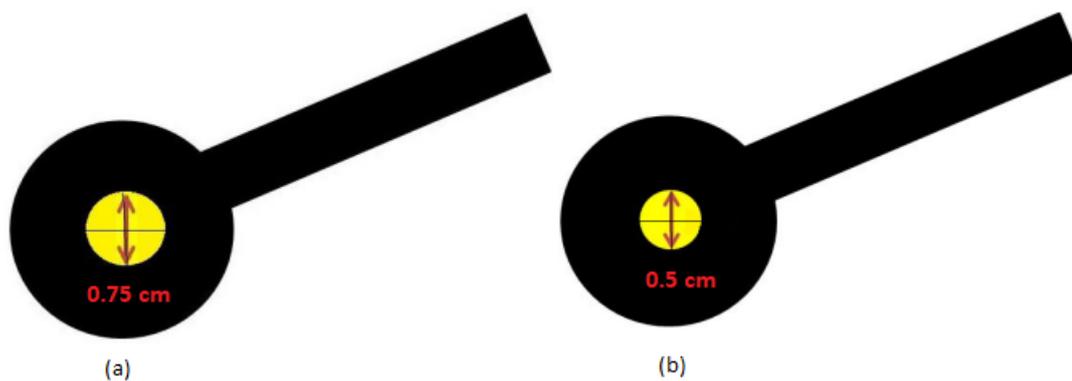


Figura 7.2: a) Massa 1 com área de marcação possível para o software Tracker. b) Massa 2 com área de marcação possível para o software Tracker.

Porém apesar das limitações apresentadas pelo software Tracker bem como os erros experimentais que ocorrem no sistema, percebeu-se que isto não prejudicou a análise do sistema visto os gráficos de energia obtidos são constantes ao longo do tempo, com pequenas oscilações justificáveis por estes motivos.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] FERRARA, N.; DO PRADO, C. C. **Caos uma introdução**. EDITORA EDGARD BLUCHER: 1994.
- [2] DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A.; PEREIRA-PINTO, F.H.I. Chaos and transient chaos in a experimental nonlinear pendulum. **Journal of Sound and Vibration**, v. 294, p. 585-595, 2006.
- [3] DRAZIN, P. G. **Nonlinear systems**. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS: 1992.
- [4] SAVI, Marcelo. **Dinâmica Não-Linear e Caos**. 1. ed. Rio de Janeiro: e-papers, 2006.
- [5] STROGATZ, S.A. **Nonlinear dynamics and chaos (with applications to physics, biology, chemistry, and engineering)**. PERSEUS BOOKS, 1994.
- [6] LEVIEN, R.B.; TAN, S.M. Double Pendulum: An experiment in chaos. **American Journal of Physics** 61, 1038 (1993); doi: 10.1119/1.17335.
- [7] SYMON, K. R. **Mecânica**. EDITORA CAMPUS: 1996.
- [8] MONTEIRO, L. H. A.. **Sistemas Dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [9] PERCIVAL, I.C.. Chaos in hamiltonian systems. **PROC. R. SOC. LOND. A.** , v. 413, p. 131-143, 1987.
- [10] DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. PERSEUS BOOKS PUBLISHING, 1992.
- [11] MONERAT, G.A. et. al.. Explorando sistemas hamiltonianos: Estudo analítico . **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 2, p. 177 - 189, (2006).
- [12] NUSSENZVEIG, M. **Curso de física básica - fluidos, oscilações e calor**. EDITORA EDGARD BLUCHER LTDA, 1983, p.49.